BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN

VON

GUSTAF ENESTRÖM

IN STOCKHOLM.

DRITTE FOLGE. ERSTER BAND.

MIT DEM BILDNIS SOPHUS LIES IN HELIOGRAVURE ALS TITELBILD,
DEN IN TEXT GEDRUCKTEN BILDNISSEN VON K. I. GERHARDT, F. ROSENBERGER
UND E. WAPPLER, SOWIE 93 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE

DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN

VON

GUSTAF ENESTRÖM

IN STOCKHOLM.

DRITTE FOLGE. ERSTER BAND.

MIT DEM BILDNIS SOPHUS LIES IN HELIOGRAVÜRE ALS TITELBILD,
DEN IM TEXT GEDRUCKTEN BILDNISSEN VON K. I. GERHARDT, F. ROSENBERGER
UND E. WAPPLER, SOWIE [illegible] TEXTFIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

Inhaltsverzeichnis.

Autoren-Register.

Bosscha, 36.
Boyer, 62.
Braunmühl, 3, 33.
Curtze, 3, 23, 28, 40, 55.
Duhem, 13.
Eneström, 1—5, 7, 9, 21, 22, 25, 26, 30, 32, 39, 53, 57, 61, 64.
Engel, 50.
Gerland, 38.
Graf, 60.
Günther, 52.
Gutzmer, 54, 65, 66.
Hagen, 44.
Heinrich, 35.
Hultsch, 10.
Korteweg, 37.
Kucharzewski, 8, 31.
Kürschák, 11.
Kutta, 6.
Laisant, 59.
Lampe, 47, 63.
Loria, 34.
Macfarlane, 71.
Mansion, 56.
Müller, 51.
Pringsheim, 42.
Schmidt, 12, 14, 15.
Stäckel, 41, 45, 46.
Steinschneider, 24.
Suter, 3, 18.
Tannery, 3, 19, 20.
Timtchenko, 3, 29.
Valentin, 43, 58.
Vaux, 17.
Vivanti, 49.
Wertheim, 3, 27.
Whittaker, 69, 70.
Wölffing, 48.
Zeuthen, 3, 16.

Sach-Register.

Abraham, 26.
Abraham bar Chijja (Savasorda), 23.
Aktuelle Fragen, 1, 56—72, 74.
Albattani, 18.
Algebra, 25—27.
Anfragen, 21, 25, 26, 32, 40, 43, 44, 46.
Antworten, 45.
de Aratoribus, 32.
Archimedes, 11—13, 17.
Astronomie, 18, 23.
Beman, 5.
Bernoulli, 39.
Bibliographie, 49, 50, 58—61.
Biographien, 47, 50—55.
Boëtius, 19.
Boyer, 4.
Braunmühl, 6.
Brocard, 7.
Bubnov, 20.
Cantor, 2, 3, 9, 55.
Clerval, 22.
Diagonalzahlen, 10.
Diametralzahlen, 10.
Differentialrechnung, 42, 44.
Ephodikón, 12.
Ernennungen, 74.
Euklides, 28.
Euler, 44.
Ferrari, 43.
Filon, 17.
Fink, 5.
Formelsprache, 33.
Funktionentheorie, 41, 42, 44.
Gascó, 54.
Gauss, 46.
Geometrie, 7, 11, 15, 19, 29, 37, 40, 46, 48.
Gerbert, 20.
Gerhardt, 51.
Guilelmus Anglicus (Marsiliensis), 23.
Heron, 14, 15, 17.
Huygens, 36, 37.
Hydrostatisches Paradoxon, 13.
Imaginäre Gröfsen, 41.
Integralrechnung, 41, 44, 45.
Interpolation, 35.
Instrumente, 8.
Irrationale Gröfsen, 25.
Johannes de Lineriis, 23.
Johannes de Muris, 23.
Jordanus Nemorarius, 27.
Kettenlinie, 37.
Koordinaten, 29, 48.
Kreismessung, 11.
Kurven, 7, 34, 37.
Laussedat, 8.
Legendresche Transformation, 44, 45.
Leibniz, 38.
Levi ben Gerson, 23.
Lie, 50.
Litterarische Notizen, 74.
Logarithmische Kurve, 34.
Maschinen, 17, 38.
Mathematik im Allgemeinen, 2—5.
Mathematiker-Versammlungen, 62—63, 65—72.
Mathematische Bibliographie, 58—61.
Mathematische Encyklopädie, 74.
Mathematisches Wörterbuch, 57, 74.
Mathematisch-historische Forschung, 1.
Mathematisch-historischer Unterricht, 56.
Mechanische Quadratur, 35.
Mengenlehre, 49.
Müller, 57.
Nallino, 18.
Naturwissenschaftliche Bibliographie, 60.
Neuerschienene Schriften, 73.
Niveau, 31.
Optik, 28.
Oresme, 29.
Parallelen-Lehre, 46.
Physik, 13, 28, 38.
Plato von Tivoli, 23.
Preisaufgaben, 74.
Preisschriften, 74.
Programm-Artikel, 1.
Pythagoreische Reihen, 10.
Radius, 40.
Rebière, 30.
Recensionen, 2, 4—9, 18, 20, 22, 30, 57.
Reihen, 10, 42.
Répertoire bibliographique, 59.
Robertus Castrensis, 24.
Robertus Linconiensis, 28.
Römische Feldmesser, 14, 19.
Rosenberger, 52.
Scherzaufgaben, 21.
Seitenzahlen, 10.
Simpsonsche Regel, 35.
Smith, 5.
Steiner, 47.
Strahlenbrechung, 28.
Tannery, 22.
Taylorscher Lehrsatz, 42.
Technik, 17, 31, 38.
Todesfälle, 74.
Topographie, 8, 31.
Torricelli, 34.
Trigonometrie, 6, 15, 16, 23, 33.
Vielecksformeln, 15.
Vitruvius, 14.
Wappler, 53.
Wasserwage, 31.
Wissenschaftliche Chronik, 74.
Zahlentheorie, 10, 21.
Zarkali, 23.
Zeichensprache, 33.

Allgemeines über Geschichte der Mathematik.

Seite.

1. Ziele und Aufgaben eines Organs für mathematisch-historische Forschung und für aktuelle Fragen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. Von *G. Eneström* . . . . . 1—7
2. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik $II^2:2$, $III^2:1$ (1899—1900). Recension von *G. Eneström* . . . . . 276—278, 518—519
3. Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik". Von *A. von Braunmühl, M. Curtze, G. Eneström, H. Suter, P. Tannery, I. Timtchenko, G. Wertheim, H. G. Zeuthen* . . . . . 265—273, 499—514
4. Boyer, Histoire des mathématiques (1900). Recension von *G. Eneström* . . . . . 278—280
5. Fink, A brief history of mathematics, transl. by Beman and Smith. Recension von *G. Eneström* . . . . . 519—521
6. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. I (1900). Recension von *W. M. Kutta* . . . . . 280—284
7. Brocard, Notes de bibliographie des courbes géométriques. II (1899). Recension von *G. Eneström* 287
8. Laussedat, Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques. I (1898). Recension von *F. Kucharzewski* . . . . . 521—524
9. Festschrift zum siebzigsten Geburtstage Moritz Cantors (1899). Recension von *G. Eneström*. 288

Geschichte des Altertums.

10. Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen. Von *F. Hultsch* 8—12
11. Moderne Überschreibung der „Kýklu métresis". Von *J. Kürschák* . . . . 514—515
12. Archimedes' Ephodikón. Von *W. Schmidt* . . . . . 13—14
13. Archimède connaissait-il le paradoxe hydrostatique? Par *P. Duhem* . 15—19
14. Haben Vitruv und die römischen Feldmesser aus Heron geschöpft? Von *W. Schmidt* . . . . . 297—318
15. Sind die Heronischen Vielecksformeln trigonometrisch? Von *W. Schmidt* 319—320
16. Note sur la trigonométrie de l'antiquité. Par *H. G. Zeuthen* . . . . . 20—27

Geschichte des Mittelalters.

17. Notice sur un manuscrit arabe traitant de machines attribuées à Héron, Philon et Archimède. Par *C. de Vaux* . . . . . 28—38
18. Albattani, Opus astronomicum, editum a C. A. Nallino. III (1899). Recension von *H. Suter* . . . . . 285—286
19. Notes sur la Pseudo-Géométrie de Boèce. Par *P. Tannery* . . . . . 39—50
20. Gerbert, Opera mathematica, edidit N. Bubnov (1899). Recension von *P. Tannery* . . 286—287
21. Sur un problème plaisant appartenant à la théorie des nombres. [Anfrage 79.] Par *G. Eneström* 274
22. Tannery et Clerval, Une correspondance d'écolâtres du XI^e siècle (1900). Recension von *G. Eneström* 524
23. Urkunden zur Geschichte der Trigonometrie im christlichen Mittelalter, gesammelt und erläutert. 1. Aus dem „Liber embadorum" des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli. 2. Aus den „Canones sive regule super tabulas Toletanas" des Al-Zarkali. 3. Aus den „Scripta Marsiliensis super Canones Azarchelis". 4. Anonyme Abhandlung über Trigonometrie aus dem Ende des XIII. Jahrhunderts. 5. Aus „Leo de Balneolis Israhelita de sinibus, chordis et arcubus, item instrumento revelatore secretorum". 6. Anonyme Abhandlung „De tribus notis". 7. Die „Canones Tabularum primi mobilis" des Johannes de Lineriis. 8. Die Sinusrechnung des Johannes de Muris. Von *M. Curtze* . . . . . 321—416

Seite.
24. Robertus Castrensis. Von *M. Steinschneider* . . . 273—274
25. Sur l'origine du terme „surdus" (= incommensurable). [Anfrage 85.] Par *G. Eneström* . . . 516
26. Sur le „Liber augmenti et diminutionis" compilé par Abraham. [Anfrage 80.] Par *G. Eneström* . . . 274—275
27. Über die Lösung einiger Aufgaben im „Tractatus de numeris datis" des Jordanus Nemorarius. Von *G. Wertheim* . . . 417—420
28. Zwei Beiträge zur Geschichte der Physik im Mittelalter. 1. Das Buch Euclids „de gravi et levi". 2. Der „Tractatus de fractionibus et reflexionibus radiorum" des Robertus Linconiensis. Von *M. Curtze* . . . 51—59
29. Sur un point du „Tractatus de latitudinibus formarum" de Nicolas Oresme. Par *I. Timtchenko* . . . 515—516

Geschichte der neueren Zeit.

30. **Rebière**, Pages choisies des savants modernes, extraits de leurs œuvres (1900). Recension von *G. Eneström* . . . 287—288
31. Sur quelques niveaux du seizième siècle. Par *F. Kucharzewski* . . . 60—63
32. Gabriel de Aratoribus (1539). [Anfrage 86.] Von *G. Eneström* . . . 516
33. Die Entwickelung der Zeichen und Formelsprache in der Trigonometrie. Von *A. von Braunmühl* . . . 64—74
34. Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logaritmica. Di *G. Loria* . . . 75—89
35. Notiz zur Geschichte der Simpsonschen Regel. Von *G. Heinrich* . . . 90—92
36. Les „Œuvres complètes de Christiaan Huygens". Par *J. Bosscha* . . . 93—96
37. La solution de Christiaan Huygens du problème de la chaînette. Par *D. J. Korteweg* . . . 97—108
38. Über Leibnizens Thätigkeit auf physikalischem und technischem Gebiete. Von *E. Gerland* . . . 421—432
39. Sur une brochure publiée en 1700 par Jacques Bernoulli. Par *G. Eneström*. . . 274
40. Über den Ursprung der Benennung „Radius" für Halbmesser. [Anfrage 87.] Von *M. Curtze* . . . 516
41. Integration durch imaginäres Gebiet. Ein Beitrag zur Geschichte der Funktionentheorie. Von *P. Stäckel* . . . 109—128
42. Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes. Von *A. Pringsheim* . . . 433—479
43. Filippo Ferrari (1761). [Anfrage 81.] Von *G. Valentin* . . . 275
44. On the „formula exponentialis replicata" of Euler. [Anfrage 82.] — On the so-called „Legendres transformation" [Anfrage 84.] — On the technical terms „Differential Quotient", „Definite Integral" [Anfrage 88.] By *J. G. Hagen* . . . 275, 517
45. Über die sogenannte Legendresche Transformation. [Antwort auf die Anfrage 84.] Von *P. Stäckel* . . . 517
46. Eine Zeitungsnotiz über Gauss' Stellung zur Parallelen-Lehre. [Anfrage 83.] Von *P. Stäckel* . . . 275
47. Zur Biographie von Jacob Steiner. Von *E. Lampe* . . . 129—141
48. Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten. Von *E. Wölffing* . . . 142—159
49. Lista bibliografica della teoria degli aggregati 1893—1899. Di *G. Vivanti* 160—165
50. Sophus Lie. Ausführliches Verzeichnis seiner Schriften, zusammengestellt von *F. Engel*. Mit Bildnis in Heliogravüre als Titelbild . . . 166—204
51. Carl Immanuel Gerhardt. Von *F. Müller*. Mit Bildnis . . . 205—216
52. Ferdinand Rosenberger. Von *S. Günther*. Mit Bildnis . . . 217—221

Seite.
53. Herman Emil Wappler. Von *G. Eneström.* Mit Bildnis 225
54. Luis Gonzaga Gascó. Von *A. Gutzmer* . . . . 225—226
55. Zum siebenzigsten Geburtstage Moritz Cantors. Von *M. Curtze* . . . . . 227—231

Aktuelle Fragen.

56. Programme du cours d'histoire des mathématiques de l'université de Gand. Par *P. Mansion* . . . . 232—236
57. Müller, Vocabulaire mathématique (1900). Recension von *G. Eneström* . . . . . . 524—525
58. Die Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie. Von *G. Valentin* . . . . 237—245
59. Sur l'état d'avancement du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Par *C. A. Laisant* . . . . 246—249
60. Über die geplante internationale naturwissenschaftliche Bibliographie. Von *J. H. Graf* . . . . 250—257
61. Über die von der „Royal Society" geplante mathematische Jahresbibliographie. Von *G. Eneström* . . . . 480—484
62. Le congrès international des mathématiciens à Paris (6—12 août 1900). Par *J. Boyer* . . . . 264—265
63. Der zweite internationale Mathematiker-Kongreſs zu Paris vom 6. bis 11. August 1900. Von *E. Lampe* . . . . 485—494
64. Le congrès d'histoire des sciences à Paris (23—28 juillet 1900). Par *G. Eneström* 265
65. Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu München, 17.—23. September 1899. Von *A. Gutzmer* . . . . 258—261
66. Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Aachen, 16.—23. September 1900. Von *A. Gutzmer* . . . . 495—496
67. Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences à Boulogne-sur-Mer, 14—21 septembre 1899 261
68. Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences à Paris, 2—9 août 1900 496
69. Mathematics at the meeting of the British Association at Dover, 1899. By *E. T. Whittaker* . . . . 262—263
70. Mathematics at the British Association meeting, 1900. By *E. T. Whittaker.* 496—498
71. Meeting of the American Association for the advancement of science at Columbus, 1899. By *A. Macfarlane* . . . . 263—264
72. Mathematics at the meeting of the American association and the American mathematical society at New York, 1900 498
(Siehe auch **1, 74.**)

---

73. Neuerschienene Schriften . . . . 289—292, 526—532
Autoren-Register. — Zeitschriften. Allgemeines. — Geschichte des Altertums. — Geschichte des Mittelalters. — Geschichte der neueren Zeit. — Nekrologe. — Aktuelle Fragen.

---

74. Wissenschaftliche Chronik . . . . 293—296, 533—536
Ernennungen. — Todesfälle. — Demnächst erscheinende Werke. — Mathematisch-historische und litterarische Arbeiten in Vorbereitung. — Mathematisch-encyklopädische Arbeiten. — Systematische Darstellungen mit historischen Bemerkungen. — Gesammelte Werke kürzlich verstorbener Mathematiker. — Gekrönte Preisschriften. — Preisfragen gelehrter Gesellschaften. — Vermischtes.

Namenregister . . . . 537—549

Ziele und Aufgaben eines Organs für mathematisch-historische Forschung und für aktuelle Fragen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften.

Von

Gustaf Eneström in Stockholm.

Es ist eine längst beobachtete und bemerkte Thatsache, dafs, sobald die Forschungen auf einem wissenschaftlichen Gebiete eine gewisse Extensität erreicht haben, das Bedürfnis nach besonderen Organen für diese Forschungen sich fühlbar macht, und dafs es dann auch früher oder später durch Fachzeitschriften befriedigt wird. Um so gröfser mufs das fragliche Bedürfnis sein, wenn es sich um eine Art von Forschung handelt, welche, wie die mathematisch-historische, umfangreiche Einsichten in verschiedene Wissenschaften (Mathematik, Litteraturgeschichte, Philologie) erfordert, und so hat sich in der That das Bedürfnis nach Fachzeitschriften für die mathematisch-historische Wissenschaft schon seit Jahrzehnten eingestellt.

Als die erste derselben dürfte das kleine Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques (eigentlich ein Anhang zu den Nouvelles annales de mathématiques) anzusehen sein, das O. Terquem vom Jahre 1855 bis zu seinem Tode (1862) herausgab. Etwa gleichzeitig mit diesem Bulletin wurde die Zeitschrift für Mathematik und Physik begründet, die, obgleich sie nicht vom Anfang an ein mathematisch-historisches Journal war, schon in ihren ersten Jahrgängen, und besonders seitdem Herr Moritz Cantor (1859) Mitredakteur derselben geworden war, viele mathematisch-historische Abhandlungen enthielt, welche von 1875 an in einer besonderen „Historisch-litterarischen Abteilung“ Aufnahme fanden. Aufserdem ist seit dem Jahre 1877 eine ziemlich grofse Anzahl von historischen Abhandlungen nicht in der Zeitschrift selbst, sondern in „Supplementen“ veröffentlicht, welche auch selbständig unter dem Titel: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik (9 Hefte 1877—1899) erschienen sind.

Ein ganz selbständiges und grofs angelegtes Organ erhielt endlich die Geschichte der Mathematik im Jahre 1868 durch das Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche des Fürsten BALDASSARRE BONCOMPAGNI, von welcher Zeitschrift zwanzig starke Bände publiziert wurden. Schon 1879 war es BONCOMPAGNIS Absicht, das Bullettino eingehen zu lassen, und für diesen Fall war eine neue Zeitschrift für Geschichte der Mathematik geplant, aber BONCOMPAGNI entschloſs sich nach längerem Zögern sein Unternehmen noch einige Jahre fortzusetzen, und als es endlich mit dem Jahrgange 1887 definitiv eingestellt wurde, hatte ich schon die Bibliotheca Mathematica, deren drei erste Jahrgänge (1884—1886) hauptsächlich Verzeichnisse neuerschienener mathematischer Schriften enthalten hatten, in eine Fachzeitschrift für Geschichte der Mathematik verwandelt; von dieser „neuen Folge“ der Bibliotheca Mathematica sind dreizehn Jahrgänge (1887—1899) erschienen.

In den letzten Jahren haben wir noch eine mathematisch-historische Zeitschrift bekommen, nämlich das Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche des Herrn GINO LORIA, welches 1897 als Anhang an das Giornale di matematiche, vom Jahre 1898 an als selbständige Zeitschrift herausgegeben worden ist.

Der Vollständigkeit halber soll noch erwähnt werden, daſs das im Jahre 1868 begründete Bulletin des sciences mathématiques eine groſse Anzahl von wertvollen historischen Aufsätzen enthält, und daſs Herr VICTOR BOBYNIN seit 1885 in Moskwa eine russische Zeitschrift (Физико-математическія науки) herausgiebt, die hauptsächlich mathematisch-historischen Inhalts ist, und fast ausschlieſslich Aufsätze des Herausgebers bringt.

Aus der soeben mitgeteilten Übersicht geht hervor, daſs es bisher an mathematisch-historischen Zeitschriften nicht gefehlt hat, und daſs wir während der letzten Jahre sogar drei oder vier solche gehabt haben, aber dennoch kann behauptet werden, daſs das Bedürfnis eines wirklichen Organs der mathematisch-historischen Forschung dadurch nicht ganz befriedigt worden ist. Die Historisch-litterarische Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik ist buchhändlerisch keine selbständige Publikation, und sie ist auch nicht ausschlieſslich mathematisch-historisch, sondern ihr Zweck ist ebenso sehr eine mathematische Litteraturzeitung zu sein; die letzte Bemerkung gilt auch hinsichtlich des Bollettino des Herrn LORIA. Die Bibliotheca Mathematica ist zwar ausschlieſslich der Geschichte der Mathematik gewidmet gewesen, aber ihr Umfang war bisher auf acht Druckbogen pro Jahr beschränkt, und da sie dem Programme nach sowohl Originalaufsätze als Rezensionen, Schriftverzeichnisse und Anfragen mit Antworten enthalten muſste, so konnten längere Abhandlungen darin nicht veröffentlicht werden und Beiträge zur Geschichte der angewandten Mathematik nur ausnahmsweise

Platz finden; auch für die Rezensionen war der Raum so beschränkt, dafs in jedem Hefte nur ein paar Schriften besprochen werden konnten. Endlich kann mit Bezug auf die Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik bemerkt werden, dafs sie keine eigentliche Zeitschrift und schon aus diesem Grunde weniger geeignet sind, als Organ für die mathematisch-historische Forschung zu wirken, sofern man von einem solchen etwas mehr fordert, als dafs es mathematisch-historische Abhandlungen sammeln und zum Drucke befördern soll.

Die Übelstände, die das Fehlen an einem besonderen, dem Bedürfnis angepafsten Organ für die mathematisch-historische Forschung mit sich geführt hat, sind für die Fachmänner um so fühlbarer geworden, je mehr deren Anzahl herangewachsen ist, und von seiten meiner Kollegen ist an mich oft die Aufforderung ergangen, durch Erweiterung des Umfanges der Bibliotheca Mathematica ein solches Organ herzustellen. Da auch ich selbst seit längerer Zeit eine solche Erweiterung als notwendig erachtete, so war nur die Art und der Zeitpunkt derselben noch festzustellen. Jetzt haben diese bisher schwebenden Fragen ihre Lösung gefunden, und zwar durch ein Anerbieten von seiten der Teubnerschen Verlagsbuchhandlung, welche sich bereit erklärte, den Verlag der Zeitschrift zu übernehmen, und mir dabei eine wesentliche Erweiterung des Umfanges gestattete, sodafs jährlich etwa 35 Druckbogen herausgegeben werden können.

Vom Jahre 1900 an wird also die Bibliotheca Mathematica im stande sein, viel kräftiger als früher als Organ für die mathematisch-historische Forschung zu wirken, und ihr Zweck soll dabei in erster Linie sein, neue Untersuchungen zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie anzuregen und zu veröffentlichen. Was zunächst die Geschichte der reinen Mathematik betrifft, so haben wir ja schon eine vorzügliche Darstellung derselben in den CANTORschen *Vorlesungen*, und da diese drei starke Bände umfassen, könnte es scheinen, als ob auf diesem Gebiete verhältnismäfsig wenig noch zu thun wäre. Aber in Wirklichkeit verhält es sich ganz anders, und es ist gerade ein besonderes Verdienst dieser *Vorlesungen* die Aufmerksamkeit darauf gelenkt zu haben, wie viele Lücken noch auszufüllen und wie viele eingehende Untersuchungen folglich noch nötig sind. Ganz besonders gilt diese Bemerkung in Bezug auf das Mittelalter, kaum weniger für die neuere Zeit bis zum Jahre 1758, mit welchem die *Vorlesungen* abbrechen; für die letzte Hälfte des 18. Jahrhunderts und das ganze 19. Jahrhundert besitzen wir noch gar keine befriedigende Gesamtdarstellung und nur eine ziemlich kleine Anzahl von Einzeldarstellungen, die übrigens nicht nach demselben Plan bearbeitet worden sind.

Diese Umstände sind um so mehr hervorzuheben, als die Geschichte der Mathematik in der letzten Zeit eine ganz andere Bedeutung als früher bekommen hat. Als ich vor etwa dreifsig Jahren anfing, mich mit mathematisch-historischen Forschungen zu beschäftigen, waren die meisten Mathematiker, mit denen ich in Berührung kam, der Ansicht, dafs eingehende Untersuchungen auf diesem Gebiete eigentlich nur unnütze Zeitverschwendung sei, sodafs eine solche Arbeit nicht als verdienstlich, sondern eher als verwerflich erachtet werden müsse[1]); ich habe hinreichenden Anlafs anzunehmen, dafs die meisten übrigen Mathematiker damals derselben Meinung waren. Jetzt aber dürfte eine solche Auffassung eher als eine Kuriosität betrachtet werden, und die meisten Fachgenossen sind wohl darüber einig, dafs die Geschichte der Mathematik nicht nur an und für sich von Belang ist, sondern auch für das Studium der Mathematik grofsen pädagogischen Wert hat, und dafs die Einsicht darin sogar für die Fortbildung der Wissenschaft nicht selten von Nutzen sein kann.[2])

Darum ist es auch mehr und mehr gebräuchlich geworden, theoretischen Abhandlungen historische Einleitungen voranzustellen und in systematische Darstellungen historische Notizen einzuflechten; so sind z. B. in den schon erschienenen Heften der neuen *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* der Herren H. Burkhardt und W. Fr. Meyer und des *Formulaire de mathématiques* des Herrn G. Peano nicht nur die historischen Bemerkungen sehr zahlreich vertreten, sondern auch zum Teil Resultate selbständiger historischer Forschungen enthalten.

Es giebt noch einen anderen Umstand, der deutlich zeigt, welche Bedeutung die Geschichte der Mathematik in den letzten Jahren erreicht hat, nämlich die grofse Anzahl von Kompendien der Geschichte der Mathematik, die herausgegeben worden und zum Teil in neuen Auflagen erschienen sind. Während vor 30 Jahren die wenigen vorhandenen Bücher

---

1) Diese Ansicht wurde gewöhnlich auf folgende Weise begründet: Hat eine ältere mathematische Arbeit wirklich bleibende Errungenschaften aufzuweisen, so sind diese gewifs in den neueren systematischen Darstellungen und zwar in verbesserter Form enthalten, und das Studium der älteren Arbeit ist also unnötig; repräsentiert dagegen diese Arbeit einen schon überwundenen Standpunkt, so ist ihr Studium unnütz oder sogar schädlich.

2) „Die Entwicklung einer Wissenschaft gleicht einer krummen Linie, deren „Gesetz nicht bekannt ist, und die man darum auch nicht genau konstruieren kann. „Je mehr man aber Punkte derselben kennen lernt, mit desto gröfserer Genauigkeit „wird es auch möglich sein, ihre Fortsetzung nach rückwärts und vorwärts zu erraten „und die Richtung ihres Laufes bis auf einige Entfernung hin anzugeben." F. Rosenberger, *Die Geschichte der exakten Wissenschaften und der Nutzen ihres Studiums;* Abh. zur Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, 377—378.

dieser Art (von Bossut, Poppe, Arneth) meistenteils schon veraltet waren, haben wir seit 1870 solche Arbeiten von Suter (1871—1873), Hankel (1874; unvollendet), Hoefer (1874; 4. Aufl. 1895), Marie (1883—1888), Ball („Account" 1888, 2. Aufl. 1893; „Primer" 1895), Cajori (1893; 2. Aufl. 1895) und Boyer (1900) zu verzeichnen, wozu noch die Geschichte der Elementarmathematik von Fink (1890; englische Übersetzung 1900) und Cajori (1896) hinzugefügt werden können. Es ist klar, dafs das Erscheinen einer solchen Anzahl von Arbeiten, zum Teil in mehreren Auflagen, nur durch ein beständig wachsendes Interesse für die Geschichte der Mathematik erklärt werden kann. In diesem Zusammenhange dürfte auch darauf hingewiesen werden können, dafs die Geschichte der Mathematik jetzt an vielen Hochschulen ein Gegenstand des Unterrichts geworden ist.

Was ich soeben mit Bezug auf die Geschichte der reinen Mathematik bemerkt habe, gilt im grofsen und ganzen auch von der Geschichte der Physik und Astronomie, wenngleich auf diesen Gebieten die Lücken, die noch auszufüllen sind, zum Teil, z. B. hinsichtlich der Astronomie, nicht so grofs sind.

Ich habe oben bemerkt, dafs die erste Aufgabe der Bibliotheca Mathematica sein soll, neue Untersuchungen auf den einschlägigen Gebieten anzuregen und zu veröffentlichen, um dadurch das noch fehlende Material zur Herstellung einer vollständigen Geschichte der mathematischen Wissenschaften herbeizuschaffen. Selbstverständlich würde es für diesen Zweck am vorteilhaftesten sein, wenn die Zeitschrift vorzugsweise ausführliche Einzeldarstellungen, die den fraglichen Gegenstand erschöpfend behandelten, enthielte. In der That wird sich die Redaktion auch bemühen, den Lesern solche Monographien darzubieten; die neueste Geschichte wird teils durch Biographien hervorragender Mathematiker, Physiker und Astronomen neuerer Zeit, teils durch Berichte über den gegenwärtigen Stand einzelner mathematischer Theorien vertreten werden. Die Berichte werden sich selbstverständlich nur auf solche Theorien beziehen, die schon eine ziemlich umfangreiche Litteratur besitzen, sodafs der Bericht nicht nur als eine mathematische, sondern ebensogut als eine litterarische Arbeit betrachtet werden kann.

Die Bibliotheca Mathematica soll aber nicht ausschliefslich dazu bestimmt sein, den Verfassern von Gesamtdarstellungen Material zu bieten, sondern sie soll überhaupt das Interesse für die Geschichte der mathematischen Wissenschaften wecken und wach erhalten. Mit Bezug hierauf wird sie auch kleinere Mitteilungen veröffentlichen, um dadurch dem Inhalt der einzelnen Hefte so viel Abwechselung als möglich zu geben. Solche kleinere Mitteilungen können ja oft für die Ausarbeitung ausführlicher

Monographien höchst wertvoll sein; so z. B. hat Herr A. VON BRAUNMÜHL für seine *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* eine ganze Menge kleiner Notizen verwertet, die von anderen Verfassern veröffentlicht worden sind, für welche ihm die Quellen aus sprachlichen oder anderen Gründen unzugänglich waren. Zuweilen können auch Bemerkungen, die nur wenige Zeilen umfassen, von Interesse sein, besonders wenn sie Angaben allgemein benutzter Arbeiten berichtigen oder wesentlich ergänzen, und aus diesem Grunde wird die Redaktion in jedem Hefte der Bibliotheca Mathematica eine Abteilung mit dem Titel: „Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von CANTORS *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*" einführen; in dieser Abteilung werden die Bemerkungen nach den Seitenzahlen der betreffenden Stellen der *Vorlesungen* geordnet sein, und durch Verweisungen wird dafür gesorgt werden, daſs der Leser eines Heftes alle in den vorangehenden Heften eingeführte Bemerkungen zu einer gewissen Stelle unmittelbar auffinden kann. Eine andere Abteilung wird den Forschern ermöglichen, über besondere mathematisch-historische Fragen Aufschluſs zu verlangen und solchen von ihren Fachgenossen zu bekommen.

Ferner soll die Zeitschrift auch methodologische und pädagogische Fragen behandeln, welche sich auf die Geschichte der mathematischen Wissenschaften beziehen, z. B. über die Periodeneinteilung bei der Darstellung derselben, über die passendste Form der Darstellung der Geschichte der neuesten Zeit (Gesamtdarstellung oder Einzeldarstellungen) und über den mathematisch-historischen Unterricht. Auſser den Originalaufsätzen sollen endlich in jedem Hefte Verzeichnisse neuerschienener historischer Schriften und Besprechungen solcher Arbeiten gegeben werden.

Aber das Programm der Bibliotheca Mathematica umfaſst noch einen anderen Punkt. In neuerer Zeit hat man bekanntlich eine ganze Reihe von Unternehmungen teils geplant, teils schon in Angriff genommen, um die mathematischen Forschungen zu erleichtern, welche für die Mathematik und die Mathematiker von groſsem Interesse sind, obgleich sie sich nicht direkt auf die Fortbildung der mathematischen Theorien beziehen, und darum von den Fachzeitschriften nur ausnahmsweise behandelt werden. Fragen dieser Art — ich nenne sie der Kürze halber „aktuelle Fragen" — wird die Bibliotheca Mathematica von nun an in ihren Bereich hineinziehen, um dieselben zu erörtern und zu ihrer Erledigung beizutragen. Es ist nicht meine Absicht, an dieser Stelle ein vollständiges Verzeichnis der betreffenden Fragen zu geben; nur einige der wichtigsten Gegenstände derselben nenne ich hier:

eine allgemeine mathematische Bibliographie mit jährlichen Fortsetzungen;

ein mathematisches Wörterbuch;
verschiedene Nachschlagebücher, z. B. ein biographisch-litterarisches Handbuch der jetzt lebenden Mathematiker mit ihren Porträts;
eine zeitgemäfse internationale mathematische Litteraturzeitung;
mathematische Kongresse und Ausstellungen;
Klassifikation der mathematischen Wissenschaften;
mathematische Terminologie;
mathematischen Hochschulunterricht.

Mit Bezug auf den letzten Gegenstand möge bemerkt werden, dafs er den übrigen ziemlich fern liegt und so umfassend ist, dafs er eigentlich eine besondere Zeitschrift erfordert, wie auch in der That eine solche (*L'enseignement mathématique*) kürzlich von den Herren C. A. Laisant und H. Fehr begründet worden ist. In der Bibliotheca Mathematica werden daher nur solche Unterrichtsfragen behandelt werden, die für die Entwickelung der Wissenschaft von besonderer Bedeutung und darum für die Mathematiker von besonderem Interesse sind.

Endlich soll jedes Heft eine wissenschaftliche Chronik enthalten, die Notizen aus dem jetzigen wissenschaftlichen Leben auf den einschlägigen Gebieten mitteilen wird, z. B. Todesfälle (mit einigen biographischen Daten über die Verstorbenen), demnächst erscheinende wichtigere Schriften, historische Arbeiten in Vorbereitung, bemerkenswerte Vorlesungen, Preisfragen gelehrter Gesellschaften, u. s. w.

Was diesen zweiten Punkt des Programms, dessen vielseitige Schwierigkeiten ich mir keineswegs verhehlt habe, betrifft, so kann er natürlich nicht durchgeführt werden ohne Beihilfe einer grofsen Anzahl von Fachmännern. Eine solche ist jedoch im Anfang für alle erwähnten Fragen kaum zu ermöglichen. Je mehr aber der Nutzen eines Organs für aktuelle Fragen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften erkannt wird, desto kräftiger wird ohne Zweifel der Beistand werden, den die Zeitschrift bekommen wird, um diesen Teil des Programms durchführen zu können. In jedem Falle aber wird der erste Zweck der Bibliotheca Mathematica bleiben ein Organ für die mathematisch-historische Forschung zu sein, und darum soll in jedem Hefte zum mindesten die Hälfte dem rein geschichtlichen Teile vorbehalten bleiben.

Stockholm, 1. Januar 1900.

Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen.

Von

Friedrich Hultsch in Dresden.

Von den Abhandlungen des PROKLOS zu PLATONS Büchern vom Staate hatte R. SCHOELL im Jahre 1886 ansehnliche Stücke, die dem zweiten Teile des Gesamtwerkes angehörten, zum erstenmale veröffentlicht. Dort fanden sich in dem Abschnitte, der die Zahlen für göttlich und menschlich Erzeugtes behandelt (PLAT. *de rep.* VIII 546 B. C.), vom 15. Kapitel an ausführliche, aus verschiedenen Autoren geschöpfte Kommentare des PROKLOS zu der göttlichen oder vollendeten Zahl PLATONS, sowie zu der für irdische Verhältnisse gültigen, hochzeitlichen oder geometrischen Zahl. Auf Wunsch des Herausgebers hatte ich zu den damals bekannten Fragmenten einige Erläuterungen beigefügt.[1]) Bald darauf jedoch wurde die Vatikanische Handschrift bekannt, in welcher die von SCHOELL zwischen dem 20. und 37. Kapitel angezeigte Lücke durch einen zwar nicht ganz vollständigen, aber doch im ganzen lesbaren Text ausgefüllt ist. Durch die Güte des Herrn Professor W. KROLL liegt mir das bei SCHOELL fehlende Stück, das im 2. Bande der neuen Ausgabe[2]) demnächst erscheinen wird, in einem Probeabzuge vor. Vieles Bemerkenswerte wird hier zum erstenmale ans Licht treten. Das meiste betrifft natürlich die Deutungen der Stelle PLATONS; aber es finden sich auch Beiträge zur Geschichte der Mathematik, die nur entfernt mit den dort aufgestellten Problemen zusammenhängen.

So hatte PLATON für seine geometrische Zahl auch die ῥητὴ διάμετρος der Fünfzahl, deren Quadrat um 1 kleiner sei als das Quadrat der ἄρρητος διάμετρος, herbeigezogen. Das war der Zahlentheorie der Pythagoreer entnommen. Jede ganze und rationale Zahl galt, geometrisch

---

1) PROCLI *comment. in remp. Platonis partes ineditae* ed. R. SCHOELL, p. 140—148.

2) Der erste Band ist betitelt PROCLI DIADOCHI *in Platonis rem publ. commentarii* ed. GUIL. KROLL, vol. I, Leipzig 1899, Teubner.

betrachtet, zunächst als eine Gerade[1]), mithin wurde 5 als eine Seite von 5 Längeneinheiten dargestellt und darüber ihr Quadrat $= 25$ Flächeneinheiten errichtet. Die Diagonale des Quadrates war $= \sqrt{2 \cdot 25}$ Längeneinheiten. Das war bei den Pythagoreern die *ἄρρητος διάμετρος* der Fünfzahl.[2]) Daneben wurde $\sqrt{50 - 1}$ als *ῥητὴ διάμετρος* $= 7$ Längeneinheiten gestellt; das war also die rationale Zahl, deren Quadrat von dem Quadrate der irrationalen Diagonale der Fünzahl um ein ganzzahliges Minimum sich unterschied. Wenn man nun eine beliebige ganze Zahl a setzte und zu $2a^2$ das am nächsten kommende Quadrat einer andern Zahl b suchte, so wurde sofort klar, dafs die Identität $2a^2 - 1 = b^2$ durchaus nicht für alle in Betracht kommenden Werte von a und b zutraf Ging man in der Zahlenreihe rückwärts, so bot sich nur der analoge Fall $2 \cdot 2^2 + 1 = 3^2$; aber ob die *ῥητὴ διάμετρος* der Pythagoreer eine allgemeinere Bedeutung hatte, konnte man aus der früheren Ausgabe nicht ersehen. Den vollen Einblick wird erst Kap. 27 des Kroll schen Textes eröffnen. Vorläufig sei daraus folgendes mitgeteilt.

Im II. Buche der Elemente Euklids findet sich bekanntlich als 10. Proposition ein Satz, dessen umständlicher Wortlaut mit Hinzunahme von Buchstaben sich dahin zusammenfassen läfst, dafs, wenn eine Gerade AD in zwei Abschnitte $AB = BC$ und einen dritten beliebigen Abschnitt CD geteilt wird (Fig. 1),

$$AD^2 + CD^2 = 2AB^2 + 2BD^2,$$

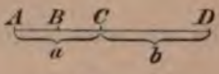


Fig. 1.

oder in algebraischer Formel[3])

$$(a + b)^2 + b^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2} + b\right)^2$$

ist. Nun war es schon früher bekannt, dafs Euklid bei der Zusammenstellung der Elemente weit mehr Sammler und Überarbeiter von älteren geometrischen Sätzen als selbständiger Erfinder gewesen ist. Das ganze I. Buch, das mit dem sogen. Pythagoreischen Lehrsatze und seiner Umkehrung abschliefst, ist auf die Schule des Pythagoras zurückzuführen. Die Probleme und Theoreme dieses Buches waren längst schon Gemeingut, ehe Platon mit geometrischen Dingen sich beschäftigte. Jetzt ersehen wir aus Proklos[4]), dafs der Satz *Elem.* II 10 Pythagoreisches Eigentum

---

1) Dafs jede Zahl aufserdem auch als Flächen- oder Körperzahl gesetzt und geometrisch dargestellt werden konnte, wird an anderer Stelle gezeigt werden.

2) Vgl. Pauly-Wissowa, *Realencyklopädie der klass. Altertumswissensch.* II, Arithmetica § 19 a. E. 24 (Sp. 1093).

3) Cantor, *Vorlesungen über Gesch. der Mathem.* I², S. 249. — Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, S. 12.

4) *Comm. in Plat. remp.* II p. 27 Kroll: *ἐπενόησαν οὕτω λέγειν οἱ Πυθαγόρειοι καὶ Πλάτων, τῆς πλευρᾶς οὔσης ῥητῆς, τὴν διάμετρον ῥητὴν οὐχ ἁπλῶς ἀλλ' ἐν οἷς*

war, und schliefsen weiter, dafs auch die vorhergehenden Sätze schon einige Zeit vor PLATON, etwa um die Mitte des 5. Jahrhunderts v. Chr., bekannt waren. Aber auch die bei EUKLID im II. Buche noch folgenden Sätze werden, da sie in engem Zusammenhange mit den früheren stehen, auf dieselbe Quelle zurückzuführen sein.

Wie PROKLOS andeutet, haben die Pythagoreer, indem sie über der Geraden AB ein Quadrat errichteten und dessen Diagonale BE zogen, auf der Verlängerung von AB zunächst $BC = AB$ und dann $CD = BE$ aufgetragen (Fig. 2). So erhielten sie nach dem Pythagoreischen Lehrsatze

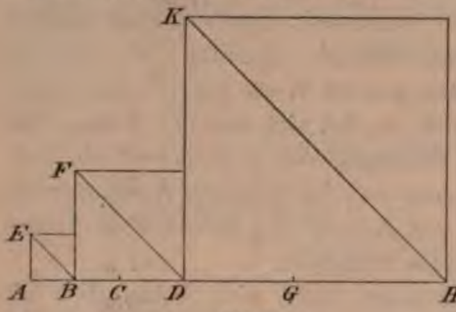


Fig. 2.

$$CD^2 = 2AB^2.$$

Nun war nach dem oben angeführten Satze

$$AD^2 + CD^2 = 2AB^2 + 2BD^2,$$

mithin blieben nach Subtraktion von $CD^2 = 2AB^2$

$$AD^2 = 2BD^2.$$

Errichten wir nun auch über BD ein Quadrat und ziehen dessen Diagonale DF, so ist wiederum nach dem Pythagoreischen Lehrsatze

$$DF^2 = 2BD^2.$$

Es war aber $2BD^2 = AD^2$; mithin ist

$$\begin{aligned} DF = AD &= 2AB + CD \\ &= 2AB + BE. \end{aligned}$$

Wird nun weiter auf der Verlängerung von AD die Gerade $DG = BD$ und $GH = DF$ aufgetragen und über DH ein Quadrat errichtet und dessen Diagonale HK gezogen, so ergiebt sich ähnlich wie vorher

$$\begin{aligned} HK = BH &= 2BD + GH \\ &= 2BD + DF. \end{aligned}$$

Es ist klar, dafs diese Konstruktionen beliebig fortgesetzt werden können und in jedem neu angesetzten Quadrate die Diagonale gleich der Summe

---

δύνανται (näml. *πλευρά* und *διάμετρος*) *τετραγώνοις, τοῦ διπλασίου λόγου, ὃν δεῖ τὴν διάμετρον ποιεῖν, ἢ μονάδι δέουσαν ἢ μονάδι πλεονάζουσαν . . . προετίθεσαν δὲ οἱ Πυθαγόρειοι τούτου τοιόνδε θεώρημα γλαφυρὸν περὶ τῶν διαμέτρων καὶ πλευρῶν ὅτι ἡ μὲν διάμετρος προσλαβοῦσα τὴν πλευράν, ἧς ἐστιν διάμετρος, γίνεται πλευρά, ἡ δὲ πλευρὰ ἑαυτῇ συντεθεῖσα καὶ προσλαβοῦσα τὴν διάμετρον τὴν ἑαυτῆς γίνεται διάμετρος.* Es folgt die Erwähnung des später von EUKLID aufgenommenen Satzes *Elem.* II 10 und der darauf beruhende geometrische Beweis, jedoch ohne Figur und nur für *einen* Fall. Die Figur und den Nachweis der daraus abzuleitenden Reihen habe ich hinzugefügt.

der doppelten Seite und der Diagonale des vorhergehenden Quadrates sein wird.

Bezeichnen wir AB als die Seite und BE als die Diagonale des ersten Quadrates mit s_1, bez. d_1, und entsprechend die Seiten und Diagonalen der weiter angesetzten Quadrate mit $s_2, s_3 \cdots$, bez. $d_2, d_3 \cdots$, so ergiebt sich die Doppelreihe

$$\begin{array}{lll} s_1, & s_2 = s_1 + d_1, & s_3 = s_2 + d_2, \cdots \\ d_1, & d_2 = 2s_1 + d_1, & d_3 = 2s_2 + d_2, \cdots, \end{array}$$

in welcher das Quadrat jedes unteren Gliedes gleich dem doppelten Quadrate des darüber stehenden Gliedes ist.[1])

Dieser geometrische Nachweis galt jedoch den Pythagoreern nur als die Vorbereitung, um zu einer feinen Beobachtung auf arithmetischem Gebiete zu gelangen. Indem sie $s_1 = 1$ setzten, erhielten sie $d_1 = \sqrt{2}$. Das war ähnlich wie $\sqrt{50}$ (oben S. 9) eine „unaussprechbare" Zahl.[2]) Ihr zur Seite trat als ῥητὴ διάμετρος, d. i. als nächster ganzzahliger Wert, die Zahl 1. Dann verglichen sie weiter die Quadrate der ἄρρητος und der ῥητὴ διάμετρος; ersteres war $= 2$, letzteres $= 1$, die Differenz $= 1$. Wenn wir nun, wie vorher erste, zweite u. s. w. Diagonalen, so auch erste, zweite u. s. w. ῥηταὶ διάμετροι unterscheiden und sie mit $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \cdots$ bezeichnen, so wird die vorhergehende Doppelreihe umgebildet zu

$$\begin{array}{lll} s_1 = 1, & s_2 = s_1 + \delta_1 = 2, & s_3 = s_2 + \delta_2 = 5, \cdots \\ \delta_1 = 1, & \delta_2 = 2s_1 + \delta_1 = 3, & \delta_3 = 2s_2 + \delta_2 = 7, \cdots. \end{array}$$

Diese Entwickelung der Seiten- und Diameterzahlen war schon früher aus Theon[3]) bekannt, der freilich weder von der ursprünglichen Bedeutung von πλευρά und διάμετρος noch von dem geometrischen Beweise irgend etwas mitteilt. Vergleichen wir seinen Bericht mit dem des Proklos, so zeigt sich, dafs der letztere unabhängig von dem ersteren verfafst ist, beide aber aus einer gemeinschaftlichen Quelle stammen. Wenn Proklos, wofür manche Anzeichen sprechen, aus der μαθημάτων θεωρία des Geminos geschöpft hat, so ist von Theon nicht dieses Werk selbst, sondern eine erst durch zweite oder dritte Hand abgeleitete Quelle benutzt worden.

Nächst der Aufstellung der beiden vorher entwickelten Doppelreihen hat der unbekannte Autor, von dem die auf uns gekommenen Berichte

1) Setzt man $s_1 = n$, so ist $d_1 = n\sqrt{2}$, $s_2 = n + n\sqrt{2}$, $d_2 = 2n + n\sqrt{2}$, mithin $2(n + n\sqrt{2})^2 = (2n + n\sqrt{2})^2$ u. s. w.

2) Vgl. Pauly-Wissowa, *Realencykl.* II, Arithmetica § 23 f.

3) *Expositio rer. mathem. ad legendum Platonem util. rec.* E. Hiller p. 43, 5—45, 8. Vgl. Jambl. *in Nicom. arithm.* ed. Pistelli, p. 91, 3—93, 6, Nesselmann; *Algebra der Griechen*, S. 228 ff. Proklos *in I Eucl. elem. libr.* ed. Friedlein, p. 427, 18—24 erwähnt nur die oben besprochene Identität $2 \cdot 5^2 - 1 = 7^2$.

abhängen, nachgewiesen, dafs, wenn an Stelle der irrationalen Werte $d_1, d_2 \cdots$ die ganzzahligen $\delta_1, \delta_2 \cdots$ eingesetzt werden, zwar nicht mehr, wie in der ersten Doppelreihe, das Quadrat jedes unteren Gliedes gleich dem doppelten Quadrate des oberen Gliedes sein kann, die Differenzen aber stetig $= 1$ bleiben, und zwar alternierend nach der Seite des Plus oder Minus hin.[1]) Nach der Meinung der alten Pythagoreer hatte dies noch die besondere Bedeutung, dafs, wenn es auch unmöglich ist, ganze Zahlen zu finden, deren doppelte Quadrate gleich den Quadraten ganzer Zahlen sind (Prokl. Kap. 27 z. Anf.), doch eine Zahlenreihe aufgestellt werden kann, deren Glieder die Eigenschaft haben, dafs ihre Doppelquadrate mehr und mehr den Quadraten ganzer Zahlen sich nähern; denn die stetige Differenzzahl 1 wird zuletzt ein verschwindend kleiner Teil der betr. Quadratzahlen, bez. der Doppelquadrate.

Zum Schlusse fügt Theon die auch bei Proklos Kap. 23 angedeutete Bemerkung hinzu, dafs die Summe der Quadrate aller *ῥηταὶ διάμετροι* doppelt so grofs sein wird als die Summe der Quadrate aller Seiten. Hätte er seine Beobachtung auf eine endliche Zahl von Gliedern beschränken wollen, so mufste er eine *gerade* Zahl von unmittelbar auf einander folgenden Gliedern voraussetzen.

---

1) Der empirische Beweis ist bei Proklos und Theon bis zu dem vierten Doppelgliede ($2 \cdot 12^2 + 1 = 17^2$) durchgeführt; der allgemeine Beweis erhellt aus der Formulierung der Reihe bei Cantor, *Vorles. üb. Gesch. d. Mathem.* I² S. 408. Derselbe weist auch darauf hin, dafs die Zahlen der unteren Reihe, dividiert durch die entsprechenden der oberen Reihe, auf einander folgende Näherungswerte von $\sqrt{2}$ sind. Bekanntlich bietet die Doppelreihe die ganzzahligen Lösungen der Gleichung $y^2 - 2x^2 = \pm 1$ (siehe z. B. Nesselmann, *Algebra der Griechen*, S. 229).

Archimedes' Epnodikón.

Von

Wilhelm Schmidt in Helmstedt.

ARCHIMEDES' Quadratur der Parabel ist unter dem Titel *Τετραγωνισμὸς παραβολῆς* überliefert, eine Form des Titels, die HEIBERG und HULTSCH (Art. Archimedes; PAULY-WISSOWAS *Realencykl.* II, 524) mit Recht beanstanden, da ARCHIMEDES die Parabel nur *τὰν ὀρθογωνίου κώνου τομάν* benennt. Der Wortlaut aber, welchen EUTOKIOS bietet (ARCHIMEDES *ed.* HEIBERG III, 342, 1: *ἐν τῷ Περὶ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς*), scheint mehr den Inhalt als die genaue Form des Titels im Auge zu haben.

Nun wird unter den nur aus Citaten bekannten Schriften des ARCHIMEDES von SUIDAS ein *Ἐφόδιον* (ARCHIMEDES *ed.* HEIBERG II, 465) erwähnt, zu dem THEODOSIOS von Tripolis (noch vor Chr., s. CANTOR, *Vorles.* I², 383) einen Kommentar geschrieben habe. Mit diesem *ἐφόδιον* wufste man bisher nichts Rechtes anzufangen. Während HEIBERG darin „die Methode der mathematischen Wissenschaft" behandelt glaubte, enthielt die Schrift nach TANNERY „Tafeln der Sehnen des Kreises" unter Zerlegung des Kreisumfanges in 1000 Teile und Annahme des Radius zu 159 solcher Teile (HULTSCH, a. a. O. S. 537).

Die Klärung dieser Frage scheint mir eine Notiz aus HERONS *Metrika* I, 32 zu bringen (Fol. 84ᵛ des Cod. Constantinop. 1 s. XI, vgl. auch HERON, *Op.* III, 80 *ed.* H. SCHÖNE [in Vorbereitung]), wo es heifst:

Ἔδειξε γὰρ Ἀρχιμήδης ἐν τῷ Ἐφοδικῷ, ὅτι πᾶν τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ (ἀπὸ Hs.) *εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, τουτέστι παραβολῆς, ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος αὐτῷ τὴν αὐτήν, καὶ ὕψος δὲ ἴσον.*[1])

ARCHIMEDES hat im *Ephodikón* gezeigt, dafs jedes Segment, welches von einer Geraden und einem Schnitte eines rechtwinkligen Kegels, d. h. einer Parabel, eingefafst wird, $^4/_3$ eines Dreiecks ausmacht, das mit ihm dieselbe Basis, aber auch gleiche Höhe hat.

1) Diese Notiz wird Fol. 85ʳ der *Metrika* I, 35 fast in gleicher Fassung wiederholt. Aus dieser Stelle ist dann, wenn auch schon in interpolierter Form, Fol. 41ᵛ der Heronisch-Byzantinischen Aufgabensammlung im Constantinop. 1 der gleiche Hinweis

Da die angeführten Worte[1]) sich nur auf die Quadratur der Parabel (Archimedes *ed.* Heiberg II, 334 u. 348) beziehen können, was liegt da näher als die Annahme, dafs *'Εφοδικόν*[2]) der echte Titel für diese Schrift ist und Suidas' *'Εφόδιον* dementsprechend zu verbessern ist?

Wenn hierzu Theodosios einen Kommentar geschrieben hat, so wäre das eine passende Ergänzung seiner Sphärik.

Wie das Titelwort *'Εφοδικόν* zu erklären sei, mag fraglich bleiben. Am nächsten liegt wohl, da *ἔφοδος* Methode bedeutet, die Vermutung, dafs es auf die Exhaustionsmethode jener Schrift hinweise.

---

entnommen: *ἀπέδειξεν δὲ* (*ὁ* nur F. 41^v) *Ἀρχιμήδης ἐν τῷ ἐφοδικῷ* (*λόγῳ* fügt F. 41^v zu), *ὡς προείρηται* (nämlich F. 84^v), *ὅτι πᾶν τμῆμα περιεχόμενον ὑπό τε* (om. F. 41^v) *εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς* (dafür interpoliert F. 41^v *τμήματος*), *τουτέστι* (*τοῦτο* verderbt F. 41^v) *παραβολῆς, ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ* (nur F. 41^v) *τριγώνου τοῦ τὴν αὐτὴν* (om. F. 41^v) *βάσιν ἔχοντος αὐτὸ* (sic F. 85^r, *αὐτοῦ* F. 41^v) *καὶ ὕψος ἴσον*. Die Worte *τουτέστι παραβολῆς* sind natürlich überall Glossem.

1) Eutokios a. a. O. citiert übrigens abgesehen vom Titel dieselbe Sache.

2) Bei dem Flächeninhalte der Ellipse wird in Herons *Metrika* I, 34 (F. 85^r des Cod. Constantinop. 1) in ungenauer Weise auf Archimedes' *Περὶ κωνοειδέων* (*ed.* Heiberg I, 314 [306?]) verwiesen: *ἐπεὶ οὖν ἐν τοῖς Κωνοειδέσιν Ἀρχιμήδους δείκνυται, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ἀξόνων δύναται κύκλον ἴσον τῇ ἐλλείψει.* Ähnlich, aber in entstellterer Form F. 41^v des Constantinop. 1. Bei den Berechnungen wird die richtige Formel $F(\text{Ellipse}) = \frac{ab\pi}{4}$ verwendet, wobei a die grofse, b die kleine Achse bezeichnet.

Archimède connaissait-il le paradoxe hydrostatique?

Par

P. Duhem à Bordeaux.

Dans le préambule qu'il a mis en tête de ses *principes de l'Hydrostatique*, LAGRANGE[1]) attribue à ARCHIMÈDE l'invention de la loi fondamentale à laquelle obéit la pression au sein d'un liquide pesant; SIMON STEVIN aurait seulement remarqué le caractère paradoxal souvent présenté par les conséquences de cette loi: «Quoique d'après ce qu'ARCHIMÈDE avait démontré, écrit LAGRANGE, il ne fût pas difficile de déterminer la pression d'un fluide sur le fond ou sur les parois du vase dans lequel il est renfermé, STEVIN est néanmoins le premier qui ait entrepris cette recherche, et qui ait découvert le paradoxe hydrostatique, qu'un fluide peut exercer une pression beaucoup plus grande que son propre poids.»

L'hydrostatique aurait donc été établie sur des principes exacts, d'une manière définitive, dès l'époque d'ARCHIMÈDE, tandis que d'autres branches de la physique, plus simples en apparence, auraient attendu tant de siècles une base scientifiquement établie! Bien que le génie d'ARCHIMÈDE soit assez grand pour que nous n'ayons pas le droit d'être surpris de trouver parmis ses œuvres une théorie à ce point prophétique, une semblable dérogation aux lois suivant lesquelles ont évolué les connaissances mécaniques de l'humanité ne doit être admise qu'après un sérieux examen.

Il y a peu d'années, M. ADRIEN LEGRAND[2]) a rendu grand service aux physiciens soucieux de connaître les origines de la science qu'ils cultivent en publiant, dans un recueil qui leur est aisément accessible, une traduction minutieusement soignée du premier Livre du *Traité des Corps flottants*, et une courte, mais substantielle étude sur les sources qui nous font connaître cette œuvre. Le travail de M. LEGRAND fournira les documents dont nous avons besoin.

---

1) LAGRANGE, *Mécanique Analytique*, Section VI.

2) ADRIEN LEGRAND, *Le Traité des Corps flottants d'Archimède* (*Περὶ ὀχουμένων*). Traduction nouvelle; Journal de Physique **10**$_2$, 1891, 437—457.

En tête du Traité, Archimède place une hypothèse fondamentale; voici l'énoncé de cette hypothèse, tel qu'il figure dans la traduction latine littérale, faite en 1269, d'après les manuscrits grecs aujourd'hui disparus:

«Supponatur humidum habens talem naturam ut partibus ipsius ex aequo jacentibus et existentibus continuis expellatur minus pulsa a magis pulsa, et unaquaeque autem partium ipsius pellitur humido quod supra ipsius existente secundum perpendicularem [si humidum sit descendens in aliquo et ab alio aliquo pressum].»

Les mots entre [ ] ne figurent pas dans la traduction arabe des énoncés d'Archimède, faite, en 969, par Amed-ben-Mohammed-ben-Abd-Adjalil-Alsidjzi; M. Adrien Legrand les tient pour une interpolation; ils n'importent pas à l'objet de notre examen.

L'hypothèse fondamentale d'Archimède se compose de deux parties; la première renferme une expression qui demande à être interprétée; c'est l'expression: «partes ex aequo jacentes». L'usage continuel qu'Archimède fait de cette expression, au cours de ses démonstrations, en fixe clairement le sens.

Pour Archimède, les directions du fil à plomb (perpendiculares) aux divers points de la Terre vont toutes concourir en un même point qu'il nomme le *Centre de la Terre*; les «partes ex aequo jacentes» sont celles qui se trouvent sur une même surface sphérique ayant pour centre le centre de la Terre. Ainsi, dans le langage de la Mécanique moderne, la première partie de l'hypothèse d'Archimède s'énoncerait ainsi:

«Pour qu'un liquide soit en équilibre, il faut que la pression ait la même valeur en tous les points d'une surface qui est partout normale à la direction de la pesanteur et qui est tout entière située dans le liquide.»

Peyrard avait traduit les mots «partes ex aequo jacentes» par «parties également placées»; Thurot par «parties également situées». Si, avec Mac-Laurin et Chasles, on nomme *surface de niveau* d'un système de forces toute surface normale en chacun de ses points à la direction de la force, on devra regarder comme très conforme à la pensée d'Archimède la traduction «parties de même niveau» adoptée par M. Adrien Legrand.

Le sens de la première partie de l'hypothèse d'Archimède étant éclairci, passons à la seconde partie: «Unaquaeque partium ipsius pellitur humido quod supra ipsius existente secundum perpendicularem.» Quel sens convient-il d'attribuer à ce passage? Faut-il y voir l'énoncé exact de la loi suivant laquelle, à l'intérieur du liquide, la pression varie d'un niveau à l'autre?

Nous pensons qu'à cet énoncé, trop concis pour être clair, on doit attribuer le sens suivant:

Pour connaître la pression exercée sur une aire AB (fig. 1), *concentrique à la Terre, menez par le contour de AB, des verticales AA', BB', ... qui formeront une sorte de vase tronc conique; la pression sur la paroi AB est égale au poids de tout ce qui existe dans ce vase, liquide ou solide.*

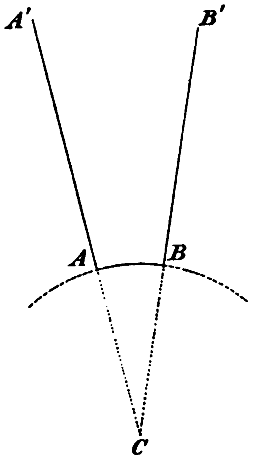


Fig. 1.

Remarquons, tout d'abord, que cette hypothèse est celle qui se présente naturellement à tout esprit non instruit des lois de l'hydrostatique; c'est parce-qu'elle contredit cette hypothèse que la proposition de STEVIN semble un paradoxe. Il n'est donc pas étonnant qu'elle ait été admise par le premier qui ait traité de l'équilibre des liquides.

Que, d'ailleurs, cette proposition exprime bien la pensée d'ARCHIMÈDE, c'est ce qui résulte clairement, selon nous, de l'usage qui en est fait dans la démonstration des propositions 2, 3, 4, 5.

Par exemple, dans la proposition 2, il s'agit de prouver que la surface de la Terre, supposée liquide, sera une sphère $\zeta\beta\varepsilon\eta$ (fig. 2), ayant pour centre le point de concours $\varkappa$ des verticales, et non une surface de forme différente $\alpha\beta\lambda\gamma\delta$; ARCHIMÈDE trace, dans la masse fluide, une surface sphérique $\xi o\pi$,

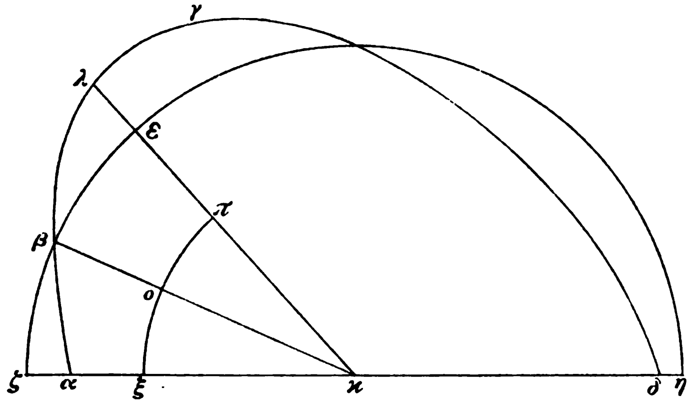


Fig. 2.

ayant pour centre le point $\varkappa$; de part et d'autre de la perspective o de l'intersection β des deux surfaces $\zeta\beta\varepsilon\eta$ et $\alpha\beta\lambda\gamma\delta$, il prend deux aires égales $o\xi$, $o\pi$; puis il ajoute: «Les parties de liquide, situées sur la surface $\xi o\pi$ sont de même niveau et continues entre elles. Celles qui sont situées en ξo sont poussées par le liquide $\xi o\alpha\beta$ situé sous $\alpha\beta$; celles situées en $o\pi$ par le liquide $\pi o\beta\lambda$ situé sous $\beta\lambda$. Ainsi les parties du liquide situées sur l'arc de cercle ξo ne sont pas poussées comme celles situées en $o\pi$.»

Dans la proposition 3, il s'agit de démontrer que lorsqu'un solide de même densité que le liquide, flotte en équilibre, il ne peut émerger en partie. Archimède décrit encore, à l'intérieur de la masse terrestre

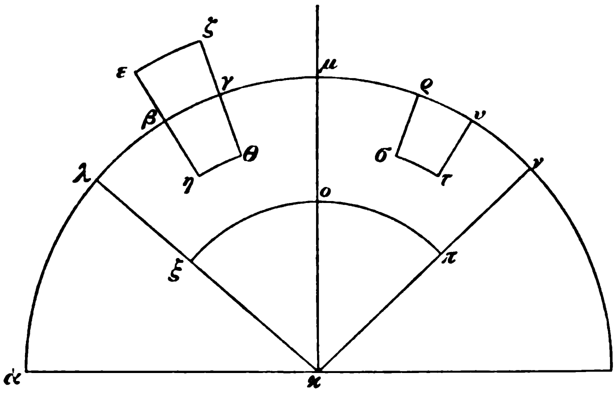


Fig. 3.

supposée fluide, une sphère ayant pour centre le point de concours $\varkappa$ des verticales (fig. 3); sur cette sphère, il prend deux aires égales $o\xi$, $o\pi$, la première, $o\xi$, située au dessous du solide partiellement immergé $\beta\gamma\varepsilon\zeta\eta\vartheta$. Puis il ajoute:

«Les parties de liquide qui sont dans la première pyramide sous la surface coupée en ξo et celles de la seconde sous $o\pi$ sont de même niveau et continues. Or elles ne sont pas également poussées. En effet, celles qui sont en ξo sont poussées: 1° par le solide $\varepsilon\zeta\eta\vartheta$, 2° par le liquide situé entre les surfaces $\lambda\mu$, ξo et les faces de la pyramide; celles en $o\pi$ le sont: 1° par le liquide $\varrho\sigma\tau\upsilon$ et 2° par le liquide situé entre les surfaces $\mu\nu$, $o\pi$ et les faces de la pyramide. Mais le poids du liquide $\mu\nu o\pi$ sera moindre que celui du liquide $\lambda\mu\xi o$ [et du solide qui y flotte].[1]) En effet, la partie liquide $\varrho\sigma\tau\upsilon$ est moindre que le solide $\varepsilon\zeta\eta\vartheta$, puisqu'elle est égale à la partie $\eta\beta\gamma\vartheta$ et qu'on a supposé le solide de même poids et de même dimension que le liquide. Le reste des parties liquides est égal de part et d'autre. Il est donc évident que le liquide situé en $o\pi$ cédera à celui qui est en $o\xi$ et qu'il ne sera pas en équilibre.»

De même, dans la démonstration de la proposition 4, Archimède prend sur une surface sphérique concentrique à la Terre deux aires égales;

1) Ces mots, exigés par le sens du contexte, manquent dans les textes d'Archimède qui nous sont parvenus.

il surmonte ces aires de deux vases tronc-coniques à parois verticales et comme les poids des corps, tant solide que liquide, renfermés en ces deux vases sont inégaux, il en conclut que les deux surfaces subissent des poussées inégales. Enfin, dans la démonstration de la proposition 5, de l'égalité de deux tels poids, il conclut à l'égalité des deux poussées.

Ces divers passages nous paraissent ôter tout caractère douteux à l'interprétation que nous avons donnée de l'hypothèse fondamentale d'Archimède; force est de reconnaître que cette hypothèse est en contradiction avec le paradoxe hydrostatique et, partant, erronée.

Comment d'un principe faux Archimède a-t-il pu déduire, sur l'équilibre des corps flottants, les lois qui ont justement immortalisé son nom?

Pour que l'hypothèse d'Archimède, fausse en général, devienne exacte, deux conditions sont requises: 1^0 le vase à parois verticales dont on surmonte la surface pressée ne doit contenir que du liquide et des solides flottant librement; il ne doit rencontrer aucun solide fixe; 2^0 le point de concours des verticales doit être rejeté à l'infini, en sorte que ces lignes deviennent parallèles.

Or la première condition se trouve vérifiée dans toutes les applications qu'Archimède a faites de son hypothèse; elle aurait cessé de l'être s'il s'était proposé de determiner la poussée exercée sur les parois des vases qui renferment les liquides.

Quant à la seconde supposition, Archimède, qui l'a adoptée dans ses recherches sur les centres de gravité, ne l'a jamais faite dans son *Traité des Corps flottants*. Mais elle se trouve approximativement réalisée dans les cas où l'on fait pratiquement usage des lois énoncées par Archimède.

Il n'en reste pas moins que les lois découvertes par Archimède touchant la flottaison des corps graves nous offrent un mémorable exemple de vérités obtenues par une méthode erronée. Il convient de réviser le jugement de Lagrange au sujet de Simon Stevin et de regarder le géomètre de Bruges comme l'inventeur des véritables fondements de l'hydrostatique.

Note sur la trigonométrie de l'antiquité.

Par

H. G. Zeuthen à Kjøbenhavn.

Nos connaissances relatives à l'évolution des mathématiques viennent de s'enrichir considérablement par la publication du premier volume des leçons de M. A. v. Braunmühl[1]) sur l'histoire de la trigonométrie. Multitude de nouveaux documents mis à la disposition du lecteur, justesse dans les conclusions soit historiques soit mathématiques, clarté avec laquelle l'auteur expose et synthétise les fruits de ses recherches, voilà ce qui rend la lecture de ce livre également utile et intéressante, soit pour l'amateur de l'histoire des sciences, soit pour le géomètre curieux de solides renseignements sur le développement des procédés qui lui sont familiers.

Mais là ne se borne pas la fécondité d'un pareil travail: il fructifie indirectement; il pousse à de nouvelles recherches ceux qui songent à faire de nouveaux progrès en combinant les nouveaux renseignements avec leurs propres observations. Dans ce qui suit, j'ai tâché de modifier un des résultats de M. Braunmühl, ou plutôt d'amener une décision dans une question qu'il regarde comme pendante, et mon travail témoignera du vif intérêt avec lequel j'ai étudié son livre.

Dans la *Syntaxe* de Ptolémée les solutions des différentes questions de la trigonométrie sphérique se présentent d'une manière extrêmement élégante comme applications d'un seul théorème géométrique, celui de Menelaos. Non seulement cette élégante déduction diffère essentiellement, comme le remarque à raison M. Braunmühl (p. 16), de l'usage de la géométrie grecque où ordinairement on développe à part les théorèmes nécessaires pour chaque question particulière: selon moi un tel commencement serait même inouï dans l'histoire des mathématiques, où l'on connaît ordinairement les solutions particulières des principales questions resolues plus tard par une méthode générale avant de construire cette méthode.

---

1) A. von Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*. Erster Theil. Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen. (Leipzig 1900.)

Il est donc à supposer qu'on ait résolu d'une manière plus directe les questions de trigonométrie sphérique dont s'occupe Ptolémée, ou du moins une partie de ces questions, avant d'en réduire toutes les solutions à l'application du théorème de Menelaos. Du reste, la sphérique de Menelaos, comparée aux ouvrages de ses prédecesseurs, révèle un auteur assez distingué et assez original pour avoir non seulement trouvé lui-même le théorème sphérique qui porte son nom, quand même il lui aurait été suggéré par des recherches de géométrie plane dans les Porismes d'Euclide, mais encore découvert qu'il servait à résoudre à la fois les différentes questions de la trigonométrie sphérique. Mais comment a-t-on donc résolu les mêmes questions avant son époque (100 après J.-C.)? Car plusieurs citations de M. Braunmühl confirment le fait généralement admis que les calculs trigonométriques au moyen d'une table de cordes remontent à Hipparque, et rendent probable que les questions sphériques ne seraient pas exclues de ce calcul.

On espère se renseigner sur ce point intéressant par l'examen des constructions géométriques que M. Braunmühl tire de l'*analemma* de Ptolémée.[1]) Le savant historien fait voir comment elles peuvent être transformées en solutions trigonométriques, et que cette transformation a été utilisée par les géomètres indiens, et que les méthodes constructives de l'analemme font plus tard la base de beaucoup de recherches trigonométriques dans le Levant et dans l'Europe; mais faute de démonstration directe il est trop prudent pour attribuer aux Grecs les mêmes applications que, selon lui, on ne trouve que chez les Hindous.

J'admets volontiers avec M. Braunmühl, que les démonstrations par des figures dont parle déjà Hipparque ont été identiques, ou du moins semblables aux *lineares demonstrationes*[2]) de l'analemme; mais je ne comprends pas la conclusion qu'il tire à cette occasion[3]): «Hipparch *teilt uns mit, daſs er das in jenem Kommentar Benützte „durch Zeichnung“ bewiesen habe. Die von ihm verwendete Methode scheint also eine graphische gewesen zu sein.*» Certainement Hipparque dit lui-même que sa démonstration a été faite à l'aide de figures — ou par une méthode graphique —, mais la méthode qu'il s'agit ici de connaître, est celle qui est fondée sur cette démonstration géométrique et qu'on a utilisée pour déduire des valeurs données de certains angles celles des angles inconnus, et sur elle ni la

1) Dans ce qui suit je renvoie à l'édition de Heiberg des restes conservés du texte grec et de la traduction latine de Mœrbecke (Abh. zur Geschichte der Mathem. 7, 1895, p. 1 et suiv.).

2) P. 15 une lacune du texte grec est remplie par M. Heiberg d'une manière conforme à cette traduction latine de Mœrbecke: γραμμικ⟨ῶν ἀποδείξεων⟩.

3) Braunmühl, l. c. p. 10.

citation d'Hipparque ni la partie de l'analemme que rapporte M. Braunmühl ne nous donne aucun renseignement direct. Il ne faut pas s'illusionner sur le fait que dans ce cas les démonstrations consistent en constructions; car en ce qu'il y a d'essentiel, les constructions que nous trouvons dans les problèmes des livres des géomètres grecs ont aussi bien que les théorèmes pour but un savoir théorique.

Les constructions de l'analemme que nous rapporte M. Braunmühl servent à déterminer la hauteur et l'azimuth du soleil à l'équateur, et les coordonnées analogues par rapport au premier plan vertical (appelé second vertical par les anciens), quand on connaît l'heure, ou plutôt son complément que j'appelle u, et la hauteur du pôle, φ. Pour commencer je me contenterai de la détermination de la hauteur, ou plutôt de son complément, la distance au zénith, que j'appelle d, et je la réfèrerai ici, non pas à la figure où Ptolémée rend premièrement compte de la construction (p. 13), mais à celle où après il utilise la même construction (p. 16)[1]). Du reste, ces deux figures contiennent aussi les constructions des autres quantités cherchées.

Soit $agbd$ le cercle méridien, ged l'axe vertical, zeh l'axe du monde et aeb et tek les traces de l'horizon et de l'équateur. L'arc br ou dk a donc la valeur donnée φ. L'équateur étant rabattu autour de sa trace tk dans le plan du méridien, l'arc zl sera égal au complément donné, u, de l'heure (négative). On projette l sur ek en n et n sur ed par la droite pnr rencontrant le cercle donné en r. Alors br sera la hauteur cherchée (ce qu'on voit en rendant à l'équateur sa position originaire et en rabattant ensuite sur le méridien le plan qui projette le

1) Seulement je fais tourner cette figure de 180° dans son plan et autour de son centre, et je lui donne ainsi une position correspondante à celle de la première figure (p. 13). Il paraît que par la position de la figure servant à la discussion l'auteur de l'analemme a voulu montrer que ses procédés sont applicables aussi aux étoiles qui se trouvent au dessous de l'horizon. Alors la quantité que je désigne par d serait la distance au nadir et u serait l'angle fait au dessous de l'horizon du rayon vecteur du soleil avec l'intersection de l'équateur avec l'horizon. — Dans la figure servant à la discussion de son autre construction (p. 18), il considère une étoile à déclinaison négative, tandis que la construction exécutée à la p. 14 se rapporte à une étoile à déclinaison positive.

rayon vecteur du soleil sur l'horizon), ou bien comme le dit PTOLÉMÉE, dr sera la distance au zénith, d.

Dans le cas où les angles connus φ et u sont donnés immédiatement sur la figure, ces indications géométriques permettent de représenter aussi sur la figure, au moyen de la règle et du compas, la hauteur cherchée. Cependant la question astronomique dont on cherche une solution ne serait pas ordinairement posée de cette façon géométrique. Il s'agit là de déterminer numériquement en degrés l'angle cherché, les deux autres étant aussi donnés en degrés. Celà pourra se faire de deux manières différentes. On peut faire usage d'un cercle divisé en degrés, soit pour construire les angles φ et u, donnés en degrés, soit pour trouver, après avoir exécuté la construction, le nombre de degrés de l'angle construit d. On peut aussi faire usage d'une table trigonométrique pour utiliser la dépendance établie par la construction. On a dû faire l'un ou l'autre. En accentuant que la détermination non seulement se d é m o n t r e graphiquement, mais encore se fait par une méthode graphique, M. BRAUNMÜHL me semble incliner vers la première supposition; mais selon moi celle-ci aurait autant besoin que l'autre d'une démonstration historique.

Heureusement qu'en continuant la lecture de l'analemme on aura la réponse complète à la question sur la manière dont on a utilisé la construction géométrique. Elle a été faite des d e u x f a ç o n s dont je viens de parler. A la p. 15 PTOLÉMÉE mentionne l'usage d'un quadrant de cercle divisé en les 90 parties d'un angle droit. Selon lui, cette méthode est commode pour avoir promptement des déterminations numériques et palpables, mais moins irreprochable que celle qui se fait par les démonstrations linéaires (⟨*διὰ*⟩ *γραμμικ*⟨*ῶν ἀποδείξεων*⟩). Aux p. 21 et suiv. il donne pour la méthode mécanique des règles détaillées, ce qui montre qu'on ne regardait pas encore la construction géométrique comme solution complète des questions de l'astronomie pratique. Dans ces règles on évite d'encombrer la planche de lignes de construction, soit en remplaçant d'une manière assez élégante une partie des constructions géométriques par un simple usage du compas, soit en faisant usage d'une équerre pour marquer les arcs donnés par leurs tangentes trigonométriques.[1])

1) Je renvoie pour cette partie de l'analemme à DELAMBRE, *Histoire de l'astronomie ancienne,* II p. 458—503. Après la revision du texte qu'on doit à M. HEIBERG, cette partie mériterait peut-être elle-aussi une nouvelle analyse. Je me borne à une modeste contribution à une telle analyse, en faisant remarquer l'état incorrect des points marqués de la figure à la p. 27. Il semble qu'un scribe ait voulu suivre l'indication du texte par rapport à la détermination du point l, sans observer qu'elle amènerait deux points différents, et qu'alors il en ait choisi celui qui ne convient pas au but de la construction. Cette méprise en a amené d'autres quant aux points m et r. — C'est avec raison que DELAMBRE rend par équerre le mot *cancer* de

Plus que ces règles nous intéresse l'analyse détaillée des dépendances d'angles et de rapports de droites établies par les constructions (p. 16 et s.), analyse qui précède les règles pour l'exécution mécanique. Elle ne contribue nullement à préparer celle-ci, et Ptolémée l'y coordonne expressément en disant (p. 16): mais comment on peut utiliser les deux méthodes, nous le montrerons brièvement pour l'une et l'autre (ἐν μέρει) en commençant par la considération linéaire.[1]) Elle est faite avec trop de soin pour n'avoir pas eu un but réel. Or elle n'aurait servi à rien si l'on ne faisait pas usage d'une table permettant de trouver effectivement les valeurs des rapports de droites déterminés, selon l'auteur, par les angles, et celles des angles déterminés par les rapports, table qu'on possédait depuis Hipparque sous forme d'une table des cordes. Nous trouvons donc ici une véritable solution trigonométrique. On voit en même temps que c'est la description de cette solution que Ptolémée appelle considération linéaire (*ἐπίσκεψις διὰ τῶν γραμμῶν*).

Tirons de cette analyse la partie (p. 16—17) qui a rapport à la détermination de la distance au zénith d. Les lettres se rapportent à la même figure sur laquelle nous avons déjà montré la construction. Dans nos additions [ ] nous désignerons la corde d'un arc x par $C(x)$ et le diamètre du cercle par D.

Quoniam ... data est ... que $dk\,[=\varphi]$, datus erit et angulus qui sub *pen*. Rectus autem qui apud p; data est ergo et ipsius *en* subtense proportio ad utramque earum que circa rectum, hoc est ad ipsas *ep*

$$\left[\frac{en}{ep}=\frac{D}{C(180^\circ-2\varphi)}\right]$$

et *pn* et ad equales ipsis scilicet *nx* et *ex*. rursum quoniam data est que *lz* periferia $[=u]$..., subtenditur autem duple ipsius *lz* periferie dupla ipsius *lm* recte ... data erit et proportio ... ips(ae) *lm* ... ad diametrum meridiani $\left[\frac{lm}{D}=\frac{C(2u)}{2D}\right]$. quare et proportio ipsius *en* que est equalis ipsi *lm* $[en=lm]$, et proportio ipsarum *ep*, *nx* laterum tetragoni

---

Mœrbecke. M. Heiberg a bien voulu me communiquer que ce mot doit être la traduction du mot grec *καρκῖνος* qui désigne soit l'animal (ainsi que la constellation et la maladie) soit un instrument géométrique.

1) *Ὃν δὲ τρόπον ἑκατέρα τῶν ἐφόδων ἐπὶ τὸ προχειρότατον ἡμῖν ἐκληφθήσεται, δείξομεν ἐν μέρει κεφαλαιωδῶς προτάξαντες τὴν διὰ τῶν γραμμῶν ἐπίσκεψιν ἔχον(σ)⟨αν οὕτως⟩*. M. Heiberg, à qui je m'adressai sur ces paroles si essentielles, en a donné la traduction qui se trouve dans mon texte. La coordination des deux méthodes, semblable selon M. Heiberg à celles qu'on retrouve souvent dans la *Syntaxe*, est du reste confirmée par les paroles dont commence la déscription de la détermination mécanique (p. 20): *que quidem igitur per lineas acceptiones angulorum et subtensarum ipsis periferiarum sic utique nobis ad manum fient. in hiis autem ...*

$$\left[\frac{ep}{D} = \frac{C(2u)}{2D} \cdot \frac{C(180^0 - 2\varphi)}{D}\right].$$

quoniam et ipsius *epr* rectanguli data est que *ep* et que *pr*, et[1]) que $er\left[= \frac{D}{2}\right]$ subtendens dabitur et angulus qui sub *erp* et reliquus qui sub *per*, simul cum ipso et que *dr* periferia $\left[\frac{C(2br)}{D} = \frac{ep}{er} = \frac{C(180^0 - 2d)}{D}\right]$ existens equalis ei que circuli descensiui $[= d]$.

En résumé, on aura

$$\frac{C(180^0 - 2d)}{D} = \frac{C(2u)}{D} \cdot \frac{C(180^0 - 2\varphi)}{D}.$$

Cette traduction en formules modernes est immédiate pour le rapport $\frac{C(2u)}{D}$ et montre que les déterminations de rapports au moyen d'angles donnés, et réciproquement, ont été faites, comme dans la *Syntaxe*, au moyen d'une table des cordes d'un cercle dont on connaît le diamètre. La détermination mentionnée d'un rapport de deux côtés d'un triangle rectangle par un de ses angles, et la détermination réciproque, devant être faites au moyen de la même table, nous y avons appliqué la même transcription algébrique. On voit du reste que la formule qui rend ainsi exactement les règles de calcul que Ptolémée tire avec tant de soin de sa figure est identique à la suivante

$$\cos d = \sin u \cdot \cos \varphi$$

ou si l'on remplace d et u par la hauteur $h (= 90^0 - d)$ et par l'heure (négative ou positive) à partir du méridien $t (= 90^0 - u)$

$$\sin h = \cos t \cdot \cos \varphi.$$

Ayant vu par cet exemple que l'usage d'une table des cordes a été moins incommode qu'on ne le croit ordinairement — ce qui explique qu'on ne s'est pas plus empressé d'abandonner un instrument auquel on s'était accoutumé[2]) —, pour la commodité des lecteurs modernes, dans ce qui suit nous exprimerons au moyen des symboles connus de la trigonométrie les rapports de droites dont parle Ptolémée.

A la même figure se rattache la détermination de l'azimuth ω (ou plutôt de $90^0 - \omega$). Il résulte de nos explications de la figure que nl est la distance absolue du soleil au méridien et que par conséquent

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{nl}{ex} = \frac{\cos u}{\sin u \cdot \sin \varphi} = \frac{\cot u}{\sin \varphi} = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin \varphi}.$$

---

1) Il y a ici une petite incorrection; car *pr* n'est connu que parce que déjà *ep* et *er* sont connus. Le texte grec présente ici trop de lacunes pour corriger la traduction de Mœrbecke.

2) Nous n'avons donc pas besoin de discuter ici l'hypothèse de M. Paul Tannery sur l'usage possible des *sinus* dans une autre école grecque.

Cette relation est rendue manifeste dans la figure par la construction suivante. Soit $xc = ln$; alors on aura $\sphericalangle\, xec$, ou l'arc $bf = \omega$. Quant à la détermination d'un angle donné par sa tangente nous citerons encore d'après l'analemme p. 18:

> ... quoniam et ipsius *exc* rectanguli data est que *ex* et que *xc*, dabitur et subtensa que *ec* et angulus qui sub *ecx* ...

Cette phrase, qui se répète presque mot à mot partout où il s'agit de déterminer un angle d'un triangle rectangle dont on connaît les rapports des côtés de l'angle droit à une quantité donnée, montre qu'on commençait par trouver celui de l'hypoténuse, ce qui permettait ensuite de déterminer l'angle par son *sinus* ou par le rapport de la corde de l'arc double au diamètre. Du reste Ptolémée aurait eu aussi à sa disposition sa détermination de deux arcs dont on connaît la somme et le rapport des cordes des arcs doubles (ou des *sinus*).

Il est inutile d'insister sur la détermination analogue des coordonnées sphériques par rapport au premier plan vertical, qui sont trouvées au moyen de la même figure.

Ptolémée n'en reste pas là. Il construit aussi les coordonnées sphériques d'un point (le soleil) par rapport à l'horizon et par rapport au premier plan vertical, l'heure et la déclinaison étant données, et il montre avec le même soin et en détail, comment on peut profiter de la figure construite pour calculer trigonométriquement les quantités construites. Nous indiquerons brièvement les formules trigonométriques qui exprimeraient les mêmes calculs que demandent ses règles. Afin de nous en tenir plus spécialement à sa figure (p. 18), où le soleil se trouve dans l'hémisphère méridional, nous désignerons par δ' la déclinaison négative, tandis que φ, t, h, ω ont les mêmes significations que dans ce qui précède.

Ptolémée commence par déterminer l'arc diurne 2α d'une étoile qui a une déclinaison donnée δ'. Elle se détermine par la formule

$$\cos \alpha = \operatorname{tg} \delta' \cdot \operatorname{tg} \varphi .$$

Il a besoin de cette détermination parce que, ici comme dans la recherche précédente, il prend pour origine des heures, non pas la culmination mais le lever du soleil. Ce n'est donc pas immédiatement l'heure (négative) t, mais l'angle $u = \alpha - t$ qu'il regarde comme donné. Cette détermination nous intéresse particulièrement parce qu'Hipparque en fait usage dans son commentaire sur Aratus et Eudoxe [1]) et ailleurs, à en juger d'après les titres de ses autres travaux. Il est donc à supposer que sa démonstration

1) Édition de Manitius p. 26—27 et p. 150—151.

géométrique ou graphique dont nous avons déjà parlé, est précisément celle que nous rapporte ici PTOLÉMÉE.[1])

Les calculs successifs indiqués pour trouver la hauteur h et l'azimuth ω s'exprimeraient par les formules

$$\sin h = (\cos \delta' \cos t - \sin \delta' \operatorname{tg} \varphi) \cdot \cos \varphi$$

et

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\cos \delta' \sin t}{\frac{\sin \delta'}{\cos \varphi} + [\cos \delta' \cos t - \sin \delta' \operatorname{tg} \varphi] \sin \varphi}$$

La réduction du dénominateur à

$$\sin \delta' \cos \varphi + \cos \delta' \cos t \sin \varphi$$

pourrait très bien se faire en considérant la figure de l'analemme; mais le texte n'en contient rien. Il est donc probable que dans le calcul on a suivi la marche indiquée par notre formule; elle est assez commode lorsqu'il faut en même temps déterminer h.

On voit que les Grecs ont su résoudre deux questions qui, dans la trigonométrie sphérique moderne, dépendraient de la résolution générale d'un triangle dont on connaît un angle et les deux côtés adjacents. On n'a pas fait directement cette résolution parce qu'on posait les questions autrement; mais il est évident que toute autre question qui se réduit à ladite résolution d'un triangle pourrait être résolue par le procédé ci-dessus. Ces remarques sont à peu près les mêmes que celles de M. BRAUNMÜHL à l'occasion des solutions que, selon ce savant, les géomètres Hindous déduisaient des constructions de l'analemme. A présent on voit qu'aussi à l'égard de l'emploi trigonométrique des figures construites, les Grecs ont précédé les Hindous. La seule chose que nous rencontrions chez les Hindous sans l'avoir rencontrée dans les ouvrages grecs qui nous sont parvenus, c'est l'usage de tables de sinus au lieu des tables de cordes.

Copenhague le 31 janvier 1900.

---

1) Alors le savant éditeur d'HIPPARQUE aura mieux caratérisé son procédé comme *geometrische Rechnungsnachweise* (p. 286) que ne le fait M. BRAUNMÜHL en parlant d'une *méthode* graphique.

Notice sur un manuscrit arabe traitant de machines attribuées à Héron, Philon et Archimède.

Par

Carra de Vaux à Paris.

1. Le manuscrit arabe 954 de la bibliothèque bodléienne à Oxford, dont je m'occuperai dans cet article, a été remarqué depuis longtemps. Renan l'avait signalé à Th. H. Martin.[1] Je l'étudiai il y a deux ans avec le désir de le publier, et j'en acquis une photographie; mais je reconnus que le texte était mauvais, que l'ordre des articles semblait troublé, que beaucoup de figures manquaient et que celles qui existaient étaient insuffisantes. Heureusement je découvris quelques mois plus tard que deux recueils analogues et en état meilleur se trouvaient à la bibliothèque de Ste Sophie de Constantinople. Le ms. 2755 de cette bibliothèque, qui contient les Mécaniques de Héron, selon la recension de Kosta ben Louka, renferme à la suite quatre autres traités: 1° Le livre des roues qui se meuvent d'elles-mêmes, qui existe dans le ms. d'Oxford; 2° Deux traités sur les orgues sous forme d'épîtres adressées à Mouristos (*sic*). 3° «Le livre de Philon sur les appareils à air et les machines à eau». — Un autre ms. de Ste Sophie, le 3713, renferme «le livre de Philon sur les appareils à air». Ce dernier est meilleur que le précédent, lequel est lui même meilleur que le ms. d'Oxford. — En outre, il y a dans la même bibliothèque un superbe traité de mécanique qui est celui de Bédi ez-zaman el Djazari. Il porte le n 3606. Il est illustré de nombreuses figures coloriées avec le plus grand soin dans le goût persan et indien. C'est un des plus beaux manuscrits arabes que j'aie vus.[2] Grâce à ces ressources, et, avec le concours d'un savant de Constantinople, j'espérais arriver à une publication importante sur les recueils de mécanique arabe;

1) Th. H. Martin, *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie*, p. 49.

2) Les lettres qui servent à la désignation des parties des figures dans ce ms. appartiennent à un alphabet spécial dit alphabet magique; la concordance de ces lettres avec les lettres arabes ordinaires est [illegible] à la fin du volume. Le même tableau de concordance se retrouve [illegible] que ce ms. n'emploie que les lettres arabes.

je l'espère encore; mais les travaux d'érudition ne s'exécutent pas en Orient avec autant de régularité et de promptitude qu'en France, et je ne sais pas encore quand cette publication sera prête. Aussi crois-je être agréable aux lecteurs de la Bibliotheca Mathematica en leur donnant, sans plus attendre, une analyse un peu développée du ms. d'Oxford.

2. Ce ms. a pour titre général: «Ce qu'a tiré HÉRON du livre de PHILON et d'ARCHIMÈDE les Grecs, touchant la traction des fardeaux, et les balles et les eaux et les vases et ce qui y ressemble». Il n'est pas bien sûr que ce titre soit contemporain du manuscrit; il est visible, en tout cas, qu'il ne doit pas être pris à la lettre. Nous n'avons pas ici une traduction d'un ouvrage de HÉRON, mais bien une recension faite par un oriental d'après les travaux de HÉRON, de PHILON et d'autres. Ce texte renferme beaucoup de mots techniques persans.[1]) Il y a lieu de croire que les arts mécaniques ont été transmis des Grecs aux Arabes par l'intermédiaire des Persans.

3. L'ouvrage débute par une petite section qui, sous le titre: «Premier recueil d'instruments et d'appareils», ne comprend que 3 appareils. Le 3ème est l'amphore d'où sortent à volonté quatre liquides, truc bien connu.[2]) Les deux premiers sont des pompes. 1° Une pompe à soufflet destinée à faire monter l'eau d'un puits. Le puits est fermé en haut; le soufflet, cylindrique et ajouré, descend le long de la paroi; il est muni en bas d'un collier de plomb qui le maintient adhérent au sol du puits. Dans le couvercle du soufflet est monté un tuyau qui ressort en haut du puits. Un levier, placé à l'extérieur, sert à élever ou à abaisser le système du tuyau et du soufflet. Quand on l'élève, les jours du soufflet s'ouvrent et l'eau pénètre à l'intérieur; quand on l'abaisse l'eau se trouve refoulée dans le tuyau.[3]) — 2° Une pompe aspirante et foulante à double jeu, tout-à-fait comparable à l'appareil XXVIII (p. 131) de HÉRON, mais moins bien décrite.

4. Après ces trois appareils s'ouvre un chapitre intitulé: «Le livre des roues qui se meuvent d'elles-mêmes». C'est un titre que nous avons déja rencontré dans le ms. 2755 de Ste Sophie. J'ai beaucoup hésité sur le sens de ce chapitre; je me refusais à croire ce qu'il me semblait comprendre. Il paraît bien pourtant qu'en définitive il n'y a pas de doute:

---

1) Dans un traité des clepsydres que j'ai analysé dans le Journal Asiatique (*Notice sur deux manuscrits arabes,* 1891, I, page 295), j'ai rencontré aussi beaucoup de mots persans.

2) V. dans le premier volume des œuvres de HÉRON dans la collection Teubner, éd. WILHELM SCHMIDT, l'appareil XVI de PHILON, p. 489.

3) Ce soufflet est comparé à celui des orfèvres dont le nom téchnique est *zouqi* ou *zowaqi*.

c'est un recueil d'appareils chimériques destinés à réaliser le mouvement perpétuel. S'il devenait certain plus tard que je me suis trompé, l'on devrait m'excuser à cause du mauvais état du manuscrit et de l'extrême grossièreté des figures. Mais, je le répète, je ne crois pas faire erreur. Déjà à la fin de la description de la seconde pompe ci-dessus, était ajoutée une glose dans laquelle l'auteur de la recension recommandait d'adapter au levier de la pompe une roue à poids du genre de celles qui tournent d'elles-mêmes, afin que l'eau montât perpétuellement. Il semble bien au reste que l'idée de construire des roues à mouvement perpétuel ait été inspirée par la vue des moulins à eau que le courant fait tourner toujours. Mais je ne pense pas que dans ce chapitre, il puisse s'agir, sauf pour l'appareil 3, de simples moulins à eau.

Les deux premiers appareils du «Livre des roues qui tournent d'elles-mêmes», sont obscurs. A la fin de la description du premier, auquel manque la figure, l'auteur dit: «Ce ms. a été gâté. Au lieu de cet appareil, on en a copié un autre dans le recueil *el-barchâ'châ*, et nous n'avons pas pour lui de figure; restituez-la d'après l'explication». Le recenseur disposait évidemment d'un mauvais manuscrit.

L'appareil 3 est une jolie machine qui peut s'expliquer par l'action de l'eau courante sans qu'on ait besoin de recourir au mouvement perpétuel. L'eau tombant sur une roue à palettes entraîne la rotation d'un axe vertical auquel est liée la figure d'un bœuf; et un engrenage placé en haut de l'axe, conduit le mouvement d'une chaîne à godets qui élève une portion de l'eau. On a l'illusion que c'est le bœuf qui fait tourner la machine et qui monte l'eau.[1])

L'appareil 4 manque; le 5 est obscur. Le 6, plus clair, nous fournira un bon exemple de ce que l'auteur croit être une roue à mouvement perpétuel: autour d'une roue sont disposés des petits récipients ayant la forme d'un tube terminé par deux renflements ovoïdes. Ces récipients sont placés obliquement. Ils contiennent une certaine quantité de mercure qui passe d'un renflement à l'autre pendant que la roue tourne. Le poids du mercure qui est dans le renflement le plus éloigné du centre l'emporte, d'après la loi du levier, sur le poids du mercure dans le renflement le plus rapproché; et comme, à cause de l'inclinaison des récipients, le mercure vient toujours près du centre d'un côté de la roue et s'en éloigne de l'autre, il s'ensuit que le mouvement ne s'arrête jamais. —

1) Il y a dans ce numéro un détail curieux pour l'histoire de la peinture: Ce qui n'est pas en cuivre dans l'appareil, apparemment ce qui est en bois, est décoré au moyen de «couleurs mêlées avec de l'huile de lin, broyées avec elle sur les pierres». Ces couleurs, est-il dit, ne sont pas altérées par l'eau ni par autre chose, sinon en un temps très long.

Dans un appareil ajouté au f° 57, la même idée est appliquée à une roue à sections en spirale. — Un effet analogue est obtenu dans l'appareil 8, au moyen d'espèces de chapelets de poids: des segments de bois sont enfilés dans des chaînes de longueur fixe et sectionnés obliquement de telle sorte que, quand ils se rejoignent les uns les autres, ils se disposent en courbe. On place un certain nombre de ces chapelets autour d'une roue. Vers le haut de la roue, les segments de bois, par l'effet de leur pesanteur, se ramassent sur la circonférence; vers le bas, au contraire, ils glissent le long de la chaîne, en s'éloignant de la circonférence. A cause de l'obliquité de leur section, ils commencent à glisser plus vite d'un côté de la roue que de l'autre. De ce côté là, leur poids l'emporte, parce qu'il agit plus loin du centre, et la roue tourne.

L'appareil 7 est obscur. Des poids lourds servent de moteurs. Cette machine, est-il dit, a une très grande force. — Enfin l'appareil 9 a l'air d'une plaisanterie: C'est un système pour arrêter ces roues. Il s'agit d'enclancher une certaine pièce de bois: «Si vous vous trompez sur la place du bois, vous ne pourrez pas arrêter la roue quand même vous seriez 10 000 hommes.»

Je suppose que ces rêveries sur le mouvement perpétuel ont pu prendre naissance peu après l'invention des moulins à eau. Il est à remarquer que ce chapitre contient des mots persans.

5. Après le Livre des roues qui se meuvent d'elles-mêmes, vient un traité sur la «construction des horloges à balles et à corbeau» comprenant seulement deux numéros (f^os 19—25). Le mécanisme même de l'horloge n'est pas expliqué dans ce morceau, et il est probable qu'il faut le lier à un fragment d'une page qui se trouve à la fin du ms. (f° 95) et où est expliqué la construction de la clepsydre. Ce fragment est attribué à Archimède; on sait que les Arabes attribuaient généralement à Archimède un traité des clepsydres. Nous en avons analysé un qui est placé sous son nom, dans le Journal Asiatique 1891, tome I. La clepsydre y est décrite identiquement comme dans le fragment dont nous parlons maintenant, si ce n'est que dans celui-ci la description est inachevée. Ce fragment débute par ces mots: «Archimède a dit: ô mon cher Ariston[1]), je veux t'expliquer comment on construit les horloges d'eau et le mécanisme des balles et d'autres mécanismes, afin de satisfaire ton désir d'être instruit en cette matière.» Puis Archimède explique la construction des trois caisses superposées qui forment la clepsydre: celle du milieu contenant le flotteur, celle d'en haut la poulie, liée au flotteur par une chaîne, qui transmet le mouvement aux divers mécanismes, celle d'en bas servant

1) Le texte porte Mariston.

de réservoir à l'eau tombée de la clepsydre. Le régulateur qui assure la constance de la vitesse d'écoulement n'est pas décrit dans cette page.

Revenons aux appareils des folios 19—25. Ils sont assez compliqués; mais ils se ramènent en somme à des jeux de leviers. Dans le premier appareil, un fléau à bras inégaux, mobile sur deux tourillons, a, à l'extrémité de son bras le plus long, une espèce de cuiller. A l'extrémité du bras court il porte un plateau au-dessus duquel débouche une espèce de trompe inclinée, liée au plateau et qui bascule quand le plateau monte. Les balles, arrivant d'en haut, tombent des deux côtés du fléau. Celle qui est tombée dans la cuiller fait baisser le fléau de ce côte; elle-même continue à tomber et va sortir par le bas de l'appareil. La balle tombée du côté du plateau est absorbée par la trompe au moment où ce côté du fléau s'élève; la trompe bascule et fait remonter la balle sur un cercle, à un niveau plus élevé que celui où elle était sur le plateau. Une clé, liée au plateau par l'intermédiaire d'un fil, ne laisse tomber qu'une balle à la fois.

Le second mécanisme est encore plus complexe et la figure en est détestable. En voici le principe: Un oiseau appelé *bîgâ* dont la partie inférieure du bec est mobile, sort la tête, et crache la balle comme dans la clepsydre ordinaire.[1]) La balle tombe sur le sol d'une arcade. De l'autre côté de l'arcade, en face de la *bîgâ*, sort un corbeau qui ouvre le bec, recueille la balle et l'avale. La tête du corbeau joue le rôle de la trompe du numéro précédent. Elle est placée à l'extrémité d'un fléau, à l'autre bout duquel est un plateau où tombe une autre balle. Un système de clé comme ci-dessus, lié au corbeau, ne laisse tomber les balles qu'une à une. — La figure donne en plus l'image d'une servante qui tourne pendant le mouvement, au moyen d'une poulie et d'un fil lié au fléau de la *bîgâ*.

Ce ne sont là en somme que des bascules. Ces appareils peuvent être anciens. Je ne sais s'il conviendrait de les attribuer à CTÉSIBIUS plutôt qu'à ARCHIMÈDE.

6. Au f° 26 commence une série de 15 appareils numérotés, qui ne porte pas de titre général. La plupart de ces appareils sont intéressants.

Les cinq premiers sont des systèmes hydrauliques: 1° Un mécanisme de bascule. D'un côté de la bascule est le seau qui prend l'eau; de l'autre côte s'appuie un plan incliné mobile, sur lequel on monte pour abaisser ce côté de la bascule et élever le seau. Le système est double. — 2° Une chaîne à godets mue au moyen de deux poulies inégales; on déroule avec

1) V. notre *Notice sur deux manuscrits arabes;* Journal Asiatique 1891, I, p. 301.

la plus petite poulie une corde enroulée sur la plus grande qui commande le mouvement de la chaîne. Il est dit que ce système est analogue à celui qu'emploient les cordiers pour tordre les fils, et qu'il est très aisé. — 3° Une amphore en cuir de bœuf que l'on élève à l'aide d'un treuil. — 4° Une chaîne à godets mue par une grande roue dans laquelle marche un homme. Cette roue a une porte et est percée de jours pour la ventilation. — 5° Un train d'engrenages meut une roue d'où sortent quatre pieux. Chacun de ces pieux appuie successivement sur l'extrémité d'une bascule à l'autre bout de laquelle est le seau qui prend l'eau; après le passage de chaque pieu le seau retombe dans l'eau. — Tous ces systèmes sont ingénieux et pratiques.

Le 6 et le 7 sont des jets d'eau. Dans 6, le jet arrive dans une pomme au centre de laquelle est un disque de plomb percé de trous obliques. L'eau s'échappe en nappes, en vasques, en pluie, par ces trous, et sort en jet par le sommet de la pomme. — Dans 7, on monte sur le jet une tête de chèvre formant robinet, et, suivant le sens où on la tourne, l'eau passe par cette tête ou par différents trous. — Le jet d'eau dans ces deux systèmes est obtenu par le procédé usuel des vases communiquants.

8 est une sorte de cloche à plongeur. On y met un flambeau allumé. La cloche a l'aspect d'une chambre à quatre fenêtres ouvertes. Quand on plonge l'appareil dans l'eau et qu'on le retire le flambeau ne s'éteint pas. Cet effet est obtenu en rendant le sol de la chambre mobile et en y soudant des parois intérieures. Quand l'appareil entre dans l'eau, le sol monte et les parois viennent boucher les fenêtres; une corniche contre laquelle elles buttent sert d'obturateur.

9 est un jeu bizarre: un encrier ayant la forme d'un dé cubique ou octaèdre est percé d'un trou dans chacune de ses faces. Sur quelque face qu'on le tourne, on y peut prendre l'encre, sans que jamais elle se renverse. Le dispositif intérieur qui permet d'obtenir ce résultat n'est autre qu'une suspension à la CARDAN: Un récipient central, contenant l'encre, est monté sur un double système de tourillons constituant deux axes qui se croisent à angle droit. Le texte ajoute: «Ce truc est comme celui du trône de SALOMON fils de DAVID. Lorsqu'une personne connaissant ce trône, s'y asseoit, le trône tient; quand c'est une personne qui ne le connaît pas, le trône se renverse.» Le nom de SALOMON donné à un jeu populaire nous reporte vraisemblablement à l'époque musulmane.

Les systèmes 10 et 11 sont des instruments à vapeur. Dans 10, un feu est allumé au-dessus d'un réservoir d'eau. Un tuyau sortant de ce réservoir vient se recourber au-dessus du foyer et y amène la vapeur. Celle-ci souffle le feu. — 11 est fondé sur le même principe; mais la vapeur, au lieu d'être ramenée sur le feu, est employée à faire siffler des oiseaux. Le rédacteur avertit que ce procédé peutêtre généralisé: «Il y a aussi de ces appareils qui sont à jet: la vapeur sortant de la bouche d'une image, lance une flèche... Vous ferez en ce genre tout ce que vous voudrez.» L'homme qui écrivait ces lignes était bien près d'avoir une idée nette de la force de la vapeur.

L'appareil 12 est un oiseau qui siffle par le passage de l'air comprimé par l'eau. Ce système est connu. — Le 13 est encore un appareil siffleur qui prend l'importance d'une véritable sirène. C'est une turbine divisée en compartiments. L'air des compartiments qui entrent dans l'eau pendant la rotation, se trouve comprimé par l'eau; il est refoulé vers le centre de la turbine d'où il s'échappe au dehors par des passages étroits en produisant un sifflement. — Le 14 est un appareil obscur qui rappelle les machines à mouvement perpétuel. C'est une turbine avec deux cercles divisés par des sections en spirales, l'un intérieur, l'autre extérieur. Les spirales sont tournées dans un certain sens, dans le cercle intérieur et en sens opposé dans le cercle extérieur. Les sections communiquent d'un cercle à l'autre. L'auteur paraît croire que cette turbine pourra élever l'eau d'un lieu où elle est stagnante, sans intervention d'aucune force. Evidemment l'auteur de tout ce recueil était hanté d'idées chimériques sur le chapitre spécial des moulins à eau. — Enfin l'appareil 15 est une espèce de geyser: une caisse munie d'un gros tuyau dans sa partie inférieur et d'un tube plus petit et recourbé dans sa partie supérieure, est plongée brusquement dans l'eau. L'air, comprimé, s'échappe par le petit tube, en projetant une partie de l'eau.

En somme, ce recueil est curieux. Il paraît témoigner d'un progrès des arts mécaniques sur plusieurs points. Nous y avons remarqué des systèmes variés de machines hydrauliques et de jets d'eau, une idée de la sirène, une plus grande habitude des effets de la vapeur, la connaissance précise de la suspension à la Cardan. L'intervention de la légende salomonienne dans ce chapitre semble indiquer que sa dernière rédaction est d'une époque très tardive.

7. Le traité attribué à Philon dont il nous reste à parler, a, au contraire, un cachet bien archaïque. Il est regrettable que le texte en soit assez maltraité dans le ms. d'Oxford et que beaucoup de figures manquent. Heureusement, comme nous l'avons dit, les manuscrits de Constantinople sont meilleurs.

Le livre de Philon tient toute la seconde moitié du ms. d'Oxford, du f° 49 au f° 94. Il comprend 24 articles non numérotés. Le titre est: «Livre de Philon sur les machines à air dans les coupes et les cruches»; et le début: «J'ai appris, mon cher Ariston, le désir que tu avais de connaître les machines élégantes; c'est pourquoi j'ai voulu te dédier livre, pour que tu y trouves ta satisfaction.» Aussitôt après commence la description du premier appareil. Le début est un peu plus allongé dans les manuscrits de Constantinople, et il se rapproche davantage de celui du texte latin du *De ingeniis spiritualibus*: — «Livre de PHILON sur les appareils à air et les machines à eau. Il dit: J'ai appris, mon cher ARISTON, le désir que tu avais de connaître les machines élégantes; c'est pourquoi j'ai voulu te répondre en te dédiant ce livre, afin qu'il te serve de modèle en tout ce que tu recherches sur la mécanique. Je commencerai d'abord par la construction des appareils à air. Beaucoup de choses en chacun de ces arts ont été connues des savants antérieurs; car les philosophes qui . . . etc.». Le volume du livre de PHILON dans ce ms. est beaucoup plus considérable que dans le ms. d'Oxford; l'ordre ne paraît pas être le même dans les deux textes. Le second numéro du ms. d'Oxford ne se trouve qu'à la 18ème page du ms. de Ste Sophie. Je pense que mon collaborateur, de qui je tiens ces détails, parle du ms. 3713 de Ste Sophie. Je ne suis d'ailleurs pas capable pour le moment de donner plus de renseignements sur les textes de Constantinople, et je reviens à l'analyse du texte d'Oxford.

1er appareil; l'amphore dite la voleuse de vin. C'est un appareil connu, du type de celui que décrit HÉRON, page 66. — Les appareils 2 et 18 sont aussi des voleuses de vin. Ils sont appelés du nom persan qui a cette signification: *mai dozd*. Le 2 est du même type que le 1; mais il est divisé en deux compartiments, l'un pour le vin l'autre pour l'eau. Le 18, où la figure manque, est une voleuse de vin dans laquelle tout ou partie du liquide disparaît suivant que l'on tourne un tube dans un sens ou dans un autre. L'effet est naturellement obtenu au moyen d'une communication de trous que tantôt on établit et tantôt on intercepte.

Une autre série d'appareils se rattachent à ceux-là, fondés sur une combinaison de coupes. On place une petite coupe dans une plus grande. Le bord de la grande est recourbé au-dessus du bord de la petite, de façon que pour l'œil il n'y ait qu'une seule coupe; mais sous ce bourrelet peut passer soit l'air, soit le liquide. Un trou est percé au fond de la plus grande coupe et communique avec un tuyau. Si le tuyau débouche dans un réservoir fermé, et qu'on verse de l'eau dans la petite coupe, au moment où cette eau arrive au niveau du rebord, la communication du tuyau avec l'air extérieur est interceptée, et cela peut donner lieu, dans la coupe ou dans le réservoir, à différents effets. — Dans l'appareil 4, par exemple, le réservoir d'où l'eau tombe dans la coupe est précisément celui auquel aboutit le tuyau, en sorte que, au moment où la coupe est remplie jusqu'au bord, l'air ne pouvant plus passer par le tuyau, le vide [illegible] celui-ci et dans le réservoir et l'écoulement cesse. — Les appareils 19 à 24, qui sont sans figure, ont le même principe. Ils sont aussi appelés voleuses de vin. Les effets qui s'y produisent sont des effets de syphon. Dans plusieurs de ces appareils, des figures d'animaux placées sur les coupes semblent boire tout ou partie de ce qu'elles renferment. Au n° 24, c'est l'opérateur lui-même qui boit sans incliner la coupe; au n° 22 il boit à volonté le liquide de la coupe intérieure seulement, ou aussi le liquide qui est contenu dans l'espace entre les deux coupes.

Les animaux buveurs sont un type d'appareil affectionné par les anciens mécaniciens. Voyez HÉRON, *Opera*, Tome 1, page 137 et suivantes. Dans notre traité, nous avons en ce genre, outre les appareils que nous venons de citer, les numéros 8 et 9. Il s'agit toujours d'amorcer un syphon qui passe dans le ventre de l'animal. Ces appareils peuvent être disposées pour servir de lavabos. Dans 8 notamment, l'eau sort d'un robinet venant d'un réservoir supérieur; on se lave les mains avec elle, et elle tombe ensuite dans une cuvette où un cheval penche sa tête. Quand cette eau a atteint un certain niveau dans la cuvette, elle bouche un trou d'air, le syphon s'amorce et le cheval la boit. Au lieu du robinet, on place plus élégamment la figure d'une servante inclinant une aiguière.

L'appareil 5 est de type plus compliqué, mais ne diffère pas essentiellement des précédents. Une figure de servante en cuivre ou en argent tient dans sa main gauche une coupe. Elle y verse d'abord du *nébid* (vin de dattes) en quantité déterminée, puis de l'eau qui se mélange à ce *nébid*. La tête et la poitrine de la servante constituent un réservoir partagé en deux, où circulent des tuyaux pour l'écoulement des liquides et pour l'appel d'air. Le bras gauche est un levier mobile sur un tourillon situé sous l'épaule. Quand on place la coupe dans la main, tout le bras s'incline, et l'autre côté du levier se mouvant débouche successivement deux trous d'air pour le passage du *nébid* et de l'eau. Si l'on ôte la coupe, le levier bascule en sens inverse, les deux trous se rebouchent et l'écoulement cesse.

Le numéro 3 nous apprend à construire un vase dont il ne sort, à chaque fois qu'on ouvre le robinet, qu'une quantité d'eau déterminée. Il y a tout simplement, à l'intérieur du vase, une chambre de la capacité voulue, qui communique avec le robinet. Cette chambre est munie d'une porte ouvrant sur l'intérieur du vase. Quand on ferme le robinet, un fil tire cette porte qui s'ouvre, et la chambre se remplit d'eau; quand on ouvre le robinet, la porte se referme par son propre poids, et il ne sort du vase que l'eau contenue dans la chambre.

L'appareil 6 est du genre de ceux qu'on adapte aux clepsydres. Il comporte deux fléaux, l'un terminé par une cuiller où tombe de l'eau, l'autre par une main où tombent des boules. Quand la cuiller est pleine, elle bascule, et l'autre extrémité du fléau tire un fil qui ouvre la clé des boules; une boule tombe sur la main qui s'incline, ouvrant une porte. On prend la boule offerte par la main et on l'ouvre: elle contient la figure d'un homme qui fait ses ablutions avec l'eau tombée dans la cuiller. Cette idée de mettre un homme dans chaque boule paraît fantaisiste, et l'action de cette figure humaine n'est pas détaillée mécaniquement. — L'appareil 7 est une variante simplifiée du précédent: La main tient une coupe; quand cette coupe est pleine, elle fait incliner la main qui ouvre la porte. On prend la coupe, la main remonte et la porte se referme.[1])

Les appareils 10, 12 et 13 sont faciles. Ce sont des aspersoirs. Une petite pompe foulante est placée dans un vase. Quand on presse de l'extérieur sur son piston, l'eau jaillit par une pomme d'arrosoir, ou par un bec d'oiseau, etc. — L'appareil 14 a peu d'intérêt. Une amphore est munie, en guise de pied, d'un tube qui remonte à l'intérieur jusque vers son col. Si l'on essaie de remplir cette amphore par le haut, toute l'eau s'écoule par ce tube; mais si on la plonge dans l'eau, celle-ci se répand autour du tube et tient dans le vase.

Les appareils 11, 15, 16 et 17 sont des flotteurs dont l'effet est joli et le principe fort simple. Des figures montées sur de petits flotteurs s'élèvent plus ou moins vite quand on verse de l'eau dans les vases qui les contiennent, et redescendent quand l'eau s'écoule. Il y a des tiges sous les flotteurs qui les séparent inégalement du fond du vase, de façon que le niveau de l'eau, quand on la verse, les atteint plus ou moins tôt. On obtient ainsi, par exemple, l'appareil 15: Dans un espace clos se dresse un arbre, sur lequel est un oiseau qui couve ses petits. D'un trou ouvert à la racine de l'arbre sort un serpent qui vient menacer les poussins; lorsqu'il en est tout près, l'oiseau se lève en déployant ses ailes. Le mouvement des ailes est ingénieusement commandé par une tige fixée au sol de la chambre, qui traverse le flotteur et le tube portant l'oiseau. Cette tige rend fixe le point milieu où se rencontrent les deux ailes sur le dos de l'oiseau; celles-ci, formant levier, s'élèvent alors sur les côtés.

Il semble donc que tous ces appareils sont de types antérieurs à ceux décrits par Héron. La physique en est bonne; ils sont ingénieux, élégants et simples. Je suis porté à croire que leur attribution à Philon est authentique.

En terminant, je rappellerai seulement la phrase de Hadji-Khalfa sur les appareils pneumatiques. Il dit: «Les plus célèbres ouvrages [arabes]

---

1) V. notre *Notice*, p. 303 et 304; mais j'ai dû faire erreur en parlant de ressort. Je ne crois pas qu'il y ait de ressort dans tous ces appareils; des poids en font fonction.

en ce genre sont la mécanique des fils de MOUSA fils de CHÂKIR [1]) et un abrégé par PHILON et un livre étendu par BÉDI EL-DJAZARI.» Nous possédons, ai-je dit, le livre de BÉDI. L'abrégé de PHILON est sans doute le dernier traité dont nous venons de parler. Faudrait-il attribuer aux célèbres fils de MOUSA le reste du recueil? Je ne sais; mais cette attribution n'aurait rien d'invraisemblable.

---

1) Célèbres mathématiciens du temps de MOTADID (892 à 901). V. l'*Histoire des Dynasties* d'ABOU'L-FARADJ (éd. SALHANI, p. 264).

Notes sur la Pseudo-Géométrie de Boèce.

Par

Paul Tannery à Pantin.

1.[1])

Dans le second volume des *Gromatici veteres* (Berlin 1852, Reimer, p. 66—68) Blume dit qu'il existe des manuscrits où la *Géométrie* de Boèce est mise sous le nom de Nypsus; il en énumère deux: «Der «älteste bisher bekannte Kodex dieser Klasse, nämlich der Bamberger «HJ IV 22, von Jäck in das elfte, von Hrn. Professor von Jan zu «Schweinfurt mit besseren Gründen in das neunte oder zehnte Jahrhundert «gesetzt.[2]) Enthält auf 29 Seiten nur die *Demonstratio artis geometricæ* «unter dem Titel: *Lib. Junij Nipsj de mensuris.* Wir besitzen durch die «Güte des Hrn. von Jan eine vollständige Abschrift. Von Lachmann als «cod. *b* benutzt und in der Tabelle pag. XI genauer zerlegt.»[3])

Quoique Lachmann, qui parle plus longuement de ce manuscrit de Bamberg (*ibid.* p. 82—90), ne relève nullement cette attribution singulière, personne ne pourrait certainement s'imaginer, en lisant le passage de Blume ci-dessus, qu'elle se présente sous la forme d'une note, écrite, au XVII^e siècle seulement, dans le blanc réservé pour inscrire une rubrique beaucoup plus longue, rubrique qui n'a jamais été mise, comme c'est si souvent le cas dans les manuscrits latins.

Il est clair que l'on n'a à tenir aucun compte de cette note, et que le *Bambergensis* doit valoir comme manuscrit anonyme.

---

1) Je désigne par le mot *Pseudo-Géométrie* la compilation (en cinq livres) qui existait sous le nom de Boèce dès le IXe siècle, sinon plus tôt, et qui n'est rien moins qu'une *Géométrie*. Elle diffère essentiellement, comme on sait, de la *Géométrie* en deux livres, où il est parlé de l'*abacus* et des *apices*, et dont le plus ancien manuscrit connu, celui d'Erlangen, est du XIe siècle.

2) Jäck, *Beschreibung der öffentlichen Bibliothek zu Bamberg,* T. I, 1831, S. 119. — Dazu L. von Jan in der Zeitschrift für Altertumswissenschaft 1844, Nr. 55.

3) A savoir dans le premier volume des *Gromatici veteres.* — L'analyse de Lachmann est toutefois insuffisante, parce qu'il n'a pas jugé à propos de publier diverses parties du texte de Bamberg.

Quant au second manuscrit avec l'attribution à NIPSUS, son existence est simplement supposée par BLUME, parce que GOESIUS (*Rei agr. auctores*, Amsterdam 1674) a donné sous le nom de NIPSUS des variantes à la *Lex de sepulchris* (*Grom. vet.* p. 271—272), que cette loi ne figure actuellement sous ce nom dans aucun manuscrit connu, mais qu'on en trouve trois lignes dans un endroit, deux dans un autre du texte du manuscrit de Bamberg publié par LACHMANN. Autant dire que l'hypothèse est absolument gratuite.

BLUME n'a guère été plus heureux dans ce qu'il dit à propos des autres manuscrits du PSEUDO-BOÈCE. Mais je crois inutile d'insister sur d'autres points, aujourd'hui que la question se trouve débrouillée, grâce aux patientes recherches de NICOLAS BUBNOV (*GERBERTI Opera mathematica*, Berlin 1899, Friedländer.) Et si j'ai signalé une des affirmations inexactes de BLUME, c'est que précisément elle a trompé M. BUBNOV, et par suite, dans une certaine mesure, entaché d'erreur une de ses conclusions les plus intéressantes.

Le savant professeur de Kiev a en effet remarqué que l'attribution à M. JUNIUS NIPSUS de textes des *Gromatici* repose, en réalité, uniquement sur deux rubriques manuscrites, qu'il est permis de trouver insuffisantes:

1°. Dans le célèbre *Arcerianus* de Wolfenbüttel, la mention: *Marci Juni Nipsi lib. explicit.*, vient après un opuscule simplement intitulé *Podismus*, et dont la fin est mutilée. Il est dès lors au moins possible que, dans le manuscrit prototype, il ait manqué à cet endroit plusieurs feuillets, et que l'*Explicit* se rapporte à un opuscule entièrement perdu.

2°. Dans l'*Amplonianus* 362 d'Erfurt (*E* de LACHMANN), on trouve, p. 20, la mention absurde: *Julii Frontini Siculi liber I explicit. Incipit Marci Juni Nipsi lib. II feliciter*. La première partie de cette mention correspond d'ailleurs à celle de l'*Arcerianus* après le même texte: *Julii Frontini lib. explicit feliciter.* D'autre part, ce qui suit dans l'*Amplonianus* est une compilation de fragments disparates, comprenant, après plusieurs autres, ceux qui dans l'*Arcerianus* précèdent la mention de NIPSUS, puis d'autres encore, dont les titres et noms d'auteurs se trouvent supprimés. Tout cela est éminemment suspect; LACHMANN conjecturait déjà qu'un compilateur avait distribué sa matière en deux livres, et mis hardiment le premier sous le nom forgé de FRONTINUS SICULUS[1]), le second sous celui de NIPSUS. M. BUBNOV pense que le faussaire avait mis également ce dernier nom en tête du premier livre (mutilé dans l'*Amplonianus*). Ne discutons pas à cet égard: le point capital est de constater qu'il serait au

1) Forgé par fusion des noms de deux *Gromatici* distincts JULIUS FRONTINUS et FLACCUS SICULUS.

moins prudent de rayer Marcus Junius Nipsus de la liste des agrimenseurs romains dont nous avons des écrits avérés.[1])

Mais où les déductions de M. Bubnov cessent d'être légitimes, c'est quand il rapproche le *Bambergensis* de l'*Amplonianus*, et qu'il admet, par suite de sa confiance dans l'assertion de Blume, l'existence d'un manuscrit prototype (écrit dès le VIII^e siècle), dans lequel aurait figuré, en tête d'un premier livre et après le titre *M. Junii Nipsi de mensuris*, le texte de la *Pseudo-Géométrie* tel qu'il se trouve dans le *Bambergensis*, puis la compilation qui figure dans l'*Amplonianus*.

Si je constate que cette conclusion ne peut subsister, c'est que je crois intéressant de faire remarquer que la *Pseudo-Géométrie* de Boèce, quoique étrangement contaminée par la tradition des *Gromatici*, apparaît, dans les plus anciens manuscrits, comme absolument isolée des écrits de ce genre.

En particulier, le *Bambergensis*, après les 16 feuillets contenant la *Pseudo-Géométrie*, en comprend 24 autres[2]) où l'on ne trouve que des extraits de Pline, de Bède, de Macrobe, et de Martianus Capella, concernant l'astronomie, avec des fragments métrologiques et chronologiques, mais il n'y a absolument rien qui touche l'arpentage.

L'adjonction d'écrits des *Gromatici* au texte de la *Pseudo-Géométrie* ne paraît point avoir eu lieu avant l'époque de Gerbert; du moins le plus ancien manuscrit où on puisse la constater est celui de Berne (Bong. 87) daté de 1004.

Enfin, il ne me paraît nullement démontré que la fraude dont témoigne l'*Amplonianus* remonte à une époque plus ancienne que ce manuscrit, qui est du XI^e siècle. M. Bubnov (p. 444 et 453) suppose l'existence d'un prototype du VIII^e siècle d'après une note de Metellus Sequanus écrite en 1564 sur le *Palatinus* 1564. Metellus parle en effet d'un manuscrit ayant appartenu à Angelo Colocci et qu'il a copié: «Erat autem et is liber (c. à. d. le ms. de Colocci) picturis coloratis, ut hic (c. à. d. le *Palatinus*), illustratus, sed hoc antiquior videbatur. Hic enim ex litterarum forma et orthographiæ ratione, proxime Caroli Magni sæculum scriptus est.»

Tel est le texte que donne M. Bubnov, mais où il y a certainement une faute, par suite soit d'une erreur de lecture, soit d'une inadvertance de Metellus. En effet, le dernier *hic* doit, comme le premier, désigner

1) On peut cependant supposer que son opuscule était géométrique, puisqu'il suivait le *Podismus* et précédait le *liber* d'Epaphroditus et Vitruvius Rufus.

2) Le *Bambergensis* a été complètement décrit par Leitschuh dans le nouveau *Katalog der Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Bamberg* (1895) sous le n° 55.

le *Palatinus* qui est en effet du IXe ou du Xe siècle, que METELLUS pouvait très bien, dès lors, rapprocher de l'époque de Charlemagne. Mais dans ce cas, l'ensemble du contexte demande qu'on lise auparavant: *sed non antiquior videbatur*, ou *sed hoc antiquior non videbatur*. Autrement il me paraît impossible de justifier la rédaction de METELLUS SEQUANUS.

Je suis donc porté à croire que le manuscrit de COLOCCI était en réalité considéré par METELLUS comme plus récent que le *Palatinus*, et rien n'empêche, d'après les autres données que l'on possède à cet égard, qu'il ne soit précisément le même que l'*Amplonianus*.

Sans doute au VIIIe ou au IXe siècle, une fraude consistant à mettre sous un nom arbitrairement choisi une compilation quelconque, a pu se faire tout aussi bien qu'au XIe; l'exemple des deux *Géométries* attribuées à BOÈCE est topique à cet égard. Mais dans les questions de filiation des manuscrits, il ne faut point, sans nécessité absolue, multiplier les intermédiaires hypothétiques. Car il peut en résulter des conclusions historiques d'une certaine gravité, qui ne reposent, en définitive, que sur des conjectures sans fondement sérieux.

2.

M. CANTOR dit, dans la seconde édition de ses *Vorlesungen* (t. I, p. 537), que le plus ancien manuscrit de la Géométrie de BOÈCE date du IXe siècle. C'est en effet l'âge que l'on doit assigner au ms. de Paris, Bibl. Nat. lat. 13020, et peut-être au Bambergensis HJ IV 22.[1]) Pour le Xe siècle on peut compter quatre mss., deux à Paris (lat. 13955 et 14080), un à Vienne (55), un à Berne (299).[2]) Mais aucun de ces manuscrits ne contient l'opuscule dont M. CANTOR défend l'authenticité, je veux dire l'*Ars geometrica*, dont FRIEDLEIN a donné la première édition critique (Leipzig, Teubner, 1867) et pour lequel le plus ancien ms. connu (Erlangen 288) remonte seulement au XIe siècle. Tous ceux qui sont antérieurs donnent le texte de ce que j'appelle la *Pseudo-Géométrie*; leur existence permet d'établir que, dès le IXe siècle, on attribuait à BOÈCE un ouvrage contenant, entre autres choses, une traduction de définitions et d'énoncés d'EUCLIDE, mais elle ne prouve nullement que la rédaction de l'*Ars geometrica*, avec la description de l'*abacus* et des *apices*, soit antérieure à l'époque de GERBERT. Tout au contraire, elle constitue un grave argument contre l'authenticité de cet opuscule.

---

1) LEITSCHUH, l. c. p. 61, n° 55.

2) Pour ces deux derniers mss., j'emprunte renseignement à l'ouvrage déjà cité de M. BUBNOV, *GERBERTI Opera Mathematica* (Berlin, Friedländer, 1899), ouvrage dont les pages 155—190 sont désormais indispensables pour l'étude détaillée de la question de BOÈCE.

Car il faut rectifier également ce que dit M. CANTOR (ib., p. 540): «Il y a ou il y a eu des Géométries de BOÈCE en cinq livres, en quatre, «en trois, et en deux livres. Les manuscrits de cette dernière Géométrie «sont généralement reconnus comme étant les meilleurs, et un troisième «livre, qui est ajouté dans les anciennes éditions de BOÈCE, ne lui est «nullement attribué dans les manuscrits, où il est désigné comme *Demon-«stratio artis geometriæ*, sans nom d'auteur. En tout cas, son origine est «plus récente, son contenu est une compilation des plus variées, où l'on a «même pu reconnaître des fragments entiers de l'Arithmétique de BOÈCE.»

Pour ce qui touche aux recherches personnelles de M. CANTOR, cet exposé de la question est, à vrai dire, matériellement exact; mais, pour le reste, il s'est laissé induire en erreur par les assertions de BLUME et de LACHMANN dans le deuxième volume des *Gromatici veteres*; l'ensemble, en tous cas, est de nature à donner une très-fausse idée des faits.

En réalité, il n'y a, dans les mss., que deux Géométries attribuées à BOÈCE, à savoir la *Pseudo-Géométrie*, normalement divisée en cinq livres, et l'*Ars geometrica*, qui est en deux. S'il y a, pour chacun de ces deux ouvrages, des divergences sur la division en livres, elles résultent, soit de simples fantaisies, soit d'erreurs des copistes.[1])

Si la bizarre composition de la *Pseudo-Géométrie* en a fait, pendant longtemps, rejeter les mss. au second plan, il n'en a pas moins été remarqué, dès que parut l'édition de l'*Ars geometrica* procurée par FRIEDLEIN, que, pour le texte euclidien, les meilleures leçons étaient celles de son ms. *q* (Munich 560), et que celui-ci paraissait bien avoir conservé une rédaction primitive dont les autres n'offraient qu'un remaniement plus ou moins maladroit. Or précisément ce ms. *q* contient le texte de la *Pseudo-Géométrie*.

Le livre ajouté, dans les anciennes éditions, à l'*Ars geometrica*, sous le titre: *BOETII de Geometria liber*[2]), reproduit, en fait, les deux premiers livres de la *Pseudo-Géométrie*. Le premier éditeur, que les autres ont

---

1) Ainsi le Monacensis 560 (*Pseudo-Géométrie*) compte quatre livres par une erreur évidente. En tête du livre I, il n'y a ni titre ni *Incipit*; l'*explicit liber primus* se trouve là où LACHMANN arrête son premier extrait (*Grom. vet.*, p. 606); plus loin le livre II de la division ordinaire est compté comme livre I, et ainsi de suite. — Le Monacensis 23511 (*Ars Geometrica*) compte trois livres, parce que le premier est coupé en deux, après la fin de la traduction d'EUCLIDE. — Le ms. perdu de Reichenau, pour lequel un catalogue de 821 indique deux livres *de arithmetica*, trois livres *de geometria*, ne doit pas entrer en ligne de compte; d'ailleurs, s'il contenait la *Pseudo-Géométrie*, il a pu se faire que l'auteur du catalogue en comptât les deux premiers livres comme arithmétiques, les trois suivants comme géométriques.

2) Dans ces anciennes éditions, l'*Ars geometrica* précède sous le titre: *EUCLIDIS Megarensis Geometriæ libri duo ab ANICIO MANLIO SEVERINO BOETIO translati.*

servilement imité, a naturellement omis les livres III et IV, qui contiennent la traduction d'EUCLIDE, déjà insérée dans l'opuscule précédent; il a négligé le livre V, c'est à dire l'*Altercatio duorum geometricorum* qui, par suite, malgré son intérêt historique, est restée inédite jusqu'à présent, car le début et la fin de ce livre V, donnés par LACHMANN (*Grom. vet.* I, p. 407—412), semblent bien étrangers au cadre primitif de l'*Altercatio*.

Il est, en tout cas, inexact que ce troisième livre des anciennes éditions ne soit point attribué à BOÈCE dans les mss., car la très grande majorité de ceux de la *Pseudo-Géométrie* portent expressément ce nom. A la vérité, le Bambergensis, que LACHMANN a suivi de préférence, est anonyme; mais il n'en est pas de même des deux autres mss. qu'il a utilisés, celui de Rostock IV 111 (voir *Geom. vet.* II, p. 68) et celui de Munich 560 (*ib.*, p. 84 et suiv.), quoiqu'en dise BLUME pour ce dernier (*ib.*, p. 67).

Tout au contraire, c'est le titre *Demonstratio artis geometricæ* qui ne se trouve point dans les mss.; car il a été forgé par LACHMANN (*ib.*, p. 65), assez malheureusement au reste.[1])

Enfin, si cette informe compilation de la *Pseudo-Géométrie* renferme des extraits de l'Arithmétique de BOÈCE, si même ils constituent la presque totalité du second livre, il s'ensuit bien que la rédaction de l'ensemble est postérieure à BOÈCE, mais elle n'en a pas moins dû précéder celle de l'*Ars geometrica*; elle a même dû servir à l'auteur de cette dernière.

A cet égard, il est inutile de répéter les observations décisives de HEIBERG (Zeitschr. f. Mathem. **35**, 1890; Hist.-lit. Abt. p. 56). Je me propose d'aborder une autre question, soulevée par le savant danois (*ib.*, p. 48 et suiv.), à la suite d'une analyse comparative du Bambergensis et du Monacensis 560.

Il est clair que l'attribution à BOÈCE de la *Pseudo-Géométrie* est postérieure à l'introduction, dans cette compilation, des extraits empruntés à l'Arithmétique du même auteur; car cette introduction, dans un ouvrage circulant sous le nom de BOÈCE, eût été une manœuvre par trop maladroite, l'Arithmétique n'ayant pas cessé d'être étudiée en première ligne par ceux qui s'intéressaient encore à la mathématique. Au contraire, un copiste incompétent a pu commettre une fraude vulgaire, surtout si la tradition d'EUCLIDE, qui forme le noyau de la compilation, portait déjà le nom de BOÈCE.

Si donc un ms. ancien, comme le Bambergensis, est anonyme, si de plus, par une rare exception, il ne contient pas les extraits de l'Arith-

1) LACHMANN a emprunté en effet une expression du dernier alinéa du ms. de Bamberg (*Grom. vet.*, p. 412, 16. 17): or cet alinéa, écrit de seconde main dans le Parisinus 13020, est une addition postérieure à la rédaction primitive.

métique, on est naturellement porté à croire qu'il représente une forme primitive de la tradition, alors surtout qu'on le compare à un ms. postérieur d'un ou deux siècles, comme le Monacensis. Mais si au contraire on le rapproche d'un ms. antérieur, comme le Parisinus 13020, où l'on retrouve à la fois l'attribution à BOÈCE et les extraits de l'Arithmétique, la question change de face.

L'étude personnelle que j'ai faite du Parisinus et du Bambergensis m'a en effet convaincu que le second dérive, si non du premier lui-même, au moins d'un ms. tout à fait semblable, présentant le même désordre et les mêmes fautes caractéristiques; dès lors nous ne pouvons remonter sûrement, en ce qui concerne la formation de la *Pseudo-Géométrie*, au delà du IX[e] siècle comme époque, au delà du Parisinus comme type.

Sur l'âge du Bambergensis, les opinions émises diffèrent sensiblement. JÄCK l'a fait descendre au XI[e] siècle; c'est de fait la date de l'écriture du recto du premier feuillet (la *Pseudo-Géométrie* commence au verso); ce qu'on trouve du reste sur ce recto, ce sont des règles de multiplication sur l'abacus analogues à celles qui sont attribuées à GERBERT. Mais, en excluant aussi des gloses nombreuses et souvent intéressantes, qui semblent également du XI[e] siècle, tout le reste du ms. est d'une même main évidemment antérieure et que l'on doit au moins faire remonter au X[e] siècle, avec HEIBERG. La limite supérieure est fixée à l'an 841, date de la rédaction d'une pièce concernant le comput (voir *Grom. vet.* II, p. 82); mais il me paraît bien douteux, d'après le caractère de l'écriture, que l'on puisse assigner au ms. une date aussi reculée.

En tout cas, et sans prétendre que le Parisinus soit plus ancien de tout un siècle que le Bambergensis, je considère son antériorité comme indubitable. Mais le Parisinus présente de plus un grave indice de la fidèle utilisation d'une source antérieure: chaque énoncé d'EUCLIDE y est accompagné d'une figure soigneusement faite, quoique d'après des conventions de nature à nous dérouter aujourd'hui, et que le dessinateur n'a pas toujours bien comprises; le Bambergensis au contraire ne présente que quelques rares figures (accompagnant les définitions), et leur aspect est sensiblement moins archaïque.

D'autre part, si le Bambergensis est anonyme, cela tient uniquement à ce qu'en général les rubriques des livres n'ont pas été exécutées, tandis que celles des divisions intérieures existent. Mais c'est là un fait bien fréquent en paléographie et dont on ne peut rien conclure, d'autant que les blancs pour les rubriques ont été réservées au commencement et à la fin de chaque livre, aux mêmes endroits que dans le Parisinus. La seule différence est que dans le Bambergensis, le second livre a été complètement supprimé. Une rubrique avait été commencée dans le blanc réservé; elle a été grattée et remplacée par l'inscription à l'encre noire: *Explicit liber primus. Incipit de figuris.* Cette inscription se trouve ainsi tenir lieu de ce qui, dans le Parisinus, occupe trois feuillets, à savoir:

F° 64 v°: *Incipit liber* Anicii Manili (sic) *Severini Boetii Geumetricorum secundus ab Euclide translatus.* — Suit le texte du livre II (= Boetius, éd. de 1570, p. 1541—1546): Quo modo inventa est geometria? . . . . . . propositum convertamus. — F° 67 v°: *Explicit liber Arithmeticæ artis. Incipit liber Geometrie Artis tertius de figuris.*

Le fait du grattage et de la surcharge, que j'ai relevé, doit faire croire que la suppression du livre II dans le Bambergensis n'a été décidée qu'au dernier moment. Le copiste (ou celui qui le dirigeait) aura reconnu la source des extraits arithmétiques, et il aura jugé qu'il était inutile de les conserver. Mais, avant ces extraits, le livre II contenait encore un court fragment d'une sorte de catéchisme géométrique (Quo modo inventa est geometrica? . . . . . . et conclusio). On le retrouve, dans le Bambergensis, tout à fait à la fin de l'ouvrage, où l'on peut bien croire que le copiste l'aura transporté. Heiberg estime au contraire que l'ordre ainsi obtenu doit mieux représenter celui que l'on peut supposer dans l'original. Je ne puis réfuter cette opinion qu'en entrant, comme je vais le faire maintenant, dans des détails un peu plus circonstanciés sur la composition de la *Pseudo-Géométrie.*

3.

Le Parisinus lat. 13020, du IX^e siècle, le plus ancien connu pour cette compilation, donne le titre général.

F° 59 v°: *Incipiunt libri* Anicii Manlii Severini Boetii *Artis Geometriæ et Arithmeticæ num(ero) V, translati de greco in latinum,*

puis le sous-titre, également rubriqué:

Regula Artis Geometriæ. Quæ est fons sensuum et origo dictionum?

Le signe d'interrogation n'est point, je dois le dire, indiqué sur le ms., en sorte que la phrase a pu être prise au moyen âge pour une définition de la géométrie, et qu'on la retrouve comme telle dans un ouvrage attribué à Hugues de Saint-Victor (XII^e siècle).[1] Mais elle forme bien la question à laquelle répond assez exactement le morceau grammatical et étymologique emprunté à Cassiodore, et par lequel débute le livre I (*Grom. vet.* I, p. 393, 1—17).

Cette question, de fait, se dédouble en deux: Qu'est-ce que la Géométrie? Comment a-t-elle été inventée? Le texte passe ensuite à une

---

1) *Eruditionis didascalicæ lib.* II, c. 16 (*Patrologia latina* de Migne, vol. 176, col. 757).

troisième question, celle de l'utilité de la Géométrie; mais bientôt il dérive sur l'*epistola Iulii Cæsaris* et se grossit, sans ordre ni mesure, d'extraits les plus divers empruntés aux *gromatici* (de controversiis, de positione terminorum, de alluvione, de subsicivis agris, nomina agrimensorum, nomina imperatorum, nomina lapidum finalium et arcarum positiones).

Lachmann a omis toute la fin du livre ou du moins ce qui paraît la former, sous la rubrique f° 63 v°: *Incipiunt capitula libri hujus*, que le Bambergensis fait précéder de l'addition à l'encre noire: *Quædam proponenda studiosis.* Les énoncés de chapitres qui suivent donnent le plan d'un opuscule mi-arithmétique, mi-géométrique. Les trois premières questions de la partie géométrique sont d'ailleurs celles que nous avons vu traiter au début du livre I. Mais là s'arrête tout rapport entre ce livre I et la liste de chapitres. Il est clair que l'*Explicit liber primus* est ridiculement placé après cette liste dans le Bambergensis, qu'il est mieux auparavant, comme dans le Monacensis 560, tandis qu'il manque dans le Parisinus. En réalité cette liste de chapitres concerne un opuscule perdu et ne fait partie ni du livre I, ni du livre II.

Cependant elle concernerait plutôt le second; du moins celui-ci débute par un petit catéchisme qu'on peut regarder comme correspondant aux quatre premiers chapitres géométriques de l'opuscule perdu. D'autre part, il continue par des extraits de l'Arithmétique de Boèce qu'on peut supposer compilés pour répondre aux chapitres de la partie arithmétique de ce même opuscule. Mais cette compilation est faite avec les interversions les plus singulières et ne satisfait nullement au but en question; c'est comme un amas de notes destinées à servir de matérieux, mais qui n'ont été ni mises en ordre, ni digérées.

Le fragment de catéchisme géométrique est plus intéressant, en ce qu'il paraît remonter à une époque où subsistait encore la traduction des démonstrations euclidiennes, et où l'on connaissait la composition de la totalité des *Éléments.*[1]) Les demandes et les réponses y sont respectivement distinguées par les initiales *Δ* et *M*, des mots grecs *didascalos* et *mathêtês* (maître et élève).

Avec le livre III commence la traduction des énoncés d'Euclide; il finit (f° 76 r°: *Explicit liber tertius. Incipit liber quartus Anicii Manilii Severini Boetii ab Euclide translatus*), après avoir donné d'abord et de

1) Cependant, Cassiodore a pu suffire à la rigueur, avec l'aide d'une vague tradition, pour composer les réponses. Mais il y a des questions assez surprenantes pour l'époque: «*Si proprius codex?* c. à d.: Jusqu'à quel point la Géométrie d'Euclide est-elle une œuvre originale?» — La réponse, que je traduirai aussi librement, est irréprochable: «On attribue la disposition à Euclide; mais on dit que la plupart des démonstrations ou des théorèmes sont d'autres géomètres.»

suite les définitions [illegible] au livre II. Les différences essen-
deux premiers. [illegible] et la seconde partie de l'*Altercatio*,

Le livre IV dev[illegible] et des sources utilisées, ne
suivants d'EUCLIDE; [illegible] parties intégrantes d'un même
défaut à leur place, [illegible] que la seconde partie de l'*Alter-*
une série: *Elem.* III, [illegible] partie, j'admets qu'un copiste,
au livre V, au milieu [illegible] et y trouvant de quoi ré-
provient évidemment [illegible] chapitres, se sera amusé à mettre en
dans tous les mss. [illegible] ainsi un complément pour l'*Alter-*
dans l'*Ars geometrica*, [illegible]
manifeste que ce secon[illegible] bourreau de besogne, trouvant trop
semblable à ceux que [illegible] géométrique, la définition de

Dans le Parisinus, [illegible] et la justification de son utilité,
ne sont pas indiqués. [illegible] sujet; il aura pu, de même, faire
trouve la rubrique: [illegible] répondre à la liste des chapitres.
numeris et mensuris, [illegible] du livre I et celui du
ANICII MANLII SEVERI[illegible] compte des phrases de même source
translatus ab EUCLIDE [illegible] figures) au milieu même du texte

«Hi namque libri [illegible] n'a pas toutes éliminées?
rum et omnium figur[illegible] d'EUCLIDE, où l'on avait laissé
angulorum et mensura[illegible] à écrire d'une autre main. Un posses-

Cet epilogue rapp[illegible] et des marges pour y inscrire
avant le livre II. [illegible] intéressant la géométrie ou les

Quant à la comp[illegible] autre a pu l'imiter pour l'arithmé-
d'abord (*Grom. vet.* I, 40[illegible] chaos. Au IX^e^ siècle, un copiste
de Séville, dont l'insert[illegible] commentaire perpétuel et a essayé de
que celle des deux extr[illegible] impossible. Voilà la seule idée que

Viennent ensuite [illegible] la *Pseudo-Géométrie* de BOÈCE. Il y a
précédent, puis le véri[illegible]lateurs; il n'en est point à celle des
l'*Altercatio*, c'est à dire [illegible]
par les initiales IN et [illegible]
distingue très nettement [illegible]
l'interrogateur (le maître [illegible]
de SOCRATE dans les [illegible]
des idées). Ce morceau [illegible]
qu'il soit facile d'indiqu[illegible]
tient. Les questions tr[illegible]
de chapitres précitée. [illegible]
que LACHMANN a repro[illegible]
clairement empruntée à [illegible]
partie répondrait assez [illegible]

se lie d'ailleurs assez mal avec ce qui précède et peut en avoir été primitivement indépendante. En tous cas, une bonne partie du programme indiqué par le titre de l'*Altercatio* (de numeris et mensuris) n'est pas abordée; on n'a donc qu'un fragment de ce dialogue.

Après l'*Altercatio* proprement dite, on trouve encore (*Grom. vet.* 412, 3—21) trois alinéas tirés des *Gromatici*, et enfin un quatrième qui reprend la dernière question du catéchisme géométrique du livre II, en la développant avec des emprunts faits à CASSIODORE.

Ce dernier alinéa n'est que de seconde main dans le Parisinus, où il constitue une addition, évidemment faite après coup, dans le blanc au dessus de la rubrique finale. Dans le Bambergensis, au contraire, il est écrit de première main.

Cette analyse me paraît suffire pour éclaircir la question soulevée par HEIBERG.

Si, en dehors des autres divergences qu'il offre avec le Parisinus et qui, on a pu en juger, le trahissent comme plus récent et moins digne de foi, si, dis-je, le Bambergensis ne renferme pas le livre II et s'il en donne seulement le catéchisme géométrique tout à la fin de l'ouvrage, ce n'était point là la disposition de l'archétype; le copiste a beaucoup plutôt travaillé sur un original conforme au Parisinus; il a opéré une suppression très rationnelle (celle des extraits de l'Arithmétique de BOÈCE), et une transposition moins heureuse. Logiquement, il eût mieux fait de reporter au livre II, à la suite du catéchisme géométrique, la seconde partie de l'*Altercatio*, puis le reste du livre V.

Mais, si nous avons la preuve d'une transposition de feuillets dans l'archétype, si nous pouvons dès lors supposer d'autres déplacements, il est illusoire de prétendre le restituer tel qu'il a pu exister avant la division en cinq livres attribués à BOÈCE et avant l'interpolation des extraits de l'Arithmétique. La *Pseudo-Géométrie* nous apparaît dans un désordre irrémédiable, et nous ne pouvons faire que des conjectures très hasardées sur l'état des sources manuscrites dont elle dérive. Sa forme actuelle peut bien ne pas remonter au delà du IX^e^ siècle. On aperçoit tout au plus qu'elle s'est constituée autour d'un triple noyau dont les éléments étaient peut-être déjà mutilés ou l'ont été à cette occasion: 1° une ancienne version latine d'EUCLIDE, attribuée à BOÈCE, et contenant les démonstrations qui ont été supprimées: 2° un *liber* arithmético-géométrique, dont il reste les titres des chapitres (leur liste offre cependant des endroits suspects et peut avoir été remaniée après coup): 3° un dialogue, l'*Altercatio*, abordant également, avec la géométrie, des questions arithmétiques et métrologiques.

Le second de ces trois ouvrages aurait été, comme le troisième, composé par demandes et réponses, mais sous une forme très sèche; il en resterait seulement un court fragment, au livre II. Les différences essentielles qui subsistent entre ce fragment et la seconde partie de l'*Altercatio*, sous le rapport du style, de la composition et des sources utilisées, ne permettent pas de les considérer comme parties intégrantes d'un même opuscule. Si je ne crois pas davantage que la seconde partie de l'*Altercatio* soit la véritable suite de la première partie, j'admets qu'un copiste, ayant à sa disposition un ms. des *Gromatici* et y trouvant de quoi répondre à quelques-uns des titres de chapitres, se sera amusé à mettre en dialogue le texte de Balbus et à forger ainsi un complément pour l'*Altercatio* mutilée.

Mais un autre copiste, quelque bourreau de besogne, trouvant trop écourtées, dans le fragment du catéchisme géométrique, la définition de géométrie, l'histoire de son invention, et la justification de son utilité, aura compilé un préambule sur ce triple sujet; il aura pu, de même, faire de longs extraits arithmétiques pour répondre à la liste des chapitres. Mais comment expliquer le remplissage *gromatique* du livre I et celui du livre V? Comment surtout rendre compte des phrases de même source qui se sont glissées (parfois avec des figures) au milieu même du texte d'Euclide, et que le faussaire de l'*Ars geometrica* n'a pas toutes éliminées?

Je me figure un ms. de la traduction d'Euclide, où l'on avait laissé des blancs pour les démonstrations, à écrire d'une autre main. Un possesseur du ms. se sera servi de ces blancs et des marges pour y inscrire diverses sortes de notes et de fragments intéressant la géométrie ou les pratiques juridiques des agrimenseurs; un autre a pu l'imiter pour l'arithmétiques, etc.; il en est résulté un étrange chaos. Au IX^{e} siècle, un copiste a cru y voir un texte entouré d'un commentaire perpétuel et a essayé de remettre le tout en ordre, ce qui était impossible. Voilà la seule idée que je puisse me faire de l'origine de la *Pseudo-Géométrie* de Boèce. Il y a des bornes à la stupidité des compilateurs; il n'en est point à celle des copistes.

Zwei Beiträge zur Geschichte der Physik im Mittelalter.

Von

Maximilian Curtze in Thorn.

1. Das Buch Euclids de gravi et levi.

Das, was HEIBERG in seinen *Litterargeschichtlichen Studien über Euclid* über dieses Fragment mitteilt (S. 10—11), bedarf einer gründlichen Revision. Der Zweifel, ob die Araber dasselbe gekannt hätten, oder ob das bei ihnen erwähnte Buch *de gravi et levi* mit dem durch die Ausgabe HERWAGENS zuerst bekannt gewordenen Fragment identisch gewesen, wird durch die Fassung desselben im *Codex Dresdensis Db. 86*, welche sich ebenfalls im *Codex Amplonianus fol. 37* erhalten hat, als grundlos erwiesen. Unter den von GERHARD VON CREMONA übersetzten Schriften findet sich diese Abhandlung nicht, wenngleich die Art der Übersetzung wohl auf ihn schliefsen läfst. Dafs wir es bei HERWAGEN mit der Übersetzung aus dem Griechischen, im *Cod. Dresd. Db. 86* mit einer solchen aus dem Arabischen zu thun haben, lehrt schon die Buchstabenfolge, welche in der letztern absolut die folgende ist:

$$a,\ b,\ g,\ d,\ e,\ z,\ h,\ t,$$

von welcher bekanntlich HULTSCH zuerst nachgewiesen, dafs sie für solche Übersetzungen griechischer Werke, welche durch das Arabische gegangen sind, charakteristisch ist.

Die Bemerkungen bei HERWAGEN „*caetera sponte patent*“ und „*Reliqua patent*“, welche der Text des *Cod. Db. 86* durch einen Beweis ersetzt, sind auch wohl der griechischen Fassung eigentümlich gewesen. Das von HEIBERG S. 10, Anm. 2 angeführte Werk *liber ponderum Jordani* ist nicht dem EUCLID gehörig, und hat gar keinen Zusammenhang mit dem Fragment *de gravi et levi*.

Euclidis de levi et ponderoso fragmentum. (EUCLIDIS *opera*, ed. HERWAGEN [1537], p. 585—586.)	**Liber Euclidis de gravi et levi et de comparatione corporum ad invicem.** (Codex Dresdensis Db. 86, fol. [S. XIV].)
1. Aequa magnitudine corpora sunt, quae loca replent aequa.	1. Corpora sunt equalia in magnitudine, que replent loca equalia,

2. Diversa magitudine corpora sunt, quae loca replent non aequa.

3. Grandiora magnitudine dicuntur corpora, quae loco sunt ampliore.

4. Aequa potentia corpora sunt, quorum et tempore et aëre aquave media aequalibus et per aequalia intervalla aequales sunt motus.

5. Diversa potentia corpora sunt, quorum tempore diverso motus sunt aequales.

6. Diversorum potentia corporum maius id potentia dicitur, quod movendo tempore insumpserit minus; minus autem potentia, quod temporis amplius.

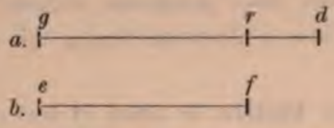
7. Generis eiusdem corpora sunt, quae, cum aequa magnitudine sint, etiam sunt potentia.

8. Diversa genere corpora sunt, quae, cum aequa magnitudine sint, potentia non sunt, per idem licet medium moveantur.

9. Diversorum genere corporum potentius id dicitur, quod est solidius.

Theorema primum. Diversorum potentia corporum, quod spatium amplius movetur, habet amplius potentia.

Sint *a* et *b* corpora duo. Sint *gd* et *ef* spatia duo, *gd* maius, per



quod *a*, *ef* minus, per quod *b* movetur; resecabo spatio *gd* *gr* spatium sic, ut sit *gf* spatio spatium *gr* equale. Caetera sponte patent.

2. Et que replent loca inequalia, dicuntur diversa in magnitudine;

3. Et que dicuntur grandia in corporibus, dicuntur amplia in locis.

4. Corpora equalia in virtute sunt, quorum motus sunt in temporibus equalibus super loca equalia in eodem aëre vel in eadem aqua;

5. Et que pretereunt loca equalia diversis temporibus, dicuntur diversa in fortitudine;

6. Et quod maius est virtute, minus est tempore.

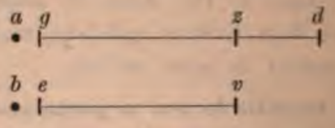
7. Corpora eiusdem generis sunt, quorum equalium virtus est equalis.

8. Cum fuerint corpora equalia in magnitudine diversa in virtute respectu eiusdem aëris vel aque, diversa sunt genere;

9. Et solidius est fortius.

I. Corporum, que temporibus equalibus loca pertranseunt inequalia, quod maiorem pertransit locum, maioris esse virtutis.

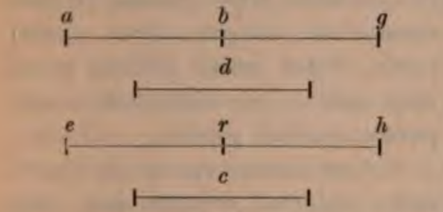
Ut sint *a* et *b* talia, et iter *a* sit *gd* maius quam iter *b*, quod est *ev*.



Resecabo igitur *gz* tanquam *ev*, et *a* quidem minori tempore *gz* quam *gd* permeabit, ut hec figura docet.

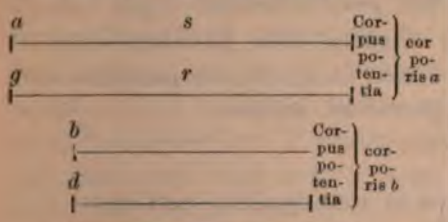
Theorema secundum. Eorundem genere corporum, si ipsa inter se erunt multiplicia, erunt aeque ipsorum potentiae multiplices.

Sit corpus *ag* eodem genere corpori *d* duplum, dico, etiam potentia duplum esse. Sit enim *ag* quidem corporis potentia *eh*, *d* vero *c*; et



ag iuxta multiplicis excessum in *ab* et *bg* dividatur, sic ut utriusque potentia ipsius *d* corporis potentiae, quae erat *c*, aequalis; fiat rursus, ut *ag* corpus in partes *ab* et *bg* corpori *d* aequas divissimus, sic *eh* potentiam in partes *er* et *rh* aequas *c* potentia dividamus: liquidum est, *eh* potentiam duplum potentiae *c* evadere.

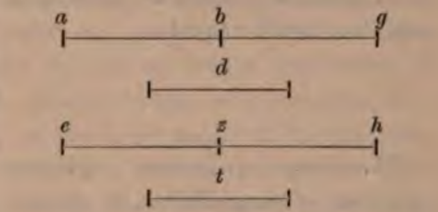
Theorema tertium. Eorundem genere corporum proportio et magnitudine et potentia esse eadem.



Sit *a* corpus corporis eodem genere *b* duplum: dico, ut *a* corpus ad *b* corpus est, sic corporis *a* potentia *g* ad corporis *b* potentiam *d* esse. Patet, si ut corpora sic potentias aeque utrinque multipliciter dividamus.

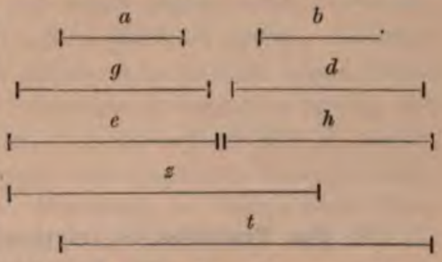
II. Si duorum corporum eiusdem generis fuerit unum multiplex alterius, et virtutem illius virtuti alterius similiter esse.

Verbi gratia: sit *ag* duplum *d*, dico ergo, quod potencia *ag*, que est *eh*, dupla sit virtutis *d*, que est *t*. Racio: dividemus *ag* secundum multiplici-



tatem in *ab* et *bg*, quorum utriusque virtus est equalis virtuti *d*, que est *t*. Ponemus autem *ez* virtutem *ab*, et remanebit *zh*, virtus *bg*: erit ergo *eh* duplata *t*.

III. Corporum eiusdem generis in magnitudine et potencia proportio una.



Ut *a* et *b*. Sit enim potencia *a* sicut *g*, et virtus *b* sit *d*: dico ergo, quod proportio quantitatis *a* ad quantitatem *b*, ut *g* ad *d*, quia sumpto multiplici *a*, quod sit *e*, et equali virtutis *g*, quod sit *z*, erit *z* poten-

Theorema quartum. Quae corpora aequa potentia eiusdem generis corpori sunt, eiusdem sunt inter se generis.

Ablatis enim aequalibus illi tertio erunt ipsorum virtutes aequales, quia potentiae tertii aequales.

Theorema quintum. Quorum corporum et magnitudine et potentia proportio una est, ipsa generis eiusdem erunt.

Sit ut *a* corpus ad corpus *b* sic corporis *a* potentia *g* ad corporis *b* potentiam *d*: dico *a*, *b* corpora generis eiusdem esse. Statuamus enim *e* corpus generis *a* equale corpori *b*, cuius potentia sit *r*: erunt igitur ut *b* ad *a* sic *r* ad potentiam ipsius *a*, quae est *g*. Reliqua patent.

(Die Figur fehlt.)

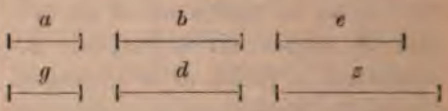
cia *e*. Similiter pones ad *b* multiplex *h*, et ad *d* virtutem *t*, et patet multiplicia similia esse.

IV. Corpora, quorum utrumque equipollet uni in genere, sunt eiusdem generis.

Quia sumptis equalibus de utroque illi tertio erunt ipsorum virtutes equales ad invicem, quia virtuti tercii. Patet eciam additis, ut si sint minora, per diffinitionem corporum eiusdem generis.

V. Cum fuerit corporum in magnitudine et virtute proportio una, erunt eiusdem generis.

Exemplum. Sit corporum *a* ad *b* ut potenciarum *g* ad *d*: dico ergo,



quod *a* et *b* sunt eiusdem generis. Quia corpus *e* generis *a* sit equale corpori *b*, cuius potencia *z*, erit igitur *b* ad *a* ut *z* ad potenciam ipsius *a*, que est *g*. Patet propositum per premissam.

Explicit liber EUCLIDIS de ponderoso et levi et comparacione corporum ad invicem.

---

2. Der Tractatus de fractionibus et reflexionibus radiorum des Robertus Linconiensis.

Dieser Traktat dürfte einen nicht unwichtigen Beitrag für die Beurteilung der Kenntnisse des Mittelalters in physikalischen Hinsichten darbieten. Die darin niedergelegten Ansichten über Spiegelung und Brechung der Strahlen sind im allgemeinen richtig, speziell auch, was die Spiegelung von einem polierten und von einem rauhen Körper betrifft.

[25', col. 1.] **Incipit tractatus Linconiensis de fractionibus et reflexionibus radiorum.**
(Codex latinus Monacensis 534 [S. XIV], Blatt 25'—26'.)

Utilitas considerationis linearum, angulorum et figurarum est maxima, quoniam inpossibile est sciri naturalem philosophiam sine illis. Valent autem in toto universo et partibus eius absolute; valent etiam in proprietatibus relatis, sicut in motu recto et circulari; valent quidem in actione et passione, et hoc sive sicut in materiam sive in sensum, et hoc sive in sensum visum, secundum quod occurrit, sive in alios sensus, in quorum accione oportet addere alia super ea, que faciunt visum. Cum igitur in aliis dictum est de eis, quae faciunt ad totum universum et partes eius, absolute de hiis, que ad motum rectum et circularem considerantur, nunc de accione universali, et prout ad accionem in materiam mundi contiguam discedere possunt, in medium adduci, que erudire possunt precedentem ad maiora. Omnes enim cause effectuum naturalium habent dari per lineas, angulos et figuras; aliter enim inpossibile est sciri, propter quid in illis, quod manifestum sic. Agens naturale multiplicat virtutem suam a se usque in patiens, sive agat in sensum, sive in materiam. Que virtus aliquando vocatur species, aliquando similitudo, et idem est, quocunque modo vocetur, et idem immittit in sensum et idem in materiam, sive contra vim, ut calidum idem mutat in tactum et in sensum. Non enim agit per deliberacionem et elcom̄ (!), et ideo uno modo agit, quidquid occurrat, sive sit sensus, sive sit aliud, sive animatum sive inanimatum. Sed propter diversitatem pacientis diversificatur effectus. In sensu enim ista virtus recepta facit operacionem spiritualem quodammodo et nobiliorem; in contrario sive in materia facit operacionem materialem, sicut sol per eandem virtutem dissolvit glaciem et coagulat lutum.

Virtus igitur ‹ab› agente naturali aut veniet super lineam breviorem, et tunc magis est activa, quia paciens minus distat ab agente, aut super lineam longiorem, et tunc minus est activa, quia paciens magis distat. Sed sive sic, aut non sic, aut veniet inmediate in superficie agentis aut mediate. Aut veniet per lineam rectam, tunc est actio fortior et melior, ut vult Aristoteles *V. physicorum*, quia natura operatur breviori modo, quo potest, sed linea recta omnium est brevissima, ut ibidem dicit. Item linea recta habet equalitatem sine angulo, sed melius est equale quam inequale, ut dicit Boetius in *arismetica* sua; sed natura operatur in breviori modo, quo potest, quare melius operacio super lineam rectam. Item omnis virtus unita est forcioris operacionis; sed maior unio et unitas est in linea recta quam in non recta, sicut docetur in *V. metaphysice*, quare forcior erit operacio super lineam rectam. Sed linea recta aut cadit ad angulos equales, que est perpendicularis, aut inequales. Si ad angulos equales, est operacio forcior propter tres raciones dictas, quia illa linea [25', col. 2.] est brevior et equalis, et virtus uniformiter venit per eam ad partes pacientis. Linea autem cadens ad angulos equales super corpus aliquod cadit ad rectos, quando cadit super planum, quando super concavum, ad acutos, quando autem super speram, ad maiores recto, quod manifestum est, si ducetur linea incidencie. Transiens per medium spere cum linea contingente facit angulos rectos et ex linea contingente cum spera causantur utrobique anguli contingencie, quare linea cadens super speram faciet angulos duos cum eius superficie, quorum uterque est maior recto, quia valet angulum rectum et angulum contingencie. Quando ergo cadit virtus ad angulos non solum equales, sed omnino rectos, tunc videtur esse actio fortissima, quoniam omnino est equalitas et uniformitas completa. Si vero sit linea non recta sive curva, tunc cum non sit circularis, quia agens naturale non facit virtutem suam secundum circulum, sed secundum diametrum circuli propter brevitatem, manifestum est, quod talis linea habebit angulos, et hoc non fit, dum medium est unum, sive dum est unum corpus occurrens, sed oportet, quod sint duo, unde in primo multiplicatur virtus super lineas rectas, in secundo super angulos. Hoc autem non potest esse, nisi duobus modis, aut scilicet, quod corpus pacientis sit densum, ita ut inpediat transitum virtutis, precipue quantum ad sensum nostrum: et tunc dicitur linea reflexa, ita quod redit virtus; aut corpus occurrens fit rarum, quod permittit transitum virtutis. Si primo modo, tunc virtus veniens ad corpus densum aut cadit ad angulos equales sive perpendiculariter, aut inequales. Si primo modo, tunc redit in se per eandem viam, per quam venit. Cuius ratio est, quia equalem angulum constituit linea reflexa, et ideo oportet, quod ad eosdem angulos reflectatur, super quos cecidit, et per eandem viam redeat. Si enim rediret per angulos sive per aliam viam declinando, inpossibile esset, quod ad equalem angulum cum angulo incidencie rediret; faceret enim maiorem vel minorem. Si vero cadet ad angulos inequales, tunc redibit per talem viam, qua possit facere angulum equalem cum superficie corporis resistentis angulo incidencie, scilicet illi, quem constituit linea incidens cum illo corpore. Propter rationem predictam virtus enim angulos incidencie et reflexionis facit equales, quod supponatur necesse. Cum ergo hiis duobus modis fiat reflexio, intelligendum est, quod virtus reflexa in se propter geminationem virtutis in eodem loco forcior est quam virtus reflexa in aliam viam, attamen quantum est de ratione reflexionis, debilior est actio, ubi est reflexio in eadem via, quia, cum omnis reflexio debilitat [26, col. 1.] virtutem, illa tum, cum facit declinare omnino virtutem ab incessu recto, quem deberet habere, si per medium corporis transiret, magis debilitat, et hoc est, que est in eadem via, a qua venit. Hic enim via est omnino contraria et opponitur incessui recto, quem deberet habere. Quod si fiat reflexio a corporibus politis habentibus naturam speculi, tunc est optima reflexio et forcior actio, cum vero a corporibus asperis, tunc dissipatur species, et actio est debilis. Cuius causam assignat *commentator super tractatum de sompno* dicens, quod partes corporis politi et levis superficiei propter suam equalitatem et uniformitatem concurrunt omnes in unam actionem in reflexionem speculi, et ideo tota integra, sicut venit, reflectitur a corpore polito; sed partes corporis asperi sunt inequales, et que altior est, primo reflectit speciem, et ideo non concordant partes in unam actionem, et propter hoc dissipantur species in partes, et ideo non est bone operacionis. Quando etiam est reflexio a corporibus concavis, maior est actio, quam a planis vel convexis, eo quod radii reflexi a superficie concava concurrunt in unum, non sic de aliis. Si vero corpus occurrens non inpediat transitum virtutis, tunc radius cadens ad angulos equales sive perpendiculariter tenet incessum rectum, et est fortissimus. Sed ille, qui cadit ad angulos inequales, deviat ab incessu recto, quem habuit in corpore priore, et quem deberet adhuc habere, si esset medium uniforme, et ista deviacio vocatur fraccio radii, et hoc est dupliciter. Quoniam, si id corpus secundum est densius primo, tunc radius frangitur ad dextrum et vadit inter incessum rectum et perpendicularem ducendam a loco fraccionis super illud corpus secundum. Si vero sit corpus subtilius, tunc frangitur versus sinistrum recedendo a perpendiculari ultra incessum rectum. Et cum hoc iter incidit, tunc est, quod virtus veniens super lineam fractam forcior est quam super reflexam, quia linea fracta parum recedit ab incessu recto, qui est fortissimus, et reflexa linea multum recedit in oppositam partem, unde reflexio plus debilitat virtutem quam fraccio. De virtute autem fracta dupliciter potest dici, quod virtus fracta a dextris forcior est quam a sinistris, eo quod ista, que frangitur a dextris, magis accedit ad incessum perpendicularem suum; loquimur de illa perpendiculari, que ducitur a loco fraccionis sive ab angulo, a cuius puncto eodem exeunt linea perpendicularis et linea fracta. Preter vero istas tres lineas essenciales est quarta accidentalis, super quam venit virtus accidentalis et debilis; que quidem venit non ab angulo inmediate, sed a virtute multiplicata secundum aliquam trium linearum dictarum, secundum quod a radio cadenti per fenestras venit lumen accidentale ad omnes angulos domus. Ista autem virtus est omnium debilissima, quoniam non [26, col. 2.] ab angulo exit inmediate, sed a virtute agentis facte secundum lineam rectam reflexam vel fractam. Hec igitur de lineis et angulis dicuntur.

De figuris autem due species ad presens considerande sunt; quarum una est necessaria propter multiplicacionem virtutis, scilicet sperica. Omne enim agens multiplicat suam virtutem sperice, quoniam undique et in omnes diametros sursum, deorsum, ante, retro, dextrorsum, sinistrorsum, quod patet per hoc, quod, quare ab agente posito loco centri contigit protrahere lineam in unam partem et in omnem secundum omnes transposiciones, quapropter oportet, quod sperice: ita dicit *commentator super secundum de anima*. Item ubicumque ponatur sensus, potest sentire tale agens in distancia debita, sed non nisi per speram sicut virtutem venientem ab agente: illa ergo virtus undique multiplicatur. Alia autem figura exigitur ad actionem naturalem, scilicet piramidalis. Quoniam, si virtus veniat ab una parte agentis et terminatur ad aliam partem pacientis et sic de omnibus, ita quod semper veniat virtus agentis ad unam solam partem pacientis, nunquam erit fortis actio sive bona. Sed completa est actio, quando ab omnibus punctis agentis sive a tota superficie eius veniet virtus agentis ad quodlibet punctum pacientis. Hoc autem est inpossibile, nisi sub figura piramidali. Quoniam vero virtutes venientes a singulis partibus agentis concurrunt in cono piramidis et aggregantur, et ideo omnes fortiter possunt agere in partem pacientis occurrentem; possunt ergo infinite piramides exire ab una superficie agentis, et coni sunt tot, quot sunt piramides, et cadunt diversa puncta medii seu pacientis undique, et ad unam partem possunt infinitae exire, quarum una est brevior et alia longior. Sed ille, que sunt equalis longitudinis et brevitatis non habent diversitatem, quia equaliter agunt, quoad est ex parte sua, licet varietas poterit esse a parte medii recipientis. Quando autem una est brevior alia, et exeunt ab eodem agente, plana est difficultas, utrum tota piramis brevior magis agat in pacientem, et oportet ponere, quod piramis brevior magis agat, quia conus eius minus distat a fonte suo, et ideo plus virtutis ibi invenitur quam in piramide longiore, et ideo paciens a piramide breviore est magis coniunctus agenti, et ideo fortius alteratur secundum virtutem. Preterea, si radii, qui sunt de corpore piramidis brevioris, qui veniunt a dextra parte, protrahantur ultra conum in continuum et directum, facient minores angulos cum radiis sinistris, qui sunt de corpore piramidis, quam radii similes, qui sunt a parte piramidis longioris, ut per duo patet *geometrie* EUCLIDIS, scilicet per 21^{am} primi geometrie, et etiam ad sensum; et eodem modo est de radiis venientibus a sinistra parte piramidis exeuntibus ultra conum in continuum et directum, qui magis coniunguntur cum radiis dextris, qui sunt de corpore piramidis, quam consimiles faciunt a parte piramidis longioris. Quapropter, cum omnis congregacio et unicio magis est activa, conus piramidis brevioris magis aget et etiam alterabit paciens quam longioris. Si tamen eliciatur rationabiliter, quod, cum a tota superficie agentis venit virtus ad conum piramidis longioris, ubi virtus magis congregatur, propter quod conus ille magis est activus quam in breviori, et omnis virtus unica est maioris

:ionis; atque addatur adhuc, quod radii piramidis longioris magis sunt opinqui radiis perpendicularibus ductis extremitatibus diametri agentis, are sunt forciores, quia incessus perpendicularis est fortissimus: potest :i, quod iste raciones optime concludunt, quantum sufficiunt, et ideo ocederent, nisi raciones forciores essent in quantum, que predicte sunt.

Hiis igitur radicibus et fundamentis et regulis datis ex potestate ometrie diligens inspector in rebus naturalibus potest dare causas omnium ectuum naturalium per hanc viam, et inpossibile erit aliter, sicut iam ınifestum est intuenti, quoniam variatur omnis actio naturalis penes forudinem et debilitatem per varietatem linearum, angulorum et figurarum.

Explicit tractatus LINCONIENSIS de fractionibus et reflexionibus radiorum.

Sur quelques niveaux du seizième siècle.

Par

Félix Kucharzewski à Warszawa.

Les mentions contenues dans les traités de l'histoire des mathématiques[1]), jointes aux quelques notes publiées dans ce recueil[2]), permettent de fixer les traits principaux de l'histoire des instruments pour mesurer les angles. En revanche l'histoire des niveaux reste presque complètement à faire, et même dans les ouvrages récents[3]), on passe sans transition de la dioptre de Héron et du chorobate de Vitruve aux inventions de Picard, qui constituent la base des instruments de nivellement modernes. A vrai dire, les recherches des historiens ont fourni jusqu'à présent trop peu de données pour former un tableau du développement des niveaux à travers les âges. Pourtant on devrait mentionner d'abord le niveau à balancier et le niveau de poseur, décrits au XIII^e siècle par Aboul Hhassan Ali[4]), et ensuite tous les instruments dont parlent au XVII^e siècle Chiaramonti[5]) et Schott.[6]) Il serait fort désirable que d'autres recherches sur ce sujet soient publiées. Nous serions heureux de les provoquer, en nous permettant d'indiquer ici deux opuscules du XVI^e siècle contenant la description des niveaux alors en usage.

Le premier est un petit traité de pisciculture: Jani Dubravii *de piscinis*, imprimé à Breslau en 1545 et réédité ensuite plusieurs fois.[7])

1) Principalement dans les ouvrages de Montucla, Chasles, Kästner, Cantor et dans les anciens traités des instruments astronomiques.

2) Weissenborn, *Über die verschiedenen Namen des sogenannten geometrischen Quadrates;* Biblioth. Mathem. 1888, p. 37. — Curtze, *Über die im Mittelalter zur Feldmessung benutzten Instrumente;* ibid. 1896, p. 65—72.

3) A. Laussedat, *Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographique.* T. 1 (Paris 1898), p. 131.

4) *Traité des instruments astronomiques des Arabes, traduit par* J. J. Sédillot *et publié par* L. Am. Sédillot. Paris 1835.

5) Scipionis Claramontii *Opuscula varia mathematica.* Bononiae 1653: De usu speculi pro libella et de tota libratione.

6) G. Schott, *Pantometrum Kircherianum.* Herbipoli 1660.

7) Pour l'énumération des éditions v. T. Westwood *et* T. Satchell, *Bibliotheca piscatoria.* London 1883.

On y trouve la description suivante d'une dioptre (fig. 1) amenagée pour le nivellement:

«Librantur autem aquae, VITRUVIO authore, Dioptris, aut Libris aquariis, aut Chorobate, sed diligentius id effici, idem VITRUVIUS per Chorobatem ait, quòd Dioptrae, Libraeque fallant. Ejus Chorobatis exemplar libr. 8. benè multis verbis, & ipso insuper schemate, depingit. Habemus nos quoque illum in usu quasi promiscuo, sicut libras etiam, sicut item Dioptras, ab eodem descriptas. Sed quisnam est, qui Chorobatem longum circiter pedum viginti, facile secum per vias circumferat? igitur nos Dioptrae machinulam haud majorem palmis duobus, qualem vel in ipsa crumenula quisque secum, quoquo libitum fuerit, gestare, ac statim piscinam metiri poterit, in medium producemus. Ea sic conficitur: lamella $|A|$ ex aere, aut e ferro longa digitos septem, vel octo, lata digitum annularem, aequissimo laevore ducitur, eique ancones $|B|$ in extremis capitibus, aequali item modo laevigati, atque in medio perterebrati, ut visum transmittant, apponuntur: post in latere medio, virgula $|C|$ ferrea prominet atque orbiculum $|D|$ in apice, et paulo inferius suspensum filo perpendiculum $|E|$ sustinet, ad eum ad quem vides, effinximus modum. Dioptra autem piscinarii, ut fundamento artis suae, utuntur, haud ignari falsa judicia habere oculorum aspectus, si regula destituantur.»

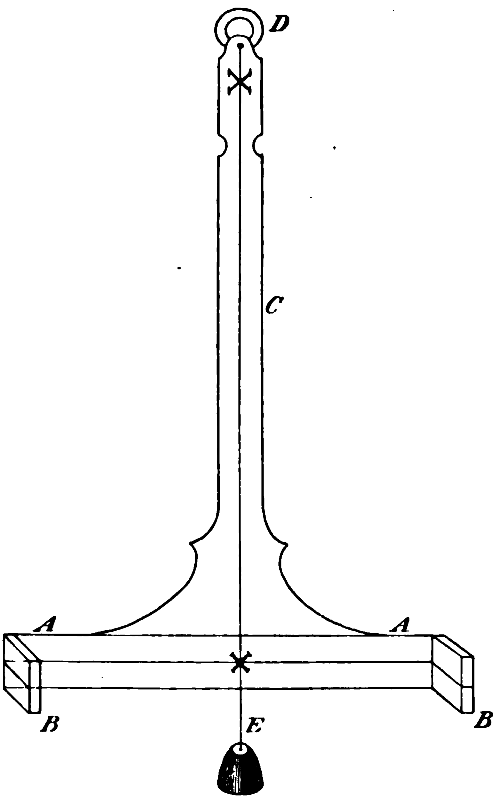


Fig. 1.

Les paroles de DUBRAVIUS semblent rouvrir la discussion sur la dioptre de VITRUVE. M. CANTOR suppose[1]) que cette dernière était la même que celle de HÉRON, c'est à dire la dioptre placée sur un support et com-

1) *Die Römischen Agrimensoren,* p. 201, note 175.

binée avec un niveau d'eau. Cette supposition laisse inexpliquée la *libra aquaria* de VITRUVE, tandis qu'en supposant que VITRUVE sous le nom de *dioptra* comprenait un instrument pour suspendre, comme celui décrit plus haut, on peut reporter le mot *libra aquaria* au niveau d'eau, formant la partie essentielle de la dioptre de HÉRON [1]), considérée comme un instrument de nivellement.

CHIARAMONTI et SCHOTT appellent *libra aquaria* un instrument plus simple, sans dioptre, dont la position horizontale est déterminée par la surface de l'eau en repos. Un pareil instrument, combiné avec la dioptre, est décrit dans le second des deux opuscules, dont nous voulions parler.

C'est un petit traité polonais d'OLBRYCHT STRUMIEŃSKI: *O sprawie, sypaniu, wymierzaniu i rybieniu stawów* (Sur l'art d'établir, de mesurer et d'empoissonner les étangs), publié à Cracovie en 1573.[2]) On y trouve la description de trois instruments de nivellement, dont l'auteur, un simple praticien, se servait pour ses travaux:

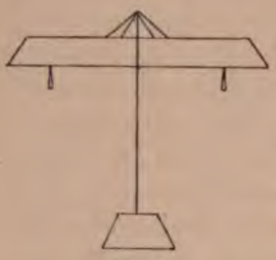


Fig. 2.

I. La *synwaga* (fig. 2), règle droite en bois, d'une longueur de huit aunes, sur laquelle est fixé un niveau de poseur. Pour niveller on faisait reposer la règle sur deux couteaux, tenus par deux hommes et touchant les jalons. L'ensemble de la règle et des deux jalons formait comme une lettre H. Cette méthode de nivellement a survécu jusqu'au temps de PICARD.[3])

II. Le *cordeau*, avec une plaque triangulaire en fer blanc, munie d'un fil à plomb. Cet instrument s'est maintenu en usage en Orient. On l'employait en Turquie encore au commencement de ce siècle.[4])

III. L'*instrument à auget* (fig. 3), composé d'un auget en fer, de trois aunes de longueur, rempli d'eau, ayant aux deux extrémités les bords surélevés, percés de trous «par lesquels on peut viser le papier». Cet auget était placé sur un pied et sa position pouvait être réglée par deux vis. La

1) Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque impériale (Paris 1858), 2e partie: *Extraits des manuscrits relatifs à la géométrie pratique des Grecs, par* M. VINCENT, p. 180.

2) Une nouvelle édition de ce livre a été publiée par nous en 1897 dans la 35e livraison de la *Biblioteka pisarzów polskich* (Bibliothèque des écrivains polonais) éditée sous les auspices de l'Académie des sciences de Cracovie.

3) BULLET, *Traité du nivellement*, Paris 1689.

4) A. GERSCHOW, *Poziomowanie topograficzne* (Nivellement topographique), Warszawa 1851.

ligne de visée était déterminée par les deux trous formant une dioptre, et sa position horizontale donnée par la surface de l'eau, qui remplissait l'auget.

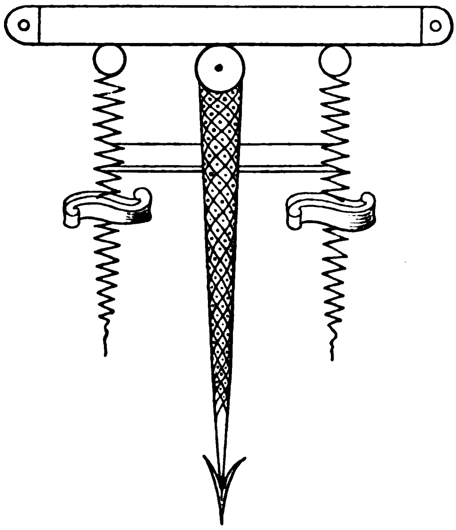


Fig. 3.

La combinaison de la surface de l'eau en repos avec la dioptre, donnait à ce dernier instrument une superiorité sur la *libra aquaria*, décrite un siècle plus tard par CHIARAMONTI et SCHOTT.

Die Entwickelung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie.

Von

A. v. Braunmühl in München.

Die Entwickelung der Zeichen- und Formelsprache nahm in der Trigonometrie einen wesentlich langsameren Verlauf als in der Algebra, was hauptsächlich darin seinen Grund finden dürfte, dafs die Trigonometrie sich völlig aus geometrischen Anschauungen entwickelt hatte, und das Bedürfnis, ihr ein analytisches Gewand umzulegen, erst mit der Entstehung des Funktionsbegriffes dringend wurde. Der Funktionsbegriff aber gehört in seinen Anfängen erst dem 17. und in seiner ersten Ausbildung der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts an. Vor dieser Zeit konnte man nur an eine abkürzende Bezeichnungs- und Schreibweise denken, und auch eine solche entwickelte sich merkwürdig langsam.

Die *Griechen* schrieben, wie in der Geometrie, so auch in der Trigonometrie alles in Worten und auch die *Araber* besafsen, wie ich früher[1]) nachgewiesen zu haben glaube, keinerlei abkürzende Schreibweise oder Zeichen, mit denen man analytisch hätte rechnen können. Dafs im lateinischen Mittelalter, das seine Kenntnisse ganz aus der durch die Araber und Juden übermittelten griechischen Wissenschaft zog und wenig Selbständiges hinzufügte, hierin keine Änderung eintrat, dürfte nicht verwundern; mehr jedoch, dafs sich selbst bei Regiomontan noch nicht einmal die einfachsten Abkürzungen finden.

Die erste Spur solcher konsequent beibehaltener Abkürzungen finde ich in der ältesten uns erhaltenen Druckausgabe der Sphärik des im ersten Jahrhundert nach Chr. in Rom lebenden griechischen Astronomen Menelaus. Diese Ausgabe wurde von dem gelehrten Abte Maurolykus von Messina, einem Griechen (1494—1575), besorgt und erschien 1558 in Folio mit einer von ihm selbst verfafsten Sphärik als Anhang.[2]) Maurolykus

1) *Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie.* Abhandlungen der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher **71**, 1897, p. 22 ff.

2) Menelai *sphaericorum libri tres, ed. Maurolycus* (1558).

hatte seine Ausgabe nach arabischen Handschriften hergestellt und deshalb statt der von den Griechen allein verwendeten Sehne überall den Sinus geschrieben, und zwar unterschied er — und dies tritt hier ebenfalls zum erstenmal auf — einen *sinus rectus primus*, womit er unseren Sinus bezeichnete, und einen *sinus rectus secundus*, unseren Cosinus. Für den ersteren schrieb er konsequent sinus 1^m arcus, für den letzteren sinus 2^m arcus.

Der erste, der abkürzende Zeichen in umfassenderer Weise anwandte und mittelst derselben eine übersichtlichere Darstellung trigonometrischer Sätze zu geben versuchte, dürfte wohl der Niederländer Adriaen van Roomen, oder Adrianus Romanus, gewesen sein. Er bezeichnete in seinem *Canon triangulorum* (Mainz 1609) ein Rechteck durch Vorsetzen des Zeichens §, den Sinus durch S, die Tangente, die er im Anschlufs an Vieta Prosinus nannte, mit P und die Secante oder Transsinuosa mit T. Sollte eine Cofunktion dargestellt werden, so setzte er das Zeichen σ𝔈 zu. Aufserdem benannte er die Dreieckswinkel mit den an ihren Scheiteln stehenden Buchstaben. So lautete z. B. unsere Gleichung

$$1 : (\sin b \operatorname{cosec} A) = (\operatorname{ctg} c + \cos A \operatorname{ctg} b) : \operatorname{ctg} C$$

in seiner Schreibweise:

Ut quadratum radii ad § sub S. AB & T. σ𝔈 A,

$$\text{Ita § sub P. } \sigma\mathfrak{E} \begin{cases} AC \text{ \& Radio} & \text{ad § sub Radio \&} \\ AB \text{ \& S. } \sigma\mathfrak{E}\ A & \text{Prosinus } B \end{cases} \begin{matrix} \text{Efficiente} \\ \text{Coefficiente.} \end{matrix}$$ [1])

Dafs mit dieser schwerfälligen Bezeichnung nicht viel gedient war, erkennt man auf den ersten Blick, aber man sieht doch, dafs damals schon das Bedürfnis gefühlt wurde, einen rascheren Überblick über die langatmigen Sätze zu gewinnen, als dies durch die Darstellung in Worten möglich ist.

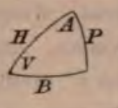
Etwas besser erreichte diesen Zweck Albert Girard. In Lothringen geboren lebte er von 1625 bis 1632 in den Niederlanden und kannte sicher das Werk van Roomens, der ihn vielleicht zu seinem Versuche veranlafst haben mag, sowohl abkürzende Bezeichnungen, als wirkliche Formeln einzuführen.[2]) Was erstere anlangt, so bezeichnete er in seinem Werkchen *Tables de sinus, tangents, secants selon le raid 100000 parties* (à la Haye 1626) in den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken, wie beistehende Tafel zeigt, die Hypotenuse mit H, die eine Kathete mit B, die

---

1) A. a. O. 230. Vgl. auch meine *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, I, p. 229—230.

2) *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, I, p. 238.

andere mit P, den Winkel zwischen H und B mit V und den anderen mit A und setzte neben die Figur

	Rad.	a / sec. H	tan. H / tan. a	tan. P / tan. V

die im Dreieck bestehenden Proportionen, indem er über die Stücke Abkürzungen für die trigonometrischen Linien tangens und secans setzte. Ein Stück ohne darüberstehende Bezeichnung bedeutete, dafs von ihm der Sinus zu nehmen ist, und die Cofunktionen wurden dadurch ausgedrückt, dafs er kleine Buchstaben ansetzte. Demnach enthält also die obige Tafel die beiden Proportionen

$$\text{Radius}: \cos A = \operatorname{tg} H : \operatorname{tg} P$$
$$\text{Radius}: \sec H = \operatorname{ctg} A : \operatorname{tg} V.$$

Das Bedürfnis, eigentliche Formeln zu schreiben, drängte sich ihm aber bei Behandlung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke auf. Die Seiten derselben bezeichnete er mit A, B, D und ihre Complemente mit a, b, d, und da er sich nur des Sinus bediente, blieben abkürzende Bezeichnungen der Funktionen ganz weg. So wurde z. B. der halbe Sinus-versus des von den Seiten A und B eingeschlossenen Winkels durch die Formel dargestellt:

$$\frac{(A+b) \underset{\text{ou}}{\underline{+}} (d)}{(A+b+(A-b)},$$

wobei dem Zeichen $\underline{+}$ noch eine erklärende Anmerkung beigegeben ward. Dieser Formel entspricht in unserer Schreibweise folgende:

$$\frac{1}{2}\,\text{sinvers}\,\delta = \frac{\sin(A+90-B) - \sin(90^0-D)}{\sin(A+90^0-B)+\sin(A-(90^0-B))} = \frac{\cos(B-A)-\cos D}{\cos(B-A)-\cos(B+A)}.$$

Girard verstand es aber offenbar auch schon eine solche Formel umzuformen, denn er liefs auf die obige unmittelbar ihre Auflösung nach $\sin(90^0-D)$ in der Gestalt folgen:

$$\frac{(A+b) \underset{\text{ou}}{\underline{+}}{}^{*)} (A-b) \ \substack{\text{le tout mult. par le} \\ \text{demie verse de l'ang.}^{**)}}}{\text{Raid}} = (A+b) \ \substack{\text{pour le sin.} \\ \text{compl. de la base.}}$$

*) Si $A+B$ $\left\{\begin{matrix}\text{abon-}\\\text{dant,}\\\text{defail-}\\\text{lant}\end{matrix}\right\}$ prenez $\left\}\begin{matrix}+\\ \\ \div\end{matrix}\right.$.

**) Quand l'application est majeure au sinus de $(A+b)$ la base requise abondera, si mineure, elle deffaudra; si égale, quadrant.

Warum hier statt des sonst von GIRARD stets gebrauchten Zeichens „—" plötzlich das Zeichen „=" verwendet ist, ist nicht zu ersehen! Der Umstand, dafs die zweite Formel aus der ersten durch Rechnung hervorgegangen ist und nicht, wie es sonst der Brauch war, neu abgeleitet wurde, gibt GIRARDS Formeln eine entschieden höhere Bedeutung, als denen des ADRIANUS ROMANUS, dem sie nur ein Bild zur leichteren Erfassung der Sätze waren.

Als Nachfolger GIRARDS auf dem eingeschlagenen Weg ist der Niederländer J. J. STAMPIOEN zu nennen, der einer 1632 besorgten Ausgabe von FR. VAN SCHOOTENS Sinustafeln[1]) eine kurze sphärische Trigonometrie als Anhang in niederländischer Sprache beigab. Darin schreibt er zunächst statt der überall, namentlich für die Regeln des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks gebräuchlichen Proportionen, *Gleichungen* in folgender Form:

$$\frac{\overset{\text{Sec}}{bc}, \text{ in } \overset{\text{Tan}}{AB}}{R} = \overset{\text{Tan}}{C},$$

d. h. $\sec(90^0 - BC) \cdot \operatorname{tg} AB = \operatorname{tg} C$, oder in unserer Bezeichnungsweise: $\operatorname{tg} c = \sin a \operatorname{tg} C$ für ein bei B rechtwinkliges sphärisches $\triangle\, ABC$. Ferner schreibt STAMPIOEN den Cosinussatz des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks in folgender Gestalt:

$$\frac{(:BC) \div (AB + AC) \text{ in } \square\, R}{\underset{\text{— Sin —}}{|\, AB, \text{ in } AC\,|}} = (:A),$$

d. h.

$$\frac{\text{sinvers } BC - \text{sinvers } (AB - AC)}{\sin AB \cdot \sin AC} = \text{sinvers } A.$$

STAMPIOENS Formelschreibung beruht offenbar auf jener GIRARDS, besitzt aber den Vorzug, die Gleichungen ganz in Zeichen zu geben, während bei GIRARD immer noch Worte vorkommen. Merkwürdiger Weise wurden jedoch die Versuche dieser beiden Männer nicht weiter beachtet, und nicht besser erging es einer wenigstens sehr konsequent durchgeführten Formelschreibung, welche der französische Mathematiker PETER HERIGONE in seinem die gesamte damalige Mathematik umfassenden *Cursus mathematicus* (6 Bände) im Jahre 1634 in Vorschlag brachte. Für das Gleichheitszeichen führte er unnötiger Weise die neue Bezeichnung $2 \mid 2$ ein, während er für unser „>", $3 \mid 2$ und für „<" $2 \mid 3$ schrieb, Minus wurde mit $\backsim$, parallel mit $\parallel$ und proportional mit π bezeichnet,

1) *Tabulae Sinuum, Tangentium et Secantium ad Radium* 10000000 . . . *door* FR. VAN SCHOOTEN *gecorrigeert* . . . *door* J. J. STAMPIOEN (Rotterdam 1632, in 8°). — *Kort By-voeghsel der sphaerischer Triangulen door* J. J. STAMPIOEN *Juniorem, Mathematicum* (Rotterdam 1632, in 8°).

ein Rechteck deutete er durch ▭, ein Quadrat durch □ an. In dieser Sprache fand nun bei ihm z. B. der Cosinussatz der ebenen Trigonometrie den Ausdruck:

$$2 \sqsubset\!\sqsupset ab,\ bc\, \pi \,\square\, bc + \square\, ba \backsim \square\, ac\ 2 \mid 2 \text{ rad. } \pi \sin < bad.$$

Hierbei wurden beständig in der Figur die Buchstaben des grofsen, im Texte die des kleinen lateinischen Alphabetes verwendet. Eine bestimmte Bezeichnung des Dreiecks, die ein für allemal festgehalten wird, hat er jedoch noch nicht, so nennt er dasselbe z. B., um den ebenen Tangentensatz abzuleiten, FGH und setzt

$$a\, 2 \mid 2\, hf + hg,\quad b\, 2 \mid 2\, hf - hg,\quad c\, 2 \mid 2\, \tfrac{1}{2},\ f + g,$$

wodurch der Satz die Gestalt annimmt:

$$a\pi \text{ tangen. } c\ 2 \mid 2\, b\, \pi \text{ tangent.}$$

Nach tangent. folgt dann die Angabe des Winkels in Graden etc., der der halben Differenz von f und g entspricht.

Vereinzelt findet sich schon im 16. Jahrhundert, namentlich in Handschriften[1]) für den Sinus die Abkürzung S oder s gebraucht und später, sehen wir, werden auch die Worte Tangente und Secante bisweilen nicht mehr ganz ausgeschrieben, für die *Cofunktionen* jedoch findet man solche Abkürzungen erst bei dem Engländer William Oughtred (1574—1660), der in seiner Trigonometrie[2]) von 1657 für die sämtlichen 6 Funktionen eine passende Schreibweise einführte, die nur dadurch etwas schwerfällig war, dafs er noch überall den Bogen mitschleppte. Er setze Sinus = s arc., Cosinus = s co arc., Secans = se arc., Tangens = t arc., Cotangens = t co arc., Cosecans = sec. co arc.

Dabei bediente er sich auch einer bequemen Schreibweise der seit der Zeit der Griechen noch immer gebräuchlichen Proportionen, indem er z. B. setzte:

t arc. · Rad :: Rad · t co arc.

Dieser von ihm eingeführte Gebrauch des aus 4 Punkten zusammengesetzten Zeichens, welches in der Proportion das Gleichheitszeichen vertrat, bürgerte sich bald ein und findet sich sogar noch heute in manchen Schriften, namentlich in England, in Anwendung, während der das Verhältnis bezeichnende einfache Punkt dem Doppelpunkte weichen mufste, nachdem ersterer von Christian Wolff als Multiplikationszeichen statt des von Oughtred benutzten $\times$ eingeführt worden war. In Gleichungen,

1) *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie,* I, p. 230.

2) *Trigonometria, hoc est modus computandi Triangulorum latera et angulos, una cum Tabulis Sinuum, Tangentium etc.* (Londini 1657, in 4°). — Die Angabe von Rouse Ball, *A short account of the history of mathematics,* 2d ed. (London 1893) p. 246, Oughtred habe cos. und cot. geschrieben, ist nicht richtig.

zu denen die Proportionen auch damals noch nicht gerechnet wurden, schrieb OUGHTRED übrigens durchweg unser Zeichen.

Er hat aber nicht nur Abkürzungen für die Bezeichnung der trigonometrischen Linien eingeführt, sondern auch eine Formelschreibung für seine allerdings zuerst in Worten ausgesprochenen Sätze versucht.

So schrieb er z. B. die Formel

$$\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+c-b)}{4ac}}\ ^{1)}$$

folgendermaßen:

$$\square\ \text{crur.}\cdot\frac{Z\ \text{crur.}+B}{2}\times\frac{Z\ \text{crur.}-B}{2}::Rq\cdot Q\ \text{s co}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ang.}$$

Hier bedeutet $\square$ crur. das Rechteck aus den beiden Schenkeln, die den Winkel β einschließen, Z crur. ihre Summe, B die Basis des Dreiecks, Rq das Quadrat des Radius und Q s co $\frac{1}{2}$ ang. das Quadrat des Cosinus des halben eingeschlossenen Winkels. — Zu rechnen hat er übrigens mit seinen Formeln nicht versucht, denn er leitet z. B. die sogenannten NEPERschen Analogien noch auf sehr umständliche Weise an der Figur des Analemmas ab.

Trotzdem sein Buch in England sehr bekannt geworden zu sein scheint, vermochte er doch seiner Formelschrift keinen durchschlagenden Erfolg zu verschaffen. Man schrieb nach wie vor ziemlich allgemein die trigonometrischen Sätze in langatmigen Perioden und bediente sich höchstens für die trigonometrischen Linien abkürzender Zeichen, die übrigens auch wieder in der verschiedensten Weise gewählt wurden. So schrieb z. B. der englische Astronom VINZENZ WING in seiner *Astronomia Britannica* von 1668 (1696 wieder aufgelegt) Sinus = s., Cosinus = cs., Tangens = t., Cotangens = ct., Secans = sec. und Cosecans = csec., während JONAS MOORE in seinem *Mathematical Compendium* (1674) S, T, Cos., Cot., gebrauchte, und der bekannte JOHN WALLIS führte wieder andere Bezeichnungen ein.[2]) Er setzte nämlich Sinus = S, Cosinus = Σ, Tangens = T, Cotangens = τ, Secans = s, Cosecans = σ, Sinus versus = V und Sinus versus des Complementes = v. Diese Schreibweise behielt er übrigens in seinen zahlreichen Schriften konsequent bei und, was ein wesentlicher Fortschritt war, er ersetzte in der Hauptsache die Propor-

1) *Trigonometria* p. 17.

2) Bemerkt mag noch werden, daß JOH. CHRISTOPH STURM in seiner *Mathesis enucleata* (1689, in 8°; 1695 und 1711 wieder aufgelegt) auch schon die Abkürzung Sin. anwandte. Er schrieb z. B. Sin. ang. A ad Sin. BC ut Sin. ang. C ad Sin. AB. Auch will ich hier noch die schöne Schreibweise des Tangentensatzes durch den im Text erwähnten V. WING anführen. Sie lautet:

$$AC+AB:AC-AB::\text{t.}\,\frac{C+B}{2}:\text{t.}\,\frac{C-B}{2}.$$

tionen durch Gleichungen und rechnete mit ihnen, was seit Girards schüchternen Anfängen nur sehr vereinzelt[1]) vorgekommen war. So gab er z. B. den Zusammenhang der trigonometrischen Linien untereinander durch Gleichungen von folgender Form an[2]):

$$S=\sqrt{}:R^2-\Sigma^2=\frac{\Sigma T}{R}=\frac{T}{R}\sqrt{}:R^2-S^2=\frac{TR}{s}=\frac{TR}{\sqrt{}:R^2+T^2}=\frac{R}{s}\sqrt{}:s^2-R^2$$
$$=\frac{\Sigma R}{\tau}=\frac{R}{\tau}\sqrt{}:R^2-S^2=\frac{R^2}{\sigma}=\frac{R^2}{\sqrt{}:R^2+\tau^2}=R-v=\sqrt{}:2VR-V^2.$$

Einen direkten Nachfolger in seiner Behandlungsweise der trigonometrischen Rechnungen fand Wallis in einem gewissen John Caswell, der eine *Trigonometria plana et sphaerica* schrieb, welche dem II. Bande von Wallis' Werken angehängt ist und um das Jahr 1690 verfaßt zu sein scheint. Caswell behält Wallis' Bezeichnungsweise völlig bei und schreibt die trigonometrischen Sätze in Formeln, die denen Oughtreds ähneln, aber in mancher Beziehung einfacher als jene sind. So führt er z. B. zum erstenmale einen eigenen Buchstaben „ζ" für die halbe Summe der drei Dreiecksseiten ein, die er mit B, m und n bezeichnet. Damit nimmt unsere Formel

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}=\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin(s-a)\sin(s-c)}$$

die Gestalt an[3]):

$$\mathrm{S}:\zeta-m:\times\mathrm{S}:\zeta-n\cdot\mathrm{S}:\zeta\times\mathrm{S}:\zeta-B::Rq\cdot\tau q\,\tfrac{1}{2}\,\text{Ang.}$$

Die : stehen an Stelle einer Klammer, so daſs $\mathrm{S}:\zeta-m:$ bedeutet: $\sin(\zeta-m)$. Auch die vier Neperschen Analogien finden sich hier in ganz übersichtlichen Formeln geschrieben, was allerdings auch schon Oughtred geleistet hatte. Auch sonst bietet Caswells Schrift, die bisher gänzlich unbeachtet geblieben ist, manches Originelle, namentlich was die Beweise der Sätze anlangt; ich werde im II. Bande meiner Geschichte der Trigonometrie hierauf etwas näher eingehen.

Hauptsächlich die Analysis und besonders die durch Mercator, Gregory und Newton, Leibniz und die Bernoulli seit 1668 sich allmählich entwickelnde Reihenlehre waren es, welche den Gebrauch abkürzender Bezeichnungen für die trigonometrischen Linien zur Notwendig-

1) In dem Werke *Trigonometria Britannica, or the doctrine of triangles in two books* (London 1658, in fol.) von John Newton, welches eine Neuausgabe des gleichnamigen Werkes von Briggs und Gellibrand ist, findet sich eine rechnerische Ableitung der Neperschen Analogien (p. 67—69). John Newton scheint auch der erste gewesen zu sein, der die *Worte* cosinus und cotangente konsequent benutzte.

2) J. Wallis, *Opera* t. II. p. 591—592. Er sagt daselbst, er habe die hier zusammengestellte Funktionentabelle auf Ansuchen J. Collins' schon vor vielen Jahren verfaſst.

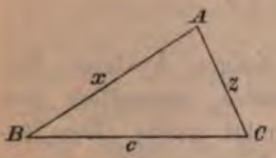
3) A. a. O., p. 875.

keit machten, und JACOB BERNOULLI schrieb sogar schon ziemlich konsequent sin., tang. und sec. mit Nachsetzung des Bogens, den er unter Umständen sogar als veränderlich auffafste[1]), so dafs er dem Begriff einer trigonometrischen Funktion sehr nahe kam, ohne ihn jedoch wirklich zu fassen. Naturgemäfs treten dann in solchen Fällen auch die trigonometrischen Linien als analytische Rechnungsgröfsen auf.

Als dann 1698 HUGO OMERIQUE[2]) in gröfserer Ausdehnung die Buchstabenrechnung auf geometrische Aufgaben angewendet hatte, führte der Jesuit JACOB KRESA[3]) 1720 dieselbe in ihrem ganzen Umfange auch in die Trigonometrie ein, allerdings noch in wenig handlicher Form. So wird namentlich der alle Rechnungen erschwerende Radius immer noch mitgeschleppt, und während KRESA den Sinus mit S, den Cosinus mit S.2 (sinus secundus), die Tangente mit T, Cotangente mit T.2 bezeichnete, setzte er in den Rechnungen für diese Gröfsen eigene Buchstaben ein und reduzierte fast durchweg alle Funktionen auf den Sinus. War z. B. das Additionstheorem durch eine Formel auszudrücken, so schrieb er für den Sinus des einen Winkels x, für den des zweiten y und erhielt so:

$$S = \frac{y\sqrt{r^2 - x^2} + x\sqrt{r^2 - y^2}}{r}.$$

Auch die Bezeichnung der Dreiecksseiten und Winkel war noch eine recht ungeschickte. Um z. B. den Cosinussatz der ebenen Trigonometrie anzusetzen, bezeichnete er in nebenstehender Figur AB mit x, AC mit z, BC mit c und schrieb:



$$r \cdot\cdot \text{S.2. (anguli } BAC) :: 2xz \cdot\cdot xx + zz - cc$$

Durch die ungleichmäfsige Bezeichnungsweise der Funktionen wurden die Rechnungen natürlich sehr unübersichtlich, und das Schlufsresultat mufste erst wieder eigens interpretiert werden.

Nicht viel besser steht es bei KRESAS Nachfolger, dem Petersburger Akademiker FRIEDRICH CHRISTIAN MAIER, der im II. Bande der Peters-

1) Namentlich in einer interessanten Abhandlung, in welcher er den Inhalt eines sphärischen Dreiecks mittelst Integralrechnung durch eine ebene Fläche darstellte (Acta Eruditorum 1691, 287—288). Später auch bei R. COTES, *Opera miscellanea* in *Harmonia mensurarum* (1722).

2) *Analysis geometrica sive nova et vera methodus resolvendi tam problemata Geometrica, quam Arithmeticas quaestiones.* ANTONIUS HUGO DE OMERIQUE *Sanlucarensis* (Gadibus 1698, in 4°).

3) *Analysis speciosa Trigonometriae : Primo Mobili : Triangulis rectilineis : Progressioni Arithmeticae et Geometricae : Aliisque variis Problematis applicata A. R. Patre* JACOBO KRESA *e S. J. Opus Posthumum in lucem datum* (Pragae 1720). Das Werk schliefst an jenes von OMERIQUE an, für welches KRESA eine Vorrede geschrieben hatte.

burger Kommentare für das Jahr 1727 eine Abhandlung über Trigonometrie veröffentlichte, in welcher er, wie Kresa, für jede neu auftretende Rechnungsgröfse einen neuen Buchstaben einführte, wohl aber unter Verschmähung der Proportionen endlich einmal *nur mehr* mit Gleichungen rechnete. Traten in die Rechnung nur wenige Winkel ein, so gab seine Methode einen ganz guten Überblick, waren aber deren mehrere vorhanden, oder traten Funktionen von neuen Winkelverbindungen auf, so erschwerten die neueingeführten Buchstaben jede Übersicht und man ist, um das Schlufsresultat zu entziffern, thatsächlich gezwungen, sich eine eigene Tabelle der gebrauchten Bezeichnungen herzustellen. Ich teile ein paar Formeln mit, die sich noch verhältnismäfsig gut überblicken lassen.

Ist T die Tangente des gröfseren, t die des kleineren zweier Winkel, so ist die Tangente ihrer Summe

$$rr\frac{T+t}{rr-Tt}.$$

Sind S und C, s und c Sinus und Cosinus bezüglich des grösseren und des kleineren zweier Winkel und bezeichnet A den Sinus und B den Cosinus der halben Summe derselben, so ist:

$$\frac{S-s}{c-C}=\frac{c+C}{S+s}=\frac{B}{A},$$

d. h. also:

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\frac{\cos\beta+\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Trotz dieser Mängel fand Maiers Schreibweise einigen Anklang: Die Petersburger Kommentare enthalten mehrere Aufsätze, namentlich von Jacob Hermann, in denen sie ausschliefslich benutzt wurde. Das Bedürfnis, die algebraische Rechnung auch in der Trigonometrie zu verwerten, war eben durch die enorme Ausbildung, welche an ihrer Hand die höhere Analysis gefunden hatte, so übermächtig geworden, dafs man schon für dieses noch ziemlich minderwertige Hülfsmittel hierzu dankbar war.

Sehr bald nachdem Maier seine, wie er glaubte, vorzügliche Bezeichnungsweise erfunden hatte, begann Euler seine zahllosen Veröffentlichungen, die in allen Zweigen der Mathematik bahnbrechend waren und namentlich eine völlige Umgestaltung der Analysis hervorriefen. Sein Genie fand auch in der Trigonometrie, wie überall den einfachsten Weg, um einerseits übersichtliche Formeln zu erzielen und andererseits eine bequeme Rechnung zu ermöglichen. Zu diesem Zwecke setzte er vor allem den sinus-totus oder den Radius $=1$ und definierte so die trigonometrischen Funktionen als *Verhältnisse*, die von der Gröfse des Winkels abhängen. Allerdings war schon oft vor ihm der Radius $= 1$ gesetzt worden, ja DE LAGNY hatte in seiner neuen Goniometrie[1]) diese Vereinfachung konsequent beibehalten, aber auch nur als *Vereinfachung* der Rechnungen, indem er die Funktionen immer noch als *Linien* im Kreise mit dem Radius 1 deutete. Ferner führte EULER die trigonometrischen Verhältnisse als Rechnungsgröfsen in die Analysis ein, indem er sie als *analytische Funktionen eines variabeln Argumentes* auffafste und sie so unter den von ihm aufgestellten Funktionsbegriff als transcendente Funktionen einreihte. Um sie aber, wie Potenzen und Logarithmen bequem benützen zu können, war es vor allem notwendig, eine übersichtliche Schreibweise zu finden, welche Klarheit und Symmetrie in die Formeln brachte. Schon in seinem Aufsatze vom Jahre 1729, der den Titel führt: *Solutio problematis astronomici ex datis tribus stellae fixae altitudinibus et temporum differentiis invenire elevationem poli et declinationem stellae*[2]), tritt dieses Bestreben deutlich zu tage. Denn während DANIEL BERNOULLI und JACOB HERMANN dasselbe Problem[3]) noch mit MAIERS Bezeichnungsweise behandelten, schrieb der junge EULER bereits den von ihm verwendeten Cosinussatz fast genau in der heute gebräuchlichen Form:

$$\cos - \text{anguli } A = \frac{\cos : BC - \cos : AB \cdot \cos : AC}{s\,AB \cdot s\,AC},$$

eine Form, in welcher ich ihn bei keinem früheren Schriftsteller finden konnte.

Diese Gestalt zeigt aber auch, dafs ihm damals noch die einfache und symmetrische Bezeichnung der Seiten eines ebenen oder sphärischen Dreieckes durch die kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabetes fehlte. Diese hat er zum erstenmale in dem Aufsatze *Principes de la trigonométrie sphérique* etc. (1753) eingeführt.[4]) Welche Einfachheit und Eleganz durch diesen so naheliegenden Gedanken, der aber doch 2000 Jahre hatte auf sich warten lassen, die trigonometrischen Formeln und Sätze erhielten, brauche ich nicht weiter anzuführen. Im Anfange machte EULER auch noch einen Unterschied in der Bezeichnung des im Gradmafse und des im Längenmafse gemessenen Bogens, indem er den ersteren nur durch Angabe des am Scheitel des zugehörigen Winkels stehenden grofsen Buchstabens, den letzteren durch Vorsetzen eines $A =$ arcus ausdrückte.[5]) Aber in seinem grofsen Werke *Introductio in Analysin in-*

1) Die Aufsätze von DE LAGNY stehen in Histoire et Mémoires de l'Académie des sciences de Paris 1719, 135 ff.; 1724, 241 ff.; 1725, 284 ff.; 1727, 120 ff.; 1729, 14.

2) Commentarii acad. sc. Petropolitanae 4 (1729), p. 98.

3) Ebenda p. 89, bezüglich p. 94.

4) Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin 9, 223.

5) Z. B. noch in den Aufsätzen: *Theoremata circa reductionem integralium ad*

finitorum, das im Jahre 1748 in 2 Bänden zu Lausanne erschien, nahm er auch hiervon gröfstenteils Abstand. Dieses Werk enthält überhaupt schon den ganzen analytisch-geometrischen Formelapparat in unserer Schreibweise, und die beiden Abhandlungen *Principes de la trigonométrie sphérique, tirés de la méthode des plus grands et des plus petits* (1753) und *Trigonometria sphaerica universa, ex primis principiis breviter et dilucide derivata* (1779) brachten originelle Ableitungen des ganzen Formelsystems der sphärischen Trigonometrie.

Man könnte vielleicht der Ansicht sein, Euler habe seine neue Bezeichnungsweise der trigonometrischen Funktionen, sowie die Einführung der letzteren in die Trigonometrie in Anbetracht seiner unzähligen anderen Entdeckungen als etwas Selbstverständliches oder weniger Wichtiges betrachtet. Dem ist aber keineswegs so, das geht aus seinen eigenen Worten hervor, mit deren Ausführung wir diesen Aufsatz schliefsen wollen. Er sagt in seiner Abhandlung: *Subsidium calculi sinuum* (Novi Commentarii Acad. Petrop. **5**, 1754—55, p. 164—165) wörtlich: „Dadurch, dafs der Sinuskalkül in die Analysis aufgenommen wurde, so dafs die Sinus, Cosinus und Tangenten der Winkel, wie die Logarithmen, den Rechnungsvorschriften unterworfen sind und ebensolche algebraische Gröfsen darstellen, hat die Analysis zweifelsohne einen grofsen Zuwachs erhalten. . . . Ebenso (wie Johann Bernoulli die Logarithmen zu analytischen Gröfsen machte) glaube ich die Sinus und Tangenten der Winkel zuerst in den Kalkül eingeführt zu haben, so dafs man sie, wie andere Gröfsen behandeln und mit ihnen alle Operationen ohne jedes Hindernis ausführen kann. Wenn dies auch nicht von grofser Wichtigkeit scheinen möchte, da es hauptsächlich auf der von mir in die Rechnung eingeführten Bezeichnungsweise dieser Gröfsen beruht, . . . so hat doch eben diese Art der Bezeichnung nachmals der ganzen Analysis so grofse Hülfsmittel verschafft, dafs dadurch ein fast neues Feld erschlossen wurde, das die Geometer mit grofsem Erfolge bearbeitet haben. Und da wir sehen, dafs die Analysis ihre Erfolge hauptsächlich durch eine passende Bezeichnungsweise errungen hat, so ist es um so weniger zu verwundern, dafs eine geschickte Einführung der Sinus in den Algorithmus so viel Nutzen schaffte."

quadraturam circuli und *De inventione Integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur*, beide von 1743 in Miscellanea Berolinensia t. **3** erschienen.

Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logaritmica.

Di

Gino Loria a Genova.

Introduzione.

Sotto il titolo *Opera geometrica* Evangelista Torricelli pubblicò nel 1644, tre anni prima di morire, una terna di memorie di geometria pura *De sphaera et solidis sphaeralibus*, *De motu gravium*, *De dimensione parabolae solidique hyperbolici problemata duo*, delle quali è notorio l'altissimo valore. Costituiscono esse la somma dei contributi dati alla scienza dell' estensione dal sommo discepolo di Galileo? A tale domanda si deve rispondere con un reciso diniego, giacchè esse rappresentano una parte piccolissima dei mirabili ritrovati che a lui sono dovuti. Dell' importanza dei quali il Torricelli medesimo era pienamente conscio; infatti, quando sentì approssimarsi la morte immatura a cui il destino avevalo condannato, ordinò che la pubblicazione di essi venisse affidata a due de' suoi più fidi e dotti amici: Bonaventura Cavalieri e Michelangelo Ricci.[1]) Senonchè la morte del primo, avvenuta nello stesso anno 1647, e le occupazioni ecclesiastiche, a cui il secondo aveva consacrato tutto sè stesso, vietarono che il suo voto fosse esaudito. Nè miglior esito ebbero le fatiche di Lodovico Serenai — esecutore testamentario del Torricelli — ed il tentativo fatto da Ferdinando II, Granduca di Toscana, per ottenere

1) Ecco il brano relativo del testamento del Torricelli: «Item ordina al sopradetto Sig^{r}. Lodovico suo esecutore che quanto prima, seguita sua morte, trasmetta e mandi a spese della sua eredità al M. R. P. fra Bonaventura Cavalieri Matematico dello studio di Bologna tutti i suoi scritti, studii e fatiche di Geometria quali aveva disegnato di pubblicare alla stampa, essendo di già in ordine con le dimostrazioni promesse, acciocchè detto Padre fra Bonaventura ne pubblichi quella quantità che a esso liberamente parrà e piacerà, et il restante li mandi a Roma al Sig^{r}. Michelangelo Ricci gentiluomo splendidissimo et amicissimo di detto Sig^{r}. Testatore et intendentissimo di queste scienze, acciò li metta insieme e li publichi come meglio ha significato et ordinato in voce al medesimo Sig^{r}. esecutore.» G. Ghinassi, *Lettere fin qui inedite di Evangelista Torricelli precedute della vita di lui* (Faenza 1864), p. LIII.

che la desiderata edizione fosse curata da VINCENZO VIVIANI: ben è vero che questi accettò l'incarico affidatogli dal suo augusto protettore, ma, vuoi per incuria, vuoi per malvolere, non adempì all' impegno preso.[1])

Secondo il MONTUCLA[2]) nell' anno stesso (1647) del decesso del nostro EVANGELISTA, sarebbe stato pubblicato un volume intitolato *Exercitationes geometricae ab.* EV. TORRICELLI, *opus postumum;* la stessa notizia venne ripetuta di recente dagli editori delle Opere complete dell' HUYGENS[3]); ma le reiterate ricerche da me fatte di tale volume, e sempre infruttuosamente, mi sembrano autorizzare a concludere che quel dato non è che il prodotto di un equivoco. Va per compenso notato che, nel 1715, venne stampata una raccolta di *Lezioni accademiche* di chi, vivo, meritò l'epiteto di «ARCHIMEDE delle Toscana«, e che nel 1778 il FABBRONI fece conoscere[4]) al mondo matematico il *Racconto di alcune proposizioni proposte e passate scambievolmente tra matematici di Francia e me dall' anno 1640, in quà,* un passo importante del quale diede argomento ad una mia nota recente.[5]) A completare questa breve bibliografia torricelliana vanno aggiunte alcune lettere e pochi scritti di idraulica, di cui il GHINASSI ha dato un indice completo.[6])

Quanto di importante ed originale si trovi nelle opere tuttora inedite del TORRICELLI si desume dalle parole di lode entusiastica che concordemente pronunciarono tutti coloro che ebbero l'invidiabile fortuna di studiarle; per porgere ai lettori della Bibliotheca Mathematica un' idea approssimativa di quello che esse abbracciano, credo opportuno trascrivere quì un indice succinto dei volumi relativi al geometra di cui ci occupiamo, esistenti nella celebre Raccolta Galileiana[7]) che si conserva nella Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.

---

1) PIETRO FERRONI credette di spiegare tal fatto con la «gelosia del VIVIANI» (v. *Supplemento alla dottrina torricelliana sopra le coclee,* in Mem. della Società Italiana delle Scienze **15** (1811), p. 62), ma più tardi difese egli stesso il VIVIANI da siffatta accusa (v. il *Saggio dell' aurea sintesi greco-italica presa in esempio da uno dei Mss. inediti del matematico* VINCENZO VIVIANI nel tomo **19** (1821), p. 187—222 della stessa raccolta).

2) *Histoire des mathématiques.* Nouv. éd., t. II, p. 90.

3) *Oeuvres complètes de* C. HUYGENS, t. I (La Haye 1888), p. 131, note 4).

4) *Vitae Italorum doctrina excellentium qui saeculis XVII et XVIII floruerunt,* t. I (Pisis MDCCLXXVIII), p. 345—372.

5) *Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva;* Rendic. della R. Acc. dei Lincei, seduta del 5 Dicembre 1897.

6) GHINASSI, op. cit. p. XXV—XXVII.

7) I Mss. torricelliani ivi contenuti sono quelli che vennero lasciati per testamento al SERENAI, i quali trapassarono poi nelle mani di G. B. CLEMENTE NELLI, che li unì agli altri scritti di GALILEO che aveva raccolti. E questi tutti furono acquistati nel 1820 dal Granduca FERDINANDO III e posti nella Palatina, ora Nazionale,

Vol. I. Vita e documenti.
Vol. II. Carteggio famigliare.
Vol. III. Opere letterarie.
Vol. IV. Prospettiva pratica (trattato incompleto).
Vol. V—XIII. Matematica pura.

- Vol. 1. Contiene cinque quaderni scritti da RAFFAELLO MAGIOTTI, il quale attinse, almeno in parte, a lettere del TORRICELLI.
- Vol. 2. 1. Opuscoli vari. 2. Liber de proportionibus. 3. De maximis et minimis. 4. De tactionibus.
- Vol. 3. 1. De planis varia. 2. De solidis varia. 3. De circulo et adscriptis. 4. De aequalitate perimetrorum cylindri, coni ac sphaerae varia. 5. De comparatione perimetrorum cylindri, coni ac sphaerae.
- Vol. 4. 1. Teoria degli indivisibili. 2. De infinitis spiralibus.
- Vol. 5. 1. De geometrica in plano per puncta linearum conicarum. 2. De conicis varia.
- Vol. 6. Stereometria. Pars I: De solidis variformibus. Pars II: De solidorum resolutione in solida. Pars III: De conoydalium mensura. Pars IV: Appendix de anularibus ac de obliquis conoydalibus.
- Vol. 7. 1. De cycloide. 2. De infinitis hyperbolis. 3. De hemhyperbola logaritmica. 4. De parabolis infinitis.
- Vol. 8. 1. Problema risoluto da TOMMASO BIANCHI inglese.[1] 2. Problema del TORRICELLI risoluto dal ROBERVAL. 3. Racconto d'alcune proposizioni proposte e passate scambievolmente fra i matematici di Francia ed il TORRICELLI dall' anno 1640 in poi.
- Vol. 9. Il campo dei tartufi, ossia Raccolta di proposizioni poste in confuso.

Vol. XIV—XV. Miscellanee matematiche.

- Vol. 1. Commenti sopra i Bicchieri. 2. Delle Armille. 3. Mensura ac aequilibrium monocurvae mensalis ac poculi penhyperbolicae infinitae extensionis. 4. Mestotimhyperbola et planum penhyperbolicum. 5. Planum penhyperbolicum. 6. Diverse miscellanee dei solidi, spirali, armille, cilindri ecc.
- Vol. 2. 1. Trattato delle spirali. 2. De indivisibilium doctrina perperam usurpata. 3. De conoydalium mensura. 4, 5, 7 e 8. Com-

---

ove formano non meno di 303 volumi, divisa in cinque serie, nella penultima delle quali si trovano i lavori dei discepoli di GALILEO, in particolare quelli del geometra di cui ci stiamo occupando.

1) È la risposta ad un' obbiezione fatta al lemma 20 del trattato del TORRICELLI *De dimensione parabolae*, obbiezione di cui sembra autore quel TOMMASO, fratello di RICCARDO WHITE di cui parla il KÄSTNER, *Geschichte der Mathematik* Bd. III (Göttingen 1799), S. 216.

menti e note del Viviani sulle opere del Torricelli. 6. Campo dei tartufi, cioè Miscellanae Planae, Solidae et Conicae, de Curvis, de Stereometria. 9. Miscellanea varia.

Vol. XVI—XVII. Meccanica dei solidi.

Vol. XVIII. Meccanica dei fluidi.

Vol. XIX. Fisica sperimentale.

Vol. XX—XXII. Carteggio scientifico.

Vol. XXIII—XXIV. Documenti alle opere.

Le pubblicazione di questi scritti — o tutt' almeno dei più cospicui — è indispensabile se si vuol giungere a conclusioni definitive intorno allo stato in cui trovavasi la geometria delle curve e delle superficie alla vigilia dell' invenzione del calcolo infinitesimale; è questo un lavoro che tutti gli storici ad una voce domandano e che è da augurarsi venga senza indugio intrapreso e sollecitamente compiuto da persona competente.

Intanto, come preludio o provvisorio supplemento dell' invocata edizione completa delle opere del Torricelli, credo non riuscirà sgradita ai cultori della storia della geometria la stampa, che quì presento, di un breve lavoro di lui concernente una curva, le cui origini sembravano sino ad ora avvolte in una nube di mistero: parlo della *curva logaritmica* o *logistica*, «cette courbe — come afferma troppo recisamente il Montucla — dont la première idée est due à Jacques Gregori».[1])

Come è noto C. Huygens ne espose incidentalmente le proprietà più salienti nella chiusa del *Discours de la cause de la pésanteur* pubblicato nel 1690 in appendice al *Traité de la lumière*, avvertendo che ad altri si deve farne risalire la invenzione[2]); è pur noto che i teoremi solo enunciati dal celebre olandese vennero muniti di solide dimostrazioni nel 1701 da Guido Grandi.[3]) Orbene il Torricelli parla di quella curva in una lettera scritta «Di Fiorenza, 24 Agosto 1644» a Michelangelo Ricci, ove si legge quanto segue:

«Quella linea che io chiamavo mezza iperbola non è affatto nuova «invenzione, come credo che ella avrà conosciuto subito, ma viene auto«rizzata dal nome di un grand' autore e da una invenzione grandissima «nelle matematiche. Parlo del Nepero e de' logaritmi dell' una e del«l'altra specie, la nascita de' quali con le lor proprietà e dimostrazioni si

1) *Histoire des mathématiques*. Nouv. éd., t. II, p. 85, ove è citata l'opera di James Gregory, *Geometriae pars universalis*, Padova 1667.

2) Si trova anche, tradotto in latino, in Chr. Hugenii *Opera reliqua*, t. I (Amstelodami MDCCXXVIII), p. 97—136; ivi (p. 130) si legge: «Nuncupari potest *Logarithmica* aut *Logistica*, nondum enim quantum nomen, licet eam plures jam observaverint.»

3) Questo scritto è ristampato in seguito alla succitata versione dello scritto dell' Huygens.

«scorgono manifestamente in quelle linea. In somma quei due moti, uno «aritmetico e l'altro geometrico che da NEPERO non furon considerati se «non separatamente l'uno dall' altro, da me sono stati contemplati unita-«mente, e ne ho cavato una speculazione di geometria, dove che egli non «andava rintracciando altro che una pratica aritmetica.»[1])

Ora poichè, prima dell' introduzione della stampa periodica scientifica, il carteggio fra dotti era il mezzo di consueto usato per diffondere le scoperte, così nulla autorizza ad escludere che della curva studiata dal TORRICELLI il GREGORY abbia appresa l'esistenza durante il suo soggiorno in Italia e l'HUYGENS abbia avuto notizia per via di qualcuno dei numerosi corrispondenti che egli aveva — alcuni dei quali anzi tenevano stanza al di quà dell' Alpi. Ciò non toglie che nulla vieta si ammetta essere anche altri arrivato a concepire una curva che porge la più naturale rappresentazione grafica delle clamorosa invenzione di NEPERO. Quello che mi sembra difficile negare è il gran merito del TORRICELLI di avere, non soltanto immaginata e costruita per punti la curva di cui si tratta, ma ancora scoperta la proprietà più notevole di essa (costanza della suttangente) e risoluti i problemi di determinare l'area compresa fra la curva l'asintoto ed un' ordinata qualunque, ed il volume che quest' area genera ruotando attorno al proprio asintoto.[2])

Sono questi elementi indispensabili per una trattazione metodica completa della logaritmica; essi trovansi in alcune carte che il SERENAI accuratamente raccolse e trascrisse, osservando: «Tutti gli uniti fogli vanno insieme — per quanto pare — e si metteranno fra le linea nuove doppo (*sic*) le Cicloidi, e appartengono all' Hemhyperbola logaritmica.»

Dalla seguente riproduzione di questo piccolo incarto vennero soppressi alcuni periodi finali slegati, concernenti questioni già dianzi trattate, perchè ci sembrano nulla aggiungere al resto; per maggior chiarezza si adoperarono nella trascrizione costantemente la lettere majuscole per indicare i punti, sistema questo che il nostro autore non segue rigorosamente; inoltre le figure vennero disegnate *ex novo* con la massima esattezza, il che TORRICELLI non fece.

1) V. GHINASSI, op. cit. p. 17.

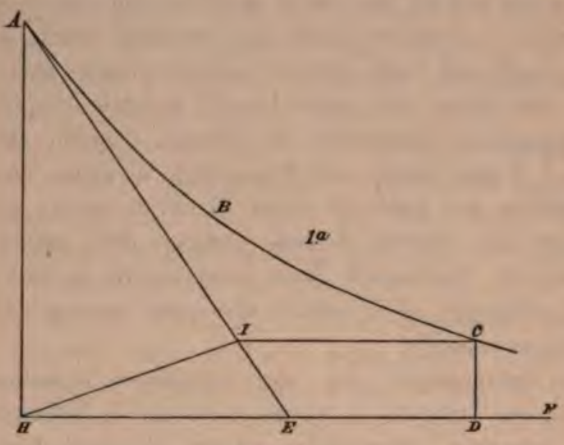
2) Il lettore rileverà poi certamente un metodo per trasformare una logaritmica in altra, mediante il quale è construita la fig^a. 6^a.

De Hemhyperbola logaritmica.

Dall' autografo esistente nella Biblioteca Nazionale di Firenze. DISCEPOLI DI GALILEO, t. XXXI. *Torricelli Evangelista*, vol. 11, Matematica pura 7, carte 214—222.

Hemhyperbola.

Est quaedam Linea ABC[1]), celeberrimam habens, et in Geometria frequentissimam passionem pro definitione, quae quidem curva ex utraque parte caret fine, unicamque habet asymptoton HD (hinc est quod eam Hemhiperbolam nominavimus) ad quam semper accedit et nunquam cum ea convenit; habetque convexum universum ad easdem semper partes, nempe versus asymptoton. Dabimus aliquando ipsam definitionem, si Theoremata placuerint.



Figa. 1a.

Theora. pus. Si huiusmodi lineae sumatur punctum quodlibet A, ex equo AE sit tangens, AH vero ad asymptoton perpendicularis: erit universa figura plana $ABFH$, quae sub linea curva, eiusque asymptoto et recta AH comprehenditur, dupla trianguli AEH. — Si vero sumatur quodlibet punctum aliud C, ex quo CD ad asymptoton sit erecta, CI vero parallela, erit quadrilineum mixtum $ACDH$ duplum trianguli AIH.[2])

Theora. 2m. At si universa figura convertatur circa asymptoton HD, erit solidum auctum sine fine longum, factum ex revolutione semhyperbolae sesquialterum coni qui a triangulo ACH describitur circa axem HE.[3])

Hemihyperbolae Definitio:

Si fuerit quaedam linea ABC[4]) quae omnes rectas perpendiculares ad lineam DE equalibus intervallis inter se distantes secet in continua proportione Geometrica, lineam illam ABC Hemihyperbolam voco,

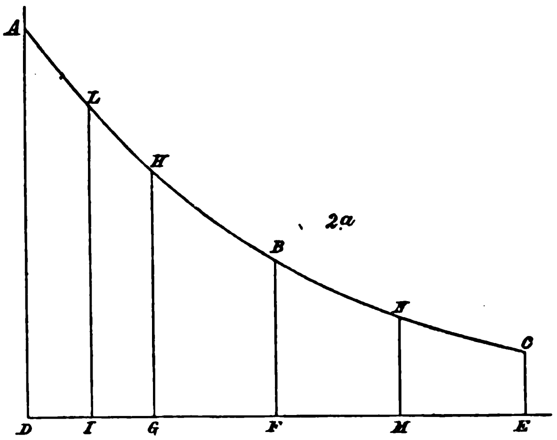
1) V. figa. 1a.

2) Questo teorema è identico a quello che porta il n. 7. della memoria di HUYGENS.

3) È il teorema 9. di HUYGENS.

4) V. figa. 2a.

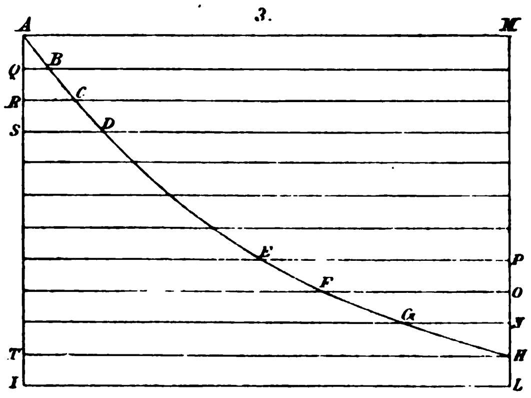
rectam vero de eius asymptoton quae quidem unica erit; descriptio figurae facilis erit: ponatur recta linea DE sine fine longa ex utraque parte. In ea sumantur duo puncti quolibet DE. Erigantur duae perpendiculares inaequales DA et EC. Cum recta DE bifariam in F erigatur perpendicularis FB media inter DA, EC sectisque iterum partibus bifariam in G et M erigatur GH, MN utraque media inter proximas. Atque haec divisio fiat quotiescumque libuerit; denique per extrema puncta reperta $ALHBNC$ ducatur linea quam hemhyperbolam appellamus, ob similitudinem unicamque quam tantum habet asynptoton.



Fig^a. 2^a.

Poterat appellari etiam linea logarithmica sive Neperiana. Utramque enim speciem logarithmorum eorumque affectiones statim videndas offert.

Posita enim hemihyperbola $ABCDEFGH$[1]) cuius asymptotos IL. Certum est neque minimam, neque maximam applicatarum dari posse, ergo proposita quacumque sive exigua sive immensa linea recta erit quaedam ex applicatis propositae lineae aequalis.



Fig^a. 3^a.

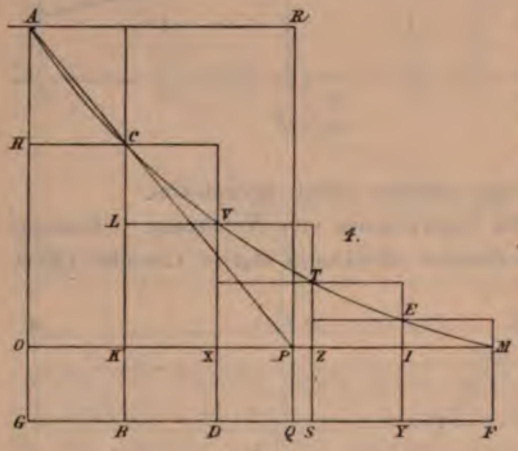
Ponatur ergo quaedam applicata LH pro unitate, et LM ipsius multiplex quantumcumque libuerit pro maximo absoluto Tabulae, completoque rectangolo $ILMA$, ducantur ex singulis punctis $HNOP$ etc. rectae ad asymptoton parallelae.

His peractis erit unitatis LH logarithmus nullus. Binarij vero LN logaritmus erit NG, ternarij autem LO erit logaritmus OF, quaternarij

1) V. fig^a. 3^a.

erit PE et sic semper usque ad maximum tabulae numerum LM cuius logaritmus est MA. Altera vero species logaritmorum erunt complementa illorum qui iam explicati sunt.

Nempe maximi numeri absoluti IA erit logaritmus nullus, numeri vero IQ logaritmus erit QB, et numeri IR logaritmus erit RC, et numeri IS erit logaritmus SD, etc. Unitas tandem IT logarithmum habebit omnium maximum TH. Hinc manifestum est data una tantum ex eodem semper numero specie logarithmorum quaecumque sit alium construi posse per solam subtractionem subtrahendo scilicet singulos logarithmos. Neque quicquam refert ex quonam numero subtractionem instituas. Potest et subductio fieri sive ex numero qui aequalis sit maximo datorum logaritmorum; sive ex maiori quantum libuerit. Virtus enim et efficacia logaritmorum in solis eorum differentiis consistit.



Figª. 4ª.

Ponantur[1]) quotcumque rectangula AB, CD, etc. quorum ultimum sit EF, super basibus deinceps aequalibus constituta quarum primae sint GB, BD.[2]) Sint praedicta rectangula in Geometrica continuata proportione inter se. Auferanturque semper sequens a praecedenti, nempe ad ultimum EF, ex quo auferatur IF aequale ei quod sequeretur in progressione rectangulorum AB, CD si continuaretur ulterius. His peractis producatur MI in O iunctaque AC et producta, conveniat cum MO in P et ducta per P perpendiculari QPR compleatur rectangulum $AGQR$. Dico rectangulum $AGQR$ omnibus positis rectangulis AB, CD, VS, TY, EF aequale esse. Omnes enim differentiae AC, CV, VT, TE, EM simul sumptae aequales sunt rectangulo AK, quod quidem ostenditur more solito apud Geometras usitato hoc modo. Rectangulum ME aequale est ipsi EZ, sumptoque communi ET erunt ME, ET aequalia ipsi IT, sive ipsi TX, sumptoque communi TV, erunt ME, ET, TV aequalia ipsi VZ, sive ipsi VK sumptoque communi VC, erunt ME, ET, TV, VC aequalia ipsi CX sive ipsi CO, et sumpto tandem communi CA erunt omnia ME, ET, TV, VC, CA aequalia ipsi AK.

1) V. figª. 4ª.

2) È sottinteso che i punti A, C, V, T, E, M stanno sulla curva dianzi definita.

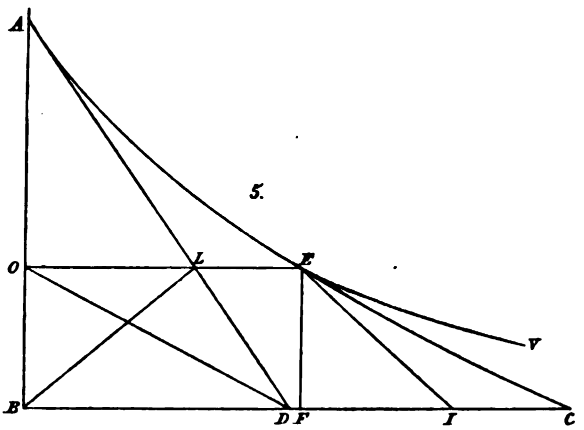
Iam rectangula AB, CD, VS etc. sunt in continua proportione, ergo AB ad BH est ut CD ad DL, et per conversionem rationis BA ad AC erit ut DC ad CV. Et hoc verum erit semper usque ad ultimum. Ergo per 12 quinti Euclidis omnia rectangula AB, CD, VS, TY, EF, ad omnes differentias AC, CV, VT, TE, EM, sive ad unicum rectangulum AK, erunt ut unum ad unum, hoc est ut BA ad AC, et permutando omnia praedicta rectangula ad BA erunt ut AK ad AC, sive ut recta OA ad AH, nempe ut PO ad CH sive ut rectangulum $AGQR$ ad rectangulum BA. Propterea aequale est rectangulum $AGQR$ omnibus praedictis rectangulis. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Ostendimus iam rectangulum $AGQR$ aequale esse omnibus rectangulis AB, CD, VS, TY, EF. Si ergo aequalia demantur nempe rectangulum AK, omnesque differentiae $ACVTEM$, reliquus gnomon OBR aequalis erit reliquis omnibus rectangulis CG, VB, TD, ES, MY.

Propagatio Tangentium
in Hemihyperbola.

Data unica Tangente dantur omnes. Esto Hemihyperbola cuius data sit[1]) Tangens unica AD et per A sit applicata AB, asymptotos vero BC. Sumpto deinde quolibet puncto E applicetur EF, et ipsi BD ponatur aequalis FC. Dico EC tangens esse. Nam nisi sit tangens, erit tangens aliqua alia linea, puto EI. Ducatur ex E recta EO parallela asymptoto, et iungatur LB.



Fig[a]. 5[a].

Iam tota universa figura plana AVB dupla est totius trianguli ADB. Ablatum etiam quadrilineum $AEFB$ duplum est (ex demonstratione iam scripta) trianguli ALB, ergo reliqua figura sine fine longa EVF dupla erit reliqui trianguli BLD, sive tri-

1) V. fig[a]. 5[a].

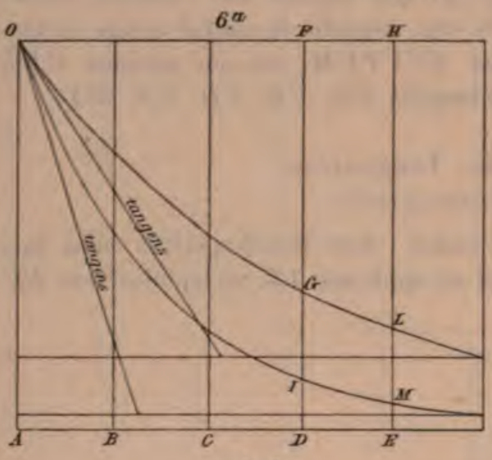
anguli FEC, sunt enim in basibus aequalibus et inter easdem parallelas. Sed cum EI ponatur tangens, et EF applicata sit erit eadem universa figura plana EVF ex demonstratis dupla trianguli FEI, propterea triangula FEC, FEI aequalia erunt. Quod est absurdum. Erit ergo ipsa EC tangens. Quod erat etc.[1]) ...

Ex hoc elici potest cuinam solido aequale sit frustum solidi acuti. —

Propositio.

In figura retroscripta.

Convertatur retroscripta figura circa asymptoton. Et erit solidum universum factum a figura AVB sesquialterum coni ADB; ablatum vero solidum ex EVF sesquialterum est coni ex ECF ob tangentem EC, sive coni ex ODB qui idem est; ergo reliquum frustum quod fit ex $ABFE$ aequale erit[2]) reliquo coni ADB dempto cono ODB.



Figª. 6ª.

Per misurare il solido circa asymptoton alio modo. Siano eguali intervalli[3]) $ABCDE$ etc. et siano 3 continue FD, GD, ID, item HE, LE, ME etc. dico che OIM è una linea logaritmica overo semiperbola.

Poichè recta ID ad ME est ut $\square$ FDI ad HEM ob aequalem altitudinem nempe est quadratum GD ad LE. Et hoc semper. Ergo rectae ID, ME sunt ut quadratum GD, LE. Ergo erunt continuae; et linea erit logaritmica. Eruntque circuli ut linee, nempe solidum ut planum.

Prima pars.

Misura del Quadrilineo misto.

Esto hyperbola monoasymptota cuius asymptotos AD[4]), maxima applicata AC, tangens vero CL, et sumatur quaelibet alia applicata,

1) Come si determini la tangente iniziale, TORRICELLI non dice; a ciò provvide l'HUYGENS col teor. 5 della sua memoria, ove è determinato direttamente il rapporto della suttangente ad un' ascissa in funzione della corrispondente ordinata.

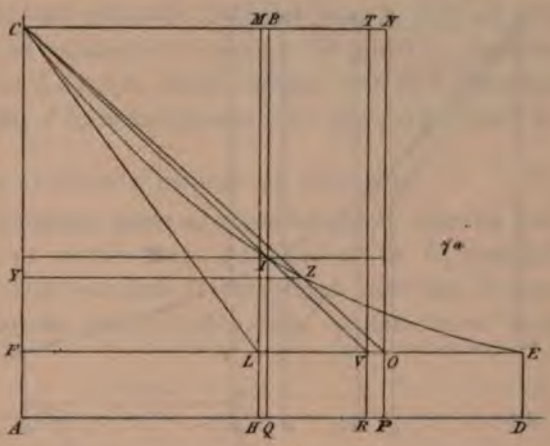
2) Quì va aggiunta la parola *sesquialtero*.

3) V. figª. 6ª.

4) V. figª. 7ª; alla quale l'autore unisce la seguente osservazione «Basterà fare solo il p° rettangolo circonscritto, et il p° inscritto, che darà il punto I.»

puta DE, ducaturque EF parallela asymptoto, et occurrent tangenti in L.

His peractis applicetur per L recta HLM. Dico quadrilineum mixtum $CADE$ contentum sub hyperbola, asymptoto, duabusque applicatis, aequale esse rectangulo $CAHM$. Nisi enim ita sit erit rectangulum $CAHM$ vel minus vel majus praedicto quadrilineo mixto. Sit primum, si possibile est, minus, et ponatur rectangulum $MHPN$ minus defectu quo rectangulum deficit a quadrilineo mixto, et erit totum rectangulum $CAPN$ adhuc minus praedicto quadrilineo mixto $CADE$. Jungatur recta CO, quae omnino secans erit, cum CL sit ultima inclinatarum ex puncto C, et non secantium secet ergo in Z, et agatur ZY parallela asymptoto; tum secetur AD bifariam, eiusque partes iterum bifariam, atque hoc fiat semper donec veniamus ad aliquam sectionem puta AQ minorem quam sit ZY; quo facto secetur tota AD in partes aequales ipsi AQ, statuanturque singulae partes pro lateribus totidem rectangulorum circa quadrilineum mixtum $CADE$ descriptorum; et sit ex huiusmodi rectangulis primum $CAQB$ cuius latus QB secet hyperbolam in I. Ducatur CI quae omnino cadet intra rectas CL, CZ, occurratque ipsi LO in puncto V et applicetur RVT. Iam figura rectilinea circumscripta circa quadrilineum mixtum $CADE$, quae constat ex rectangulis aeque altis quorum primum est $CAGB$, aequalis est rectangulo $CART$; ergo minor est rectangulo $CAPN$ rectangulorum vero $CAPN$ minus erat quadrilineo mixto $CADE$, ergo multo magis figura circumscripta minor erit suo quadrilineo cui circumscribitur; nempe totum sua parte minus erit. Quod est absurdum.



Figa. 7a.

2a pars.

Sit idem quadrilineum mixtum $CADE$[1]) tangens CL, et per punctum L applicata HM quae faciat rectangulum $CAHM$. Ostendimus iam

1) V. figa. 8a.

in prima parte rectangulum $CAHM$ non esse minus quadrilineo mixto $CADE$. Sit ergo, si possibile est, rectangulum $CAHM$ maius quadrilineo mixto $CADE$, auferatur a toto rectangulo $CAHM$ rectangulum aliquod $CAPN$ minus excessu quo totum rectangulum superat quadrilineum mixtum; et erit reliquum rectangulum $NPHM$ adhuc maius quadrilineo mixto $CADE$. Secetur recta AD bifariam, atque iterum bifariam, et hoc fiat semper, donec veniamus ad segmentum aliquod AQ minus quam sit AP. Tunc enim intelligatur tota recta AD secta in partes aequales ipsi AQ, quae singulae statuantur latera totidem rectangulorum intra quadrilineum mixtum inscriptorum, et aequales altitudines habentium, et sit ex huiusmodi rectangulis primum $YAQI$ ducaturque CI et producatur usque in V, et per V applicetur RVT. Iam rectangulum $NPHM$ maius est per constructionem quadrilineo mixto $CADE$, ergo idem rectangulum $NPHM$ multo maius erit quam figura intra quadrilineum inscripta ex rectangulis aeque altis constans, quorum primum est $YAQI$. Sed huiusmodi figura inscripta aequalis est gnomoni FRB; propterea rectangulum $NPHM$ maius erit gnomone FRB, nempe pars maior erit suo toto. Quod est absurdum.

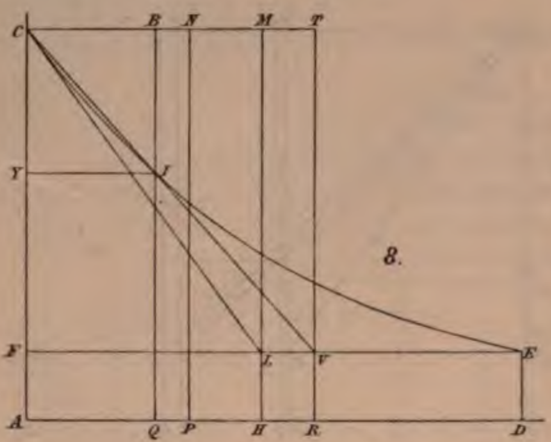
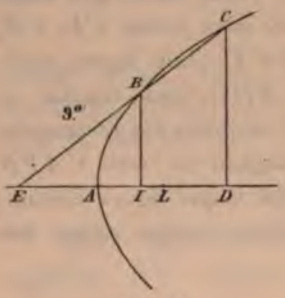


Fig.ª 8ª.

Lemma. Il quale credo che non vi occorra.

Esto parabola ABC[1]) cuius diameter AD secans vero aliqua CB quae cum diametro conveniat in E, ordinatimque ducantur CD, BI. Dico rectas DA, AE, AI esse in continua proportione. Sumatur AL media proportionalis inter AI, ID, eruntque differentiae IL, LD in eadem ratione cum ipsis lineis, nempe IL ad LD, erit ut LA ad AD, et componendo ID ad DL erit ut LA, AD simul ad AD. Quod memento.



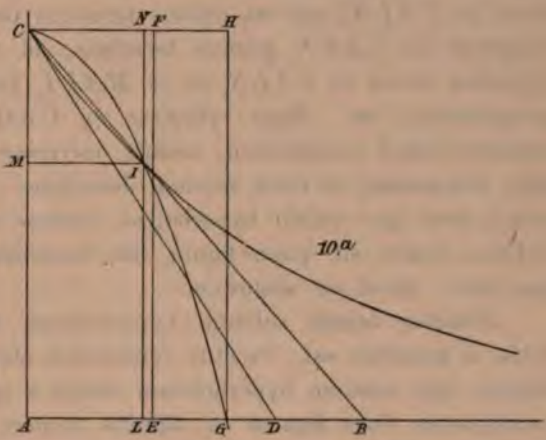
Figª. 9ª.

1) V. figª. 9ª.

Iam quadratum DE ad quadratum EI erit ut quadratum DC ad quadratum IB, sive ut recta DA ad AI ob parabolam, sive ut quadratum DA ad AL quadratum ob tres proportionales. Ergo et latera quadratorum proportionalia erunt, nempe recta DE ad EI erit ut DA recta ad recta AL, et permutando tota DE ad totam DA erit ut ablata EI ad ablatam AL; quamobrem reliqua ID ad reliquam DL erit ut tota DE ad DA. Sed etiam LA, AD simul ad eandem DA erat ut ID ad DL, propterea aequalis est recta DE, rectis LA, AD, simul sumptis, sed DA communis est, ergo AE aequalis est ipsi AL, nempe media inter DA, AI. Quod etc.

Che il solido acuto sia uguale al cilindro.

Esto hyperbola monasymptota, cuius asymptotos AB[1]), maxima vero applicata AC, tangens CD, et secetur recta AD bifariam in E, compleaturque rectangulum CAE. Dico solidum Hyperbolicum sine fine longum factum circa axem AB aequale esse cylindro circa eundem axem facto ex revolutione rectanguli $ACFE$. Nam si ita non est, erit solidum hyperbolicum vel maius, vel minus cylindro praedicto ab AF facto.



Fig^a. 10^a.

Sit primo solidum hyperbolicum maius cylindro ex AF facto, si possibile est. Ergo cylindrus ab AF factus minor erit quam dictum solidum: ponatur cylindribus ex EH minor defectu, eritque totus cylindrus ex AH adhuc minor solido hyperbolico. Fiat circa diametrum AG parabola quae transeat per punctum C. Manifestum est parabolam hanc hyperbolamque se mutuo intersecare in aliquo puncto praeter ipsum C. Si enim sumamus quamcunque rectam GB minorem quam GA, et iungamus CB, cadet omnino aliqua pars parabolae extra rectam CB versus N, quia GB minor est quam GA, et ideo CB secans. Sed cum CD sit tangens hyperbolae, hoc est ultima inclinatorum, secabit omnino recta CB ipsam hyperbolam, atque aliquod ipsius segmentum cadet versus punctum A. Unde certum est parabolam

1) V. fig^a. 10^a.

atque hyperbolam non solum in puncto C convenire, sed in alio etiam puncto, quod sit I. Agantur ergo per I recta LIN ordinatim applicata, et secans CIB atque IM parallela asymptoto AB. Concipiatur iam circa universam hyperbolam descriptam esse figuram ex parallelogrammis aeque altis constantem, quorum primum sit $CALN$; secundum vero aequale erit ipsi $MALI$; tum intelligatur universa huiusmodi figura converti circa axem AB ita ut ex rectangulis fiant totidem cylindri aequealti nostro hyperbolico solido circumscripti, quorum primus erit factus ex $CALN$, secundus vero aequalis erit cylindro facto ex $MALI$. Eruntque omnes infiniti numero cylindri inter se in continua proportione Geometrica; et erit prima differentia solidum armillare factum ex revolutione rectanguli $CMIN$ circa axem AB. Jam cylindrus ex $CAGH$ ad cylindrum ex $NLGH$ in eadem basi est ut altitudo AG ad altitudinem GH sive ut quadratum CA ad quadratum IL ob parabolam nempe ut circulus ex CA ad circulum ex IL, sive ut cylindrus ex $CALN$ ad cylindrum ex $MALI$. Ergo per conversionem rationis cylindrus ex $CAGH$ ad cylindrum ex $CALN$, qui est primus terminus Geometricae progressionis, ita cylindrus ex $CALN$ primus terminus, ad differentiam, quae est inter cylindros factos ex $CALN$, et ex $MALI$, quae quidem prima differentia progressionis est. Ergo cylindrus ex $CAGH$ aequalis est aggregato omnium simul terminorum, nempe universae figurae ex cylindris aequealtis compositae, et circa solidum descriptae. Sed idem cylindrus ex AH minor erat ipso solido hyperbolico, necesse ergo est ut solidum hyperbolicum maius sit quam figura sibi circumscripta, hoc est pars maior suo toto. Quod est absurdum.

Ponatur deinde solidum hyperbolicum minus cylindro ex $CAEF$ facto si possibile est. Secetur cylindrulus aliquis, puta ex $CALN$ minor defectu quo solidum hyperbolicum deficit a cylindro ex $CAEF$. Deinde concipiamus duas figuras ex infinitis numero cylindris aequealtis compositas, altera nempe circumscriptam solido hyperbolico, et primus ipsius cylindrus sit qui ex $CALN$: altera vero inscriptam intra idem solidum, et sit primus ipsius cylindrus qui ex $MALI$. Manifestum est universam differentiam quae est inter praedictas duas figuras aequalem esse cylindro ex $CALN$ facto, hoc est minorem esse defectu quo solidum hyperbolicum deficit a cylindro ex $CAEF$ facto. Ergo differentia quae est inter circumscriptam figuram et solidum ipsum hyperbolicum multo minor erit defectu ipsius solidi a cylindro ex $CAEF$ facto: quamobrem si addamus eam ipsi solido hyperbolico, conflabimus ipsam figuram circumscriptam adhuc minorem cylindro ex $CAEF$ facto. Concipiamus iam per puncta C et I transire parabolam cuius ordinatim applicatae datae sunt CA, IL, et ipsa sibi verticem faciat in G. Certum est ex praecedente demonstratione cylindrum ex $CAGH$ aequalem esse universae figurae circumscriptae. ergo et cylindrus ex $CAGH$ minor erit cylindro ex $CAEF$, nempe totum minus erit sua parte. Quod est absurdum. — Equalitas ergo patet.

Remanet ostendendum quod diameter parabolae, nempe recta AG omnino maior esse debeat quam AE ut cylindrus ex $CAGH$ semper sit veluti quoddam totum, et cylindrus ex $CAEF$ veluti pars. — Recta CIB ferat parabolam, ergo AG maior est etiam quam GB. Ergo AG plus est quam dimidium rectae AB, et multo magis plus quam dimidium rectae AD, nempe maior quam AE. Quod erat etc.

Notiz zur Geschichte der Simpsonschen Regel.

Von

Georg Heinrich in München.

Es wird bisher allgemein angenommen, dafs NEWTON zuerst den Gedanken hatte, zur näherungsweisen Quadratur eines ebenen Flächenstückes die begrenzende Kurve durch eine Parabel zu ersetzen. In seinem zweiten Briefe an LEIBNIZ vom 24. Oktober 1676 behandelt er die Aufgabe, $\int y\,dx$ auszuwerten. Ist z. B.: $y = \sqrt{a^2 - ax + \frac{x^3}{a}}$, so setzt er: $a^2 - ax = z^2$ und entwickelt:

$$y = z + \frac{a \cdot x^3}{2az} - \frac{x^6}{8a^2z^3} + \cdots;$$

diese Reihe kann er dann Glied für Glied integrieren.

Er fährt dann fort: „Sed hoc minoris facio, quod ubi series simplices „non sunt satis tractabiles, aliam nondum communicatam methodum habeo, „qua pro libitu acceditur ad quaesitum. Ejus fundamentum est commoda, „expedita, generalis solutio hujus Problematis: Curvam Geometricam describere quae per data quotcunque puncta transibit.“ Die bequeme Lösung des Problems giebt er jedoch erst in seinen *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687), Liber III, Lemma V, wo er zwei Formeln angiebt, die eine für gleiche, die andere für ungleiche Abstände der gegebenen Ordinaten. Im *Methodus differentialis* (1711) giebt endlich NEWTON die Ableitung der Formel, die wir heute die NEWTONsche Interpolationsformel nennen.

Nun hatte aber schon im Jahre 1668 JAMES GREGORY denselben Gedanken und gab sogar eine Formel an, aus der wir sofort die SIMPSONsche Regel in der heutigen Gestalt herleiten können. Die Stelle findet sich in GREGORYS *Exercitationes geometricae* (London 1668) und zwar unter der Überschrift: „Methodus componendi Tabulas Tangentium et Secantium Artificialium ex Tabulis Tangentium et Secantium Naturalium exactissime et minimo cum labore.“[1])

1) Den Hinweis auf diese Stelle verdanke ich Herrn Prof. VON BRAUNMÜHL. Die *Exercitationes geometricae* selbst konnte ich nicht bekommen. Das genannte Kapitel

GREGORY hat an früherer Stelle bewiesen, dafs

$$\int_0^x \operatorname{tg} x\, dx = \lg(\sec x).$$

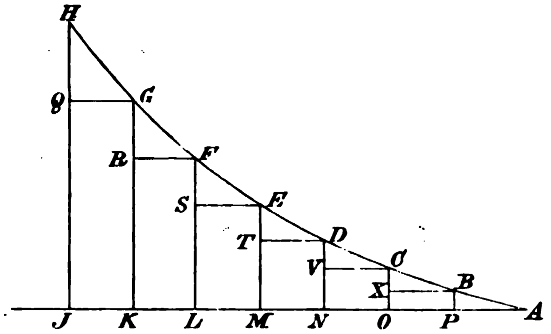


Fig. 1.

Seien (Fig. 1)

$AP = PO = \cdots = KJ (= h)$ Teile eines abgerollten Kreisbogens;

$PB = \operatorname{tg}(PA)$ (= Tangens naturalis arcus PA),

$OC = \operatorname{tg}(OA)$, etc. (Radius = 1).

Dann ist:

$APB = \lg(\sec(PA))$ (= Secans artificialis arcus PA),

$AOC = \lg(\sec(OA))$, etc.

Zur Berechnung der Flächenstücke APB, AOC, ⋯, bemerkt GREGORY: „manifestum est rectangula BO, CN, DM etc., inveniri ex multiplicatione minimae partis quadrantis AP in singulas tangentes naturales; at in mensurandis figuris APB, BXC etc., paulò est major difficultas; primo igitur si tangentes conveniant in differentiis primis, non differunt lineae AB, BC etc., à rectis, et ideo figurae APB, BXC etc., erunt triangula rectangula, et proinde, e. g. $GHQ = \frac{HQ \times QG}{2}$: quod si differentiae secundae fuerint aequales, erunt dictae figurae portiones trilineorum quadraticorum, e. g. erit GHP portio trilinei quadratici, cujus axis HQ est parallela, differentiae illae inter se aequales sint z; et proinde erit

$$GHQ = \frac{HQ \times GQ}{2} - \frac{z \times GQ}{12}.\text{“}$$

Das heifst doch nichts anderes als:

Wäre die Tangentenlinie eine Gerade, dann wären die Figuren APB, BXC etc. als Dreiecke leicht zu berechnen. Würden aber die Tangenten

---

findet sich aber nebst mehreren anderen abgedruckt in MASERES: *Scriptores Logarithmici*, II (London 1791).

eine Differenzreihe 2. Ordnung bilden, so wären AB, BC etc. Parabelbögen und es wäre z. B. $GHQ = \frac{HQ \times GQ}{2} - \frac{z \cdot GQ}{12}$, wobei z die konstante 2. Differenz der gegebenen Differenzreihe 2. Ordnung bedeutet. Die angegebene Formel ist richtig, denn ist $ax^2 + bx + c = y$ die Gleichung einer Parabel, so ist (Fig. 2)

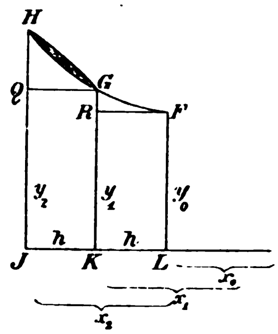


Fig. 2.

$$z = 2ah^2$$

und das schraffierte Flächenstück

$$GH = h\frac{y_1 + y_2}{2} - \int_{x_1}^{x_2} (ax^2 + bx + c)\,dx$$

$$= \frac{a(x_2 - x_1)^3}{6} = \frac{2ah^3}{12} = \frac{zh}{12};$$

$$GHQ = \frac{HQ \times GQ}{2} - \frac{z \cdot GQ}{12}.$$

Nun ist

$$z = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

also:

$$LFHJ = h(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_2 - y_1 + y_1 - y_0) - 2\frac{h(y_2 - 2y_1 + y_0)}{12}$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Dies ist aber die Simpsonsche Regel in heutiger Gestalt. — Gregory giebt aufserdem noch eine Formel. Würden die Tangenten eine Differenzreihe 3. Ordnung bilden, so wäre

$$GHQ = \frac{HQ \times GQ}{2} - \sqrt{\frac{HQ \times z \times GQ^2}{72} - \frac{z^2 \cdot GQ^2}{1728}},$$

wobei z die konstante 3. Differenz bedeutet.

Die Formel ist richtig für die Kurve $y = ax^3 + b$, nicht aber für die allgemeine Parabel 3. Grades $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Durch die letztere Formel würde also Gregory eine schlechtere Annäherung erzielen als durch seine erste. Am Schlufs weist Gregory noch auf die Verwendung von Parabeln 4. und 5. Grades hin, ohne jedoch dafür Formeln anzugeben.

Les „Œuvres Complètes de Christiaan Huygens".

Par

J. Bosscha à Haarlem.

La publication, entreprise en 1885 par la Société hollandaise des Sciences, poursuit régulièrement son cours malgré les pertes regrettables que la Commission de rédaction a éprouvées par la mort de plusieurs de ses membres.[1]) Le premier volume a paru en avril 1888, les suivants en 1889, 1890, 1891, 1893, 1895, 1897 et 1899. Ces huit volumes contiennent 2477 lettres ou autres pièces se rapportant à la correspondance de HUYGENS jusqu'à la fin de 1684. Il reste actuellement à publier environ 500 pièces qui formeront les Volumes IX et X de la *Correspondance*. Le nombre total, environ 3000, dépasse celui prévu dans la Préface de la *Liste Alphabétique de la Correspondance de Christiaan Huygens*, publiée en 1886, savoir 2700. D'abord, ce chiffre s'est accrû par l'acquisition ou la découverte de quelques nouvelles pièces, ensuite on a pu démêler dans les *Adversaria* de HUYGENS quelques notes, minutes et sommaires qui appartiennent à son commerce épistolaire, et enfin on a reconnu la nécessité d'ajouter quelquefois aux lettres, comme appendices, des extraits de mémoires déjà publiés, auxquels se rapportent les lettres et dont la connaissance est indispensable pour en comprendre le sens ou la portée. On ne pouvait pas toujours supposer que le lecteur trouverait facilement l'occasion de se procurer ces écrits. C'est ainsi que, dans le Tome VII, à l'occasion des lettres qui prouvent définitivement que l'invention des montres à ressort en spirale appartient à HUYGENS et non à HOOKE, nous avons tiré des Philosophical Transactions et des écrits de R. HOOKE tout ce qui peut faire connaître le rôle que Lord BROUNCKER et OLDENBURG, d'un

---

1) MM. F. A. G. CAMPBELL en 1890, F. J. VAN DEN BERG en 1892, D. BIERENS DE HAAN en 1895, W. N. DU RIEU en 1897 et tout récemment C. H. C. GRINWIS et L. A. J. BURGERSDYK. Ils ont été remplacés par MM. E. W. MOES, K. O. MEINSMA et H. C. ROGGE. Après la mort de M. BIERENS DE HAAN, la tâche de celui-ci a passé aux mains du Secrétaire de la Société hollandaise, membre de la Commission. La direction de la Bibliothèque de Leide a bien voulu permettre, à cet effet, le transfert à Haarlem de la collection de lettres et manuscrits du fonds HUYGENS.

côté, et HOOKE de l'autre, ont rempli dans cette affaire, dont les détails paraissent avoir été soit oubliés, soit ignorés par ceux qui ont soutenu les réclamations de ce dernier. De même, au Tome IX, lorsque dans la correspondance de HUYGENS avec VON TSCHIRNHAUS et leur intermédiaire, le docteur P. VAN GENT d'Amsterdam, il est question de la méthode des Tangentes de VON TSCHIRNHAUS, de la critique de FATIO DE DUILLIER et de la part qu'y a eue HUYGENS, il sera nécessaire d'ajouter, comme Appendices, un fragment de la *Medicina Mentis*, l'article de FATIO tiré de la Bibliothèque universelle et historique, ainsi qu'une note de CHR. HUYGENS. Sous ce rapport, ainsi qu'au sujet d'annotations relatives aux matières scientifiques des lettres, on s'est, dans les derniers volumes, un peu écarté de la règle que la Commission s'était tracée à l'origine, savoir, de laisser au lecteur tout le soin de l'explication du texte ou des rapprochements avec d'autres données qui pourraient y servir.

Une règle dont la Commission a tenu à ne pas se départir, est celle de donner, sans aucune exception, toutes les pièces de correspondance qui sont venues à sa connaissance. Elle a voulu exclure absolument tout choix, nécessairement arbitraire de son côté, soit à l'égard du degré d'importance de quelque pièce, soit à l'égard de la question de savoir si la publication pourrait être utile ou défavorable à la gloire de HUYGENS. Elle a voulu conserver à la publication le caractère documentaire qui est la première condition de sa valeur scientifique, non seulement pour l'histoire des sciences, mais aussi pour l'étude psychologique d'une des illustrations du genre humain. Cette étude réclame, en effet, la connaissance aussi complète que possible du milieu dans lequel a vécu l'individualité dont elle s'occupe. Il nous a semblé que les Tables systématiques des matières scientifiques, dont M. D. J. KORTEWEG, tout en coopérant à la rédaction de la correspondance même, enrichit chaque volume, écartent tout danger que l'insertion des lettres des membres de la famille HUYGENS accroîtrait sensiblement la difficulté de s'orienter dans une collection traitant de tant de sujets divers. Les lettres familières, étrangères aux travaux de HUYGENS, n'occupent d'ailleurs qu'un espace assez restreint par rapport à la collection entière; elles renferment de plus, en dehors de faits biographiques jusqu'ici inconnus, des données historiques et généalogiques qui, d'après les témoignages reçus, sont appréciées par les spécialistes.[1])

---

1) On nous pardonnera d'être entré dans ces détails, si l'on considère que M. DREYER, dans deux articles sur les Tomes VII et VIII, insérés dans le journal anglais Nature, semble nous reprocher d'avoir démesurement grossi le volume de la publication en y admettant des documents sans importance pour les sciences. M. DREYER, dans son article sur le Tome VII, semble y voir l'indice d'un hero-worship étroit; dans son second article, en parlant du Tome VIII, il donne à entendre que

La publication de la *Correspondance* sera suivie de celle des *Ouvrages inédits*. La collection HUYGENS de la bibliothèque de Leide renferme plusieurs mémoires, en partie inachevés, que les éditeurs des *Opera Posthuma* n'ont pas jugés assez complets pour pouvoir, d'après les intentions de HUYGENS, être livrés à l'impression. A cet égard, le jugement des éditeurs actuels doit différer de celui de DE VOLDER et FULLENIUS. Même les ébauches de mémoires de HUYGENS, les remarques jetées sur le papier à mesure qu'elles se présentaient à sa pensée, contiennent des vues originelles, non seulement intéressantes en soi, mais aussi caractéristiques du tour d'esprit de leur auteur.

Dans ses études et ses calculs HUYGENS ne s'est presque jamais servi de feuilles de papier détachées. Il a inscrit tous ses essais, calculs, notes, et brouillons dans des livres qu'il a soigneusement conservés. Ils forment dix volumes in-folio d'environ 100 à 400 pages, solidement reliés en parchemin et marqués A à K. Dans la collection HUYGENS on trouve, de plus, deux Almanachs in-4°, dont les pages blanches ont servi au même but. On comprendra facilement que ces livres que HUYGENS avait constamment sous la main, — pour y tracer le premier modèle de quelque invention, de quelque perfectionnement de sa machine pneumatique, de ses horloges et montres à ressort, pour y enregistrer ses spéculations géométriques, ses observations astronomiques et expériences de physique, pour y dessiner tantôt l'aspect de Mars ou de Saturne, tantôt les figures des infusoires qu'il observa à l'exemple de LEEUWENHOEK, — offrent une richesse de matières qui ne le cède en rien à celle de la *Correspondance*.

Malgré le désordre apparent que présentent plusieurs pages, le déchiffrement sera facile. Même dans ses brouillons l'écriture de HUYGENS, quoique souvent de dimensions microscopiques, est toujours lisible, son style toujours clair et précis. Mais ici ce sera le classement et le choix inévitable qui constitueront la difficulté de la rédaction. Quant au premier, nous possédons déjà, grâce à l'infatigable dévouement de M. KORTEWEG une Table systématique complète des matières contenues dans chacun des dix Volumes des *Adversaria*. On a ainsi pu emprunter à ce recueil les pièces qui appartiennent plutôt à la *Correspondance*. Ce qui doit trouver sa place dans les *Ouvrages inédits* exigera probablement des annotations fréquentes, de nombreux renvois aux endroits correspondants dans les Lettres, et surtout un soin soutenu pour conserver autant que possible, dans l'étude des documents imprimés, le charme particulier que produit l'étude de l'original.

---

nous faisons du tort à HUYGENS. Nous ne nous sentons coupables ni de l'un, ni de l'autre de ces deux excès opposés.

On retrouve dans les *Adversaria* la plupart des communications faites par HUYGENS à l'Académie des Sciences de Paris. Il semble tout indiqué de réunir dans une section séparée les nombreuses contributions de HUYGENS aux premiers travaux de l'Académie et de suivre, dans l'impression, le texte des *Registres*, dont nous devons la copie à l'obligeance de M. J. BERTRAND, secrétaire perpétuel, et L. LALANNE, l'ancien bibliothécaire. Il faudra suppléer à ce texte par les pièces des *Adversaria* appartenant aux années 1670 à 1674, parce que celles-ci manquent dans les *Registres*.

La dernière partie des *Œuvres Complètes de CHRISTIAAN HUYGENS* se composera des Ouvrages rassemblés et publiés dans l'édition de 's GRAVESANDE. Il sera certainement utile de donner, à côté ou au lieu du texte latin de 's GRAVESANDE, la version française. Cela ne peut souffrir de doute à l'égard des mémoires primitivement rédigés en français par HUYGENS, tels que le *Traité de la Lumière* et les *Commentaires sur l'Art de polir les verres de lunette*, dont la traduction latine a exercé le talent du célèbre BOERHAVE. La transformation inverse des écrits latins, surtout de la *Dioptrique*, nous paraît de nos jours bien plus utile.

Une biographie de HUYGENS devra terminer l'édition. Comme HUYGENS a voué toute sa vie à la science, elle sera l'histoire de ses œuvres.

Haarlem 31 décembre 1899.

La solution de Christiaan Huygens du problème de la chaînette.

Par

D. J. Korteweg à Amsterdam.

Préface.

En 1690, dans les Acta Eruditorum du mois de Mai, Jacques Bernoulli posa le problème de la chaînette dans les termes suivants: „*Invenire, quam curvam referat funis laxus et inter duo puncta fixa libere suspensus.*“

Ce problème était bien propre à tenter Huygens. Déjà à l'âge de dix-sept ans il s'en était occupé, comme le témoigne sa correspondance avec le père Mersenne. Il n'avait pas alors trouvé la solution, mais il réussit à démontrer: „*qu'une corde ou chaine pendue ne faict point une parabole* (comme Galilée l'avait supposé) *et quelle doit être la pression sur une corde mathématique ou sans gravité pour en faire une*“.[1]) On peut même considérer ce travail de jeunesse comme le premier coup d'aile de son génie naissant. Il en existe plus d'une version. Celle publiée dans le Tome I des *Oeuvres complètes*[2]) n'est pas la plus belle. Elle est gâtée tant soit peu par les exigences de Mersenne.[3]) Nous en donnerons une meilleure[4]) dans les „Oeuvres inédites“ qui vont suivre la „Correspondance“.

Maintenant, en 1690, c'était autre chose. La puissance de pénétration de Christiaan Huygens avait singulièrement grandi. De plus la manière dont le problème avait été posé par Jacques Bernoulli semblait prouver qu'il était accessible au moyen de l'algorithme du calcul différentiel et intégral que Leibniz venait de créer. Quant à cet algorithme, Huygens ne l'a jamais entièrement maîtrisé[5]), quoiqu'il en reconnût les fondements

1) *Oeuvres complètes de* Christiaan Huygens, t. I, p. 28.

2) Aux pages 34—44, sous les n° 20—22.

3) Voir au t. I des *Oeuvres complètes* les pages 64 et 93 et la page 569 du t. II.

4) Elle a déjà été reproduite par Uylenbroek, p. 31—36 du fasc. II des *Christiani Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae.*

5) Ainsi il a toujours évité la différentiation directe des expressions irrationelles et transcendantes. De même les secondes dérivées lui étaient encore un mystère en

et s'accoutuma de plus en plus à en employer les notations, comme ses manuscrits le démontrent. En tout cas quand il résolut en Septembre 1690[1] de chercher la solution du problème de la chaînette il n'avait même pas encore commencé à l'étudier, rebuté comme il l'était, par l'obscurité qu'il trouvait dans les articles de LEIBNIZ[2]) et persuadé d'ailleurs que les résultats qu'on pouvait obtenir par cet algorithme, pour autant qu'ils étaient simples et „utiles", ne seraient pas inabordables par les méthodes géométriques dont le subtil et élégant emploi constituait comme l'essence de son génie.

Ainsi le problème de la chaînette lui offrit une occasion précieuse pour mesurer la puissance de ses méthodes contre celles de LEIBNIZ et de BERNOULLI. Il ne la négligea pas et une phrase qui se trouve dans le livre *G* de ses *Adversaria* nous apprend dans quel esprit il entrepri ces recherches et quelles questions il se posa dès l'abord. Nous y lisons en effet: «*Definiendum quid petatur cum proponatur invenienda curv* «*secundum quam catena flectitur. An ut positis x et y normalibus, ita* «*x a puncto in data recta accipiatur, aequatione aliqua referatur x ad y* «*An ut posita quadratura circuli vel hyperbolae possent curvae quaesitae punct* «*quodlibet reperiri. An ut posita dimensione spatii alicujus denique, punct* «*ista inveniri queant. An sufficit proprietates aliquas ejus curvae invenire.*

L'exécution de la première partie de ce programme, la recherche de l'équation Cartésienne de la chaînette, ne fut pas entreprise. Ajoutons que JEAN BERNOULLI aussi, dont la solution fut publiée en même temps que celles de LEIBNIZ et de HUYGENS dans les Acta Eruditorum de Juin 169 n'a pas donné cette équation, ni directement, ni indirectement comme LEIBNI

Sept. 1693 lorsqu'il écrivit à LEIBNIZ „*j'admire de plus en plus la beauté de la gé métrie dans ces progrès qu'on y fait tous les jours, où vous avez si grande part, Mo sieur, quand ce ne serait que par vostre merveilleux calcul. M'y voilà maintenant médi crement versé, si non pas que je n'entends encore rien aux ddx, et je voudrais bie scavoir si vous avez rencontré des problèmes considérables où il faille les emploier, af que cela me donne-envie de les étudier*". L'opinion de HUYGENS sur le nouveau calc a d'ailleurs beaucoup varié. Pour juger équitablement son ignorance *relati* dans ce calcul on doit se rappeler la remarque si judicieuse de M. CANTOR (*Vo lesungen über Geschichte der Mathematik*, première édition, II p. 843; III p. 160) qu l'analyse infinitésimale a été créée, quant au *fond*, par les précurseurs de LEIBNIZ de NEWTON, par FERMAT, PASCAL, BARROW, etc., dont les méthodes n'avaient pas secrets pour HUYGENS depuis longtemps.

1) D'après la date du § III de la solution que nous allons reproduire.

2) Voir sa lettre à LEIBNIZ du 24 Aoust 1690. C'était justement dans la lett du 9 Oct. 1690 qui accompagnait l'envoi de l'anagramme contenant sa solution d problème de la chaînette que HUYGENS pouvait écrire „*J'ay tasché depuis ma di lettre* (du 24 Aoust) *d'entendre vostre calculus differentialis, et j'ay tant fait que j'ente maintenant, mais seulement depuis 2 jours, les exemples que vous en avez donné.*"

l'a fait. Toutes ces solutions d'ailleurs ne contiennent que des résultats et ne donnent même aucune indication sur la manière dont ceux-ci ont été acquis.

Ce fut donc sur la seconde partie du programme que HUYGENS concentra ses forces et on verra qu'il y réussit presque complètement. Seulement la réduction à la quadrature de l'hyperbole lui échappa. Elle était possible pourtant et BERNOULLI et LEIBNIZ[1]) ne la manquèrent pas. Aussi HUYGENS ne tarda pas dans ses lettres à LEIBNIZ du 1 et du 4 Septembre 1691 de reconnaître cet avantage qu'ils avaient eu sur lui.

La solution qui va suivre, a été composée par HUYGENS vers la fin de Septembre 1690 *„sans beaucoup de peine et dès les premiers jours"*, comme il l'écrivit plus tard à LEIBNIZ.[2]) Elle est contenue dans l'anagramme, envoyée à LEIBNIZ dans la lettre du 9 Oct. 1690 que nous avons cru devoir reproduire ici, en tête de la solution, avec son explication. Nous avons recueilli cette solution, non sans peine, sur différentes pages du livre *G* des *Adversaria* de HUYGENS. Il n'y a pas une phrase ni un mot dans le texte que nous donnons, qui ne soit de HUYGENS, mais nous avons apporté un peu d'ordre dans la manière dont les raisonnements se suivent et un peu d'uniformité dans les notations. De plus nous avons ajouté une division en paragraphes auxquelles nous avons donné des suscriptions.

HUYGENS a bientôt commencé à retoucher et à améliorer sa solution. Sa correspondance avec LEIBNIZ et la rédaction de l'article dans les Acta Eruditorum de Juin 1691, que nous avons cité plus haut, en rendent témoignage. Nous mentionnerons quelquefois ces changements dans les notes, mais nous avons préféré de publier la solution telle qu'elle était sortie de premier jet de la plume de CHRISTIAAN HUYGENS.

Anagramme, envoyée à LEIBNIZ le 9 Octobre 1690 avec la correction du 19 Novembre.[3])

$$\frac{ri}{a}=c, \quad \frac{ci}{a}=e, \quad \frac{1}{2}rc+\frac{1}{6}ec=S, \quad \odot\sqrt{2ru}=s\cdot c., \quad 45\,r=c,$$

$$10000\cdot 8809\cdot 4134, \quad xxyy=a^4-aayy, \quad xxyy=aaxx-aayy,$$

d. h. c. q. c. p. q. i. p. e. t. i. i. p. e. r. c. i. i. i. ae.

---

1) La réduction aux logarithmes, obtenue par LEIBNIZ, et celle à la quadrature de l'hyperbole étaient notoirement équivalentes.

2) Voir sa lettre du 1e Sept. 1691.

3) Voir les lettres à LEIBNIZ de ces dates.

Explication de l'Anagramme.

KS (fig. 1) tangens in K, ei perpend^{is} KER,

$KL : LS = CA$ ad AK curvam,

$a : i = r : c$,

$KL : LS$ sive CA ad AI ut AI ad AW,

$a : i$ sive $r : e$ ut $e : \frac{ee}{r}$ vel $\frac{ci}{a} = CR = c$,

$\frac{1}{2} rc + \frac{1}{6} ec =$ sectori cui evoluta pro centro.

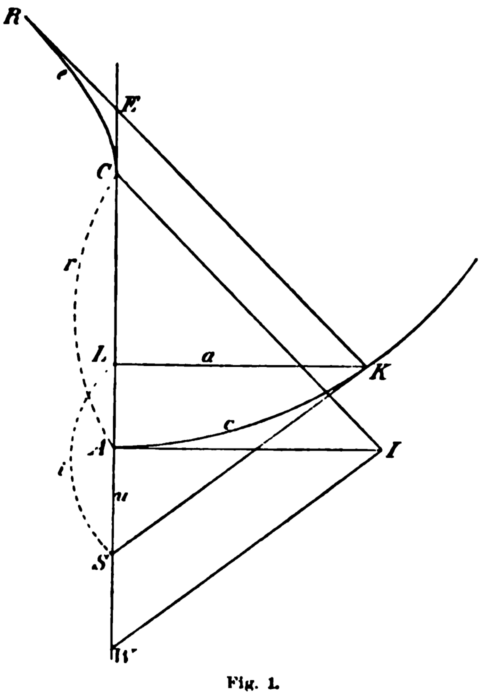


Fig. 1.

circulus a radio $\sqrt{2ur}$ = superficies conoidis ex conversione AK.

si ang. LKS est 45 gr. erit CA = curvae AK.

denique duae aequationes exprimentes curvarum totidem naturam

$$xxyy = a^4 - aayy,$$

$$xxyy = aaxx - aayy$$

data harum curvarum quadratura catenae puncta quotlibet invenire possum et tangentes in iis punctis, et rectas curvis inter illa interjectis aequales.[1])

Hinc inveni, si a puncto inclinationis anguli semi recti ducatur axi perpendicularis, eam esse ad abscissam ad verticem proxime ut 8809 ad 4134 et curvam interceptam tunc esse partium 10000.[2])

1) On remarquera que ce sont les premières lettres des mots de cette phrase, qui ont été reproduites dans l'anagramme.

2) Cette phrase prise d'une autre page du livre des *Adversaria* explique les nombres de l'anagramme.

Solution de Christiaan Huygens du problème de la chaînette.

§ I.[1])

Fundamentum omnium eorum quae de curva catenae reperimus.[2])

Fili gravitate carentis, et aequalia pondera innexa habentis, tria quaelibet internodia continua ac sursum tendentia ita ad planum horizontale inclinantur, ut tangentes angulorum hujus inclinationis crescant aequali excessu.[3])

Sint catenae pondera aequalia innexa habentis A, B, C, D, internodia tria sursum tendentia AB, BC, CD, producanturque internodia extrema et conveniant in P. Et per P ducatur ad horizontem perpend. NPK eique occurrant horizontales BK, CN. Est ergo internodii AB inclinatio ad horizontem angulus PBK, et internodii BC inclinatio angulus FBK, et internodii CD inclinatio angulus PCN. Dico itaque tangentem ang^{i} PBK tantum superari a tangente ang^{i} FBK quantum haec superatur à tangente ang^{i} PCN.

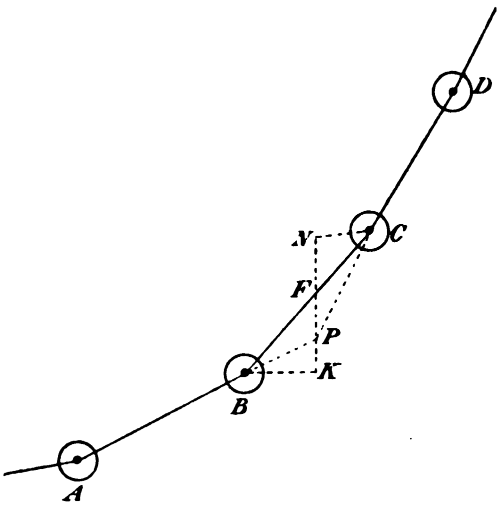


Fig. 2.

Quia enim concursus rectarum AB, DC, hoc est punctum P incidit in perpendicularem horizonti quae per centr. gr. ponderum BC transit; sunt autem pondera haec aequalia, necesse est perpendicularem KPN secare internodium BC aequaliter in F, unde et BK, CN aequales erunt. Quarum utrovis pro radio adsumta, apparet PK tangentem anguli PBK eadem

1) La rédaction de ce paragraphe est d'une date postérieure à celle des parties qui vont suivre et qui supposent la connaissance du théorème qu'on y démontre. Probablement Huygens n'a pas jugé nécessaire d'abord de jeter sur le papier les raisonnements qui l'y avaient conduit.

2) Cette suscription est de Christiaan Huygens.

3) On remarquera qu'en langage moderne, ce théorème, appliqué à la chaînette, revient à l'équation bien connue: $\dfrac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{ds} = k$.

recta PF superari a tangente ang FBK, qua tangens hujus [illegible] illi aequalis, FCN superatur a tangente ang PCN. Sunt [illegible] anguli ut jam diximus inclinationes internodiorum AB, BC, CD [illegible] num horizontis. Ergo constat propositum.

Catenae seu fili suspensi aequalia pondera innexa habentis, si [illegible] internodium horizonti parallelum fuerit erunt deinceps anguli [illegible] internodiorum cum horizontali plano tales ut eorum tangentes [illegible] secundum rationem numerorum ab unitate incipientium 1, 2, 3, 4, [illegible]

§ II.

Rectification de la chaînette. Démonstration du premier théorème de l'anagramme. Introduction du rayon de courbure au sommet comme paramètre.

Catena composita ex virgulis aequalibus WS, SP, PG, GB [illegible] dia BA, quae horizonti parallela. $AB = a$. $AC = b$.

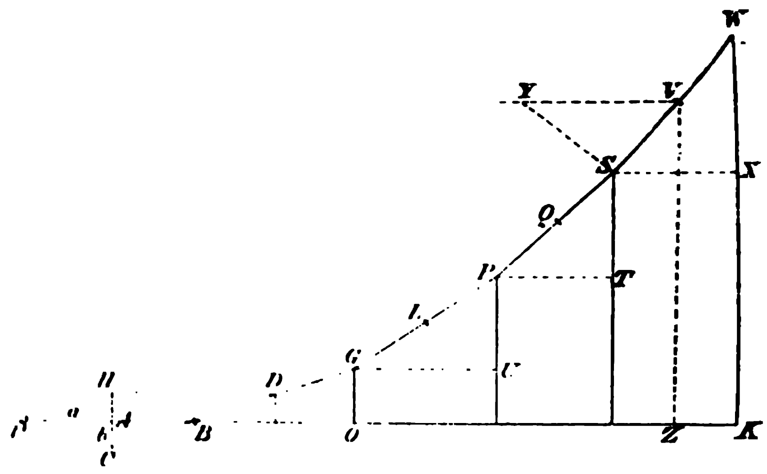


Fig. 3.

Angulorum GBO, PGC, SPT, WSX, etc. tangentes aeq[illegible] crescunt.

GO ad OB ut b ad a,

PC ad CG ut $2b$ ad a,

ST ad TP ut $3b$ ad a,

WX ad XS ut $4b$ ad a.

YS ad SV ut WX ad XS ducta scilicet SY perpend. in S VY parall XS.

YS ad SV ut $4b$ ad a,

sed $SV = a$,

$YS = 4b$,

$c =$ longitudo catenae WA,

$\frac{1}{2}c : SV = YS(4b) : AC(b) = \frac{YS \cdot SV}{\frac{1}{2}c}$,

facile enim apparet toties contineri SV in $\frac{1}{2}c$ sive dimidia longitudine catenae, quoties b sive AC continetur in SY.

Ergo et $A\Pi = \frac{2 \cdot YS \cdot SV}{c}$, ducta $D\Pi$ parall. BA. Ducta est enim curva quae tangit rectam AB in A, BG in D, GP in L, quam pro curva catenae hic habeo, et quam pro circumferentia circuli, aut etiam parabola, reputo, cujus circumferentiae diametrum hic porro investigo.[1])

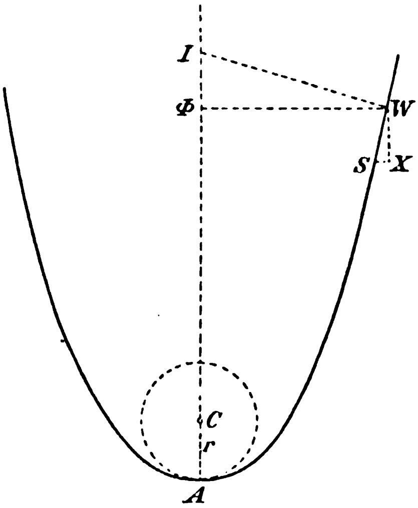


Fig. 4.

$$b = A\Pi = \frac{2 \cdot YS \cdot SV}{c} : AD^{2}) (2a) = AD(2a) : \text{diam.}$$

$$\text{diam.} = \frac{2c \cdot SV}{YS}, \text{ nam } 2SV = AD,$$

$$\tfrac{1}{2} \text{ diam.} = \frac{c \cdot SV}{YS} = r.$$

Sed ut YS ad SV ita WX ad XS et ita $W\Phi$ ad ΦI.[3]) Ergo $\frac{c \cdot \Phi I}{W\Phi} = r$ radius curvitatis in A. Theorema praecipuum.[4])

§ III.[5])

Suite de la rectification de la chaînette. Cas particulier ou la tangente fait un angle de 45⁰ avec l'axe de la chaînette.

Sit in puncto curvae aliquo K recta KE (fig. 5) ipsi ad ang. rectos quae conveniat cum axe in E, et a C, centro curvitatis in A, ducatur CI parallela KE, usque ad tangentem in vertice AI. Dico rectam AI aequalem

1) On remarquera la manière élégante dont le rayon de courbure du sommet est introduit ici comme paramètre de la chaînette.

2) Nota quod AD considero tanquam $2a$ seu duplam AB. (Chr. Huygens.)

3) Voir la fig. 4.

4) Le théorème est identique avec le premier théorème de l'anagramme. En effet d'après ce théorème $r = \frac{KL}{LS} \cdot c$ (voir la figure 1) $= \frac{LE}{KL}\, c = \frac{\Phi I}{W\Phi} \cdot c$.

5) Cette partie est datée du 25 Sept. 1690.

fore curvae AK. Nam quia perp. KL ad LE ut curva AK ad AC, ut dictum antehac.[1]) Ut autem KL ad LE ita est IA ad AC; erit curva AK ad AC ut recta IA ad AC, ideoque curva AK aequalis rectae IA.

Ergo si F sit punctum curvae ubi illius tangens inclinatur ad plan. horiz. angulo semirecto, erit curva AF aequalis recto AC.

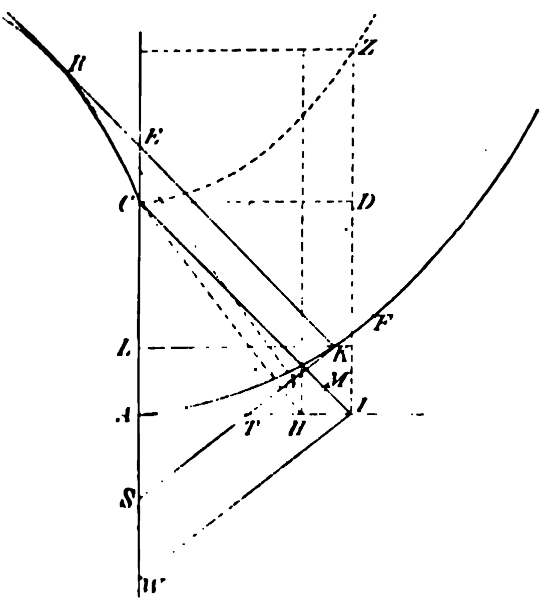


Fig. 5.

§ IV.

Rectification de la développée. Démonstration du deuxième théorème de l'anagramme.

Ex C ducantur CH, CI minimum angulum ad C constituentes. Sitque NR parall. HC, eademque curvae AK ad ang. rectos. Item KR parall. IC, eademque curvae ad ang. rectos. Erit jam $AN = AH$, et $AK = HI$ ex superius traditis. Unde $NK = HI$.

IW est perp. CI, itemque HM. Cumque sicut KN ad MH, hoc est IH ad MH, ita sit KR ad MC seu KR ad IC ut WI ad IA (nam ut IH ad HM ita WI ad IA), sive ut WC ad CI. Itaque WC aequ. KR, hoc est [illegible] AC + curva CR, et ablata communi CA, fit curva $CR = AW$.

§ V.

Quadrature de la figure mixte $ACRKA$. Démonstration du troisième théorème de l'anagramme.

Cumque angulus NRK sit aequalis HCI propter parallelismum continentium, erit triang. NRK ad triang. HCI sive HCM (ducta HM perp. in CI) sicut quad. NR ad quad. HC, seu ut quad. KR ad quad. IC, nam IC, HC aequales propter angulum in C minimum.

Sed NR est aequ. CW. Ergo triang. KRN ad triang. ICH ut qu. WC ad qu. CI, hoc est ut WC ad CA.

1) Dans le paragraphe précédent.

Si IZ ponatur $= CW$, erit Z ad parabolam vertice C, axe CO, latere recto CA.[1]) Et quia triang. KRN ad ICH ut WC ad CA, hoc est ut ZI ad ID, hoc est ut $\square\, ZH$ ad $\square\, DH$; estque $\square\, DH =$ duplum triang. ICH, erit et $\square\, ZH$ duplum triang. KRN. Atque ita spatium totum $ACRKA$ dimidium spatii $ACZIA$, quod aequale rectangulo AD cum tertia parte rectang. CZ. Itaque spatium $ACRKA$ aequale triangulo $ICA + \frac{1}{3}$ triangulo IAW, hoc est $\frac{1}{2} cr + \frac{1}{6} ce$.[2])

§ VI.

Quadrature de la surface de révolution de la chaînette. Démonstration du quatrième théorème de l'anagramme.

Sit KS tangens in K. Dico superficiem genitam ex conversione curvae AK circum axem AC, aequari circulo cujus radius medius proportionalis sit inter AC et duplam AS.

Demonstratur ex eo quod si ex T intersectione tang. duum AT, KS ducatur TX[3]) axi parall., ea debet transire per centrum gravitatis curvae ANK quia tangentes in K et A; hoc est fila catenam KNA sustinentia conveniunt in T.

Jam ut KL ad LE, hoc est ut SL ad KL, sive ut SA ad AT, ita curva KA ad AC ex supradictis.[4]) Unde quod fit ex SA in AC aequ. facta ex AT in curvam AK, ideoque superficies ex conversione curvae AK aequalis cylindricae superficiei cujus altitudo AC, semidiameter basis AS, hoc est circulo cujus radius media prop. inter AC et duplam AS.

§ VII.

Construction de la courbe $xxyy = aaxx - aayy$ de l'anagramme, dont la quadrature permet de trouver le rapport de l'ordonnée AL (fig. 5) à l'arc AK de la chaînette pour un angle donné de la tangente KS avec la ligne horizontale.

Angulorum GBO (fig. 3), PGU, SPT, WSX, etc. tangentes aequaliter crescunt, atqui BG, GP, PS, SW sunt aequales. Ergo GO, PU, ST, WX sunt sinus angulorum quorum tangentes aequaliter crescunt et BO, GU, PT, SX eorundem angulorum sunt sinus complementorum.

1) En effet $DZ = AW = \frac{AI^2}{CA} = \frac{CD^2}{CA}$.

2) Ici e répresente l'arc CR de la dévoloppée, qui, d'après le paragraphe précédent, égale AW.

3) Cette ligne n'est pas indiquée dans notre figure.

4) Voir le § III. D'après ce paragraphe l'arc KA égale IA, mais on a évidemment $IA : AC = KL : LE$.

Ut inveniatur summa omnium sinuum ut $\sigma\varepsilon$, $\Pi\Delta$ (fig. 6), quorm tangentes respectivae crescunt aequaliter, accipiuntur iisdem sinubus aequal

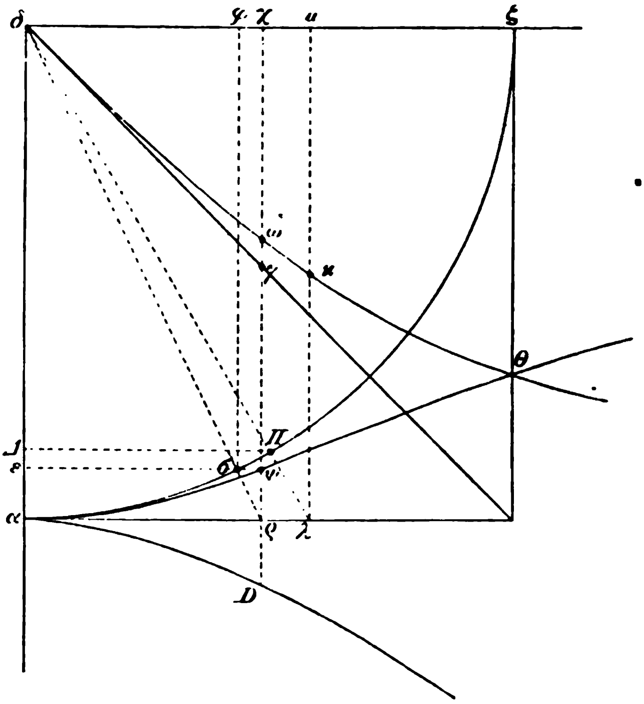


Fig. 6.

in rectis $\varrho\chi$, $\lambda\mu$ atque ita fit ut summa sinuum quaesita (puta ar $\alpha\xi$) ad totidem radios, sit ut spatium $\delta\omega\Theta\xi$ ad $\square\ \alpha\xi$.[1])

1) En effet, si l'on fait subir à la ligne $\alpha\varrho$ des accroissements petits et éga il est clair d'abord que les tangentes des angles $\alpha\delta\sigma$ s'accroissent de même avec quantités égales. Mais alors la somme des sinus de ces angles, multipliée pa petit accroissement que nous avons supposé, sera représentée par l'aire de la cou $\delta\omega\varkappa\mu$ et la somme de leurs rayons, multipliée par la même quantité, par le r angle $\alpha\varrho\lambda\mu$. De l'autre côté il s'ensuit facilement du théorème qui se trouve en de ce paragraphe que le rapport de l'ordonnée VZ (fig. 3) et de l'arc ΔV de chainette, pour un angle $WSX = \alpha\delta\Pi$ donné, est égal à celui de la somme de sinus à la somme de leurs rayons.

Ajoutons que si Christiaan Huygens, en vue de l'application qu'il va faire d le § IX s'est borné dans sa conclusion au cas $\alpha\delta\Pi = 45^0$, la phrase de l'anagram *data harum curvarum quadratura catenae puncta quodlibet invenire possum* nous montre qu'il n'a pas manqué la conclusion plus générale que nous venons de formu Pour y arriver on n'a qu'à changer les derniers mots qui précèdent cette note d le texte comme il suit: *(puta arcus $\alpha\Pi$) ad totidem radios, sit ut spatium* $\delta\omega$ *ad* $\square\ \delta\lambda$.

Constructio curvae $\delta\Theta$

$$x = \delta\chi = \chi\gamma = \psi\varepsilon,$$
$$y = \omega\chi = \sigma\varepsilon,$$
$$\sigma\delta = a,$$
$$\varrho\delta = \sqrt{aa + xx},$$
$$\sqrt{aa + xx} : a = x : y.$$ [1])

§ VIII.

Construction de la courbe $xxyy = a^4 - aayy$ de l'anagramme, dont la quadrature[2]) fait connaître le rapport de l'abscisse LK (fig. 5) à l'arc AK de la chaînette pour un angle donné de la tangente KS avec la ligne horizontale.

Summa sinuum compl. pro tangentibus aequaliter crescentibus (puta arcus $\alpha\zeta$) est ad totidem radios ut spat. $\alpha\Theta\zeta\delta$ ad $\square\ \alpha\zeta$, nam ipsi sinus compl. accipiuntur in rectis aequaliter distantibus respectivis, ita nempe ipsi $\sigma\varphi$ aequalis $\psi\chi$ in recta $\varrho\chi$.

Constructio curvae $\alpha\Theta$

$$\varrho\delta : \sigma\delta = \varrho\chi : \psi\chi \text{ quae itaque aequalis } \sigma\varphi$$
$$\sqrt{aa + xx} : a = a : y,$$
$$aayy + xxyy = a^4,$$
$$yy = \frac{a^4}{aa + xx} \text{ curva } \alpha\Theta.$$

1) Cette équation est identique avec la seconde de celles qui sont mentionnées dans l'anagramme. La quadrature d'ailleurs peut s'effectuer facilement et Huygens n'a pas manqué de s'en apercevoir plus tard. On a en effet pour la courbe $\delta\omega\Theta$ (fig. 6)

$$\int_0^x y\,dx = \int_0^x \frac{ax\,dx}{\sqrt{aa + xx}} = a\sqrt{aa + xx} - aa.$$

Appliquant ensuite le théorème démontré dans le texte de ce § VII et posant $x = a \operatorname{tg} \varphi$, où $\varphi = \angle\, \alpha\delta\Pi$ représente l'angle de la tangente de la chaînette avec la ligne horizontale, on trouve:

AL (fig. 5) : arc $AK = a\sqrt{aa + xx} - aa : ax = \sec\varphi - 1 : \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cosec}\varphi - \cot\varphi : 1.$

Comme on le verra dans la dernière note de cet article, Huygens a fait usage de ce résultat pour corriger la valeur du rapport de l'ordonnée à l'arc de la chaînette pour $\varphi = 45^\circ$.

2) Plus tard Huygens, comme cela résulte de l'article dans les Acta Eruditorum de Juin 1691, cité dans la préface, a su réduire cette quadrature au calcul de la somme des sécantes dont les angles croissent avec des intervalles égaux et petits depuis zéro jusqu'à l'angle φ de la tangente KS (fig. 5) avec la ligne horizontale, c'est-à-dire au calcul de l'intégrale $\int_0^\varphi \sec\varphi\, d\varphi$. Toutefois, comme nous l'avons mentionné dans la préface, la réduction à la quadrature de l'hyperbole lui a échappé.

Si itaque αD sit hyperbola aequilatera et sint proportionales $D\chi$, $\varrho\chi$, $\psi\chi$ erit punctum ψ in curva $\alpha\Theta$; nam qu. $D\chi =$ qu. $\delta\chi +$ qu. $\varrho\chi$.

§ IX.

Calcul des nombres 10000, 8809, 4134 de l'anagramme, proportionnels à l'arc AK (fig. 5), à l'abscisse LK et à l'ordonnée AL, pour le cas $\angle KTI = 45^0$.

Ex sinubus qui conveniunt tangentibus Tabularum, inveniuntur sinus qui conveniunt tangentibus proximis aequaliter crescentibus.

Idemque in sinubus complementis.

	sinus			
			$\frac{1}{2}r$	50000
12500[1]	12406		1	99228
25000	24253		2	97014
37500	35113		3	93636
50000	44722		4	89442
62500	53001		5	84799
75000	60000		6	80000
87500	65850		7	75257
100000	35356	dimidium 70711	$\frac{1}{2}$ 8^{ae}	35356
	330701			704732

800000 : 330701 : 704732 = 100000 : 41338 : 88091.

1) La première de ces colonnes contient les tangentes croissantes à intervalles égaux depuis zéro jusqu'à la valeur de la tangente de 45°; la valeur du rayon étant supposée égal à 100000. La seconde contient les sinus et la dernière les cosinus correspondants. Les divisions par deux qu'on rencontre en haut et en bas de ces colonnes, s'expliquent par l'emploi de la formule approximative

$$\left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + \tfrac{1}{2}y_8\right) \times \Delta$$

qu'on obtient en remplaçant l'aire d'une courbe par une somme de trapèzes. Dans la colonne des sinus $y_0 = 0$, dans celle des cosinus $y_0 = 100000$. Le nombre 800000 représente la somme des rayons.

L'approximation obtenue de cette manière est assez grossière. Aussi Huygens ne s'en est pas contenté. Dans l'anagramme même, tel qu'il se trouve dans le manuscrit d'où nous puisé, les nombres 8809 et 4134 ont été rayés et remplacés par les valeurs plus exactes 88137 et $\sqrt{2000000000} - 10000 = 41421$ qui conduisent aux mêmes rapports pour l'arc, l'abscisse et l'ordonnée que les nombres 24142, 21279 et 10000 que l'on rencontre dans l'article dans les Acta Eruditorum de Juin 1691. Le nombre 88137 a été obtenu par la sommation des sécantes dont nous avons parlé dans la note précédente, le nombre 41421 par la méthode exacte décrite dans la dernière note du § VII.

Integration durch imaginäres Gebiet.

Ein Beitrag zur Geschichte der Funktionentheorie.

Von

Paul Stäckel in Kiel.

1. Wenn man nicht mit Unrecht die Geschichte der Funktionen einer komplexen Veränderlichen mit dem Jahre 1825 zu beginnen pflegt, in dem CAUCHYS *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires* erschienen ist, so bildete doch diese Abhandlung für CAUCHY selbst nur den Abschlufs von Untersuchungen, die er zwölf Jahre früher begonnen hatte und in deren Verlaufe er mit POISSON zusammengetroffen war, dessen Arbeiten sich in derselben Richtung bewegten, ohne freilich denselben Erfolg zu haben. Da POISSON von CAUCHY wiederholt angeführt wird, ist es auffallend, dafs weder VALSON[1]) noch BRILL[2]) seinen Anteil bei der Integration durch imaginäres Gebiet auch nur mit einem Worte erwähnen. Zu dieser Lücke in der Geschichte der Funktionentheorie tritt eine zweite. POISSON und CAUCHY hatten in LEIBNIZ, JOHANN BERNOULLI, D'ALEMBERT, LAPLACE, ganz besonders aber in EULER Vorgänger, deren Leistungen noch keine genügende Darstellung gefunden haben. Diesem Mangel abzuhelfen, also die Geschichte der Funktionentheorie bis in ihre keimhafte Entwickelung zurückzuverfolgen, ist der Zweck dieser Note.

2. Imaginäre Gröfsen treten in der Integralrechnung schon sehr früh auf, sie finden sich bereits in Briefen und Abhandlungen von LEIBNIZ und JOHANN BERNOULLI aus dem Jahre 1702. Am 10. Juni 1702 schreibt dieser an seinen Freund (4), er habe die Aufgabe gelöst, das Integral einer beliebigen rationalen Funktion zu ermitteln, vorausgesetzt, dafs man

---

1) C. A. VALSON, *La vie et les travaux du Baron Cauchy* (Paris 1868), T. II Chap. IV: Intégrales définies et résidus.

2) A. BRILL und M. NOETHER, *Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit.* II. Abschnitt, bearbeitet von BRILL. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **3** (Berlin 1894).

ihm die Quadraturen des Kreises und der Hyperbel zugestehe. LEIBNIZ antwortet darauf am 24. Juni (1), mit solchen Integralen habe er sich schon in den ersten Jahren seiner höheren Geometrie beschäftigt und, um andre anzuregen, vor kurzem seine Resultate niedergeschrieben und zum Druck [an die Acta Eruditorum] abgesandt; in der That enthält das Maiheft der A. E. die betreffende Abhandlung (2). Bei der Integration durch Partialbrüche, die LEIBNIZ nunmehr ausführlich entwickelt, meint er, dafs das Auftreten imaginärer Wurzeln unschädlich sei, denn man könne die betreffenden Brüche in einen reellen zusammenfassen, der sich mit Hilfe der Quadratur des Kreises integrieren lasse. Indessen walte hier ein noch gröfseres Mysterium. Imaginäre Gröfsen lassen sich nicht weniger als reelle in der Analysis der Gleichungen mit Recht und mit Nutzen verwenden. *„Ich habe die rationalen Quadraturen zurückgeführt auf Logarithmen, sei es wirkliche, sei es imaginäre, eben so die Quadratur des Kreises, und zwar nicht nur auf eine Art.“* Wenn imaginäre Gröfsen in den Wert reeller Gröfsen scheinbar eingehen, so gleichen sie sich aus und zerstören sich, und daher könne man sogar mittelst imaginärer Rechnungen [geometrische] Konstruktionen ableiten.

Im Januarhefte der Acta Eruditorum vom Jahr 1703 gab LEIBNIZ eine Fortsetzung seiner Untersuchungen über die Integration rationaler Funktionen (3), woran sich eine Note von JOH. BERNOULLI über denselben Gegenstand schliefst (5), ein Auszug einer gröfseren Abhandlung, die er der Pariser Akademie eingereicht hatte, in deren Memoiren für 1702 sie im Jahre 1704 erschienen ist (6). BERNOULLI bezeichnet diese Abhandlung als einem Briefe vom 5. August 1702 entnommen, ohne den Adressaten anzugeben; aus dem BERNOULLIschen Briefwechsel geht aber hervor, dafs es VARIGNON war.[1]) Am Schlusse bemerkt er, dafs ebenso wie das Differential $\frac{a\,dz}{b^2-z^2}$ mittelst der Substitution $z = b\frac{t-1}{t+1}$ in das logarithmische Differential $\frac{a\,dt}{2bt}$ übergehe, auch das Differential $\frac{a\,dz}{b^2+z^2}$ mittelst der imaginären Substitution $z = ib\frac{t-1}{t+1}$ in das Differential eines *imaginären Logarithmus* $-\frac{a\,dt}{ibt}$ verwandelt wird; hierbei ist $\sqrt{-1}$ durch i ersetzt worden, was der Kürze und Übersichtlichkeit wegen im folgenden stets geschehen soll. Durch die weitere imaginäre Substitution

1) JOHANN BERNOULLIS Brief an VARIGNON vom 5. Aug. 1702 ist verloren gegangen, aber VARIGNONS Antwort vom 15. Aug. 1702 befindet sich in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. (G. E.)

$$t = \frac{bi + \sqrt{\frac{1}{r} - b^2}}{bi - \sqrt{\frac{1}{r} - b^2}}$$

erhält er hieraus das Differential eines reellen Kreissektors: $d\left(\frac{a}{b} \arcsin b\sqrt{r}\right)$.

Der einfachere Ausdruck $d\left(\frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{z}{b}\right)$ scheint ihm damals noch nicht bekannt gewesen zu sein. Er findet sich jedoch in einer Abhandlung aus dem Jahr 1712 (7), in der die Aufgabe gelöst wird, $\operatorname{tg} nA$ durch $\operatorname{tg} A$ auszudrücken. Zu diesem Zwecke setzt BERNOULLI $\operatorname{tg} A = x$, $\operatorname{tg} nA = y$ sodafs $n \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} y$ und daher $\frac{n\,dx}{x^2+1} = \frac{dy}{y^2+1}$ oder

$$\frac{n\,dx}{x-i} - \frac{n\,dx}{x+i} = \frac{dy}{y-i} - \frac{dy}{y+i}$$

wird. Hieraus folgt durch Integration

$$n \log \frac{x-i}{x+i} = \log \frac{y-i}{y+i} + \text{const.},$$

und man erhält daher aus der Gleichung

$$\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^n = \frac{y-i}{y+i},$$

in der das Imaginäre nur scheinbar vorkommt, durch Auflösung nach y, je nach dem n ungrade oder grade ist, die Tangente oder Kotangente von nA.

Man erkennt aus dem vorstehenden Berichte, dafs LEIBNIZ und JOHANN BERNOULLI fast gleichzeitig das Problem behandelt haben, Ausdrücke der Form $\frac{dx}{x \pm i}$ zu integrieren, und dafs für beide das Auftreten imaginärer Gröfsen unter dem Integralzeichen kein Hindernis gebildet hat, die Integration nach den formalen Regeln auszuführen, die für reelle Ausdrücke gelten. BERNOULLI hat es sogar verstanden, auf diese Weise ein wichtiges Problem aus der Theorie der Kreisteilung zu lösen.[1])

---

1) Mit Absicht bin ich auf LEIBNIZ und JOH. BERNOULLI etwas ausführlicher eingegangen, da die Darstellung M. CANTORS (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. III, Abteilung 2, S. 261—263 und 348—349) ungenau ist. LEIBNIZ hat nicht, wie CANTOR angiebt, „seinem Freunde mitgeteilt, was nachher in die Acta Eruditorum eingerückt wurde", vielmehr hatte er seinen Aufsatz damals schon abgesandt, denn er sagt ausdrücklich (*Commercium* S. 80), „inque id expedieram breve schediasma aliis excitandis", und der Brief enthält sogar *mehr* als die Abhandlung, in der von imaginären Logarithmen nicht gesprochen wird. Ferner ist BERNOULLIS Aufsatz nicht „etwa gleichzeitig" mit dem von LEIBNIZ erschienen, der betreffende Jahrgang der Pariser Memoiren für 1702 wurde vielmehr erst im Jahre 1704 veröffentlicht.

3. Nach LEIBNIZ und BERNOULLI ist D'ALEMBERT zu nennen, der in einem Exkurse seiner Preisschrift über die allgemeine Ursache der Winde vom Jahre 1746 (8) die Behauptung aufstellte, jeder algebraische Ausdruck, der aus einer beliebigen Anzahl imaginärer Gröfsen gebildet ist, lasse sich auf die Form $A + iB$ bringen, wo A und B reelle Gröfsen bezeichnen. Dafs aus zwei Ausdrücken $a + ib$ und $g + ih$, wenn sie durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division verknüpft werden, immer ein Ausdruck der Form $A + iB$ hervorgehe, war leicht zu zeigen, schwieriger war dieser Nachweis bei der Potenzierung. Hier hilft sich D'ALEMBERT in genialer Weise, indem er in $(a + ib)^{g+ih}$ die Basis $a + ib$ als veränderliche Gröfse ansieht, sodafs hier zum erstenmale eine komplexe Variable auftritt. Durch logarithmische Differentiation erhält er so aus der Gleichung

$$(a + ib)^{g+ih} = A + iB$$

die Relation

$$(g + ih)\frac{d(a + ib)}{a + ib} = \frac{d(A + iB)}{A + iB},$$

und indem er jetzt Reelles und Imaginäres trennt, gelingt es ihm $A^2 + B^2$ und $\operatorname{arctg}\frac{B}{A}$ in einfacher Weise durch g, h, $a^2 + b^2$ und $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ auszudrücken.

Noch weiter geht D'ALEMBERT in einer Abhandlung aus demselben Jahre (9), die sich auf die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen bezieht und wegen des darin enthaltenen Versuches eines Beweises für die Existenz von Wurzeln bei algebraischen Gleichungen oft angeführt wird. Hier behauptet er, dafs man jede Funktion einer imaginären Gröfse $x + iy$, also nach dem damaligen Sprachgebrauche jeden analytischen Ausdruck, in dem mit einer imaginären Gröfse $x + iy$ operiert wird, stets auf die Form $p + iq$ bringen könne, „obwohl es oft unmöglich sein mag, die analytischen Werte von p und q wirklich zu bestimmen". Ja noch mehr, er spricht (S. 195) von dem *Integrale einer Funktion der Veränderlichen* $x + iy$ und behauptet, das Differential $f(x + iy)\,d(x + iy)$ lasse sich stets in der Form $dp + idq$ darstellen.[1])

Beweise für diese Behauptungen hat D'ALEMBERT nicht gegeben; wenn er es versucht hätte, würde er auf grofse Schwierigkeiten gestofsen sein. Ebensowenig hat er seine für die damalige Zeit aufserordentlich

1) Vergl. auch M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. III, Abteilung 3, Leipzig 1898, S. 565—566. Bei CANTOR fehlt jedoch die Bemerkung über $f(x + iy)\,d(x + iy)$, und auch die Stelle in den *Réflexions sur la cause générale des vents*, auf die schon BALTZER (Journal für Mathematik, Bd. **94**, Berlin 1883, S. 87) aufmerksam gemacht hatte, ist ihm entgangen.

kühnen Ansätze weiter verfolgt, und so zeigt sich auch hier die Erscheinung, dafs solche Keime sich nur dann entwickeln, wenn sie auf geeigneten Boden fallen.

4. In den Abhandlungen EULERS, über die im folgenden berichtet werden soll, findet man zwar D'ALEMBERT nicht ausdrücklich angeführt, allein Citate an andern Stellen seiner Schriften[1]) und Andeutungen in den betreffenden Abhandlungen selbst zeigen, dafs EULER D'ALEMBERTS Arbeiten gekannt hat und dafs sie auf seine Untersuchungen von Einflufs gewesen sind, die freilich in eine erheblich spätere Zeit, nämlich in die Jahre 1777 und 1781 fallen. Veröffentlicht worden sind sie noch viel später, nämlich erst nach EULERS Tode in den Jahren 1793 bis 1805.

Den Anfang bilden vier eng zusammengehörende Abhandlungen, die vom 20. und 21. März 1777 datiert sind (10)—(13). Unverkennbar an D'ALEMBERT anknüpfend sagt EULER, kein Geometer zweifle gegenwärtig mehr daran, dafs alle imaginären Gröfsen, woher sie auch ihren Ursprung nehmen, auf die Form $A+iB$ gebracht werden können, obwohl diese Wahrheit noch nicht auf genügend sichere und einleuchtende Art bewiesen worden sei, und als Fundament der Theorie der imaginären Gröfsen bezeichnet er den Satz, dafs jede Funktion Z von z, die, wenn $z=x+iy$ gesetzt wird, in $M+iN$ übergeht, sich für $z=x-iy$ in $M-iN$ verwandelt, wo M und N reelle Gröfsen bedeuten; Z wird hierbei stillschweigend als reell bei reellem z angenommen, genau wie das CAUCHY 48 Jahre später thut. Hieraus ergiebt sich folgendes Verfahren, aus einem in geschlossener Form ausführbaren Integrale

$$\int Z(z)\,dz = V(z)$$

neue Integrale herzuleiten, die sich häufig den gewöhnlichen Methoden der Integralrechnung entziehen. Setzt man $z=x\pm iy$, so gehe Z in $M\pm iN$, V in $P\pm iQ$ über. Man erhält daher die beiden Gleichungen

$$\int (M\pm iN)\,d(x\pm iy) = P\pm iQ,$$

aus denen die reellen Relationen

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} \int (M\,dx - N\,dy) = P, \\ \int (N\,dx + M\,dy) = Q, \end{cases}$$

folgen, die für $Z=z^m,\ \frac{1}{1+z^2},\ \frac{1}{1+z^3}$ explicite hergestellt werden.

---

1) Mémoires de l'Académie pour l'année 1749 (Berlin 1751), S. 180, sowie *Opuscula analytica* t. II (Petersburg 1785), S. 76—79.

Die Thatsache, dafs die Differentiale $M\,dx - N\,dy$ und $N\,dx + M\,dy$ integrabel sind, obwohl sie die beiden Veränderlichen x und y enthalten, veranlafst Euler zu der wichtigen Bemerkung, dafs deshalb nach dem Kriterium der Integrabilität die Gleichungen:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{dx}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

identisch erfüllt sein müssen. „Mithin findet man“, fügt er sichtlich verwundert hinzu, „durch eine solche Substitution immer zwei Funktionen M und N der beiden Veränderlichen x und y mit der ausgezeichneten Eigenschaft, dafs sowohl $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}$ als auch $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$ ist“. *Dafs diese für die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen fundamentalen Relationen bereits von Euler im Jahre 1777 gefunden worden sind, scheint bisher nicht beachtet worden zu sein.*

Die Integrale P und Q sind jedoch für Euler blofs eine analytische Kuriosität, er strebt nach Integralen mit Einer veränderlichen Gröfse und gelangt dazu, indem er davon ausgeht, dafs eine jede komplexe Gröfse $x + iy$ sich in der Form $v(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ darstellen lasse. Indem er also in Z und V für z den Ausdruck $v(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ einsetzt, wodurch sie in $M' + iN'$ und $P' + iQ'$ übergehen mögen, und dabei v als variabel, dagegen φ als konstant ansieht, erhält er die Relationen

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \int M'\,dv = P'\cos\varphi + Q'\sin\varphi, \\ \int N'\,dv = Q'\cos\varphi - P'\sin\varphi, \end{cases}$$

die nun wieder für $Z = \frac{z^{m-1}}{1 \pm z^n}, \frac{z^{m-1}}{(a + bz^n)^\lambda}$ explicite hergestellt werden, wobei a und b Konstanten, m und n ganze Zahlen, λ eine gebrochene Zahl bedeuten.

In einer Abhandlung vom 3. November 1777 (14) kommt Euler auf diesen Gegenstand zurück, entwickelt die Relationen (B) von neuem und wendet sie auf Beispiele an, die bei der Integration einer rationalen Funktion $Z(z)$ auftreten, nämlich

$$V(z) = \log(1 \pm z), \quad \log(1 - 2\cos\alpha\cdot z + z^2), \quad \operatorname{arctg}\frac{z\sin\alpha}{1 - z\cos\alpha};$$

die Trennung des reellen und imaginären Bestandteiles erfordert hier „keinen geringen Scharfsinn“.

Als besonders fruchtbar erweist sich Eulers Verfahren in der Theorie der Γ-Funktionen. In einer Abhandlung vom 30. April 1781 (15) substituiert er in der Gleichung

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

ky für x und erhält die Formel

$$\int_0^\infty y^{n-1} e^{-ky}\, dy = \frac{\Gamma(n)}{k^n},$$

in der jedoch die Konstante k nicht negativ sein darf, da sonst das Integral auf der linken Seite keinen Sinn haben würde. Man darf aber, bemerkt EULER, der Konstanten k auch einen imaginären Wert $p + iq = fe^{i\vartheta}$ beilegen, vorausgesetzt, daſs p positiv ist. Die Substitution

$$x = (p + iq) \cdot y = fe^{i\vartheta} \cdot y$$

ergiebt alsdann sofort die merkwürdigen Formeln:

$$\int_0^\infty y^{n-1} e^{-py} \cos qy\, dy = \frac{\Gamma(n) \cos n\vartheta}{f^n},$$

$$\int_0^\infty y^{n-1} e^{-py} \sin qy\, dy = \frac{\Gamma(n) \sin n\vartheta}{f^n},$$

aus denen durch Spezialisierung von p, q und n eine Reihe weiterer Relationen hervorgeht, darunter auch nach kühnen Grenzübergängen:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\, dx}{x} = \frac{\pi}{2},$$

„was durch numerische Rechnung bestätigt wird".

Der vorstehende Bericht zeigt, daſs EULER, im hohen Greisenalter noch von jugendlicher Schaffenskraft beseelt, bereits den Boden der modernen Funktionentheorie betreten hatte. Indem er die Definition des Integrals als Umkehrung des Differentialquotienten formal auf Funktionen einer komplexen Veränderlichen $x + iy$ verallgemeinerte, hatte er sich ein Hilfsmittel zur Erlangung neuer Integrale geschaffen, das er mit eben so groſsem Erfolge wie die Methode der Differentiation und Integration nach einem Parameter zu handhaben verstand. Freilich lag in dieser Wahl des Ausgangspunktes zugleich der Grund, warum EULER nicht weiter vordringen konnte: nicht die eben angeführte Definition des Integrals, die andre, bei der es als Grenzwert einer Summe erscheint, hat für die Funktionentheorie die entscheidende Wendung herbeigeführt.[1])

---

1) BRILL (a. a. O. S. 167) bezeichnet zwar EULER als Vorgänger von CAUCHY, beruft sich jedoch hierfür nur auf die beiden Abhandlungen: *De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet.* Acad. exhib. die 5. Maii 1777. *Institutiones calculi integralis*, t. IV, supplementum IV, Nr. 1 (Petropoli 1794), und: *Investigatio valoris integralis.*

5. Noch bevor EULERS Abhandlungen gedruckt worden waren, hatte LAPLACE, veranlafst durch Untersuchungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, bestimmte Integrale mit imaginären Grenzen betrachtet. In einer Abhandlung aus dem Jahre 1782 (16), deren Inhalt in sein grofses Werk über Wahrscheinlichkeitsrechnung vom Jahre 1812 (19) übergegangen ist, behandelt er die Aufgabe, Ausdrücke, die gewissen Differenzengleichungen genügen, für grofse Werte der Argumente näherungsweise zu berechnen. Zu diesem Zwecke zeigt er zuerst, wie man für bestimmte Integrale der Form

$$\int u_1^{s_1} u_2^{s_2} \cdots u_n^{s_n} \cdot \varphi(x)\, dx,$$

wo $u_1, u_2, \cdots, u_n$ und $\varphi(x)$ Funktionen von x und $s_1, s_2, \cdots, s_n$ grofse Zahlen bedeuten, brauchbare Näherungsformeln herstellen kann, und lehrt darauf, wie grofse Klassen von Differenzengleichungen durch Integrale solcher Gestalt integriert werden können. Dabei werden die Grenzen der Integrale durch eine aus der Differenzengleichung abzuleitende Gleichung, die „équation des limites", bestimmt. Wenn man die Koeffizienten dieser Gleichung variiert, kann es sich ereignen, dafs sie statt der reellen imaginäre Wurzeln bekommt, und man erhält dann Integrale mit imaginären Grenzen, die LAPLACE durch kunstvolle Substitutionen auf Integrale mit reellen Grenzen zurückzuführen weifs. Er bemerkt dazu: „Diese Übergänge vom Reellen zum Imaginären mag man als heuristische Methoden ansehen, die der von den Geometern schon lange gebrauchten Induktion zu vergleichen sind. Wenn man sie aber auch mit der gröfsten Vorsicht und Zurückhaltung anwendet, wird man doch immer verlangen müssen, dafs ihre Ergebnisse bewiesen werden."

Als „Übergang vom Reellen zum Imaginären" bezeichnet LAPLACE allgemeiner überhaupt imaginäre Substitutionen, von denen er auch in zwei späteren Abhandlungen aus dem Jahre 1810 (17), (18) häufig Gebrauch macht. Die Berechtigung hierfür sucht er in der **Allgemeinheit der Analysis**, das heifst in der Überzeugung, dafs das Rechnen mit imaginären Gröfsen nach den Regeln, die für reelle Gröfsen gelten,

---

$$\int \frac{x^{m-1}\, dx}{1 - 2x^k \cos\vartheta + x^{2k}}$$

a termino $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensi. Ebendaselbst, t. IV, supplementum V, Nr. 6. In diesen beiden Abhandlungen benutzt EULER imaginäre Substitutionen, was er auch sonst nicht selten thut (vgl. etwa Nova acta Petrop., t. III, IX und X), und erhebt sich kaum über den Standpunkt JOHANN BERNOULLIS. Die sechs Abhandlungen EULERS, über die im Texte gehandelt wird, geben ein ganz andres Bild von EULERS Leistungen, wonach auch BAILLS Ansicht über EULERS Stellung zum Imaginären (S. 141) und zur Funktionentheorie (S. 163) zu berichtigen sein wird.

immer zu denselben reellen Ergebnissen führen mufs, die bei ausschliefslicher Benutzung reeller Gröfsen erhalten werden. Indem er jedoch stets darauf hält, dafs die mit Hilfe des Imaginären gewonnenen Relationen zwischen reellen Gröfsen nachträglich verifiziert werden, beweist er einen feinen mathematischen Instinkt, denn in der That kann die Einführung komplexer Veränderlichen in der modernen Ausdruckweise zu einem andern Integrationswege führen und so einen „falschen“ Wert des Integrals ergeben. Diese paradoxe Erscheinung tritt bei LAPLACE selbst noch nicht auf, sie findet sich erst bei POISSON, zu dessen Arbeiten wir jetzt übergehen.

6. Wenn die Theorie der bestimmten Integrale am Anfange des neunzehnten Jahrhunderts mit Vorliebe behandelt wurde und, um nur berühmte Namen zu nennen, CAUCHY, LAPLACE, LEGENDRE, POISSON ihr umfangreiche Abhandlungen gewidmet haben, so lag der Grund wohl darin, dafs man mit Hilfe dieser analytischen Gebilde die Integration der partiellen Differentialgleichungen zu erlangen hoffte, die in der damals mächtig hervorstrebenden mathematischen Physik auftraten. Ist diese Hoffnung auch nur in geringem Mafse in Erfüllung gegangen, so hat doch die reine Mathematik selbst grofsen Nutzen aus jenen Untersuchungen gezogen, die man als eine der Wurzeln der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen bezeichnen darf.

POISSON, den die Frage nach der Verteilung der Elektricität auf der Oberfläche leitender Körper zu bestimmten Integralen geführt hatte, steht in zwei Abhandlungen aus dem Jahre 1813 (22), (23) noch auf dem Standpunkte EULERS, auf dessen Arbeit aus dem Jahre 1781 (15) er sich ausdrücklich beruft. Wie EULER ersetzt er eine reelle Konstante durch eine imaginäre und gewinnt so aus bekannten Integralformeln neue, deren Richtigkeit er durch direkte Methoden nachweist. Zwei Jahre später findet er, dafs der „Übergang vom Reellen zum Imaginären“ unrichtige Resultate ergeben kann (24). Wird in dem Integrale

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x\, dx}{(1 - 2a\cos x + a^2)^n},$$

das sich in geschlossener Form angeben läfst, $a = be^{ia}$ substituiert, so ergiebt sich für $b = 1$ ein bestimmter Wert des Integrals, während in diesem selbst der Nenner für $x = \alpha$ unendlich wird. POISSON bemerkt hierzu nur ganz kurz, in diesem Falle „gebe der analytische Ausdruck des Integrals nicht mehr die Summe der Werte des Differentials“. Allein in der Fortsetzung seiner Abhandlung, die im Januar 1820 erschienen ist, (25) bezieht sich ein besonderer, 22 Seiten langer Abschnitt auf „die

Integration von Funktionen, die zwischen den Grenzen der Integration durchs Unendliche gehen, und den Gebrauch imaginärer Gröfsen bei der Ermittelung bestimmter Integrale".

Was bedeutet, fragt POISSON, das Zeichen

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}.$$

Wollte man die übliche Gleichung

$$\text{(J)} \qquad \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

anwenden, so würde sich als Wert -2 ergeben, während doch der Integrand beständig positiv ist. Noch schlimmer steht es mit

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x},$$

wo man den Wert 0 erwarten müfste, da die positiven und negativen Bestandteile sich gegenseitig zerstören. Die Gleichung (J) ergiebt aber $-l(-1) = -(2n+1)\pi i$, sodafs eine Summe von reellen Gröfsen *mehrere* Werte und noch dazu imaginäre haben soll.

Den Grund dieser befremdlichen Erscheinungen findet er darin, dafs die Gleichung (J), nach welcher die Summe der Werte des Differentials $f'(x)\,dx$, wenn x von a bis b durch unendlich kleine Inkremente dx wächst, gleich $f(b) - f(a)$ ist, nur unter der Voraussetzung bewiesen wird, dafs $f'(x)$ in diesem Intervalle beständig endliche Werte habe. Wenn also $f'(x)$ unendlich wird, braucht die Gleichung (J) nicht mehr zu gelten, „was schon LAGRANGE in seinen Vorlesungen über Funktionenrechnung (Journal de l'École polytechnique, Cahier 12 [1804], S. 69) bemerkt hat."

Hierbei hätte auch GAUSS angeführt werden sollen, der 1816 in seinem dritten Beweise für den Fundamentalsatz der Algebra (20) dieselbe Bemerkung gemacht und als Beispiel ebenfalls den Integranden $\frac{dx}{x^2}$ gewählt hatte. Wenn GAUSS hinzufügte, „was aber diese und ähnliche analytische Paradoxa bedeuten, das soll bei einer andern Gelegenheit ausführlicher verfolgt werden", so hatte er dazu guten Grund: wie ein 1880 veröffentlichter Brief an BESSEL vom 18. Dez. 1811 beweist (21), war er schon damals im Besitze von Sätzen über Integration durch imaginäres Gebiet, die CAUCHY 1825 entwickelt hat.[1])

1) BRILL (a. a. O. S. 155) giebt als Datum dieses Briefes den 12. Jan. 1812 an; in Wahrheit ist von diesem Tage BESSELS Antwort an GAUSS datiert.

Auch Poisson ist diesen Sätzen nahe gekommen, denn er fügt hinzu, man könne auch die Ausnahmefälle, in denen $f'(x)$ unendlich wird, auf die Gleichung (J) zurückführen. Diese Gleichung gelte nämlich auch dann noch, wenn das Differential $f'(x)\,dx$ durch imaginäre (komplexe) Werte hindurchgehe, und es genüge daher

«de faire en sorte que la variable x passe de la limite a à la limite b par une série de valeurs imaginaires; alors $f'(x)$ ne deviendra plus infinie par aucune de ces valeurs intermédiaires, et l'intégrale définie reprendra sa signification ordinaire».

Als Beispiel nimmt Poisson zunächst

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$$

und setzt $x = e^{-iz}$, wo die reelle Gröfse z von $(2n+1)\pi$ bis 0 abnehmen soll. Auf diese Weise variiert x wieder von -1 bis $+1$, allein der Integrand bleibt jetzt endlich, und das Integral wird gleich $-(2n+1)\pi i$, ein Wert, der nicht mehr verwunderlich ist, da die Zwischenwerte des Integranden imaginär ausfallen. In entsprechender Weise wird dann auch

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^m}$$

behandelt.

Diese Betrachtungen erregen bei Poisson den Verdacht, *dafs ein bestimmtes Integral mit den Grenzen a und b, wenn man zuerst von a nach b durch eine Reihe reeller Werte und darauf durch eine Reihe imaginärer (komplexer) Werte geht, verschiedene Werte annehmen könne.* Dafs diese Erscheinung wirklich eintritt, zeigt er durch folgendes Beispiel. Setzt man in dem Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax\,dx}{b^2+x^2},$$

wo a und b positive Konstanten bedeuten mögen, $x = t + ik$ mit konstantem positiven k, so ergiebt sich als Wert des Integrals,

$$\text{wenn } k > b \text{ ist:} \quad \frac{\pi}{2b}\left(e^{-ab} - e^{+ab}\right),$$

$$\text{wenn } k < b \text{ ist:} \quad \frac{\pi}{b}\, e^{-ab};$$

der zweite Wert gilt auch für $k = 0$, also bei der Integration durch reelle Werte.[1])

1) Der Wert $\frac{\pi}{b} e^{-ab}$ war bereits 1810 von Laplace gefunden worden, vergl. (18) S. 293, sowie Bulletin de la Société philomatique Nr. 43 und 49.

In weiteren Fortsetzungen der Abhandlung (22), die im Juli 1823 und im Februar 1831 erschienen sind (26), (27), hat POISSON diese Gedankenreihe nicht weiter verfolgt. Er wendet auch hier mit Vorliebe imaginäre Substitutionen an und gelangt dabei zu einem Resultate [(26), S. 498], das erwähnt zu werden verdient. Er findet nämlich unter der Voraussetzung, dafs $\varphi(\alpha + e^{-ix})$ nach Potenzen von e^{-ix} entwickelt werden kann, die Identität

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha + e^{-ix})\,dx = \varphi(\alpha),$$

also den folgenreichen Satz, den CAUCHY seinerseits 1840 entdeckt (37) und 1846 von der Integration über einen Kreis auf die Integration über eine beliebige geschlossene Kurve ausgedehnt hat (38). POISSON hat die prinzipielle Bedeutung jener Identität nicht erkannt; sie wird, um ein Wort GOETHES zu gebrauchen, „von der grenzenlosen Fülle seiner Formeln dünenartig zugedeckt".[1]) Indem hier ein ähnlicher Fall vorliegt, wie bei dem Satze aus der Mechanik, den man als POISSON-JACOBIsches Theorem zu bezeichnen pflegt, wird man einen tieferen Grund für solche Erscheinungen suchen. Er scheint uns darin zu liegen, dafs bei POISSON die Formeln selbst die Hauptsache sind, die durch Substituieren und Transformieren zu vervielfältigen er meisterhaft versteht, und dafs er darüber vergifst, dafs auch in der Mathematik die Formel am Ende nur Mittel zum Zweck sein darf.

7. Auch CAUCHY ist durch Untersuchungen aus der mathematischen Physik, und zwar aus der Hydrodynamik (29), veranlafst worden, sich mit der Theorie der bestimmten Integrale zu beschäftigen; seine erste Arbeit über diesen Gegenstand stammt aus dem Jahre 1814 (28). CAUCHYS Ausgangspunkt ist eine Methode zur Aufstellung von Relationen zwischen bestimmten Integralen, deren Keime sich bereits bei EULER finden[2]) und die LAPLACE seit 1782 (16), (18) und nach ihm POISSON und LEGENDRE mit Erfolg angewandt hatten. Sie beruht darauf, dafs bei manchen Doppelintegralen *mit konstanten Grenzen* die erste Integration sowohl nach der einen als nach der andern Veränderlichen in geschlossener Form ausgeführt werden kann und die beiden so entstehenden einfachen Integrale einander gleich gesetzt werden. CAUCHY fragt nun, unter welchen Bedingungen dieses Verfahren überhaupt anwendbar sei und wann es zu richtigen Re-

1) GOETHE, *Über Mathematik und deren Mifsbrauch.* GOETHES *Werke* (Berlin bei Hempel) Bd. 34, S. 130.

2) *De formulis integralibus duplicatis.* Novi Commentarii t. XIV [pro anno 1759] (Petropoli 1770); wieder abgedruckt: *Institutiones calculi integralis,* t. IV, S. 416—445.

sultaten führe. Die Antwort auf die erste Frage lautet im Wesentlichen folgendermaſsen. In irgend einer Funktion $f(z)$ setze man $z = x + iy$, wodurch sie in $M + iN$ übergehe. Dann bestehen die Identitäten

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y},$$

denen wir bereits bei Euler begegnet sind, und es haben daher die Doppelintegrale

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\iint \frac{\partial M}{\partial y}\, dx\, dy = -\iint \frac{\partial N}{\partial x}\, dx\, dy, \\ \displaystyle\iint \frac{\partial M}{\partial x}\, dx\, dy = \iint \frac{\partial N}{\partial y}\, dx\, dy \end{cases}$$

die verlangte Eigenschaft. Sollen zweitens die durch Ausführung je einer Integration links und rechts entstehenden Ausdrücke einander gleich sein, so darf der Integrand in dem gesamten Integrationsgebiet, das als Rechteck in der xy-Ebene aufgefaſst werden kann, niemals unbestimmt werden. Cauchy zeigt darauf, wie man in gewissen Fällen, in denen diese Bedingung nicht erfüllt ist, den Unterschied der beiden Integrale finden kann.[1]) Dabei bespricht er auch den Fall, daſs bei einem einfachen Integrale der Integrand an einer Stelle, etwa $x = \xi$, unendlich wird, und bezeichnet als *singuläres Integral* den Grenzwert des Ausdruckes

$$\int_a^{\xi-\varepsilon} \varphi(x)\, dx + \int_{\xi+\varepsilon'}^{b} \varphi(x)\, dx,$$

wenn die positiven Gröſsen ε und ε' gegen Null abnehmen; der Wert eines solchen Integrales hängt im allgemeinen davon ab, in welcher Weise dies geschieht. Solche singuläre Integrale spielen bei der Berechnung des Unterschiedes jener beiden Integrale eine wesentliche Rolle; sie sind die Vorläufer der *Residuen*, von denen sie verdrängt wurden.

In der Einleitung seiner Abhandlung berichtet Cauchy, daſs Euler und Laplace verschiedene Integrale durch den Übergang vom Reellen zum Imaginären gefunden hätten und verspricht, eine direkte und strenge Begründung zu geben. Er hat auch dem ersten Teile den Titel gegeben: Gleichungen, die den Übergang vom Reellen zum Imaginären begründen. Allein dieser Abschnitt enthält, wie schon Legendre als Berichterstatter der Akademie verwundert bemerkt, nichts, was sich direkt auf diesen Gegenstand bezieht, und erst die Noten, die Cauchy 1825 bei der Veröffentlichung der Abhandlung hinzugefügt hat, zeigen den Zusammenhang mit der Integration durch imaginäres Gebiet. Die beiden reellen Gleichungen

1) Vergleiche die ausführlichere Darstellung bei Brill, a. a. O. S. 167—169.

(A) lassen sich nämlich zu der einen Gleichung mit komplexen Veränderlichen zusammenfassen:

$$
\text{(B)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{y_0}^{Y} f(x_0 + iy)\, i\, dy + \int_{x_0}^{X} f(x + iY)\, dx \\ = & \int_{x_0}^{X} f(x + iy_0)\, dx + \int_{y_0}^{Y} f(X + iy)\, i\, dy, \end{aligned} \right.
$$

die in der modernen Ausdrucksweise besagt, dafs das Integral von $f(x+iy)$, erstreckt über das eine Paar anstofsender Seiten des Rechteckes, das oben als Integrationsgebiet bezeichnet wurde, denselben Wert hat, wie das über das andere Paar erstreckte Integral, vorausgesetzt, dafs $f(x+iy)$ im Innern und auf der Begrenzung keine Unbestimmtheitsstelle besitzt.

Genau diese Auffassung der Gleichung (B) findet sich in CAUCHYS Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen vom August 1825 (35), die die erste Periode seiner Untersuchungen abschliefst. Die Gleichung (B) selbst hatte er schon früher angegeben, nämlich in einer am 28. Oktober 1822 der Pariser Akademie vorgelegten Note (32) und nachher in seinen 1823 veröffentlichten Vorlesungen an der Polytechnischen Schule (34).[1] Es scheint, als ob CAUCHY damals die eigentliche Bedeutung der Gleichung (B) noch nicht erkannt hatte, denn in dem Berichte über seine Note im Bulletin de la Société philomatique wendet sich CAUCHY mit grofser Energie gegen die Idee POISSONS, Integrale über eine Reihe imaginärer Werte zu erstrecken. Welches Gewicht er auf diese Ausführungen legte, zeigt der Umstand, dafs er sie als Postskriptum einer bald darauf erschienenen Abhandlung über partielle Differentialgleichungen im Journal de l'École polytechnique (33) angehängt hat. Ein Integral zwischen reellen Grenzen, erklärt CAUCHY, müsse man immer als Summe der Werte des Differentials auffassen, die den *reellen* Werten der Veränderlichen zwischen den Grenzen entsprechen. Auf diese Weise erhalte man stets bei reellem Integranden reelle Integrale und dürfe bei komplexen Integranden Reelles und Imaginäres trennen. Das würde aufhören, wenn man das Integral als Differenz der extremen Werte der primitiven Funktion ansehen oder die Variable von der einen Grenze zur andern durch eine Reihe imaginärer (komplexer) Werte übergehen lassen wollte, denn auf diese Weise erhielte man, wie bei POISSON, für Integrale reeller Funktionen imaginäre Werte. Was dessen Beispiel

$$
\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2}\, dx
$$

1) Hiernach ist BRILLS Angabe (a. a. O. S. 167), dafs CAUCHY die Gleichung (B) erst 1825 aufgestellt habe, zu berichtigen.

betreffe, so könne es sich sehr gut ereignen, daſs zu einem Integrale mehrere primitive Funktionen gehören, z. B. sei die primitive Funktion von

$$\int \frac{dx}{x}$$

sowohl $\log x$ als auch $\frac{1}{2}\log(x^2)$, sodaſs bei den Grenzen -1 und $+2$ die Differenz der extremen Werte einmal den imaginären Wert $\log(-2)$ und dann den reellen Wert $\log(+2)$ habe.

Diese Ausführungen Cauchys beweisen aufs deutlichste, *daſs Poisson das Verdienst zukommt, zuerst Integrationen durch imaginäres Gebiet ausgeführt zu haben.* Hierdurch wird Cauchys Anspruch nicht berührt, er habe in seiner Abhandlung vom August 1825 zuerst „den Grad der Allgemeinheit festgestellt, den ein bestimmtes Integral zwischen imaginären Grenzen zuläſst, und die Zahl der Werte, die es annehmen kann" ((35), S. 2). Freilich überwog damals bei ihm das Interesse an den bestimmten Integralen, die sich mittelst Integrationen durch komplexes Gebiet auswerten lassen, und mit Recht hat Brill gegenüber den begeisterten Lobsprüchen Valsons bemerkt, Cauchy selbst scheine die Bedeutung seiner eigenen Schrift lange Zeit nicht gebührend gewürdigt zu haben, und erst durch spätere Anwendungen, zum Teil in den Händen andrer, sei sie in das richtige Licht gesetzt worden. Ein weiterer Beweis für diese Auffassung liegt darin, daſs Cauchy in einer Oktober 1825 bis Oktober 1826 in Gergonnes Annalen veröffentlichten Abhandlung (36) die in seiner Schrift vom August 1825 enthaltenen bestimmten Integrale unter Vermeidung der Integration durch imaginäres Gebiet mittelst der Methode der Doppelintegrale hergeleitet hat.

8. Cauchys Abhandlung vom August 1825 zeigt gegenüber seinem Standpunkte im Jahre 1822 den Fortschritt, daſs er die Gleichung (B) als Resultat von Integrationen über die Begrenzung eines Rechtecks auffaſst. Nachdem er zuerst rein analytisch vorgegangen ist, erklärt er in § 9 kurz und bündig, daſs man die Wertereihe, die eine komplexe Veränderliche $x + iy$ durchläuft, wenn $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gesetzt wird, durch die Punkte einer Kurve in der xy-Ebene darstellen könne, und macht von da ab von dieser geometrischen Darstellung beständig Gebrauch. In seinen vorhergehenden Arbeiten findet sich nirgends eine Spur davon; seine Beweisführung ist hier stets rein analytischer Natur.[1]) Das zeigt sich besonders bei seinem Beweise für die Existenz von Wurzeln algebraischer

1) Daſs dies für Cauchys *Cours d'Analyse* gilt, hat Brill (a. a. O. S. 163) betont, er hat es dagegen unterlassen, auf Cauchys spätere Stellung zu der geometrischen Repräsentation komplexer Gröſsen einzugehen.

Gleichungen aus dem Jahre 1820 (30), der auf demselben Prinzipe beruht, das ARGAND 1806 angewandt hatte.[1])

Wie ist CAUCHY zu jener geometrischen Darstellung gekommen? Mir scheint es sehr wohl möglich, dafs er sie selbständig gefunden hat, denn erstens giebt er keine Quelle an, während er sonst im Citieren sehr gewissenhaft ist, und zweitens lag es für ihn nahe, die Gröfsen x und y als Koordinaten eines Punktes in der Ebene zu deuten, da sie ja bei den Doppelintegralen diese Bedeutung bereits gehabt hatten. Im Grunde findet sich diese Deutung, was bis jetzt noch nicht hervorgehoben worden zu sein scheint, bereits bei D'ALEMBERT (9), der bemerkt, dafs man eine Gleichung $f(p+iq)=0$ stets durch reelle Werte von p und q erfüllen könne, denn auch wenn sich p und q nicht *analytisch* angeben lassen:

> «on pourra toujours avoir les quantités réelles p et q au moins «par une construction géométrique, puisqu'on a deux équations qui «renferment p et q».

Diese Äufserung läfst sich kaum anders deuten, als dafs aus $f(p+iq)=0$ durch Trennung des Reellen und Imaginären zwei Gleichungen in p und q folgen, die, indem p und q als Koordinaten eines Punktes in der Ebene aufgefafst werden, als Gleichungen von Kurven interpretiert werden können.[2])

Gegen CAUCHYS Selbständigkeit könnte man folgende Umstände anführen. In der Note I zu seinem *Cours d'Analyse* vom Jahre 1821 (31) sagt er, die Zeichen $+$ und $-$, die vor den Zahlen stehen, könne man nach einer Bemerkung, die darüber gemacht worden sei, mit den Adjektiven vergleichen, die neben ihren Substantiven stehen, und beruft sich dafür auf die Philosophical Transactions vom Jahre 1806. Diese enthalten aber eine Abhandlung von BUÉE, in der nicht nur die angegebene Auffassung des Positiven und Negativen entwickelt, sondern auch die Theorie der imaginären Gröfsen behandelt und das Zeichen $\sqrt{-1}$ als Symbol des Senkrechtstehens gedeutet wird.[3]) Ferner hat CAUCHY

---

1) *Essai d'une manière de représenter les quantités imaginaires* (Paris 1806). Zweite Ausgabe (Paris 1874), S. 58—59; vergl. auch S. 118—122.

2) Dafs auch EULER eine allerdings unfruchtbare Konstruktion der imaginären Gröfsen versucht hat, zeigt seine Abhandlung: *Theoremata quaedam analytica, quorum demonstratio adhuc desideratur* (*Opuscula analytica*, t. II [Petersburg 1785], S. 80).

3) Auf dieses Citat CAUCHYS hat HAMILTON in einem Briefe an DE MORGAN vom 13. Jan. 1852 aufmerksam gemacht (R. P. GRAVES, *Life of Sir William Rowan Hamilton*, Vol. III, S. 317. Dublin and London 1889). In einem Briefe vom 14. Dez. 1857 (a. a. O. S. 535) behauptet HAMILTON sogar, er sei überzeugt, dafs CAUCHY im Jahre 1821 ARGANDS Schriften gekannt habe. Es sei *half-confession*, wenn CAUCHY sage, in der Gleichung

$$\alpha + i\beta = \varrho e^{i\vartheta}$$

selbst im Jahre 1847 die Frage der geometrischen Darstellung komplexer Gröfsen behandelt (39). Er führt hier die Arbeiten von Buée, Argand, François, Faure, Mourey, Vallès an und erklärt, einen grofsen Teil der Ergebnisse dieser Untersuchungen habe bereits im Jahre 1786 ein bescheidener Gelehrter, Henri-Dominique Truel, besessen, der sie im Jahre 1810 dem Schiffskonstrukteur Augustin Normand in Havre mitteilte. Leider sagt Cauchy nicht, wann ihm Normand von Truels Entdeckungen berichtet habe, ob etwa in der Zeit von 1810 bis 1813, während der Cauchy in Cherbourg als Ingenieur thätig war. Unerklärt bliebe jedoch in diesem Falle, warum er erst seit 1825 von der geometrischen Darstellung Gebrauch gemacht hat, sodafs gegenwärtig kein abschliefsendes Urteil möglich ist.

Litteraturnachweis.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716).

(1) *Virorum celeberrimorum* G. Leibnitii *et* Joh. Bernoulli *Commercium philosophicum et mathematicum*. Vol. II (Lausannae 1745), S. 79—82.

(2) *Specimen novum analyseos pro scientia infiniti circa summas et quadraturas.* Acta Eruditorum (Leipzig), Mai 1702, S. 210—219. Wieder abgedruckt: Leibnizens *Mathematische Schriften, herausgegeben von* C. J. Gerhardt. Bd. **5** (Halle 1858), S. 350—361.

(3) *Continuatio analyseos quadraturarum rationalium edi captae in his Actis M. Majo 1702.* Acta Eruditorum, Januar 1703, S. 19—26. Wieder abgedruckt a. a. O. S. 361—366.

Johann Bernoulli (1667—1748).

(4) Brief an Leibniz vom 10. Juni 1702. Leibnizens *Mathematische Schriften, herausgegeben von* C. J. Gerhardt. Bd. **3** (Halle 1856), S. 697—702. Als Auszug aus diesem Briefe findet sich die *Nachschrift* auch in lateinischer Übersetzung im *Commercium* (S. 79).

(5) *Problema exhibitum a Jo. Bernoulli.* Acta Eruditorum, Januar 1703, S. 26—31.

(6) *Solution d'un problème concernant le calcul intégral.* Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1702 (Paris 1704), S. 289—297. Wieder abgedruckt: *Opera omnia,* t. I (Lausannae et Genevae 1742), S. 393—400.

(7) *Angulorum arcuumque sectio indefinita.* Acta Eruditorum, Juni 1712, S. 274—277. Wieder abgedruckt: *Opera omnia,* t. I (Lausannae et Genevae 1742), S. 511—514.

Jean le Rond d'Alembert (1717—1783).

(8) *Réflexions sur la cause générale des vents.* Prix de Berlin pour l'année 1746 (Paris 1747). Art. 79, S. 141—143.

---

sei ϱ: *ce qu'on appelle le module* ((31) Wiederabdruck S. 160), dagegen $e^{i\vartheta}$: *ce que nous nommerons l'expression réduite,* während in der That Argand das Wort „module", aber nicht das Wort „l'expression réduite" gebrauche. Mit Recht erwidert de Morgan darauf (S. 539), er halte Cauchy für einen Ehrenmann, und man dürfe aus so gebrechlichen Indicien nicht auf ein Plagiat schliefsen.

(9) *Recherches sur le calcul intégral.* Première partie: De l'intégration des fractions rationelles. Mémoires de l'Académie. Année 1746 (Berlin 1748), S. 182—200.

Leonhard Euler (1707—1783).

(10) *De integrationibus maxime memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis.* Conv. exhib. die 20. Mart. 1777. Nova Acta Petrop. t. VII [ad annum 1789] (Petropoli 1793), S. 99—133.

(11) *Supplementum ad dissertationem praecedentem circa integrationem formulae*

$$\int \frac{z^{m-1}\,dz}{1-z^n},$$

ebendaselbst, S. 134—148.

(12) *Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis.* Conv. exhib. die 21. Mart. 1777. Nova Acta Petrop., t. X [ad annum 1792] (Petropoli 1797), S. 3—19.

(13) *De integrationibus difficillimis quarum integralia tamen aliunde exhiberi possunt.* Conv. exhib. die 21. Mart. 1777. Nova Acta Petrop., t. XIV [ad annum 1798] (Petropoli 1805), S. 62—74.

(14) *De insigni usu calculi imaginariorum in analysi.* Conv. exhib. die 3. Nov. 1777. Nova Acta Petrop., t. XII [ad annum 1794] (Petropoli 1801), S. 3—21.

(15) *De valoribus integralium a terminis variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum.* Acad. exhib. die 30. April 1781. *Institutiones calculi integralis,* t. IV, supplementum V, no. 4. Petropoli 1794 (Editio tertia, Petropoli 1845, S. 337—345).

Pierre Simon Laplace (1749—1827).

(16) *Sur l'approximation des formules qui sont fonctions de très-grands nombres.* Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1782 (Paris 1785), S. 1—88.

(17) *Sur l'approximation des formules qui sont fonctions de très-grands nombres et sur leur application aux probabilités.* Lu le 9 avril 1810. Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France, t. X [année 1809] (Paris 1810), S. 353—415, 559—565.

(18) *Mémoire sur les intégrales définies, et leur application aux probabilités.* Ebendaselbst, t. XI [Première partie de l'Année 1810] (Paris 1811), S. 279—347.

(19) *Théorie analytique des probabilités.* Partie I, Chap. II und III. Additions II und III. Paris 1812.

Carl Friedrich Gauss (1777—1855).

(20) Brief an Bessel, Göttingen, den 18. Dezember 1811. *Briefwechsel zwischen* Gauss *und* Bessel (Leipzig 1880), S. 155—160. Wieder abgedruckt: C. F. Gauss' *Werke,* Bd. VIII, S. 90—92.

(21) *Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia.* Commentationes Societatis regiae Scientiarum recentiores. Vol. III [ad annum 1814—1815] (Göttingen 1816). Comment. classis math. S. 135—142. Wieder abgedruckt: C. F. Gauss' *Werke,* Bd. III, S. 57—64.

Siméon Denis Poisson (1781—1840).

(22) *Mémoire sur les intégrales définies.* Journal de l'École polytechnique, Cahier **16** (Paris, Mai 1813), S. 215—246.

(23) *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs.* Seconde partie. Digression sur les intégrales définies et sur la sommation de

quelques séries. Lu le 6 sept. 1813. Mémoires de la classe des sciences mathematiques et physiques de l'Institut de France. Année 1811. Seconde partie (Paris 1814), S. 212—230.

(24) *Suite du mémoire sur les intégrales définies.* Journal de l'École polytechnique, Cahier **17** (Paris, Janvier 1815), S. 612—631.

(25) *Suite du mémoire sur les intégrales définies.* Sur les intégrales des fonctions qui passent par l'infini entre les limites de l'intégration, et sur l'usage des imaginaires dans la détermination des intégrales définies. Ebendaselbst, Cahier **18** (Paris, Janvier 1820), S. 295—341.

(26) *Suite du mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries.* Ebendaselbst, Cahier **19** (Paris, Juillet 1823), S. 404—509.

(27) *Suite du mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries.* Ebendaselbst, Cahier **20** (Paris, Février 1831), S. 222—248.

Augustin Louis Cauchy (1789—1857).

(28) *Mémoire sur les intégrales définies.* Mémoires présentés par divers savants [lu à l'Institut le 22 août 1814, remis au sécretariat pour être imprimé le 14 sept. 1825]. Sciences mathématiques et physiques. Seconde série, t. I (Paris 1827), S. 599—799. Wieder abgedruckt in den *Oeuvres complètes* I^e^ série, t. I, S. 319—506.

(29) *Théorie de la propagation des ondes.* Concours de 1815. Mém. prés. t. I (Paris 1827), S. 3—312. Wieder abgedruckt in den *Oeuvres complètes* I^e^ série, t. I, S. 1—318.

(30) *Sur les racines imaginaires des équations.* Journal de l'École polytechnique, Cahier **18** (Paris, Janvier 1820), S. 411—416.

(31) *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique* (Paris 1821). Wieder abgedruckt in den *Oeuvres complètes* II^e^ série, t. III, S. 1—476.

(32) *Sur les intégrales définies où l'on fixe le nombre et la nature des constantes arbitraires* (extrait d'un mémoire lu le 28 oct. 1822). Bulletin des Sciences par la Société philomatique de Paris, Année 1822, S. 161—174.

(33) *Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficiens constans.* Observations générales et additions. Journal de l'École polytechnique, Cahier **19** (Paris, Juillet 1823), S. 571—589.

(34) *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique* (Paris 1823). Wieder abgedruckt in den *Oeuvres complètes* II^e^ série, t. IV, S. 5—261.

(35) *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires* (Paris, Août 1825). 68 S. 4°.

(36) *Mémoire sur les intégrales définies où l'on donne une formule générale de laquelle se déduisent les valeurs de la plupart des intégrales définies déjà connues et celles d'un grand nombre d'autres.* Annales de mathématiques pures et appliquées publiées par Gergonne, t. XVI (Nismes, Oct. 1825), S. 97—108; t. XVII (Nismes, Sept. et Oct. 1826), S. 84—109.

(37) *Considérations nouvelles sur la théorie des suites.* Exercises d'Analyse et de Physique mathématique, t. I (Paris 1840), S. 269—287.

(38) *Considérations nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée, et sur celles qui sont prises entre des limites imaginaires.* Comptes Rendus de l'acad. d. sc. **23** (Paris 1846), S. 689.

(39) *Mémoire sur les quantités géométriques.* Exercises d'Analyse et de Physique mathématique, t. IV (Paris 1847), S. 157—180.

Nachtrag.

Nach Vollendung des Drucks dieser Abhandlung habe ich aus Revue semestrielle des publications mathématiques 8:1 (1899, à Octobre, Amsterdam 1900, S. 151) ersehen, dafs Herr I. Timtschi in der Abhandlung: Основанія теоріи аналитическихъ функцій *(Grund der Theorie der analytischen Functionen)*, die in den Записки мат тическаго отдѣленія новороссійскаго общества естествои тателей (Abhandlungen der mathematischen Abteilung neurussischen Gesellschaft der Naturforscher) **19**, Odessa 189 schienen ist, die Arbeiten von Euler, Laplace, Poisson und Ca über Integration durch imaginäres Gebiet behandelt hat. Der Freund keit von Herrn G. Eneström verdanke ich es, dafs ich die Abhand selbst einsehen konnte, in der sich bereits ein erheblicher Teil m Ergebnisse findet. Im besonderen ist die Bedeutung der Untersuchu Eulers und Poissons von Herrn Timtschenko im Wesentlichen ri erkannt und dargestellt worden, sodafs ihm in dieser Hinsicht, wi gern konstatiere, die Priorität zukommt.

Kiel, den 10. März 1900.

P. Stäckel.

Zur Biographie von Jacob Steiner.

Von

Emil Lampe in Berlin.

Die Person des grofsen Geometers JACOB STEINER erregte schon zu seinen Lebzeiten ein Interesse, das weit über die engen Kreise der Mathematiker oder der Lehrer an den Universitäten hinausging. Abweichend von dem gewöhnlichen Bildungsgange der Professoren an den Hochschulen, hatte er sich ohne den üblichen vorbereitenden Schulunterricht vom schweizerischen Hirtenknaben aus bäuerlichem Hause durch eigene zielbewufste Energie zu dem wegen der Genialität seiner wissenschaftlichen Leistungen bewunderten und angestaunten Berliner Akademiker durchgearbeitet. In den Gesellschaften der schöngeistigen Zirkel Berlins, in denen er sich der gebotenen Genüsse behaglich erfreute, und wo die Originalität seines Wesens zur Würze der Zusammenkünfte beitrug, fiel er durch die Ungebundenheit seiner Äufserungen über die politischen, sozialen und künstlerischen Zustände auf. Beim Champagner sprühte er von genialen Einfällen und belebte die Gesellschaft. In seinen späteren Lebensjahren zerfiel er jedoch mit den Kreisen, die ihm so bereitwillig geöffnet worden waren; er vereinsamte, zog sich während der Ferien und des oft genommenen Urlaubes in sein schweizerisches Geburtsland zurück, ohne aber auch dort Freunde dauernd an sich zu fesseln, und schied zuletzt unter menschenfeindlicher Abwendung von allem Verkehr, von seinen Landsleuten kaum beachtet, einsam aus dem Leben. Da zu jener Zeit in den mathematischen Kreisen der Sinn für historische Darstellungen wenig rege war, so erschienen nur spärlich kurze Nachrufe für den Entschlafenen. Erst zehn Jahre nach seinem Tode veröffentlichte sein Grofsneffe GEISER den bekannten würdevollen, warmen und wahrheitsgetreuen Nachruf: *Zur Erinnerung an JACOB STEINER*, und jüngst (1897) hat J. H. GRAF seine zusammenfassende Schrift: *Der Mathematiker JACOB STEINER von Utzensdorf* erscheinen lassen.

Bei der Anzeige des letzterwähnten Büchleins in der Naturw. Rundschau (Bd. XIII, S. 141—142, 1898) sprach ich die Überzeugung aus, dafs damit erst der Anfang zu einer Biographie Steiners gemacht sei, und dafs der Biograph seine Hauptquellen naturgemäfs in Berlin suchen müsse, wo Steiner sich zu seiner wissenschaftlichen Höhe durchgerungen hat. Aus sicherster Quelle wufste ich nämlich schon lange, dafs unter anderen in den Akten der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule zu Berlin wichtige und interessante Aufschlüsse über die Periode der Lehrerthätigkeit Steiners an dieser Schule (1825—1834) zu finden waren. Auf diesen Umstand hingewiesen, machte sich Julius Lange, der als mathematischer Lehrer derselben Schule gewissermafsen als Nachfolger Steiners betrachtet werden konnte, an die Durchforschung des hier verborgen ruhenden Materials und beschenkte die mathematische Welt in seiner Schrift: *Jacob Steiners Lebensjahre in Berlin 1821—1863, nach seinen Personalakten dargestellt* (Sonderabdruck der Festschrift zur Erinnerung an das 75jährige Bestehen der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule. Berlin, Gaertner 1899. 70 S. 4° + Porträt) mit dem Abdrucke der bedeutendsten auf Steiner bezüglichen Schriftstücke, nicht blofs aus den Aktenschränken der genannten Schule, sondern auch aus den Archiven der Stadt Berlin, des Schulkollegiums der Provinz Brandenburg, des Unterrichtsministeriums und der Akademie der Wissenschaften. Aus diesen mit grofser Findigkeit und Beharrlichkeit aufgespürten Dokumenten und aus den sonstigen Ermittelungen werden dann am Schlusse die als gesichert anzusehenden Ergebnisse in betreff des Lebensganges Steiners zusammengestellt.

Damit ist in erfreulicher Weise eine feste Grundlage für eine Lebensgeschichte Steiners gewonnen; manchen Legenden, die sich um die ganz aufsergewöhnliche, fast sagenhafte Gestalt des grofsen Berliner Geometers emporgerankt hatten, sind endgültig zerstört worden, und nichts desto weniger verliert dieser naturwüchsige Recke der Geometrie des neunzehnten Jahrhunderts nichts von seiner Gröfse, die ihm allgemein zuerkannt wird; im Gegenteil, wir erkennen deutlicher als früher die Ursprünglichkeit seiner ihm ureignen Natur, aus der alle seine Entdeckungen mit der Gewalt eines Alpenstromes flossen. Als ziemlich unwissender Jüngling zog Jacob Steiner in die Hauptstadt Preufsens ein: von keiner fremden Sprache wufste er etwas; beim Reden bediente er sich des schweizerischen Dialektes in so schwer verständlicher Weise für einen Deutschen, dafs ein Schüler ihn für einen Franzosen hielt, der schlecht deutsch spräche, und ihn bat, lieber französisch zu docieren, was ja unmöglich war. Philosophische Schulung war ihm fremd trotz eines Aufenthaltes von zwei und einem halben Jahre auf der Universität Heidelberg. Auch von der Mathematik hatte er sich während seiner dortigen Studien nur geringe Kenntnisse erworben: nichts von der Infinitesimalrechnung, nichts von Zahlentheorie und Algebra, wo seine Kenntnisse an der Lehre von den quadratischen

Gleichungen ihre Grenze fanden. Einzig eine klare geometrische Anschauung, die ihn befähigte, die von ihm bewältigten Gebilde der Elementargeometrie zu beherrschen und sie nach ursprünglichen Methoden in souveräner Art systematisch zu verknüpfen.

Fünf Jahre später trat Steiner als einer der eifrigsten und fruchtbarsten Mitarbeiter an dem von Crelle gegründeten Journale für die reine und angewandte Mathematik auf. Um genauer zu begreifen, wie diese Entwickelung stattgefunden hat, müfsten wir noch nähere Einblicke in die Arbeiten Steiners aus jener Zeit erhalten: einerseits die Daten der Entstehung seiner Schriften aus dieser Periode; vielleicht ist in dieser Hinsicht einiges aus den von Steiner nachgelassenen und erst neuerdings wieder aufgefundenen Papieren zu ersehen, von denen bis jetzt noch nichts publiziert worden ist. Andererseits bedürfte man näherer Aufklärungen aus dem Kreise der Mathematiker, die in den zwanziger Jahren des abgelaufenen Jahrhunderts in Berlin zusammenkamen. Über die zeitweilig getrübten Beziehungen Steiners zu Crelle, der nach den von Herrn Lange mitgeteilten gutachtlichen Äufserungen ein uneigennütziger und wohlwollender Freund des von ihm hochgeschätzten jungen Schweizers war, bleibt noch manches festzustellen, und es wäre vielleicht Aufschlufs zu erwarten, wenn Crelle hierüber Aufzeichnungen hinterlassen hätte.

Das Verhältnis Steiners zu Jacobi, das offenbar sehr intim gewesen ist, würde in ein helleres Licht gerückt werden, wenn aus dem Briefwechsel beider etwas aufgefunden würde. Ebenso ist der unzweifelhafte Einflufs Dirichlets, der 1828 dauernd nach Berlin kam, noch klarzustellen; endlich der von Abel, dessen häufige Begegnung mit Steiner bekannt ist. Leider mufs man befürchten, dafs das nötige Quellenmaterial nach dieser Richtung hin zum gröfseren Teile schon vernichtet ist; um so wünschenswerter wäre es, die noch vorhandenen Beweisstücke durch den Abdruck vor endgültiger Zerstörung zu retten.

Jedenfalls verdient Hr. Lange Dank dafür, dafs er durch seine Schrift das von ihm aufgefundene reiche Material zur allgemeinen Einsichtsnahme offen gelegt hat. Die Gestalt Steiners tritt vermöge dieser Urkunden aus dem sie umgebenden Nebel deutlicher für die Nachwelt hervor, und man erkennt, dafs die Schwächen des Menschen Steiner es gewesen sind, die den gewaltigen Mathematiker eines Biographen beraubt haben, obschon seine Schicksale und seine Leistungen zu einer Schilderung seines Lebens gerade hätten anreizen müssen. Jetzt, wo wir aus gröfserem zeitlichen Abstande von ihm die ragende Höhe seines Genius daran ermessen, wie klein andere Geometer neben ihm erscheinen, kommen wir dazu, seine menschlichen Schwächen zu erklären, zu begreifen und zu übersehen. Wir dürfen aber auch angesichts der gegenwärtigen Dokumente den Vorwurf zurückweisen, dafs man in Berlin STEINER in seiner geometrischen Gröfse nicht gebührend anerkannt und ihn nicht in eine ihm zukommende Stellung des preufsischen Staates befördert habe. Trotz sehr mäfsiger Leistungen in den vorgeschriebenen Prüfungen und trotz einer ungemein beschränkten Brauchbarkeit erhielt er eine feste Anstellung, wie wenn er allen Vorschriften genügt hätte. Später erlangte er, obwohl er keine fremde Sprache beherrschte, die Stelle eines Professor extraordinarius an der Berliner Universität, und zwar zu einer Zeit, wo die offizielle Sprache der Universitätsschriften die lateinische war, der *ordentliche* Professor also die einlaufenden, in lateinischer Sprache abgefafsten Dissertationen und Preisarbeiten lesen und beurteilen mufste. Als Mitglied der Akademie der Wissenschaften, zu dem er gleichzeitig ernannt wurde, stand er ohnehin mindestens in gleichem Range mit den ordentlichen Professoren der Universität, und seine Einkünfte waren schliefslich derartig, dafs er bei seinem Tode seinen Verwandten mehr als 60000 Franken hinterlassen konnte und aufserdem der Berliner Akademie etwa den dritten Teil jener Summe im Betrage von 8000 Thalern zu der seinen Namen tragenden Preisstiftung überwies; die Ansammlung eines Vermögens von etwa 90000 Franken ist zwar nach den heutigen Vorstellungen keine staunenswerte Leistung, wohl aber für jene Zeit, in welcher der Wert des Geldes höher zu bemessen ist. Jedenfalls beweist dieser Umstand, dafs auch die Besoldung STEINERS keineswegs eine dürftige gewesen ist. Noch einen Umstand wollen wir hier erwähnen, der die eigenartige Stellung STEINERS an der Universität zu erklären geeignet ist. Wie er als Forscher sich seine geometrische Welt selbst erschuf, ohne in den Werken früherer Mathematiker zu studieren, oder etwas anderes zu suchen als eine Anregung zu seinen Arbeiten, so trug er als Lehrer der Mathematik von Anfang an nur das vor, was er selbst durch seine Untersuchungen gefunden hatte. Wenn dies ein nicht hoch genug einzuschätzender Gewinn für diejenigen war, die zur wissenschaftlichen Forschung angeleitet werden wollten, so ist andererseits zu beachten, dafs der Student, der sich auf die Vorlesungen von STEINER beschränkt hätte, ein STEINER hätte sein müssen, um nur die Geometrie übersehen zu können.

Da ich noch die beiden letzten von STEINER in den Wintern 1860/61 und 1861/62 gehaltenen Vorlesungen gehört habe, so erlaube ich mir zu dem Charakterbilde des von mir aufs höchste verehrten Lehrers einige Züge hinzuzufügen, die mir aus jener Zeit im Gedächtnisse haften geblieben sind. Noch giebt es ja eine Reihe von Schülern STEINERS, die das Andenken an seine eigenartige Natur, an sein Auftreten in den Vorlesungen bewahren. Da es aber nicht mehr lange währen wird, bis auch diese Quelle für die Geschichtsschreibung über den einzigen Mann versiegt, so dürfte es geboten sein, jetzt alle solche Erinnerungen zu sammeln.

Obgleich diese letzten Vorlesungen Steiners wegen der durch körperliche Leiden geschwächten Kräfte des Meisters nicht mehr auf der Höhe der früheren Kollegien standen, übten sie doch durch die halb seminaristische Art der Behandlung einen zauberhaften Reiz auf uns Studenten aus. Steiner beabsichtigte gar nicht, etwas Fertiges vorzutragen, sondern verlangte stetiges Mitarbeiten der Zuhörer; er richtete Fragen an sie, gab ihnen Sätze zu beweisen und verlangte die Ausführung von Konstruktionen. Die Vortragsstunden lagen Dienstags und Freitags von 2 bis 4 Uhr nachmittags, die „geometrischen Übungen“ Mittwochs nachmittags um 4 Uhr, und für diese Tage hatte man tüchtig zu arbeiten. Aus dem Schulunterrichte an der Gewerbeschule kannte Steiner genau den Gesichtsausdruck der Schüler bei mangelndem Verständnisse; in gleicher Weise beurteilte er später die Aufnahmefähigkeit der studierenden Jugend an ihren Mienen und kanzelte sie oft genug wegen ihres Stumpfsinnes und Mangels an Freude über das Dargebotene ab. Kaum je war er zufriedenzustellen. Brachte niemand etwas bei, so wurde die Faulheit und Dickhäutigkeit ausgescholten. Hatte aber jemand glücklich etwas gefunden, so wurde zunächst von dem unerbittlichen Kritiker jeder Ausdruck bemäkelt, die Sache selbst logisch aufs schärfste zergliedert, der Ursprung der richtigen Lösung beargwöhnt. „Wo haben Sie das Staatsgeheimnis gestohlen?“ Diese Frage mufste der fleifsige und erfolgreiche Student oft genug hören, so schon früher Schroeter, einer der aufrichtigsten Bewunderer Steiners, der spätere Herausgeber der Vorlesungen über die projektivische Erzeugung der Kegelschnitte. Natürlich wurde durch diese Manieren mancher empfindliche Student vom Besuche des Kollegs zurückgeschreckt. Diejenigen aber, welche die rauhe Schale nicht beachteten, in der die goldenen Früchte gereicht wurden, hatten in den Steinerschen Vorlesungen den höchsten Genufs fortwährender geistiger Anregung zu selbständigem Arbeiten, spürten allstündlich, wie sehr sie in der geometrischen Erkenntnis gefördert wurden.

Im Herbste 1861 kam Steiner nach seinem Sommerurlaub zurück, ohne den Beginn seiner Vorlesungen anzuzeigen; da er auf der Universität seine Wohnung nicht gemeldet hatte, so verweigerte die Quästur die Annahme des Honorars für das Steinersche Kolleg, bis diese Formalität erledigt wäre. Fest entschlossen, Steiner zur rechtzeitigen Abhaltung der Vorlesung zu bringen, gingen daher zwei aus unserem Kreise, der sich schon ein Jahr früher um den verehrten Lehrer gesammelt hatte, auf das Einwohnermeldeamt, erkundeten dort die Adresse und machten dann ihren Besuch bei ihm, Zimmerstrafse 79, im Hause der bekannten

Weifsbierstube von Clausing. Zunächst hatte der alte kränkliche Herr wenig Neigung, das Kolleg zu halten; als ihm aber gesagt wurde, dafs etwa ein Dutzend Studenten sich das Wort gegeben hätten, bei ihm auszuhalten, erklärte er sich bereit und sandte den Anschlag an die Universität.

Von höchster Bedeutung war das stete Drängen Steiners, den Gegenstand nicht mechanisch durch das Gedächtnis sich einzuprägen, sondern in bewufster Arbeit neu zu erzeugen. Das Rechnen verwöhne den Schüler dazu, die Arbeit des Denkens der Formel zu überlassen, die das auch geduldig übernehme; in der Geometrie gehe das nicht, hier müsse man sich bei jedem Schritte etwas denken. Die blofse Zurückführung einer Konstruktion auf andere schon bekannte nannte er Zungenkonstruktionen; er verlangte die endliche Durchführung mit Hülfe der einfachsten Mittel ohne unnütze Bepackung der wörtlichen Beschreibung und der Ausführung durch Zuthaten, die sich vermeiden lassen. Die schöpferische Phantasie, die unmittelbare geometrische Anschauung pries er als die Quelle seiner Entdeckungen. Die Analysis hätte manches nachträglich bewiesen, was er gefunden hätte; allein obwohl die Analytiker schon vorher die betreffenden Formeln besafsen, hätten sie die Resultate doch erst herausgelesen, nachdem er sie ausgesprochen hätte. So seien die Sätze über den Krümmungsschwerpunkt analytisch bewiesen worden, nachdem seine Abhandlung darüber erschienen war.

Trotzdem verkannte Steiner die Macht der Analysis durchaus nicht, wie grimmig er auch oft genug gegen sie polterte, vielleicht weil er sie so wenig beherrschte. Einen jungen Studenten, der in Nachahmung des grofsen Geometers sich nur mit synthetischer Geometrie beschäftigen wollte, zankte er deswegen tüchtig aus; es solle nicht jeder meinen, es ihm gleich thun zu können, oder mit einer Lieblingswendung: es werden nicht alle, die zu mir Herr, Herr sagen, ins Himmelreich kommen. Pflicht des Studenten sei es, etwas Ordentliches zu lernen; besonders riet er das Studium der Zahlentheorie an, die zur Schärfung des Geistes vornehmlich geeignet sei. Für Dirichlet, ihren genialen Vertreter an der Berliner Universität, dessen feiner weltmännischer Umgangston einen gesellschaftlichen Bruch verhinderte, hatte Steiner eine grofse Verehrung, wenn er ihn auch in seinen Briefen an Schläfli nach seiner spöttischen Art als Marquis bezeichnete. Bei der Durchnahme der isoperimetrischen Probleme in den Übungen zur Geometrie machte Steiner zu dem Beweise des Fundamentalsatzes (dafs diejenige Kurve, welche bei gegebenem Umfange den gröfsten Inhalt umschliefst, der Kreis ist) die Bemerkung, dafs Dirichlet gegen seinen Beweis den Einwand erhoben hätte, wegen der unendlichen Menge von möglichen Kurven könne eine asymptotische Annäherung stattfinden, und es stehe somit die Existenz eines Maximums in Frage.

Bei einer anderen Gelegenheit (Naturwissenschaftliche Rundschau XII, p. 15, 1897) ist berichtet worden, wie ich in dem letzten Winter, den STEINER in Berlin zubrachte, zuweilen die Gelegenheit hatte, mit ihm gelegentlich in einem Restaurant eine Viertelstunde zu plaudern und dabei sowohl sein Talent zur Unterhaltung zu bewundern, als auch Einblicke in sein verborgen gehaltenes tieferes Seelenleben zu thun. Da diese Gespräche vor den Übungsstunden der akademischen Liedertafel stattfanden, so lenkte STEINER selbst einmal die Rede auf die Kunst im allgemeinen, die Musik im besonderen und erzählte dabei einen Vorgang aus der Zeit seiner Ankunft in Berlin, durch den die Macht des Gesanges beleuchtet würde. Im Jahre 1821 war der Freischütz von CARL MARIA VON WEBER zuerst in Berlin aufgeführt worden unter dem jubelnden Beifalle der ganzen Einwohner der preufsischen Hauptstadt. Wo man nur auf der Strafse ging, hörte man die Weisen der romantischen Oper singen und spielen. Das volkstümliche Lied vom Jungfernkranze wurde von den Strafsenjungen zu den Klängen der Drehorgel überall gesungen und füllte das Ohr bis zum Überdrufs. Durch all diesen musikalischen Jubel wanderte der jüngst erst aus Heidelberg nach Berlin übergesiedelte junge Schweizer nach seiner Wohnung, von schweren Sorgen um die Zukunft bedrückt und daher von der allgemeinen Fröhlichkeit angewidert; noch wufste er ja nicht, ob diese Übersiedelung zu seinem Heile ausschlagen, ob er an dem neuen Wohnort unter fremden Menschen seinen Lebensunterhalt gewinnen würde. Einsam lehnte er sich an sein Fenster mit bekümmertem Herzen; da wechselte die Drehorgel das Lied: nach dem Weberschen Jungfernkranze begann sie die Weise des Liedes vom Peter in der Fremde und bewirkte, was die herrliche Musik der neuen Oper nicht vermocht hatte: dem sich vereinsamt fühlenden JACOB STEINER gingen die Augen über, und der Thränenstrom machte dem drückenden Kummer der Brust freie Luft.

Als eifriger Besucher des Theaters hatte STEINER, wie er weiter erzählte, die Bekanntschaft von DEVRIENT gemacht und fragte ihn bei einer Zusammenkunft, wo derselbe die Studien zum Shylock gemacht hätte, den er mit überzeugenden Zügen echter Naturwahrheit ausstattete, unter anderem beim Wetzen des Messers an der Sohle zum Ausschneiden des Pfundes Fleisch. Das sei in den Fleischbuden auf dem Wochenmarkte um das Schauspielhaus regelmäfsig zu beobachten, belehrte der berühmte Schauspieler den neugierigen Frager. STEINER selbst hat, wie er ein anderes Mal im Kolleg erzählte, den Wochenmarkt zu seinen Studien benutzt. Als er nämlich in Verallgemeinerung der Fadenkonstruktion für die Ellipse nach dem analogen Verfahren die cartesischen Ovale zeichnete und ihre Eigenschaften feststellte, wollte er ermitteln, ob die von ihm hergestellten Zeichnungen auch wirkliche Eilinien wären, d. h. mit den Längsschnitten in der Symmetrieaxe der Vogeleier übereinstimmten. Deshalb kaufte er selbst auf dem Markte Eier von möglichst verschiedenen Formen und bildete, wie er mit grofser Genugthuung erzählte, in seiner Behausung mit Hülfe weniger Handgriffe in seinen Fadenkonstruktionen alle Eilinien der Natur sehr getreu als cartesische Ovale nach.

Bequem, wie der alternde Geometer war, und unbeholfen in der Abfassung von Schriftstücken, entzog er sich gern den kleinen amtlichen Geschäften. Mehrere von uns mufsten zum Zwecke der Erlangung oder des weiteren Bezuges von Benefizien Dekanatszeugnisse beschaffen, die auf Grund einer von einem Professor angestellten Prüfung über den erfolgreichen Besuch der Vorlesung des Professors ausgefertigt werden. Da Steiner seine Zuhörer ziemlich genau kannte, so bedurfte es im Grunde keiner Prüfung bei ihm. Um ihm nun aber auch die unangenehme Mühe des Schreibens zu ersparen, war einer von uns auf einen Ausweg verfallen, dessen die anderen, welche in gleicher Lage waren, sich dann mit Vergnügen bedienten. Wir schrieben uns nämlich selbst das Zeugnis, indem wir uns nur das Notwendigste aus den zu erfüllenden Bedingungen bescheinigten. Dieses Schriftstück legten wir ihm in seiner Wohnung zur Unterschrift vor. Nun galt es, den alten Herrn, der unseren Kniff sehr wohl durchschaute, dahin zu bringen, seinen Namen unter die vorgelegten Zeilen zu setzen. Ehe er das that, hielt er uns eine derbe Strafrede über die Unverschämtheit einer solchen Zumutung, über unsere Faulheit während des Semesters, über die Geringfügigkeit unseres Wissens, über die Bedrängnis, in die wir sein Gewissen brächten; zuletzt aber, wenn alles, was ihn bewegte, herausgesprudelt war, wobei er listig mit halb zugekniffenen Augen uns anschaute, drückte man ihm die Feder in die Hand, und er unterzeichnete, um den lästigen Dränger los zu werden.

Ungeachtet der körperlichen Beschwerden, unter denen er damals zu leiden hatte, und die unter anderem in lästigen Verdauungsschmerzen bestanden, gab er Beispiele scharfer Beobachtung. So erkundigte er sich bei mir einst sehr genau nach dem leider so früh (1866) verstorbenen Theodor Berner, wohl dem Talentvollsten aus unserem damaligen Freundeskreise, welchem allein er geometrische Begabung zusprach. — In einer Vortragsstunde hatte Steiner die folgenden beiden Aufgaben gestellt: a) In einer Ebene liegen zwei projektivische Strahlenbüschel; man dreht sie so, dafs in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte stets zwei entsprechende Strahlen vereinigt sind. Welche Kurve umhüllt der perspektivische Durchschnitt beider Büschel? b) In einer Ebene liegen zwei projektivische Geraden; man verschiebt jede in sich so, dafs in dem Durchschnitte beider stets zwei entsprechende Punkte vereinigt liegen. Welche

Kurve ist der Ort des Perspektivitätscentrums? — Ich hatte diese Aufgaben gelöst, und zwar mit Hülfe von Betrachtungen aus der elementaren Behandlung der Kegelschnitte. Mehrere Monate später befragte mich STEINER, bei Gelegenheit eines Besuches in seiner Wohnung, noch einmal nach meiner Beweismethode und verwies mir die Wahl ungeeigneter Mittel, da doch die Theorie der projektivischen Gebilde den direkten Weg zeige. Zugleich fügte er hinzu, einen so unfruchtbaren Winter hätte er noch nicht erlebt; jene beiden Sätze seien die einzigen Früchte seines Denkens. Durch seine körperlichen Leiden sei seine Phantasie so eingetrocknet, sein Gedächtnis so geschwächt, dafs seine geometrischen Vorstellungen, die sonst seinem Willen spielend gehorchten, ihn nun ganz im Stiche liefsen.

Die Teilnahme STEINERS an dem Ergehen seiner Schüler zeigte sich auch darin, dafs er sich bei passenden Gelegenheiten nach den näheren Umständen des täglichen Lebens erkundigte und aus seinen Erfahrungen Ratschläge erteilte. So empfahl er grofses Mifstrauen gegen die Vermieter der Stuben, weil alle Berliner Wirtinnen darauf ausgingen, die Mieter zu betrügen; man solle alle Einkäufe, wie Brot, Butter, Thee, Zucker, selbst besorgen, sonst hätte man die Zuschlagsspesen der Vermittlerin zu bezahlen. Zu dieser Ermahnung pafst eine Erzählung, die BARENTIN als Gewährsmann vertrat. In der Wochenrechnung von STEINER befand sich ein Posten für Heizung des Zimmers, bemessen nach der vom sparsamen Mieter genau vorgeschriebenen Anzahl der jedesmal zu verwendenden Stücke Holz und Torf. Nun argwöhnte STEINER, dafs die Wirtin in seiner Abwesenheit eine geringere Anzahl wirklich verwendete. Um sie auf frischer That zu ertappen, ersann er folgenden Plan. POHLKE, ein anhänglicher Schüler und enthusiastischer Bewunderer des grofsen Geometers, sollte sich von diesem in den Kleiderschrank des Zimmers einschliefsen lassen und durch ein Astloch in der Thüre des Schrankes die Wirtin beim Heizen beobachten. Dessen weigerte sich POHLKE, weil er es einerseits nicht für anständig hielt, auf diese Weise den ungesehenen Denunzianten zu spielen, und weil er andererseits mit seiner langen Figur nicht die Qual der gebückten Stellung in einem verschlossenen Schranke stundenlang aushalten wollte. Diese Weigerung führte dann zur Entzweiung des Meisters mit seinem Schüler.

Hiernach wird man es verstehen, warum STEINER sich allmählich seine ganze Umgebung entfremdete. Als KUMMER nach dem Tode STEINERS die Mitglieder des mathematischen Seminars der Universität zu einem Abendessen eingeladen hatte, wurde natürlich der grofse Verlust besprochen, den die Universität erfahren hatte. Im Laufe des Gesprächs machte uns KUMMER auf die Friedlosigkeit des Verstorbenen aufmerksam während der letzten Lebensjahre, wie sich dieselbe besonders auch in dem

Zerfall mit SCHLÄFLI gezeigt hatte. Der Beginn dieser Gemütsverfassung sei aber schon früh zu bemerken gewesen. An einem Abende gerieten die zuerst so befreundeten JACOBI und STEINER an einander und trennten sich im Zorn. Kaum nach Hause gekommen, sandte STEINER seinem Widerpart eine Herausforderung auf Pistolen. Darauf schrieb JACOBI seinem Dutzfreunde in seiner schlagfertigen, spöttischen Art: Wenn Du des Lebens überdrüssig bist, so kaufe Dir Pistolen und schiefse Dir selbst eine Kugel in den Kopf; mich hast Du dazu nicht nötig. Damit war die Sache erledigt.

Wenn diese Erinnerungen hiermit weiteren Kreisen preisgegeben werden, so ist es vielleicht am Platze, dagegen Verwahrung einzulegen, als ob dadurch der geniale Mathematiker in der Achtung der Nachwelt herabgesetzt werden sollte. Ganz im Gegenteil. Trotz aller solchen Schwächen, die zu verbergen er sich gar nicht bemühte, hatten wir alle von ihm den überwältigenden Eindruck einer das gewöhnliche Mafs der Menschen turmhoch überragenden, gewaltigen Persönlichkeit, zu der wir mit Bewunderung, mit Ehrfurcht und mit Liebe aufblickten. Jene Wunderlichkeiten, durch welche der unvergleichliche Mann der Menschlichkeit seinen Tribut zollte, brauchen also auch nicht zur abfälligen Beurteilung des Menschen STEINER ausgenutzt zu werden; als Ausflufs seines ursprünglichen Wesens gehören sie zu seinem Bilde und erklären die einsame Absonderung, in der er seine letzten Lebensjahre verbrachte, eine Vereinsamung und Verbitterung, unter der er selbst gewifs am meisten gelitten hat, weil er von Natur die Geselligkeit liebte; sonst wären ja die offenen Mitteilungen an die jungen Studenten seiner letzten Vorlesungen nicht zu begreifen. Gewifs sind noch viele charakteristische Züge und Aussprüche von ihm im Gedächtnisse seiner Schüler haften geblieben, und das volle Bild seiner Persönlichkeit kann erst durch die Zusammenstellung der subjektiven Eindrücke von allen gewonnen werden, die unter dem Banne seines Geistes gestanden haben; daher habe ich mich entschlossen, meinen Eindruck im obigen niederzulegen. Begreiflich wird ja alles durch die eigentümliche Lebensführung. Er durfte mit vollem Rechte sagen, dafs er sein mathematisches Wissen und Können selbständig aus seinem Geiste entwickelt habe. Daher stammte sein stolzes Selbstbewufstsein, die spöttische Verhöhnung angelernten Wissens. Wie schon erwähnt, ist es sehr wahrscheinlich, dafs er die Schriften anderer Mathematiker nie studiert, sondern blofs durchgesehen hat, um die Ergebnisse seiner Forschung mit denen seiner Vorgänger zu vergleichen. Einer Überlieferung zufolge verdankte er die in der *Systematischen Entwickelung* enthaltenen Litteraturangaben den hülfsbereiten Nachforschungen des zur Zeit der Abfassung eng mit ihm befreundeten und in der Litteratur ungemein bewanderten JACOBI. Eine Stütze erhält diese Angabe durch eine in seinen letzten Vorlesungen gemachte Äufserung in Bezug auf die Entdeckung eines Satzes über die Parabel (nach meiner Erinnerung, dafs der Umkreis eines Tangentendreiecks der Parabel durch den Brennpunkt geht, nebst den Folgerungen, besonders dafs die Fufspunkte der drei Lote von einem Punkte des Umkreises eines Dreiecks auf die Seiten desselben in einer Geraden liegen). Als STEINER diesen Satz JACOBI mitteilte, sei dieser, wie immer, auf die Bibliothek gelaufen und habe ihm schon am nächsten Tage als wahrer Mephisto berichtet, der Satz sei längst bekannt. Aus jenem souveränen Bewufstsein des selbstgeschaffenen Besitzes erklärt sich ferner auch STEINERS Mifstrauen und Argwohn gegen Entwendung seiner Entdeckungen, die Verheimlichung der Wege, die er zur Aufspürung benutzt hatte, seiner „Jagdhundsregeln“, der stete Gebrauch der Wendung: wer hat Ihnen das Staatsgeheimnis verraten? Alt und schwach geworden, sah er die Unmöglichkeit ein, die immer wieder zurück gehaltenen Ergebnisse seiner Forschungen selbst zur Herausgabe zu bearbeiten, und daher machte er wiederholt talentvollen Schülern den Vorschlag, in Gemeinschaft mit ihm sich der Mühe der Veröffentlichung zu unterziehen. Gerade wie bei SCHLÄFLI zerschlugen sich aber diese Pläne regelmäfsig, hauptsächlich wohl eben deshalb, weil STEINER sich nicht entschliefsen konnte, einem anderen den Einblick in seine Schatzkammer und in die geheime Werkstatt seiner Gedanken zu gestatten, aus Argwohn, dafs er damit die Gelegenheit zu einer unrechtmäfsigen Benutzung geschaffen hätte.

Bei Erwähnung SCHLÄFLIS, dieses letzten biederen und ehrlichen Freundes STEINERS, den er sich durch sein eigentümliches Verhalten auch zuletzt entfremdete, sei es erlaubt, einige Angaben zu berichtigen, die Hr. GRAF in seiner Schrift *Ludwig Schläfli* (Bern 1896) über die Romreise STEINERS (1843/44) gemacht hat. Dort liest man nämlich (S. 9 u. 10):

„Keiner der drei Berliner Mathematiker (JACOBI, STEINER, DIRICHLET) hätte ein Wort italienisch gewufst. Da habe STEINER erklärt, er habe in Bern einen Bekannten, einen ländlichen Mathematiker (SCHLÄFLI), für die Welt ein Esel, aber Sprachen lerne er wie ein Kinderspiel; den wollten sie als Dolmetscher mit sich nehmen ... In Rom war damals die Familie Mendelssohn, mit welcher DIRICHLET von seiten seiner Frau verwandt war. FELIX MENDELSSOHN erzählt in seinen Briefen von dem merkwürdigen Schweizer, den er in Rom kennen gelernt habe. SCHLÄFLIS Mangel an Weltkenntnis gab zu verschiedenen Quiproquos Anlafs ... Da mögen denn die feinen Damen wie FANNY HENSEL, MENDELSSOHNS Schwester, über den jungen Berner die Achsel gezuckt haben.“

Mit dieser wörtlich mitgeteilten Stelle halte man nun die folgenden Thatsachen zusammen, die aus dem Werke *Die Familie Mendelssohn* von

Sebastian Hensel zu ersehen sind. Die Reise von Felix Mendelssohn nach Italien, aus der die nach seinem Tode herausgegebenen Reisebriefe stammen, fand im Winter 1830/31 statt, seine Hochzeit im März 1837. Fanny Hensel machte mit ihrem Manne die Reise nach Italien im Winter 1839/40, und als sie im Winter 1844/45 zu der erkrankten Familie Dirichlet nach Florenz reiste, waren Steiner und Jacobi längst wieder in Berlin. Dirichlet mit seiner Gattin Rebecka, der Schwester von Felix Mendelssohn und Fanny Hensel, führte allerdings die von Hrn. Graf besprochene italienische Reise im Winter 1843/44 aus; sonst war aber niemand aus der Familie Mendelssohn während jenes Winters in Italien. Was bleibt also noch an Thatsächlichem von dem Inhalt der oben abgedruckten Sätze des Hrn. Graf als richtig übrig? Nicht einmal die Angabe der Unwissenheit der drei Berliner Mathematiker im Italienischen. Rebecka Dirichlet schreibt an ihre Schwester Fanny aus Florenz unter dem 23. September 1843: „Auf jeder Station zankte sich Dirichlet im schönsten Italienisch mit dem Postmeister, berief sich aufs Reglement, das er bei sich führte; jeder Zank war eine italienische Stunde.“ Dies geschah auf der Hinfahrt nach Rom, wo das Ehepaar allein reiste, und dieser „Berliner Mathematiker“ soll kein Wort italienisch gewufst und Schläflis als Dolmetscher bedurft haben, der nach Hrn. Graf ja selber erst in Italien die Sprache des Landes zu erlernen hatte? Ein Mitglied der Familie Mendelssohn aus jener Zeit hätte eine italienische Reise nicht unternommen, ohne nach dem Vorbilde Goethes vorher italienisch zu lernen. Dafs aber Steiner eines Dolmetschers bedurfte, ist nach dem, was wir über seine Sprachkenntnisse wissen, vollständig richtig; was für ihn also allein zutrifft, ist ohne weiteres auf Dirichlet und Jacobi übertragen worden. Wenn, wie wahrscheinlich, Steinersche Erzählungen die Quelle für jene Darstellungen bilden, so ist dagegen zu sagen, dafs dem scharfsinnigen Geometer das Fabulieren im Interesse einer ausgeschmückten Unterhaltung von jeher nicht fremd war, und dafs er in seinem Alter oft genug die Ereignisse nicht so darstellte, wie sie stattgefunden hatten, sondern Dichtung und Wahrheit phantasievoll vermengte. Einen drastischen Ausdruck hierfür hat ein Dichter in jener humoristischen Grabschrift auf Steiner gefunden, von der Frommel in seinen Erinnerungen berichtet. Als Beleg diene ein für mich sehr eindrucksvolles Gespräch unter den oben erwähnten abendlichen Unterhaltungen mit Steiner. Als er in Heidelberg studierte, sollen seine Eltern in der Schweiz erfahren haben, dafs junge Leute seines Faches sich unter dem Opfer hoher Gebühren den Doktortitel zu erwerben pflegten, und da seine Landsleute von der Universität den Eltern gelegentlich über die Fortschritte des Sohnes im Studium erzählten, so hätte der Vater dem Sohne durch jene Freunde die

Bestellung ausrichten lassen, er wollte es versuchen, die nötige Summe aufzubringen. Im Vollbewufstsein seiner Kraft hätte der Studiosus den Eltern aber zurücksagen lassen, den gewöhnlichen Weg zur Erlangung der Doktorwürde verschmähe er; ihm werde dieser Titel einst Ehren halber verliehen werden. Wie hübsch das auch klingt, so ist die Erzählung, wenn man sie mit den von Hrn. LANGE gegebenen Aufklärungen vergleicht, offenbar aus den später erfolgten Ereignissen konstruiert worden. Es ist wenigstens undenkbar, dafs ein junger Mann von so geringen Kenntnissen, wie STEINER sie in Heidelberg besafs, und ohne irgend welche Leistungen auf wissenschaftlichem Gebiete so hochfliegende Hoffnungen sollte gehegt haben.

Durch die vorstehenden Zeilen möchte ich andere noch lebende Schüler STEINERS hiermit veranlassen, ihre Erinnerungen an STEINER aufzuschreiben und zu veröffentlichen. Eine Persönlichkeit wie die des grofsen Berliner Geometers verdient es schon, dafs man die sein Leben betreffenden Notizen philologisch getreu sammelt und sichtet. Original in seiner Forschung, original in seiner Lebensführung, ist er eine der merkwürdigsten Erscheinungen unter den Gelehrten des neunzehnten Jahrhunderts. Durch eigene Kraft bis zur höchsten Höhe gestiegen, hat JACOB STEINER gezeigt, dafs der Genius auch jetzt noch in der vielgestaltigen, dichtbevölkerten Welt alle Schwierigkeiten besiegen und sich zur herrschenden Stellung emporschwingen kann.

Berlin, im Dezember 1899.

Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten.

Von

E. **Wölffing** in Stuttgart.

Durch die Koordinatenmethode von Descartes war ein Mittel gewonnen, um die Lage jedes Punktes einer Ebene in Bezug auf 2 Axen, das Koordinatensystem, festzulegen. Eine Gleichung zwischen den Koordinaten, d. h. zwischen den Abständen des Punktes von jenen Axen, scheidet von den ∞^2 Punkten der Ebene ∞^1 aus, welche auf einer Kurve gelegen sind. Es ist also durch jene Gleichung jeder einzelne Punkt der Kurve seiner Lage nach bestimmt; damit ist freilich auch das Gesetz, nach welchem die Kurve gebildet ist, gegeben, aber nur indirekt vermittelst des Koordinatensystems, also einer Gröfse, die mit der Kurve selbst an sich gar nichts zu thun hat, und ein und dieselbe Kurve erhält je nach ihrer Lage ganz verschiedene Gleichungen. Dazu kommt noch, dafs manche Kurven von einfachem Erzeugungsgesetz in cartesischen Koordinaten sehr komplizierte Gleichungen aufweisen. Daher zeigte sich zunächst aus rein praktischen Gründen bei Mathematikern des 18. Jahrhunderts, vor allem bei Euler, das Bestreben, Kurven zu definieren durch Beziehungen zwischen Gröfsen, welche, wie z. B. der Krümmungsradius, nur den einzelnen Kurvenpunkten zugehören und daher erhalten bleiben, wenn die Kurve ihre Lage in der Ebene ändert. Doch dienten solche Bestimmungsstücke, welche man nach dem Vorgange von Aoust und Lampe[1]) *natürliche Koordinaten* im Gegensatz zu den gewöhnlichen nennen kann, damals nur zur Definition der Kurve durch eine Differentialgleichung, mit der für gewöhnlich nicht gerechnet wurde, vielmehr benützte sie insbesondere Euler dazu die cartesischen Koordinaten der Kurvenpunkte in Funktion eines Parameters auszudrücken. Erst im Anfang des 19. Jahrhunderts stellte der Philosoph K. C. F. Krause **[1]**[2]) **[2]** **[3]** seine durch die Philo-

1) Aoust, Comptes Rendus Paris **78** (1874), 50; Lampe, Jahrbuch üb. die Fortschr d. Mathem. **19**, 699 (1890).

2) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf den „Litteraturnachweis" am Ende des Aufsatzes.

sophie gewonnene Methode, Kurven zu bestimmen und zu diskutieren, ausdrücklich als eine der Natur der Kurve Rechnung tragende, nicht durch äufserliche Relationen vermittelte der Koordinatenmethode gegenüber. Als Bestimmungsstücke wählte er die *Bogenlänge* s von einem festen Kurvenpunkt an und den Winkel φ der Tangente gegen eine feste Kurventangente (*Richtungswinkel*, auch Totalkrümmung genannt), resp. als Mafs der fortschreitenden und drehenden Bewegung. Gleichzeitig mit dem Hauptwerk von KRAUSE [**3**] erschien eine Schrift von A. PETERS [**1**], der dieselben Koordinaten benützt und sein Verfahren ursprünglich und natürlich nennt, im Gegensatz zur einseitigen, willkürlichen und relativen Koordinatenmethode. Im Bann der Naturphilosophie stehend überschätzen beide Forscher bedeutend die Tragweite ihrer Entdeckung, von der sie eine Umwälzung der Geometrie erhoffen. An Stelle der „künstlichen" Einteilung der Kurven, wie sie die Lehre von den algebraischen Funktionen mit sich bringt, versuchen sie eine natürliche zu setzen; sie definieren vielgestaltige neue Kurven, darunter KRAUSE seine *Antiloga* $s \cdot \varphi = \text{const}$, und machen bereits Diskussionsversuche aus der (φ, s)-Gleichung, die freilich noch sehr mühselig und unvollkommen ausfallen. Schon weit praktischer griff der Philosoph WHEWELL [**1**] die Sache an, der bereits die Brauchbarkeit der neuen Koordinaten für die Probleme der successiven Evoluten und Evolventen erkannte. Er führte auch für die (φ, s)-Gleichung den Namen: *intrinsic equation* ein, ein Name, der später auch in die romanischen Sprachen überging: *coordonnées intrinsèques; geometria intrinseca*. Die Methode wurde zunächst in England weiter fortgebildet. WALTON [**1**] weist auf den Zeichenwechsel von ds in den Spitzen der Kurven hin; PURKISS [**1**] erläutert die Bedeutung von Parametern in der „intrinsic equation"; mit Hilfe der letzteren diskutiert SYLVESTER [**2**] [**4**] höhere Kreisevolventen, während CASEY [**1**] die Kettenlinie und ihre Beziehung zur Parabel betrachtet und später [**2**] den Zusammenhang der (φ, s)-Gleichung mit der von ihm gefundenen charakteristischen Tangentengleichung erörtert. Mittels derselben Koordinaten untersucht HIERN [**1**] die zweckmäfsige Gestalt des Randes von untergetauchten Blättern in fliefsendem Wasser, HICKS [**1**] wendet sie auf die Theorie der Fufspunktkurven, GREENHILL [**1**] [**2**] auf die elastische Linie an. In Deutschland ist es aufser BUDÉRUS [**1**], der viele Beispiele von (φ, s)-Gleichungen von Kurven gab, nebst Anwendung auf Evoluten und Evolventen, allein noch NATANI [**1**] der von den neuen Koordinaten Gebrauch macht, die er *Transformationskoordinaten* nennt, weil bei ihnen die Koordinatentransformation möglichst einfach sei. Sie dienen bei ihm zur Ermittlung der Gestalt gewisser transscendenter Kurven und zur Definition von Kurven mit ähnlichen höheren Evoluten. Auch im Schlufsband von HOFFMANNS *Ma-*

thematischen Wörterbuch benützt Natani [2] die Transformationskoordinaten in mehreren Artikeln und zeigt ihren Gebrauch bei cyklischen Kurven und Trajektorien. Endlich giebt Natani [3] eine kinematische Anwendung derselben auf Zahnräder, deren Zähne die Gestalt von Evolventen cyklischer Kurven haben. Die „intrinsic equation" Whewells wird gleichzeitig durch eine Arbeit Habichs [1], der mit ihrer Hilfe die Fläche zwischen einer Kurve und einer ihrer Developpoiden quadriert, auch in den romanischen Ländern bekannt. Guyou und Simart [1], lange vor ihnen allerdings schon Bravais [1], wenden die (φ, s)-Koordinaten auf die Untersuchung der Kurve der Metacentren bei seitlichen Schiffsschwankungen an und gelangen zu einfachen Resultaten. Als Näherungskurven dienen ihnen höhere Kreisevolventen, bei denen der Bogen s eine ganze Funktion des Richtungswinkels φ ist.

Im Ganzen hat sich jedoch die aus philosophischen Gründen erfolgte Wahl der Transformationskoordinaten vom mathematischen Standpunkt aus als weniger praktisch erwiesen; dieselben sind daher in den Hintergrund gedrängt worden von anderen Koordinatenbestimmungen, bei denen an Stelle eines der Bestimmungsstücke s und φ der *Krümmungsradius* ϱ tritt.

Was zunächst die Koordinaten (φ, ϱ) betrifft, so sind dieselben von ganz besonderem Vorteil bei der Untersuchung höherer Evoluten und Evolventen. Ich mache daher den Vorschlag dieselben *Entwicklungskoordinaten* (coordonnées de développement) zu nennen. Sie finden ihre Hauptanwendung bei dem vielbehandelten Problem der Kurven mit gleichartigen höheren Evoluten oder Developpoiden. Euler gebraucht hiebei zuerst [3] s und ϱ, dann aber [6] φ und ϱ, ebenso mit Ausnahme von Fontaine [1], der φ und s benützt, auch die spätern Bearbeiter Lacroix [1] tome II p. 389 ff., v. Ettingshausen [1], Puiseux [1], Haton de la Goupillière [1] [2], endlich Pirondini [3], der Kurven, die ihren 4. Evoluten ähnlich sind, behandelt, und Godefroy [1]. (Dagegen benützt Curray Sharp [1] wieder φ und s). Eine weitere Rolle spielen die Entwicklungskoordinaten in den Untersuchungen von Haton de la Goupillière [5] (mit der Bearbeitung von Mansion [1]) über Developpoiden und Haton de la Goupillière hat sie auch bei *Brachistochronen* [4] und deren Umkehrproblem [6] so wie bei barycentrischen Linien [3] angewandt; letztere Untersuchungen hat Retali [1] mit (φ, s)-Koordinaten fortgesetzt. Ferner werden die (φ, ϱ)-Koordinaten von Cavallin [1] zur Gewichtbestimmung geschlossener konvexer Kurven gebraucht und kommen auch in einer kleinen Arbeit von Brocard [1] vor. Vor allem aber legt Aoust [1] dieselben seinem berühmten Werk über die Differentialgeometrie der ebenen Kurven zu Grunde und löst mit ihrer Hilfe eine

Menge von Aufgaben, z. B. über Parallelkurven (p. 47), die sog. „courbes resultantes" (p. 53), höhere Evoluten (p. 61) u. s. f.; die Developpoiden (p. 77) behandelt er noch besonders in einer späteren Arbeit [2]. Für die Diskussion der Kurven in den Koordinaten (φ, ϱ) ist sehr wichtig die Umdeutung derselben in Polarkoordinaten. Wird nämlich in der Gleichung $f(\varphi, \varrho) = 0$ ϱ als Radiusvektor, φ als Polarwinkel aufgefafst in einem Koordinatensystem, dessen Polaraxe zur Anfangstangente senkrecht steht, so entsteht die Gleichung einer Kurve, welche von MANNHEIM [1] entdeckt, von TUCKER [1] [2] [3] *Radiale* genannt wurde und welche der Ort der Endpunkte der parallelen und gleichen Strecken ist, welche durch den Ursprung zu allen Krümmungsradien der Kurve gezogen werden. Die Radiale algebraischer Kurven ist algebraisch; sie wurde für die Ellipse von DAWSON und RITTER [1] und von TUCKER [4] angegeben; ferner beschäftigten sich mit ihr AOUST [1] S. 23 und neuerdings SUCHARDA [1]. Die Sektorenfläche der Radiale ist die Fläche zwischen Kurve, Evolute und den Krümmungsradien in den Endpunkten; den Spitzen entsprechen Zweige der Radiale durch den Ursprung, den Wendepunkten Asymptoten derselben. Die Wendepunkte der Radiale liefern die Punkte, in welchen Kettenlinien gleichen Widerstands fünfpunktig berühren u. s. f.

Am wichtigsten für die Untersuchung der Kurven hat sich die dritte Kombination erwiesen: Gleichung zwischen s und ϱ; für diese beiden Gröfsen kann der Name *coordonnées intrinsèques* (deutsch etwa: esoterische Koordinaten nach dem Vorschlag von HOPPE) beibehalten werden. EULER [2] untersucht zunächst, wann eine Gleichung zwischen diesen Koordinaten einer algebraischen Kurve angehört. FUSS [1] verwendet sie zur Definition von Kurven durch Differentialeigenschaften, geht aber dann zu cartesischen Koordinaten über. LACROIX [1] tome I p. 418 zeigt umgekehrt wie aus der cartesischen Gleichung diejenige zwischen s und ϱ gefunden wird, ohne indefs Beispiele zu geben. Später macht T. HILL [1] von diesen Koordinaten Gebrauch, kommt jedoch auf Schwierigkeiten, da er sich die Zuordnung der unendlich vielen congruenten Cykloidenbögen zu einer geschlossenen Kreislinie nicht richtig zu erklären vermag und irrtümlich das Imaginäre hereinzieht. Vor allem sind aber die Arbeiten von E. CESÀRO zu nennen, welche ihr Verfasser neuerdings in seinem Hauptwerk [16] zusammengefafst hat. Der Versuch, die Differentialgeometrie systematisch vermittelst der (s, ϱ)-Koordinaten zu behandeln, kann als im wesentlichen *gelungen* bezeichnet werden. Man findet in dem höchst wertvollen Lehrbuch CESÀROS die Bestimmung der Tangenten, Normalen, Krümmungsradien, Wende- und Rückkehrpunkte, der Asymptoten, der asymptotischen Punkte und Kreise, der geometrischen Örter; dann die Theorie der Enveloppen, der Parallelkurven, der Evoluten und

Evolventen; die Lehre [**10**] von den Kegelschnitten, den Cassinoïden und den Kurven [**5**] [**7**] [**13**], deren Krümmungsradius proportional zu dem Stück der Normalen zwischen Kurvenpunkt und dessen Polare in Bezug auf einen Kreis (Direktorkreis) ist[1]) und als deren Spezialfälle sich, je nachdem der Direktorkreis in eine Gerade oder in einen Punkt ausartet, die „*lignes de* Ribaucour“[2]) und die *spirales sinusoïdes* ergeben. Cesàro geht weiter auf die Theorie der Berührung und Oskulation ein, wobei sich zu den Krümmungskreisen oskulierende logarithmische Spiralen und Vergleichsalyssoide [**10**] gesellen. Hieran schliefst sich die Theorie der Rouletten [**6**], die in besonders eleganter Gestalt erscheint und die Lehre von den Schwerpunkten und barycentrischen Kurven [**2**] [**12**] [**15**]; endlich die Theorie der Kurvensysteme und der Differentialparameter. Einzelne Abhandlungen Cesàros behandeln ferner die cyklischen Linien und die Kettenlinie [**3**], sowie die Kettenlinie gleichen Widerstands [**8**], über welche es auch eine Arbeit von Cifarelli [**1**] giebt. Auszusetzen ist an dem Lehrbuch von Cesàro, dafs es gar keine Litteraturangaben enthält; nicht einmal der grofse Anteil, welchen sein Verfasser selbst an dem Aufbau der entwickelten Theorien hat, ist erwähnt. Aufserdem aber sind daselbst für die Diskussion der Kurven aus der (s, ϱ)-Gleichung wohl viele Einzelregeln angegeben, dagegen fehlt noch eine systematische und eingehende Theorie der Kurvendiskussion in den genannten Koordinaten. Eine solche hätte sich auf eine Umdeutung der Gleichung $f(s, \varrho) = 0$ in eine solche in cartesischen Koordinaten $f(x, y) = 0$ zu stützen. Auf Grund dieser Umdeutung hat schon Ferroni [**1**] die logarithmische Spirale mit der Geraden, die Cykloide mit dem Kreis und die Kreisevolvente mit der Parabel in Beziehung gesetzt. Cesàro [**1**] hat gezeigt, dafs die Gleichung $f(x, y) = 0$ der Kurve angehört, welche von Mannheim [**1**] entdeckt wurde als Ort des Krümmungscentrums des jeweiligen Berührungspunktes, wenn die Kurve $f(s, \varrho) = 0$ auf einer Geraden rollt. Für diese Kurve, die auch von Aoust in einer mir nicht zugänglichen Arbeit [**3**] behandelt wird, habe ich [**1**] p. 140 den Namen Mannheimsche Kurve vorgeschlagen. Mit ihrer Hilfe lassen sich die ausgezeichneten Punkte der Kurve, darunter

1) Es dürfte gerechtfertigt sein, diese Kurven als „lignes de Cesàro“ zu bezeichnen.

2) Dieselben sind übrigens längst vor Ribaucour (*Étude des elassoïdes*, Mém. cour. Bruxelles, 4°, **44** (1882)) bekannt gewesen, vgl. z. B. Varignon, Mém. Paris 1710, p. 161; Euler, Comm. Petr. **10** (1747), 164—180; Farcy, Nouv. Ann. de Mathém. **3** (1844), 528—533; Parvé, *De curvis funicularibus* (Diss. Groningen 1847), S. 88—89; Müller, A., *Bestimmung der Curve* etc. (Diss. Jena 1867); Weerth, *Über eine Classe von Curven* etc. (Pr. Celle 1874); Müller, C. H., *Über barytrope und tautobaryde Curven* (Diss. Marburg 1880).

auch die Krümmungspunkte (sommets) sehr leicht vermöge der PUISEUXschen Polygonkonstruktion finden und es könnte dabei auch eine Theorie der asymptotischen Punkte, Tangenten und Kreise begründet werden; eine solche fehlt noch ganz.[1]) In der neueren Litteratur finden sich die (s, ϱ)-Koordinaten noch bei LAISANT [**2**] und DE SAUSSURE [**1**], die sie auf Pseudocykloiden anwenden, bei PIRONDINI [**1**] [**2**] zum Zweck der Untersuchung von Kurven mit gleichartigen Developpoiden und in dem Lehrbuch der Differentialgeometrie von BURALI-FORTI [**1**] (p. 111). Von einigem Interesse ist noch die Kurve $\varrho \cdot s = \text{const.}$, die bereits von KRAUSE [**3**] (p. 79) (als „parabola originaria longitudinaris") und PETERS [**1**] (p. 173) gezeichnet wird. CESÀRO [**2**] (p. 512), in dessen barycentrischen Untersuchungen sie eine grofse Rolle spielt, nannte sie *Clothoïde*. Sie erscheint auch in der angewandten Mathematik, indem CORNU [**1**] in der Optik von ihr als Diffraktionskurve Gebrauch macht und MARKOFF [**1**] ihr Vorkommen in der Eisenbahntechnik nachweist (vergl. noch CESÀRO, Comptes Rendus Paris **110** (1890), 1119—1122).

Die Koordinaten s und ϱ leiden noch an dem Übelstand, dafs der Punkt der Kurve, von dem aus der Bogen gemessen wird, willkürlich ist, so dafs also immer noch je nach Wahl dieses Punktes zu einer Kurve verschiedene Gleichungen gehören. Zur Abstellung dieses Mifsstandes sind verschiedene Versuche unternommen worden. CARNOT [**1**] (p. 416) führte neben dem Krümmungsradius den Winkel χ ein, welchen die Kurvennormale mit der Verbindungslinie des Kurvenpunktes mit dem Halbierungspunkt der zur Tangente unendlich benachbarten parallelen Sehne bildet; dieser Winkel χ ist zugleich der Winkel der Kurvennormale mit der Axe der oskulierenden Parabel oder auch mit dem Durchmesser des oskulierenden Kegelschnittes. Mit dem CARNOTschen Winkel beschäftigten sich weiter Arbeiten von BELLAVITIS [**1**] [**2**], ABEL TRANSON [**1**], DUPIN [**1**], CAYLEY [**1**], MONRO [**1**], HUSQUIN DE RHÉVILLE [**1**], SERVAIS [**1**] und GODEFROY [**1**]; die Koordinaten ϱ und χ haben jedoch keine praktische Verwendung gefunden; wohl aber kann man hieran die Theorie der oskulierenden Parabeln und Kegelschnitte, die Einteilung der Kurvenpunkte je nach der Natur der letzteren in elliptische, parabolische und hyperbolische, die Lehre von der Abweichungskurve (Kurve der Mittelpunkte der oskulierenden Kegelschnitte), deren PLÜCKERsche Zahlen unlängst BOUWMANN[2]) untersucht hat, und von den sextaktischen Punkten anreihen. Die von AMPÈRE [**1**] vorgeschlagene Koordinatenbestimmung, nämlich die

1) Die MANNHEIMsche Kurve giebt auch ein Mittel an die Hand, die Kurve näherungsweise als *Korbbogenspirale* (anse de panier) zu zeichnen.

2) *De PLÜCKERsche grootheden der deviatiekromme* (Diss. Groningen 1896); deutsche Übersetzung: Mathem. Ann. **49** (1897), 24—38.

rechtwinkligen Koordinaten des Kurvenpunktes in Bezug auf das aus Axe und Scheiteltangente der oskulierenden Parabel bestehende Koordinatensystem, hat sich als ziemlich verfehlt erwiesen; praktischer wäre noch immer der von Ampère angedeutete Vorschlag, den Krümmungsradius mit dem Parameter der oskulierenden Parabel zusammenzunehmen. Der merkwürdige Ausdruck, welchen letzterer in Funktion des Krümmungsradius und dessen Ableitung nach dem Bogen hat, wurde von Husquin de Rhéville [**1**] angegeben. Das Ideal einer natürlichen Koordinatenbestimmung fand jedoch Gergonne [**1**], der die Kurven bestimmt durch eine Gleichung zwischen dem Krümmungsradius ϱ und demjenigen ϱ_1 der Evolute im entsprechenden Punkt. Die von Gergonne, dessen Namen diese Koordinaten mit Recht tragen mögen, gegebenen Beispiele wurden von Eggers [**1**] später bedeutend vermehrt. Aber noch einige sehr wichtige Arbeiten bedienen sich der Gergonneschen Koordinaten, vor allem diejenige von Timmermanns [**1**]. Derselbe beschäftigt sich zunächst mit den successiven Evoluten und entdeckt dabei den später von Haton de Goupillière [**2**] wiederaufgefundenen merkwürdigen Satz, dafs die unendlich hohe Evolute mancher Kurven sich auf einen Punkt (Grenzpunkt) zusammenzieht. Diese Kurven fafst daher Cesàro [**4**] als unendlich hohe Evolventen eines Punktes (développantes du point) auf. Weiter wird von Timmermanns das merkwürdige Bernouillische Theorem bewiesen und auf schiefe Evolventen ausgedehnt. Nach dem genannten von Joh. Bernouilli [**1**] ohne Beweis[1]) gegebenen Lehrsatz kann ein beliebiger konvexer Kurvenbogen durch unendlich oft wiederholte Abwicklung in den Bogen einer cyklischen Kurve übergeführt werden, deren Natur nur von der Totalkrümmung des Kurvenbogens abhängt. Weitere Anwendungen macht Timmermanns von den Koordinaten (ϱ, ϱ_1) auf die Analysis (mehrfache Quadraturen zwischen bestimmten Grenzen) und auf die Mechanik (Bewegung einer Kurve), ganz besonders aber auf die Algebra. Hier handelt es sich um graphische Auflösung numerischer Gleichungen vermittelst höherer Kreisevolventen. Dieses Problem kommt bereits bei Corancez [**1**] vor und bildet den Hauptteil der wichtigen Arbeit von du Boys-Aymé und Bigeon [**1**]. Diese Autoren bedienen sich der (φ, s)-Koordinaten; in der letzteren Arbeit wird namentlich auch die graphische Lösung gewisser transscendenter Gleichungen gezeigt und werden aufserdem Kurven, die ihren höheren Evoluten gleich oder ähnlich sind, abgehandelt. Der Gedanke, numerische Gleichungen durch Kreisevolventen zu lösen, kehrt

1) Beweise gaben aufser Timmermanns Euler: Nov. Comm. Petr. **10**, 179—198 (1764); „Un ancien élève“: Ann. de mathém. **9** (1818), 73—90; Poisson: Journ. éc. polyt. **18** (1820), 417—489; Legendre: *Exercices de Calcul intégral* VI; ungedrucktes Manuskript von Lagrange; Whewell: [**1**] S. 669—671 (1849).

auch in einer Arbeit von H. ONNEN [1] wieder, welcher sich ebenfalls der (ϱ, ϱ_1)-Koordinaten bedient und den Beweis des BUDANschen Satzes auf der Theorie dieser Evolventen aufbaut. Aufserdem wird in dieser Abhandlung die Diskussion der binomischen Kurven $\varrho_1 = \varrho^n$ versucht. Dabei macht ONNEN (S. 368 der franz. Übersetzung) zum erstenmal die zutreffende Bemerkung, dafs im asymptotischen Punkt der logarithmischen Spirale die Kurve keinen Endpunkt besitzt, sondern dafs sie den Pol in einem Wendepunkt von unendlich kleiner Krümmung passiert und denselben in einem dem ersten ähnlichen aus unendlich vielen Windungen bestehenden Zug verläfst.

Wie man sieht, war man in den Besitz der GERGONNEschen Koordinaten im wesentlichen dadurch gelangt, dafs man von zahlreichen sich darbietenden Möglichkeiten durch Probieren die passendste Kombination auswählte. Der *innere Grund*, weshalb überhaupt die natürlichen Koordinaten geeignet sind, das Gesetz der Kurve auf die einfachste Weise auszudrücken, blieb durchaus verborgen, da die naturphilosophischen Gründe, die KRAUSE, PETERS, WHEWELL und selbst noch AOUST vorbrachten, für den Mathematiker natürlich nicht stichhaltig sind. Die Aufklärung gab erst S. LIES Lehre von den kontinuierlichen Gruppen.

Die Gleichungen in natürlichen Koordinaten sind Differentialgleichungen 3. Ordnung; ihre Integralkurven sind aber alle kongruent und nichts anderes als die ∞^3 möglichen Lagen einer und derselben Kurve in der Ebene. Somit gestatten diese Differentialgleichungen die dreigliedrige EUCLIDische *Gruppe der Bewegungen*, d. h. der Translationen und Rotationen der Ebene, und die natürlichen Koordinaten sind nichts anderes als *Differentialinvarianten* dieser Gruppe. Insbesondere ist ϱ_1 eine Differentialinvariante 3. Ordnung, ϱ eine solche 2. Ordnung; s und φ sind aber Integrale der Differentialinvarianten

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad \text{und} \quad d\varphi = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\,dx}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ihre Wegschaffung durch Differentiation aus der (s, ϱ)-, (φ, ϱ)-, (φ, s)-Gleichung führt immer auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Die Kenntnis der Gruppe dieser Differentialgleichung hat sodann zur Folge, dafs die Integration derselben durch blofse Quadraturen möglich ist, wie SCHEFFERS [1] für die (s, ϱ)-Gleichung ausführlich gezeigt hat. Aufserdem sieht man nun ein, dafs solche Kombinationen von endlichen Gröfsen oder Differentialinvarianten, welche andere als die EUCLIDische Gruppe gestatten, nicht als natürliche Koordinaten dienen können, weil eine Gleichung zwischen ihnen nicht mehr eine Kurve in allen möglichen Lagen, sondern eine Kurvenfamilie definiert. Solche Kombinationen, die man *uneigentliche Koordinaten* nennen könnte, sind z. B. Krümmungsradius und sein Winkel mit dem Radiusvektor (Laisant [1]); Krümmungsradius und Projektion des Radiusvektors auf die Normale oder statt letzterer die Polarnormale (Zimmermann [1]); Krümmungsradius und Radiusvektor (Fuss [1], Euler [8], Carnot [1] p. 471; Hill [1], der auch ausdrücklich erklärt, dafs hiedurch Kurven von verschiedener Gestalt bestimmt werden); Bogen und Polarsektor bei Euler [7] und Collignon [1]; bei letzterem auch Bogen und Ursprungslot auf die Tangente; ferner Abscisse und Subtangente (Werneburg [1]), wodurch eine Schaar affiner Kurven bestimmt ist u. s. f. Für gewisse Zwecke kann es aber auch dienlich sein, Familien von Kurven durch Relationen zwischen Differentialinvarianten auszudrücken, und man benützt hiezu aufser dem Krümmungsradius ϱ der Kurve diejenigen der successiven Evoluten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$. So giebt Curtau Sharp [1] für die ∞^4 Parabeln der Ebene $9\varrho^2 + 4\varrho_1^2 - 3\varrho\varrho_2 = 0$, für die ∞^5 Kegelschnitte derselben $45\varrho\varrho_1\varrho_2 - 9\varrho^2\varrho_3 - 36\varrho^2\varrho_1 - 40\varrho_1^3 = 0$. Cesàro [9] findet weiter für die cykloidalen Kurven $\varrho\varrho_3 - \varrho_1\varrho_2 = 0$, für die Kreisevolventen $\varrho_2 = 0$, für die logarithmischen Spiralen $\varrho\varrho_2 - \varrho_1^2 = 0$, für die Cykloiden $\varrho + \varrho_2 = 0$ u. s. f. An anderer Stelle ([16] S. 60) macht Cesàro, der die linken Seiten dieser Gleichungen als *Invarianten* bezeichnet, darauf aufmerksam, dafs die Gleichung der Parabelfamilie mit einer Kurvengleichung kombiniert die sog. parabolischen Punkte der Kurve (d. h. der hyperoskulierenden Parabeln) liefert, ebenso die Gleichung der Kegelschnittsfamilie die sextaktischen Punkte u. s. f. Auch Godefroy [1] giebt für diese Gleichungen, die er *charakteristische Relationen* nennt, zahlreiche Beispiele und wendet die Theorie auf oskulierende Kegelschnitte und „spirales sinusoïdes“ an. Auf diese Differentialinvarianten der Kegelschnitte beziehen sich anscheinend auch die neueren Untersuchungen von Gwyther [1].

Nun giebt es aber auch Zwischenglieder zwischen den gewöhnlichen und natürlichen Koordinaten. Die Gruppe der Euclidischen Bewegungen besitzt nämlich drei *Untergruppen*: die zweigliedrige Gruppe aller Translationen, die eingliedrige Gruppe der Translationen in einer Richtung und die ebenfalls eingliedrige Rotationsgruppe. Zu jeder von diesen gehören (Differential-) Invarianten; jedes Paar von solchen kann als Bestimmungsstücke dienen, indem durch eine Gleichung zwischen denselben eine Kurve bezogen wird auf ein unvollständiges aus einer Axenrichtung oder einer Axe oder einem Ursprung bestehendes Koordinatensystem. Man kann daher solche Bestimmungsstücke als *halbnatürliche* (Sylvester [1] S. 10 *semiintrinsic equation*) Koordinaten bezeichnen. Auch diese haben vielfach Anwendung gefunden.

Zunächst ist zu bemerken, dafs die Kombinationen (φ, s) und (φ, ϱ) nur dann als natürliche Koordinaten aufzufassen sind, wenn der Winkel φ, wie z. B. bei EULER [**5**], KRAUSE, PETERS u. a. von einer festen Kurventangente an gezählt wird; sie gehören dagegen als halbnatürliche Koordinaten zur *zweigliedrigen Translationsgruppe*, wenn, was meistens geschieht, φ als Winkel der Tangente mit einer festen Axenrichtung aufgefafst wird (φ ist dann Differentialinvariante 1. Ordnung).

Die *eingliedrige Translationsgruppe* läfst eine der cartesischen Veränderlichen selbst, z. B. x invariant. Die sich hier zunächst darbietenden Koordinaten x und $y' = \frac{dx}{dy}$ haben nur wenig Anwendung gefunden. Deutet man y' als Ordinate einer andern Kurve, so kommt die Aufgabe darauf zurück zu einer Kurve (x, y'), deren Integralkurve oder Quadratrix (x, y) zu bestimmen. In diesem Sinne wären hier Arbeiten von ABDANK-ABAKANOWICZ [**1**], MACHOVEC [**1**], SOBOTKA [**1**] und A. HAAS [**1**] zu nennen. Im Wesentlichen auf dasselbe kommt es hinaus, wenn RABUT [**1**] die „Lignes de RIBAUCOUR“ durch eine Gleichung zwischen der Ordinate y und dem Richtungswinkel φ definiert. Weit wichtiger ist jedoch die Zusammenstellung der Abscisse x mit dem Bogen s; ich schlage hierfür den Namen *Bogenkoordinaten* vor. Dieselben finden sich schon bei EULER [**1**]; E. G. FISCHER [**1**] betont, dafs für $\frac{dx}{ds} > 1$ die Kurve imaginär wird und behandelt die Beispiele $s = lx$ und $x = ls$; ebenso hat in neuerer Zeit STARKOW [**1**] gezeigt, dafs für $b > 1$ die Kurve $y = a + bs$ imaginär wird. WERNEBURG stellt 28 Koordinatenbestimmungen auf, indem er alle Kombinationen zu zweien aus den acht Gröfsen bildet: Abscisse, Ordinate, Normale, Subnormale, Tangente, Subtangente, Bogen und Richtungswinkel (osculi angulum), wovon natürlich viele keine eigentlichen Koordinaten sind. Er geht dann auf die binomischen Kurven $s^{m+n} = a^n x^m$ ein und nennt dieselben, weil die Cykloide für $m = n = 1$ sich darunter befindet, *cykloidisches Geschlecht*. Dieselbe Auffassung vertritt FLEISCHER [**1**], der diese Kurven als Familie der Cykloiden der Familie der Parabeln $y^{m+n} = a^n x^m$ gegenüberstellt. Er findet unter denselben übrigens auch die Astroide, die NEILsche Parabel und die Evolute der Kettenlinie. NIES [**1**] untersucht in unvollkommener Weise einige Spezialfälle dieser Kurven; viel weiter gelangt dagegen RICH. MÜLLER [**1**], der zeigt, dafs für $n = 1$ ein Teil der Kurven algebraisch wird, während die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ durch elliptische p-Funktionen dargestellt werden. Endlich beweist CESÀRO [**14**], dafs diese binomischen Kurven die Evoluten der „Lignes de RIBAUCOUR“ sind und COLLIGNON [**2**] (p. 144 zeigt, dafs diese Kurven wieder erzeugt werden, wenn ein durch sie hindurch gehender schiefer Cylinder abgewickelt wird. Spitzer [1] macht auf die einfache Gleichung aufmerksam, welche für die Delaunayschen Kurven zwischen Bogenlänge und Ordinate besteht. Durch Werneburg, dessen Arbeit er aber nur aus einer Rezension [1]) kennt, angeregt, untersucht Tortolini [1] die Kurven $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{s^2}{b^2} = 1$ und $s = alx$ und macht namentlich Anwendungen auf Evolventen. Am eingehendsten hat sich jedoch wohl M. Cantor in seiner Inauguraldissertation [1] mit den Bogenkoordinaten beschäftigt. Er macht auf Gleichungen von solchen Kurven aufmerksam, die ganz imaginär sind, untersucht eingehend die allgemeine Gleichung zweiten Grades in x und s (S. 8), die binomischen Kurven (S. 17) und einige transscendente Kurven in x und s, darunter die Kettenlinie (S. 20) und den Kreis (S. 21). Schliefslich wendet er sich zur Bestimmung von Evoluten (S. 21) und Parallelkurven (S. 32).

Unter den halbnatürlichen Koordinaten, zu welchen die *Rotationsgruppe* Anlafs giebt, ist am wichtigsten die Kombination aus Radiusvektor r und Ursprungslot auf die Tangente p; die (r, p)-Gleichung nennt Nanson [1], der ihre Ordnung bestimmt und sie auf Tangential- und Normaleigenschaften anwendet, *Vektorpedalgleichung*. Diese Koordinaten erweisen sich als besonders brauchbar bei Aufgaben über Centralbewegung und erscheinen daher bereits im 18. Jahrhundert z. B. bei Keill [1], der schon die durch Gascheau und Koenigs [2]) so bekannt gewordene Aufgabe der Bewegung unter dem Einflufs einer zum Kubus des Abstands reziproken Centralkraft behandelt. Maclaurin [1] zeigt, dafs die Fufspunktkurven der binomischen Kurven in (r, p)-Koordinaten wieder solche Kurven sind. Hieran schliefst sich eine Untersuchung Landerbecks [1], der unter anderem feststellt, nach welchem Gesetz sich der Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor in den successiven Fufspunktkurven ändert. Euler [2] erörtert den Übergang von der Vektorpedalgleichung zur cartesischen Gleichung und stellt die Bedingung auf, dafs diese algebraisch wird. Ist ferner $f(r, p) = 0$ die Gleichung einer Kurve, r, p ein bestimmter Kurvenpunkt, R, P laufende Koordinaten, so betrachtet Purkiss [2] die oskulierende Kurve $\frac{\partial f}{\partial p}(P-p) + \frac{\partial f}{\partial r}(R-r) = 0$, eine Verallgemeinerung der logarithmischen Spirale.

Es giebt aber auch ein Lehrbuch der analytischen Geometrie von Sacchi [1], das sich durchaus auf die Vektorpedalkoordinaten stützt und

---

1) Bull. de Férussac 3, 73—74; 4, 150—155, 222—225 (1825).

2) Gascheau, Mem. Ac. Toulouse 1_8, part. II, 115 (1879); Bull. Soc. Mathém. Fr. 10 (1882), 207—219; Kœnigs, Bull. Soc. Mathém. Fr. 22 (1894), 25—27; vgl. auch van Blacke, Nouv. Mém. Soc. Mathém. Amsterd. 2 (1851).

eine überraschende Fülle von Anwendungen derselben enthält. Nach der Angabe von Fundamentalformeln (S. 1) wird die (r, p)-Gleichung zahlreicher Kurven, teils aus ihren Polargleichungen (S. 5), teils aus deren Eigenschaften (S. 16) hergeleitet. Es folgt die Diskussion (S. 22) der Kurven aus der (r, p)-Gleichung, die unendlich fernen Punkte, Asymptoten, Krümmungsradien und Spitzen, Evoluten, Evolventen, Trajektorien (S. 28), Fuſspunktkurven (S. 36), Brennlinien (S. 46), reziproke Polaren (S. 52); dann die CHASLESsche Transformation (S. 58) und die Anwendung auf Rektifikation und Quadratur der Kurven (S. 71). Eine besondere Behandlung erfahren noch die Kegelschnitte (S. 84), insbesondere kommt die Bestimmung der Krümmungscentra, die Berechnung der Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern und endlich das Theorem von FAGNANO zur Sprache. An anderer Stelle [2] macht SACCHI darauf aufmerksam, daſs, wenn eine bewegliche Kurve auf der x-Achse rollt, und es ist $f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)=0$ die Gleichung der Roulette, so ist $f\left(p, \frac{\sqrt{r^2-p^2}}{p}\right)=0$ die Gleichung der beweglichen Kurve, wobei der erzeugende Punkt Ursprung der Koordinaten r und p ist. Dieselbe Bemerkung kehrt in etwas anderer Form später bei PURSER [1] und DEMOULIN [1] wieder. Auch CHRYSTAL [1] wendet die Vektorpedalgleichung auf umgekehrte Rouletteuprobleme an und untersucht besonders den Fall identischer Centroden (bewegliche und feste Kurve kongruent).

Auſser einer nur vereinzelt bei H. RUOSS [1] vorkommenden Koordinatenbestimmung: Radiusvektor r und dessen Winkel ψ gegen die Tangente (von ihm *Polhöhe* genannt), womit die Krümmung polarreziproker und inverser Kurven untersucht wird (vergl. übrigens auch DEMOULIN [1]), gehören noch der Rotationsgruppe an die Koordinaten: Radiusvektor r und Bogenlänge s, welche zuerst bei TELLKAMPF [1] erscheinen und zur Evoluten- und Evolventenbestimmung gebraucht werden. SYLVESTER [1], der die (r, s)-Gleichung *Arcoradialgleichung* nennt, benützt sie zur Untersuchung höherer Kreisevolventen (Cyklodes) und wird dabei [3] [4] auf eine neue Klasse von Theoremen über Teilung von Zahlen geführt. COLLIGNON [2] untersucht mittelst der Arcoradialgleichung das Problem, auf welchen Kurven ein Punkt sich ohne Reibung unter einer dem Abstand von einem Punkt proportionalen Centralkraft bewegen muſs, damit die Bewegung *pendular* ist (d. h. daſs die Beziehung zwischen Bogen und Zeit dieselbe ist wie beim Pendel) und findet als Lösung die allgemeinen cykloidalen Kurven $r^2=as^2+2bs+c$. In einer mir leider nicht zugänglichen Arbeit erörtert PIRONDINI [4] die Natur des oskulierenden Kegelschnitts und drückt den letzteren durch eine Beziehung zwischen Bogen und Radiusvektor aus.

An die halbnatürlichen Koordinaten kann man solche Bestimmungsstücke anreihen, welche die Kurve nicht ihrer Gröfse, sondern nur ihrer Gestalt nach geben; es sind Invarianten der *Ähnlichkeitsgruppe* und als solche bieten sich dar irgend zwei der drei Winkel: Polarwinkel ϑ, Richtungswinkel φ und Tangentenwinkel ψ (Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor). Solche Koordinaten könnte man *Formkoordinaten* nennen; T. Hill [1], welcher von denselben Gebrauch macht und insbesondere die Kombination ϑ und ψ für sehr wichtig erklärt, redet von *equations of pure form*. Mit der Rotationsgruppe bildet die Ähnlichkeitsgruppe eine zweigliedrige Gruppe, deren Differentialinvarianten: der Tangentenwinkel ψ und der Winkel τ, unter welchem der Krümmungsradius vom Ursprung aus gesehen erscheint, ebenfalls als Koordinaten dienen könnten. Eine uneigentliche Koordinatenbestimmung liegt dagegen vor, wenn Ruffini [1] das Verhältnis $\frac{\varrho_1}{\varrho}$ (oder was auf dasselbe hinauskommt, den Carnotschen Winkel) als Funktion des Richtungswinkels φ giebt.

Überblicken wir das Vorstehende, so ergiebt sich, dafs die natürlichen Koordinaten die gewöhnlichen durchaus nicht zu ersetzen vermögen, so weit es sich um Untersuchung projektivischer Eigenschaften algebraischer Kurven, insbesondere der Beziehungen mehrerer Kurven handelt. Auch für die genaue Zeichnung der Kurven, insbesondere für die Bestimmung ihrer Doppelpunkte und Doppeltangenten mufs man immer auf die gewöhnlichen Koordinaten zurückgehen. Hingegen beherrschen die natürlichen Koordinaten, wie man sieht, das ganze Gebiet der Differentialgeometrie und bieten zugleich die Möglichkeit, die bisher so stark zurückgebliebene Theorie der transscendenten Kurven auf eine höhere Stufe zu bringen und für dieselben insbesondere die Errungenschaften auf dem Gebiet der algebraischen Kurven allmählich nutzbar zu machen. Auch pädagogisch sind die natürlichen Koordinaten von hohem Wert, weil sich mit ihrer Hülfe viele Betrachtungen und Beweise bedeutend vereinfachen. Seit dieselben vollends, auf der Gruppentheorie aufgebaut, aufgehört haben, im Gewande einer naturphilosophischen Spekulation zu erscheinen, ist zu hoffen, dafs diesen Koordinaten von seiten der Mathematiker (namentlich in Deutschland, wo sie fast gänzlich vergessen sind) gröfsere Beachtung geschenkt werden möge, und diese Hoffnung gewinnt sehr an Berechtigung durch die Erwägung, dafs auf dem Gebiet der Raumkurven natürliche Koordinaten bereits der Wissenschaft grofse Dienste geleistet haben, wie die schönen Arbeiten von Hoppe, Cesaro, Aoust und Pirondini beweisen.

Litteraturnachweis.

ABDANK-ABAKANOWICZ, B. [1] *Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications* (Paris 1886).

AMPÈRE. [1] *Sur les avantages qu'on peut retirer dans la théorie des courbes, de la considération des paraboles osculatrices avec des réflexions sur les fonctions différentielles dont la valeur ne change pas lors de la transformation des axes.* Journ. éc polyt. Cah. **14** (1808), 159—181.

AOUST. [1] *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris 1873). — [2] *Intégrales développantes obliques d'un ordre quelconque.* Comptes Rendus Paris **85** (1875), 609—612. — [3] *De la courbe-lieu des positions des centres de courbure d'une courbe donnée après son développement sur une ligne droite.* Mém. Ac. Marseille **24** (1880), 57 ff.

BELLAVITIS, G. [1] *Saggio d'applicazioni del calcolo delle equipollenze.* Ann. Regno Lomb. Ven. **5** (1835), 244 ff. — [2] *Sposizione del metodo delle equipollenze.* Mem. Soc. Ital. **25**: 2 (1855), 225—309.

BERNOULLI, JOHANN. [1] *De evolutione successiva et alternante curvae cujuscunque in infinitum continuata tandem cycloidem generante.* Opera IV (Lausanne und Genf 1742), 98—108.

DU BOIS-AYMÉ et BIGEON. [1] *Mémoire sur les développées des courbes planes, leur application à différentes considérations géométriques et à la construction des équations algébriques et transcendantes* (Paris 1829).

BRAVAIS. [1] *Sur l'équilibre des corps flottants* (Paris 1840).

BROCARD. [1] *Note sur quelques questions d'examens de licence.* Mathesis **2** (1882), 102—106.

BUDÉRUS. [1] *Über die Gleichungen zwischen Bogenlänge und Neigungswinkel der Tangente für die Kegelschnittslinien und einige andere Curven* (Marburg 1863), S. 1—36.

BURALI-FORTI. [1] *Introduction à la géométrie différentielle* (Paris 1897).

CANTOR, M. [1] *Über ein weniger gebräuchliches Coordinatensystem.* Diss. (Frankfurt 1851), S. 3—39.

CARNOT, L. [1] *Géométrie de position* (Paris 1803).

CASEY. [1] *On the catenary.* Mess. of Mathem. **3** (1866), 110—117. — [2] *On a new form of tangential equation.* Rep. Brit. Ass. (Meeting at Dublin) **48** (1878), 457—462.

CAVALLIN, C. B. S. [1] *Ett sätt att härleda och generalisera* LEGENDRES *formel* $\int_0^{2\pi} p\,d\omega = L$. Tidsskr. for Mathem. $\mathbf{6}_4$ (1882), 1—2.

CAYLEY, A. [1] *Find at any point* etc. Mess. of Mathem. **5** (1871), 187—190.

CESÀRO, E. [1] *Sur l'équation intrinsèque des courbes planes.* Mathesis **4** (1884), 233—235. — [2] *Les lignes barycentriques.* Nouv. Ann. de Mathém. $\mathbf{5}_3$ (1886), 511—520. — [3] *Remarques de géométrie infinitésimale.* Mathesis **7** (1887), 25—38. — [4] *Développantes du point.* Mathesis **8** (1888), 36—38. — [5] *Sur deux classes remarquables de lignes planes.* Nouv. Ann. de Mathém. $\mathbf{7}_3$ (1888), 171—190. — [6] *Remarques sur la théorie des roulettes.* Nouv. Ann. de Mathém. $\mathbf{7}_3$ (1888), 209—230. — [7] *Étude intrinsèque de quelques courbes planes.* Mathesis **9** (1889), 209—211. — [8] Mathesis **9** (1889), 240. — [9] *Remarques sur l'osculation.* Nouv. Ann. de Mathém. $\mathbf{9}_3$ (1890), 143—157. — [10] *Étude intrinsèques des coniques et des cassinoïdes.* Mathesis $\mathbf{1}_2$ (1891), 51—62. — [11] *Sobre algunas notas di* *geometria infinitesimal.* El Progreso Matem. **2** (1892), 212—214. — [**12**] *Costruzioni baricentriche.* Rivista di Matem. **2** (1892), 43—54. — [**13**] *À propos d'une question de géométrie infinitésimale.* Mathesis **3**$_2$ (1893), 177—183. — [**14**] *Sur une note de géométrie infinitésimale.* Nouv. Ann. de Mathém. **12**$_3$ (1894), 102—106. — [**15**] *Sulla trattazione intrinseca delle quistioni baricentriche.* Rivista di Matem. **5** (1895), 90—103. — [**16**] *Geometria intrinseca* (Napoli 1896).

Chrystal. [**1**] *On certain inverse roulette problems.* Proceed. Edinburgh Mathem. Soc. **5** (1887), 38—50.

Cifarelli. [**1**] *Sopra una classe di curve intrinsecamente analoghe alla catenaria di eguale resistenza.* Giorn. di Matem. **35** (1898), 183—184.

Collignon. [**1**] *Problème de géométrie.* Ass. franç. **11** (Congr. de La Rochelle) (1882), 69—85. — [**2**] *Problème de mécanique.* Ass. franc. **11** (Congr. de La Rochelle) (1882), 127—144.

Corancez, de. [**1**] *Mémoire sur la résolution des équations, contenant une méthode nouvelle pour construire par des procédés géométriques les racines réelles des équations de tous les dégrés.* Journ. Éc. Polytechn. Cah. **17** (1815), 212—262.

Cornu. [**1**] *Étude sur la diffraction.* Comptes Rendus Paris **78** (1874), 113—117.

Curran Skarp. [**1**] *On the successive evolutes of a curve.* Mess. of Mathem. **9**$_2$ (1880), 95—99.

Dawson and Ritter. [**1**] *Solutions of a question.* Educ. Times, Repr. **37** (1882), 51.

Demoulin, A. [**1**] *Sur une transformation géométrique applicable à la théorie des roulettes.* Mém. cour. Bruxelles in-8°, **45** (1891), 3—35.

Dupin. [**1**] *Sur les élements du troisième ordre de la courbure des lignes.* Comptes Rendus Paris **26** (1848), 321—325, 393—398.

Eggers, H. [**1**] *Über die Bestimmung von Curven durch ein System zwischen dem Krümmungsradius und dem ihrer Evolute* (Pr. Norden 1882).

v. Ettingshausen. [**1**] *Über die ebenen Curven, welche ihren Evoluten ähnlich sind.* Zeitschr. für Phys. und Mathem. (Wien) **9** (1831), 178—193.

Euler, L. [**1**] *Solutio singularis casus circa tautochronismum.* Comm. Ac. Petr. **6** (1738), 28—36. — [**2**] *De constructione aequationum ope motus tractorii aliisque ad methodum tangentium inversam pertinentium.* Comm. Ac. Petr. **8** (1741), 66—85. — [**3**] *Investigatio curvarum quae evolutae sui similes producunt.* Comm. Ac. Petr. **12** (1750), 3—52. — [**4**] *De reductione linearum curvarum ad arcus circulares.* Nov. Comm. Ac. Petr. **2** (1751), 3—38. — [**5**] *De arcubus curvarum aeque amplis earumque comparatione.* Nov. Comm. Ac. Petr. **12** (1768), 17—41. — [**6**] *Investigatio curvarum quae similes sunt suis evolutis vel primis vel secundis vel tertiis vel adeo ordinis cujuscunque.* Nov. Acta Ac. Petrop. **1** (1783), 75—116. — [**7**] *Problema geometricum ob singularia symptomata imprimis memorabile.* Nov. Acta Ac. Petr. **8** (1794), 87—115. — [**8**] *De curvis quarum radii osculi tenent rationem duplicatam distantiae a puncto fixo earumque mirabilibus proprietatibus.* Mem. Ac. Pétersb. **9**$_5$ (1824), 47—56.

Ferroni. [**1**] *Dimostrazione facile e naturale di alcuni teoremi geometrici ed analitici.* Mem. Soc. Ital. **16 : 1** (1813), 347—360.

Fischer. [**1**] *Über verschiedene Arten die Logarithmen geometrisch darzustellen.* Abh. Mathem. Cl. Ac. Berlin von 1804—1811, S. 1—10 (1815).

Fleischer, C. R. [**1**] *Von den Curven, von welchen $s^{m+n} = p^m s^n$ ist* (Pr. Grimma 1840), S. 1—30.

Fontaine des Bertins. [**1**] *Trouver les courbes qui se développent elles-mêmes.* Mémoires donnés à l'Académie royale des sciences, non imprimées dans leur temps (Paris 1764).

Fuss, N. [1] *Decas problematum geometricorum ex methodo tangentium inversa radium osculi spectantium.* Mém. Ac. Pétersb. 1_5 (1809), 88—137.

Gergonne. [1] *Essai sur l'expression analytique des courbes indépendamment de leur situation sur un plan.* Ann. de Mathém. **4** (1813), 42—55.

Godefroy. [1] *Détermination des rayons de courbure successives de certaines courbes.* Journ. Éc. Polytechn. 2_2 (1897), 19—50.

Greenhill. [1] *Graphic representation of the elliptic functions by means of the elastic curve.* Mess. of Mathem. 6_2 (1877), 182—188. — [2] *The intrinsic equation of the elastic curve.* Mess. of Mathem. 8_2 (1879), 82.

Guyou et Simart. [1] *Développements de géométrie du navire avec application au calcul de stabilité des navires.* Mém. prés. par div. sav. Paris **30**, Nr. 3 (1889).

Gwyther. [1] *On an intrinsic differential equation of conics and its relation to the invariants.* Proc. and Memoirs Manchester Lit. and Phil. Soc. 5_4 (1892), 138—139.

Haas, A. [1] *Lehrbuch der Integralrechnung.* II. (Stuttgart 1899).

Habich. [1] *Sur un système particulier de coordonnées; application aux caustiques planes.* Annali di Matem. 2_2 (1868), 134—139; poln. Übersetzung: Rocznik Crakow **16** (1870).

Haton de la Goupillière. [1] *Sur les centres successives de courbure des lignes planes.* Comptes Rendus Paris **46** (1858), 930—933. — [2] *Des centres de courbure successives.* Journ. de Mathém. 4_2 (1859), 183—193. — [3] *Recherches sur les centres de gravité.* Journ Éc. Polyt. Cah. **43** (1870), 123—155. — [4] *Recherche de la brachistochrone d'un corps pesant eu égard aux résistances passives.* Comptes Rendus Paris **82** (1876), 884—886. — [5] *Les développoides.* Ann. Soc. Scient. Brux. **2**: B (1877), 1—24. — [6] *Problème inverse des brachistochrones.* Mém. prés. par div. sav. Paris **28**, Nr. 5 (1884), p. 1—42. — [7] *Détermination du centre des moyennes distances des centres de courbure des développées d'une ligne plane quelconque* Comptes Rendus Paris **115** (1892), 856—861.

Hicks, W. M. [1] *Notes on pedals.* Mess. of Mathem. 6_2 (1877), 94—96.

Hiern. [1] *A theory of the forms of floating leaves in certain plants.* Proceed. Cambr. Phil. Soc. **2** (1871), 215—217, 227—236.

Hill, T. [1] *Systems of Coordinates in one plane.* Proceed. Amer. Association (Meeting at Montreal) (1857), 42—45.

Husquin de Rhéville. [1] *Sur l'aberration de courbure.* Nouv. Ann. de Mathém. 9_3 (1890), 138—140.

Keill, J. [1] *De inverso problemate virium centripetarum et ejusdem problematis solutio nova.* Phil. Trans. R. Soc. Lond. **29** (1714), 91—111.

Krause. [1] *De philosophiae et matheseos notione earumque intima conjunctione* (Diss. Jena 1802). — [2] *Anleitung zur Naturphilosophie* (Jena 1804), S. 127 ff. — [3] *Novae theoriae linearum curvarum originariae et vere scientificae specimina quinque* (Monachii 1835).

Lacroix. [1] *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral.* I, II. (Paris 1797—1798).

Laisant, C. A. [1] *Solution d'une question.* Nouv. Corresp. Mathém. **5** (1879), 209—211. — [2] *Sur deux genres remarquables de courbes planes.* Ass. franç. **19** (Congr. de Limoges) (1890), 74—78.

Landerbeck. [1] *Et slags krokliniers construction och jämförande.* Sv. Vet. Ac. Handl. 1787, 107—116.

Machovec. [1] *Über die Krümmungscentra der Integralcurven* (böhm.). Časopis 19 (1890), 67.

Maclaurin. [1] *Tractatus de curvarum constructione et mensura.* Phil. Trans. 30 (1718), 803—812.

Mannheim. [1] *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite.* Journ. de Mathém. 4_2 (1859), 93—104.

Mansion. [1] *Principes de la théorie des développoïdes des courbes planes.* Nouv. Corresp. Mathém. **5** (1879), 356—363, 398—403.

Markoff, A. A. [1] *Einige Beispiele der Auflösung einiger besonderer Arten von Aufgaben de maximis et minimis* (russ.). Mitt. Mathem. Ges. Charkow 1_2 (18..), 250—276.

Monro. [1] *Solution of a question.* Educ. Times, Repr. **34** (1881), 78—79.

Müller, Rich. [1] *Über die Curven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional ist* (Pr. Berlin 1883), S. 3—15.

Nanson, E. [1] *On the vector pedal equation of a plane curve.* Mess. of Mathem. ... (1898), 80—84.

Natani, L. [1] *Anwendungen eines gewissen Coordinatensystems* (Berlin 1857).[1] [2] Hoffmann, *Mathem. Wörterbuch* **7** (Berlin 1867). — [3] *Über Zahnräder.* Repertorium für Experimentalphysik **4** (1868), 205—215.

Nies, C. [1] *Untersuchungen über Curven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional ist* (Pr. Darmstadt 1886), S. 1—25.

Onnen, H. [1] *Aanteekeningen betreffende de theorie der essentieele vergelijkingen vlakke kromme lijnen.* Nieuw Archief voor Wiskunde **1** (1875), 1—...; **4** (1878), 30—56; **5** (1879), 1—34. — Französische Übersetzung: Archives néerlandaises **10** (1875), 361—379; **14** (1879), 1—75.

Peters, A. [1] *Neue Curvenlehre* (Dresden 1838).

Pirondini, G. [1] *Note géométrique.* Nouv. Ann. de Mathém. 5_3 (1886), 460—48.. [2] *Sulla similitudine delle curve.* Annali di Matem. 15_2 (1887), 53—66. [3] *Alcuni quistioni sulle evolute successive di una linea piana.* Rend. ... Napoli 5_2 (1891), 139—150. — [4] *Sur la conique osculatrice des lignes planes.* Jornal de sciencias matem. (Coimbra) **11** (1892), 9—41.

Puiseux. [1] *Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes.* Journ. de Mathém. **9** (1844), 377—399.

Purkiss. [1] *On Envelopes.* Mess. of Mathem. **2** (1864), 96—100. — [2] *The equation of the tangent.* Mess. of Mathem. **3** (1866), 19—22.

Purser. [1] *Notes on Rolling Curves.* Qu. Journ. of Mathem. **7** (1866), 129—135.

Rabut. [1] L'Intermédiaire des Mathém. **2** (1895), 72—73.

Retali. [1] *Sui centri di gravità di alcuni curve.* Giorn. di matem. **12** (1874), 326—337.

Ruffini, F. P. [1] *Della ragione che i raggi di curvatura di una linea piana hanno a quelli della sua evoluta.* Mem. Ist. Bologna 6_4 (1886), 715—730.

Ruoss, H. [1] *Die metrischen Beziehungen der Krümmung reciproker Flächen und Kurven, sowie der Flächeninhalte der letzteren.* Math.-Nat. Mitteil. (Böklen) ... (1891), 46—69; 73—92.

Sacchi, G. [1] *Geometria analitica delle linee piane* (Pavia 1854). — [2] *Note sur la roulettes.* Nouv. Ann. de Mathém. 2_2 (1863), 172—181.

1) Diese Arbeit ist ein Ausschnitt aus einem bisher nicht zu ermittelnden Sammelwerk.

de Saussure, R. [1] *Notes sur les lignes cycloïdales.* Am. Journ. of Mathem. **17** (1895), 269—272.

Scheffers, G. [1] *Lies Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen* (Leipzig 1891), S. 562—566.

Servais. [1] *Sur l'aberration de courbure.* Mathesis $\mathbf{2}_2$ (1892), 129—130.

Sobotka. [1] *Beitrag zur infinitesimalen Geometrie der Integralcurven.* Sitz.-Ber. Wien (Abth. IIa) **107** (1898), 569—623.

Spitzer, S. [1] *Merkwürdige Eigenschaft derjenigen Curve, welche vom Brennpunkt einer Ellipse beschrieben wird, wenn diese auf einer Geraden rollt.* Arch. der Mathem. **48** (1868), 235—238.

Starkoff. [1] *Sur la résolution des problèmes géométriques par le calcul des variations.* Bull. Soc. Mathém. France **13** (1885), 132—142.

Sucharda, A. [1] *Construction der Normalen und des Krümmungscentrums einer beliebigen ebenen Curve* (böhm.). Abh. böhm. Acad. Prag 1897, Nr. 25, 3 S.

Sylvester. [1] *On the successive involutes to a circle.* Rep. Brit. Ass. **38** (Meeting at Norwich) (1868), part II: 10—11. — [2] *Note on successive involutes to a circle.* Phil. Mag. $\mathbf{36}_4$ (1868), 295—306. — [3] *On the successive involutes to a circle.* Rep. Brit. Ass. **39** (Meeting at Exeter) (1869), part II: 15. — [4] *Outline trace of the theory of reducible cyclodes.* Proc. Lond. Mathem. Soc. **2** (1869), 137—160.

Tellkampf. [1] *Nova curvas investigandi methodus.* Journ. für Mathem. **14** (1835), 93—109.

Timmermans. [1] *Essai sur une nouvelle théorie des courbes déduites de la considération de leurs rayons de courbure.* Mém. Soc. Lille **6** (1828—29), 46—87.

Tortolini. [1] *Alcuni applicazioni del metodo inverso delle tangenti.* Giorn. Arcad. **29** (1839); franz. Übers. Journ. für Mathem. **26** (1843), 288—310.

Transon, A. [1] *Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces.* Journ. de Mathém. **6** (1841), 191—208.

Tucker. [1] *On radial curves.* Ed. Times, Repr. **1** (1864), 16—19; **2**, 27—38. — [2] *Radial Curves.* Proc. London Mathem. Soc. **1** (1865). — [3] *Curves whose evolutes are similar to themselves.* Mess. of Mathem. **3** (1866), 191—192. — [4] *The radial of an Ellipse.* Qu. Journ. of Mathem. **18** (1882), 311—313.

Walton. [1] *On the discontinuity of the intrinsic equations to curves.* Qu. Journ. of Mathem. **5** (1862), 260—264.

Werneburg. [1] *Curvarum aliquot nuper repertarum synopsis* (Jena 1824).

Whewell. [1] *On the intrinsic equation of a curve and its application.* Trans. Cambr. Phil. Soc. **8** (1849), 659—671; **9** (1851), 150 ff.

Wölffing. [1] *Über Pseudotrochoïden.* Zeitschr. für Mathem. **44** (1899), 141—166.

Zimmermann. [1] *Zur Theorie der Krümmung ebener Kurven.* Zeitschr. für Mathem. **28** (1883), 115—116.

Machovec. [1] *Über die Krümmungscentra der Integralcurven* (böhm.). Casopis 19 (1890), 67.

Maclaurin. [1] *Tractatus de curvarum constructione et mensura.* Phil. Trans. 30 (1718), 803—812.

Mannheim. [1] *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite.* Journ. de Mathém. 4_2 (1859), 93—104.

Mansion. [1] *Principes de la théorie des développoïdes des courbes planes.* Nouv. Corresp. Mathém. **5** (1879), 356—363, 398—403.

Markoff, A. A. [1] *Einige Beispiele der Auflösung einiger besonderer Arten von Aufgaben de maximis et minimis* (russ.). Mitt. Mathem. Ges. Charkow $\mathbf{1}_2$ (1889), 250—276.

Monro. [1] *Solution of a question.* Educ. Times, Repr. **34** (1881), 78—79.

Müller, Rich [1] *Über die Curven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional ist* (Pr. Berlin 1883), S. 3—15.

Nanson, E. [1] *On the vector pedal equation of a plane curve.* Mess. of Mathem. 28 (1898), 80—84.

Natani, L. [1] *Anwendungen eines gewissen Coordinatensystems* (Berlin 1857).[1] — [2] Hoffmann, *Mathem. Wörterbuch* **7** (Berlin 1867). — [3] *Über Zahnräder.* Repertorium für Experimentalphysik **4** (1868), 205—215.

Nies, C. [1] *Untersuchungen über Curven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional ist* (Pr. Darmstadt 1886), S. 1—25.

Onnen, H. [1] *Aanteekeningen betreffende de theorie der essentieele vergelijkingen der vlakke kromme lijnen.* Nieuw Archief voor Wiskunde **1** (1875), 1—40; **4** (1878), 30—56; **5** (1879), 1—34. — Französische Übersetzung: Archives néerlandaises **10** (1875), 361—379; **14** (1879), 1—75.

Peters, A. [1] *Neue Curvenlehre* (Dresden 1838).

Pirondini, G. [1] *Note géométrique.* Nouv. Ann. de Mathém. $\mathbf{5}_3$ (1886), 460—480. — [2] *Sulla similitudine delle curve.* Annali di Matem. $\mathbf{15}_2$ (1887), 53—66. — [3] *Alcuni quistioni sulle evolute successive di una linea piana.* Rend. Acc. Napoli $\mathbf{5}_2$ (1891), 139—150. — [4] *Sur la conique osculatrice des lignes planes.* Jornal de sciencias matem. (Coimbra) **11** (1892), 9—41.

Puiseux. [1] *Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes.* Journ. de Mathém. **9** (1844), 377—399.

Purkiss. [1] *On Envelopes.* Mess. of Mathem. **2** (1864), 96—100. — [2] *The equation of the tangent.* Mess. of Mathem. **3** (1866), 19—22.

Purser. [1] *Notes on Rolling Curves.* Qu. Journ. of Mathem. **7** (1866), 129—135.

Rabut. [1] L'Intermédiaire des Mathém. **2** (1895), 72—73.

Retali. [1] *Sui centri di gravità di alcuni curve.* Giorn. di matem. **12** (1874), 326—337.

Ruffini, F. P. [1] *Della ragione che i raggi di curvatura di una linea piana hanno a quelli della sua evoluta.* Mem. Ist. Bologna $\mathbf{6}_4$ (1886), 715—730.

Ruoss, H. [1] *Die metrischen Beziehungen der Krümmung reciproker Flächen und Kurven, sowie der Flächeninhalte der letzteren.* Math.-Nat. Mitteil (Böklen) 4 (1891), 46—69; 73—92.

Sacchi, G. [1] *Geometria analitica delle linee piane* (Pavia 1854). — [2] *Note sur les roulettes.* Nouv. Ann. de Mathém. $\mathbf{2}_2$ (1863), 172—181.

1) Diese Arbeit ist ein Ausschnitt aus einem bisher nicht zu ermittelnden Sammelwerk.

Alquanto più importante è l'appunto, che può farsi all' autore, di non aver tenuto conto adeguato del contributo arrecato dai matematici italiani allo sviluppo della teoria di CANTOR.

È noto che il PEANO lavora da vari anni alla volgarizzazione dell' uso dei simboli della logica matematica. Malgrado i pregiudizi che dominano ancora contro tali simboli, basta aver avuto occasione di valersene per riconoscere che il vantaggio che dal loro uso deriva non consiste solo nella brevità e nella universalità, ma principalmente nel fatto che esso obbliga ad un' analisi esatta e rigorosa dei concetti e delle definizioni fondamentali, per modo che qualunque minima imperfezione logica, che coll' uso del linguaggio comune passerebbe inosservata, viene di necessità alla luce. Questo vantaggio riesce particolarmente sensibile in una teoria che, come quella di cui discorriamo, è assai più logica che algoritmica. E difatti i lavori del PEANO e di quelli che seguono la sua stessa via, specialmente del BURALI-FORTI, segnano un reale progresso nella teoria di CANTOR; sicchè sarebbe stato desiderabile che il SCHÖNFLIES, sfidando le difficoltà che presenta la lettura di essi, ne avesse riferito i più importanti risultati.

Infine mi sembra sarebbe stato consono al carattere del lavoro di cui parliamo l'aggiungervi una lista bibliografica completa dell' argomento; e questo, che sarebbe complemento opportuno di tutte le parti dell' *Enciclopedia*, ma che per molte di esse presenterebbe gravi difficoltà d'attuazione, non ne offre invece alcuna per una teoria, le cui origini risalgono a meno d'un trentennio, e che solo da vent' anni ha preso una certa diffusione. Per quanto riguarda gli scritti pubblicati fino all' anno 1893, ne ho dato l' elenco nelle mie note già citate; quì lo completo continuandolo sino a tutto il 1899.

LEVI-CIVITA, T., *Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici.* — Atti dell' Ist. Veneto 4_7, 1893, 1765—1815.

ILLIGENS, E., *Die unendliche Anzahl und die Mathematik.* — Münster 1893, Theissing.

GIUDICE, F., *Sui numeri dati mediante insiemi di numeri razionali.* — Periodico di matem. 8, 1893, 144—150, 172—180.

PEANO, G., *Teoria dei gruppi di punti.* Torino 1894, Fodratti e Lecco. Estratto dal *Formulaire de mathématiques* (Turin 1895, Bocca-Clausen), 58—64, e dalla Rivista di matem. 4, 1894, 33—35.

VIVANTI, G., *Teoria degli aggregati.* Torino 1894, Fodratti e Lecco. Estratto dal *Formulaire de mathématiques* (Turin 1895, Bocca-Clausen), 65—74, e dalla Rivista di matem. 3, 1893, 189—192, e 4, 1894, 135—140.

GARIBALDI, C., *Sull' estensione degli aggregati numerabili.* — Rend. del Circ. matem. di Palermo 8, 1894, 157—160.

Machovec. [1] *Über die Krümmungscentra der Integralcurven* (böhm.). Casopis 19 (1890), 67.

Maclaurin. [1] *Tractatus de curvarum constructione et mensura.* Phil. Trans. 30 (1718), 803—812.

Mannheim. [1] *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite.* Journ. de Mathém. 4_2 (1859), 93—104.

Mansion. [1] *Principes de la théorie des développoïdes des courbes planes.* Nouv. Corresp. Mathém. 5 (1879), 356—363, 398—403.

Markoff, A. A. [1] *Einige Beispiele der Auflösung einiger besonderer Arten von Aufgaben de maximis et minimis* (russ.). Mitt. Mathem. Ges. Charkow 1_2 (1889), 250—276.

Monro. [1] *Solution of a question.* Educ. Times, Repr. 34 (1881), 78—79.

Müller, Rich [1] *Über die Curven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional ist* (Pr. Berlin 1883), S. 3—15.

Nanson, E. [1] *On the vector pedal equation of a plane curve.* Mess. of Mathem. 28 (1898), 80—84.

Natani, L. [1] *Anwendungen eines gewissen Coordinatensystems* (Berlin 1857).¹) — [2] Hoffmann, *Mathem. Wörterbuch* 7 (Berlin 1867). — [3] *Über Zahnräder.* Repertorium für Experimentalphysik 4 (1868), 205—215.

Nies, C. [1] *Untersuchungen über Curven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional ist* (Pr. Darmstadt 1886), S. 1—25.

Onnen, H. [1] *Aanteekeningen betreffende de theorie der essentieele vergelijkingen der vlakke kromme lijnen.* Nieuw Archief voor Wiskunde 1 (1875), 1—40; 4 (1878), 30—56; 5 (1879), 1—34. — Französische Übersetzung: Archives néerlandaises 10 (1875), 361—379; 14 (1879), 1—75.

Peters, A. [1] *Neue Curvenlehre* (Dresden 1838).

Pirondini, G. [1] *Note géométrique.* Nouv. Ann. de Mathém. 5_3 (1886), 460—480. — [2] *Sulla similitudine delle curve.* Annali di Matem. 15_2 (1887), 53—66. — [3] *Alcuni quistioni sulle evolute successive di una linea piana.* Rend. Acc. Napoli 5_2 (1891), 139—150. — [4] *Sur la conique osculatrice des lignes planes.* Jornal de sciencias matem. (Coimbra) 11 (1892), 9—41.

Puiseux. [1] *Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes.* Journ. de Mathém. 9 (1844), 377—399.

Purkiss. [1] *On Envelopes.* Mess. of Mathem. 2 (1864), 96—100. — [2] *The equation of the tangent.* Mess. of Mathem. 3 (1866), 19—22.

Purser. [1] *Notes on Rolling Curves.* Qu. Journ. of Mathem. 7 (1866), 129—135.

Rabut. [1] L'Intermédiaire des Mathém. 2 (1895), 72—73.

Retali. [1] *Sui centri di gravità di alcuni curve.* Giorn. di matem. 12 (1874), 326—337.

Ruffini, F. P. [1] *Della ragione che i raggi di curvatura di una linea piana hanno a quelli della sua evoluta.* Mem. Ist. Bologna 6_4 (1886), 715—730.

Ruoss, H. [1] *Die metrischen Beziehungen der Krümmung reciproker Flächen und Kurven, sowie der Flächeninhalte der letzteren.* Math.-Nat. Mitteil. (Böklen) (1891), 46—69; 73—92.

Sacchi, G. [1] *Geometria analitica delle linee piane* (Pavia 1854). — [2] *Note sur roulettes.* Nouv. Ann. de Mathém. 2_2 (1863), 172—181.

1) Diese Arbeit ist ein Ausschnitt aus einem bisher nicht zu ermittelnden Sammelwerk.

Le Roy, E., et Vincent, G., *Sur l'idée de nombre.* — Revue de métaphysique et de morale **4**, 1896, 738—755.

Bettazzi, R., *Sulla catena di un ente in un gruppo.* — Atti dell' Acc. di Torino **31**, 1896, 446—456.

Bettazzi, R., *Gruppi finiti ed infiniti di enti.* — Atti dell' Acc. di Torino **31**, 1896, 506—512.

Bettazzi, R., *Fondamenti per una teoria generale dei gruppi.* — Periodico di matem. **11**, 1896, 81—96, 112—142, 173—182.

Couturat, L., *De l'infini mathématique.* — Paris 1896, Alcan.

Hadamard, J., et Lorey, W., *Question 765, Réponse.* — L'Intermédiaire des mathématiciens **3**, 1896, 53, 209.

Biasi, G., *Sulla definizione di infinito.* — Periodico di matem. **12**, 1897, 34—35.

Bettazzi, R., *Appendice ai Fondamenti per una teoria generale dei gruppi.* — Periodico di matem. **12**, 1897, 40—42.

Bettazzi, R., *Sulla definizione d' infinito.* — Periodico di matem. **12**, 1897, 91—92.

Burali-Forti, C., *Le classi finite.* — Atti dell' Acc. di Torino **32**, 1897, 34—52.

Burali-Forti, C., *Sopra un teorema del Sig. G. Cantor.* — Atti dell' Acc. di Torino **32**, 1897, 229—237.

Bettazzi, R., *Sulla definizione del gruppo finito.* — Atti dell' Acc. di Torino **32**, 1897, 352—355.

Burali-Forti, C., *Una questione sui numeri transfiniti.* — Rend. del Circ. matem. di Palermo **11**, 1897, 154—164.

Burali-Forti, C., *Sulle classi ben ordinate.* — Rend. del Circ. matem. di Palermo **11**, 1897, 260.

Cantor, G., *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.* II. Art. — Mathem. Ann. **49**, 1897, 207—246. — Trad. francese di F. Marotte, Paris 1899, Hermann.

Schönflies, A., *Transfinite Zahlen, das Axiom des Archimedes und die projectivische Geometrie.* — Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **5**, 1897, 75—81.

Schröder, E., *Ueber G. Cantor'sche Sätze.* — Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **5**, 1897, 81—82.

Veronese, G., *Sul postulato della continuità.* — Rend. dell' Acc. dei Lincei $\mathbf{6}_5 : 2$, 1897, 161—168.

Schönflies, A., *Sur les nombres transfinis de M. Veronese.* — Rend. dell' Acc. dei Lincei $\mathbf{6}_5 : 2$, 1897, 362—368.

Janssen van Raay, W. H. L., *De jongsten onderzoekingen betreffende het oneindig groote.* — Handelingen van het 6de Nederl. Natuur- en Geneeskundig Congres 1897, 211—218.

Tannery, J., *De l'infini mathématique.* — Revue gén. des sc. pures et appl. **8**, 1897, 129—140.

Milhaud, G., *L'infini mathématique.* — Revue philosoph. **43**, 1897, 296—310.

Veronese, G., *Segmenti e numeri transfiniti.* — Rend. dell' Acc. dei Lincei $\mathbf{7}_5$: 1, 1898, 79—87.

Levi-Civita, T., *Sui numeri transfiniti.* — Rend. dell'Acc. dei Lincei $\mathbf{7}_5$:1, 1898, 91—96, 113—121.

Hurwitz, A., *Ueber die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Functionen in neuerer Zeit.* — Verhandlungen des Mathematiker-Kongresses in Zürich 1898, 91—112.

Hadamard, J., *Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles.* — Verh. des Mathem.-Kongr. in Zürich 1898, 200—202.

Pincherle, S., *Remarque relative à la communication de M. Hadamard.* — Verh. des Mathem.-Kongr. in Zürich 1898, 203.

Borel, É., *Remarque relative à la communication de M. Hadamard.* — Verh. des Mathem.-Kongr. in Zürich 1898, 204—205.

Borel, É., *Leçons sur la théorie des fonctions.* — Paris 1898, Gauthier-Villars.

Schröder, E., *Ueber zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze.* — Abh. der Leop.-Car. Akad. der Naturforscher **71**, 1898, Nr. 6.

Schröder, E., *Die selbständige Definition der Mächtigkeiten* 0, 1, 2, 3 *und die explicite Gleichzahligkeitsbedingung.* — Abh. der Leop.-Car. Akad. der Naturforscher **71**, 1898, Nr. 7.

Evellin, *Philosophie et mathématiques: l'infini nouveau.* — Revue philosoph. **45**, 1898, 113—119.

Evellin et Z., *Philosophie et mathématiques: l'infini nouveau.* — Revue philosoph. **46**, 1898, 473—486.

Killing, W., *Einführung in die Grundlagen der Geometrie.* T. 2. — Paderborn 1898, Schöningh.

Genocchi, A., *Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung herausgegeben von* G. Peano. Deutsche Uebersetzung von G. Bohlmann und A. Schepp. — Leipzig 1898—99, Teubner.

Galdeano, Z. G. de, *La moderna organización de la matemática.* Conferencia segunda. — El progreso matematico $\mathbf{1}_2$, 1899, 45—51, 77—87, 110—115, 154—156.

BOREL, É, *À propos de l'infini nouveau.* — Revue philosoph. **48**, 1899, 383—390.

VIVANTI, G., *Sugli aggregati perfetti.* — Rend. del Circ. matem. di Palermo **13**, 1899, 86—88.

VIVANTI, G., *Lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche.* — Reggio Calabria 1899, Massara (litogr.).

SCHÖNFLIES, A., *Mengenlehre.* — Encyklop. d. mathem. Wissensch. **1**, 1899, 184—207.

PRINGSHEIM, A., *Grundlagen der allgemeinen Functionenlehre.* — Encyklop. d. mathem. Wissensch. **2**, 1899, 1—53.

HANNEQUIN, A., *Essai critique sur l'hypothèse des atomes dans la science contemporaine.* — Paris 1899, Alcan.

BAIRE, R., *Sur les fonctions de variables réelles.* — Annali di matem. $\mathbf{3}_3$, 1899, 1—123.

Sophus Lie.

Ausführliches Verzeichnis seiner Schriften,

zusammengestellt

von

Friedrich Engel.

Mit Lie ist einer der erfindungsreichsten Mathematiker nicht bloß des neunzehnten Jahrhunderts, sondern aller Zeiten dahingegangen. Nur äußerst Wenige haben der mathematischen Forschung so ausgedehnte neue Gebiete erschlossen und Methoden von solcher Fruchtbarkeit und Tragweite geschaffen wie er. Auf den ihm eigensten Gebieten, den Integrationstheorien und der Gruppentheorie mit den zugehörigen Invariantentheorien und den Anwendungen auf Differentialgleichungen und Geometrie, auf diesen Gebieten kann man überhaupt Niemanden mit ihm vergleichen und noch lange Zeit werden die Mathematiker an den Ideen zehren, die er in verschwenderischer Fülle ausgestreut hat.

Es kann hier nicht meine Absicht sein, auch nur die wichtigsten Theorien und Methoden zu besprechen, die wir ihm zu verdanken haben. Dazu müßte ich ein Buch schreiben, das zeigt allein der Umfang des nachfolgenden Verzeichnisses seiner Schriften. Ich habe aber versucht, dieses Verzeichnis so einzurichten, daß man sich schon aus ihm allein wenigstens eine ungefähre Vorstellung von der Mannigfaltigkeit und der Tragweite der Probleme bilden kann, die Lie behandelt und erledigt hat. Deshalb will ich mich jetzt damit begnügen, den äußeren Lebensgang Lies kurz zu schildern, und was seine Werke angeht, das Verzeichnis reden lassen.

Marius Sophus Lie wurde geboren am 17. Dezember 1842 in Nordfjordeide am Eidsfjord, einem Zweige des Nordfjords in dem norwegischen Amte Bergenhus, wo sein Vater Pfarrer war. Als der Vater 1851 nach Moß am Christianiafjord versetzt wurde, besuchte Sophus zunächst die dortige Schule und dann von 1857 ab ein Privatgymnasium in Christiania. Im Jahre 1859 bezog er die Universität Christiania, um sich dem Studium der Realfächer zu widmen. Auf der Schule war Lie in allen Fächern gleich gut und auch auf der Universität zeigte er noch keine besondere Vorliebe für die Mathematik: weder er noch einer seiner Lehrer ahnte das in ihm schlummernde mathematische Genie. Er war deshalb, als er 1865 das mathematisch-naturwissenschaftliche Lehrerexamen bestanden hatte, längere Zeit ganz ungewifs, welchem Berufe er sich zuwenden sollte und empfand diese Ungewifsheit ziemlich drückend.

Erst im Jahre 1868 wurde das plötzlich anders. Er lernte zufällig die Schriften von Poncelet und Plücker kennen, und da ging ihm mit einemmale sein Beruf zur Mathematik auf. Der Trieb zur mathematischen Produktion erwachte in ihm und zwar mit um so gröfserer Stärke, je länger er verborgen geblieben war. Kein Wunder daher, dafs er lebenslang für Poncelet und Plücker eine ganz besondere Verehrung bewahrt hat.

Seine ersten Arbeiten beschäftigten sich mit der Abbildung der imaginären Punkte und Geraden der Ebene durch reelle Gebilde des gewöhnlichen Raumes und waren eine unmittelbare Anwendung des Plückerschen Gedankens, einen Raum von höherer Dimensionenzahl durch eine Schar von Kurven oder Flächen des gewöhnlichen Raums zu versinnlichen und überhaupt statt der Punkte die Individuen irgend einer Kurven- oder Flächenschar als Raumelement einzuführen. Indem er diesen Gedanken weiter verfolgte, wurde Lie allmählich zu dem Begriffe der Berührungstransformation geführt und schliefslich zu der Entwickelung einer allgemeinen Transformationstheorie, die seine Lebensaufgabe werden sollte.

Auf Grund jener ersten Arbeiten über die Repräsentation der Imaginären erhielt Lie 1869 ein Staatsstipendium, das ihm einen längeren Aufenthalt im Auslande ermöglichte. Den Winter 1869—70 brachte er in Berlin zu, wo er mit Felix Klein zusammentraf und mit diesem eine auf der Gemeinsamkeit der mathematischen Interessen beruhende Freundschaft schlofs. Beide veröffentlichten in der Folge eine Anzahl Abhandlungen gemeinsam, und verschiedene kleinere Arbeiten von Lie hat Klein nach dessen Angaben redigiert. Auch den Sommer 1870 verlebten Lie und Klein zusammen und zwar in Paris, wo sie besonders mit C. Jordan und G. Darboux Beziehungen anknüpften. Dort war es im Anfange Juli, dafs Lie seine berühmte Berührungstransformation entdeckte, die die geraden Linien des gewöhnlichen Raums in die Kugeln überführt. Die grofsartigen geometrischen Theorien, zu deren Entwickelung Lie durch diese Entdeckung veranlafst wurde, genügen allein schon, um Lie ein dauerndes Andenken in der Geschichte der Mathematik zu sichern.

Als Klein wegen des ausbrechenden Krieges Paris verlassen hatte, blieb Lie allein zurück und fafste dann den kühnen Plan, durch ganz Frankreich nach Italien zu Fufse zu wandern. Unterwegs wurde er jedoch als vermeintlicher Spion verhaftet und mufste volle vier Wochen in Fontainebleau im Gefängnisse zubringen, bis er durch die Vermittelung von Darboux befreit wurde. Er kam nun glücklich nach Italien und kehrte über die Schweiz und Deutschland nach Christiania zurück.

Anfang 1871 wurde Lie Universitätsstipendiat und erwarb im Juli desselben Jahres den philosophischen Doktorgrad, welcher an der norwegischen Universität mit der Habilitation gleichbedeutend ist. Aufserdem gab er Unterricht an einem Privatgymnasium. Im Winter 1871—72 bewarb er sich um eine erledigte Professur an der Universität Lund. Um ihn seinem Vaterlande zu erhalten, richteten seine Freunde an das Storthing den Antrag, für ihn eine Professur an der heimischen Universität zu schaffen, und unter dem Eindrucke der höchst anerkennenden Gutachten, die verschiedene hervorragende Mathematiker über seine Leistungen abgaben, fafste das Storthing einen dahin gehenden Beschlufs. Am 1. Juli 1872 wurde Lie zum Professor ernannt und konnte sich nunmehr ganz der Entwickelung seiner Ideen widmen, ohne seine kostbare Zeit durch Unterrichtgeben zersplittern zu müssen. Noch im Dezember 1872 verlobte er sich mit Anna Birch, einer entfernten Verwandten seines grofsen Landsmannes Abel, doch heiratete er erst im Jahre 1874. Aus dieser ungemein glücklichen Ehe sind zwei Töchter und ein Sohn hervorgegangen.

Lies Doktordissertation und Habilitationsschrift war der Entwickelung der Theorien gewidmet, zu denen jene vorhin erwähnte Berührungstransformation den Anlafs gegeben hatte. Aufser rein geometrischen Theorien spielen darin auch schon die partiellen Differentialgleichungen eine grofse Rolle, auf die Lie besonders durch die Weiterverfolgung des Begriffs der Berührungstransformation geführt worden war. Doch betrachtete er damals nur eine Reihe von speziellen Kategorien solcher Gleichungen. Im Winter 1871—72 wendete er sich der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. zu und fand, dafs diese vom Standpunkte der Berührungstransformationen aus durch Einführung gewisser neuer Begriffe eine bisher ungeahnte Einfachheit und Durchsichtigkeit erhalten konnte. Zugleich entdeckte er eine neue Integrationsmethode, die wesentlich niedrigere Integrationsoperationen verlangte, als die bisherigen. Im Frühjahre 1872 machte er seine Resultate andeutungsweise bekannt, und da stellte sich merkwürdigerweise heraus, dafs A. Mayer ungefähr gleichzeitig und unabhängig von Lie eine Integrationsmethode gefunden hatte, die genau ebenso niedrige Integrationsoperationen erforderte, wie die von Lie. Infolgedessen entwickelte sich zwischen beiden ein Briefwechsel, der deshalb von hohem Werte ist, weil Lie in seinen Briefen regelmäfsig ausführliche Mitteilungen über die Weiterentwickelung seiner Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung machte.

Im Jahre 1872 machte Lie noch zwei Entdeckungen, deren Weiterentwickelung ihn zu ganz neuen, ausgedehnten Theorien führte. Er fand, dafs man jedesmal, wenn man eine infinitesimale Transformation kennt, die eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. O. invariant läfst, einen Eulerschen Integrabilitätsfaktor dieser Gleichung angeben kann. Deshalb stellte er sich allgemein die Aufgabe, zu untersuchen, welchen Nutzen man aus bekannten infinitesimalen Transformationen ziehen kann, die ein zur Integration vorgelegtes System von Differentialgleichungen invariant lassen. Daraus entwickelte sich allmählich eine allgemeine Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen, die er 1872 in der Note: *Zur Theorie der Differentialprobleme* ankündigte, aber erst von 1874 ab ausführlich darstellte. Die Tragweite und vielseitige Anwendbarkeit dieser Integrationstheorie hat er später bei vielen Gelegenheiten betont und an zahlreichen Beispielen gezeigt.

Andrerseits bemerkte er, dafs der Begriff der infinitesimalen Transformation für die partiellen Differentialgleichungen 1. O. eine ganz eigentümliche Bedeutung besitzt. Indem er diesen Gedanken weiter verfolgte, gelangte er zu ganz neuen Integrationstheorien auf dem Gebiete dieser Differentialgleichungen. Die erste Mitteilung darüber machte er im Dezember 1872 in der Note: *Zur Invariantentheorie der Berührungstransformationen*, die besonders deshalb erwähnenswert ist, weil sie das erste Beispiel einer ganz neuen Theorie enthält, die den von F. Klein in seinem Erlanger Programme: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* aufgestellten allgemeinen Grundsätzen entspricht. Jedoch war Lie auf seine Theorie gekommen, ohne eine Anwendung dieser Kleinschen Grundsätze zu beabsichtigen, denn die ganze Fragestellung entsprach der Untersuchungsrichtung, die er schon seit längerer Zeit verfolgt hatte.

Das Jahr 1873 ist besonders denkwürdig, weil in den Herbst dieses Jahres die Anfänge der Theorie der Transformationsgruppen fallen. Lie fand, dafs die infinitesimalen Transformationen, die einer endlichen kontinuierlichen Gruppe angehören, in gewissen charakteristischen Beziehungen stehen, und es gelang ihm infolgedessen ziemlich leicht, alle derartigen Gruppen auf der geraden Linie zu bestimmen. Infolgedessen wagte er sich an die Bestimmung aller endlichen kontinuierlichen Gruppen von Punkt- und Berührungstransformationen der Ebene und im Winter 1873—74 gelang es ihm, allerdings nach geradezu schrecklichen Rechnungen, diese Bestimmung glücklich durchzuführen. Ursprünglich hatte er diese Aufgabe nur deshalb in Angriff genommen, weil ihre Erledigung für seine Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen von Bedeutung war. Aber nach und nach entwickelte sich die Theorie der Transformationsgruppen unter seinen Händen zu einer ganz selbständigen Theorie, die immer gröfsere Ausdehnung annahm.

Bis 1876 lebte LIE, wie er sich einmal ausgedrückt hat, nur in Transformationsgruppen und Integrationsproblem. Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. wurde durch ihn zu einem gewissen Abschlufs gebracht, denn er begnügte sich nicht damit, neue Integrationsmethoden zu entwickeln, sondern führte auch den Beweis, dafs diese Methoden das Gröfstmögliche leisten, solange man von der besonderen Beschaffenheit der auftretenden Funktionen absieht. In derselben Weise behandelte er auch das PFAFFsche Problem, leider ohne seine Untersuchungen darüber so vollständig zu veröffentlichen, wie die über die partiellen Differentialgleichungen 1. O. Ähnlich ging es leider auch mit seinen Arbeiten über die partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung. Bedenkt man, dafs er aufserdem seit 1873 (bis 1881) viel Zeit und Arbeitskraft auf die neue Ausgabe der Werke ABELS verwendete, mit deren Herausgabe SYLOW und er beauftragt worden waren, so mufs man über seine Leistungsfähigkeit staunen.

Die Teilnahmlosigkeit, der seine Integrationstheorien und seine Gruppentheorie begegneten, veranlafsten LIE, sich von 1876 ab wieder mehr der Geometrie zuzuwenden. So entstanden seine Untersuchungen über Minimalflächen, über die Klassifikation der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Linien, über die Flächen konstanter Krümmung und über Translationsflächen. Da er seit 1876 eine eigne Zeitschrift zur Verfügung hatte, das Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, das er zusammen mit G. O. SARS und WORM MÜLLER herausgab, so konnte er seine zahlreichen Arbeiten schneller zum Drucke befördern, als ihm das in den Schriften der Christianiaer Gesellschaft der Wissenschaften möglich gewesen war.

Im Jahre 1882 bemerkte LIE, dafs HALPHEN mit Untersuchungen über die Differentialinvarianten der allgemeinen projektiven Gruppe und mit darauf begründeten Integrationstheorien hervorgetreten war. Er sah sich daher veranlafst, der Welt zu zeigen, dafs er dieses Gebiet schon längst beherrschte und dafs seine alten Theorien eine ganz andre Tragweite hatten als die speziellen von HALPHEN. Deshalb fing er nunmehr an, eine ganze Reihe umfangreicher Arbeiten über seine Integrationstheorien zu veröffentlichen. Ende 1882 gelang es ihm überdies, auch für die unendlichen kontinuierlichen Gruppen eine allgemeine Theorie zu entwickeln und damit den Begriff der Differentialinvariante gleich in der denkbarsten Allgemeinheit zu definieren.

LIE hatte zwar im Laufe der Zeit verschiedene Pläne gemacht, einzelne seiner Theorien in einem gröfseren Werke zusammenhängend darzustellen, aber es war immer bei den Plänen geblieben. Auf Veranlassung von F. Klein und A. Mayer kam daher Engel im Herbste 1884 zu einem längeren Aufenthalt nach Christiania, teils um Lies Theorien unter dessen eigner Anleitung kennen zu lernen, teils um auf Lie einen sanften Druck auszuüben, damit er endlich ein solches Werk wirklich in Angriff nähme, wobei ihm Engel zur Hand gehen sollte. Die Folge war, dafs sich Lie entschlofs, ein grofses systematisches Werk über Transformationsgruppen zu schreiben, das freilich einen im Anfange nicht geahnten Umfang annahm und erst nach neunjähriger Arbeit glücklich zu Ende geführt worden ist.

Ostern 1886 folgte Lie einem Rufe an die Universität Leipzig als Nachfolger F. Kleins. Hier wurde ihm endlich zu teil, was er sich schon längst gewünscht hatte, er konnte Schüler um sich versammeln, die er in seine Theorien einführte und die in diesen Theorien arbeiteten. In Scheffers fand er einen Schüler, mit dessen Hilfe er das Bedürfnis nach einer elementar gehaltenen Einführung in seine Integrationstheorie und Gruppentheorie befriedigen konnte und später auch eine zusammenhängende Darstellung seiner älteren geometrischen Untersuchungen in Angriff nahm, die leider nicht über den ersten Band hinaus gediehen ist. Besonders stolz war er jedoch darauf, dafs von 1888 ab eine ganze Reihe von Schülern der Pariser École Normale nach Leipzig kamen, um seine Theorien an der Quelle zu studieren.

Im Herbste 1889 mufste Lie seine wissenschaftliche Thätigkeit auf längere Zeit unterbrechen, da er von einer schweren Neurasthenie befallen wurde. Er konnte keinen Schlaf mehr finden und fürchtete, dafs er niemals seine alte Geisteskraft wieder gewinnen würde. Ein längerer Aufenthalt in der Nervenheilanstalt Ilten bei Hannover hatte jedoch die günstigste Einwirkung auf sein Befinden. Allmählich stellte sich der Schlaf wieder ein, er fafste neuen Mut und begann auch wieder wissenschaftlich zu arbeiten. Noch in Ilten schrieb er seine Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie und über die Grundlagen der Theorie der unendlichen kontinuierlichen Gruppen nieder.

Im Winterhalbjahre 1890—91 konnte er seine Vorlesungen wieder aufnehmen. Seine wissenschaftliche Leistungsfähigkeit wie seine Erfinderkraft waren ganz die alten. Aber als Mensch war er nicht mehr der alte und wurde es auch nicht wieder. Er war mifstrauisch und empfindlich, was er sonst gar nicht gewesen war, und das steigerte sich immer mehr, so dafs er sich selbst und seinen besten Freunden das Leben schwer machte. Die äufsere Anerkennung, die er früher so schmerzlich vermifst hatte, fand er zwar jetzt in reichstem Mafse: die bedeutendsten Akademien — nur die Berliner war nicht darunter — wetteiferten, ihn zum

Mitgliede zu wählen. Aber auch diese äufseren Erfolge waren unvermögend, sein pessimistisches Urteil über die Menschen im allgemeinen und über die Mathematiker im besonderen freundlicher zu gestalten.

Im September 1898 kehrte Lie nach Christiania zurück, wo das Storthing für ihn unter ganz ausnahmsweise glänzenden Bedingungen die Stelle eines Professors „i Transformationsgruppernes Theori" geschaffen hatte. Aber er kehrte zurück als ein totkranker Mann. Eine perniziöse Anämie verzehrte langsam seine Kräfte. Am 18. Februar 1899 entschlief er sanft und ruhig.

Lie war eine echt germanische Hünengestalt. Ein mächtiger blonder Vollbart umrahmte sein Gesicht, dessen etwas breiten Zügen man das mathematische Genie zunächst nicht ansah. Auch die hinter scharfen Brillengläsern hervorblickenden blaugrauen Augen verrieten den bedeutenden Mann nicht. Seine ganze Erscheinung hatte aber doch etwas Ungewöhnliches, nur liefs sie mehr auf eine ungemeine körperliche Kraft und Leistungsfähigkeit schliefsen — Eigenschaften, die Lie auch wirklich besafs —, als auf einen so hervorragenden Geist.

Der beigegebenen Heliogravüre liegt eine im Jahre 1882 in Christiania aufgenommene Photographie zu Grunde. Sie giebt seine Züge getreu wieder. In den ersten Leipziger Jahren sah er noch genau so aus.

Jetzt noch ein paar Worte über seinen Charakter. Sein gerades offenes, jeder Verstellung feindes Wesen erweckte unwillkürlich Vertrauen. Man fühlte vom ersten Augenblicke an, dafs er sich so gab, wie er war, dafs man ihm gegenüber ganz offen sein durfte. Bei allem gerechtfertigten Selbstbewufstsein war er doch voll Anerkennung für die Leistungen andrer Mathematiker, so wenig er daraus ein Hehl machte, wenn ihm eine Persönlichkeit unsympathisch war. Er gestand ohne weiteres zu, dafs verschiedene Gebiete der Mathematik ihm fremd waren, weil sie für ihn nichts Anziehendes hatten, aber er urteilte nicht über Sachen ab, die er nicht kannte, oder that das höchstens im Scherze; leider mufs ich sagen, dafs ich nicht wenige Mathematiker gefunden habe, die seinen Leistungen gegenüber diesen Grundsatz nicht befolgten.

In Lies letzten Lebensjahren war mit seinem Gemütszustande eine Veränderung vorgegangen, die teils eine Nachwirkung jener vorher erwähnten nervösen Erkrankung war, teils wohl auch schon ein Vorbote seiner letzten Krankheit. Ich will jedoch bei dieser Veränderung, die den Verkehr mit ihm in immer steigendem Mafse erschwerte, nicht verweilen, denn für alle seine Freunde ist die Erinnerung daran höchst schmerzlich, und im Gedächtnisse der Nachwelt sollen diese trüben Erinnerungen nicht fortleben. Die Nachwelt soll sich Lie als Menschen so vorstellen, wie er war, bevor er unter dem Einflusse jener unheilvollen Erkrankung stand.

Das Bild des Mathematikers Lie aber wird in der Zukunft in immer hellerem Glanze erstrahlen. Nicht lange, so wird sein Name im Urteile aller unter den Mathematikern aller Zeiten als einer der ersten gelten und man wird nicht begreifen, daſs es jemals Mathematiker hat geben können, die anders über ihn geurteilt haben.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse der Lieschen Schriften habe ich die chronologische Anordnung gewählt. Trotz aller Bemühungen ist es mir aber nicht gelungen, bei jeder Schrift die genaue Zeit des Erscheinens festzustellen, so daſs ich die Anordnung innerhalb der einzelnen Jahre nicht immer durch Gründe rechtfertigen kann.

Ein bloſses Verzeichnis der Titel zu geben erschien mir nicht richtig, denn sehr viele der Titel sagen über den Inhalt der betreffenden Arbeiten gar nichts aus und der Leser kann daher aus einem solchen Verzeichnisse gar nicht ersehen, welche Arbeiten für ihn Interesse haben und welche nicht. Ich habe deshalb bei den meisten Arbeiten kurze Inhaltsangaben beigefügt. Ferner liebte es Lie in Anmerkungen und Noten allerhand Dinge mitzuteilen, die eigentlich mit dem Gegenstande der betreffenden Arbeit gar nichts zu thun haben. In meinen Inhaltsangaben habe ich darauf Rücksicht genommen, soweit es möglich war, ohne allzu ausführlich zu werden. Endlich habe ich namentlich bei den in den Mathematischen Annalen erschienenen Abhandlungen überall genau angegeben, welche seiner früheren Abhandlungen Lie darin in umgearbeiteter Fassung reproduziert hat. Einzelne Zitate aus norwegisch geschriebenen Arbeiten von Lie habe ich nicht im norwegischen Urtexte, sondern in deutscher Übersetzung mitgeteilt.

Erwähnen will ich noch ausdrücklich, daſs ich alle in dem Königsbergerschen Repertorium und im Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik erschienenen, von Lie selbst verfaſsten Besprechungen seiner Arbeiten mitangegeben habe. Einige dieser Besprechungen enthalten Dinge, die Lie in den betreffenden Abhandlungen nicht oder jedenfalls nicht so ausgesprochen hat.

Im übrigen mag das Verzeichnis für sich selbst sprechen. Ich bedaure nur, daſs es von den Werken andrer groſser Mathematiker noch keine Verzeichnisse giebt, die nach ähnlichen Grundsätzen bearbeitet sind. Wie wenig man von einem bloſsen Verzeichnisse der Titel hat, sieht man zum Beispiel an dem von Hagen herausgegebenen *Index Operum L. Euleri.*

I. Verzeichnis der mathematischen Schriften von Sophus Lie nach der Zeitfolge ihres Erscheinens.

1869.

1. *Repräsentation der Imaginären der Plangeometrie* (Jeder plangeometrischer Satz ist ein besonderer Fall eines stereometrischen Doppelsatzes in der Geometrie der Liniencongruenzen) von S. Lie, cand. real.

Christiania. Gedruckt bei Brøgger & Christie. 1869. Datiert: Christiania Februar 1869. 8 S. 4°.

Diese Angaben nach E. Holst in „Nyt Tidskrift", Ny Räkke, Anden Aargang, 2det Hefte, December 1893, S. 132.

2. *Ueber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie.*

Crelles Journal, Bd. 70, Heft 4, S. 346—353. Tafel mit 9 Figuren. Berlin 1869. Datiert: Christiania, Februar 1869.

Wiederabdruck von Nr. 1.

3. *Repräsentation der Imaginären der Plangeometrie.* (Jeder plangeometrischer Satz ist ein besonderer Fall eines stereometrischen Doppel-Satzes in der Geometrie der Linien-Congruenzen).

Christ. Forh., Jahrg. 1869, S. 16—38, 12 Fig. im Text. Christ. 1870. Lie hat die Arbeit der Christianiaer Ges. d. W. im März 1869 eingereicht. Eine vom 6. April d. J. datierte Erklärung der zur Beurteilung aufgeforderten Professoren: C. Fearnley, Sexe, C. A. Bjerknes empfahl sie zum Drucke.

Enthält 4 Kapitel, von denen die beiden ersten (S. 16—29, Z. 19 v. o.) nur wenig von der Fassung in Nr. 2 abweichen.

4. *Repräsentation der Imaginären der Plangeometrie* (Fortsetzung).

Christ. Forh., Jahrg. 1869, S. 107—146, 6 Figuren im Text. Christiania 1870. Am 2. August 1869 von C. A. Bjerknes zur Aufnahme in die Schriften der Gesellschaft empfohlen.

Auch besonders erschienen. Preis: 18 Sk.

Am Schlusse der Separatabdrücke steht: „(Fortsetzung folgt.) Christiania August 1869" was in den Forh. fehlt. Die Fortsetzung ist nicht erschienen.

Enthält Capitel V—VIII.

1870.

5. *Ueber die Reciprocitäts-Verhältnisse des Reye'schen Complexes.*

Gött. Nachr. 1870, Nr. 4, S. 53—66, Sitzung vom 16. Februar, vorgelegt von A. Clebsch. Datiert: Berlin, im Januar 1870.

Redigiert von F. Klein.

6. F. Klein et S. Lie, *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces.*

Comptes Rendus Bd. 70, S. 1222—1226, 1275—1279. Vorgelegt von Chasles am 6. und 13. Juni 1870.

7. *Sur une transformation géométrique.*

Comptes Rendus Bd. 71, S. 579—583. Vorgelegt von Chasles am 31. Oktober 1870.

Enthält die berühmte Berührungstransformation, bei der die Geraden in die Kugeln übergehen, abgeleitet aus Lies *Abbildung des Imaginären der Ebene.*

8. *Om en Classe geometriske Transformationer.*

Christ. Forh., Sitzung vom 9. December 1870, Jahrg. 1870, S. 506—509. Christ. 1871. In die Oversigt aufgenommen infolge einer Empfehlung von C. A. Bjerknes und C. M. Guldberg. Die Separatabzüge enthalten am Schlusse das Datum: 24. October 1870, das in den Forh. fehlt.

Enthält die wichtigsten Gesichtspunkte von Nr. 10. Von Lie selbst bei der Einsendung als ein Auszug aus einer gröfseren mathematischen Arbeit bezeichnet.

9. *Ueber die Haupttangenten-Curven der Kummerschen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten,* von Dr. Felix Klein in Düsseldorf und Dr. (!) Sophus Lie in Christiania.

Monatsberichte der Berliner Akademie 1870, S. 891—899. Vorgelegt von Kummer in der Gesamtsitzung am 15. December 1870. — Vgl. Nr. 97.

1871.

10. *Over en Classe geometriske Transformationer.*

Christ. Forh., Jahrg. 1871, S. 67—109. Christ. 1872.

Doktordissertation und Habilitationsschrift, die Lie im Juli 1871 vor der philosophischen Fakultät der Universität Kristiania verteidigt hat. — Vgl. Nr. 8 und 11.

Die Arbeit wurde durch eine vom 24. 12. 1870 datierte Erklärung von C. A. Bjerknes und C. M. Guldberg zur Aufnahme in die Schriften der Gesellschaft empfohlen. Lie hatte sie, ebenso wie Nr. 11, ursprünglich deutsch geschrieben, mufste sie aber als Doktorarbeit in norwegischer Sprache einreichen, da nach dem Reglement nur diese oder die lateinische Sprache zulässig war. Daher das unnorwegische *over* für *om.*

Auch besonders erschienen. Preis: 24 Sk.

11. *Ueber eine Classe geometrischer Transformationen (Fortsetzung).*

Christ. Forh., Jahrg. 1871, S. 182—245. Christ. 1872. Fortsetzung von Nr. 10.

Auch besonders erschienen. Preis: 33 Sk.

Selbstanzeige von Nr. 10 und 11, F. d. M. Bd. III, Jahrg. 1871, S. 420—422. Berlin 1874.

12. *Ueber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen, die der Krümmungs-Theorie des gewöhnlichen Raumes entspricht.*

Gött. Nachr. 1871, Nr. 7, S. 191—209, Sitzung vom 17. Mai, vorgelegt von A. Clebsch. Datiert: Christiania 24. April 1871.

13. F. Klein und S. Lie, *Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen.*

Math. Ann., Bd. IV, Heft 1, S. 50—84, ausgeg. 19. 6. 1871. Datiert: Göttingen und Christiania, im März 1871.

14. *Zur Theorie eines Raumes von n Dimensionen.*

Gött. Nachr. 1871, Nr. 22, S. 535—557, Sitzung vom 15. November, vorgelegt von A. Clebsch.

Behandelt namentlich die Konstruktion von Orthogonalsystemen.

1872.

15. *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen.*

Math. Ann., Bd. V, Heft 1, S. 145—208, ausgeg. 11. 3. 1872, Heft 2, S. 209—256, ausgeg. 3. 6. 1872.

Umarbeitung und Erweiterung von Nr. 10 und 11. Der erste Teil, S. 145—186, der Nr. 10 entspricht, ist datiert: Christiania, 10. October 1871. Der Nr. 11 entsprechende zweite Teil, S. 187—256, ist datiert: Christiania, 15. Novbr. 1871. Auf S. 256 eine kurze *Nachschrift* vom März 1872.

16. *Kurzes Resumé mehrerer neuer Theorien.*

Christ. Forh., Sitzung vom 3. Mai, Jahrg. 1872, S. 24—27, Christ. 1873. Datiert: Christiania, 30. April 1872 und an demselben Tage dem Sekretär der Gesellschaft, M. J. Monrad eingereicht.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. IV, Jahrg. 1872, S. 161 f. Berlin 1875.

Enthält Betrachtungen über Berührungstransformationen, über eine Erweiterung der Cauchyschen Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. O. durch Einführung des Begriffs der charakteristischen Streifen, über die infinitesimalen Berührungstransformationen, über partielle Differentialgleichungen höherer O., ferner die ersten Keime von Lies späterer *Theorie der Translationsflächen und der Minimalflächen,* endlich eine Ankündigung von Nr. 17.

17. *Neue Integrations-Methode partieller Gleichungen erster Ordnung zwischen n Variabeln.*

Christ. Forh., Sitzung vom 10. Mai, Jahrg. 1872, S. 28—34, Christ. 1873. Datiert: Christiania 8. Mai 1872.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. IV, Jahrg. 1872, S. 161. Berlin 1875.

Begriff des Elements und der involutorischen Lage zweier partieller Gleichungen 1. O.; die Zurückführung zweier solcher Gleichungen auf eine Gleichung mit einer Variabeln weniger dient zur Begründung der neuen Integrationsmethode.

18. *Ueber eine neue Integrationsmethode partieller Differential-Gleichungen erster Ordnung.*

Gött. Nachr. 1872, Nr. 16, S. 321—326, Sitzung vom 19. Juni. Mitgeteilt von A. Clebsch.

Datiert: Christiania, 4. Juni 1872. Enthält die Ergebnisse von Nr. 17.

19. *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine Classification derselben.*

Gött. Nachr. 1872, Nr. 25, S. 473—489, Sitzung vom 30. Oktober. Vorgelegt von A. Clebsch.

Datiert: Erlangen, 11. October 1872. Redigiert von F. Klein.

Die Klassifikation beruht auf invarianten Eigenschaften einer solchen Gleichung gegenüber der Gruppe aller Punkttransformationen.

20. *Zur Theorie der Differential-Probleme.*

Christ. Forh., Jahrg. 1872, S. 132, 133. Christ. 1873. Datiert: Christiania 14. November 1872 und an demselben Tage eingeliefert.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. IV, Jahrg. 1872, S. 161. Berlin 1875.

Enthält Andeutungen über die Ausdehnung des Mongeschen Charakteristikenbegriffs auf partielle Gleichungen höherer Ordnung, über die Klassifikation der Gleichungen beliebiger Ordnung, über die Integration von Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, über das Pfaffsche Problem u. a.

21. *Zur Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen.*

Christ. Forh., Jahrg. 1872, S. 133—135. Christ. 1873. Vorgetragen in der Sitzung vom 20. December 1872. Auf S. 135 eine *Note,* eingeliefert 31. Januar 1873.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. IV, Jahrg. 1872, S. 162. Berlin 1875.

Die invarianten Eigenschaften einer Funktionengruppe in $x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n$ gegenüber allen Berührungstransformationen in den x, p; daraus folgende Integrationsvereinfachungen bei partiellen Gleichungen 1. O., die von z frei sind. Auf S. 135 Ankündigung einer ähnlichen Theorie für Gleichungen, die z enthalten.

1873.

22. *Ueber partielle Differential-Gleichungen 1. O.*

Christ. Forh., Jahrg. 1873, S. 16—51, Christ. 1874. Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1873.

Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,50.

Vgl. Oversigt S. 496: Lie teilte mit, dafs zwei Abhandlungen von ihm (hier Nr. 22 und 23) in der nächsten Zukunft gedruckt werden würden.
Ausführliche Darstellung der Theorie von Nr. 21. Vgl. Nr. 30.

23. *Partielle Differential-Gleichungen 1. O., in denen die unbekannte Funktion explicite vorkommt.*
Christ. Forh., Jahrg. 1873, S. 52—85, Christ. 1874. Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1873. Lie hat im April 1873 die letzte Korrektur gelesen (Brief an A. Mayer). Vgl. Nr. 22.
Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,80.
Invariantentheorie der homogenen Funktionengruppen, Andeutungen über die Anwendung auf die Integration von Gleichungen, die z enthalten, vgl. Nr. 21, S. 135 und Nr. 30.

24. *Zur analytischen Theorie der Berührungs-Transformationen.*
Christ. Forh., Jahrg. 1873, S. 237—262, Christ. 1874. Eingeliefert Juni 1873. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,50.
Lie hat diese Arbeit auf eigne Kosten drucken lassen, da es ihm bei der Akademie zu langsam ging (Brief an A. Mayer vom Juli 1873). Vgl. Nr. 30.

25. *Ueber eine Verbesserung der Jacobi-Mayerschen Integrations-Methode.*
Christ. Forh., Jahrg. 1873, S. 282—288, Christ. 1874. Eingeliefert im August 1873. Vgl. Nr. 30.

26. *Neue Integrations-Methode eines 2n-gliedrigen Pfaffschen Problems.*
Christ. Forh., Jahrg. 1873, S. 320—343, Christ. 1874. Vorgelegt im October 1873. Redigiert im September (Brief an A. Mayer vom November 1873). Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,50.
Lehrt die Reduktion eines $2n$-gliedrigen Pfaffschen Ausdrucks, der in determinierter Art eine n-gliedrige Normalform erhalten kann. Eine zweite, nach jenem Briefe an A. Mayer ebenfalls im September redigierte Arbeit über die Reduktion eines $(2n+q)$-gliedrigen Ausdruckes mit n-gliedriger Normalform ist ungedruckt geblieben (vgl. jedoch Nr. 43); ebenso eine dritte, die Lie redigierte, als er jenen Brief schrieb, und die eine neue Methode enthalten sollte für den Fall, dafs ein Multiplikator gegeben ist.

1874.

27. *Allgemeine Theorie partieller Differential-Gleichungen 1. O.*
Christ. Forh., Jahrg. 1874, S. 198—226, Christ. 1875. Angemeldet in der Sitzung vom 20. November (s. Oversigt S. 307). Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,50.
Selbstanzeige: F. d. M. Bd. VI, Jahrg. 1874, S. 220. Berlin 1876.
Enthält eine ausführliche Darstellung der in Nr. 16—19 eingeführten neuen Begriffe: Element, Elementmannigfaltigkeit u. s. w., sowie der dort angedeuteten Erweiterung der Lagrange-Mongeschen Charakteristikentheorie und der Cauchyschen Integrationsmethode. Vgl. Nr. 34.

28. *Zur Theorie des Integrabilitätsfaktors.*
Christ. Forh., Jahrg. 1874, S. 242—254, Christ. 1875. In den Separatabdrücken mit Nr. 29 zu einem Hefte vereinigt. Vgl. Nr. 40.
Selbstanzeige: F. d. M. Bd. VI, Jahrg. 1874, S. 193—194. Berlin 1876.

29. *Veralgemeinerung und neue Verwerthung der Jacobischen Multiplicator-Theorie.*
Christ. Forh., Jahrg. 1874, S. 255—274, Christ. 1875. Unter dem Titel steht: November 1874. — Vgl. Nr. 40. Mit Nr. 28 in einem Heft besonders erschienen, aber ohne diese Zeitangabe. Preis: Kr. 0,50.
Selbstanzeige: F. d. M. Bd. VI, Jahrg. 1874, S. 195. Berlin 1876.

30. *Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen.*

Math. Ann. Bd. VIII, Heft 2, S. 215—288, ausgeg. 4. 12. 1874; Heft 3, S. 289—303, ausgeg. 4. 3. 1875. Datiert: Christiania, 5. Juli 1874.

§ 1—5 (S. 219—239) sind eine Umarbeitung von Nr. 24; § 7 (S. 240—245) ist eine von Nr. 25; § 9—20 (S. 248—285) sind eine Erweiterung von Nr. 22; § 21—25 (S. 286—300) enthalten die Theorie von Nr. 23 in verbesserter Form. § 26 (S. 300—303): Vervollständigung der Theorie des Poisson-Jacobischen Theorems.

31. *Ueber Gruppen von Transformationen.*

Gött. Nachr. 1874, Nr. 22, S. 529—542, Sitzung vom 3. Dezember. Redigiert von Klein im Oktober 1874 während eines Zusammenseins mit Lie und A. Mayer in Düsseldorf.

Die Bestimmung aller endlichen kontinuierlichen Gruppen auf der Geraden. Angabe der entsprechenden Resultate für die Ebene, Andeutungen über eine darauf zu gründende Klassifikation der Differentialgleichungen.

1875.

32. *Allgemeine Theorie partieller Differential-Gleichungen 1. O. II.*

Christ. Forh., Jahrg. 1875, S. 1—15, Christ. 1876. Angemeldet in der Sitzung vom 19. Februar, s. Oversigt, S. 404. Auch einzeln erschienen. Preis: Kr. 0,25.

Fortsetzung von Nr. 27. Enthält eine ausführliche Darstellung von Lies neuer in Nr. 17 und 18 skizzierter Integrationsmethode.

33. *Discussion aller Integrations-Methoden der partiellen Differential-Gleichungen 1. O.*

Christ. Forh., Jahrg. 1875, S. 16—48, Christ. 1876. Angemeldet in der Sitzung vom 19. Februar zugleich mit Nr. 32. — Vgl. Nr. 40. Auch besonders erschienen. Preis: 0,70 Kr.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. VII, Jahrg. 1875, S. 234. Berlin 1877.

34. *Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.*

Math. Ann., Bd. IX, Heft 2, S. 245—288, ausgeg. 21. 10. 1875, Heft 3, S. 289—296, ausgeg. 4. 1. 76. Datiert: Christiania, Juni 1875.

Selbstanzeige in Königsb. Repert. Bd. I, S. 27—33, 1877 und in den F. d. M. Bd. VII, Jahrg. 1875, S. 225—231. Berlin 1877. Diese Selbstanzeigen sind bemerkenswert, weil Lie darin die Cauchysche und seine eigne Methode besonders knapp und scharf formuliert.

§ 1—8 (S. 250—278) sind eine Umarbeitung und Erweiterung von Nr. 27; § 10—13 (S. 279—289) ebenso von Nr. 32.

1876.

35. *Theorie der Transformations-Gruppen (Erste Abhandlung).*

Arch. for Math. Bd. I, Heft 1, S. 19—57, Kristiania 1876, erschienen im März. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 1,20.

Enthält die Bestimmung aller endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen auf der Geraden. — Vgl. Nr. 36.

36. *Theorie der Transformations-Gruppen (Abhandlung II).*

Arch. for Math. Bd. I, Heft 2, S. 152—193, Kristiania 1876, erschienen im Mai. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 1,50.

Selbstanzeige von Nr. 35 und 36 in Königsb. Repert. Bd. II, S. 66—67, 1879. F. d. M. Bd. VIII, Jahrg. 76, S. 212. Berlin 1878.

Allgemeine Sätze über r-gliedrige Gruppen und ihre infinitesimalen Transformationen (S. 152—181), über Gruppen von Berührungstransformationen und die Bestimmung aller derartigen Gruppen mit gegebenen c_{iks} (S. 181—190). Jede r-gliedrige Gruppe ist gleichzusammengesetzt mit einer linearen Gruppe (es ist das die später „adjungierte Gruppe" genannte). Jede infinitesimale Transformation einer r-gliedrigen Gruppe gehört einer zweigliedrigen Untergruppe an (S. 191—193).

37. *Vervollständigung der Theorie der Berührungs-Transformationen.*

Arch. for Math. Bd. I, Heft 2, S. 194—202, Krist. 1876, erschienen im Mai. Als *Note* hinter Nr. 36 abgedruckt.

Erledigt den Fall, daſs q Gleichungen: $\Omega_k(x_1 \cdots x_n, x_1' \cdots x_n') = 0$ $(k = 1 \cdots q)$ keine wirkliche Berührungstransformation bestimmen. Vgl. Nr. 40 und 43.

38. *Resumé einer neuen Integrations-Theorie.*

Arch. for Math. Bd. I, Heft 3, 4, S. 335—366. Krist. 1876. S. 335—340 in Heft 3, erschienen im September, S. 341—366 in Heft 4, erschienen im December. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,80.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. VIII, Jahrg. 1876, S. 212—213. Berlin 1878.

Beantwortet die Frage, wie man bekannte Integrale einer partiellen Differentialgleichung 1. O. für die Integration der Gleichung möglichst ausnützen kann, namentlich werden alle Fälle angegeben, in denen aus den bekannten Integralen alle übrigen durch ausführbare Operationen ableitbar sind. „Die entwickelten Theorien leisten das Gröſstmögliche.“ — Vgl. Nr. 40.

1877.

39. *Neue Integrations-Methode der Monge-Ampèreschen Gleichung.*

Arch. for Math. Bd. II, Heft 1, S. 1—9, Krist. 1877, erschienen im Januar. — Im Oktober 1876 schreibt Lie an A. Mayer, daſs er eben die Korrektur gelesen habe. Auch besonders erschienen (1876). Preis: Kr. 0,50.

Selbstanzeige: Repert. Bd. II, S. 407, 1879. — F. d. M. Bd. IX, Jahrg. 1877, S. 269—270. Berlin 1880.

Die Methode beruht auf dem schon in Nr. 16 angekündigten Satze, daſs jede Gleichung: $rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0$ mit zwei distinkten und allgemeinen ersten Integralen: $u_1 - f(v_1) = 0$, $u_2 - \varphi(v_2) = 0$ durch Berührungstransformation die Form: $s = 0$ erhalten kann, und auf der Theorie der homogenen Funktionengruppen. Auf S. 8 Andeutungen über den Fall, wo nur ein erstes Integral existiert oder richtiger unendlich viele. Auf S. 9 Ankündigung, daſs sich diese Theorien auf Gleichungen 2. O. in n Variablen mit allgemeinen intermediären Integralen ausdehnen lassen.

40. *Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. (Zweite Abhandlung.)*

Math. Ann. Bd. XI, Heft 4, S. 464—557, ausgeg. 27. 4. 1877. Datiert: Christiania, 15. October 1876.

Selbstanzeige (zugleich auch von Nr. 38, 29 und 33) in Königsb. Repert. Bd. II, S. 67—69, 1879.

Fortsetzung von Nr. 34. S. 465—487, 521—529 sind eine Neubearbeitung und Erweiterung von Nr. 38, S. 487—494, 552—556 von Nr. 28, S. 494—519 von Nr. 29, S. 529—545 von Nr. 33 mit Berücksichtigung der Nr. 38, S. 547—551 von Nr. 37.

41. *Die Störungstheorie und die Berührungs-Transformationen.*

Arch. for Math., Bd. II, Heft 2, S. 129—156, Krist. 1877.

Datiert: Christiania, Januar 1877. Erschienen im Mai. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,80.

Selbstanzeige: Repertorium Bd. II, S. 408, 1879. F. d. M. Bd. IX, Jahrg. 1877, S. 259—261. Berlin 1880.

Bestimmung aller Transformationen in $x, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, die *jedes* simultane System:

$$dx_k = \frac{\partial K}{\partial p_k} dx, \quad dp_k = -\frac{\partial K}{\partial x_k} dx \quad (k = 1 \cdots n),$$

wo K eine beliebige Funktion von $x, x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ ist, in ein System derselben Art überführen. Anwendung auf Mechanik und Variationsrechnung. Bestimmung aller Transformationen in $x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$, die ein *gegebenes* kanonisches System (die frühere Funktion K ist hier von x frei) wieder in ein kanonisches überführen. Auf S. 156 Note über infinitesimale Transformationen bei einem beliebigen Pfaffschen

Ausdrucke und über deren Verwerthung zur Reduktion des Ausdrucks auf seine kanonische Form.

42. *Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimal-Flächen. I. Ueber reelle algebraische Minimalflächen.*

Arch. for Math. Bd. II, Heft 2, S. 157—198. Krist. 1877, erschienen im Mai. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 1,00. — Vgl. Nr. 53.

Selbstanzeige: Repertorium Bd. II, S. 409—410, 1879. F. d. M. Bd. IX, Jahrg. 1877, S. 572—573. Berlin 1880.

43. *Theorie des* PFAFF*schen Problems. (Erste Abhandlung.)*

Arch. for Math. Bd. II, S. 338—379. S. 338—364 in Heft 3, erschienen im Juli, S. 365—379 in Heft 4.

Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 1,00.

Selbstanzeige: Repert. Bd. II, S. 407—408, 1879. — F. d. M. Bd. IX, Jahrg. 1877, S. 255—257. Berlin 1880.

Auf Grund der Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. werden die beiden Normalformen abgeleitet, die bei einem Ausdruck: $\Sigma X_\nu dx_\nu$ möglich sind. Die Zahl der Funktionen der Normalform ist die einzige Invariante des Ausdrucks. Ermittelung dieser Invariante. Reduktion eines $(2n+q)$-gliedrigen Ausdrucks mit n-gliedriger Normalform auf einen $2n$-gliedrigen Ausdruck ohne Integration (vermutlich der Inhalt der unter Nr. 26 erwähnten zweiten Arbeit, die ungedruckt geblieben war). Methode zur Integration eines Ausdrucks, dessen Normalform eine gerade Anzahl von Funktionen enthält. Methode im Falle einer ungeraden Anzahl von Funktionen. LIE erwähnt mehrmals, dafs GRASSMANN in seiner zweiten Ausdehnungslehre schon die richtigen Kriterien für die Zahl der Funktionen der Normalform angegeben hatte. Nebenbei bemerkt hatte LIE GRASSMANN Ende Oktober oder Anfang November 1872 in Stettin besucht, auf der Rückreise von Erlangen.

Auf S. 378—379 eine Note, in der die Ergebnisse von Nr. 37 aus der entwickelten Theorie des PFAFFschen Problems abgeleitet werden.

Die zweite Abhandlung ist nicht erschienen; Andeutungen aus ihrem beabsichtigten Inhalte findet man in Nr. 41, S. 156 und in Nr. 155, S. 405—412.

44. *Berigtigelse.* (Berichtigung zu Nr. 42.)

Christ. Forh., Jahrg. 1877, Oversigt S. 7, Z. 7 v. u.—8, Z. 22. Datiert: München, d. 22. September. Vom Sekretär mitgeteilt in der Sitzung am 19. Oktober. Krist. 1878.

Vgl. „Amtlicher Bericht der 50. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte", München 1877, S. 94: „Sodann (19. September) sprach Prof. Dr. S. LIE *Ueber Minimalflächen, insonderheit über reelle algebraische* .... Der V. theilt nachträglich mit, dass er den Fall, in welchem die Mimimalfläche eine Doppelfläche wird, nicht hinreichend berücksichtigte. Tritt dieser Fall ein, so sind die Formeln für Ordnung und Classe, welche der Verf. angab (in Nr. 42) durch 2 zu dividiren."

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. IX, Jahrg. 1877, S. 573, Berlin 1880.

1878.

45. *Mathematiske Sätninger.* (Mathematische Sätze.)

Christ. Forh., Jahrg. 1878, Oversigt S. 5 und 7. Krist. 1879. Die Sätze waren von LIE am 30. März und 24. April eingeliefert und wurden vom Präses der Gesellschaft in den Sitzungen vom 5. April und 3. Mai vorgelegt.

Auf S. 5, Z. 16—6 v. u. drei und auf S. 7, Z. 3—9 zwei Sätze über algebraische Minimalflächen. Vgl. Nr. 48, 49, 50.

46. *Petite contribution à la théorie de la surface Steinerienne.*

Arch. for Math. Bd. III, Heft 1, S. 84—92. Krist. 1878. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,30.

Selbstanzeige: Repert. Bd. II, S. 408—409. — F. d. M. Bd. X, Jahrg. 1878, S. 531. Berlin 1880.

Der Ort der Pole einer festen Ebene in Bezug auf die Kegelschnitte einer STEINERschen Fläche ist wieder eine STEINERsche Fläche und, wenn die Ebene Tangentialebene ist, eine Fläche 2. O.

Lie giebt an, er habe den Satz schon 1869 der Universität Christiania mitgeteilt.

47. *Theorie der Transformations-Gruppen. III. Bestimmung aller Gruppen einer zweifach ausgedehnten Punkt-Mannigfaltigkeit.*

Arch. for Math. Bd. III, Heft 1, S. 93—128, Heft 2, S. 129—165. Krist. 1878. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 1, 60.

Selbstanzeige: Repert. Bd. II, S. 411—413, 1879. — F. d. M. Bd. X, Jahrg. 1878, S. 258—260. Berlin 1880.

Auf S. 94—100 der erste wirklich strenge Beweis dafür, daſs r unabh. inf. Transf. $X_1 f \dots X_r f$, die in den Beziehungen: $(X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s f$ stehen, eine r-gliedrige Gruppe erzeugen (vgl. *Th. d. Trfsgr.*, Bd. III, S. 658—661). S. 100—116, Sätze über Gruppen von spezieller Zusammensetzung. S. 116—125, Kriterien für die Ähnlichkeit von Gruppen von Punkttransformationen (noch nicht die richtigen Kriterien, vgl. Nr. 59 und 96). S. 125—165, Bestimmung aller endlichen kontinuierlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene.

48. *Sätze über Minimalflächen.*

Arch. for Math. Bd. III, Heft 2, S. 166—176. Krist. 1878.

Selbstanzeige: Repert. Bd. II, S. 410—411, 1879. — F. d. M. Bd. X, Jahrg. 1878, S. 542—543. Berlin 1880. Vgl. Nr. 56.

S. 166—173 enthalten die Beweise für die Sätze von Nr. 45, S. 5. Algebraische Minimalflächen mit einer ebenen Krümmungslinie. Alg. M., die einen Cylinder nach einer geodätischen Kurve berühren. Alg. M., die die Evolute einer Raumkurve in bestimmter Weise berühren. S. 174—176: Alg. M. mit einer ebenen geodätischen Curve.

49. *Sätze über Minimalflächen. II. Bestimmung aller algebraischen Minimal-Flächen, die sich in einem algebraischen Kegel einschreiben lassen.*

Arch. for Math. Bd. III, Heft 2, S. 224—233. Krist. 1878. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,40.

Selbstanzeige: Repert. Bd. II, S. 410—411, 1879. — F. d. M. Bd. X, Jahrg. 1878, S. 543. Berlin 1880.

Beweis der beiden Sätze von Nr. 45, S. 7. Es giebt ∞^{∞} algebraische Minimalflächen, die in einen algebraischen Kegel, und ∞^{∞} solche, die in gewisse Developpable eingeschrieben sind. — Vgl. Nr. 56.

50. *Sätze über Minimalflächen. III. Ueber die in einer algebraischen Developpable eingeschriebenen algebraischen Minimalflächen.*

Arch for Math. Bd. III, Heft 3, S. 340—351. Krist. 1878. Datiert: Juni 1878. — Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,40.

Selbstanzeige: Repert. Bd. II, S. 410—411, 1879. — F. d. M. Bd. X, Jahrg. 1878, S. 543—544. Berlin 1880.

Neuer Beweis des zweiten der beiden Sätze von Nr. 45, S. 7. Allgemeine Untersuchungen über algebraische Developpable, in die sich ∞^{∞} algebraische Minimalflächen einschreiben lassen. — Vgl. Nr. 56.

51. *Theorie der Transformations-Gruppen. (Abhandlung IV.)*

Arch. for Math. Bd. III, Heft 3, S. 375—384, Heft 4, S. 385—460. Krist. 1878. Datiert: Christiania, 15. October 1878.

Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 2,00.

Selbstanzeige: Repert. Bd. II, S. 413—414, 1879. — F. d. M. Bd. X, Jahrg. 1878, S. 260. Berlin 1880.

S. 375—402: Bestimmung aller Gruppen des R_n, die im Infinitesimalen möglichst transitiv sind. S. 403—460: Bestimmung aller Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene. Eine Note auf S. 460 kündigt Nr. 52 und 60 als bald erscheinend an, ebenso eine Theorie, die in Nr. 54, S. 4 und im Anfange von Nr. 83 andeutungsweise entwickelt ist. Endlich Bemerkungen über Spiralflächen.

1879.

52. *Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven.*

Universitäts-Program für das erste Semester 1879. Kristiania. Gedruckt bei Grøndal & Søn. 1879. 45 S. in 4°. Datiert vom December 1878. Preis: Kr. 1,00. — Vgl. Nr. 81.

Selbstanzeige: Repert. Bd. II, S. 414—415, 1879. — F. d. M. Bd. XI, Jahrg. 1879, S. 536—537. Berlin 1881.

53. *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. I. Projectivische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen.*

Math. Ann. Bd. XIV, Heft 3, S. 331—416, ausgeg. 13. 2. 79. Datiert: Christiania, 20. Juni 1878.

Selbstanzeige von Nr. 42 u. 53: Repertorium Bd. II, S. 409—410, 1879.

Sehr erweiterte Neubearbeitung von Nr. 42, mit Berücksichtigung von Nr. 44.

54. *Geometriske Meddelelser.* {Geometrische Mitteilungen.}

Christ. Forh., Jahrg. 1879, Oversigt S. 3, Z. 12 v. u. — 4, Z. 6 v. u. und 14, Z. 6—15. Krist. 1880.

Auf S. 3—4 eine zur Sitzung vom 7. Februar eingesandte kurze Zusammenstellung der Ergebnisse von Nr. 52. Am Schlusse zwei Bemerkungen über Minimalflächen und eine Andeutung über die Bestimmung aller Flächen, deren Haupttangenten linearen Komplexen angehören. Auf S. 14 eine am 23. September eingelieferte Mitteilung über die Bestimmbarkeit der Haupttangentenkurven auf den Flächen konstanter Krümmung und eine am 27. September eingelieferte über die Bestimmbarkeit der Krümmungslinien auf diesen Flächen. Lie hat diese Sätze in der Sitzung vom 17. Oktober entwickelt.

55. *Theorie der Transformations-Gruppen. V.*

Arch. for Math. Bd. IV, Heft 2, S. 232—256, Heft 3, S. 257—261. Kristiania 1879. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 2,00.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XI, Jahrg. 1879, S. 258—259. Berlin 1881.

Neue, direkte Methode zur Bestimmung aller Gruppen von Berührungstransformationen einer Ebene, die nicht durch Berührungstransformation in Gruppen von Punkttransformationen überführbar sind. (Wiederholt in Bd. II, Kap. 23 der *Th. d. Trfsgr.*)

56. *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. II. Metrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen.*

Math. Ann. Bd. XV, Heft 3, 4, S. 465—506, ausgeg. 22. 10. 79. Fortsetzung von Nr. 53. Datiert: Christiania, 20. Juni 1879.

Selbstanzeige von 48, 49, 50 und (vor dem Erscheinen der Arbeit) 56: Repertorium Bd. II, S. 410—411, 1879.

S. 471—486 ist eine Neubearbeitung von Nr. 48; S. 486—501 von Nr. 49 und 50. Auf S. 501—506 drei Noten.

57. *Bestimmung aller in eine algebraische Developpable eingeschriebenen algebraischen Integralflächen der Differentialgleichung $s = 0$.*

Arch. for Math. Bd. IV, Heft 3, S. 334—344. Krist. 1879. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,80.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XI, Jahrg. 1879, S. 586. Berlin 1881.

58. *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. I. Bestimmung ihrer Haupttangentencurven und Krümmungslinien.*

Arch. for Math. Bd. IV, Heft 3, S. 345—354. Krist. 1879. Datiert: 22. September 1879. — Vgl. Nr. 59.

59. *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. II. Das sphärische Bild der Haupttangenten- und Krümmungs-curven.*

Arch. for Math. Bd. IV, Heft 3, S. 355—366. Krist. 1879. Fortsetzung von Nr. 58. Datiert vom 4. October 1879.

Selbstanzeige von Nr. 58 u. 59: F. d. M. Bd. XI, Jahrg. 1879, S. 528 f. Berlin 1881.

Auf S. 366 ist bemerkt, dafs das Theorem auf S. 125 von Nr. 47 unrichtig formuliert ist (vgl. Nr. 96). In das mir gehörige Exemplar der Arbeit hat Lie geschrieben: „Diese zweite Note enthält wesentlich nur Sachen, die früher von Anderen gegeben ist.“

1880.

60. *Weitere Untersuchungen über Minimalflächen.*

Arch. for Math. Bd. IV, Heft 4, S. 477—506. Krist. 1880. Auch besonders erschienen. Preis: 0,80 Kr.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XI, Jahrg. 1879, S. 586 f. Berlin 1881.

Enthält den Beweis einer in Nr. 16 aufgestellten Behauptung, nämlich die Bestimmung der Flächen, die in Bezug auf unendlich viele Kegelschnitte der unendlich fernen Ebene Minimalflächen sind. Lie zeigt ferner, dafs damit auch alle Minimalflächen gefunden sind, die durch Translationsbewegung einer ebenen oder gewundenen Kurve, deren Länge nicht gleich Null ist, erzeugbar sind. Auf S. 506 Ankündigung der Bestimmung aller algebraischen Berührungstransformationen, die Minimalflächen in Minimalflächen überführen.

61. *Ueber Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind.*

Arch. for Math. Bd. IV, Heft 4, S. 507—512. Krist. 1880. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,30.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XI, Jahrg. 1879, S. 529—531. Berlin 1881.

Die Krümmungslinien jeder solchen Fläche sind durch Quadraturen bestimmbar. Bianchis Operation zur Ableitung von Flächen konstanter Krümmung aus einer gegebenen verlangt keine Quadraturen, wenn man die geodätischen Kurven der gegebenen Fläche kennt. Auf den Flächen konstanter mittlerer Krümmung sind die Kurven von der Länge Null durch Quadraturen bestimmbar, auf den Flächen konstanter Krümmung die Haupttangentenkurven.

62. *Resumé af en Integrationstheori.*

Christ. Forh., Jahrg. 1880, Nr. 1, 4 S. Christ. 1880. Vorgetragen in der Sitzung vom 6. Februar 1880. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,20.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XII, Jahrg. 1880, S. 293 f. Berlin 1882.

Nur einige Beispiele werden andeutungsweise behandelt. Die Methode ist anwendbar auf simultane Systeme von partiellen Differentialgleichungen n-ter Ordnung, wenn die Zahl der Gleichungen des Systems genügend grofs ist; sie kommt hinaus auf die Bestimmung der intermediären Integrale $(n-1)$-ter Ordnung: $V =$ const., wo V durch ein simultanes System von partiellen Differentialgleichungen 1. O. definiert ist. Lie giebt an, er habe die Methode schon 1877 F. Klein und A. Mayer mitgeteilt. (Der betr. Brief an A. Mayer ist datiert: „In den Gebirgen. 27. Juli 77.“) Vgl. Nr. 146.

Auf S. 3—4 teilt Lie einige der in Nr. 61 bewiesenen Sätze mit, sowie zwei neue: Kennt man auf einer Fläche konstanter Krümmung eine Differentialgleichung 1. O., deren Integralkurven die geodätischen Linien durch einen Punkt sind, so kann der Integrabilitätsfaktor angegeben werden. Damit ist Bianchis Operation zur successiven Bestimmung von Flächen konstanter Krümmung auf ausführbare Operationen zurückgeführt. Ferner ein Satz über Flächen, deren Krümmungslinien bestimmbar sind.

63. *Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation.*

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 2. Serie, Bd. IV, Abteilung I, S. 300—304, erschienen im 7. Hefte für 1880.

Übersetzung von Nr. 61. In der Anmerkung am Schlusse wird bereits der in Nr. 66 bewiesene Satz angekündigt.

64. *Theorie der Transformationsgruppen I.*

Math. Ann. Bd. XVI, Heft 4, S. 441—528, ausgeg. 7. 6. 1880. Datiert: Christiania, December 1879.

S. 441—455 Neubearbeitung von Nr. 35. S. 455—465 ebenso von Nr. 36, S. 153—170. — S. 465—491, 496—525 geben eine wesentlich vereinfachte Darstellung der Entwickelungen in Nr. 47, S. 125—165. Endlich enthalten S. 491—496 einen Teil der Betrachtungen in Nr. 47, S. 105—116.

65. *Meddelelse.* {Mitteilung.}

Christ. Forh., Jahrg. 1880, Oversigt S. 8, Z. 3 v. u.—9, Z. 16; vorgelegt in der Sitzung vom 3. Mai. Christ. 1881.

Ankündigung des in Nr. 66 bewiesenen Satzes.

66. *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. III.*

Arch. for Math. Bd. V, Heft 3, S. 282—306. Krist. 1880. Datiert: April 1880. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,70.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XII, Jahrg. 1880, S. 576 f. Berlin 1882.

Fortsetzung von Nr. 59. Bianchis Operation zur Ableitung neuer Flächen konstanter Krümmung aus einer gegebenen wird durch eine unendlichdeutige Transformation analytisch ausgedrückt, die nur für die Integralflächen von:

$$a^2(rt - s^2) + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0$$

einen Sinn hat. Sodann wird hieraus eine unendlichdeutige infinitesimale Transformation abgeleitet. Endlich beweist Lie, dafs der Inbegriff aller durch Bianchis Operation ableitbaren Flächen konstanter Krümmung keine andre Differentialgleichung 2. oder 3. O. befriedigt.

67. *Meddelelse.*

Christ. Forh., Jahrg. 1880, Oversigt S. 10, Z. 10—25, schriftlich eingesandt 2. Juli, von Lie vorgelegt in der Sitzung vom 17. September. Christ. 1881.

Ankündigung der Hauptergebnisse von Nr. 68. Lie schliefst daraus, dafs das allgemeine Integral von: $a^2(s^2 - rt) = (1 + p^2 + q^2)^2$ durch successive Quadraturen gefunden werden könne. — Aus den bekannten Flächen mit sphärischen Krümmungslinien kann man durch Lies bekannte Berührungstransformation (s. Nr. 7) alle Flächen finden, deren Haupttangentenkurven linearen Komplexen angehören.

68. *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. IV. Bestimmung aller Flächen constanter Krümmung durch successive Quadraturen.*

Arch. for Math. Bd. V, Heft 3, S. 328—358. Krist. 1880. Datiert: 15. Juni 1880; der Nachtrag auf S. 357 f. vom Juli 1880. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,80.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XII, Jahrg. 1880, S. 577 f. Berlin 1882.

Fortsetzung von Nr. 66. Die damals betrachtete unendlichdeutige Transformation führt jede Kurve konstanter Torsion in ∞^1 ebensolche Kurven über und läfst die Bogenlänge ungeändert. Durch Wiederholung der Transformation kann man aus einer solchen Kurve alle anderen ableiten. Darauf gründet Lie den Beweis, dafs die Flächen konstanter Krümmung, die Bianchis Operation liefert, überhaupt keine andre Differentialgleichung erfüllen. Auf S. 355—357 bespricht Lie einige andre partielle Differentialgleichungen 2. O., bei denen man durch successive Quadraturen ∞^∞ Integralflächen finden kann. In dem Nachtrage, S. 357 f., sagt Lie, dafs der Inbegriff aller Flächen konstanter Krümmung, die Bianchis Operation liefert, wohl nicht das allgemeine Integral der Differentialgleichung darstellt, sondern durch irgend eine besondere Bedingung charakterisiert sein wird.

1881.

69. *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. V.*

Arch. for Math. Bd. V, Heft 4, S. 518—541. Krist. 1881. Erschienen im Anfange des Jahres.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XII, Jahrg. 1880, S. 578 f. Berlin 1882.

Fortsetzung von Nr. 68. Beweist, dafs die Differentialgleichung für die Flächen konstanter Krümmung nicht nach der Methode von Darboux integriert werden kann.

70. *Mathematiske Sätninger.* {Mathematische Sätze.}

Christ. Forh., Jahrg. 1881, Oversigt S. 6, Z. 16—18, Sitzung vom 4. Februar. Christ. 1882.

„Lie theilte eine Methode mit zur Bestimmung unendlich vieler Lösungen solcher linearer partieller Differentialgleichungen, die eine infinitesimale Transformation gestatten.“

71. *Mathematiske Sätninger.*

Christ. Forh., Jahrg. 1881, Sitzung vom 1. April, Oversigt S. 7, Z. 18—24, Christ. 1882.

„Lie theilte eine allgemeine Methode mit zur Integration einer umfassenden Klasse *linearer* Differentialgleichungen *n*. O.“ Insbesondere kündigte er das Hauptergebnis von Nr. 75 an.

72. *Discussion der Differentialgleichung* $\frac{d^2 z}{dx\,dy} = F(z)$.

Arch. for Math. Bd. VI, Heft 1, S. 112—124. Christ. 1881. Datiert: October 1880. *Selbstanzeige:* F. d. M. Bd. XIII, Jahrg. 1881, S. 297 f. Berlin 1883.

Beweist, dafs diese Gleichung nur in dem von Liouville erledigten Falle: $F(z) = A \cdot e^{kz}$ nach der Methode von Darboux integriert werden kann, woraus das Ergebnis von Nr. 69 wieder folgt. Bestimmt alle Berührungstransformationen, die eine Gleichung von der Form: $s = F(z)$ invariant lassen. Hieraus neue Methode, um aus einer Fläche konstanter Krümmung ∞^1 andre herzuleiten (durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. O.) Auf S. 124 eine Anm. über die unendlich fernen Punkte einer Fläche konstanter Krümmung; Ankündigung einer Berichtigung zu S. 358 von Nr. 68. Wiederholung des zweiten Satzes von Nr. 67.

73. *Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichung*

$$s^2 - rt = \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{a^2}.$$

Arch. for Math. Bd. VI, Heft 2, S. 153—167. Christ. 1881.
Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XIII, Jahrg. 1881, S. 644. Berlin 1883.

Jede Berührungstransformation, die diese Gleichung invariant läfst, ist eine Bewegung oder Spiegelung. Das sind zugleich die einzigen Berührungstransformationen, die geodätische Kurven stets in ebensolche überführen. Die konformen Punkttransformationen des Raumes sind die einzigen Berührungstransformationen, die jede Fläche in den kleinsten Teilen konform transformieren.

74. *Mathematiske Sätninger.*

Christ. Forh., Jahrg. 1881, Oversigt S. 12, Z. 14—28, mitgeteilt in der Sitzung vom 28. Oktober. Christ. 1882.

Ankündigung des in Nr. 76 bewiesenen Satzes.

75. *Ueber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Classe linearer partieller Differentialgleichungen.*

Arch. for Math. Bd. VI, Heft 3, S. 328—368. Krist. 1881. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 1,00.
Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XIII, Jahrg. 1881, S. 298—300. Berlin 1883.

Bestimmung aller in p, q, r, s, t linearen Gleichungen, die eine infinitesimale Berührungstransformation gestatten, bei der nicht alle Charakteristiken invariant bleiben. Für jede solche Gleichung kann man eine Lösung aufstellen, die unter einem partiellen bestimmten Integrale eine willkürliche Funktion enthält. Anwendung auf die Bestimmung solcher Flächen, deren Krümmungslinien ein gegebenes sphärisches Bild haben.

76. *Om algebraiske Differentialligninger, der tilstede infinitesimale Transformationer.*

Christ. Forh., Jahrg. 1881, Nr. 15, vorgelegt in der Sitzung vom 9. Dezember 1881. 6 S. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,20.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XIII, Jahrg. 1881, S. 236. Berlin 1883.

Wenn die Gruppe aller Punkt- oder Berührungstransformationen, die ein System von algebraischen Differentialgleichungen invariant lassen, nur eine begränzte Zahl von Parametern enthält, so kommt die Bestimmung der Gruppe hinaus auf die Integration einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung mit algebraischen Koeffizienten und diese kann nach POINCARÉ durch FUCHSsche Funktionen geleistet werden. Anwendung auf die Integration solcher gewöhnlicher Differentialgleichungen n. O. ($n > 3$), die durch Berührungstransformation die lineare Form erhalten können. — Auf S. 6 Anm. über die geodätische Abbildung von Flächen und über Flächen konstanter Krümmung, deren Krümmungslinien auf algebraischen Flächen liegen.

1882.

77. *Zur Theorie der geodätischen Curven der Minimalflächen.*

Arch. for Math. Bd. VI, Heft 4, S. 490—501. Krist. 1882. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,40.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XIII, Jahrg. 1881, S. 643. Berlin 1883.

Soll das Bogenelement einer Minimalfläche die LIOUVILLEsche Form:

$$ds^2 = \{\Psi(x+y) + \Psi(x-y)\}\, dx\, dy$$

erhalten können, so mufs die Fläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar sein.

78. *Bestimmung aller Raumcurven, deren Krümmungsradius, Torsionsradius und Bogenlänge durch eine beliebige Relation verknüpft sind.*

Christ. Forh., Jahrg. 1882, Nr. 10. Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Mai 1882. 6 S. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,15. Datiert: Christiania 1. Mai 1882.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XIV, Jahrg. 1882, S. 668. Berlin 1885.

79. *Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden.*

Arch. for Math. Bd. VII, Heft 2, S. 155—176. Krist. 1882. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,50.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XIV, Jahrg. 1882, S. 642 f. Berlin 1885.

Spezielle Fälle dieser allgemeinen Theorie finden sich schon in Nr. 16, 42, 53, 60. Auf S. 176 Andeutungen über die Verallgemeinerung auf den n-fach ausgedehnten Raum.

80. *Ueber Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten.*

Arch. for Math. Bd. VII, Heft 2, S. 179—193. Krist. 1882. Datiert: Juni 1882. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,40. Vgl. Nr. 147.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XIV, Jahrg. 1882, S. 641 f. Berlin 1882.

Bestimmung aller Flächen des R_3, die eine mindestens dreigliedrige projektive Gruppe gestatten. Übersehen ist dabei die CAYLEYsche Linienfläche 3. O. (s. Nr. 100). Auf S. 190—192 Betrachtungen über die ausgezeichnete Stellung, die Kugel und Gerade gegenüber der Gruppe der EUKLIDischen Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen einnehmen. Auf S. 192 f. Anmerkung über die Einführung *kanonischer Variabeln* in Differentialgleichungen, die eine endliche kontinuierliche Gruppe gestatten.

81. *Untersuchungen über geodätische Curven.*

Math. Ann., Bd. XX, Heft 3, S. 357—454. Ausgeg. 31. 8. 82. Datiert: Christiania, im April 1882.

Erweiterte Neubearbeitung von Nr. 52. Neu sind: Note 1, S. 419—431 (Ausführung einer Anm. auf S. 6 von Nr. 76); Note 3 und 4 (S. 442—446); Note 5, S. 447—454, Bearbeitung von Nr. 77.

82. *Meddelelse.*

Christ. Forh., Jahrg. 1882, Oversigt S. 13, Z. 6 v. u.—14, Z. 1 v. u. Krist. 1883. Datiert vom 6. Juli, eingelaufen am 10. Juli, mitgeteilt in der Sitzung am 15. September 1882.

Andeutungen über die Einführung kanonischer Variabeln (vgl. Nr. 80). Nr. 78 enthält eine Anwendung davon, ebenso Nr. 61. Halphens Sätze über die Integration von Differentialgleichungen, die die allgemeine *lineare* Gruppe gestatten, sind Spezialfälle von Lies alter Integrationstheorie (Nr. 29).

83. *Untersuchungen über Differentialgleichungen. I.*

Christ. Forh., Jahrg. 1882, Nr. 21. 12 S. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,25.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XIV, Jahrg. 1882, S. 287 f. Berlin 1885.

Direkte Bestimmung aller Flächen, deren Haupttangentenkurven linearen Komplexen angehören (vgl. Nr. 54, S. 4). Die Flächen konstanter Krümmung, die Bianchis Verfahren aus einer solchen Fläche liefert, haben alle dieselben unendlich fernen Punkte. (Dieser Satz auch in Nr. 84.) Es giebt eine Punkttransformation, die gewöhnliche Krümmungslinien in nichteuklidische überführt. Zur Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichungen 2. O. Über die Bestimmung der Differentialgleichungen, die bei einer r-gliedrigen Gruppe der Ebene invariant bleiben. Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Ebene mit bekannter Gruppe. Satz über Raumkurven.

84. *Meddelelse.*

Christ. Forh., Jahrg. 1882, Oversigt S. 16, Z. 2 v. u.—19, Z. 2. Christ. 1883. Datiert: Paris November 1882, eingelaufen 15. November, mitgeteilt in der Sitzung am 24. November.

Integrationstheorien. Zu jeder einfach transitiven Gruppe gehört eine reziproke Gruppe dieser Art. Flächentheoretische Sätze.

85. *Untersuchungen über Differentialgleichungen. II.*

Christ. Forh., Jahrg. 1882, Nr. 22. 6 S. Vorgelegt in der Sitzung vom 8. December 1882. Geschrieben in Paris, wo Lie am 3. November 1882 in der Société mathématique einen Vortrag über seine Integrationstheorie gehalten hatte. Datiert: 6. November 1882. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,25.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XIV, Jahrg. 1882, S. 288 f. Berlin 1885.

Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. O. zwischen x_1, x_2, x_3, z, die in den x linear und homogen sind, wenn ein partikuläres Integral bekannt ist. Anwendung auf Integrationsprobleme mit einer Gruppe, deren endliche Gleichungen bekannt sind. (Beides auch in Nr. 84.) Sätze über Flächen konstanter Krümmung.

86. *Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten.*

Arch. for Math. Bd. VII, Heft 4, S. 443—444. Datiert: Decbr. 1882. Ankündigung von Nr. 87, 88 und 91.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XIV, Jahrg. 1882, S. 234. Berlin 1885.

1883.

87. *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen xy, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. I.*

Arch. for Math. Bd. VIII, Heft 2, S. 187—224, Heft 3, S. 225—248. Krist. 1883. Datiert: Januar 1883. — Vgl. Nr. 91, 98 und 114.

Auf S. 199—236 werden alle invarianten Differentialgleichungen und Differentialinvarianten bestimmt, die zu den Lieschen Normalformen der endlichen kontinuierlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene gehören. Auf S. 237—249 wird gezeigt, wie man eine Gruppe von Punkttransformationen der Ebene, deren infinitesimale Transformationen gegeben sind, auf ihre kanonische Form bringen kann.

88. *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen xy, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. (Abhandlung 2.)*

Arch. for Math. Bd. VIII, Heft 3, S. 249—288. Krist. 1883. Datiert: März 1883. — Vgl. Nr. 91, 98 und 114.

Enthält die Integrationstheorie aller Differentialgleichungen, die eine der LIEschen Normalformen für die Gruppen von Punkttransformationen der Ebene gestatten.

89. *Untersuchungen über Differentialgleichungen. III.*

Christ. Forh. Jahrg. 1883, Nr. 10. 4 S. Vorgelegt in der Sitzung vom 4. Mai 1883. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,15. — Vgl. Nr. 92.

Über die Frage, unter welchen Bedingungen eine vorgelegte Differentialgleichung auf eine gegebene Form gebracht werden kann. Die reziproke Gruppe einer einfach transitiven Gruppe (vgl. Nr. 84) ist mit dieser gleichzusammengesetzt und ähnlich. Anwendung auf die Integration eines vollständigen Systems, das bekannte infinitesimale Transformationen gestattet. Die Zusammensetzungen der einfachen Gruppen G_r, deren größte Untergruppen $r - q\,(q \leq 3)$ Parameter enthalten. Bedeutung dieser Sätze für die Integrationstheorie. LIE besitzt kanonische Formen für alle Gleichungen: $s = F(x, y, z, p, q)$ mit endlicher oder unendlicher Gruppe.

90. *Ueber unendliche continuirliche Gruppen.*

Christ. Forh. Jahrg. 1883, Nr. 12. 56 S. Christ. 1883. Angemeldet in der Sitzung vom 8. Juni. Ein Résumé seiner Untersuchungen über unendliche Gruppen hatte LIE schon in der Sitzung vom 2. Februar gegeben (Oversigt S. 3, 14). Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 1,00.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XV, Jahrg. 1883, S. 749—751. Berlin 1886.

Bestimmung aller unendlichen kontinuierlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene.

91. *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen xy, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. III.*

Arch. for Math. Bd. VIII, Heft 4, S. 371—458. Erschienen November 1883. Datiert: August 1883. Auf S. 458 eine Anmerkung vom November.

Selbstanzeige von Nr. 87, 88 und 91: F. d. M. Bd. XV, Jahrg. 1883, S. 751—753. Berlin 1886.

S. 372—382 Integrationstheorie der Gleichungen, die durch Punkttransformation die Form: $y'' = 0$ erhalten können. S. 384—451, Aufstellung und Integration der Definitionsgleichungen der Gruppe, bei der eine vorgelegte Differentialgleichung zwischen x und y invariant bleibt. S. 451—458 vier Noten: Über den Schneidungsprocefs. Neue Bestimmung einer Gruppe mit bekannter kanonischer Form. Desiderata. Anwendung auf algebraische Differentialgleichungen (vgl. Nr. 76).

92. *Untersuchungen über Differentialgleichungen. IV.*

Christ. Forh., Jahrg. 1883, Nr. 18. 5 S. Datiert: 11. November 1883, dem Sekretär eingereicht am 12. Nov. Vgl. Oversigt S. 20, Sitzung vom 30. November. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,15.

Selbstanzeige von Nr. 89 u. 92: F. d. M. Bd. XV, Jahrg. 1883, S. 754. Berlin 1886.

BÄCKLUNDS Operation zur Ableitung neuer Flächen konstanter Krümmung läfst sich aus den Operationen von BIANCHI (s. Nr. 66) und LIE (s. Nr. 72) zusammensetzen. Die Bestimmung der geodätischen Kurven einer Fläche konstanter Krümmung führt auf eine RICCATIsche Gleichung 1. O. Über Flächen konstanter Krümmung und Minimalflächen. Jede unendliche (endliche) Gruppe hat unendlich viele Differentialinvarianten. Kann ein System von Differentialgleichungen eine kanonische Form erhalten, die eine bekannte Gruppe gestattet, so giebt es für die Gleichungen, die die Überführung bestimmen, eine kanonische Form (vgl. Nr. 82). Verwertung dieses Umstandes für die Integration. Über die Bestimmung von Gruppen durch Integration möglichst niedriger Hilfsgleichungen.

93. *Sätninger.* {Sätze.}

Christ. Forh., Jahrg. 1883, Oversigt S. 20, Z. 1 v. u. — 21, Z. 9 v. u. Christ. 1884. Eingesandt am 26. November, mitgeteilt in der Sitzung am 30. November.

Der Torsionsradius einer Kurve, die einem (linearen) Linienkomplexe angehört. Über Flächen, deren Haupttangentenkurven linearen Komplexen angehören (vgl. Nr 83). Bildung interessanter Klassen von partiellen Differentialgleichungen, auf deren Integralflächen Krümmungslinien u. dgl. bestimmbar sind.

1884.

94. *Bestimmung des Bogenelements aller Flächen, deren geodätische Kreise eine infinitesimale Berührungstransformation gestatten.*

Arch. for Math. Bd. IX, Heft 1, S. 40—61. Gedruckt Jan. 1884. Vgl. Nr. 95. *Selbstanzeige:* F. d. M. Bd. XVI, Jahrg. 1884, S. 660. Berlin 1887.

Die geodätischen Kreise sind die Kurven konstanter geodätischer Krümmung.

95. *Ueber die allgemeinste geodätische Abbildung der geodätischen Kreise einer Fläche.*

Arch. for Math. Bd. IX, Heft 1, S. 62—68. Gedruckt Januar und Februar 1884. Nr. 94 und 95 sind auch in einem Hefte besonders erschienen. Preis: Kr. 0,80. *Selbstanzeige:* F. d. M. Bd. XVI, Jahrg. 1884, S. 659 f. Berlin 1887.

96. *Mathematiske Meddelelser.*

Christ. Forh., Jahrg. 1884, Nr. 8. Vorgelegt in der Sitzung am 2. Februar 1884 (auf S. 3 der Oversigt steht: 1. Februar). 4 S. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,15. — Vgl. Nr. 103.

Ergänzende Bemerkungen zu Nr. 92 und 85 (Integrationstheorien; Flächen, deren Haupttangentenkurven linearen Komplexen angehören). — Angabe der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daſs zwei r-gliedrige Gruppen von Punkttransformationen durch eine Punkttransformation ähnlich sind (Berichtigung zu Nr. 47, S. 116—125). — Neue partielle Differentialgleichungen 2. O., auf deren Integralflächen die Haupttangentenkurven isotherm sind. — Über infinitesimale Berührungstransformationen zwischen den x, p.

97. F. Klein und S. Lie, *Ueber die Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten.*

Math. Ann. Bd. XXIII, Heft 4, S. 579—586. Ausgeg. 26. 5. 84. Wiederabdruck von Nr. 9.

98. *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen $x\,y$, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. IV.*

Arch. for Math. Bd. IX, Heft 4, S. 431—448. Gedruckt im Juli 1884, erschienen im August.

Nr. 87, 88, 91 und 98 sind auch besonders erschienen. Preis zusammen: Kr. 6,00. *Selbstanzeige:* F. d. M. Bd. XVI, Jahrg. 1884, S. 247 f. Berlin 1887.

Theorie eines $(n-2)$-gliedrigen vollständigen Systems in $x_1, \cdots, x_n$, von dem man einen Jacobischen Multiplikator und eine infinitesimale Transformation kennt. Anwendung auf Gleichungen: $y^{(n)} = F(x, y, y', \cdots, y^{(n-2)})$ mit einer bekannten infinitesimalen Transformation. — Transformationstheorie der Gleichungen von der Form: $y'' = F(x, y)$. — Die auf S. 448 angekündigte „Fortsetzung im nächsten Bande" ist nicht erschienen. — Vgl. Nr. 148.

99. *Zur Theorie der Transformationsgruppen.*

Arch. for Math. Bd. IX, Heft 4, S. 449—451. Erschienen im August 1884. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,25.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XVI, Jahrg. 1884, S. 326. Berlin 1887.

Über die Ähnlichkeit gewisser Gruppen von Punkttransformationen. Ein Satz von Killing als Corollar dieses Satzes.

100. *Mathematiske Meddelelser. II.*

Christ. Forh., Jahrg. 1884, Nr. 9. 4 S. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,15. — Vgl. Nr. 103.

Enthält drei kleine Noten. Die erste (dem Generalsekretär eingereicht am 12. Juni) bemerkt als Ergänzung zu Nr. 80, dafs auch die CAYLEYsche Linienfläche 3. O. eine dreigliedrige projektive Gruppe gestattet. Die zweite (dem Generalsekretär eingereicht am 8. August) enthält ein Résumé von Nr. 104 und 105. Die dritte (vorgelegt in der Sitzung vom 19. September) bespricht die Zusammensetzungen der G_r für $r < 7$ und die Bestimmung transitiver Gruppen von gegebener Zusammensetzung.

101. *Untersuchungen über Transformationsgruppen. I.*

Arch. for Math. Bd. X, Heft 1, S. 74—112. Gedruckt und erschienen im September 1884. Vgl. Nr. 105.

§ 1. Vereinfachung der Bestimmung der Gruppen von Punkttransformationen der Ebene. § 2. Über kontinuierliche Gruppen von Berührungstransformationen. § 3. Über den Multiplikator eines vollständigen Systems. Über Gruppen G_r, die keine invariante G_{r-1} enthalten. § 4. Bestimmung aller projektivischen Gruppen der Ebene auf Grund der Kenntnis aller Gruppen von Punkttransformationen der Ebene. Direkte Bestimmung aller projektivischen Gruppen der Ebene. Tabelle dieser Gruppen.

102. *Bestemmelse af kontinuerlige Grupper.* {Bestimmung kontinuierlicher Gruppen.}

Christ. Forh., Jahrg. 1884, Oversigt S. 12, Z. 11—8 v. u. Sitzung vom 17. Oktober.

„LIE theilte mit, dafs es ihm gelungen war zu zeigen, dass die früher von ihm gegebene Methode zur Bestimmung aller kontinuirlichen Gruppen, deren Transformationen paarweise invers sind, auch zum Ziele führt, wenn man überhaupt alle kontinuirlichen Gruppen sucht.“

103. *Mathematiske Meddelelser. III.*

Christ. Forh. Jahrg. 1884, Nr. 15. Vorgelegt in der Sitzung am 12. Dezember 1884. 4 S. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,25.

Selbstanzeige von Nr. 96, 100 und 103: F. d. M. Bd. XVI, Jahrg. 1884, S. 326. Berlin 1887.

Knappe Ausführung der Andeutungen in Nr. 102. Jede r-gliedrige kontinuierliche Gruppe kann durch Einführung neuer Parameter in eine Gruppe mit der identischen und mit paarweise inversen Transformationen verwandelt werden. Die Parametergruppe und die adjungierte Gruppe. Über die Zusammensetzung der allgemeinen projektiven und der allgemeinen linearen (homogenen) Gruppe. Über die Gruppen, deren infinitesimale Transformationen 1. O. die Form: $x_i p_k - x_k p_i + \cdots$ $(i, k = 1 \cdots n)$ haben, möglicherweise mit hinzutretendem: $\Sigma x_k p_k + \cdots$. (Vgl. Nr. 108.) Das ist wichtig für die Grundlagen der Geometrie. Über die Bestimmung von Gruppen.

104. *Ueber Differentialinvarianten.*

Math. Ann. Bd. XXIV, Heft 4, S. 537—578. Ausgeg. 15. 12. 84. Datiert: Christiania, 29. Mai 1884.

Nachweis des Satzes (vgl. Nr. 92), dafs jede endliche oder unendliche kontinuierliche Gruppe unendlich viele Differentialinvarianten besitzt, die durch Integration vollständiger Systeme bestimmbar sind. Zahlreiche Beispiele für die Bildung von Differential-Invarianten und -Kovarianten, die gegebene Differential-Gleichungen oder -Ausdrücke gegebenen Gruppen gegenüber besitzen. Kriterien für die Möglichkeit gegebene Gleichungen oder Ausdrücke auf gegebene Formen zu bringen.

1885.

105. *Untersuchungen über Transformationsgruppen. I.* {Schlufs von Nr. 101.}

Arch. for Math. Bd. X, Heft 2, S. 113—128. Gedruckt 30. Sept. 1884, erschienen März 1885. Nr. 101 und 105 besonders erschienen. Preis: Kr. 1,40.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XVI, Jahrg. 1884, S. 325 f. Berlin 1887.

§ 6 (der Anfang S. 111 f. schon in Nr. 101). Über die Bestimmung aller projektivischen Gruppen des Raumes. § 7. Bestimmung gewisser (der primitiven) Gruppen von Punkttransformationen des Raumes. Die auf S. 128 angekündigte Fortsetzung ist nicht erschienen, wenigstens plante Lie wohl damals eine andre Fortsetzung als die in Nr. 108 gegebene.

106. *Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche, endliche Gruppe gestatten.*

Math. Ann. Bd. XXV, Heft 1, S. 71—151. Ausgeg. 22. 1. 85. Datiert: Christiania 5. Juli 1884.

S. 78—83: Wiederholung der alten Lieschen Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen (s. Nr. 29 u. 40). S. 83—89: Diskussion der bei dieser Theorie zu integrierenden Hilfsgleichungen. S. 90—96: Die adjungierte Gruppe (ohne diesen Namen). S. 96—107: Kriterien für die Ähnlichkeit zweier Transformationsgruppen (vgl. Nr. 96). S. 107—111: Einfach transitive Gruppen, die in reziproker Beziehung stehen (vgl. Nr. 84 und 89). S. 111—130: Behandlung zahlreicher Integrationsprobleme, die als spezielle Fälle jener alten Integrationstheorie aufgefafst werden können. S. 130—135: Allgemeine Sätze über Gruppen G_n mit einer gröfsten Untergruppe G_{n-q}. S. 136—149: Integrationstheorie von Differentialgleichungen, die eine Gruppe mit bekannten endlichen Transformationen gestatten; Normalformen der Hilfsgleichungen. S. 149—151: Integration der Definitionsgleichungen für die infinitesimalen Transformationen einer endlichen kontinuierlichen Gruppe.

107. *Ueber gewöhnliche lineare Differentialgleichungen.*

Christ. Forh. 1885, Nr. 21. Vorgelegt 13. Novbr. 1885. Gedruckt 28. Dezbr. 1885. 4 S. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,25. — Vgl. Nr. 127.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XVII, Jahrg. 1885, S. 283. Berlin 1888.

Die Integration einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung n. O. zwischen x und y, wenn n partikuläre Lösungen $y_1 \cdots y_n$ durch m bekannte Relationen: $F_k(x, y_1 \cdots y_n) = 0$ verknüpft sind, ist ein spezieller Fall von Lies alter Integrationsmethode (vgl. Nr. 106). Besprechung von Beispielen, namentlich des Falles, wo $m = 1$ und F_1 von x frei und in den y vom zweiten Grade ist. — Eine möglichst gekrümmte Kurve des R_n, die zwei infinitesimale projektivische Transformationen gestattet, ist rational und von n. O. — Das in den *Trfsgr.* Bd. I, S. 614, ausgesprochene Kriterium für die Ähnlichkeit gewisser transitiver Gruppen.

1886.

108. *Untersuchungen über Transformationsgruppen. II.*

Arch. for Math. Bd. X, Heft 4, S. 353—413. S. 353—400. Gedruckt 17. 12. 85, das ganze erschienen März 1886. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 1,60. — Vgl. Nr. 101 u. 105.

Selbstanzeige: F. d. M. Bd. XVII, Jahrg. 1885, S. 338 f. Berlin 1888.

§ 1. Bestimmung aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung. Bestimmung aller r-gliedrigen intransitiven Gruppen. § 2. Systatische und asystatische Gruppen. § 3. Methode zur Bestimmung aller transitiven Gruppen des R_n. § 4. Die Gruppen, die eine Gleichung $\Sigma f_{ik}(x_1 \cdots x_n) dx_i dx_k = 0$ invariant lassen und dabei im Infinitesimalen möglichst transitiv sind (vgl. Nr. 103). Beweis, dafs die konforme Gruppe des $R_n (n > 3)$ einfach ist.

109. *Bemerkungen zu v. Helmholtz' Arbeit über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen.*

Leipz. Ber. Jahrg. 1886, Supplementheft, abgeliefert 21. 2. 1887, S. 337—342. Vorgelegt in der Sitzung am 25. 10. 86. — Ausgearbeit von Engel.

Zuerst vorgetragen auf der Naturforscherversammlung in Berlin, am 21. 9. 86. Vgl. Tageblatt der 59. Versamml. deutscher Naturf. u. Ärzte, S. 187: „Herr S. Lie sprach über die Beziehungen seiner allgemeinen Untersuchungen über Gruppentheorie zu HELMHOLTZ: *Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.*" S. 342, Z. 9 v. o.—1 v. u. ist wohl erst infolge der Diskussion hinzugekommen, die sich auf der Berliner Versammlung an den LIEschen Vortrag geknüpft hatte.

1887.

110. *Nogle mathematiske Sätninger.* {Einige mathematische Sätze.}

Christ. Forh., Jahrg. 1887, Oversigt S. 4, Z. 2 v. u.—5, Z. 16, Sitzung vom 18. 2. 87. Aus einem von Leipzig am 16. 8. 86 abgegangenen Briefe, der erst am 10. 2. 87 nach Kristiania gekommen war.

Algebraische Minimalflächen, die in eine Fläche eingeschrieben sind. Charakteristische Eigenschaften der euklidischen und der nichteuklidischen Bewegungen (vgl. Nr. 109, S. 341 f.).

111. *Die Begriffe Gruppe und Invariante.*

Leipz. Ber. Jahrg. 1887, Heft I, II, abgeliefert 30. 1. 1888, S. 83—88. Vorgelegt in der Sitzung am 1. 8. 87. Datiert: Leipzig, Juli 1887. — Ausgearbeitet von ENGEL.

Abfertigung des verunglückten Versuchs, den HALPHEN in einem Briefe an SYLVESTER (American Journal Bd. IX, S. 137—141, 1887) gemacht hatte, eine neue Definition des Gruppenbegriffs aufzustellen.

1888.

112. *Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1888, Heft I, II, abgeliefert 22. 2. 89, S. 14—21. Vorgelegt in der Sitzung vom 13. 2. 88.

Aus der Theorie der Funktionengruppen kann die Existenz einer r-gliedrigen Gruppe von gegebener Zusammensetzung abgeleitet werden. Berichtigung zu Nr. 36, S. 191 f. und zu Nr. 106, S. 94 f. Über die Bestimmung der Gruppen von gegebener Zusammensetzung. Reducible und irreducible Gruppen von Berührungstransformationen. Nichtanalytische Gruppen. Die bei einer einfach transitiven Gruppe invarianten Zerlegungen des Raumes. Über die Gruppen des R_4. Die Begriffe: integrable Gruppe und erste, zweite, . . . derivierte Gruppe. Bildung von Differentialinvarianten einer Gruppe der Ebene aus bekannten invarianten Differentialgleichungen.

113. *Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt.* Unter Mitwirkung von Dr. FRIEDRICH ENGEL bearbeitet von SOPHUS LIE, Professor der Geometrie an der Universität Leipzig.

Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. X und 632 S. gr. 8°. Ladenpreis: ℳ 18. — Gedruckt vom 30. 7. 87—1. 6. 88. Ausgegeben im Juni 88.

114. *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen xy, die eine Gruppe von Transformationen gestatten.*

Math. Ann. Bd. XXXII, Heft 2, S. 213—281, ausgeg. 16. 8. 88.

S. 213—253 Wiederabdruck von Nr. 87, S. 253—281 von Nr. 88. Auf S. 281 eine vom Juli 1888 datierte Anmerkung über SYLVESTERS Reziprokanten.

115. *Zur Theorie der Berührungstransformationen.*

Leipz. Abh. Bd. XIV, Nr. 12, S. 535—562. (28 besonders paginierte S. hoch 4.) Das Manuskript übergeben 7. 8. 88. Der Abdruck vollendet 30. 9. 88. Preis: 1 ℳ.

Begriff und charakteristische Eigenschaften der endlichen und der infinitesimalen Berührungstransformationen. Erweiterte Berührungstransformationen. Anwendung auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. Allgemeine Sätze über Gruppen. Analogie zwischen der GALOISschen Theorie und der LIEschen Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannter Gruppe.

116. *Zur Theorie der Transformationsgruppen.*

Christ. Forh., Jahrg. 1888, Nr. 13. 6 S. Gedruckt 14. 12. 88. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,25.

Zusammensetzung und Isomorphismus. Beweis, daſs es, sobald die w_{ik} gewisse

Bedingungen erfüllen, stets r unabhängige Funktionen $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ von den x und p giebt, die in den Beziehungen: $(\varphi_i \varphi_k) = w_{ik}(\varphi_1 \cdots \varphi_r)$ stehen. Daraus folgt, dafs es stets r-gliedrige Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} giebt, wenn die c_{iks} gewisse Bedingungen erfüllen. Der Faktor, mit dem der Ausdruck: $y^{(m)} + \varphi(x, y, y', \cdots, y^{(m-1)})$ bei einer Transformation reproduziert wird, bei der die Geichung: $y^{(m)} + \varphi = 0$ invariant bleibt.

1889.

117. *Die Begriffe Gruppe und Invariante.*

American Journal of Mathematics, Bd. XI, S. 182—186. Wiederabdruck von Nr. 111.

118. *Ein Fundamentalsatz in der Theorie der unendlichen Gruppen.*

Christ. Forh., Jahrg. 1889, Nr. 7. 4 S. Vorgelegt von E. Holst in der Sitzung vom 25. Januar. Gedruckt 1. Februar 1889. Datiert: Leipzig 25. 12. 88. Auch besonders erschienen. Preis: Kr. 0,25.

Mit Hilfe von Differentialinvarianten lassen sich die Definitionsgleichungen der endlichen Transformationen jeder unendlichen Gruppe auf eine kanonische Form bringen. Daraus wird geschlossen, dafs jede endliche Transformation der Gruppe durch successive Ausführung von infinitesimalen Transformationen der Gruppe erhalten werden kann. — Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dafs eine Schar von infinitesimalen Transformationen aus den infinitesimalen Transformationen einer kontinuierlichen Gruppe besteht.

119. *Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Mechanik.*

Leipz. Ber. Jahrg. 1889, Heft II, III, IV, abgeliefert 25. 2. 90, S. 145—156. Vorgelegt in der Sitzung am 6. 5. 89.

Die infinitesimalen Berührungstransformationen des R_n, die jedes Element in der Richtung seiner Normalen fortführen, sind für die Mechanik von grofser Bedeutung. Bestimmung aller infinitesimalen Berührungstransformationen des R_3, die Krümmungslinien in ebensolche Kurven verwandeln. Konstruktion von Orthogonalsystemen. Die Differentialgleichungen 2. O. zwischen x, y, die eine Gruppe von Punkttransformationen gestatten. Anwendung auf die geodätischen Kurven einer Fläche. Die reellen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene.

120. *Reduction einer Transformationsgruppe auf ihre canonische Form.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1889, Heft II, III, IV, abgeliefert 25. 2. 90, S. 277—289. Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Juni 1889.

Wenn die endlichen Gleichungen der Gruppe bekannt sind, so erfordert die Reduktion höchstens Quadraturen, zugleich findet man eine kanonische Form jeder Untergruppe. Fälle, in denen man aus den infinitesimalen Transformationen einer Gruppe die endlichen Gleichungen der Gruppe finden kann. Auf S. 288 wird bemerkt, dafs bei einer G_r die Invarianten beliebig vieler Punkte sicher durch die von $r+1$ Punkten ausdrückbar sind.

121. *Ueber irreducible Berührungstransformationsgruppen.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1889, Heft II, III, IV, abgeliefert 25. 2. 90, S. 320—327. Vorgelegt in der Sitzung vom 1. Juli 1889.

Die drei irreduciblen endlichen Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene (vgl. Nr. 51 und 55). In ähnlicher Weise kann man in jedem R_n drei irreducible Gruppen von Berührungstransformationen finden, von denen eine einfach ist. Die drei bisher bekannten Klassen von einfachen endlichen kontinuierlichen Gruppen. Bemerkung über komplexe Zahlen und Gruppen.

1890.

122. *Theorie der Transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt.* Unter Mitwirkung von F. Engel bearbeitet von S. Lie.

Leipzig 1890, bei Teubner. VI und 555 S. gr. 8°. Gedruckt vom 7. 6. 89 bis 31. 1. 90. Ausgegeben Februar 1890. Ladenpreis: ℳ 16.—

123. *Ueber die Grundlagen der Geometrie. (Erste Abhandlung.)*

Leipz. Ber., Jahrg. 1890, Heft II, abgeliefert 5. 11. 90, S. 284—321. Vorgelegt in der Sitzung vom 7. Juli 1890. Niedergeschrieben im Frühjahre 1890 in Ilten bei Hannover.

Charakteristische Eigenschaften der euklidischen und der nichteuklidischen Bewegungen im Raume von beliebig vielen Dimensionen (vgl. Nr. 109, S. 341 f.). Auf S. 313—321 noch einige Sätze über gewisse Gruppen, namentlich projektive.

124. *Ueber die Grundlagen der Geometrie. (Zweite Abhandlung.)*

Leipz. Ber., Jahrg. 1890, Heft III, abgeliefert 26. 2. 91, S. 355—418. Vorgelegt in der Sitzung vom 20. October 1890. Niedergeschrieben im Frühjahre 1890 in Ilten bei Hannover.

Bestimmung aller reellen mehrgliedrigen Gruppen des gewöhnlichen Raumes, bei denen zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben und die Invarianten von beliebig vielen Punkten durch die von Punktepaaren ausdrückbar sind.

125. *Neuer Beweis des zweiten Fundamentalsatzes in der Theorie der Transformationsgruppen.*

Leipz. Ber. Jahrg. 1890, Heft IV, abgeliefert 12. 3. 91, S. 453—477. Vorgelegt in der Sitzung vom 1. Dezember 1890. Die Ausarbeitung ist von G. SCHEFFERS, ausgenommen S. 476, Z. 8 v. u. — 477, Z. 1 v. u.

Gemeint ist der Satz, dafs r unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ die in den Beziehungen: $(X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s f$ stehen, stets eine r-gliedrige Gruppe erzeugen.

126. *Bestimmung aller r-gliedrigen transitiven Transformationsgruppen durch ausführbare Operationen.*

Leipz. Ber. Jahrg. 1890, Heft IV, abgeliefert 12. 3. 91, S. 478—490. Vorgelegt in der Sitzung vom 1. Dezember 1890. — Vgl. Nr. 127.

Durch Betrachtungen, die eigentlich nichts andres sind als eine Wiederholung und neue Deutung der Entwickelungen in Nr. 47, S. 94—100, wird gezeigt, dafs zu jeder Zusammensetzung c_{iks} die infinitesimalen Transformationen der beiden zugehörigen kanonischen Parametergruppen gefunden werden können. Darauf wird dann die Bestimmung aller r-gliedrigen transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung c_{iks} gegründet.

1891.

127. *Die linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen.*

Leipz. Ber. Jahrg. 1891, Heft II, abgeliefert 30. 6. 91, S. 253—270. Vorgelegt in der Sitzung am 11. Mai. Redigiert von ENGEL nach einem Manuskripte, das ihm LIE zusammen mit einem Entwurfe zu der Nr. 126 im November 1889 übergeben hatte. S. 266—270 sind Zusätze, die erst bei der Ausarbeitung im Frühjahre 1891 hinzugekommen sind.

Ausführliche Darstellung des Hauptinhaltes von Nr. 107. Auf S. 268—270 einige Zusätze zu Nr. 124.

128. SOPHUS LIE, *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen.* Bearbeitet und herausgegeben von Dr. GEORG SCHEFFERS.

Leipzig. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1891. XIV u. 568 S. gr. 8°. Gedruckt vom 24. 12. 90 bis 26. 6. 91. Ausgegeben Juli 1891. Ladenpreis: ℳ 16.—

129. *Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen continuirlichen Transformationsgruppen. (Erste Abhandlung.)*

Leipz. Ber. Jahrg. 1891, Heft III, abgeliefert 22. 12. 91, S. 316—352. Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Juni 1891. Die Sonderabzüge waren schon Mitte August fertig. Redigiert von ENGEL nach einem Manuskripte, das LIE im Frühjahre 1890 in Ilten bei Hannover niedergeschrieben hatte.

130. *Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen continuirlichen Transformationsgruppen. (Zweite Abhandlung.)*

Leipz. Ber. Jahrg. 1891, Heft III, abgeliefert 22. 12. 91, S. 353—393. Vorgelegt in der Sitzung vom 3. August 1891. Die Sonderabzüge waren schon Anfang September fertig. Redigiert von Engel, wie Nr. 129.

1892.

131. *Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1892, Heft I, abgeliefert 27. 4. 92, S. 106—114. Vorgelegt in der Sitzung am 1. Februar 1892. S. 106—113, Z. 4 v. o. redigiert von Engel.

Kritische Bemerkungen über Untersuchungen von de Tilly, anknüpfend an eine Stelle in Veroneses *Fondamenti di Geometria*, ferner über gewisse Betrachtungen von F. Klein und über Äufserungen von Lindemann. Am Schlusse einige Bemerkungen über Schur.

132. *Sur une interprétation nouvelle du théorème d'Abel.*

Comptes Rendus, Bd. 114, S. 277—280. Vorgelegt von E. Picard in der Sitzung vom 8. Februar 1892.

Das Abelsche Theorem liefert alle Flächen des R_3, die in vier Weisen durch Translation von Kurven erzeugt werden, und damit zugleich die Lösung einer gewissen funktionentheoretischen Aufgabe. Ähnliches gilt im R_n.

133. *Sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions.*

Comptes Rendus, Bd. 114, S. 334—337. Vorgelegt von E. Picard in der Sitzung vom 15. Februar 1892.

Das Abelsche Theorem liefert algebraische einfache transitive Gruppen von vertauschbaren Transformationen.

134. *Sur les fondements de la Géométrie.*

Comptes Rendus, Bd. 114, S. 461—463. Sitzung vom 29. Februar 1892.

Kritische Bemerkungen zu der bekannten Helmholtzschen Arbeit über die Grundlagen der Geometrie (Gött. Nachr. 1868).

Am 7. Juni 1892 wurde Lie zum Korrespondenten der Akademie gewählt. Comptes Rendus Bd. 114, S. 1329.

135. *Ueber einige neuere gruppentheoretische Untersuchungen.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1892, Heft III, abgeliefert 5. 10. 92, S. 297—305. Vorgelegt in der Sitzung vom 1. August 1892. Redigiert von Engel.

Würdigung der gruppentheoretischen Arbeiten von Schur, da die Bemerkungen am Schlusse von Nr. 131 zu Mifsverständnissen Anlafs geben konnten.

136. *Untersuchungen über Translationsflächen (Abhandlung I).*

Leipz. Ber., Jahrg. 1892, Heft V, abgeliefert 9. 2. 93, S. 447—472. Vorgelegt in der Sitzung vom 17. Oktober 1892. Redigiert von Scheffers.

Allgemeines über Translationsflächen (vgl. Nr. 79). Beziehungen zwischen zwei Translationsflächen. Eine Klasse von Differentialgleichungen von der Form:

$$R(p,q)r + S(p,q)s + T(p,q)t = 0.$$

Integralflächen, die eine gegebene Developpable nach einer gegebenen Kurve berühren. Algebraische Integralflächen, die in eine algebraische Developpable eingeschrieben sind. Der spezielle Fall: $s = 0$ ist schon in Nr. 57 erledigt. Die Bestimmung aller algebraischen Integralflächen im allgemeinen Falle s. Nr. 42, S. 157—163.

137. *Untersuchungen über Translationsflächen (Abhandlung II).*

Leipz. Ber., Jahrg. 1892, Heft VI, abgeliefert 3. 3. 93, S. 559—579. Vorgelegt in der Sitzung vom 5. Dezember 1892.

S. 562—569 sind eine Umarbeitung von Nr. 57. — Beweis, dafs die Theorie der Funktionengruppen alle Berührungstransformationen liefert, die eine MONGE-AMPÈRESche Gleichung mit vollständigen intermediären Integralen invariant lassen. Historische Bemerkungen über Nr. 75, 39, 66, 68, 42, 15, 5. Über die Differentialinvarianten der Gruppen der euklidischen und der nichteuklidischen Bewegungen im R_3. Über algebraische Integralflächen der Gleichung: $r + t = 0$.

1893.

138. *Ueber Differentialgleichungen, die Fundamentalintegrale besitzen.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1893, Heft IV, abgeliefert 12. 10. 93, S. 341—348. Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Mai 1893.

Knüpft an an Untersuchungen von VESSIOT und A. GULDBERG und an Nr. 106, S. 124—130.

139. *Sur les équations différentielles ordinaires, qui possèdent des systèmes fondamentaux d'intégrales.*

Comptes Rendus, Bd. 116, S. 1233—1235. Vorgelegt in der Sitzung vom 29. Mai 1893. — Vgl. Nr. 138.

140. *Ueber die Gruppe der Bewegungen und ihre Differentialinvarianten.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1893, Heft IV, abgeliefert 12. 10. 93, S. 370—378. Vorgelegt in der Sitzung vom 5. Juni 1893.

Die Theorie dieser Differentialinvarianten bietet mehr als die bisherige Krümmungstheorie. Die Kriterien für die Kongruenz zweier Kurven, insbesondere zweier Minimalkurven.

141. SOPHUS LIE, *Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen.* Bearbeitet und herausgegeben von Dr. GEORG SCHEFFERS. Mit [54] Figuren im Text. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1893.

XIV u. 810 S. gr. 8°. Gedruckt vom 5. 2. 92 bis 8. 9. 93. Ausgegeben September 1893. Ladenpreis: ℳ 24.—.

142. *Theorie der Transformationsgruppen. Dritter und letzter Abschnitt.* Unter Mitwirkung von Prof. Dr. FRIEDRICH ENGEL bearbeitet von SOPHUS LIE, Professor der Geometrie an der Universität Leipzig.

Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1893. XXVII u. 831 S. gr. 8°. Gedruckt vom 25. 3. 92—29. 9. 93. Ausgegeben September 1893. Ladenpreis: ℳ 26.—.

1894.

143. *Bemerkungen zu OSTWALD's Princip des ausgezeichneten Falles.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1894, Heft II, abgeliefert 16. 10. 94, S. 135—137. Vorgelegt in der Sitzung vom 4. Juni 1894.

Kritik der OSTWALDschen Note: *Ueber das Princip des ausgezeichneten Falles,* Leipz. Ber. 1893, Heft VII, S. 599—603 (Sitzung vom 16. 10. 93). Die Antwort von OSTWALD steht in den Leipz. Ber. von 1894, Heft II, S. 276—278 (Sitzung vom 30. 7. 94).

144. *Zur Theorie der Transformationsgruppen.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1894, Heft III, abgeliefert 23. 3. 95, S. 322—333. Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Dezember 1894. Der Abschnitt S. 327—333 wurde in dieser Sitzung blofs angekündigt.

Über die Endlichkeit der gröfsten kontinuierlichen Gruppen von Punkt- oder Berührungstransformationen, die gewisse Systeme von Differentialgleichungen invariant lassen. Auf S. 327 nach einigen allgemeinen Bemerkungen einfache gruppentheoretische Bestimmung aller Transformationen, bei denen lineare Differentialgleichungen in ebensolche übergehen. Lie war hierzu veranlafst durch zwei Arbeiten von P. Stäckel: *Ueber Transformationen von Differentialgleichnngen* und: *Ueber Transformationen partieller Differentialgleichungen*, Crelles Journal Bd. 111, S. 290—302 (1893) und Bd. 114, S. 116—142 (1894).

1895.

145. *Untersuchungen über unendliche continuirliche Gruppen.*

Leipz. Abh. Bd. XXI, Nr. III, S. 43—150 (108 besonders paginierte Seiten hoch 4°). Das Manuskript eingeliefert 3. 7. 94. Der Abdruck vollendet 12. 1. 95. Preis: 5 ℳ. S. 39—108 sind von Engel redigiert nach einem Manuskripte, das Lie im Frühjahre 1890 in Ilten bei Hannover niedergeschrieben hatte.

S. 3—7: historische Bemerkungen. S. 7—38: Bestimmung aller imprimitiven unendlichen kontinuierlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene (Umarbeitung eines Teils von Nr. 90). S. 39—61: die unendlichen Gruppen von Punkttransformationen, die im Infinitesimalen möglichst transitiv sind. S. 61—108: Eine Klasse von irreducibeln unendlichen Gruppen von Berührungstransformationen, die in der Ebene alle irreducibeln Gruppen dieser Art umfafst.

146. *Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1895, Heft I, abgeliefert 7. 5. 95, S. 53—128, vorgelegt in der Sitzung vom 4. Februar 1895. Lie hatte die neuen Theorien dieser Abhandlung der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. am 11. Okt. 1893 mitgeteilt und dann im Winter 1893—94 in seinen Vorlesungen an der Universität eingehend entwickelt.

S. 54—61: historische Bemerkungen. S. 61—70: Theorie der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen 2. O. nach Monge, Ampère, Darboux und Lévy. S. 70—89: Vervollständigung der Theorie der Mongeschen Charakteristiken. Ausführliche Darstellung der in Nr. 62 angedeuteten Integrationstheorien. S. 90—112: Jede infinitesimale Berührungstransformation, die ein System von Differentialgleichungen invariant läfst, bestimmt specielle Integralgebilde. Anwendung auf Beispiele. Unbeschränkt integrable Systeme und Involutionssysteme. S. 112—128: Differentialgleichungen, die eine unendliche Gruppe gestatten. Auf S. 128 Ankündigung von Nr. 147.

147. *Bestimmung aller Flächen, die eine continuirliche Schaar von projectiven Transformationen gestatten.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1895, Heft II, abgeliefert 12. 7. 95, S. 209—260. Vorgelegt in der Sitzung vom 4. März 1895.

Die in Nr. 80 übergangenen Flächen, die höchstens zwei unabhängige infinitesimale projektive Transformationen gestatten.

148. *Verwerthung des Gruppenbegriffes für Differentialgleichungen. I.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1895, Heft III, abgeliefert 10. 8. 95, S. 261—322. Vorgetragen in der Sitzung vom 5. Februar 1894, eingeliefert in der Sitzung vom 11. April 1895. Lie hatte diese Theorien im Winter 1893—94 in Vorlesungen vorgetragen. — Eine Abhandlung II ist nicht erschienen.

S. 261—263: Historische Bemerkungen. S. 264—282: Reduktion der allgemeinen infinitesimalen Transformation einer unendlichen Gruppe auf eine gegebene kanonische Form. S. 282—292: Systeme von Differentialgleichungen, deren allgemeinste Lösungen aus speciellen Lösungen durch Gleichungen hervorgehen, die eine Gruppe bilden. S. 293—304: Gruppentheoretische Behandlung der Theorie des letzten Multiplikators (als Anwendung). S. 304—313: Die Gruppe, die alle Volumina in konstantem Verhältnisse ändert. S. 313—322: Eine Gleichung $A(f) = 0$ mit einem bekannten Multiplikator und einer bekannten infinitesimalen Transformation (Umarbeitung von Nr. 98, S. 431—441).

149. *Influence de Galois sur le développement des Mathématiques.*

Datiert: Leipzig, le 17 novembre 1894. Erschienen in dem Werke: *Le Centenaire de l'École Normale 1795—1895.* Paris, Librairie Hachette et C^ie^, 1895, S. 481—489.

Das Werk ist nicht im Buchhandel, sondern wurde nur für die Subskribenten ausgegeben.

150. *Ueber die aus dem Jahre 1874 herrührende Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1895, Heft IV, abgeliefert 19. 9. 95, S. 400.

Auszug aus einem in der Sitzung vom 17. Juni 1895 gehaltenen Vortrage. Die darin angekündigte Abhandlung: *Discussion der Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen* (vgl. Nr. 29) ist nicht erschienen.

151. *Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1895, Heft V, VI, abgeliefert 21. 3. 96, S. 494—508. Vorgelegt in der Sitzung vom 29. Juli 1895.

S. 494—502: Die beiden reciproken Funktionengruppen, die im R_3 zu der Gruppe aller Drehungen um einen Punkt gehören, geben zu interessanten Berührungstransformaten Anlaſs. Ähnliches gilt von jeder dreigliedrigen Transformationsgruppe des R_3. Lie findet so eine eingliedrige Gruppe, die die Aspidaltransformation und eine, die die Transformation durch reciproke Polaren umfaſst. Auf S. 499 eine Anmerkung über die infinitesimalen Berührungstransformationen der Optik (vgl. Nr. 152). Auf S. 501 f. eine Bemerkung, die zu Nr. 54, S. 4 u. 83, S. 1—5 gehört. — S. 502—506: Über die Bestimmung aller Systeme von r Funktionen $u_1 \cdots u_r$ von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, die Gleichungen von der Form $(u_i u_k) = \varrho \varphi_{ik}(u_1 \cdots u_r)$ erfüllen. S. 506—508: In einem speziellen Falle wird der Beweis dafür erbracht, daſs seine Integrationstheorie von 1874 (vgl. Nr. 150) das Gröſstmögliche leistet.

1896.

152. *Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Optik.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1896, Heft I, abgeliefert 17. 4. 96, S. 131—133. Vorgelegt in der Sitzung vom 13. Januar 1896.

Die Wellenbewegungen der Optik kommen auf eingliedrige Gruppen von Berührungstransformationen hinaus. — Eine Verallgemeinerung des Malusschen Satzes auf Grund einer in Nr. 15, S. 195 f. angegebenen Ausdehnung der gewöhnlichen Krümmungstheorie.

153. *Ueber die Theorie der Translationsflächen und das Abelsche Theorem.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1896, Heft II, III, abgeliefert 31. 8. 96, S. 141—198. Angekündigt durch A. Mayer in der Sitzung vom 21. 10. 95 (s. Leipz. Ber., Jahrg. 1895, S. 509), eingeliefert in der vom 3. Februar 1896. Kap. IV, S. 162—168, Kap. VI, S. 174—183 und Kap. VII, S. 183—198 (dieses aber nur zum Teile) sind von Scheffers redigiert.

S. 141—144: Bemerkungen über den Inhalt von Nr. 16, 42, 60, 53, 56, 57, 79, 132, 133, 136, 137. — S. 144—153: Aufstellung spezieller Translationsflächen. S. 154—162: Das Abelsche Theorem liefert Flächen, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefaſst werden können. S. 163—198: Analytische Formulierung und Erledigung des Problems *alle* solchen Flächen zu bestimmen. Das Abelsche Theorem liefert sie alle.

154. Sophus Lie, *Geometrie der Berührungstransformationen.* Dargestellt von Sophus Lie und Georg Scheffers.

Erster Band. Mit [92] Figuren im Text. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1896.

XII u. 694 S. gr. 8°. Gedruckt vom 14. 12. 94 bis 17. 4. 96. Ausgegeben April 1896. Preis: ℳ 24.—

Die Fortsetzung ist nicht erschienen.

155. *Zur allgemeinen Transformationstheorie.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1896, Heft IV, abgeliefert 27. 1. 97, S. 390—412. Vorgelegt in der Sitzung vom 27. Juli 1896.

Zerfällt in zwei Teile:

I. *Ueber Differentialgleichungen, die eine continuirliche Gruppe gestatten.* S. 390—404. Lie erinnert an seine alten Integrationstheorien, reproduziert die in Nr. 84 u. 85 entwickelte Integrationstheorie, ferner die Theorie von Nr. 107 und 127 mit ergänzenden Bemerkungen über etwaige algebraische Integralkurven. Er betrachtet ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, dessen allgemeinste Lösungen aus einem speziellen Lösungensysteme durch Gleichungen hervorgehen, die eine endliche kontinuierliche Gruppe bilden. Systeme von Differentialgleichungen, die eine bekannte endliche oder unendliche Gruppe gestatten.

II. *Einige Bemerkungen über Pfaff'sche Ausdrücke und Gleichungen.* S. 405—412. Mitteilungen über den Inhalt der nicht erschienenen Fortsetzung von Nr. 43. Die infinitesimalen Transformationen, die eine Pfaffsche Gleichung oder einen Pfaffschen Ausdruck (eventuell bis auf ein hinzutretendes vollständiges Differential) invariant lassen. Zusammenhang der Theorie der Funktionengruppen mit der Theorie der Pfaffschen Ausdrücke. — Der Meusniersche Satz über die Krümmung der Flächen läfst sich auf Mongesche Gleichungen ausdehnen. (Das im Grunde schon in Nr. 15 benutzt.) Vgl. Nr. 161.

156. *Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1896, Heft IV, abgeliefert 27. 1. 97, S. 466—477. Vorgelegt in der Sitzung vom 2. November 1896.

Anknüpfend an Nr. 140 werden die Kriterien für die Kongruenz zweier Flächen entwickelt.

1897.

157. *Das Abel'sche Theorem und die Translationsmannigfaltigkeiten.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1897, Heft I, II, abgeliefert 21. 5. 97, S. 181—248. Vorgelegt in der Sitzung vom 1. März 1897.

Als Hilfstheorie: Bestimmung aller zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten des R_n, die in mehrfacher Weise als Translationsmannigfaltigkeiten aufgefafst werden können. Dann Bestimmung aller dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten des R_4, die auf drei Arten Translationsmannigfaltigkeiten sind. Das Abelsche Theorem liefert sie alle. Auf S. 247 f. eine Anmerkung über die Oskulationstransformationen der Ebene und über Integrationsprobleme mit gemischten Gruppen.

158. *Die Theorie der Integralinvarianten ist ein Corollar der Theorie der Differentialinvarianten.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1897, Heft III, abgeliefert 14. 7. 97, S. 342—357. Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Mai 1897.

Zeigt, dafs die Sätze von Žorawski, Cartan, Hurwitz, Poincaré und Königs über Integralinvarianten unmittelbar aus Lies Theorie der Differentialinvarianten folgen und dafs Lie nicht nur schon längst Integralinvarianten betrachtet, sondern auch die allgemeinen Regeln zu ihrer Berechnung entwickelt hatte.

159. *Ueber Integralinvarianten und ihre Verwerthung für die Theorie der Differentialgleichungen.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1897, Heft IV, abgeliefert 1. 12. 97, S. 369—410. Vorgelegt in der Sitzung vom 5. Juli 1897.

S. 371—386: Allgemeine Sätze über die Existenz von Integralinvarianten. S. 386—408: Verwertung bekannter Integralinvarianten bei Integrationsproblemen. S. 408—410: Integralinvarianten bei Gruppen von Berührungstransformationen.

160. *Liniengeometrie und Berührungstransformationen.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1897, Heft V, VI, abgeliefert 11. 3. 98, S. 687—740. Vorgelegt in der Sitzung vom 6. Dezember 1897.

S. 688—704: Bestimmung aller irreducibeln Linienkomplexe, deren Komplexkegel zerfallen. S. 705—726: Die Beziehungen zwischen Mongeschen und Pfaffschen Gleichungen im R_3. Theorie der Berührungstransformationen des R_3. S. 726—740: Bestimmung aller Berührungstransformationen des R_3, bei denen die Punkte in die

Geraden eines Komplexes und gleichzeitig die Geraden eines Komplexes in die Punkte übergehen. Auf S. 726 f. eine Anmerk. über die Arbeit von WESSEL, s. II, Nr. 10.

1898.

161. *Zur Geometrie einer MONGE'schen Gleichung.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1898, Heft I, II, ausgegeben 6. 7. 98, S. 1—2. Vorgelegt in der Sitzung vom 10. Januar 1898.

Ausdehnung des Satzes von MEUSNIER auf MONGEsche Gleichungen des R_3: Die Krümmungsmittelpunkte aller Integralkurven einer MONGEschen Gleichung, die ein Linienelement gemein haben, liegen auf einem Kreise. Vgl. Nr. 155.

162. *Über Berührungstransformationen und Differentialgleichungen.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1898, Heft III, IV, ausgegeben 5. 8. 98, S. 113—180. Vorgetragen in der Sitzung am 7. Februar, das Manuskript eingeliefert am 6. Juni 1898.

S. 114—144: Transformationen des R_n, die durch $n-1$ Gleichungen von der Form: $\varphi_k(x_1 \cdots x_n, X_1 \cdots X_n) = 0$ $(k = 1 \cdots n-1)$ definiert sind. Zugehörige Systeme von MONGEschen, eventuell PFAFFschen Gleichungen. Partielle Differentialgleichungen 1. O. des R_n mit blofs ∞^n charakteristischen Kurven. S. 144—158: Zweigliedrige PFAFFsche Systeme mit drei-, vier- oder fünfgliedrigen vollständigen Lösungen. S. 158—167: Nichtintegrable $(n-2)$-gliedrige PFAFFsche Systeme des R_n und $(n-3)$-gliedrige MONGEsche Systeme des R_{n-1}. S. 167—180: Bestimmung aller partiellen Differentialgleichungen 1. O. des R_n mit ∞^{n+1} charakteristischen Kurven.

II. Sonstige Veröffentlichungen und im Druck erschienene Äusserungen von Lie.

1. In dem Programme von F. KLEIN: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen 1872, sind die Auseinandersetzungen des § 9, S. 32—36, „wesentlich mündlichen Mitteilungen von LIE entnommen".

(Man vgl. damit I, Nr. 19). Das Programm ist wieder abgedruckt in den Math. Ann. Bd. XLIII, S. 63—100 (1893), § 9 insbesondere auf S. 87—90.

2. Ein Brief an das Universitäts-Kollegium, datiert vom 29. Oktober 1879, erschienen in den Norske Universitets- og Skole-annaler, 3. Räkke, Bd. XVII, S. 8—10, ausgegeben August 1881.

Der Brief war veranlafst durch den von dem Ägyptologen Professor LIEBLEIN gemachten Vorschlag, bei dem klassischen Examen Artium (Aufnahmeprüfung bei der Universität) die schriftliche Prüfung in der Mathematik abzuschaffen. LIE erklärt seine Übereinstimmung mit LIEBLEINS Auffassung, dafs die Mathematik bei diesem Examen nur ein Nebenfach sei, freilich ein wichtiges, und dafs schriftliche Prüfung nur in den Hauptfächern zu verlangen sei. Er rät jedoch von der Befolgung des LIEBLEINschen Vorschlages ab, da die durchgreifenden Änderungen im norwegischen Schulwesen sowieso die Stellung der Mathematik geschwächt hätten.

3. Bemerkungen von LIE, als SYLOW und er die vollendete zweite Ausgabe der Werke ABELS vorlegten.

Chr. Forh., Jahrg. 1881, Oversigt S. 13, Z. 14—4 v. u., Sitzung vom 9. Dezember 1881.

4. *Om Abel*, in Nr. 188 A des Jahrgangs 1883 der Zeitung Morgenblad, Christiania.

5. *Om Mathematikundervisningen i vore Skoler.*

Christ. Forh., Jahrg. 1884, Nr. 16, Christ. 1885, 8 S. Vorgetragen in der Sitzung der math.-naturwiss. Klasse am 28. November 1884.

Zuerst erschienen in der Zeitung Dagblad, Nr. 441 vom 11. 12. 1884, Kristiania. *Selbstanzeige:* F. d. M. Bd. XVI, Jahrg. 1884, S. 56. Berlin 1887.

Om Mathematikundervisningen i vore Skoler. II.

Christ. Forh., Jahrg. 1885, Nr. 11, Christ. 1885, 10 S. Vorgetragen in der gemeinsamen Sitzung vom 13. Februar 1885.

Zuerst erschienen in der Zeitung Dagblad, Nr. 67 und 68 vom 26. und 27. Februar 1885. Veranlafst durch Bemerkungen, die Schuldirektor (später Staatsrat) Bonnevie gegen den ersten Vortrag gerichtet hatte (Dagblad Nr. 9 vom 9. 1. 85).

Beide Vorträge sind auch besonders erschienen, jeder zum Preise von Kr. 0,25.

6. Bemerkungen bei Vorlegung der Arbeit von G. Scheffers: *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Gröfsen.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1889, Heft II, III, IV, abgeliefert 25. 2. 90, S. 290, Z. 8 v. o. — 3 v. u. Sitzung vom 3. Juni 1889.

7. Begleitwort zu dem Werke: E. Goursat, *Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. O. Autorisirte deutsche Ausgabe von* H. Maser.

Leipzig, B. G. Teubner, 1893. S. V—VIII. Datiert: Im September 1893.

8. Bemerkungen bei Vorlegung der Arbeit von L. Maurer, *Ueber die lineare homogene Gruppe.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1894, Heft II, abgeliefert 16. 10. 94, S. 215, Z. 9 v. o. — 1 v. u. Angekündigt in der Sitzung vom 2. Juli 1894, eingereicht am 14. Juli.

Hinweis auf die von Abel behandelte Frage, ob jede Gleichung: $y = f(x)$ die Form: $\varphi(y) = \varphi(x) + 1$ erhalten kann, mit andern Worten, ob jede Transformation: $y = f(x)$ einer eingliedrigen Gruppe angehört.

9. *Om den höiere Läreruddannelse i Tyskland og Frankrige.*

Christiania Morgenblad 1895, Nr. 666, 678.

10. Von Lie neu herausgegeben: *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsög, anvendt fornemmelig til plane og sphäriske Polygoners Oplösning af* Caspar Wessel, *Landmaaler. Med en Fortale af* Sophus Lie.

Arch. for Math. Bd. 18, Heft I, Krist. 1896, erschienen im Juni. Das Vorwort Lies umfafst 2 S., der Text der Wesselschen Abhandlung 65 S. und zwei Tafeln mit 20 Fig. Auch einzeln zu haben. Preis: Kr. 2,00.

11. *Om Uddannelsen af Lärere i Realfagene.*

Christiania Morgenblad 1896, Nr. 241, 246, 270, 276.

12. *Atter om den franske Reallärer-Uddannelse.*

Christiania Morgenblad 1896, Nr. 700.

13. *Om Realgymnasiet.*

Kristiania Dagblad 1896 Nr. 11.

14. *Akademiske Läseværelser.*

Kristiania Dagblad 1896, Nr. 143.

15. *Naturfagenes Stilling i Gymnasierne.*

Kristiania Dagblad 1896, Nr. 146.

16. Bemerkungen bei Vorlegung der Arbeit von E. STUDY, *Ueber Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie. I.*

Leipz. Ber., Jahrg. 1896, Heft V, VI, abgeliefert 11. 3. 97, S. 649, Z. 14—28. Vorgelegt in der Sitzung vom 7. Dezember 1896.

17. *Om Universitets studiernes Ordning.*

Christiania Morgenblad 1897, Nr. 357.

18. Brief an den Präsidenten A. WASSILJEF der physiko-mathematischen Gesellschaft zu Kasan, in dem LIE seinen Dank für die Verleihung des LOBATSCHEFSKIJ-Preises ausspricht und daran einige Bemerkungen knüpft, die in dem Wunsche gipfeln, „daſs sich die Verhältnisse so entwickeln werden, daſs der LOBATSCHEWSKY-Preis nach und nach als einen geometrischen Preis ohne irgend welche Beschränkung auffaſst wird“.

Der Brief ist datiert: Leipzig, 1. Mai 1898 und abgedruckt in den: Извѣстія физико-математическаго общества при императорскомъ Казанскомъ университетѣ (Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan). II. Serie, Bd. VIII, Nr. 3, Chronik der Gesellschaft, S. 65, Z. 13 v. u.—66, Z. 6 v. u. Protokoll der 80. Sitzung vom 23. Mai (4. Juni) 1898. Kasan 1898.

Neben den unter I angeführten *Selbstanzeigen* seiner Arbeiten hat LIE, wie ich jetzt erst bemerkt habe, im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik auch eine Anzahl Referate über in Norwegen erschienene mathematische Abhandlungen geliefert.

Auſserdem hat LIE in der Zeit von 1866—68 eine Darstellung der elementaren Astronomie und Trigonometrie zum Gebrauche für Studierende autographieren lassen, von der noch Exemplare vorhanden sind, und ferner hat er, wie sein noch lebender Schulfreund, der spätere Staatsrat und jetzige Assessor am höchsten Gerichte, ERNST MOTZFELD, berichtet, in den Jahren 1868—69 eine Anzahl einzelner Blätter mit kurzen Mitteilungen mathematischen Inhalts drucken lassen und versandt; bis jetzt hat man jedoch noch kein Exemplar eines solchen Blattes auffinden können. Vgl. E. HOLST, *Träk af SOPHUS LIES ungdomsliv*, in dem Wochenblatte Ringeren, II. Jahrgang, Nr. 9, Kristiania 4. März 1899, und den Aufsatz: *SOPHUS LIE af* L. SYLOW, Arch. for Math. Bd. XXI, Nr. 1, S. XXII, Kristiania 1899.

III. Ungedrucktes.

1. Ein vom März 1869 datiertes Schreiben, mit dem LIE die Abhandlung I, 3 der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania einreichte. Im Archiv dieser Gesellschaft.

2. Ein Schreiben und ein vom 2. April datiertes Begleitschreiben. In dem letzteren heiſst es: „Ich erlaube mir hiermit der Gesellschaft einige wissenschaftliche Ideen mitzutheilen, die verwandt sind mit den Fundamental-Ideen in der Arbeit [I, 3], die ich vor einiger Zeit der Gesellschaft übersandt habe. — Ich wünsche mir dadurch womöglich meine Priorität für Gedanken zu sichern, die nach meiner Ansicht fruchtbar sind und die ich Grund habe für neu zu halten.“ In der Sitzung vom 2. April 1869 berichtete der Präses über das Schreiben, das sodann im Archiv niedergelegt wurde. Vgl. Christ. Forh., Jahrg. 1869, Oversigt S. 356.

Das Schreiben enthält anscheinend nur Sachen, die in der Abhandlung I, 4 auseinandergesetzt sind.

3. Ein Schreiben, datiert Paris, 5. Juli 1870, durch das sich LIE vorläufig die Priorität für einige mathematische Sätze sichern wollte. Der Gesellschaft vom Präses vorgelegt und im Archive niedergelegt in der Sitzung vom 30. September 1870. Vgl. Christ. Forh., Jahrg. 1870, Oversigt S. 502.

Das Schreiben enthält sieben Sätze, von denen der erste die Existenz der berühmten Berührungstransformation (s. I, 7) ausspricht. Lie hat sich nachmals öfter auf dieses Schreiben berufen, z. B. I, 10, S. 67; I, 15, S. 147; I, 16, S. 26.

4. Eine vom 26. September 1871 datierte und dem Sekretär der Gesellschaft am 28. September eingereichte Note, in deren Anfang es heifst: „Ich erlaube mir der Gesellschaft ein kurzes Resumé meiner Untersuchungen vorzulegen, die sich auf die Krümmungstheorie eines Raumes mit n Dimensionen beziehen. Ich wünsche hierdurch womöglich meine Priorität zu sichern."

Die Note wird in den Christ. Forh. von 1871 nirgends erwähnt, befindet sich aber im Archive der Gesellschaft. Lie beruft sich auf sie I, 16, S. 25; I, 18, S. 326 und giebt an, dafs er darin seine Erweiterung des Charakteristikenbegriffs angedeutet und darauf eine Methode zur Auffindung von Orthogonalsystemen begründet habe.

5. Anfänge zu einer Fortsetzung der von F. Klein und Lie gemeinsam veröffentlichten Abhandlung I, 13, enthaltend räumliche Betrachtungen über W-Kurven. Im Besitze von F. Klein in Göttingen.

6. Eine Note vom Mai 1872, ursprünglich für die Göttinger Nachrichten bestimmt, aber nicht veröffentlicht, schliefst sich an I, 12 u. 14 an. Eine Abschrift dieser Note im Besitze von F. Klein in Göttingen.

7. Vorlesung, gehalten am 29. Mai 1886 bei Antritt der Professur an der Universität Leipzig in der Aula der Universität: *„Ueber den Einfluss der Geometrie auf die Entwickelung der Mathematik"*.

8. Eine Abhandlung, betitelt: *Functionstheoretische Sätze,* die Lie durch E. Holst der Christianer Gesellschaft hatte vorlegen lassen (s. Christ. Forh., Jahrg. 1892, Oversigt S. 3, Sitzung vom 5. Februar). Aus dem Protokolle über die betreffende Sitzung geht hervor, dafs Lie den Druck bis zum 1. Januar 1893 aufgeschoben zu sehen wünschte. Er hat aber vor diesem Termine das Manuskript zurückverlangt, vermutlich weil er dessen Inhalt anderswo veröffentlicht hatte, nämlich in einer der beiden Noten I, 132 und 133. (Nach Mitteilungen von E. Holst und dem Generalsekretär der Christianiaer Ges. d. Wiss. Professor Gustav Storm.)

Der handschriftliche Nachlafs von Lie, der sehr umfangreich ist, hat hier nicht berücksichtigt werden können. Er enthält einige Sachen, die Lie selbst noch für den Druck vorbereitet hatte. Von besonderem Interesse werden die Diarien sein, in denen Lie, jedenfalls in früherer Zeit, seine Untersuchungen aufzuzeichnen pflegte.

IV. Benutzte Abkürzungen und sonstige Bemerkungen.

Christ. Forh.: Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Christiania. I Commission hos Jacob Dybwad. A. W. Brøggers Bogtrykkeri. Unter Oversigt ist die am Schlusse jedes Jahrganges befindliche Oversigt over Videnskabs-Selskabets Møder zu verstehen (Übersicht über die Versammlungen der Gesellschaft der Wissenschaften). Bis 1875 sind die Forhandlinger jedes Jahrgangs durchpaginiert, seit 1876 dagegen erscheinen sie in einzelnen, auch einzeln käuflichen Nummern, deren jede eine besonders paginierte Abhandlung enthält.

Es ist mir nicht gelungen, etwas darüber zu erfahren, wann die einzelnen Hefte und von 1876 an die einzelnen Nummern jedes Jahrgangs erschienen sind. Deshalb habe ich die Abhandlungen, die Lie in den Forhandlinger veröffentlicht hat, nach der Zeit eingeordnet, zu welcher sie von Lie vorgelegt worden sind. Die Mitteilungen über die im Archive der Gesellschaft vorhandenen Manuskripte von Lie verdanke ich dem Generalsekretär Professor Gustav Storm.

Arch. for Math.: Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Udgivet af Sophus Lie, Worm Müller og G. O. Sars. Kristiania. Forlagt af Alb. Cammermeyer. Von Bd. 13 an (1889): Udgivet af Sophus Lie og G. O. Sars.

Diese Zeitschrift erscheint seit 1876, jedes Jahr ein Band bestehend aus vier Heften. Preis des Bandes: Kr. 8,00. Programmmäfsig sollte jedes Vierteljahr ein Heft erscheinen, was auch in den Jahren 1876—80 ziemlich regelmäfsig eingehalten worden ist, während sich von 1881 an das Erscheinen der Hefte zuweilen sehr verspätete. Durch das Entgegenkommen der Verlagsbuchhandlung — besonders fühle ich mich dafür Herrn Vilhelm Haffner in Kristiania zu Danke verpflichtet — kann ich bei allen Heften das Jahr, in dem sie erschienen sind, und bei einem Teile sogar den betreffenden Monat angeben. Immerhin blieb es doch bei einer ganzen Reihe von Abhandlungen aus dem Arch. for Math. zweifelhaft, wie sie innerhalb des betreffenden Jahres im Vergleiche mit denen in den Christ. Forh. anzuordnen waren, und ich mufste mich daher öfter für eine Anordnung entscheiden, die sich nicht wirklich begründen läfst.

Die Preise der einzeln käuflichen Abhandlungen aus den Christ. Forh. und dem Arch. for Math. sind nach dem *Norsk Bogfortegnelse. Samlet og redigeret af* THORVALD BOECK (1866—72) und von 1873 an von M. W. FEILBERG. Kristiania, angegeben. Doch ist zu bemerken, dafs gar manche dieser Abhandlungen jetzt nicht mehr einzeln zu haben sind. Sk. bedeutet: Skilling und Kr.: Krone; 30 Sk. = 1 Kr. = ℳ 1,13.

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig: Mathematisch-physische Classe. Leipzig bei S. Hirzel, seit 1897 bei B. G. Teubner. Die Verlagsbuchhandlung von Breitkopf und Härtel, in deren Druckerei die Berichte bis 1897 einschliefslich hergestellt worden sind, hat mir in höchst dankenswerter Weise die Tage mitgeteilt, an denen die einzelnen fertigen Hefte der Berichte an den Kommissionär der Gesellschaft der Wissenschaften *„abgeliefert“* worden sind, die Versendung der Hefte ist im allgemeinen unmittelbar darnach oder höchstens einige Wochen später erfolgt. Obgleich damit das Erscheinen der einzelnen Hefte genau festgestellt ist, habe ich doch die in den Leipz. Ber. veröffentlichen Abhandlungen LIES nach der Zeit eingeordnet, zu der sie vorgelegt worden sind. Die Hefte der Berichte sind alle einzeln käuflich.

Leipz. Abh.: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

Königsb. Repert.: Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik. „Originalberichte der Verfasser“ gesammelt und herausgegeben von Dr. LEO KÖNIGSBERGER und Dr. GUSTAV ZEUNER. Leipzig bei B. G. Teubner. Bd. I, 1877, Bd. II, 1879.

F. d. M.: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Begründet von CARL OHRTMANN. Berlin bei G. Reimer.

Die Titel der unter II angeführten Zeitungsartikel von LIE verdanke ich meistens Herrn Bibliothekar J. B. HALVORSEN in Kristiania, dem ich auch sonst für allerhand Auskünfte verpflichtet bin. Übrigens kann ich selbstverständlich für die Vollständigkeit der Liste II keine Bürgschaft übernehmen, denn z. B. auf den Brief II, 2 bin ich nur dadurch anfmerksam geworden, dafs er in dem 1. Vortrage II, 5 erwähnt wird, und auch die Kenntnis des Briefs II, 18 verdanke ich mehr einem glücklichen Zufalle. Das Thema von LIES Antrittsvorlesung (III, 7), das mir entfallen war, verdanke ich einer Mitteilung der Redaktion des Leipziger Tageblatts.

Ausführlichere Mitteilungen über LIES Leben enthalten meine Nekrologe in Bd. VIII des Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigung und in den Leipziger Berichten von 1899.

Carl Immanuel Gerhardt.

Von

Felix Müller in Loschwitz.

Wo anders als in einer Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften wäre wohl ein gebührender Platz für ein Gedenkblatt zu Ehren eines Mannes, der länger als ein halbes Jahrhundert hindurch seine wissenschaftliche Arbeit der mathematisch-historischen Forschung gewidmet hat? CARL IMMANUEL GERHARDT war es, der zu einer Zeit, wo das Interesse der Mathematiker für die geschichtliche Entwickelung ihrer Wissenschaft fast ganz erloschen zu sein schien, nachdrücklich auf die Bedeutung der historischen Forschung hinwies. Er, der sich als LEIBNIZforscher einen weit über die Grenzen seines Vaterlandes geschätzten Namen erworben hat, und der für die Geschichte der Mathematik in Deutschland geradezu ein Pfadfinder genannt zu werden verdient, hat wesentlich dazu beigetragen, die mathematisch-historische Forschung in neuerer Zeit wieder zu Ehren zu bringen.

CARL IMMANUEL GERHARDT wurde am 2. Dezember 1816 zu Herzberg an der schwarzen Elster in der preufsischen Provinz Sachsen geboren. Er besuchte von Michaelis 1828 bis Michaelis 1834 das Gymnasium zu Torgau, woselbst der Mathematiker F. H. MÜLLER, der später an das Gymnasium zu Brandenburg überging, das Interesse des Knaben für die mathematischen Wissenschaften weckte. Nach bestandenem Abiturientenexamen bezog GERHARDT die Universität

Berlin, um sich dem Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften zu widmen. Hier hörte er mathematische Vorlesungen bei Dirksen, welcher sich des jungen Studenten in liebenswürdigster Weise annahm, und bei Dirichlet; ferner Astronomie bei Encke, mathematische Geographie bei Ideler, Experimentalphysik bei Dove und Logik bei Trendelenburg.

Oft ist die erste Frucht wissenschaftlichen Fleifses bestimmend für die fernere Lebensarbeit eines Gelehrten. So auch bei Gerhardt. Seine Bearbeitung einer für das Jahr 1836 von der philosophischen Fakultät zu Berlin gestellten Preisaufgabe über die Prinzipien der Differentialrechnung wurde mit einem akademischen Preise ausgezeichnet. Dies ermutigte den jungen Studierenden, seine Forschungen auf dem einmal betretenen Wege mit Eifer und Ausdauer fortzusetzen. Seine aus der genannten Bearbeitung hervorgegangene Inauguraldissertation: *Explicatio atque dijudicatio praecipuorum modorum, quibus mathematici fundamenta calculi differentialis jacere conati sunt*, wurde unter wiederholter Anerkennung von der philosophischen Fakultät zu Berlin angenommen. Sie giebt eine historisch-kritische Übersicht über die Methoden, welche auf die Entdeckung und zur Ausbildung der Infinitesimalrechnung geführt haben, von der Exhaustionsmethode an, deren sich Archimedes bediente, um von Kurven begrenzte Flächen zu messen, bis auf Leibniz, Newton, Euler und Lagrange. Einer der Opponenten bei der am 23. Dezember 1837 stattgehabten Promotion war der Mathematiker Ferdinand Joachimsthal. Besonders erwähnt zu werden verdient die erste These, welche der Dissertation angefügt ist, sie lautet: „Studium historiae disciplinarum mathematicarum ad res mathematicas intelligendas utile est“, und beweist uns, dafs Gerhardt schon damals den Nutzen der mathematisch-historischen Forschung erfahren hatte.

Bald nach der Promotion bestand Gerhardt das Examen pro facultate docendi und folgte einer Aufforderung zur Vertretung eines erkrankten Lehrers der Mathematik und Naturwissenschaften des Gymnasiums zu Eutin. Nach dieser Vertretung, die ihm als pädagogisches Probejahr angerechnet wurde, kam er im Juni 1839 als ordentlicher Lehrer an das Gymnasium zu Salzwedel. Das Programm dieser Anstalt von Ostern 1840 enthält eine Abhandlung Gerhardts mit dem Titel: *Historische Entwickelung des Princips der Differentialrechnung bis auf Leibniz.* Diese Abhandlung ist eine erweiterte Bearbeitung der Dissertation und hat den Zweck zu zeigen, wie nach und nach aus der Archimedischen Exhaustionsmethode die höhere Analysis entstanden ist.

Gleichsam als Fortsetzung der Geschichte der Entstehung der Differentialrechnung schildert ein Aufsatz Gerhardts: *Historische Bemer-*

kungen über das Princip der Differentialrechnung, der in GRUNERTS Archiv (II, 200—206, 1842) erschien, was die Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts, MAC LAURIN, DE L'HOSPITAL, D'ALEMBERT, EULER, LAGRANGE, LHUILLIER u. a., zur festeren Begründung des Prinzips der Differentialrechnung thaten, und wie endlich im neunzehnten Jahrhundert, nachdem über den reichen Früchten des neuen Kalkuls allmählich das Verlangen nach strengerer Begründung in den Hintergrund gedrängt war, CAUCHY die Grenzmethode zu Hilfe nahm. Zu gleicher Zeit wandte sich GERHARDT in Salzwedel dem Studium älterer und neuerer Werke über Geschichte der Mathematik zu, besonders MONTUCLAS *Histoire des mathématiques* und LIBRIS *Histoire des mathématiques en Italie*, sowie CHASLES' *Geschichte der Geometrie*. Eine Frucht dieser Studien waren die Aufsätze in GRUNERTS Archiv: *Fibonacci, der erste christliche Verfasser einer Abhandlung über die Algebra* (II, 423—426); *Über den Ursprung und die Verbreitung unseres gegenwärtigen Zahlensystems* (ib. 426—431, 1842); und *Die Algebra in Italien seit Fibonacci* (III, 284—300, 1843).

Als im Jahre 1844 das Gymnasium zu Salzwedel seine hundertjährige Jubelfeier festlich beging, hatte GERHARDT, der daselbst nicht nur wissenschaftlichen, sondern auch Turnunterricht erteilte, die Freude, mit dem Turnvater FRIEDRICH LUDWIG JAHN, der als ehemaliger Schüler des Gymnasiums (in den Jahren 1791—1794) zu dem Feste erschienen war, näher bekannt zu werden. Wir werden Gelegenheit haben, weiter unten auf diese Bekanntschaft zurückzukommen.

Zur zweiten Säkularfeier des Geburtstages von GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, am 6. Juli 1846, veröffentlichte GERHARDT die von dem Entdecker der Differentialrechnung in seinen letzten Lebensjahren verfafste Schrift: *Historia et Origo calculi differentialis.*[1]) Aus GUHRAUERS *LEIBNIZ-Biographie* (Breslau 1845) hatte GERHARDT erfahren, dafs sich der handschriftliche Nachlafs des grofsen Philosophen in der Kgl. Bibliothek zu Hannover befände. LEIBNIZ war bekanntlich von 1676—1687 als hannoverscher Hofrat und Historiograph Vorstand dieser Bibliothek gewesen. Die genannte Abhandlung über den Ursprung der Differentialrechnung war in zwei Entwürfen handschriftlich vorhanden. GERHARDT fügt den beiden als Anhang zwei noch ungedruckte mathematische Abhandlungen LEIBNIZENS hinzu. Die eine ist der frühere Entwurf zur Bekanntmachung der Differentialrechnung, in der sich LEIBNIZ deutlicher über das Prinzip

1) *Historia et Origo calculi differentialis a G. G. LEIBNITIO conscripta.* Zur zweiten Säcularfeier des LEIBNIZischen Geburtstages aus den Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover herausgegeben von Dr. C. J. GERHARDT. Als Anhang sind zwei noch ungedruckte mathematische Abhandlungen LEIBNIZENS hinzugefügt. Hannover 1846. XIII + 50 S. 8°.

seiner neuen Rechnung ausspricht als in der später zum Druck beförderten Abhandlung. In der zweiten macht Leibniz den Versuch, von den Rechnungsregeln der Differentialrechnung Beweise zu geben, deren Fehlen ihm bekanntlich wiederholt, sowohl von seinen Zeitgenossen wie von Späteren, zum Vorwurf gemacht worden war. Zur ersten Abhandlung giebt Gerhardt eine Reihe wertvoller historisch-litterarischer Anmerkungen und biographischer Notizen „für angehende Mathematiker, um sie auf das in neuester Zeit wenig bebaute Feld der Geschichte und Litteratur hinzulenken". Dafs er dabei bescheidentlich die Bedeutung des Studiums der Geschichte der Mathematik keineswegs überschätzte, geht aus folgenden Worten hervor: „Wenn auch diese Disziplin zum Verständnis der Wahrheiten der mathematischen Wissenschaften entbehrlich ist, so dürfte sie doch in vielen Fällen eine richtige Einsicht ganz besonders befördern."

Der seit dem Ende des siebzehnten Jahrhunderts entbrannte Streit über den ersten Entdecker der höheren Analysis, der durch gekränkten Ehrgeiz entfacht, von Parteileidenschaft und Nationaleitelkeit immer von neuem geschürt wurde, konnte erst durch eingehende Untersuchungen der hinterlassenen Papiere Leibnizens endgültig entschieden werden. Dieses Verdienst gebührt in erster Linie unserem unermüdlichen Leibniz-Forscher Gerhardt. Er führte durch Veröffentlichung der vollständigen Sammlung der mathematischen Schriften Leibnizens den klaren und unumstöfslichen Beweis, dafs Leibniz die Differentialrechnung nicht nur durchaus selbständig gefunden hat, sondern auch früher als Newton im Besitz eines Algorithmus der höheren Analysis gewesen ist.

Durch die Unterstützung der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin ward es Gerhardt ermöglicht, längere Zeit in Hannover zu verweilen und die Leibnizschen Manuskripte zu sammeln und zu sichten, um zunächst die mathematischen Schriften des grofsen Begründers der Preufsischen Akademie in vervollständigter und verbesserter Ausgabe zu veröffentlichen. Es war das eine sehr mühsame, aber auch sehr verdienstliche Arbeit. Hier fand Gerhardt die einzig gültigen Aktenstücke zur endlichen Entscheidung des unseligen Prioritätsstreites. Er veröffentlichte die Resultate seiner Forschungen in der Schrift: *Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz* (Halle 1848)[1]), welche den Zweck hatte,

1) C. J. Gerhardt, *Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz, mit Benutzung der Leibniz'schen Manuscripte aus der Königl. Bibliothek zu Hannover.* Halle, H. W. Schmidt, 1848. 66 S. 4°. Text S. 1—28; Beilagen: I. Notiz aus der ungedruckten Correspondenz zwischen Leibniz und Jacob Bernoulli, Berlin, April 1703. II. Methodi tangentium inversae exempla, 11. Nov. 1675. III. Manuscripte d. d. 21. Nov. 1675. IV. 22. Nov. 1675. V. 6. Juni 1676. VI. Juli 1676. VII. Über die Quadratur der Hyperbel von Hudde, ohne Datum. VIII. Nov. 1676. IX. 11. Juli 1677.

LEIBNIZ von dem unwürdigen Verdachte eines Plagiats zu reinigen. Die hier zum erstenmal veröffentlichten Manuskripte aus den Jahren 1675—1677, welche dem Text als Beilagen folgen, liefern den Nachweis, daſs LEIBNIZ selbständig die Methode der höheren Analysis erfunden hat, da er es zuerst verstand, Regeln für die Rechnungsoperationen aufzustellen, und da seine glücklich gewählte Bezeichnung der Differentiale gestattete, das Gebiet der höheren Analysis durch die herrlichsten Entdeckungen zu bereichern.

Schon im Jahre 1849 erschien der erste Band der *Mathematischen Schriften* LEIBNIZENS.[1]) Er enthält den Briefwechsel zwischen LEIBNIZ und OLDENBURG, COLLINS, NEWTON, GALLOYS und VITALE GIORDANO. Der im nächsten Jahre erschienene zweite Band brachte den Briefwechsel zwischen LEIBNIZ, HUYGENS van Zulichem und dem Marquis DE L'HOSPITAL. Um die hohe Bedeutung dieser Briefe für die mathematischen Wissenschaften in der zweiten Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts und zu Anfang des achtzehnten Jahrhunderts zu erkennen, braucht man sich nur daran zu erinnern, daſs trotz der schon damals entstehenden wissenschaftlichen Zeitschriften unter den Gelehrten die Sitte fortbestand, sich in Briefen wissenschaftliche Mitteilungen zu machen und gegenseitig Probleme vorzulegen.

Aus der Zeit seiner Lehrthätigkeit an dem Gymnasium zu Salzwedel sind noch zwei Abhandlungen GERHARDTS zu erwähnen. Die erste *Über die mittlere Temperatur von Salzwedel nach Thermometerbeobachtungen aus den Jahren 1848 und 1849* erschien im Jahre 1850. Das Osterprogramm des Gymnasiums zu Salzwedel aus dem Jahre 1853 enthielt eine Abhandlung: *Über die Entstehung und Ausbreitung des dekadischen Zahlensystems.*

Zu Michaelis dieses Jahres folgte GERHARDT einem Rufe als Oberlehrer an das Französische Gymnasium zu Berlin. Neben seiner Lehrthätigkeit an dieser Anstalt hielt er Vorträge über Mathematik an der Vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule.

---

1) LEIBNIZENS *Gesammelte Werke, aus den Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover herausgegeben von* GEORG HEINRICH PERTZ. 3. Folge. *Mathematik.* I. Band. Berlin, Asher u. Co. — LEIBNIZENS *Mathematische Schriften, herausgegeben von* CARL IMMANUEL GERHARDT. I. Abteilung. Band I. 200 S. Berlin 1849. I. Abt. II. Band. 343 S. ib. 1850. I. Abt. III. Band. Erste Hälfte. S. 1—420, Halle 1855; zweite Hälfte, S. 421—994, Halle 1856. I. Abt. IV. Bd. 539 S. ib. 1859. II. Abt. I. Bd. 418 S. Halle 1858. Dissertatio de arte combinatoria (7—79). De Quadratura Arithmetica Circuli, Ellipseos et Hyperbolae (88—132). Caracteristica geometrica. Analysis geometrica propria. Calculus situs (133—211). Analysis infinitorum (220—413). Beilagen (414—418). II. Abt. II. Band. Dynamica. 514 S. Halle 1860. II. Abt. III. Bd. Initia mathematica. Mathesis universalis. Arithmetica. Algebraica (1—243). Geometria (244—347). LEIBNIZ an den Freiherrn von BODENHAUSEN (348—393). Halle 1863.

Nachdem er die erste Abteilung des von ihm geplanten Werkes: *Die Geschichte der höheren Analysis* unter dem Titel: *Die Entdeckung der höheren Analysis;* mit zwei Schrifttafeln (Halle 1855), veröffentlicht hatte, unterbrach GERHARDT seine Lehrthätigkeit durch eine gröfsere wissenschaftliche Reise, zu der ihm behördlicherseits ein Stipendium bewilligt worden war. Er ging zunächst nach Lausanne, wo er mehrere Monate hindurch dem Studium der französischen Sprache oblag. Von dort reiste er nach Mailand, woselbst die Ambrosianische Bibliothek ihm Gelegenheit bot, wichtige mathematische Handschriften, unter anderen die des PAPPUS zu studieren. Zu gleichem Zweck wandte er sich von dort nach Paris.

Im März des Jahres 1856 kehrte er nach Berlin zurück und nahm seinen Unterricht am Collége wieder auf. Doch schied er von dieser Anstalt nach Ablauf des Sommersemesters, um einer Berufung als Professor der Mathematik an das Königl. Gymnasium zu Eisleben zu folgen. Sein Nachfolger am Collége wurde der Mathematiker FRANZ WÖPCKE.

Das am 30. September 1856 von dem Direktor LHARDY ausgegebene Programm des Französischen Gymnasiums brachte GERHARDTS Abhandlung: *Études historiques sur l'Arithmétique de position* (33 S.), worin er den Ursprung unseres Zahlensystems und seine Verbreitung von Indien nach Europa behandelte. Note 3 enthält unter dem Titel *Πάππου Ἀλεξανδρέως Συναγωγῶν Μαθηματικῶν τὸ δεύτερον* den Überrest des zweiten Buches der Sammlung des PAPPUS mit den Multiplikationsregeln des APOLLONIUS von Pergae. In GRUNERTS Archiv (Teil XXVII, 125—131) erschien zur selben Zeit ein kurzer Artikel: *Zur Geschichte des Streites über den ersten Entdecker der Differentialrechnung* nebst einigen Bemerkungen über eine Schrift WEISSENBORNS.[1]) Von der ersten Abteilung der mathematischen Schriften LEIBNIZENS war inzwischen der dritte Band herausgekommen, der den Briefwechsel zwischen LEIBNIZ, JACOB BERNOULLI, JOHANN BERNOULLI und NICOLAUS BERNOULLI enthält. Bei der Bearbeitung des folgenden Bandes fand GERHARDT in den Manuskripten TSCHIRNHAUSENS, der mit LEIBNIZ in regstem Verkehr stand, das Material zu einer Schrift *Über TSCHIRNHAUSENS Beteiligung an dem Plane, eine Academie der Wissenschaften in Sachsen zu begründen,* die in den Berichten der Leipziger Akademie vom Jahre 1858 erschien.

Aus den Handschriften der Kgl. Bibliothek zu Hannover veröffentlichte GERHARDT im Programm des Gymnasiums zu Eisleben vom 30. März

---

1) *Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von LEIBNIZ bis auf LAGRANGE, als ein historisch-kritischer Beitrag zur Geschichte der Mathematik dargestellt von Dr.* HERMANN WEISSENBORN. Halle 1856.

desselben Jahres die Leibnizsche Abhandlung *De Quadratura Arithmetica Circuli, Ellipseos et Hyperbolae* mit einer interessanten Einleitung über die Entstehung dieser Schrift.

Mit dem vierten und letzten Bande der ersten Abteilung der Schriften Leibnizens, welcher erst 1859 erschien und die Briefe zwischen Leibniz und Wallis, Varignon, Guido Grandi, Zendrini, Hermann und Freiherr von Tschirnhaus brachte, schloſs der Briefwechsel. Doch muſs hier sogleich erwähnt werden, daſs Gerhardt im Jahre 1860, gleichsam als Nachtrag zur ersten Abteilung, den *Briefwechsel zwischen Leibniz und Christian Wolf* herausgab.

In der zweiten Abteilung finden sich die mathematischen Abhandlungen Leibnizens, sie sind gruppenweise dem Inhalt nach und innerhalb jeder Gruppe chronologisch geordnet. Der erste Band erschien im Jahre 1858, der zweite 1860, und im Jahre 1863 war mit dem dritten Bande dieser Abteilung das bedeutende Werk *Die mathematischen Schriften* Leibnizens vollendet, ein glänzendes Zeugnis deutschen Gelehrtenfleiſses. An ehrender Anerkennung für den Herausgeber fehlte es nicht. Gerhardt wurde Ritter des Hannoverschen Guelphenordens und des Kgl. Sächsischen Albrechtsordens, und am 31. Januar 1861 ernannte ihn die Kgl. Preuſsische Akademie der Wissenschaften zu ihrem korrespondierenden Mitgliede.

Gerhardt war nicht der Mann, der auf seinen Lorbeeren auszuruhen gedachte; die ehrenvolle Anerkennung spornte ihn vielmehr zu neuem Fleiſse an. Nach Handschriften der Kaiserlichen Bibliothek zu Paris gab er 1865 das Rechenbuch des Maximus Planudes, des aus Nikomedien stammenden Mönches aus der ersten Hälfte des vierzehnten Jahrhunderts heraus, das den seltsamen Namen Ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς, Markenlegung nach Art der Inder, trägt.[1]

Im Auftrage der Berliner Akademie durchforschte Gerhardt die Bibliotheken Süddeutschlands, besonders in Wien und in München. Hier fand er die wichtigen Dokumente, welche ihm das Material zu einer Geschichte der Mathematik in Deutschland lieferten, mit deren Plane er sich seit lange trug. Besonders interessant waren die Ergebnisse seiner Forschungen für die ältesten Spuren deutscher Algebra aus dem fünfzehnten Jahrhundert, welche Ergebnisse er in den Monatsberichten der Berliner Akademie für die Jahre 1867 und 1870 veröffentlichte.[2]

1) Eine deutsche Übersetzung der griechischen Textausgabe Gerhardts gab H. Wäschke, Halle 1878. Siehe M. Cantor, *Vorlesungen üb. Gesch. d. Mathem.* I, 2. Aufl., 1894, S. 476.

2) *Zur Geschichte der Algebra in Deutschland,* Berl. Monatsber. 1867, S. 38 u. f., und 1870, S. 141 u. f. Siehe Fortschritte der Mathem. II, 6. Später hat M. Curtze sämtliche Stücke des Sammelbandes, der das von Gerhardt ans Licht gezogene

In Mailand und zu Paris hatte GERHARDT Gelegenheit gehabt, Handschriften des PAPPUS zu studieren. Im Jahre 1871 gab er *Der Sammlung des PAPPUS siebentes und achtes Buch, griechisch und deutsch*[1]) heraus. Mit Ausnahme einiger von CAMERER und VINCENT früher veröffentlichten Bruchstücke war dies die erste Herausgabe des Originaltextes der beiden genannten Bücher. Weshalb sich GERHARDT auf die Herausgabe dieser beiden Bücher beschränkte, dafür gab er eine Erklärung in einem späteren Programm des Gymnasiums zu Eisleben *Die Sammlung des PAPPUS von Alexandrien*, 1875, welcher in seinem zweiten Teil einen die Quadratrix behandelnden Abschnitt des vierten Buches in griechischem Text und deutscher Übersetzung brachte. Er sprach darin die Vermutung aus, daſs nur das dritte und vierte Buch, welche ursprünglich ein einziges Buch bildeten, sowie das siebente und achte Buch von PAPPUS geschrieben seien, alles übrige aber spätere unechte Einschaltung sei. Daſs diese Ansicht nicht wohl haltbar ist, wurde bald darauf von MORITZ CANTOR in einer Besprechung des genannten Programms nachgewiesen[2]), und nach der vortrefflichen Textausgabe des PAPPUS von HULTSCH mit lateinischer Übersetzung (Berlin 1875, 1877, 1878), hat niemand der GERHARDTschen Hypothese sich anzuschlieſsen vermocht.

Wie wir oben gesehen haben, hatte GERHARDT aus dem handschriftlichen Nachlaſs LEIBNIZENS nachgewiesen, daſs das Jahr 1675 das Jahr der Entdeckung der Differentialrechnung war. Jetzt erinnerte er daran durch einen Aufsatz in den Monatsberichten der Berliner Akademie: *Zum 200. Jubiläum der Entdeckung des Algorithmus der höheren Analysis durch LEIBNIZ* (20 Seiten).

„Nunquam otiosus" lautet die Devise der Kaiserlich Leopoldinischen Akademie der Naturforscher, welche GERHARDT am 23. Februar 1874 zu ihrem Mitgliede ernannt hatte, und dieser Wahlspruch war auch der unseres niemals rastenden, unermüdlich thätigen LEIBNIZ-Forschers, der sich inzwischen an eine neue groſse Aufgabe, die Herausgabe der philosophischen Schriften LEIBNIZENS, machte.[3]) Die Gewissenhaftigkeit und Sorgfalt, mit der diese Arbeit unternommen wurde, erinnert an den Aus-

---

Bruchstück einer deutschen Algebra aus dem Jahre 1461 enthält, herausgegeben und erläutert (Abh. z. Gesch. d. Mathem. Heft 7, 1895, S. 31—142).

1) Halle, bei W. Schmidt. 24 Druckbogen.

2) Zeitschr. f. Mathem. **21**, 1876; Hist.-litt. Abt. S. 37—42.

3) *Die philosophischen Schriften von* GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ. *Herausgegeben von C. J. GERHARDT.* Halle 1875—1882. VII Bände. Die drei ersten Bände enthalten den Briefwechsel, Band IV die philosophischen Schriften aus den Jahren 1663—1702, Bd. V. LEIBNIZ und LOCKE, VI. Théodicée. Philosophische Abhandlungen von 1702—16, VII. Scientia generalis. Caracteristica. Philosophische Abhandlungen, undatiert. Streitschrift zwischen LEIBNIZ und CLARKE. Ergänzungen zur Correspondenz.

spruch LESSINGS: „Wenn es nach mir ginge, müfste der grofse LEIBNIZ keine Zeile vergeblich geschrieben haben.“ Durch diese Ausgabe der philosophischen Schriften von GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, die in sieben Bänden von 1875—1882 erschien, wurden die philosophischen Werke und der philosophische Briefwechsel des grofsen Begründers der deutschen Philosophie durch wertvolle Stücke ergänzt und ihr Text von zahllosen Fehlern gereinigt.

Schon seit mehreren Dezennien trug sich GERHARDT, wie wir oben gesehen haben, mit dem Plane, die Geschichte der Mathematik in Deutschland auf dem Hintergrunde der allgemeinen deutschen Kulturgeschichte zu zeichnen. Wie schwer aber dieses Ideal zu verwirklichen war, erkannte er bei seinen Vorarbeiten je länger je mehr, was er selbst in seinem Vorworte betont. Wir haben schon oben gesehen, dafs gerade für die Blütezeit der Mathematik in Deutschland während des fünfzehnten und sechszehnten Jahrhunderts das Material erst mit grofser Mühe herbeigeschafft werden mufste. Auf die Mitwirkung einer gröfseren Zahl von Fachgenossen durfte nicht gerechnet werden, da das Interesse für die historische Entwickelung der Mathematik erst seit kurzem wieder erwacht war. GERHARDTS *Geschichte der Mathematik in Deutschland*[1]), welche nach jahrelanger Arbeit im Jahre 1877 erschien, bildet den VII. Band der *Geschichte der Wissenschaften in Deutschland*, die auf Veranlassung und mit Unterstützung des Königs MAXIMILIAN II. durch die Historische Kommission bei der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu München herausgegeben wurde. Sie schliefst sich den übrigen Werken dieses grofsen historischen Unternehmens auf das würdigste an. Das erste Buch (S. 1—138) schildert uns die Leistungen der um die Förderung der Mathematik in Deutschland verdienten Männer von GERBERT bis zur Mitte des siebzehnten Jahrhunderts. Der Mittelpunkt des zweiten Buches (S. 139—206), welches die folgenden anderthalb Jahrhunderte umfafst, ist natürlich LEIBNIZ. Das dritte Buch (S. 207—307) beginnt mit dem grofsen GAUSS, der um die Wende des Jahrhunderts in Deutschland einsam thronte, und skizziert dann die Verdienste der Männer, welchen die neue Blütezeit der Mathematik in Deutschland in der ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts zu danken ist.

Für die erstaunliche Arbeitskraft GERHARDTS eröffnete sich ein neues Feld der Thätigkeit, als er im Jahre 1876 zum Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Eisleben ernannt wurde.[2]) Diese amtliche Thätigkeit war

1) München, Oldenbourg, 1877. XII + 307 S. Vorwort: Eisleben im November 1877. Siehe Fortschritte der Mathem. X, 1878, 24—25, und Bullet. d. sc. mathém. 2_2, 1878, 201—206.

2) FRIEDRICH VOLLHEIM, *Geschichte des Königlichen Gymnasiums zu Eisleben, von 1846—1896.* Festschrift zur 350jährigen Jubelfeier. Eisleben 1896.

wegen lokaler Schwierigkeiten keineswegs immer erfreulich und befriedigend. Unablässig und eifrig war Gerhardt bemüht, einen Neubau für das Gymnasium zu erlangen. Noch dringender war die Beschaffung einer neuen Turnhalle, da aus Mangel einer solchen zeitweise ein geregelter Turnunterricht unmöglich war. Gerhardt war durchdrungen von der grofsen erziehlichen Wirkung des Turnens, das damals glücklicherweise noch frei war von allem sportlichen Beiwerk, und legte bei der vorgesetzten Behörde in freimütiger Weise dar, dafs ein solcher Zustand unwürdig und unhaltbar sei. Seine energischen Bemühungen waren von Erfolg, und bei Beginn des Jahres 1880 konnte der Turnunterricht in der neuen Halle wieder aufgenommen werden. Unter dem Bilde Friedrich Ludwig Jahns, welches das Kgl. Provinzial-Schulkollegium zu Magdeburg der neuen Turnhalle überwies, prangt unter Glas ein kerniger Autograph des alten Turnvaters, ein Geschenk des Direktors, der seit seiner oben erwähnten Bekanntschaft mit Jahn mehrere derselben besafs. Das neue Gymnasialgebäude wurde am 31. Oktober 1883 feierlich eingeweiht. Der Direktor erhielt für seine Verdienste um die Anstalt den Roten Adlerorden IV. Kl. Zu der Festschrift *Symbolae Islebienses,* welche das Lehrerkollegium verfafste, lieferte Gerhardt einen interessanten historisch-pädagogischen Beitrag: *Die höheren Schulen in Eisleben von 1525—1600.*[1]) Unter seiner Leitung gelangte das Kgl. Gymnasium zu hoher Blüte; die Zahl der Schüler erreichte unter ihm ihr Maximum.

Es ist erstaunlich, dafs es Gerhardt neben den vielen Verwaltungsgeschäften, welche die geschickte Leitung der Anstalt unter oft schwierigen Verhältnissen erforderte, und neben seiner Lehrthätigkeit, der er gewissenhaft und erfolgreich oblag, möglich war, sich mit umfassenden litterarischen Arbeiten zu beschäftigen. Von ihm mufste wohl auch gelten, was man von Goethe gesagt hat: „Wechsel in der Arbeit war für ihn Erholung von der Arbeit.“

Im Jahre 1887 feierte Gerhardt sein 50jähriges Doktorjubiläum unter allgemeiner Teilnahme. Besonders ehrenvoll war die Glückwunschadresse, welche die Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin ihrem Mitgliede bei dieser Gelegenheit überreichte.[2]) Unter uneingeschränkter Anerkennung seiner wissenschaftlichen Arbeiten wurde vor allem das Verdienst hervorgehoben, welches er sich um die Herausgabe der mathema-

---

1) Diese Schrift enthielt im ersten Teile die nicht allgemein bekannte Geschichte der Grafen von Mansfeld und ihres Landes. Im Jahre 1525 beschlossen die Grafen Albrecht und Gebhardt, eine höhere Schule in Eisleben zu errichten und wandten sich deshalb an Luther und Melanchthon.

2) *Adresse an Herrn Carl Immanuel Gerhardt zur Feier seines 50jährigen Doctorjubiläums am 23. December 1887.* Berl. Monatsberichte 1887, 1165—1166.

tischen und philosophischen Schriften LEIBNIZENS erworben, wodurch er dem grofsen Stifter der Akademie ein unvergängliches Denkmal gesetzt.

Bei seinem am 25. September des folgenden Jahres stattfindenden 50jährigen Amtsjubiläum, das GERHARDT in voller Rüstigkeit des Körpers und bewunderungswürdiger Frische des Geistes zu feiern vergönnt war, mehrten sich die Beweise der Teilnahme und Dankbarkeit aus den verschiedensten Kreisen. Bei dieser Feier erhielt er als Anerkennung für seine erfolgreiche amtliche Thätigkeit den Roten Adlerorden III. Kl. In den Adressen, welche ihm bei dieser Gelegenheit überreicht wurden, hob man mehrfach als ein besonderes Verdienst hervor, dafs er in dem heftig wogenden Kampfe zwischen Gymnasium und Realschule stets die Fahne des humanistischen Gymnasiums hochgehalten habe, obwohl er ein Vertreter der mathematischen Fächer sei. Mufste es nicht einen historisch gebildeten Mathematiker mit Schmerz erfüllen, wenn er sah, dafs man an den alten ehrwürdigen Säulen des Gymnasiums rüttelte? Deshalb hielt auch er an den Traditionen seines Gymnasiums fest.

Noch drei Jahre blieb GERHARDT im Amte. Am 29. September 1891 wurde er auf sein Gesuch in den Ruhestand versetzt, unter ehrenvoller Anerkennung seiner Verdienste um die Schule und unter Verleihung des Adlers der Ritter des Hausordens von Hohenzollern. Er siedelte nach Halle a. S. über, wo er in Mufse und mit frischen Kräften sich seinen wissenschaftlichen Arbeiten widmete. Schon im Jahre 1885 hatte er der Berliner Akademie *Über neu gefundene Manuscripte von LEIBNIZ* Bericht erstattet.[1]) Während der im September 1891 in Halle stattfindenden Naturforscherversammlung nahm er an den Vorträgen in den Sitzungen der mathematischen Sektion regen Anteil. Wem es vergönnt war, dort mit ihm zu verkehren, dem wird die geistige Frische, mit der sich der alte Herr an der Unterhaltung beteiligte, unvergefslich sein. In jugendlichem Glanze erstrahlte sein Auge, wenn er uns die neu aufgefundenen Manuskripte von LEIBNIZ, TSCHIRNHAUSEN u. a. in seiner Wohnung zeigte. Aus der Durcharbeitung dieser Manuskripte gingen mehrere Aufsätze hervor, die in den Berliner Monatsberichten der Jahre 1891 und 1892 veröffentlicht wurden: *LEIBNIZ in London* (1891, 157—176), *LEIBNIZ über die Determinanten* (ib. 407—423), *LEIBNIZ und PASCAL* (ib. 1053—1068) und *DESARGUES und*

1) C. I. GERHARDT: *Über neu gefundene Manuscripte von LEIBNIZ.* Berl. Monatsberichte 1885, 19—23 und 133—143. Diese in Hannover 1884 aufgefundenen Manuskripte enthalten 1. eine Vergleichung der Metaphysik des ARISTOTELES und des DESCARTES, 2. Bemerkungen über die Gesetze der Dynamik (der erste Angriff gegen die Dynamik der Cartesianer), und 3. Erwiderung auf einen Artikel „Remarques critiques", der in der Histoire critique de la république des lettres über die prästabilierte Harmonie erschienen war. S. Fortschritte der Mathem. XVIII, 1885, 11—12.

Pascal über die Kegelschnitte (1892, 183—204). Besonders der zweite dieser Aufsätze ist bemerkenswert durch den Nachweis, dafs Leibniz einen „Canon pro tollendis incognitis", d. h. die Determinantentheorie, erfunden.[1])

Leider traf den alten Herrn unerwartet ein schwerer Schicksalsschlag durch den Tod der treuen Gattin. Um der Einsamkeit zu entfliehen, begab er sich zu seiner Tochter nach Mainz, woselbst sein Schwiegersohn in Garnison stand. Mit der Familie desselben siedelte er im Jahre 1895 nach Graudenz über, woselbst er im folgenden Jahre in aller Frische des Körpers und Geistes seinen 80. Geburtstag feierte. Als sein Schwiegersohn 1897 den Abschied vom Militär genommen, kehrte Gerhardt mit seinen Kindern und Enkelkindern wieder nach Halle zurück.

Unaufhörlich war er auch in seinen letzten Lebensjahren thätig bei der Arbeit. In den Berliner Monatsberichten vom Jahre 1898 veröffentlichte er (S. 419—427) einen Aufsatz: *Über die vier Briefe von Leibniz, die Samuel König in dem Appel au public, Leide MDCCLXII, veröffentlicht hat.* Ferner bereitete er eine neue Ausgabe *Des Briefwechsels von* Gottfried Wilhelm Leibniz *mit Mathematikern* vor, die auf drei Bände berechnet war. Zu Weihnachten des Jahres 1898 hatte er die Freude, den ersten Band im Druck vollendet zu sehen.[2]) Auch den zweiten Band hatte er bereits für den Druck vorbereitet und war eben im Begriff, das Material für den dritten Band zu ordnen, als am Morgen des 5. Mai des Jahres 1899 ein schneller aber sanfter Tod seinem unermüdlichen Schaffen und seinem segensreichen Leben ein Ende setzte.

Mögen auch jüngere Forscher manches von dem, was Carl Immanuel Gerhardt gefunden hat, ergänzen und berichtigen, sein Name wird mit der Geschichte der deutschen Wissenschaft dauernd und in Ehren verknüpft sein.

---

1) Siehe Fortschritte der Mathem. XXIII, 1891, 19 und 20 und XXIV, 1892, 15, sowie die oben genannte Adresse der Berliner Akademie.

2) *Der Briefwechsel von* Gottfried Wilhelm Leibniz *mit Mathematikern. Herausgegeben von* C. I. Gerhardt. Mit Unterstützung der Königl. Preufs. Akademie der Wissenschaften. Erster Band. Mit einem photographischen Facsimile. VIII + 760 Seiten in gr. 8. Berlin 1898, Mayer & Müller.

Ferdinand Rosenberger (1845—1899).

Von

Siegmund Günther in München.

Eine der Aufgaben der Bibliotheca Mathematica in ihrer Neu- taltung soll es sein, solchen Männern, die sich zeit ihres Lebens um Geschichte der exakten Wissenschaften verdient gemacht haben, nach m Tode ein Ehrendenkmal zu setzen. Der Zufall wollte es, dafs unmittelbar vor dem Angreifen des ersten Heftes der vergröfserten Zeitschrift ein wackerer Kämpe aus dieser Schar von seinem irdischen Wirken, das nach menschlichem Ermessen noch ein langes und gedeihliches hätte sein sollen, abgerufen wurde, und so bietet sich sofort unerwünschte Gelegenheit dar, der erwähnten Seite des Programmes gerecht zu werden. Am 11. September 1899 verschied zu Oberstdorf im Allgäu Dr. Ferdinand Rosenberger, der wohlbekannte Geschichtschreiber der Physik, aus Frankfurt a. M.; ein Schlagflufs machte dem Leben des noch sehr rüstigen, gerade in der Sommerfrische weilenden Gelehrten ein Ende.

Geboren am 29. August 1845 zu Lobeda bei Jena[1]), wandte sich enberger dem Berufe eines Elementarlehrers zu, besuchte das Seminar erhielt auch bald eine Anstellung als Lehrer und Kantor. Seinem sensdrange genügte jedoch diese Thätigkeit nicht, und er beschlofs,

1) Der Verf. dieser Skizze ist Hrn. Prof. Dr. Rausenberger, einem Kollegen des wigten, für die freundliche Mitteilung biographischer Daten zum besten Danke nden.

dieselbe aufzugeben, schwankte aber längere Zeit, ob er nicht sich als Musiker ausbilden solle, denn hiefür eignete ihm gleichfalls eine hohe Befähigung. Die Liebe zur Mathematik und zu den Naturwissenschaften trug den Sieg davon, und so begann er denn mit eisernem Fleiße sich in eine ganz neue Laufbahn hineinzuarbeiten. An der heimischen Universität studierend, holte er zugleich die Maturitätsprüfung nach und erwarb sich auch im Sommer 1870 die philosophische Doktorwürde. Sechs Jahre später legte er in Kiel das Staatsexamen ab und trat dann auch bald in den preußischen Staatsdienst ein, während er vorher in Hamburg an verschiedenen Privatlehransalten und auch (1873—77) an der Gelehrtenschule des Johanneums unterrichtet hatte. Im Herbst 1877 kam er als ordentlicher Lehrer an das unter dem Namen „Musterschule" wohl bekannte Frankfurter Realgymnasium, wo er dann zum Oberlehrer und (seit März 1893) zum Professor aufrückte. Anfänglich hatte sein Lehrauftrag sich hauptsächlich auf Mathematik und beschreibende Naturwissenschaften bezogen, während ihm später ausschließlich Physik und Chemie zugewiesen waren. An seiner Anstalt wird der Name des Verstorbenen, als der eines treuen und erfolgreichen Lehrers, in dauerndem, gutem Andenken verbleiben. Seit 1892 war er auch Mitglied der leopoldinisch-karolinischen Akademie der deutschen Naturforscher gewesen.

Als Schriftsteller wählte sich Rosenberger, seiner ganzen Entwickelung gemäß, zuerst ein mehr didaktisches Thema, indem er sich die Aufgabe stellte, die Grundlehren der allgemeinen Arithmetik in systematischer, durchaus einwurfsfreier Weise zu begründen. Wir glauben, daß dem kleinen Buche[1]), in welchem er seine Anschauungen über die fundamentalen algebraischen Operationsgesetze niederlegte, eine weitere Verbreitung zu wünschen war, als es dieselbe thatsächlich erlangt zu haben scheint. Denn wenn auch der Versuch, zumal für das Rechnen mit negativen Potenzen und imaginären Zahlen eine ganz strenge Herleitung der einschlägigen Sätze zu gewinnen, den heutigen Anforderungen schon deshalb nicht mehr völlig genügen kann, weil der Autor auf die Anwendung des Gesetzes der Permanenz formaler Beziehungen ausdrücklich verzichtet, so bleibt dieser Versuch doch für jene Zeit ein sehr beachtenswerter, und kein Lehrer wird die Schrift ohne Nutzen lesen. Für den eigentlichen Schulunterricht ist sie freilich trotz ihres nicht beträchtlichen Umfanges zu ausführlich und vielfach auch zu abstrakt gehalten. Erwähnung verdient auch der Umstand, daß in einem Anhange auch zu

---

1) *Die Buchstabenrechnuag; eine Entwicklung der Gesetze der Grundrechnungsarten rein aus den Begriffen der Zahl und des Zählens als Grundlage für den Unterricht.* Jena (Dufft) 1876.

den Operationen der vierten Rechnungsstufe (fortgesetztes Potenzieren) Stellung genommen wird.

Auf die reine Mathematik ist Rosenberger später nicht mehr zurückgekommen, vielmehr nahm ihn die Geschichte der Naturlehre vollauf in Beschlag. Er liebte es, historische mit philosophischen Erörterungen zu verknüpfen und von hoher Warte aus das Wesen der von ihm mit Vorliebe gepflegten Wissenschaft zu betrachten. Durch diese seine Neigung wird der umfänglichen schriftstellerischen Arbeit, welche ihn fortan beschäftigen und seinen Namen zu Ehren bringen sollte, der Stempel aufgedrückt. In seinem Hauptwerke tritt dies am klarsten hervor, doch wollen wir dessen Besprechung zunächst noch aufsparen und einstweilen die kleineren Schriften und Abhandlungen ins Auge fassen, zu deren Entstehung eben die Beschäftigung mit der Geschichte der Physik den Anstofs gegeben hat. Schon die erste hier einschlägige Veröffentlichung[1]) ist für die Auffassung ihres Verfassers charakteristisch, indem derselbe, selbstredend an der Hand der Geschichte, die geistigen Vorgänge aufzudecken und zu analysieren sucht, deren äufseres Ergebnis sich in einer belangreichen Neuerung auf wissenschaftlichem Gebiete zu erkennen giebt.

Erst zehn Jahre später erschien eine zweite selbständige Schrift[2]) von reichem Inhalte; eine reife und durchgearbeitete Leistung, welche uns den deutlichen Beweis dafür liefert, dafs Rosenberger in der That inneren Beruf besafs, andere in die Geisteswerkstatt eines grofsen Genius einzuführen. Das von ihm geschilderte Leben des einzig dastehenden Briten ist aber auch in Wahrheit sehr geeignet, dem Biographen reichen Stoff zur Bethätigung eigener Denkkraft zu geben; es fordert geradezu heraus, den Spuren nachzugehen, auf denen dieser eminente Denker zu seinen Entdeckungen gelangt ist — Spuren, die er ja leider sorgfältig zu verwischen trachtete, indem er mit Vorliebe Beweismethoden verwendete, die erst hinterher, nachdem die auf anderem Wege ermittelte Thatsache vorlag, in ihr Recht treten konnten. Rosenberger beginnt mit eingehender Darlegung der Lehre vom Lichte, wie sich dieselbe vor Newtons Eingreifen gestaltet hatte, und führt sodann sehr geschickt aus, dafs derselbe, als er sich mit optischen Problemen zu beschäftigen anfing, der Undulationslehre gar nicht so ferne stand. Seine erste Studie über diesen Gegenstand, die Dispersion des Lichtes behandelnd, ist auch, wie dargethan wird, ihrer ganzen Anlage nach von dem, was er nachmals der Öffentlichkeit übergab, grundverschieden, indem er sich frei und rückhaltslos über

1) *Über die Genesis wissenschaftlicher Entdeckungen und Erfindungen.* Braunschweig (Vieweg) 1885.

2) *Isaac Newton und seine physikalischen Prinzipien; ein Hauptstück aus der Entwicklungsgeschichte der modernen Physik.* Leipzig (Ambr. Barth) 1895.

seine Ideen und deren allmähliches Werden ausläfst. Wir erfahren dann weiter, wie NEWTON den Gedanken einer universellen Anziehungskraft konzipierte, die er anfänglich nicht, mit dem stolzen Geleitworte „Hypotheses non fingo“, als eine weiter nicht erklärbare Erfahrungswahrheit hinstellte, deren Eigenart er im Gegenteile zuerst — ein Brief an BOYLE ist dessen Zeugnis — auf die Verschiedenheit eines alle Körper durchdringenden imponderablen Fluidums, eines Äthers, zurückführte. ROSENBERGER giebt dann weiter einen summarischen Überblick über die Ansichten, welche man sich vor NEWTON über die Grundfragen der kosmischen Physik gebildet hatte, und schliefst daran eine gedrängte Inhaltsangabe der *Principia*, welche ihn als einen — der wohl nicht zahlreichen — gründlichen Kenner dieses schwer lesbaren Werkes kennzeichnet. Die Aufnahme des letzteren in der Gelehrtenwelt und die weitere Ausbildung der mechanischen Astronomie reihen sich an, und sodann legt der Autor grofses Gewicht auf die kritische Betrachtung des zwischen NEWTON und BENTLEY gepflogenen Briefwechsels, aus welchem erhellt, dafs ersterer, so entschieden er auch theoretisch an der unvermittelten Fortleitung der Gravitationskraft durch den leeren Raum festhielt, gleichwohl gewissen Bedenken gegen die Möglichkeit solcher Kraftübertragung sich nicht verschlofs. Zur *Optice* von 1704 übergehend, führt uns die Biographie die Wandlung in NEWTONS Ansichten vor, welche ihn zum überzeugten Emissionstheoretiker machte, und tritt sodann in eine strenge Prüfung der von LANGE, MAXWELL, ZOELLNER u. a. aufgestellten Behauptungen ein, dafs die traditionelle Form, in welcher wir die Lehre von der allgemeinen Schwere gewöhnlich kennen lernen, nicht sowohl NEWTONS, als vielmehr seines Freundes und Herausgebers R. COTES' geistiges Eigentum sei. Wir glauben, dafs der Sachverhalt von unserem Gewährsmanne vollkommen zutreffend bestimmt wird, wenn er sich dahin ausspricht, dafs COTES „die Ansichten der NEWTONschen Schule am klarsten und folgerichtigsten entwickelte“. Der leider so früh dahingegangene, hochbegabte Mathematiker hat nur mustergiltig präzis den Standpunkt charakterisiert, zu welchem sein Meister in höherem Lebensalter, nicht zum wenigsten auch unter der Einwirkung seines religiösen Gefühlslebens, durchgedrungen war. Mit einem ausgedehnten Kapitel über die Entdeckung der Infinitesimalanalysis und die damit ausgelösten Kämpfe schliefst das zumal für Studierende, die den Werdegang der neueren Physik nicht blos aus Lehrbüchern kennen lernen möchten, in hohem Mafse empfehlenswerte Buch.

Eine Reihe sich rasch folgender, weiterer Arbeiten ROSENBERGERS war der älteren Geschichte der Elektrizitätslehre gewidmet, und diese hat ihm eine Menge von Aufklärungen zu danken, welche ersehen lassen, wie manches auf diesem doch so reich durchgeackerten Felde — man denke nur an das schöne Geschichtswerk von E. Hoppe und an die kompendiarischen Darstellungen von Netoliczka, Albrecht, v. Urbanitzky — noch zu thun übrig bleibt. Der Frankfurter Naturforscherversammlung (1896) machte er[1]) interessante Mitteilungen über die Urgeschichte der Elektrisiermaschine, deren erste Anfänge er bei O. v. Guericke und Hawksbee nachweist, während der Konduktor, der vielfach als eine deutsche Erfindung angesprochen wird, bereits durch Gray und Dufay konstruiert wurde. Die drei sächsischen Physiker Winkler, Hausen und Bose, deren Verdienst dadurch ja nicht geschmälert werden soll, stehen doch schon auf einem von anderer Seite bereiteten Boden. Die den Umständen entsprechend kurze Notiz wurde nachher zu zwei selbständigen, gröfseren Aufsätzen[2]) erweitert, denen nicht blos eine wissenschaftsgeschichtliche, sondern eine gewisse kulturhistorische Bedeutung zukommt, und einen besonderen Wert erhielten dieselben durch getreue Wiedergabe der Originalabbildungen, die uns einen Begriff geben von der wichtigen Rolle, welche bei den elektrischen Grundversuchen des XVIII. Jahrhunderts der Mensch als Versuchsobjekt spielte. Die sogenannte „Beatifikation“, d. h. die Erzeugung von Glimmlicht rings um eine — im verdunkelten Zimmer — auf den Isolierschemel gestellte Person erregte die höchste Aufmerksamkeit. Die „Elektrifikationsmaschinen“ von Krüger und Gordon sind erst durch Rosenberger unverdienter Vergessenheit entrissen worden. Gleicherweise merkwürdig sind die Proben, welche er aus einem Lehrgedichte Boses (*Die Elektrizität*, Wittenberg 1744) beibringt, und welche uns in die Denkweise des Aufklärungszeitalters einen tiefen Blick thun lassen.

Von diesen Studien über die ältesten elektrischen Mechanismen und Apparate liefs sich Rosenberger fortleiten zu solchen über die elektrische Prinzipienlehre, wie sie für den, der ähnliches auf dem Gebiete zweier anderer physikalischen Disziplinen bereits geleistet hatte, hohen Reiz haben mufsten. Die hierher gehörige Schrift[3]) greift ebenfalls auf die Jugendzeit der sich allmählich herausbildenden Lehre von den unwägbaren Flüssigkeiten zurück und giebt im ersten Abschnitte Auskunft über die durch die Namen Franklin und Symmer charakterisierte Gegensätzlichkeit der dualistischen und unitarischen Auffassung, nicht verhehlend, dafs die letztgenannte, welcher zeitweise sogar die Herrschaft zufallen

---

1) *Über die erste Entwicklung der Elektrisiermaschinen;* Verhandl. d. 68. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, Zweiter Teil, I. Hälfte, S. 66 ff.

2) *Die erste Entwicklung der Elektrisiermaschinen;* Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, 8, 1898, S. 69 ff. — *Die ersten Beobachtungen über elektrische Entladungen;* ebenda, S. 89 ff.

3) *Die moderne Entwicklung der elektrischen Prinzipien.* Fünf Vorträge. Leipzig (Ambr. Barth) 1898.

sollte, die Frucht eines ziemlich dilettantischen Raisonnements darstellte. Was an ihr wissenschaftlich war, ist auf Rechnung NOLLETS zu setzen. Der zweite Abschnitt steckt sich das Ziel, die Verdienste COULOMBS, der ja als der erste elektrisch-magnetische Kraftäufserungen wirklicher Messung unterstellte, ins richtige Licht zu setzen, und auch die weitere Aufgabe, eine Ehrenrettung GALVANIS, wird an der Hand der oft zu wenig berücksichtigten Quellenschrift gelöst. Nächstdem schildert dieses Kapitel auch die Bestrebungen DAVYS und OERSTEDS, während das dritte ausschliefslich FARADAY und der Revolution, so darf man wohl sagen, zugeeignet ist, die durch ihn in den Grundanschauungen über Materie und Kraft hervorgerufen wurde, da er für die Einheit des Kraftbegriffes eintrat, der nur, je nach den Umständen, in den mannigfaltigsten Metamorphosen auftrete. Als berufener Nachfolger FARADAYS erscheint hierauf MAXWELL, dem wieder W. THOMSON, H. HERTZ und H. v. HELMHOLTZ zur Seite stehen, und im Schlufskapitel wird das Wesen der Energielehre skizziert, welche ja nach den Forderungen vieler hervorragender Fachmänner an die Stelle der alten Kraftphysik zu treten hat. Wir halten dafür, dafs diese Vorträge noch für längere Frist allen denen willkommen sein werden, welche auf dem natürlichsten, auf dem sozusagen phylogenetischen Wege mit den Prinzipien der modernen Physik sich vertraut machen wollen.

Einen letzten Beitrag zu seinem Lieblingsfache lieferte[1]) ROSENBERGER unmittelbar vor seinem Tode, als die Aufforderung an ihn herantrat, sich an der litterarischen Festgabe zu beteiligen, welche dem Altmeister der geschichtlich-mathematischen Forschung, Professor M. CANTOR in Heidelberg, anläfslich seines 70. Geburtstages dargebracht werden sollte. Geistvoll und durchdacht, wie von ihm zu erwarten, wird jedoch dieser Essay, welcher gewissermafsen einen Strich unter die Lebensarbeit des Verfassers zog, von einer pessimistischen Stimmung durchdrungen, welche den Leser eigentümlich berühren und ihm unwillkürlich eine oppositionelle Haltung aufnötigen mufs. Gerade ein Mann, der so redlich mitgeholfen, das Eis zu brechen, hätte wohl das Recht gehabt, einen trostreicheren Ausblick in die nächste Zukunft zu werfen, und man kommt deshalb jetzt in die Versuchung, zu glauben, dafs diese düstere Färbung des Artikels ein Ausflufs körperlichen Unbehagens sein möchte. Denn wenn ROSENBERGER sich beklagt, dafs es so Viele gäbe, welche das Studium der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften für eine unnütze, wo nicht für eine schädliche Sache hielten, so möchten wir ihm einwerfen, dafs die Anzahl solcher Sonderlinge denn doch heute nur eine ganz geringe, ihr Einflufs aber ganz im Sinken ist. Natürlich sind die Gründe, mit

1) *Die Geschichte der exakten Wissenschaften und der Nutzen ihres Studiums:* Abhandl. z. Gesch. d. Mathem., **9**, 1899, S. 359 ff.

denen die Berechtigung der historischen Arbeit auf exaktwissenschaftlichem Gebiete verfochten wird, darum nicht weniger stichhaltig, weil ihre Erörterung durch den günstigen Verlauf der ganzen Angelegenheit an aktueller Wichtigkeit verloren hat. Sehr berechtigt ist gewifs der Wunsch, es möge die akademische Vertretung dieser Disziplinen eine vielseitigere und ausgiebigere werden.

Jetzt, nachdem wir die kleineren Publikationen ROSENBERGERS gewürdigt haben, bleibt uns noch als bedeutsamster Bestandteil seiner Leistungen ein Hinweis auf das wertvolle Geschichtswerk[1]) übrig, dessen Ausarbeitung nachweislich ein volles Jahrzehnt seines Lebens, wo nicht mehr, in Anspruch genommen hat. Man kann von demselben, wie der Verfasser dieses[2]) in seinen Rezensionen andeutete, behaupten, dafs es mit jeder neuen Lieferung innerlich reifer geworden sei, so dafs der stattliche Band, der allmählich aus drei Teilen und fünf Einzelheften erwachsen ist, ein unentbehrliches Hilfsmittel für jeden geworden ist, der sich entweder nur in der Geschichte der Physik orientieren oder aber bei deren Weiterbildung selbst mit Hand anlegen will. Es liegt nahe, ROSENBERGERS Arbeit mit anderen, nahe verwandten litterarischen Erscheinungen in Parallele zu stellen, welche entweder etwa gleichzeitig oder ein wenig später das Licht der Welt erblickten. POGGENDORFF, A. HELLER, E. GERLAND haben in Büchern von sehr verschiedenem Umfange ganz den gleichen Stoff abgehandelt, und wir sind weit entfernt, leugnen zu wollen, dafs jedes derselben seine Vorzüge hat, aber wir möchten neben ihnen dasjenige von ROSENBERGER keinenfalls missen. Wie bemerkt, kommt derselbe dem Ideale, dem er nachstrebt, umso näher, je mehr er sich der neueren und neuesten Zeit nähert, deren Errungenschaften er in einem wohl nicht häufig anzutreffenden Grade beherrschte. Altertum und Mittelalter hat er, das darf auch in einem Nekrologe ausgesprochen werden, etwas zu sehr aus dem Gesichtspunkte des modern denkenden und fühlenden Gelehrten beurteilt, um der Eigenart älterer Perioden so gerecht zu werden, wie es der Historiker thun sollte. Er setzte hie und da bei den alten Naturphilosophen eine Denkart voraus, die ihnen fremd war und nach den Bedingungen, unter denen sie nun einmal lebten, auch fremd sein mufste. In erster Linie trifft dies für

1) *Die Geschichte der Physik in ihren Grundzügen, mit synchronistischen Tafeln der Mathematik, der Chemie und beschreibenden Naturwissenschaften, sowie der allgemeinen Geschichte.* Braunschweig (Vieweg). Erster Teil 1882; zweiter Teil 1886; dritter Teil 1887—90. — Die für Altertum und Mittelalter recht angenehmen Tabellen sind später in Wegfall gekommen, wie denn auch wohl die Mühe einer wirklich genügenden Herstellung derselben sich kaum gelohnt haben würde.

2) Zeitschrift für Mathematik und Physik (Hist.-lit. Abth.) **28**, 1883, S. 14 ff.; **31**, 1886, S. 144 ff.; **35**, 1890, S. 207 ff.

seine Interpretation des Scholastizismus zu, der eben doch, wie dies vorzugsweise PAULSEN in seiner *Geschichte des gelehrten Unterrichtes* so überzeugend ausgeführt hat, ein notwendiger und unumgänglicher Über- und Durchgangszustand war, mit dem der menschliche Geist erst ganz und gar fertig sein, dessen wahrlich nicht verächtliche Methodik er bis zur äufsersten Feinheit durchgebildet haben mufste, ehe er es dahin zu bringen vermochte, ein neues Bildungsideal sich vorzusetzen und für dessen Erfüllung auch neue Hilfsmittel zu ersinnen. Dem gegenüber soll aber nicht unverschwiegen bleiben, dafs auch schon der erste Teil wertvolles und wenig bekanntes Material für die arabische Experimentierkunst herbeigeschafft und manch nützlichen Wink für die Einschätzung der einzelnen Koryphäen gegeben hat, den wir anderswo vermissen.

Eine allen Wünschen gerecht werdende Geschichte der Physik liegt noch im Schofse der Zukunft, und dafs sie sehr schwer zu schreiben sein wird, dessen wird man eben am sichersten inne, wenn man die verdienstlichen Ansätze zu einer solchen durchmustert, über welche wir bereits verfügen. Noch steht der einschlägige Bestandteil jener umfassenden Sammlung wissenschaftsgeschichtlicher Einzeldarstellungen aus, welche auf Anregung weiland König MAXIMILIANS II. von Bayern durch die „Historische Kommission der Münchener Akademie“ ins Leben gerufen wurde, und welche eben mit einziger Ausnahme dieses Schlufsbandes ihren Abschlufs gefunden hat. Hoffen wir, dafs derselbe dereinst die Hoffnungen erfüllen möge, welche jetzt schon auf ihn gesetzt werden. Wer es aber auch immer sei, der sich dieser schwierigen Aufgabe zu unterziehen wagt — unter allen Umständen wird derselbe in dem Werke ROSENBERGERS, das auch durch seine planmäfsigen Litteraturangaben eine dankenswerte Hilfe bietet, eine sehr schätzbare Vorarbeit begrüfsen, und nicht anders wird es mit den oben genannten Abhandlungen bestellt sein. So werden wir also keinen Einwand zu fürchten haben, wenn wir sagen, dafs der zu früh verstorbene Frankfurter Physiker den Platz, auf welchen ihn sein Lebensgeschick gestellt hatte, trefflich ausgefüllt und nicht wenig dazu beigetragen hat, gerade den Wissenszweig, dessen Pflege ihm so sehr am Herzen lag, in Litteratur und Unterricht als ein unentbehrliches, mit anderen Teilen gelehrten Wissens vollkommen gleichberechtigtes Glied eingefügt zu haben. Dem Schreiber dieser Zeilen aber gereicht es zum Vergnügen, des wackeren Mannes gerade an einem Orte gedenken zu können, der allein durch sein Vorhandensein schon dafür Zeugnis ablegt, dafs der Verstorbene viel zu schwarz sah, als er, zum letztenmale die Feder ergreifend, sein Lieblingsfach noch ausdrücklich verteidigen zu müssen glaubte. Dasselbe hat, gerade eben auch durch seine Mitwirkung, längst und vollständig den Beweis seiner Daseinsberechtigung erbracht.

Kurze Nekrologe.

Hermann Emil Wappler †. Am 6. Oktober 1899 starb zu Zwickau nach kurzer Krankheit (Influenza und Lungenentzündung) EMIL WAPPLER, Oberlehrer am dortigen Gymnasium. Geboren am 20. Juni 1852 zu Bernsbach bei Grünhain (Sachsen) besuchte WAPPLER bis 1866 die Schule seines Geburtsortes und dann bis 1871 die Realschule zu Annaberg. Nach absolviertem Examen studierte er an den Universitäten Leipzig und Heidelberg Mathematik und Naturwissenschaften und promovierte 1875 in Heidelberg. Er wurde dann Lehrer in Schkeuditz bei Leipzig, bestand 1878 in Leipzig die Staatsprüfung für die Kandidatur des höheren Schulamtes, und war von 1879 an bis zu seinem Tode ordentlicher Oberlehrer am Gymnasium in Zwickau.

Durch seine Schriften, worin er sich hauptsächlich mit der deutschen Algebra am Ende des 15. Jahrhunderts beschäftigte, hat WAPPLER eine Lücke in der Geschichte der Mathematik ausgefüllt und dabei auch einige Irrtümer anderer Verfasser berichtigt. Er hat folgende Abhandlungen herausgegeben:

Zur Geschichte der deutschen Algebra im XV. Jahrhundert. Programm des Gymnasiums zu Zwickau 1887. 32 S. 4°.

Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Abh. zur Gesch. der Mathem. **5**, 1889, 147—168.

Bemerkungen zur Rhythmomachie. Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 1—17.

Zur Geschichte der deutschen Algebra. Abh. zur Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, 537—554.

Zur Geschichte der Mathematik. Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abth. 7—9.

G. ENESTRÖM.

Luis Gonzaga Gascó †. GASCÓ, geb. 29. August 1844 zu Valencia in Spanien, gest. 17. Juni 1899 daselbst, studierte von 1863 ab exakte Wissenschaften, Philosophie und Jurisprudenz; 1870 wurde er Doktor der Rechte, 1874 Doktor der exakten Wissenschaften. Schon als Student war GASCÓ als Lehrer für Mathematik und später für Latein und Castilianisch thätig und gab für den Schulgebrauch eine *Biblioteca Latina* heraus. Von 1883 an war GASCÓ an verschiedenen Orten Lehrer der Mathematik, bis es ihm 1887 gelang, einen Lehrstuhl an der Universität zu Sevilla zu erhalten, wo er bis zur Schliefsung der Fakultät der exakten Wissenschaften (1892) verblieb. Im folgenden Jahre wurde er mit dem Lehrauftrag für Infinitesimalrechnung nach Zaragoza berufen und im Jahre 1895 als Professor der Analysis in seiner Vaterstadt angestellt, wo er bis zu seinem Hinscheiden wirkte.

Die mathematischen Schriften GASCÓS zeigen das Bestreben, das Studium der Mathematik in seinem Vaterlande zu erleichtern und zu fördern; von dem Archivo de matemáticas puras y aplicadas, welches er begründet hatte, ist der Jahrgang I (1896) vollständig, der Jahrgang II (1897) nur zum Teil erschienen. Mit der mathematischen Welt trat GASCÓ durch den Besuch des Züricher Kongresses 1897 in persönliche Beziehung.

A. GUTZMER.

Zum siebenzigsten Geburtstage Moritz Cantors.

Von

Maximilian Curtze in Thorn.

Am 23. August 1899 waren siebenzig Jahre verflossen, seit MORITZ CANTOR das Licht der Welt erblickte. Was er für den Teil der Wissenschaft bedeutet, welchem die Bibliotheca Mathematica gewidmet ist, kennt die Welt, aber dieser Zeitschrift gebührt es durch Darbringung ihrer nachträglichen Glückwünsche und ihrer Huldigung für ihn zu jenem Ehrentage seine Bedeutung für die mathematisch-historische Forschung besonders hervorzuheben. Lassen wir, soweit es uns möglich ist, kurz das Leben und Wirken CANTORS an unserem Blicke vorüberziehen.

Die Wiege CANTORS stand in Mannheim, doch siedelten seine Eltern bald nach Frankfurt a/M. über. Bei dem beabsichtigten Eintritt des Knaben in das dortige Gymnasium stellte sich schon nach wenigen Tagen heraus, daſs er den Schulbesuch nicht zu ertragen vermochte, und so erhielt er seine Ausbildung zunächst durch Hauslehrer. In späteren Jahren trat er dann in die oberen Klassen des Gymnasiums zu Mannheim ein. Hier gehörte er stets zu den besten Schülern und bezog 1848 nach bestandenem Examen die Universität Heidelberg, welche er später mit Göttingen vertauschte. Hier wurde er bei der damaligen Verbindung und jetzigen Burschenschaft Arminia aktiv. An seinen Aufenthalt in Göttingen und seine Studien unter GAUSS und WEBER denkt er, wie er dem Verfasser dieser Zeilen oftmals versichert hat, noch mit dem lebhaftesten Interesse zurück. GAUSS in der *Allgemeinen Deutschen Biographie* ein Gedächtnis stiften zu dürfen, gereichte ihm zu hoher Genugthuung.

Im Herbst 1851 holte er sich in Heidelberg die Würde eines Doktors der Philosophie. Seine Dissertation: *Über ein wenig gebrauchtes Koordinatensystem* läſst freilich nichts von dem ahnen, wodurch er später der Schöpfer einer neuen Hochschuldisziplin werden sollte. Ehe er aber Ostern 1855 sich ganz der akademischen Karriere widmete — ein Staatsexamen hat er überhaupt nie gemacht — begab er sich nochmals zum Studium nach Berlin, wo er besonders die Vorlesungen LEJEUNE-DIRICHLETS besuchte. Auch die nach seiner Habilitation in Heidelberg als Leitfaden bei seinen Vorlesungen ausgearbeiteten *Grundzüge einer Elementararithmetik* (1855) deuten nur entfernt jene Richtung seiner Studien an, welche seine späteren Veröffentlichungen zu klassischen gemacht haben.

Diese Richtung tritt zum ersten male deutlich in der Abhandlung zu tage, welche gleich im ersten Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlicht ist: *Über die Einführung unserer jetzigen Ziffern in Europa*, ein Thema, das er stets von Neuem mit Liebe behandelt hat, und das wie ein Leitmotiv durch alle seine späteren Veröffentlichungen hindurch klingt. Nun folgten in kurzen Fristen die Abhandlung *Über die Porismen EUKLIDS und ihre Divinatoren*, die beiden Vorträge auf den Naturforscherversammlungen zu Bonn und Karlsruhe: *PETRUS RAMUS, MICHAEL STIFEL, HIERONYMUS CARDANUS, drei mathematische Charakterbilder aus dem 16. Jahrhundert* und *Zur Geschichte der Zahlzeichen*, sowie der an den ersten Vortrag anknüpfende Aufsatz: *RAMUS in Heidelberg*.

Im Jahre 1858 hatte er mit KEKULÉ, LEWINSTEIN und EISENLOHR zusammen die „Kritische Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik" begründet, die leider aus Kleinmut des Verlegers schon nach dem ersten Jahrgang eingestellt wurde. Dafür trat er 1859, nach dem Tode BENJAMIN WITZSCHELS, in die Redaktion der Zeitschrift für Mathematik und Physik ein, deren Leitung in ihrem historisch-kritischen Teile er bis heute mit immer mehr gesteigertem Erfolge in Händen behalten hat.

Seine eingehenden geschichtlich-mathematischen Studien verwertete er dann in jenem grundlegenden Werke mit dem bescheidenen Titel: *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker* (Halle 1863), dessen Resultate, wenn auch von ihm selbst mehrfach nach späterer, besserer Einsicht modifiziert, noch heute ihre Geltung behalten haben, so vielfach sie auch von Berufenen und Unberufenen angegriffen und für unrichtig erklärt sind. Sie waren auch die Ursache, dafs ich 1864 mit CANTOR in nähere Berührung trat. Durch Zufall war mir eine mathematische Handschrift des 14. Jahrhunderts in die Hände geraten, und inbetreff dieser bat ich CANTOR, den Verfasser des von mir sozusagen fast verschlungenen Werkes, um Belehrung über mir aufgestofsene Schwierigkeiten des Textes. Mit seiner unübertrefflichen Liebenswürdigkeit beantwortete er umgehend meine Fragen, und seit jener Zeit hat sich das Verhältnis des Beraters zu dem jüngeren Fachgenossen zu dauerndem Freundschaftsbunde verdichtet, der mich in demselben Mafse immer mehr beglückt, je näher und inniger derselbe geworden ist.

In die fünfziger Jahre gehört auch ein vorübergehender Aufenthalt CANTORS in Paris, wohin ihn verwandtschaftliche Bande gezogen hatten, der ihn in Berührung mit den grofsen französischen Mathematikern brachte, vor allen mit MICHEL CHASLES und JOSEPH BERTRAND. Er konnte mir gegenüber nicht genug die Liebenswürdigkeit CHASLES' rühmen, mit welcher dieser Senior der Geschichtschreibung der Mathematik ihn, den Novizen, aufnahm, der kaum eine oder die andere Abhandlung veröffentlicht hatte. Auf seinem Landgute wurde er mit BERTRAND bekannt gemacht. CHASLES liefs auch einen Brief CANTORS an ihn über das Zeitalter ZENODORS in den Comptes Rendus der Pariser Akademie veröffentlichen. CANTOR kam dabei zu statten, dafs er das Französische wie seine Muttersprache beherrscht.

In Heidelberg hatte er während dessen angefangen Vorlesungen über Geschichte der Mathematik zu halten, und mancher seiner Hörer ist der von ihm ausgehenden Anregung treu geblieben, und hat in diesem Fache Hervorragendes geleistet. Statt aller Beispiele nenne ich nur den einen Namen: SIEGMUND GÜNTHER. Während durch diese Vorlesungen der Plan reifte, eine umfassende Geschichte der Mathematik zu schreiben, veröffentlichte er eine ganze Reihe von Vorarbeiten dazu. Erwähnen will ich nur: *Über einen Kodex des Klosters Salem* (1865), *EUKLID und sein Jahrhundert* (1867), *Die Römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmefskunst* (1875), *Graeco-Indische Studien* (1877), und mache zugleich auf seine eingehenden Besprechungen einschlägiger Werke in seiner Zeitschrift aufmerksam, welche stets selbst zur Aufklärung und Richtigstellung der darin niedergelegten Thatsachen beigetragen haben.

Die Zeitschrift, in welcher vom 20. Jahrgange an, vielleicht auf Grund einer von mir ausgehenden Anregung, der geschichtlich-litterarische Teil vollständig von dem rein wissenschaftlichen getrennt wurde, hat sich immer mehr und mehr zum führenden Organ auf dem Gebiete der Geschichte der exakten Wissenschaften emporgeschwungen, so dafs in neuerer Zeit sich das Bedürfnis nach umfangreichen Supplementheften geltend gemacht hat.

Im Jahre 1880 erschien endlich der erste Band der längst angekündigten und mit Spannung erwarteten *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, welcher diese von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. fortführt. Es gab nur eine Stimme über die vortrefflichen Eigenschaften dieser Leistung was den Inhalt, aber auch was die Form derselben betrifft. Die Fülle des Gebotenen, die künstlerische Darstellung und Abrundung, die vielfachen neuen Gesichtspunkte, welche in diesem Werke geboten werden, liefsen auch für die Fortsetzung Grofses erwarten. Länger freilich als die Ungeduld des Publikums es fast zu ertragen vermochte, verzögerte sich die Ausgabe des zweiten Bandes, der erst 1892 die Presse verliefs, noch während des Druckes durch den grofsen Setzerstreik in Leipzig weiter aufgehalten. Aber CANTOR wurde dabei die grofse Genugthuung, dafs während der Ausarbeitung des zweiten Bandes sich die Notwendigkeit herausstellte, eine zweite Auflage des ersten vorzubereiten, welche denn auch unmittelbar nach Ausgabe des zweiten Bandes in Angriff genommen wurde. Sie erschien 1894 in allen Teilen durchgesehen und vermehrt, um 80 Seiten den Umfang der ersten Auflage übertreffend. Noch in demselben Jahre konnte der erste Abschnitt des dritten Bandes dem Drucke übergeben werden; ihm folgte 1896 der zweite, 1898 der dritte Abschnitt. CANTOR hat seine Geschichte bis zum Auftreten LAGRANGES 1758 fortgeführt. In der Vorrede des dritten Bandes überläfst er die Weiterführung seiner Vorlesungen jüngeren Kräften, sich selbst nur die Vervollkommnung und Neubearbeitung seiner drei Bände vorbehaltend. Schon ist der zweite Band, der 1892 erschien, in diesem Jahre in neuer Auflage ausgegeben worden, und es soll schon das Bedürfnis nach einer zweiten Auflage des dritten hervorgetreten sein.

Über den Wert der Arbeit hier auch nur ein Wort zu sagen, ist überflüssig. Jeder Leser dieser Zeilen kennt sie ja persönlich, hat sie selbst als Führer bei seinen Studien benutzt und hat gesehen, wie CANTOR die neuen Untersuchungen, die zu den durch ihn und vor ihm bekannten Thatsachen hinzugetreten sind, gewissenhaft geprüft seinem Werke einverleibt hat. Es ist der grofse Vorzug der Darstellung CANTORS, dafs er sich in den jeweiligen wissenschaftlichen Geist der Zeit, welche er gerade behandelt, hineinzuversetzen vermocht hat, dafs er nicht die Arbeiten früherer Epochen mit dem Mafsstab des 19. Jahrhunderts mifst, und so nicht gegen die grofsen Männer der Vorzeit ungerecht wird, ihnen aber auch nicht Sachen und Gedanken unterlegt, welche wir vom Standpunkte unseres Wissens aus in ihren Werken finden können, die ihnen selbst aber sicher niemals gekommen sind.

Als es bekannt wurde, dafs am 23. August 1899 die 70. Wiederkehr des Tages seiner Geburt herannahe, traten eine gröfsere Zahl von Freunden und Verehrern CANTORS zusammen, um durch eine Sammlung von Arbeiten zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, welche ihm an diesem Tage überreicht werden sollte, ihren Freundschafts- und Dankesgefühlen Ausdruck zu geben. So mancher bedauerte aufserdem, durch Berufsgeschäfte, hohes Alter oder Krankheit abgehalten zu sein, sein Scherflein zu dieser Ehrengabe beitragen zu können. So wurde ihm denn an jenem Tage der Band überreicht, welcher unter dem Titel: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Neuntes Heft die Arbeiten von 32 Männern aus allen Teilen der wissenschaftlichen Welt vereinigt, an dessen Zustandekommen aber auch der Verleger seiner Schriften, Herr B. G. TEUBNER in Leipzig, hervorragenden Anteil genommen hat.

Der 41 Bogen umfassende Band enthält Abhandlungen sowohl zur allerältesten Geschichte unserer Wissenschaft wie zu ihren neuesten Phasen. Er ist mit dem wohlgelungenen Bildnis CANTORS in Lichtdruck geschmückt, auch ist ihm ein, soweit möglich, vollständiges Verzeichnis seiner Schriften angehängt.

Jener Festtag, den ich den Vorzug hatte, in seinem Hause verleben zu dürfen, die Liebe seiner Schüler, die Ehrungen der Universität, der Akademien und der verschiedenen wissenschaftlichen Vereine, denen er angehörte, der Stadt, der er als langjähriger Stadtverordneter und Vorsteher derselben seine Kräfte gewidmet hatte, der politischen Partei, deren eifrigstes Mitglied er stets gewesen ist, vor allem aber sein häusliches Glück mit anzusehen, wird mir stets eine der schönsten Erinnerungen meines Lebens bleiben.

Möge ihm, dem nun Siebenzigjährigen, noch lange vergönnt sein, zum Wohle der Seinen, zum Segen der Wissenschaft und zur Freude seiner Verehrer und Freunde weiter in der Rüstigkeit und Frische des Körpers und Geistes thätig zu sein, die man an jenem Tage und bei den Verhandlungen der letzten Naturforscherversammlung in München an ihm zu bewundern Gelegenheit hatte.

Thorn, 1. Dezember 1899.

Programme du Cours d'histoire des mathématiques de l'Université de Gand.

Par

P. Mansion à Gand.

1. Nous avons fait connaître, dans une note antérieure (Bibliotheca Mathematica 1888, 33—35), les tendances générales du Cours d'histoire des sciences physiques et mathématiques, qui a été créé en 1884, par le gouvernement belge à l'École normale annexée à la Faculté des Sciences de l'Université de Gand, et que nous avons été chargé de faire à cette École.

En 1890—1891, une nouvelle loi universitaire a supprimé l'École normale et a transporté le Cours d'histoire des sciences physiques et mathématiques à la Faculté des Sciences; en même temps, ce cours est devenu obligatoire pour les aspirants au grade de Docteur en sciences physiques et mathématiques de toutes les Universités belges. Depuis 1890, on enseigne donc l'histoire des sciences physiques et mathématiques, non seulement à Gand, mais aussi à Liége, à Louvain et à Bruxelles. Les titulaires de ce cours sont, à Liége, M. C. Le Paige, bien connu par sa publication de la *Correspondance de Sluse* et par divers autres travaux historiques; à Louvain, M. Ch. de la Vallée Poussin; à Bruxelles, M. Brand.

En droit, la durée du Cours d'histoire des sciences physiques et mathématiques de l'Université de Gand est restée la même qu'avant la loi de 1890: trente leçons d'une heure par an. Mais en fait, grâce à la liberté des programmes, qui est plus grande à la Faculté des Sciences qu'à l'ancienne École normale, il est le plus souvent possible de faire le cours en deux ans: la première année, le cours est consacré à l'histoire des mathématiques jusqu'à Descartes; la seconde année, à l'histoire des mathématiques depuis Descartes et à une esquisse de l'histoire de l'astronomie et de la physique. De cette manière, le cours est plus étendu qu'avant la loi de 1890. La durée de chaque leçon est d'une heure et quart ou d'une heure et demie.

Les caractères généraux du cours sont toujours ceux que j'ai signalés en 1888:

1° Il est encyclopédique et non spécial; il s'étend, autant que possible, jusqu'à l'époque contemporaine.

2° Néanmoins, un temps plus considérable est consacré à certaines périodes ou à certaines questions. De cette manière, on réunit, jusqu'à un certain point, aux avantages de l'enseignement encyclopédique ceux qui résultent pour les élèves de l'étude approfondie d'une question particulière dans son évolution historique.

3° Le cours n'est nullement *kulturgeschichtlich*, si j'ose ainsi dire: on y fait l'histoire des *progrès* des sciences physiques et mathématiques dans le cours des âges, non le tableau de l'évolution des connaissances de ce genre chez tel ou tel peuple, à telle époque, malgré l'intérêt que la chose présente au point de vue du développement de la civilisation. Ainsi s'explique le peu de temps accordé, dans notre cours, à l'histoire des sciences physiques et mathématiques chez les Hindous, les Arabes, les Chinois, les Byzantins et les peuples chrétiens de l'Occident au moyen-âge.

Les points spéciaux que nous avons développés (ou que nous nous proposons de développer dans la suite, si le temps nous le permet) conformément au principe 2° sont les suivants:

1° Genèse des Éléments d'Euclide: géométrie, arithmétique, irrationnelles (voir notre note de 1888).

2° Les coniques et la théorie des coordonnées depuis l'antiquité jusqu'au dix-septième siècle (surtout d'après Zeuthen).

3° A. Le caractère géométrique de l'ancienne astronomie. B. Le relativisme en mécanique rationnelle (publié en substance dans *Cantors Festschrift*).

4° A. Les tables de logarithmes et de lignes trigonométriques. B. Les tables de nombres premiers et les recherches sur le nombre des nombres premiers depuis Ératosthènes jusqu'aux travaux récents de Ch. de la Vallée Poussin.

5° La genèse de l'analyse infinitésimale (voir notre note de 1888).

6° La théorie des parallèles et la géométrie non euclidienne jusqu'à Gauss, Lobatchefsky, Bolyai, Riemann et de Tilly.

7° Recherches sur le théorème fondamental de l'analyse algébrique: Toute équation de degré n a n racines.

8° Histoire des intégrales et des fonctions elliptiques jusque Abel et Jacobi inclusivement (nous avons esquissé cette histoire dans notre dissertation de doctorat, en 1870).

9° Histoire de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.[1])

1) Dans l'histoire des sciences physiques, nous exposons aussi presque chaque année, en détail: 1° les travaux de Galilée, considéré comme le vrai initiateur de

2. Après un enseignement de seize années, où nous avons eu l'occasion de faire douze fois les leçons du cours encyclopédique de l'histoire des mathématiques, nous sommes arrivés au programme suivant, qui ne subit plus guère que de faibles variations. Nous y indiquons la place où nous intercalons les points spéciaux énumérés plus haut, et nous marquons en caractères gras les noms des géomètres dont nous nous occupons spécialement. Fréquemment, pour diverses raisons, nous ne sommes pas fidèles à l'ordre chronologique.

1° Science et connaissance vulgaire. — Classifications des sciences; des sciences physiques et mathématiques; des sciences mathématiques. — Aperçu général de l'histoire des sciences physiques et mathémathiques; bibliographie générale. — Connaissances vulgaires antérieures à la science chez les peuples civilisés de l'antiquité et chez les sauvages de nos jours.

2° Mathématiques chez les Égyptiens. Le manuel d'Ahmès.

3° Mathématiques chez les Chaldéens. — Les signes numéraux chez les Grecs; leur système de numération avec 27 signes; systèmes analogues chez les Hébreux et les Syriens.

4° Analyse de la partie géométrique des *Éléments* d'Euclide, comparés aux *Éléments de Géométrie* de Legendre, comme préliminaire aux leçons suivantes.

5° **Thalès** et **Pythagore** (géométrie et arithmétique).

6° Le cinquième siècle: Zénon d'Élée, Anaxagore, Démocrite, Oenopide, Hippias (la multisectrice ou quadratrice), Antiphon, Bryson, et surtout **Hippocrate** de Chios (quadrature du cercle, duplication du cube).

7° Le quatrième siècle: **Platon**, Thymaridas, Archytas, **Eudoxe**, Théétète, Ménechme, Dinostrate, Speusippe, Aristote.

8° **Euclide**, spécialement le 10^{me} livre des Éléments. [Ici, presque chaque année, un tableau d'ensemble du sujet spécial 1.]

9° **Archimède**, Géométrie et logistique. La partie mécanique des œuvres d'Archimède est analysée plus tard. Eratosthènes.

10° **Apollonius**. Géométrie. Logistique. Système des épicycles. [Ici, parfois, le sujet spécial 2.]

11° Nicomède, Dioclès, Persée, Zénodore, Hypsiclès, Geminus, Théodosius, Ménalaus, Héron, **Ptolémée**, **Pappus**, Serenus, Proclus, etc. Trigonométrie grecque. [Ici, sujet spécial 3 A.]

12° Logistique, arithmétique, algèbre des Grecs. Nicomaque, Théon de Smyrne, Jamblique, Eutocius; **Diophante**.

13°—14° Hindous et Arabes.

---

physique moderne; 2° l'enchaînement des systèmes de l'ancienne astronomie, surtout d'après Schiaparelli.

15° Romains et Byzantins. Premier moyen-âge: GERBERT. Second moyen-âge: **Léonard de Pise**, NEMORARIUS, ORESME, etc.

16° Progrès de l'arithmétique et de l'algèbre jusqu'à DESCARTES: Symboles algébriques; CHUQUET, STIFEL, etc.; la résolution des équations cubiques et biquadratiques; **Viète**; A. GIRARD.

17° Trigonométrie et tables trigonométriques; logarithmes et tables de logarithmes. JEAN DE GMUNDEN, PURBACH, REGIOMONTANUS, COPERNIC, RHETICUS, PITISCUS; valeur de π; SNELL; fractions décimales, S. STEVIN, etc.; **Néper**, BRIGGS, etc. [Ici, sujet spécial 4 A.]

18° La géométrie jusqu'à DESCARTES inclusivement: KÉPLER, MYDORGE, DESARGUES, PASCAL, GRÉGOIRE DE S. VINCENT; **Descartes**: analyse détaillée de *La géométrie;* les cubiques chez DESCARTES; continuateurs directs: DE BEAUNE, VAN SCHOOTEN, J. DE WITT, SLUSE.[1])

19° **Fermat**: Théorie des nombres (BACHET, FRÉNICLE). Combinaisons et calcul des probabilités (PASCAL). Algèbre et géométrie analytique. Tangentes et maxima (ROBERVAL, DESCARTES, SLUSE). Quadratures et longueurs de lignes courbes (NEIL, VAN HEURAET, HUYGENS).

20°—21° Autres précurseurs de LEIBNIZ et NEWTON: quadratures; tangentes et maxima; séries. **Leibniz** et **Newton**. [Ici, souvent, en tout ou en partie, le sujet spécial 5.]

22° Théorie des nombres, algèbre, analyse infinitésimale après LEIBNIZ et NEWTON. Les continuateurs: les BERNOULLI, MACLAURIN, etc. FAGNANO, CLAIRAUT, LANDEN, D'ALEMBERT. — Les algébristes: BÉZOUT, VANDERMONDE, WARING. — EULER, LAGRANGE, LAPLACE, LEGENDRE. — AMPÈRE, FOURIER, POISSON. — **Gauss, Cauchy.** — ABEL, JACOBI, RIEMANN, WEIERSTRASS; DIRICHLET, KUMMER, KRONECKER; GALOIS, LIE; CAYLEY et SYLVESTER, etc., etc. [Ici, les sujets spéciaux 7, 8, 9, 4 B, l'une ou l'autre année.]

23° La géométrie depuis DESCARTES. [Ici, le sujet spécial 6.]

24° La mécanique rationnelle depuis l'antiquité jusqu'à nos jours, surtout d'après les chapitres historiques de la *Mécanique analytique* de LAGRANGE. [Ici, le sujet spécial 3 B.]

3. En 1888, nous avons signalé deux lacunes dans la littérature historique mathématique: il n'y avait pas alors de bon manuel d'histoire des mathématiques à mettre entre les mains des élèves[2]), il n'y avait

1) Dans les leçons 16, 17, 18, et aussi dans les suivantes on expose, en général, à propos de chaque auteur, l'ensemble de ses recherches, mais en insistant plus sur ce qui est l'objet propre de la leçon: ainsi, à propos de VIÈTE, dans la leçon 16, on analyse surtout ses travaux d'algèbre, mais en indiquant aussi ses recherches sur les cercles tangents, sauf à les rappeler plus loin à leur place systématique.

2) Inutile de dire que le grand ouvrage de CANTOR est signalé par nous aux

pas de chrestomathie mathématique pour la période non moderne de la science.

La seconde lacune subsiste, mais la première est *à moitié* comblée par la publication de la *Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter* de Zeuthen, complétée par les *Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie* de F. Müller. Le livre de Zeuthen, bien que fortement imprégné de vues personnelles à l'auteur — peut-être même à cause de cela — nous paraît plus excitateur que les manuels de R. Ball et de Cajori et à fortiori que ceux de Hœfer et de Boyer.

aspirants docteurs comme le *Standard-Book* sur l'histoire des mathématiques, à consulter en toute occasion.

Die Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie.

Von

G. Valentin in Berlin.

Bald nachdem ich mit den Vorarbeiten für eine allgemeine mathematische Bibliographie im Februar 1885 begonnen hatte, veröffentlichte ich eine kurze vorläufige Notiz über die von mir in Angriff genommene Arbeit in den Spalten der ersten Folge dieser Zeitschrift (Biblioth. Mathem. 1885, Sp. 90—92). Eine weitere Erwähnung fand mein Unternehmen in dem Vortrag, welchen der geschätzte Redakteur dieses Journals in der 5. Sektion der ersten internationalen Mathematiker-Versammlung in Zürich am 10. August 1897 nach einigen ihm von mir zur Verfügung gestellten Notizen hielt (Biblioth. Mathem. $\mathbf{11}_2$, 1897, S. 65—72). Heute nun komme ich der Aufforderung des Herrn Eneström, einen eigenen Bericht über meine Arbeit für das erste Heft der 3. Serie der Bibliotheca Mathematica zu geben, um so lieber nach, als ich dabei einige Abänderungen meines ursprünglichen Planes erwähnen kann.

Ich habe seit Jahr und Tag mit dem zweiten Teil meiner Arbeit, dem Durcharbeiten des aufgespeicherten Materials begonnen, nachdem ich den ersten Teil, das Sammeln, im Grofsen und Ganzen abgeschlossen habe. Das ist zwar nicht ganz korrekt ausgedrückt, denn Jeder, der selbst mal mit bibliographischen Sammlungen zu thun gehabt hat, wird wissen, dafs bis zum letzten Augenblick, d. h. bis zum Beginn des Druckes, ja noch während des Druckes und leider darüber hinaus, bis dahin unbekanntes und unaufgefundenes Material zufliefst; andrerseits ist es aber durchaus geboten, sich selbst eine Grenze zu stecken und einen Abschlufs zu machen, wenn man je zum Ziel kommen und nicht ins Uferlose steuern will. Aus diesen Bemerkungen ist zu ersehen, wie ich mir selbst darüber völlig klar bin, dafs trotz aller aufgewandten Mühe und Zeit sich hier und da eine Lücke ergeben wird und bin ich daher auch geneigt, meine Arbeit nur als einen ersten Versuch zu einer Allgemeinen mathematischen Bibliographie zu betrachten.

Der Plan zu dieser Bibliographie, den ich mir vor Beginn der Arbeit aufgestellt und nach dem ich im wesentlichen auch bisher das Material gesammelt hatte, bestand in Folgendem: In die Bibliographie sollten alle Schriften aus der reinen Mathematik aufgenommen werden, sowohl die unter selbständigem Titel erschienenen Bücher, Universitäts-, Schul- u. s. w. Schriften, als auch die in periodischen Publikationen, wie Akademieschriften, Zeitschriften (mit Ausschlufs von Zeitungen) u. s. w. enthaltenen. Aus anderen Wissenschaften sollten nur diejenigen Bücher und Aufsätze Aufnahme finden, welche das Thema des Titels mathematisch behandeln, so dafs z. B. aus der Physik und Astronomie die sogenannte theoretische Physik und theoretische Astronomie Berücksichtigung finden, dagegen die Experimentalphysik und die beobachtende Astronomie ausgeschlossen bleiben sollten und ähnlich in dem Versicherungswesen, der Kriegswissenschaft, Technologie u. s. w.

Eine sehr schwierige Frage war, welche Stellung ich zu der mathematischen Unterrichtslitteratur einnehmen sollte, ob ich alle mathematischen Schulbücher und den mathematischen Unterricht betreffenden Aufsätze berücksichtigen, oder diese Litteratur ganz ausschliefsen, oder eine Auswahl darunter vornehmen sollte. Ich habe mich schliefslich für die Aufnahme entschieden, nicht nur inbezug auf die mathematische Unterrichtslitteratur, sondern in den meisten zweifelhaften Fällen, die sich auf dem Gebiete der angewandten Mathematik in grofser Menge darbieten, um das Subjektive solcher Entscheidungen soviel wie möglich auszuschalten. Bleibt doch auch dann noch genug dem subjektiven Ermessen zu entscheiden übrig und weifs ich sehr wohl, dafs in dem abgeschlossenen Werke in mancher Abteilung dem Einen zu viel, dem Andern zu wenig enthalten sein wird. Das Zuviel möchte freilich bei einem bibliographischen Werke der geringste Fehler sein. Aber durch solche subjektive Abwägungen, die nun einmal nicht zu vermeiden sind, müssen manche Ungleichheiten eintreten, zumal es psychologisch sehr interessant ist, wie abhängig man dabei von seinem körperlichen Befinden, seiner geistigen Stimmung, von irgend einem augenblicklichen Ideengang ist: bei körperlicher Ermüdung, bei geistiger Abspannung entscheidet man sich für die Nichtaufnahme eines Artikels, den man später doch noch zu verzeichnen für nötig findet, irgend ein Gedanke veranlafst uns, einen Aufsatz zu berücksichtigen, dessen Aufnahme, wenn später der Ideengang dem Gedächtnis entschwunden ist, uns unverständlich wird. So ist es mir bei der jetzigen Durcharbeitung meines Materials doch schon häufiger passiert, dafs ich einen früher aufgenommenen Titel jetzt verwerfe, andrerseits auch wieder manchen Aufsatz verzeichne, den ich früher nicht für berücksichtigungswert hielt. Diese Beobachtung läfst sich besonders gut anstellen bei Aufsätzen, welche in verschiedenen Zeitschriften veröffentlicht oder von anderen übernommen sind: da habe ich einen Aufsatz aus zwei verschiedenen Zeitschriften verzeichnet, aus der dritten, die ich mehrere Jahre später durchgesehen habe, dagegen nicht.

Mit Absicht ausgeschlossen habe ich aber, von vereinzelten Ausnahmen abgesehen, die Rechenbücher dieses Jahrhunderts und einige elementare mathematische Handbücher für Volksschulen, denn auch die Rücksicht auf den Verleger zwingt mich, ein zu grofses Anwachsen des Materials zu verhindern. Aus diesem Grunde sah ich mich auch genötigt, bei der jetzigen Durcharbeitung des Materials, entgegen dem ersten Plane, gewisse Kürzungen im Titel vorzunehmen. Ursprünglich nahm ich die Titel in bibliographischer Genauigkeit unter Hinzufügung des Jahres des Erscheinens, des Druckortes, des Verlegers bezw. Druckers, der Anzahl der Seiten und Tafeln und des Formates auf — bei allen Schriften, die ich selbst in der Hand gehabt habe, während bei allen andern Titeln ich natürlich abhängig von der Genauigkeit und Ausführlichkeit der Quelle war, aus der ich geschöpft habe. Jetzt behalte ich von dem Titel nur das Wesentliche bei, insbesondere kürze ich die oft so ausführlichen Angaben derselben, für wen das Werk bestimmt ist, z. B. kürze ich den Zusatz „für Studierende an Universitäten, technischen Hochschulen, Bau- und Gewerbeschulen, sowie zum Selbstunterricht" in der Weise ab, dafs ich nur „für Studierende an Universitäten etc." beibehalte, ferner streiche ich die Namen des Verlegers resp. Druckers auf allen Werken von 1700 an, mit seltenen Ausnahmen, wo sie z. B. zur Unterscheidung gleicher Jahresausgaben dienen und füge das Format nur bei, wenn das Buch in 4^0 oder in fol. gedruckt ist. Auch die Redseligkeit der Titel von Büchern des 17. Jahrhunderts kürze ich, ohne dadurch etwas Wesentliches des Titels zu unterdrücken.

Bei Zeitschriften-Artikeln folgt hinter dem fast nie gekürzten Titel die Jahreszahl, dann der Titel der Zeitschrift in gewisser Abkürzung, ferner, wo es nötig ist, die Serie, Abteilung, Klasse (Mathematische oder Philologische) und endlich die Angabe der Seiten. Was die Abbreviaturen der Zeitschriftentitel betrifft, so habe ich es vermieden, diese nur durch einzelne Buchstaben zu geben, wie es z. B. in dem *Répertoire des sciences mathématiques* geschieht; diese sind für den Benutzer meistens Hieroglyphen, die ihn zwingen, beständig den Schlüssel der Abbreviaturen einzusehen. Ich habe mich bemüht, die Abkürzungen so aufzustellen, dafs man aus ihnen sofort die Zeitschrift erkennen kann, ohne auf den Schlüssel zurückzugreifen; einen solchen beabsichtige ich aber nichtsdestoweniger zu geben.

Dagegen bin ich von dem Gedanken, auch alle Aufgaben und deren Lösungen in die Bibliographie aufzunehmen, zurückgekommen, einfach, weil dies fast unmöglich ist. Wer das Aufgaben-Repertorium in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, in den Nouvelles annales de mathématiques, der Mathesis u.s.w. kennt, wer Ladys Diary, Gentlemans Diary und viele holländische mathematische Publikationen mal in Händen gehabt hat, wird mir Recht geben, dafs diese Absicht undurchführbar ist. Leider bin ich zu dieser Erkenntnis erst gekommen, nachdem ich mich der Mühe der Verzettelung schon bei einigen Zeitschriften unterzogen hatte und kann ich bei der jetzigen Durcharbeitung nicht mehr alle diese Zettel ausscheiden; dadurch kommt eine etwas unerwünschte Ungleichheit in die Abteilung „Mathematische Aufgaben", indem ich später unter der Bezeichnung „Aufgaben-Repertorium" oder „Questions et leurs solutions" die Aufgaben mit Angabe der Zeitschrift, des Bandes und der Seiten vereinigt habe.

Auch was die zeitliche Ausdehnung der Bibliographie betrifft, so habe ich meine ursprüngliche Absicht geändert. Meine erste Veröffentlichung erwähnt, dafs ich die mathematische Litteratur zunächst nur bis 1867 sammeln wolle, weil von 1868 an die Fortschritte der Mathematik als Fortsetzung dienen könnten. Allein schon in den ersten Arbeitsjahren mufste ich mir sagen, dafs eine Bibliographie, die um die Wende des Jahrhunderts vollendet sein und nur die Litteratur bis 1867 enthalten würde, schon bei ihrem Erscheinen veraltet sein würde. Daher entschlofs ich mich, auch die nach 1867 erschienene Litteratur zu sammeln und werde, sobald das von der „Royal Society" in London geplante internationale Unternehmen völlig gesichert ist, die Bibliographie mit dem Jahre 1900 abschliefsen, so dafs dann der Mathematiker in der That einen vollständigen Überblick über die mathematischen Erscheinungen von Erfindung der Buchdruckerkunst an besitzen wird.

Um nun das Material für die in dieser Weise geplante Bibliographie zu sammeln, standen mir in erster Linie die Bestände der Berliner kgl. Bibliothek und die der technischen Hochschule in Charlottenburg zur Verfügung. Leider blieb, was die selbständig erschienenen Schriften betrifft, das dadurch gewonnene Material äufserst lückenhaft, sowohl in der deutschen Litteratur selbst, wie besonders in der ausländischen, da nicht allein viele deutsche Bücher gänzlich fehlten und von den in mehreren Auflagen erschienenen Werken nur vereinzelte Auflagen vorhanden waren, sondern auch Übersetzungen in fremde Sprachen meistens nicht angeschafft waren und von der ausländischen Litteratur im Allgemeinen nur die bedeutenderen Publikationen zum Bestande der beiden Bibliotheken gehörten. Ich mufste mich daher nach anderen Hülfsmitteln umsehen.

Da fand ich in erster Linie in Bibliographien und zwar in allgemein-mathematischen (z. B. Roggs *Handbuch der mathematischen Litteratur*, Sohnckes *Bibliotheca mathematica* u. A.) oder in solchen, die nur einen einzelnen Zweig der Mathematik (z. B. RICCARDIS *Saggio di una bibliografia Euclidea*, STÄCKELS *Bibliographie der Parallellinien*) oder die Mathematik eines einzelnen Landes (z. B. SZINNYEIS Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliographie Ungarns, RICCARDIS *Biblioteca matematica Italiana*) behandeln, eine reiche Ergänzung der Lücken. Diesen Bibliographien schliefsen sich die buchhändlerischen Publikationsverzeichnisse an, wie HEINSIUS' und KAYSERS *Bücher-Lexikon* für deutsche Bücher, während die französische Litteratur in QUÉRARDS *La France littéraire* und seiner Fortsetzung von LORENZ verzeichnet ist. Ein weiteres Hülfsmittel war die Durchsicht von gedruckten Bibliothekskatalogen, z. B. *Catalogue de la bibliothèque de l'École polytechnique* und vor Allem der *Catalogue of printed books of British Museum*. Grade die Durchsicht dieses Kataloges war mir in einer Hinsicht interessant. Wenn ich oben klagte, dafs die Bücherbestände der kgl. Bibliothek und der technischen Hochschule für eine *allgemeine* mathematische Bibliographie durchaus nicht ausreichend waren, so trifft dies in noch höherem Mafse bei der berühmten „Library of the British Museum" zu. Hätte dieser Katalog mir als erste Grundlage für die Bibliographie gedient, so würde naturgemäfs die Litteratur der englischen mathematischen Werke sehr viel reichhaltiger (aber auch durchaus nicht vollständig) ausgefallen sein, dagegen würde die ausländische Litteratur noch viel mehr Lücken aufgewiesen haben, als es nach Durchsicht der beiden Berliner Bibliotheken der Fall war.

Aufser den genannten verschiedenen Arten von Bibliographien (ich bemerke übrigens, dafs die oben einzeln angeführten durchaus nicht alle von mir durchgesehenen erschöpfen) giebt es nun noch eine zweite Klasse von Hülfsmitteln, die sich als aufserordentlich fruchtbar für die Ergänzung der Lücken erwies, wenn die Bearbeitung derselben auch sehr mühevoll, und zeitraubend war. Dies Mittel besteht in der Durchsicht der allgemeinen litterarischen und kritischen Zeitschriften; anfangend mit dem Journal des sçavants und den Acta eruditorum Lipsiensium und ausgehend mit dem Litterarischen Centralblatt und dem Athenaeum umfassen diese Zeitschriften wohl mehr denn 80 000 Bände; in ihnen werden Neu-Erscheinungen des Büchermarktes kritisch besprochen unter meist recht genauer Angabe der Titel, und so war die Ausbeute für die Bibliographie nicht unwesentlich, wenn auch die Durchsicht der Tausende von Bänden mehrere Jahre in Anspruch nahm. Um aber die darauf verwandte Mühe für die Bibliographie auch noch anderweitig nutzbar zu machen, notierte ich zugleich auf den einzelnen Zetteln unter Angabe des Bandes, der Seite und des Recensenten die Zeitschrift, in der sich eine Besprechung des betreffenden Werkes fand und glaube ich damit dem mathematischen Publikum in vielen Fällen einen Dienst geleistet zu haben.

Wenn man nun auch von der Benutzung einiger dieser im Vorstehenden geschilderten Hülfsmittel sagen kann, daſs sie in gewisser Hinsicht eine *systematische* Ausbeute der mathematischen Litteratur gestatten, so muſs man doch bedenken, daſs die Bücherverzeichnisse von Heinsius und Quérard nur bis zum Anfang des 18. Jahrhunderts, die ältesten Zeitschriften: das Journal des sçavants, die Acta eruditorum Lipsiensium und die Philosophical Transactions nur bis in die Sechziger Jahre des 17. Jahrhunderts zurückgehen. Für die darüber hinausliegende Litteratur giebt es aber kein derartiges systematisches Hülfsmittel mehr, und man ist völlig auf den Zufall angewiesen. Zwar bieten Heilbronner, Kästner, Cantor in ihren Geschichten der Mathematik wertvolle und reichhaltige Litteraturangaben, doch reicht dies allein nicht aus. Ich habe daher auch noch zu antiquarischen Katalogen meine Zuflucht genommen. Natürlich kann dabei nur von einer ganz beschränkten Anzahl der Tausende von antiquarischen Bücherverzeichnissen die Rede sein; mit die wertvollsten dieser sind wohl die Auktionskataloge der Librischen und Boncompagnischen Bibliotheken.

Die letzte Ergänzung für die auſserdeutsche Litteratur habe ich schlieſslich an gröſseren Bibliotheken des Auslandes zu machen versucht, nachdem ich für die englische, wie gesagt, den gedruckten Katalog der Bibliothek des Brittischen Museums durchgesehen hatte. In Stockholm und Kopenhagen gelang mir dies, dank der grade für meine Zwecke sehr günstigen Einrichtungen der dortigen Bibliotheken in bester Weise für die Litteratur der drei nordischen Länder. In Holland, Belgien, Frankreich und Italien habe ich mein Material ebenfalls reichlich vermehren können, ohne freilich in so vollkommener Weise wie in Stockholm und Kopenhagen, da den Nationalbibliotheken dieser Länder ein systematischer Katalog bisher fehlt, die Zeit für die einzelnen Städte mir knapp bemessen war und ich sie in der Hauptsache auf die Durchsicht von solchen Zeitschriften verwenden muſste, welche in Berlin fehlen.

Die Zeitschriften-Aufsätze nämlich hatte ich ebenfalls aus der kgl. und der technischen Bibliothek entnommen, die zwar einen reichen Bestand von Periodicis besitzen, aber bei der Fülle von mathematischen Zeitschriften, von Akademie-Publikationen und von Veröffentlichungen wissenschaftlicher Gesellschaften doch immerhin noch genügenden Stoff zur Durchsicht in den von mir berührten Hauptstädten übrig lieſsen. Das Sammeln dieser Aufsätze konnte nun rein systematisch geschehen, nachdem ich mir ein Verzeichnis der zu bearbeitenden Zeitschriften aufgestellt hatte; es war nur jede Zeitschrift Band für Band auf ihren Inhalt hin durchzusehen und die Titel der für die Bibliographie geeigneten Aufsätze abzuschreiben, ein im Gegensatz zu dem bei den Büchertiteln geschilderten

Verfahren ziemlich einfaches, wenn auch viel Zeit in Anspruch nehmendes: handelte es sich doch, allerdings zusammen mit den schon erwähnten kritischen Zeitschriften um 120 000 Bände wenigstens. Am einfachsten, schnellsten und ertragreichsten erwies sich diese Arbeit bei den rein mathematischen Zeitschriften; da wurde eben jeder Aufsatz aufgenommen, bei allen andern Periodicis mufste ich mir aber erst die für die Bibliographie geeigneten Aufsätze heraussuchen und ich habe auf diese Weise manche bändereiche Zeitschrift durchgesehen, aus der ich schliefslich nur wenige, ja bisweilen gar keine Artikel aufzunehmen fand.

Das durch diese Arbeiten gewonnene Material beträgt über 120 000 Zettel, von denen 30—35 000 selbständige Schriften und 90—95 000 Zeitschriften-Artikel sein werden.

Das Ideal einer Bibliographie würde sein, alle Bücher selbst einzusehen und selbst zu verzeichnen, was aber bei einer allgemeinen Bibliographie einer grofsen Wissenschaft wegen Mangel an Zeit und an Mitteln wohl meist unmöglich sein wird. Daraus ergiebt sich dann aber der Übelstand, dafs die einzelnen Büchertitel in ihrer Genauigkeit sehr von einander abweichen; exakt können nur die sein, welche der Bearbeiter selbst in Händen gehabt hat und demnach nach einheitlichen Grundsätzen hat verzetteln können; diese sind in meinem Falle durch einen Stern (*) kenntlich gemacht. Bei den meisten andern aus Bibliographien geschöpften fehlt bald dies, bald jenes, z. B. die Seiten- oder Tafelanzahlen; häufig ist auch der Titel aufs Äufserste gekürzt, ja bisweilen nicht im Originaltext, sondern nur in Übersetzung angeführt und die Angabe der Jahreszahl läfst oft die wünschenswerte Genauigkeit vermissen, ebenso wie bei Zeitschriftenartikeln die Bandzahl und die Anfangs- und Endziffern des Aufsatzes. Dazu tritt noch ein Übelstand. Die Bände von akademischen Publikationen und Zeitschriften tragen häufig zwei verschiedene Jahreszahlen, von denen die eine das Jahr oder die Jahre bezeichnet, *für* welche der Band erschienen ist, die zweite das Jahr, *in* welchem der Band abgeschlossen ist. Ich habe mir bei meinen Zetteln zum Prinzip gemacht, bei zwei derartig konkurrierenden Jahreszahlen stets der ersten den Vorzug zu geben, aber dieses Prinzip wird in den benutzten Bibliographien nicht innegehalten, ja nicht einmal in ein und derselben Bibliographie gleichmäfsig das eine oder das andere, und daraus ergeben sich dann zahlreiche Nichtübereinstimmungen zwischen meinen Zetteln und den verglichenen Bibliographien. Wenn man nun auch völlig davon durchdrungen ist, wie ich es bin, dafs man einen gewissen Prozentsatz der gerügten Fehler als Flüchtigkeits-, Lese-, Schreib- und Druckfehler der menschlichen Schwäche und Unvollkommenheit zu Gute rechnen mufs, wie ich es ja auch bei den von mir und meinen Abschreibern hergestellten Zetteln selbst erlebe, so mufs ich doch konstatieren, dafs in bibliographischen Werken dieser Prozentsatz in oft erschreckender Weise überschritten wird, und man würde erstaunt sein, wenn ich mein auf eingehendster Benutzung beruhendes Urteil über die durchgesehenen Bibliographien hier abgeben wollte. Am flüchtigsten sind die antiquarischen Kataloge gearbeitet und unter diesen wieder, natürlich immer mit Ausnahmen, die deutschen. Aber auch ein im Ganzen so vortreffliches und brauchbares Werk wie der *Catalogue of scientific papers published by the Royal Society* ist davon nicht ausgenommen. Zwar die 3. Serie, die Jahre 1874—83 umfassend, ist sehr sorgfältig gearbeitet, weniger schon die 2. Serie (1864—73), die 1. Serie (1800—63) dagegen wimmelt von Unrichtigkeiten der vorbezeichneten Art.

Man wird daher begreifen, welche Arbeit meiner noch bei der Durchsicht meiner Zettel harrt. Meine anfängliche Absicht freilich, bei der schliefslichen Redaktion das ganze gesammelte Material noch einmal mit den Büchern, Zeitschriften und den Quellen zu vergleichen, habe ich als unausführbar aufgeben müssen, wenn ich nicht viele Jahre auf diese Nachprüfung allein verwenden wollte. Aber eine gewisse Kontrolle erschien mir doch wünschenswert und notwendig. Zu diesem Zweck vergleiche ich zunächst den Inhalt der gesammelten Werke mathematischer Schriftsteller mit meinen Zetteln. Derartige Publikationen giebt es aber doch nur in geringer Anzahl, meist nur von den Koryphäen der Wissenschaft. Häufiger findet man in Nachrufen und Biographien von Mathematikern eine mehr oder minder vollständige Zusammenstellung ihrer Schriften, und endlich ziehe ich zur Vergleichung noch Poggendorffs *Handwörterbuch*, den *Catalogue of scientific papers*, das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik und antiquarische Kataloge hinzu. Durch diese Kontrolle hoffe ich eine recht grofse Genauigkeit für die vielen Zahlen, welche das Material enthält, zu bieten, besonders in den Zeitschriftenartikeln. Schwieriger gestaltet sich in vielen Fällen die Untersuchung bei den Büchern. Bei Nichtübereinstimmung der Jahreszahlen z. B. mufs entschieden werden, ob es sich in der That um verschiedene Ausgaben handelt oder die abweichenden Angaben nur auf Irrtümern oder Druckfehlern beruhen. Ein Zurückgehen auf die verschiedenen benutzten Quellen hilft meistens nichts, man kann sogar manchmal nachweisen, wie eine Bibliographie direkt aus einer älteren abgeschrieben hat, ohne deren bibliographische Angaben nachzuprüfen, und öfters führen daher solche langwierigen Untersuchungen zu keinem abschliefsenden Resultat. Ein lehrreiches Beispiel dafür kann man in dem Aufsatze: *Beitrag zur Bibliographie der Eulerschen Schriften* (Biblioth. mathem. $\mathbf{12}_2$, 1898, S. 41 ff.) einsehen. Man findet dort von Eulers *Vollständiger Anleitung zur Algebra* 30 Ausgaben und Übersetzungen angeführt: bei sieben von diesen habe ich in einer Anmerkung meine Bedenken gegen ihre Existenz geltend gemacht, fünf andere erwähne ich zwar in dieser Anmerkung, habe mich aber nicht einmal entschliefsen können, sie in den vorhergehenden Text aufzunehmen: bei allen 12 Ausgaben (d. h. 40%) endigte eben meine Untersuchung mit einem *Non liquet.* Deshalb führe ich auch bei solchen ungelösten Fragen die Quelle an, aus der ich schöpfte; dies ist die einzige Möglichkeit mich vor dem Vorwurf der Ungenauigkeit zu schützen, da ich es nicht für richtig hielt, in zweifelhaften Fällen die Angaben älterer Bibliographien ganz zu streichen, wenn sich nicht der Irrtum als solcher sofort zu erkennen giebt.

In diesen und manchen anderen Erfahrungen finde ich nun aber eine Bestätigung der Richtigkeit meiner von Anfang an gehegten Ansicht, dafs eine solche Arbeit nur ein Einzelner in Angriff nehmen soll und nicht eine Reihe von Mitarbeitern, denn nur so kann nach einheitlichen Grundsätzen verfahren und nur so kann das von überall zusammengetragene Material genügend gesichtet und verarbeitet werden, und dies wiegt meiner Meinung nach den nicht zu bestreitenden Vorteil bei weitem auf, dafs eine grofse Anzahl von Mitarbeitern das Material schneller und vielleicht auch umfangreicher zusammentragen kann

Berlin, im Dezember 1899.

Sur l'état d'avancement du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques.

Par

C. A. Laisant à Paris.

La première idée d'un *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques* a pris naissance vers 1884 dans la Société mathématique de France. Je ne rappellerai pas ici les travaux qui eurent pour but d'établir une classification, et qui se prolongèrent jusqu'en 1889, et même au delà; il me suffira de dire que l'appel le plus large fut adressé aux mathématiciens du monde entier, et que cet appel fut entendu. En 1889 (16—19 Juillet) un Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques se réunit à Paris, adopta le principe du Répertoire, ratifia la classification avec de légères retouches, et institua une commission permanente, ayant son siège à Paris. Cette commission est présidée par M. Poincaré; j'ai l'honneur, depuis plusieurs années, d'en être le secrétaire, et c'est ce qui me permet de parler de la question en connaissance de cause.

La classification étant devenue l'*Index* du répertoire, qui en est aujourd'hui à sa 2e édition (1898), il y avait encore à faire un travail préparatoire considérable avant de pouvoir publier une ligne du Répertoire: celui du relevé des Mémoires et de la confection des fiches isolées. A cette tâche (qui est encore bien loin d'être achevée) furent consacrées les années qui ont suivi 1889; et le zèle des membres de la Commission, dans tous les pays, permit de la mener à bien et d'obtenir des résultats appréciables.

Cependant, si les matériaux arrivaient en assez grande abondance, la question de la publication apparaissait inextricable au point de vue pratique; et elle l'eut été effectivement sans la résolution très sage à laquelle on finit par s'arrêter, et qui consistait à publier, non pas un volume, ou une série de volumes, mais des fiches d'un format commode (à peu près celui d'une carte postale ordinaire). Chacune de ces fiches porte en tête l'indication d'une des divisions de l'*Index* et contient la mention de 9 ou 10 mémoires, les noms des auteurs étant rangés en ordre alphabétique. On décida en outre que la publication aurait lieu par séries de 100 fiches.

A l'heure actuelle, sept séries ont été publiées: 1ère (1894), 2e (1895), 3e (1895), 4e (1896), 5e (1897), 6e (1898), 7e (1899). La 8e série va paraître d'un jour à l'autre, l'impression de la 9e avance rapidement, et nous venons de livrer à l'imprimeur le manuscrit de la 10e. Il est donc certain qu'au cours de l'année 1900, vers l'ouverture de l'Exposition universelle, nous aurons publié au moins 1000 fiches, peut-être 1100, contenant des indications bibliographiques sur 9000 à 10000 mémoires s'appliquant à un grand nombre de branches de la science mathématique.

Il est permis de trouver que la marche de cette publication jusqu'ici a été bien lente; cela tient surtout à la modicité des ressources dont disposait la commission; elle ne pouvait guère compter normalement que sur une modeste subvention annuelle de 1000 fr. accordée par le ministère de l'Instruction publique. Au début, on ne pouvait espérer que la vente des séries de fiches fournirait un produit appréciable, parce qu'un tel répertoire ne devient un instrument de travail efficace qu'à partir du jour où il a pris un assez grand développement. Et sans les libéralités de généreux donateurs, M. le prince Roland Bonaparte, M. R. Bischoffsheim, la publication des séries aurait été plus lente encore.

Quoi qu'il en soit, l'œuvre faite est utile, et nous commençons à nous apercevoir que les mathématiciens en comprennent l'utilité. Parfaite, elle ne l'est pas; rien n'est parfait. On peut critiquer la classification, à laquelle ont travaillé des centaines de mathématiciens; malgré le soins qu'ils y ont mis, il reste peut-être des lacunes, des points douteux; mais en somme, on y trouve ce qu'on y cherche; quant aux mémoires qui laissent de l'indécision, la commission n'a pas hésité à les classer dans deux ou plusieurs divisions différentes, de sorte que le chercheur est à peu près sûr d'en rencontrer la mention. Et puis, la meilleure réponse à toutes les critiques, souvent très justifiées en apparence, c'est que si nous avions voulu faire mieux, nous nous exposions à ne pouvoir rien faire du tout. Les 10 séries publiées ou à l'impression correspondent à environ 9000 à 10 000 fiches manuscrites isolées. Le secrétariat de la Commission en possède encore environ 6000 à 7000. Mais depuis un certain temps, de nouveaux envois ne lui sont plus parvenus, et il importerait beaucoup que les membres de la Commission, surtout en dehors de la France, voulussent bien réchauffer le zèle des mathématiciens qui les entourent et encourager leurs correspondants à continuer l'œuvre si bien commencée. Il reste encore, en effet, de très nombreux dépouillements à faire.

Au point de vue des pays, ceux qui ont jusqu'ici apporté leur contingent, en proportion plus ou moins considérable, sont l'Allemagne, l'Autriche, la Belgique, le Danemark, l'Espagne, la France, la Hollande, l'Italie, la Norwége, le Portugal, la Russie, la Suisse. Par contre, les États-Unis d'Amérique, la Grande Bretagne, la Grèce, la Suède n'ont pas produit jusqu'ici une seule fiche, ou plutôt n'ont encore rien envoyé — car nous croyons savoir que dans plusieurs de ces pays, tout au moins, des dépouillements importants ont été entrepris depuis assez longtemps déjà.

Les divisions de l'*Index* sont à peu près au nombre de 1950. Les fiches imprimées jusqu'ici se répartissent sur 250 à 300 divisions différentes; par contre, il y a environ 280 divisions qui n'ont pas fourni une seule fiche manuscrite. Il n'en faudrait pas conclure que ces divisions soient inutiles, car rien ne prouve qu'elles ne seront pas utilisées dans les dépouillements si nombreux dont nous devrons encore recevoir les résultats.

Il y a aussi un grand nombre de divisions qui nous fournissent ce que nous appelons des fiches *creuses* on non imprimables. Nous nommons ainsi celles pour lesquelles le nombre des Mémoires mentionnés est inférieur à 9 ou 10, puisque c'est là ce que contient en moyenne une fiche imprimée. Lorsque des dépouillements nouveaux se font et que les résultats nous en parviennent, ils ont pour effet de compléter des fiches creuses, et de rendre ainsi utilisables des matériaux momentanément sans emploi. On voit tout l'intérêt qu'il y a à ne pas laisser se ralentir le travail du dépouillement dans les divers pays, qui est destiné à alimenter régulièrement la publication.

Au point de vue des Recueils, nous avons dû dresser une liste d'abréviations, introduite dans la dernière édition de l'*Index*, et qui comprend un grand nombre d'entre eux. Ainsi que la classification elle-même, cette liste n'est ni complète, ni parfaite; telle qu'elle est établie, cependant, elle peut rendre et elle rend de bons services.

Parmi les Recueils périodiques dont nous parlons, un grand nombre, et de fort importants, ont été presque complètement dépouillés. Il n'y a cependant peut-être que les Comptes-rendus de l'Académie des sciences de Paris qui soient tout à fait au courant, grâce au dévouement de M. le Commandant Brocard; c'est lui qui a pris cette si lourde tâche, et il s'en est acquitté avec une exactitude et une régularité véritablement admirables. Voici, au surplus, pour quelques uns des plus importants Recueils, les nombres de mémoires fournis par les dépouillements: Journal für Mathematik (Crelle), 2286; Comptes-rendus de l'Académie des sciences de Paris, 7541; Journal de mathématiques (Liouville), 1200; Journal de l'Ecole polytechnique, 421; Bulletin des sciences mathématiques (Darboux), 390; Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, 886; Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, 288;

Raccolta di Lettere ed altri scritti intorno alla Fisica ed alle Matematiche (PALOMBA), 804.

Une remarque pratique importante est celle-ci: toutes les fiches imprimées portent un n° d'ordre, et cet ordre est celui de l'impression. Ainsi la 1ère série comprend les fiches numérotées de 1 à 100; la 2e, celles de 101 à 200, etc. Dans chaque série, l'ordre suivi est bien en général celui des divisions de l'*Index*; mais on est contraint de revenir parfois en arrière pour utiliser de nouveaux matériaux; et, par exemple, on trouvera des fiches de la classe A dans une série postérieure à une autre qui en contiendra de la classe X. Pour tirer un parti utile du Répertoire, chacune des personnes qui se procure les séries des fiches doit donc: 1° compter les fiches de chaque série en vérifiant les nos, pour s'assurer qu'il n'y a ni omission ni double emploi; 2° classer ensuite les fiches *dans l'ordre des divisions de l'Index,* de préférence dans une boite un peu longue, en bois ou en carton, et sans s'inquiéter désormais des nos. Ces précautions permettront un mode de recherche des plus simples, quand on aura besoin de faire appel au Répertoire.

Malgré tout le soin que la commission apporte à son travail, quelques erreurs, en petit nombre, ont été commises. On les a rectifiées par la publication des fiches d'errata, en couleur; il est essentiel de faire immédiatement, sur les fiches fautives, et d'une façon bien nette, les corrections indiquées par ces errata. C'est le moyen d'avoir continuellement à jour une collection irréprochable. Nous donnons ce conseil pour l'avenir aussi bien que pour le passé, car nous ne sommes infaillibles ni les uns ni les autres, les imprimeurs ne le sont pas non plus, et nous savons fort bien que des erreurs se produiront encore.

J'ai passé volontairement sous silence une foule d'indications qui se trouvent dans l'*Index*, et que les lecteurs, par conséquent, connaissent ou apprendront, si le sujet les intéresse. Pour tout ce qui touche à la rédaction et à la préparation du Répertoire, l'auteur de cet article se fera un devoir, comme secrétaire de la commission, de fournir à ses confrères les renseignements que ceux-ci lui demanderaient.

En terminant, je tiens à remercier cordialement, en mon nom et pour la Commission du Répertoire, M. G. ENESTRÖM, à raison de l'hospitalité qu'il m'a si gracieusement offerte, et dont j'ai peut-être un peu abusé: en me permettant de faire cet exposé dans la Bibliotheca Mathematica, il aura contribué à porter à la connaissance du public mathématique une œuvre véritablement utile aux travailleurs, une entreprise qui mérite l'attention et les encouragements de tous les sincères amis de la science.

Über die geplante internationale naturwissenschaftliche Bibliographie.

Von

J. H. Graf in Bern.

Bekanntlich hat die „Royal Society“ in London zwischen den Jahren 1867 und 1896 11 große Quartbände unter dem Titel *Catalogue of scientific papers* herausgegeben. In diesem Katalog wurden die in Periodica erschienenen wissenschaftlichen Artikel, die unter dem englischen Begriff „Sciences“ gehören, den Autoren nach eingeordnet und zwar sofern als sie von 1800—1883 erschienen sind. Ein ergänzendes Supplement wie auch ein Index ist in Vorbereitung. Wahrscheinlich wird es die „Royal Society“ auch übernehmen, diese Arbeit bis zum Jahre 1900 fortzusetzen.

Schon 1893 fragte sich die „Royal Society“, wie die Sache im 20. Jahrhundert anzugreifen sei und kam auf den Gedanken, die Erstellung eines Katalogs der wissenschaftlichen Litteratur international zu organisieren, und versandte ein Zirkularschreiben an mehr als 200 gelehrte Gesellschaften, Institutionen, Akademien und wissenschaftliche Celebritäten der Welt.

Die „Royal Society“ muſs in diesem Schreiben gestehen, daſs der von ihr publizierte *Catalogue of scientific papers* unvollständig sei, vor allem fehlte ein Verzeichnis der in die betreffenden Fächer gehörenden selbständig erschienenen Arbeiten. Sie erklärte es als wünschenswert, daſs für das 20. Jahrhundert gleich von Anfang an eine Einrichtung getroffen werde, welche nicht nur gestatten würde, alle in den Zeitschriften erscheinenden Artikel, sondern auch die selbständig erschienenen Publikationen aufzunehmen. Der Katalog sollte sowohl *Autor-* als auch *Sach*katalog sein. Man würde

1) irgendwo ein Zentralbureau errichten, das entweder durch direkte internationale Geldbeiträge oder feste Abonnemente auf den Katalog erhalten werden sollte;

2) diesem Bureau würden die Beiträge zum Katalog international zuflieſsen, sei es in Form der Periodica, Monographien etc. selbst oder sei es durch bibliographische Beiträge von Regionalbureaux einzelner Kulturstaaten.

Nach vielen Zustimmungserklärungen ersuchte die „Royal Society“ die brittische Regierung, an alle Regierungen der übrigen Kulturländer, an Indien und die Kolonien Einladungen zu erlassen, die auf den 14. Juli 1896 in London zu eröffnende internationale Konferenz zu beschicken. Dieselbe sollte in erster Linie ein Organisationskomitee ernennen, das Klassifikationssystem und die Sprachen bestimmen, in welchen der Katalog hergestellt werden sollte. Das Komitee der „Royal Society“ hoffte mit Vorschlägen hervortreten zu können. Die Wissenschaften, deren Litteratur katalogisiert werden soll, sollen sein: Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie, Geologie, Zoologie, Botanik, Physiologie und Anthropologie mit Ausschlufs angewandter Wissenschaften wie Ingenieurwesen, Medizin etc. Der Katalog soll sowohl in *Form von Zetteln* („Slips“) als auch in *Buchform* erscheinen und von einem Zentralbureau, das dem internationalen Komitee unterstellt wäre, herausgegeben werden. Die Kosten, soweit sie nicht durch Verkauf oder Abonnemente gedeckt würden, sollen durch einen ebenfalls auf internationalem Wege gegründeten Garantiefundus aufgebracht werden.

Die Konferenz vom Juli 1896 bot ein buntes Gemisch von Vertretern der Wissenschaft, diplomatischen Agenten und Staatsmännern und sehr wenig Bibliographen und erledigte ihre Aufgabe in vier Sitzungen vom 14.—17. Juli. Die grundlegenden Ideen über die Notwendigkeit und Wünschbarkeit eines solchen Katalogs und seiner Leitung durch ein internationales Komitee wurden angenommen. Der Grundsatz der internationalen wissenschaftlichen Mithülfe wurde adoptiert und festgesetzt, dafs der Katalog *nicht blofs den genauen Titel, sondern auch den Inhalt der Arbeiten zu berücksichtigen habe.* Der Katalog sollte in Zettel- und Buchform erscheinen. Das Zentralbureau sollte in London etabliert werden. Als Anfangstermin wurde der 1. Januar 1900 bestimmt. Im allgemeinen bewegte sich ein Teil der Konferenzmitglieder über die Tragweite des Unternehmens in einem glücklichen Optimismus, und zwei Beschlüsse sollten in der Folge sich durch ihre Bedeutung bemerklich machen:

1) dafs das Komitee, welches alle von der Konferenz vorzulegenden und nicht entschiedenen Fragen zu behandeln hatte, lediglich von der „Royal Society“ ernannt werden sollte;

2) dafs die Konferenz beschlofs, keines der verschiedenen, in der letzten Zeit vorgeschlagenen Klassifikationssysteme anzunehmen und die Ausarbeitung der Klassifikationen dem genannten Komitee übertrug.

Wir wollen nicht davon reden, dafs beschlossen wurde, dafs das Englische die Sprache beider Formen des Katalogs sein solle, jedoch scheint es uns, wurde durch die obigen Beschlüsse das Werk von vorneherein nicht auf breite internationale Basis gestellt, was sich bei den Verhandlungen der zweiten Konferenz rächen sollte.

Der *Report of the Comittee of the Royal Society of London with Schedules of Classification* erschien am 30. März 1898, also 20 Monate später und umfafst unzweifelhaft ein gewaltiges Stück Arbeit des genannten Komitees, enthält es doch in extenso den Plan, wie man sich das grofse internationale Werk etwa vorzustellen hat. Die sich interessierenden Länder waren nun in der Lage, ein Urteil zu fällen, und es hat sich die Kritik der Arbeit in vollem Umfang bemächtigt.

Wir müssen uns aber hier auf einige Bemerkungen beschränken. Zunächst ist zu wünschen, dafs für die Systematik der einzelnen Disziplinen Namen und Titelbezeichnungen in lateinischer Sprache gegeben werden, nicht in englischer, denn für die internationale Geltung, die der Katalog beansprucht, ist die Sprache von wesentlicher Bedeutung und in der Systematik sind die allgemein gültigen Bezeichnungen fast durchweg dem Lateinischen entnommen; für die experimentellen Zweige der Naturwissenschaften ist die moderne englische Sprache am Platz. Bei der Ausarbeitung der Instruktionen für die ausführenden Organe mufs verlangt werden, dafs die englischen Mafse überall durch das Dezimalsystem ersetzt oder doch wenigstens die betreffenden Angaben in beiden Systemen gemacht werden. Die Idee, neben der Titelangabe, wenn auch in reduzierter Weise, inhaltliche Angaben anzubringen, scheint uns eine glückliche zu sein, obschon die Ausführung Schwierigkeiten genug bringen mag. Was die einzubeziehenden Wissenszweige anbetrifft, so ist deren unlogische Reihenfolge (*Report* S. 3) zu bedauern, die Abtrennung der Anatomie von der Zoologie zu fordern, fraglichen Wert hat die Aufführung der Kristallographie als eigenes Fach. Von den weittragendsten Folgen ist das allgemeine Einteilungssystem der Wissenschaften, hierüber sind die Meinungen sehr geteilt. Nachdem die Konferenz von 1896 die Ausarbeitung einer eigenen Klassifikation dem Komitee der „Royal Society" (*Report* S. 32, Resolution 28) übertragen hatte, war man auf die Vorschläge der „Royal Society" gespannt. Im wesentlichen enthalten sie auch ein Dezimalsystem für die Einteilung jeder Wissenschaft, lehnen aber das Deweysche System ab. Wir verkennen keineswegs die Gründe, die überhaupt gegen eine solche mechanische Klassifikationsmethode alles menschlichen Denkens und Schreibens vorgebracht werden; andrerseits mufs man jedoch auch zugestehen, dafs eine solche ganz allgemeine Einteilung, die nicht als wissenschaftliche Systematik auftritt, sondern blofs den Charakter einer international gültigen Registratur beansprucht, für die Herstellung internationaler Bibliographien unerläfslich sein wird. Wenn sich doch das Komitee der „Royal Society" an die Dezimaleinteilung anlehnt, so ist nicht ersichtlich, warum nicht das ganze System angenommen wurde, nachdem man dessen Grundideen, d. h. gerade das bestrittenste Element der rein mechanischen

Einteilung, befolgt hat. Die vorgebrachten Abänderungen sind keineswegs glückliche. Indem für jede Disziplin gesondert vorgegangen worden ist, hätte notwendigerweise eine nachherige Überarbeitung der gesamten Schemata noch stattfinden sollen; das DEWEYsche System hat gerade seit der 1896er Konferenz grofse Fortschritte gemacht. Damit im Zusammenhange steht die Frage der Organisation, wo man sich unseres Erachtens an erprobte Einrichtungen anschliefsen oder solche zu assimilieren suchen sollte. Die Organisation regionaler Bureaux ist überaus wichtig, auf ihnen beruht die Ausführung der ersten Arbeit, sowohl der rein mechanischen wie das Ausziehen des Titels als auch der speziellen Inhaltsangabe. Die letztere erfordert Spezialkenntnisse und daher einen ziemlichen Gelehrtenstab, der nicht immer zur Verfügung stehen wird, auch wird die Einheitlichkeit und Gleichmäfsigkeit der Inhaltsangaben schwer zu erreichen sein.

Was die finanzielle Tragweite des Unternehmens anbetrifft, so halten wir vorerst dafür, dafs die im *Report* S. 18 angegebenen Ziffern der Litteratur verschiedener Fächer vielfach zu niedrig sind, z. B. wurden für Botanik 4000 Arbeiten angegeben, während die Anzahl der Referate über botanische Schriften im *Botanischen Jahresbericht* sich 1890—1895 zwischen 5300 und 4700 bewegt; wirkliche Vollständigkeit würde wohl 5000 Titel ergeben. Für Zoologie nennt der *Report* die Ziffer 5000, überdies fehlt jede Erwähnung der Anatomie, man berechnet aber jährlich 8000 Titel für Zoologie allein und noch 3500 für Anatomie. Eine Erhöhung der Gesamtzahl der Titel ist daher wahrscheinlich und ziemlich sicher, da man sich erfahrungsgemäfs hierüber gerne täuscht. Dies führt natürlich zur Steigerung der Kosten.

Die II. Konferenz wurde vom 11.—13. Oktober 1898 in London abgehalten. Nicht vertreten waren diesmal im Gegensatz zur I. Konferenz Dänemark, Griechenland, Italien, Kanada und Neu-Süd-Wales. Die wesentlichsten Beschlüsse sind:

1) Die Konferenz hält an dem Prinzip der Publikation sowohl eines Karten- als auch eines Buchkatalogs fest.

2) Die Grenzen für die Geographie als wissenschaftliches Fach wurden festgestellt und die politische wie auch allgemeine Geographie ausgeschlossen.

3) Die zu bearbeitenden Wissenschaften sind: Mathematik, Astronomie, Meteorologie, Physik, Kristallographie, Chemie, Mineralogie, Geologie inklusive Petrologie, Mathematische und Physische Geographie, Paläontologie, Anatomie, Zoologie, Botanik, Physiologie eingeschlossen Pharmakologie und experimentelle Pathologie, Bakteriologie, Psychologie und Anthropologie; jede dieser Wissenschaften erhält ihr besonderes Symbol.

4) Es sollen erste Zettel *(primary Slips)* und Titelangaben und Inhaltsangaben hergestellt werden. Die Registriersymbole sollen auf einem

zweckmäfsig kombinierten System von Buchstaben, Zahlen und andern Symbolen beruhen. Der Entscheid bleibt einem zu ernennenden Komitee vorbehalten, welches bis 31. Juli 1899 einen Bericht herausgeben soll. Von den Delegierten wird gewünscht, dafs sie in ihren Ländern die Einsetzung von Lokalkomitees veranlassen und darüber wie auch über die finanzielle Beteiligung innerhalb sechs Monaten Rapport abstatten. Dem internationalen Komitee werden alle Fragen, welche die Konferenz nicht zu entscheiden wagte, zugewiesen, so die Organisation der Herausgabe des Buchkatalogs. Regeln für die Revision der Beschlüsse über das Zentralbureau werden fixiert

Interessant ist der finanzielle Rapport über das Unternehmen, erstattet von Prof. Rücker (*Report*, II. Konferenz S. 97). Die Kosten des Buchkatalogs werden bei 1000 Exemplaren auf 5600 £ berechnet; als niedrigste Subskribentenzahl sei 350 vorausgesetzt, so kommt das Exemplar per Jahr auf 16 £ = 400 fr. = 320 Mark. Ferner sind 3000 £ per Jahr für den I. Kartenkatalog notwendig, 130 komplette Subskriptionen à 16 £ werden hier genügen; weitere 3000 £ sind für den *Secundary-Slip*-Katalog notwendig. Für 1 Franken erhält der Subskribent 133, für 1 Mark oder einen Schilling 160 Zettel. Es sollen wenigstens fünf Jahre Probezeit vorgesehen sein. Für diese Zeit sollte ein Garantiefonds von 40 000 £ = 800 000 Mark = 1 000 000 fr. zugesichert sein; derselbe würde aber kaum gebraucht werden, wenn die Unternehmung nur irgend wie Erfolg hat. Denke man sich z. B. zehn Partialen, davon sieben unter die Grofsmächte, für die kleineren Staaten zwei, für die Kolonien einen, so könnte das Kapital auf diese Weise aufgebracht werden. Die meisten Delegierten äufserten sich aber sehr vorsichtig hierüber. Allgemein war man jedoch der Ansicht, dafs die Beteiligung wesentlich davon abhängig sei, wie das internationale provisorische Komitee seine Aufgabe löse.

Der *Report* dieses Komitees wurde am 5. August 1899 fertig. Von den Ländern Österreich, Belgien, Frankreich, Deutschland, Niederlande, Schweden, Schweiz und den Vereinigten Staaten waren in Anlehnung an die Resolution 21 des Reports von 1898 Berichte eingelangt. Eine Diskussion fand statt über die von Deutschland wegen der Beteiligung gestellten Bedingungen:

1) Wegfall der sachlichen Nachweise („subject entries"),

2) jeder Titel soll nur an einer Stelle aufgeführt werden,

3) der sachlich geordnete Teil der Buchausgabe soll lediglich aus Titeln zusammengestellt werden und zwar unter Voranstellung des Namens des Verfassers.

4) *Die Zettelausgabe fällt als offizieller Teil des Unternehmens weg.*

5) Beitrittserklärung auf fünf Jahre.

Das Komitee beschlofs in Übereinstimmung hiermit:

1) *Die Zettelausgabe wird verschoben.*

2) Jeder Titel soll nur dann mehrmals aufgeführt werden, wenn sein wissenschaftlicher Inhalt es erfordert. Die ganze Frage mufs vom Zentralbureau nach Erfahrungen bestimmt werden.

Darauf gaben die englischen Mitglieder eine Erklärung ab, die hauptsächlich darin bestand: Die Bedingungen für die Beteiligung Deutschlands differieren so wesentlich von den Vorschlägen der zwei bisherigen Konferenzen, dafs die Delegierten ohne die „Royal Society" gehört zu haben, nicht zustimmen könnten. Der Wert des Katalogs werde so verändert, dafs die finanzielle Seite in Frage gestellt sei. Obwohl sie die Gründe wohl begreifen, welche Deutschland veranlafst haben, so vorzugehen, so seien dieselben nicht für alle Länder gleich stichhaltig. Die Einwendungen ihrerseits wären geringer, wenn die regionalen Bureaux die Freiheit erhielten, modifizierte Titel mit Inhaltsangaben herzustellen. Auf alle Fälle sei es nicht sicher, dafs die „Royal Society" mit den Vorschlägen Deutschlands einverstanden sei, auch sei der amerikanische Delegierte leider verhindert, teil zu nehmen, dessen Meinung müsse aber beigebracht werden, auch wäre es gut, wenn die deutsche Regierung von der Sachlage informiert werde.

Die Konferenz beschlofs ferner, dafs besondere Schemata für folgende Wissenschaften ausgearbeitet werden sollten:

A. Mathematik. B. Mechanik. C. Physik. D. Chemie. E. Astronomie. F. Meteorologie (einschliefslich Erdmagnetismus). G. Mineralogie (einschliefslich Petrologie und Kristallographie). H. Geologie. I. Mathematische und physikalische Geographie. K. Paläontologie. L. Allgemeine Biologie. M. Botanik. N. Zoologie. O. Menschliche Anatomie. P. Physikalische Anthropologie. Q. Physiologie (einschliefslich Psychologie, Pharmakologie und experimentelle Pathologie). R. Bakteriologie. — Jede Wissenschaft erhält den beigesetzten Registraturbuchstaben.

Die vorliegenden Schemata für Physik, Mineralogie, Petrologie, Kristallographie, Geologie, Paläontologie, Geographie, Botanik, Zoologie und Physiologie wurden sogleich angenommen.

Die Schemata für Mathematik, Mechanik, Allgemeine Biologie, Chemie, Menschliche Anatomie, Psychologie, Bakteriologie, Physikalische Anthropologie, Astronomie und Meteorologie wurden zur Revision einzelnen Komitees überwiesen mit dem Auftrag, die Schemata vor Ende September 1899 der „Royal Society" zuzusenden. Eine allgemeine Einleitung zu allen Wissenschaften wurde ebenfalls beschlossen.

Bezüglich der angewandten Wissenschaften wurde ausgemacht, dafs Technisches von wissenschaftlichem Interesse unter die sachbezüglichen

Überschriften aufgenommen werden solle, ebenso soll ein allgemeiner Index aller verwendeten Journale mit den als Referenzen gebrauchten Abkürzungen schon mit der ersten Katalogausgabe gegeben werden, jährliche Supplemente und eine alle fünf Jahre sich wiederholende Neuausgabe dieser Liste werden vorgesehen.

Zu jeder Wissenschaft soll jedes Jahr ein Band erscheinen, wünschenswert für einzelne Wissenschaften wäre eine zweimonatliche oder vierteljährliche Ausgabe.

Bezüglich des Zentralbureaus wurde der „Royal Society" die Organisation desselben überlassen, jedoch soll dasselbe, sobald das internationale Komitee gesichert ist, sich mit demselben in Verbindung setzen.

Hier brachten die englischen Mitglieder nun die finanzielle Seite des Unternehmens zur Sprache. Ohne dafs ein Kapital von 10 000 £ = 200 000 Mk. = 250 000 fr. für fünf Jahre gesichert sei, könne gar nicht an den Beginn des Unternehmens gedacht werden. Man habe sich gefragt, ob hierfür die „Royal Society" die Verantwortlichkeit übernehmen wolle, aber auch das würde nicht viel Zeit gewinnen lassen, darum schlagen die englischen Mitglieder vor, dafs, wenn die im provisorischen internationalen Komitee vertretenen Regionen zu den Vorschlägen desselben zugestimmt haben, diese Vorschläge den Ländern zugestellt werden, welche an der letzten Konferenz vertreten waren, mit der Frage, ob dieselben ihrerseits die regionalen Bureaux organisieren und anticipando schon ihre Vertreter für das internationale Komitee vor dem Zusammentritt der nächsten Konferenz ernennen wollen. Diesem Internationalen Komitee würden dann alle prinzipiellen Verantwortlichkeiten zugewiesen. Die „Royal Society" würde ihrerseits vorbereitende Anträge sammeln und sie dem Internationalen Komitee vorlegen. Am angenehmsten scheint der Weg zu sein, von Seite jedes Regionalbureaus auf eine gewisse Anzahl von Exemplaren zu abonnieren. Verschiedene Schätzungen gehen dahin, dafs die verhältnismäfsige Kontribution der Regionalbureaux erster Reihe zwischen $^1/_8$ und $^1/_{10}$ aller Kosten der Buchausgabe sein werden. Dieser Betrag wurde jährlich auf 5600 £ ausgerechnet, also macht jene Summe 700 £ oder 560 £ per Jahr aus und wenn als niedrigste Schätzung 350 vollständige Subskriptionen zu 16 £ angenommen werden, so wäre der Anteil 44 oder 35 komplete Abonnemente. Der Kartenkatalog wird zweifelsohne fallen, er kann durch die zweimonatliche oder vierteljährliche Ausgabe ersetzt werden, auch ist die allgemeine Ansicht die, dafs die Zahlen, auf welcher der erste finanzielle Vorschlag beruhte, zu niedrig seien. Neue Voranschläge sollen im Laufe des Herbstes aufgestellt werden. Aufserdem sind noch andere Punkte zu betrachten:

1) Wird es notwendig sein das Zentralbureau und seine Beamten

einige Monate vor dem Beginne der Katalog-Periode zu ernennen. Die dazu notwendigen Mittel werden auf 2500 £ = 50 000 Mk. = 62 500 frcs. geschätzt und sind im obigen finanziellen Status nicht eingeschlossen.

2) Weiter erwachsen den Vertretern der „Royal Society“ ernsthafte Verantwortlichkeiten, denn

a) wenn die Subskriptionen am Ende und nicht am Anfang des ersten Jahres bezahlt werden, so mufs Geld entlehnt werden, dessen Zinsen das Unternehmen belasten werden, ferner

b) wenn einzelne Länder sich weigern Regionalbureaux zu errichten, so mufs ihre Litteratur vom Zentralbureau erworben werden, Kosten, deren Betrag man aber nicht zu schätzen vermag. Daher soll voller Nachdruck auf die Organisation dieser regionalen Bureaux gelegt werden.

Den englischen Delegierten wurde zugedacht:

1) die vom Komitee genehmigten Schemata so rasch als möglich wieder zu drucken und auszugeben,

2) einen amendierten Kostenvoranschlag für den Katalog vorzubereiten,

3) ein vollständiges, auf die Beschlüsse der zwei Konferenzen und dieses Komitees basierendes Programm herauszugeben,

4) alle diejenigen Länder zu informieren, deren Mitwirkung gewünscht wird.

Ferner kam man überein, zu empfehlen:

1) dafs eine Schlufskonferenz um Ostern 1900[1]) abgehalten werden solle,

2) dafs die dieser Konferenz beiwohnenden Delegierten mit voller Vollmacht über finanzielle und andere Fragen ausgerüstet sein sollen und dafs

3) alle die für das internationale Komitee Gewählten auch an diese Konferenz delegiert werden sollen. Endlich wurde man darüber einig, dafs die Mitglieder des Komitees die Ermächtigung von ihren Regierungen erhalten sollen, direkt mit der „Royal Society“ in Katalogsachen in Verbindung treten zu dürfen.

---

1) Soeben sind die Einladungen zur Schlufskonferenz auf den 12. Juni 1900 eingetroffen.

Kleine Mitteilungen.

Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu München, 17.—23. September 1899.

Die günstige Lage des Versammlungsortes und das reichhaltige Programm hatten bewirkt, dafs sich zur letzten Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, über welche auf Wunsch des Herrn Herausgebers der Bibliotheca Mathematica im Folgenden kurz berichtet werden soll, im ganzen gegen 80 Fachgenossen einfanden, und dafs dieselben — so weit sich das beurteilen läfst — im allgemeinen von dem Verlaufe des Kongresses befriedigt waren; nicht wenig trug zum guten Gelingen der Versammlung in geselliger Beziehung die gastliche Aufnahme seitens der Münchener Kollegen bei.

Eröffnet wurde die Versammlung durch die Begrüfsungen der Herren Bauer und Noether. Ersterer, als Einführender der mathematischen Abteilung der Naturforscherversammlung, zeichnete in knappen Zügen die Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert, während Herr Noether, der derzeitige Vorsitzende der Vereinigung, an die Begründung der letzteren, ihren Aufschwung und die Bedeutung ihrer Unternehmungen, besonders der wissenschaftlichen Referate erinnerte.

Das auf der Versammlung erledigte *Programm* umfafste folgende Vorträge und Referate:

a) Allgemeines:

1. Engel, Nachruf auf Sophus Lie.
2. Berichte betreffs der Dezimalteilung der Winkel- und Zeitgröfsen von Mehmke, Bauschinger und Schülke.
3. Referat und Korreferat über den mathematischen Hochschulunterricht auf Grund der neuen preufsischen Prüfungsordnung von H. Weber und G. Hauck.
4. Noether, Über Riemanns Vorlesungen von 1861/62 über Abelsche Funktionen.

b) Arithmetik, Algebra:

5. Hilbert, Über den Zahlbegriff.
6. Gordan, Über die symmetrischen Funktionen.
7. Gordan, Über homogene Funktionen.

c) Analysis:

8. Schimpf, Einführung eines Mafses der Konvergenz in die Lehre von der Konvergenz der unendlichen Prozesse.
9. Lerch, Arithmetisches über unendliche Reihen.

10. Horn, Divergente Reihen in der Theorie der Differentialgleichungen.
11. v. Weber, Eine fundamentale Klassifikation der Differentialprobleme.
12. Hensel, Über die analytisch-arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen.

d) Variationsrechnung:

13. Hilbert, Über das Dirichletsche Prinzip.
14. Sommerfeld, Bemerkungen zur Variationsrechnung.
15. Sommer, Über Eigenschaften quadratischer Mannigfaltigkeiten in höheren Räumen.

e) Geometrie:

16. Engel, Über zwei merkwürdige Gruppen des Raumes von fünf Dimensionen.
17. Zindler, Über Komplexkurven und ein Theorem von Lie.
18. Doehlemann, Über hyperboloidische Gerade.

f) Mengenlehre:

19. Schoenflies, Über einen Satz der Mengenlehre.

g) Mechanik u. ä.:

20. v. Brill, Über ein Beispiel von Herrn Boltzmann zu Hertz' Mechanik.
21. Study, Die Geometrie der Dynamen.
22. Heun, Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik.
23. Boltzmann, Über die Entwickelung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit.

Die Vorträge 1—22 wurden in Fachsitzungen bezw. gemeinschaftlichen Sitzungen verwandter Abteilungen gehalten, während Herr Boltzmann seinen Vortrag 23 in einer allgemeinen Sitzung der Naturforscherversammlung hielt.

Selbstverständlich kann in einem *kurzen* Bericht nicht auf die einzelnen wissenschaftlichen Vorträge eingegangen werden; nur den zwei behandelten Fragen von *allgemeinerem* Interesse mögen hier noch einige Worte gewidmet werden.

Namens der vor zwei Jahren eingesetzten „Tafelkommission" gab Hr. Mehmke einen Bericht über die Dezimalteilung des Winkels, der zu dem Ergebnis kam, daſs vom mathematischen und geodätischen Gesichtspunkte aus die Zentesimalteilung des Quadranten und die dezimale Unterteilung des Neugrades als Einheit zu wählen sei. Hieran schloſs sich ein Gutachten des Herrn J. Bauschinger, welches vom Standpunkte der Astronomie und Nautik eine Änderung der jetzigen Winkelteilung rundweg ablehnte, da die bei allen Kulturvölkern vorhandene Übereinstimmung der Einheiten höher zu schätzen sei als die unbedeutenden Vereinfachungen, die durch die neue Einteilung sich erzielen lassen; allenfalls könne man da, wo es zweckmäſsig sei, den jetzigen Grad dezimal teilen. Für diesen letzteren Ausweg trat besonders lebhaft Herr Schülke ein, der schon lange in diesem Sinne wirkt, indem er als wesentliches Moment u. a. hervorhob, daſs eine nicht zu unterschätzende Erleichterung des Gymnasialunterrichts dadurch erzielt werden würde. — In völliger Einigkeit war übrigens von allen Referenten eine Änderung der Zeiteinteilung abgelehnt worden. An diese Referate knüpfte sich eine eingehende Diskussion, in der die Mehrzahl der Redner jedenfalls den jetzigen Grad beizubehalten wünschten, und die schlieſslich in einem Antrage des Herrn F. Klein und der einstimmigen Annahme desselben ihren Abschlufs fand, dahingehend: Der Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung solle über die Diskussion einen Bericht verfassen und ihn im Namen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte dem Herrn Reichskanzler unterbreiten, mit dem Ersuchen, den geplanten internationalen Kongrefs zu Paris durch Sachverständige zu beschicken, die sich im Sinne des Berichtes allseitig zu informieren haben.

Dieser Bericht wird in voller Ausführlichkeit im Jahresbericht VIII der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erscheinen.

Dem Interesse, welches die vorstehende Diskussion beanspruchte und noch weiterhin finden wird, stand das an der Debatte über den mathematischen Hochschulunterricht auf Grund der neuen preufsischen Prüfungsordnung in keiner Weise nach. Durch diese Prüfungsordnung für das höhere Lehramt, welche inzwischen auch in anderen deutschen Staaten zur Einführung gelangt ist, wird für den mathematischen Hochschulunterricht, speziell an den Universitäten, eine ganz neue Sachlage geschaffen, insofern nämlich neben der bisherigen Facultas für die „reine" Mathematik auch eine solche in der „angewandten" Mathematik von den Lehramtskandidaten erworben werden kann. Dahin zählen die darstellende Geometrie, niedere und höhere Geodäsie nebst Ausgleichungsrechnung und technische Mechanik — alles Gebiete, für welche bisher an den Universitäten fast ausnahmslos weder Lehrkräfte noch Lehrmittel vorhanden sind. Angesichts dieser ganz eigenartigen Situation war eine Aussprache über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts an den Universitäten durchaus angezeigt, und die Darlegungen der Herren Weber und Hauck, welche auf Anregung des Vorstandes das Referat bezw. Korreferat übernommen hatten, fanden daher ein sehr aufmerksames Auditorium. Es knüpften sich daran noch zwei Vorträge der Herren Rudel und Schotten über verwandte Themata, doch wurde die Diskussion auf die Referate der Herren Weber und Hauck beschränkt, in der richtigen Erkenntnis, dafs die wichtige Frage des Hochschulunterrichts nicht mit anderen verquickt werden darf.

Herr Weber brachte seinen Standpunkt in folgenden Thesen zum Ausdruck:

1. Die Anwendungen der Mathematik sind in möglichst enge und lebendige Verbindung zu setzen mit den theoretischen Studien.

2. Es mufs an allen Universitäten den Studierenden die Möglichkeit geboten werden, die darstellende Geometrie als Hilfsmittel hierzu kennen zu lernen.

3. Wo es möglich ist, ist eine auf gegenseitigem Entgegenkommen beruhende Mitwirkung der Technischen Hochschulen anzustreben.

4. Thunlichst an allen Universitäten sind die Fächer, die der § 22 der neuen preufsischen Prüfungsordnung verlangt, in den Unterrichtsplan für die Kandidaten des höheren Lehramtes aufzunehmen.

5. Unbeschadet des Generalsatzes, dafs das Examen in verwandten Fächern möglichst in einer Hand liegen soll, ist zu erstreben, dafs das Examen in den Hauptfächern durch den Universitätslehrer den Kandidaten selbst abgenommen werde.

Herr Hauck ging in seinem Korreferat in die Einzelheiten der neuen Unterrichtsfächer ein und gab äufserst wertvolle Ratschläge, wie den aufserordentlichen Schwierigkeiten abgeholfen werden könne, die sich durch Einführung der neuen Fächer in das Lehrgebiet der Universitäten ergeben, und erörterte, in welchem Umfange etwa nach Zeit und Stoff die Zweige der angewandten Mathematik vorgetragen und examiniert werden sollten.

In der Diskussion trat durchweg eine grofse Übereinstimmung der Ansichten mit dem Inhalte der Referate hervor, nur Herr Study brachte einen abweichenden Standpunkt zum Ausdruck. In den Referaten wie in der Diskussion war die neue Prüfungsordnung als die gegebene Grundlage aufgefafst worden; im Gegensatz hierzu übte Herr Study eine scharfe Kritik an derselben. Indessen können wir an dieser Stelle nicht weiter auf Einzelheiten eingehen, ohne der Publikation des Jahresberichtes vorzugreifen, auf den wir wiederum verweisen müssen.

Auch hinsichtlich der weiteren Vorgänge, z. T. mehr interner Natur, mufs auf die angegebene Stelle hingewiesen werden. — Die nächste Jahresversammlung wird im September 1900 zu Aachen stattfinden.

Jena. A. Gutzmer.

Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences à Boulogne-sur-Mer, 14—21 septembre 1899.

Les deux premières sections (mathématiques, mécanique, astronomie) de l'Association française pour l'avancement des sciences étaient présidées en 1899 par M. E. Collignon, qui faisait lui-même deux communications, savoir *Sur la durée du parcours des tangentes et des normales aux courbes sous l'action de la pesanteur*, et *Sur la construction de tours équidistantes destinées à la transmission de signaux optiques*.

Parmi les autres communications il convient de signaler:

L.-A. Feret, Etude graphique de la flexion des prismes imparfaitement élastiques.
Fontaneau, Sur l'intégration des équations de l'Hydrodynamique.
C.-A. Laisant, Aire d'une courbe gauche.
E.-M. Lémeray, Sur certains nombres combinatoires.
E. Lemoine, Comparaison géométrographique de neuf solutions d'un même problème.
E. Maillet, Sur les groupes échangeables et les groupes décomposables.
Pellet, Sur les cyclides.
Pellet, Sur le mouvement général d'une figure plane dans son plan.
E. Perrin, Sur deux porismes de Chasles.

M. Frolow avait envoyé une *Note sur la géométrie non-euclidienne*, où il prétendait avoir signalé des contradictions dans la géométrie de Lobatchewsky, et à ce sujet M. Collignon soutenait la possibilité d'une démonstration élémentaire de l'existence géométrique du rectangle.

M. Monteil avait commencé une réfutation de l'hypothèse de l'attraction Newtonienne, mais, au cours de la séance, il retira sa communication.

Le 16 septembre 1899 eut lieu une excursion à Dover dont le but était de se mettre en rapport scientifique avec la „British association", qui y tenait alors sa session. Cette visite fut rendue le 21 septembre par les membres de la „British association".

Le prochain congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences se tiendra en 1900 à Paris, probablement en août ou en septembre.

Mathematics at the meeting of the British Association at Dover, 1899.

The mathematical gathering in connexion with this year's meeting of the British Association was held on Monday September 18, at Dover College, under the presidency of Prof. A. R. Forsyth (Cambridge University).

The meeting first considered the reports of two committees, which had been appointed to superintend the construction of mathematical tables. The first of these committees is publishing tables of certain functions of definite integrals connected with statistical problems, notably the integral

$$\int_0^\pi \sin^n \Theta \, e^{v\Theta} d\Theta .$$

The second committee has prepared a set of tables shewing the solutions of the congruence of $2^x \equiv R \pmod m$ for all moduli less than 1000 which are primes or powers of primes. These tables are on the same plan as Jacobi's *Canon Arithmeticus,* differing therefrom only in that the same base 2 is used throughout, whereas Jacobi uses a primitive root of each prime as base. These tables will not appear in the Association Report, but are to be published as a separate volume.

Dr. Francis Galton then read a paper describing a method for estimating mathematically the most suitable amount of money to be granted for any purpose, when there is a difference of opinion among the members of the committee which has to decide the matter. The amount is calculated from two data, namely the percentage of voters who think that the sum ought to be less than one amount A, and the percentage who think that it ought to be more than another fixed amount B.

Prof. Forsyth communicated two papers, one dealing with certain definite integrals which have invariantive properties for systems of parallel surfaces, the other describing some properties of the discriminant of an ordinary differential equation of the first order.

Professor A. C. Dixon (Queen's College, Galway) read a paper *On the partial differential equation of the second order,* in which the existence of a certain series of solutions of the equation is made to depend on the research of a function u, whose differential du is a linear combination of the differential expressions used in Hamburgers method of solution.

Dr. Irving Stringham (University of California), in a paper *On the fundamental differential equations of geometry,* shewed how the fundamental equations of non-Euclidian measurement can be derived, by integrating equations which express the validity of Euclidian geometry in any infinitesemal domain.

Mr E. T. Whittaker (Trinity College, Cambridge) gave a general description of his *Report on the problem of three bodies,* which occupies 40 pages of the British Association Report this year. In the *Report,* all memoirs published since 1868 are reviewed, which have developed the Problem of three bodies from the mathematical point of view; in this period, the subject has been almost transformed beyond recognition by the labours of Newcomb, Hill, Bruns, Poincaré, and Gyldén and his disciples.

Papers by Prof. E. O. LOVETT (Princeton University) on *An application and interpretation of infinitesimal transformations*, and by Lieut.-Colonel CUNNINGHAM *On FERMAT's numbers*, were communicated by title at the close of the session.

Cambridge. E. T. WHITTAKER.

Meeting of the American Association for the Advancement of Science at Columbus, 1899.

The above Association held its annual meeting at Columbus, Ohio, from 21st to 26th August 1899. There are nine sections, and section A is devoted to mathematics and astronomy. At the present time the constitution of the Association is being modified in order to better suit the conditions of the country, which is one of great distances. The organization of the sections has been of too temporary a character, and the papers read before them have rarely been printed excepting in the form of a brief abstract; consequently, in the case of most of the sciences, an independent Society has sprung up with a more permanent organization and better facilities for printing valuable papers. In the province of section A there are now the *American mathematical society*, and the *American astronomical and astrophysical society*. These Societies find it convenient to hold their summer meeting at the same time and place as the sections; and the problem before the Council of the Association is to make arrangements so that the sections may not hinder but help one another. Section B and the American chemical society appear to have devised a successful arrangement; and it is likely to become general.

At the Columbus meeting there were 14 papers on the programme of section A, and several of these are of interest to the readers of Bibliotheca Mathematica. The address of the president, Prof. MACFARLANE, was on „The fundamental principles of algebra“ and contained an historical and critical review of the several advances made within the century. He maintained the thesis that algebra is generalized, not by arbitrary choice of rules, nor by arbitrary extension of the rules for integer number, but by founding it on the properties of space. It has been printed in Science. Two reports were presented; one by Prof. HALSTED on progress in non-euclidean geometry, the other by Dr. L. E. DICKSON on progress in the theory of linear groups; the former has been printed in Science, the latter in the Bulletin of the American mathematical society. Papers were contributed by Prof. COLLINS on GRASSMANNS proof that there can be but two kinds of lineal multiplication of two vectors; Dr. G. A. MILLER on the commutators of a group; Prof. KIMURA on the linear vector functions; Prof. STOKES on the theory of mathematical inference, in which he shows the utter inadequacy of nominalism, and explains the synthesis in mathematical propositions not by formal logic or a calculus of equivalent statements but by the necessity of the matter, the logic of real relations. An elaborate paper by Prof. FESSENDEN was read in joint session with the section of physics; it was entitled *The determination of the nature of electricity and magnetism including a determination of the density of the ether*. The theoretical part of the paper was based on the theory of dimensional equations; by introducing the data furnished by experimental physics, he was able to deduce an approximate value for the density of the ether.

The meeting of the Association next year will be in New York City, the last week of June. The president of the Association will be a mathematician — Prof. R. S. WOODWARD of Columbia University, and the president of section A will be an astronomer — Prof. ASAPH HALL jr. of the University of Michigan.

Gowrie Grove, Chatam (Ontario), Canada. ALEXANDER MACFARLANE.

Le congrès international des mathématiciens à Paris (6—12 août 1900).

Dans sa réunion de Zürich (9—11 août 1897), le congrès international des mathématiciens décida de siéger à Paris en 1900 et il confia à la Société mathématique de France le soin d'organiser cette solennité scientifique. Nous nous proposons de donner ici un aperçu des résultats acquis en disant tout d'abord un mot sur le fonctionnement du comité d'organisation dont M. POINCARÉ est actuellement le président. Ce comité se compose de deux commissions: la commission *administrative* dont MM. LAISANT et E. DUPORCQ sont sécrétaires et la commission *des travaux* dont M. NIEWENGLOWSKI s'occupe.

Les adhésions reçues jusqu'à présent sont au nombre d'environ un millier en tant que membres congressistes et elles se répartissent de la sorte par nationalité:

Allemagne	140	adhérents	probables
Autriche-Hongrie	44	"	"
Belgique	20	"	"
Etats-Unis	25	"	"
France	276	"	"
Grande-Bretagne	80	"	"
Italie	180 à 200	"	"
Russie	45	"	"
Suède et Norvège	15	"	"
Suisse	46	"	"

Les autres pays figurent sur la liste pour un chiffre inférieur à *dix*. Il y a en outre près de 680 personnes qui, sans prendre une part effective au congrès, accompagneront les savants à Paris comme membres de leur famille. Enfin le gouvernement du Japon a accepté officiellement l'invitation du comité et enverra des délégués.

Relativement aux communications voici les résolutions adoptées. Les travaux du congrès seront classés de la sorte: 1ère section, *Arithmétique et Algèbre;* 2e, *Analyse;* 3e, *Géométrie;* 4e, *Mécanique, Mécanique céleste et Physique mathématique;* 5e, *Bibliographie et Histoire;* 6e, *Enseignement et Méthodes.* Quant à la tenue du congrès lui-même notons-en rapidement l'économie. Deux séances générales auront lieu l'une probablement dans le Palais des congrès, à l'Exposition Universelle, l'autre à la Sorbonne. A la séance d'ouverture, M. MORITZ CANTOR doit prendre la parole sur *L'historiographie des mathématiques* et M. VITO VOLTERRA sur *Trois analystes italiens,* BETTI, BRIOSCHI *et* CASORATI. A la séance de clôture, M. MITTAG-LEFFLER exposera *l'œuvre de* WEIERSTRASS et M. POINCARÉ traitera *Du rôle de l'ir*[illegible] *et de la logique en mathématiques.* L'horaire des travaux de sections s[illegible]érieurement mais dès maintenant s congressistes peuvent annoncer leur communication à qui de droit. Enfin s décisions d'ordre purement administratif (cotisations, réductions sur les hemins de fer, etc.) sont indiquées dans une circulaire que le président de la ociété mathématique de France a envoyé déjà à tous les intéressés. D'autre part allemand, l'anglais, le français et l'italien seront les seules langues officielles.

Paris. JACQUES BOYER.

Le Congrès d'histoire des sciences à Paris (23—28 Juillet 1900).

Ce congrès, constitué comme cinquième section du congrès international l'histoire comparée, a pour but de créer un centre de relations entre les peronnes qui s'intéressent à l'histoire des sciences, de faire ressortir combien il nporte de ne pas isoler les différentes branches de cette histoire, enfin d'étudier es moyens d'accroître l'activité des recherches fondées sur des documents originaux.

Les adhésions doivent être adressées au secrétariat général du congrès 'histoire comparée (Boulevard Raspail 10, Paris) ou au secrétariat de section l'histoire des sciences (Rue Saint Dominique 124, Paris); la cotisation est fixée 20 francs. La langue officielle du congrès est le français, mais les communiations, dont la durée est limitée à quinze minutes, peuvent être faites aussi n allemand, en anglais et en italien.

Le président du comité d'organisation est M. PAUL TANNERY; parmi les nembres du comité il convient de signaler MM. G. DARBOUX, A. LAUSSEDAT et . TANNERY. Le comité a proposé un certain nombre de question, entre autres es suivantes: Origine des chiffres modernes: questions relatives à BOÈCE et à ERBERT. — Histoire de l'Astrologie; en particulier, de l'influence que ses octrines ont exercée sur le développement de l'Astronomie. Astrologie et stronomie des peuples d'Extrême Orient. — Histoire de l'établissement des nités de mesure. — Recherches sur les instruments mathématiques (pour l'arentage, l'astronomie, la mesure du temps, etc.), employés pendant le Moyenge et la Renaissance jusqu'à l'invention des lunettes astronomiques et la écouverte du pendule. — Histoire des divers méridiens employés comme origines es longitudes. — Histoire de la division géographique en climats. — Histoire e l'établissement des principes de la dynamique.

Il est à regretter que cet intéressent congrès ne soit pas tenu deux seraines plus tard; en ce cas il aurait été possible aux membres du congrès des athématiciens d'y assister, sans être contraints de venir deux fois à Paris ou 'y rester inutilement toute une semaine. G. ENESTRÖM.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“.

1:12. Le mot ἐπιδεύτερος n'est pas usité en grec, où le rapport $1^1/_2$ st exclusivement désigné par le terme ἡμιόλιος.

1:22. Le Fayoum n'est point dans l'Egypte du sud, mais bien dans la loyenne-Egypte. C'est la contrée où se trouve le lac Moeris.

1:29. Au lieu du renvoi au 41e chapitre du Tome II, viser le Tome ..., p. 470, sur le papyrus d'Achmîm.

1:34. En réalité la suite de quantièmes du No. 23 du papyrus Eisenlohr doit être complétée pour former comme total $\frac{2}{3}$, et non 1.

1:103. Perigenes (nom d'un auteur qui aurait écrit sur la mathématique en Chaldée) est certainement une fausse lecture pour Epigenes (de Byzance), lettré qui a dû vivre vers la seconde moitié du 2e siècle av. J. C. A cette date, *mathématique* commençait, chez les Grecs, à signifier exclusivement l'astrologie. Sur cet Epigène, voir Paul Tannery, Revue de philologie, 21, 1897, p. 191 et suiv. — Quant à l'ouvrage de Jamblichus, sur la *Théologie chaldéenne*, Zeller ne dit point et rien absolument n'indique qu'il y fût parlé de mathématiques. P. Tannery.

1:135. Comme signification possible pour l'*Hypotyposis der Geometrie* attribuée à Anaximandre par Suidas, il y a lieu de tenir compte de la conjecture d'après laquelle il s'agirait simplement de la mappemonde exécutée par le Milésien. Voir P. Tannery, *La Géométrie grecque*, p. 74 note.

1:190. La mauvaise plaisanterie sur la quadrature du cercle et les nombres cycliques carrés n'a pas de date assignable avant Alexandre d'Aphrodisias (vers 200 ap. J.-C.), d'après lequel Simplicius l'a reproduite. P. Tannery.

1:197 Comme source pour ce qui concerne les lunules d'Hippocrate, le renvoi devrait être fait, non pas à l'édition des *Eudemi fragmenta* de Spengel, mais à celle de Simplicius *in Aristotelis Physicorum libros quattuor priores*, par Diels (Berlin 1882, p. 54—69, et *Appendix*, p. XXIII—XXXI), la première qui présente une distinction raisonnée entre ce qui appartient à Eudème et ce qui provient d'autres sources, comme, par ex. la construction de la figure 30 der *Vorlesungen*, que Simplicius a empruntée à Alexandre d'Aphrodisias, et qui peut remonter aux *Pseudaria* d'Euclide. P. Tannery.

1:202. Platon, dans le *Théétète*, représente Théodore de Cyrène comme enseignant à Athènes du temps de Socrate; on ne peut donc guère admettre le récit d'après lequel Platon aurait été attiré à Cyrène, après la mort de Socrate, par la célébrité du géomètre Théodore. P. Tannery.

1:284. Sur les monnaies de Sélinonte, on peut voir des représentations de la feuille du *Selinon*, qui ressemblent bien à la figure archimédienne.

1:321. Le plan sécant, dans la théorie des coniques d'Apollonius, n'est point nécessairement perpendiculaire au triangle par l'axe; mais, sur le plan de la base circulaire du cône, les traces du plan sécant et du plan par sont perpendiculaires l'une sur l'autre. L'erreur que je signale se perpétue depuis CHASLES, auquel en remonte la responsabilité. P. TANNERY.

1:383. Le DIONYSODORE d'Amisus, mentionné par STRABON, doit différer de celui dont parle PLINE et qui était de Mélos. — Depuis l'édition critique de SERENUS, procurée par HEIBERG (Leipzig, Teubner, 1896), on sait que ce mathématicien était d'Antinoupolis en Egypte, donc postérieur à l'empereur HADRIEN. P. TANNERY.

1:400. Le dialogue de PHILOPATRIS, d'où est tirée la phrase citée l. 18—19, est généralement regardé comme apocryphe. D'autre part l'expression: „Tu comptes comme NICOMAQUE de Gérasa" n'y est nullement un éloge; c'est au contraire une plaisanterie contre les subtilités pythagoriciennes. P. TANNERY.

1:432. Le MÉTRODORE, auteur ou plutôt collecteur et commentateur des épigrammes arithmétiques de l'Anthologie, ne peut avoir vécu sous CONSTANTIN le Grand (voir l'édition de DIOPHANTE par P. TANNERY, II, proleg. p. XII—XIII). C'est probablement le *grammaticus*, frère d'ANTHEMIUS de Tralles, dont parle AGATHIAS, et qui vivait dans la première moitié du VI[e] siècle de notre ère. P. TANNERY.

1:437. Le plus ancien ms. de DIOPHANTE est celui de Madrid. gr. 48, qui est bien du XIII[e] siècle. Ceux du Vatican ne remontent pas au delà du XV[e]. Voir DIOPHANTE, éd. PAUL TANNERY, Vol. II, Prolegomena.

1:440. Dans le texte des mss. de DIOPHANTE, ἄλογος est une fausse leçon pour ἀόριστον; l'origine en a été établie par P. TANNERY (DIOPHANTE, Vol. II, proleg. p. IX).

1:467. Si TH. H. MARTIN a avancé que le surnom de *grand* n'aurait été donné dans l'antiquité qu'à deux philosophes grecs, à PARMÉNIDE par PLATON, à ISIDORE d'Alexandrie par DAMASCIUS, l'assertion est absolument fausse. Par exemple, SIMPLICIUS qualifie de *grands* PROCLUS et SYRIANUS. Cet ISIDORE et DAMASCIUS n'ont rien à faire avec l'histoire des mathématiques. A leur place, il conviendrait de mentionner un condisciple de PROCLUS, DOMNINUS de Larissa (en Syrie), auteur d'un *Manuel d'Introduction arithmétique* édité par BOISSONADE (*Anecdota graeca*, IV, p. 413—429). Cf. PAUL TANNERY, Bull. des sc. mathém. 1884, p. 288 suiv. et Revue de philologie, 1889, p. 129—137.

1:469. JEAN PHILOPON, l'auteur du commentaire sur NICOMAQUE, écrivait dans la première moitié du VI[e] siècle: son commentaire sur la physique d'ARISTOTE est fixément daté de 517. Il n'a donc pu assister à la prise d'Alexandrie par les Arabes, en 640. P. TANNERY.

1:475. En dehors de sa *Logistique*, BARLAAM a composé une *Démonstration arithmétique des propositions sur les lignes dans le second livre des*

Eléments, que Conrad Dasypodius a publiée en 1564 (Colmar) à la suite des deux premiers livres d'Euclide. — C'est en 1297, non en 1327, que Maxime Planude fut ambassadeur à Venise. Il est mort vers 1310. (Voir Krumbacher, *Gesch. der byz. Litt.*) P. Tannery.

1:476. Il y a eu, dès avant Planude, une *Ψηφοφορία κατ' Ἰνδοὺς* anonyme, datée de 1251; la publication en est préparée par M. A. Desrousseaux. P. Tannery.

1:537. Les mss. contenant une géométrie attribuée à Boèce et reconnus comme antérieurs au XI[e] siècle, n'en ont qu'un traité en cinq livres, dont l'authenticité ne peut être soutenue. P. Tannery.

1:540. Corriger comme suit les lignes 13—21: „Cependant ces diverses Géométries peuvent être ramenées à deux, celle en deux livres, la seule pour laquelle la question d'authenticité est posée, et celle en cinq livres. Les deux premiers de cette dernière ont été réunies en un seul, qui, dans les anciennes éditions, figure comme un écrit isolé de Boèce sur la Géométrie. Le contenu en est singulièrement varié, et une bonne partie n'est qu'une suite d'extraits en désordre de l'Arithmétique de Boèce. Les deux livres suivants contiennent la traduction d'Euclide attribuée à Boèce. Le cinquième, resté inédit, est, comme les deux premiers, une compilation de toutes pièces.“ P. Tannery.

1:542. Dans un des plus anciens manuscrits (Paris 7377 C du XI[e] siècle), au lieu de *mensa geometricalis*, table géométrique, on lit *mensura geometricalis*, comme si l'auteur attribuait à Architas, non pas spécialement l'*abacus*, mais aussi l'ensemble des problèmes métriques qui suivent. La corruption de *mensura* en *mensa* est d'ailleurs, paléographiquement, des plus aisées. P. Tannery.

1:749. Après avoir signalé que le traité d'astronomie de Djabir ibn Aflah (11[e] siècle), dont la traduction en latin par Gherardo Cremonese (1114—1187) parut en 1534, contient une trigonométrie assez complète, M. Cantor ajoute: „Der Verfasser legte, sofern er von Nasir Eddin unabhängig gewesen sein sollte, was uns aber mindestens als zweifelhaft gilt, eine Probe geistiger Selbständigkeit ab . . .“ Ici il y a évidement une faute de plume, car Nasir Eddin ne naquit qu'en 1201, c. a. d. environ 100 ans après la mort de Djabir ibn Aflah. G. Eneström.

1:804. Dans la lettre 76 (Olleris), Gerbert écrit bien à Adalbéron qu'il a été à Mantoue, mais rien ne prouve ni que la lettre en soit datée ni que ce soit là que Gerbert ait trouvé les huit volumes de Boèce, etc. D'après le travail critique de Julien Havet et de Bubnov, cette lettre doit remonter à la seconde moitié de l'année 983, et avoir été écrite à Bobbio. Au reste, l'édition du *Lettres de Gerbert*, par Havet (Paris, 1889), est la seule à utiliser désormais, et elle conduit à rectifier diverses dates de la vie de Gerbert. P. Tannery.

1:805. La traduction (ligne 4) „die erste Zahl" correspond au texte „de numero D", lequel paraît signifier un nombre placé dans la colonne des dizaines; on voit d'ailleurs plus loin que ce nombre est l'unité „I littera".

P. TANNERY.

1:807. Il n'y a rien à espérer du Codex CXV de MONTCHAL pour éclaircir la question de JOSEPH SAPIENS ou HISPANUS. C'est un manuscrit grec (3031 du catalogue actuel de la Bibl. Nat. de Paris), où un moine, JOSEPH [PINAROS] RHACENDYTES a réuni une *Synopsis* de toutes les branches de l'enseignement, à commencer par la rhétorique (texte publié dans les *Rhetores Graeci* de WALZ). Il y a compris l'abrégé des quatre sciences mathématiques attribué à PSELLUS, et c'est de là que vient la mention d'une *Geometria* dans MONTFAUCON, qui n'a point reconnu cet abrégé.

P. TANNERY.

1:808. Le CONSTANTIN, abbé de Mici (à partir de 995), est le même que le CONSTANTIN, écolâtre de Fleury. La lettre astronomique qui lui fut adressée par GERBERT, porte d'ailleurs dans un ms., comme suscription: *CONSTANTINO suo GERBERTUS scolasticus.* Elle peut donc remonter au temps où GERBERT était écolâtre à Reims. La suscription *GERBERTUS papa CONSTANTINO Miciacensi abbati* viendrait d'un exemplaire copié alors que GERBERT était monté sur le trône pontifical et que de son côté, CONSTANTIN était devenu abbé.

P. TANNERY.

1:812. Au lieu de 24 (ligne 21), lire 30 comme n° du chapitre visé de la *Geometria* GERBERTI.

1:823. FRANCON de Liège prend les $\frac{5}{4}$ du diamètre du cercle comme diagonale du carré équivalent au cercle, ce qui revient à poser: $\pi = \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{8} = 3{,}125$.

1:852. Si *Ocreatus* signifie „der Gestiefelte", la forme française (normande) du mot serait *Heuzé* (ocrea = house, houzeau).

2:57. Bei der Erwähnung des HUGO PHYSICUS könnte noch bemerkt werden, dafs derselbe eine *Practica geometriae* verfafste, die CURTZE in den Monatsh. für Mathem. 8, 1897, S. 193—224, veröffentlicht hat (vgl. Biblioth. Mathem. 1899, S. 117).

G. ENESTRÖM.

2:98. Der Schüler ROGER BACONS JOHANNES VON LONDON scheint den erwähnten Brief über astronomische Fragen kaum geschrieben haben zu können. Der Verfasser des Briefes giebt nämlich an, dafs er schon im Jahre 1246 eine astronomische Beobachtung angestellt habe (siehe FONTÈS, *Le manuscrit de JEAN DE LONDRES;* Bullet. de l'acad. d. sc. de Toulouse 1, 1898, 146—160), während ROGER BACON im Jahre 1267, da der Briefschreiber also wenigstens 40 Jahre alt gewesen sein mufs, bezeugt, sein Schüler JOHANNES LONDINENSIS habe „propter iuvenilem aetatem“ noch keine Schriften verfaſst (siehe z. B. Suter, *Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters*, Zürich 1887, S. 27).

G. Eneström.

2: 509. Le commencement de la traduction en symboles modernes du procédé de Ferrari pour résoudre l'équation du quatrième degré

$$x^4 + ax^2 + c = bx,$$

réduit essentiellement la portée de cette solution, citée aussi verbalement par M. Cantor. Ferrari commence ainsi: „Semper reduces partem quad. quadrati ad ℞ addo tantum utriquendue parti, ut 1 quadr. quadratum cum quadrato et numero habeant radicem.“ Conformément à cette indication, M. Cantor transforme le premier membre en un carré par l'addition de $(2\sqrt{c} - a)x^2$ aux deux membres de l'équation. Il trouve ainsi

$$(x^2 + \sqrt{c})^2 = (2\sqrt{c} - a)x^2 + bx.$$

C'est bien une des manières dont on peut procéder, mais Ferrari en propose expressément une autre, en continuant ainsi: „hoc facile est cum posueris dimidium numeri quadratorum radicem numeri“, c'est à dire en prenant $\frac{a}{2}$ pour racine du terme connu. Alors on aura

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = bx + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - c.$$

Cette manière de transformer l'équation a sur elle que propose M. Cantor l'avantage d'être applicable aussi au cas où c est négatif (ou bien remplacé d'un terme positif du second membre de l'équation).

H. G. Zeuthen.

2: 583. Die Behauptung „Zahllose Druckfehler entstellten das Werk“ [Viètes *Canon mathematicus*] ist nicht richtig; vgl. Braunmühl, *Gesch. d. Trigonom.* I, S. 158, und Fréd. Ritter, *François Viète* (Paris 1895), S. 54—55.

2: 594. Schon im *Canon mathematicus* hat Viète die Zahl π auf zehn Dezimalen richtig angegeben (Universalium inspectionum ad Canonem mathematicum liber singularis, S. 15).

A. von Braunmühl.

2: 597. „Adriaen van Roomen ... fand π auf 17 Dezimalstellen genau“; hier ist 15 statt 17 zu setzen (Braunmühl, *Gesch. d. Trigonom.* I, S. 174).

2: 602. Statt $\cos n\alpha = 2\cos(n-1)\alpha . \cos\alpha - \cos(n-2)\alpha$ muſs es $\cos n\alpha = \cos(n-2)\alpha - 2\sin\alpha\sin(n-1)\alpha$ heiſsen (Braunmühl, *Gesch. d. Trigonom.* I, S. 213).

2: 603—604. Die drei Ausgaben der Trigonometrie des Pitiscus erschienen 1600 in Augsburg, 1608 in Augsburg und 1612 in Frankfurt; alle drei finden sich auf der Berliner Königl. Bibliothek und der Münchener Hof- und Staatsbibliothek. Vielleicht hatten einige Exemplare der ersten Auflage, dessen Vorwort vom 23. August 1599 ist, auf dem Titelblatt die Jahreszahl 1599, denn Vossius (*De universae mathesios natura et constitutione*, S. 70) sagt: „anno CIƆIƆXCIX Bartholomaeus Pitiscus ... edidit libros quinque trigonometriae“, und in einigen neueren historischen Arbeiten, Bibliographien und Bücherkatalogen findet man auch 1599 als Druckjahr der ersten Auflage angegeben. — Der englische Übersetzer von Pitiscus' Trigonometrie scheint Handson (also nicht „Hamson“ und auch nicht „Hundson“, wie Braunmühl in seiner *Gesch. d. Trigonom.* I, S. 223 den Namen schreibt) zu heifsen. G. Eneström.

2:642. Paul Wittich kann kaum der eigentliche Erfinder der prosthaphäretischen Rechnung genannt werden, höchstens der Nacherfinder oder der abermalige Erfinder. Braunmühl (vgl. *Gesch. d. Trigonom.* I, S. 135—137, 193—195) hat nämlich unwiderleglich nachgewiesen, dafs Werner bereits die sämtlichen Regeln der Prosthaphäresis hatte; S. 454 geht Cantor hierauf nur sehr vorübergehend ein, und auch die Bemerkung S. 597 könnte etwas ausführlicher sein. G. Eneström.

2:643. Bei der Erwähnung der Bürgischen Einführung eines Hilfswinkels sollte die Trigonometrie des Pitiscus, Aufl. v. 1608 S. 139 (= Aufl. v. 1612 S. 173), citiert sein, denn dort ist die Methode Bürgis nach ihm geometrisch abgeleitet. Das Gleiche findet sich bei M. Jöstel in seiner handschriftlich erhaltenen *Prosthapheiresis astronomica*, S. 37 (vgl. Braunmühl, *Gesch. d. Trigonom.* I, S. 199).

2:665. Das überschlagene Viereck ist schon bei Stevin, *Hypomnemata* (1608) I, S. 165, 168 gezeichnet und besprochen; vgl. *Oeuvres de Stevin* par Girard, II, S. 21, 22. A. von Braunmühl.

2:700. In der *Cyclometria nova* (1610) hat Philipp von Lansberg π mit einer bis auf 28 Dezimalen sich erstreckenden Genauigkeit angegeben (vgl. Braunmühl, *Gesch. d. Trigonom.* I, S. 176). In seinem Buche *Triangulorum geometriae libri quatuor* (Leiden 1591), S. 196—197, hat er den sphärischen Cosinussatz zum erstenmale im Druck erscheinen lassen (vgl. Braunmühl, l. c. S. 192).

2:701. Die Figur der Bischofsmütze kommt bereits bei M. Bressieu vor, dann bei Rhæticus (Braunmühl, *Gesch. d. Trigonom.* I, S. 184).

2:703. Neper hat den Wortlaut seiner Regel nicht in dieser Form angegeben, dieselbe gehört vielmehr Christian Wolff zu (in der Ausgabe der *Mathematischen Anfangsgründe* von 1717 z. B. steht der erste Teil des Wortlautes S. 144, der zweite Teil S. 152). Neper ersetzt die Hypotenuse und die beiden Winkel durch ihre Komplemente (nicht die Katheten) und stellt dann folgende Regel auf: „Die Tangente irgend eines äufseren Stückes verhält sich zum Sinus des inneren, wie der Sinus totus zur Tangente des anderen äufseren Stückes, und der Sinus des Komplementes eines äufseren

Stückes verhält sich zum Sinus des inneren, wie der Sinus totus zum Sinus des Komplementes des anderen äufseren Stückes" (Neper, *Descriptio* p. 34).

A. von Braunmühl.

2: 704. *Nepersche Analogien.* Neper hat von seinen Analogien nur die *ersten zwei* angegeben und zwar keineswegs in einem der Formel auf S. 704 der *Vorlesungen* entsprechenden Wortlaute, sondern vielmehr in folgender Gestalt:

1) $\log\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}+\log\sin(\gamma-\alpha)+\log\operatorname{tg}\frac{b}{2}-\log\sin(\gamma+\alpha)-\log\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$
$=\log\operatorname{tg}x$ (primum inventum);

2) $\log\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}-\log\operatorname{tg}\frac{b}{2}-\log\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}=\log\operatorname{tg}y$ (secundum inventum).

Dabei ist $x+y=c$, $x-y=a$. Diese Schreibweise entspricht genau seinem Wortlaut. Geht man von den Logarithmen zu den Numeri über, so heifst dies:

$$\frac{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot\sin(\gamma-\alpha)\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\sin(\gamma+\alpha)\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}=\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\frac{c+a}{2}$$

und

$$\frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}}=\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}\frac{c-a}{2}$$

Die vereinfachte Form der ersten Gleichung

$$\frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\operatorname{tg}\frac{c+a}{2}$$

sowie die beiden Polarformeln zu diesen hat erst Briggs in seinen „Adnotationes" zur *Constructio* (S. 61) gegeben. Übrigens hat schon Delambre, *Hist. de l'Astron. moderne* I, 506, darauf hingewiesen, dafs Neper *nur* die zwei ersten Gleichungen zukommen. Andererseits hat Neper mittelst stereographischer Projektion auf sehr elegantem Wege die Gleichung bewiesen:

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}:\operatorname{tg}\frac{c+a}{2}=\operatorname{tg}\frac{c-a}{2}:\operatorname{tg}\frac{b_1}{2},$$

wo b_1 die Differenz der Abschnitte ist, welche die auf der Basis $\perp$ Höhe macht (*Descriptio* S. 49 Prop. 6).

A. von Braunmühl.

2: 705. Es wäre noch zu bemerken, dafs Cantors Bemerkung Z. 18 auch von der in der Geodäsie unter dem Namen „Hansensche Aufgabe" bekannten gilt, die Snellius ebenfalls für alle möglichen Fälle behandelt hat (Braunmühl, *Gesch. d. Trigonom.* I, S. 245).

2: 705. Aufser der Gleichung $x=\frac{3\sin x}{2+\cos x}$ hat Snellius auch noch eine obere Grenze für x angegeben, indem er zeigt, dafs

$$\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} < x < \operatorname{tg}\frac{x}{3} + 2 \sin\frac{x}{3}$$

(*Cyclometricus*, Prop. XXIX, S. 43, vgl. Braunmühl, *Gesch. d. Trigonom.* I, 243—244). Auch Girard teilt diese zweite Formel mit.

2: 721. Zeile 8 mufs „Verhältnisse" statt „Proportionen" stehen.

2: 742. Der Name „Mesologarithmi" ist von Kepler, nicht von Crüger eingeführt (Einführung in die Rudolfinischen Tafeln fol. 29, und Opera VI, 567). Der Name Antilogarithmen stammt von Neper, der ihn für log cosinus gebraucht wie später Kepler.

A. von Braunmühl.

2: 746. Die erste in Frankreich *gedruckte* Logarithmentafel war die 1620 bei dem Buchhändler Vincent erschienene Kopie von Napiers beiden Schriften.

A. von Braunmühl.

2: 747. Die *Trigonometria Britannica* des John Newton ist eine wesentlich verbesserte und vermehrte Neuausgabe des gleichnamigen Werkes Gellibrands von 1633.

A. von Braunmühl.

2: 891. Die Frage: „sollten zwei Brüder White gelebt haben?" ist schon von Kästner an der von Herrn Cantor S. 892 citierten Stelle erledigt. Kästner referiert nämlich ziemlich ausführlich über das Vorwort des *Hemisphaerium dissectum* (1648), wo Richard White seinen Bruder Thomas erwähnt, und giebt ferner einige Nachrichten über die mathematischen Schriften des letzteren, der auch in den Briefen, die dem Fermat-Wallisschen Streit angehören, vielfach genannt wird (vgl. Wertheim, Abh. zur Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, 557). Übrigens scheint Thomas viel hervorragender als Richard gewesen zu sein; so z. B. kommt jener (unter dem Namen Thomas de Albis) aber nicht dieser in Jöschers *Gelehrten-Lexicon* vor.

G. Eneström.

Vermischte historische Notizen.

Robertus Castrensis. In dem „Rechenschaftsbericht" über seine Studienreise 1896 hat M. Curtze (Centralbl. für Bibliotheksw. **16**, 1899, S. 289) eine Übersetzung des Buches *Algebr wel mokabela* des Alkhowarizmi erwähnt, die im Jahre 1182 von Robertus Castrensis bewerkstelligt wurde und handschriftlich in Wien aufbewahrt ist. Ich erlaube mir darauf aufmerksam zu machen, dafs die Jahreszahl „1182" sich vielmehr auf die spanische Ära bezieht, wie aus andern Übersetzungen Roberts erwiesen ist; das Richtige (1183 = 1145) über die — also nicht unbekannte — Wiener Handschrift habe ich schon in Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 392—393 (vgl. Zeitschr. d. Deutschen Morgenl. Gesellsch. **25**, 1871, 104) angegeben, und dort (Ende S. 393) bemerkt, die Übersetzung der Algebra dürfte eine Herausgabe verdienen; ich freue mich, dafs ein Fachmann diese Vermutung, ohne sie zu

Recensionen.

Moritz Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Zweiter Halbband. Von 1550—1668. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner 1900. 8⁰, XII S. + S. 481—943. Preis M. 12.

Mit diesem Halbbande liegt der zweite Band der neuen Auflage der *Vorlesungen* vollständig vor, und die Vergleichung mit der ersten Auflage zeigt, dafs auch hier sich eine sehr grofse Anzahl von Verbesserungen und Zusätzen findet. Äufserlich ist der Text des ganzen Bandes scheinbar um 78 Seiten und der des zweiten Halbbandes um 36 Seiten gewachsen, aber 40 Seiten jenes und 16 Seiten dieses Zuwachses rühren von einer Verstärkung des Durchschusses her.

Schon in unserer Besprechung des ersten Halbbandes in der Biblioth. Mathem. 1899, S. 49—57 haben wir auf die reichhaltige Litteratur hingewiesen, welche die mathematisch-historische Forschung in den letzten Jahren hervorgerufen hat, und was wir dort bemerkten, gilt in gleichem Mafse für die Periode, welche der zweite Halbband behandelt. Die *vollständige* Revision eines vor zehn Jahren verfafsten Werkes über die Geschichte der Mathematik 1550—1668 mufs also eine sehr grofse Arbeit erfordern, und für diesen Zweck wäre es vielleicht am angemessensten, zuerst das erste Kapitel der verschiedenen Jahrgänge des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik sowie die Schriftverzeichnisse der Biblioth. Mathem. zu Rate zu ziehen, und dann im Bedarfsfalle die zugängliche mathematisch-historische Litteratur direkt zu benutzen. Auf diese Weise würde man wohl am besten vermeiden irgend einige der neuesten Resultate der mathematisch-historischen Forschung zu übersehen. Diesen Weg scheint Herr Cantor indessen nicht eingeschlagen zu haben, und in der That ist das Verfahren so mühsam und zeitraubend, dafs es ihm wahrscheinlich ganz unmöglich gewesen wäre, sich desselben zu bedienen ohne die Herausgabe der neuen Auflage für längere Zeit zu verschieben. Unter solchen Umständen mufs man ihm Dank dafür wissen, dafs er nicht das Bessere zu bringen unterlassen hat, da er das Beste nicht hat geben können, und man wird nachsichtig sein, dafs es auch in der neuen Auflage Notizen giebt, die durch Zuhilfenahme der neuesten Litteratur unmittelbar hätten berichtigt werden können, und dafs es zuweilen nur vom Zufall abhängig gewesen ist, ob Herr Cantor eine frühere Bemerkung, die jetzt als ungenau anerkannt worden ist, verbessert hat oder nicht. Um nur ein einziges Beispiel solchen Zufalles anzuführen, hat er (S. 686, 712) die Aufschlüsse des Herrn Dickstein in der Biblioth. Mathem. 1894, S. 24 benutzt, aber (S. 621, 623) die Berichtigung des Herrn Favaro in derselben Zeitschrift 1893, S. 15—17 *nicht* berücksichtigt, obgleich die Verbesserung der (aus einer uns unbekannten Quelle herstammenden) unrichtigen bibliographià ISAK BEN SALOMO dans un manuscrit de la fin du 15e siècle (cf. Biblioth. Mathem. 1899, p. 94—95).

On demande une recherche sur l'original et sur l'auteur du *Liber augmenti et diminutionis*, ainsi que sur le mathématicien cité sous le nom de „JOB filius SALOMONIS".

G. ENESTRÖM.

---

81. Filippo Ferrari (1761). Im 34. Bande des Journ. für Mathem. giebt CRELLE das Faksimile eines Briefes von FILIPPO FERRARI an GREG. FONTANA vom 9. Mai 1761 (Roma); ein zweiter Brief desselben FERRARI vom 15. Nov. 1761 (Roma) befand sich in BONCOMPAGNI's Besitz (*Catalogo di manoscritti compilato da* E. NARDUCCI; seconda edizione [Roma 1892], S. 406 No. 70). Außer diesen beiden Briefen ist mir nichts von und über FERRARI bekannt. Ist vielleicht ein Leser der Biblioth. Mathem. im Stande, biographische Notizen über FILIPPO FERRARI zu geben oder nachzuweisen?

G. VALENTIN.

---

82. On the „formula exponentialis replicata" of Euler. In what publication is the expression

$$r^{r^{r^{\cdots}}}$$

first mentioned, which EULER calls „formula exponentialis replicata", and which he discusses in the Acta acad. sc. Petrop. 1777:1, p. 38—59, and in his *Institutiones calculi differentialis* (ed. 1787, I § 193)?

Washington.

J. G. HAGEN.

---

83. Eine Zeitungsnotiz über Gauſs' Stellung zur Parallelen-Lehre. In der Abhandlung: *Über die Theorie der Parallel-Linien* von SCHULZ (Programm des Gymnasiums zu Königsberg in der Neumark vom Jahre 1846) heiſst es (S. 10):

„Von scherzhafter Mystifikation, wenn auch, gestützt auf die berümtesten Namen, in den öffentlichen Blättern versucht, kann die Wissenschaft nicht berührt werden! — Wie würde die gesammte Geometrie, — die Theile der praktischen und angewandten Mathematik, welche sich auf sie besonders stützen, nicht ausgeschlossen — zusammenschrumpfen zu einem winzigen Umfange weniger Sätze, *ohne* die Parallelen-Lehre!! —"

Hiernach scheint es, als ob über GAUSS' antieuklidische Geometrie bereits bei seinen Lebzeiten in den vierziger Jahren etwas in die Öffentlichkeit gedrungen ist. Es wäre von groſsem Interesse, wenn festgestellt werden könnte, in welchen „öffentlichen Blättern" das geschehen ist.

P. STÄCKEL.

---

84. On the so-called „Legendres transformation". On what ground is the following dualistic transformation called „LEGENDRE's Transformation"?

From the relation $u = px + qy - z$ follows the transformation:

$$dz = pdx + qdy, \quad du = xdp + ydq.$$

Its further discussion is found in SERRET's *Calcul Diff. et Int.* I, no. 92; in FORSYTH's *Treatise on Diff. Equations,* 1855, §§ 197—198, and § 242; in LIE-SCHEFFERS' *Berührungstransformationen*, I, p. 644; but without reference to LEGENDRES writings.

J. G. HAGEN.

Recensionen.

Moritz Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Zweiter Halbband. Von 1550—1668. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner 1900. 8°, XII S. + S. 481—943. Preis M. 12.

Mit diesem Halbbande liegt der zweite Band der neuen Auflage der *Vorlesungen* vollständig vor, und die Vergleichung mit der ersten Auflage zeigt, dafs auch hier sich eine sehr grofse Anzahl von Verbesserungen und Zusätzen findet. Äufserlich ist der Text des ganzen Bandes scheinbar um 78 Seiten und der des zweiten Halbbandes um 36 Seiten gewachsen, aber 40 Seiten jenes und 16 Seiten dieses Zuwachses rühren von einer Verstärkung des Durchschusses her.

Schon in unserer Besprechung des ersten Halbbandes in der Biblioth. Mathem. 1899, S. 49—57 haben wir auf die reichhaltige Litteratur hingewiesen, welche die mathematisch-historische Forschung in den letzten Jahren hervorgerufen hat, und was wir dort bemerkten, gilt in gleichem Mafse für die Periode, welche der zweite Halbband behandelt. Die *vollständige* Revision eines vor zehn Jahren verfafsten Werkes über die Geschichte der Mathematik 1550—1668 mufs also eine sehr grofse Arbeit erfordern, und für diesen Zweck wäre es vielleicht am angemessensten, zuerst das erste Kapitel der verschiedenen Jahrgänge des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik sowie die Schriftverzeichnisse der Biblioth. Mathem. zu Rate zu ziehen, und dann im Bedarfsfalle die zugängliche mathematisch-historische Litteratur direkt zu benutzen. Auf diese Weise würde man wohl am besten vermeiden irgend einige der neuesten Resultate der mathematisch-historischen Forschung zu übersehen. Diesen Weg scheint Herr Cantor indessen nicht eingeschlagen zu haben, und in der That ist das Verfahren so mühsam und zeitraubend, dafs es ihm wahrscheinlich ganz unmöglich gewesen wäre, sich desselben zu bedienen ohne die Herausgabe der neuen Auflage für längere Zeit zu verschieben. Unter solchen Umständen mufs man ihm Dank dafür wissen, dafs er nicht das Bessere zu bringen unterlassen hat, da er das Beste nicht hat geben können, und man wird nachsichtig sein, dafs es auch in der neuen Auflage Notizen giebt, die durch Zuhilfenahme der neuesten Litteratur unmittelbar hätten berichtigt werden können, und dafs es zuweilen nur vom Zufall abhängig gewesen ist, ob Herr Cantor eine frühere Bemerkung, die jetzt als ungenau anerkannt worden ist, verbessert hat oder nicht. Um nur ein einziges Beispiel solchen Zufalles anzuführen, hat er (S. 686, 712) die Aufschlüsse des Herrn Dickstein in der Biblioth. Mathem. 1894, S. 24 benutzt, aber (S. 621, 623) die Berichtigung des Herrn Favaro in derselben Zeitschrift 1893, S. 15—17 *nicht* berücksichtigt, obgleich die Verbesserung der (aus einer uns unbekannten Quelle herstammenden) unrichtigen bibliographischen Notiz über Bombelli schon aus dem Grunde erwünscht war, dafs diese Notiz Herrn Cantor veranlafst hat den Erfolg der Bombellischen Algebra zu überschätzen.

Da die dritte Folge der Biblioth. Mathem. eine besondere Abteilung für kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage der Cantorschen *Vorlesungen* enthält, ist es unnötig auf die Einzelheiten des vorliegenden Halbbandes hier einzugehen; nur eine etwas allgemeinere Bemerkung erlauben wir uns dieser kurzen Besprechung hinzuzufügen.

Bekanntlich ist Herr Cantor zwar ein ausgezeichneter historischer Forscher aber kein eigentlicher Bibliograph im modernen Sinne dieses Wortes. Selbständige bibliographische Untersuchungen anzustellen scheint er nicht zu lieben, und wenn er einen Verfasser gefunden hat, dessen bibliographische Notizen im allgemeinen zuverlässig sind, so benutzt er ihn fortgesetzt, ohne grofses Gewicht darauf zu legen, ob es vielleicht neuere und noch zuverlässigere Arbeiten derselben Art giebt. So citiert er oft Kästners *Geschichte der Mathematik* und Libris *Histoire des sciences mathématiques en Italie* auch betreffs älterer italienischer Schriften, obgleich viele Angaben dieser beiden Verfasser durch Riccardis ausgezeichnete *Biblioteca matematica italiana* berichtigt oder ergänzt worden sind. Nun ist es ja wahr, dafs in einer historischen Arbeit die bibliographischen Notizen nur Nebensache sind, und dafs es für die Schilderung des Entwickelungsganges der mathematischen Theorien ganz gleichgültig ist, ob z. B. die erste Auflage von Ramus' Algebra 1586 oder 1592, wie Herr Cantor (S. 612, 641) angiebt, erschien. Auf der anderen Seite können unrichtige bibliographische Notizen zuweilen auf die historische Darstellung Einflufs haben. Einen solchen Fall haben wir schon oben berührt, als wir von Bombelli sprachen. Herr Cantor hat nämlich (S. 621) angegeben, dass Bombellis Algebra zuerst 1572 in Venedig, dann abermals 1579 in Bologna gedruckt ist, und aus der raschen Aufeinanderfolge dieser beiden Ausgaben folgert er (S. 623), dafs sie viele Käufer fand. Da es aber konstatiert worden ist, dafs keine Ausgabe der Algebra in Venedig erschien (vgl. Biblioth. Mathem. 1892, S. 92) und dafs die angebliche neue Auflage vom Jahre 1579 nur eine neue *Titel*ausgabe ist (vgl. Biblioth. Mathem. 1893, S. 15—17, 64), so kommt selbstverständlich auch die Folgerung in Fortfall, und es ist sogar wahrscheinlich, dafs der Neudruck des Titels im Jahre 1579 stattfand, weil der Vertrieb der Exemplare der Bombellischen Algebra sehr gering gewesen war (vgl. Biblioth. Mathem. 1893, S. 17). In diesem Zusammenhange erlauben wir uns auch darauf hinzuweisen, dafs unvollständige bibliographische Notizen leicht eine unrichtige Ordnungsfolge der zu besprechenden Schriften veranlassen können. So z. B. ist es eigentlich nur ein Zufall, dafs das Buch Felicianos *Libro di arithmetica et geometria*, von dem Herr Cantor (S. 481) nur eine Auflage aus dem Jahre 1550 erwähnt, obgleich es nach Riccardi (l. c. II, S. 21) zuerst 1526 und dann *neun*mal wieder herausgegeben wurde, nicht einen unrichtigen Platz bekommen hat.

Ein anderer Übelstand, den das Vorkommen unrichtiger bibliographischer Notizen in einem *Standard work*, wie die Cantorschen *Vorlesungen*, mit sich führt, besteht darin, dafs junge Verfasser veranlafst werden, sich als Entdecker von Thatsachen anzusehen, die schon längst bekannt waren. So hat die Notiz des Herrn Cantor in der ersten Auflage der *Vorlesungen* (II, S. 555): „Pitiscus *Trigonometria* erschien zuerst 1595 in Heidelberg; eine

Ausgabe von 1600 (Augsburg) wird häufig irrigerweise als die erste bezeichnet", Herrn Gravelaar veranlafst, die Richtigkeit der schon längst bekannten Thatsache, dafs die Schrift von 1595 nur ein Entwurf war, und die drei Auflagen der *Trigonometriae libri quinque* aus den Jahren 1600, 1608, 1612 herrühren (siehe z. B. Gerhardt, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, S. 93—94) in einer besonderen Abhandlung (*Pitiscus Trigonometria;* Nieuw archief voor wiskunde **3**$_2$, 1898, S. 253—278) ausführlich darzulegen.

Es wäre also sehr gut, wenn für die voraussichtlich bald nötige dritte Auflage des zweiten Bandes der *Vorlesungen* eine möglichst vollständige Revision der bibliographischen Notizen stattfinden könnte.

Hinsichtlich des Registers erlauben wir uns noch einmal (siehe Biblioth. Mathem. 1898, S. 60) hervorzuheben, dafs es für die Leser sehr willkommen sein würde, wenn dasselbe auch das „Vorwort" umfafste, da dieses eine ziemlich grofse Anzahl von Berichtigungen des Textes enthält. G. Eneström.

J. Boyer. Histoire des mathématiques. Paris, Carré et Naud 1900. XI + 260 p. in-8°. Fr. 5.

Dans la préface, l'auteur fait ressortir que le but de son ouvrage est de donner un aperçu de l'évolution des mathématiques chez les divers peuples, depuis l'origine de la civilisation jusqu'à la fin du 19^e siècle, mais que, d'autre part, il s'est efforcé de rester très élémentaire, en évitant, autant que possible, de surcharger son récit de formules ou d'équations. Il s'ensuit que son livre doit être considéré essentiellement comme un traité populaire de l'histoire des mathématiques, et qu'il n'est guère adapté aux études universitaires; à ce point de vue il peut être mis à côté de l'ouvrage connu de Hoefer. D'autre part M. Boyer a eu recours à une littérature plus riche que celle dont Hoefer pouvait disposer il y a 25 années, et pour cette raison il lui a été possible tant d'éviter un certain nombre d'erreurs commises par son prédécesseur, que de donner sur quelques points des renseignements plus complets. De plus, M. Boyer a eu l'heureuse idée d'illustrer son livre de quelques fac-similés de manuscrits (l'*Algorismus* de Sacrobosco, l'*Ars geometriae* attribuée à Boëtius, les Eléments d'Euklides et le Papyrus d'Akhmîm) et de 19 portraits de mathématiciens ou mathématiciennes (M^{me} du Chatelet et M^{me} Kowalevsky); il va sans dire que ces illustrations rendent la lecture du livre plus agréable. Enfin il y a ajouté (p. 249—256) une liste alphabétique des noms cités et des matières traitées.

D'autre part, on voit aisément que, soit par le défaut de bonnes sources, soit par d'autres raisons, il s'est glissé dans l'*Histoire des mathématiques* de M. Boyer un assez grand nombre d'indications inexactes ou de conclusions peu fondées. En voici quelques exemples.

P. 3. „Les nombres 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 sont indiqués [chez les Babyloniens] respectivement comme étant les carrés des sept premiers nombres. Il semble donc qu'ils connaissaient le système de *numération decimale*".

P. 43. „Eratosthène ... ne dédaigna même pas les sports, puisqu'on lui décerna le titre de Pentathlos".

P. 83. „Jean de Sacro-Bosco ... mourut probablement en 1256. Son *Algorithme* renferme tout ce qu'on savait sur le nouveau système de notation arabe. Les quatre règles s'y trouvent formulées, et il applique à diverses questions pratiques les principes de proportion. Le livre se termine par différentes formules algébriques propres à résoudre les problèmes les plus communs de la vie courante."

P. 86. „Parmi tous ces auteurs de médiocre intérêt pour l'histoire scientifique, distinguons . . . GORDAN (!) NEMORARIUS qui dans son *De numeris datis* traite de questions d'Algèbre en raisonnant sur des lettres". — P. 93. „REGIOMONTANUS, . . . dans son *Algorithmus demonstratus*, prépara la voie à VIÈTE en substituant les lettres aux nombres".

S. 94. „Comme il [LUCAS PACCIOLI] considérait seulement les racines positives, il n'employait pas de symbole pour la soustraction".

P. 162. „JACQUES BERNOULLI . . . dans son *Ars conjectandi* . . . précisa les notions émises par PASCAL et FERMAT sur les probabilités. Enfin et surtout on lui est redevable du *Calcul exponentiel*, cette partie de l'analyse devenue si féconde".

Quant à quelques passages, dont les indications pourraient être jugées inexactes, leur forme actuelle doit être attribuée sans doute à la hâte avec laquelle M. BOYER a été contraint de rédiger son ouvrage. A la page 99 il mentionne successivement A. VAN ROOMEN, L. VAN CEULEN et A. METIUS; puis il commence un nouveau alinéa par ces mots: „En outre, son *Canon triangulorum* a une certaine valeur". Ici il est un peu difficile de deviner que „son" doit être rapporté à VAN ROOMEN et non pas à METIUS. De même, à la page 112, le passage: „TYCHO-BRAHÉ paraît s'être servi d'une méthode analogue. Puis MICHEL STIFEL ... constata la relation fondamentale" est au moins apparemment en désaccord avec le fait que TYCHO BRAHE naquit deux ans après la publication de l'ouvrage de STIFEL dont il s'agit. Du reste des fautes de plume ou d'impression ne sont pas trop rares. Ainsi p. ex. on trouve p. 14 l. 26 „I^er livre" au lieu de V^e livre; p. 80 l. 11—12 „Berlinus" au lieu de BERNELINUS; p. 85 l. 18 „1572" au lieu de 1472; p. 92 l. 27 „1553" au lieu de 1533; p. 139 l. 1 „cooluta" au lieu d'evoluta; p. 172 l. 23 „Jacques" au lieu de Jean (cf. p. 176 l. 9). Parmi les fautes de plume il convient de ranger aussi les indications que les livres XIV—XV des *Elementa* doivent être attribués tous deux à HYPSIKLES (p. 28, cf. p. 45), que CASSIODORIUS était né vers 570 (p. 63), que HEIBERG est un érudit *allemand* (p. 42) et LIE un mathématicien *suédois* (p. 246), et que le mathématicien NICOLE dont le *Traité des différences finies* fut publié en 1717, vivait 1625—1695 (p. 254).

Dans les notes, M. BOYER a cité la plupart des traités de l'histoire des mathématiques parus au 19^e siècle et plusieurs autres écrits historiques ou biographiques. Parfois il est un peu difficile de comprendre pourquoi il a jugé nécessaire d'annexer ces citations, ou pourquoi il a cité précisément tel ouvrage. Ainsi p. ex. en parlant de PLATON, HIPPIAS et THEAITETOS (p. 17—19), il ne cite aucun écrit de l'histoire des mathématiques, mais pour justifier l'indication: „MENECHME s'occupa des sections coniques avec succès" (p. 19—20), il renvoie à trois auteurs, savoir ALLMAN, TANNERY et BALL. D'un autre côté, en faisant allusion (p. 33) à la solution d'ARCHIMEDES du problème: „Couper une sphère par un plan, de manière que les segments aient entre eux une raison donnée", il renvoie à l'*Algebra der Griechen* de NESSELMANN, où, du reste, nous avons cherché en vain le passage qu'il a en vue. Enfin nous avons noté avec une legère surprise qu'il cite quelques fois la 1^ère édition du 1^er tome des *Vorlesungen* de M. CANTOR, mais nulle part les deux autres tomes, dont l'étude est aussi indispensable à quiconque veut donner un aperçu de l'histoire des mathématiques.

A notre avis, l'ouvrage de M. Boyer s'adresse en premier lieu aux personnes qui, bien qu'ils s'intéressent vivement aux mathématiques, n'ont le loisir de s'en occuper qu'en dilettantes; en second lieu il peut être utile à inspirer aux jeunes étudiants le goût pour l'histoire des mathématiques.

G. Eneström.

A. von Braunmühl. Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Erster Theil. Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen. Leipzig, Teubner 1900. VII + 260 S. 8°. M. 9.

Für die Darstellung der Geschichte der Mathematik bis zum vorigen Jahrhundert bedeutet Cantors grofsartiges Werk bekanntlich einen Markstein. Es könnte scheinen, dafs es nun in den nächsten Dezennien für den mathematischen Historiker wünschenswert wäre, in Erforschung des Einzelnen, sei es in selbstgestellten Problemen, sei es auf Grund der vielen Anregungen und Fragestellungen, die Cantors Buch einem jeden entgegenbringt, das Material zu schaffen, bez. vorzubereiten, aus dem später wieder einmal ein zusammenfassendes und weiter vertieftes Gesamtbild entworfen werden kann. Dies ist auch in gewissem Sinne für die Zeit bis zur Mitte des vorigen Jahrhunderts richtig.

Wenn aber dadurch nicht der Weg für die Auffassung ganzer Epochen von neuen Gesichtspunkten aus, oder für die noch eingehendere Schilderung der Entwickelung einzelner Zweige der Mathematik versperrt werden darf, so gilt dies noch ganz besonders für jene Zweige, bei denen in Gesamtdarstellungen eine gewisse Zurückhaltung nötig ist, insofern sie in andere Gebiete der Wissenschaften oder der Anwendung übergreifend die Grenze der Darstellung wie auch der Möglichkeit des durchaus erschöpfenden Litteraturstudiums überschreiten lassen müfsten. Ein solches Nachbargebiet, das wichtigste speziell der älteren Zeit, und zu dem erst in der neueren die Mechanik etc. hinzutritt, ist die Astronomie; ihr entspricht als mathematisches Hülfsmittel zunächst die sphärische Trigonometrie.

Wie dankenswert und dankbar die ausführliche Behandlung der mathematischen Seite solcher Grenzgebiete ist, zeigt das vorliegende Werk. Die *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* von A. von Braunmühl, deren erster Band hier vorliegt, verzichten, wie der Titel besagt, auf die historische Schilderung der Spezialprobleme der Astronomie und Geodäsie, soweit sie nicht als die Trigonometrie fördernd unmittelbar mathematisches Interesse haben. Es war dies ohne Zweifel notwendig, um den Umfang des Werkes in den vorgesteckten Grenzen zu erhalten; andrerseits wohl auch, um ihm einen einheitlichen Charakter zu geben und die Zusammenstellung heterogenen Materials zu vermeiden. Dagegen hat das Studium der astronomischen Werke und Tafeln, insbesondere des Mittelalters, dem Verfasser neue Grundlagen für die Geschichte der sphärischen Trigonometrie gegeben, die vielfach von den bisherigen Anschauungen abweichen. So ermöglichten sie dem Verfasser eine genauere Erkenntnis und ein tieferes Eindringen in die Methoden und die grofsen Resultate, welch diese Wissenschaft besonders den Ostarabern schuldig wurde, ebenso zeigen sie, wie die Übertragung der Kenntnisse der Araber nach Westeuropa erfolgte, und wie sich deren Einflufs bis ins 16. Jahrhundert geltend machte.

Durchblättern wir das vorliegende Werk, so ist zunächst die Belehrung von hohem Interesse, die wir in Bezug auf die Art der Konstruktionen und Beweisführungen der sphärischen Trigonometrie im Altertum mit Hülfe der Orthogonalprojektion auf drei Ebenen, des *Analemma* des Ptolemäus, erhalten. Schon aus einer früheren Abhandlung des Verfassers[1]) wissen wir viel über die Entwickelung dieses Verfahrens, von dem früher überhaupt keine Notiz genommen wurde. Hier finden wir es von den Griechen zu den Indern gelangt, aus deren „Siddhânta's" (dem „Sindhind" der Araber) von den Arabern übernommen, mit ganz erstaunlicher Leichtigkeit gehandhabt und bis zu einer Vollkommenheit gebracht, die ihnen die wichtigsten der später gefundenen Sätze der sphärischen Trigonometrie wenigstens dem Gedankengehalte nach ersetzte. Wir sehen, wie diese Methode zum grofsen Nachteil für das Wissen des Mittelalters lange in Europa vergessen blieb und erst zur Zeit der Renaissance beim Neuerwachen des Wissens und der Wissenslust auch in der Mathematik unzweifelhaft als ein Hauptmittel zur Wiedergewinnung der trigonometrischen Kenntnisse aufgenommen wurde, und bis in das 17. Jahrhundert hinein, d. h. bis die Sprache der Formel die des Lehrsatzes ersetzt und die der Einzellösung der Probleme von Fall zu Fall endgiltig beseitigt hatte, in vielfacher und fruchtbarer Verwendung.

In Bezug auf die hier sich aufdrängende interessante Frage, ob die Griechen dies Verfahren nur zur graphischen Lösung der astronomischen Probleme, wie es nachweislich in vielen Fällen geschah, benutzt haben, oder ob sie den Konstruktionsgang zugleich, wenigstens in den einfachsten Fällen, auch rechnerisch verfolgten, scheint der Verfasser sich für das erstere zu entscheiden. Augenscheinlich steht diese Frage in innigem Zusammenhange mit der anderen, ob die Griechen, oder doch eine ihrer Schulen, sich der Halbsehnen, also der Sinus, an Stelle der ptolemäischen Ganzsehnen zur Rechnung bedient haben, wie von manchen angenommen wird. Thatsächlich hätte eine Durchrechnung der Konstruktionen des *Analemmas* die Anwendung der Halbsehnen mehr als nahe legen müssen, und man versteht schwer, wie das so gefundene Prinzip, dessen Vorteil so sehr einleuchtet, wenn einmal konzipiert, wieder in Vergessenheit hätte geraten können. Auch sehen wir es bei den Indern, die nach dem Verfasser zuerst Rechenvorschriften auf Grund des *Analemmas* aufstellten, sofort auftauchen und bei den Arabern trotz zeitweiser Benutzung der durch die gewaltige Autorität des Ptolemäus gestützten Ganzsehne in kurzer Zeit diese vollständig verdrängen. Ja sogar auf die Herstellung einer Cotangententabelle wurde schon Al Battâni durch die rechnerische Behandlung der Sonnenuhrkonstruktionen geführt und zwar scheint auch hier der leitende Gedanke auf indische Vorbilder zurückzugehen, wie denn der Tangens ebenso wie der von den Indern benutzte Cosinus bei den Konstruktionen des *Analemmas* oft graphisch auftritt. So scheint das Fehlen von Mitteilungen der griechischen Autoren in dieser Richtung die Ansicht v. Braunmühls sehr wahrscheinlich zu machen und zu bestätigen.

Das zweite Mittel der sphärischen Trigonometrie des Altertums und Mittelalters, der Transversalensatz des Menelaus und dessen Ersatz, die „Regel der vier Gröfsen" und die „Tangentenregel" der Araber, — welche beiden letzteren der Verfasser dem Gedanken nach schon in der Sphärik des Menelaus findet,

1) A. von Braunmühl, *Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie;* Nova acta der K. Leop.-Carol. Akademie **71**, 1897.

während sie bisher den Arabern zugewiesen wurden, — wird ebenso in seinen Wandlungen und Konsequenzen bis zu der von BRESSIEU gegebenen Figur der „Bischofsmütze“ verfolgt. Dafs dem MENELAUS nur zwei unserer Transversalensätze bekannt gewesen seien, ist nebenbei bemerkt wohl nicht plausibel, da die zwei von ihm gegebenen gerade die (im Sinne der Griechen) wesentlich verschiedenen Formen, die anderen zwei nur Varianten, durch Vertauschung der Reihenfolge der zwei Schnittgeraden erhalten, darstellen.

Eine grofse Menge neuer Einzelheiten findet sich ferner bei der Behandlung der Trigonometrie der Araber. Von solchen sei nur der Nachweis des Wortes dschaib = sinus lange vor AL BATTÂNI bei AL CHWARIZMI erwähnt dann die erste Benutzung des Supplementardreiecks bei NASIR EDDÎN TÛSI zur Berechnung eines sphärischen Dreiecks aus den drei Winkeln.

Von Wichtigkeit ist weiter die Klarheit, mit der der Unterschied zwischen der impliciten Verwendung allgemein fruchtbarer Ideen bei Lösung von Einzelproblemen und der erst weit späteren thatsächlichen Aufstellung der allgemeinen Sätze betont wird. So finden wir den Sinussatz für das ebene Dreieck erst bei NASIR EDDÎN formuliert, obwohl er vorher in Einzelfällen schon öfters im wesentlichen benutzt wurde. Weiter begegnen wir schon bei AL BATTÂNI und den späteren grofsen ostarabischen Mathematikern, dann auch z. B. bei dem Westaraber DSCHÂBIR IBN AFLAH vielfach Lösungen sphärischer Aufgaben mittelst des *Analemmas*, in denen implicite der Cosinussatz enthalten ist, während die allgemeine Formulierung dieses Satzes erst REGIOMONTAN zu verdanken ist, der sie aus eben diesen Lösungen herauslas. Gerade in dieser Beziehung giebt erst die Art, wie der Verfasser den geometrischen Gedankengang auf Grund des *Analemmas* nachempfunden hat, eine Klarheit, die bisher mangelte.

Die grofsen Leistungen des ABÛ'L WAFÂ werden eingehend behandelt und besonders auch auf seine Verwendung der Tangenten und Secanten aufmerksam gemacht, die bis dahin mit grofser Zurückhaltung benutzt worden waren, wenn auch der Tangens lange, vielleicht sogar den Indern bekannt gewesen war. Das Buch NASIR EDDINS vom Viereck wird als erste bekannte zusammenfassende Darstellung eines Systems der Trigonometrie (man vergleiche BRAUNMÜHLS diesbezügliche Abhandlung in den Nova acta der Leopoldina) nachgewiesen und demgemäfs ausführlich besprochen.

Von grofsem Interesse sind auch die folgenden Kapitel über „das christliche Mittelalter“ und „die Wiedergeburt der Wissenschaften in Europa“, wo zum ersten Male eingehend und im Zusammenhange die Übertragung der Kenntnisse der Westaraber hauptsächlich durch jüdische Gelehrte Spaniens nach Europa dargestellt wird. Zu erwähnen wäre hier z. B. die Notiz über eine in den Alfonsinischen Tafeln enthaltene Tangententabelle, und eine zweite allgemeiner verwendbare, aber anscheinend verlorene des JOHANNES CAMPANUS VON NOVARRA; weiter der Bericht über die Leistungen des LEVI BEN GERSON. Vieles hat in diesen Kapiteln der Verfasser aus den Forschungen CURTZES und den Aufsätzen STEINSCHNEIDERS in der Bibliotheca Mathematica geschöpft, auf anderes neu hingewiesen, wie auf die grofse Wichtigkeit, die AL ZARKÂLIS Toledanische Tafeln für die Entwickelung der Kenntnisse des späteren Mittelalters bis nach REGIOMONTAN gehabt haben. Die Leistungen dieses letzteren werden damit in ein ganz anderes Licht gesetzt. Man erkennt, dafs es in erster Linie das Verdienst dieses genialen Mannes war, aus den einzelnen Lösungen, die ihm durch die Litteratur der Westaraber und Juden gröfstenteils bekannt waren und nicht, wie bisher vielfach angenommen, von ihm selbst stammen, in geradezu reformatorischer Weise die allgemeinen Gedanken und Sätze herausgelesen und formuliert zu haben; ferner darauf basiert, eine Systematisierung dieses Zweiges der Mathematik, besonders auch der bis dahin zurücktretenden ebenen Trigonometrie gegeben zu haben, wie sie auch die ihm nicht zugänglichen grofsen Ostaraber nicht besessen hatten. Weiter sehen wir bei ihm die *Tabula primi mobilis* erscheinen, welche eine jener zwei Methoden bot, die vor Entdeckung der Logarithmen deren rechnerischen Zweck wenigstens teilweise erfüllten.

Die Verfolgung dieser beiden Methoden, der eben genannten der Produkttafeln, und der prosthaphäretischen Methode ist ein weiteres, ungemein anziehendes Gebiet, über das der Verfasser eingehende Belehrung giebt. Besonders die zweite, deren Geschichte er schon in einer früheren Abhandlung genauer erforscht hatte, die er bei Ibn Jûnos der Formel nach fand, deren Aufstellung durch Werner er nachweist, und die er sehr ausführlich bei Bürgi und Tycho verfolgt, bietet viel Neues. Dabei erscheint auch die Persönlichkeit Johannes Werners in helleres Licht gesetzt, den man als Epigonen Regiomontans ansehen, dessen Leistungen auf dem vorliegenden Gebiet man aber leider nur aus einzelnen auf ihn bezüglichen Notizen und den Anregungen, die sein ungedrucktes Werk *De triangulis* gleichzeitigen und späteren Mathematikern gab, erraten kann.

In der weiteren Darstellung des 16. Jahrhunderts finden Coppernicus und Rhäticus mit ihren auf das Dreikant gestützten Methoden, die uns jetzt zur elementaren Ableitung der Formeln der sphärischen Trigonometrie dienen, und der Definition aller trigonometrischen Funktionen aus dem rechtwinkligen Dreieck gebührende Würdigung. Dann aber müssen wir als hervorragend Vieta nennen, der in der allerdings beweislos gegebenen Aufstellung der trigonometrischen Formeln für das schiefwinklige Dreieck wie mit neuen Anschauungen (wir erwähnen die prinzipielle Benutzung des Supplementardreiecks, das einzig Nasir Eddin in einem Einzelfalle gebraucht hatte) seiner Zeit vorauseilte. Er zeigte späteren Mathematikern, wie Snellius den Weg und hätte mit gleichem Rechte wie Regiomontan ein Reformator der Trigonometrie genannt werden können, wenn er nicht wegen der Kürze und öfters Dunkelheit seiner Ausführungen von den gleichzeitigen Gelehrten wenig verstanden worden wäre. Der Bedeutung dieses grofsen Mannes für die Trigonometrie wird erst der Verfasser ganz gerecht, da bisher mehr die Verdienste Vietas um die Algebra, als um die Trigonometrie geschätzt wurden. Auch die Prinzipien der Goniometrie, speziell der Winkelteilung, die Vieta wohl gewifs von seinen algebraischen Untersuchungen ausgehend aufstellte, werden vorgeführt und mit den gleichzeitigen des geistreichen Autodidakten Jobst Bürgi verglichen, dessen gleiche Resultate auf geometrischem Wege gewonnen sind.

Von Interesse ist weiter die eingehende Besprechung des *Opus palatinum*, und die Würdigung der Bedeutung der *Geometria rotundi* von Thomas Fink in ihrem Einflufs besonders als Lehrbuch.

Schliefslich wäre noch zu erwähnen die Darstellung der an verschiedenen Stellen des Buches zu findenden Methoden zur Berechnung der Sinustabellen, und der allmählichen Vervollkommnung der griechischen Methoden bei den Arabern und bis zur Entdeckung der Logarithmen. Die aus der Reihenlehre gewonnenen Formeln sind in dem vorliegenden Bande, der etwa mit 1630 abschliefst, natürlich nicht mehr enthalten, dagegen findet sich am Schlusse ein interessantes von SNELLIUS angegebenes Verfahren, aus den ungenau gegebenen Zahlenwerten von $\sin \frac{\nu\pi}{2n}$ für ganzzahliges n und beliebiges ganzzahliges ν die genaueren Werte durch blofse Addition der gegebenen Zahlen und einmalige Division zu finden. Die Methode, die SNELLIUS in eine rechnerisch sehr einfache Form bringt, ist in moderner Schreibweise äquivalent mit der Formel

$$\sin \frac{\nu\pi}{2n} =$$

$$= \frac{\nu + 2\nu\left[\sin \frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2} + \sin \frac{n-2}{n}\frac{\pi}{2} + \cdots + \sin \frac{\nu}{n}\frac{\pi}{2}\right] + 2(\nu-1)\sin \frac{\nu-1}{n}\frac{\pi}{2} + \cdots + 2\sin \frac{1}{n}\frac{\pi}{2}}{n + 2(n-1)\sin \frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2} + 2(n-2)\sin \frac{n-2}{n}\frac{\pi}{2} + \cdots + 4\sin \frac{2}{n}\frac{\pi}{2} + 2\sin \frac{1}{n}\frac{\pi}{2}}$$

Ein praktischer Versuch zeigt, dafs in der That diese Formel im allgemeinen zu sehr viel besseren Näherungen führt, und bei mehrfacher Anwendung beliebige Genauigkeit erzielbar ist, wenn es auch theoretisch nicht ausgeschlossen ist, dafs einmal eine Näherung schlechter sein kann als die vorhergehende. Ob SNELLIUS diese Methode thatsächlich zur Berechnung seiner Sinustafel verwendete, möchte übrigens doch vielleicht zweifelhaft sein.

Der historische Wert des vorliegenden Werkes wird erhöht durch die Art, wie die Formeln, bez. Sätze und Lösungen der älteren Trigonometrie wiedergegeben sind. Es ist dabei, um die Sache einem modernen Leser geniefsbar und verständlich zu machen, darauf verzichtet, den schwerfälligen Wortlaut der Quellen wiederzugeben. Dagegen wird unter möglichster Beibehaltung der alten Bezeichnungsweise der Gedankengang der Autoren, trotzdem er uns ja oft auch schwerfällig erscheint, ungeändert wiedergegeben, wenn auch in modern abkürzender Form. Dadurch erst lernen wir klar verstehen, wie sehr die mangelnde Formulierung die Aufstellung allgemeiner Sätze erschweren mufste, und erkennen in jedem einzelnen Falle, wie weit der betreffende Mathematiker die Tragweite der gefundenen Lösungsmethode selbst übersah.

Anschliefsend erwähnen wir noch die interessanten Mitteilungen über die verschiedenen Versuche besonders im 17. Jahrhundert, abkürzende Bezeichnungen zur Formulierung trigonometrischer Beziehungen einzuführen, deren erfolgreiche Durchführung allerdings erst in eine spätere Periode fällt, und über die wir hoffentlich bald in einem zweiten Bande des Werkes weiteres erfahren werden.

Bemerkt sei nebenbei, dafs es sich für manche historisch nicht gebildete Leser vielleicht empfohlen hätte, die Definition des sinus versus bei seiner ersten Erwähnung pag. 34 zu geben. Von kleineren Versehen, resp. Druckfehlern, die uns beim Durchlesen des Werkes auffielen, sei erwähnt:

pag. 14, Anmerkung 6, HULTSCH, statt HEIBERG;
pag. 19, τμήματα, statt τρήματα;
pag. 21, vorletzte Zeile von unten: *vorhergehende Sehne*, statt nächste Sehne;
pag. 49, RUSKA, statt RASKA;
pag. 227, sin vers $(A - B)$, statt $\sin (A - B)$; sin vers c, statt $\sin c$.

Die Ausstattung des Buches ist, wie bei dem Verlage Teubner zu erwarten, in Text, Formeln und Figuren übersichtlich und würdig; der klare Stil der Darstellung macht dem Leser das Studium ebenso leicht wie angenehm.

München, 1. Januar 1900. W. M. KUTTA.

Al-Battânî sive Albatenii opus astronomicum. Ad fidem codicis escurialensis arabice editum, latine versum, adnotationibus instructum a Carolo Alphonso Nallino. Pars III. Textum arabicum continens. Mediolani 1899. 279 S. 4⁰. (Pubblicazioni del R. Osservatorio di Brera in Milano, No. XL, P. III.)

Eine sehr verdienstvolle Aufgabe hat sich Herr C. A. Nallino, Prof. am orientalischen Institute in Neapel, mit dieser Ausgabe des hervorragenden arabischen Astronomen Al-Battânî, des Albategnius des Mittelalters, gestellt, von der bis jetzt der dritte Teil, den arabischen Text enthaltend, vorliegt; der erste und zweite Teil, die lateinische Übersetzung des Textes mit Anmerkungen und diejenige der Tafeln enthaltend, werden bald nachfolgen.

Diese Aufgabe war eine sehr schwierige, da nur ein einziges, mit vielen Fehlern behaftetes Ms. dieser Astronomie vorhanden ist, dasjenige des Escurials in Madrid, bezeichnet mit No. 903 (bei Casiri, *Biblioth. arab.-hispana*, I. p. 342), und bekanntlich die lateinische Übersetzung des Plato Tiburtinus (gedr. zu Nürnberg 1537 und zu Bologna 1645) eine sehr schlechte und unvollkommene ist, indem sie nur den Text und nicht auch die Tafeln umfaſst; die schwierige Aufgabe wurde aber von Herrn Nallino, soweit ich die Sache beurteilen kann, ausgezeichnet gelöst, es liegt uns eine herrliche Ausgabe des arabischen Textes dieser Astronomie vor, in groſsem Quartformat mit 279 Seiten, eine Ausgabe, wie sie bis jetzt noch keinem arabischen Astronomen zu teil geworden ist; wir sind überzeugt, daſs auch die Übersetzung der Textausgabe entsprechen wird.

Den Tafeln gehen 57 Kapitel (arab. *bâb*) Text, die den Kapiteln der lateinischen Übersetzung des Plato entsprechen, voraus, und einige ungezählte, bei Plato fehlende Kapitel zur Erklärung einzelner Tafeln; auf den Text trete ich hier nicht näher ein, die Tafeln sind folgende:

1) Tafel der Chronik der babylonischen, persischen, griechischen, römischen und byzantinischen Herrscher von Nabonassar (Nebukadnezar) I. bis auf Theodosius III. (nach dem *Almagest*).

2) Tafel der Chronik der Chalifen von Muhammed bis auf al-Muṭîʿ lillâh (334—363 d. H.).

3) Tafel der Mitten der Länder, worin die geographische Lage von 94 (so im Titel, in Wirklichkeit nur 93) Ländern angegeben wird, nach dem Buche, genannt *ṣûrat el-arḍ* (das Bild der Erde), das von Einigen (z. B. von Lelewel, *Géogr. du moyen âge*, T. IV) für die erst in neuerer Zeit aufgefundene ebenso betitelte Abhandlung des Muhammed ben Mûsâ al-Chowârezmî gehalten wird, von Andern (wie z. B. von C. A. Nallino selbst, s. u.) für die Geographie des Ptolemäus, in einer Übersetzung, bezw. Umarbeitung, des Tâbit b. Qorra. (Diesem wird übrigens von Ibn Abî Uṣaibiʿa auſser der Übersetzung der Geographie des Ptolemäus auch ein Buch „über die Einteilung der Erde“ zugeschrieben).

4) Ohne neuen Titel folgen dann die Längen und Breiten von weitern 180 Ländern und Städten.

Diese geographischen Tafeln hat C. A. Nallino schon früher übersetzt und veröffentlicht mit reichhaltigem Kommentar, im Cosmos di Guido Cora, 12_2 (Torino 1894—96), Fasc. VI, unter dem Titel: *Le tabelle geografiche d'Al-Battânî*.

5) Tafel der Längen und Breiten von Städten und andern bekannten Orten (festen Plätzen) Spaniens und Nord-Afrikas.

6) Bildliche Darstellung der sieben Klimata der Erde durch konzentrische Kreise (Horizontkreise), und der Azimute der Aufgänge und Untergänge der Häuser des Tierkreises im Horizont jedes Klimas.

7) Eine astrologische Tafel, enthaltend die Regenten der Termini (Planetenbezirke), diejenigen der Facies oder Decani, etc. (vergl. über diese astrologischen Kunstausdrücke meine Übersetzung aus dem *Fihrist*, in d. Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **6**, 1892, p. 55).

8) Fixsterntafeln für das Jahr 1191 der Seleukidischen Ära (beg. am 1. Okt. 879).

9) Den Schlufs bilden Tafeln der bekannteren Fixsterne 1.—3. Gröfse, für das Jahr 1211 d. Seleuk. Ära (beg. am 1. Okt. 899).

Herr C. A. Nallino hat im arabischen Text eine Anzahl von Tafeln, besonders diejenigen, welche nur Zahlen enthalten, weggelassen, sie werden aber in die lat. Übersetzung aufgenommen werden.

Kilchberg b. Zürich, im Januar 1900. Heinrich Suter.

Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica (972—1003). **Accedunt aliorum opera ad Gerberti libellos aestimandos intelligendosque necessaria per septem appendices distributa. Collegit, ad fidem codicum manuscriptorum, partim iterum, partim primum edidit, apparatu critico instruxit, commentario auxit, figuris illustravit Nicolaus Bubnov.** Berlin 1899, R. Friedländer. CXX + 620 p. in-8⁰. M. 24.

Le volume que vient de publier M. Bubnov représente un labeur immense, et constitue une mine inépuisable de précieux renseignements sur la tradition manuscrite non seulement des écrits mathématiques attribués à Gerbert, mais de presque tous ceux qui ont circulé à la fin du X[e] ou au commencement du XI[e] siècle y compris les Géométries dites de Boèce et les écrits des Agrimenseurs. C'est certainement un ouvrage désormais indispensable pour l'étude de cette époque; cependant on ne peut se fier sans réserves à ses conclusions, souvent appuyées sur des conjectures d'une hardiesse tout au moins singulière, ni à ses remarques, parfois erronées au point de vue mathématique. — Ainsi dans le livre du *Podismus* (*Grom. Vet.* p. 300, 11 et suiv.), on trouve une application de la formule héronienne pour le calcul de l'aire d'un triangle dont on connaît les trois côtés. La formule est donnée expressément comme valable pour tout triangle, mais l'exemple choisi est celui d'un triangle rectangle (6, 8, 10). L'auteur de la troisième partie de la Géométrie dite de Gerbert (chap. 46, éd. Olleris) a copié ce texte sans le comprendre, et a abouti à une bizarre formule qui, comme il le remarque lui-même, n'est valable que pour les triangles rectangles de côtés proportionnels à 3, 4, 5. M. Bubnov prétend qu'il a eu raison de corriger le *Podismus*, et reproche à M. Cantor de ne pas y avoir vu clair!

Je crois en tout cas intéressant de signaler les pièces publiées par M. Bubnov pour la première fois, soit dans ce volume, soit en 1888 (*De exemplari epistolarum Gerberti*, St. Pétersbourg).

P. 23. Fragmentum de norma rationis abaci. — L'authenticité m'en paraît au moins douteuse.

P. 29, 30, 32. — Scholies, adressés à Constantin sur des passages de la Musique et de l'Arithmétique de Boèce.

P. 43 (cf. p. 487). — Début de la lettre de GERBERT à ADELBOLD.

P. 199—204. — Extraits du commentaire d'ABBON DE FLEURY sur le calcul de VICTORIUS.

P. 224. — Excerpta e Ratione numerorum abaci secundum HERIGERUM. — Court fragment sur la multiplication; M. BUBNOV attribue d'ailleurs à HERIGER DE LOBBES la première partie de la *Regula de abaco computi*, éditée par OLLERIS comme étant de GERBERT.

P. 246—293. — Commentaires (au nombre de trois, très inégaux) sur les règles de l'abacus de GERBERT. — Divers fragments concernant la même matière.

P. 297—299. — Fragments de NOTKER (de Liège?) et d'ABBON DE FLEURY touchant l'Arithmétique de BOÈCE, l. II, c. 1.

P. 370—376. — Préambule d'un traité sur l'astrolabe traduit de l'arabe. Ce morceau se trouve dans des mss. du XI^e siècle; M. BUBNOV le considère comme antérieur au *Liber de utilitatibus astrolabii*, qu'il penche d'ailleurs à regarder comme de GERBERT plutôt que de HERMANNUS CONTRACTUS. D'après lui le préambule inédit qu'il publie pourrait être attribué à LUPITUS DE BARCELONE, mentionné dans les Lettres de GERBERT.

P. 498—503, 552—553. Fragments mathématiques tirés de mss. des *Gromatici*, et dont une partie remonterait jusqu'à VARRON(?).

Pantin. PAUL TANNERY.

H. Brocard. Notes de bibliographie des courbes géométriques. Partie complémentaire. Bar-le-Duc 1899. (8) + 243 p. in-8^0; lithographiée.

Cet ouvrage est, comme l'indique son titre, destiné à combler les lacunes du travail publié par M. BROCARD en 1897 (voir Biblioth. Mathem. 1898, p. 23—27). Il contient un grand nombre de renseignements non seulement sur les courbes mentionnés auparavant, mais aussi sur plusieurs courbes dont l'auteur n'avait pas connaissance en 1897; le nombre total des noms de courbes signalés dans les deux parties s'élève à plus de 1000.

Dans la préface, M. BROCARD fait ressortir que les matériaux réunis par lui doivent suffire pour un ouvrage de librairie; nous espérons qu'il sera à même de rédiger bientôt cet ouvrage, qui fera sans doute de grands services à tous ceux qui s'occupent de l'étude des courbes géométriques et de leur histoire.

G. ENESTRÖM.

A. Rebière. Pages choisies des savants modernes, extraites de leurs œuvres. Paris, Nony & Cie., 1900. VIII + 618 p. in-8^0. Fr. 5.

Ce livre peut être considéré comme le second volume de l'ouvrage de M. REBIÈRE, *Les savants modernes, leur vie et leurs travaux* (Paris 1899), dont nous avons rendu compte dans la Biblioth. Mathem. 1898, p. 115—116. En effet, on retrouve dans les deux volumes à peu près les mêmes personnes, et, en général, le second contient les portraits qui manquent au premier.

Dans le livre dont il s'agit ici, M. REBIÈRE a reproduit ou traduit en français des morceaux choisis des œuvres d'un grand nombre de savants des 16^e—19^e siècles; les mathématiques pures et appliquées y sont représentées par COPERNICUS, VIÈTE, GALILEI, KEPLER, DESCARTES, FERMAT, PASCAL, J.-D. CASSINI, HUYGENS, NEWTON, LEIBNIZ, JACQUES et JEAN BERNOULLI, EULER, CLAIRAUT, D'ALEMBERT, LAGRANGE, W. HERSCHEL, MONGE, LAPLACE, DELAMBRE, LEGENDRE, L. CARNOT, FOURIER, GAUSS, PONCELET, CAUCHY, CHASLES, LE

Verrier, Mariotte, Volta, Watt, Coulomb, Biot, Ampère, Malus, Dulong, Arago, Fresnel, Regnault. D'autre part le livre ne contient que des morceaux populaires, et par conséquent il ne peut être utitisé comme une chrestomathie des mathématiques.

Par une rencontre fâcheuse, l'ouvrage de M. Rebière commence par un morceau dont l'auteur n'est nullement un des „grands précurseurs" des savants modernes. Ce morceau est traduit de la préface de l'œuvre de Copernicus *De revolutionibus orbium cœlestium,* et cette préface, qui contient des passages peu compatibles avec les vues de Copernicus, est de la main d'Andreas Osiander.

G. Eneström.

Festschrift zum siebzigsten Geburtstage Moritz Cantors. Zugleich neuntes Heft der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Im Auftrage herausgegeben von **M. Curtze** und **S. Günther.** Leipzig, Teubner 1899. VIII + 657 S. 8^0 + Porträt + 2 Tafeln. Preis M. 20.

Gewiſs giebt es überhaupt keine schönere Form, einem Fachgenossen die gebührende Anerkennung für seine Wirksamkeit öffentlich zu bezeugen, als eigene Untersuchungen auf seinem Gebiete auszuführen und ihm dieselbe als Festgabe darzubringen. Auf der anderen Seite muſs zugestanden werden, daſs die Herstellung einer solchen Festschrift sehr schwierig ist, wenn sie *nur* wertvolle Aufsätze enthalten soll. Ein hervorragender Forscher hat gewöhnlich so viele andere Verpflichtungen, daſs es ihm oft schwer sein wird einen Beitrag zur Festschrift zu liefern; von den übrigen Verfassern ist es im allgemeinen leichter solche Beiträge zu bekommen, aber man kann nicht immer sicher sein, daſs sie wirklich wertvoll sind, und sie zurückzuweisen ist in den meisten Fällen fast unmöglich.

Die Richtigkeit dieser alten Erfahrung wird auch durch die Cantorsche Festschrift bestätigt. Neben vielen Beiträgen, welche eingehende Untersuchungen erfordert haben und von bleibendem Wert sein werden, enthält sie auch Artikel, die ganz und gar das Gepräge eines Gelegenheitsaufsatzes tragen, und die sehr gut hätten ungeschrieben bleiben können, ohne daſs die mathematisch-historische Forschung dadurch etwas beträchtliches verloren hätte. Aber lobenswert ist in jedem Falle die Mühe, die sich die Herausgeber, der Verleger und die zweiunddreiſsig Mitarbeiter aus verschiedenen Ländern gegeben haben, um dem Jubilare die Festgabe an seinem Ehrentage überreichen zu können. Die Herausgeber und den Verleger haben wir schon oben genannt; wir fügen nur hinzu, daſs, wenn wir uns nicht irren, der Vertreter der Teubnerschen Firma, Herr Alfred Ackermann, bei der Herstellung der Schrift besonders thätig gewesen ist, und daſs die Namen der Mitarbeiter sind: V. V. Bobynin, A. von Braunmühl, F. Cajori, M. Curtze, S. Dickstein, G. Eneström, A. Favaro, E. Gelcich, J. H. Graf, S. Günther, T. L. Heath, J. L. Heiberg, A. Heller, F. Hultsch, K. Hunrath, G. Loria, P. Mansion, W. Fr. Meyer, F. Müller, A. Nagl, F. Rosenberger, F. Rudio, P. Stäckel, H. Staigmüller, M. Steinschneider, A. Sturm, H. Suter, P. Tannery, F. A. Unger, E. Wappler, G. Wertheim, E. Wohlwill.

Als Titelbild dient ein gelungenes Porträt des Herrn Cantor und am Ende der Schrift findet sich ein Verzeichnis seiner mathematischen Werke, Abhandlungen und Recensionen, von Herrn Curtze zusammengestellt.

G. Eneström.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, dafs die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

Amati, 63.
Anaritius, 30.
Astier, 17.
Aubry, 43, 59.
Beman, 69.
Bianchi, 91.
Bobynin, 4.
Boll, 21.
Boltzmann, 47.
Bolyai, W., 76.
Bosscha, 65.
Bouché-Leclerq, 20.
Boyer, 7.
Braunmühl, 12.
Brown, 72.
Bubnow, 31.
Cajori, 77.
Cantor, M., 5, 6.
Cavani, 92.
Cercignani, 11.
Compère, 45.
Cozza-Luzi, 57.
Curtze, 30, 52.
Delaunay, 85.
Dickstein, 66, 84.
Diofantos, 28.
Elsässer, 36.
Eneström, 2, 32, 37.
Engel, 79, 91.
Favaro, 56, 58.
Fazzari, 23.
Förster, 14.
Galdeano, 97.
Galilei, 56, 57.
Gauss, 75, 76.
Gerbert, 31.
Gherardo, 30.
Gollob, 28.
Goodspeed, 27.
Görland, 24.
Gravelaar, 54.
Gross, 81.
Günther, L., 55.
Günther, S., 67.
Halsted, 71.
Helm, 48.
Heron, 26.
Hoppe, 53.
Huygens, 60.
Kepler, 55.
Lampe, 90.
Lange, 80.
Léwy, 89.
Lindemann, 18.
Lobatschewsky, 79.
Loewy, 87.
Loria, 3.
Maass, 25.
Mach, 13.
Maupin, 38.
Merckel, 22.
Meyer, W. Fr., 83, 84.
Müller, Ad., 51.
Olbers, 75.
Ovidio, 89.
Pahl, 50.
Pierpont, 98.
Ramorino, 44.
Rebière, 39, 40.
Saalschütz, 19.
Schilling, 75.
Schlegel, 70.
Schmidt, Fr., 76.
Schmidt, W., 26.
Schukowsky, 95.
Stäckel, 64, 76, 78, 82.
Steinschneider, 33, 34.
Steinweller, 10.
Studnicka, 9, 49.
Suter, 29.
Thibaut, 16.
Timtchenko, 41.
Troels-Lund, 15.
Vacca, 62, 68.
Vailati, 8.
Vivanti, 83.
Volkmann, 61.
Wappler, 35.
Wassilief, 85.
Whittaker, 73.
Wölffing, 42, 96.
Woodward, 74.
Zednik, 86.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. **8** (Leipzig 1898). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 21, 1900, 505. — **9** (Leipzig 1899). [Recension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 31, 1900, 31—38. (G. Wertheim.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1899, 143—144. — Deutsche Litteraturz. 21, 1900, 759—761. (E. Lampe.) — Fiziko-matem. naouki 1_2, 1899, 76—83. (V. V. Bobynin.) [1

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von ‖ Journal d'histoire des mathématiques rédigé par G. Eneström. Stockholm. 8°. [2
1899 : 4. — [Anzeige der 3. Folge:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 30, 1899, 596—597. (G. Wertheim.) — *New-York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 6_2, 1899, 118. — El progreso matem. 1_2, 1899, 192. — L'enseignement mathém. 2, 1900, 58—59.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [3
1899 : 4. 1900 : 1. — [Recension des Jahrg. 1898:] Fizikomatem. naouki 1_2, 1899, 55—60. (V. V. Bobynin.)

Физико-математическія науки въ ходѣ ихъ развитія. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°. [4
1_2 : 2—3. — Die physisch-mathematischen Wissenschaften im Gange ihrer Entwickelung. Zeitschrift herausgegeben von V. V. Bobynin.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. Cantor. Leipzig. 8°. [5
45 (1900) : 1.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Zweiter Halbband. Von 1550—1668. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner 1900. [6
8°, XII S. + S. 481—943. — [12 M.]

Boyer, J., Histoire des mathématiques. Paris, Carré & Naud 1900. [7
8°, XI + 260 S. — [5 fr.] — [Recension:] Revue scient. 13_4, 1900, 52. — Revue de mathém. spéc. 10, 1900, 448. (E. H.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 10—12. (G. L.)

Vailati, G., Il metodo deduttivo come strumento di ricerca (1898). [Recension:] Jornal de sc. mathem. 10, 1899, 188—189. (G. T.) [8

* **Studnička, F. J.** [Heroen des Geistes]. Prag 1898. [9
8°, 264 S. — Böhmisch.

* **Steinweller, F.,** Kurzer Abriss der Geschichte des Rechenunterrichts, sowie Beschreibung der wichtigsten Lehrmittel

für denselben. Zweite Auflage. Leipzig, Hirt 1899. [10
8°, 48 S. — [50 ₰.]

***Cercignani,** Notizie storiche sul numero π. *Firenze*, Istituto nazionale, Bolletino 1899. [11

Braunmühl, A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Erster Theil (1900). [Recension:] Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 366—368. (M. Curtze.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. **31**, 1900, 113—117. (S. Günther.) [12

***Mach, E.,** Bemerkungen über die historische Entwickelung der Optik. [13
Zeitschr. für physik. Unterr. **11**, 1898, 3—9.

Förster, W., Die Wandlungen des astronomischen Weltbildes bis zur Gegenwart. [14
Gesellsch. deutscher Naturf., Verhandl. **71** (1899), *1*: 59—78.

Troels-Lund, Himmelsbild und Weltanschauung im Wandel der Zeiten. Autorisierte, vom Verfasser durchgesehene Übersetzung von Leo Bloch. Leipzig, Teubner 1899. [15
8°, V + 286 S. — [5 ℳ] — [Recension:] Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900, Hist. Abth. 15. (Cantor.)

b) Geschichte des Altertums.

***Thibaut, G.,** Indo-arische Astronomie, Astrologie und Mathematik. Strassburg, Trübner 1899. [16
8°, (2) + 80 + 2 S. — [4 ℳ] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 503—505. (S. Konow.)

Astier, R., L'origine du système de la numération décimale. [17
Revue scient. **11**$_4$, 1899, 501—502.

Lindemann, F., Über einige prähistorische Gewichte aus deutschen und italienischen Museen. I. [18
München, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. (Math. Cl.) 1899, 71—136.

Saalschütz, L., Zwei mathematische Probleme des Altertums. [19
Königsberg, Physik. Gesellsch., Sitzungsber. **39**, 1898, 8—14. — Duplicatio cubi und Trisectio anguli.

***Bouché-Leclerq, A.,** L'astrologie grecque. Paris 1899. [20
8°, 20 + 663 S. — [20 fr.]

Boll, F., Beiträge zur Überlieferungsgeschichte der griechischen Astrologie und Astronomie (1899). [Recension:] Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 416—418. (J. L. Heiberg.) [21

***Merckel, C.,** Die Ingenieurtechnik im Alterthum. Berlin, Springer 1899. [22
8°, XIX + 658 S. + Karte. — [20 ℳ] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 736.

Fazzari, G., Metodo di Archita per la soluzione del problema delle due medie proporzionali. [23
Il Pitagora (Palermo) **6**, 1900, 16—17.

Görland, A., Aristoteles und die Mathematik (1899). [Recension:] Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abth. 9—10. (Cantor.) [24

***Maass, E.,** Commentariorum in Aratum reliquiae. Collegit, recensuit, prolegomenis indicibusque instruxit. Berlin, Weidmann 1898. [25
8°, LXXI + 749 S. + 2 Taf. — [30 ℳ]

Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia. I. Herausgegeben von W. Schmidt (1899). [Recension:] Nature **61**, 1899, 202—203. — Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abth. 10—12. (Cantor.) [26

Goodspeed, E. J., The Ayer Papyrus: a mathematical fragment (1898). [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1899, 142. [27

Gollob, E., Ein wiedergefundener Diophantuscodex. [28
Zeitschr. für Mathem. **44**, 1899; Hist. Abth. 137—140.

c) Geschichte des Mittelalters.

Suter, H., Berichtigung zu den „Notizen über arabische Mathematiker und Astronomen". [29
Biblioth. Mathem. 1899, 118—119.

Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis edidit M. Curtze (1899). [Recension:] Zeitschr. für mathem. Unterricht **30**, 1899, 597—598. (G. Wertheim.) — Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abth. 12—13. (Cantor.) [30

Bubnow, N., Gerberti postea Silvestri II papae Opera mathematica (1899). [Recension:] Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abth. 13—14. (Cantor.) — Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 883—893. (M. Curtze.) [31

Eneström, G. [Sur l'origine du mot Almanach]. [32
Biblioth. Mathem. 1899, 119. — Question.

Steinschneider, M., Die Mathematik bei den Juden. [33
Biblioth. Mathem. 1899, 97—104.

Steinschneider, M., Zur Anfrage über einen Mathematiker Namens Isak ben Salomo. [34
Biblioth. Mathem. 1899, 119.

Wappler, E., Zur Geschichte der Mathematik. [35
Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abth. 7—9.

Elsässer, W., Die Funktion des Auges bei Leonardo da Vinci. [36
Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abth. 1—6.

Eneström, G., Remarque sur l'époque où le mot „plus" a été introduit comme terme d'addition. [37
Biblioth. Mathem. 1899, 105—106.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Maupin, G., Opinions et curiosités touchant la mathématique, d'après les ouvrages français du XVI^e, XVII^e et XVIII^e siècles (1899). [Recension:] Zeitschr. für Mathem. **44**, 1899; Hist. Abth. 157. (Cantor.) — Jornal de sc. mathem. **13**, 1899, 183—184. (G. T.) — Biblioth. Mathem. 1899, 111. (G. Eneström.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin **6**$_2$, 1900, 255—257. (F. Cajori.) [38

Rebière, A., Les savants modernes, leur vie et leurs travaux (1899). [Recension:] L'enseignement mathém. **1**, 1899, 146—147. [39

Rebière, A., Pages choisies des savants modernes extraites de leurs œuvres. Paris, Nony 1900. [40
8°, VIII + 618 S. — [5 fr.]

Тимченко, И., Основанія теоріи аналитическихъ функцій. Часть **1.** Историческія свѣдѣнія о развитіи понятій и методовъ

лежащихъ въ основанiи теорiи аналитическихъ функцiй. Томъ 1. Одесса 1899. [41
8°, (2)+XV+655+IV+IV+III S. — Timtchenko, I., Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen. Theil 1. Geschichte der Entwickelung der Begriffe und der Methoden der Theorie der analytischen Funktionen. — Erschien ursprünglich in drei Abteilungen in den Heften 12 (1892), **16** (1899) und **19** (1899) der Записки математическаго отдѣленiя новороссiйскаго общества естествоиспытателей.

Wölffing, E., [Bibliographische Notiz] über die 3- und *n*-Teilung des Winkels. [42
Stuttgart, Mathem. Verein, Mitteil. 2_2, 1900, 21—27.

Aubry, A., Historia del problema de las tangentes. [43
El progreso matem. 1_3, 1899, 129—137, 164—167.

Ramorino, A., Gli elementi imaginari nella geometria. [44
Giorn. di matem. **35**, 1897, 242—258; **36**, 1898, 317—345. — Historische Abhandlung.

Compère, C., Le problème des brachistochrones. Essai historique. [45
Liège, Soc. d. sc., Mémoires 1_2, 1899. 128 S.

*Vorreden und Einleitungen zu klassischen Werken der Mechanik: Galilei, Newton, d'Alembert, Lagrange, Kirchhoff, Hertz, Helmholtz. Übersetzt und herausgegeben von Mitgliedern der Philosophischen Gesellschaft an der Universität zu Wien. Leipzig, Pfeffer 1899. [46
8°, 267 S. — [5 *M.*]

Boltzmann, L., Über die Entwickelung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit. [47
Gesellsch. deutscher Naturf., Verhandl. **71** (1899), *1*: 99—122.

***Helm, G.,** Die Energetik nach ihrer geschichtlichen Entwickelung. Leipzig, Veit 1898. [48
8°, XII + 370 S. — [8,60 *M.*]

***Studnička, F. J.** [Übersicht des Studiums der exakten Wissenschaften bei uns. I. Mathematik. II. Physik und Chemie. III. Astronomie und Meteorologie]. Prag 1898. [49
Folio, 41 S. — Böhmisch.

***Pahl, F.,** Die Entwickelung des mathematischen Unterrichts an unseren höheren Schulen. I. Charlottenburg 1898. [50
4°, 29 S.

***Müller, Ad.,** Nicolaus Copernicus der Altmeister der neueren Astronomie. Ein Lebens- und Kulturbild. Freiburg i/B., Herder 1898. [51
8°, VII + 159 S. — [2 *M.*]

Curtze, M., Nicolaus Coppernicus. Eine biographische Skizze (1899). [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1899, 128. (G. L.) — Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abth. 114. (Cantor.) [52

Hoppe, E., Michael Stifels handschriftlicher Nachlaſs. [53
Hamburg, Mathem. Gesellsch., Mittheil. **3**, 1899, 411—423.

Gravelaar, N. L. W. A., John Napiers werken (1899). [Recension:] Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abth. 15—16. (Cantor.) [54

Günther, L., Keplers Traum vom Mond (1898). [Recension:] Zeitschr. für Mathem. **44**, 1899; Hist. Abth. 124. (Cantor.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 6_2, 1899, 116. (E. W. Brown.) — Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 634—635. (M. Curtze.) [55

Le Opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume IX. Firenze 1899. [56
4°, 296 + (1) S. — Herausgegeben von A. Favaro.

Cozza-Luzi, G., Galileo Galilei: Trattato del flusso e reflusso del mare, secondo l'autografo Vaticano. Roma 1898. [57
8°, 41 S. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **20**, 1899, 1800—1803. (E. Wohlwill.)

Favaro, A., Nota intorno all' autografo Galileiano del „Discorso sul flusso e reflusso del mare" nuovamente ritrovato nella biblioteca Vaticana. [58
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 8_8: 1, 1899, 353—360. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **20**, 1899, 1800—1803. (E. Wohlwill.)

Aubry, A., Sobre la fórmula de Wallis. [59
El progreso matem. 2_2, 1900, 16—22. — Historische Notiz.

Œuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la société hollandaise des sciences. Tomes VI—VIII (1895—1899). [Recension:] Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 437—438. (E. Gerland.) [60

Volkmann, P., Über Newton's „Philosophiae naturalis principia mathematica" und ihre Bedeutung für die Gegenwart. [61
Königsberg, Physik. Gesellsch., Abhandl. **39**, 1898, 1—17.

Vacca, G., Sui manoscritti inediti di Leibniz. [62
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1899, 113—116.

Amati, A., Di don Pietro Agnesi e delle sue figlie Maria Gaetana, Maria Teresia e Paolina. [63
Milano, Istit. Lombardo, Rendiconti 31_2, 1898, 1380—1394, 1493—1520.

Stäckel, P., Bemerkungen zu Lamberts Theorie der Parallellinien. [64
Biblioth. Mathem. 1899, 107—110.

Bosscha, J., Martinus van Marum. [65
Archives Teyler 6_2, 1899. (2) + 22 S.

Dickstein, S., Przyczynek do historyi zasad rachunku nieskończonostkowego Krytycy „Teoryi funkcyj analitycznych" Lagrange'a. [66
Praze matem.-fizyczne **10**, 1899, 178—192. — Polnische Übersetzung des in den Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, 65—79 publizierten Aufsatzes.

Günther, S., G. C. Lichtenberg und die Geophysik. [67
Wien, Geogr. Gesellsch., Abhandl. **1**, 1899, 121—135.

Vacca, G., Sui precursori della logica matematica. II. Gergonne. [68
Revue de mathém. **6**, 1899, 183—186.

Beman, W. W., Un chapitre de l'histoire des mathématiques. [69
L'enseignement mathém. **1**, 1899, 162—184. — Übersetzt aus dem Englischen (vgl. Biblioth. Mathem. 1897, S. 117) von Ch. Berdellé.

Schlegel, V., Sur le développement et l'état actuel de la géométrie à *n* dimensions. [70
L'enseignement mathém. **2**, 1900, 77—114.

Halsted, G. B., Report on progress in non-euclidian geometry. [71
Science (New York) **10**, 1899, 545—557. — [Recension:] *New York*, Americ. mathem. soc. $\mathbf{6}_2$, 1899, 58—59.

*__Brown, E. W.,__ Report on the recent progress of solids and fluids. [72
Americ. assoc., Proceedings **47** (1898), 53—64.

Whittaker, E. T., Report on the progress of the solution of the problem of three bodies. [73
British assoc., Report 1899, 121—159.

Woodward, R. S., The century's progress in applied mathematics. [74
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin $\mathbf{6}_2$, 1900, 133—163.

*Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss. Herausgegeben von C. Schilling. Erste Abteilung. Berlin, Springer 1900. [75
8°, VII + 767 S. — [16 ℳ] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 761.

Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai. Herausgegeben von Fr. Schmidt und P. Stäckel. Leipzig, Teubner 1899. [76
4°, XII + (3) + 208 S. + Faksim. — [16 ℳ] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 829. — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 27. (G. L.)

Cajori, F., Carl Friedrich Gauss and his children. [77
Science (New York) **9**, 1899, 697—704.

Stäckel, P., Johann Bolyais Theorie der imaginären Gröfsen (1899). [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1899, 143. [78

Urkunden zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie. I. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschewsky. Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von F. Engel. Leipzig, Teubner 1899. [79
8°, XVI + 476 S. — [14 ℳ] — [Recension:] Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abth. 16—17. (Cantor.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1899, 116—118. (G. L.)

Lange, J., Jacob Steiners Lebensjahre in Berlin 1821—1863. Nach seinen Personalakten dargestellt (1899). [Recension:] L'enseignement mathém. **1**, 1899, 230—231. (H. Fehr.) — Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abth. 17. (Cantor.) [80

*__Gross, R.,__ Robert Mayer und Hermann von Helmholtz. Eine kritische Studie. Berlin, Krayn 1898. [81
8°, 174 S. — [4,50 ℳ] — [Recension:] Zeitschr. für Mathem. **44**, 1899; Hist. Abth. 173. (B. Nebel.)

Stäckel, P., Die Entdeckung der einseitigen Flächen. [82
Math. Ann. **52**, 1899, 598—600.

Meyer, W. Fr., Rapporto sui progressi della teoria proiettiva degli invarianti nell' ultimo quarto di secolo. Traduzione dal tedesco di G. Vivanti con aggiunte e modificazioni dell' autore. Napoli, Pellerano 1900. [83
4°, (2) + 237 + (3) S. — Separatabzug aus dem Giorn. di matem. Jahrg. **32**—**37**.

Meyer, W. Fr., O stanie obecnym teoryi niezmienników. Przełożył S. Dickstein. Warszawa 1899. [84
8°, (4) + II + 185 + (2) S. — Separatabzug aus den Prace matem.-fizyczne, Jahrg. 7—10.

Wassilief, A. und **Delaunay, N.,** P. L. Tschebyschef u. seine wissenschaftlichen Leistungen. Die Tschebyschefschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen. Leipzig, Teubner 1900. [85
8°, (4) + 70 S. + Porträt. — [4 ℳ]

*__Zednik, Jella von,__ Sophie Kowalewsky, ein weiblicher Professor. Prag, Härpfer 1898. [86
8°, 15 S. [20 ₰.]

Loewy, M., Scientific worthies. 32. Simon Newcomb. [87
Nature **60**, 1899, 1—3.

Mathematisches Abhandlungsregister. 1898. 2. Hälfte: 1. Juli bis 31. December. [88
Zeitschr. für Mathem. **44**, 1899; Hist. Abth. 135—208.

e) Nekrologe.

Eugenio **Beltrami.** [89
Paris, Acad. d. sc., Comptes Rendus **130**, 1900, 677—681. (M. Lévy.) — *Torino*, Accad. d. sc., Atti 1900. 8 S. (E. d'Ovidio.) — Supplem. al Periodico di matem. **3**, 1900, 65. — L'enseignement mathém. **2**, 1900, 144—145.

Philipp Wilhelm **Brix.** [90
Berlin, Deutsche physik. Gesellsch., Verhandl. 1, 1899, 125—135. (E. Lampe.)

Sophus **Lie.** [91
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti $\mathbf{8}_5$: 1, 1899, 3[illegible]—366. (L. Bianchi.) — *Leipzig*, Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Berichte (Mathem. Cl.) 1900, XI—LXI. (F. Engel.)

Cesare **Razzaboni.** [92
Cavani, A., Elogio storico. Bologna 1899. 4°, 126 S. + Porträt.

Alphonse-Michel **Rebière.** [93
L'enseignement mathém. **2**, 1900, 144. (C.-A. L.)

Ferdinand **Rosenberger.** [94
Zeitschr. für mathem. Unterr. **31**, 1900, 78—79.

Th. A. **Sludskij.** [95
Moskwa, Matem. obchtch., Sbornik **20**, 1898, 337—349. (N. E. Schukowskij.)

f) Aktuelle Fragen.

Wölffing, E., Die litterarischen Hilfsmittel der Mathematik. [96
Korrespondenzbl. für die Realschulen Württembergs **5**, 1898, 417—427, 459—466.

Galdeano, Z. G. de, La moderna organización de la matemática. [97
El progreso matem. $\mathbf{1}_2$, 1899, 182—190; $\mathbf{2}_2$, 1900, 27—29.

Pierpont, J., Mathematical instruction in France. [98
New-York, Americ. mathem. soc., Bulletin $\mathbf{6}_2$, 1900, 225—249.

Le congrès international des mathématiciens (6—12 août 1900, Paris). [99
L'enseignement mathém. **2**, 1900, 139—144.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Prof. A. Sommerfeld in Clausthal zum Professor der Mechanik an der technischen Hochschule in Aachen.

— Privatdoz. I. Bendixson in Stockholm zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Stockholm.

— Privatdoz. V. Varičak in Agram zum Professor der Mathematik an der Universität in Agram.

Todesfälle.

— Karl Bobek, Professor an der deutschen Universität in Prag, geboren zu Lhotka in Böhmen am 25. Februar 1855, gestorben in Prag am 15. Dezember 1899.

— Friedrich August, Professor der Mathematik an der Artillerie- und Ingenieurschule in Berlin, geboren in Berlin am 17. September 1840, gestorben daselbst am 8. Januar 1900.

— Johann Friedrich Adalbert Gebhardt, Professor der Mathematik und Physik sowie Conrector des Nikolai-Gymnasiums in Leipzig, geboren zu Neu-Ebersbach bei Löbau am 9. Oktober 1839, gestorben in Leipzig am 13. Januar 1900.

— Karl Julius Herrmann Schaeffer, Professor der Mathematik in Jena, geboren in Weimar am 6. August 1824, gestorben in Jena am 3. Februar 1900.

— Eugenio Beltrami, professeur de physique mathématique à l'université de Roma, sénateur, président de l'Accademia dei Lincei à Roma, né à Cremona le 16 novembre 1835, mort à Roma le 18 février 1900.

— Alphonse-Michel Rebière, examinateur d'admission à l'école spéciale militaire de Saint-Cyr, mort à Paris le 21 février 1900, à l'âge de 58 ans.

— Elwin Bruno Christoffel, emeritierter Professor der Mathematik an der Universität in Strafsburg, geboren am 10. November 1829 zu Montjoie (Rhein-Preufsen), gestorben am 15. März 1900 in Strafsburg.

— Joseph-Louis-François Bertrand, professeur de mathématique physique au Collège de France, secrétaire de l'académie des sciences de Paris, né à Paris le 11 mars 1822, mort à Paris le 3 avril 1900.

Demnächst erscheinende Werke.

— M. Gino Loria a terminé, il y a quelques mois, le manuscrit des trois derniers livres de son ouvrage: *Le scienze esatte nell' antica Grecia,* dont les deux premiers parties ont paru respectivement en 1893 et en 1895. Voici les titres de ces trois livres: III. *Il substrato matematico della filosofia naturale dei Greci.* — IV. *Il periodo argenteo della geometria greca.* — V. *L'aritmetica dei Greci.* Quatre feuilles du 3e livre ont été tirées actuellement.

— Der dritte Band der zweiten Auflage von Cantors *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* ist schon unter der Presse; er erscheint, wie die erste Auflage dieses Bandes, in drei Abteilungen.

— Der erste Teil des *Mathematischen Vokabulariums in deutscher und französischer Sprache,* mit dem Herr Felix Müller seit vielen Jahren beschäftigt worden ist, befindet sich jetzt unter der Presse. Das Buch enthält mehr als zehntausend Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik, mit kurzen, den Begriff näher präzisierenden Zusätzen, Angabe der einschlägigen Disziplin und teilweise kurzen Notizen über den Ursprung des Begriffes, z. B.

contrevariant (covariant spécial) (Sylvester 1851) [form. alg.] Contravariante, Zwischenform.

courbe de passage (d'un plan multiple) (Clebsch 1868) [représ. d'une surf.] Übergangskurve.

formule de Gompertz (pour la loi de mortalité) (Gompertz 1825) [ar. prat.: assurance sur la vie] Gompertzsche Formel.

Das Vokabularium dient 1) als Ergänzung zu allen Wörterbüchern in französischer und deutscher Sprache, 2) als Vorarbeit für ein mathematisches Wörterbuch und 3) als lexikographischer Führer durch die mathematische Terminologie. Bei der Herausgabe wird der Verf. durch die Herren J. Neuberg in Liége und A. Wangerin in Halle unterstützt.

— Eine Arbeit von Herrn H. Suter mit dem Titel: *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* ist seit einiger Zeit vom Verfasser beendet und wird bald erscheinen. Dieselbe enthält mehr als 500 Artikel über Gelehrte, die sich mit Mathematik, Astronomie und Astrologie beschäftigt haben, beginnt mit Ibrâhim el-Fâzarî, der bei der Gründung Bagdads beteiligt war, und schliefst mit Behâ ed-Dîn el-'Âmilû (gest. 1622), dem bekannten Verfasser der von Nesselmann (1843) und von Marre (1864) herausgegebenen *Essenz der Rechenkunst.*

Mathematisch-historische und litterarische Arbeiten in Vorbereitung.

— Professor R. Haussner in Giefse bereitet für die „Sammlung Schubert" einen Abrifs der Geschichte der Mathematik vor, der ungefähr 350 Druckseiten umfassen und vor Ende 1901 erscheinen wird. Der Abrifs wird die hauptsächlichsten historischen Entwickelungsmomente in möglichst gedrängter Form geben.

— Die Akademie der Wissenschaften in München hat Herrn Professor August Heller in Budapest mit der Abfassung des noch ausstehenden Bandes der Sammlung: *„Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. Neuere Zeit"*, der die *Geschichte der Physik* behandeln wird, betraut, und Herr Heller ist jetzt mit den nötigen Vorarbeiten dazu beschäftigt. Das Buch soll zwar in erster Linie den Anteil, den die Deutschen an der Entwickelung der Physik genommen, darstellen, aber doch stets die von aufsen nach Deutschland eingeströmten Ideenzüge berücksichtigen, sodafs auf diese Weise ein gewissermafsen vollständiges Bild der ganzen Entwickelung der Physik hergestellt werden wird.

— MM. Carré et Naud, éditeurs à Paris, préparent un livre d'adresses des mathématiciens du monde entier, dont le titre sera *Annuaire des mathématiciens.* A cet effet, il ont expédié des circulaires demandant aux destinataires des renseignements nécessaires, et il y ont reçu de nombreuses réponses. Nous espérons que cette utile entreprise pourra être menée à bien sans trop de délai, de manière que l'*Annuaire* soit publié déjà avant la fin de cette année.

Gekrönte Preisschriften.

— *Academia de ciencias exactas, físicas y naturales de Madrid.* Sur trois mémoires présentés pour le concours de mathématiques de 1897 („Catalogue méthodique de toutes les courbes qui ont reçu un nom spécial, accompagné d'une idée succincte de la forme des équations et des propriétés générales de chacune d'elles, avec une notice des ouvrages et auteurs qui les ont originairement fait connaître"), deux ont obtenu des prix, savoir ceux de M. G. Loria, de Genova, et M. F. G. Teixeira, de Porto. Le troisième mémoire, qui avait pour l'auteur M. Joaquín de Vargas y Aguirre, de Salamanca, a remporté un *accessit.*

— *Académie des sciences de Paris.* M. Jules Drach a reçu une mention honorable pour son étude sur les questions relatives à la détermination, aux propriétés et aux applications des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales à n variables.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Concours de l'année 1900. On demande une contribution à l'étude algébrique et géométrique des formes n-linéaires, n étant plus grand que 3.

— *Académie des sciences de Danemark à Kjöbenhavn.* Concours pour l'année 1900. Elaboration complète du système des formules servant au calcul des trajectoires intermédiaires des planètes déterminées par des équations différentielles de la forme

$$\frac{d^n f}{du^n} + \frac{d^{n-2} f}{du^{n-2}} = 0, \qquad n \gtrless 4$$

(où f représente et chacune des coordonnées orthogonales et héliocentriques du corps céleste, et le temps, voire même, si l'on veut, le rayon vecteur, tandis qu'on peut caractériser u comme l'anomalie excentrique), et de son application à un cas de mouvement quelconque.

— *Jablonowskische Gesellsch. in Leipzig.* Preisaufgabe für das Jahr 1902. Die in der Abhandlung von Poincaré, *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (Acta Mathem. **20**, 1896) enthaltenen Untersuchungen sollen nach irgend welcher Seite hin wesentlich vervollkommnet werden.

— *Academia de ciencias exactas, fisicas y naturales de Madrid.* Concurso del año 1900. Estudio de la deformación de una placa elástica rectangular, sujeta á fuerzas diversamente distribuidas por su superficie. (Etudier la déformation d'une plaque élastique rectangulaire, soumise à des forces diversément réparties sur sa surface.) — Concurso del año 1901. Exposición didáctica de las modernas teorias geométricas no Euclídeas, ó análisis razonado de los principales trabajos sobre esta parte de la ciencia matemática, á contar de la época de Gauss, hasta nuestros dias. (Exposé didactique des théories géométriques modernes non euclidiennes, ou analyse raisonnée des principaux travaux publiés sur cette partie de la science mathématique depuis l'époque de Gauss jusqu'à nos jours.)

— *Istituto Lombardo di scienze e lettere in Milano.* Tema di premio per l'anno 1901. Considerate le equazioni differenziali che frequentemente si presentano nei problemi dell' elettrotecnica, studiare e indicare quali metodi meglio praticamente conducono alla loro integrazione sia pure approssimata ed illustrarne la esposizione con degli esempi.

— *Académie des sciences de Paris.* Concours pour l'année 1900. Perfectionner, en quelque point important, la recherche du nombre des classes de formes quadratiques à coefficients entiers, de deux indéterminées. — Développer et perfectionner la théorie des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution.

— *Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse.* Concours de l'année 1900. Recherche et étude des familles de surfaces possédant cette propriété que toutes leurs trajectoires orthogonales soient des courbes planes, en se plaçant particulièrement à l'un des points de vue suivants:

1° Pour que toutes les surfaces définies en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation: $\varrho = f(x, y, z)$, où ϱ est un paramètre variant d'une surface de la famille à l'autre, admettent des trajectoires orthogonales planes, il faut que f vérifie une équation aux dérivées partielles du troisième ordre dont on propose l'étude.

2° On pourra utiliser aussi la méthode périmorphique en s'inspirant du *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* (Journ. de mathém. 7_4, 1891) de Ribaucour et en particulier du chapitre 13 intitulé: „Recherches des trajectoires orthogonales planes des surfaces."

— *Istituto Veneto delle scienze, lettere ed arti.* Tema di premio per l'anno 1902. I caratteri projettivi delle superficie algebriche a due dimensioni dello spazio a n dimensioni.

Vermischtes.

— Prof. A. Macfarlane delivers at present at the University of Pennsylvania (Philadelphia) a special course of lectures on space-analysis. He discusses the questions in dispute between the followers of Hamilton, of Grassmann and of Descartes, and presents the subject as the space-generalisation of algebra.

— An *Astronomical and Astrophysical society of America* has been recently founded. The charter members number 114. The president of the society is Simon Newcomb.

— Outre les deux congrès mentionnés ci-avant p. 264—265, il se tiendra cet été à Paris un troisième qui puisse intéresser les mathématiciens, savoir le *Congrès international de philosophie* (2 au 7 août 1900). Une partie du programme de ce congrès est consacrée aux principes des sciences mathématiques, et il y a aussi quelques questions sur leur histoire, p. ex. sur les origines du calcul infinitésimal, sur la génèse de la notion d'imaginaire et sur la découverte de la gravitation neutonienne.

— Die 9. Hauptversammlung des *Deutschen Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften* findet in Hamburg am 4. bis 7. Juni 1900 statt. Das Programm kündigt u. a. auch einen Vortrag von Herrn Schwalbe über die geplante internationale naturwissenschaftliche Bibliographie an.

— *Zwei neue mathematische Zeitschriften.* Professor Alberto Conti in Bologna hat ein neues Journal mit dem Titel: Il Bolletino di matematiche e di scienze fisiche e naturali begründet, das hauptsächlich für Schullehrer und Schüler an den italienischen Normalschulen bestimmt ist. Das erste Heft erschien am 1. Dezember 1899, und jährlich werden 24 Hefte herausgegeben werden. — Die „American mathematical society" hat kürzlich das erste Heft seiner neuen Zeitschrift: Transactions of the American mathematical society herausgegeben. Die Redakteure sind E. H. Moore, E. W. Brown und Th. S. Fiske; jährlich werden 4 Hefte erscheinen, die zusammen einen Band von wenigstens 400 Seiten bilden.

— In den dem deutschen Reichstage vorgelegten Reichshaushaltungsetat für 1900 ist als einmalige Ausgabe für die geplante internationale naturwissenschaftliche Bibliographie (die Schlufskonferenz wird Mitte Juni 1900 in London stattfinden) eine Summe von 15000 Mark eingestellt worden.

Haben Vitruv und die römischen Feldmesser aus Heron geschöpft?

Von

Wilhelm Schmidt in Helmstedt.

Es ist nicht das geringste Verdienst CANTORS, in seinen *Agrimensoren* (1875)[1]) in anschaulicher und anregender Weise den Zusammenhang zwischen griechischer Wissenschaft und römischer Praxis dargelegt zu haben. Wenn auf irgend einem Gebiete, so sind die Römer auf dem Gebiete der Mathematik, insbesondere der Feldmeſskunst, Schüler der Griechen, dieses hervorragendsten Kulturvolkes des Altertums, gewesen. Leider sind uns gerade viele derjenigen griechischen Schriften verloren gegangen, welche die Gebiete der exakten Wissenschaften betrafen. Daher ist man heute in vielen Fällen, wo es sich um Feststellung von Beziehungen im einzelnen handelt, auf Vermutungen angewiesen. So kommt es, daſs mancher wegen seiner Leistungen gerühmt wird, der vielleicht nur in der Weise, wie es in den ersten Jahrhunderten n. Chr. üblich war, entlehnt hat; und man läuft Gefahr, da direkte Abhängigkeit anzunehmen, wo uns eine genauere Kenntnis der damaligen Litteratur vielleicht auf eine gemeinsame direkte oder indirekte Quelle führen würde. Es ist ähnlich wie mit den Hss. selber, die uns jene alten Schriften überliefern. Sie gleichen oft einander in nicht unwesentlichen Dingen, ja es kommt vor, daſs sie von demselben Schreiber geschrieben sind, und doch darf man nicht überall unmittelbare Abhängigkeit für sicher halten. Denn es kann auch hier die gemeinsame Vorlage verloren gegangen sein.

---

1) S. auch CANTOR, *Vorlesungen* I², 485—551. Einzelne Hinweise finden sich auch bei VENTURI, *Commentarj sopra la storia e le teorie dell' ottica* I (Bologna 1814); A. J. H. VINCENT, *Extraits des manuscrits relatifs à la géométrie pratique des Grecs*; Notices et extraits des manuscrits de la Bibl. impériale XIX: 2, S. 212, 218, 222, 264, 272, 290, 302, 314, 318, meist nach VENTURI; HULTSCH, Art. *Gromatici* in ERSCH und GRUBERS Allgemeiner Encyklopädie der Wiss. u. Künste (Leipzig 1872); Anonymus, *Vergleichung der römischen Feldmessersammlung mit der Geodäsie des HERON von Alexandrien* im 2. Bande der Schriften der römischen Feldmesser herausgeg. u. erläutert von BLUME, LACHMANN und RUDORFF (Berlin 1852), S. 477 f.

Dafs die Römer von den Griechen abhängig sind, wird kaum jemand bezweifeln. Das beweist, um von anderem zu schweigen, der Name SOSIGENES, das die Namen derjenigen Männer, die unter AGRIPPAS Leitung das für die damalige Zeit grofsartige Unternehmen einer Vermessung des römischen Reiches ausgeführt haben. Aber ist erweislich, von welchem Griechen sie abhängen? Mufs es einer der erhaltenen Schriftsteller gewesen sein?

Mir wenigstens scheint es keineswegs so sicher, wenn man behauptet hat, dafs sowohl VITRUV als alle römischen Feldmesser von HERON von Alexandria abhängig seien, weil eben gewisse Ähnlichkeiten in den griechischen und römischen Schriften vorhanden sind. Eine gerechte Beurteilung der Sache mufs sich auch mit den Abweichungen abfinden. Und wo solche in überwiegendem Mafse vorhanden sind, wird man bedenklich werden müssen.

Wenn wir uns jetzt dem VITRUV[1]) zuwenden, so verzichte ich mit Absicht auf ein Moment, durch welches allein schon die Unmöglichkeit dargethan würde, dafs VITRUV aus HERON geschöpft hat, nämlich durch den bis jetzt noch nicht widerlegten Nachweis, dafs HERONS Mechanik[2]) nach dem Jahre 55 n. Chr. fällt, sondern ich will lediglich aus den zwischen HERON und VITRUV vorliegenden sachlichen Berührungen die Möglichkeit gegenseitiger Abhängigkeit einer Prüfung unterziehen. Beide citieren sich nicht, weder HERON den VITRUV, noch VITRUV den HERON, obgleich VITRUV genug griechische Autoren anführt.

Wenn nun beiden die Kenntnis des Gesetzes der kommunizierenden

1) So dankenswert und anregend auch die Untersuchungen von J. L. USSING (*Betragtninger over* VITRUVII *„de architectura libri decem“ med saerligt Hensyn til den Tid, paa hvilken dette Skrift kan vaere forfattet*, Kopenhagen 1896) sind, so kann ich mir dessen Resultat auch nach erneuter Prüfung nicht zu eigen machen und halte daher an der bisherigen Datierung fest. Es kann nicht meine Aufgabe sein, hier im einzelnen meine Gründe dafür zu entwickeln, sondern ich mufs mich begnügen, auf die eingehende Besprechung von USSINGS Arbeit durch F. KROHN, Berliner phil. Wochenschr. 1897, 773—781 zu verweisen.

2) Einer meiner Kritiker (Berliner phil. Wochenschr. 1899, S. 1540) hat zwar zugegeben, dafs das Vorkommen des Namens POSIDONIUS in HERONS Mechanik ein 'wirklich ausschlaggebendes Indicium' gegen den älteren Ansatz für HERON sei, sucht aber, obgleich die Lesung POSIDONIUS von drei Arabisten bestätigt ist, den Namen POSIDONIUS zu beseitigen und, auf Grund einer früheren Lesung CARRAS DE VAUX (PRAXIDAMAS), ARCHIMEDES an die Stelle zu setzen. Aber der Herr Recensent hat leider übersehen, dafs PRAXIDAMAS eine Konjektur war. Ist es aber methodisch, eine zweite Konjektur auf die erste zu gründen? Und war denn ARCHIMEDES ein Stoiker?! Auch hat der Herr Recensent nicht bemerkt, dafs an der fraglichen Stelle (HERON, *Mech.* I, 24; s. HER. *Op.* II, 62, 28 ed. NIX) POSIDONIUS gerade in Gegensatz zu ARCHIMEDES und dessen Anhängern gebracht wird!

Röhren (VITR. VIII, 5, 3 S. 203 ed. ROSE²; HERON, *Pneum.* I, 2 S. 34 ed. SCHMIDT), der Schwere des Quecksilbers (VITR. VII, 8, 3; HERON, *Pneum.* I, 38 S. 178, 23) und der rationalen rechtwinkligen Dreiecke (VITR. IX prooem. 6, X, 6, 4 aus den Seiten 3, 4, 5; HERON, *Geepon.* 50 aus den Seiten 30, 40, 50; HERON, *Anecdoton* Fol. 30ʳ des Constantinop. 1 s. XI aus den Seiten 12, 16, 20) eigen ist, so glaube ich diese Kenntnisse als ein Gemeingut der damaligen Zeit bezeichnen zu können, das für die Festsetzung gegenseitiger Abhängigkeit ohne Bedeutung ist. Anders liegt die Sache bei π. Bisher mufste man nach den Ausgaben für VITRUV (X, 14 S. 263 erste Ausg. ROSES) π in ungewöhnlicher Weise zu $3\frac{1}{8}$ rechnen. ROSES neueste Ausgabe giebt aber X, 9, 1 [1]) S. 259, 21, 25² den Durchmesser des fraglichen Rades nach den Handschriften richtig zu $4\frac{1}{6}'$, die Peripherie wie früher zu $12\frac{1}{2}'$, was für π also 3, d. h. den alten babylonischen Wert ergiebt. Nun könnte es scheinen, als liege hier eine Übereinstimmung mit HERON vor, weil nach CANTOR, *Vorl.* I², 375 HERON im Buche der Ausmessungen (*μετρήσεις* ed. HULTSCH S. 188 ff.) regelmäfsig $\pi = 3$ gesetzt haben soll. Aber dies bestätigt sich nicht überall. Z. B. ist *Mens.* 35 S. 200 der Umfang des Kreises mit einem Durchmesser von 14′ auf 44′ berechnet, woraus sich $\pi = 3\frac{1}{7}$ ergiebt. Überdies stehen hier auch noch die Worte: *ταῦτα* (=14′) *καθάπαξ τρισσάκις καὶ τὸ ζ″· γίνονται πόδες μδ′*. Entsprechend ergiebt sich für den Inhalt 154′.[2]) *Mens.* 36 wird die Oberfläche einer Kugel vom Durchmesser 14′ auf 616′, *Mens.* 43 der Umfang der Grundfläche eines gleichseitigen Kegels vom Durchmesser 14′ wieder auf 44′ berechnet. Auch in diesen Fällen ist selbstverständlich π, wie sonst bei HERON, zu $3\frac{1}{7}$ genommen. Uns selbst ist aufser HERON, *Mens.* 3, 5, 7, 13—15 kein Beispiel für $\pi = 3$ erinnerlich. Aber gerade durch ihr spärliches Auftreten machen sich diese Beispiele, die auch sämtlich in dem unechten (s. unten S. 315) *liber Geeponicus* stehen, verdächtig. Man darf also schwerlich sagen, dafs VITRUV und HERON in Bezug auf die Wertung von π übereinstimmen, zumal HERON selbst $3\frac{1}{7}$ für genauer erklärt (s. unten S. 311).

Ferner sollen die Anweisungen für die Berechnung des Kalibers der Ballisten, wie VITRUV sie giebt, aus HERONS *Belopoiika* geschöpft sein.[3])

---

1) Ich fürchte, die von ROSE vorgenommenen Änderungen in Bezeichnung der Kapitel sind geeignet, der Verwirrung Vorschub zu leisten. Warum ist nicht wenigstens ein *conspectus capitum* hinzugefügt?

2) Die Worte ὕφελε … ,ββ′, welche in Handschrift G fehlen, sind als Glossem zu tilgen.

3) So F. HULTSCH, *Die Bruchzeichen bei VITRUVIUS* in FLECKEISENS Jahrb. 1876 S. 253, 254 und *Eine Näherungsrechnung der alten Poliorketiker* ebenda 1897 S. 54 Anm. 12, ferner F. HULTSCH Art. *Arithmetica* § 17 a. E. in PAULY-WISSOWAS *Real-*

Nun rechnet HERON das Kaliber, d. h. die Löcher, durch welche die Sehnenstränge gezogen und gespannt wurden, nach folgender Vorschrift (HERON, *Belop.* S. 113 ed. WESCHER) aus: 'Soviel Minen der Stein wiegt, welcher fortgeschleudert werden soll, ebensoviel (Einheiten) multipliziere mit 100 und ziehe aus dem Produkte die Kubikwurzel. Und wenn Du zu den gefundenen Einheiten[1]) der Kubikwurzel $\frac{1}{10}$ derselben hinzugefügt hast, so mache das Kaliber ebensoviel Daktylen (à 21,87 mm nach HULTSCH) grofs. Z. B. wiege der Stein 80 Minen. Dies mal 100 giebt 8000[2]); die Kubikwurzel 20 und $\frac{1}{10}$ davon, nämlich 2, ergeben 22.' Dieselbe Methode der Berechnung des Kalibers hat auch PHILON von Byzanz.[3]) Eine Methode, das Kaliber zu berechnen, suchen wir bei VITRUV vergeblich, wohl aber hat er eine Tabelle von Gewichten mit den entsprechenden Kalibern (VITR. X, 11, 3 S. 265² ROSE). Nur sind die betreffenden Zahlzeichen bei VITRUV verderbt. Aufserdem weifs man nicht bestimmt, nach welchem System HERON seine Minen und VITRUV seine Pfunde berechnet hat. Wenn man die HERONische Mine zu 710 g (HULTSCH a. a. O. S. 254) genommen hat (die attische wog 437 g, die sog. hebräische 726 g), so ist diese Vermutung schon wesentlich durch die Voraussetzung beeinflufst, dafs VITRUV von HERON abhängig sei. Aber auch in diesem Falle ergiebt sich eine Abweichung von VITRUV, da VITRUVS Minen à 2 Pfund nur 655 g (HULTSCH a. a. O. S. 253) ergeben. Und wenn man die 80 HERONischen Minen mit den 160 Pfund VITRUVS in Parallele stellt, so haben wir bei HERON das Kaliber zu 22 Daktylen (= ca. 48 cm), bei VITRUV zu 20 digiti (so HULTSCH S. 256, = ca. 37 cm). Es ist freilich auch letzteres nur Vermutung, da 'pedes II' überliefert ist, aber HULTSCH' Änderung in 'pedis I ☰' d. h. 1 Fufs (= 16 digiti) und 4 Fingerbreiten (☰ bedeutet quadrans = $\frac{3}{12}$) ist nicht unbegründet. Es ist nun klar, dafs hier von einer unmittelbaren Abhängigkeit VITRUVS von HERON keine

---

encyklopädie II, 1087. Vgl. auch KÖCHLY-RÜSTOW, *Griech. Kriegsschr.* I, 392—398. Hier wird übrigens nur allgemein eine griechische Quelle (nicht HERON) vorausgesetzt, auch abweichend von HERON für VITRUV ein Kaliber mit elliptischem Grundschnitt (I, 395) angenommen.

1) Es ist mit Cod. Paris. Suppl. 607 *ὅσων ἐὰν εὕρῃς μονάδων* (nicht *μνῶν* wie bei WESCHER) *τὴν πλευραν* zu lesen. $\overset{o}{\mu}$ = *μονάς*, wie auch oft im Constantinop. 1.

2) 80 Minen sind nämlich gleich 8000 Drachmen.

3) *Mech. synt.* 51, 23 ff. ed. R. SCHÖNE: '(Man mufs) die Schwere des Steines, nach welcher man das Geschütz bauen soll, in Einheiten zerlegen und den Durchmesser des Loches (= das Kaliber) so viel Daktylen grofs machen, als die Kubikwurzel aus der zusammengebrachten Menge an Einheiten beträgt, indem man noch den zehnten Teil der gefundenen Kubikwurzel hinzufügt.' PHILON giebt auch eine Reihe von Kaliberdurchmessern für entsprechende Gewichte. Die Erfindung der Berechnung des Kalibers weist derselbe den Alexandrinischen Mechanikern zu (*Mech. synt.* 50, 37 f.).

Rede sein kann. Und auch HULTSCH, der HERON etwa 80 Jahre vor VITRUV setzt, hat die Differenz sehr wohl erkannt, nur meint er, sie erkläre sich eben daraus, dafs der Geschützbau bis VITRUV gerade durch die Verringerung des Kalibers Fortschritte gemacht habe. Da aber ein kleineres Kaliber auch weniger Spannnerven voraussetzt, so wird man KÖCHLY a. a. O. S. 395 darin beistimmen müssen, dafs VITRUVS Geschütze bei verringertem kreisförmigem Kaliber schwächer gewesen seien als die griechischen. Läge eine Abhängigkeit VITRUVS von HERON vor, so würde es u. E. sehr auffällig sein, dafs VITRUV bei den Geschützen auch sonst in Einzelheiten abweicht, z. B. in technischen Ausdrücken. VITRUV X, 10, 5; 11, 9 S. 264, 268² bezeichnet eine Gegenstütze mit ἀντίβασις, einem Worte, welches bei HERON gar nicht vorkommt. HERON nennt diese Stütze vielmehr ἀναπαυστηρία (*Belop.* 89, 6; s. auch KÖCHLY a. a. O. S. 391). Wir werden daher für VITRUV mit der Möglichkeit rechnen müssen, dafs er eine andere Quelle für diesen Abschnitt benutzte, um so mehr, als ausdrücklich bezeugt ist (HERON, *Belop.* 73, 5—9 ed. WESCHER), dafs es viele Schriften über den Geschützbau gab. 'Da nun unsere Vorgänger', sagt HERON, 'sehr viele Aufzeichnungen (πλείστας ἀναγραφάς) über den Geschützbau gemacht haben, indem sie Mafse und allgemeine Verhältnisse aufschrieben (μέτρα καὶ διαθέσεις ἀναγραψάμενοι), aber kein einziger von ihnen die (genauen) Konstruktionen der Geschütze noch den Gebrauch derselben in ordentlicher Weise auseinandersetzt, sondern da sie für alle die Aufzeichnung gemacht haben, als ob sie die Sache kennten, so halten wir es für gut, von ihnen (unsern Vorgängern) sowohl (einzelnes) zu übernehmen als auch über die Geschütze zu berichten u. s. w.'. Aus diesen Worten, wie natürlich auch aus den *Belopoiika* selber, ergiebt sich zugleich, dafs HERON für Laien, nicht für Fachleute schrieb, wogegen ein Laie, dem die technischen Bezeichnungen fremd waren, den VITRUV sicher nicht verstanden hätte. Nun haben von VITRUVS Gewährsmännern, die er selber nennt, nachweislich PYRROS aus Makedonien und AGESISTRATOS über Kriegsmaschinen geschrieben. Aus AGESISTRATOS[1]) insbesondere sind einige Angaben (VITR. X, 14—15, 1 S. 272, 18—274, 18²) geflossen, welche wir griechisch auch bei ATHENAEUS' Περὶ μηχανημάτων 15—20 ed. WESCHER haben. Und in diesem Abschnitte VITRUVS findet sich eine Wendung, die bei HERON und, soviel wir sehen, auch bei PHILON nicht vorkommt, VITR. X 14, 1 S. 272, 20²: basis ..., quae graece ἐσχάρα

1) Vgl. HULTSCHS Art. *ATHENAIOS* in PAULY-WISSOWAS *Realencykl.* II, 2033 f. und M. THIEL, *Quae ratio intercedat inter VITRUVIUM et ATHENAEUM mechan.* 8, 95; Leipz. Stud. XVII, 2, 275 ff. (dazu HULTSCH in PAULY-WISSOWA II, 2862). THIELS Dissertation lag mir leider nicht vor.

(Untergestell, eigentlich Rost, Athenaeus: *ἐσχάριον*) dicitur. Dagegen treffen wir diese ziemlich seltene[1]) Bezeichnung für Untergestell auch in Vitruvs Beschreibung der Balliste (X, 11, 9 S. 268, 11[2]). Sollte diese *ἐσχάρα* uns nicht Vitruvs Quelle verraten können? Oder wäre es eine zu kühne Annahme, wenn wir auch diesen Abschnitt als aus Agesistratos entlehnt betrachteten? Damit würde sich denn die Möglichkeit ergeben, Vitruvs Kaliberberechnungen auf Agesistratos statt auf Heron zurückzuführen. Da Vitruv nach dem Prooem. § 2 S. 2[2] auch praktisch bei der Zurüstung der Geschütze (ad apparationem ballistarum) thätig war, so wird er auch aus der Praxis manches gelernt haben.[2])

Bei Besprechung der Refraktion[3]) des Lichtes erwähnt Vitruv VI, 2, 3 die beiden verbreitetsten Theorien des Sehens, die das Altertum kannte, nämlich die des Demokrit und Aristoteles, nach welcher der Anstofs vom Sehobjekte kommt (Aristot. *de gen. anim.* S. 781, a, 3 und *de sensu* 2 S. 438, 3), und die bekanntere, nach welcher die Sehstrahlen vom Auge ausgehen. Denn Vitruv schreibt: hoc autem sive *simulacrorum inpulsu* (vgl. Plutarch, *Placit. philol.* IV, 13: *Δημόκριτος, Ἐπίκουρος κατὰ εἰδώλων εἰσκρίσεις ᾤοντο τὸ ὁρατικὸν συμβαίνειν*) seu radiorum ex oculis effusionibus, uti physicis placet, videmus. Heron kennt dagegen nur die vom Auge ausgehenden Strahlen. Vgl. Ptolemeus, *de speculis* in

1) Vgl. noch *ἐσχάριον* Polyb. IX, 34 in Bezug auf die Schüttschildkröte und Athen., *Deipnosoph.* V, 204c, wo von der Unterlage für ein vom Stapel laufendes Schiff die Rede ist.

2) Es ist auch Vitruv V, 12, 2—3, S. 127[2] f. zu Herons *Mechanik* III, 11 in Beziehung gesetzt worden (C. de Vaux, Journ. asiat. IX: 1, 1894, S. 405). Aber es kann weder bei Vitruv noch nach Herons Mechanik in der Übersetzung von Nix (Heron, *Op.* II, 222) überhaupt von Fundamentierung unter Wasser die Rede sein, vielmehr handelt es sich *Mech.* III, 11 nach Nix um 'eine Methode, grofse Lasten auf dem Meere zu bewegen' (C. de Vaux hatte statt dessen übersetzt: 'le procédé pour descendre de lourds fardeaux dans la mer'). Dazu stimmt gut der Anfang von *Mech.* III, 12: 'Andre denken auf dieselbe Weise grofse Steinblöcke auf dem Meere schwimmend zu transportieren' (auch hier C. de Vaux: 'façon, pour descendre les grosses pierres dans la mer').

3) Es ist nicht genau, wenn Günther, *Gesch. d. Math. u. Naturw. im Altertum* S. 269[2] behauptet, dafs erst bei Kleomedes, dem wahrscheinlich n. Chr. lebenden Epitomator des Posidonius, die Kenntnis der Refraktion zum erstenmal begegne. Schon Archimedes kannte sie. Vgl. Olympiod. zu Aristot. II ed. Ideler S. 94: *Ἀρχιμήδης αὐτὸ τοῦτο δείκνυσιν, ὅτι κλᾶται ἡ ὄψις, ἐκ τοῦ δακτυλίου τοῦ ἐν ἀγγείῳ βαλλομένου. ἐὰν γὰρ δακτύλιον ἐμβάλῃς ἐν ἀγγείῳ μὴ ἔχοντι ὕδωρ, οὐ φανήσεταί σοι διὰ τὸ ἐπιπροσθεῖν τὸ σῶμα τοῦ ἀγγείου· εἰ δ' ἐμβάλῃς ὕδωρ, παρ' αὐτὰ φανήσεται τῆς ὄψεως ἐπὶ τὸ ὕδωρ προσπιπτούσης δίκην ἐνόπτρου καὶ ἐπὶ τὸν δακτύλιον κυκλούμενον κατὰ διάκλασιν* (Refraktion). S. auch Pseudo-Euklid, *Katoptr.* 286, 17 ed. Heiberg; Seneca, *Quaest. nat.* I, 6, 5 und Damianos, *Schrift über Optik* ed. R. Schöne (Berlin 1897) S. 14 und Anm. S. 15.

Roses *Anecdota* II, 319, 1 (= Herons *Katoptrik*): 'radii a nobis incidentes', 319, 2 'quod autem secundum effusiones rectarum a visu videamus', 319, 10 'radii emissi a nobis'. Es dürfte Vitruv also auch in diesem Punkte von Heron unabhängig sein. Die Theorien selber waren schon vor Vitruv bis zu einem gewissen Grade Gemeingut der Gebildeten, wie wir gerade in diesem Falle an Cicero nachweisen können. Denn gelegentlich einer kleinen Kontroverse mit seinem intimen Freunde Atticus (Cicero *ad Attic.* II, 3, 2) über ein zu kleines Fenster in Ciceros Amaltheum (einer Art Gartenzimmer mit dekorativer Ausstattung) auf dem Arpiner Gute schreibt Cicero: „si κατ' εἰδώλων ἐμπτώσεις videremus, valde laborarent εἴδωλα in angustiis; nunc fit lepide illa ἔκχυσις *radiorum*".

Auch sonst finden wir Abweichungen mannigfacher Art zwischen Heron und Vitruv. Die Äolipilen (Abh. z. Gesch. d. Mathem. 8, 1898, 210) stimmen durchaus nicht überein. Denn während Heron den Dampf erst aus einem unter der Reaktionsdampfkugel befindlichen Kessel in dieselbe hineinleitet (Heron, *Op.* I, 230 Fig. 55), läſst Vitruv ihn, wie es bei den heutigen sog. Äolipilen der Fall zu sein pflegt, sich in der Kugel selbst erst entwickeln, und von einer Drehung der Äolipile ist bei Vitruv I, 6, 2 (s. hinter Heron I, 490) gar keine Rede. Und woher hat Vitruv den Namen Äolipile? Unmöglich aus Heron, weil dieser den Namen Äolipile gar nicht kennt. Vitruvs Feuerspritze ist ohne Zweifel vollkommner als die Heronische (Heron, *Op.* I, 130 ff., Fig. 29, 494 ff.), weil sie einen Windkessel (catinus) hat, wodurch erst ein Druck in gleichförmiger Stärke ermöglicht wird. Beim Wegemesser (Vitr. X, 9, Figur s. bei Th. Beck, *Historische Notizen* im Civilingenieur 1886, Taf. XXXII Fig. 14) läſst Vitruv nach jeder römischen Meile (5000 Fuſs = 1000 Schritt = 1,5 km) ein Steinchen in eine Wagenkapsel auf eine Bronzeschale fallen, während Heron in seinem Hodometer (Heron, *Dioptra* S. 306—314 ed. Vincent, s. ebenda S. 306 die Figur) die zurückgelegte Entfernung durch Zeiger auf den in Grade eingeteilten Zifferblättern anzeigt, jede römische Meile durch einen Grad. Auch ist die Anordnung der Räder und die Zahl der Zähne von einander verschieden. Solche Wagen mit Stunden- und vielleicht auch Meilenzeigern werden erst bei dem Nachlasse des Commodus († 192 n. Chr.) wieder erwähnt (s. Jul. Capitolin., *Pertinax* 8, 7 in den *Scriptores historiae Augustae* ed. H. Peter I, 120, 14: vehicula ... iter metientia horasque monstrantia). Ebenso ist Vitruvs Distanzmesser für Schiffe, der seinem Wegmesser ziemlich analog gebaut ist (X, 9, 5—7 S. 261[2]), weniger kompliziert als Herons Distanzmesser für Wasserfahrten (*Dioptra* S. 316 mit Figur). Denn abgesehen von dem Meilenzeiger und der Verwendung einer Schnecke als Antriebswelle ist bei

HERON auch das Räderwerk entwickelter. Eine Umdrehung des vierten Zahnrades (Abh. z. Gesch. d. Mathem. 8, 1898, 192) ruft $\frac{100}{18} \cdot \frac{72}{18} \cdot \frac{100}{9} \cdot 81 = 20000$ Umdrehungen des Flügelrades hervor oder legt, da dieses mit jeder Umdrehung 5 Schritte mifst, 100000 Schritte zurück, von denen je 1000 Schritte oder je eine römische Meile auf einem äufseren in 100 Grade geteilten Zifferblatte durch den Zeiger auf den einzelnen Graden angezeigt wurden. Dagegen hatte VITRUVS Schaufelrad mit einer Peripherie von $12\frac{1}{2}$ Fufs an seiner Welle ein Triebrad. Aus der Peripherie des Triebes ragte ein Zahn hervor, welcher nach jeder Umdrehung des Triebes oder des Schaufelrades einen Zahn des mit 400 Zähnen versehenen vertikalen Wellrades weiterschob. Das vertikale Wellrad schob allemal nach $400 \cdot 12\frac{1}{2}' = 5000'$ oder 1000 Schritten oder einer römischen Meile ein horizontales, mit runden Steinchen ausgestattetes Zahnrad um ein Steinchen weiter, das dann durch eine Bohrung der horizontalen Welle in eine Kapsel fiel. So zeigte das Steinchen durch sein Niederfallen die Zurücklegung einer römischen Meile an. Auch hier kann also von gegenseitiger Abhängigkeit zwischen VITRUV und HERON keine Rede sein.

Ebenso sind HERONS und VITRUVS Wasserorgeln verschieden (HERON, *Op.* I, 192 ff., 496 ff. mit den zugehörigen Figuren und die Einleit. S. XLI). Abgesehen davon, dafs VITRUV zwei Kolbencylinder hat und deren Ventile von zwei Delphinen gehalten werden, übertrifft seine Orgel die HERONische dadurch, dafs sie noch zwei selbstthätige Sperrventile im Halse des Windkessels hat, welche die komprimierte Luft verhindern, aus dem Windkessel nach den Kolbencylindern zurückzuströmen. Einen besonderen Vorzug der VITRUVschen Wasserorgel bilden aber die gröfsere Pfeifenzahl und die Pfeifenregister. Dafs VITRUVS Wasserorgel vollkommener ist als die HERONische, ist mir zwar immer etwas auffällig erschienen, doch mag sich das aus HERONS Quelle erklären. Es gab übrigens auch im 1. Jahrhundert n. Chr., d. h. zu HERONS Lebzeiten einfachere Orgeln mit nur acht Pfeifen, wie eine Medaille aus Neronischer Zeit beweist, die in der Pariser Nationalbibliothek aufbewahrt wird (HERON, *Op.* I, S. XL).

Nicht einmal die Krane stimmen bei beiden überein (HERONS *Mechanik* III 2 ff. mit Figuren; PAPPUS VIII, 1135 ed. HULTSCH und VITRUV X, 2, 1, 2, 8, dazu Anhang zu HERON, *Op.* II, 296 ff. und VITRUVS Figuren bei TH. BECK *Histor. Not.* im Civilingenieur 1886). Zwar finden wir bei beiden Krane mit einem und mit zwei Masten, aber die Einrichtung weicht im einzelnen von einander ab. Von den sog. Backen (Leisten oben an der Seite) und Widerlagern beim VITRUVschen Krane mit einem Maste ist bei HERON keine Rede, ebensowenig von den drei Gruppen der ziehenden Arbeiter. Andrerseits ist HERONS Mast praktischer, weil er in dem Untergestell eine Vorrichtung besitzt, die es ermöglicht, den Kran selbst wie heute zu neigen und auch weiter zu schieben. Auch weiſs VITRUV nichts von den Seilwindungen, die den Arbeitern für Reparaturen oben am Krane als Leiter dienen. Und die Benutzung eines Haspels wird hier von VITRUV (sine sucula) ausdrücklich ausgeschlossen, während HERON davon redet (εἰς ἐργάτας ἀποδόντες). Dazu kommt, daſs VITRUV eine Leitrolle unten am Maste mit dem griechischen ἐπάγων bezeichnet, einem Wort, welches bei HERON nirgends vorkommt. Nach der Figur der Mechanik könnte HERON zwar auch eine solche Leitrolle gehabt haben, aber erwähnt wird sie nicht. HERONS Kran mit zwei Masten ferner hat einen viel festeren Stand als der VITRUVS. Während bei HERON dieselben bockartig oben durch einen Querbalken verbunden, unten durch kleine Streben gestützt und obendrein noch durch vier Halteseile festgehalten werden, kann man bei VITRUV, wenn anders die Überlieferung zuverlässig ist, sich nicht der Besorgnis erwehren, daſs die beiden sich oben vereinigenden, unten auseinandergehenden Balken bei der Arbeit versagen möchten, da sie lediglich von vier Seilen gehalten werden. Auſserdem ist bei VITRUV der Haspel, welcher als Seilwinde dient, unmittelbar mit den beiden Balken verbunden, während man bei HERON ihn sich gesondert neben dem Krane denken muſs, falls er, wie beim Krane mit einem Mast, Verwendung finden soll.

Von ARISTOTELES' *Μηχανικά* sind in HERONS *Mechanik* II 34 Frage e, g—i, m, p folgende Probleme behandelt, ohne überall bis ins einzelne mit ihm übereinzustimmen: Warum ein breiter Körper langsamer fällt als ein runder? Warum man einen Stock schneller zerbricht, wenn man ihn mitten aufs Knie stützt? Warum ein Stock um so schwächer ist, je länger er ist, und um so biegsamer, wenn er an einem Ende aufgerichtet wird? Warum man die Zähne mit der Zahnzange und nicht mit der Hand auszieht? Warum die groſsen Steine am Meeresstrande meist rund sind? Warum ein kleines Steuer groſse Schiffe lenken kann? Dagegen behandelt VITRUV X 3, 5, 6 S. 250² f. nur das Steuer-, Segel- und Ruderproblem, ohne doch mit HERON im Steuerproblem übereinzustimmen. Und woher hat VITRUV die beiden anderen? Daſs er den ARISTOTELES selber gelesen, ist schon deshalb unwahrscheinlich, weil sein Steuerproblem auch mit ARISTOTELES nicht völlig übereinstimmt. Also auch hier steht noch ein uns unbekannter Gewährsmann dazwischen.

HERON kennt nach seiner *Mechanik* III 13—21 die verschiedensten Arten der Schraubenpressen, darunter auch eine (*Mech.* III 15), die bereits zur Zeit VITRUVS ums Jahr 23 v. Chr. vorhanden war. Ist es da nicht auffällig, daſs VITRUV, vorausgesetzt, daſs sein Werk um 14 v. Chr. verfaſst ist (was ja wieder zweifelhaft geworden ist, nach KROHN, Berlin. phil. Wochenschr. 1897, S. 773 ff. schon um 28 v. Chr. herausgegeben[1]), gar nichts davon erwähnt? Wäre es nicht noch viel auffallender, wenn HERON seine Quelle gewesen wäre?

Nur in Bezug auf den Hebel sind HERON, *Mech.* II, 8, 9 und VITRUV X, 3, 2—3, S. 249² einig. Doch ist zu beachten, daſs VITRUV das eigentliche Hebelgesetz nicht anführt, wogegen HERON es wiederholt hervorhebt.

In Bezug auf die sphäroide Oberfläche des Wassers, wie sie ARCHIMEDES behauptete (VITR. VIII, 5, 3, S. 203²), läſst VITRUV die Sache unentschieden, während HERON, *Op.* I, 38, 8 ff. sie ausführlich (nach ARCHIMEDES selbst?) zu beweisen sucht.

Die Maſsangaben VITRUVS auf Grund der menschlichen Gliedmaſsen ('ex corporis membris', VITRUV III, 1, 5, S. 65², ἐξ ἀνθρωπίνων μελῶν HERON *Geom.* 4, S. 47) weichen im einzelnen zu sehr von einander ab, als daſs man sie mit einander in Beziehung setzen dürfte. Auch spricht HERON nirgends von vollkommenen Zahlen wie VITRUV a. a. O. Ferner haben die Theorien der Spirale (VITRUV III, 5, 6 a. E.; HERON, *Def.* 8, 1) nichts miteinander gemein.

Wir kommen jetzt zum letzten Abschnitte unserer Untersuchungen zu VITRUV. Man hat besonderes Gewicht darauf gelegt, daſs VITRUVS Nivellierungen auf HERON zurückführbar seien. VITRUV VIII, 5, 1, S. 202² sagt: 'Nunc de perductionibus (sc. aquarum) ad habitationes moeniaque ut fieri oporteat explicabo. cuius ratio est prima perlibratio. libratur autem dioptris aut libris aquariis aut chorobate. sed diligentius efficitur per chorobaten, quod dioptrae libraeque fallunt'. Im Anschluſs hieran giebt dann VITRUV eine äuſsere Beschreibung des Chorobaten (einer Libelle) dessen Hauptzweck die Erzielung einer wagerechten Aufstellung und anscheinend einer Winkelmessung[2]) an Ort und Stelle gewesen zu sein scheint. Das ist alles, was VITRUV über das Nivellement vorbringt; Rechnungsaufgaben giebt er nicht.[3]) Man sieht, daſs abgesehen von der

---

1) In Bezug auf das Verhältnis von VITRUV zu PLINIUS möchte ich im Hinblick auf neuere Vermutungen darauf aufmerksam machen, daſs PLIN. XVI 224 ed. MAYHOFF schon Wasserröhren aus Fichten-, Tannen- und Erlenholz kennt, während VITRUV VIII, 6, 1, S. 204² nur von Blei- und Thonröhren spricht, obgleich ihm die Widerstandsfähigkeit der Erle gegen Feuchtigkeit nicht unbekannt ist.

2) Auf Messung des Neigungswinkels im Gelände weisen folgende Worte hin (VITRUV VIII, 5, 2, S. 203²): 'eo chorobate cum perlibratum ita fuerit, scietur quantum habuerit fastigii'. Vgl. noch VITR. VIII, 6, 3, S. 204²: 'uti specus fodiantur sub terra librenturque ad fastigium', wo es sich um Anlage von Wasserleitungen handelt. *Fastigium* ist aber die Abdachung oder Neigung. Bei HERON findet sich nur einmal (*Dioptra* 12, S. 222, 5 ed. VINCENT) der Ausduck *χωροβατήσαντα*. Der Ausdruck selber scheint auch auf unmittelbare Messungen an Ort und Stelle, an Punkten, welche zugänglich waren, hinzuweisen.

3) Nur VITR. VIII, 6, 3, S. 204² steht noch ein kurzer Hinweis auf Anlegung

etwas ausführlicheren Beschreibung des Chorobaten VITRUVS Bemerkungen lediglich allgemeiner Art sind. Wenn er seine Bemerkungen wirklich einer Quellschrift entnahm und sie nicht, was ja wohl denkbar wäre, seiner eigenen praktischen Schulung verdankte, so mufs man Bedenken tragen, die HERONische *Dioptra* als diese Quelle zu bezeichnen. Denn eine Beschreibung des *χωροβάτης* kommt bei HERON nicht vor. Andrerseits wird aber von HERON der *ἀστερίσκος* (*Dioptra* 33, S. 298 ed. VINCENT), die „stella" (Winkelkreuz mit Bleisenkeln, s. CANTOR, *Vorles.* I², 501) der Römer ausführlich beschrieben, von der VITRUV nichts weifs, obwohl sie doch bei Festlegung des *Decumanus* (Ostwestlinie) und des *Cardo* (Südnordlinie) auch zu VITRUVS Zeiten noch benutzt wurde. Dahingegen kennt HERON VITRUVS Methode des Schattenfängers (VITR. I, 6, 6, *σκιαθήρας*, s. auch CANTOR, *Vorles.* I, 500) nicht. Aufserdem ist HERONS *Dioptra* eine so fein durchdachte Vorrichtung (s. H. SCHÖNE, *Die Dioptra des HERON*, Jahrb. des Archäol. Inst. **14**, 1899, 91—103 mit 9 Figuren), dafs man sich wundern müfste, wie VITRUV sie hätte tadeln können. Vielmehr werden die von VITRUV oder seinen Gewährsmännern benutzten Dioptervorrichtungen und Wasserwagen im Vergleich zur HERONischen noch unvollkommen gewesen sein. Auch sind sie wohl von VITRUV noch nicht zu Winkelmessungen gebraucht worden, was für HERON vorauszusetzen ist.

Aber selbst, wenn die Berührungen zwischen HERON und VITRUV in Bezug auf das Nivellement enger und zahlreicher wären als sie wirklich sind, so könnte man daraus keineswegs schliefsen, dafs VITRUV aus HERON schöpfte, weil die Benutzung der Dioptra sonst gar nicht so unbekannt war. Z. B. verwandte sie DICAEARCH, ARISTOTELES'[1]) Schüler, schon zu Höhenmessungen (s. CANTOR, *Vorles.* I², 243, PLIN. XI, Kap. 64). Auch EUKLID hat vermutlich von der Dioptra Gebrauch gemacht, da er nach PLUTARCH *Non posse suaviter vivi secundum EPICURUM* Kap. 10, S. 1093 E (*Εὐκλείδην γράφοντα τὰ διοπτρικά*) Vermessungsaufgaben geschrieben hatte, wie solche ja thatsächlich in EUKLIDS *Optik*, Kap. 18—21 ed. HEIBERG, S. 28—32 überliefert sind. Nicht minder mafs ERATOSTHENES (276—196) Höhen mit der Dioptra nach THEON *in PTOLEMAEI Magn. constr.* ed. Basil. (1538), S. 23[2]), und nach SIMPLICIUS *in ARIST. de caelo*,

---

von Luftschächten: 'putei ita sint facti uti inter binos sint actus' (eine Strecke von 35, 5 m). Über den Schattenwerfer s. S. 307.

1) Ob bei ARISTOT. *de gen. anim.* V, 1 der Ausdruck *δι' αὐλοῦ βλέπων* auf eine Dioptra hinweist, ist zweifelhaft.

2) *Τὴν δὲ ἀπὸ τῶν ὑψηλοτάτων ὀρῶν ἐπὶ τὰ χθαμαλώτερα πίπτουσαν κάθετον δείκνυσιν Ἐρατοσθένης διὰ τῶν ἐξ ἀποστημάτων μετρουσῶν διοπτρῶν.*

p. 134[b 1]), der fast wörtlich mit THEON übereinstimmt, wozu man noch die von CANTOR, *Vorles.* I², 243 aus THEON von Smyrna ed. HILLER p. 124 angeführte Stelle vergleichen mag. Auch der entweder unter ATTALOS I (241—197) oder ATTALOS II (159—138) lebende BITON nennt (*Veter. math.* p. 112, 19) die Dioptra.

Spätestens in der ersten Hälfte des II. Jahrhunderts v. Chr. wurde bei der von KLEOXENOS oder DEMOKLITOS erfundenen und von POLYBIOS (X, 46) verbesserten interessanten nächtlichen Fackel- und Buchstabentelegraphie[2]) eine Dioptra mit zwei Röhren allerdings nur zur Beobachtung der rechten und linken Seite dessen, der das Feuersignal erwiderte, benutzt (*διόπτραν δύο αὐλίσκους ἔχουσαν, ὥστε τοῦ μέλλοντος ἀντιπυρσεύειν τῷ μὲν τὸν δεξιὸν τόπον, τῷ δὲ τὸν εὐώνυμον δύνασθαι θεωρεῖν*). Im Laufe des 2. Jahrhunderts v. Chr. konstruierte ferner HIPPARCH seine Dioptra[3]), freilich nur zum Zwecke astronomischer Winkelmessungen.[4]) Hierzu kommen wieder in Bezug auf geodätische Messungen die Bemerkungen des GEMINOS, der wohl auch noch im 1. Jahrhundert v. Chr. gelebt hat.[5])

---

1) *Ὁ γὰρ Ἐρατοσθένης τὴν ἀπὸ τῶν ὑψηλοτάτων ὀρῶν πρὸς τὰ ὑφειμένα πίπτουσαν κάθετον δείκνυσι διὰ τῆς διόπτρας ἀναμετρήσας ἐκ τῶν ἀποστημάτων ὑπάρχουσαν σταδίων δέκα.*

2) An derselben Stelle wird nach AENEAS TACTICUS aus dem IV. Jahrhundert v. Chr. (um 360 v. Chr.) von POLYBIUS noch eine einfachere Fackeltelegraphie erwähnt. Das dürfte die älteste der uns bekannten sein. Die von JULIUS AFRICANUS in den *Kesten* (III. Jahrh. n. Chr.) beschriebene läuft auch auf eine Buchstabentelegraphie hinaus (s. CANTOR, *Vorles.* I², 411). Vgl. noch zu POLYBIOS F. ZAMBALDI, *Il telegrafo nella Grecia antica, Atene e Roma.* Bulletino della Società Italiana per la diffusione e l'incorragiamento degli studi classici, 1899, Nr. 8.

3) THEON oder vielmehr PAPPUS in *PTOLEMAEI Magn. constr.*, S. 262 und PROKLOS, *Hypotyp. astron. hypothes.*, p. 109 ed. HALMA (auch dieser in der Baseler Ausgabe mit Figur wie THEON).

4) Vgl. F. HULTSCH, *Winkelmessungen durch die HIPPARCHische Dioptra*; Abh. z. Gesch. d. Mathem. 9, 1899, 193—209. Auf solche astronomische Messungen weisen anscheinend die Stellen bei PLIN. II, 69 und OLYMPIODOR, Fol. 59[b] in ARIST. *Meteor.* ed. IDELER II, 159 hin. HIPPARCHS Dioptra hatte PTOLEMAEUS (s. HULTSCH a. a. O., S. 200) wieder hergestellt.

5) Es ist neuerdings behauptet worden (TITTEL, Berlin. phil. Wochenschr. 1899, S. 1541), dafs GEMINOS nach HERON gelebt haben müsse. Was man zum Beweise anführt, ist aber nicht so sicher als es scheinen könnte. Denn dafs auch PROKLOS *in I. EUCL. Elem.* 41, 3—42, 8 ed. FRIEDLEIN, ein Abschnitt, in dem HERON zitiert wird, aus GEMINOS entnommen sei, ist nur eine Vermutung, weil wahrscheinlich PROKLOS 38, 1—41, 2 aus GEMINOS geschöpft sind. Auch der zur Begründung vorgebrachte Hinweis auf PAPP. VIII, 1026, 8, wo die Bemerkung über GEMINOS sich auf den ganzen, freilich ähnlich lautenden Abschnitt von PAPP. VIII, 1024, 12 an beziehen soll (s. TITTEL, *De GEMINI Stoici studiis mathematicis quaestiones philologae.*

In den Var. coll., Kap. 12, ed. HULTSCH S. 248 f., welches wahrscheinlich aus GEMINOS geschöpft ist, ist wiederholt von Ausmessungen von Feldern, der Entfernungen und Höhen von Bergen und Mauern, der Breite von Flüssen u. dgl. mit Hilfe der Dioptra und unter Verwendung der Verhältnisse von Seiten ähnlicher Dreiecke (*κατὰ λόγους καὶ ἀναλογίας*) die Rede, wobei aber auch die Berechnung nach kongruenten Dreiecken (*εἰς ἰσότητας*), wie wir sie in der „fluminis varatio" der römischen Feldmesser wieder finden, als nicht ungebräuchlich vorausgesetzt wird.

Wir sehen also, daſs wir die Kenntnis des Gebrauchs der Dioptra vor VITRUV selbst schon für die Zeit, die der früher dem HERON zugewiesenen Lebenszeit vorauf liegt, als ziemlich verbreitet annehmen müssen. Um so mehr

---

Diss. Lipsiae, 1895, S. 7), ist lediglich Vermutung. Das *καὶ* vor *Γεμῖνος* (HULTSCH: 'cum alii tum GEMINUS') läſst noch die Möglichkeit einer anderen Quellschrift offen. Es werden ja nicht selten, z. B. von PROKLOS, die Autorennamen gerade da verschwiegen, wo ganze Abschnitte entlehnt sind. Aber ich will hier die Sache nicht entscheiden; sie bedarf noch der Klärung. Doch möchte ich einige Gegenargumente zur Erwägung stellen. Darauf, daſs es PROKLOS 42, 7 heiſst: *ὑπὸ τῶν παλαιῶν ἀναγεγραμμένα παρειλήφαμεν*, daſs also von mehreren Quellen die Rede ist, will ich kein groſses Gewicht legen. Aber nicht nur in den allerdings stark interpolierten HERONischen Definitionen finden sich Berührungspunkte zwischen HERON und GEMINOS (vgl. *Def.* 75, p. 23 und PROKLOS, S. 111, 1, worauf schon TANNERY hinweist, s. auch TITTEL, *Diss.*, S. 61, dazu die Spirenschnitte HER. *Def.* 28 und PROKLOS 111, CANTOR I, 340[2]), sondern auch zwischen HERONS *Geometrie* 3, 6, einer Schrift, die auch nach CANTORS Urteil (*Agrimensoren*, S. 190, Anm. 69) sich, abgesehen vom Schlusse, am reinsten erhalten hat, und GEMINOS eigener, auf der des POSIDONIUS beruhenden Definition der Parallelen bei PROKLOS *in I. EUCL. elem.* und ANARITIUS ed. CURTZE.

Die Stellen lauten:

HERON	GEMINOS	
(*Geom.* 3, 6)	(nach PROKL. 177, 21—25)	(nach ANARITIUS 26, 11—15)
Παράλληλος δὲ ἑτέρα εὐθεῖα, προσπαρακειμένη τῇ εὐθείᾳ ἔχουσα ἐν ἄκροις διαστήματα ἀλλήλοις ἴσα.	*Τῶν δὲ ἴσον ἀεὶ ἀπεχουσῶν διάστημα αἵ εἰσιν εὐθεῖαι μηδέποτε ἔλασσον ποιοῦσαι τὸ μεταξὺ αὐτῶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ παράλληλοί εἰσιν.* *Τοσαῦτα καὶ ἀπὸ τῆς Γεμίνου φιλοκαλίας . . . ἀνελεξάμεθα.*	Philosophus tamen AGANIS (= GEMINUS) diffinivit lineas equidistantes dicens: Linee equidistantes sunt, que cum sint in una superficie, si utique in infinitum protrahantur, erit semper spatium quod est inter eas unum.

Scheint daraus nicht zu folgen, daſs HERON nach GEMINOS gelebt hat? Dies würde, vorausgesetzt, daſs HERON im I. Jahrhundert n. Chr. lebte, gut mit den Resultaten im Einklang stehen, die TANNERY (*Géom. grecque*) und E. MARTINI (*Quaest. Posidonianae.* Leipz. Stud. z. klass. Philol. XVII: 2, S. 386) gewonnen haben, daſs nämlich des GEMINOS *Isagoge* jedenfalls nach 70 v. Chr., vielleicht nicht vor 30 v. Chr. entstanden sei.

werden wir, von den bereits oben erwähnten Abweichungen in HERONS und VITRUVS Angaben über das Nivellement ganz abgesehen, Bedenken tragen müssen, eine Abhängigkeit des einen vom andern anzunehmen.

Wir sind nunmehr mit unsern Untersuchungen über VITRUV zu Ende. Fassen wir das Resultat kurz zusammen, so läuft es darauf hinaus, dafs genaue Übereinstimmungen zwischen HERON und VITRUV nicht nur spärlich, sondern auch meist so allgemeiner Art sind, dafs sie für die Festsetzung gegenseitiger Abhängigkeit nicht in Betracht kommen, dafs aber andrerseits die Abweichungen zahlreich und meist so erheblich sind, dafs eine gegenseitige Benutzung ausgeschlossen erscheint.

Wir kommen zu COLUMELLA und den Agrimensoren. Ersterer gehört als Zeitgenosse SENECAS dem 1. Jahrhundert n. Chr. an, da seine Schrift 'Über den Landbau' etwa um 62 n. Chr. verfafst ist, letztere der Zeit TRAJANS oder noch späterer. Hier würde also der Umstand, dafs HERON ins 1. Jahrhundert n. Chr. zu setzen ist, an sich einer Abhängigkeit dieser Männer von HERON nicht im Wege stehen.

Von den neun Aufgaben COLUMELLAS (*De re rustica* V, 2, 5. 9. 10 ed. J. G. SCHNEIDER) können nur die vierte, achte und neunte (s. CANTOR, *Agrimensoren*, S. 90) in Betracht kommen, da die übrigen zu allgemein sind, wie ja auch CANTOR, *Vorles.* I², 508 f. sich auf die genannten beschränkt. Wenn wir nun von den Zahlen absehen, so finden sich allerdings bei Berechnung des Flächeninhalts des gleichseitigen Dreiecks Übereinstimmungen mit HERON.

HERON, *Geom.* 15, 1 ed. HULTSCH (auch in den *Metrika*, wo die Seite a ebenfalls $= 10$) berechnet zunächst die Höhe $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, und da er $\sqrt{3}$ immer zu $\frac{26}{15}$ nimmt, $h = \frac{26}{30}a$. Bei der Berechnung des Inhalts (*Geom.* 15, 2) rechnet HERON daher $F = \frac{a}{2}\cdot\frac{26}{30}a$. In der *Geom.* 14, 1 verwendet HERON ($a = 10$) dagegen wie COLUMELLA (*De re rust.* V, 2, 5, S. 242 $a = 300$) die Formel $F = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{10}$. Diese Formel ist offenbar aus der vorhergehenden, die jedenfalls ursprünglicher ist, abgeleitet und nur eine andere Form derselben. Denn statt $\frac{a}{2}\cdot\frac{26a}{30}$ kann man auch $\frac{13a^2}{30}$ oder $\frac{10a^2}{30} + \frac{3a^2}{30}$ oder $\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{10}$ schreiben. Da zu dieser Umwandlung im Grunde nicht viel Scharfsinn gehört, ja da die den Alten eigene Geläufigkeit, die Brüche in Stammbrüche zu zerlegen, von selbst darauf führen mufste, so weifs ich nicht, ob die Benutzung dieser Formel für eine gegenseitige Abhängigkeit ausschlaggebend sein kann.

Die nächste Aufgabe betrifft die Fläche eines Kreisabschnittes, der kleiner ist als der Halbkreis, wenn s die Sehne (βάσις bei HERON, basis bei COLUMELLA) und h die Höhe (κάθετος bei HERON, latitudo bei COLUMELLA) des Abschnittes ist. HERON, *Geom.* 98, 4 rechnet nach der Formel $\frac{s+h}{2} \cdot h + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2}{14}$ und setzt $s = 20$, $h = 3\frac{1}{3}$, COLUMELLA (*De re rust.* V, 2, 9, S. 243) nimmt $s = 16$, $h = 4$ und verwendet dieselbe Formel. Von den Zahlwerten abgesehen, ist die Übereinstimmung augenscheinlich. Hinsichtlich der Entstehung der Formel sind einige Bemerkungen in HERONS *Metrika* (Fol. 83ʳ des Cod. Constantinop. 1, s. XI, s. auch HERON, *Op.* III ed. H. SCHÖNE) von Interesse. Hier führt HERON aus, daſs die Alten (οἱ ἀρχαῖοι), die π zu 3 gerechnet hätten, einen solchen Abschnitt (τμῆμα τοῦ κύκλου τὸ ἔλαττον ἡμικυκλίου) nach der Formel $\frac{s+h}{2} \cdot h$ ausgerechnet hätten. Aber darauf hätten andere genauere Untersuchungen angestellt (οἱ ἀκριβέστερον ἐξητηκότες) und π zu $3\frac{1}{7}$ genommen. Infolgedessen sei dann die obige Formel aufgestellt, die aber nur dann Geltung habe, wenn die Sehne nicht gröſser als das Dreifache der Höhe sei (ὅταν ἡ βάσις τοῦ τμήματος μὴ μείζων ᾖ ἢ τριπλῆ τῆς καθέτου). Wenn nun HERON in den *Metrika* $s = 14$, $h = 7$ setzt, wie schon ähnlich (nach den *Metrika*) für die ältere Formel $s = 12$, $h = 6$ genommen war, so weist dies darauf hin, daſs beide Formeln ursprünglich von einem Halbkreise abgeleitet und nur näherungsweise für die kleineren Kreisabschnitte verwendet sind. Wenn $\pi = 3$ ist und daher die Fläche des Halbkreises $= \frac{3r^2}{2}$ ist, so scheint man auch hier eine Zerlegung in $\frac{2r^2}{2} + \frac{r^2}{2}$ und weiter, da spätestens zu HERONS Zeit eine Klammerabsonderung bekannt war (ANARITIUS ed. CURTZE, S. 89, 2), in $\left(\frac{2r}{2} + \frac{r}{2}\right) r = \frac{2r+r}{2} \cdot r$ vorgenommen zu haben. Indem man dann den Durchmesser mit der Sehne und den Radius mit der Höhe vertauschte, gewann man die Annäherung $\frac{s+h}{2} \cdot h$. Ähnlich könnte es mit der erweiterten Formel gegangen sein. Wenn $\pi = 3\frac{1}{7}$, so ist F (Halbkreis)[1] $= \frac{22r^2}{14} = \frac{21r^2}{14} + \frac{r^2}{14} = \frac{3r^2}{2} + \frac{r^2}{14} = \frac{2r+r}{2} \cdot r + \frac{r^2}{14}$ oder wenn auch hier $s = 2r$, die Höhe $= r$, der Radius im 2. Gliede aber $= \frac{1}{2}s$ gesetzt wird, ist

$$F \text{ (angenäherter Kreisabschnitt)} = \frac{s+h}{2} \cdot h + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2}{14}.$$

---

1) Die Richtigkeit der Formel für den Halbkreis hat schon CANTOR erkannt (*Agrimensoren*, S. 48).

Indem Heron in den Metrika diese Methode auf die Berechnung derjenigen kleineren Kreisabschnitte beschränkt, deren Sehne s nicht $> 3h$ ist, giebt er zugleich für den Fall, dafs $s > 3h$ sei, dieselbe Formel, welche für den Parabelabschnitt gilt, der $\frac{4}{3}$ des Dreiecks erster Ordnung ausmacht, und bei dem die Sehne senkrecht auf der Achse der Parabel steht, wobei die Annäherung (*ὡς ἔγγιστα*) ausdrücklich betont wird. Das wäre also F (angenäherter Kreisabschnitt) $= \frac{s \cdot h}{2} \cdot \frac{4}{3}$. Merkwürdigerweise haben weder Heron in der Geometrie noch Columella diesen Diorismos beachtet. Columella weicht auch in den Zahlen von Heron ab, stimmt in diesen dagegen, wenn wir von der kleinen Ungenauigkeit des Endresultates ('pedes XLIV ⟨paulo amplius⟩') absehen, mit dem Urheber eines Rechnungsbeispieles in der freilich interpolierten Aufgabensammlung des Constantinopol. 1 s. XI, Fol. 38^v, wo allerdings die Ausrechnung fehlt. Doch ergiebt sich aus dem Endresultate, dafs unsere Formel benutzt sein mufs:

Καὶ πάλιν μετροῦμεν τμῆμα ἔλαττον ἡμικυκλίου, οὗ (sc. *τμήματος*) *ἡ διάμετρος* (statt *βάσις*) *ποδῶν ι̅ς̅, ἡ δὲ κάθετος ποδῶν δ̅. καὶ ἔστι ποδῶν μ̅δ̅ ϲʹ ιδʹ.* (Colum. a. a. O.: si minus quam semicirculus erit, arcum sic metiemur. esto arcus cuius basis habeat pedes XVI, latitudo autem pedes IIII etc.)

Und wiederum messen wir einen Abschnitt, der kleiner ist als ein Halbkreis und dessen Sehne (Hs. Durchmesser) sich auf 16 Fufs, dessen Höhe sich auf 4 Fufs beläuft. Und es macht $44 \frac{1}{2} \frac{1}{14}$ $(= 44 \frac{4}{7})$ Fufs.

Auch diese Aufgabe hat den Diorismos vernachlässigt.[1]) Da nun bei Heron, *Geom.* 94, S. 125 ($s = 16, h = 6$), *Geom.* 95, S. 125 und *Mensur.* 30, S. 198 ed. Hultsch ($s = 12$, $h = 4$) die Zahlen innerhalb des Diorismos liegen, so dürfte ein Zweifel an der Echtheit[2]) der von der gegebenen Grenze abweichenden Aufgaben nicht ganz unberechtigt erscheinen.

1) Die Konstantinopeler Sammlung enthält noch ein anderes unediertes Beispiel $\left(s = 14,\ h = 6,\ F = 63\frac{1}{2}\right)$, bei dem der Diorismos beobachtet ist, auf Fol. 11^r: *Ἔστω ⟨τμῆμα⟩ ἔλαττον ἡμικυκλίου, ἡ κάθετος ποδῶν ϛ̅, ἡ δὲ βάσις ποδῶν ι̅δ̅. εὑρεῖν αὐτοῦ τὸ ἐμβαδόν · ποιῶ οὕτως · σύνθες τὴν βάσιν καὶ κάθετον · γίνονται πόδες κ̅ · ὧν ϲ̅ · γίνονται πόδες ι̅ · ταῦτα ἐπὶ τὴν κάθετον · γίνονται πόδες ξ̅ · ἀλλὰ ποιῶ καὶ βάσεως μέρος ϲʹ · γίνονται πόδες ζ̅ · ταῦτα ἐφ' ἑαυτά. γίνονται πόδες μ̅θ̅, ὧν ιδʹ · γίνονται γ̅ϲʹ · ταῦτα προστιθῶ τοῖς ξ̅ · γίνονται πόδες ξ̅γ̅ϲ̅ʹ.*

2) Allerdings hat Heron auch in den *Metrika* Fol. 85^r des Constantinopol. 1 bei Berechnung des *τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου* $\left(s = 14,\ h = 3\frac{1}{2}\right)$ den Diorismos nicht beachtet.

Dieser Zweifel gilt in erhöhtem Maſse von der auch in den Zahlen mit COLUMELLA übereinstimmenden Aufgabe, da die Sammlung, in der sie steht, nachweislich zwar HERONisches Gut enthält, aber in der vorliegenden Gestalt nicht von HERON herrühren kann. Ob HERON bei den *οἱ ἀκριβέστερον ἐζητηκότες*, abgesehen von ARCHIMEDES' Berechnung des Kreisumfangs, auch an Männer gedacht hat, welche die Ausdehnung der Halbkreisformel auf den kleineren Kreisabschnitt zuerst vollzogen oder ob HERON dies selber gethan hat, steht dahin. Unmöglich wäre es nicht, daſs die Formel zu HERONS Zeit schon allgemeiner war, und daſs sich auch in andern Büchern entsprechende Aufgaben (s. oben S. 311) fanden.

Das Sechseck rechnet HERON in den *Metrika* (Fol. 78ʳ im Constantin.) durch die Formel $F\,(\text{Sechseck}) = \frac{13a^2}{5}$ aus, wo a die Seite des Sechsecks[1]) ist. Hierzu giebt HERON, *Geepon.* 77, S. 218 ed. HULTSCH ein Beispiel mit $a = 30$ ($F = 2340$). Die Formel läſst sich nach Analogie der Formel fürs gleichseitige Dreieck auch auf die Form $\frac{13a^2 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{13a^2}{30} \cdot 6 = \left(\frac{10a^2}{30} + \frac{3a^2}{30}\right) 6 = \left(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{10}\right) 6$ bringen.[2])

Auch HERON giebt *Geep.* 76, S. 218 ein Beispiel mit $a = 30$, $F = 2340$.

---

1) Da die Höhe h des gleichseitigen Dreiecks $= \frac{a}{2}\sqrt{3}$, so ist der Inhalt der 6 Dreiecke des Sechsecks, $\sqrt{3}$ zu $\frac{26}{15}$ gerechnet, $\frac{6a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{26}{15} = \frac{13a^2}{5}$.

2) Etwas umständlicher kommt ein äuſserst schwer lesbares, aber mit vieler Mühe doch glücklich entziffertes unediertes Scholion von zweiter Hand auf dem Rande von Fol. 19ᵛ des Constantinop. 1 zu demselben Ziele:

Ἀποδέδειχεν Ἀρχιμήδης, ὅτι τὰ ιγ´ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου ἴσα εἰσὶ ε´ ἑξαγώνοις, ὥστε ἔσται τὸ πεντάγωνον (so Hs statt *ἑξάγωνον* verschrieben) *β´ μονάδων* (?) *∠´´ δεκάτου. τὰ δὲ δύο ∠´´ δέκατον τῶν ς´ τρίτον δέκατον. ἀναλυθέντων γὰρ τῶν δύο ∠´´ δεκάτου εἰς κς´ δέκατα καὶ τῶν ς´ εἰς ξ´, ἔσται τὰ κς´ τρίτον δέκατον τῶν ξ´.*

ARCHIMEDES hat bewiesen, daſs 13 Quadrate von der Seite des Sechsecks gleich sind 5 Sechsecken, so daſs das Sechseck zwei Einheiten, $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}$ betragen wird. $2\frac{1}{2}\frac{1}{10}$ ist aber $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{10}$ von 6. Denn wenn man die $2\frac{1}{2}\frac{1}{10}$ in 26 Zehntel und die 6 in 60 (Zehntel) auflöst, werden die 26 von 60 ein Drittel und ein Zehntel betragen.

Also $\frac{13}{5} = 2\frac{1}{2}\frac{1}{10} = \frac{6}{3} + \frac{6}{10}$; $2\frac{1}{2}\frac{1}{10} = \frac{26}{10} = \frac{60}{3 \cdot 10} + \frac{60}{10 \cdot 10}$; $26 = \frac{60}{3} + \frac{60}{10}$; daher $F\,(\text{Sechseck}) = \frac{26a^2}{10} = \frac{a^2}{10}\left(\frac{60}{3} + \frac{60}{10}\right) = a^2\left(\frac{6}{3} + \frac{6}{10}\right) = \left(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{10}\right) 6.$ Ich weiſs nicht, ob der Scholiast eine Stelle aus den vorhandenen Schriften des ARCHIMEDES im Sinne hatte. In der Kreismessung, die ja von Vielecken handelt, findet sie sich in der angeführten Form nicht. Daher scheint es, als sei sie ein Novum.

Die Formel wird *Geep.* 173, S. 229 ed. Hultsch (= Constantinop. 1 Fol. 61^v) unter der Überschrift *Εὐκλείδου Εὐθυμετρικά* (ebenso Heron, Geom. 105, S. 137 ed. Hultsch unter derselben Überschrift) und am Schlufs der *Geometrie* in den zwar Heronisches Gut enthaltenden (z. B. Geom. 102, 11, 103, S. 136 auch in Herons *Metrika*, Fol. 81^r), aber auch mit fremden Bestandteilen durchsetzten Vielecksformeln *Geom.* 102, 4, S. 134 ($a = 30$, $F = 2340$) und ebenso bei Pseudo-Diophant II, 16 ed. Tannery (= Cod. Constantinop. 1 Fol. 19^v, $a = 30$, $F = 2340$) benutzt, dessen Stellen genau mit *Geepon.* 76. 77 übereinstimmen. Dieses selbe Beispiel bietet nun auch Columella (*De re rustica* V, 2, 10, S. 243 $a = 30$, $F = \left(\frac{30^2}{3} + \frac{30^2}{10}\right) \cdot 6 = 2340$). Die Übereinstimmung zwischen Heron und Columella ist hier nicht blofs in Bezug auf die verwendete Formel, sondern auch den Zahlwert genau. Vorausgesetzt, dafs die Umformung der Sechsecksformel von Heron selber stammt und dafs die aus ihm angeführten Rechnungsbeispiele echt sind, würde man allerdings eine Abhängigkeit Columellas von Heron annehmen müssen, wobei vorauszusetzen ist, dafs Heron vor 62 n. Chr. schriftstellerisch thätig war. Weil es aber andrerseits denkbar ist, dafs beide aus einer gemeinsamen Quelle schöpften, wie die Formel ja auch dem Euklid zugeschrieben wird (s. oben Z. 2), so werden wir über die Möglichkeit, dafs Columella aus Heron schöpfte, nicht hinauskommen, zumal da bei den übrigen Beispielen die Zahlen bei Columella andere sind. Für so sicher, wie Cantor, können wir diese Sache nicht halten.

Diese Abweichung in den Zahlen hat Cantor, *Agrim.*, S. 92 und *Vorl.*, S. 510 damit zu erklären gesucht, dafs letztere dem *Geom.* 102, 2, 4, S. 134 erwähnten „anderen Buche“ (*ἄλλο βιβλίον*) entnommen seien. Dieses andere Buch sei aber eine zweite, uns verlorene Ausgabe von Herons *Geometrie* (Cantor, *Vorles.* I, S. 364) gewesen. Dem mufs ich widersprechen. *Βιβλίον* heifst 'Buch' und weiter nichts, Ausgabe heifst *ἔκδοσις*. So spricht man von *Εὐκλείδου τῆς Θέωνος ἐκδόσεως*, so nennt Eutokios die Ausgaben der *Konika* des Apollonius von Perge (II, 176, 17 ed. Heiberg *πλειόνων οὐσῶν ἐκδόσεων*) *ἐκδόσεις*. Nun steht dort (*Geom.*, 102, 2) *ἐν ἄλλῳ βιβλίῳ τοῦ Ἥρωνος εὑρέθη οὕτως* 'in einem anderen Buche wurde die Fünfecksformel so gefunden', nämlich $F_5 = \frac{5a^2}{3}$, wobei die Seite $a = 10$ ist. Thatsächlich steht nun ein solches Beispiel nach derselben Formel und mit derselben Zahl *Geepon.* 75, S. 218 ed. Hultsch (auch Constantin. Fol. 19^r). Freilich finden wir die Formel auch in den *Metrika* (Fol. 77^v des Constantinopol., $F_5 = \frac{5a^2}{3}$, auch hier $a = 10$). Ferner heifst es *Geom.* 102, 4 in Bezug auf die zweite Sechseckformel

$\left[F_6 = \left(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{10}\right) 6\right]$ *ἄλλως ἐν ἄλλῳ βιβλίῳ* 'anders in einem Buche', d. h. dafs sie eben anders rechne als $F_6 = \frac{13a^2}{5}$. Hier fehlt freilich der Zusatz *τοῦ Ἥρωνος*. Aber der Excerptor hat m. E. sicher *τοῦ Ἥρωνος* gemeint. Er hatte es vielleicht am Rande nachgetragen, und von da ist es durch einen Irrtum des Schreibers im Texte an eine falsche Stelle geraten, nämlich an den Schlufs des kleinen Absatzes statt an den Anfang. Derartige Versetzungen sind nicht so ungewöhnlich. Auch von dieser Formel finden wir *Geepon.* 76 ein Beispiel mit genau entsprechenden Zahlen, wogegen die Formel in den *Metrika* fehlt. Was folgt daraus? Dafs dies *ἄλλο βιβλίον*[1]) aus der *Geom.* 102, 2. 4 allem Anschein nach eben der zum Teil auch im Constantinopol. 1 überlieferte sog. *liber Geeponicus* ist. Obgleich dies S. 211 *Ἥρωνος εἰσαγωγαὶ τῶν γεωμετρουμένων* überschrieben ist, so kann man es dennoch nicht als eine zweite Ausgabe von Herons *Geometrie* bezeichnen in dem Sinne, wie Cantor es von einer verlorenen zweiten Ausgabe meint, besonders da es ja auch stereometrische Aufgaben enthält. Überhaupt ist augenscheinlich, dafs der *liber Geepon.* in der vorliegenden Gestalt mit dem bunten Wechsel zwischen Planimetrie und Stereometrie nicht aus Herons Hand hervorgegangen sein kann. Dies bestätigt der Constantin. 1, welcher in der Reihenfolge der Aufgaben vielfach abweicht.

Es erübrigt noch die wichtigsten Punkte bei den *Agrimensoren* einer kurzen Besprechung zu unterziehen. Die in den römischen Feldmessern ed. Lachmann I, 31, 12—34, 13 dem Frontin zugeschriebene und von Cantor zu Herons *Dioptra* 23, 24 in Beziehung gesetzte Stelle wird von Hultsch (Cantor, *Agrimens.*, S. 202, Anm. 191) dem Frontin abgesprochen, ist doch auch etwas allgemein gehalten. Wenig Eindruck wird der Graecismus podismus 'Ausfufsung' (a. a. O. 32, 5) machen, da das Wort *ποδισμός* bei Heron nur an ein paar unechten Stellen (*Geep.* 204, 4, 5; 205, 1) nachweisbar ist.

Bei Hygin (Röm. Feldm. I, 166 ff.) hat zwar Figur 205 eine gewisse Ähnlichkeit mit den Figuren der *Dioptra*, Kap. 23, 24 ed. Vincent. Aber gleichen nicht mehr oder weniger alle zwecks Aufnahme solcher Felder entworfenen Figuren einander? Ferner liegt im einzelnen keineswegs eine genaue Übereinstimmung zwischen Hygin, Röm. Feldm. I, 193, 3 (s. Cantor,

1) Was es mit dem *ἄλλο βιβλίον τοῦ Ἥρωνος Geom.* 101, S. 131 für eine Bewandtnis hat, habe ich noch nicht ermitteln können. *Geom.* 101 mag zwar Heronisches Gut enthalten wie *Geom.* 100 sich z. B. mit Fol. 81^{v} in freier Weise berührt. Aber Hultsch' Zweifel sind nicht ganz unberechtigt. *Geom.* 101, 1, 2, 7, 10 sind in etwas anderer Form auch im Constantin. 1 vertreten.

Agrim., S. 98 und Anm. 198, vgl. auch Röm. Feldm. I, Taf. 19, Figur 173, wo AC irrtümlich parallel BD ist) und HERON, *Dioptra* 10 vor. Die allgemeine Methode, zu einer sichtbaren, aber entfernten Geraden eine Parallele abzustecken, wird doch wohl Gemeingut der Fachleute gewesen sein.[1]

Des BALBUS Maſstabelle (Röm. Feldm. I, 94 f.) stimmt zwar mit der sog. zweiten HERONischen Maſstafel (*Script. metrol.* ed. HULTSCH, I, 184) überein, aber es ist unbestritten, daſs diese eben nicht von HERON stammt. Die *Definitionen* (Röm. Feldm. I, 98) stimmen mit EUKLID. Die Messung der Breite eines Flusses und der Höhe von Bergen (Röm. Feldm. I, 92, 18—93, 3, s. auch HULTSCH in FLECKEISENS Jahrb., 1897, S. 50, Anm. 4) waren derzeit für die Fachleute keine ungewöhnlichen Aufgaben mehr (s. oben, S. 309, GEMINOS, Var. coll. 249 ed. HULTSCH: τειχῶν ὕψη, ποταμῶν πλάτη u. a.).

Etwas anders liegt die Sache bei NIPSUS. HERON, *Geom.* 24, 2 und NIPSUS, Röm. Feldm. 299, 4—16 (Berechnung der Höhe im spitzwinkligen Dreiecke mit der Basis 14, den Seiten 13, 15, ἀποτομή HERON, S. 64, 15 = praecisura Feldm. I, 299, 13) stimmen freilich ziemlich genau überein, ebenso, von den verschiedenen Zahlwerten abgesehen, *Geom.* 12, 3 mit NIPSUS, Feldm. I, 301, 6—14 (Berechnung der Höhe h aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse c, nach der Formel $h = \frac{a \cdot b}{c}$, wenn a und b die beiden Katheten sind). Dazu kommt die Verwendung der bekannten Formel für die Inhaltsberechnung eines Dreieckes aus den drei Seiten (HERON, *Geom.* 30, 81, 2, Entwicklung des Beweises *Dioptra* 30, S. 286 ed. VINCENT = HERON ed. HULTSCH, S. 235 und vielleicht ursprünglicher Fol. 70^{v} in den *Metrika*, s. HERON, *Op.* III ed. SCHÖNE — NIPSUS Feldm. I, 300, 11—301, 5). NIPSUS hat als Zahlwerte 6, 8, 10, HERON dagegen andere, auch in den *Metrika* (7, 8, 9) und unter den unedierten Aufgaben (13, 14, 15; 9, 10, 17). Wenn CANTOR sich hierfür auf das „andere Buch" HERONS (*Agrimens.*, S. 108), d. h. auf die zweite Ausgabe der *Geometrie* beruft, so ist das jetzt nicht mehr angängig (s. oben S. 314). Nun könnte ja NIPSUS die Zahlen selbst geändert haben. Notwendig ist die Annahme der Abhängigkeit des NIPSUS von HERON nur in dem Falle, daſs die sog. HERONische Dreiecksformel wirklich HERON zum Urheber hätte. Aber CANTOR, *Vorl.* I², 360 rechnet selbst mit der Möglichkeit, daſs HERON einen zu seiner Zeit schon anderweitig bekannten Satz vortrage. Und es kann auſser den HERONischen auch

1) Der Ausdruck (linea) ordinata, welcher bei BALBUS 98, 16, HYGIN, 193, 15 Parallellinie bedeutet, kommt auch in dem jüngst entdeckten HERONischen Fragmente (ANARITIUS ed. CURTZE, S. XXVIII) vor, kann aber wohl nur 'proportional' bedeuten.

noch andere Rechenbücher gegeben und Nipsus aus einer solchen verlorenen Aufgabensammlung geschöpft haben.[1])

Nur der Vollständigkeit wegen erwähnen wir noch Julius Africanus und Vitruvius Rufus (Cantor, *Vorl.* I², 410, 517). Des ersteren Methode, die Breite eines Flusses zu berechnen, weicht insofern von Heron ab, als Africanus imstande ist, eine der gesuchten gleiche Breite wirklich zu messen, während Heron sie nur berechnet. Von Vitruvius Rufus bezw. Epaphroditus[2]) sind die genau übereinstimmenden Rechnungs-

---

1) Der Wichtigkeit der Sache wegen sei es erlaubt, im Anschlufs an Cantors Bemerkungen über die Kenntnis von Auflösungen unreiner quadratischer Gleichungen (*Agrim.*, S. 106) aus der Konstantinopeler Aufgabensammlung eine unedierte wirkliche quadratische Gleichung, die vielleicht auf Heron zurückgeht, abzudrucken (Fol. 29ʳ des Constantinop. 1 s. XI. Sie folgt in der Hs auf *Geepon.* 79, S. 219):

Χωρίον τετράγωνον ἔχον τὸ ἐμβαδὸν μετὰ τῆς περιμέτρου ποδῶν $\overline{ωϟϛ}$ διαχωρίσαι τὸ ἐμβαδὸν ἀπὸ τῆς περιμέτρου. ποιῶ οὕτως. ἔκθου καθολικῶς μονάδας $\overline{δ}$. ὧν c′· γίνονται πόδες $\overline{β}$. ταῦτα ποίησον ἐφ' ἑαυτά. γίνονται πόδες $\overline{δ}$. σύνθες ἄρτι μετὰ τῶν $\overline{ωϟϛ}$. ὁμοῦ γίνονται πόδες $\overline{ϡ}$. ὧν πλευρὰ τετραγωνική. γίνονται πόδες $\overline{λ}$. καὶ ἀπὸ τῶν $\overline{δ}$ ὕφειλον τὸ c′. γίνονται πόδες $\overline{β}$. λοιπὸν γίνονται πόδες $\overline{κη}$. τὸ οὖν ἐμβαδόν ἐστιν ποδῶν $\overline{ψπδ}$. καὶ ἡ περίμετρος ἔστω ποδῶν $\overline{ριβ}$· ὁμοῦ σύνθες ἄρτι τὰ πάντα· γίνονται πόδες $\overline{ωϟϛ}$. τοσούτων ἔστω τὸ ἐμβαδὸν μετὰ τῆς περιμέτρου, ποδῶν $\overline{ωϟϛ}$.

(Ich habe den Text gegeben, wie er in der Hs steht, obwohl an mehreren Stellen zu ändern sein wird, wie z. B. *χωρίου τετραγώνου ἔχον⟨τος⟩*, einigemale *μονάδων* $\binom{o}{\mu}$ statt *ποδῶν* $\binom{o}{\pi}$ und *ἔσται* statt *ἔστω*).

Von einer quadratischen Fläche, deren Inhalt und Umfang 896′ betragen, den Inhalt vom Umfang zu sondern. Ich mache es so. Setze allgemein vier Einheiten; davon die Hälfte. Es werden 2′. Dies multipliziere mit sich selbst. Es werden 4′. Jetzt setze dies mit 896 zusammen. Es ergiebt zusammen 900. Daraus die Quadratwurzel. Es macht 30′. Und von den 4 nimm die Hälfte weg. Es werden 2′. Bleibt als Rest 28′. Der Inhalt beträgt also 784′. Und der Umfang wird (Hs soll) 112′ betragen. Setze jetzt das Ganze zusammen. Es werden 896′. So grofs wird (Hs soll) der Inhalt nebst dem Umfange sein, nämlich 896′.

(Wir haben hier also die unreine quadratische Gleichung

$$x^2 + 4x = 896$$
$$x^2 + 4x + 4 = 896 + 4$$
$$(x + 2)^2 = 900$$
$$x + 2 = +30$$
$$x = 28$$

[Der negative Wurzelwert ist nicht berücksichtigt]).

Eine andere unreine quadratische Gleichung Herons als Rechnungsaufgabe s. bei Cantor, *Vorl.* I², 377.

2) Vgl. aufser Cantor noch V. Mortet, *Un nouveau texte des traités d'arpentage et de géométrie d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus avec une introduction de* P. Tannery, Notices et extraits XXXV: 2, Paris 1896 und dazu M. Curtze, Deutsche Litteraturz. 1897, S. 414. — Dafs P. Tannery, *Notes sur la Pseudo-*

beispiele mehr allgemeiner Art. Dazu kommt aber, daſs Vitruvius Rufus in dem sehr wichtigen arithmetischen Teile anerkanntermaſsen (s. Cantor, *Agrim.*, S. 121 ff.) eine andere Quelle als Heron benutzt hat.

Daſs nun die Römer auf dem Gebiete der Mathematik und insbesondere des Feldmessens von den Griechen gelernt haben, ist unbestritten. Daſs diese griechische Quelle in erster Linie Heron von Alexandria sei, ist für Vitruv, den Verfasser der *Baukunst*, sehr unwahrscheinlich. Bei Columella und den Agrimensoren mag man vielleicht eine indirekte Abhängigkeit von Heron für möglich halten. Aber durch zwingende Gründe erwiesen ist sie nicht. Vielmehr darf man die Benutzung ähnlicher Vorlagen, die doch nach Geminos anscheinend vorhanden gewesen sind, nicht ganz auſser acht lassen. Unser Resultat ist demnach gering. Aber es ist unter Umständen auch nicht ohne Wert festzustellen, daſs das, was man sicher zu wissen glaubte, nicht über allen Zweifel erhaben ist.

Géométrie de Boèce (dieser Band, S. 41) jetzt Nipsus aus der Liste der Agrimensoren streichen will, darf ich bei den Lesern der Biblioth. Mathem. als bekannt voraussetzen.

Sind die Heronischen Vielecksformeln trigonometrisch?

Von

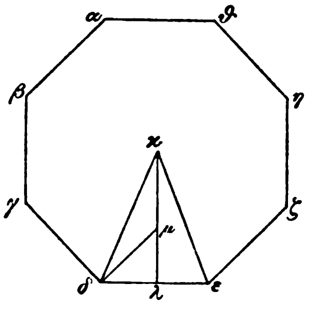
Wilhelm Schmidt in Helmstedt.

Die HERONischen Vielecksformeln sind aus CANTOR, *Vorl.* I², 370 bekannt. Ihre Ableitung galt aber bisher für zweifelhaft. CANTOR bezeichnet sie als trigonometrisch, aber TANNERY[1]) und A. VON BRAUNMÜHL[2]) sind anderer Meinung.

Die Entscheidung dieser Frage bringen HERONS *Metrika*, welche im 1. Buche (Fol. 77ᵛ—80ᵛ des Constantinopolitanus 1 s. XI, s. auch HERON, *Op.* III ed. H. SCHÖNE) die Formeln für das Fünfeck, Sechseck bis Zwölfeck einschliefslich auf *geometrischem* Wege ableiten.

Da CANTOR a. a. O., S. 373 am Achteck versucht hat, die trigonometrische Grundlage nachzuweisen, so sei es gestattet hier HERONS geometrische Entwickelung für das Achteck auszuführen. Für die übrigen Formeln wird es genügen, auf die demnächst erscheinenden *Metrika* zu verweisen.

In nebenstehender Figur ist



$$\angle\, \delta\kappa\varepsilon = \tfrac{1}{2}R$$
$$\angle\, \delta\kappa\lambda = \tfrac{1}{4}R$$
$$\angle\, \kappa\delta\mu = \tfrac{1}{4}R$$
$$\angle\, \delta\mu\lambda = \tfrac{1}{2}R$$
$$\kappa\lambda \perp \delta\varepsilon$$

$\delta\lambda = \tfrac{1}{2}a$ (a Seite des Achtecks)

$\delta\lambda = \mu\lambda$ (weil $\angle\, \mu\delta\lambda = \tfrac{1}{2}R$),

$$\delta\mu^2 = 2\mu\lambda^2$$
$$\frac{\delta\mu}{\mu\lambda} = \sqrt{2} = \frac{17}{12}$$

---

1) *L'Arithmétique des Grecs dans* HÉRON *d'Alexandrie par* M. PAUL TANNERY; Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux 4_2, 1882, S. 184.

2) *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, Leipzig 1900, S. 9.

$$\delta\mu = \mu\varkappa$$

$$\frac{\varkappa\mu}{\mu\lambda} = \frac{17}{12}.$$

(Daraus ergiebt sich mit Hülfe korrespondierender Addition [συνθέντι]

$$\left.\frac{\varkappa\mu + \mu\lambda}{\mu\lambda} = \frac{17 + 12}{12}.\right)$$

$$\frac{\varkappa\lambda}{\mu\lambda} = \frac{\varkappa\lambda}{\delta\lambda} = \frac{29}{12}.$$

Hieraus folgt, da $\varkappa\lambda$ die Höhe h des einzelnen Dreiecks und $\delta\lambda$ $\frac{a}{2}$ ist, in etwas umständlicher Weise

$$\frac{h}{\frac{1}{2}a} = \frac{29}{12}$$

$$\frac{a}{h} = \frac{24}{29}$$

$$\frac{a^2}{ah} = \frac{24}{29}$$

$$\frac{a^2}{\frac{1}{2}a \cdot h} = \frac{24}{14\frac{1}{2}}$$

$$\frac{a^2}{J_8} = \frac{24}{14\frac{1}{2} \cdot 8} = \frac{24}{116} = \frac{6}{29}.$$

Also ist $J_8 = \frac{29a^2}{6}$.

Die kleine Differenz zwischen dieser Annäherung und dem genauen Werte nach trigonometrischer Berechnung beruht beim Achteck, wie man sieht, auf dem nur angenäherten Werte $\left(\sqrt{2} \sim \frac{17}{12} = 1{,}41666\right)$ für $\sqrt{2}$, der sich aber dem genaueren $(\sqrt{2} = 1{,}41421)$ mehr nähert als $\frac{7}{5}$ im *liber Geepon.* (Cantor, *Vorl.* I², 368, 372).[1])

Zugleich haben wir einen Beleg dafür, daſs die Annäherung $\frac{17}{12}$ schon älter ist als Theon von Alexandria (Cantor a. a. O., S. 408). Sie wird, wie Cantor vermutet, aus dem Lehrsatze über die Seiten- und Diametralzahlen gewonnen sein, den man auf die Pythagoreer zurückführt.[2])

---

1) Sollte dies und die abweichende Achtecksformel (Cantor a. a. O., S. 372) nicht ein neuer Fingerzeig für die Unechtheit des *liber Geeponicus* sein? Setzt man oben $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$, so ist $J_8 = \frac{24a^2}{5}$.

2) F. Hultsch, *Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen.* **Biblioth. Mathem.** 1_3, 1900, S. 11.

Urkunden zur Geschichte der Trigonometrie im christlichen Mittelalter.

Gesammelt und erläutert

von

Maximilian Curtze in Thorn.

In den *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* hat Herr A. von Braunmühl eine Reihe von Thatsachen erwähnt, die er handschriftlichen Notizen entnommen hatte, welche ich ihm zur Disposition gestellt. Da der Herr Herausgeber der Bibliotheca Mathematica mir gestattet hat, diese Notizen unter dem obigen Titel in seiner Zeitschrift zu veröffentlichen, so lasse ich dieselben mit noch einigen andern von mir seitdem neu gefundenen hier folgen.

1. Aus dem „Liber embadorum" des Savasorda[1]) in der Übersetzung des Plato von Tivoli.

Ich entnehme dieses Stück den beiden Handschriften der Nationalbibliothek zu Paris „Manuscrits latins N^{os} 11246 et 7224"[2]), welche mir

1) Dafs Savasorda mit Abraham bar Chijja identisch ist, hat Moritz Steinschneider zuerst nachgewiesen. Für die Leser dieser Zeitschrift ist es am bequemsten den Jahrgang 1896, S. 33—42 nachzulesen, dort findet sich nämlich eine zusammenfassende Übersicht seiner Untersuchungen über diesen merkwürdigen Mann. Savasorda ist eine der vielen durch die lateinischen Übersetzer verschuldeten mittelalterlichen Verdrehungen griechischer und semitischer Namen und lautet im Originale „Sa'hib al Schorta", d. h. Fürst der Leibwache.

2) Von den beiden oben erwähnten Handschriften ist Nr. 11246 die ältere. Sie führte früher die Bezeichnung Supplément latin 774, unter welcher Bezeichnung Libri dieselbe aufführt, und entstammt dem Ende des XIV. oder dem Anfang des XV. Jahrhunderts. Auslassungen, welche dieselbe Hand, die den Codex schrieb, auf den Rändern und zwischen den Zeilen ergänzte, sind von einem späteren Besitzer vollständig ausradiert. Ehe diese Verstümmelung aber geschah, hat ein sachkundiger Kopist des XVII. Jahrhunderts das Mscrt. lat. 7224 aus Nr. 11246 abgeschrieben. Nr. 7224 enthält absolut genau dasselbe, wie die andere Handschrift, nur hat es auch das in 11246 fehlende letzte Blatt noch gelesen und erhalten.

durch hohe Vermittelung des Auswärtigen Amtes von der Verwaltung der „Bibliothèque Nationale“ für längere Zeit zur Benutzung überlassen waren, wofür ich hier meinen ergebensten Dank öffentlich auszusprechen für eine angenehme Pflicht halte. Ehe ich zu dem Abschnitt aus SAVASORDA selbst übergehe, möchte ich noch bemerken, daſs die im 2. Bande seiner *Histoire des sciences mathématiques en Italie* von LIBRI gemachten Mitteilungen über den Inhalt dieser Handschriften absolut Unwahres enthalten.[1]) Das, was LIBRI dort SAVASORDA zuschreibt, sind Auszüge aus dem zweiten und dritten Buche der Geometrie GERBERTS[2]) und Zuthaten, welche erst dem 15. Jahrhundert enstammen. Die wirkliche groſse Wichtigkeit des *Liber embadorum* als Hauptquelle für die *Practica Geometriae* des LEONARDO VON PISA[3]) hat LIBRI nicht einmal geahnt.

[18ᵛ] **Capitis Secundi Pars Quarta in arearum camporum circularium ac semicircularium, et quorum formae sunt plus minusve semicirculo perfecto, cognitione.**

1. *Perfecti quidem circuli aream nosse poteris*, si eius diametri cognitionem habueris. Igitur si diametri summam in 3 et septimam multi-

---

1) Man sehe Band 2, Note IV, p. 480—486. Um eine der vielen falschen Angaben LIBRIS zu berichtigen, verweise ich auf eine Bemerkung (p. 483): „*SAVASORDA* „*ne résout qu'une seule équation du second degré, sans donner la formule générale, et il* „*s'arrête à des choses si simples, qu'il faut avouer qu'il n'était pas fort en analyse*“. Die dazu in Anmerkung 1 aufgeführten Aufgaben aber gehören gar nicht SAVASORDA, sondern stehen auf den letzten zwei Blättern des Manuskriptes durch die Kreismessung des ARCHIMEDES in einer bis jetzt unbekannten Übersetzung aus dem Arabischen und durch Auszüge aus GERBERT von dem Werke SAVASORDAS vollständig getrennt. Dagegen hat SAVASORDA sämtliche Fälle der quadratischen Gleichungen aufgelöst, beweist deren Auflösungen, kennt bei der Form $x^2 + a = bx$ beide Lösungen, und weiſs, daſs für $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a < 0$ die Aufgabe unmöglich wird. PLATO übersetzt, wohl in Übereinstimmung mit dem Verfasser, *res* mit *latus*, *census* mit *embadum*.

2) Über die Auszüge aus GERBERT sehe man BUBNOV, *Opera GERBERTI*, p. 302—335 und meine Besprechung des Buches in Deutsche Litteraturzeitung 1900, Nr. 13, Sp. 891—893.

3) LEONARDO hat die Anordnung seiner *Practica Geometriae*, sowie einen groſsen Teil seiner Sätze bis auf die Zahlenbeispiele dem *Liber Embadorum* zum teil wörtlich entnommen. Im Nachfolgenden finden sich einige solcher Entlehnungen, und werde ich an den betreffenden Stellen auf die Seitenzahlen der Ausgabe BONCOMPAGNIS verweisen. Ich will damit nicht sagen, daſs bei LEONARDO sich nicht eine bedeutende Zahl ihm gehöriger Untersuchungen finde, daſs er das von SAVASORDA Übernommene nicht weiter ausgeführt und vervollständigt habe, aber er ist, und darauf möchte ich eben Gewicht legen, doch von dem 100 Jahre älteren Verfasser abhängig, ebenso wie er es von dem *Liber trium fratrum* ist, wie schon GIESING festgestellt hat. LEONARDO hat die Übersetzung PLATOS benutzt, nicht etwa das hebräische Original.

plicaveris, circumferentiae circuli longitudinem reperies. Qua inventa, si diametri dimidium in dimidium circumferentis lineae duxeris circuli embadum nimirum invenies.[1])

Ad cuius evidentiam esto circulus, cuius diametrum 14 contineat, quod in tria et septimam multiplicatum 44 reddet, et haec est circumferentis lineae longitudo. Cumque diametri dimidium, quod est 7, in circumferentis lineae dimidium, quod est 22, multiplicaveris, 154 inde provenient, et haec erit circuli area.

2. *Circuli autem aream aliter absque circumferentis lineae aequatione sic investigare poteris.* Diametrum scilicet in se ipsum multiplicans ex inde collecto septenam septenaeque partis dimidium deme, et reliquum erit totius circuli area. In hac namque supradicta similitudine totius diametri in semet multiplicationem 196 continere reperies. De cuius numeri summa si septenam septenaeque partis dimidium, quod est 42, depresseris, 154, sicut et supra, relinquentur, et hoc erit circuli embadum.[2])

3. Haec autem numeratio fit, secundum quod circumferentem circuli lineam suo diametro triplam septima superaddita confitentur, ideoque, si ex diametri multiplicatione septimam septimaeque dimidium minueris, embadum invenies. Illi vero, qui subtiliter circulum numerare nituntur, et sunt illi, qui stellarum loca veraciter inveniunt, circumferentem circuli lineam suo diametro triplam et insuper 8 et dimidium de 60 diametri partibus continere pronuntiant.[3]) Quapropter secundum eas non est haec numeratio facienda, sed, ut antea, ex diametri multiplicatione quarta pars minus 8 partibus et dimidium de 60 eiusdem quartae partibus est minuenda, et reliquum erit circuli embadum.[4]) Veluti si in eodem supradicto exemplo ex diametri multiplicatione, quae 196 continet, quartam partem eius minus 8 partibus et dimidia de 60 eiusdem quartae partibus depresseris, quod est 42 ulnarum et 3 partium et dimidii de 60 unius ulnae partibus, 154 minus tribus partibus et dimidia de 60 unius ulnae partibus remanebunt, et hoc erit circuli embadum. Verum quia inter has duas numerationes adeo minima differentia reperitur, quod nec etiam ad dimidium octavae partis unius ulnae ex 154 ulnis pervenerit, et huiusmodi differentia modicum in numerando confert, hac in scientia parvissimi

1) Hier ist also, wie allgemein im Mittelalter, $\pi = 3\frac{1}{7}$ gesetzt, doch weifs, wie aus dem Folgenden hervorgeht, der Verfasser, dafs dieser Wert kein genauer ist. Verfasser giebt die Formel $J = \frac{d}{2} \cdot \frac{P}{2}$.

2) Das ist die Formel für den Kreisinhalt $J = \frac{11}{14} d^2$.

3) Gemeint ist der Wert des Ptolemaeus $\pi = \frac{377}{120}$.

4) Für den angegebenen Wert von π ist J richtig gleich $\frac{377}{480} d^2$ gesetzt.

difficultatem vitare volentes, primum numerandi modum sumus prosecuti.[1])

4. Igitur si diametri longitudinem cognoveris, circuli embadum absque suae circumferentiae numerositate non ignorare poteris. *Cumque circuli embadum sciveris et eius diametri longitudinem nosse volueris*, tres partes de 11 embado superaddas, et diametri multiplicationem invenies. Cuius summae radix diametri longitudinem continebit.[2]) [19]

Veluti si: diametrum circuli, cuius embadum 154 ulnas amplectitur, quot in longitudine mensuras contineret, quaeratur, hoc embadum in 11 partes diligenter dividas, et eius undecimam partem 14 continere reperies. Tres itaque partes in unum collectae 42 continebunt, quibus 154 superadditis 196 procreabuntur, et haec est totius diametri multiplicatio, cuius summae radix 14, quae sunt diametri longitudo, sibi connumerabunt.

5. *At si circumferentis lineae summam noveris, et diametri quantitatem scire volueris*, 7 partes de 22 partibus circumferentiae sumas, vel circumferentem lineam in 3 et septimam partiaris, et diametrum invenies. Quodcumque istorum feceris, ad idem pervenies.[3]) Veluti si: diametrum circumferentis lineae, quae 44 ulnarum exstiterit, quot in sui longitudine mensuras contineat, quaeratur, ex praedictis 44 septem partes de 22 partibus accipiens 14 reperies, quae sunt diametri longitudo. Similiter etiam, si 44 in 3 et septimam diviseris, diametri longitudinem 14 continere non dubitabis.

6. *Item quaerenti de circulo, cuius diametrum in 11 multiplicatum eius embadum perficit, quot in sui diametro mensuras recipiat, sic respondeas.* Cum diametri multiplicationem in quartam sui circumferentiae partem ipsius circuli embadum complere manifestum sit, et in hac quaestione diametrum in 11 multiplicatum sui circuli aream efficere proclamatur, quartam ipsius circumferentis lineae partem 11 mensuras continere non est ambiguum. Igitur si 11 in 4 multiplicaveris, 44, quae sunt circumferentis lineae summa, reperies, quam si in 3 et septimam diviseris, exibit diametri longitudo.[4])

7. Huc usque perfecti circuli dimensionibus ostensis ad portionum circuli dimensiones arcuum formas habentium transitum faciamus. Circu-

1) Es ist ja $\frac{7}{120} < \frac{1}{16}$.

2) $d = \sqrt{1\frac{3}{11} J}$.

3) $d = \frac{7}{22} P = \frac{P}{3\frac{1}{7}}$.

4) SAVASORDA hat hier die oben gegebene Formel $J = \frac{d}{2} \cdot \frac{P}{2}$ in $J = d \cdot \frac{P}{4}$ umgewandelt, was mir sonst im Mittelalter bei niemandem aufgestofsen ist.

lorum itaque portiones sicut et omnium figurarum in tria dividuntur. Quaedam etenim semicirculum, quaedam minus, quaedam vero plus semicirculo continebunt. Harum autem portionum singulae cordam et sagittam habere dicuntur.

Igitur eius *corda est linea recta ab altero fine arcus ad alterum finem protracta*, et eiusdem vero *sagitta est linea recta a praedictae cordae dimidio usque ad arcum secundum rectum angulum elevata.*

Cumque dimidio cordae sagitta aequalis exstiterit, erit arcus ille semicirculus; si autem minor ea fuerit, erit et ipse minor semicirculo; verum si maior apparuerit, et ipse arcus semicirculo maior apparebit.

8. Sit igitur exempli causa circuli portio $\widehat{abc}$, cuius corda *adc* 8, eiusque sagitta *db* 4 ulnas contineat: erit ergo semicirculus. Cuius embadum si nosse desi-de[19ʳ]ras, dimidium eius cordae, quae est circuli diametrum, in arcus dimidium multiplica et semicirculi embadum exibit.[1])

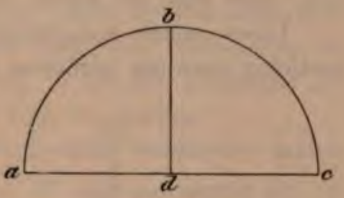


Fig. 1.

9. Arcus vero summam si nosse cupis, dimidium cordae, quae est 4, in 3 et septimam multiplica, et 12 ulnas quatuorque septenas invenies, et haec est ipsius arcus totius circumferentiae dimidium in se continentis quantitas. Huius quidem arcus dimidium, 6 scilicet duasque septimas, assumens in 4, quae sunt totius cordae dimidium, multiplica, et 25 ac unius septimam invenies, quod est semicirculi embadum.

10. Aliter etiam embadum scire poteris, scilicet si cordam in semet multiplicabis et ex inde collecto septimam septimaeque dimidium abstuleris residuique dimidium acceperis, semicirculi aream nimirum reperies. Quare si 8 praefatas ulnas in semet duxeris, 64 innascentur. De cuius numeri summa si septimam septimaeque partis dimidium, id est 13 ulnas et 5 septimas, abstuleris, 50 ulnae et duae septimae remanebunt, cuius summae dimidium, quae est 25 et unius insuper septima, semicirculi embadum complet. Hac itaque via semicirculi embadum addiscere ⟨poteris⟩, et haec est semicirculi figura.

11. Ad illius autem portionis similitudinem, quae semicirculo minor existit, $\widehat{abc}$ constituatur, cuius corda *ac* 8, eiusque sagitta *db* 2 mensuras in se contineat. Haec quidem portio non est semicirculus, sed minor semicirculo,

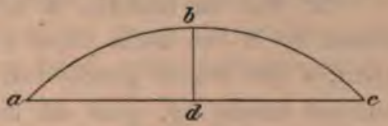


Fig. 2.

1) Man bemerke die Bezeichnung der zum Teil krummlinig begrenzten Figur durch $\widehat{abc}$, zum Unterschiede von einem gradlinig begrenzten Dreiecke *abc*. Der

eo quod ipsius sagitta eiusdem cordae dimidio minor invenitur. Huius autem portionis aream absque illius circuli, cuius portio est, diametri cognitione scire non poteris. *Circuli vero diametrum addiscas, si cordae dimidium in semet multiplicaveris, et quod fuerit, per sagittae summam diviseris, quodque exierit, toti summae sagittae superaddideris.* Illud etenim, quod inde collectum fuerit, erit totius diametri quantitas.[1])

Verbi gratia si hac in portione dimidium cordae, quod est 4, in se ipsum multiplicaveris, 16 invenies, cuius numeri summam si in duo, quae sunt sagittae quantitas, diviseris, 8 nimirum exibunt. Quibus superadditis 2, quae sunt sagittae longitudo, 10, quae sunt summa diametri illius circuli, cuius haec est portio, colligentur.

Istius quippe numerationis demonstrationem si nosse desideras, huius portionis circulum perficiens sagittam bd ex altera parte usque ad circumferentem lineam protrahas ad similitudinem lineae bdf, quae in hac subscripta figura circulari protracta est, eruntque duae lineae ac, bf in circulo $abcf$ supra punctum d sese invicem abscinden[20r]tes. Multiplicatio igitur lineae ad in lineam dc, quae sibimet invicem sunt aequales, erit ut multiplicatio lineae bd in lineam df, quemadmodum ab Euclide, geometra peritissimo, manifeste monstratur. Linea df ⟨lineam⟩ ac in duo secatur aequalia, ad cuius sectionis dimidio linea bf perpendiculariter super ipsam protrahitur, quapropter eam per centrum transire et circuli diametrum esse necesse est, ut in suo libro praedictus Euclides ostendit. Huius itaque circuli diametrum 10 continere mensuras nulli dubium est.

Fig. 3.

12. His ita repertis, si eiusdem portionis embadum nosse volueris, lineam bf in duo aequa supra punctum g, quod est circuli centrum, partiaris, a quo scilicet puncto duas ag, gc lineas ad duo puncta a, c dirigas, cumque lineam ag, quae est diametri dimidium, in dimidium arcus $\widehat{ac}$,

Abschreiber hat dieselbe nicht konsequent durchgeführt, aber die Anwendung an den verschiedenen Stellen zeigt, daſs der Verfasser sie überall gebrauchen wollte.

1) Savasorda kennt also die Beziehung zwischen Halbsehne, Sagitta und Durchmesser. Er kommt am Schlusse des Kapitels nochmals auf diese Beziehungen zurück. Für den Beweis bezieht er sich im Folgenden ausdrücklich auf Euklides.

quod est $\widehat{ab}$, multiplicaveris, embadum trianguli, cuius duo latera sunt lineae ag, gc eiusque basis est arcus $\widehat{abc}$, reperies. De cuius numeri summa si trianguli agc aream abstuleris, embadum portionis $abcd$ remanebit. Huius autem trigoni embadum, quod est 12, est multiplicatio lineae gd, quae hac in figura trium existit ulnarum, in dimidium lineae ac, quae 4 ulnas amplectitur, et ipsum videlicet embadum ⟨est⟩ illa quantitas, quae ex multiplicatione rectae lineae ag in lineam $\widehat{ab}$ circularem proicitur. Reliquum itaque portionis $abcd$ aream complet.

Manifestum est igitur, quod *in omni circuli portione, quae semicirculo minor exstiterit, si circuli, cuius ipsa portio fuerit, diametri dimidium in dimidium arcus eiusdem portionis duxeris, et quod fuerit, seorsum servaveris, post haec ex diametri dimidio sagittae summam proieceris, residuumque in cordae dimidium multiplicaveris, et quod fuerit, ex servata quantitate depresseris, reliquum eiusdem portionis embadum fore non dubites.*[1])

13. Item ad exemplar illius portionis circuli, quae semicirculo maior fuerit, $\widehat{abc}$ portio constituatur, cuius corda ac 12, eiusque sagitta bd 12 mensuras amplectitur. Huius autem portionis embadum taliter scire poteris. Si diametrum scilicet illius circuli, cuius portio est, produxeris et ipsius dimidium in dimidium arcus multiplicaveris, eique multiplicationi embadum trianguli supra cordam existentis superadiunxeris, inde coadunatum totius portionis embadum incunctanter efficies.

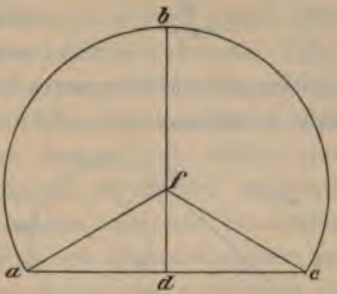


Fig. 4.

Veluti si dimidium cordae in se ipsum multiplicaveris, 36 invenies, cuius numeri summam si in sagittae quantitatem, quae est 12, diviseris, 3 nimirum exibunt, quibus eaedem sagittae superadditis 15, quae sunt totius diametri longitudo, colli[20v]gentur, cuius dimidium, quod est linea bf, 7 et semissem suscipit. Quod si in dimidium arcus multiplicaveris, embadum portionis sub lineis cf et af nec non et arcu $\widehat{abc}$ contentae reperies, cui si embadum trianguli acf superaddideris, et ipsum est id, quod ex multiplicatione lineae df in dimidium lineae ac colligitur, quod inde coadunatum fuerit, istius portionis aream complebit.

Quicumque igitur portionis circuli semicirculo maioris existentis embadum scire voluerit, dimidium diametri illius circuli, cuius portio fuerit, in

1) Die *Portio minor* ist also gleich dem Kreisausschnitt *minus* dem durch Sehne und beide Radien gebildeten Dreiecke.

dimidium arcus portionis multiplicet, et quod fuerit servet. Post haec dimidium diametri ex totius sagittae summa demat, reliquumque in cordae dimidium multiplicet, et quod fuerit, servatae quantitati superaddet, indeque collectum eiusdem portionis semicirculi maioris adparentis embadum fore confirmet. Cuius demonstratio supradictas demonstrationes non ignoranti manifeste patebit.[1])

14. Ad horum itaque similitudinem omnes circulares figuras, illas etiam insuper, quae partim ex arcubus partim ex rectis lineis formantur, metiri poteris. Ut in triangulo, cuius basis est arcus $\widehat{bdc}$, eiusque duo latera sunt lineae ab, ac rectae, si rectam bc protraxeris, triangulus rectilineus abc nec non et figura $\widehat{bde}$ ex recta et circulari constans; circulique portio nuncupata formabitur. Cumque utriusque istarum figurarum aream singulariter noveris, si eas in unum colligeris, totius figurae aream continebunt, et haec est figura.[2])

Fig. 5.

15. Simili quoque ratione si figura $\widehat{aebcd}$ procreatur, cuius basis bc recta linea fuerit, eiusdemque duo latera $\widehat{aeb}$, $\widehat{adc}$ lineae circulares exstiterint, et in ea duas rectas ab, ac lineas protraxeris, in tres partes tota figura dividetur, quarum una fuerit trigonus rectilineus abc, reliquae vero duae circuli portiones apparebunt, quarum alteram tres a, e, b, alteram autem tres a, d, c litterae designabunt. Istarum quidem trium partium embada via praedicta reperies.

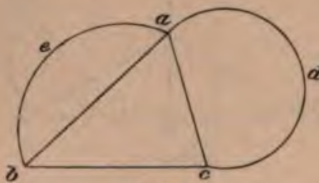


Fig. 6.

16. Quod si forte aliqua figura ex duabus circuli portionibus constare contingit, ut in hac figura $\widehat{abcd}$, quam *piscis formam* habere dicunt, et rectam in eo lineam ab produxeris, duae circulorum portiones separabuntur, quarum embada singulariter addiscens totius figurae piscis formam habentis embadum non ignorabis.[3])

---

1) Die *Portio maior* ist gleich dem Kreisausschnitt *plus* dem oben genannten Dreiecke. Daſs SAVASORDA auch den Kreisausschnitt gröſser als den Halbkreis betrachtet, ist beachtenswert. Sonst berechnen die Schriftsteller des Mittelalters die *Portio minor* und ziehen sie vom ganzen Kreise ab, um die *Portio maior* zu bestimmen. Zu diesem Abschnitte vergleiche man LEONARDO, p. 100—101.

2) LEONARDO, p. 101, 2. Absatz.

3) Ebendaselbst, Zeile 18—22.

17. Item si in figura, quae non sit circularis, sed obliqua procreatur, cuius duo diametra sunt inaequalia, utriusque diametri dimidium accipiens in unum collige, collectumque [21r] in semet ipsum multiplica. Ex qua multiplicatione septimam septimaeque dimidium, sicut in circulo feceras, abiiciens, reliquum huius obliquae figurae aream fore non ambigas.[1])

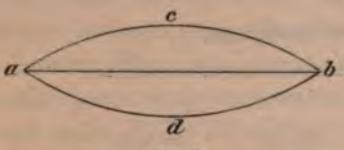


Fig. 7.

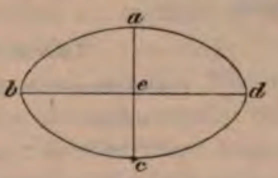


Fig. 8.

Istarum quippe figurarum variabilium multas invenies, ad quarum cognitionem, ne prolixitas operis taedium generet, ista sufficiant.

18. Cum circuli cuiuslibet diametrum sciveris, et qualibet in ipso scilicet circulo tibi data corda fuerit, si eiusdem cordae arcum nosse volueris, et, quemadmodum certam regulam in cognitione longitudinis cuiuslibet diametri per suam circumferentiam, vel cuiuslibet circumferentiae per sui diametri notitiam inveneris, ita certam regulam, qua per cordam vel sagittam longitudinem sui arcus addiscas, invenire desideras, hanc regulam te nullatenus invenire posse cognoscas, eo quod proportio cordae ad suum arcum non semper eodem intervallo procedit, sed secundum arcuum cordarumque variationes alteratur. Veluti si in eodem circulo duo inaequales procreantur arcus, proportio maioris arcus ad minorem erit maior proportione cordae maioris ad cordam minoris et eorum huiusmodi differentia non semper est eadem, quapropter nulli subiacet regula, ideoque cordarum et arcuum numeratio nonnullis obscura difficilisque videtur. Eos autem, qui hoc numerando scire voluerunt, quamplures geometriae regulas non ignorare necesse est. In astronomia vero peritissimi istud addiscere summopere curaverunt, eo quod astronomicae doctrinae valde necessarium est. Quapropter quaedam inde scripta, ne oblivione traderetur, composuerunt, ex quibus illud hoc in opusculo transtulimus, quod nobis operique nostro necessarium fore cognovimus. Quasdam insuper tabulas, in quibus 28 lineationes protrahuntur, ordinavimus. Diametrum enim circuli similiter in 28 partes divisimus, quare secundum istas divisiones linea circumferens 88 partes [21v] necessario continebit. Istarum etiam tabularum latitudo in quatuor lineationes dividitur, quarum prima 28 diametri partes in longitudine continet; in

1) Ebendaselbst, Zeile 23 bis p. 102, Zeile 11. Es handelt sich hier offenbar um eine Ellipse mit den Achsen a und b, und SAVASORDA so gut wie LEONARDO geben dafür die Formel $J = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \pi$.

reliquis autem tribus arcuum quantitates ab uno usque ad 28, prout singulis cordis debetur, inscribuntur. Aream vero tabularum idcirco in tria divisimus, quoniam, cum cuiuscunque arcus quantitatem subtiliter investigare voluimus, eum in 60, quae minuta vocantur, quorum iterum unumquodque in 60, quae secunda dicuntur, dividimus, ut in his subscriptis tabulis ostenditur.

Tabula arcuum et cordarum.[1])

Partes Cordarum	Arcus		
	Partes	Minuta	Secunda
1	1	0	2
2	2	0	8
3	3	0	26
4	4	0	55
5	5	1	44
6	6	2	54
7	7	4	42
8	8	7	11
9	9	9	56
10	10	13	42
11	11	18	54
12	12	24	38
13	13	31	·9
14	14	40	0
15	15	50	10
16	17	2	16
17	18	16	36
18	19	33	27
19	20	53	26
20	22	17	10
21	23	45	6
22	25	19	24
23	27	$\bar{0}$	0
24	28	49	56
25	31	26	37
26	33	20	52
27	36	27	32
28	44	0	0

20. Ad harum autem tabularum notitiam quandam regulam tibi valde necessariam et perutilissimam indicabimus. Ea est huiusmodi: *Si quatuor proportionales quantitates exstiterint, multiplicatio primae in quartam ea erit, quae et secundae in tertiam.*

Hac itaque regula tibi bene cognita et tenaci memoriae commendata istarum tabularum numerationes breviter ostendamus.

1) Die Sehnentafel SAVASORDAS dürfte wohl die älteste sein, welche in einem lateinisch geschriebenen Werke nachweisbar ist. Dasselbe ist im Jahre 1116 von PLATO VON TIVOLI nach dem hebräischen Originale übersetzt, und geht also auch allen Übersetzungen des GHERARDO VON CREMONA voraus. Vgl. auch v. BRAUNMÜHL, a. a. O. S. 93.

21. Si cuiuslibet igitur arcus corda tibi data fuerit, et eius arcum scire volueris, ipsius circuli diametrum per cordae sagittaeque longitudinem, ut supra docuimus, prius addiscas. Quod diametrum si 28 partium exstiterit, quemadmodum circuli diametrum in his tabulis positum fore praediximus, laboris expers cum data corda in lineam partium cordarum ingrediens, quod in eius directo in lineis arcuum ex partibus et minutis ac secundis inveneris, erit quaesiti arcus quantitas.

Si autem illius dati circuli diametrum plus minusve 28 partibus continuerit, quam proportionem ad 28 partes habuerit, inquire quoniam eadem erit datae cordae ad cordam tabularum proportio. Nam manifestum est, quod proportio diametri dati circuli ad datam cordam est eadem, quae et diametri tabularum, quod 28 partes in se recipit, ad illam cordam, quae secundum illius diametri quantitatem his in tabulis esset accipienda. Quare si datum cordam, quae in proportione prima consequens est, assumpseris, et eam in tabularum diametrum, quod in secunda proportione est antecedens et 28 partes suscipit, multiplicaveris, indeque proveniens per dati circuli diametrum, quod in prima proportione est antecedens, diviseris, corda, quae his tibi debetur in tabulis, exibit. In cuius directo ipsius quaesitum arcum reperies. Proportio autem istius inventae cordae ad suum arcum ea est, quae et datae cordae ad suum arcum, quem quaeris. Quapropter, si arcum in his tabulis repertum, qui est in prima proportione consequens, in datam cordam multiplicaveris, et per tabularum cordam diviseris, quaesitum arcum incontanter invenies.

Ad cuius similitudinem circulus, cuius diametrum 10 et semissem contineat, proponatur, [22r] in quem quaedam corda, cuius longitudo 6 mensuras recipiat, protrahatur. Huius autem cordae arcum si scire desideras, datam cordam, et sunt 6, in 28, quae sunt tabularum diametrum, multiplicans 168 nimirum reperies, cuius numeri summam si in 10 et semissem, quod est dati circuli diametrum, diviseris, 16 partes exibunt, et haec est corda, cuius proportio ad tabularum diametrum ea est, quae et datae cordae ad sui circuli diametrum. In istius autem cordae directo 17 partes et 2 minuta 16que secunda invenies, quae sunt eiusdem cordae arcus in tabulis. Quam si in 6, quae sunt datae cordae quantitas, duxeris, 102 partes et 13 minuta ac 36 secunda procreabuntur. Quam summam si ⟨in⟩ 16, quae sunt tabularum corda, diviseris, 6 partes et 23 minuta ac 21 secunda reperies, quod est quaesiti arcus summa.

Hac itaque via in omnibus datis cordis, si sui circuli diametrum non ignoraveris, et, quemadmodum ostendimus, processeris, ad illius datae cordae arcum pervenies.

22. Item si cuiuslibet circuli arcus, cuius diametrum sciveris, datus fuerit, et eius cordam nosse volueris, si illius circuli diametrum 28 partes

habuerit, nullo labore metitur. Datum arcum in lineis partium arcuum inquirens, quod in directo ipsius ex cordarum partibus inveneris, accipe, quia ipsum erit eius cordae longitudo.

Quod si circuli diametrum plus minusve 28 partibus ad sui constitutionem susceperit, datum arcum in 28, quod est tabularum diametrum, multiplica, indeque collectum per diametrum circuli, cuius ipse arcus exstiterit, partire, et exibit arcus, cuius proportio ad tabularum cordam ea est, quae etiam arcus ad suam cordam. Eius itaque cordam in ipsius directo positam ex tabulis abstrahens eum in datum arcum multiplica, et quod fuerit, per arcum tabularum partire, quodque exierit, erit corda quaesita. In hoc autem nulla, ni fallor, eget similitudine, eo quod, si praedictae similitudinis conversam non ignoraveris, tu ipse absque omni doctrina manifeste illud agnosces.

23. Item si cuiuslibet circuli, cum circumferentem lineam sciveris, corda quaelibet data fuerit, et eius arcum nosse volueris, si circuli diametrum per circumferentem lineam, ut supra docuimus in areae circuli cognitione, didiceris, idem, quod et supra monstravimus, invenies. Habebis etenim cordam circuli, cuius diametrum non ignorabis. Hunc autem operandi modum superius diligenter [22v] ostendimus.

Verum si hoc idem aliter scire desideras, datam cordam in circumferentem lineam circuli tabularum, quam 88 partium constare dicimus, multiplica, indeque coadunatum per summam circumferentiae circuli, cuius arcus corda data fuerit, partire, quodque exierit erit corda circuli tabularum similis cordae datae. Eius igitur arcum per has tabulas inquirens eum in datae cordae summam multiplica, et inde collectum per cordam, quam ex tabula inveneras, quemadmodum in praecedenti numeratione feceras, partire, et quaesitum arcum veraciter invenies.

Huius autem numerationis similitudo est, ut in circulo, cuius circumferens linea 33 partes continet, si corda, cuius longitudo 6 partium exstiterit, protrahatur, et, quota sit eius arcus longitudo, non ignorare volueris, datam cordam, quae est 6, in circumferentem lineam circuli tabularum, quae est 88 partium, multiplica, et 528 procreabuntur. Cuius numeri summam per 33, quae sunt summa circumferentis lineae circuli, cuius haec ⟨est⟩ corda, partire, et 16 partes invenies, quae sunt corda circuli tabularum datae cordae similis. Istius itaque cordae arcum per tabulas, ut supra monstravimus, addiscito, et eum in summam datae cordae multiplica, indeque repertum per tabularum cordam, ut superius feceras, partire, et quaesitum arcum, ut supra, reperies.

24. Si quilibet arcus cuiuslibet circuli, cuius circumferentiam noveris, datus fuerit, et eius cordam per tabulas nosse volueris, datum arcum in 88, quae sunt summa circumferentiae circuli tabularum, multiplica, et

quod inveneris, per circumferentem lineam circuli, cuius datus arcus fuerit, partire, quodque exierit, erit arcus circuli tabularum arcu dato similis. Eius itaque cordam in tabulis, ut dicimus, addiscens eam in arcus dati summam multiplica, indeque coadunatum per summam arcus tabularum supra reperti partire, et quod fuerit, erit corda quaesita.

Ad cuius similitudinem sit arcus 5 ulnas et semissem in sui obliquitate continens ex circulo, cuius circumferentia 33 ulnas recipiat. Huius autem arcus longitudinem nosse volens eum in 88, quae sunt circumferentia circuli tabularum, multiplica, et 484 invenies, quibus per 33, quae sunt circumferens linea circuli, cuius arcus datus exstiterit, divisis, 14 partes et 40 minuta, id est duas tertias, reperies, et hoc est arcus circuli tabularum dato arcu similis, cuius cordam in tabulis 14 partes continere non dubitas. Quam si in 5 et semissem, quae est [23r] dati ⟨arcus⟩ quantitas, duxeris, 77 partes colligentur, cuius numeri summam si in 14 et duas tertias diviseris, quae sunt quantitas arcus tabularum, 5 et quarta provenient, quod est arcus dati corda, quam quaeris.

25. Item si arcus, cuius quantitas 27 et semissem continuerit ex circulo, cuius circumferentiam 33 partes metiuntur, proponatur, et eius cordae longitudinem scire desideras, eam 5 et quartam, sicut et supra, continere reperies, propterea quod omnis arcus, qui semicirculo maior exstiterit, si ex tota sui circuli circumferentia demptus fuerit, arcum semicirculo minorem relinquit. Horum quidem duorum arcuum corda erit eadem, eo quod omnis recta linea, quae in circulo protrahitur praeter diametrum, si ex utraque sui parte in ipsius circumferentia terminatur, eum per inaequales dividit partes. Diametra enim eum semper per aequalia partiuntur, aliae vero lineae circulum per inaequales partes dividunt. Harum altera pars maior, altera vero semicirculo minor existerit, et linea dividens corda utriusque arcus iudicatur. Arcus autem in tabulis cordarum descriptus est duorum arcuum eandem cordam habentium minimus. Maiorem quidem arcum ibi describere non necessarium duximus, eo quod per minorem arcum in tabulis descriptum leviter inveniri poterit. Minore enim arcu ex tota circumferentia dempto maior arcus, qui ei ad eandem cordam habendam copulatur, reliquitur. Verum si arcum semicirculo maiorem habueris, et eius cordam nosse volueris, eum totum ex sui circuli circumferentia demens arcus semicirculo minor remanebit, cuius cordam inveniens eam eiusdem maioris arcus quaesitam cordam fore non ambigas.

26. Hoc etiam similiter ab animo non labatur, quod in omnibus circulorum cordis duae sagittae in earum dimidio secundum rectum angulum elevatae et per centrum productae reperiuntur. Hae autem in nulla linearum, quae circuli corda vocetur, sibimet invicem sunt aequales, sed altera

longior, altera brevior iudicabitur. Longior quidem in directo longioris, brevior autem in directo brevioris arcus protrahitur. Harum quippe sagittarum longitudines in arearum portionum circuli cognitione, cum embadis portionum embada triangulorum eiusdem portionibus contigua superaddere vel minuere volueris, sunt perutillimae, quemadmodum in hac eadem particula superius indicavimus.

Cum igitur cordam et circuli diametrum sciveris, si sagittae longitudinem [23v] nosse desideras, diametri dimidium in semet multiplica, et ex collecto medietatis cordae multiplicationem deme, residuique radicem inquire. Quam si diametri dimidio superadderis, longiorem sagittam invenies, si vero ex eodem depresseris, breviorem sagittam nimirum reperies.

Quapropter si duarum sagittarum alteram sciveris et eam ex diametro depresseris, alteram sagittam incontanter habebis.

Atque si utramque sagittam sciveris, et earum cordam nosse volueris, sagittarum alteram in alteram multiplica, indeque collecti radicem accipiens, eam quaesitae cordae dimidium fore non dubites. Qua duplicata cordam integram reperies.

Si autem cordam et sagittarum alteram sciveris, diametrum vero non ignorare volueris, cordae dimidium in se ipsum multiplica, et collectum inde per notam sagittam partire. Quodque exierit, erit alterius sagittae longitudo. Istarum nempe sagittarum longitudines in unum coadunatae totius diametri longitudinem efficiunt.

Quinta pars in multilaterarum figurarum dimensionibus.

5. Has nempe dimensiones, quas huc usque docuimus, sunt agrorum superficialium, quorum superficies a rectitudine et aequalitate non recedunt. Et quia multipliciter agrorum alii in declivio reperiuntur, alii vero superficiem quasi gibbosam repraesentant, ne eos metiendo devies, tibi quam maxime dico cavendum. Si campus igitur, cuius aream nosse cupis, in declivi montis latere proiciatur, ipsius altitudinem, quod est eius in alto longitudo a summo capitis usque ad eius radicem, addiscens eius altitudinis multiplicationem ex multiplicatione longitudinis eiusdem campi deme, residuique radicem in ipsius campi latitudinem multiplicans eius incontanter embadum reperies.

6. Si vero campus ille concavus fuerit, hac eadem via procedas, ut ipsius embadum secundum planam et rectam superficiem addiscas. Illa etenim, quae quolibet ei modo superponuntur, ut semina, arbores, et aedificia, secundum rectum angulum et non aliter elevantur. Quare, quod in metiendo propter elevationem vel depressionem supererit, nullum conferret ulli iuvamen, est igitur inde prorsus resecandum.

7. In mensurando vero peritissimi, qualiter montium altitudines investigarent, summa solertia assiduoque labore didicerunt, ut per eas ad ipsarum arearum cognitionem veraciter pervenirent. Quandam enim arundinem in radice montis secundum rectum angulum elevantes in eiusdem arundinis supremo aliam arundinem secundum rectum angulum coaptabant, tanta videlicet longitudine, ut ipsius vel alterum capitis extrema pars alicui parti superficiei montis adhaereret. Post haec a radice arundinis erectae usque ad locum, quam arundo superposita tangebat, montis superficiem diligenter metiendo illius quantitatem semper maiorem illa quantitate arundinis superpositae, quae est a loco contactus usque ad arundinis erectae verticem, inveniebant, et secundum illam differentiam iudicabant, differentiam, quae erat inter declivam et planam montis superficiem.

Ad cuius similitudinem campus in declivi montis constitutus proponatur, in cuius declivo 20, in latitudine vero 15 ulnae contineantur. Eius autem planam et directam superficiem, supra quam continentur, scire cupientes super notae longitudinis lineam duas *a*, *b* litteras describamus, ipsiusque longitudinem secundum planam et directam superficiem linea *eb* repraesentat, [25r] altitudo vero eiusdem ab *ae* linea demonstratur. Erit ergo haec figura trigonus *aeb*, in cuius *ab* linea 20, ut praediximus, ulnas invenimus. Et manifestum est, quod campus, qui nobis proponitur, metiendus est ut linea *eb*, quae totius campi basis esse dicitur. Omnis namque campus, in cuius epiphania aliquid est seminandum vel plantandum seu superaedificandum, taliter est metiendus. Quapropter, qualiter ad certam cognitionem longitudinis lineae *eb* ignotae per lineam *ab* notam perveniatur, elaborabimus. Quandam igitur arundinem, loco cuius linea *bc* ponitur, in inferiori parte lineae *ab*, quod est punctus *b*, orthogonaliter constituimus, in cuius supremo capite quandam aliam arundinem, pro qua linea *dc* protrahitur, secundum rectum angulum adaptamus, tantae scilicet quantitatis, ut ex altera sui parte ad praefati campi superficiem perveniat et eam contingat.

Fig. 9.

Triangulus itaque *bcd* triangulo *aeb* similis est elevatus, in cuius *dc* latere duas ulnas et semissem, in alio vero latere *bd* tres tantum et non plus invenimus. Verum quia hi duo trianguli sibimet invicem similes ordinantur, erit proportio lineae *cd* minoris trianguli ad lineam *eb* maioris trianguli ut proportio lineae *db* ad totam lineam *ba*. Quare, si *dc* primum antecedens in *ba* secundum consequens multiplicaverimus, et quod fuerit, per *db* secundum antecedens diviserimus, primum *eb* consequens quaesitum ex divisione proveniet. Veluti si duo et semissem, quod est longitudo lineae *dc*, in 20, quae sunt lineae *ab* longitudo, multiplicaverimus, 50 provenient. Cuius numeri summam si in 3, quae sunt lineae *db* longitudo diviserimus, 17 minus triente reperies, et haec est longitudinis *eb* summa, per quam praedicti campi *eb* embadum est investigandum. Quapropter si 15, quae sunt totius campi latitudo, in lineam *eb*, quae 17 in se minus triente continet, multiplicaverimus, praedicti campi embadum non ignorabimus.[1])

8. Ad huius itaque similitudinem omnes agros, quorum superficies non sunt aequales, directe mensurare debemus. Cumque lineam *cb* in triangulo *dcb* consequens, quae arundo stans, cuius longitudo unam ulnam et modicum plus duabus tertiis in se recipit, in totam lineam *ab* notam, quae est in triangulo *aeb* antecedens, multiplicaverimus, et quod fuerit, per notam lineam *db* antecedens in triangulo *dcb* diviserimus, lineae *ae* in triangulo *aeb* consequentis longitudo proveniet, quod est campi altitudo a terrae superficie, ipsamque [25v] in hac figura 11 ulnas et unam 33am continere probatur. Altitudinis namque numeratio est multis necessaria, nam ad perpendiculares piramidum inveniendas, quemadmodum in quarto capitulo deo volente monstrabimus, est satis ydonea.

9. Item si campus in declivo rotundi montis constituatur, et eius embadum secundum planam et directam superficiem nosse desideras quandam arundinem orthogonaliter in radice montis erigens in eiusdem arundinis supremo capite aliam arundinem secundum rectum angulum coapta, tantae scilicet logitudinis, ut eius alterum caput campi superficiem, sicut supra docuimus, contingat. Et manifestum est, quod duae linae $\widehat{db}$, $\widehat{ab}$ sunt duo arcus circumferentiae eiusdem circuli, et uterque notus, eo quod arcus *ab* campi, cuius embadum quaeritur, logitudinem repraesentat; arcus vero *db* est arcus a duabus arundinibus superius ordinatis inclusus, cuius cordam per triangulum, intra quem ipsa continetur, addisces, si lineam *dc* et lineam *cb* in se ipsas duxeris, et duas multiplicationes in unum coadunaveris,

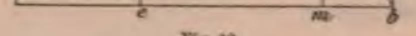


Fig. 10.

collectique radicem acceperis. Ipsa enim erit longitudo cordae arcus *db*, ut hac in figura subscripta docetur. Istius itaque cordae longitudine nota eius sagittam invenire laboramus, ut per eas ad totius circuli diametrum perveniamus. Manifestum est autem, quod omnis sagitta cordam et arcum

1) Vergleiche LEONARDO, p. 108 am Ende.

in duo partitur aequalia. Huius igitur sagittae loco lineam *ghf* a puncto *g*, quod est cordae dimidium, protractam et arcum *db* in duo aequalia supra punctum *h* secantem constituamus, eamque versus lineam *cb*, donec supra punctum *f* ipsam tangat, extrahamus. Triangulus itaque *fbg* triangulo *bcd* similis constituetur: erit ergo proportio lineae *dc* ad lineam *cb* sicut proportio lineae *fg* ad lineam *gb*. Tres autem lineae *dc*, *cb*, *gb* sunt notae, quarta vero *fg* ignota, quare, si notam lineam *dc* antecedens in notam lineam *gb* consequens multiplicaverimus, et quod fuerit, per notam *cb* lineam diviserimus, exibit linea *fg* ignota. Qua reperta, qualiter ad linem *gh* pervenire possimus, ostendamus. Quia igitur proportio *dc* ad *db* est ut proportio *fg* ad *fb*, si lineam *fg* in lineam *db* multiplicaverimus, indeque collectum per lineam *cd* diviserimus, summam lineae *fb* reperiemus. Qua inventa spatium, quod est a puncto *f* noto usque ad punctum *h* subtiliter mensuremus, qua lineae *fh* longitudinem addiscamus. Cumque eam cognoverimus, si eius summam ex summa totius notae lineae *fhg* depresserimus, longitudo lineae *gh*, quae est sagitta quaesita, remanebit, per quam et per cordam *db* circuli diametrum, quemadmodum in fine quartae partis explanavimus, inveniemus. Quo veraciter cognito cordam [26r] arcus, qui noto arcui *ad* duplum exstiterit, sicut in tabulis cordarum et arcuum monstravimus, investigare potuissemus. Erit itaque illius cordae dimidium ut linea *dl* in hac eadem figura. Cui si lineam *dc* notam superadiunxerimus, tota linea *cdl* nota perveniet. Ipsam autem lineae *bme*, quae pro totius obliquitatis campi longitudine ponitur, aequam fore ratio demonstrat.[1])

10. Ad alterius vero partis, quae latitudo dicitur, cognitionem nisi eandem vel consimilem tortuositatem habuerit, laborandum fore non existimamus. Quod si tortuositas in utraque parte, sicut in apium thalamis, vel alvis, vel in spera fuerit, ad istius similitudinem numerando procedemus. Saepe tamen illud subtiliter observare iubemur, quantum ad veram ipsius embadi numerationem perveniamus.

---

2. Aus den „Canones sive regule super tabulas Toletanas" des Al-Zarkâlî.

Die Vermutung von Braunmühls (*Vorlesungen* I, S. 76—83), daſs in den *Canones super tabulas Toletanas* des Al-Zarkâlî, welche Gerhard von Cremona im 12. Jahrhundert in das Lateinische übersetzte[2]), die

1) Vergleiche Leonardo, p. 109, Zeile 22 ff.

2) Vergl. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese* (Roma 1857), p. 57—58 und Wüstenfeld, *Die Übersetzungen Arabischer Werke in das Lateinische seit dem XI. Jahrhundert* (Göttingen 1877), S. 78—79.

Quelle der Kenntnisse des christlichen Mittelalters für die Berechnung der Sinus zu suchen sei, hat sich mir bei der Durchsicht dieses Werkes in ganz ungeahnter Weise bestätigt, wenngleich nicht allen Annahmen VON BRAUNMÜHLS durch dasselbe Gewifsheit gegeben wird. Er hat darin absolut recht, dafs die von GEORG VON PEURBACH als *ex mente* ARZACHELIS gegebene Darstellung auf letzterem fufste, sie ist sogar eine direkte Abschrift des betreffenden Abschnittes der *Canones super tabulas Toletanas*; er täuscht sich aber, wenn er (S. 73, Anm.) annimmt, es seien darin auch die Untersuchungen ULÜG-BEGS über die Dreiteilungsgleichung zu finden.

Den nachfolgenden Text der trigonometrischen Abschnitte der *Canones* entnehme ich Handschriften der Amploniana zu Erfurt, welche mir mit Erlaubnis des vorgesetzten Herrn Ministers zur Benutzung in die hiesige Königl. Gymnasialbibliothek gesendet wurden, wofür ich hier meinen ergebenen Dank abzustatten mir erlaube. Der Wortlaut ist in allen ein und derselbe mit fast verschwindenden orthographischen Abweichungen.[1]) In Fufsnoten habe ich die etwa nötigen Erläuterungen hinzugefügt.

Incipiunt Canones Azarchelis sive regule super tabulas Astronomie.[2])

Quoniam cuiuscunque actionis quantitatem metitur spatium celestium motuum, doctrinam querentibus eius primo ratio occurrit querenda, quod, quia cum mundo incepit eiusque termino coequatur, diversos ipsius motus ipsius partes metiri comprobantur.

Est enim tempus spatium, quo singulas mensuramus actiones, quarum, quia diverse sunt secundum diversas gentes, rationes singulas exequi necesse est, ut habita perfecta temporis notitia facilior ad id, de quo intendimus, fiat introitus.

Es folgt die Darlegung der verschiedenen Zeitrechnungen und ihrer gegenseitigen Beziehungen aufeinander. Dann heifst es zum Schlusse dieses ersten Teiles:

Hec de diversa temporis divisione et annorum mensium atque dierum secundum diversas gentium nationes dicta sufficiant. Nunc autem de celestium motuum diversitate restat tractandum. Sed prius sinus et declinationis necessario quodam ordine habenda est scientia, nam sine eius certa cognitione nullam perfectam cuiusvis celestis motus habemus notitiam.

Secunda particula, que est de sinibus et declinatione.

Cum cuiuslibet gradus scire volueris sinum vel declinationem, gradus omnes, qui sunt ab Ariete in ipsum gradum, cum eodem computa, et

1) Es sind das folgende Nummern: Cod. Ampl. fol. 394^{11}; Quarto 352^{11}; 355^{21}; [illegible]; Octavo 82^{1}. Die Amploniana ist die einzige deutsche Bibliothek, welche dergleichen Handschriften besitzt.

2) In anderen Exemplaren auch „*Astrologie*".

habebis argumentum, per quod, quod queris, invenies. Quia, si fuerit minus 3 signis, operabis cum eo; si vero a 3 in 6, minues illud de 6 et cum residuo operabis; si autem a 6 in 9, 6 de eodem argumento minue et reliquum serva; et si a 9 usque ad 12, illud de 12 subtrahe et cum residuo operabis. Operabis autem ita:

TABULA KARDAGARUM SINUS				TABULA KARDAGARUM DECLINATIONIS			
Numerus kardagarum	Minuta universitatis sinus versi	Minuta sinus	Minuta universitatis sinus recti	Numerus kardagarum	Numerus universitatis declinationis verse	Numerus declinationis	Numerus universitatis declinationis recte
G	M^a	M^a	M^a	G	M^a	M^a	M^a
1	150	39	0	1	1440	362	0
2	111	36	75	2	1078	341	703
3	75	31	106	3	737	299	1002
4	44	24	130	4	438	236	1238
5	20	15	145	5	202	150	1388
6	0	5	150	6	0	52	1440

Accipies scilicet pro unoquoque argumenti signo numerum minutorum duorum kardagarum, et pro 15 gradibus numerum minutorum sequentis kardage. Kardaga enim est portio circuli ex 15 gradibus constans. Quod autem remanebit infra kardagam, reduc in minuta multiplicando per 60, et postea multiplica ea in minuta imperfecte kardage, et que inde provenit summam per 900 divide, et que inde evenerint minuta universitati prius collecte minutorum kardagarum perfectarum adde, et quod remanserit dividendum partire per 15, et exibunt tibi secunda, que sub universitate minutorum scribens habebis sinum rectum gradus, quam queris, vel declinationem equalem.[1])

Sciendum vero est, quod, cum volueris sinum, facies cum kardagis sinus, et cum volueris declinationem, facies cum kardagis declinationis. Inventa autem declinatione habebis minuta, que ergo reducas ad gradus. Divide ipsa per 60, et exibunt tibi gradus, et quod remanserit, erunt minuta.

Et si volueris scire, utrum sit sinus vel declinatio septemtrionalis vel meridiana, considera argumentum. Quod si fuerit ex 6 signis tantum vel infra, erit septemtrionalis, si vero a 6 in 9 vel a 9 in 12, erit meridiana.

---

1) Das ist so zu verstehen. Es sei sinus 49^0 zu finden, d. i. der *sinus trium kardagarum cum 4 gradibus*. Der sinus trium kardagarum ist $106'$. Die Minuta der folgenden kardaga sind 24: es ist daher $240 . 24 : 900$ auszuführen, das giebt $6' \, 2''$, also ist der gewünschte sinus $49^0 = 112' \, 2''$. Dafs diese Interpolation keine genauen Werte giebt, ist selbstverständlich.

Si autem sinum volueris versum vel declinationem versam, operabis, ut dictum est, sed a novissima kardagarum incipiens redeundo ad primam.

Sciendum est etiam, quod, cum quesieris sinum versum, et fuerit argumentum a 3 signis in 6, accipies de 3 signis sinum totum et residui sinum equalem, qui duo simul iuncti faciunt eiusdem argumenti sinum versum. Et non invenies in sinu verso plus 6 signis et in equali plus tribus.[1])

De portione circuli cuiuslibet sinus.

Cum vero sinus equalis volueris scire portionem eius circuli equalem, pro minutis prime kardage de minutis ipsius sinus demptis 15 gradus sume, et pro minutis secunde kardage de residuis demptis alias 15; et ita facies per omnes kardagas. Et si remanserint minuta non perficientes kardagam, ea in 15 vel 900 extende, et quod collectum tibi fuerit divide per minuta imperfecte kardage, et qui exierint gradus adde illis, quos prius collegeras; et quod iterum dividendum remanserit, multiplicans per 60 divide, ut prius divisisti, et habebis minuta, et quod tibi collectum fuerit ex gradibus et minutis, erit portio circuli ipsius sinus.[2])

Et si volueris portionem versam numera kardagas a fine earum, et fac, ut prius determinatum est.

Sequitur de eodem per tabulas.

Cum autem volueris hoc idem per tabulas invenire, argumentum simile in lineis numeri ad tabulas sinus et declinationis quere et quod in eis directo inveneris de sinu vel declinatione ex gradibus, minutis atque secundis, sume, et hoc erit ipsius argumenti sinus vel declinatio.

Si autem cum argumento fuerint minuta, iterum cum eodem argumento gradu uno addito easdem tabulas intra, et equationem sinus vel declinationis suscipias, et huius secunde et prime differentiam considera. Quam multiplicans per minuta argumenti et summam inde provenientem dividens per 60 habebis minuta, et quod remanserit, erunt secunda. Que minuta scilicet et secunda sunt addenda prime equationi, si fuerit minor secunda equatione, vel minuenda, si fuerit maior, et quod exierit, erit sinus vel declinatio gradus et minuti quesiti.

1) Verfasser kennt also die Formel: sinvers $(90 + \alpha) = 1 + \sin \alpha$.

2) Ist also z. B. sinus $\alpha = 139'$, so sind zunächst für $130'$ vier kardage $= 60^{0}$ zu merken. Die überschiefsenden $9'$ sind mit 15 zu multiplizieren und durch die Minuten der nachfolgenden kardaga, d. i. durch 15, zu dividieren und die so entstehenden 9^{0}, zu den obigen 60^{0} hinzugefügt, ergeben dann $x = 69^{0}$.

De sinu verso cuiuslibet portionis.

Si vero sinum eius volueris versum, et fuerint gradus argumenti pauciores 90, eos minue de 90, et eius, quod remanserit, simile in lineis numeri quere, et sinum suum vel declinationem suscipe cum equatione numerorum, si fuerint cum eodem minuta, et eundem sinum de 150 minutis minue qui est sinus totus rectus. Quod vero remanserit, erit sinus, quem queris, versus. Similiter facies ad declinationem.

Si autem fuerint plures 90, pro 90 sumes totum sinum, et remanentium queres sinum equalem, quem addens sinui toto recto ipsius, quem queris, sinus versi habebis summam.[1])

De inventione portionis circuli cuiuslibet sinus.

Cum autem cuiuslibet sinus volueris scire circuli portionem, eius similem vel minorem eo, propiorem tamen, in tabula sinus quere, si feceris ad sinum, vel declinationis, si feceris ad eam, et quod in directo eius fuerit in lineis numeri, sume, que erit portio circuli ipsius sinus. Tunc eundem sinum minorem iam inventum de maiori minue, et residuum per 60 multiplica, et quod provenerit per id, quod est inter lineam, cum qua multiplicasti, et secundam in uno gradu maiorem, divide, et que exierint minuta portioni circuli in lineis numeri invente adde, et quod collectum fuerit, erit portio circuli ipsius sinus perfecta.

Si autem portionem circuli sinus versus volueris, et sinus fuerit minor 150, eum de toto sinu subtrahe, et remanentis quere circuli portionem, quam minues de 90 gradibus, et quod remanserit, erit portio illius circuli sinus versi. Si vero sinus fuerit plus 150, ex eo sinum totum minue, scilicet 150, cuius portio est 90 gradus, et residui quere portionem equalem, ut ostensum est, quam addens supra 90 habebis ipsius sinus portionem versam.

Es folgen zunächst nicht trigonometrische Paragraphen:

De inventione latitudinis cuiusque regionis. — De eodem per stellas fixas. — De altitudine solis in meridie. — De ascensionibus signorum in circulo directo. — De elevationibus signorum inveniendis per tabulas. — De ascensionibus signorum in quolibet circulo obliquo. — Inventio ascensionum per umbram Arietis. — De ascensione totius Arietis ubique. — De ascensione cuiuslibet gradus per tabulas. — Conversio graduum ascensionum in gradus equales. — Conversio graduum equalium in gradus ascensionis. — Conversiò graduum ascensionis in gradus equales per numerum. — Inventio portionis circuli directi cuiusque diei. — De inventione eiusdem portionis per tabulas. — Inventio numeri graduum horarum inequalium. — Inventio numeri horarum cuiusque diei. — Inventio horarum diei per altitudinem Solis. — Conversio horarum equalium in horas inequales. — Inventio horarum preteritarum per altitudinem Solis aliter quam prius. — Inventio gradus ascendentis per horas. —

1) Es ist also sinvers $(90 - \alpha) = 1 - \sin\alpha$, sinvers $(90 + \alpha) = 1 + \sin\alpha$.

Inventio ascendentis per tabulas ascensionum. — De inventione duodecim domorum. — Inventio duodecim domorum per tabulas. — De inveniendis horis per ascendentem. — Inventio altitudinis Solis qualibet hora diei.

Nun folgen aber die Paragraphen:

Ad inveniendum umbram per altitudinem Solis.

Si vero umbram Solis vel alterius luminosi per altitudinem scire desideras, altitudinis ipsius invenias sinum. Minue quoque altitudinem de 90, et residui similiter quere sinum, quem multiplicabis in 12, et divides summam collectam per sinum primum, et qui inde tibi provenerit numerus, numerus punctorum erit umbre. Et quod remanserit, multiplica in 60 et divide, sicut prius divisisti, et habebis imperfecti puncti minuta, et sic, quot punctorum et minutorum fuerit umbra, te invenisse cognoscas.[1]

Ad inveniendum altitudinem Solis per umbram.

Si autem altitudinem Solis per umbram reperire laboras, umbram in se ipsam multiplica, et ei, quod provenerit, adiunge 144, et summe inde excrescentis radicem invenias, que erit ipsius umbre podismus, quem memorie commenda. Deinde iterum umbram in 150 extende, et que inde provenerit summam per podismum partire, et eius, quod ex divisione provenerit, invenies circuli portionem, quam minues de 90, et remanebit altitudo in eadem hora.[2]

Fig. 11.

Vel si diviseris 1800 per podismum umbre, et eius, quod ex divisione exierit, invenias circuli portionem, habebis altitudinem Solis.[3]

Ad inveniendum umbram ex altitudine per tabulas.

Et si umbram ex altitudine volueris invenire per tabulam in tabula altitudinem quere, et que tibi debentur puncta subscripta et minuta suscipe, et habebis altitudinis umbram.

Si autem cum altitudine fuerint minuta, de eis facias, quemadmodum in sinu et declinatione dictum est in premissis regulis.

---

1) D. h.: $\cot g\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

2) D. h.: $\cos\alpha = \frac{\text{ctg}\,\alpha}{\sqrt{\text{ctg}\,\alpha^2 + 1}}$.

3) Das ist gleichbedeutend mit $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{\text{ctg}\,\alpha^2 + 1}}$. Es ist nämlich $12 \cdot 150 = 1800$.

Inventio altitudinis per umbram.

Si vero per umbram altitudinem scire volueris, umbram in tabula quere, et que tibi debetur altitudinis summam cum equatione minutorum, sicut supra docuimus, facias, et hec est facilior[1]), quam queris, doctrina.

Es folgt: *Tertia pars de motibus septem planetarum*, in welchem ich Trigonometrisches nicht gefunden habe. Dann aber heifst es weiter:

Ad inveniendum cuiuslibet arcus sinum demonstrative.

Quia in huius operis initio, antequam tractaremus de celestis circuli volubilitate, mentionem fecimus sinus, pretereundo quasi notum, hic in fine operis danda est doctrina, cum ad ea, que premittuntur de circularibus motibus, illius scientia valde sit necessaria.

Unde videndum est, quid sit sinus.

Sinus cuiuslibet portionis circuli est dimidium corde duplicis portionis illius.

Erit ergo dimidium corde portionis 180 graduum sinus portionis 90 graduum, qui est sinus perfectus. Nulla enim in circulo est maior corda corda portionis 180 graduum, qui est circuli diameter. Et sinus 30 graduum est dimidium corde 60 graduum; et sinus 15 graduum est dimidium corde 30 graduum; atque sinus 45 graduum est dimidium corde 90 graduum, et sic in omnibus circuli portionibus.

Inventa itaque quantitate diametri circuli, habebitur leviter quantitas sinus cuiuslibet circuli portionis.

Quantitas vero diametri circuli sic poterit inveniri. Divide circulum, qui est 360 graduum, per 3 et septimam, et invenies probabiliter diametri quantitatem.[2])

Vel, si volueris, multiplica circulum in semet ipsum, et quod exierit, divide per 10, et numeri ex divisione provenientis quere radicem, que erit circuli diameter.[3])

Vel aliter. Multiplica circulum in 20000 et divide, quod colligitur, per 62832, et quod tibi provenerit ex hac divisione, erit diameter.[4])

Inventa autem diametro circuli, medietas erit sinus 90 graduum, que est corda portionis 180 graduum; que duplex est ad portionem 90 graduum.

---

1) *Facilior* ist hier, wie auch sonst oft im mittelalterlichen Latein, statt des Superlativs *facillima* gebraucht.

2) Hier ist also $\pi = 3\frac{1}{7}$ gesetzt.

3) D. h. $\pi = \sqrt{10}$.

4) Das ist der indische Wert $\pi = \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$, den aber Fr. Hultsch als von Griechen gefunden nachzuweisen versucht hat.

Similiter invenies ceterarum portionum sinus.

Licet etiam tibi ponere diametri partes secundum quamlibet numeri quantitatem et ex ea facere sinus declinationis. Nam, etsi sinus et portionis nulla sit proportio, est tamen relatio inter eos, quia et sinus portionis est sinus, et portio sinus dicitur portio.

Verbi gratia ponamus diametri circuli quantitatem 300 minutorum: erit ergo sinus totus 150 minutorum. Manifestum est autem, quod corda cuiusque sexte portionis circuli sit equalis medietati diametri eius. Cuius rei demonstrationis causa patet, cum inferius ponitur figura, cuius talis est dispositio vel descriptio.

Descriptio figure.

Preposite autem figure hec est demonstratio. Sit enim circulus *abgd*, qui dividatur duabus lineis se supra centrum *e* orthogonaliter intersecantibus, una videlicet *ag* et altera *bd*. Sit etiam circulus *vzh* supra centrum *b*, cuius circumferentia contingat *ag* lineam supra centrum *e*. Describatur iterum circulus *tki* supra centrum *d*, cuius circumferentia etiam contingat lineam *ag* supra punctum *e*.

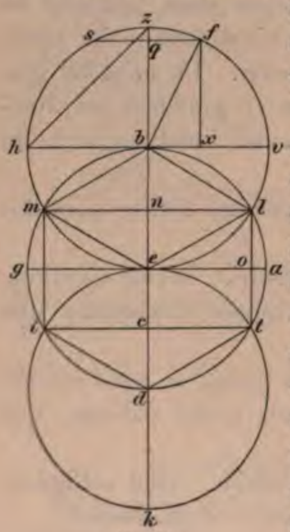


Fig. 12.

Apparet igitur, quod circulus *abgd* intersecat circulum *vzh* supra punctum *l* et supra punctum *m*, et portio *lbm* circuli *abgd* est equalis portioni *mel* circuli *vzh*. Demonstratur etiam, quod portio *lb* sit equalis portioni, que est *le*, quia portiones *lbm* et *mel* equaliter dividuntur per lineam *ehb*, et hoc demonstratur, quod earum corde sunt sibi invicem equales, et portio *bm* fit equalis portioni *me*. Constat igitur lineam *eb*, que est diametri circuli dimidium, esse equalem ei, que est *el*, et lineam *lb* equalem esse linee *bm*, et quod linee *me* et *el* et *lb* et *bm* quatuor sunt corde quatuor portionum circuli equalium. Patet, quod linee *lb* et *le* sibi sunt equales, patet etiam, quod linea *lm* abscindit lineam *be* in duo media supra punctum *n*. Linea igitur *nb* est quarta diametri circuli, et similiter linea *ne*.

Dividit quoque linea *ti* lineam *de* in equas partes supra punctum *c*, quarum unaqueque, scilicet *dc* et *ce*, est equalis linee *en*. Igitur linea *nc* est equalis medietati diametri circuli, et est etiam equalis linee *mi* et linee *lt*. Erit ergo portio *mb* et portio *lt* equalis portioni *mi*, quia earum corde inter se sunt equales, et portio *id* equalis portioni *dt*. Manifestum est igitur circulum in sex equales portiones divisum esse, et cuius libet portionis illius cordam esse equalem medietati diametri circuli. Et hec est figure certa descriptio.

Cum autem sit positum, diametrum esse 300 minutorum, erit corda portionis 60 graduum, que est sexta pars circuli, 150 minutorum, et sinus 30 graduum 75 minutorum, quod est dimidium linee *mi*, que est linea *gm*; et sinus 60 graduum est linea *mn*, que est medietas linee *ml*, que est corda portionis 120 graduum. Linea vero *zh* est corda 90 graduum, que sunt quarta pars circuli, et illa corda est radix 45000, cuius corde medietas est sinus 45 graduum, qui est radix undecim milium et 250.[1])

Apparet autem, quod portio *al* sit dimidium sexte partis circuli, cuius portionis corda sic invenitur. Multiplica sinum 30 in semet ipsum, qui est linea *lo*, et multiplica lineam *ao* in semet ipsam, et utrumque in simul iunge, et collecte summe radix erit corda 30 graduum. Si autem minueris sinum 60 de medietate diametri, remanebit linea *ao*. Medietas vero corde 30 graduum est sinus 15 graduum. Est autem linea *fs* corda 30 graduum, cuius medietas, linea scilicet *fq* vel linea *qs*, est sinus 15 graduum, que est portio circuli ab *f* in *z*. Erit ergo portio circuli que est ab *f* in *v* vel ab *s* in *h*, 75 graduum, cuius portionis sinus est linea *qb*, et eius quantitas sic invenitur. Multiplica lineam *bf*, que est 150 minutorum, cum sit equalis medietati diametri, in semet ipsam, et lineam *qf* in semet ipsam, que est sinus 15 graduum. Postea minue multiplicationem linee *fq* de multiplicatione linee *fb*, et remanentis numeri tolle radicem, que radix erit sinus 75 graduum, et est linea *qb*, et est equalis linee *fx*. Et similiter facies in inventione sinus cuiuslibet portionis circuli tam exigue quam maxime.

Iamque demonstratum est, quod, cum positum sit, dyametrum circuli esse 300 minutorum, cordam sexte partis circuli esse 150 minutorum, cum sit equalis dimidio diametri circuli, et est sinus totus; cuius medietas est sinus 30 graduum, et est 75 minuta, qui est sinus duarum kardagarum.

Si autem multiplicaveris sinum 30 in semet ipsum, et minueris inde provenientem summam de sinu toto in se multiplicato, remanentis numeri radix erit sinus 60 graduum, qui est 4 kardagarum, et est dimidium corde 120 graduum. Minue ergo eum de sinu toto, et quod remanserit, multiplica in semet ipsum, et iunge inde provenientem summam sinui 30 in semet ipsum multiplicato, et provenientis summe radix erit corda 30 graduum, cuius medietas erit sinus 15 graduum, id est prime kardage. Multiplica itaque eundem sinum, id est prime kardage, in semet ipsum, et minue summam provenientem de sinu toto in semet ipsum multipli-

1) Das ist in einer Handschrift so geschrieben: 11000 | 250.

cato, id est ex 22500, et remanentis numeri accipe radicem, que radix erit sinus 75 graduum, id est 5 kardagarum, et est dimidium corde 150 graduum.[1])

Deinde minue sinum 15 de sinu 30, et residuum erit sinus kardage secunde; postea multiplica sinum totum in semet ipsum et numeri inde provenientis duplicati tolle radicem, que erit corda 90 graduum, cuius medietas sinus erit 45 graduum, id est trium kardagarum. Subtrahe igitur ab eo sinum duarum kardagarum, et remanebit sinus tertie kardage. Deinde minue sinum trium kardagarum de sinu 60, et remanebit sinus quarte kardage. Minue etiam sinum quatuor kardagarum de sinu 75 graduum, id est quinque kardagarum, et residuum erit sinus quinte kardage. Demes quoque sinum quinque kardagarum de sinu toto, id est de 150 minutis, et remanens numerus erit sinus sexte kardage, et habebis sexte kardage gradus.

Hec sunt sex kardage, quarum hec est introducta demonstratio.

Inventio sinus secundum minores circuli portiones.

Si autem volueris invenire sinum secundum minores circuli portiones, sinum huius kardage sexte in sinum 30 graduum multiplica, et collecte inde summe quere radicem, que erit sinus 7 graduum et dimidii; et eandem summam minue de sinu toto multiplicato in semet ipsum, et remanentis numeri radix erit sinus 82 graduum et dimidii. Postea minue sinum 82 graduum et dimidii de sinu toto, et residuum multiplica in sinum 30, et exinde surgentis numeri radix erit sinus trium graduum et 45 minutorum. Illum autem eundem surgentem numerum minue de 22500, et residui numeri radix erit sinus 86 graduum et quarte. Deinde minue sinum 45 graduum de sinu toto; et residuum multiplica in sinum 30, et collecte tibi summe radix erit sinus 22 graduum et dimidii; et deinde minue ipsam summam de sinu toto multiplicato in semet ipso, et remanentis numeri radix erit sinus 67 graduum et dimidii. Minue itaque eum de sinu toto et remanentem numerum multiplica in sinum 30, et excrescentis inde numeri radix erit sinus 11 graduum et quarte unius; et

1) Die Bemerkungen VON BRAUNMÜHLS, die vorhergehenden Rechnungen seien fehlerhaft (S. 78 Anm. 3), ist für unseren Text nicht richtig. Die auf S. 79 nach DELAMBRE gegebene Notiz über ein Vatikanmanuskript, das eine Übersetzung des GERHARD VON CREMONA enthält, bezieht sich sicherlich auf ein Exemplar der vorliegenden *Canones*, in welchen der Durchmesser nur zu 300 Minuten angenommen ist. Auch REGIOMONTAN sagt in der von VON BRAUNMÜHL, a. a. O. Anm. 3 citierten Abhandlung nicht, daß AL-ZARKÂLÎ auch von der Einteilung des Durchmessers in 120 Gradus Gebrauch mache. In der Abhandlung JOHANNS VON GMUNDEN *De sinibus, chordis et arcubus* hat dieser dann die hier von AL-ZARKÂLÎ nur angedeuteten Rechnungen für beide Annahmen durchgeführt und für beide eine Sinustabelle hinzugefügt.

summam numeri totius subtrahe a sinu toto in se multiplicato, et remanentis numeri radix erit sinus 78 graduum et trium quartarum. Minues etiam sinum 15 de sinu toto, et multiplicabis residuum in sinum 30, et provenientis inde numeri radix erit sinus 37 graduum et dimidii; et eiusdem numeri summa diminuta de sinu toto in se ducto, residui radix erit sinus 52 graduum et dimidii. Eodem modo fit in universis circuli partibus usque ad minutissimas eius portiones.

Inventio kardagarum declinationis ad plures gradus.

Et si kardagas declinationis volueris invenire ad singulos gradus vel ad maiores vel minores circuli portiones usque in 90 gradus, quia habita notitia declinationis 90 graduum habebitur notitia etiam reliquorum circuli quartarum, cum earum omnium una sit declinatio, sinum declinationis totius quere, quam multiplicabis in sinum unius gradus vel plurium, si tibi placuerit, et summam inde provenientem dividas per 150. Deinde sinus ex ipsa divisione provenientis invenias circuli portionem, que portio erit declinatio unius gradus vel plurium, si feceris ad plures. Et ita etiam facies cum universis gradibus usque in perfectionem 90 graduum etc.

Expliciunt Canones AZARCHELIS *super tabulas Toletanas.*

---

3. Aus den „Scripta Marsiliensis super Canones Azarchelis“.

Der in der einzigen mir bekannten Handschrift, Codex Amplonianus fol. 394, nur als MARSILIENSIS bezeichnete Verfasser dieser Erläuterungsschrift zu den *Canones* des AL-ZARKÂLÎ dürfte der Arzt GUILELMUS ANGLICUS[1]) sein, der um das Jahr 1231 blühte. Er hat wie der anonyme Verfasser des folgenden Auszuges die nur praktisch gegebenen, nicht bewiesenen Regeln AL-ZARKÂLÎs rechtfertigen wollen. Ehe ich jedoch seine Ausführungen zum Abdrucke bringe, will ich noch zwei Kapitel der *Canones* des AL-ZARKÂLÎ mitteilen, da nur durch diese das, was beide Verfasser, der anonyme von Nr. 4 und dieser MARSILIENSIS, beweisen wollen, klar wird.

1) SCHUM hat in seinem Kataloge diese Schrift dem bekannten JAKOB BEN MACHIR (um 1300) beigelegt, und in der That enthält der Cod. Ampl. fol. 394 noch den „Tractatus PROFACII de Marsilia hebraei super quadrantem translatus ab hebraeo in latinum Anno 1290“. Aber STEINSCHNEIDER hat (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20**, 1887, S. 579) bemerkt, daſs, soweit bekannt ist, JAKOB BEN MACHIR niemals einfach „Marsiliensis“ genannt wurde, und daſs bisher auch nicht bemerkt worden ist, daſs er eine Schrift über die *Canones* des ZARKÂLÎ verfaſst hat, während GUILELMUS ANGLICUS zuweilen nur „Marsiliensis“ heiſst.

(Aus den „Canones super Tabulas Toletanas" des AL-ZARKÂLÎ.)

De ascensionibus signorum in circulo directo.

Cum elevationes sive ortus signorum in loco linee equinoctialis, qui caret latitudine, apud quem dies et noctes sibi sunt semper equales, volueris invenire, hec apud omnes regiones in circulo directo, qui est circulus earum meridianus, sunt eedem. In orizonte autem cuiusque regionis propter diversas earum latitudines fuerint diverse. Nam in quantum quedam propter obliquitatem orizontis regionis velocius ortu suo in loco linee equinoctialis vel tardius oriuntur, in tantum eorum opposita cadunt. Elevationes vero duorum oppositorum vel eorum occasus in loco linee equinoctialis et in circulo directo cuiusque regionis sunt eedem.

Accipies declinationem totalem, que est, secundum quod narravit PTOLOMEUS, 23 graduum et 51 minutorum, et secundum JAHIBEM filium ALBUMAZARIS adminiculis considerationis 23 gradum et 33 minutorum et 30 secundorum, que apud nos dicitur esse verior, quia primam noverimus minorem, et hanc didicimus per considerationem. Cuius invenies sinum, qui dicitur primus. Minue etiam eandem declinationem de 90, et residui quere sinum, et dicetur secundus. Serva eum iuxta alium. Deinde declinationis Arietis vel cuiuslibet alterius signi gradus, cuius volueris scire ascensiones, invenias sinum, et erit tertius. Minue etiam eandem declinationem de 90 et residui quere sinum, qui erit quartus. Multiplica itaque sinum declinationis gradus, qui est tertius, in residuum totius declinationis, qui est secundus, et quod inde proveniet, per sinum totius declinationis, qui est sinus primus, divide, et quod exinde tibi exierit multiplica in 150, et que exierit inde summam divide per sinum residui declinationis gradus, qui est quartus sinus, et qui inde exierit sinus erit sinus illius portionis arcus equinoctialis, que oritur cum totali portione zodiaci, cuius gradus sumpsisti. Cuius invenias circuli portionem, et hec erit, quod elevatur de circulo directo cum gradibus ecliptice linee circuli signorum, que est a primo gradu arietis usque ad gradum, cui numerasti. Nam, si numerasti 30 gradus, erit elevatio totius Arietis. Si vero volueris elevationem Tauri, fac cum elevatione 60 graduum, quemadmodum cum declinatione Arietis fecisti, sicut superius declaratum est, et quod exierit, erit elevatio Arietis et Tauri. Minue ex ea ascensionem Arietis, et remanebit ascensio Tauri. Et si minueris ascensionem Arietis et Tauri de 90, quod remanserit, erit elevatio Geminorum. Est enim elevatio trium signorum in circulo directo 90 graduum tantum.

Notandum etiam est, quod habita elevatione Arietis habetur Piscium, Virginis atque Libre elevatio. Elevatio autem Tauri similis est elevationi Aquarii, Leonis atque Scorpionis. Ascensio vero Capricorni, Sagittarii a

Cancri similis est ascensioni Geminorum, et est etiam tabula ad hoc constituta, ut uniuscuiusque gradus elevatio levius possit inveniri.

De ascensionibus signorum in quolibet circulo obliquo.

Si autem elevationes signorum in qualibet regione volueris invenire, eiusdem regionis latitudinis queras sinum, qui erit primus. Deinde eandem latitudinem a 90 subtrahe, et remanentis quere sinum, qui erit secunda. Post hoc quoque declinationis signi, cuius elevationem scire volueris, quere sinum, qui erit tertius. Minues etiam eandem declinationem de 90, et residui invenies sinum, qui erit quartus. Ergo sinum primum in sinum tertium multiplica, et quod exierit per sinum secundum divide, quod exierit in 150 extende, et quod provenerit, per sinum quartum divide, et eius, quod exierit, circuli portionem invenias, que erit portio Arietis. Serva eam. Post hoc invenias portionem Tauri cum declinatione 60 graduum, et serva eam etiam. Invenias etiam portionem Geminorum cum declinatione tota, et eam memorie commenda. Inventis autem horum portionibus ita elevationes signorum poteris investigare. Nam si de elevatione Arietis, quam habes in circulo directo, minueris eius portionem, quam nunc invenisti, quod remanet, erit eiusdem elevatio et Piscium in eadem regione; et si eandem portionem addideris elevationi eiusdem Arietis in circulo directo, quod exierit, erit elevatio oppositorum horum in eadem regione, Virginis scilicet et Libre. Similiter, cum portionem Tauri diminueris, invenies elevationem eius et Aquarii, et cum augmentaveris, oppositorum eorum, Scorpionis scilicet et Leonis. Hoc idem facies cum portione Geminorum, et per diminutionem eius invenies eius elevationem et Capricorni, et per augmentationem eorum oppositorum, Cancri scilicet et Sagittarii.

Zu diesen Kapiteln sind die beiden figure catta der Nr. 4 und die folgende Auseinandersetzung des Guilielmus die notwendige Erklärung. Also jetzt zu dem Kapitel des Marseillers.

Sequitur de ascensionibus signorum.

Notandum est, quid sit ascensio signi, quid circulus directus et quid obliquus, et quid sit signum ascendere super circulum rectum et obliquum, et quid sit ascensio super utrumque circulum. Hec omnia require in tractatu de spera. Ut autem ea, que narratione dicta sunt in capitulo de elevationibus signorum, demonstratione certissime declarentur, ymaginemus meridianum et colurum per finem arietis in zodyaco transeuntem et portionem quandam equinoctialis rescindentem, que erit elevatio correspondens toti Arieti. Portio meridiani vel coluri inter equinoctialem et zodiacum intercepta erit declinatio totius Arietis. Ymaginemus quoque alium circulum coluri solstitia distinguentis, et fiat talis figura ita, quod linea *ab* est sicut quarta coluri solstitia distinguentis, eritque punctus a sicut polus Arietis, b vero, in quo predictus colurus et equinoctialis circulus coniunguntur; et linea bc erit sicut quarta equinoctialis a principio Arietis usque ad ultimum punctum Geminorum, ita quod punctus c erit principium Arietis, b vero sicut principium Tauri; linea vero cd erit velut quarta zodiaci a principio Arietis ad principium Tauri. Portio autem coluri, que est bd, erit tota declinatio, et ad residuum. Linea ea erit sicut quarta meridiani vel eiusdem coluri transeuntis per finem Arietis, et ce sicut totum signum Arietis. Linea vero ef declinatio totius Arietis et linea cf portio equinoctialis toti Arieti correspondens sive ascensio eius.

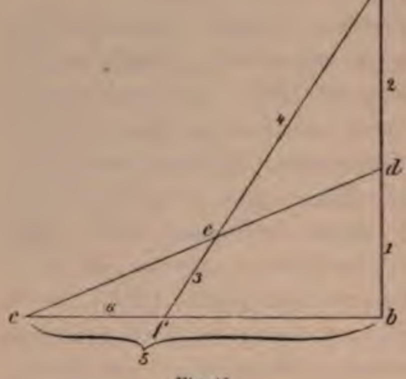


Fig. 13.

Hiis itaque hoc modo descriptis supponamus duo ad propositum ostendendum.

Primum, quod quacunque proportione primi ad secundum ex proportione tertii ad quartum et ex proportione quinti ad sextum composita, si sextum proportionale sit ignotum, hoc modo illud poterit inveniri. Multiplicatur secundus per tertium et productum dividatur per primum, et quod provenerit multiplicatur per quintum et productum dividatur per quartum, et exibit ex hac divisione, quod proportionabiliter querebatur.

Dico autem aliquam proportionem ex duabus aliis componi, quando multiplicatis duabus proportionibus inter se illa tertia procreatur, et hoc patet in numeris manifeste. Ponantur sex numeri sub hac forma:

Primus	Tertius	Quintus
24	12	6
4	4	3

Constat, quod proportio primi ad secundum componitur proportione tertii ad quartum et quinti ad sextum, quia proportio primi ad secundum sexcupla, proportio vero tertii ad quartum est tripla, proportio quinti ad sextum tripla. Si autem multiplicabitur triplum per duplum exibit sexcuplum. Subposito itaque, quod sextus numerus sit ignotus, invenietur sic. Multiplicetur secundus per tertium, et erunt 48, que dividantur per primum, et exibunt duo, que multiplicantur per quintum, et erunt 12, quibus divisis per quartum exibit sextus numerus, videlicet ternarius.

Secundum presupponendum est, quod duabus rectis lineis angulum constituentibus, si a termino utriusque earum quelibet super alteram recta cadat, erit proportio partis unius earum ad alteram eius composita ex proportione partium linee ab eius termino super latus exeuntis et ex hac proportione alterius totalis linee proportionabilis ad illam sui partem que est inter terminum eius extremum et lineam cadentem super ipsam. Sicut linea *ab* et linea *ac* constituunt angulum *a*, et a termino linee *ab*, scilicet a puncto *b*, egrediatur linea *be* super lineam *ac*; item a puncto *c*, qui est terminus linee *ac*, egreditur linea *cd*, que cadit super lineam *ab*, et per hoc dico, quod proportio *ad* ad *db* composita est ex proportione *bf* ad *fe* et ex proportione *ac* ad *ce*. Quod patet trahendo a puncto *a* lineam equidistantem *dc*, quod fit per 31 propositionem primi Euclidis, et sit linea illa *ag*, et protrahatur linea *be*, donec concurrat linee *ag*, ita quod fiat triangulus *aeg*. Ex quibus probatur propositum assumpta primo quarta propositione sexti Euclidis; secundo assumpta ista propositione: quod si inter duas quaslibet quantitates aliqua quantalibet ponatur media, proportio prime linee ad ultimam fit ex proportione prime ad mediam ducta in proportionem medie ad ultimam; tertio assumpta propositione prima sexti et quarto assumpta quarta propositione sexti; quinto acceptis istis coniunctis proportionibus, que in prima quinti Euclidis struuntur. Per eas invicem huius secunde propositionis veritas apparebit.

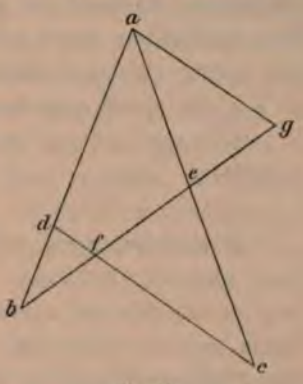


Fig. 14.

Per has autem duas suppositiones ostenditur propositum, scilicet inventio sexti sinus per alios quinque hoc modo, respiciendo primam figuram. Linea *ab*, que est quarta coluri, sive sinus eius, et linea *bc*, que est quarta equinoctialis sive sinus eius, constituunt angulum *b*, et a terminis earum egrediuntur due linee cadentes super eas, scilicet *cd* et *af*: ergo per secundam suppositionem proportio *bd*, que est sinus declinationis, ad *da*, que est sinus residui declinationis, est composita ex proportione *ef*, que est sinus declinationis Arietis, ad *ac*, que est sinus residui declinationis arietis, et ex proportione *bc*, que est totus sinus, ad *cf*, que est sinus portionis equinoctialis toti Arieti correspondentis sive ascendentis cum Ariete in circulo directo. Sic igitur fiunt sex quantitates, scilicet *bd* prima, *da* secunda, *fe* tertia, *ea* quarta, *bc* quinta, *fc* sexta, et hee sex quantitates sunt sex sinus, ut visum est, et sunt proportionabiles ita, quod proportio prime ad secundam componitur ex proportione tertie ad quartam et quinte ad sextam; et quinque harum sunt note, videlicet sinus declinationis totius bd, sinus equinoctialis da, sinus declinationis arietis ef, sinus residui eius ea, et sinus totus bc, sexta vero est incognita, videlicet sinus ascensionis cf Arietis seu portionis equinoctialis, que elevatur cum Ariete. Igitur per primam suppositionem si multiplicatur secundus per tertium, scilicet sinus residui totius declinationis et sinus declinationis Arietis, et productum dividetur per primum, scilicet per sinum totius declinationis, et quod ex multiplicatione provenerit, multiplicetur per quintum, scilicet per sinum totum, et productum dividatur per quartum, scilicet per sinum residui declinationis Arietis, exibiet videlicet elevatio Arietis, et hoc est, quod querebamus.

Es folgt noch ein Abschnitt „*De umbris*" betitelt, den ich ebenfalls noch mitteile.

De umbris.

Notandum, quod umbra proicitur ab obscuro corpore super oppositum corporis luminosi. Sunt etiam in emisperio cuiuslibet regionis, scilicet ab orizonte sursum mensurando, tres situs diversitates. Est enim locus supreme altitudinis, scilicet cenith, est etiam locus supreme bassitatis, scilicet orizon, et locus medius inter cenith et orizontem. Ipso sole existente in loco supreme altitudinis nulla dicitur esse umbra, nam umbra, ut dictum est, semper dirigitur in oppositum luminosi, et ideo tunc tempore nulla est umbra, nisi forte illa non tangente terram, et tunc erit umbra perpendicularis. Sole vero existente in suprema bassitudine, puta in orizonte, umbra corporis elevati protenditur in immensum, nec est igitur certe quantitatis. Sed sole existente in altitudine media, puta 45 graduum, tunc umbra rei extense et erecte coequatur, et quando sol est minoris altitudinis 45 gradibus, umbra illam quantitatem superaddit utcumque, et quanto altitudo brevior, tanto umbra altior, quando vero sol est maioris altitudinis, est e converso.

Secundo est notandum, quod matematici, volentes quantitatem illius cuiuslibet artificialiter invenire, rem quamlibet in 12 partes dividunt equales, que 12 puncta appellaverunt, et potius in 12 quam in alium numerum, quia 12 habet plures partes aliquotas, quam aliquis numerus minor vel etiam aliquantulum maior. Et licet, quod in qualibet re sive magna sive parva ista 12 puncta habent eandem quantitatem, ita quod sunt 12 partes eiusdem proportionis, servant quantitatem eiusdem — horum itaque punctorum numerus secundum excessum umbre ad corpus et corporis ad umbram variatur. Nam si umbra fuerit maior, ipse habebit tot puncta, quot habebit corpus, scilicet 12, et insuper plus secundum proportionem sui excessus, et si fuerit contrarium, erit e converso.

Et ad hanc proportionem istorum duorum ad invicem, scilicet umbre ad corpus et e contrario, est constituta quidam tabula, que tabula umbre appellatur. Per istam sole in quacumque altitudine existente super emisperium potest umbre ad rem et rei ad umbram proportio leviter inveniri, et hec tabula, quomodo sit disiuncta et ordinata, potest patere commensuranti.

De tertio, videlicet de compositione tabule huius, videndum: „Componitur autem hec tabula hoc modo etc.".

De quarto sciendum, quod invenire umbram in principio Arietis nihil aliud est, quam proportionem umbre ad rem, cuius est umbra, sole existente in primo gradu Arietis et in meridiano illius regionis, in qua proponitur illud inquirendum, invenire. Hoc autem in qualibet regione ita poterit inveniri: Considera, in quo elevatur sol in meridie, quando est in principio Arietis, quod scire poteris per latitudinem regionis, sicut dicebatur in illo capitulo: „Cum sol altitudinem". Deinde cum altitudine illam tabulam ingrediens accipe puncta in illa, que invenies in directo, et habebis propositum.

---

4. Anonyme Abhandlung über Trigonometrie aus dem Ende des XIII. Jahrhunderts.

Dieser Abschnitt meiner Sammlung entstammt dem *Clm 234*[1]) aus dem Ende des XIII. Jahrhunderts. Er war früher im Besitze des berühmten Widmanstad, wie aus der Notiz auf dem ersten Blatte hervorgeht:

> „*Ioannis Alberti Widmestadij · Ioannis*
> „*Iouiani Pontani manu adnotata sunt*
> „*quae in marginibus leguntur.*"

Ein noch früherer Besitzer war folglich Johannes Jovianus Pontanus. Da die fragliche Bemerkung wohl falsch aufgefaſst war, und man Pontanus als den Schreiber der ganzen Handschrift betrachtete — seine Hand ist aber leicht von der des wirklichen Schreibers zu unterscheiden —, so teilt der Handschriftenkatalog dieselbe dem XV. Jahrhundert zu, sie stammt aber sicher aus dem XIII. In diesem ganz vortrefflich von ein und derselben Hand geschriebenen Manuskripte stehen folgende Stücke:

Blatt 1ʳ—36ʳ: *Liber de aggregationibus scientie stellarum et principiis celestium motuum, quem Ametus Filius Ameti, qui dictus est Alfraganus compilavit triginta continens capitula.*

Blatt 37ʳ—63ᵛ: *Incipit liber, in quo sunt cause orbis et motus et natura eius editione Mesehalla.*

1) *Clm* bedeutet *Codex latinus Monacensis.*

Blatt 63ᵛ col. 2—78ʳ: *Qualiter circuli in spera ymaginandi sunt.*

Blatt 79ʳ—82ʳ: *Cum, in quolibet mense cuiuslibet anni an possit fieri eclipsis solis vel lune, volueris invenire, intra tabulas annorum.*

83ʳ—103ᵛ: Die uns interessierende Abhandlung. In einer auf dem Vorsetzblatte befindlichen Inhaltsübersicht von PONTANUS' Hand heifst es: *Quidam de cordarum et sinuum arte et usu et theorica planetarum.*

Blatt 103ᵛ, col. 2—105ʳ, col. 1: *Compositio chylindri.*

Blatt 105ʳ, col. 2—108ʳ, col. 2: Der Beweis für die HERONische Dreiecksformel, welche ich im Centralblatt für Bibliothekswesen 16, 1899, S. 257—306 veröffentlicht habe.

Blatt 109ʳ—110ᵛ: Ein arithmetisch-geometrischer Abschnitt.

Blatt 111ʳ—120ʳ: Eine anonyme Abhandlung über Astronomie.

Blatt 120ʳ—121ᵛ: Über Multiplication von Brüchen mit Brüchen.

Blatt 121ᵛ—125ᵛ: *Demonstratio de forma spere in plano* des JORDANUS NEMORARIUS.

Blatt 126ʳ—127ᵛ: Über das *rete astrolabii.*

Herr VON BRAUNMÜHL erwähnt unsere Abhandlung in seinen *Vorlesungen* auf S. 102. Dafs dieselbe von AL-ZARKÂLÎ abhängig ist, folgt schon aus der Bemerkung, dafs der Durchmesser für die Sinustafel zu 300 Minuten angenommen wird, während es für die Sehnentafel bei der PTOLEMÄischen Einteilung in 120 Grade verbleibt. Ob diese Einteilung des Durchmessers in 120 Teile nicht mit der uralten Bewertung der Zahl $\pi = 3$ in Verbindung steht? LEONARDO CREMONESE (XV. Jahrh.) hat wenigstens eine Sinustafel berechnet, in welcher der Durchmesser zu 7 und die Peripherie zu 22 angenommen wird, mit der ausdrücklichen Begründung, dafs dadurch die Teile des Durchmessers und die des Kreisumfanges einander gleich würden.

Wie Herr VON BRAUNMÜHL in der Anmerkung 2 sagt, bin ich geneigt, die Abschrift unserer Abhandlung einem Sachsen zuzuschreiben. Die Formen *Gardaga* und *Cada* für *Kardaga* und *Kata* legen dieses sehr nahe, noch dazu, da in einer Amplonianischen Handschrift diese erweichten Formen nicht vorkommen[1]), sondern die andern mit *k* und *t* sich finden.

(Codex latinus Monacensis 234.)

[83, 1] *Gardaga* est portio circuli constans ex 15 gradibus. Per hoc patet, quod in unoquoque signo sunt 2 gardage, et in quolibet circulo 24.

Sinus rectus est medietas corde arcus duplicis portionis, et significatur per lineam rectam ductam a fine arcus perpendiculariter usque ad dia-

1) Siehe *Codex Amplonianus fol.* 394^{17}.

metrum exeuntem a principio eius super eandem diametrum perpendiculariter cadentem.

Sinus versus est linea recta exiens a principio arcus cadensque perpendiculariter super lineam designantem sinum rectum, id est, sinus versus est portio diametri intercepta inter principium arcus et lineam designantem sinum rectum.

Et iste [83,2] sinus uterque intelligatur de arcu totali, qui non est pars arcus.

Sinus rectus alicuius arcus partialis, id est arcus, in quantum est pars alterius arcus, est linea ducta perpendiculariter a fine illius arcus usque ad lineam ductam a principio eius equidistantem diametro exeunti a principio totalis arcus.

Sinus versus alicuius arcus partialis est linea ducta a principio eius perpendiculariter super lineam designantem eius sinum rectum.

Declinatio solis est arcus circuli transeuntis per polos mundi et corpus solis interceptus inter lineam eclipticam et circulum equinoctialem.

Sinus declinationis rectus est linea recta ducta a puncto ecliptice, in quo est sol, perpendiculariter usque ad diametrum exeuntem ab illo puncto equinoctiali, ubi intersecant se circuli predicti.

Sinus declinationis versus [83',1] est portio eiusdem diametri intercepta inter sinum declinationis rectum et punctum intersectionis eorundem circulorum.

Nota, quod omnes arcus, quorum puncta finalia distant equaliter a primo puncto Arietis et a primo puncto Libre, habent omnes sinus rectos equales, et ideo, si argumentum est minus 3 signis, operamur cum eo; si vero a tribus in 6, id minuimus de 6; si autem a 6 in 9, de eodem subtrahimus 6; et si a 9 in 12, illud subtrahimus de 12.

Nota, quod sinus rectus fit dimidium corde arcus duplicis portionis, et cum nulla dimidia corda circuli possit esse maior semidiametro, non erit sinus rectus maior medietate diametri. Set sinus versus, cum sit corda protracta perpendiculariter a principio arcus usque ad lineam designantem eius signum rectum, potest esse tota diameter. [83',2]

Nota, quod diameter in tabula declinationis et sinus supponitur esse 300^{orum} minutorum, et in tabulis de corda et arcu 120 graduum.

Si inter duas quantitates aliqua quantitas ponatur media, proportio prime ad ultimam fit ex proportione prime ad mediam ducta in proportionem medie ad ultimam. Hoc evidenter apparet in numeris. Ponantur enim duo numeri 24 primus, 4 ultimus. Inter istos ponatur alius numerus, sit ille 12: dico, quod proportio 24 ad 4 componitur ex [84,1] duabus proportionibus scilicet ex proportione 24 ad 12 et ex proportione 12 ad 4. Nam proportio 24 ad 12 est dupla, proportio, vero 12 ad 4 est tripla. Numeri denominantes has proportiones sunt duo et tria: duo, quia prima erat dupla, et tria, quia secunda erat tripla. Multiplica ergo duo in tria, et habebis 6, proportionem scilicet 24 ad 4, que est sexcupla.

Quantitates tres sint a, b, c, proportio a ad c sit h, proportio vero a ad d sit e, et proportio b ad c sit f, et id, quod fit ex ductu f in e, sit p. Propositum est, quod p fit proportio a ad c, et hoc sic probatur. Ex ductu f in e fit p, et ex ductu f in c fit b. Hic unus numerus multiplicat duos, ergo, que est proportio multiplicatorum, et productorum. Ergo que est proportio e ad c, eadem est p ad b. Hanc conclusionem [84,2] serva. Item

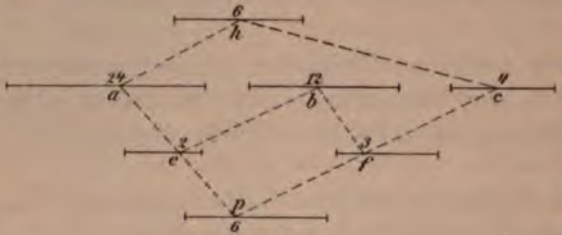


Fig. 15.

ex ductu e in b fit a, et ex ductu c in h fit a. Hic duo numeri multiplicant alios duos et producunt idem, ergo, que est proportio multiplicantium, et multiplicatorum. Ergo que est proportio e ad c, eadem est proportio h ad b et p ad b. Hic autem comparantur due res ad unam in eadem proportione, scilicet h et p ad b, ergo ille due res sunt equales. Set h est proportio a ad c, ergo p est proportio a ad c, et hoc est propositum.

Si fuerint due recte linee angulum constituentes, et a termino utriusque eorum cadat quomodolibet linea recta super alteram, proportio partis cuiusvis earum ad reliquam partem eiusdem erit composita ex proportione partium linee, que exit a termino eius super aliud latus, et ex proportione alterius totius linee sibi conterminalis ad eam sui partem, que est inter [84',1] *punctum concursus et lineam cadentem super eam.*

Due linee constituentes angulum sint ab et ac; a puncto b exeat linea, que cadat super latus ac, et sit be, et iterum a puncto c exeat linea, que cadat super latus ab, et sit cd. Iste due linee, scilicet be et cd, intersecabunt se; sit ergo punctus sectionis f: dico ergo, quod proportio bd ad da est composita ex duplici proportione, scilicet ex proportione bf ad fe, et ex proportione ce ad ca, et hoc est propositum. Probacio. A puncto a ducatur linea equidistans dc, et sit ag, et linea be protrahatur usque ad g. Intellige ergo triangulum abg. Istum triangulum intersecat linea dc equidistans lateri ag, ergo proportionaliter. Ergo que est proportio bd ad da, eadem est bf ad fg. Set proportio bf ad [84',2] fg est composita ex duplici

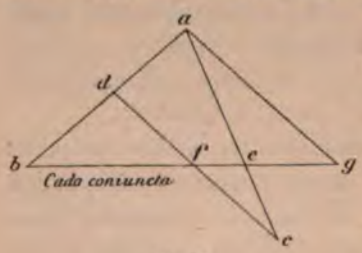


Fig. 16.

proportione, quam dicam. Supponatur enim inter bf et fg esse medium fe, ergo per precedentem proportio bf ad fg est composita ex proportione bf ad fe et fe ad fg: ergo proportio bd ad da est composita ex proportione bf ad fe et fe ad fg. Set proportio fe ad fg est proportio ce ad ca. Probacio. Intellige duos triangulos, primum fec, secundum aeg: dico, quod isti duo trianguli sunt equianguli, quia cum fc linea sit equidistans ag, ergo anguli coalterni sunt equales, scilicet c ad a, et f ad g, et etiam e utriusque et equalis, quia illi duo anguli sunt contra se positi: ergo latera eorum sunt proportionalia. Ergo que est proportio fe ad fg, eadem est proportio ce ad ca. Recollige ergo totum in summa: Que est proportio bd ad da, eadem est bf ad fg. Set proportio bf ad fg est composita ex proportione bf ad fe et fe ad fg: ergo proportio bd ad da est composita ex proportione bf [85, 1] ad fe et fe ad fg. Set proportio fe ad fg est proportio ce ad ca: ergo proportio bd ad da est composita ex proportione bf ad fe et ex proportione ce ad ca, et hoc est propositum.

Nota, quod per hanc eadem potes similiter probare, quod proportio ad ad ab est composita ex proportione ef ad fb ducta in proportionem ac ad ec, quoniam, que est proportio ad ad ab, eadem est gf ad fb. Set proportio gf ad fb est composita ex proportione gf ad ef ducta in proportionem ef ad fb. Intellige enim, quod ef quantitas cadat media inter gf et fb, ergo proportio ad ad ab componitur ex eisdem. Set proportio gf ad ef est eadem, que est proportio ac ad ec, quia illi duo trianguli sunt equianguli: ergo proportio ad ad ab est composita ex proportione ef ad fb ducta in proportionem ac ad ec. Et isto modo debet procedere demonstratio, quantum est ad utilitatem inventionis ascensionis signorum, licet illud, quod supra concluditur, sit verum et demonstratum.

Cuiuslibet quadrilateri in circulo inscripti quod provenit ex ductu diametrorum in se, est equale hiis, que fiunt ex ductu laterum oppositorum in se.

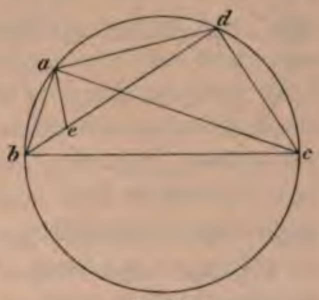


Fig. 17.

Sit circulus $abcd$, quadrilaterum inscriptum $abcd$, diametri ac, bd: dico, quod duo rectangula, quorum primum fit ex ductu ad in bc, et secundum ex ductu ab in dc, sunt equalia illi rectangulo, quod fit ex ductu ac in bd. Probatio. Angulus contentus ex ab et ac aut est equalis angulo contento ex ac et ad aut non. Si non, fiat sibi equalis protracta linea ae. Intellige ergo tri[85, 2]angulum abe et triangulum adc. Isti duo trianguli sunt equianguli, nam angulus a unius est equalis angulo a alterius, et angulus b angulo c, quia sunt constituti super eandem portionem circuli, scilicet ad: ergo reliquus est equalis reliquo, scilicet

d totalis e partiali predicti trianguli, scilicet aeb. Ergo quod fit ex ductu ab in dc, est equale ei, quod fit ex ductu ac in be, hec enim accipiuntur, prout respiciunt equales angulos predictorum triangulorum. Item intellige alios duos triangulos, scilicet abc et aed. Isti trianguli similiter sunt equianguli. Nam c est equalis d, quia sunt super eandem circuli portionem, scilicet ab, et a angulus unius est equalis a angulo alterius, quia a angulus totalis est divisus [85', 1] in tres angulos, quorum duo extremi sunt equales, quia unus fuit factus equalis alteri, ergo accepti cum angulo medio communiter erunt equales. Reliquus ergo angulus unius erit equalis reliquo angulo alterius, scilicet b totalis e partiali, ergo quod fit ex ductu ad lateris unius in bc latus alterius, est equalis ei, quod fit ex ductu ac in de, sumuntur enim latera predictorum triangulorum, prout opponuntur equis angulis. Recollige ergo totum. Quod fit ex ductu ab in dc, est equale ei, quod fit ex ductu ac in be; et quod fit ex ductu ad in bc, est equale ei, quod fit ex ductu ac in de. Set quod fit ex ductu ac in be et de divisim, est equale ei, quod fit ex ductu ac in bd: ergo quod fit ex ductu ad in bc, cum eo, quod fit ex ductu ab in dc, est equalis ei, quod fit ex ductu ac in bd, et hoc est propositum. [85', 2]

Cognitis duabus cordis in circulo, que ex altera parte conterminales existant, tertiam cordam cognoscere, que arcui inter reliqua dua extrema intercepto subtenditur

Sit circulus $abcd$, due corde note sint ab et bd, que sunt conterminales ab una parte in puncto b: dico, quod alia corda, que subtendditur arcui intercepto inter reliqua duo extrema earundem cordarum, scilicet arcui ad, est nota, et corda illa sit ad. Probatio. Protrahatur diameter a puncto concursus cordarum notarum, scilicet a puncto b, et sit diameter bc. Iterum ab extremitatibus corde ignote, scilicet a, d, que sunt extremitates cordarum notarum, protrahantur linee due ad punctum c, et sint ille linee [86, 1] ac et dc. Intellige ergo triangulum abc. Iste triangulus est rectangulus, quia est in semicirculo: ergo quadratum bc valet quadrata aliorum laterum. Set linea bc, que est diameter, est nota, et linea ab est nota ex hypotesi: ergo reliqua linea, scilicet ac est nota. Item intellige triangulum bcd. Iste triangulus est rectangulus, quia est in semicirculo, et linea bc est nota, quia diameter, et item linea bd est nota ex hypotesi: ergo reliqua linea, scilicet dc, est nota. Intellige iterum quadrilaterum $abcd$. Due diametri istius quadrilateri, scilicet ac et bd sunt note. Set quod fit ex ductu earum in se, valet illa duo rectangula, que fiunt ex ductu

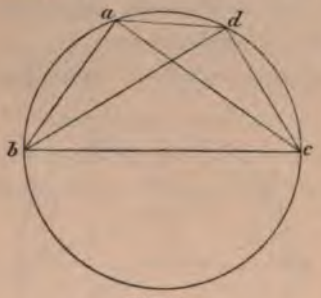


Fig. 18.

laterum oppositorum in se, per precedentem: ergo illa duo rectangula sunt nota coniunctim. Set iterum duo latera, scilicet *ab* et *dc*, sunt nota: ergo rectangulum, quod fit ex ductu aliorum duorum laterum in se, scilicet *ad* et *bc*, est notum. Set latus [86, 2] *bc* est notum, quia diameter, ergo latus *ad* est notum; et hoc est propositum.

Si autem due corde note conterminales non exeant a puncto conterminali earum versus eandem partem circuli, ut exibant in superiori figuratione, set exeant in diversas partes, fiat tunc talis figura.

Intellige circulum *abcde*. Due corde note in eo sint *ab* et *bc*, qui conterminantur in puncto *b*, et exeant ab eo in diversas partes circuli, quia una versus partem *a* et alia versus partem *c*. Propositum est, quod cognitis istis duabus cordis necessario cognoscitur corda *ac*, que subtenditur arcui *abc* intercepto inter duas extremitates cordarum notarum. Probatio. Ab altero termino corde ignote [86′, 1], vel a puncto *a* vel a puncto *c*, trahe diametrum, et sit *ad*. Similiter a puncto conterminali duarum notarum trahe diametrum, et sit *be*. Postea ab illo termino corde ignote, a quo non traxisti diametrum, trahe lineam usque ad extremitatem illius diametri, que erit ab alio termino suo, et sit illa linea *cd*. Similiter a puncto conterminali duarum notarum trahe lineam usque ad eandem extremitatem predicti diametri, et sit illa *bd*; postea ab extremitatibus diametrorum trahe lineam ad se invicem, et sit *de*. Intellige ergo triangulum *abd*. Iste est rectangulus, quia est in semicirculo, et due linee eius sunt note, scilicet *ad*, quia diameter, et etiam *ab* ex ypotesi: ergo tertia linea est nota, scilicet *bd*. Item intellige alium triangulum, scilicet *bde*. Iste triangulus similiter est rectangulus, quia in semicirculo, et duo latera eius sunt nota scilicet [86′, 2] *be*, quia diameter, et *bd*, ut probatum est prius: ergo tertium, scilicet *de*, est notum. Item intellige alium triangulum in semicirculo, scilicet *bce*. Istius trianguli duo latera sunt nota, scilicet *be*, quia diameter, et *bc*, quia est una corda de duabus notis ex ypotesi: ergo tertium est notum, scilicet *ce*. Intellige ergo quadrilaterum inscriptum circulo *bcde*. Istius quadrilateri due diametri, scilicet *bd* et *ce*, sunt note, ut probatum est prius; ergo duo rectangula, que fiunt ex ductu laterum oppositorum in se, scilicet *bc* in *de* et *be* in *cd*, pariter accepta, sunt nota. Set *bc* est nota ex ypotesi, et *de* nota, ut probatum est primo, ergo quod fit ex ductu unius earum in alteram est notum, remanet ergo, quod fit ex *be* in *cd*, notum. Set *be* nota est, quia diameter, ergo linea *cd* est

Fig. 19.

nota. Intellige ergo adhuc triangulum in semicirculo, scilicet *acd*. Istius trian[87, 1]guli duo latera sunt nota, scilicet *ad*, quia diameter, et *cd*, ut probatum est modo proximo: ergo reliquum latus *ac* est notum. Set *ac* est corda subtensa arcui intercepto inter duo extrema cordarum notarum: ergo illa est nota, et sic habemus propositum.

AD DIVISIONEM ET MULTIPLICATIONEM, QUE FIT IN INVENTIONE ASCENSIONIS SIGNORUM IN OBLIQUO CIRCULO.

Nota ad intelligentiam illius multiplicationis et divisionis, que fit ad inveniendas elevationes signorum ad circulum directum, quod ibi fit quedam figura similis cade superiori, que fit ex quarta circuli equinoctialis, que est a principio Arietis usque in finem Geminorum vel in principium Cancri, et a quarta coluri transeuntis per maximam declinationem. Et iste sunt due linee principales predicte cade, que concurrunt ad unum punctum, scilicet ad illum, ubi predicti cir[87, 2]culi intersecant se sub Geminis vel sub principio Cancri. Ab extremitatibus autem istarum linearum, quarum extremitas coluri est in polo mundi, et extremitas equinoctialis in primo puncto Arietis, reflectuntur due linee unius super alteram. Nam a polo reflectitur quedam linea transiens per gradum Solis, cuius volumus habere elevationem, et terminatur super quartam equinoctialis, et ista linea est quarta coluri transeuntis per polos mundi et per gradum Solis, cuius queritur elevatio. Item similiter ab extremitate quarte equinoctialis, que est in principio Arietis, reflectitur quedam linea super quartam predictam coluri distinguentis solstitia, et illa linea sic reflexa est quarta ecliptice, que est a principio Arietis usque in finem Geminorum in principium Cancri. [87', 1] Intellige, hanc cadam predictam disposui, sicut vides in subiecta figura. Sit ergo *a* polus mundi, *b* vero sit principium Arietis, *d* autem sit finis Geminorum in equinoctiali vel principium Cancri, quod idem est. Linea *ad* sit quarta coluri distinguentis solstitia; linea *bd* sit quarta equinoctialis, que est a principio Arietis usque in principium Cancri. Iste due linee terminantur in eodem puncto, scilicet in puncto *d*. Item linea *be* sit quarta zodiaci, que est a principio Arietis usque in finem Geminorum. Sit ergo nobis propositum invenire elevationem totius Arietis ad circulum directum, et ducatur colurus per illum gradum, cuius [87', 2] volumus invenire elevationem, id est per ultimum gradum Arietis, et sit quarta illius coluri *ac*: dico, quod portio equinoctialis intercepta inter principium Arietis et istum colurum elevatur, quantum ad circulum directum, cum illa portione zodiaci, que est similiter intercepta inter principium Arietis et illum colurum, id est, cum *bf* portione zodiaci oritur *bc* portio equinoctialis, et hanc portionem equinoctialem, sciliced *bc*, querimus. Hanc autem portionem equinoctialem sic invenies. Intellige, tota declinatio solis sit *ed*, residuum totius declinationis sit *ae*, declinatio gradus, cuius querimus ascensionem, sit *fc;* residuum declinationis illius gradus sit *af*. Intellige ergo cadam sic. Proportio *de* ad *ea* est composita ex propor-

Fig. 20.

tione *cf* ad *fa* ducta in proportionem *db* ad *bc*. Set que est proportio *de* ad *ea*, eadem est proportio [88, 1] *cf* ad aliquid aliud. Illud ergo aliud invenias sic. Multiplica medium in medium, id est *ea* in *fc*, quod est residuum totius declinationis in declinationem gradus, cuius queris ascensionem, et productum divide per primum, id est per *de*, quod est tota declinatio, et exibit quidam, ad quod sic se habebit *fc* sicut *de* ad *ea*. Illud ergo sit *p*. Dico ergo, quod, que est proportio *de* ad *ea* eadem est *cf* ad *p*. Set proportio *de* ad *ea* erat composita ex proportione *cf* ad *fa* et ex proportione *db* ad *cb:* ergo proportio *cf* ad *p* est composita ex eisdam, scilicet ex proportione *cf* ad *fa* et ex proportione *db* ad *cb*. Istud modo conclusum serva bene in memoria, et intellige, quod inter *fc* et *p* cadat quedam quantitas media, sciliced *fa:* ergo proportio *cf* ad *p* [88, 2] est composita ex proportione *cf* ad *fa* ducta in proportionem *fa* ad *p:* dico ergo, quod proportio *fa* ad *p* est proportio *db* ad *cb*. Probatio. Proportio *cf* ad *fa* multiplicata in proportionem *fa* ad *p* constituit proportionem *cf* ad *p;* item illa eadem proportio, scilicet *cf* ad *fa*, multiplicata in proportionem *db* ad *cb* constituit illud idem, scilicet proportionem *cf* ad *p*. Hic autem unum et idem multiplicat duo, scilicet proportio *cf* ad *fa* proportionem *fa* ad *p* et proportionem *db* ad *cb*, et producit idem, scilicet proportionem *cf* ad *p:* ergo multiplicata sunt equalia. Ergo proportio *fa* ad *p* est eadem cum proportione *db* ad *cb*. Dicas igitur sic. Que est proportio *fa* ad *p*, eadem est *db* ad *cb*. Set proportio *fa* ad *p* est nota, et *db* est notum, quia semidiameter, est enim finis quarte circuli: ergo reliquum notum. Multiplica itaque medium in medium id est *p* per *db*, hoc est, multiplica numerum, qui exivit, quando divisivisti per totam declinationem numerum provenientem [88', 1] ex ductu declinationis gradus in residuum totius declinationis, illum inquam, numerum multiplica per 150 minuta, que sunt minuta universitatis semidiametri secundum tabulas sinus, vel per 60 gradus, qui sunt gradus universitatis semidiametri secundum tabulas de corda et arcu, productum autem divide per primum, scilicet *fa*, id est per residuum declinationis gradus, cuius queris elevationem, et exibit quartum, scilicet *bc*, hoc est sinus, qui respondet arcui intercepto inter principium Arietis in equinoctiali et colurum transeuntem per gradum, cuius elevationem querebas. Huius ergo sinus quere arcum, et habebis, quod queris, scilicet portionem equinoctialem, que elevatur ad circulum directum cum gradu, cui numerasti. Elevatio enim cuiuslibet signi vel gradus est elevatio illius portionis equinoctialis, que elevatur cum eo. [88', 2]

Ad circulum directum disponatur cada, sicut vides in superiori figuratione, set ad circulum obliquum, sicut in subiecta vides figura. Sit enim *a* polus mundi, *b* principium Arietis; *c* est punctus orientis et locus ille equinoctialis, ubi ad ascensionem totius Arietis orizon obliquus intersecat

Nota, quod, quantum ad demonstrationem cade, non sunt in suprascripta figura necessarie nisi quatuor linee, scilicet af et fc, cg et ad, et omnes alie subtrahantur per intellectum, quia sunt solum necessarie ad ymaginem, ut debite sciatur ordinari in sphera.

Fig. 21.

equinoctialem; *d* locus ille equinoctialis, ubi colurus transiens per principium Arietis intersecat equinoctialem; *e* sit principium Cancri in equinoctiali; *f* sit punctus equinoctialis distans per 90 gradus [89, 1] ab oriente in illa hora, quando totus Aries est perortus, id est, f est punctus equinoctialis in meridiano circulo sub terra in hora predicta; g sit punctus, ubi orizon intersecat meridianum ex parte septentrionis sive ex parte poli elevati super orizontem. Linea ergo ae est colurus transiens per principium Cancri; linea be est quarta equinoctialis ab Ariete in Cancrum; linea cf est quarta equinoctialis ab oriente usque in punctum medie noctis; linea cg est orizon obliquus; linea da est colurus transiens per gradum zodiaci, cuius querimus ascensionem; linea bh est quarta zodiaci ab Ariete in Cancrum; arcus ab est arcus coluri transeuntis per Arietem; linea ag est latitudo regionis, scilicet elevatio poli supra orizontem; linea gf est residuum latitudinis regionis de 90 gradibus; linea bd est id, quod elevatur de equi[89, 2]noctiali cum toto Ariete ad circulum directum; linea bc est id, quod elevatur de equinoctiali cum Ariete ad circulum obliquum, et istam lineam querimus; linea cd est differentia elevationis Arietis ad circulum directum et obliquum, et istam lineam inveniemus, per cuius remotionem ab elevatione Arietis ad circulum directum, que nota est per precedens, remanebit bc. Intellige ergo lineam af et lineam cf. Iste due linee constituunt angulum in puncto f, et a termino a linee af reflectitur linea ad super cf, et finaliter a termino c linee cf reflectitur linea cg super af: ergo proportio fg ad ga fit ex proportione do ad oa ducta in proportionem fc ad dc. Set que est proportio fg ad ga, eadem est do ad aliquid aliud. Illud ergo aliud invenias, sicut invenisti superius, scilicet multiplica medium in medium et divide per primum, et exibit id quartum, id est [89', 1] multiplica ag, quod est latitudo regionis, in do, quod est declinatio gradus, cuius querimus elevationem, et divide per fg, quod est residuum latitudinis regionis, et exibit quiddam, ad quod sic se habet do, sicut se habet fg ad ga: illud serva, et dicatur p. Set nota, quod in canonibus in doctrina huius operationis latitudo regionis sive sinus eius ponitur esse primum, residuum eius ponitur secundum, declinatio gradus tertium, residuum declinationis quartum, unde illud, quod est primum, scilicet residuum latitudinis in ordine proportionis, ponitur [89', 2] ibi secundum, quia est secundum in ordine inventionis, et e converso, scilicet id, quod est secundum in ordine propositionis, scilicet latitudo regionis, ponitur esse primum, quia est primum in ordine inventionis. Latitudo enim invenitur per se et eius residuum per eam. Unde non docet ibi multiplicare medium in medium et dividere per primum, set docet multiplicare primum in tertium et dividere per secundum, quia, quod erat primum in inventione est secundum in proportione et e converso. Dico ergo, quod, que est proportio fg ad ga, eadem est do ad p. Set proportio prima, scilicet fg ad ga, est producta ex proportione do ad oa ducta in proportionem fc ad dc: ergo proportio do ad p erit producta similiter ex eisdem, scilicet ex proportione do ad oa ducta in proportionem fe ad de. Istam conclusionem commenda memorie, et intellige, quod inter do et p cadit quedam [90, 1] quantitas media, scilicet oa, ergo proportio do ad p erit composita ex proportione do ad oa ducta in proportionem oa ad p: dico ergo, quod, que est proportio oa ad p, eadem est fe ad de. Probatio. Proportio do ad oa multiplicata in proportionem oa ad p constituit proportionem do ad p. Item illa eadem proportio, scilicet do ad oa, multiplicata in proportionem fe ad de constituit illud idem, scilicet proportionem do ad p, ut probatum est primo. Hic autem unum et idem, scilicet proportio do ad oa, multiplicat diversa, scilicet proportionem oa ad p et proportionem fe ad de, et producit idem, scilicet proportionem do ad p: ergo multiplicata sunt equalia, scilicet proportio oa ad p et proportio fe ad de. Que igitur est proportio oa ad p, eadem est fe ad de. Set proportio oa ad p est nota, quia utrumque eorum notum, et iterum fe est notum, quia semidiameter, est enim [90, 2] sinus quarte circuli sive 90 graduum; ergo reliquum, scilicet de, erit notum. Multiplica siquidem medium in medium, id est p in fe, quod est multiplicare numerum servatum, qui habitus fuit ex alia multiplicatione et divisione, per 150 minuta, que sunt minuta universitatis totius semidiametri secundum tabulas sinus, vel per 60 gradus, qui sunt gradus universitatis totius semidiametri secundum tabulas de corda et arcu, nam in tabulis sinus supponitur diameter esse 300 minutorum, et in tabulis de corda et arcu supponitur 120 graduum; productum autem divide per oa, id est per residuum declinationis gradus, cuius queris elevationem, et exibit dc, id est differentia ascensionis gradus quesiti inter circulum directum et circulum obliquum illius regionis, cuius sumpsisti latitudinem. Huius autem quere arcum, quia hoc, quod invenisti est sinus, nam non [90′, 1] operaberis cum arcubus, set cum sinibus. Quere ergo arcum huius sinus in tabula equationis sinus, si multiplicasti per 150 minuta, vel in tabulis de corda et arcu, si multiplicasti per 60 gradus, et per illum arcum habebis, quod queris. Nam, si de elevatione Arietis ad circulum directum minueris arcum illum, habebis, quod residuum fuerit, elevationem Arietis et Piscium ad eandem regionem, et si illud idem addideris super elevationem Arietis ad circulum directum, habebis elevationes suorum oppositorum ad eandem regionem, scilicet Virginis et Libre, et sic intellige de aliis signis.

Si autem figuram huius cade, que fit ad circulum obliquum, volueris ordinare in spera, ordina orizontem obliquam ad eum situm, ad quem queris elevationes, et ultimum gradum illius arcus, cuius vis habere elevationem, pone in predicto orizonte ex parte orientis, [90′, 2] et vide, ubi orizon ad illum situm abscindit equinoctialem, et portio equinoctialis, que erit inter illum locum ascensionis et primum gradum arcus, quem queris, erit elevatio eius ad illum situm. Ab illo ergo puncto equinoctiali sume quartam eius versus orientem, et per illum punctum ducas colurum unum, et quarta huius coluri cum predicta quarta equinoctialis erunt due linee principales ipsius cade. Intellige iterum colurum unum transeuntem per gradum, cuius vis elevationem usque ad predictam quartam equinoctialis, et iste colurus est una de lineis reflexionis, reflexa a coluro super equinoctialem; et a puncto equinoctiali existente in oriente, ubi scilicet orizon intersecat eum, intellige orizontem exeuntem, qui intersecat eodem modo quartam predicti coluri, et iste orizon erit secunda linea reflexionis, que a quarta equinoctialis reflectitur supra predictam quartam [91, 1] coluri, et habes figuram cade completam, ut potes videre in figuratione superiori.

Sit enim nobis exempli gratia propositum invenire ascensionem totius Arietis. Primo ordino orizontem ad aliquem situm, sicut *cg*, ad tantam latitudinem regionis, quanta est linea *ag*, et ultimum gradum totius Arietis pono in orizonte in puncto *c* et ex parte orientis, et considero, ubi orizon existens in tali situ abscindit equinoctialem, et pono in puncto *c*, et portionem equinoctialis, que est inter punctum *c* et primum gradum Arietis, scio esse eius elevationem ad preordinatum situm. Ab illo iterum puncto equinoctiali, scilicet a puncto *c*, sumo quartam eius versus orientem transeundo per Taurum, Geminos et Cancrum, et in fine huius quarte pono punctum *f*, et per hunc punctum duco colurum unum, qui est meridianus regionis existentis in preordinato situ, et huius [92, 2] coluri sumo quartam, que est a polo *a* usque ad predictum punctum *f* equinoctialis, et ista quarta coluri cum predicta quarta equinoctialis concurrunt in puncto *f* et faciunt duas lineas principales ad constitutionem cade. Ab extremitate iterum quarte huius coluri, scilicet a polo, duco alium colurum per finem Arietis, et ubi intersecat equinoctialem, pono punctum *d*, et quarta huius coluri, que est inter polum et punctum *d*, est una de lineis reflexionis in cada, que reflectitur ab extremitate quarta coluri super quartam equinoctialis. Rursus ab extremitate quarte equinoctialis, id est a puncto *c*, intelligo exire orizontem, qui intersecat quartam predictam predicti coluri, et ubi intersecat eam, pono punctum *g*, et quarta huius orizontis, que est inter equinoctialem et punctum *g*, est altera linea reflexionis in cada. Reflectitur enim ab [91', 1] extremitate quarte equinoctialis super quartam coluri.

Attendere autem oportet, quod hec figura cade in elevationibus signorum ad circulum obliquum non potest fieri in signis directe orientibus, id est in illis, in quibus maior pars oritur de equinoctiali quam de zodiaco, quoniam ascensiones istorum signorum sunt tanto maiores in circulo obliquo ascensionibus eorundem in circulo directo, quanto ascensiones aliorum signorum oblique occidentium sunt minores. Unde in hiis signis directe orientibus quarta coluri transeuntis per gradum Solis non cadet super quartam equinoctialem, que est a puncto orientis usque in nadayr medie diei, set extra, et ideo non erit ibi linea reflexionis.

Signa autem directe orientia sunt 6 signa, que sunt a principio Cancri usque in finem Sagittarii, et ista habent maiores ascensiones in circulis obliquis quam in [91', 2] directis. Signa vero oblique orientia sunt reliqua 6, que sunt a principio Capricorni usque in finem Geminorum, et ista habent minores ascensiones in circulis obliquis quam in directis in tantum, quantum alia 6 habent maiores. Quelibet autem duo signa et quilibet duo arcus equidistantes ab alio quatuor punctorum, que sunt principium Cancri vel Capricorni, Arietis vel Libre, habent equales elevationes in circulis directis. Et intellige, quod circuli directi appellantur omnes circuli transeuntes per polos mundi, ut sunt omnes orizontes habitantium sub equinoctiali, et omnes meridiani quantumlibet regionum. Unde signa ad meridianos regionum habent easdem elevationes, quas habent sub equinoctiali, et ideo astronomi diem suum incipiunt a meridie.

In circulis autem obliquis quelibet duo signa et quilibet [92, 1] duo arcus equidistantes a duobus punctis, que sunt principium Arietis et Libre habent equales elevationes. Duo autem quelibet signa et duo quilibet arcus equidistantes a duobus reliquis punctis, que sunt principium Cancri et Capricorni, arcus vel signa, qui sunt ex parte Arietis, habent minores elevationes, quam qui ex parte Libre. Hii enim, qui sunt ex parte Arietis habent minores in circulis obliquis quam in rectis, et illi, qui sunt ex parte Libre, habent maiores in obliquis quam in rectis in tantum, quantum alii habent minores. Propter hoc ergo ad circulum obliquum non est necessarium invenire elevationem nisi trium signorum solum, sicut Arietis, Tauri et Geminorum, quorum potest invenire demonstrationem per cadam. Inventis autem elevationibus horum trium habebuntur omnium aliorum cognitis elevationibus omnium ad circulum [92, 2] directum et per regulas precedentes hoc modo. Si nota est nobis elevatio Arietis ad circulum directum et obliquum, demam illam differentiam de elevatione eius ad circulum directum, quia minorem habet elevationem ad circulum obliquum quam ad directum, et quod residuum fuerit, erit elevatio duorum arcuum equidistantium a principio Arietis per secundam regulam, scilicet Arietis et Piscium. Iterum eandem differentiam addam super eam de elevatione Arietis ad circulum directum, et quod provenerit, erit elevatio alicuius arcus equalis Arieti tantum distantis a Cancro vel Capricorno, quantum distat Aries, et alicuius similiter tantum distantis ab eisdem, scilicet Cancro vel Capricorno, quantum distant Pisces, per tertiam regulam, id est Virginis et Libre. Et sic, si differentiam Arietis, que est eius inter [92', 1] circulum directum et obliquum, minueris de elevatione eius ad circulum directum, remanebit elevatio eius et Piscium ad circulum obliquum; et si eandem addideris, habebis elevationem Virginis et Libre ad eundem circulum obliquum. Et similiter si, quod est differentia Tauri in sua elevatione inter circulum directum et obliquum, minueris de elevatione ad circulum directum, remanebit eius elevatio et elevatio Aquarii ad circulum obliquum; et si addideris, habebis elevationem Scorpionis et Leonis. Et eodem modo, si differentiam Geminorum subtraxeris ab eius elevatione ad circulum directum, habebis elevationem eius et Capricorni; et si addideris, habebis Cancri et Sagittarii, et propter hoc non docetur in canonibus invenire nisi elevationes trium signorum ad circulum obliquum, quia per tria habebuntur omnium modo predicto. [92', 2]

Nota, quod gradus ascensionum vocantur gradus equinoctialis, qui elevantur cum aliquo signorum, et dicuntur gradus ascensionum eo, quod ascensiones signorum accipiuntur iuxta numerum illorum graduum. Gradus vero equalis vocantur gradus zodiaci, qui elevantur cum gradibus equinoctialis.

Nota, quod habitis partibus horarum dici, habentur noctis et e converso. Nam, si partes horarum diei minuimus de 30, remanent partes horarum noctis, et e converso. Minuuntur autem de 30, quia due hore opposite simul iuncte habent 30 gradus. Supposito ergo, quod una earum 17 sit graduum, auferimus hoc de 30, qui erat numerus ambarum, et remanent nobis 13 gradus, qui sunt partes hore sibi opposite.

Similiter habita numero horarum equalium diei, habetur numerus horarum noctis et e converso. Nam cum dies et nox simul continent 24 [93, 1] horas equales, supposito, quod dies sit 16 horarum, auferimus hoc de 24, et remanent hore noctis 8.

Nota, quod habita notitia altitudinis Solis in media die et partium horarum eiusdem diei, id est graduum equinoctialis, qui respondent uni hore inequali, habetur notitia horarum diei tam preteritarum quam futurarum equalium et inequalium per altitudinem Solis. Nam sicut se habet altitudo medie diei ad medietatem equinoctialis, ita se habet altitudo quelibet illius diei ad aliquid aliud, et illud est, quod respondet de equinoctiali circulo tante altitudini. Multiplica itaque sinum medii in sinum medii, id est sinum altitudinis presentis in sinum medietatis equi-

Fig. 22.

noctialis, qui est 150 minutorum, et divide per sinum primi, id est per sinum altitudinis medie diei, et exibit quoddam quartum, et illud est sinus portionis equinoctialis sic [93, 2] se habentis ad altitudinem presentem, sicut medietas equinoctialis se habet ad altitudinem medie diei. Huius ergo sinus quere portionem circuli, et hanc portionem divide per 15, et habebis horas equales; vel divide per partes horarum illius diei, et habebis horas inequales. Hec ergo hore sive equales sive inequales sunt hore transacte de die, si fecisti ante meridiem, vel sunt hore future de die, si fecisti post meridiem. Quas si dempseris de numero horarum equalium totius diei, remanebunt hore equales preterite, et si removeris de 12, remanebit numerus horarum inequalium preteritarum.

Nota, quod partes horarum vocantur gradus equinoctialis qui elevantur super orizonte [93', 1] in una hora inequali sive in duodecima parte diei.

Nota, quod, si multiplicaveris horas inequales per 15, et diviseris, quod collectum fuerit, per 12, habebis partes horarum inequalium; et si partes horarum inequalium multiplicaveris per 12, et productum diviseris per 15, habebis horas equales.

Nota, quod habita notitia arcus diei et altitudinis Solis in media die habetur notitia horarum equalium vel inequalium tam preteritarum quam futurarum de die per altitudinem Solis. Nam sicut se habet sinus altitudinis medie diei ad sinum versum medietatis arcus diei, ita se habet sinus altitudinis Solis ad aliquid aliud. Multiplica itaque medium per medium, id est sinum altitudinis Solis in sinum versum medietatis arcus diei, et divide per primum, id est per sinum altitudinis medie diei, et exibit illud quar[93', 2]tum, quod sic se habet ad altitudinem Solis suppositam sicut totus sinus versus arcus medie diei ad altitudinem Solis in meridie. Hunc sinum minue de sinu verso medietatis arcus diei, et residui quere portionem circuli versam, et illam portionem minue de 90, si fecisti ante meridiem, vel illi adde, si fecisti post meridiem, et quod post diminutionem vel augmentum provenerit erit portio equinoctialis illi altitudini respondens.

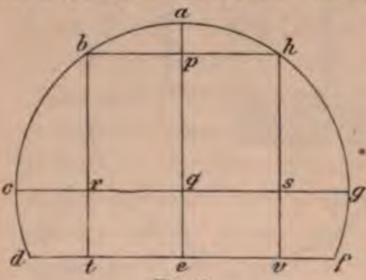


Fig. 23.

Verbi gratia intellige, quod arcus diei sit daf; medietas eius da; sinus versus huius medietatis ae; altitudo Solis in meridie ag; altitudo Solis ante meridiem br et sinus arcus bc; et altitudo eius post meridiem sit hs et sinus arcus hg; dico ergo, quod, sicut se habet ag ad ae, ita se habet br ad aliquid [94, 1] aliud, sicut ad bt, et eodem modo hs ad hv. Arcus ergo versus huius sinus, qui est bt vel hv, respondet tante altitudini Solis, quanta est br vel hs. Hunc sinum bt vel hv minue de toto sinu verso medietatis arcus diei, id est, minue ipsum de *ac*, et remanebit *ap*. Huius quere portionem versam, et erit arcus *ba*, quem arcum, scilicet *ba*, minuas de medietate arcus diei, id est de arcu *dcba*, quia est ante meridiem, et remanebit arcus *dcb*, qui respondet altitudini *br*. Vel si accepisses altitudinem *hs*, tunc illum eundem arcum, scilicet *ab*, qui est equalis *ah*, adderes super arcum medie diei, id est super *dcba*, quia est post meridiem, et haberes arcum *dcbah*, qui respondet eidem altitudini, scilicet *hs*, post meridiem. Et nota, quod in plano non est eadem proportio sinus altitudinis meridiei ad sinum versum medietatis arcus diei, que est sinus alterius [94, 2] altitudinis ad alterum sinum, id est non eadem proportio *aq* ad *ae* et *br* ad *bt*, et hoc est, quia in plano unus sinus est pars alterius, set in sphera omnino est eadem proportio. Ibi enim unus sinus non est pars alterius. Item nota, quod iste modus accipiendi horas per sinum differt a predicto modo, quia ibi accipiuntur per sinum rectum medietatis equinoctialis, et hic per sinum versum medietatis arcus diei.

Item nota, quod non potest accipi iste proportio per sinum rectum medietatis arcus diei, quia unus et idem sinus rectus est magni arcus et parvi, ut duorum signorum et quatuor, et similiter unius signi et quinque. Set non sic est de sinu verso, ut in subscripta vides figura. Nam arcus *aq* et arcus *aqbcdt* habent equales sinus rectos, scilicet *qv* et *to*; [94', 1] item similiter arcus *aqb* et arcus *aqbcd* habent equales sinus rectos, scilicet *bm* et *dp*, set non est ita de sinu verso. Nam arcus *aq* habet sinum versum *av*, et arcus *at* habet sinum versum *ao*; item arcus *ab* habet sinum versum *am*, et arcus *ad* habet sinum versum *ap*, et similiter intellige ex alia parte circuli.

Fig. 24.

(Es folgen Blatt 94', 1, Z. 14—95', 2, Z. 13 Betrachtungen über die 12 Himmelshäuser, welche ich übergehe.)

[95', 2] *Nota*, quod cognito ascendente loco Solis et partibus horarum diei, cognoscitur, quot hore transierint. Nam, si dividantur ascensiones, que sunt a gradu ascendente usque in gradum Solis, per partes horarum diei illius, exibunt hore inequales de die transacte, et si dividantur per 15, exibunt equales. Idem potest fieri in nocte, per nadayr Solis scilicet dividere ascensiones, que sunt ab ascendente in nadayr, predicto modo.

Cognito altitudine Solis umbram cuiuslibet rei in eadem hora agnoscere. [96, 1]

Quoniam, si altitudo minuatur de 90 gradibus, et queratur sinus altitudinis Solis et etiam residui, que est proportio sinus ipsius altitudinis ad sinum residui, eadem est mensura cuiuslibet rei ad aliquid aliud, et illud est umbra eiusdem rei in eadem hora. Verbi gratia intellige, quod in subscripta figura *ab* sit altitudo solis, *de* sit res, cuius voluimus umbram cognoscere. Illius ergo altitudinis invenias sinum, qui est *ac*. Iterum eandem altitudinem minue de 90, et remanebit arcus *ah*. Huius arcus invenias sinum, qui est *ag; ag* est equalis *cd*, quia sunt equidistantes et inter alias duas equidistantes. Intellige ergo triangulum *acd*, item alium *def*. Isti trianguli sunt equianguli, quia *c* est rectus, et similiter *e* est rectus. Item [96, 2] *d* est equalis *a*, quia *ge* et *ac* sunt equidistantes, et super eos cadit *af*, ergo *d* angulus extrinsecus est equalis *a* angulo intrinseco. Item *f* angulus est equalis *o*, quia *bd* et *ef* sunt equidistantes, et super eos cadit *af*, ergo *o* angulus extrinsecus est equalis *f* intrinseco: dico ergo, quod, que est proportio *ac* ad *cd*, eadem est *de* ad *ef*. Set *ac* est notum, quia sinus altitudinis, et *cd* similiter notum, quia sinus residui. Item *de* est notum, quia res, cuius umbram accipere voluimus: ergo reliquum erit notum, scilicet *ef*, quod est umbra. Multiplica siquidem medium in medium, scilicet *cd* in *de*, id est sinum residui altitudinis in quantitatem rei, id est in 12, nam omnis res de mundo supponitur esse 12 punctorum, et divide per primum, id est per sinum altitudinis, et exibit *ef*, quod est umbra *de*.

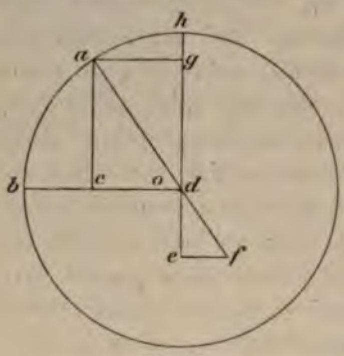


Fig. 25.

Nota, quod mensura cuiuslibet rei est 12 punctorum. Nota, quod eadem est proportio umbre omnium rerum ad suas res. [96', 1]

Cognita umbra cuiusvis rei altitudinem Solis per eam invenire.

Hec propositio est conversa precedentis, et probat altitudinem Solis esse notam, si umbra fuerit nota. Sit enim umbra *ef* nota. Vide ad superiorem figuram. Scilicet *de* etiam est notum, quia 12 puncta, et *e* est angulus rectus, ergo *df* est notum. Multiplica enim *ef*, id est umbram, in se, et iterum 12 in se, et iunge producta, et habebis quadratum *df*, et ideo in canone docetur multiplicare umbram in se et producto adiungere 144, quoniam hic numerus est quadratus de 12 proveniens. Ergo summe quere radicem quadratam, et radix illa erit linea *df*, et hoc est, quod appellatur *podismus umbre*. Intellige ergo duos predictos triangulos *acd* et *def*. Isti duo trianguli sunt equianguli, ad ostensum est in demonstratione superioris propositionis: ergo latera eorum sunt proportionalia. Ergo que est proportio *df* ad *fe*, eadem [96', 2] est *ad* ad *dc*. Set proportio *df* ad *fe* est nota, quia utrumque notum, nam omnia latera trianguli *def* sunt nota, ut monstratum est prius, et similiter *ad* latus alterius est notum, quia est semidiameter circuli, et omnis semidiameter est 150 minutorum; ergo reliquum latus, scilicet *dc*, erit notum. Multiplica enim medium in medium, id est *ef* in *ad*, id est umbram in semidiametrum circuli, qui est 150, et divide per primum, scilicet per *df*, quod est podismus umbre, et exibit quartum, scilicet *cd*. Huius ergo invenias circuli portionem, et erit eius portio *ah*, quoniam sinus arcus *ah* est *ag*, et *ag* est equalis *cd*. Hanc autem portionem minue de 90, id est de arcu *bah* et remanebit *ba*, qui erit altitudo Solis.

Vel potes sumere proportionem a parte aliorum duorum laterum triangulorum, scilicet *de* et *ac*, ut dicas, sicut se habet *df* ad *de*, ita se habet *ad* [97, 1] ad *ac*. Set *df* et *de* sunt nota, et *ad* similiter est notum, ergo reliquum notum, scilicet *ac*. Multiplica medium in medium, id est *ad* in *de*, id est semidiametrum, qui est 150 minutorum, in magnitudinem rei, que est 12 punctorum, et habebis 1800, et hoc productum divide per primum, id est per *df*, qui est podismus umbre, et exibit quartum, scilicet *ac*, quod est sinus latitudinis solis. Sinus ergo est notus, ergo et arcus. Invenias igitur illius sinus portionem circuli, et hoc erit altitudo Solis, scilicet arcus *ab*. Et hoc est, quod in canone docetur dividere 1800 per podismum umbre, quia 1800 est illud, quod fit ex ductu *ad* in *de*, id est semidiametri, qui est 150 minutorum, in magnitudinem rei, que est 12 puncta.

Fig. 26.

Supra centrum circuli angulo designato si super idem centrum transeat alterius circuli circumferentia, arcus, qui inter easdem lineas usque ad eius circumferentiam protractas includitur, [97, 2] *arcui alterius circuli, supra cuius centrum consistit angulus, proportionaliter duplus erit.*

Propositum est, quod, si sit circulus, ut *abc*, supra cuius centrum fiat angulus ut *d*, et super idem centrum transeat circulus, sicut *dpg* et circulus *dbke*, et linee, que constituunt illum angulum, protrahuntur usque ad extremitates circumferentie circulorum predictorum, ut sunt linee *gd* et *dh*, quod arcus *pq* circuli parvi et arcus similiter *gh* circuli magni, uterque eorum per se sumptus, duplus erit proportionaliter arcui *ef*, et dico duplus proportionaliter, id est, si *pq* vel *gh* arcus sit quarta pars sui circuli, quod *ef* octava pars sui, et portiones *pq* et *gh* erunt equales proportionaliter inter se, id est, [97′, 1] quod, si una portio est quarta sui circuli, et alia erit quarta sui, et sic intellige de aliis portionibus. Probatio propositi. Super portionem *ef*, supra quam est angulus supra centrum, facias angulum supra circumferentiam ductis lineis *ea*, *fa*, et angulum *d*, qui est in centro, divide per medium protracta linea *dk*: dico ergo, *a* est medietas *d* totalis, quia *d* est supra centrum et *a* in circumferentia: ergo *a* est equalis *d* partiali. Ergo portiones, super quas consistunt, sunt similes, ergo *pt* et arcus *ef* sunt similes, et similiter *gk*. Ergo quota portio est unius arcus sui circuli, tota et alter, set arcus *pq* duplus est ad *pt*, ergo est proportionaliter duplus ad *ef*; et similiter arcus *gh* est duplus *gk*, ergo est proportionaliter duplus ad *ef*, et hoc est propositum.

Idem intellige, si circuli crescant in infinitum, quorum circumferentia transeat per predictum centrum. [97′, 2]

Der Rest sind astronomische Betrachtungen, welche ich nicht weiter abgeschrieben habe.

---

5. Aus „Leo de Balneolis Israhelita de sinibus, chordis et arcubus, item instrumento revelatore secretorum".

Im Jahrgang 1898 dieser Zeitschrift habe ich nur einen Teil dessen mitgeteilt, was Levi ben Gerson über Trigonometrie in der oben angezogenen Schrift darlegt. Hier, wo es sich um Urkunden zur Geschichte der Trigonometrie handelt, glaube ich auch die goniometrischen Untersuchungen des bedeutenden Mannes mit zum Abdrucke bringen zu müssen, und lasse sie deshalb hier folgen. Man vergleiche auch von Braunmühl, *Vorlesungen* S. 103—106.

(Codex Vindobonensis Palatinus 5277, fol. 41ᵛ ff.)

[41ᵛ] **Capitulum secundum. Dictio prima.**

Consueverunt astronomi omnem sphaeram vel orbem in 360 partes dividere, quas *gradus* appellant. Insuper quemlibet gradum in 60 particulas partiuntur, et has vocant *minuta*. Omne quoque minutum in 60 *secunda*, et unumquodque secundum in 60 *tertia*, tertium quodlibet in 60 *quarta* et sic dividendo in infinitum procedendo produnt.

Dividunt quoque zodiacum in partes 12, quas *signa* appellant. Quodlibet signum dividunt in partes 30, quas vocant *gradus*, de quibus dictum est supra, et hoc modo signa duodecim valent 360 gradus.

Diameter etiam *sphaerae* in gradus 120 dividitur, quamquam isti gradus singuli singulis gradibus circumferentiae non aequantur.

Arcum vocant unam partem circumferentiae circuli.

Chordam appellant lineam rectam, quae subtenditur arcui.

Sinus vocatur medietas chordae arcus duplati, ita quod chordae medietas est sinus medietatis arcus, cui chorda subtenditur.

Sagittam quoque appellant lineam rectam a medio chordae ad medium arcus pertransiens, et haec *sagitta medietatis arcus* [42r] vocatur.

Motum, qui *motus epicicli* a PTOLEMAEO vocatur, *motum diversitatis* vocamus, et locum, quem PTOLEMAEUS *augem* appellat, nos *inaugem* vocamus.

Secunda dictio.

Ex se satis notum est, quod chorda arcus cuiuslibet in periferia alicuius perfecta est etiam chorda residui. Item, quod sinus arcus unius est sinus arcus residui in arcu 180 graduum.

Item docet EUCLIDES, quod sagitta cum sinu semper facit angulum rectum. Item si sagitta protraheretur usque ad circumferentiam, transiret per centrum.

His positis volo nunc demonstrare sequentia.

Prima conclusio. Omnis chorda cuiuslibet arcus minoris semicircumferentia in potentia est aequalis resultanti ex ductu sagittae illius arcus in totam diametrum.[1])

Sit enim abc semicircumferentia super diametrum ac, in qua semicircumferentia ab sit arcus minor, cuius corda sit ab: dico, quod quadratum lineae ab est aequale resultanti ex ductu lineae ad in lineam ac. Ad cuius probationem protrahatur linea bc recta. Dico, quod angulus abc et angulus adb sunt aequales, quia ambo recti, et angulus a est communis: igitur angulus c in maiori triangulo est aequalis angulo b in minori. Quapropter quae est proportio lineae ad subtensae angulo abd ad lineam ab subtensam angulo recto adb, talis est proportio lineae ab subtensae angulo c ad lineam ac subtensam etiam angulo recto abc, et ideo multiplicatio primi in quartum est aequalis multiplicationi secundi in tertium, et ideo ab in se ipsum est aequale ei, quod fit ex ductu ad in ac, quod volebam probare.

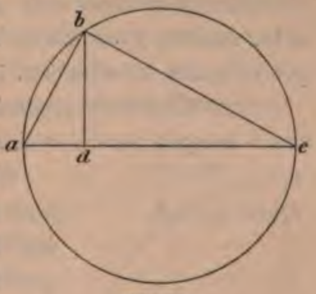


Fig. 27.

Ex hoc patet, quod, si sagitta ad est nota, chorda ab est nota. Item, si chorda ab est nota, sagitta ad est nota.

Primum patet, quia, si ducatur sagitta ad in totam diametrum ac, resultantis radix est chorda ab.[2]) Secundum patet, quia, si divitur [42v] quadratum chordae ab per diametrum ac, divisionis quotiens erit sagitta ad.[3])

---

1) D. i. $ab^2 = ad \cdot ac$ oder $\text{crd}\,\alpha^2 = \text{sinvers}\,\alpha \cdot d$.

2) $ab = \sqrt{ad \cdot ac}$; $\text{crd}\,\alpha = \sqrt{d \cdot \text{sinvers}\,\alpha}$.

3) $ad = \dfrac{ab^2}{ac}$; $\text{sinvers}\,\alpha = \dfrac{\text{crd}\,\alpha^2}{d}$.

Item ex hoc patet, quod chorda alicuius arcus vel sagitta nota, notus est sinus arcus illius.

Nam ex scientia sagittae habetur scientia chordae, et ex scientia chordae habetur scientia sagittae, ut dictum est. Statim ex scitis sagitta et chorda sinus est scitus, quia chorda est in potentia ad duo quadrata sagittae et sinus, et hoc patet ex praecedenti figura et experientia sinuum, unde sequitur, quod quadratum chordae ab est aequale duobus quadratis, scilicet sinus bd et sagittae ad. Ideo si subtrahatur quadratum sagittae scitae ad de quadrato chordae ab scitae, radix residui erit sinus bd.[1])

Aliter probatur, quia linea bd est medio loco proportionalis inter lineas ad et dc, sicut demonstrat EUCLIDES. Ex quo sequitur, quod multiplicatio lineae ad in lineam dc est multiplicationi lineae bcd in se ipsam aequalis, et quia multiplicatio lineae ad in lineam dc est scita, quia ipsa est residuum diametri, sequitur, quod linea bd est scita, quia est radix multiplicationis lineae ad in lineam dc, et hoc est, quod volebam probare.[2])

Et ex hoc etiam est notum, quod, si chorda alicuius arcus est nota, chorda illius arcus duplicati est nota, quia ex scientia chordae alicuius habetur scientia sinus alicuius, igitur sinus duplicatus est chorda arcus duplicati.[3])

Est etiam notum, quod nota sagitta est nota chorda residui arcus 180 graduum, hoc est dicere: quia scitur linea ad, scitur linea dc, quia, si subtrahatur linea ad, sagitta nota, ab ac diametro, remanet linea dc nota, sagitta arcus residui. Sed linea dc sagitta nota, scitur chorda bc per primum corollarium.[4])

[43r] *Conclusio secunda. Sagitta cum sinu residui arcus 90 graduum simul sumpta semidiametro coaequantur.*[5])

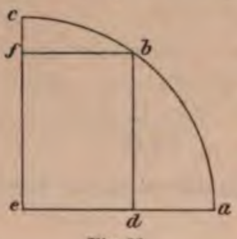


Fig. 28.

Sit enim quarta pars circumferentiae abc super centrum e. Protrahatur linea ce, et sit linea ad sagitta arcus ab, et linea bf sit sinus residui arcus 90 graduum, scilicet arcus bc. Protrahatur etiam linea bd: dico, quod linea ad sagitta simul cum linea bf sinu residui arcus 90 graduum aequatur semidiametro ae. Patet enim, quod angulus e est rectus, item, quod angulus d est rectus, et quod angulus f est rectus, et per consequens angulus b erit rectus, et per consequens linea bf lineae

1) $bd = \sqrt{ab^2 - ad^2}$; $\sin\alpha = \sqrt{\text{crd}\,\alpha^2 - \text{sinvers}\,\alpha^2}$.

2) $\text{Sin}\,\alpha = \sqrt{\text{sinvers}\,\alpha\,(d - \text{sinvers}\,\alpha)}$.

3) $\text{cord}\,2\alpha = 2\sin\alpha$.

4) $\text{crd}\,(180 - \alpha) = \sqrt{d\,(d - \text{sinvers}\,\alpha)}$.

5) $\text{sinvers}\,\alpha + \cos\alpha = r$.

ed aequidistat et est ei aequalis. Addita ergo utraque linea *ad* excrescentia erunt aequalia, scilicet linea *ad* simul cum linea *bf* et linea *ade*.

Ex quo apparet, quod, si sagitta est nota, sinus residui arcus 90 graduum est notus, et si sinus est notus, sagitta residui arcus 90 graduum erit nota.[1])

Tertia conclusio. Sagitta arcus maioris 90 gradibus aequatur semidiametro et sinui arcus superflui 90 graduum simul sumptis.[2])

Sit enim arcus *abc* arcus maior 90 gradibus, et *bc* sit arcus superfluus super 90 gradus, et centrum sit punctus *e*, et sagitta arcus maioris 90 gradibus sit linea *aed*, et sinus arcus *bc* sit linea *cf*, et protrahatur linea *cd*, quae est sinus arcus *abc*, et etiam protrahatur linea *bfe*, et sic habemus lineas *fc* et *ed* aequidistantes ut supra et aequales. Ex quo sequitur: linea *ae* simul sumpta cum linea *fc* et linea *aed* sunt aequales, quod volebam probare.

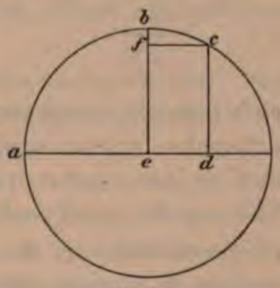


Fig. 29.

Quarta conclusio. Cognitis duobus sinibus duorum arcuum diversorum et sagittis eorum cognoscitur chorda dictorum arcuum simul sumptorum et chorda differentiae eorundem.[3])

Verbi gratia sint *ab*, *bc* duo arcus diversi, et sit arcus *ab* maior eorum, et sinus arcus *ab* sit linea [43ᵛ] *ae*, et eius sagitta sit linea *be*, et sinus arcus *bc* sit linea *cf*, et eius sagitta sit linea *bf*, et est notum, quod linea *bf* necessario cadit super lineam *be*, quia utraque linea venit a puncto *b* versus centrum circumferentiae. Et sit arcus *bd* aequalis arcui *ba*, et protrahatur linea *ae* recta usque ad punctum *d*, et est notum, quod dicta linea venit directe ad punctum *d*. Et quia chorda arcus *abd* est divisa in puncto *e* in duas partes aequales, et linea *ae* est sinus arcus *ab*, ideo est notum, quod linea *ed* est aequalis lineae *ae*. Etiam protrahatur de puncto *c* linea perpendicularis super lineam *ad* positam ad infinitum, quae sit linea *cg*, quae in prima figura intra circumferentiam cadit et in secunda figura extra. Etiam protrahantur lineae *ac*, *cd*, quae linea *ac* est chorda duorum arcuum simul sumptorum praedictorum, scilicet *ab*, *bc*; et linea

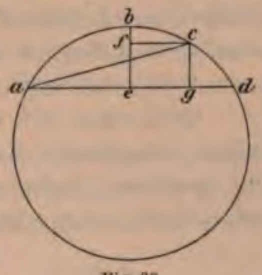


Fig. 30.

---

1) $\cos\alpha = r - \text{sinvers}\,\alpha$; $\text{sinvers}\,\alpha = r - \cos\alpha$.

2) $\text{sinvers}\,(90 + \alpha) = r + \sin\alpha$.

3) $\text{crd}\,(\alpha \pm \beta)^2 = (\text{sinvers}\,\alpha - \text{sinvers}\,\beta)^2 \pm (\sin\alpha \pm \sin\beta)^2$.

cd est chorda differentiae arcuum praedictorum, quia suppositum est, quod arcus bcd est aequalis arcui ab. Dico, quod si ae et fc sinus duorum


Fig. 31.

arcuum ab, bc et be, bf sagittae eorum sunt notae, linea ac chorda arcuum ab, bc simul sumptorum erit nota. Etiam dico, quod, si ae et fc sinus duorum arcuum ab, bc et be, bf sagittae eorum sunt notae, et linea cd recta chorda differentiae eorum erit nota. Probatur, quia linea ac in potentia est aequalis quadrato duarum linearum ae, fc simul iunctarum et quadrato lineae fe differentiae duarum sagittarum, quae quadrata sunt scita, quia lineae eorum sunt scitae, et chorda arcus cd in potentia [44r] est aequalis quadrato differentiae duorum sinuum et quadrato differentiae duarum sagittarum eorum. Quod patet, quia anguli f, e, g sunt recti, et ideo sequitur, quod lineae cf, eg sunt parallelae et etiam lineae ef, cg. Ideo sequitur, quod contrariae parellelae istarum sunt aequales, scilicet lineae ef, cg et lineae cf, eg. Et quia linea cg est perpendicularis super lineam ag cum ea causans angulum rectum, est notum, quod linea ac in potentia est aequalis quadratis duarum linearum cg, ga. Sed linea ga est aequalis lineis duorum sinuum ae, fc, et linea cg est aequalis lineae ef, quae est differentia duarum sagittarum, ideo est notum, quod quadratum chordae duorum arcuum simul est aequale quadrato duorum sinuum in una linea coniunctorum et quadrato differentiae sagittarum eorum. Et eodem modo est notum, quod quadratum chordae differentiae duorum arcuum praedictorum, quae est linea cd recta, est aequale duobus quadratis duarum linearum, scilicet cg, gd, quarum prima est aequalis differentiae duarum sagittarum, secunda est differentia duorum sinuum, et haec sunt, quae volebam probare.

Quinta conclusio. Noto sinu, eius sagitta est nota.

Quia sinus aut est arcus 90 graduum, tunc sinus et sagitta ad invicem coaequantur, aut est arcus minoris 90 gradibus, aut est arcus maioris 90 gradibus. Quando est sinus arcus 90 graduum, tunc sinus et sagitta ad invicem coaequantur, quia tam sinus, quam sagitta est semidiameter.


Fig. 32.

Si est maior aut minor, dico, quod distantia inter sinum et centrum est nota, et per consequens sagitta, quia amoto quadrato sinus a quadrato semidiametri remanet quadratum distantiae, cuius radix amota a semi[44v]diametro restat sagitta arcus minoris 90 gradibus, vel eidem addita habetur sagitta arcus maioris 90 gradibus. Sit semicirculus abc super centrum e, et linea bd sinus notus duorum arcuum, quorum unus sit maior 90 gradibus, alius vero minor, et arcus maior sit ab, minor vero sit bc. Tunc dico, quod cognito bd sinu cognoscitur et de distantia a centro, et per consequens dc sagitta arcus minoris et ad sagitta arcus maioris. Protrahatur linea be semidiameter, cuius quadratum valet quadrata linearum bd, de, quia angulus bde est rectus. Subtrahatur quadratum bd notum de quadrato be noto, remanet quadratum de notum, cuius radice adiuncta semidiametro habetur sagitta arcus maioris 90 gradibus et eadem radice subtracta a semidiametro remanet dc sagitta sinus arcus minoris 90 gradibus, scilicet bc, et haec sunt, quae volebam probare.

Sexta conclusio. Si chorda dupli arcus est scita, chorda subdupli arcus etiam est scita.

Quia scita chorda dupli arcus, scitur medietas dictae chordae, quae est sinus subdupli arcus. Quo sinu scito, scitur eius sagitta, qua scita, scitur eius subdupli arcus chorda, quod volebam probare.

Tertia dictio.

Cognitis sinibus et sagittis a quarta parte unius gradus arcus usque in 45to gradu arcus ad consequentes minutias, sufficienter scimus residuos sinus et sagittas.

Scitis enim sinu et sagitta quartae partis unius gradus arcus scimus sinum et sagittam 89 graduum et trium quartarum unius gradus, quia scita quantitate sinus unius quartae partis unius gradus arcus, scimus, quod residuum semidiametri dempta quantitate praedicta est sagitta residui arcus 90 graduum. Hoc patet per secundam conclusionem dictionis praemissae. Item scitis sinu et sagitta quartae partis unius gradus arcus, scimus sinum et sagittam 179 graduum et trium quartarum unius gradus arcus. Patet, quia idem est sinus utriusque, ut in principio secundae dictionis est dictum. Et subtractione unius sagittae a toto diametro remanet sagitta alterius, ut patet ex fine primae dictionis.

Item scitis sinu et sagitta 89 graduum et trium quartarum scientur sinus et sagitta 90 graduum et quartae partis unius gradus, quod patet modis eisdem. Et hoc idem est notum de caeteris usque in 45 gradum continue procedendo.

His praemissis tres sinus notos suppono, scilicet sinus 90 graduum arcus sua sagitta aequatur, quia tam sinus quam sagitta est semidiameter. Secundus est sinus arcus 30 graduum, qui est 30^0 [1]), nam demonstrat EUCLIDES, quod chorda arcus 60^0 est 60^0; et eius sagitta est nota, quae est $8^0\,2'\,18''\,30'''\,48''''$. Tertius sinus est 18^0, quia, ut docet EUCLIDES,

1) Von hier ab werde ich die jetzt üblichen Bezeichnungen benutzen, um Raum und Zeit zu sparen.

latus decagoni et quarta pars diametri simul sumpta in potentia valent quadratum semidiametri et quadratum quartae partis diametri simul iuncta. Sed radix istorum duorum quadratorum est $71^0\,4'\,55''\,20'''\,30''''$, quia dicta duo quadrata simul iuncta sunt 4500^0. A qua radice subtrahatur quarta pars diametri, scilicet 30^0, [45v] remanet $31^0\,4'\,55''\,20'''\,30''''$, quibus per aequa divisis remanet sinus arcus 18^0, qui sinus est $15^0\,32'\,27''\,40'''\,15''''$ propinque. Ex his patet ex dictis: sagitta sinus istius est $29^0\,56'\,11''\,47'''\,58''''$ propinque.

His suppositis ex scientia sinus et sagittae arcus 90^0 scimus sinum et sagittam arcus 45^0, et per istorum scientia scimus sinum et sagittam 22^0 et dimidii, ac 11^0 et quartae partis unius.

Item ex scientia sinus et sagitta 30^0 habemus notitiam sinus et sagittae 15^0, 7^0 et dimidii et 3^0 et trium quartarum.

Item ex notitia sinus et sagittae arcus 18^0, scimus sinum et sagittam 9^0, 4^0 et dimidii, 2^0 et quartae, nec non et 36^0. Et quia scimus sinus et sagittas arcuum 30^0 et 18^0, scimus sinus et sagittas arcus 24^0, qui est medietas duorum arcuum coniunctorum.

Et ex hoc etiam habemus scientiam sinuum et sagittarum arcuum 12^0, 6^0, 3^0, unius gradus et dimidii, et trium quartarum. Et secundum hunc modum omnes sinus et sagittas omnium arcuum de tribus quartis gradibus in tres quartas faciliter habere poterimus.

Quia per scientiam sinuum et sagittarum arcus 8^0 et quartae et arcus unius gradus et dimidii scimus sinum et sagittam arcus 9^0 et trium quartarum, et per hunc modum perfecte residuum sciemus.

Possumus etiam faciliter habere scientiam sinus unius quartae partis gradus unius hac arte, secundum quam procedam. [46r] Nam scito sinu arcus 8^0 et quarta partis unius gradus scitur sinus arcus 4^0 et octava, et sic continue procedendo scitur sinus quartae partis unius gradus et 128^{vae} partis gradus alterius. Et per viam eandem ex scientia sinus arcus 4^0 dempta una quarta habebimus scientiam sinus quartae unius gradus dempta 64^{ta} parte gradus eiusdem. Et secundum hunc modum inveni, quod proportio sinus arcus quartae partis unius gradus et 128^{vae} partis alterius ad sinum arcus quartae partis gradus unius dempta 64^{a} parte gradus eiusdem est quasi proportio arcus primi ad arcum secundum in tantum, quod in quartis minutiarum vel fractionis proportionis diversitas non apparet, licet modicum appareret in quintis. Et sic secundum artem hanc magistraliter est conclusum, quod proportio sinus arcus quartae partis gradus unius et 128^{vae} partis gradus alterius ad sinum arcus quartae partis unius gradus est quasi proportio arcus primi ad arcum secundum.

Propter quod ex sinibus inventis hoc modo, scilicet secundum proportionem arcus ad arcum, asserere quilibet potest, quod sinus arcus quartae partis gradus unius est 15′ 42″ 28‴ 32⁗ 27ᵛ. Et ex hoc faciliter unusquisque dirigetur ad sciendum sinus graduum aliorum de quarta gradus in quartam gradus. Et ex notitia quoque sinus arcus quartae gradus et sinus arcus trium quartarum unius gradus et sagittarum eorum sciemus sinum arcus unius dimidii gradus 2⁰, 4⁰, 8⁰, 20⁰ et 40⁰. Et per istam viam sciemus faciliter sinus et sagittas omnium graduum a quarta gradus in quartam [46ᵛ] usque ad complementum 45⁰, et per consequens sciemus omnes sinus residuos et sagittas, ut dictum est supra.

Causa autem, quia posui me ad inveniendum sinus et sagittas de quarta parte in quartam, fuit, quia inveni in tabulis, quae de gradu in gradum procedunt, defectum 15 minutorum vel circa in quibusdam circuli locis. Si enim quaeratur ex sinu notitia arcus scientia, et specialiter si arcus esset in modico maior aut minor 90⁰, invenietur praedictus defectus. Verbi gratia in tabulis meis sinus arcus 89⁰ 30′ est 59⁰ 59′ 57″, et secundum proportionem tabularum procedentium de gradu in gradum, si arcus esset minor semicirculo, sinus praedictus esset sinus arcus 89⁰ 45′ 21″, et si arcus esset maior 90⁰, praedictus sinus esset 90⁰ 14′ 33″ et hoc secundum demonstrata superius est falsum circa 15′. Nam secundum hoc sagitta arcus 14′ 33″ esset 8″. Sed ex praecedentibus plene scitur, quod, si sagitta esset 8″, quadratum sinus illius sagittae est 15′ 59″ 58‴ 56⁗, quia ista est multiplicatio 8″ in diametri complementum. Ex quo sequeretur, quod sinus arcus 14′ 33″ esset 30′ 59″ 0‴ et 53⁗, quod est falsum, quia iste sinus est 29′ et 35″ propinque, et igitur notum, quod arcus sinus positi est maior aut minor 29′ 35″ propinque. Ex quo sequeretur per viam aliam error in 15′, et ideo ordinavi tabulas de quarta gradus in quartam, quia in hoc non sequitur error notabilis in opere [47ʳ] sinuum supradicto proportionabiliter operando.

Quarta dictio.

A proposito dimisi in tabulis sagittas et chordas, et posui solum sinus de quarta gradus in quartam, quia scito sinu scitur chorda alicuius arcus duplati, et ex ista poterit quis scire sagittas. Si enim arcus est minor 90⁰, quaeratur in tabulis sinus arcus residui 90⁰, qui sinus inventus subtrahatur a semidiametro, et quod de ea remanet, est sagitta, quae quaeritur.

Et ex sagitta potest sciri arcus, quia, si sagitta est minor 60⁰, subtrahatur de eis, et quaeratur in tabulis, cuius arcus residuum erit sinus, qui arcus inventus subtrahatur a 90⁰, et quod de eo remanet, est arcus sagittae, qui quaerebatur.

Si vero arcus est maior 90⁰, quaeretur sinus differentiae, qui sinus inventus adiungatur semidiametro, et habetur sagitta. Et si ex sagitta maiori 60° scire arcum volueris, quaeratur, cuius arcus est sinus differentiae superflui ad 60°, qui arcus inventus adiungatur 90° et habebitur arcus sagittae, qui quaerebatur. Et illud est notum ex dictione secunda illius capituli.

Quando igitur Sanctitas Vestra de arcu noto sinum sibi occurrentem scire voluerit, quaerat in tabulis arcum notum, et in eius directo sinum inveniet. Et si ille arcus non invenitur in tabulis, arcus proximus sibi quaeratur, et differentia eorum notetur, et secundum proportionem differentiae arcus non inventi in tabulis [47ᵛ] ad differentiam duorum proximorum sibi inventorum in eis accipiatur de differentia sinus, et simili modo invenietur arcus ex sinu. Sed quia in quibusdam locis ex ista proportione sumenda possit error contingere, ut facilius error vitetur, idcirco illum arcum semper esse quaerendum, qui maiori sinu correspondet ex arcu unius residui a 90°, cognoscitur, ut dictum est supra.

Tabulas autem istas in tres linearum ordines divisi. In primo ordine posui arcus de quarta gradus in quartam usque in complementum 90°.

Der Schlufs fehlt, ist aber leicht aus der a. a. O. S. 103 abgedruckten Probe seiner Sinustabelle zu ergänzen. In der zweiten Ordnung stehen die Bogen von 360° um je 15′ abnehmend, die sich also mit denen der ersten Kolonne zum vollen Kreise ergänzen. Die dritte Kolonne endlich hat die zu den beiden vorhergehenden Bogen gehörigen Sinus.

Das Weitere, die Berechnung der ebenen Dreiecke, ist a. a. O. S. 103—107 mitgeteilt. Übrigens findet sich der Anfang der *„Dictio quinta“* nach der unter der folgenden Nummer mitgeteilten Abhandlung *„de tribus notis“* auch im *Codex Gotting. philos. 30*, ohne dafs dieses in dem gedruckten Kataloge angemerkt ist.

---

6. Anonyme Abhandlung „De tribus notis“.

Diese Nummer entnehme ich, wie die vorhergehende, dem *Codex Vindobonensis Palatinus 5277*. Meines Wissens befindet sie sich noch im *Codex Basileensis F II 33* des XIV. Jahrh. und, wie ich neuerlich konstatiert habe, in dem der zweiten Hälfte des XVI. Jahrh. angehörenden *Codex Gottingensis Philosoph. 30*. Den Inhalt dieses Stückes hat von Braunmühl in seinen *Vorlesungen* S. 106—107 in Kürze sehr gut gezeichnet. Wunderlich genug ist es aber, dafs nach dem Erscheinen der *Libri V de triangulis* Regiomontans man es noch für der Mühe wert gehalten hat, ein solches Stück abzuschreiben. Letzterer Codex hat mir aber ermöglicht, einige schwer zu lesende Abkürzungen des *Codex Vindob. 5277* richtig zu deuten. Die Entstehungszeit dürfte wohl mit dem Werke des

LEVI BEN GERSON und der nachfolgenden Abhandlung des JOHANNES DE LINERIIS ziemlich gleichzeitig sein, von welcher die erste in ihrem ersten Entwurfe aus 1321, die zweite aus 1322 stammt.

De tribus notis.

Codex Vindobonensis Palatinus 5277 fol. 151'—154.

Cuiuslibet trianguli rectilinei quęlibet tria ignota per quęcumque tria nota reperire.

In quolibet siquidem triangulo sex sunt, scilicet tres anguli et tria latera. Dico ergo, quod per notitiam quorumcumque trium istorum sex potest deveniri in notitiam trium reliquorum. Aut ergo supponetur notitia duorum laterum et unius anguli; aut supponetur notitia duorum angulorum et unius lateris; aut supponetur notitia trium laterum; aut supponetur notitia trium angulorum.

Si autem supponatur primo modo, tunc aut ille angulus est a duobus notis lateribus contentus, aut alteri eorum oppositus. Similiter bifurcatur secundus modus, eo quod latus notum vel potest cadere inter duos angulos notos vel alteri eorum opponi. Quilibet vero quattuor primorum modorum quinque modis variari potest; quintus vero quattuor modis; et sextus manet indivisus. Unde ex proposito theoremate, quasi ex quadam stipite, rami 25 procreantur, quorum omnium numerus, sufficientia et expositio in persecutione patebit.

I. Sint primo trianguli abc duo latera ab et bc nota, et angulus b contentus inter ab et bc etiam sit notus, et sit primo acutus: dico, quod reliqua tria dicti trianguli erunt nota. Protrahatur igitur perpendicularis ad a puncto a ad lineam bc per duodecimam primi EUCLIDIS. Et quoniam linea bc est nota ex hypothesi et db est nota, ut statim patebit. Scitur, utrum perpendicularis ad cadat extra triangulum vel intra ipsum; scitur etiam quantum cadit intra vel extra.

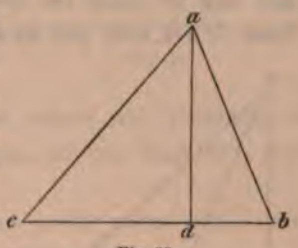


Fig. 33.

1) Cadat ergo primo intra triangulum. Quia ergo triangulus adb est orthogonius, oportet per 30^{am} tertii vel per demonstrationem 5^{te} quarti elementorum EUCLIDIS, quod linea ab sit diameter circuli circumscribentis ipsum. Et quoniam duo anguli abd, adb sunt noti, abd quidem ex hypothesi, adb vero, quia rectus, erit per ultimam sexti EUCLIDIS arcuum illos angulos suscipientium nota proportio. Et quia arcuum illorum alter est notus, scilicet arcus lineę ab, qui suscipit angulum adb, eo quod est semicircumferentia, oportet, quod reliquus arcus sit notus, scilicet arcus lineę ad, qui suscipit angulum abd, quoniam,

si duorum proportionalium proportio est nota, et unum proportionalium est notum, oportet reliquum esse notum. Et quia arcus lineę *ba* est notus, erit per tabulas arcuum et chordarum chorda *ad* nota per quantitatem, per quam *ab* est nota; ergo per penultimam primi Euclidis linea *db* est nota per eandem quantitatem. Vel si vis, habito, quod duo arcus duarum chordarum *ab* et *ad* sint noti, potes inferre, quod arcus lineę *db* sit notus; quia, si totum et altera eius pars sunt nota, oportet residuum esse notum. Et quia arcus lineę *db* est notus, erit linea *db* nota per tabulas arcuum et chordarum. Ergo per regulam inmediate antecedentem linea etiam *cd* est nota, ergo per penultimam primi Euclidis vel per tabulas arcuum et chordarum linea *ac* est nota, quę est unum trium investigandorum. Reliqua duo sic patent. Lineetur circulus circa triangulum *adc*, cuius diameter, ut iam patuit, erit *dc*, eo quod angulus *adc* est rectus; et quia linea *ad* est nota, erit per ultimam sexti Euclidis et angulus *c* notus. Sed et angulus *b* ex ypothesi est etiam notus, ergo per 32^{am} primi Euclidis tertius angulus, scilicet *bac* erit notus. Vel sic, quia tam linea *cd*, quam *db* sunt notę, per eandem quantitatem, ut iam patuit, arcus quoque earum sunt noti, igitur per ultimam sexti Euclidis duo anguli, qui sunt ad *a*, sunt noti, quare et totus angulus *bac* est notus. Igitur tria prius ignota, scilicet latus *ac* et duo anguli *acb*, *bac*, facta sunt nota per alia tria nota.

2) Si vero perpendicularis *ad* cadat extra triangulum, tunc descripto circulo circa triangulum ⟨*adb*⟩, et postea arguendo ut prius, oportet lineam *ad* esse notam per quantitatem, qua linea *ab* est nota, nec non et linea *bd* oportet esse nota per eandem quantitatem: igitur linea *dc* est nota per secundam regulam, nam totius [152] illius lineę, scilicet *bd*, notę altera eius pars, scilicet *cb* fuit nota ex hypothesi. Cumque linea *ad* sit nota, oportet per penultimam primi vel per tabulas arcuum et chordarum, quod linea *ac* sit nota. Angulus quoque *dac* ⟨notus⟩ per ultimam sexti, eo quod arcus, qui eum suscipit, est notus, cum sit arcus chordę notę, scilicet *dc*. Et quia per 32^{am} primi Euclidis angulus *acb* est ęqualis duobus angulis *adc* et *cad* notis, oportet ipsum esse notum. Cumque angulus *b* ex hypothesi sit notus, oportet tertium, scilicet *bac* esse notum per 32^{am} primi Euclidis. Vel sic. Quia tam linea *dc* quam *db* sunt notę, oportet, quod uterque angulorum *dac*, *dab* sit notus: ergo per secundam regulam angulus *bac* est notus.

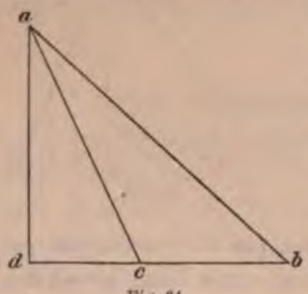


Fig. 34.

3) Quod si perpendicularis protracta a puncto *a* cadat supra punctum *c*, descripto circulo circa propositum trigonum, cuius diameter

fit linea *ab*, erit latus *ac* dupliciter procedendo ut supra notum per quantitatem, qua linea *ab* est nota; et quoniam linea *bc* ex hypothesi est nota, oportet, quod angulus *a* sit notus. Tres igitur dicti modi locum habent, quando angulus *b* notus fuerit acutus.

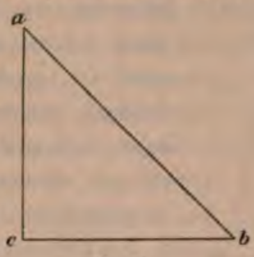


Fig. 35.

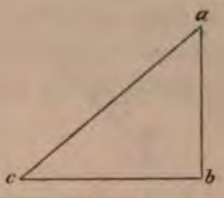


Fig. 36.

4) Si autem angulus *b* fuerit rectus, tunc duo latera *ab* et *bc* trianguli *abc* sunt nota ex hypothesi, et angulus *abc* notus tum ex hypothesi et etiam, quia rectus. Igitur arguendo sicut in pręmissis per penultimam primi Euclidis vel per tabulas arcuum et chordarum linea *ac* erit nota; et per tabulas arcuum et chordarum et deinde per ultimam sexti uterque duorum angulorum *a*, *c* erit notus.

5) Si autem perpendicularis *ad* cadit extra triangulum propositum, id est ex parte dextra ipsius, ita scilicet, quod angulus *b* notus sit obtusus, tunc descripto circulo circa trigonum *abd* et alio circa trigonum *adc*, erit linea *ac* nota per quantitatem, qua linea *ab* est nota eo quod una linea, scilicet *ad*, est nota respectu utriusque earum. Lineę quoque *cd* et *bd* erunt notę per eandem quantitatem: ergo per tabulas arcuum et chordarum et per ultimam sexti Euclidis uterque duorum angulorum *dac*, *bad* est notus, quare per secundam regulam angulus *cab* est notus, ergo tertius, scilicet *c*, est notus. Vel sic. Quia chorda *ad* est nota, ergo angulus *c* est notus. Unde notitia utriusque anguli potest referri vel absolute vel unius per alterum; et quoniam linea *db* est nota, scimus angulum, cum perpendicularis *ad* cadat extra triangulum.

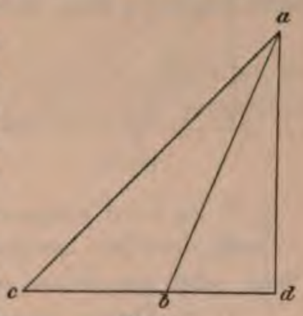


Fig. 37.

Et nota, quod in omnibus predictis quinque modis potest trahi perpendicularis a quovis angulorum ad quodvis laterum notorum.

II. Si autem angulus notus fuerit alteri duorum laterum notorum oppositus, scilicet quod duo latera *ab*, *ac* sint nota, et angulus *b* sit notus, sit ergo primo angulus *b* acutus. Et quoniam linearum utraque *bc*, *bd* est nota, ut statim patebit, scitur sicut prius, qualiter cadat perpendicularis *ad*, nec requiritur ad hoc, ut mihi videtur, scire, utrum *c* sit acutus vel obtusus, ut dicit Geber.

6) Cadat igitur primo intra triangulum. Descripto igitur circulo circa trigonum *abd*, arguendo sicut in pręcedentibus, erit utraque

duarum linearum ad, db nota per quantitatem, qua linea est nota ab. Descripto quoquę alio circulo circa trigonum acd, erit utraque duarum linearum ad, dc nota per quantitatem, qua linea ac est nota, igitur omnes lineę, quę sunt in prędicto triangulo sunt notę per eandem quantitatem, quare et omnes anguli sunt noti per tabulas arcuum et chordarum et per ultimam sexti EUCLIDIS arguendo ut in pręmissis.

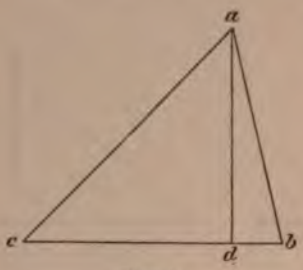


Fig. 38.

7) Quod si perpendicularis, scilicet ad cadat extra triangulum, tunc descriptis circulis circa duos trigonos abd, acd oportebit, quod omnes lineę, quę sunt in triangulo, sunt noti, arguendo sicut in pręmissa; et per consequens oportebit, quod anguli quęsiti sunt noti, arguendo de utroque absolute vel de uno per alium.

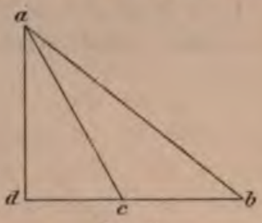


Fig. 39

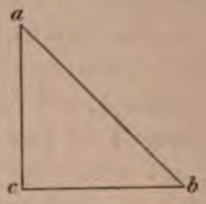


Fig. 40.

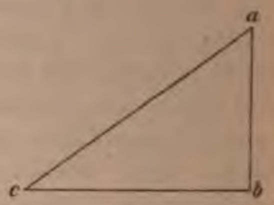


Fig. 41.

8) Si vero perpendicularis ducta ab a cadat supra punctum c, tunc descripto circulo circa trigonum abc, cuius diameter fit ab, de facili patet propositum per prędicta.

9) Si autem angulus b sit rectus, ita quod perpendicularis ducta ab a cadat supra punctum b, ut patet hic, descripto circulo circa trigonum abc de facili habetur propositum. [152']

10) Si autem angulus b fuerit obtusus, ita quod perpendicularis ad cadat extra trigonum et ex parte dextra ipsius, tunc descriptis duobus circulis circa duos trigonos abc, adc, si prę-missa intelligis, intelliges et istud. Et quoniam linea db est nota, sicut patet in deductione demonstrationis, scimus quanta perpendicularis cadat extra triangulum. Et nota quod in quinque modis pręcedentibus debet perpendicularis trahi super latus ignotum.

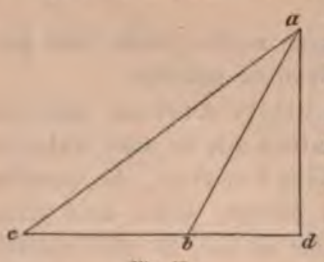


Fig. 42.

III. Si autem duo anguli a, b trianguli abc sint noti, et unum laterum eius notum, reliqua erunt nota. Sit igitur primo latus notum latus illud, quod est inter duos angulos notos, scilicet latus *ba*. Et quoniam angulus *b* est notus, scitur iterum utrum perpendicularis ducta a puncto *a* cadat extra triangulum vel intra, et per notitiam linearum scitur, quanta cadat intra vel extra, sicut in pręmissis.

11) Sit igitur primo angulus *b* acutus, et cadat perpendicularis primo intra. Descriptis igitur duobus circulis circa duos trigonos *abd*, *acd* scientur per ultimam sexti Euclidis, vel per penultimam primi, aut per tabulas arcuum et chordarum sicut in pręcedentibus quantitates linearum *ad* et *db* per quantitatem, qua linea *ab* est nota; quare angulus *dab*, eo quod arcus eum suscipiens est arcus chordę notę, scilicet *bd*. Et quia totus angulus *a* est notus, residuum, scilicet *dac*, est notum per secundam regulam. Tunc per eandem rationem erit utraque duarum linearum *ad*, *dc* nota per quantitatem, qua linea *ac* est 120 partium. Cum igitur linea *ad* sit nota respectu omnium linearum prędicti trianguli, oportet, quod omnia latera trianguli sunt nota per quantitatem qua linea *ab* est nota. De angulo patet.

Fig. 43.

12) Si autem perpendicularis cadat extra triangulum, descriptis duobus circulis circa duos trigonos *abd*, *acd* argue propositum per eadem, per quę in pręmissa.

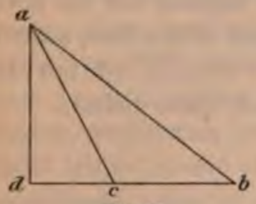


Fig. 44.

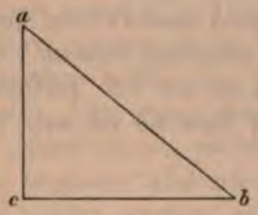


Fig. 45.

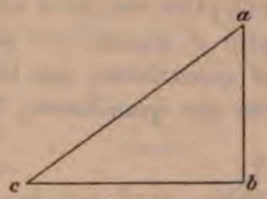


Fig. 46.

13) Si autem perpendicularis cadat supra punctum *c*, descripto circulo patet propositum.

14) Quod si perpendicularis cadat supra punctum *b*, ita quod *b* sit angulus rectus, nullus incumbat labor circumducto circulo.

15) Si vero angulus *b* sit obtusus, ita quod perpendicularis cadat ex parte dextra trianguli, lineatis duobus circulis circa duos trigonos *abd*, *acd* argue per illas, per quas arguisti in 11$^{\text{ma}}$ et 12$^{\text{ma}}$. Et nota, quod in quinque modis pre-

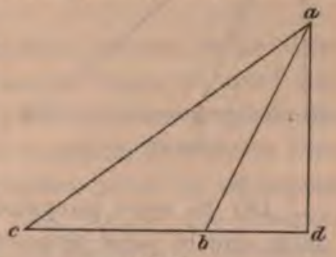


Fig. 47.

dictis potest trahi perpendicularis a quovis angulorum notorum ad quodvis laterum ignotorum. Argues autem de triangulo *abd* per angulum *abd*, qui est residuus duorum rectorum subtracto noto. In triangulo vero *acd* argues per notitiam anguli *cad* compositi ex duabus notis.

IV. Si vero latus notum sit alteri duorum notorum angulorum oppositum, ita quod duo noti anguli sint *b*, *c*, et latus notum sit *ab*,

16) Tunc sit primo angulus *b* acutus, et perpendicularis protracta ab *a* cadat primo intra triangulum. Scitur autem, ut iam patuit, ubi cadere debeat per notitiam angulorum et linearum ut in

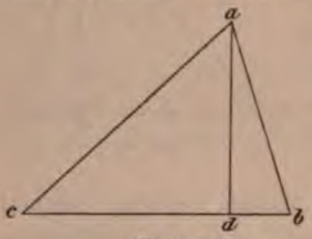


Fig. 48.

precedentibus. Circumductis igitur duobus circulis circa duos trigonos *abd*, *acd*, linea *ab* et angulus *b* sunt nota ex hypothesi, erunt ergo per ultimam sexti EUCLIDIS, vel per penultimam primi, vel per tabulas arcuum et chordarum duę lineę *ad*, *db* notę per quantitatem, qua linea *ab* est nota. Per eandem quoque rationem erunt ex alia parte duę lineę *ac* et *dc* notę respectu lineę *ad*, ergo et respectu lineę *ab* notę. De angulo vero patet.

17) Quod si perpendicularis cadat extra ex parte sinistra trianguli, descriptis duobus circulis circa duos trigonos *abd*, *acd* erunt sicut prius tam linea *ad* quam linea *db* notę, quare angulus *dab* est notus, igitur et angulus *dac* per secundam regulam. Quare et duę lineę *ad* et *dc* per quantitatem, qua linea *ac* est 120 partium. Et quia *ad* fuit iam nota per quantitatem, qua linea *ab* est nota, patet, quod dicitur.

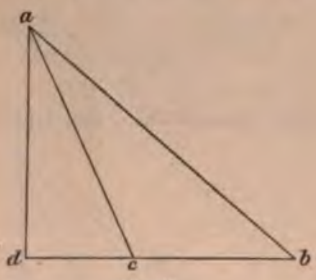


Fig. 49.

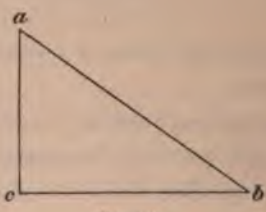


Fig. 50.

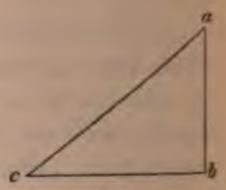


Fig. 51.

18) Si vero perpendicularis cadat supra punctum *c*, circumducto circulo patet propositum.

19) Si autem angulus *b* sit rectus, ita quod perpendicularis cadat supra punctum *b*, circumducto circulo patet propositum. [153]

20) Quod si angulus *b* fuerit obtusus, ita quod perpendicularis cadat ex parte dextra trianguli, tunc circumductis duobus circulis circa duos trigonos *abd*, *acd*, erunt duę lineę *ad*, *db*, notę per quantitatem, qua linea *ab* est nota, eo quod angulus *abd* est notus, cum sit residuum duorum rectorum subtracto noto. De triangulo vero *acd* arguas per notitiam anguli *dac* compositi ex duobus notis sicut in 15^{ma}. Et nota, quod in quinque modis immediate pręcedentibus potest trahi perpendicularis a quovis angulorum notorum ad quodlibet laterum ignotorum.

Fig. 52.

V. Si vero tria latera trianguli *abc* sint nota, et requiritur notitia trium angulorum eius, tunc perpendicularis ab angulo *a* ad lineam *bc* ducatur,

21) Quę primo cadat intra triangulum dividatque lineam *bc* per medium, quod tunc fiet, quando duę lineę *ab*, *ac* fuerint ęquales; quoniam, si ita fuerit, tunc duo anguli *b*, *c* erunt ęquales per quintam primi. Perpendicularis quoque ducta a puncto *a* cadit intra triangulum per 16^{am} et 17^{am} eiusdem. Si enim cadat extra, sequeretur, quod uterque duorum angulorum *b* et *c* esset maior recto per 16^{am}, quod est inconveniens per 17^{am}. Dividet quoque dicta perpendicularis lineam *cb* in duo media per 26^{tam} primi eiusdem. Et quia tota linea *bc* ex hypothesi fuerit nota, tunc utraque duarum medietatum eius, scilicet *bd*, *dc*, est nota. Facto itaque circulo circa trigonum *abd* erit per penultimam primi et per tabulas arcuum et chordarum linea *ad* nota, quare per ultimam sexti angulus *b* est notus, quare et angulus *c* sibi ęqualis, igitur totus angulus *a*. Vel si vis, proba aliter, faciendo alium circulum circa trigonum *adc*.

Fig. 53.

22) Si vero perpendicularis *ad* dividat lineam *cb* in duas partes inęquales, ita quod linea *db* sit maior linea *dc*, quod tunc fiet, cum linea *ab* erit maior linea *ac*, quod patet, si resecetur portio una ex *db* ex parte *d*, quę sit ęqualis *dc*, ad cuius terminum protrahatur linea ex puncto *a*. Vel potest hoc patere per penultimam primi bis assumptam et per hanc conceptionem: Si ab inęqualibus idem dividas, quę remanent erunt inęqualia, tunc oportebit per prędictam propositionem bis assumptam, quod excessus quadrati *ab* super quadratum *ac* sit equale excessui quadrati *db* super quadratum *dc*. Sit autem *dc* ęqualis *de* per tertiam primi

EUCLIDIS; patet autem apertissime per sextam secundi EUCLIDIS, quod quadratum lineę db excedit quadratum de, et per consequens quadratum lineę dc, quod est sibi ęquale, scilicet quadrato prędicto de, in eo, quod fit ex ductu lineę bc in lineam be. Vel aliter patet per 4$^{\text{tam}}$ secundi EUCLIDIS, quod quadratum db valet quadratum de et eb et illud, quod fit ex de in eb bis. Ex prima vero eiusdem patet, quod quadratum eb et illud, quot fit ex de in eb bis simul sumpta sunt ęqualia ei, quod fit ex ductu totius lineę bc in lineam be: ergo quadratum lineę db excedit quadratum lineę de, quare et quadratum lineę dc ei equalis, in eo, quod fit ex bc in be. Hoc idem potest haberi brevius per sextam secundi EUCLIDIS, ut prius patuit. Et quia excessus quadrati ab super quadratum ac est notus, eo quod utraque illarum duarum linearum, scilicet ab et ac, est nota ex hypothesi, oportet, quod excessus quadrati db supra quadratum dc sit etiam notus,

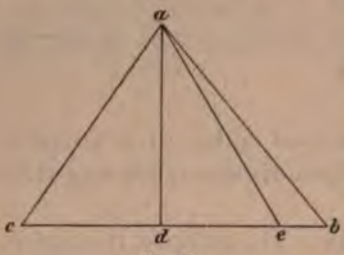


Fig. 54.

eo quod duo dicti excessus probantur esse ęquales. Quare illud, quod ex bc in be est notum, quia est ęquale unicuique duorum prędictorum excessuum, ut iam patuit. Et quia linea bc est nota ex hypothesi, tunc si dividatur prędicta superficies nota per bc notam, exibit be ignota, quoniam, si productum dividatur per alterum multiplicantium, exibit reliquum. Igitur per secundam regulam linea ce est nota, quare et utraque medietatum eius, erit nota, scilicet cd et de. Habito vero quod medietas [153'] lineę ce sit nota, habetur per penultimam primi, quod linea ad sit nota secundum GEBER. Idem habetur per tabulas arcuum et chordarum; et habito, quod linea ad sit nota per quantitatem duarum linearum ab et ac, habebitur per penultimam primi vel per tabulas arcuum et chordarum, quod linea db sit nota. Ex quibus infert GEBER, quod arcus ad sit notus, et videtur in hac conclusione esse non causa ut causa. Notitia enim lineę db nihil facit in proposito casu ad notitiam arcus lineę ad, et possumus dicere, quod non intenditur inferre notitiam arcus lineę ad per notitiam lineę db, sed per notitiam ipsarum linearum ab et ad descripte prius circulo circa trigonum abd. Notitiam vero lineę db intulit ex habundantia, et quia arcus lineę ad est notus, oportet per ultimam sexti, quod angulus b sit notus, quare et angulus c est notus. Et potest confirmari hęc conclusio per primam supra positam de triangulis. Posset tamen notitia anguli c habere absolute sicut et notitia anguli b, et poterat GEBER negotiari per alterutrum duorum angulorum b, c habita notitia lineę ad, nec oportebat inferre notitiam lineę db, cum nihil facit ad propositum, ut iam dixi. Sed copia eligibilium facit quandoque hominem respitare. Et scias, quod, ubi hic habetur *c* in figuratione, in Geber habetur *g*, et supponitur ibi linea *ag* esse maior linea *ab*, et linea *gd* ponitur esse maior linea *db*, e converso scilicet *ei*, quod fit hic. Sic patet, quod ad demonstrationis subiectam sufficit habere notitiam medietatis lineę *ce*, et per eam et notitiam lineę *ac* inferre notitiam lineę *ad*, ut dictum est.

23) Si vero perpendicularis cadat ex alterutra partium trianguli, ita scilicet, quod alteruter angulorum *b*, *c* sit obtusus, quod quidem scitur per notitiam linearum *cb* et *bd*, quarum una, scilicet linea *cb*, est nota ex hypothesi, altera vero habetur per divisionem medietatis eius quod fit ex linea *cb* in lineam *db* per lineam *cb*, quod sic patet. Certum est per penultimam primi, quod excessus quadrati *cd* super quadratum *bd* est ęqualis excessui quadrati *ac* super quadratum *ab*. Sed excessus quadratorum *ac* et *ab* est notus, ergo etiam excessus quadratorum *cd* et *bd* est notus. Igitur per 4^tam^ secundi illud, quod fit ex ductu *cb* in se semel et in *bd* bis, est notum, quia equale noto. Sed quadratum *cb* est notum, ergo illud, quod fit ex *cb* in *bd* bis, etiam est notum, quare et eius medietas, scilicet id, quod fit ex *cb* in *bd* semel. Dividatur igitur *cb* nota in id, quod fit ex *cb* in *bd* notum, et exibit *bd* sicut in pręcedenti demonstratione. Unde non debet dividi totus excessus quadrati *cd* super quadratum *bd* per latus quadrati *cb*, sicut videtur dicere

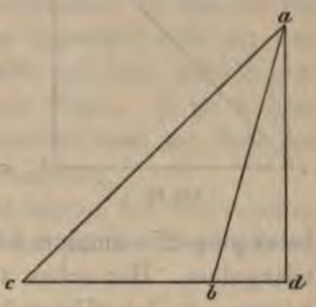


Fig. 55.

Geber, sed debet dividi per lineam *cb* sola medietas excessus, subtracto inde prius quadrato lineę *cb*, sicut fecimus, et tunc exit de divisione linea *bd*, ut iam patuit. Et dicendum est, quod utroque modo fieri potest. Sed modus Geber brevior est et planior pręcedente demonstratione. Levius, quod, quia subtracto *cb* ex eo, quod exit per divisionem, relinquitur *bd*, et hoc facere est leve. Igitur per penultimam primi vel per tabulas arcuum et chordarum linea *cd* est nota per quantitatem, qua duę lineę *ab*, *ac* sunt notę, quare per ultimam sexti coadiuvantibus tamen tabulis arcus et chordę *abd* et *acd* est notus. Quod patet descriptis circulis duobus super duos trigonos *abd*, *acd*; et quia angulus *abd* est notus, oportet per 13^mam^ primi Euclidis, quod angulus *abc* sit notus, igitur per primam de triangulis vel per 32^am^ primi Euclidis angulus *bac* est notus, et sic patet intentum. Et nota, quod per immediate pręcedentes invenitur, utrum perpendicularis cadat intra vel extra, et quanta intra vel extra. Sed supposito in pręmissa, quod perpendicularis cadat intra invenitur de facili per 13^mam^ secundi Euclidis quantum cadat intra. Nam [154] quia per pręcedentem 13^mam^ quadratum lineę *ab* minus est quam duo quadrata *ac* et *cb*, quantum est, quod fit ex *cb* in *bd* bis, oportet, quod ductis *cb* in *bd* bis sit notus. Dividatur itaque medietas eius per lineam *cb* et exibit linea *bd*. Similiter quoque supposito in hac 23ª, quod perpendicularis cadat extra, reperitur quadratum *ac* maius duobus quadratis *ab* et *bc*, quantum est, quod fit ex *cb* in *bd* bis. Et quia hoc est notum, dividatur medietas eius per lineam *cb* notam, et exibit linea *bd*. Sed utrum cadat intra vel extra, habetur statim quantum, et ideo primi modi pręvalent.

24) Si vero perpendicularis cadat super alterutrum punctorum *b*, *c*, ut verbi gratia super *b*, quod quidem scietur per penultimam primi, tunc patet propositum copiose. Et nota, quod in quattuor modis prędictis duci potest perpendicularis a quovis angulorum ad quodvis laterum.

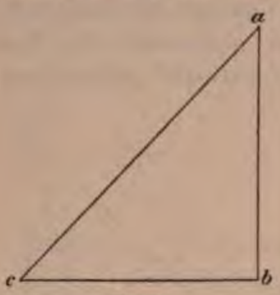


Fig. 56.

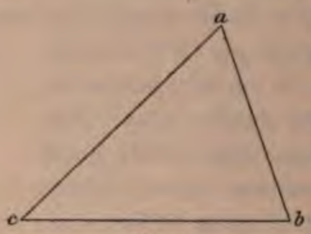


Fig. 57.

VI. Si autem tres anguli *a*, *b*, *c* fuerint noti,

25) tunc per ultimam sexti et per tabulas arcuum et chordarum habetur proportio omnium laterum inter se et ad diametrum circuli continentis triangulum. Hoc autem videtur, quod non sufficit ad habendam notitiam laterum, et ideo videtur hęc combinatio mutila. Sed non est ita, quia non requiritur notitia quantitatis continentię in lateribus sed discretę, in angulis vero utriusque.

---

7. Die „Canones Tabularum primi mobilis" des Iohannes de Lineriis.

Die zwei folgenden Stücke gehören insofern zusammen, als der Verfasser der zweiten Nummer, JOHANNES DE MURIS, die *Canones* des JOHANNES DE LINERIIS mehr als nur benutzt hat. Doch mufs zugestanden werden, dafs JOHANNES DE MURIS eine gewisse Selbständigkeit in seiner Darstellungsweise zeigt. Die Arbeit JOHANNES' DE LINERIIS findet sich in sehr vielen Exemplaren. Das älteste erhaltene, das fast als Urschrift betrachtet werden kann, besitzt die Amploniana zu Erfurt unter der Nummer *Fol. 377*, Blatt 22—35. Hier heifst nämlich die Schlufsschrift: *Expliciunt Canones tabularum astronomiae ordinati per Magistrum* IOHANNEM PYCHARDUM DE LYNERIIS *et completi Parisius anno ab Incarnacione Christi filii Dei 1322, scriptae Parisius per manum* IOHANNIS DE DANECOWE *a. D. M°CCC°XXIII° in die cathedra Petri. Deo gr.* Dieses

Exemplar war mir nicht zugänglich. Ich entnehme deshalb den Text dem *Codex Basileensis F. II. 7*, Blatt 38 u. ff. des XV. Jahrhunderts.

Dafs JOHANNES in seiner Darstellung der Berechnung der Sinus, wie der Anonymus von Nr. 4, von AL-ZARKÂLI abhängig ist, folgt schon aus der Benutzung des Durchmesserwertes zu 300 Minuten. In der That hat er seinen *Canones* unbedenklich und ohne Andeutung ihres Ursprunges die Berechnungsweise der Sinusfunktion aus Nr. 2 wörtlich einverleibt. Merkwürdig genug ist aber seine Sinus*tabelle* für den Durchmesser 120 berechnet. Diese ist für halbe Grade aufgestellt, nicht wie die des LEVI BEN GERSON von 15 zu 15 Minuten. Dem Wunsche VON BRAUNMÜHLS, a. a. O. S. 107, Genaueres über den Inhalt der Arbeit DE LINERIIS zu erfahren, soll im Folgenden gewillfahrtet werden. Unser Verfasser hat aber auch eine *Tabula umbrae* seinem Werke angefügt, und lehrt, wie man mit derselben Sonnenhöhen finden kann. Sie ist für den Durchmesser 12 und für die einzelnen Grade des Quadranten gegeben. Die Sinustafel teile ich nur auszugsweise mit, lasse dagegen die Schattentafel und eine *Tabula proportionis*, welche die Interpolation vereinfachen soll, folgen. In bei weitem ausgedehnterer Gestalt hat eine solche Proportionstafel noch am Ende des XVI. Jahrhunderts CHRISTOPH ROTHMANN aus Bernburg.

Mit Interesse wird man wohl auch die Darlegung der altrömischen Auffindung der Mittagslinie durch den Verfasser und die Beschreibung der beiden andern Instrumente verfolgen.

Ex codice Basileensi F. II. 7.

[38r] **Incipiunt Canones Tabularum primi mobilis magistri Iohannis de Lineriis.**

Cuiuslibet arcus propositi sinum rectum invenire.

Sinus rectus est medietas corde portionis arcus duplicati.

Sinus versus est pars dyametri inter arcum et predictam cordam contenta transiens per medium ipsius corde et eam orthogonaliter secans.

Arcus igitur, cuius sinum queris, aut erit maior 180 gradibus aut minor. Si vero fuerit maior, subtrahe inde 180 gradus et cum residuo operare; si vero fuerit minor, operare cum eo.[1]) Quere igitur arcum illum in tabula cordarum medietarum, que augmentantur per dimidium et dimidium gradum, si eum potes precise invenire, et sinum rectum in directum ipsius inventum accipe, quia est sinus rectus propositi arcus.

Si vero arcum propositum non possis precise invenire, quod contingit, quando in arcu proposito fuerint gradus et minuta, et illa minuta

---

1) Winkel oder Bogen $> 180^0$ wurden nicht benutzt; wie man bei gröfseren Bogen sich half, wird später gezeigt.

fuerint plura 30 aut pauciora, tunc intra tabulam supradictam cum numero minori, propinquiori tamen, et accipe sinum, quem invenies in directo eius, et eum serva. Deinde intra cum maiori, propinquiori tamen, et sinum in ipsius directo inventum sub alio scribe. Postea scias differentiam, que est inter primum sinum et secundum, subtrahendo minorem a maiori. De qua differentia accipe partem proportionalem secundum proportionem minutorem in arcu proposito contentorum infra 30 ad 30, aut minutorum in arcu proposito contentorum ultra 30 ad 30 per undecimam primi huius[1]) vel nonam secundi huius, quam partem proportionalem addas equacioni sinus prius accepte, si fuerit minor secunda, vel ab ea subtrahe, si fuerit maior, et habebis equacionem sinus arcus propositi.

Et scias, quod 30 est primus numerus, et minuta contenta in arcu proposito infra 30 vel ultra est secundus, et differentia duorum introituum est tercius.

2. Sinus recti propositi arcum invenire.

Sinum propositum quere in tabulis predictis, si precise potes eum invenire, et quod in prima linea duarum linearum numeri fuerit, accipe, quia est arcus propositi sinus.

Si vero precise propositum sinum non inveneris, accipe minorem, propinquiorem tamen, et arcum in directo exeuntem serva. Quem sinum subtrahe a proposito sinu et residuum serva, quia est differentia inter sinum minorem in tabula repertum et sinum propositum, et est secundus numerus. Deinde accipe differentiam, que est inter sinum minorem propinquiorem acceptum in tabula et maiorem, propinquiorem tamen exeuntem in tabula, subtrahendo minorem a maiori, et est primus numerus, et 30 minuta, per que tabula augmentatur, est tercius numerus. Accipe igitur partem de 30 minutis secundum proportionem secundi numeri ad primum, multiplicando scilicet secundum per tercium, et, quod provenit, dividendo per primum. Et quod proveniet, arcui, quem servasti, super adde et habebis propositum.

3. Arcus propositi sinum versum invenire.

---

1) Dort heifst es: „Si vero precise non inveniatur, intra cum minori numero, „propinquiori tamen, et accipe declinationem, quam in eius directo inveneris, et serva. „Deinde intra cum maiori, propinquiori tamen, et accipe similiter declinationem in „directo eius inventum, et eam sub prima scribe. Deinde scias differentiam, que erit „tertius numerus subtrahendo minorem declinationem a maiori, cuius differentie accipe „partem proportionalem secundum proportionem minutorum cum gradibus perfectis in „arcu proposito contentorum, quae sunt secundus numerus, ad 60, qui est primus „numerus. Quam partem proportionalem adde super declinationem primam, si fuerit „minor secunda, vel ab ea minue, si fuerit maior, et proveniet tibi declinatio pro- „positi arcus". Das soll also *mutatis mutandis* auch hier in Anwendung kommen.

Si numerus graduum arcus propositi fuerit minor 90, illum de 90 minue, et residui sinum rectum scias per primam huius, quam de 60, qui est totus sinus rectus, minue. Quod autem remanserit, erit sinus versus arcus propositi sive corda versa.[1])

Si vero arcus propositus plus 90 fuerit, illud, in quo superat 90, accipe, et ipsius scias sinum rectum per primam huius, quem adde super 60, quod est dimidium dyametri, et quod provenerit, est propositi arcus sinus versus.[2])

4. Sinus versi propositi arcum invenire.

Si sinus versus minor 60 fuerit, eum de 60 minue, et residui scias arcum per secundam huius, quem de 90 minue, et residuum erit, quod queris.

Si vero sinus versus fuerit plus 60 minue ex eo 60, et residui scias arcum per secundam huius, quam addas cum 90 gradibus, et quod proveniet, est arcus propositi sinus.

[38v] 5. Cuiuslibet arcus propositi cordam perfectam per tabulas cordarum mediatarum invenire.

Arcum propositum media, ipsiusque medietatis scias sinum rectum per primam huius, quam duplica, et duplicatum est arcus propositi corda perfecta.[3])

6. Cuiuslibet corde perfecte proposite arcum invenire.

Cordam propositam media, dimidii quoque arcum scias per secundam huius, et arcum, qui proveniet, duplicabis, et duplicatum est arcus illius corde perfecte.

7. Instrumentum ad lineam meridianam, quod alio nomine cenith meridianum dicitur, construere, et modum inveniendi ipsam subiungere.

Preparetur lamina lapidea aut enea seu cuiuscumque materie, que non transmutetur de facili a calore solis et humiditate aeris, planeturque una superficies eius optime, ita quod sit superficies plana, quanto melius poterit, quod cum regula recta scire poteris. In cuius medio centro aliquo pede circini posito describatur circulus maior, quem competenter recipere possit. Et sit circulus ille $defg$, cuius centrum e. In e rectissime erigatur baculus seu stilus eneus vel ferreus rectus, cuius caput sit acutum, ut immobiliter ibi permaneat. Et sit longitudo partis erecte super superficiem quarta pars diametri circuli iam descripti, quia est habilior. Et orthogonaliter erigatur super superficiem predictam, ut non inclinetur

1) D. h.: $\text{sinvers}\,\alpha = 1 - \cos\alpha$.
2) D. h.: $\text{sinvers}\,(90^0 + \alpha) = 1 + \sin\alpha$.
3) Corda $2\alpha = 2 \sin\alpha$.

ad aliquam partem. Quod scire poteris cum circino, posito quod pes unus ponatur in circumferentia circuli, et alter extendatur usque ad caput superius predicti stili, ita quod, quando posito pede circini in quatuor partibus distantibus per quartam partem circuli altero pede extenso usque ad cacumen stili, quando eadem extensio precise veniet ad cacumen stili, tunc erit bene situata. Firmetur ergo, ut non possit moveri. Post hoc situetur istud instrumentum in loco orizontis directe taliter, ut non sit declinans in aliqua parte, sed equidistans orizonti rectissime, quod poteris facere consimili instrumento, cum quo latomi lapides suos orthogonaliter erigunt et equidistanter situant orizonti. Quo peracto firmetur illa superficies ibi immobiliter.

Fig. 58.

Cum igitur volueris scire lineam meridianam considera in principio diei ante meridiem, quando summitas umbre stili erecti perveniet ad circuli circumferentiam, et in puncto contactus umbre et circuli circumferentie fac signum cum aliqua re acuta, quod sit a. Deinde expecta post meridiem, quousque perveniat iterum umbre summitas ad circuli circumferentiam sicut prius, et in loco contactus fac secundum signum, quod sit b. Post hoc arcum circuli inter utrumque signum, scilicet arcum ab, in duas partes equales divide in puncto c. A quo duc lineam rectam usque ad circumferentiam in puncto opposito, quod sit d, transeuntem per centrum circuli. Et hoc est meridiei linea, quam querebas.

Quandocumque ergo umbra stili, que sit ek, secundum rectitudinem istius linee ceciderit, sive sit umbra longa aut brevis, meridiem denotavit.

Post hoc circulum cum alio dyametro, que istam prius descriptam, scilicet *dec*, ad angulos rectos intersecat supra centrum, quadra, que sit *gef*, et hec linea [39r] punctum veri orientis et occidentis ostendit, scilicet ubi oritur caput arietis et libre et occidit. Et dicitur hec linea cenith orientis et occidentis. Et est meridiei punctus *c*, septemtrionis punctus *d*; *f* est pars orientis, et punctus *g* pars occidentis.[1])

Notandum tamen, quod melius et verius potest istud instrumentum situari, dum sol est in capite cancri vel prope, quia, quanto propinquius, tanto melius propter tarditatem declinationis inter duas observationes.

Notandum etiam, quod unica observatione, quocumque tempore anni volueris, poteris ipsum situare et lineam meridiei et orientis extrahere. Commodius tamen, dum sol est in signis septemtrionalibus in illa regione, scilicet in septimo climate, et modus dabitur in tertio huius.

Notandum insuper, quod si circulum diviseris in 360 gradus, poteris quacumque hora diei scire azimuth solis, quia, versus quamcumque partem de illis 360 ceciderit umbra, illa ostendet tibi azimuth. Et si cadat in quarta *gd*, azimuth erit orientale septemtrionale tot graduum, quot sunt gradus inter punctum *g* et umbram. Et si cadat in quarta *gc*, azimuth erit orientale meridionale tot graduum, quantum distat umbra a puncto *g*. Et si cadat in quarta *fc*, erit azimuth occidentale meridionale tot partium, quot sunt gradus inter punctum *f* et directum umbre.

Notandum eciam, quod si umbra non pervenerit ad circumferentiam circuli, tu potes ducere filum stilo alligatum secundum longitudinem umbre usque ad circumferentiam, ut scias, super quam partem cadat umbra; vel, quod melius est, virgula recta enea tenuis, in cuius medio est linea recta secundum longitudinem, et in uno capite foramen, per quod transeat stilus, ut iaceat super laminam et trahatur semper ita, quod linea in ea sit in medio umbre, et videbis, super quam divisionem circuli cadat, scilicet in una parte, et in capite, ubi tangit circulum clinetur medietas ita, quod ostendit semper, super quam partem cadet umbra.

Quantum vero sit utile istud instrumentum, videbitur in sequentibus.

8. Instrumentum ad capiendum altitudines solis et stellarum et ad observationes faciendas construere.

Accipietur quoddam instrumentum ligneum vel ferreum vel eneum, quod prevalet, quadratum constituatur, cuius quadratura duas ulnas versus omnem partem contineat, quia, quanto maior fuerit, tanto melius est.

---

1) Es ist die von Hyginus gelehrte Art, die Mittagslinie zu bestimmen. Vergl. *Gromatici Veteres* ed. Lachmann I, p. 188 ff.

Sit igitur quadratum hoc *abcd*, cuius punctus *a* centrum ponatur et super ipsum centrum *a* secundum quantitatem *ba* circinetur quarta circuli *bc*, quam dividas per 90 partes, et quamlibet partem in tot fractiones, quot poteris. Et sit superficies quadrata plana, nusquam declinans neque vacillans. Post hoc duas cuspides eneas equalis quantitatis in tornatorio instrumento tornatas accipias, quarum alteram in centro *a*, alteram vero in puncto *b* figas. Deinde plumbeum perpendiculum in summitate cuspidis, que est in centro *a*, pendeat usque ad summitatem cuspidis, que est in puncto *b*, ut nusquam a linea *bd* declinetur, ut per hoc examinetur, quod instrumentum erit bene situatum. Si enim ab illo situ distordet, male stabit. Superficies vero, in qua divisiones et scripture sunt impresse, versus orientem erigatur, latus vero *ab* super lineam meridiei per precedentem inventam adaptetur. Post hoc quandam regulam vel laminam tenuem, super cuius medium sit linea secundum longitudinem, que mediante foramine in una ipsius extremitate facto intromittatur in cuspide *a* stilum in centro quadrantis, et alia extremitas sit super circumferentiam arcus *bc* ita, quod huiusmodi regula elevetur et deprimatur, ut umbra cuspidis *a* sit super longitudinem linee in medio protracte, et alia extremitas exiens super arcum *bc* sit lineata usque ad lineam mediam, ut mediante ipsa videatur, super quem gradum cadat umbra cuspidis *a*. In summitate vero eiusdem regule parum ultra circumferentiam quarte circuli *dc* sit [39v] alia cuspis equalis illi, que est in centro *a* in media linea regule situata, que sit *h*, ut per summitatem cuspidis *a* et *h* videri possint stelle, quarum altitudines volueris invenire.

Cum igitur volueris invenire altitudinem solis, dum erit in linea meridiei, situato instrumento, ut dictum est, eleva regulam *ah*, ut umbra cuspidis *a* cadat super rectitudinem linee regule *ah*, et vide, quot continentur gradus et minuta inter lineam *ah* et punctum *c* in quarta circuli *bc*, et habebis altitudinem solis super orizontem.

Si vero velis eius remocionem in circulo altitudinis a cenith capitum, vide, quot sunt gradus et minuta in arcu *bh*, quia tantus est arcus in circulo altitudinis inter cenith capitum et locum solis.

Si vero velis hoc idem de stellis fixis, facias eodem modo, quo nunc dictum est, respiciendo stellam per cuspides *a*, *h* elevando vel deprimendo regulam, quousque videas eam per summitates.

Notandum tamen, quod, si imaginares modum, per quem quadratum volveretur super latus *ac* ab oriente versus occidentem ad modum hostii domus, et quod filum cum plumbo pendens a puncto *b* secundum rectitudinem linee *bd* remaneret semper super eadem linea in toto illo motu, possis accipere altitudinem et elongationes a cenith, ubicumque velles ante meridiem et post.

Serva tamen bene, quod cuspis *a* et etiam *h* sint erecte orthogonaliter super superficiem quadrati *abcd*, quia aliter esset error in hac ingenuitate. Huius quadrati figura est iam hic prescripta et formata.

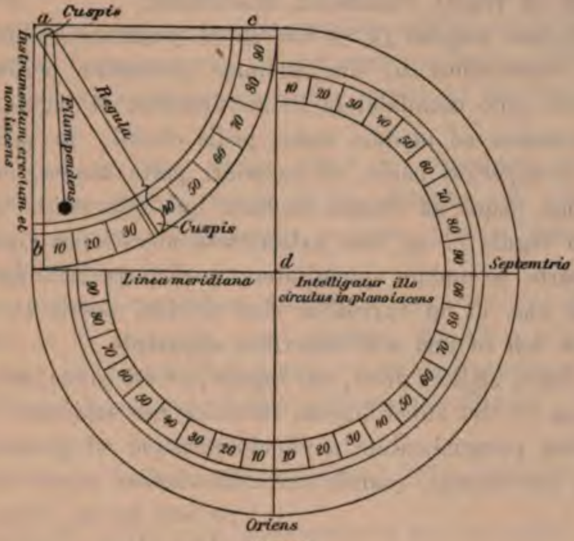


Fig. 59.

9. Instrumentum aliud ad capiendum altitudines et stellarum observationes faciendas ostendere.

Fac tres planas regulas de ligno vel ferro vel cupro fortes et rigidas, ut de levi torqueri non possint, quadrilatere superficiei, et in medio cuiuslibet lineam protrahas secundum eius longitudinem et in medio latitudinis.

Sint autem hec regule *fg*, *hm*, *fl*. Super regulam vero *fg* in linea *fg* notam *h* imprime, et lineam *fh* quinque cubitorum constituas vel plus, quoniam, quanto longior, tanto verior, et eius residuum, scilicet *gh*, cuivis lapidi vel columpne tanquam basi, quem hic representat *abcd*, ut numquam moveatur, infige.

In alia vero regula sint due pinnule equales et omnino similes ad modum duarum pinnularum astrolabii, ita ut due earum linee medie erecte sint super lineam mediam *fl*. In quarum dimidio duo foramina sibimet opposita et equaliter distantia a linea *fl* rectissime fiant, quarum alteram iuxta punctum *f*, alteram vero iuxta punctum *l* constituas.

Has autem duas regulas coadunabis cum quodam polo, sicut coadunatur circinus, ut regula *lf* superius et inferius moveatur, sicut movetur unus pes circini elongando se ab alio pede et eidem approximando. Deinde ex regula *hm* lineam *hk* equalem utrique duarum linearum *fh* et *fl* sume, quo facto lineam *hk* in 30 partes equales divide, et quamlibet partem in tot partes minores, quot poteris, eciam divide. Residuum autem [40r] linee *hkm*, scilicet *km*, in tot de illis partibus divide, quot volueris, ita tamen, quod proportionem medietatis corde arcus 45 gradus non excedat. Si quid autem ex regula remanserit, abscindatur.

Post hoc duas regulas *fg* et *hm* supra punctum *h* duobus rotundis et equalibus foraminibus ad similitudinem primarum perforabis, et eas cum polo simili polo astrolabii in unum firmabis, ut regula *hm* superius et inferius moveatur ad modum unius pedis circini. In medio vero latitudinis eius in superiori parte, ab exteriori parte tamen, excavabitur ad angulum rectum usque ad lineam mediam, que relinquitur intacta. Similiter eciam in regula *fl* in eius extremitate abscisionem quandam facias in interiori parte secundum quantitatem medietatis latitudinis et grossitudinis regule *hm*, ut in curvatura eius produci possit sic, ut linea *fl* media et linea *hm* in una sint superficie apparente.

Demum basis, scilicet *abcd*, cui regula *fgh* est infixa, tamdiu vertatur, quousque linea *bc* stet super lineam meridiei per septimam huius inventam. Plumbum perpendiculum a puncto *f* usque ad punctum *h* suspendatur, ut per hoc sciatur, quando perpendiculariter super orizontem linea *fg* erit erecta, facies vero basis *abcd* stans super lineam medii celi versus orientem ponatur. Similiter quoque pinnule regule *fl* affixe versus orientem constituantur.

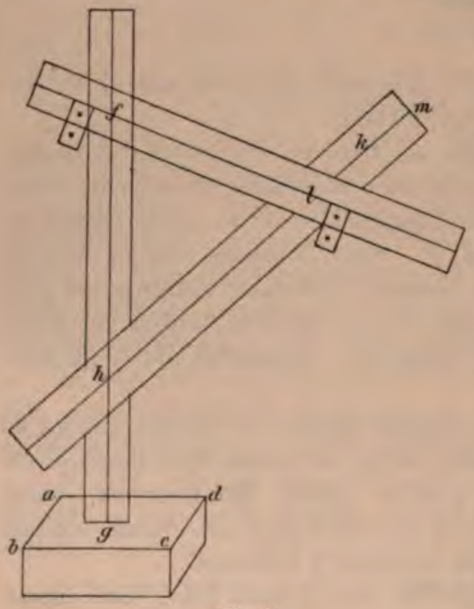


Fig. 60.

Cum igitur sol super meridiei lineam apparuerit, regulam, cui due pinnule affixe sunt, eleva tam inferius quam superius, donec superior regula totam inferiorem obumbret, solis quoque radius per foramen superioris regule transiens transeat eciam per foramen inferioris pinnule. Post hoc regulam *lm* superius et inferius tamdiu moveas, quousque linea *hm*, que in medio protrahitur, punctum *l*, qui in medio *fl* constituitur propter duas abscisiones, quas superius feceras, evidenter tangat, et quotum numerum tunc regule *hm* punctum *l* ostendit, adiscas a puncto *h* incipiendo numerare, et cum eo tabulas mediatarum cordarum ingrediens arcum, quantus fuerit arcus, duplicabis, quia ipsum erit longitudo solis a cenith capitum.

Eodem quoque modo operandum est in stellis, respiciendo eas per ambo foramina.

Notandum, quod observatio facta per has regulas verior est. Similiter quoque, si lineam fl duplicaveris, vel minorem portionem addideris, quousque pinnula primo posita prope punctum f usque ad punctum n perveniat, erit adhuc verius.

Item si regula fg super basim $abcd$ ita diligenter et artificialiter fuerit erecta, ut eam versus omnes partes orizontis, in quibus tunc sol vel stella fuerit, circumvertere possis, accipere poteris altitudinem solis et stellarum, ubicumque fuit.

Si autem arcum longitudinis stellarum aut solis vel etiam lune a cenith capitum de 90 minueris, quod remanet, est arcus altitudinis.

Modum vero verificandi stellas alias, domino concedente, ostendemus in libro, quod ad expositionem istius ordinare intendimus.

Es folgen die beiden Paragraphen:

10. Cuiuslibet arcus zodiaci a principio arietis vel libre incipientis declinationem invenire, und

11. Declinationem cuiuscumque arcus zodiaci a principio arietis inchoantis per tabulam ad hoc factam invenire.

12. Umbram rectam seu extensam per quamcumque altitudinem solis vel alterius notam invenire.

Sciendum, quod duplex est umbra, scilicet recta seu extensa, et versa seu stans.

Umbra recta[1]) est omnis umbra rei erecte super superficiem terre. Que quidem res erecta intelligitur dividi in 12 partes equales, cuiuscunque fuerit quantitatis. Que quidem partes vocantur puncta.

Umbra vero *versa*[2]) est umbra omnis rei equidistantis orizontis superficiei infixe in aliqua re erecta super faciem terre, que etiam intelligitur dividi in 12 partes, que vocantur puncta.

Cum igitur volueris scire umbram rectam altitudinis cuiuslibet proposite, ipsius altitudinis quere sinum rectum per primam huius quem serva. Deinde subtrahe altitudinem de 90, et residui similiter scias sinum rectum per primam huius, quem multiplica per 12, qui est numerus punctorum status rei erecte, et quod pervenerit, divide per sinum altitudinis proposite prius servatum, et provenient tibi puncta umbre recte similia punctis rei.[3])

1) Umbra recta = Cotangente.

2) Umbra versa = Tangente.

3) D. h. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Si vero aliquid remanserit post divisionem, multiplica illud per 60, et divide, quod proveniet, per idem quod prius, et erunt minuta puncti imperfecti. Et sic habebis puncta et minuta umbre recte altitudinis proposite.

Et intelligas, quod ista puncta sunt puncta rei, cuius est umbra, divise in 12 puncta, et minuta sunt 60^a pars unius puncti.

13. Umbre recte proposite altitudinem invenire.

Multiplica numerum punctorum umbre recte propositorum in semetipsum, et supra illud, quod provenerit adde 144, que sunt puncta rei in se multiplicata, et eius, quod provenit, scias radicem quadratum, quam serva. Deinde 12 puncta umbre multiplica per 60, qui est totus sinus rectus, et quod provenit, divide per radicem prius servatam, et proveniet tibi sinus rectus altitudinis. Cuius sinus scias arcum per secundam huius, qui erit arcus altitudinis quesitus.[1])

Vel aliter. Umbram propositam multiplica per 60, scilicet per totum sinum rectum, et quod proveniet, per radicem prius servatam divide. Et eius, quod proveniet, sinus scias arcum per secundam huius, qui erit longitudo solis vel alterius umbram facientis a cenith capitum in circulo altitudinum, quem de 90 minue, et remanebit altitudo quesita.

14. Umbram versam seu stantem per altitudinem notam solis vel alterius facientis umbram invenire.

Sinum altitudinis presentis per 12 puncta rei multipli[41r]ca, et quod provenerit, divide per sinum residui altitudinis, id est illius, quod deficit ad perficiendum 90, et provenient puncta umbre verse.[2])

Si vero post divisionem aliquid remanserit, multiplica illud per 60, et productum divide ut prius, et exibunt minuta puncti imperfecti.

Hic nota, quod multiplicatio punctorum umbre extense vel recte omnis altitudinis in puncta umbre verse illius eiusdem altitudinis erunt semper 144, scilicet illud, quod provenit ex multiplicatione 12 punctorum in se. Unde si diviseris 144 per numerum punctorum unius umbrarum, exibunt puncta alterius; et hoc diligenter nota.[3])

15. Umbre verse proposite altitudinem invenire.

Multiplica puncta umbre verse in semet ipsa et super illud, quod provenerit, adde 144, et tocius producti scias radicem quadratam, quam serva, quia est dyameter umbre. Deinde multiplica puncta umbre verse per 60, scilicet per totum sinum rectum, et collectum divide per radicem

---

1) D. h.: $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}\alpha^2}}$.

2) D. h.: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

3) D. h.: $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha = 1$.

servatam, et proveniet tibi sinus altitudinis umbre verse proposite. Cuius quere arcum, et proveniet altitudo quesita.[1])

16. Cuiuscumque arcus altitudinis proposite umbram rectam per tabulam ad hoc factam invenire.

Quere arcum altitudinis in lineis numeri, si precise possis invenire, et quod in eius directo inveneris de punctis et minutis, accipe, quia sunt puncta et minuta umbre recte propositi arcus.

Si vero precise non possis invenire, quod contingit, quando cum gradibus in illo arcu altitudinis contentis fuerint minuta, tunc accipe minorem propinquiorem et deinde maiorem, et operare penitus eodem modo, quo dictum est in undecima huius in accipiendo declinationem solis, et provenient tibi puncta et minuta umbre recte arcus propositi.

17. Umbre recte proposite arcum per tabulas invenire.

Quere umbram rectam propositam in tabula, et si eam precise poteris invenire, scias, quod gradus in directo ipsius inventi sunt gradus arcus proposite umbre recte.

Si vero precise non possis eam invenire, accipe minorem propinquiorem, et gradus linee numeri in directo existentis serva ad partem. Et tunc puncta et minuta in tabula inventa subtrahe a punctis et minutis umbre proposite et serva differentiam, quia est secundus numerus, quem secundum numerum multiplica per 60 minuta, que sunt tertius numerus, quia tabula augmentatur per unum gradum, et productum divide per differentiam, que est inter minorem umbram umbra proposita propinquiorem et maiorem ipsa propinquiorem etiam inventam in tabula, que differentia est primus numerus, et provenient tibi minuta, que minuta addenda sunt gradibus altitudinis prius servatis. Et sic habebis gradus et minuta proposite umbre correspondentia. Hanc operationem scies facere per secundam huius. Et nota diligenter hanc operationem, quia remittemus in sequentibus ad hanc operationem, ne multotiens oporteat idem repetere.

18. Cuiuslibet arcus altitudinis proposite umbram versam per tabulam invenire.

Minue altitudinem propositam de 90, et eius, quod remanserit, quere similiter in lineis numeri. Et si precise possis invenire, accipe umbre puncta sibi correspondentia, quia hoc querebas.

Si vero arcum precise non possis invenire, quia in isto arcu cum gradibus sunt minuta, fac, ut dictum est in duodecima huius.[2])

---

1) D. h.: $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha^2}}$.

2) Siehe oben Anmerkung S. 392.

19. Umbre verse proposite arcum invenire.

Quere similiter in tabulis, si precise potest inveniri, et accipe arcum in directo existentem in lineis numeri, secundum quod dictum est in 17ª huius.

Si vero precise non poteris invenire, tunc operare iterum; ut dictum est in 17ª presentis, dum querebas arcum umbre recte. Et quicumque arcus tibi provenerit, minue illum de 90 et proveniet tibi arcus, quem querebas.

Es folgen astronomische Anwendungen, und zwar mit folgenden Kapitelüberschriften:

20. Cuiuslibet arcus zodiaci a puncto arietis incipientis ascensionem in spera recta invenire.

21. Cuiuslibet arcus zodiaci ascensionem in spera per tabulam ad hoc factam invenire.

22. Gradus ascensionum propositos in orizonte recto ad gradus equales reducere.

23. Latitudinem regionis et capitis arietis altitudinem et etiam altitudinem poli per altitudinem solis et stellarum meridianam tam orientium quam semper apparentium in omni regioni invenire.

24. Altitudinem solis et stellarum meridianam per declinationem solis vel stellarum reperire.

25. Arcum diei minime et maxime in quovis climate per notam poli altitudinem cognoscere.

26. Cuiuslibet arcus zodiaci ab equinoctiali incipientis ascensionem in spera obliqua proposita invenire.

27. Cuiuscumque arcus zodiaci a principio arietis incipientis ascensionem in spera obliqua invenire.

28. Ascensiones cuiuscumque arcus zodiaci propositi in spera obliqua per tabulam ad hoc factam reperire.

29. Gradus ascensionum propositos in orizonte obliquo ad gradus equales reducere.

30. Arcus diei et eciam noctis quantitatem invenire.

31. Numerum graduum in una hora equali diei vel noctis per arcum diurnum invenire.

32. Numerum equalium horarum diei et etiam noctis invenire.

33. Horas equales ad inequales reducere et e converso.

34. Arcum diei transactum ab ortu solis usque ad horam presentem per altitudinem solis meridianam invenire, et per consequens horas tam equales quam inequales invenire.

35. Altitudinem solis, in quacumque hora diei volueris, invenire.

36. Horas ab ortu solis usque ad horam propositam noctis, seu arcu diurno transacto noto gradum ascendentem invenire.

37. Duodecim domos celi adequare.

38. Horas diei transactas per gradum ascendentem invenire.

39. Declinationem cuiuslibet stelle per gradum eius versum et latitudinem ab ecliptica patefacere.

40. Gradum ecliptice, cum quo stella celum mediat, invenire.

41. Arcum diei, cuiuscumque stelle volueris, invenire.

42. Arcum equinoctialem elevatum ab ortu solis usque ad presentem horam, et per consequens horas tam equales quam inequales, et gradum ascendentem, et equationes domorum per altitudinem solis invenire.

43. Gradum zodiaci, cum quo stella oritur, reperire. [46r]

44. Altitudinem, cuiuscumque stelle volueris, meridianam invenire.

Expliciunt Canones magistri Iohannis de Lineriis super tabulas primi mobilis; incipiunt Canones eiusdem super tabulas latitudinum planetarum et eciam eclipsium amborum luminarium, solis videlicet et lune.

Kapitel 1—8 fehlen.

9. Partem proportionalem alicuius numeri vel numerorum secundum proportionem alicuius alterius numeri seu aliquorum ad 60 accipere.

Ad multiplicem laborem multiplicationis et divisionis evitandum, qui multotiens tam in equationibus planetarum quam eclipsium evenire solet, composita est tabula proportionis, cuius usus est talis.

Quere numerum, cuius proportionem et partem proportionalem vis habere secundum proportionem alterius ad 60, in capitibus tabularum, et reliquum in sinistro latere tabule eiusdem, et quod inveneris in angulo communi, erit proportio quesita ea condicione, ut numerus in angulo communi versus dextram aut infra secundum operationem semitabule contentus erit istius proportionis, quam denominationes simul coniuncti constituunt et producunt, et numerus versus sinistram aut supra erit proxime maioris.

Si autem in alterutro fuerint diverse fractiones, cum qualibet divisim et cum reliquo intres, et quod inveneris, aggreges, quodlibet scilicet ad suum genus.

Si autem in utroque sunt diverse fractiones, cum qualibet unius et cum qualibet alterius seorsum intres, et fac ut prius.

Si vero alicuius numeri proportionem, id est partem proportionalem, volueris secundum proportionem alterius ad 30, modo, quo dictum est, operare, et quod inveneris, duples.

Si vero velles invenire partem proportionalem secundum semitabulam, quere maiorem numerum in latere dextro aut sinistro descendente, et minorem in latere inferiori, et operare, ut dictum est.

Die Kapitel 10—17 fehlen wieder. Dann folgen weiter die Paragraphen mit den Überschriften:

18. Utrum planeta sit stationarius, directus aut retogradus per tabulas cognoscere.

19. Declinationem cuiuslibet gradus zodiaci invenire.

20. Latitudinem Lune per tabulas invenire.

21. Latitudinem Saturni, Iovis et Martis invenire.

22. Latitudinem Veneris per tabulas invenire.

23. Latitudinem Mercurii per tabulas invenire.

24. Utrum stella erratica sit ascendens aut descendens in parte latitudinis, in qua est, cognoscere.

25. Tempus prime coniunctionis ianuarii anni, cuiuscumque volueris, aut ultime decembris anni proximi precedentis, et per eam primam coniunctionem ianuarii invenire, et medium motum solis et lune, et similiter medium argumentum lune, et argumentum latitudinis lune. Et eodem modo tempus medie oppositionis prime ianuarii aut ultime decembris, et per eam primam ianuarii, et medium motum solis, et nadir lune, et per consequens medium motum lune, et medium argumentum eius, et argumentum latitudinis eius, et utrum eclipsis sit possibilis, scilicet solis et lune, per tabulas ad hoc factas alio modo quam prius et faciliter invenire.

Kapitel 26—29 fehlen.

30. Medium motum solis et lune, et argumentum solis et lune, et argumentum latitudinis in tempore, cuiuscumque coniunctionis anni volueris, sequentis primam coniunctionem et oppositionem ianuarii invenire.

31. Verum locum solis et lune hora medie coniunctionis cuiuscumque vel oppositionis invenire.

32. Motum solis et lune equalem in una hora invenire.

33. Tempus vere coniunctionis solis et lune invenire.

34. Eclipsis solis et lune, in quocumque anno volueris, possibilitatem invenire.

35. Diversitatem aspectus lune in longitudine et latitudine per tabulam invenire.

36. Tempus eclipsis solis et eciam quantitatem et durationem per tabulas ad hoc factas invenire.

37. Dyametrum solis et dyametrum lune et similiter dyametrum umbre in loco transitus lune invenire.

38. Figuram eclipsis solis depingere. Sequitur figura eclipsis solis.

39. Tempus eclipsis lune et quantitatem et eciam duracionem per tabulas invenire.

40. Figuram eclipsis lune depingere. Figura eclipsis lune.

41. Utrum planete oriuntur in mane ante solem et occidunt post, an orientur post et occidunt ante cognoscere.

42. Utrum planeta sit apparens aut occultus sub radiis solis cognoscere.

43. Utrum planeta sit ascendens vel descendens in circulo deferentis et similiter epicycli cognoscere.

44. Buth solis et lune et cuiuscumque planete per tabulam ad hoc factam invenire, et similiter loca planetarum ad 3 dies, vel ad 7, verum et ad 10, et eciam coniunctionem duarum planetarum qui fuerint prope coniunctionem, invenire.

45. Loca stellarum fixarum in longitudine et latitudine partemque latitudinis et earum magnitudinem invenire.

46. Revolutionem cuiuslibet annorum nati vel cuiuslibet alterius rei habentis exordium notum, et eciam revolutionem annorum mundi invenire.

Expliciunt Canones tabularum magistri Iohannis de Lineriis scripti per manus Henrici Amici, finiti anno 1432 23. octobris. Deo gracias amen. [58']

Ad inveniendum cuiusque arcus sinum demonstracio.

Quia in huius operis inicio, antequam tractavimus de celestis circuli volubilitate, mentionem fecimus sinus, pretermittendo quasi notum, hic in fine huius operis danda est doctrina, cum ad ea, que premittuntur de circulantibus motibus, illius scientia valde sit necessaria. Unde videndum est, quod sit sinus.

Sinus est cuiuslibet porcionis circuli dimidium corde duplicis porcionis illius.

Erit igitur dimidium corde porcionis 180 graduum sinus portionis 90 graduum, qui est sinus perfectus. Nulla enim in circulo maior corda corda porcionis 180 graduum, qui est circuli dyameter.

Et sinus 30 gradum est dimidium corde 30 graduum; atque sinus 45 graduum est dimidium corde 90 graduum, et sic in omnibus circuli porcionibus.

Inventa itaque quantitate dyametri circuli habebitur leviter quantitas cuiuslibet circuli porcionis.

Quantitas autem dyametri circuli sic poteris invenire. Divide circulum, qui est 360 graduum, per 3 et septimam unius, et invenies probabiliter dyametri quantitatem[1]); vel, si volueris, multiplica circulum in semet ipsum, et quod exierit, divide per 10, et numeri ex divisione provenientis quere radicem, que erit circuli dyameter[2]); vel aliter, multiplica circulum in 20000 et divide, quod colligitur, per 62832[3]), et quod tibi proveniet ex hac divisione, erit dyameter.

Invento autem dyametro circuli, qui est corda porcionis 180 graduum, que duplex est ad porcionem 90 graduum, medietas erit sinus 90 graduum. Similiter invenies ceterarum porcionum sinus. Licet eciam tibi ponere dyametri partes secundum quamlibet numeri quantitatem, et ex ea facere, si vis, denominacionem. Nam etsi sinus et porcionis nulla sit proporcio, est tamen relatio inter eos, quia et sinus porcionis est sinus, et porcio dicitur sinus porcio.

Verbi gracia ponamus dyametrum circuli quantitatem 300 minutorum, erit ergo sinus totus 150 minutorum. Manifestum est autem, quod corda cuiusque sexta porcionis circuli fit equalis medietati dyametri eius, cuius rei demonstracionis causa patet, cum inferius ponitur figura, cuius talis est disposicio.

Descripcio figure.

Proposite autem figure hec est demonstracio. Sit enim circulus *abcd*, qui quadretur duabus lineis se supra centrum intersecantibus, unam videlicet *ac*, alteram *db*. Sit eciam circulus *vzh* supra centrum *b*, cuius circumferentia contingat *ac* lineam supra centrum *e*. Describatur iterum

1) $\pi = 3\frac{1}{7}$.

2) $\pi = \sqrt{10}$.

3) $\pi = \frac{62832}{20000} = 3,1426$.

circulus *tki* supra centrum *d*, cuius circumferentia contingat eciam lineam *ac* supra punctum *e*. Apparet eciam, quod circulus *abcd* intersecat circulum *vzh* supra punctum *l* et supra punctum *m*, et quod porcio *lbm* circuli *abcd* est equalis porcioni *mcb* circuli *vzh*. Demonstratur eciam, quod portio *lb* sit equalis porcioni, que est *le*, et porcio *bm* sit equalis porcioni *me*. Constat igitur lineam *eb*, que est dyametri circuli dimidium, esse equalem ei, que est *el*, et lineam *lb* equalem esse linee *bm*, et quod linee *me* et *el* et *lb* et *bm* quatuor sunt corde quatuor por[58v]cionum circuli equalium, quia sibi sunt equales. Patet eciam, quod linea *lm* abscindit lineam *be* media supra punctum *n*; linea igitur *nb* est quarta dyametri circuli, et similiter linea *ne*. Dividit quoque linea *ti* lineam *de* in equas partes supra punctum *g*, quarum unaqueque linea, scilicet *dg* et *ge*, est equalis linee *en*, et linea *ng* est equalis medietati dyametri circuli et est equalis linee *mb* et linee *be*. Erit ergo porcio *mb* et porcio *lt* equalis porcioni *mi*, quia earum corde inter se sunt equales, et porcio *id* equalis porcioni *dt*.

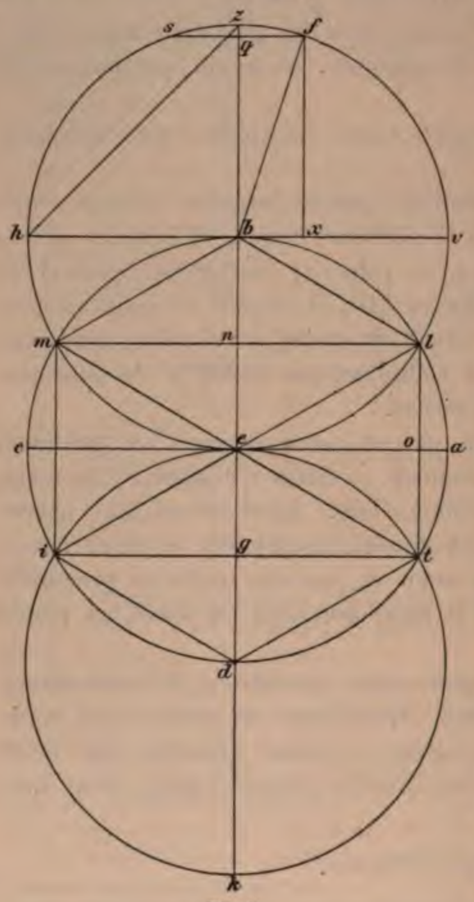


Fig. 61.

Manifestum est igitur circulum in sex equales porciones divisum esse, et cuiuslibet illius porcionis cordam esse equalem medietati dyametri circuli. Et hec est figure certa descriptio.

Cum autem sit propositum, dyametrum esse 300 minutorum, erit corda porcionis 60 graduum, que est sexta pars circuli, 150 minutorum, et sinus 30 graduum 75, qui est dimidium linee *mi*, et sinus 60 graduum est linea *mn*, que est medietas linee *ml*, que est corda portionis 120 graduum.

Linea vero *zh* est corda 90 graduum, que est pars quarta circuli, et illa corda est radix 45000, cuius medietas est sinus 45 graduum, que est radix 11250. Apparet autem, quod porcio *al* sit dimidium sexte partis circulantibus motibus, illius scientia valde sit necessaria. Unde videndum est, quod sit sinus.

Sinus est cuiuslibet porcionis circuli dimidium corde duplicis porcionis illius.

Erit igitur dimidium corde porcionis 180 graduum sinus portionis 90 graduum, qui est sinus perfectus. Nulla enim in circulo maior corda corda porcionis 180 graduum, qui est circuli dyameter.

Et sinus 30 gradum est dimidium corde 30 graduum; atque sinus 45 graduum est dimidium corde 90 graduum, et sic in omnibus circuli porcionibus.

Inventa itaque quantitate dyametri circuli habebitur leviter quantitas cuiuslibet circuli porcionis.

Quantitas autem dyametri circuli sic poteris invenire. Divide circulum, qui est 360 graduum, per 3 et septimam unius, et invenies probabiliter dyametri quantitatem[1]); vel, si volueris, multiplica circulum in semet ipsum, et quod exierit, divide per 10, et numeri ex divisione provenientis quere radicem, que erit circuli dyameter[2]); vel aliter, multiplica circulum in 20000 et divide, quod colligitur, per 62832[3]), et quod tibi proveniet ex hac divisione, erit dyameter.

Invento autem dyametro circuli, qui est corda porcionis 180 graduum, que duplex est ad porcionem 90 graduum, medietas erit sinus 90 graduum. Similiter invenies ceterarum porcionum sinus. Licet eciam tibi ponere dyametri partes secundum quamlibet numeri quantitatem, et ex ea facere, si vis, denominacionem. Nam etsi sinus et porcionis nulla sit proporcio, est tamen relatio inter eos, quia et sinus porcionis est sinus, et porcio dicitur sinus porcio.

Verbi gracia ponamus dyametrum circuli quantitatem 300 minutorum, erit ergo sinus totus 150 minutorum. Manifestum est autem, quod corda cuiusque sexta porcionis circuli fit equalis medietati dyametri eius, cuius rei demonstracionis causa patet, cum inferius ponitur figura, cuius talis est disposicio.

Descripcio figure.

Proposite autem figure hec est demonstracio. Sit enim circulus *abcd*, qui quadretur duabus lineis se supra centrum intersecantibus, unam videlicet *ac*, alteram *db*. Sit eciam circulus *vzh* supra centrum *b*, cuius circumferentia contingat *ac* lineam supra centrum *e*. Describatur iterum

---

1) $\pi = 3\frac{1}{7}$.

2) $\pi = \sqrt{10}$.

3) $\pi = \frac{62832}{20000} = 3,1426$.

Inventio sinus secundum minores circuli porciones.

Si autem volueris invenire sinus secundum minores circuli portiones, sinum huius kardage sexte in sinum 30 graduum multiplica, et collecte inde summe quere radicem, que erit sinus 7 graduum et dimidii; et eandem summam minue de sinu toto multiplicato in semet ipsum, et remanentis numeri radix erit sinus 82 graduum et dimidii. Postea minue sinum 82 graduum et dimidii de sinu toto et residuum multiplica in sinum 30, et exinde surgentis numeri radix erit sinus trium graduum et 45 minutorum. [59v] Illum autem surgentem numerum minue de 22500, et residui numeri radix erit sinus 86 graduum et quarte. Deinde minue sinum 45 graduum de sinu toto, et residuum multiplica in sinum 30, et collecte tibi summe radix erit sinus 22 graduum et dimidii; et diminue ipsam summam de sinu toto multiplicato in semet ipso, et remanentis numeri radix erit sinus 67 graduum et dimidii. Minue itaque eum de sinu toto et remanentem numerum multiplica in sinum 30 et excrescentis inde numeri radix erit sinus 11 graduum et quarte unius, et numerum summe tocius subtrahe a sinu toto in se multiplicato, et remanentis numeri radix erit sinus 78 graduum et trium quartarum. Minues eciam sinum 15 de sinu toto et multiplica residuum in sinum 30, et provenientis inde numeri radix erit sinus 37 graduum et dimidii, et eiusdem numeri summa diminuta de sinu toto in se ducto residui radix erit sinus 52 graduum et dimidii. Eodem modo fit in universis circuli partibus usque ad minutissimas eius porciones.

Inventio kardagarum declinationum ad plures gradus.

Et si kardagas declinationis volueris invenire ad singulas gradus vel ad maiores vel ad minores circuli porciones usque ad 90 graduum, habebitur noticia et reliquarum circuli quantitatum, cum earum omnium una sit declinacio. Sinum declinacionis tocius quere, quem multiplicabis in sinum unius gradus vel plurium, si tibi placuerit, et summam inde provenientem divide per 150. Deinde sinus ex ipsa divisione provenientis invenias circuli porcionem, que porcio erit declinacio unius gradus vel plurium si feceris ad plures, et ita eciam facies cum universis gradibus usque ad perfectionem 90 graduum.

Aliud capitulum de sinibus et declinacione.

Cum cuiuslibet gradus scire volueris sinum vel declinacionem, gradus omnes, qui sunt ab ariete in ipsum gradum cum eodem computa, et habebis argumentum, per quod id, quod queris, invenies, quia, si fuerit minus tribus signis, operabis cum eo; si vero a tribus in sex, minues illud de sex et cum residuis operabis; si autem a sex in novem, de eodem sex minue et reliquum serva, et si fuerit a novem usque in duodecim illud de 12 subtrahe et cum residuo operaberis.[1]) Operaberis autem ita.

Accipies scilicet pro unoquoque argumenti signo numerum minutorum duarum kardagarum et pro 15 gradibus numerum minutorum sequentis kardage. (Kardaga enim est porcio circuli ex 15 gradibus constans.) Quod autem remanserit infra kardagam, reduc in minuta multiplicando per 60, et postea multiplica ea in minuta imperfecte kardage, et, que inde provenit, summam per 900 divide, et que inde eveniunt minuta, universitati prius collecte minutorum kardagarum perfectarum adde, et quod [60r] remanserit dividendum, partire per 15, et exibunt tibi secunda, que sub universitate minutorum scribes, et habebis sinum rectum gradus, quem queris, vel declinationem equalem.

Sciendum vero est, quod, cum volueris sinum, facies cum kardagis sinus, et cum volueris declinacionem, facies cum kardagis declinacionum. Inventa autem declinacione habebis minuta, que si reducas ad gradus, divide ipsa per 60, et exibunt tibi gradus, et quod remanserit, erunt minuta.

Et si volueris scire, utrum sit sinus vel declinacio septemtrionalis vel meridiana, considera argumentum. Quod si fuerit ex sex signis tantum vel infra, erit septemtrionalis, si vero a sex in 12 erit meridiana.

Si autem sinum volueris versum vel declinacionem, operaberis, ut dictum est, sed a novissima kardagarum incipias redeundo ad primam.

Sciendum est eciam, quod, cum quesieris sinum versum, et finitur argumentum a 3 signis in 6, accipias de tribus signis sinum totum, residui sinum equalem (id est rectum), qui duo simul iuncti faciunt eiusdem argumenti sinum versum; et non invenies in sinu verso plus sex signis, et in equali plus tribus.

De porcione circuli cuiuslibet sinus.

Cum vero sinus equalis volueris scire porcionem eius circuli equalem, pro minutis prime kardage de minutis ipsius sinus diminutis 15 gradus sume, et pro minutis secunde kardage de residuo desumptis alios 15, et ita facies per omnes kardagas; et si remanserint minuta non perficienda kardagam, ea in 15 vel 900 extende, et quod collectum tibi fuerit divide per minuta imperfecte kardage, et qui exiverint gradus adde illis, quos prius colligeras, et quod iterum dividendum remanserit multiplicans per 60 divide, ut prius divisisti, et habebis minuta; et quod tibi collectum fuerit ex gradibus et minutis, erit porcio circuli ipsius sinus.

Et si volueris porcionem versam, numera kardagas a fine earum, et fac ut prius determinatum est.

1) Hier wird gelehrt, wie die Sinus von Winkeln größer als 180° gefunden werden können. Vergl. oben Anm. S. 391.

Sequitur de eodem per tabulas.

Cum autem volueris hoc idem per tabulas invenire, argumenti simile in lineis numeri ad tabulas sinus et declinacionis quere, et quod in eius directo inveneris de sinu vel declinacione ex gradibus minutis atque secundis, sume, et hoc erit ipsius argumenti sinus vel declinacio.

Si autem cum argumento fuerint minuta iterum cum eodem argumento gradu uno addito easdem tabulas intra et equationem sinus vel declinationis suscipias, et huius secunde et prime differenciam considera, quam multiplicas per minuta argumenti, et summam inde provenientem dividens per 60 habebis minuta, et que remanserint, erunt secunda. Que minuta scilicet et secunda sunt addenda prime equacioni, si fuerint minor secunde equacioni, vel minuenda, si fuerint maior, et quod exierit, erit sinus vel declinacio gradus et minuti quesiti.

De sinu verso cuiuslibet porcionis.

Si vero sinum eius volueris versum, et fuerint gradus argumenti pauciores 90, eos minue de 90, et quod remanserit, simile in lineis numeri quere et sinum suum vel declinacionem suscipe cum restitucione [60v] minutorum, si fuerint cum eodem minuta; et eundem sinum de 150 minutis minue qui est totus sinus rectus, quod vero remanserit erit sinus versus, quem queris. Similiter facies ad declinacionem.

Si autem fuerint plures 90, pro 90 sumes totum sinum, et remanentium queres sinum equalem, quem addens sinui toti ipsius, quem queris, sinus versi habebis summam.

De invencione porcionis circuli cuiuscumque sinus.

Cum autem cuiuslibet sinus volueris scire circuli porcionem, eum scilicet vel minorem, propinquiorem tamen, in tabula sinus quere, si feceris ad sinus, vel declinationis, si feceris ad eam, et quod in directo eius fuerit in lineis numeri sume, que erit portio ipsius circuli sinus. Tunc eundem sinum minorem ibi inventum de maiori minue, et residuum per 60 multiplica, et quod provenerit, per id, quod est inter lineam, cum qua intrasti, et secundam uno gradu maiorem divide, et que exierint minuta porcioni circuli in lineis numeri invente adde, et quod collectum fuerit, erit porcio circuli ipsius sinus perfecta.

Si autem porcionem circuli sinus versi volueris, eum de toto sinu subtrahe, et remanentis quere porcionem, quam minues de 90 gradibus, et quod remanserit, erit porcio circuli illius sinus versi.

Si vero sinus fuerit plus 150, ex eo sinum totum minue, scilicet 150, cuius porcio est 90 graduum, et residui quere porcionem equalem, ut ostensum est, quam adde supra 90, et habebis ipsius sinus porcionem versam.

·um sinus	Tabula kardagarum declinationis			
Minuta universitatis — rectus	Numerus kardagarum	Minuta universitatis	Minuta declinationis	Minuta universitatis — Declin. recta
	1	1440	362	0
	2	1074	341	703
	3	737	299	1002
	'	438	236	1238
		202	150	1388
		Declina-	52	1440 [61r]
		tionis		
		rse		

signorum, nec non ·ngister Johannes de M° ccc° 22°[1])

				·ntati per dimi- ·um gradum				Corde mediate		
				Gr.	M^a	Gr.	M^a	Gr.	M^a	2^a
			25	75	30	104	30	58	5	20
		2	50	76	0	104	0	58	13	4
		34	14	76	30	103	30	58	20	32
	2	5	37	77	0	103	0	58	27	44
	2	37	2	77	30	102	30	58	34	40
0	3	8	25	78	0	102	0	58	41	21
30	3	39	45	78	30	101	30	58	47	44
0	4	11	7	79	0	101	0	58	53	51
30	4	42	28	79	30	100	30	58	59	53
0	5	13	46	80	0	100	0	59	9	18
30	5	45	2	80	30	99	30	59	10	38
0	6	16	20	81	0	99	0	59	15	40
30	6	47	32	81	30	98	30	59	20	27
0	7	18	44	82	0	98	0	59	24	50
30	7	49	53	82	30	97	30	59	29	12
0	8	21	1	83	0	97	0	59	33	13
30	8	52	7	83	30	96	30	59	36	51
0	9	23	10	84	0	96	0	59	40	16
30	9	54	10	84	30	95	30	59	43	25
0	10	25	8	85	0	95	0	59	46	18
30	10	56	3	85	30	94	30	59	48	54
0	11	26	54	86	0	94	0	59	51	14
30	11	57	43	86	30	93	30	59	53	17
0	12	28	29	87	0	93	0	59	55	4
30	12	59	11	87	30	92	30	59	56	35
0	13	29	49	88	0	92	0	59	57	49
30	14	0	24	88	30	91	30	59	58	49
0	14	30	55	89	0	91	0	59	59	37
30	15	1	22	89	30	90	30	59	59	52
0	15	31	45	90	0	90	0	60	0	0

: ist also Johannes de Lineriis ein Picarde aus der Diöcese Amiens.
e nur die erste und letzte Spalte zum Abdruck.

Sequitur de eodem per tabulas.

Cum autem volueris hoc idem per tabulas invenire, argumenti simile in lineis numeri ad tabulas sinus et declinacionis quere, et quod in eius directo inveneris de sinu vel declinacione ex gradibus minutis atque secundis, sume, et hoc erit ipsius argumenti sinus vel declinacio.

Si autem cum argumento fuerint minuta iterum cum eodem argumento gradu uno addito easdem tabulas intra et equationem sinus vel declinationis suscipias, et huius secunde et prime differenciam considera, quam multiplicas per minuta argumenti, et summam inde provenientem dividens per 60 habebis minuta, et que remanserint, erunt secunda. Que minuta scilicet et secunda sunt addenda prime equacioni, si fuerint minor secunde equacioni, vel minuenda, si fuerint maior, et quod exierit, erit sinus vel declinacio gradus et minuti quesiti.

De sinu verso cuiuslibet porcionis.

Si vero sinum eius volueris versum, et fuerint gradus argumenti pauciores 90, eos minue de 90, et quod remanserit, simile in lineis numeri quere et sinum suum vel declinacionem suscipe cum restitucione [60v] minutorum, si fuerint cum eodem minuta; et eundem sinum de 150 minutis minue qui est totus sinus rectus, quod vero remanserit erit sinus versus, quem queris. Similiter facies ad declinacionem.

Si autem fuerint plures 90, pro 90 sumes totum sinum, et remanentium queres sinum equalem, quem addens sinui toti ipsius, quem queris, sinus versi habebis summam.

De invencione porcionis circuli cuiuscumque sinus.

Cum autem cuiuslibet sinus volueris scire circuli porcionem, eum scilicet vel minorem, propinquiorem tamen, in tabula sinus quere, si feceris ad sinus, vel declinationis, si feceris ad eam, et quod in directo eius fuerit in lineis numeri sume, que erit portio ipsius circuli sinus. Tunc eundem sinum minorem ibi inventum de maiori minue, et residuum per 60 multiplica, et quod provenerit, per id, quod est inter lineam, cum qua intrasti, et secundam uno gradu maiorem divide, et que exierint minuta porcioni circuli in lineis numeri invente adde, et quod collectum fuerit, erit porcio circuli ipsius sinus perfecta.

Si autem porcionem circuli sinus versi volueris, eum de toto sinu subtrahe, et remanentis quere porcionem, quam minues de 90 gradibus, et quod remanserit, erit porcio circuli illius sinus versi.

Si vero sinus fuerit plus 150, ex eo sinum totum minue, scilicet 150, cuius porcio est 90 graduum, et residui quere porcionem equalem, ut ostensum est, quam adde supra 90, et habebis ipsius sinus porcionem versam.

Tabula kardagarum sinus				Tabula kardagarum declinationis			
Numerus kardagarum	Minuta universitatis	Minuta sinus	Minuta universitatis — Sinus rectus	Numerus kardagarum	Minuta universitatis	Minuta declinationis	Minuta universitatis — Declin. recta
1	150	39	0	1	1440	362	0
2	111	36	75	2	1074	341	703
3	75	31	106	3	737	299	1002
4	44	24	130	4	438	236	1238
5	20	15	145	5	202	150	1388
6	sinus versus	5	150	6	Declinationis verse	52	1440 [61r]

Incipiunt tabule sinuum et cordarum, ascensionum signorum, nec non eclipsium et aliorum quamplurium, quas composuit magister Johannes de Lineriis, Picardus, dyocesis Ambianensis anno domini M° ccc° 22°[1]) Sequitur Tabula Sinus.[2])

Arcus augmentati per dimidium gradum				Corde mediate			Arcus augmentati per dimidium gradum				Corde mediate		
Gr.	M^a	Gr.	M^a	Gr.	M^a	2^a	Gr.	M^a	Gr.	M^a	Gr.	M^a	2^a
0	30	179	30	0	31	25	75	30	104	30	58	5	20
1	0	179	0	1	2	50	76	0	104	0	58	13	4
1	30	178	30	1	34	14	76	30	103	30	58	20	32
2	0	178	0	2	5	37	77	0	103	0	58	27	44
2	30	177	30	2	37	2	77	30	102	30	58	34	40
3	0	177	0	3	8	25	78	0	102	0	58	41	21
3	30	176	30	3	39	45	78	30	101	30	58	47	44
4	0	176	0	4	11	7	79	0	101	0	58	53	51
4	30	175	30	4	42	28	79	30	100	30	58	59	53
5	0	175	0	5	13	46	80	0	100	0	59	9	18
5	30	174	30	5	45	2	80	30	99	30	59	10	38
6	0	174	0	6	16	20	81	0	99	0	59	15	40
6	30	173	30	6	47	32	81	30	98	30	59	20	27
7	0	173	0	7	18	44	82	0	98	0	59	24	50
7	30	172	30	7	49	53	82	30	97	30	59	29	12
8	0	172	0	8	21	1	83	0	97	0	59	33	13
8	30	171	30	8	52	7	83	30	96	30	59	36	51
9	0	171	0	9	23	10	84	0	96	0	59	40	16
9	30	170	30	9	54	10	84	30	95	30	59	43	25
10	0	170	0	10	25	8	85	0	95	0	59	46	18
10	30	169	30	10	56	3	85	30	94	30	59	48	54
11	0	169	0	11	26	54	86	0	94	0	59	51	14
11	30	168	30	11	57	43	86	30	93	30	59	53	17
12	0	168	0	12	28	29	87	0	93	0	59	55	4
12	30	167	30	12	59	11	87	30	92	30	59	56	35
13	0	167	0	13	29	49	88	0	92	0	59	57	49
13	30	166	30	14	0	24	88	30	91	30	59	58	49
14	0	166	0	14	30	55	89	0	91	0	59	59	37
14	30	165	30	15	1	22	89	30	90	30	59	59	52
15	0	165	0	15	31	45	90	0	90	0	60	0	0

1) Auch hier ist also Johannes de Lineriis ein Picarde aus der Diöcese Amiens.
2) Ich bringe nur die erste und letzte Spalte zum Abdruck.

Sequitur de eodem per tabulas.

Cum autem volueris hoc idem per tabulas invenire, argumenti simile in lineis numeri ad tabulas sinus et declinacionis quere, et quod in eius directo inveneris de sinu vel declinacione ex gradibus minutis atque secundis, sume, et hoc erit ipsius argumenti sinus vel declinacio.

Si autem cum argumento fuerint minuta iterum cum eodem argumento gradu uno addito easdem tabulas intra et equationem sinus vel declinationis suscipias, et huius secunde et prime differenciam considera, quam multiplicas per minuta argumenti, et summam inde provenientem dividens per 60 habebis minuta, et que remanserint, erunt secunda. Que minuta scilicet et secunda sunt addenda prime equacioni, si fuerint minor secunde equacioni, vel minuenda, si fuerint maior, et quod exierit, erit sinus vel declinacio gradus et minuti quesiti.

De sinu verso cuiuslibet porcionis.

Si vero sinum eius volueris versum, et fuerint gradus argumenti pauciores 90, eos minue de 90, et quod remanserit, simile in lineis numeri quere et sinum suum vel declinacionem suscipe cum restitucione [60ᵛ] minutorum, si fuerint cum eodem minuta; et eundem sinum de 150 minutis minue qui est totus sinus rectus, quod vero remanserit erit sinus versus, quem queris. Similiter facies ad declinacionem.

Si autem fuerint plures 90, pro 90 sumes totum sinum, et remanentium queres sinum equalem, quem addens sinui toti ipsius, quem queris, sinus versi habebis summam.

De invencione porcionis circuli cuiuscumque sinus.

Cum autem cuiuslibet sinus volueris scire circuli porcionem, eum scilicet vel minorem, propinquiorem tamen, in tabula sinus quere, si feceris ad sinus, vel declinationis, si feceris ad eam, et quod in directo eius fuerit in lineis numeri sume, que erit portio ipsius circuli sinus. Tunc eundem sinum minorem ibi inventum de maiori minue, et residuum per 60 multiplica, et quod provenerit, per id, quod est inter lineam, cum qua intrasti, et secundam uno gradu maiorem divide, et que exierint minuta porcioni circuli in lineis numeri invente adde, et quod collectum fuerit, erit porcio circuli ipsius sinus perfecta.

Si autem porcionem circuli sinus versi volueris, eum de toto sinu subtrahe, et remanentis quere porcionem, quam minues de 90 gradibus, et quod remanserit, erit porcio circuli illius sinus versi.

Si vero sinus fuerit plus 150, ex eo sinum totum minue, scilicet 150, cuius porcio est 90 graduum, et residui quere porcionem equalem, ut ostensum est, quam adde supra 90, et habebis ipsius sinus porcionem versam.

Unde proprie loquendo primo debet littera nominari, que est supra dyametrum, dicendo sic: *da*, *ge*, *ih*, *tx*, *vs*, *ml*. Et nota, quod ibi sunt sinus collecti kardagarum 1, 2, 3, 4, 5, 6: secundus cum primo, tercius cum primo et secundo, quartus cum primo, secundo et tercio, et sic consequenter. Unde, si a secundo sinu primum subtraxeris, remanet secundus per se, et est ille secundus per se *er*; et si subtraxeris secundum a tercio, tunc remanet tercius per se, et est tercius per se *hy*, et cetera.

mc semidyameter sinus rectus 150, et latus exagoni equale semidyametro, cuius medium *eg*, nota 75 minutorum, et est sinus 30 graduum, scilicet duarum kardagarum: *eg*, ηm, $l\eta$ equales note 75 minutorum, scilicet medietates dyametri. $e\eta$, *mg* equales, que sic note sunt: quadratum *eg* a quadrato *em* deme, residui radix est $e\eta$ vel *gm*, scilicet sinus 60 graduum vel kardagarum quatuor, 129 m^a^. 54. 2^a^. 14. 3^a^. Deme $e\eta$ vel *gm*, que sunt note, a sinu toto, scilicet ab *mc*, que est 150, remanet *gc* nota, et est 20 m^a^ 5. 2^a^ et 46. 3^a^; cuius quadratum iunge cum quadrato *eg*, que nota est prius, et producti radix est *ec*, corda 30 graduum, cuius medietas *eo* erit nota, et est sinus 15 graduum, id est prime kardage, scilicet 38 m^a^ 49. 2^a^ et 22. 3^a^, cui equalis est *ad*. Dico quod *ec* et *ab* sunt equales, quia sunt corde 30 graduum, ergo eorum media sunt equalia, scilicet *eo* et *ad*, ergo *ad* sic fit sinus prime kardage, et est 44 minuta 52. 2^a^ et 19. 3^a^. Item quadratum *mc*, id est sinus totius, dupla, a quo extrahe radicem, nota *lc* et *hk* equales kardage, cum sunt corde 90 graduum, ergo et earum media sunt equalia, scilicet *lq* et *hi*, que sunt sinus 45 graduum vel trium kardagarum. Sinus ergo omnium kardagarum noti sunt, et fundantur omnes hec demonstraciones super 46^am^ libri primi EUCLIDIS, que est: *In omni triangulo rectangulo* etc.[1])

ap, *md* prius sunt note, ergo *md* deme de toto sinu *mc*, et remanet *dc* nota, et est 5 m^a^ 6. 2^a^ et 41. 3^a^, cuius quadratum iunge cum quadrato *ad*, prius nota: radix producti est *ac*, corda scilicet 15 graduum, cuius medium est sinus 7 graduum et 30 minutorum, qui est 19 m^a^ 34. 2^a^ 44. 3^a^. Cuius sinus quadratum deme a quadrato tocius sinus, scilicet semidyametri, et radicem residui deme a toto sinu, et quod remanet, nota bene, et illius quadratum iunge cum quadrato sinus 7 gr. et 30 m^a^: radix vero producti est corda 7 graduum et 30 minutorum, cuius est *mi* nota. Deme *mi* ab *mc*, que est semidyameter, et remanet *ic*, cuius quadratum iunge cum quadrato *hi*; radix erit *hc*, corda 45 graduum, cuius ⟨medietas est sinus medietatis 45 graduum, scilicet 22 graduum et 30 minutorum, cuius⟩ sinus huius quadratum deme a totius sinus quadrato et residui deme radicem a toto sinu, et quod remanet nota bene, et illius quadratum iunge

1) Es ist der Lehrsatz des PYTHAGORAS.

cum quadrato sinus 22 graduum et 30 minutorum, et radix producti erit corda 22 graduum et 30 minutorum, cuius medium est sinus 11 graduum et 15 minutorum. [84r] Item *sv* est nota sinus 75 graduum, id est 5 kardagarum, ergo quadratum *sv* deme a quadrato *ms*, scilicet totius sinus. Radix residui est *mv*, qua dempta ab *mc* remanet *vc*, cuius quadratum iunge cum quadrato *sv*; radix quoque erit *sc*, corda 75 graduum, cuius medietas est sinus 37 graduum et 30 minutorum, cuius sinus huius quadratum deme a quadrato totius sinus, et residui radicem deme a toto sinu, et quod remanet nota bene. Et illius quadratum iunge cum quadrato sinus 37 graduum et 30 minutorum. Radix vero predicti erit corda 37 graduum et 30 minutorum, cuius medietas est sinus 18 graduum et 45 minutorum, etc., cuius medium etc. Hoc est dictum quia eodem modo, quo invenitur per sinum 75 graduum eius corda, cuius medium est sinus medietatis 75 graduum, ita per sinum medietatis 75 graduum, scilicet 37 graduum et 30 minutorum, invenitur corda medietatis 75 graduum, scilicet 37 graduum 30 minutorum, cuius medietas est sinus medietatis medietatis 75 graduum, id est medium 37 graduum et 30 minutorum, scilicet 18 graduum et 45 minutorum. Ita adhuc per sinum 18 graduum et 45 minutorum, qui modo notus est, invenitur eius corda, cuius medietas erit sinus medietatis 18 graduum et 45 minutorum, scilicet 9 graduum 22 minutorum 30 secundorum, et sic usque ad indivisibilia.

Si vero tabulas sinus habueris super semidyametrum divisum in 150 partes, et eam volueris convertere ad sinus super semidyametrum divisum in 60 partes, sic age. Pone 150 numerum primum, pone aliquem sinum convertendum secundum, et 60 pone tertium, illum quem quaeris sinum quartum ignotum; duc secundum in tertium, et dividere debes productum per primum, et exibit quartum. Sicut iste sinus 129 minuta 45 secunda 14 tertia, cuius semidyameter circuli sui est 150 minutorum, et eius sinus portio est 60 graduum, scilicet 4 kardagarum, sit convertendus in sinum, cuius circuli semidyameter est 60 graduum, pone 150 primum deinde 129. 45. 14 pone secundum, et 60 pone tertium: tunc operare per regulam quatuor proportionalium, exit 52. 57. 42, quod est propositum.

Explicit declaratio figure prescripte.

Über die Lösung einiger Aufgaben im „Tractatus de numeris datis" des Jordanus Nemorarius.

Von

G. Wertheim in Frankfurt a. M.

Bekanntlich hat JORDANUS NEMORARIUS in seinem *Tractatus de numeris datis* von dem einfachen falschen Ansatz vielfach Gebrauch gemacht. Eine einfache Aufgabe, in der das geschieht, wird von CANTOR auf Seite 70 des II. Bandes seiner *Vorlesungen* besprochen. Bei zwei anderen Aufgaben (Nr. 56 u. 57 in der Ausgabe von P. TREUTLEIN[1]), Nr. 27 u. 28 des 2. Buches in der von M. CURTZE[2]) sagt CANTOR, sei die Anwendung des falschen Ansatzes viel verwickelter. Das ist sie aber nur, wenn man sich, wie CANTOR es anscheinend thut, an die Lösungen hält, welche CURTZE aus dem etwas unklaren Text mit einer gewissen Willkür herausgelesen hat.

JORDANUS erklärt ausdrücklich, wie CANTOR auch hervorhebt, er bediene sich bei der Lösung einer arabischen Methode. In der That findet sich die erste der beiden Aufgaben (die zweite ist im wesentlichen dieselbe) in der Algebra des ALKARKHÎ[3]), und dieser hat sie dem DIOPHANT[4]) entnommen. ALKARKHÎ schlägt bei der Lösung auch denselben Weg wie DIOPHANT ein, und ihnen ist offenbar JORDANUS gefolgt.

Es sollen vier Zahlen I, II, III, IV gefunden werden, welche den Bedingungen

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{I} + \frac{\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}}{2} &= 37 \\ \mathrm{II} + \frac{\mathrm{I}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}}{3} &= 37 \\ \mathrm{III} + \frac{\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{IV}}{4} &= 37 \\ \mathrm{IV} + \frac{\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}}{5} &= 37 \end{aligned}\right.$$

genügen.

1) Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **2**, 1879, S. 153.
2) Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abt. S. 61.
3) F. WOEPCKE, *Extrait du Fakhri* (Paris 1853), S. 97.
4) I, 28. Siehe Seite 34 meiner Übersetzung.

Man wählt eine Zahl, welche durch einige der vorkommenden Divisoren teilbar ist, etwa 12, und setzt

$$(2) \qquad \mathrm{I} = x, \quad \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} = 12.$$

Dann wird die linke Seite der ersten der Gleichungen (1) gleich $x + 6$, und da alle linken Seiten gleich sind, so mufs auch jede der übrigen gleich $x + 6$ sein. Es ist also zunächst

$$\mathrm{II} + \frac{\mathrm{I} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}}{3} = x + 6,$$

und hieraus folgt der Reihe nach

$$\begin{aligned} 3 \cdot \mathrm{II} + \mathrm{I} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} &= 3x + 18, \\ 2 \cdot \mathrm{II} + x + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} &= 3x + 18, \\ 2\,\mathrm{II} + x + 12 &= 3x + 18, \\ (3) \qquad \mathrm{II} &= x + 3. \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich aus den beiden letzten der Gleichungen (1)

$$(4) \qquad \mathrm{III} = x + 4,$$

$$(5) \qquad \mathrm{IV} = x + 4\tfrac{1}{2}.$$

Die Addition von (3), (4) und (5) liefert bei Berücksichtigung von (2)

$$3x + 11\tfrac{1}{2} = 12,$$

und daraus folgt

$$x = \tfrac{1}{6}.$$

Die gesuchten Zahlen wären danach

$$\tfrac{1}{6}, \quad 3\tfrac{1}{6}, \quad 4\tfrac{1}{6}, \quad 4\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}.$$

Für diese Werte wäre aber die linke Seite jeder der Gleichungen (1) nur $6\frac{1}{6}$ [$= x + 6$], während sie gleich 37, also 6mal so grofs sein soll. Die wirklichen Werte der gesuchten Zahlen sind somit

$$1, \quad 19, \quad 25, \quad 28.$$

Wie man sieht, ist diese ganz nach Alkarkhî oder Diophant geführte Lösung nicht nur selbst äufserst einfach, sondern es ist bei ihr auch die Anwendung des falschen Ansatzes durchaus nicht verwickelt. Sie enthält zudem alle im Text des Jordanus vorkommenden Hilfszahlen. Eine Übersetzung dieses möglicherweise recht verdorbenen Textes ist sie freilich nicht; das ist aber ebensowenig die von Curtze gegebene schwer verständliche und auf einer durchaus willkürlichen Annahme beruhende Lösung.

Noch eine dritte Aufgabe, Nr. 24 desselben Buches, möge folgen, da Curtze an der Lösung derselben, wie Jordanus sie giebt, vollständig verzweifelt. Nachdem Curtze die Gleichungen auf Grund des Textes aufgestellt hat, sagt er: „Der Text, wie er vorliegt, ist in seinen späteren

Teilen absolut unverständlich". Er nimmt dann eine kleine Umformung der Gleichungen vor und führt fort: „Alles Übrige ist jedenfalls so verdorben, dafs der weitere Sinn nicht zu enträtseln ist. Auch das Beispiel ... giebt für die Art der Lösung nicht genügende Fingerzeige".

Ich gebe jetzt die Lösung nach dem Text des JORDANUS; die Gewandtheit dieses grofsen Mannes wird dann in hellem Licht erstrahlen.

Es sollen vier Zahlen gefunden werden, welche den Gleichungen

$$\mathrm{I} + 6 = \tfrac{1}{9}(\mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}), \tag{1}$$

$$\mathrm{II} + 6 = \tfrac{1}{3}(\mathrm{I} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}), \tag{2}$$

$$\mathrm{III} + 6 = \tfrac{3}{5}(\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{IV}), \tag{3}$$

$$\mathrm{IV} + 6 = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}' \tag{4}$$

genügen.

Wird (1) mit $\frac{1}{3}$ und (2) mit $\frac{1}{9}$ multipliziert, so folgt

$$\tfrac{1}{3}(\mathrm{I} + 6) = \tfrac{1}{27}(\mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}),$$
$$\tfrac{1}{9}(\mathrm{II} + 6) = \tfrac{1}{27}(\mathrm{I} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}),$$

oder, wenn in jeder dieser Gleichungen beiderseits $\frac{6}{27}$ addiert wird,

$$\tfrac{1}{3}(\mathrm{I} + 6) + \tfrac{6}{27} = \tfrac{1}{27}(\mathrm{II} + 6) + \tfrac{1}{27}(\mathrm{III} + \mathrm{IV}),$$
$$\tfrac{1}{9}(\mathrm{II} + 6) + \tfrac{6}{27} = \tfrac{1}{27}(\mathrm{I} + 6) + \tfrac{1}{27}(\mathrm{III} + \mathrm{IV}).$$

Durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten und Vereinigung der Glieder in $\mathrm{I} + 6$ und derjenigen in $(\mathrm{II} + 6)$ erhält man

$$(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{27})(\mathrm{I} + 6) = (\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27})(\mathrm{II} + 6),$$

und da $(\frac{1}{3} + \frac{1}{27}) : (\frac{1}{9} + \frac{1}{27}) = 2\frac{1}{2}$ ist, so ergiebt sich

$$\mathrm{II} + 6 = 2\tfrac{1}{2}(\mathrm{I} + 6). \tag{5}$$

Wird weiter (1) mit $\frac{3}{5}$ und (3) mit $\frac{1}{9}$ multipliziert und beiderseits $\frac{6}{15}$ addiert, so erhält man

$$\tfrac{3}{5}(\mathrm{I} + 6) + \tfrac{6}{15} = \tfrac{1}{15}(\mathrm{III} + 6) + \tfrac{1}{15}(\mathrm{II} + \mathrm{IV}),$$
$$\tfrac{1}{9}(\mathrm{III} + 6) + \tfrac{6}{15} = \tfrac{1}{15}(\mathrm{I} + 6) + \tfrac{1}{15}(\mathrm{II} + \mathrm{IV}),$$

woraus wie oben

$$(\tfrac{3}{5} + \tfrac{1}{15})(\mathrm{I} + 6) = (\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{15})(\mathrm{III} + 6)$$

oder

$$\mathrm{III} + 6 = 3\tfrac{3}{4}(\mathrm{I} + 6) \tag{6}$$

folgt.

Endlich wird (1) mit 1 und (4) mit $\frac{1}{9}$ multipliziert und beiderseits $\frac{6}{9}$ addiert. Man erhält

$$(\mathrm{I} + 6) + \tfrac{6}{9} = \tfrac{1}{9}(\mathrm{IV} + 6) + \tfrac{1}{9}(\mathrm{II} + \mathrm{III}),$$
$$\tfrac{1}{9}(\mathrm{IV} + 6) + \tfrac{6}{9} = \tfrac{1}{9}(\mathrm{I} + 6) + \tfrac{1}{9}(\mathrm{II} + \mathrm{III}),$$

und daraus weiter

$$(1 + \tfrac{1}{9})(\mathrm{I} + 6) = (\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{9})(\mathrm{IV} + 6)$$

oder, da $1\tfrac{1}{9} : \tfrac{2}{9} = 5$ ist,

$$\mathrm{IV} + 6 = 5(\mathrm{I} + 6). \tag{7}$$

Die Addition der Gleichungen (5), (6), (7) liefert

$$\mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} + 18 = 11\tfrac{1}{4}(\mathrm{I} + 6),$$

und da nach (1)

$$\mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} = 9(\mathrm{I} + 6)$$

ist, so mufs

$$2\tfrac{1}{4}(\mathrm{I} + 6) = 18,$$

also

$$\mathrm{I} + 6 = 8,$$

$$\mathrm{I} = 2$$

sein. Dann geben die Gleichungen (5), (6), (7) der Reihe nach

$$\mathrm{II} = 14, \quad \mathrm{III} = 24, \quad \mathrm{IV} = 34.$$

Über Leibnizens Thätigkeit auf physikalischem und technischem Gebiete.

Von

E. Gerland in Clausthal.

Es ist ein erfreuliches Zeichen unserer Zeit, daſs auch in den Wissenschaften, die naturgemäſs mehr Gewicht auf ihren Inhalt, als auf die Art, wie er erhalten ist, legen, in der Mathematik und den Naturwissenschaften, das Interesse an ihrer geschichtlichen Entwickelung fortwährend im Wachsen begriffen ist. Nicht nur in dem Erscheinen gröſserer und kleinerer historischer Arbeiten tritt es zu Tage, auch „in der pietätvollen Rückschau auf die Verdienste der Bahnbrecher der Wissenschaft“ zeigt es sich, wie LAMPE[1]) in seinem Überblick der Fortschritte der reinen Mathematik in den Jahren 1884—1899 mit Recht hervorhebt. Er konnte sich darauf berufen, daſs man in Deutschland, Frankreich und England die gesammelten Werke der groſsen Mathematiker herausgegeben und so weiteren Kreisen zugänglich gemacht hat, daſs in Italien die Werke von GALILEI, in Holland die von HUYGENS erschienen oder im Erscheinen begriffen sind. Wenn er dann weiter erwähnt, daſs die Norweger schon früher diese Pflicht der Dankbarkeit ihrem groſsen Landsmanne ABEL gegenüber erfüllt haben, so hätte er ebenso darauf hinweisen können, daſs auch die Berliner Akademie der Wissenschaften diese Pflicht ihrem Stifter gegenüber keineswegs versäumte, daſs man ihrer Unterstützung vielmehr die Herausgabe der mathematischen Schriften LEIBNIZENS durch GERHARDT verdankt.

Eine Gesamtausgabe der Werke des groſsen Deutschen steht aber noch aus. Ein Vorwurf dürfte jedoch deshalb seinem Vaterlande nicht gemacht werden, weil die Herausgabe der Arbeiten eines Mannes, der selbst eine Akademie darstellte, nur durch das Zusammenwirken vieler möglich ist. In dieser Hinsicht aber ist bereits vieles geschehen. So liegen u. a. seine mathematischen Schriften bereits, wie erwähnt, zur Be-

1) E. LAMPE, *Die reine Mathematik in den Jahren 1884—1899.* Berlin 1899, S. 12.

nutzung vor, und dasselbe gilt auch von einer Reihe seiner Arbeiten auf physikalischem und technischem Gebiete, aber hinsichtlich dieser bleibt noch viel zu thun, und wenn auch in der von Traumüller und mir verfaſsten *Geschichte der physikalischen Experimentierkunst* (Leipzig 1899) auf eine Reihe von ihnen eingegangen ist, so dürfte es doch von Interesse sein, eine Übersicht der dahin gehörigen Arbeiten Leibnizens zu liefern und ihren Inhalt kurz anzugeben, was im Folgenden versucht werden soll.

Leibnizens Arbeiten physikalischen und technischen Inhalts lassen sich in drei Gruppen teilen. Die erste Gruppe umfaſst meist gröſsere Arbeiten theoretischer Natur, die zweite seine eigentlichen experimentellen Arbeiten, die dritte endlich, wenn man will, Entwürfe zu solchen, vielfach nur hingeworfene Ideen, wie sie durch Bedürfnisse des täglichen Lebens oder Arbeiten zeitgenössischer Forscher angeregt worden waren. Die hinterlassenen Manuskripte Leibnizens, die den folgenden Mitteilungen zu Grunde liegen, finden sich wohlgeordnet in der königlichen öffentlichen Bibliothek zu Hannover.

Von den der ersten Gruppe angehörigen Arbeiten mögen hier nur die Titel angeführt werden; da ihr Inhalt mathematisch-physikalischer Natur ist, scheiden sie von selbst aus der vorliegenden Mitteilung aus. Es sind die folgenden:

1) De soni generatione, propagatione et expressione in organo Mechanice explicata; excerpta ex Epistolis G. G. L. ad viros quosdam clarissimos, qui in Germania, Galliaque idem argumentum versant.

2) De vibrationibus aëris tensi.

3) G. G. L. Cogitationes novae quomodo formetur sonus et per aërem propagetur, atque in organo auditus exprimatur (wahrscheinlich 1681 einem Briefe an Schelhammer beigelegt; der Schluſs ist wohl 1683 umgearbeitet).

4) Problemata optica Nova reperta a G. G. L. probl. 1. Efficere ut omnes radii a quolibet puncto dato objecti dati ad puncta superficiei objectivae aequidistantia à puncto dato colligantur in unum punctum.

5) De tuborum opticorum perfectione.

6) Nova Demonstratio Legum Refractionis quae in Lumine observantur.

7) Calculus Refractionum.

8) Demonstratio Legum Reflexionis et Refractionis.

9) Leges Reflexionis et Refractionis demonstratae.

10) Cartesii explicatio Refractionis.

11) Primarii problematis Diophili hactenus à nemine soluti constructionem traditurus, ab initio orsus prima Catoptricae Dioptricaeque fundamenta ad suas causas revocata, quae hactenus observatione potius

quam firmis rationibus stabilita erant. Quod duobus capitibus praestabo et primo capite explicabo per causam finalem seu per scopum naturae operantis, secundo per efficientem seu modum quod natura operatur.

12) Problema dioptricum insigne et generalissimum.

13) Invenire Lineam refractoriam (Dezember 1681).

14) Calculus dioptricus (November 1679).

15) De gubernaculis navium.

16) Aestimare vim venti vel fluminis velocitatem aut navis in aqua non currenti cursum, ope penduli.

17) Observatio mechanica de Resistentia Frictionis.

Hierzu würden noch eine Reihe von Aufsätzen, die Leibniz selbst in den Acta Eruditorum veröffentlicht hat, zu rechnen sein.

Zur zweiten Gruppe gehören die folgenden:

1) Die Rechenmaschine, welche er bereits ein Jahr früher entworfen hatte, als er 1672 gelegentlich seines Aufenthaltes in Paris die Rechenmaschine von Pascal kennen lernte. Dadurch wurde er wohl angeregt, seinen Plan nun auszuführen. Seine Maschine hat vor der Pascalschen voraus, dafs sie nicht nur Addieren und Subtrahieren, sondern auch Multiplizieren und Dividieren konnte. Während der Jahre 1676—1694 wurde sie von dem Mechaniker Olivier anfangs in Paris, dann in Hannover, wohin ihn Leibniz 1680 kommen liefs, verfertigt; ihre Herstellung soll der Überlieferung zufolge einen Kostenaufwand von 2400 Thaler erfordert haben. Da sie aber bald reparaturbedürftig wurde, so wurde sie zur Ausbesserung einem Mechaniker in Helmstedt übergeben mit dem weitern Auftrag, noch eine zweite nach dem Muster der ersten anzufertigen. Aber es gelang weder die erste wieder in Stand zu setzen, noch die neue zur Vollendung zu bringen. Wahrscheinlich ist es die erste Maschine, welche jetzt in der Bibliothek in Hannover aufbewahrt wird, nachdem sie Jahre lang in Göttingen gewesen war. Die bekannte Thomassche Rechenmaschine ist ihr so ähnlich, dafs man sie eine verbesserte Leibnizsche nennen konnte und Gerke[1]) den Verdacht aussprechen zu müssen glaubt, dafs Thomas Leibnizens Maschine gekannt habe.

2) Viel bedeutsamer waren die weiteren hierher gehörigen Arbeiten Leibnizens, von denen freilich nur noch die schriftlichen Nachrichten übrig geblieben sind. Sie verfolgten den Zweck dem Mangel an Aufschlagwassern, der sich in den Bergwerken des Oberharzes in unliebsamer Weise geltend machte, abzuhelfen, und suchten ihm durch Benutzung der

1) Gerke, *Die Leibnizsche Rechenmaschine.* Zeitschr. für Vermessungswesen IX, 1880, S. 305.

Windkraft entgegenzuarbeiten.[1] Nach Leibnizens ursprünglichem Plane sollte das in der Weise geschehen, daſs Wasser, welches arbeitsverrichtend auf ein niederes Niveau gesunken war, so oft es ging, mit Hülfe von Windmühlen wieder auf seine frühere Höhe gehoben wurde. Es war Leibnizens eigne Schuld, daſs diese in ihrer Einfachheit und Zweckmäſsigkeit einleuchtende Idee nicht zur Ausführung gelangte, sondern durch eine andere ersetzt werden muſste. Da er seinen schönen Gedanken nicht, ohne eine entsprechende Gegenleistung zu erhalten, Preis zu geben gedachte, so lieſs er sich zunächst nur die Erlaubnis erteilen, an einer Grube des Oberharzes mit Hülfe der Kraft des Windes die Grubenwasser zu heben und trat erst mit seinem wirklichen Plane hervor, als ihm für den Fall des Gelingens eine jährlich zu zahlende „Ergötzlichkeit" von beiläufig 1200 Thlr. gegen den Willen der Bergwerksleitung zugesagt worden war. Diese Summe schien aber der genannten Behörde im Vergleich zu der groſsen Einfachheit der Idee nach deren Bekanntgebung allzuhoch und sie suchte sich von der aufgelegten Last zu befreien, indem sie von dem hannoverschen Hofrate die Lösung der Aufgabe in der Weise forderte, wie sie dessen Äuſserungen verstanden hatte, nämlich anstatt mit einem Wasserrade mit einer Windmühle die Schachtpumpen zu betreiben. Leibniz suchte vergeblich diese Forderung, deren Unerfüllbarkeit er einsah, abzuwehren. Denn die herzogliche Entschlieſsung schlichtete 1680 den entstandenen Streit dahin, daſs die Sache sowohl nach Ansicht des Bergamtes, als auch nach Ansicht Leibnizens versucht werden sollte. Wollte Leibniz also seinen Plan ausführen, so muſste er zunächst den von seinen Gegnern angenommenen ins Werk setzen, und so lieſs er denn unter seiner persönlichen Leitung Windmühlen und Pumpen anfertigen und in dem ihm zum Versuche angewiesenen Schachte aufstellen. Aber der Widerwillen, mit dem die Arbeiter an das Werk, zu dem sie von vornherein kein Vertrauen hatten, gingen, die Ungunst der Witterung, die um so gröſser war, als Leibniz zur Anstellung seiner Versuche die ungeeignetste Jahreszeit hatte wählen müssen, lieſsen sie bald ins Stocken geraten und der den streitenden Parteien aus allen diesen Ungelegenheiten erwachsende Ärger war so groſs, daſs beide froh waren, als eine herzogliche Verfügung vom 4. April 1685 die Arbeit einzustellen befahl. Dadurch war aber für Leibniz die Möglichkeit geschwunden, seinen eigentlichen Plan auszuführen; er ist für immer liegen geblieben.

Ein wie vollständiger Miſserfolg diese Versuche in den Augen der Mitwelt scheinen mochten, für Leibniz waren sie es nicht. Er hatte

1) v. Trebra, *Bergbaukunde* I, 1789, S. 305 ff. Gerland, Berg- und Hüttenmännische Zeitung 1898, S. 225 und 243.

seine Erfahrungen gemacht und legte diese bereits 14 Tage nach Beendigung der Arbeiten, am 20. April 1685, in einer Notiz nieder, von der es immer zu bedauern sein wird, dafs sie erst in unsern Tagen veröffentlicht wurde. Enthält sie doch zwei der wichtigsten Erfindungen, die von der Maschinentechnik, namentlich in Bergwerken, längst mit dem gröfsten Erfolge angewendet werden, nachdem beide, freilich viel später noch einmal gemacht worden sind, die Erfindung des Akkumulators und die von Maschinen, welche ruhig weiter gehen können, selbst wenn ihr geometrischer Zusammenhang für eine beliebige Zeit aufgehoben wird. Zugleich gewährt uns diese Notiz einen interessanten Einblick in die Art, wie LEIBNIZ arbeitete. Nach Stellung der Aufgabe, legt er die eigentümlichen Schwierigkeiten dar, die ihre Lösung erfordert und beginnt erst dann mit der Aufstellung seiner Entwürfe. Der erste von ihnen ist noch recht unbeholfen. Während er ihn niederschreibt, fällt ihm ein, „wie zu der sach noch kürzer zu gelangen und ein grofses theil der weitläufftigkeit abzuschneiden“ sei. So ändert er mehrmal den Entwurf ab und erst die letzte Abänderung befriedigt ihn so, dafs er sie ein „Inventum mirabile et summi momenti“ nennt, eine Ansicht, in der ihm die Entwicklung der Technik nur Recht gegeben hat.[1])

Dieser letzte Entwurf besafs ein elliptisches Zahnrad mit senkrechter Axe, welches in zwei direkt auf den das Feldgestänge wirkenden Wellen längs Schraubenlinien aufgesetzten Zähnen eingreifen und sie so drehen sollte. Da aber eine jede dieser Wellen nur auf ihrer einen Hälfte Zähne trug, so war sie nur im Stande ein auf ihr befestigtes Rad um 180° zu drehen. Das genügte jedoch, um ein mit ihr verbundenes Gewicht von seinem niedrigsten auf seinen höchsten Stand zu heben. Dort angekommen sank es wieder herab, und nahm dabei in freier Bewegung die Welle mit, deren keine Zähne tragende Hälfte ja nun sich unter dem elliptischen Rade hinweg bewegte. Dabei hob es aber auch mittelst Daumen, die an der anderen Seite des auf der Welle befestigten Rades angebracht waren, den einen Hebel des Feldgestänges, das die Pumpen bewegte, empor und drückte zugleich den andern herab. Dies geschah stets mit derselben Geschwindigkeit und wenn dann das Gewicht an seiner tiefsten Stelle angekommen war, so wurde es wieder gehoben, sobald die Zähne des elliptischen Rades wieder mit den auf der Welle sitzenden in Eingriff kamen. Dazu mufste dieses unterdessen eine halbe Umdrehung gemacht haben, und die Zeit, während welcher das Gewicht auf seiner tiefsten Stelle verharrte, hing von der Geschwindigkeit ab, mit der der Wind die Windmühle bewegte. So geschah das Pumpen stets mit derselben

1) GERLAND, Berg- und Hüttenmännische Zeitung 1900.

Geschwindigkeit, während die Pausen zwischen den einzelnen Hüben ungleich lang sein konnten. Ganz ebenso erfolgte die Bewegung der zweiten Welle und ihres ebenfalls ein genügend schweres Gewicht tragenden Rades. Eine zu der rohen Skizze von Leibniz zugefügte Bemerkung macht es wahrscheinlich, daſs der gröſsere Hebelarm des elliptischen Rades dann auf das Getriebe wirken sollte, wenn auch das Gewicht am gröſseren Hebelarm angriff. Aus der Skizze selbst folgt es allerdings nicht.

3) Wenn nun auch diese Versuche zu keinem Ergebnisse führten, so hinderten sie gleichwohl nicht, daſs Leibniz bereits im folgenden Jahre 1686 und später 1693 in einer Clausthaler Grube andere ausführen konnte, mit denen es freilich nicht besser ging, wie mit den geschilderten. Diese hatten die Verbesserung der Erzförderung zum Zweck, und wenn wir auch über sie nicht so gut unterrichtet sind, wie über jene, so können wir uns doch ein ziemlich zutreffendes Bild über Leibnizens Absichten machen.[1]) Während die Pumpen durch Wasserräder getrieben wurden, die sich stets in einer Richtung drehten, so erforderte die Förderung die Anwendung von Kehrrädern, Rädern mit doppelter Schaufelreihe, auf die aus zwei Schützenöffnungen des Gerinnes, die abwechselnd geöffnet und geschlossen wurden, Wasser gegeben werden konnte. Indem aber die Schaufeln der einen Reihe umgekehrt gestellt waren, wie die der andern, drehte sich das Rad in dem einen oder andern Sinne, je nachdem die eine oder die andere Schützenöffnung freigelegt wurde. Das vorhandene Wasser reichte aber für den Betrieb der Pumpen und die Förderung nicht aus und so muſste diese mit Menschen- oder Pferdekraft geschehen. Der Plan, den Leibniz verwirklichen wollte, ging nun dahin, die Förderung auch mit einem nur in einem Sinne umlaufenden Rad zu ermöglichen und so durch bessere Ausnutzung des Wassers das Pumpen und Fördern durch die nämliche Wasserkraft zu ermöglichen. Dazu wollte er die beiden Taue, an denen zu beiden Seiten einer auf die Welle aufgekeilten Seiltrommel die Fördertonnen hingen, durch eine Kette ohne Ende ersetzen, die über die Trommel gehen sollte, und auf diese Weise auch dem Übelstand abhelfen, der darin lag, daſs das Gewicht des die leere Tonne tragenden Taustückes um so grösser wird, je tiefer die Tonne sank, während das Umgekehrte mit dem die volle Tonne tragenden stattfand, und daſs durch diese fortwährende Änderung der Belastung die Einhaltung einer gleichmässigen Bewegung sehr erschwert werde. Damit die Tonne dann gestürzt und entleert werden konnte, sollte sie mittels eines Mechanismus an der Kette befestigt werden, der wie die Aufziehvorrichtung der Taschenuhren aus mehreren Rädern und einem Sperrhaken so zusammengesetzt war, daſs die Tonne sich nur

1) Gerland, Berg- und Hüttenmännische Zeitung 1900.

in einer Richtung drehen konnte. Leider fehlen genauere Angaben über die Einrichtung dieses Mechanismus. Doch wissen wir, dafs die neue Förderungsweise unter LEIBNIZENS Leitung in Clausthal hergestellt und geprüft worden ist und sich als brauchbar erwiesen hat. Man machte ihr seitens der Arbeiter freilich den Vorwurf, dafs sie langsamer arbeite, wie die altgewohnte, einen Vorwurf, den LEIBNIZ, auf seine eigenen Beobachtungen gestützt, bestreitet. Wäre er aber auch berechtigt gewesen, es hätte das bei der ungewohnten Arbeit wohl kaum überraschen können, ebensowenig wie der Umstand, dafs die sich nach oben bewegende Tonne zum Öfteren unterhakte, da ja der Versuchsschacht für diese Art Förderung nicht eingerichtet und dafür wohl nicht geräumig genug war. Von LEIBNIZENS Pumpenentwürfen, von denen einer im Zusammenhang mit diesen Versuchen geprüft wurde, soll sogleich die Rede sein. Alle diese Entwürfe sind über das Versuchsstadium nicht hinausgekommen.

4) Das nämliche gilt von einem anderen Versuche, der auch in diese Gruppe gehört und die Verbesserung der Wagen zum Zweck hatte. Damit hatte sich bereits in den Jahren 1666—1668 HUYGENS beschäftigt und mit seinem Schwager DOUBLET, dem er die Abbildungen der neuesten Pariser Modelle mitteilte, darüber korrespondiert.[1]) Während es sich aber bei diesen Erörterungen um die zweckmässigste Form der Kutschwagen handelte, so beabsichtigte LEIBNIZ die wichtigere Aufgabe zu lösen, Artillerie und sonstiges schweres Fuhrwerk auch auf schlechtem Wege oder erweichtem Boden leicht und sicher fortzubringen, eine Aufgabe, die für die Kriege, welche damals, so zu sagen, an der Tagesordnung waren, die grösste Wichtigkeit hatte. Anfangs dachte er daran, die eigentlichen Räder in solchen von viel gröfserem Durchmesser laufen zu lassen, die mit einem breiten Radkranz versehen waren, um das zu tiefe Eindringen in den Erdboden zu verhindern und die beim Überschreiten von Steinen unvermeidlichen Stöfse zu mildern. 1687 suchte er dann unter die Räder eine Art von Schemel zu stellen, die der Wagen selbst immer wieder aufnahm und von neuem niedersetzte. Das Modell dieses Fuhrwerks, das möglichenfalls eine sorgfältig ausgeführte in Hannover aufbewahrte Skizze darstellt, liess er in Scharzfeld anfertigen, doch wurde es, wie aus einem, leider nicht mit seinem Namen versehenen Schreiben des Verfertigers hervorgeht, nicht vollendet. Erst viel später kam LEIBNIZ auf einen Entwurf, der ihn, seiner Niederschrift vom 27. Mai 1697 nach zu urteilen, mehr befriedigte, der aber niemals ausgeführt worden zu sein scheint.

Statt zweier sollten auf jeder Axe des Fuhrwerks vier Räder sitzen, die auf vier in ihrer Längsrichtung verschiebbaren schienenartigen Balken

1) HUYGENS, Oeuvres complètes VI (La Haye 1895).

laufen sollten. Bei der Fortbewegung des Wagens durch die Pferde sollten diese Balken immer so hingelegt und dann wieder vorgeschnellt werden, dafs abwechselnd die innern, abwechselnd die äussern der vier Räder auf ihnen liefen. Um dies möglich zu machen, war jedes der vier Hinterräder mit einer Seilscheibe vom doppelten Durchmesser des Rades gekuppelt, die sich mit um die Radaxe drehte und über welche je ein an den Enden der Balken befestigtes Seil ging. Da nun die Räder frei auf den Axen liefen, die Seile von den innern Seilscheiben aber zu den äufsern Balken gingen und umgekehrt, so mufste das Seil sich auf die auf den Balken rollenden Räder aufwickeln und dadurch den freien Balken nachziehen, während das am festen Balken befestigte Seil sich abwickelte. Dieser Vorgang wiederholte sich fortwährend, doch sollte, damit die Räder auf den Balken nicht gleiten konnten, auf diese eine Schnur oder eine Kette gelegt werden. Die Schilderung der Art, wie Leibniz den weiteren technischen Schwierigkeiten zu begegnen gedachte, würde hier zu weit führen. Erscheint auch der Plan nach dem jetzigen Standpunkt der Technik unbeholfen, ja abenteuerlich, so ist doch darauf hinzuweisen, dafs die Landwirtschaft gegenwärtig Lokomobilen benutzt, die sich ihre Schienen selbst legen, dafs noch im neunzehnten Jahrhundert man versuchte, die Lokomotiven sich durch Stelzen fortarbeiten zu lassen, deren Bewegungen die der Beine eines vor den Zug gespannten Pferdes nachahmten.

5) Zu dieser Gruppe der Leibnizschen Arbeiten sind noch die Versuche zu rechnen, welche er mit der ihm auf seine Bitte von Otto von Guericke übersandten Schwefelkugel 1671 machte und die ihn den elektrischen Funken zum ersten Male beobachten liefsen[1]), den also er und nicht der Engländer Wall zuerst gesehen hat.[2])

Die übrigen Entwürfe Leibnizens bilden die dritte der oben aufgestellten Gruppen. 1) In ihr nehmen die Pläne zur Verbesserung der Pumpen den gröfsten Raum ein, deren Wirkungsgrad er durch möglichste Verminderung der Reibung zu erhöhen gedachte. Am einfachsten schien das mit Hilfe von Kolben ohne Liderung zu erreichen, die einen so kleinen Raum zwischen ihrer Oberfläche und der Cylinderwand liefsen, dafs die Menge Wasser, welche hier durchgehen konnte, gegen die gehobene nicht ins Gewicht fiel. Ein solcher Kolben bedurfte aber einer besonderen Leitung und diese wollte Leibniz anfangs mittelst eines durch den Kolben gehenden Stabes erreichen, zog es aber später vor, die Kolbenstange unter dem Kolben anzubringen und von oben mit Hilfe eines zweiarmigen Hebels

---

1) Gerland; Electrotechnische Zeitschrift IV, 1883, S. 249, cf. Gerland und Traumüller a. a. O. S. 151.

2) Poggendorff, *Geschichte der Physik* (Leipzig 1879) S. 834.

in Bewegung zu setzen. Bei einer solchen Anordnung schien es aber aus demselben Grunde, der dies schon bei der doppelt wirkenden, als Feuerspritze dienenden Druckpumpe des Altertums hatte wünschenswert erscheinen lassen, geboten, an der Mündung des Steigrohrs in den Stiefel ein sich nach oben öffnendes Ventil anzubringen, während das bei der gewöhnlichen Konstruktion der Saugpumpe unten befindliche wegfallen konnte, da die Pumpe selbst im Wasser aufgestellt wurde. Indem dies Ventil den Pumpenkolben bei seinem Niedergang entlastete, verhinderte es zugleich, dafs er in den Ruhepausen trocken wurde und machte es somit unnötig, die Pumpe „anzufrischen". Eine derartige Pumpe scheint bei den Clausthaler Versuchen in Anwendung gekommen zu sein.

Ein weiterer Entwurf, den er aber nicht zur Kenntnis anderer brachte, sollte eine Ersparnis an Arbeit dadurch erzielen, dafs der Kolben während des Hin- und Herganges pumpte. Wie grofse Bedeutung er der Erfindung einer solchen doppelt wirkenden Pumpe oder Gebläsemaschine beilegte, beweist die Überschrift, mit der er das Blatt versah, auf welches er die betreffende Notiz schrieb: „Non inelegans Machinamentum jacto continuo ex simplici vase, a me nuper excogitatum". Die Einrichtung weicht kaum von der der Gebläsemaschinen der Gegenwart ab; es sind Ventile in den beiden Stirnflächen des Pumpencylinders und eine seitliche Rohrleitung angeordnet, welche von dem Raume hinter dem Kolben in das Ausflufsrohr führt und mit den nötigen Ventilen versehen ist.[1])

2) Merkwürdig genug ist auch ein Entwurf Leibnizens vom 24. Dezember 1698, weil er die schwierige Aufgabe „Navigare adverso flumine ipsa fluminis vi" lösen sollte. Dazu sollte sein „des schiffs eigenes gewicht sein aufenthalt daran es gleichsam befestiget", die Fortbewegung aber dachte Leibniz durch folgende Einrichtung zu erreichen. In den Schiffskörper sollte ein Rad mit breiten Schaufeln eingebaut werden, so dafs es sich in einer vorn und hinten offenen Kammer befand, die das Wasser des Flusses durchströmte. „Es sind", schildert der Erfinder selbst seinen Plan, „wie zwey schiff gleichsam, deren iedes nur eine seite hat und sind vereiniget durch eine brücke." Auf beiden Seiten dieses Schiffes befanden sich auf der verlängerten Axe des Mittelrades zwei Schaufelräder mit schmaleren Schaufeln, welche durch das Mittelrad in Drehung gesetzt die Bewegung des Schiffes gegen den Strom bewirken sollten.

3) Die Erfindung der Dampfmaschine 1690 durch Papin, die unter anderm auch zur Bewegung von Schiffen dienen sollte, liefs Bestrebungen wie die geschilderten in den Hintergrund treten. An ihr jedoch hat Leib-

1) Eine Skizze und ausführliche Beschreibung habe ich gegeben in Berg- und Hüttenmännische Zeitung 1900.

niz den regsten Anteil genommen[1]), wovon der Briefwechsel der beiden Männer aus den Jahren 1692—1707 Zeugnis ablegt. So schlug Leibniz zur Speisung des Kessels einen mit einer Nische versehenen Hahn vor, der in der einen Stellung sich nach aufsen, in der anderen sich nach Innen öffnete. Der Umstand, dafs Papin den um 1650 von Hautsch an der Feuerspritze angebrachten Windkessel zur Hebung des Wassers benutzen wollte — die erste Hochdruckmaschine, um die es sich hier handelt, hatte nur den Zweck, Wasser zu heben — regte seinen Freund in Hannover zur Erfindung der calorischen Maschine an. Ein weiterer von diesem gemachter Vorschlag ging dahin, die abziehenden Verbrennungsgase zur Erwärmung des Speisewassers zu benutzen, auch glaubte er, dafs die Einrichtung einer Selbststeuerung sich wohl ersinnen lassen würde und es ist nach den vorgeführten Proben seiner Erfindungskraft kaum daran zu zweifeln, dafs ihm dies gelungen sein würde, wenn nicht Papins Weggang von Cassel diese Arbeiten ihm aus dem Gesichtskreis gerückt hätte.

Über das Wesen des Dampfes war er sich bereits soweit klar, dafs er eine von demselben ausgeübte Spannkraft annahm, wenn auch deren Träger noch unentschieden blieb.[2]) Dafs ihm auch der Gedanke des Prinzips der Erhaltung der Energie, der viel älter ist, als man gewöhnlich annimmt, nicht fremd war, ja dafs er und Daniel Bernoulli der Entdeckung des Verhältnisses zwischen Wärme und mechanischer Arbeit nahe gekommen sind, hat u. a. Berthold[3]) bereits 1876 nachgewiesen.

4) Auch mit einigen anderen Problemen, deren Lösung zu seiner Zeit vielfach behandelt wurden, hat sich Leibniz eingehend beschäftigt, wenn sie auch zur Ausführung nicht kamen. Den Plan eines Planetariums, abweichend von dem, welches Huygens[4]) ausführte, hat er ausgearbeitet, Verbesserungen an Uhren vorgeschlagen. Auch die Idee des Aneroïds ist von ihm zuerst ausgesprochen, doch kam es aus Mangel eines völlig luftdicht schliefsenden Leders nicht zur Ausführung. Es blieb so unbekannt, dafs das Aneroïd 1730 von dem Petersburger Akademiker Zeiher noch einmal erfunden werden mufste.[5])

---

1) Gerland, *Leibnizens und Huygens Briefwechsel mit Papin* (Berlin 1881) S. 109.

2) Gerland und Traumüller a. a. O. S. 231.

3) Berthold, Wiedemanns Annalen CLVII, 1876, S. 342. Wenn aber Berthold S. 344 sagt, dafs sich ein Streit zwischen Descartes und Leibniz über das wahre Kräftemafs erhoben habe, so übersieht er, dass dieser erst $3^3/_4$ Jahre alt war, als jener starb. Vielmehr wurde der Streit zwischen den Cartesianern, namentlich Papin, und Leibniz ausgefochten, von Huygens aber bereits als ein Streit mit „definitions peu exactes et des mesentendues“ bezeichnet (Brief an Papin vom 2. Nov. 1691); vgl. Gerland, *Leibnizens und Huygens Briefwechsel* etc. S. 75 und 183.

4) Hugenii *Opuscula posthuma* (Amstelodami MDCCXXVIII) S. 157.

5) Gerland und Traumüller a. a. O. S. 323.

5) Eine Anzahl Notizen von LEIBNIZENS Hand verdienen noch der Erwähnung, welche den Zweck hatten, Maschinen und Werkzeuge etc., wie sie im gewöhnlichen Leben gebraucht werden, zweckmäfsiger, als man sie bis dahin kannte, zu gestalten. Er entwirft Aufsätze für Schornsteine, konstruiert ein Bruchband, versieht Nägel mit Widerhaken, damit sie besser im Holze haften, fafst den Gedanken eines Glases, aus welchem der Spiritus nicht verdampft, obwohl es offen ist u. dgl. m.

Bei einer solchen ungemeinen Vielseitigkeit der in Angriff genommenen Aufgaben kann man nicht genug LEIBNIZENS Erfindungsgabe bewundern, die in Verbindung mit seiner unvergleichlichen Methode, wo sie angreift, Bemerkenswertes zu Tage fördert. Aber man mufs wohl im Auge behalten, dafs wir es hier, von den wenigen aus Briefen genommenen Notizen abgesehen, mit solchen zu thun haben, die LEIBNIZ lediglich für sich machte, um den betreffenden Gegenstand nicht zu vergessen und bei einer etwaigen späteren Wiederaufnahme sofort orientiert zu sein. Die mitgeteilten lobenden Bemerkungen hatten demnach nur den Zweck, die damit versehene Notiz aus andern hervorzuheben, ihm daraus aber den Vorwurf der eines so grofsen Mannes so unwürdigen Eigenschaft der Eitelkeit zu machen, heifst doch nur die thatsächlichen Verhältnisse völlig verkennen.

Ich kann diese Mitteilungen nicht schliefsen, ohne den noch schwerwiegenderen Vorwurf der Unehrlichkeit, den neuerdings CANTOR[1]) LEIBNIZEN gemacht hat, aus denselben Gründen zurückzuweisen. Seine erschöpfende Darstellung des Prioritätsstreites um die Entdeckung der höheren Analysis zwischen LEIBNIZ und NEWTON schliefst der hochverehrte Verfasser der *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* mit der Bemerkung ab, „dafs seine (des Prioritätsstreites) gründliche Durchforschung allen Beteiligten ohne irgend eine Ausnahme zum Nachteile gereicht.“ Allen Beteiligten, also namentlich auch LEIBNIZ und NEWTON! Beide werden der bewufsten Fälschung geziehen. Wenn nun der Beweis für die Richtigkeit dieser Beschuldigung in Betreff NEWTONS erbracht sein dürfte, so liegt hinsichtlich LEIBNIZENS die Sache doch wesentlich anders. Der ihm gemachte Vorwurf gründet sich lediglich auf die Mitteilung GERHARDTS[2]), dafs mit dem Datum des Aufsatzes vom 11. November 1675, in welchem LEIBNIZ zuerst die jetzt noch gebräuchlichen Bezeichnungen der Infinitesimalrechnung benutzte und der sich unter den von ihm nachgelassenen Papieren in Hannover befindet, eine Fälschung versucht sei, indem mit Hilfe schwärzerer Tinte und des Radiermessers die 5 in eine 3 um-

1) CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, III. Band (Leipzig 1894—1896) S. 316.

2) GERHARDT, *Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz* (Halle 1848), S. 32, und *Die Entdeckung der höheren Analysis* (1855), S. 312.

geändert wurde. „Man wird“, meint nun CANTOR[1]), „schwerlich gegen einen Andern als gegen LEIBNIZ selbst den Vorwurf dieser versuchten Rückdatierung erheben können“, bringt aber irgend einen Beweis für diese Annahme nicht bei. Da aber, was CANTOR selbst hervorhebt, der Aufsatz zuerst im Jahre 1848 veröffentlicht worden ist, so erscheint es durchaus nicht ausgeschlossen, daſs doch ein Anderer diese Änderung vorgenommen hat. Wenn es aber auch LEIBNIZ selbst that, so konnte er damit doch keine Fälschung bezwecken, da ja der Aufsatz nicht zur Veröffentlichung bestimmt war, und so kann denn auch CANTOR selbst aus dem Abänderungsversuch keinen anderen Schluſs ziehen, als daſs er nur die Richtigkeit der Jahreszahl 1675 bestätigt. Wer also die Abänderung vornahm und zu welchem Zwecke sie geschah, entzieht sich völlig unserer Kenntnis. In keinem Fall aber darf man sie heranziehen, um auf LEIBNIZENS Charakter, dessen Reinheit eben so einzig dasteht, wie die Kraft seines Geistes, einen Schatten fallen zu lassen.

1) CANTOR, a. a. O. S. 176.

Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes.

Von

Alfred Pringsheim in München.

Gelegentlich eines Vortrages, den ich vor kurzem im Münchener Mathematischen Verein hielt, nahm ich Veranlassung, einen grofsen Teil der auf den TAYLORschen Lehrsatz bezüglichen Litteratur einer genaueren Prüfung zu unterziehen[1]), und bin dabei zu einigen Ergebnissen gelangt, die vielleicht geeignet sind, gewisse wohl ziemlich allgemein verbreitete Ansichten in mehrfacher Beziehung zu berichtigen oder zu ergänzen. Da überdies eine einigermafsen eingehende und bis auf die neueste Zeit fortgeführte historische Darstellung des fraglichen Gegenstandes meines Wissens bisher nicht existiert, so dürfte, bei der fundamentalen Bedeutung jenes Theorems, die folgende Analyse der wichtigsten hierher gehörigen Arbeiten und eine daran anknüpfende Würdigung der im einzelnen durch sie erzielten Fortschritte, vielleicht nicht ganz überflüssig erscheinen.

I. *Die formale Ableitung der TAYLORschen Reihe.*

In BROOK TAYLORS *Methodus incrementorum directa et inversa* (Londini 1715) findet sich p. 21 ff. die erste Formulierung und Herleitung des fraglichen Lehrsatzes. Der Inhalt der hierauf sich beziehenden Betrachtung läfst sich, mit Benützung der heutzutage üblichen Bezeichnungen[2]), etwa folgendermafsen zusammenfassen:

---

1) Hierbei haben mir die zahlreichen und sorgfältigen litterarischen Notizen in dem betreffenden Artikel der *Encyklop. der math. Wissensch.* (Bd. II, p. 54 ff.: *Diff.- u. Integr.-Rechnung* von A. VOSS) wesentliche Dienste geleistet.

2) Ich werde mich im Texte durchweg moderner und für die verschiedenen Arbeiten möglichst einheitlich gewählter Bezeichnungen bedienen, dagegen die Original-Bezeichnungen der betreffenden Verfasser, soweit es zum Zwecke leichterer Vergleichung dienlich erscheint, in den Anmerkungen hinzufügen.

TAYLOR bezeichnet a. a. O. die *unabhängige* Variable mit z, die *abhängige* mit x und schreibt:

Ist $f(x)$ eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen x, so hat man:

$$f(x+\varDelta x) = f(x) + \varDelta f(x),$$
$$f(x+2\varDelta x) = f(x) + 2\varDelta f(x) + \varDelta^2 f(x),$$
$$f(x+3\varDelta x) = f(x) + 3\varDelta f(x) + 3\varDelta^2 f(x) + \varDelta^3 f(x)$$

und allgemein[1]):

$$(1)\qquad f(x+n\cdot\varDelta x) = f(x) + \frac{n}{1}\cdot\varDelta f(x) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\varDelta^2 f(x)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\varDelta^3 f(x) + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\varDelta^n f(x).$$

Setzt man jetzt:

$n\cdot\varDelta x = h$, $(n-1)\cdot\varDelta x = h-\varDelta x = h_1$, $(n-2)\cdot\varDelta x = h-2\varDelta x = h_2$, u. s. f.,

so ergiebt sich zunächst TAYLORS *Theorema III* (l. c. p. 21)

$$(2)\quad f(x+h) = f(x) + \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}\cdot\frac{h}{1} + \frac{\varDelta^2 f(x)}{\varDelta x^2}\cdot\frac{hh_1}{1\cdot 2} + \frac{\varDelta^3 f(x)}{\varDelta x^3}\cdot\frac{hh_1h_2}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$
$$+\frac{\varDelta^n f(x)}{\varDelta x^n}\cdot\frac{hh_1\cdots h_{n-1}}{1\cdot 2\cdots n},$$

und hieraus für $\lim \varDelta x = 0$, $\lim n = \infty$, das *Corollarium II* (a. a. O. p. 23)[2]):

$$\underset{\cdot}{z};\ \underset{\cdot}{x},\ \underset{\cdot\cdot}{x},\ \underset{\vdots}{x},\ \dots\ \underset{n}{x}$$

statt:

$$\varDelta z;\ \varDelta x,\ \varDelta^2 x,\ \varDelta^3 x,\ \dots\ \varDelta^n x,$$

und:

$$\dot z;\ \dot x,\ \ddot x,\ \dddot x,\ \dots\ \overset{n}{x}$$

statt:

$$dz;\ dx,\ d^2 x,\ d^3 x,\ \dots\ d^n x.$$

Ferner:

$$v,\ \dot v,\ \ddot v\ \dots$$

für:

$$h,\ h_1,\ h_2,\ \dots$$

1) Die Formel (1) bezw. (2) wird gewöhnlich schlechthin als NEWTONsche Interpolationsformel bezeichnet: wie mir scheint, nicht ganz mit Recht. Allerdings findet sich ihr *wesentlicher Inhalt* schon bei NEWTON: Brief an OLDENBURG (zur Mitteilung an LEIBNIZ) vom 24. Oktober 1676 (*Opusc. math.* Ed. CASTILLIONEUS, T. I, p. 328); *Principia philos. nat.*, Lib. III, Prop. XL, Lemma V (Ed. LE SEUR et JACQUIER, T. III, p. 583); *Methodus differentialis*, 1711 (*Opusc. math.* T. I, p. 271 ff.). Allein Herleitung und Endresultat erscheint bei NEWTON äufserst schwerfällig und unübersichtlich (man vgl. selbst die schon erheblich modernisierte Darstellung bei CANTOR, *Gesch. der Math.* III, p. 358—361). Die Möglichkeit einer durchsichtigen Herleitung und prägnanten Schreibweise der Formel beruht wesentlich auf der zuerst von TAYLOR vorgenommenen Einführung besonderer *Zeichen* (s. oben) für die *Differenzen verschiedener Ordnung*.

2) Die Ausführung des Grenzüberganges ist natürlich unzulänglich. Denn die Beziehung $\lim\limits_{\varDelta x=0} h_\nu = h$ besteht nur für jedes endliche ν bezw. für solche unendlich werdende ν, die der Bedingung $\nu < n$ genügen. Infolge dessen steht also nicht nur die *Konvergenz*, sondern selbst im *Falle der Konvergenz* noch die *Gültigkeit* der Gl. (3) in Frage.

(3) $f(x+h) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3f(x)}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ *in inf.*

In analoger Weise, wie T. gleichfalls ausdrücklich angiebt:

(3ᵃ) $f(x-h) = f(x) - \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} - \frac{d^3f(x)}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$

Obschon die Beziehung (3) mit Recht als TAYLORsche Reihenentwickelung bezeichnet zu werden pflegt, so ist doch neuerdings TAYLORS Priorität zu Gunsten von JOHANN BERNOULLI bestritten worden — zuerst wohl von G. PEANO[1]), welcher im Zusatze zu Nr. 67 von GENOCCHIS *Calcolo differenziale* (1884), p. XVII die folgende Bemerkung macht[2]):

Es ist jedoch zu bemerken, dafs JOH. BERNOULLI 1694 eine Formel angab, die seinen Namen führt und auch der TAYLORschen etwa gleichkommt, da man mittelst Vertauschung von Buchstaben von der einen zur anderen übergehen kann. Vgl. JOH. BERNOULLI, *Opera omnia*, T. I, p. 125. *Wir halten daher seinen Anspruch auf die Priorität nicht für unberechtigt:* „Quam eandem seriem postea TAYLORUS, interjecto plus quam viginti annorum intervallo, in librum quem edidit a. 1715 *De Methodo incrementorum*, transferre dignatus est, sub alio characterum abitu". *Opera*, T. II, p. 584.

Hiergegen ist vor allem einzuwenden, dafs die citierte Reklamation BERNOULLIS sich überhaupt *ganz und garnicht* auf die TAYLORsche Reihe (3) bezieht, sondern, wie der von BERNOULLI ausdrücklich hinzugefügte, von PEANO weggelassene Zusatz: *„Vid. ejus* (sc. TAYLORI) *lib. p. 39"* — unzweideutig beweist, einzig und allein die sog. BERNOULLIsche Reihe betrifft[3]), d. h. die von B. zuerst in den Acta Erud. von 1694, p. 438 (= *Opera*, T. I, p. 126) publizierte Entwickelung:

(4) $$\int_0^x \varphi(x)\, dx = \varphi(x) \cdot x - \varphi'(x) \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \varphi''(x) \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cdots.$$ [4])

TAYLOR giebt nämlich an der von B. citierten Stelle eine Herleitung *dieser* Reihe (4) und zwar ohne irgendwelchen Zusammenhang mit der Reihe (3)[5]) — natürlich *„sub alio characterum abitu"*, d. h. mit Verwendung der durchgehends von TAYLOR benützten, von der BERNOULLI-LEIBNIZschen

1) Sonst z. B.: M. SIMON, *Zur Geschichte und Philosophie der Diff.-Rechnung;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 8, 1898, p. 130. — *Encykl. der math. Wissensch.*, Bd. II, p. 74, Fufsn. 78.

2) Ich citiere nach der deutschen Ausgabe (Leipzig 1899), p. 319.

3) Vgl. auch: Acta Erud. 1721, p. 201 = BERNOULLI *Opera*, T. II, p. 488.

4) BERNOULLI schreibt:
$$\text{Integr. } n\,dz = nz - \frac{z^2}{2} \cdot \frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2n}{dz^2} - \cdots.$$

5) Einen solchen Zusammenhang hat wohl TAYLOR gerade so wenig geahnt, wie BERNOULLI.

völlig abweichenden *Bezeichnungsweise*.[1]) Der fragliche Zusatz hat also bei BERNOULLI ganz und garnicht die ihm von PEANO untergelegte Bedeutung, dafs man *„mittelst Vertauschung von Buchstaben"* von der BERNOULLIschen Reihe (4) zur TAYLORschen (3) übergehen könne. Für BERNOULLI, der auf die Entwickelung (4) sehr grofsen Wert legt und in seinem Briefwechsel mit LEIBNIZ mehrfach auf dieselbe zurückkommt, ist dieselbe immer nur ein (von ihm sehr überschätztes) *Hülfsmittel zur Auswertung von Integralen*: „Series universalissima, quae omnes quadraturas et rectificationes generaliter exprimit".[2]) An die Möglichkeit, von der Reihe (4) zur TAYLORschen Entwickelung (3) zu gelangen, *hat er niemals gedacht*: bei seiner nahezu pathologischen Eitelkeit und dem leidenschaftlichen Streben, gerade dem TAYLORschen Buche jegliches Verdienst zu nehmen[3]), hätte er mit einer derartigen Entdeckung keinen Augenblick zurückgehalten.

Im übrigen ist die schliefsliche Äquivalenz der Reihen (3) und (4) keineswegs so unmittelbar einleuchtend, wie man auf Grund der PEANOschen Bemerkung annehmen müfste. Allerdings hat es nicht die geringste Schwierigkeit, aus der TAYLORschen Reihe (3) die BERNOULLIsche (4), bezw. die folgende, durch die Substitution $\varphi(x) = f'(x)$ daraus hervorgehende[4]):

$$(4^a)\qquad f(x) - f(0) = f'(x)\cdot x - f''(x)\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + f'''(x)\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \cdots$$

abzuleiten: man hat dazu in (3) nur $h = -x$ zu setzen.[5]) Die Reihe (4^a) erscheint somit zunächst als ein *spezieller Fall* von (3). Dafs es aber auch *umgekehrt* möglich sei, von der *speziellen* Reihe (4^a) zu der *allgemeinen* (3) zu gelangen, liegt keineswegs auf der Hand: die blofse Er-

---

1) TAYLOR schreibt:

$$\boxed{\acute{r}s} = rs - \acute{r}\dot{s} + \acute{\acute{r}}\ddot{s} - \acute{\acute{\acute{r}}}\dddot{s} + \cdots,$$

d. h.

$$\int dr\cdot s = rs - \int r\,dr\cdot\frac{ds}{dr} + \int dr\int r\,dr\cdot\frac{d^2s}{dr^2} - \int dr\int dr\int r\,dr\cdot\frac{d^3s}{dr^3} + \cdots.$$

2) *Commerc. epist.* T. 1, p. 15. Vgl. auch ebendas. p. 28 und p. 75 (an letzterer Stelle ein neuer Beweis der Formel (4)).

3) Man beachte z. B. nur die folgende Stelle aus dem Briefe an LEIBNIZ, vom August 1716 (*Comm. epist.* T. II, p. 309): „Accepi tandem TAYLORI libellum. Quid, bone Deus, sibi vult scriptor, sua affectata caligine, qua involvit res quoque sua natura clarissimas? Haud dubie, ut tegat sui furandi studium: quantum enim capio, quantum sapio, nihil nisi res nostras nobis surreptas ibi observo, per densissimam obscuritatis nebulam".

4) In dieser Form (bei $f(0) = 0$) erscheint die BERNOULLIsche Reihe bei LEIBNIZ: Brief an BERNOULLI vom Dezember 1694 (*Comm. epist.* T. I, p. 22).

5) So schon bei EULER: *Inst. calc. diff.* (Petropoli 1755), Cap. III, § 67 (p. 353).

kenntnis dieser Möglichkeit erfordert schon ein nicht unerhebliches Mafs analytischen Scharfblickes und die wirkliche Auffindung der erforderlichen Transformation[1]) dürfte selbst manchem modernen Mathematiker immerhin einige Mühe verursachen.[2]) Im übrigen hätte man wohl schwerlich jemals ohne weiteres aus der BERNOULLIschen *Integralformel* die TAYLORsche *Reihenentwickelung* hergeleitet, wenn diese nicht schon unabhängig davon auf viel naturgemäfserem Wege aufgefunden worden wäre. Das fundamentale Problem:

> Eine Formel zu finden, welche gestattet $f(x+h)$ für jedes h (innerhalb geeigneter Grenzen) zu *berechnen*, wenn $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... für irgend ein bestimmtes x als bekannt angesehen werden —

wurde thatsächlich *zuerst* von TAYLOR gestellt und im wesentlichen (d. h. ohne Angabe der Gültigkeitsgrenzen[3]) auch gelöst; während die angebliche Priorität BERNOULLIS sich in Wahrheit auf die durchaus *moderne* Erkenntnis reduziert, dafs man den bereits vorhandenen TAYLORschen Satz *a posteriori* auch mit Hülfe der BERNOULLIschen *Integrationsformel*[4]) beweisen kann.

In wieweit TAYLOR die Tragweite seines Satzes erkannt haben mag, ist nicht genügend ersichtlich. Zunächst hat er jedenfalls nur dessen Anwendung zur Integration von Differentialgleichungen im Auge.[5]) Bei dieser

---

1) Man schreibe in Gl. (4^a) $\varphi(h)$ statt $f(x)$, also:

$$\varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(h) \cdot h - \varphi''(h) \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \varphi'''(h) \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cdots$$

und substituiere sodann:

$$\varphi(h) = f(t-h), \quad \text{also:} \quad \varphi^{(\nu)}(h) = (-1)^\nu \cdot f^{(\nu)}(t-h).$$

Alsdann wird:

$$f(t-h) - f(t) = -\left\{ f'(t-h) \cdot h + f''(t-h) \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + f'''(t-h) \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cdots \right\}$$

und man gelangt schliefslich zu der Beziehung (3), wenn man noch $t - h = x$, also: $t = x + h$ setzt.

2) Als Beleg hierfür möchte ich anführen, dafs in BERTRANDS grofsem *Traité du calc. diff.* p. 310 zwar der Übergang von (3) zu (4^a) gezeigt, die umgekehrte Möglichkeit dagegen mit keinem Worte angedeutet wird. Vielmehr heifst es in Bezug auf den Charakter der Reihe (4^a) nur ganz ausdrücklich: „Cette série est d'une forme très-différente et en général beaucoup moins utile que la série de TAYLOR".

3) TAYLORS Beweis ist im übrigen kaum unzulänglicher, als fast alle auf Grenzübergängen beruhende Beweise aus jener Zeit, insbesondere z. B. BERNOULLIS und LEIBNIZ' Beweise für die B.'sche Reihe. Der Beweis, den TAYLOR für die *letztere* giebt, ist sogar einfacher und dabei relativ strenger als die genannten (vgl. die Darst. bei CANTOR, Bd. III, p. 368).

4) D. h. schliefslich mit Hülfe *partieller Integration* (vgl. unten Gl. (50)).

5) A. a. O. p. 24 ff. — Eine andere Anwendung zur Auflösung numerischer Gleichungen: Phil. Transact. T. **30** (1717), p. 610 ff. (vgl. CANTOR, III, p. 393).

Gelegenheit hebt er auch ausdrücklich diejenige Spezialform seiner Reihe hervor[1]), welche heute allgemein als MAC LAURINsche Reihe bezeichnet wird, nämlich die im Falle $x = 0$ resultierende Entwickelung von $f(h)$ nach Potenzen von h; und er fügt noch hinzu, daſs man in diesem Falle auch die Methode der unbestimmten Koeffizienten zur Koeffizientenbestimmung benützen könne.

Mit Recht bezeichnet daher MAC LAURIN in seinem *Treatise of fluxions* (Edinburgh 1742), p. 611 die Entwickelung[2]):

$$(5) \qquad f(x) = f(0) + f'(0) \cdot \frac{x}{1} + f''(0) \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

geradezu als eine schon von TAYLOR angegebene.[3]) Er leitet dieselbe nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten durch wiederholte Differentiation ab, d. h. er beweist die Gültigkeit der (fälschlich nach ihm benannten) Formel (5) unter der Voraussetzung, daſs die Entwickelbarkeit von $f(x)$ in eine konvergierende Potenzreihe von vornherein feststeht, und giebt sodann einige einfache Beispiele für deren Anwendung (Entwickelung[4]) von a^x, $\cos\frac{x}{a}$, $\sin\frac{x}{a}$).[5])

Reichlichere Anwendungen dieser Art findet man erst bei EULER (*Instit. calc. diff.* Cap. III, IV), dessen *Beweis* des TAYLORschen Satzes übrigens noch genau mit dem ursprünglich von T. selbst gegebenen übereinstimmt.[6])

Eine kurz vor dem Erscheinen der EULERschen Differentialrechnung

---

1) A. a. O. p. 27: „Quoties fieri potest ipsius z valor datus aequalis nihilo etc."

2) MAC LAURIN schreibt:

$$E, \frac{\dot{E}}{\dot{z}}, \frac{\ddot{E}}{\dot{z}}, \ldots$$

für:

$$f(0), \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=0}, \left(\frac{d^2f(z)}{dz^2}\right)_{z=0}, \ldots$$

3) Warum CANTOR (Bd. III, p. 660) dies nicht gelten lassen will, scheint mir nicht recht verständlich.

4) Die betreffenden Reihen selbst finden sich schon in NEWTONS um 1666 vollendeter (s. CANTOR, Bd. III, p. 64) *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* (*Opusc. math.* p. 21, 22; vgl. auch p. 300, 302).

5) Weit wichtiger ist seine Anwendung der TAYLORschen Reihe zur Ableitung der freilich vorher auch schon von EULER angegebenen *Summenformel*, die er übrigens durchaus unabhängig von E. gefunden zu haben scheint: vgl. REIFF, *Gesch. der unendl. Reihen*, p. 87; CANTOR, Bd. III, p. 663.

6) A. a. O. Cap. III, § 45 (p. 333). — Von EULER rührt die Einführung der *Differenzenzeichen* $\Delta, \Delta^2, \ldots \Delta^n$ her: a. a. O. Cap. I, § 4—7 (p. 5 ff.).

von D'ALEMBERT[1]) gelegentlich gegebene Herleitung der TAYLORschen Reihe beruht auf der (offenbar inkorrekten[2])) Beziehung:

$$f(x+h) = f(x) + \int f'(x+h)\cdot dh \tag{6}$$

und deren wiederholter Anwendung auf $f'(x+h)$, $f''(x+h)$, etc. Bei n-maliger Wiederholung des betreffenden Umformungsprozesses würde man zu einem Ausdrucke für das *Restglied* der TAYLOR'schen Entwickelung durch ein n-fach iteriertes Integral gelangen: von einer derartigen Möglichkeit ist aber bei D'ALEMBERT (dem schon seine äußerst unvollkommenen Bezeichnungen — s. Fußn. 1) — eine solche Verallgemeinerung garnicht gestatten) *auch nicht einmal andeutungsweise* die Rede: das beschriebene Verfahren dient ihm ausschließlich dazu, um das Bildungsgesetz der einzelnen *Reihen*glieder zu bestimmen. Und wenn LACROIX in seinem *Traité du calc. diff. et intégr.*, T. III (2de éd. 1819), p. 397 den Restausdruck:

$$R_n = \int^{(n)} f^{(n)}(x+h)\cdot dh^n \quad \left(\text{d. h.} \int_0^h dh_1 \int_0^{h_1} dh_2 \cdots \int_0^{h_{n-1}} f^{(n)}(x+h_n)\cdot dh_n\right) \tag{7}$$

ohne weiteres auf D'ALEMBERTs Rechnung setzt, so legt er eben in jene ziemlich oberflächlich abgefaßte Gelegenheitsnote mehr hinein, als wirklich darin steht. Ob übrigens D'ALEMBERT das TAYLORsche Resultat gekannt hat oder nicht, muß dahingestellt bleiben: jedenfalls teilt er die betreffende Reihenentwickelung a. a. O. wie eine *völlig neue* mit. Immerhin erscheint es unerfindlich, warum nun auch CONDORCET in der *Encyclopédie méthodique, Mathématiques*, T. III (1789), p. 34, 35 (Art. „Série") den TAYLORschen Satz immer nur als „le théorème D'ALEMBERT" anführt, nachdem er denselben *früher*, nämlich im 1. Bande (1784), p. 104 (Art. „Approximation") ganz richtig als „théorème de TAYLOR"[3]) bezeichnet hat

1) *Recherches sur différents points importants du système du monde*, T. I (Paris, 1754), p. 50. — D'ALEMBERT schreibt:

$$\varphi(z+\zeta),\quad \Delta(z),\quad \Gamma(z),\quad \Psi(z)$$

für:

$$f(x+h),\quad f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x).$$

2) Es müßte zum mindestens heißen:

$$f(x+h) = f(x) + \int f'(x+h)\cdot dh + C$$

oder noch präziser:

$$f(x+h) = f(x) + \int_0^h f'(x+h)\cdot dh.$$

3) Es ist dies wohl eine der *ersten* Stellen, an welcher die fragliche Entwickelung als „TAYLORscher Satz" bezeichnet wird. Bekanntlich führt KLÜGEL (Bd. V, p. 6,

und die Mitteilung des Beweises ausdrücklich auf den Artikel *Série* verschiebt.

II. *Das Restglied der TAYLORschen Formel.*[1])

Nach dem oben Gesagten wird man die in Rede stehende Leistung D'ALEMBERTS etwa folgendermafsen charakterisieren können: er hat zur Herleitung der TAYLORschen Reihe eine *Methode* angegeben, welche bei korrekter Anwendung zugleich auch zu einer formalen Darstellung des *Restgliedes* führt; dieses *letztere Ziel* selbst aber hat ihm durchaus fern gelegen.[2])

Die *zielbewufste* Aufstellung und Diskussion des *Restgliedes* beginnt erst[3]) mit LAGRANGES *Théorie des fonctions analytiques* (*erste* Auflage: an V = 1797)[4]) und wird alsbald weitergeführt in dessen *Leçons sur le calcul des fonctions* (an der *École polytechnique* vorgetragen *an* VII = 1799, zuerst publiziert 1801 in dem *Recueil des leçons de l'école normale*, wieder abgedruckt im Journal de l'école polyt. Cah. **12**, 1804).[5]) Da mir bezüglich der von LAGRANGE gefundenen Resultate nur unzulängliche Angaben begegnet sind, so glaube ich, trotz der allgemeinen Verbreitung

---

Art. TAYLORscher Satz) und, wohl nach dessen Vorgange, auch CANTOR (Bd. III, p. 3[illegible]) jene Benennung auf SIMON L'HUILIERS *Exposition élément. des calc. sup.* (1786) zurück (sie findet sich übrigens daselbst ein einziges Mal und zwar nur in einem *Anhang* [p. 207]): doch mufs sie wohl um jene Zeit schon ziemlich allgemein üblich gewesen sein, wie aufser der citierten Stelle bei CONDORCET u. a. auch die folgenden von KLÜGEL (a. a. O. p. 11) angeführten Schriften beweisen: PFLEIDERER, *Demonstratio theorematis Tayloriani*, Tubingae 1789. — BECK, *De theoremate Tayloriano*, Halae 1791.

1) Mit der *„Geschichte des Restes der TAYLORschen Reihe"* beschäftigt sich eine mir erst während des Druckes dieses Aufsatzes durch Herrn ENESTRÖM mitgeteilte Dissertation von E. MARLOH (Göttingen 1881), welche neben manchem brauchbaren auch vielerlei unzulängliches und sogar unrichtiges enthält.

2) Im übrigen ist ja auch mit jenem n-fachen Integrale zunächst nicht viel anzufangen. Zu einer wirklichen *Abschätzung* des Restes wird es erst brauchbar durch Anwendung des (zu D'ALEMBERTS Zeit noch nicht in Übung gekommenen, wenn auch dem Inhalte nach teilweise bekannten) *Mittelwertsatzes* der Integralrechnung: man gelangt sogar auf diese Weise zur allereinfachsten Herleitung der sog. LAGRANGEschen Restform (vgl. LACROIX, a. a. O. p. 399). — Bez. der Reduktion auf ein *einfaches* Integral vgl. p. 451, Fufsn. 2).

3) In der Abhandlung: *Sur une nouvelle espèce de calcul etc.* (Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin a. 1772 = *Oeuvres* T. III, p. 445), in welcher LAGRANGE eine formale Herleitung der TAYLORschen Reihe nebst Übertragung auf Funktionen von n Variablen giebt, steht er noch ganz auf dem inexakten Standpunkte TAYLORS.

4) Die *zweite* verbesserte Auflage erschien 1813 (auch Journ. de l'école polyt. Cah. 9) und ist als T. IX in den „*Oeuvres*" wieder abgedruckt.

5) *Zweite* verbesserte Aufl. 1806 = *Oeuvres*, T. X.

von LAGRANGES Schriften, eine etwas umständlichere Analyse der betreffenden Untersuchungen an dieser Stelle nicht umgehen zu können.

Der wesentliche Inhalt der zunächst in Betracht kommenden Paragraphen 35—40 der *Théorie des fonctions*[1]) läßt sich etwa folgendermaßen formulieren.[2])

Definiert man $r_n(x, h)$ durch die Gleichung:

$$(8)\quad f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot\frac{h}{1!} + \cdots + f^{(n-1)}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + r_n(x, h)\cdot h^n,$$

substituiert sodann $(x - h)$ für x und setzt: $r_n(x - h, h) = q_n(x, h)$, so wird:

$$(9)\quad f(x) = f(x-h) + f'(x-h)\cdot\frac{h}{1!} + \cdots + f^{(n-1)}(x-h)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + q_n(x, h)\cdot h^n.$$

Setzt man jetzt noch:

$$(10)\qquad h = xz, \quad q_n(x, xz)\cdot z^n = p_n(x, z),$$

so folgt:

$$(11)\qquad f(x) = f(x - xz) + f'(x - xz)\cdot\frac{xz}{1} + \cdots + f^{(n-1)}(x - xz)\cdot\frac{x^{n-1}z^{n-1}}{(n-1)!} + p_n(x, z)\cdot x^n$$

und hieraus durch partielle Differentiation nach z:

$$0 = -f^{(n)}(x - xz)\cdot\frac{x^n\cdot z^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\partial p_n}{\partial z}\cdot x^n,$$

d. h.

$$(12)\qquad \frac{\partial p_n}{\partial z} = f^{(n)}(x - xz)\cdot\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

und somit, wegen: $p_n(x, 0) = 0$ (nach Gl. (11)), schließlich[3]):

1) Ich citiere nach der zumeist verbreiteten *zweiten* Auflage. Den im Texte citierten Nummern dieser letzteren entsprechen in der *ersten* Aufl. die Nummern 47—53: dieselben enthalten fast wörtlich dasjenige, was in Nr. 35, 38—40 der 2. Aufl. steht; dagegen *fehlt* in der 1. Aufl. der Inhalt von Nr. 36, 37, welcher zum Teil auf eine 1806 erschienene, von LAGRANGE auch ausdrücklich citierte Abhandlung AMPÈRES zurückzuführen ist.

2) Im Interesse der historischen Genauigkeit möchte ich ausdrücklich bemerken, daß LAGRANGE die folgenden Untersuchungen in der *Théorie des fonctions* nicht für einen allgemeinen Index n, sondern nur für $n = 1, 2, 3$ durchführt und sich im übrigen mit dem Zusatze „*et ainsi de suite*" begnügt. Da er aber die Derivierten beliebiger Ordnung durch *Indices* charakterisiert, so ist damit sofort auch die Möglichkeit gegeben, die betreffenden Formeln *allgemein* anzuschreiben (wie dies in den *Leçons sur le calcul des fonctions* auch wirklich geschieht).

3) LAGRANGE, der ja bekanntlich a. a. O. Differential- nnd Integralzeichen prinzipiell vermeidet, sagt natürlich nur: $p_n(x, z)$ ist die für $z = 0$ *verschwindende*, zur *Derivierten* (12) gehörige *primitive* Funktion, was ja lediglich die wörtliche Umschreibung der Formel (13) ist.

$$(13) \qquad p_n(x, z) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^z y^{n-1} \cdot f^{(n)}(x - xy) \cdot dy.$$

Hiermit ist also zunächst die *exakte* Darstellung des Restgliedes der Entwickelung (11) (also mit Hülfe der erforderlichen Rück-Substitutionen auch desjenigen von (8)) durch ein *bestimmtes Integral*[1]) geleistet.

Lagrange fügt nun weiter hinzu (Nr. 36), es erscheine wünschenswert, das Restglied auch *ohne* das Hülfsmittel der *Integration* berechnen zu können, und giebt dafür zunächst den folgenden Weg an. Schreibt man in (11) statt n der Reihe nach ν und $\nu + 1$, so folgt durch Vergleichung der beiden resultierenden Entwickelungen:

$$p_\nu(x, z) \cdot x^\nu = f^{(\nu)}(x - xz) \cdot \frac{x^\nu z^\nu}{\nu!} + p_{\nu+1}(x, z) \cdot x^{\nu+1}$$

und daher, durch Division mit $x^{\nu+1}$ und unter Berücksichtigung von Gl. (12) für ($n = \nu$):

$$(14) \qquad p_{\nu+1}(x, z) = \frac{1}{x}\left(p_\nu(x, z) - \frac{z}{\nu} \cdot \frac{\partial p_\nu}{\partial z}\right) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

eine Rekursionsformel, welche gestattet, jedes p_ν durch successive *Differentiation* aus p_1 zu berechnen, und die überdies durch Einführung von q_ν für p_ν (s. Gl. (10)) sich noch wesentlich vereinfachen läßt. Man hat nämlich:

---

1) Es ist dies, wenn man in (11) und (13) $\frac{z}{x}$ statt z schreibt, diejenige Restform, welche Laplace (s. p. 452) durch partielle Integration abgeleitet hat, nämlich:

$$p_n\left(x, \frac{z}{x}\right) \cdot x^n = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^{\frac{z}{x}} y^{n-1} \cdot f^{(n)}(x - xy) \cdot dy$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^z t^{n-1} \cdot f^{(n)}(x - t) \cdot dt.$$

Für $z = 1$ resultiert aus (11) (wie Lagrange ausdrücklich hervorhebt) die Mac Laurinsche Entwickelung mit dem Restgliede:

$$p_n(x, 1) \cdot x^n = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 y^{n-1} \cdot f^{(n)}(x - xy) \cdot dy$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x t^{n-1} \cdot f^{(n)}(x - t) \cdot dt,$$

welches genau mit dem von Cauchy abgeleiteten (s. Gl. (48)) übereinstimmt.

$$p_\nu(x, z) = q_\nu(x, xz) \cdot z^\nu, \quad \text{also:} \quad \frac{\partial p_\nu}{\partial z} = \nu \cdot q_\nu z^{\nu-1} + \frac{\partial q_\nu}{\partial z} \cdot z^\nu,$$

und daher nach Gl. (14):

$$(15) \qquad q_{\nu+1}(x, xz) = -\frac{1}{\nu x} \cdot \frac{\partial q_\nu}{\partial z},$$

oder, wenn wiederum noch $xz = h$ (s. Gl. (10)), also: $\frac{\partial q_\nu(x, xz)}{\partial z} = \frac{\partial q_\nu(x, h)}{\partial h} \cdot x$ gesetzt wird:

$$(16) \; q_{\nu+1}(x, h) = -\frac{1}{\nu} \cdot \frac{\partial q_\nu}{\partial h} = +\frac{1}{(\nu-1)\cdot\nu} \cdot \frac{\partial^2 q_{\nu-1}}{\partial h^2} = \cdots = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu q_1}{\partial h^\nu}.$$

Man findet also insbesondere:

$$(17) \qquad q_n(x, h) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{\partial^{n-1} q_1}{\partial x^{n-1}} \text{ [1])}$$

als Ausdruck für das Restglied der Entwickelung (9) und daraus durch Rücksubstitution von $x + h$ für x dasjenige der gewöhnlichen Taylorschen Entwickelungsform (8).

Einen *zweiten*, ebenfalls auf wiederholter *Differentiation* beruhenden Restausdruck dieser letzteren leitet L. in folgender Weise ab (Nr. 37). Aus (8) ergiebt sich, wenn man ν statt n schreibt, durch partielle Differentiation nach x und h:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x+h)}{\partial x} &= f'(x) + f''(x)\cdot\frac{h}{1} + \cdots + f^{(\nu-1)}(x)\cdot\frac{h^{\nu-2}}{(\nu-2)!} \\ &\quad + f^{(\nu)}(x)\cdot\frac{h^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \frac{\partial r_\nu}{\partial x}\cdot h^\nu \\ \frac{\partial f(x+h)}{\partial h} &= f'(x) + f''(x)\cdot\frac{h}{1} + \cdots + f^{(\nu-1)}(x)\cdot\frac{h^{\nu-2}}{(\nu-2)!} \\ &\quad + r_\nu \cdot \nu h^{\nu-1} + \frac{\partial r_\nu}{\partial h}\cdot h^\nu\end{aligned}$$

---

1) Dabei ist nach Gl. (9):

$$f(x) = f(x-h) + h \cdot q_1,$$

also:

$$q_1 = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Die litterale Ausführung der in Formel (17) angezeigten Differentiation würde natürlich für q_n lediglich denjenigen Ausdruck liefern, welcher die Beziehung (9) zu einer *vollkommenen Identität* macht. Ist jedoch $f(x)$ als *bestimmter analytischer Ausdruck* vorgelegt, so gelangt man *bei geeigneter Umformung* von q_1 zu einem wirklich *brauchbaren* (d. h. nicht *unmittelbar* als *identisch* mit

$$\frac{f(x) - f(x-h) - \cdots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x-h)\cdot h^{n-1}}{h^n}$$

erscheinenden) Ausdrucke für q_n. (Beispiele s. bei Lagrange, a. a. O.)

und hieraus $\left(\text{wegen: } \frac{\partial f(x+h)}{\partial x} = \frac{d f(x+h)}{\partial h}\right)$:

$$(18) \qquad r_\nu h^\nu = f^{(\nu)}(x) \cdot \frac{h^\nu}{\nu!} + \frac{h^{\nu+1}}{\nu} \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial x} - \frac{\partial r_\nu}{\partial h}\right). \text{ [1]}$$

Andererseits folgt wiederum, wenn man in (8) $n = \nu - 1$ setzt und die betreffende Entwickelung mit der für $n = \nu$ geltenden vergleicht:

$$(19) \qquad r_\nu h^\nu = f^{(\nu)}(x) \cdot \frac{h^\nu}{\nu!} + r_{\nu+1} h^{\nu+1},$$

sodafs man die Rekursionsformel gewinnt:

$$(20) \qquad r_{\nu+1} = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial x} - \frac{\partial r_\nu}{\partial h}\right),$$

mit Hülfe deren sich also wiederum r_n durch successive Differentiation aus $r_1 = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ berechnen läfst.

Um ferner auch noch neben den vorstehenden *exakten* Restdarstellungen eine zweckmäfsige *Abschätzungsformel* zu erhalten, beweist L. (Nr. 38) das Lemma:

(21) Es ist: $f(b) - f(a) > 0$, wenn $f'(z) \geq 0$ [2] für $a \leq z \leq b$ —

und benützt dasselbe in folgender Weise (Nr. 39) zur Herleitung zweier Ungleichungen, welche den sog. *Mittelwertsatz* der Differentialrechnung als speziellen Fall enthalten. Man setze:

$$(22) \qquad f_1(z) = \frac{M \cdot z^{\nu+1}}{\nu+1} - F(z), \qquad f_2(z) = F(z) - \frac{m \cdot z^{\nu+1}}{\nu+1},$$

---

1) Es ist dies, abgesehen von den Bezeichnungen, genau diejenige Gleichung, welche A. WINCKLER im 2. Bande der Annali di matem. (1859) p. 186 als Grundlage eines angeblich neuen und alle bisherigen an Einfachheit und Natürlichkeit übertreffenden Beweises der TAYLORschen Formel ableitet. Die unmittelbar daran anknüpfende Herleitung des LAGRANGEschen Restgliedes: $R_n = \frac{1}{n!} h^n \cdot f^{(n)}(x + \vartheta h)$ ist aber (ganz abgesehen von einem groben, für den Beweis selbst schliefslich nicht in Betracht kommenden Fehler, s. § 2 am Ende) *schlechter* als jede andere, weil dabei noch die *Existenz* und, in der von W. gewählten Fassung, sogar die *Stetigkeit* von $f^{(n+1)}(x)$ für das Intervall $(x, x+h)$ vorausgesetzt werden mufs. Eine zweite Arbeit desselben Verfassers, in welcher der Versuch gemacht wird, den Rest der TAYLORschen Reihe in *engere* Grenzen als die bisherigen einzuschliefsen, (Wien. Denkschr. Math. Cl. 28 [1868], p. 243) beruht zum Teil auf unzulässigen, zum Teil auf immerhin so engen Voraussetzungen, dafs derselben keine irgendwie nennenswerte Bedeutung zugesprochen werden kann.

2) D. h. es soll nicht etwa beständig $f'(z) = 0$ sein.

wo M, m das *Maximum* und *Minimum*[1]) von $\frac{F'(z)}{z^\nu}$ für $a \leqq z \leqq b$ bedeuten. Alsdann hat man:

$$(23)\quad \begin{cases} f_1'(z) = z^\nu\left(M - \frac{F'(z)}{z^\nu}\right), & f_2'(z) = z^\nu\left(\frac{F'(z)}{z^\nu} - m\right) \\ > 0 & > 0 \quad \text{für } a \leqq z \leqq b, \end{cases}$$

und daher nach dem obigen Lemma:

$$(24)\qquad f_1(b) - f_1(a) > 0, \qquad f_2(b) - f_2(a) > 0,$$

d. h. mit Berücksichtigung von (22):

$$(25)\qquad F(b) - F(a) \begin{cases} < M \cdot \frac{b^{\nu+1} - a^{\nu+1}}{\nu+1} \\ > m \cdot \frac{b^{\nu+1} - a^{\nu+1}}{\nu+1}. \end{cases}$$

Diese beiden Ungleichungen, welche für $\nu = 0$ den wesentlichen Inhalt des gewöhnlichen *Mittelwertsatzes* darstellen, erweisen sich vermöge der Willkürlichkeit von ν als geeignet, aus der oben für $\frac{\partial p_n}{\partial z}$ gefundenen Formel (12) ganz unmittelbar die speziell als „LAGRANGEsches *Restglied*“ bekannte Abschätzungsformel zu gewinnen. Aus (11) folgt nämlich zunächst für $z = 1$ die MAC LAURINsche Entwickelung:

$$(26)\quad f(x) = f(0) + f'(0)\cdot\frac{x}{1!} + \cdots + f^{(n-1)}(0)\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + p_n(x, 1)\cdot x^n.$$

Andererseits hat man nach (12):

$$(27)\qquad \frac{1}{z^{n-1}}\cdot\frac{\partial p_n(x, z)}{\partial z} = \frac{1}{(n-1)!}\cdot f^{(n)}(x - xz).$$

Setzt man also, behufs Anwendung der Ungleichungen (25):

$$F(z) = p_n(x, z), \quad \nu = n - 1, \quad a = 0, \quad b = 1,$$

und bezeichnet mit M, m das *Maximum* bezw. *Minimum* von $f^{(n)}(x - xz)$ für $0 \leqq z \leqq 1$, d. h. schliefslich dasjenige von $f^{(n)}(y)$ für $0 \leqq y \leqq x$, so

1) Da die *Stetigkeit* einer Funktion im heutigen *arithmetischen* (d. h. CAUCHYschen) Sinne von LAGRANGE zwar niemals definiert, aber doch wohl als aus der *Geometrie abstrahierte*, im allgemeinen *selbstverständliche* Eigenschaft angesehen wird (solange nicht das Gegenteil ausdrücklich feststeht), so kann man auch ohne weiteres von einem *Maximum* und *Minimum* reden. Indessen erleidet diese Betrachtung keinerlei Änderung, wenn man, *ohne* die *Stetigkeit* vorauszusetzen, M und m als *obere* bezw. *untere* Grenze der (immerhin als *endlich* anzunehmenden) Funktion einführt.

resultieren aus (24), mit Berücksichtigung von $p_n(x, 0) = 0$ (s. Gl. (11)), die Beziehungen:

$$(28) \qquad p_n(x, 1) \begin{cases} < \frac{M}{n!}, \\ > \frac{m}{n!}, \end{cases}$$

und, wenn man noch die Bedingung der *Stetigkeit* von $f^{(n)}(x)$ hinzunimmt:

$$(29) \qquad p_n(x, 1) = \frac{f^{(n)}(u)}{n!} \quad \left(\text{in Cauchys Schreibweise: } = \frac{f^{(n)}(\vartheta x)}{n!}\right),$$

wo u einen passenden Mittelwert des Intervalles $(0, x)$ (bezw. ϑ einen solchen von $(0, 1)$) bezeichnet. Die Substitution:

$$f(x) = \varphi(z + x), \text{ also: } f(0) = \varphi(z),\ f^{(\nu)}(0) = \varphi^{(\nu)}(z),\ f^{(n)}(u) = \varphi^{(n)}(z + u),$$

liefert sodann die Taylorsche Entwickelung von $\varphi(z + x)$ nach Potenzen von x, und, wenn man schliefslich noch die Buchstaben φ, z, x durch f, x, h ersetzt:

$$(30) \quad f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot \frac{h}{1} + \cdots + f^{(n-1)}(x) \cdot \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(x+u) \cdot \frac{h^n}{n!}.$$

Den Hauptinhalt dieser Untersuchungen kann man also folgendermafsen zusammenfassen:

> Lagrange bestimmt in der *Théorie des fonct. anal.*, und zwar schon in der *ersten* Auflage von 1797 — den nach einer Hülfsvariabeln genommenen *Differentialquotienten des Restgliedes* und stellt dieses selbst *durch ein bestimmtes Integral* dar. Der sodann von ihm in *verallgemeinerter* Form bewiesene *Mittelwertsatz* der Differentialrechnung dient ihm lediglich dazu, um aus dem bereits gefundenen *exakten* Ausdrucke jenes *Differentialquotienten* [1]) die als Lagrangesches *Restglied* bekannte Abschätzungsformel herzuleiten.

Wesentlich anders verfährt nun Lagrange in den *Leçons sur le calcul des fonctions*. In Leçon IX (*Oeuvres*, T. X, p. 86) beweist er an Stelle des Lemmas (21) zunächst das folgende, in der Hauptsache mit jenem gleichwertige:

(31) Ist $F'(0) = 0$ und erleidet $F'(z)$ für $0 \leq z \leq h$ keinen Zeichenwechsel, so hat $F(z)$ beständig das Vorzeichen von $F'(z)$ (bezw. das entgegengesetzte, wenn $0 \geq z \geq -h$).

Bedeutet sodann $\varphi'(x + p)$, $\varphi'(x + q)$ das *Minimum* bezw. *Maximum* von

1) Diese Methode fällt offenbar dem Wesen nach mit derjenigen zusammen, welche auf der Reduktion des *Rest-Integrals* mit Hülfe des *Integral-Mittelwertsatzes* beruht.

$\varphi'(x+z)$ für $0 \leqq z \leqq h$ und setzt man:

$$(32)\qquad \begin{cases} F_1(z) = \varphi(x+z) - \varphi(x) - z\cdot\varphi'(x+p), \\ F_2(z) = \varphi(x+z) - \varphi(x) - z\cdot\varphi'(x+q), \end{cases}$$

so hat man:

$$(33)\qquad F_1(0) = F_2(0) = 0$$

und aufserdem:

$$(34)\qquad \begin{cases} F_1'(z) = \varphi'(x+z) - \varphi'(x+p), & F_2'(z) = \varphi'(x+z) - \varphi'(x+q) \\ \geqq 0 & \leqq 0 \qquad (\text{für: } 0 \leqq z \leqq h). \end{cases}$$

Somit folgt aus dem obigen Lemma:

$$F_1(z) > 0, \qquad F_2(z) < 0 \qquad \text{für: } 0 < z \leqq h,$$

d. h. (*Oeuvres*, T. X, p. 91):

$$(35)\qquad \begin{cases} \varphi(x+z) - \varphi(x) - z\cdot\varphi'(x+p) > 0, \\ \varphi(x+z) - \varphi(x) - z\cdot\varphi'(x+q) < 0 \end{cases} \quad (0 < z \leqq h).$$

Diese beiden Ungleichungen, welche offenbar wiederum den wesentlichen Inhalt des gewöhnlichen *Mittelwertsatzes* darstellen und die ich daher im folgenden der Kürze halber schlechthin als *„den Mittelwertsatz“* bezeichnen will, benützt nun LAGRANGE hier *ganz direkt* zur Herleitung der TAYLORschen Entwickelung mit dem „LAGRANGEschen“ Restgliede (Gl. (30)). Setzt man nämlich in (35): $\varphi(x) = f^{(n-1)}(x)$, so folgt zunächst:

$$(36)\qquad f^{(n-1)}(x+z) - f^{(n-1)}(x) \begin{cases} - f^{(n)}(x+p)\cdot z > 0 \\ - f^{(n)}(x+q)\cdot z < 0 \end{cases} \quad (0 < z \leqq h).$$

Auf Grund dieser Beziehungen ergiebt sich aber aus dem Lemma (31), dafs auch:

$$(37)\qquad f^{(n-2)}(x+z) - f^{(n-2)}(x) - f^{(n-1)}(x)\cdot z \begin{cases} -f^{(n)}(x+p)\cdot\frac{z^2}{2} > 0 \\ -f^{(n)}(x+q)\cdot\frac{z^2}{2} < 0 \end{cases} \quad (0 < z \leqq h),$$

da diese Ausdrücke für $z = 0$ verschwinden und nach z differenziert die linken Seiten von (36) liefern. So weiter fortschliefsend gelangt man (a. a. O. p. 93) zu den Ungleichungen:

$$(38)\qquad f(x+z) - f(x) - f'(x)\cdot\frac{z}{1!} - \cdots - f^{(n-1)}(x)\cdot\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \begin{cases} -f^{(n)}(x+p)\cdot\frac{z^n}{n!} > 0 \\ -f^{(n)}(x+q)\cdot\frac{z^n}{n!} < 0 \end{cases}$$

$(0 < z \leqq h)$, welche für $z = h$ unmittelbar die Entwickelung (30) liefern, wenn man die beiden *Ungleichungen* durch Einführung eines passenden Mittelwertes $f^{(n)}(x+u)$ in eine *Gleichung* zusammenzieht.

In den *Leçons sur le calcul des fonctions* bildet also der *Mittelwertsatz*[1]) die eigentliche *Grundlage* der TAYLORschen Entwickelung.

Man kann hiernach sagen, dafs LAGRANGE in Bezug auf die strenge Begründung der sog. TAYLORschen *Formel*[2]) bereits *alles Wesentliche* geleistet hat: die *exakte Darstellung* des Restes durch ein bestimmtes Integral, zugleich aber auch die vollkommene *Ausnützung des Mittelwertsatzes* zur *Herleitung* jener Formel mit *angenähertem* Restausdrucke. Dabei mufs noch bemerkt werden, das LAGRANGE die Entwickelbarkeit *jeder* Funktion $f(x+h)$ nach Potenzen von h, abgesehen von einzelnen Ausnahmepunkten, zwar als etwas *a priori* Feststehendes ansieht, dafs aber diese Ansicht in dem vorliegenden Zusammenhange *keineswegs* als *Voraussetzung* fungiert (in welchem Falle dann der Mittelwertsatz bezw. die TAYLORsche *Formel* als eine *Folge* der TAYLORschen *Reihe* erscheinen würde). Die zur Ableitung des fundamentalen Lemmas (31) dienliche Voraussetzung besteht vielmehr lediglich in der Annahme einer Beziehung von der Form:

$$(39) \qquad f(x+h) = f(x) + (f'(x) + \varepsilon) \cdot h \qquad (h \gtrless 0), \text{[3]})$$

wo $|\varepsilon|$ mit $|h|$ *beliebig klein* wird: eine Forderung, die im Grunde genommen nicht mehr und nicht weniger besagt, als diejenige eines eindeutig bestimmten („vollständigen") *Differentialquotienten* $\lim\limits_{h=\pm 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; sie enthält lediglich die von LAGRANGE behufs vollständiger Vermeidung des Grenzbegriffes gewählte rein arithmetische Formulierung dieser letzteren Forderung.[4])

---

1) Dafs LAGRANGE statt mit dem eigentlichen Mittelwertsatze mit den aus Lemma (31) herrührenden Ungleichungen operiert, ist hierbei unwesentlich.

2) D. h. eigentlich der *Nicht-TAYLORschen* Darstellungsweise von $f(x+h)$ durch eine *ganze Funktion* und ein *Restglied*.

3) *Oeuvres*, T. X, p. 86:

$$f(x+i) = f(x) + i\,(f'(x) + V).$$

4) Überhaupt bin ich der Ansicht, dafs die *Existenz* von $f'(x)$ für irgend einen bestimmten Wert x_0 auch nach LAGRANGES Darstellung keineswegs an diejenige der *unendlichen* Reihe für $f(x+h)$ gebunden erscheint, vielmehr immer nur daran, dafs für $x = x_0$ eine Beziehung von der Form (39) besteht. Das entsprechende gilt für jede folgende Derivierte. Vgl. *Théorie des fonctions* Nr. 3, 4, und besonders auch die folgende Stelle am Schlusse von Leçon II der *Leçons sur le calcul* (*Oeuvres*, T. X, p. 19): „Dès qu'on aura trouvé par la considération *du premier terme* du développement des règles générales pour passer d'une fonction primitive à la fonction dérivée, *on pourra faire abstraction de tout développement*". So ist z. B.

$$f(x) = a + bx + cx^2 \cdot \lg x$$

nicht nach Potenzen von x entwickelbar, indessen hat man nach Analogie von Gl. (31):

$$f(x) = a + (b + \varepsilon) \cdot x,$$

AMPÈRE[1]), der die Beziehung (39) gleichfalls als grundlegend ansieht[2]), unterscheidet sich darin von LAGRANGE, daſs er ihre Existenz, bezw. die damit gleichwertige von $\lim\limits_{h=\pm 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *nicht postuliert*, sondern lediglich unter Voraussetzung der *Stetigkeit* von $f(x)$ zu *beweisen* sucht (natürlich vergeblich[3])) und bei dieser Gelegenheit auch die beiden „Mittelwertsatz-Ungleichungen" (35) ableitet, *ohne* den Weg über das Lemma (31)[4]) zu nehmen. Im übrigen geht er darauf aus, zur Ergänzung der LAGRANGEschen *Integral*-Darstellung des Restgliedes eine ebenfalls *exakte* Darstellung *ohne* Integration zu geben. Sein Verfahren ist im wesentlichen folgendes (a. a. O. p. 163). Setzt man:

$$Q(x, a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{40}$$

so besteht die Identität:

$$f(x) = f(a) + (x - a) \cdot Q(x, a). \tag{41}$$

Daraus folgt durch partielle Differentiation nach a:

$$0 = f'(a) + (x - a) \cdot \frac{\partial Q}{d a} - Q \tag{42}$$

und durch weitere $(\nu - 1)$ malige Differentiation:

$$0 = f^{(\nu)}(a) + (x - a) \cdot \frac{\partial^\nu Q}{\partial a^\nu} - \nu \cdot \frac{\partial^{\nu-1} Q}{\partial a^{\nu-1}} \quad (\nu = 2, 3, 4, \cdots), \tag{43}$$

d. h.

$$Q = f'(a) + (x - a) \cdot \frac{\partial Q}{\partial a}, \quad \frac{\partial^{\nu-1} Q}{\partial a^{\nu-1}} = \frac{1}{\nu} \cdot f^{(\nu)}(a) + \frac{x-a}{\nu} \cdot \frac{\partial^\nu Q}{\partial a^\nu}. \tag{44}$$

Bei successiver Einführung dieser Beziehungen (für $\nu = 2, 3, \cdots (n-1)$) in Gl. (41) ergiebt sich:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot \frac{x-a}{1!} + \cdots + f^{(n-1)}(a) \cdot \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\partial^{n-1} Q}{\partial a^{n-1}} \cdot \frac{(x-a)^n}{(n-1)!}, \tag{45}$$

---

wo $\varepsilon = cx \cdot \lg x$ mit x beliebig klein wird und daher (auch nach LAGRANGES Auffassung): $f'(0) = b$ (vgl. Leçon VIII = *Oeuvres*, T. X, p. 73).

1) *Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées etc.*; Journ. de l'école polyt. Cah. **14** (1806), p. 148ff.

2) a. a. O. p. 162:

$$f(x + i) = f(x) + i \cdot f'(x) + i \cdot J.$$

3) Über die Hinfälligkeit jenes Beweises s. z. B. DINI, *Fondamenti* §§ 69, 169 (= DINI-LÜROTH, *Grundlagen* p. 88, 298).

4) Das letztere wird in der That zweckmäſsiger als eine *Folge* des Mittelwertsatzes abgeleitet (s. z. B. STOLZ, *Grundl. der Diff.- und Integr.-R.*, Bd. I, p. 54, Nr. 4).

wobei also das Restglied im wesentlichen in derjenigen Form erscheint, die sich auch in der *zweiten* Auflage der *Théorie des fonct. anal.* findet (s. Gl. (17) und Fufsn. 1), p. 441). AMPÈRE leitet dann schliefslich daraus auch noch die LAGRANGEsche Abschätzungsformel ab, indem er die Identität (43) für $\nu = n$ durch Multiplikation mit $(x - a)^{n-1}$ auf die Form bringt:

$$(46) \qquad \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial^{n-1} Q}{\partial a^{n-1}} \cdot (x-a)^n\right) + f^{(n)}(x) \cdot (x-a)^{n-1} = 0$$

und sodann die grundlegenden Ungleichungen des Mittelwertsatzes (oder eigentlich das LAGRANGEsche Lemma (21)) anwendet.

CAUCHY giebt in seiner *ersten* Infinitesimal-Rechnung[1]) von 1823, p. 26ff. (= *Oeuvres*, a. a. O. p. 44) den *Mittelwertsatz* im wesentlichen nach AMPÈRE (auf den er auch ausdrücklich hinweist)[2]), *ohne* jedoch davon für die Herleitung der TAYLORschen Formel irgend welchen Gebrauch zu machen. Die letztere beweist er vielmehr erst in der Integralrechnung[3]) durch eine Art *Umkehrung* der von D'ALEMBERT angedeuteten Methode, indem er nämlich für ein n-mal iteriertes Integral (mit Hilfe eines im Grunde genommen auf partieller Integration beruhenden Verfahrens) die folgende Formel ableitet (a. a. O. p. 136, Gl. (12) = *Oeuvres*, a. a. O. p. 210):

---

1) *Résumé des leçons données à l'école polytechnique sur le calcul infinitésimal.* Paris 1823 (= *Oeuvres*, (2) T. IV, p. 1—261).

2) Dabei erscheint aber p. 28 neben den von AMPÈRE ausschliefslich benützten *Ungleichungen* die *Gleichung:*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \vartheta h)$$

mit dem, wohl von CAUCHY eingeführten spezifischen ϑ zur Bezeichnung einer unbekannten Zahl des Intervalles (0,1).

3) In der Vorrede sagt er hierüber: „ . . . et je me suis vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de TAYLOR, cette formule ne pouvant plus être admise comme générale qu'autant que la série qu'elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de termes et complétée par une intégrale définie. Je n'ignore pas que l'illustre auteur de la *Mécanique analytique* a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des fonctions dérivées. Mais malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi de séries divergentes . . . ." Das letztere ist zweifellos richtig, trifft aber in keiner Weise LAGRANGES Ableitung der TAYLORschen *Formel*. Denn selbst wenn man die von mir in Fufsn. 4), p. 448 vertretene Auffassung des LAGRANGEschen Derivierten-Begriffes *nicht* teilt, so wird man doch zugeben müssen, dafs die fraglichen Deduktionen LAGRANGES dasselbe Mafs von Strenge besitzen, wie die entsprechenden CAUCHYS, zum mindesten dann, wenn man die betreffenden $f^{(\nu)}(x)$ eben nicht als LAGRANGEsche *Derivierte*, sondern als CAUCHYsche *Differential-Quotienten* auffafst: CAUCHY hätte dieselben also mit dieser einfachen Modifikation ohne weiteres übernehmen können.

$$(47)\quad \int^{(n)} \varphi(x)\cdot dx^n = c_n + c_{n-1}\cdot\frac{x-x_0}{1!} + \cdots$$
$$+ c_1\cdot\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\cdot\varphi(t)\cdot dt,$$

welche für $\varphi(x) = F^{(n)}(x)$, $x_0 = 0$ unmittelbar die Mac Laurinsche Formel für $F(x)$, sodann vermöge der Substitution $F(x) = f(x+h)$ und bei Vertauschung von x und h die Taylorsche Formel für $f(x+h)$ mit den resp. Restgliedern[1]):

$$(48)\quad R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\cdot F^{(n)}(t)\cdot dt$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x t^{n-1}\cdot F^{(n)}(x-t)\cdot dt$$

$$(49)\quad R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-t)^{n-1}\cdot f^{(n)}(x+t)\cdot dt$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h t^{n-1}\cdot f^{(n)}(x+h-t)\cdot dt$$

liefert (a. a. O. p. 141, Gl. (2), (3)). Cauchy zeigt dann noch, wie man das letztere Resultat auch unmittelbar durch successive *partielle Integration* aus der Identität:

$$(50)\quad f(x+h) = f(x) + \int_0^h f'(x+z)\cdot dz = f(x) + \int_0^h f'(x+h-t)\cdot dt$$

finden kann[2]) und führt dieses in fast alle modernen Lehrbücher über-

---

1) Die betreffenden zwei Integrale werden späterhin von C. mit Hülfe des Mittelwertsatzes auf die Lagrangesche (a. a. O. p. 143), das erste auch (p. 147) auf die nach Cauchy benannte (s. weiter unten, Gl. (55)) Näherungsform gebracht. Ebendas. (p. 143) auch die Übertragung der Taylorschen Formel auf den Fall *mehrerer* Variablen mit Hülfe einer schon von Lacroix (*Traité du calc. diff. et int.* 2de éd. T. I [1810], p. 387) angewendeten Methode.

2) Man kann übrigens auch das von Lacroix nach d'Alemberts Methode abgeleitete Restglied (7) mit Hülfe der aus Gl. (47) durch Einführung von Grenzen hervorgehenden Formel (vgl. Cauchy, a. a. O., p. 140 = *Oeuvres*, a. a. O., p. 212, Gl. (19)):

$$\int_{x_0}^{x}{}^{(n)} \varphi(x)\cdot dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\cdot\varphi(t)\cdot dt$$

ohne weiteres auf die Form (49) bringen: ähnlich übrigens schon bei Lacroix, a. a. O. p. 387. Auf diesem Ergebnisse beruht schliefslich auch der folgende (etwas künstgegangene, gewöhnlich LAPLACE (*Théorie anal. des probabilités* I, Nr. 44 = *Oeuvres*, VII, p. 179) zugeschriebene Verfahren[1]) auf eine 1805 (wo?) publizierte Abhandlung von PRONY zurück: da die *erste* Auflage von LAPLACES *Probabilités* erst 1812 erschien, so würde also dem eben genannten die Priorität zukommen.

Im *Anhange* des *Calc. inf.* (p. 161 ff. = *Oeuvres*, a. a. O. p. 243 ff.) kommt CAUCHY nochmals auf den *Mittelwertsatz* zurück[2]), beweist sodann den *erweiterten* Mittelwertsatz:

$$\frac{\varphi(X)-\varphi(x_0)}{\Phi(X)-\Phi(x_0)}=\frac{\varphi'(x_0+\vartheta\cdot(X-x_0))}{\Phi'(x_0+\vartheta\cdot(X-x_0))}, \tag{51}$$

welcher für $\Phi(x)=x^n$, $X=h$, $x_0=0$ und unter der Voraussetzung:

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=\cdots=\varphi^{(n-1)}(0)=0,\ \varphi^{(n)}(0)\lesseqgtr 0 \tag{52}$$

bei n-maliger Anwendung die Beziehung liefert:

$$\frac{\varphi(h)}{h^n}=\frac{\varphi^{(n)}(\vartheta h)}{n!}. \tag{53}$$

Mit Hülfe dieser letzteren leitet dann CAUCHY zunächst die TAYLORsche

---

liche) Beweis in C. JORDANS *Cours d'analyse* T. I (2de éd. 1893), p. 245. Aus dem Ansatze:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\cdot\frac{h}{1}+\cdots+f^{(n-1)}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}+R$$

folgt:

$$(a)\qquad \frac{\partial^n R}{\partial h^n}=f^{(n)}(x+h),\quad (R)_{h=0}=0,\quad \left(\frac{\partial^\nu R}{\partial h^\nu}\right)_{h=0}=0\quad (\nu=1,2,\cdots(n-1)),$$

was in Wahrheit gleichbedeutend mit der Restdarstellung (7) ist, nämlich:

$$R=\int_0^{h\,(n)} f^{(n)}(x+h)\cdot dh^n.$$

Andererseits genügt aber das Integral:

$$J=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-t)^{n-1}\cdot f^{(n)}(x+t)\cdot dt$$

genau den Beziehungen (a), woraus dann $R=J$ resultiert. Der Beweis ist im Grunde genommen nur eine *Verifikation* der Gleichung $R=J$, während die zuvor angedeutete *Transformation* wirklich auch zur *Auffindung* von J führt.

1) Eine Verallgemeinerung dieser Methode giebt KRONECKER: *Über eine bei der partiellen Integration nützliche Formel* (Berl. Ber. 1885, p. 841 ff.).

2) CAUCHY hat inzwischen die in der Vorrede ausgesprochene Ansicht von der Unzulänglichkeit der Diff.-Rechnung zur Begründung der TAYLORschen Formel geändert: „Depuis l'impression de cet ouvrage j'ai reconnu qu'à l'aide d'une formule très-simple (sc. (51)) on pouvait ramener au calcul différentiel la solution de plusieurs problèmes que j'avais renvoyés au calcul intégral.“

Formel für $f(x+h)$ mit dem LAGRANGEschen Restgliede ab:

$$(54)\qquad R_n = \frac{h^n}{n!}\cdot f^{(n)}(x+\vartheta h),$$

weiterhin[1]) aber, die Bedingungen (52) in die einzige: $\lim\limits_{h=0}\frac{\varphi(h)}{h^{n-1}} = 0$ zusammenziehend[2]), beweist er dasselbe Resultat noch auf etwas andere Art und giebt aufserdem auch diejenige Form des Restgliedes an, welche gewöhnlich schlechthin als die CAUCHYsche bezeichnet wird, nämlich:

$$(55)\qquad R_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-1}\cdot h^n}{(n-1)!}\cdot f^{(n)}(x+\vartheta h).$$

Die Restform:

$$(56)\qquad R_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-p}\cdot h^n}{(n-1)!\,p}\cdot f^{(n)}(x+\vartheta h),\quad (p \text{ eine bel. nat. Zahl}),$$

welche für $p = n$ und $p = 1$ die LAGRANGEsche und CAUCHYsche als spezielle Fälle liefert, hat É. ROCHE aus dem Rest-Integrale (49) durch Faktorenzerlegung des Integranden und partielle Integration abgeleitet.[3]) Dieselbe erweist sich jedoch, wie SCHLÖMILCH mit Recht geltend gemacht hat[4]), lediglich als ein spezieller Fall der schon früher[5]) von ihm mit Hülfe des *erweiterten Mittelwertsatzes* (51) hergeleiteten Formel:

$$(57)\qquad R_n = \frac{\psi(h)-\psi(0)}{\psi'((1-\vartheta)h)}\cdot\frac{(1-\vartheta)^{n-1}\cdot h^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n)}(x+\vartheta h)$$

($\psi(x)$ eine für $0 \leqq x \leqq h$ stetige Function mit endlichem, für $0 < x < h$ nicht verschwindendem $\psi'(x)$, im übrigen willkürlich), aus welcher sie für $\psi(h) = h^p$ unmittelbar hervorgeht. ROCHE hat dann wiederum mit demselben Hülfsmittel den noch allgemeiner gestalteten Ausdruck aufgestellt[6]):

$$(58)\ R_n = \left\{\varphi(x+h)-\varphi(x)-\cdots-\varphi^{(q)}(x)\cdot\frac{h^q}{q!}\right\}\cdot\frac{q!\,(h-\vartheta h)^{n-q-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{f^{(n)}(x+\vartheta h)}{\varphi^{(q+1)}(x+\vartheta h)},$$

1) A. a. O. p. 173—176 (*Oeuvres*, a. a. O. p. 257—261): dieser ganze Teil des Anhanges ist auch wörtlich abgedruckt in den *Anc. exercises*, T. I (1826) p. 25—28 (= *Oeuvres* (2) T. VI, p. 38—42).

2) Die nähere Begründung dieses Schrittes giebt C. in den *Leçons sur le calcul différentiel* von 1829, p. 51 (= *Oeuvres*, (2) T. IV, p. 329).

3) Journ. de mathém. (2) T. III (1858), p. 271.

4) Ebendas. p. 384.

5) *Handb. der Diff.- u. Integr.-R.*, Greifswald 1847—48, § 35 (s. z. B. auch: STOLZ, *Grundlagen*, Bd. I, p. 95).

6) Mémoires de l'Académie de Montpellier **5**, 1863. Auch: Comptes rendus, T. **58** (1864, I) p. 380. Die Wahl $\varphi(z) = f^{(n-1)}(z)$, $q = 0$ (welche also gestattet ist, wenn $\varphi'(z)$ d. h. $f^{(n)}(z)$ für $x \leqq z \leqq x+h$ stetig und von Null verschieden) liefert die Restformel:

$$R_n = \frac{h^{n-1}\cdot(1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!}\left\{f^{(n-1)}(x+h)-f^{(n-1)}(x)\right\}.$$

($\varphi(z), \varphi'(z), \cdots \varphi^{(q+1)}(z)$ stetig für $x \leqq z \leqq x+h$, und $\varphi^{(q+1)}(z)$ daselbst von Null verschieden), welcher u. a. für $q=0$ (d. h. $q!=1$, $\varphi^{(q)}(x)=\varphi(x)$) und $\varphi(z)=\psi(z-x)$ den SCHLÖMILCHschen Rest (57) liefert, überdies (für $q=n-1$) neuerdings von STOLZ[1]) benützt wurde, um nachzuweisen, daſs die früher stets für $x \leqq z \leqq x+h$ geforderte Existenz eindeutiger und endlicher $f'(z), \cdots f^{(n-1)}(z)$ an der *Grenze* $z=x+h$ für die Gültigkeit der TAYLORschen Formel keineswegs *notwendig* erscheint.[2])

Im übrigen verdient ausdrücklich bemerkt zu werden, daſs zur Ableitung der TAYLORschen Formel mit dem für die meisten Zwecke hinlänglich allgemeinen SCHLÖMILCH-ROCHEschen Restgliede schon der *gewöhnliche Mittelwertsatz* und zwar in seiner einfachsten Form (als sog. ROLLEscher Satz) vollkommen ausreicht. Darnach hat man[3]):

$$F'(\xi)=0 \tag{59}$$

für irgend ein bestimmtes ξ des Intervalles $x_0 < \xi < X$, wenn $F(x_0) = F(X)=0$, $F(x)$ *eindeutig* und *stetig* für $x_0 \leqq x \leqq X$, auſserdem $F'(x)$ d. h. $\lim\limits_{h=0} \dfrac{F(x \pm h)-F(x)}{\pm h}$ *eindeutig* (endlich oder unendlich) für $x_0 < x < X$. Setzt man nämlich:

$$F(x)=f(X)-f(x)-f'(x)\cdot\frac{X-x}{1!}-\cdots \\ -f^{(n-1)}(x)\cdot\frac{(X-x)^{n-1}}{(n-1)!}-Q\cdot(X-x)^p \tag{60}$$

und definiert Q durch die Gleichung:

$$0=f(X)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot\frac{X-x_0}{1!}-\cdots \\ -f^{(n-1)}(x_0)\cdot\frac{(X-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}-Q\cdot(X-x_0)^p, \tag{61}$$

wo x_0 irgend eine bestimmte Zahl $< X$ bedeutet, so folgt:

$$F(x_0)=F(X)=0, \quad F'(x)=f^{(n)}(x)\cdot\frac{(X-x)^{n-1}}{(n-1)!}-Q\cdot p\cdot(X-x)^{p-1}, \tag{62}$$

1) A. a. O. p. 98.

2) Hieraus erklärt sich die bekannte Thatsache, daſs die TAYLORsche bezw. MAC LAURINsche *Reihe* an der *Konvergenz-Grenze* noch *absolut* konvergieren und die betreffende Funktion darstellen kann, auch wenn die sämtlichen Differential-Quotienten dort unendlich werden. *Beispiel:*

$$(1-x)\cdot \lg\frac{1}{1-x}=x-\sum_{1}^{\infty}\frac{x^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)} \text{ für } x=1.$$

3) S. z. B. STOLZ, a. a. O. p. 51.

und somit, wenn man die *Stetigkeit* und *Eindeutigkeit* von $F(x)$ d. h. von $f(x), f'(x), \cdots f^{(n-1)}(x)$ für $x_0 \leq x \leq X$, aufserdem die *Eindeutigkeit* von $F'(x)$ d. h. von $f^{(n)}(x)$ für $x_0 < x < X$ voraussetzt, nach Gl. (59):

$$(63)\qquad F'(\xi) = 0 \quad \text{d. h.} \quad Q = \frac{(X-\xi)^{n-p}}{(n-1)!\,p} \cdot f^{(n)}(\xi) \quad (0 < \xi < X).$$

Wird dann schliefslich noch gesetzt: $X = x_0 + h$, $\xi = x_0 + \vartheta h$ (wo $0 < \vartheta < 1$), so liefert Gl. (61) ohne weiteres die gesuchte Entwickelung:

$$(64)\qquad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\frac{h}{1!} + \cdots + f^{(n-1)}(x_0)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(x_0+\vartheta h)\cdot\frac{(1-\vartheta)^{n-p}\cdot h^n}{(n-1)!\,p}.$$

Dieser an Einfachheit und Strenge wohl kaum etwas zu wünschen lassende Beweis, welcher übrigens auf einer direkten Verallgemeinerung des (nach Serret, *Calcul différentiel*, Nr. 14) von Ossian Bonnet herrührenden für den gewöhnlichen *Mittelwertsatz* (d. h. den Fall $n = 1$, $p = 1$) beruht, rührt nach Hermites Angabe[1]) im wesentlichen von Homersham-Cox und Rouché her.

Während die bisher betrachteten mit Lagranges *Théorie des fonct. anal.* beginnenden Herleitungen der Taylorschen *Formel* den ursprünglich von Taylor zur Auffindung der nach ihm benannten *Reihe* eingeschlagenen Weg vollständig verliefsen, so hat man, nachdem die verschiedenen *Rest-Darstellungen* einmal vorlagen, naturgemäfs auch den Versuch gemacht, durch passende Vervollkommnung der Taylorschen *Methode* dasselbe Ziel zu erreichen, d. h. die Interpolations-Formel (1) so umzugestalten, dafs der schliefslich erforderliche Grenzübergang sich mit der wünschenswerten Strenge ausführen läfst und an Stelle der von Taylor fälschlich vernachlässigten Glieder ein entsprechendes *Restglied* zum Vorschein kommt. In einer aus Notizen Ampères von Gergonne[2]) zusammengestellten Abhandlung über Interpolation und deren Anwendung auf gewisse Prinzipien der Differential-Rechnung erscheint das Restglied der Entwickelung von $f(x+h)$ in der wenig durchsichtigen und zu unmittelbarer Abschätzung ungeeigneten Form[3]):

$$(65)\qquad R_n = f_n(x, x, \cdots x, x+h)\,.\,h^n,$$

wo (die „Ampèresche *Interpolations-Funktion*") f_n definiert ist durch die Rekursions-Formel:

---

1) Cours d'analyse T. I (1873), p. 49, 50.

2) Annales de mathém. T. XVI (1825—26), p. 329—349.

3) A. a. O. p. 348.

$$(x_{n+1} - x_n) f_n(x_1, x_2, \cdots x_{n+1}) = f_{n-1}(x_1, x_2, \cdots x_n) - f_{n-2}(x_1, x_2, \cdots x_{n-1}),$$
$$(x_2 - x_1) \cdot f_1(x_1, x_2) = f(x_2) - f(x_1).$$

CRELLE[1]) bringt, gelegentlich der Ableitung einer von ihm schiefer Weise als „*allgemeine* TAYLOR*sche Reihe*" bezeichneten Entwickelung[2]), von der Interpolations-Formel (1) ausgehend, das Restglied der (gewöhnlichen) TAYLORschen Formel für $f(x+h)$ auf eine Form, welche bei korrekter Schreibweise folgendermaßen lauten würde[3]):

$$(66) \qquad R_n = \left\{ \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left(\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \right) \right\}_{a=x+h} \cdot \frac{h^n}{(n-1)!}$$

und somit im wesentlichen mit einer früher erwähnten AMPÈREschen Restdarstellung (s. Gl. (45)) übereinstimmt.

Eine merkliche Vereinfachung und zugleich Weiterführung eines Teils der sehr umständlichen und wenig anmutenden CRELLEschen Untersuchung giebt SCHLÖMILCH im 2. Jahrgang seiner Zeitschrift (1857) und gelangt dabei zur Darstellung von R_n sowohl durch das bestimmte Integral (welches er fälschlich als AMPÈREsche Restform bezeichnet), als auch in der CAUCHYschen Form (55).

Weitaus am einfachsten ist aber eine hierher gehörige und, wie mir scheint, zu wenig bekannte Herleitung der TAYLORschen Formel von J. CAQUÉ.[4]) Hier wird zunächst mit Hülfe einfacher Differenzen-Beziehungen die Interpolations-Formel (1) auf die Form gebracht:

$$(67) \qquad f(x + m \cdot \Delta x) = f(x) + (m)_1 \cdot \Delta f(x) + \cdots + (m)_n \cdot \Delta^n f(x) + R_{n+1}$$
$$(m > n)$$

wo:

$$(68) \qquad R_{n+1} = (m-1)_n \cdot \Delta^{n+1} f(x) + (m-2)_n \cdot \Delta^{n+1} f(x + \Delta x) + \cdots + (n)_n \cdot \Delta^{n+1} f(x + \overline{m-n-1} \cdot \Delta x).$$

Mit Benutzung der bekannten, übrigens durch vollständige Induktion leicht zu verifizierenden Beziehung:

$$(m-1)_n + (m-2)_n + \cdots + (n)_n = (m)_{n+1}$$

wird sodann:

$$R_{n+1} = \Delta x^{n+1} \cdot (m)_{n+1} \cdot P_{n+1}$$

oder, wenn man $m \cdot \Delta x = h$ setzt:

---

1) Journ. f. Mathem. Bd. XXII (1839), p. 249 ff.

2) Es handelt sich dabei in Wahrheit um die Herstellung einer *Interpolationsformel* (also für *endliche* Differenzen) mit *Restglied* (vgl. Fußn. 2, p. 457).

3) A. a. O. p. 254, Gl. (21). Die betreffende Formel, welche nach der im Texte benützten Bezeichnung R_{n+1} entsprechen würde, enthält übrigens einen Druckfehler: im Nenner steht $(n+1)!$ statt $n!$.

4) Journ. de mathém. T. X (1875), p. 379.

(69) $$R_{n+1} = \frac{h \cdot (h - \Delta x) \cdots (h - n \cdot \Delta x)}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} \cdot P_{n+1}$$

wo:

(70) $$P_{n+1} = \frac{(m-1)_n \cdot \frac{\Delta^{n+1} f(x)}{\Delta x^{n+1}} + (m-2)_n \cdot \frac{\Delta^{n+1} f(x + \Delta x)}{\Delta x^{n+1}} + \cdots + (n)_n \frac{\Delta^{n+1} f(x + \overline{m-n-1} \cdot \Delta x)}{\Delta x^{n+1}}}{(m-1)_n + (m-2)_n + \cdots + (n)_n}.$$

Nach einem elementaren Mittelwertsatze[1]) besitzt daher P_{n+1} einen gewissen mittleren Wert aus:

$$\frac{\Delta^{n+1} f(x)}{\Delta x^{n+1}}, \quad \frac{\Delta^{n+1} f(x + \Delta x)}{\Delta x^{n+1}}, \quad \ldots \frac{\Delta^{n+1} f(x + \overline{m-n-1} \cdot \Delta x)}{\Delta x^{n+1}}.$$

Der Grenzübergang $\lim \Delta x = 0$ (der durch vorausgehende Anwendung des Mittelwertsatzes der Diff.-R.[2]) noch an Strenge gewinnen würde) liefert dann unmittelbar die TAYLORsche Formel mit dem LAGRANGEschen Restgliede.

Die vorstehende Ableitung des fraglichen Resultates ist zwar nicht die kürzeste, sie erscheint mir aber aus *dem* Grunde beachtenswert, weil sie dessen wahre *arithmetische* Grundlage mit vollkommener Deutlichkeit hervortreten läßt.

III. *Die Konvergenz und Gültigkeit der* TAYLOR*schen Reihenentwickelung.*

Hatte auch LAGRANGE an die Stelle der TAYLORschen *Reihe*, deren ursprüngliche Herleitung keinerlei Bürgschaft für ihre *Konvergenz* und *Gültigkeit* bot, die (unter geeigneten Voraussetzungen) allemal exakte, durch ein *Restglied* vervollständigte *Darstellungsformel* gesetzt, so war andererseits die Frage nach der *Konvergenz* und *Gültigkeit* der *ersteren* von seiner Seite nicht untersucht oder vielmehr ohne jede ausreichende Begründung in *bejahendem* Sinne entschieden worden. Für LAGRANGE steht die *Konvergenz* der TAYLORschen *Reihe* und zugleich auch die Gültigkeit der Beziehung: $f(x_0 + h) = \sum_0^\infty f^{(\nu)}(x_0) \cdot \frac{h^\nu}{\nu!}$ *a priori* fest, sofern nur $f(x)$ für $x = x_0$ endliche Derivierte jeder endlichen Ordnung besitzt.[3]) Das *Restglied* R_n dient ihm lediglich zur Abschätzung des *Fehlers*, den man beim *Abbrechen* der Reihe bei irgend einem bestimmten n^{ten} Gliede

1) CAUCHY, *Analyse algébrique*, Note II, Théorème 12, p. 447 (= *Oeuvres*, (2) T. III, p. 368).

2) Dabei wird (bei endlich bleibendem Δx)

$$P_{n+1} = f^{(n+1)}(x + \vartheta h)$$

d. h. man erhält die sogenannte NEWTONsche *Interpolations-Formel mit Restglied* (vgl. MARKOFF, *Differenzen-Rechnung* (Leipzig 1896), p. 15, Gl. (20)).

3) *Théorie des fonct. anal.*, Chap. V, No. 30 (*Oeuvres*, T. IX, p. 65): „On conclura que le développement ne peut devenir fautif pour une valeur donnée de x, qu'au-

begehen würde, aber in *keiner* Weise *dazu*, um aus der Beschaffenheit von $\lim\limits_{n=\infty} R_n$ Schlüsse auf die *Konvergenz* und *Gültigkeit* der *unendlichen Reihenentwickelung* zu ziehen. Auch AMPÈRE steht noch durchaus auf diesem Standpunkte, während man bei LAPLACE die Bemerkung findet[1], dafs man aus dem *Restgliede* aufser dem *Grade der Annäherung*, welche durch Summation einer *endlichen* Gliederzahl erzielt wird, auch die etwaige *Konvergenz* der Reihe beurteilen könne. Die präzise Formulierung der Konvergenz- und Gültigkeits-Bedingungen giebt dann CAUCHY im *Calc. infin.* von 1823, p. 145 (= *Oeuvres*, (2) T. IV, p. 224), nämlich:

> Die Reihe $f(x_0) + \sum\limits_1^{\infty} f^{(\nu)}(x_0) \cdot \frac{h^\nu}{\nu!}$ ist *konvergent* und besitzt zugleich die Summe $f(x_0 + h)$, wenn das *Restintegral* (49) für unendlich wachsendes n gegen Null konvergiert.[2])

Zugleich aber (p. 152 bezw. p. 299) hebt er hervor[3]), dafs *selbst dann*, wenn die Reihe *konvergiert*, ihre *Summe* von $f(x_0 + h)$ *verschieden* ausfallen kann, und belegt diese Behauptung durch die MAC LAURINsche Entwickelung von $f(x) = e^{-x^2} + e^{-\frac{1}{x^2}}$. In dem *Calc. diff.* von 1829 unterscheidet er daher ganz ausdrücklich zwischen der *Konvergenz-* und der *Gültigkeits-Bedingung* und formuliert in dieser Hinsicht die folgenden Kriterien[4]):

Ist:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} = \varphi \quad ^{5}), \tag{71}$$

$$f(x) + i \cdot f'(x) + \frac{i^2}{2} \cdot f''(x) + \cdot$$

tant qu'une des fonctions $f(x), f'(x), f''(x)$, etc. deviendra infinie, ainsi que toutes les suivantes, pour cette valeur de x." — Ebenso: *Leçons sur le calc. des fonct.*, L. VIII (*Oeuvres*, T. X, p. 72).

1) *Théorie des prob.*, Livre I, Schlufssatz (*Oeuvres*, T. VII, p. 180).

2) Weniger korrekt ist die entsprechende Formulierung im *Calc. diff.* von 1829, p. 88, wo an die Stelle des Restintegrals das LAGRANGEsche oder CAUCHYsche $R_n(x, \vartheta)$ tritt: hier genügt es in Wahrheit *nicht*, dafs $\lim\limits_{n=\infty} R_n(x, \vartheta) = 0$ für *jeden einzelnen* Wert ϑ des Intervalls $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, vielmehr mufs die Konvergenz gegen Null für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ eine *gleichmäfsige* sein: vgl. Mathem. Ann. Bd. **44** (1894), p. 59.

3) Er legt auf diese Bemerkung mit Recht grofsen Wert und erwähnt sie schon im Vorwort, anschliefsend an die in Fufsn. 3), p. 450) citierte, gegen LAGRANGE gerichtete Stelle: „. . . . et nous ajouterons que, dans plusieurs cas, le Théorème de TAYLOR semble fournir le développement d'une fonction en série convergente, quoique la somme de la série diffère essentiellement de la fonction proposée."

4) A. a. O. p. 103, 104 (= *Oeuvres*, (2) T. IV, p. 391—393).

5) Ich benütze das Zeichen $\overline{\lim}$ (= *oberer Limes*) für CAUCHYS: „*la plus grande des limites.*"

so *konvergiert* die Reihe $f(x_0) + \sum_1^\infty \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \cdot h^\nu$ für $h < \varphi^{-1}$.

Ist für irgend ein bestimmtes h_0 und $0 < \vartheta < 1$:

$$(72)\quad \overline{\lim_{n=\infty}} \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \vartheta h_0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} = \psi \text{ (oder auch: } \overline{\lim_{n=\infty}} \left| \frac{(1-\vartheta)^{n-1} \cdot f^{(n)}(x_0 + \vartheta h_0)}{(n-1)!} \right|^{\frac{1}{n}} = \psi),$$

so besitzt sie zugleich die Summe $f(x_0 + h)$ für $h < \psi^{-1}$.

Dabei ist $\psi = \varphi$, wenn:

$$(73)\quad \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \vartheta h_0)}{f^{(n)}(x_0)} \right| \qquad \left(\text{bezw. } \left| \frac{(1-\vartheta)^{n-1} \cdot f^{(n)}(x_0 + \vartheta h_0)}{f^{(n)}(x_0)} \right| \right)$$

für unendlich wachsende n *endlich* bleibt.[1])

Als *Beispiel* für die *Nicht*übereinstimmung von *Reihensumme* und darzustellender *Funktion* citiert er dann wieder lediglich das bereits oben erwähnte. Wenn nun auch in der That *a priori* die *Möglichkeit* einleuchtet, dafs $\lim_{n=\infty} R_n(x_0, h)$ einen *von Null verschiedenen* (im allgemeinen dann offenbar von x_0 und h abhängigen) *endlichen Grenzwert* $R(x_0, h)$ besitzen kann, in welchem Falle dann die zu $f(x_0 + h)$ gehörige TAYLORsche *Reihe* $S(x_0, h) = f(x_0) + \sum_1^\infty f^{(\nu)}(x_0) \cdot \frac{h^\nu}{\nu!}$ zwar *konvergieren*, aber *nicht* die *Summe* $f(x_0 + h)$, sondern $f(x_0 + h) + R(x_0, h)$ besitzen würde, so wird doch durch das obige Beispiel das *thatsächliche Vorkommen* dieses Falles *nicht vollkommen überzeugend* oder zum mindesten *nicht erschöpfend* erwiesen. Denn die in Frage kommende Funktion $e^{-\frac{1}{x^2}}$ ist an der kritischen Stelle $x = 0$ *überhaupt nicht „eigentlich definiert"*, d. h. sie kann aus dem sonst zu ihrer *Definition* dienenden *arithmetischen Ausdrucke*:

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_0^\infty (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{1}{x^{2\nu}}$$

(oder einem ähnlichen, durch *„analytische Fortsetzung"* daraus ableitbaren[2]) durch direktes Einsetzen von $x = 0$ *nicht berechnet* werden. Der ihr für $x = 0$ zuerteilte Wert beruht vielmehr auf einer *speziellen*, bis zu einem gewissen Grade *willkürlichen* Fortsetzung. In der Umgebung einer *solchen* Stelle, für welche $f(x)$ — auch im Sinne von LAGRANGE — garnicht mehr den Charakter einer *„analytischen"* Funktion besitzt, kann aber die Gültigkeit der TAYLORschen Reihenentwickelung von vornherein gar nicht er-

1) *Genauer:* Es müssen die betreffenden Ausdrücke für $0 \leq \vartheta \leq 1$ und $n > N$ unter einer bestimmten Grenze bleiben.

2) Vgl. meine Bemerkungen: Mathem. Ann. Bd. 44 (1894), p. 51.

wartet werden. Und der *wesentlichere* Teil der hier in Betracht kommenden Frage, nämlich ob die Werte $f(x_0 + h)$ eines für $x = x_0$ mit sämtlichen Derivierten *eigentlich definierten* arithmetischen Ausdrucks $f(x)$ bei *Konvergenz* der zugehörigen Taylorschen Reihe von deren *Summe* $S(x_0, h)$ *verschieden* ausfallen können, wird durch Cauchys Beispiel nicht entschieden, der *wahre Kern* der betreffenden Lagrangeschen Hypothese bleibt also eigentlich *unberührt*.

Die *andere* Hypothese Lagranges, dafs nämlich die *Endlichkeit* von $f(x_0), f^{(\nu)}(x_0)$ $(\nu = 1, 2, 3 \ldots)$ allemal *eo ipso* die *Konvergenz* von $S(x_0, h)$ nach sich ziehe, ist merkwürdiger Weise von Cauchy überhaupt nicht angefochten worden, obschon gerade *sie* auf den ersten Blick den Widerspruch weit mehr herausfordert. Denn da die Werte der Derivierten $f^{(\nu)}(x_0)$, auch wenn sie für *jedes einzelne ν endlich* ausfallen, *im allgemeinen mit ν ins Unendliche* wachsen (wie schon ein Blick auf jede beliebige gebrochen-rationale, für x_0 endliche Funktion lehrt), so liegt gar kein annehmbarer Grund vor, an der Existenz von Funktionen zu zweifeln, bei welchen $|f^{(\nu)}(x)|$ für irgend ein $x = x_0$ mit ν *so stark* (z. B. so, wie $(\nu!)^2$) *zunimmt*, dafs $\Sigma \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \cdot h^\nu$ für *kein* $h > 0$ *konvergiert*.

Im übrigen scheinen Cauchys immerhin zu einer schärferen Prüfung der Lagrangeschen Hypothesen herausfordernden Bemerkungen längere Zeit kaum beachtet worden zu sein. Wohl erst nach der Mitte des Jahrhunderts fängt das oben erwähnte Beispiel an, „klassisch" zu werden d. h. in die meisten gröfseren Lehrbücher der Differentialrechnung überzugehen, ohne freilich irgend welche Weiterbildung zu erfahren oder zu neuen, nicht schon von Cauchy gemachten Bemerkungen Anlafs zu geben.[1] Einzig und allein in Cournots *Traité élém. de la théorie des fonctions* T. I (2. éd. 1857), p. 174 fand ich ein *Raisonnement*, welches im Anschlufs an jenes Beispiel wenigstens versucht, die Unhaltbarkeit der Lagrangeschen *Gültigkeits*-Hypothese schärfer zu formulieren. Cournot hebt zunächst noch prägnanter als Cauchy den eigentlichen Grund hervor, warum aus der *Konvergenz* der Reihe noch keineswegs die *Gültigkeit* der Beziehung $S(x_0, h) = f(x_0 + h)$ folge: die Bedingung $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ zieht zwar die *Konvergenz* der Reihe nach sich, aber *nicht umgekehrt*. Sodann erklärt er es schlechthin für *absurd*, anzunehmen, dafs die Werte von $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \ldots$ den Verlauf der Kurve $y = f(x)$ für irgend ein Intervall $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ *in jedem Falle* vollständig bestimmen sollen: das

1) Hankel in seiner bekannten Abhandlung über die unendlich oft unstetigen Funktionen (1870) vertritt noch vollkommen den Lagrangeschen Standpunkt: s. Mathem. Ann. Bd. **20** (1882), p. 102.

sei allerdings *beweisbar* für jedes *algebraische* $f(x)$; dieses Resultat aber auf beliebige *transcendente* oder gar „*empirische*" Funktionen zu übertragen, dazu fehle jede Berechtigung.

Einen merklichen Fortschritt in der angedeuteten Richtung enthält erst ein 1876 in den Münchener Sitzungs-Berichten publizierter Aufsatz von P. DUBOIS-REYMOND: *Über den Gültigkeitsbereich der TAYLORschen Reihenentwickelung.*[1]) Hier wird zum ersten Male ein unbeschränkt differenzierbarer *arithmetischer Ausdruck* $f(x)$ angegeben, dessen MAC LAURINsche Reihenentwickelung *trotz* der *Endlichkeit* von $f(0)$ und $f^{(\nu)}(0)$ (für jedes einzelne $\nu = 1, 2, 3, \ldots$) *beständig*, d. h. für jedes von Null verschiedene x, *divergiert*, sodafs also hiermit wenigstens die LAGRANGEsche *Konvergenz*-Hypothese widerlegt erscheint.

Ein genaueres Eingehen auf die eigentliche, im heutigen Sinne „funktionentheoretische" Grundlage[2]) der bei dem eben genannten Beispiele auftretenden Erscheinung führte mich späterhin auf die Konstruktion ähnlich gearteter Ausdrücke, welche nicht nur eine merkliche Vereinfachung und Vervollkommnung des DUBOIS-REYMONDschen Beispiels liefern, sondern auch zur definitiven Beseitigung der LAGRANGEschen *Gültigkeits*-Hypothese dienlich erscheinen. Setzt man nämlich[3]):

$$(74)\qquad f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} \cdot \frac{1}{1 + a^{2\nu} x^{2}} \qquad (a \text{ reell und } |a| > 1),$$

so *konvergiert* diese Reihe, nebst allen durch gliedweise Differentiation daraus hervorgehenden, für jeden reellen x-Bereich *absolut* und *gleichmäfsig* und stellt also eine für alle reellen x *unbeschränkt differenzierbare*[4]) Funktion vor. Da nun insbesondere:

$$(75)\quad f(0) = e^{\lambda}, \quad f^{(2\mu)}(0) = 0, \quad f^{(2\mu-1)}(0) = (-1)^{\mu} \cdot (2\mu)!\, e^{\lambda \cdot a^{2\mu}},$$

so erkennt man ohne weiteres mit Hülfe des CAUCHYschen Fundamentalkriteriums (71), dafs die zugehörige MAC LAURINsche Reihe:

$$(76)\qquad S(0, x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot e^{\lambda \cdot a^{2\nu}} \cdot x^{2\nu}$$

---

1) Wieder abgedruckt: Mathem. Ann. Bd. **21** (1883), p. 109—117.

2) Vgl. Münch. Ber. 1892, p. 216 ff.; auch: Mathem. Ann. Bd. **42** (1893), p. 156 ff.

3) Vgl. *Chicago Congr. Papers* 1893 (publ. 1896), p. 300 ff. Daselbst auch eine graphische Darstellung einer nicht-entwickelbaren Funktion und der zugehörigen, davon verschiedenen MAC LAURINschen Reihensumme.

4) Wenn von einer Funktion $f(x)$ gesagt wird, sie sei für $x_0 \leq x < X$ *unbeschränkt differenzierbar*, so sollen hiermit immer die folgenden Eigenschaften zusammengefafst werden: $f(x)$ ist für $x_0 \leq x \leq X$ *eindeutig*, *endlich* und *stetig* und besitzt für $x_0 < x < X$ *vollständige*, für $x = x_0$ bezw. X zum mindesten *rechte* bezw. *linke* endliche Differential-Quotienten jeder endlichen Ordnung.

im Falle $\lambda > 0$ für *jedes* $|x| > 0$ *divergiert*, dagegen im Falle $\lambda < 0$ *beständig konvergiert*. Daſs aber im letzterem Falle — mit etwaiger Ausnahme einer in jedem *endlichen* Bereiche *endlichen* Anzahl von Stellen — die Beziehung $f(x) = S(0, x)$ *unmöglich* ist, erkennt man *allgemein*, wenn man beachtet, daſs für $f(x)$ als Funktion der *komplexen* Veränderlichen x der Wert $x = 0$ als *Häufungsstelle* der unendlich vielen *auſserwesentlich singulären Stellen* $x = \pm i a^{-\nu}$ erscheint. Unterwirft man im übrigen a noch der Bedingung, $\geqq \frac{e+1}{e-1}$ zu sein, so kann die *Nicht*-Existenz der Beziehung $f(x) = S(0, x)$ auch ganz direkt, lediglich mit den einfachsten, der Theorie der *reellen* Funktionen angehörigen Hilfsmitteln bewiesen werden.[1])

Beruhte die hier in Betracht kommende Eigenschaft des Ausdrucks (74), welcher sich auch leicht zu einem *Typus* verallgemeinern läſst[2]), im Grunde genommen auf der *Kondensation auſserwesentlicher Singularitäten*, so führt ein anderes, ebenfalls sehr einfaches funktionentheoretisches Prinzip zu einer weiteren Gruppe unbeschränkt differenzierbarer, aber nicht nach Potenzen von x entwickelbarer Ausdrücke: nämlich der Satz, daſs jede Potenzreihe $\Sigma a_\nu z^\nu$ mit dem Konvergenzradius $|z| = 1$ auf dem Konvergenzkreise *mindestens eine* singuläre Stelle besitzen muſs und daſs, im Falle *reeller* $a_\nu \geqq 0$ stets $z = 1$ eine solche Stelle sein muſs. Da man andererseits die a_ν leicht so wählen kann, daſs auſser der Reihe selbst auch alle durch Differentiation daraus hervorgehenden für $z = 1$ noch *konvergieren*[3]), so gelangt man mit Hilfe der Substitution $z = e^{xi}$ (wo x *reell*) zu Ausdrücken von der Form[4]):

$$(77) \qquad f_1(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \cos \nu x, \qquad f_2(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \sin \nu x,$$

welche für jedes endliche reelle x und speziell für $x = 0$ endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitzen, während die Entwickelbarkeit nach der MAC LAURINschen Reihe (wegen $z = 1$ für $x = 0$) ausgeschlossen erscheint. Übrigens läſst sich auch ganz direkt deren *beständige Divergenz* nachweisen.

Aus den besprochenen Ausdrücken lassen sich andere, in der Form

---

1) Vgl. *Chicago Congr. Papers* p. 302; Mathem. Ann. Bd. **42**, p. 162.

2) Vgl. a. a. O. p. 166.

3) Man hat nur zu setzen: $a_\nu = e^{-\frac{\nu}{m_\nu}}$, wo m_ν schwächer ins Unendliche wächst, als $\frac{\nu}{\lg \nu}$: s. Mathem. Ann. Bd. **44** (1894), p. 43.

4) Vgl. a. a. O. p. 45; auſserdem auch DUBOIS-REYMOND, a. a. O. p. 117; G. VIVANTI, Rivista di matematica **3** (1893), p. 111—114.

absolut konvergenter und *unbeschränkt differenzierbarer* FOURIERscher *Reihen* erscheinende ableiten, bei denen die Entwickelbarkeit nach der TAYLORschen Reihe nur auf *einer* Seite von x_0 stattfindet, während die auf der *andern* Seite selbstverständlich *gleichfalls konvergierende* Reihe die *mit allen Differentialquotienten stetig bleibende* Funktion nicht mehr darstellt.[1]) Sodann ergeben sich mit Hilfe bekannter Kondensationsmethoden auch solche Ausdrücke, welchen *trotz unbeschränkter Differenzierbarkeit* die *Nicht-Entwickelbarkeit* in der Umgebung *jeder* Stelle irgend eines *Intervalls* zukommt[2]), darunter auch die folgenden[3]):

$$(78) \qquad f_1(x) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!} \cos a^\nu x, \qquad f_2(x) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!} \sin a^\nu x$$

(a eine pos. ganze Zahl), welche, bei durchweg unbeschränkter Differenzierbarkeit *in jedem kleinsten Intervalle* Stellen mit beständig *divergenter*, zugleich aber auch, wenn a von der Form $4k+3$, solche mit beständig *konvergenter* TAYLORscher *Reihe* besitzen. Ich muſs indessen bemerken, daſs CH. CELLÉRIER in einer sehr merkwürdigen Abhandlung, die erst nach seinem Tode im Jahre 1890 publiziert wurde[4]), deren nicht genauer festzustellende Abfassungszeit aber erheblich zurück zu liegen scheint, die fraglichen Eigenschaften der Reihe $f_2(x)$ (mit der unnötigen Einschränkung, daſs a eine *„sehr groſse"* natürliche Zahl bedeuten solle) bereits abgeleitet hat.

Auf Grund der vorstehend mitgeteilten Resultate ist also vollkommen festgestellt, daſs die *unbeschränkte Differenzierbarkeit* von $f(x)$ für $x_0 \leq x \leq x_0 + h_0$ noch nicht die *Konvergenz* der TAYLORschen *Reihe* $S(x_0, h)$ für irgend ein $h > 0$ und diese letztere wiederum noch nicht die *Gültigkeit* der Beziehung $f(x_0 + h) = S(x_0, h)$ nach sich zieht. Und zwar — worauf ich einigen Nachdruck legen möchte — finden sich unter den, nächst den *rationalen* Funktionen, *einfachsten* arithmetischen Ausdrücken, nämlich *absolut* und *gleichmäſsig* konvergenten Reihen *rationaler*

---

1) Mathem. Ann. Bd. **44**, p. 54.

2) Mathem. Ann. Bd. **42**, p. 169—176 und (mit Berichtigung eines dort vorkommenden Fehlschlusses): Mathem. Ann. Bd. **50** (1898), p. 450. — Mathem. Ann. Bd. **44**, p. 51.

3) Vgl. auſser der zuletzt citierten Stelle: Münch. Ber. **22** (1892), p. 244 oder Mathem. Ann. Bd. **42**, p. 182. — Die Reihe $f_1(x)$ mit der Beschränkung auf *ungerade* a schon bei M. LERCH: Journ. f. Mathem. Bd. **103** (1888), p. 182.

4) Bulletin d. sc. mathém. T. XXIV (= (2) T. XIV), p. 158. Die betreffende Abhandlung ist mir leider selbst erst vor verhältnismäſsig kurzer Zeit (bei der Abfassung meines Encyklopädie-Artikels über die Grundlagen der Funktionenlehre) zu Gesicht gekommen.

Funktionen mit *rationalen Zahlenkoefficienten*, solche, bei denen der Fall der totalen *Divergenz* oder der *Nichtübereinstimmung* von $f(x_0 + h)$ und $S(x_0, h)$ wirklich eintritt (s. (74)).

Hierdurch tritt nun aber die Frage in den Vordergrund, *welche Bedingung* zu der *unbeschränkten Differenzierbarkeit* als *notwendig*[1]) und *hinreichend* noch *hinzutreten* mufs, um sowohl die *Konvergenz* von $S(x_0, h)$ als auch die *Existenz der Beziehung* $f(x_0 + h) = S(x_0, h)$ zu sichern.[2]) *Eine* derartige Bedingung besteht nun freilich in dem Verschwinden von $\lim_{n=\infty} R_n$; benützt man aber für R_n eine der erwähnten *Abschätzungsformeln*, etwa die LAGRANGEsche oder CAUCHYsche, so mufs man, da dieselben ein *unbekanntes* und überdies *mit n veränderliches* ϑ enthalten, geradezu das *gleichmäfsige Verschwinden*[3]) der betreffenden Grenzwerte für *alle* ϑ des Intervalls $0 \leqq \vartheta < 1$ verlangen, um eine zwar *hinreichende* Bedingung zu erhalten, deren *Notwendigkeit* indessen zum mindesten *fraglich* bleibt. Nimmt man dagegen für R_n die *Integralformel* (47), so gelangt man zwar zu einer *formalen Darstellung* der gesuchten *notwendigen* und *hinreichenden* Bedingung: da uns aber die *notwendigen* und *hinreichenden* Bedingungen, welchen $f(x)$ für $x_0 < x \leqq x_0 + h$ genügen mufs, damit

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h t^{n-1} \cdot f^{(n)}(x_0 + h - t) \cdot dt$$

verschwinde, *völlig unbekannt* sind, so sagt uns jene Bedingung in Bezug auf die erforderlichen *Eigenschaften der Funktion* $f(x)$ im Grunde genommen *garnichts*. Will man diesen selbst näher kommen, so mufs man das Integral durch Mittelwert-Operationen zu reduzieren suchen und kommt dann wieder nur auf die oben genannten oder ähnliche *Abschätzungsformeln*, also schliefslich auf zwar *hinreichende*, aber zunächst *nicht notwendig* erscheinende Bedingungen.

Um nun vor allem eine *notwendige* Bedingung für die *rechtsseitige* Entwickelbarkeit von $f(x_0 + h)$ (wo also $h > 0$) zu gewinnen, habe ich mit Hilfe sehr einfacher, im wesentlichen auf der *gleichmäfsigen* Kon-

1) „Von den *notwendigen* Bedingungen für die TAYLORsche Entwickelung, falls dergleichen vorhanden sind, haben wir aber nicht die geringste Vorstellung; ja ich glaube sogar, dafs über den Spielraum, welchen sie gewähren könnten, irrige Ansichten allgemein verbreitet sind" (DUBOIS-REYMOND, a. a. O. p. 108).

2) Über einen von J. KÖNIG (Mathem. Ann. Bd. **23** [1884] gemachten Versuch, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die TAYLORsche Reihenentwickelung zu formulieren, vgl. *Chicago Congr. Papers*, p. 295.

3) Vgl. Fufsn. 2) p. 458.

vergenz von Potenzreihen einer und zweier Variablen beruhender Betrachtungen den folgenden Satz bewiesen[1]):

(A) *Definiert* man $f(x)$ für $x_0 \leqq x < x_0 + R$ durch die für $0 \leqq h < R$ als konvergent vorausgesetzte Potenzreihe:

$$f(x_0 + h) = \sum_0^\infty c_\nu \cdot h^\nu, \tag{79}$$

so ist $f(x)$ für $x_0 \leqq x < x_0 + R$ *unbeschränkt differenzierbar*, und man hat für $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$\lim_{n=\infty} F_{p,n}(h, k) \equiv \lim_{n=\infty} \frac{1}{(n+p)!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot k^{n+p} = 0 \tag{80}$$

gleichmäfsig für alle h, k des Bereiches:

$$0 \leqq h \leqq h + k \leqq r, \quad \text{sofern nur: } r < R. \tag{80^a}$$

Die in der Beziehung (80) enthaltene *Folge* von Bedingungen, welche hiernach für die Darstellbarkeit von $f(x_0 + h)$ durch eine *Potenzreihe* $\Sigma c_\nu h^\nu$ in *dem* Sinne als *notwendig* erscheinen, dafs sie mit Sicherheit *sämtlich* erfüllt sind, wenn jene Darstellbarkeit vorhanden ist, läfst sich aber auf *eine einzige* reduzieren, welche allemal die Existenz aller übrigen *eo ipso* nach sich zieht; d. h. es besteht der folgende Satz:

(B) Ist $f^{(n)}(x)$ eine für jedes positive ganzzahlige n und für $x_0 < x < x_0 + R$ eindeutig definierte Funktion, welche für *irgend ein* $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ der Bedingung (80) (80^a) genügt, so gilt das gleiche für *jedes* solche p.

Mit Benützung dieser beiden Sätze lassen sich nun die Gültigkeits-Bedingungen der Taylorschen Reihenentwickelung zunächst folgendermafsen formulieren:

(I) Damit die für $x_0 \leqq x < x_0 + R$ eindeutig definierte Funktion $f(x)$ darstellbar sei durch die Formel:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_1^\infty \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \cdot h^\nu \quad \text{für: } 0 \leqq h < R, \tag{81}$$

ist *notwendig* und *hinreichend*:

1) Die unbeschränkte Differenzierbarkeit von $f(x)$ für $x_0 \leqq x < x_0 + R$.

2) Die Existenz der Beziehung (80) (80^a) für *irgend ein* $p = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Die *Notwendigkeit* dieser Bedingungen folgt unmittelbar aus dem Satze (A). Um sie als *hinreichend* zu erweisen, steht es in Folge von

1) *Über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylorschen Lehrsatzes* etc. Mathem. Ann. Bd. **44** (1894), p. 57—82. Vgl. auch die Darstellungen bei Stolz (*Grundlagen* Bd. II, p. 321 — 330) und Pascal (*Esercizi di calcolo inf.* p. 196—207).

Satz (B) frei, p beliebig zu spezialisieren. Bei der Annahme $p = -1$ geht nun aber die Bedingung (80) (80[a]), wenn man ϑh (wo $0 \leq \vartheta \leq 1$) statt h schreibt und $k = (1 - \vartheta) \cdot h$ setzt, in die folgende über:

(82) $$\lim_{n=\infty} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot (1 - \vartheta)^{n-1} \cdot h^{n-1} = 0$$

(82[a]) *gleichmäfsig* für: $0 \leq h \leq r$ (wo: $r < R$).

Da die Bedingung (82) nach Multiplikation mit h das (für jedes einzelne $h < R$ und alle ϑ des Bereiches $0 \leq \vartheta \leq 1$ *gleichmäfsige*) Verschwinden des CAUCHYschen *Restgliedes* aussagt, so folgt daraus auch unmittelbar die Gültigkeit der Entwickelung (81), und es ergiebt sich zugleich die folgende *kürzere* (auf Grund des Satzes (B) jedoch mit (I) völlig *gleichwertige*) Formulierung der Gültigkeitsbedingungen:

(II) Für die Existenz der Formel (81) ist aufser der Bedingung (I), 1) *notwendig* und *hinreichend*, dafs das CAUCHYsche Restglied

(83) $$R_n(x_0, h) = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot (1 - \vartheta)^{n-1} \cdot h^n$$

für jedes einzelne h des Bereiches $0 \leq h < R$ und alle ϑ des Bereiches $0 \leq \vartheta \leq 1$ bei $\lim n = \infty$ *gleichmäfsig* verschwinde.[1])

Es erwies sich nun aber als lehrreich, den Satz (I) auch noch von der Annahme $p = 0$ ausgehend, also unter der Voraussetzung:

(84) $$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot k^n = 0 \quad \textit{gleichmäfsig} \text{ für: } 0 \leq h \leq h + k \leq r$$

zu beweisen, da sich hierbei noch eine gewisse *Herabminderung* der schliefslich an Stelle von (84) als *notwendig* in die Voraussetzung aufzunehmende Bedingung ergiebt. Bei dem betreffenden Beweise, welcher im Anschlufs an die Bedingung (84) naturgemäfs auf der Benutzung der LAGRANGEschen Restform beruht, wird nämlich jene Bedingung in Wahrheit *garnicht vollständig* in Anspruch genommen, und man gelangt darnach noch zu folgender Fassung des fraglichen Satzes:

(III) Für die Existenz der Formel (81) ist aufser der Bedingung I, 1) *notwendig* und *hinreichend*, dafs die Reihe (81) für $h < R$ *konvergiert*[2]) und dafs, nach Annahme von $r < R$ und $\varrho < R - r$:

1) Das CAUCHYsche Restglied, das zunächst gegenüber dem LAGRANGEschen allenfalls für gewisse spezielle Restbestimmungen vorteilhafter, im übrigen aber als von sekundärer Wichtigkeit erscheint, gewinnt hierdurch eine ganz neue *prinzipielle* Bedeutung.

2) Diese *Konvergenz* ist gleichwertig mit der Bedingung:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot k^n = 0 \quad \text{für: } k < R.$$

$$(85)\quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \cdot \varrho^n = 0 \quad \textit{gleichmäßsig} \text{ für: } x_0 \leq x \leq x_0 + r.\text{[1]}$$

Während die Fassung (I) als die *allgemeinste*, (II) als die *kürzeste* erscheint, so bietet (III) folgende Vorteile: *erstens* ist darin prägnant ausgesprochen, welche besondere Bedingung noch zur *Konvergenz* der Reihe hinzutreten muſs, um die *Gültigkeit* der Entwickelung zu sichern; *zweitens* bedarf ja die *Notwendigkeit* der *Konvergenz* überhaupt keines Beweises, während diejenige der Bedingung (85) *erheblich einfacher* bewiesen werden kann[2]), als der allgemeinere Satz (A).

Die besondere Stellung, welche die Cauchysche Restform hierbei gewonnen hat, legt die Frage nahe, ob das Lagrangesche Restglied eine analoge Rolle spielt. Eine einfache funktionentheoretische Betrachtung führt nun in dieser Hinsicht zu dem folgenden Ergebnis:

(IV) Für die Existenz der Formel (81) ist auſser der Bedingung I, 1) *notwendig*, daſs das Lagrangesche Restglied:

$$(86)\qquad \overline{R_n(x_0, h)} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot h^n$$

für jedes einzelne h des Bereiches $0 \leq h < \frac{R}{2}$ und alle ϑ des Bereiches $0 \leq \vartheta \leq 1$ *gleichmäſsig* verschwinde; *hinreichend*, jedoch *nicht notwendig*, daſs dies auch für $\frac{R}{2} \leq h < R$ der Fall sei.

Durch die letzten Sätze (die sich unmittelbar auch auf den Fall $h < 0$ und sodann durch Kombination der beiden Fälle $h \gtrless 0$ auch auf die Entwickelbarkeit in dem zumeist üblichen Sinne übertragen lassen) dürfte der Taylorsche *Satz* für Funktionen einer reellen Veränderlichen einen gewissen Abschluſs erhalten haben. Zugleich gewinnt man dadurch eine präzise Formulierung für das unterscheidende Merkmal, welches die Klasse der *entwickelbaren* Funktionen aus derjenigen der bloſs *unbeschränkt differenzierbaren* heraushebt: dasselbe besteht in gewissen wohldefinierten Beschränkungen (s. Gl. (84) bezw. (85) nebst Fuſsn. 2), p. 466), an welche das Unendlichwerden von $\lim_{n=\infty} f^{(n)}(x)$ geknüpft ist, und die keineswegs als eine bloſse *Folge* der unbeschränkten Differenzierbarkeit erscheinen, sondern zu dieser noch ausdrücklich *hinzutreten* müssen.

IV. *Der Taylorsche Satz für Funktionen einer komplexen Variablen.*

Der Versuch, den Taylorschen Satz auf Funktionen einer *komplexen* Veränderlichen zu übertragen, dürfte zuerst von Cauchy in dem *Calcul*

1) Es wird also hier die Existenz der Beziehung (84) zunächst nur für $h = 0$ verlangt (s. die vorige Fuſsnote); dagegen für alle übrigen h nur bei *konstantem*, im übrigen durch Wahl von r *beliebig klein* zu machendem $k = \varrho$.

2) Vgl. a. a. O. p. 66, Zusatz I.

diff. von 1829 gemacht worden sein. Nachdem er schon früher (in dem Calcul inf. von 1823, p. 155 = Oeuvres (2) T. IV, p. 234) erkannt hatte, daſs die Anwendung des Grenzprozesses $\lim\limits_{\Delta z=0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ auf die besonderen Fälle $f(z)=e^z$, $f(z)=\lg z$ bei *komplexem* z und Δz genau dasselbe Resultat ergiebt, wie bei *reellem*, *definiert* er in der 12. Lektion des zuerst genannten Werkes (p. 138 = Oeuvres (2) T. IV, p. 431) den Differentialquotienten $f'(z)$ für den Fall eines *komplexen* z allgemein durch die Gleichung:

$$\text{87)}\qquad f'(z)=\lim_{\Delta z=0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},$$

wobei dieser Grenzübergang so zu verstehen ist, daſs über die besondere Art, wie das komplexe Inkrement Δz der Null zustrebt, keinerlei Voraussetzung gemacht wird. Die Berechtigung zur Aufstellung dieser Definition erblickt Cauchy darin, daſs dieselbe thatsächlich ein *eindeutig bestimmtes* Resultat liefere, sobald man die „*Form*" von $f(z)$ fixiert hat, d. h. genauer gesagt, sobald man jenen Grenzprozeſs auf die bekannten Elementarfunktionen und deren rationale Zusammensetzungen anwendet (wie a. a. O. des näheren gezeigt wird). Die entsprechende Definition gilt auch für die höheren Differentialquotienten.

Die Substitution

$$\text{88)}\qquad z=r\cdot e^{\alpha i}\ (\alpha\ \textit{konstant}),\qquad f(z)=\varphi(r)+i\cdot\psi(r)$$

führt sodann (a. a. O. p. 147 ff.) auf die Relationen:

$$\text{89)}\qquad \begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta r=0}\frac{f((r+\Delta r)e^{\alpha i})-f(re^{\alpha i})}{e^{\alpha i}\,\Delta r}=e^{-\alpha i}(\varphi'(r)+i\cdot\psi'(r))\\ f^{(\nu)}(z) &= e^{-\nu\alpha i}(\varphi^{(\nu)}(r)+i\cdot\psi^{(\nu)}(r)),\end{aligned}$$

und die Anwendung der Mac Laurinschen Formel auf $\varphi(r)$, $\psi(r)$ liefert, mit Benützung der aus 89) resultierenden Beziehung:

$$\text{90)}\qquad \varphi^{(\nu)}(0)+i\cdot\psi^{(\nu)}(0)=e^{\nu\alpha i}f^{(\nu)}(0)\qquad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

ohne weiteres die Übertragung jener Formel auf $f(z)$, nämlich:

$$\text{91)}\qquad f(z)=f(0)+f'(0)\cdot\frac{z}{1!}+\cdots+f^{(n-1)}(0)\cdot\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+R_n,$$

wobei freilich das Restglied in der wenig brauchbaren Form erscheint:

$$\text{92)}\qquad R_n=\frac{r^n e^{\alpha i}}{n!}\,(\varphi^{(n)}(\vartheta r)+i\cdot\psi^{(n)}(\eta r))\qquad \left(0<\begin{matrix}\vartheta\\ \eta\end{matrix}<1\right).\ ^{[1]}$$

[1] Man kann R_n auf die etwas elegantere Form bringen:

$$R_n=\frac{z^n}{n!}\cdot\sqrt{2}\cdot F_n,$$

wo ... und F_n das Maximum von $|f^{(n)}(z')|$ für $|z'|\le|z|$ bezeichnet (s. z. B. Laurent, Traité d'Analyse T. 3 (1885), p. 190).

Durch die bekannte lineare Transformation (vgl. p. 446 den Übergang von Gl. (26) zu Gl. (30)) findet CAUCHY auch die entsprechende Darstellung der allgemeinen TAYLORschen Formel für $f(z+h)$.

Auf dem von CAUCHY hier benützten, sehr nahe liegenden Grundgedanken, diese Entwickelungen aus den für *reelle* Veränderliche geltenden dadurch abzuleiten, dafs man die letzteren auf den reellen und von dem Faktor i befreiten imaginären Teil von $f(z)$ anwendet, beruht auch die von FALK[1]) und eine von MANSION[2]) gegebene Herleitung, mit dem einzigen Unterschiede, dafs daselbst von der Zerlegung:

$$f(z) \equiv f(x+yi) = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y) \tag{93}$$

ausgegangen wird, sodafs das Restglied in entsprechend modifizierter, übrigens aber ebenso wenig befriedigender Form erscheint.

Zu einer brauchbareren Restformel gelangte DARBOUX[3]) durch direkte Übertragung des *erweiterten (CAUCHYschen) Mittelwertsatzes* (51) auf Funktionen einer *komplexen* Veränderlichen. Darnach hat man:

$$\frac{F(Z) - F(z')}{(Z - z')^p} = \frac{\lambda}{p} \cdot \frac{F'(\zeta)}{(\zeta - z')^{p-1}}, \tag{94}$$

wo λ eine (im allgemeinen komplexe) Zahl mit dem absoluten Betrage $|\lambda| \leq 1$ und ζ eine auf der Verbindungslinie $\overline{z'Z}$ gelegene Stelle bedeutet (also: $\zeta = z' + \vartheta(Z - z')$, wo $0 < \vartheta < 1$). Durch Anwendung dieser Relation (für $z' = 0$, $Z = h$) auf die Funktion:

$$\begin{aligned} F(z) = f(z_0 + h) - f(z_0 + h - z) - f'(z_0 + h - z) \cdot \frac{z}{1!} - \cdots \\ - f^{(n-1)}(z_0 + h - z) \cdot \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned} \tag{95}$$

ergiebt sich dann unmittelbar die TAYLORsche Formel für $f(z_0 + h)$ mit dem Restgliede:

$$R_n = \lambda \cdot \frac{(1-\vartheta)^{n-p} \cdot h^n}{(n-1)!\, p} f^{(n)}(z_0 + \vartheta h), \tag{96}$$

welches sich von dem SCHLÖMILCH-ROCHEschen (s. Gl. (56)) nur um den Faktor λ unterscheidet.

Den von DARBOUX lediglich mit Hülfe einer kinematischen Betrachtung bewiesenen Mittelwertsatz (94) hat MANSION späterhin auch rein

1) *Sur les fonctions imaginaires à l'égard spécial du calcul des résidus* (Nova acta soc. scient. Upsal., Vol. extra ordinem, Upsala 1877), p. 14.

2) *Principe d'une théorie nouvelle des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire*; Annales de la soc. scient. de Bruxelles, 1885—86, p. 11.

3) *Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable*; Journ. de mathém. (2) T. II (1876), p. 293.

analytisch begründet.[1]) Zugleich giebt er noch eine andere Herleitung der TAYLORschen Formel mit Hülfe einer geradlinigen komplexen Integration. Das Restglied der Entwickelung von $f(z)$ nach Potenzen von $(z - z_0)$ erscheint dabei in der Form[2]):

$$(97) \qquad R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{z_0}^{z}(z-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\cdot dt,$$

vollkommen übereinstimmend mit der entsprechenden Restdarstellung für *reelle* z.[3])

Im übrigen wird man den vorstehenden Methoden zur Ableitung der TAYLORschen Formel für Funktionen einer *komplexen* Veränderlichen lediglich eine *untergeordnete* Bedeutung zuerteilen können. Sie beruhen nämlich auf einer im Grunde genommen allzu einseitigen und dem wahren Wesen der Sache *nicht* entsprechenden Übertragung der für *reelle* Veränderliche angemessenen Voraussetzungen und Schlufsfolgerungen: dabei mufs dann, statt die in Gl. (87) formulierte Fundamentalbedingung der Existenz eines bestimmten $f'(z)$ (im *komplexen* Sinne) wirklich *auszunützen*, eine ganze Folge in Wahrheit *überflüssiger* Bedingungen in die Voraussetzung aufgenommen wurden.

Die Tragweite[4]) jener Fundamentalbedingung (87) vollständig erkannt und für den Existenzbeweis der TAYLORschen Entwickelung verwertet zu haben, darf wohl (in Verbindung mit dem zu diesen Untersuchungen in naher Beziehung stehenden „*CAUCHYschen Integralsatze*") für die bedeutendste analytische Leistung CAUCHYS gelten. In zwei 1831, 1832 in *Turin* lithographisch publizierten Abhandlungen[5]) *Sur la mécanique céleste* und *Sur le calcul des résidus et des limites* hat CAUCHY den folgenden Satz aufgestellt:

---

1) a. a. O. p. 36. — Ein anderer Beweis, der auf einer WEIERSTRASS zugeschriebenen Übertragung des Mittelwertsatzes auf *komplexe* Funktionen einer *reellen* Veränderlichen beruht, bei STOLZ, *Grundlagen*, Bd. II, p. 92 (vgl. auch p. 69).

2) a. a. O. p. 31.

3) S. Gl. (49). Man hat daselbst nur $z = z_0 + h$ zu setzen und sodann $z_0 + t$ als Integrationsvariable statt t einzuführen.

4) Die Thatsache, dafs jene *eine* Bedingung *mehr* leistet, als selbst die *unbeschränkte* Differenzierbarkeit im *reellen* Sinne, findet ihre einfache Erklärung darin, dafs die *letztere* immerhin nur eine *abzählbare* Menge von Bedingungen, dagegen die *einfache* Differenzierbarkeit im *komplexen* Sinne schon allein eine solche *von der Mächtigkeit des Kontinuums* repräsentiert.

5) Die Originale sind mir leider nicht zu Gesicht gekommen. Ich citiere die Titel nach VALSON, *Vie et travaux de CAUCHY*, den Inhalt auf Grund des teilweisen Wiederabdruckes in späteren Publikationen CAUCHYS (s. weiter unten).

> Die Funktion $f(z)$ (von welcher stillschweigend vorausgesetzt wird, dafs sie für eine gewisse Umgebung von $z=0$ eindeutig, stetig und mit einem endlichen $f'(z)$ im Sinne der Gl. (87) begabt ist) läfst sich nach positiven ganzen Potenzen von z entwickeln, solange $|z|$ kleiner ist, als der absolut genommen kleinste Wert $|Z| = R$, für welchen $f(z)$ unstetig oder unendlich wird.

Der Gang des Beweises ist folgender. Setzt man $z = \varrho \cdot e^{ti}$ (wo $\varrho < R$), so hat man, wenn $F(z)$ eine Funktion vom Charakter $f(z)$ bedeutet:

$$\frac{\partial F(\varrho e^{ti})}{\partial \varrho} = \frac{1}{\varrho i} \cdot \frac{\partial F(\varrho e^{ti})}{\partial t} \quad {}^{1)} \tag{98}$$

und daher:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} dt \int_0^r \frac{\partial F(\varrho e^{ti})}{\partial \varrho} \cdot d\varrho = \frac{1}{i} \int_{-\pi}^{+\pi} dt \int_0^r \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial F(\varrho e^{ti})}{\partial t} \qquad (r < R). \tag{99}$$

Vertauscht man in dem rechts stehenden Integrale die *Integrationsfolge*, so folgt durch Ausführung der *inneren* Integrale:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \{F(re^{ti}) - F(0)\}\, dt = \frac{1}{i} \int_0^r \{F(\varrho e^{\pi i}) - F(\varrho e^{-\pi i}\}\, d\varrho$$
$$= 0 \; {}^{2)}$$

also:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(re^{ti}) \cdot dt = 2\pi \cdot F(0) \qquad (r < R). \tag{100}$$

Wird jetzt mit z ein beliebiger, der Bedingung $|z| < r$ genügender Wert bezeichnet, und setzt man sodann:

---

1) Wegen:
$$\frac{\partial F(z)}{\partial r} = f'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial r} = e^{ti} \cdot f'(z),$$
$$\frac{\partial F(z)}{\partial t} = f'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = ir \cdot e^{ti} \cdot f'(z)$$
(s. z. B. Cauchy-Moigno, *Leçons de calc. diff. et int.*, T. II, p. 328).

2) Ich bemerke, dafs Cauchys Definition der *Stetigkeit* von $F(z)$, d. h. einer *einwertigen* bezw. eines *eindeutigen* Zweiges einer *mehrwertigen* Funktion allemal die Existenz der Beziehung:
$$F(re^{ti}) = F(re^{(t \pm 2n\pi)i})$$
umfafst: vgl. Journ. de mathém. T. XI (1846), p. 316 und weiter unten p. 474, Fufsn. 2). Ein gewöhnlicher *Verzweigungspunkt* Z hätte daher bei Cauchy zwar noch als *Stetigkeitspunkt*, zugleich aber als *Grenzpunkt* (Häufungsstelle) von *Unstetigkeitspunkten* zu gelten. Infolge dessen müfste in dem obigen Hauptsatze R *nicht* definiert werden als *Minimum* der Absolutwerte von z, für welche $f(z)$ *unstetig* wird, sondern als *untere Grenze* dieser Werte.

$$F(re^{ti}) = \frac{f(re^{ti}) - f(z)}{re^{ti} - z} \cdot re^{ti} \qquad (\text{also: } F(0) = 0),$$

so ergiebt sich aus Gl. (100):

$$(101) \qquad f(z) \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti} - z} \cdot dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(re^{ti}) \cdot re^{ti}}{re^{ti} - z} \cdot dt.$$

Mit Benützung der Entwickelung von $\frac{re^{ti}}{re^{ti} - z}$ in eine für $|z| < r$ konvergierende Reihe nach Potenzen von $\frac{z}{r} \cdot e^{-ti}$ liefert das *links* stehende Integral den Wert 2π, und man findet durch Einführung der nämlichen, aber *begrenzten* Entwickelung in das *rechts* stehende Integral:

$$(102) \qquad f(z) = \sum_{0}^{n-1} c_\nu z^\nu + R_n,$$

wo:

$$(103) \qquad c_\nu = \frac{1}{2\pi r^\nu} \int_{-\pi}^{+\pi} f(re^{ti}) \cdot e^{-\nu ti} \cdot dt \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$(104) \quad R_n = \frac{z^n}{2\pi \cdot r^{n-1}} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(re^{ti})}{re^{ti} - z} \cdot e^{-(n-1)ti} \cdot dt, \quad \text{also: } |R_n| < \frac{r \cdot F_r}{r - |z|} \cdot \left|\frac{z}{r}\right|^n,$$

wenn F_r das *Maximum* von $|f(z)|$ für alle möglichen $|z| = r$ bedeutet. Man hat daher:

$$(105) \qquad \lim_{n=\infty} R_n = 0 \quad \text{für } |z| < r, \text{ d. h. schließlich für } |z| < R,$$

womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Hierzu ist aber folgendes zu bemerken. Da der eigentliche *Kern* des Beweises in einer *Vertauschung der Integrationsfolge* (Gl. (99), (100)) liegt, so müssen $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$, d. h. schließlich $f'(z)$ geeigneten *Stetigkeitsbedingungen*[1] genügen, von denen aber bei CAUCHY a. a. O. mit keinem Worte die Rede ist. Er scheint dort in der That der Ansicht zu sein, daſs $f'(z)$ immer nur *gleichzeitig* mit $f(z)$ *unstetig* werden könne. Bei einem Wiederabdrucke des obigen Satzes in den *Nouv. exercises*, T. I (1840) *fügt* er nämlich die Voraussetzung der *Stetigkeit* von $f'(z)$ *ausdrücklich hinzu* und zwar mit der Motivierung (a. a. O. p. 32): wenn es feststünde, daſs $f'(z)$ nur gleichzeitig mit $f(z)$ die Stetigkeit verlieren könnte (wie es thatsächlich bei den von ihm zu Beispielen herangezogenen Funktionen der Fa…

1) Solche sind ja sogar schon erforderlich, damit die betreffenden Integrale überhaupt einen *Sinn* haben.

), so dürfte man die fragliche Voraussetzung fortlassen; da aber eine ügende Sicherheit in dieser Beziehung *nicht* bestehe, so müsse man n die Stetigkeit von $f'(z)$ *noch besonders voraussetzen*. So findet sich n auch die ausdrückliche Voraussetzung der *Stetigkeit* von $f'(z)$ in dem *umé* jener *Turiner* Abhandlungen, welches CAUCHY in den 2. Band der *ev. exercises* (1841) aufgenommen hat.[2]) Nichtsdestoweniger hat gerade se Stetigkeitsbedingung noch mancherlei Schicksale gehabt. Während UCHY dieselbe im 19. Bande der Comptes rendus (1844, I) noch behält[3]), stellt er schon im folgenden (1844, II) die *Behauptung* auf[4]), s seinen Untersuchungen über die verschiedenen Werte eines zweifachen egrales bei Vertauschung der Integrationsfolge gehe mit voller Sicher-t hervor, daſs man, ohne an Strenge einzubüſsen, bei dem Satze über Potenzreihenentwickelung eine besondere Voraussetzung über die *Stetig-t* von $f'(z)$ *nicht* einzuführen brauche: dies stimme auch überein mit er ihm von LIOUVILLE mitgeteilten[5]) Bemerkung, sodaſs also die *ur-üngliche* (*Turiner*) Fassung von 1831 der späteren vorzuziehen sei. f welche Stelle der angeführten Untersuchungen über zweifache Inte-le[6]) sich jene *Behauptung* gründet, ist mir völlig unerfindlich. Nur iel scheint mir festzustehen, daſs CAUCHY dieselbe von nun ab *auf-t erhält, ohne* sie freilich jemals wirklich *bewiesen* zu haben.

Nichtsdestoweniger unterliegt es wohl keinem Zweifel, daſs ein so arfsinniger und strenger Analytiker wie CAUCHY zur Aufstellung der glichen Behauptung seine guten Gründe gehabt haben muſs. Ich möchte ehmen, daſs es sich dabei mehr um eine nach unseren *heutigen* Be-fen *inkorrekte Ausdrucksweise*, als um einen wirklichen — wenn auch *subjektiven*[7]) — *Irrtum* handelt. Man hat sich nur zu vergegen-tigen, daſs für CAUCHY Funktionen mit „*unendlich vielen*“ Unstetig-

1) Dieselben sind durchweg Funktionen mit *Unendlichkeitspunkten*. Soll die gliche Aussage auch auf *endlich* bleibende *eindeutige* Zweige *mehrwertiger* Funk-en passen, so müſste sie zum mindesten dahin formuliert werden, daſs $f'(z)$ nur einem Unstetigkeitspunkte von $f(z)$ oder *Grenzpunkte* von Unstetigkeitspunkten p. 471, Fuſsn. 1)) die Stetigkeit verlieren könne.

2) a. a. O. p. 50.

3) *Sur les fonctions continues* (a. a. O. p. 120 = *Oeuvres* (1) T. VIII, p. 150).

4) a. a. O. p. 1339 = *Oeuvres* (1) T. VIII, p. 368.

5) Wohl nur mündlich?

6) *Mémoire sur les intégrales définies* (1814, gedruckt 1827 in den Mém. de l'Inst. *Oeuvres* (1) T. I, p. 319—506). — *De l'influence que peut avoir dans une intégrale ble l'ordre etc.* (Bull. de la soc. philomath. 1822; auch *Anc. exerc.* T. I [1826], 85).

7) In Wahrheit hat sich die CAUCHYsche Behauptung, freilich erst in aller-ester Zeit, *in ihrem vollen Umfange* als *richtig* erwiesen (s. weiter unten).

keiten (in dem heutigen allgemeinsten Sinne) überhaupt *noch garnicht existieren.* Wenn also CAUCHY sagt, man brauche von irgend einer Funktion *garnichts* vorauszusetzen, so heifst das trotz alledem von vornherein schon immer so viel, als: man hat dieselbe für jeden endlichen Bereich „*im allgemeinen*“, d. h. (da es sich ja hier um Funktionen einer *komplexen*, also *zweier reellen* Variablen handelt) mit eventueller Ausnahme einer *endlichen* Anzahl von *Punkten* oder *Linien* (mit *endlicher* Länge) als *stetig* zu denken. Fafst man aber den Begriff einer *für* CAUCHY „*voraussetzungslosen*“ Funktion in *diesem* Sinne auf, so ist in der That die fragliche Behauptung nicht nur *objektiv richtig*, sondern auch vom CAUCHYschen Standpunkte aus *einwandfrei*, d. h. mit ausschliefslicher Benützung der von ihm ersonnenen und gehandhabten Methoden vollkommen *beweisbar*.[1])

Im übrigen erscheint es nicht uninteressant, die weitere historische Entwickelung unseres Theorems gerade mit besonderer Rücksicht auf die für $f'(z)$ erforderlichen Stetigkeitsbedingungen zu verfolgen.

E. LAMARLE, dem die oben citierte Bemerkung CAUCHYS bezw. LIOUVILLES offenbar entgangen war, veröffentlichte im 11. Bande des Journ. de mathém. (1846), p. 13 ff. eine Note *Sur le théorème de M. Cauchy relatif au développement des fonctions en séries*, in welcher er die von CAUCHY in den *Nouv. exercises* a. a. O. geforderte Stetigkeit von $f'(z)$ für überflüssig erklärt.[2]) Beim Beweise geht er, wie CAUCHY, von der Beziehung aus:

$$\frac{\partial F(re^{ti})}{\partial r} = \frac{1}{ri} \cdot \frac{\partial F(re^{ti})}{\partial t}$$

und schliefst zunächst:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{\partial F(re^{ti})}{\partial r} \cdot dt = \frac{1}{ri} \int_0^{2\pi} \frac{\partial F(re^{ti})}{\partial t} \cdot dt \\
(106)\qquad &\qquad = \frac{1}{ri} \{ F(re^{2\pi i}) - F(0) \} = 0.
\end{aligned}$$

---

1) Nämlich mit Hülfe der genau entsprechenden Ausdehnung des „*Cauchyschen Integralsatzes*“, welche sich durch *vorläufige* Ausschliefsung der kritischen Punkte oder Linien leicht bewerkstelligen läfst.

2) Andererseits führt LAMARLE noch ausdrücklich die Bedingung ein, es müfste $F(z)$ für $z = r \cdot e^{ti}$ in Bezug auf t die Periode 2π besitzen: dieselbe ist aber in der That überflüssig, wenn man den Begriff der *Stetigkeit* im CAUCHYschen Sinne auffafst (s. Fufsn. 1) p. 471). Was LAMARLE an späterer Stelle (Journ. de mathé T. XII [1847], p. 305 ff.) hiergegen noch vorbringt, läuft im wesentlichen auf ein Wortstreit hinaus. Mit Recht wendet er sich dagegen (a. a. O. p. 330 ff.) gegen ei andere Bemerkung CAUCHYS (Comptes rendus, T. **19** [1844, II], p. 141 = *Oeuvres* (T. VIII, p. 264), des Inhalts, dafs die MAC LAURINsche Reihe für $f(z)$ bei $|z| > r$ no *konvergieren* könne, wenn $f(z)$ für irgend ein z mit dem absoluten Betrage r *endlic*

Andererseits folgt aber durch *Vertauschung der Reihenfolge von Integration und Differentiation*

$$(107)\qquad \int_0^{2\pi} \frac{\partial F(re^{ti})}{\partial r} \cdot dt = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{2\pi} F(re^{ti}) \cdot dt,$$

sodafs also nach Gl. (106) $\int_0^{2\pi} F(re^{ti}) \cdot dt$ von *r unabhängig* sein mufs. Man kann also speziell $r = 0$ setzen und findet somit, analog wie bei CAUCHY (Gl. (100)):

$$(108)\qquad \int_0^{2\pi} F(re^{ti}) \cdot dt = \int_0^{2\pi} F(0) \cdot dt = 2\pi \cdot F(0),$$

woraus sich dann alles weitere genau wie dort ergiebt.

Der einzige prinzipielle Unterschied des LAMARLEschen Beweisverfahrens gegenüber dem CAUCHYschen besteht also darin, dafs hier *nicht* die Reihenfolge zweier *Integrationen*, sondern diejenige von *Integration* und *Differentiation* vertauscht wird: dazu ist aber auch wiederum erforderlich, dafs $\frac{\partial F(re^{ti})}{\partial r}$, d. h. $F'(z)$ geeigneten *Stetigkeitsbedingungen* unterworfen wird, sodafs also die Tragweite von LAMARLEs Beweis über diejenige des CAUCHYschen nicht hinausgeht.

In seiner Replik[1]) auf die vorstehende Note weist CAUCHY nur darauf hin, dafs er die Bemerkung von der Überflüssigkeit der auf $f'(z)$ bezüglichen Stetigkeitsbedingung bereits gemacht habe — ohne indessen für die genauere Begründung der betreffenden Behauptung etwas Neues vorzubringen. Dagegen zeigt er[2]), dafs er die von LAMARLE angewendete Schlufsweise im wesentlichen bereits an einer früheren Stelle[3]) zur Ableitung der MAC LAURINschen Reihenentwickelung benützt habe, mit dem einzigen Unterschiede, dafs er dort statt der *Integrale* gewisse *Mittelwerte*

---

unstetig wird (*Beispiel:* $f(z) = (1 - z^2 + iz \cdot \sqrt{2 - z^2})^{\frac{1}{2}} + (1 - z^2 - iz \cdot \sqrt{2 - z^2})^{\frac{1}{2}}$). Dieses scheinbare Paradoxon beruht in Wahrheit lediglich auf der unzulänglichen Auffassung der verschiedenen *Zweige* einer *mehrwertigen* Funktion.

1) Journ. de mathém. T. XI, p. 313 ff.

2) A. a. O. p. 328. Anschliefsend bemerkt CAUCHY, dafs man das fragliche Resultat (d. h. eigentlich den erforderlichen besonderen Fall des CAUCHYschen Integralsatzes) auch mit Hülfe einer von ihm (*Calcul inf.* p. 131 = *Oeuvres* (2), T. IV, p. 199) angegebenen Formel zur Integration *vollständiger Differentiale* herleiten kann. Im übrigen kommt man hierbei auch nicht aus, ohne $f'(z)$ gewissen Stetigkeitsbedingungen zu unterwerfen: vgl. meinen Beweis des CAUCHYschen Integralsatzes, Münch. Ber. Bd. **25** (1895), p. 63 ff.

3) *Nouv. exercises*, T. I (1840), p. 269 ff. (Auch: Comptes rendus, T. **10** [1840, I], p. 640 = *Oeuvres* (1) T. V, p. 180).

(d. h. eigentlich *Spezialdefinitionen* jener Integrale) in Anwendung bringt, nämlich:

$$(109)\qquad \mathcal{M}(F(r)) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} {}_{\nu} F\left(e^{\frac{2\nu\pi i}{n}} \cdot r\right). \,^{1)}$$

Mit Hülfe der Beziehung:

$$(110)\qquad \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = F'(z) + \varphi \qquad (\text{wo: } |\varphi| < \varepsilon \text{ für: } |h| < \delta)$$

beweist a. a. O. CAUCHY, dafs $\mathcal{M}(F(r))$ für $0 \leq r < R$ von r *unabhängig* ist, falls $F(z)$, $F'(z)$ für $0 \leq |z| < R$ *stetig* sind: die besondere Wahl $r = 0$ liefert also wiederum die mit der Integralbeziehung (108) bezw. (100) gleichwertige Relation:

$$(111)\qquad \mathcal{M}(F(r)) = F(0).$$

CAUCHYS Beweis ist insofern unvollständig, als derselbe *wesentlich* auf der Voraussetzung der *gleichmäfsigen* Differenzierbarkeit von $F(z)$ beruht, d. h. es wird dabei die Existenz der Bedingung (110) in *dem* Sinne gefordert, dafs für *alle* in Betracht kommenden z durchweg $|\varphi| < \varepsilon$ ausfällt, sofern nur $|h| < \delta$. Auch fehlt der Nachweis für die *Existenz* des Grenzwertes $\mathcal{M}(F(r))$. Beide Lücken lassen sich indessen ausfüllen. Wie ich gezeigt habe, zieht in der That die *Stetigkeit* von $F'(z)$ stets auch die *gleichmäfsige* Differenzierbarkeit von $F(z)$ nach sich[2]), während andererseits die spezielle Annahme $n = 2^m$ gestattet, den fraglichen Existenzbeweis für $\mathcal{M}(F(r))$ in aufserordentlich einfacher Weise zu führen.[3]) Zugleich gewinnt man dabei den Vorteil, die bei *beliebigem* n in der *transcendenten* Form $e^{\frac{2\nu\pi i}{n}}$ erscheinenden Einheitswurzeln durch die ν^{ten} Potenzen einer eindeutig definierten, $(m-2)$ *fach iterierten Quadratwurzel* ersetzen zu können, sodafs man auf diese Weise den TAYLORschen Satz (und sogar dessen LAURENTsche Verallgemeinerung) für ein mit *stetigem* $f'(z)$ begabtes $f(z)$ unter ausschliefslicher Benutzung der denkbar *elementarsten* Hülfsmittel herzuleiten vermag.[4]) Dabei läfst sich die auf $f'(z)$ bezügliche *Stetigkeits*-Voraussetzung zwar analog, wie bei den zuvor betrachteten

---

1) Man hat offenbar:

$$\mathcal{M}(F(r)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r e^{ti}) \cdot dt.$$

2) Münch. Ber. Bd. **25** (1895), p. 297. Anderer Beweis bei STOLZ, *Grundlagen* Bd. II, p. 94.

3) Mathem. Ann. Bd. **47** (1896), p. 132. Der entsprechende Beweis bei *beliebigem n* würde ganz dieselben Umständlichkeiten erfordern, wie der Existenzbeweis für das bestimmte Integral.

4) Münch. Ber. Bd. **26** (1896), p. 172.

Integralbeweisen, noch merklich reduzieren, immerhin verbleibt sie als *„im allgemeinen"* erforderlich.

Auch die bisherigen Beweise des CAUCHYschen *Integralsatzes*, welcher ja die zur Herleitung des TAYLORschen Satzes dienenden Fundamentalgleichungen (100) bezw. (108) oder (111) als Folgerungen enthält, zeigen sich — mit einer sogleich zu besprechenden Ausnahme neuesten Datums — nicht geeignet, ein gewisses Mafs von *Stetigkeits*-Bedingungen für $f'(z)$ entbehrlich zu machen.[1]) Der innere Grund dieser Erscheinung ist wohl darin zu suchen, dafs die Mehrzahl dieser Beweise in letzter Linie garnicht auf der Existenz eines von der Art des Grenzüberganges unabhängigen $f'(z)$, vielmehr nur auf derjenigen der Beziehungen:

$$(112)\qquad \frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\partial f(z)}{\partial y} \quad \text{bezw.} \quad \frac{\partial f(z)}{\partial r} = \frac{1}{ri}\cdot\frac{\partial f(z)}{\partial t}$$

beruht.[2]) Da diese letzteren zwar aus der Existenz von $f'(z)$ *folgen*, dagegen noch nicht ausreichen, um dieselbe auch umgekehrt *nach sich zu ziehen*[3]), so wird also bei diesen Beweisen die *eigentliche* Voraussetzung noch nicht vollständig ausgenützt, und es erscheint *a priori* begreiflich, dafs als Ersatz für das so entstehende Manko noch gewisse *Stetigkeits*-Bedingungen[4]) zu den Beziehungen (112) hinzutreten müssen.

Andererseits hatte es aber bisher den Anschein, dafs auch diejenigen Beweise, welche auf der *direkten* Verwertung der *Differenzierbarkeit* von $f(z)$, d. h. der Existenz der Beziehung beruhen:

$$(113)\qquad \left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)\right| < \varepsilon \quad \text{für: } |h| < \delta \quad ^{5)},$$

erst exakt ausfallen, wenn (geradeso wie bei der Herleitung der CAUCHYschen Gleichung (111)) die *gleichmäfsige*[6]) Differenzierbarkeit von $f(z)$ vorausgesetzt wird. Dies galt insbesondere zunächst auch von dem in diese Kategorie gehörigen sehr einfachen Beweise, den GOURSAT im 4. Bande der Acta mathematica (1884), p. 197—200 mitgeteilt hat. Nun hat

1) Vgl. meine Bemerkungen in den Münch. Ber Bd. **25** (1895), p. 41 ff; desgl. p. 304.

2) Das gleiche gilt auch von denjenigen Beweisen des TAYLORschen Satzes, welche die FOURIERsche Reihenentwickelung von $f(z)$ längs einer Kreislinie zum Ausgangspunkte nehmen. Vgl. BONNET, *Mémoire sur la théorie générale des séries* (Mém. Acad. Belg. T. **23** [1850]), p. 94; HARNACK, Mathem. Ann. Bd. **21** (1883), p. 306; PICARD, *Traité d' analyse* T. II (1893), p. 64.

3) Vgl. THOMAE, *Abrifs einer Theorie der kompl. Funktionen* etc. (2 Aufl., Halle 1873) p. 17, 119. — STOLZ, *Grundlagen*, Bd. I, p. 134; Bd. II, p. 82.

4) Über die hierbei äufsersten Falls zu erzielende *Reduktion* dieser Stetigkeitsbedingungen vgl. Münch. Ber. Bd. **29** (1899), p. 61.

5) Dabei könnte zunächst δ mit z veränderlich sein.

6) D. h die Konstanz von δ bei veränderlichem z.

aber GOURSAT neuerdings gezeigt[1]), daſs man gerade bei diesem Beweise denjenigen Schluſs, welchen er ursprünglich auf die Voraussetzung der *gleichmäſsigen* Differenzierbarkeit gegründet hatte, auch schon mit Hülfe einer weniger eng gefaſsten, *jeder* (im komplexen Sinne) *differenzierbaren* Funktion *eo ipso* zukommenden Eigenschaft herleiten kann. Dieselbe ist in dem folgenden Lemma enthalten:

Es besitze $f(z)$ für jede Stelle im Innern und auf der Begrenzung des endlichen Bereiches A ein endliches $f'(z)$.[2]) Wird dann $\varepsilon > 0$ beliebig vorgeschrieben, so läſst sich A (auf unendlich viele Arten) in eine *endliche* Anzahl von Teilbereichen A_ν zerlegen, derart, daſs:

$$(114)\qquad |f(z_\nu) - f(\zeta_\nu) - (z_\nu - \zeta_\nu)\cdot f'(\zeta_\nu)| \leq \varepsilon \cdot |z_\nu - \zeta_\nu|.$$

Dabei bedeutet z_ν *jeden beliebigen* Punkt auf der *Begrenzung* von A_ν, ζ_ν einen *bestimmten*, im Innern oder auf der Begrenzung von A_ν allemal *wirklich vorhandenen*[3]) Punkt.

Mit Hülfe dieses Lemmas kann nun der CAUCHYsche *Integralsatz* zunächst für den Fall, daſs als Bereich A ein *Rechteck* mit den zu den Koordinatenaxen parallelen Seiten a und b angenommen wird, im wesentlichen nach GOURSAT auf folgende äuſserst einfache Art bewiesen werden. Man wähle als Teilbereiche A_ν die n^2 kongruenten Rechtecke, welche entstehen, wenn man sowohl a als b in n gleiche Teile zerlegt und durch die Teilpunkte Parallelen zu den Axen zieht. Bezeichnet man dann mit $\int\limits_{(A)}, \int\limits_{(A_\nu)}$ ein über die Begrenzung von A bezw. A_ν in positiver Richtung erstrecktes Integral, so hat man:

$$(115)\qquad \int\limits_{(A)} f(z)\cdot dz = \sum_1^{n^2}{}_\nu \int\limits_{(A_\nu)} f(z)\cdot dz \equiv \sum_1^{n^2}{}_\nu \int f(z_\nu)\cdot dz_\nu.$$

Nun ist identisch:

$$(116)\qquad \int f(z_\nu)\cdot dz_\nu = \int \{f(z_\nu) - f(\zeta_\nu) - (z_\nu - \zeta_\nu)\cdot f'(\zeta_\nu)\}\cdot dz_\nu$$
$$+ \{f(\zeta_\nu) - \zeta_\nu\cdot f'(\zeta_\nu)\}\cdot \int dz_\nu + f'(\zeta_\nu)\int z_\nu\cdot dz_\nu,$$

und daher — wegen $\int dz_\nu = 0$, $\int z_\nu\, dz_\nu = 0$ — mit Benutzung von Ungl. (114):

1) Transact. of the American mathem. soc. Vol. I (1900), p. 14.

2) Dabei braucht nicht einmal vorausgesetzt zu werden, daſs $|f'(z)|$ unter einer festen Grenze bleibt.

3) Die Existenz dieser Punkte ζ_ν kann durch ein bekanntes Teilungs- und Grenzverfahren leicht bewiesen werden.

$$\left|\int f(z_\nu)\cdot dz_\nu\right| \leq \varepsilon\cdot\int |z_\nu - \zeta_\nu|\cdot|dz_\nu|$$

$$(117)\qquad < \varepsilon\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{n}\cdot\int|dz_\nu| = \varepsilon\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{n}\cdot 2\,\frac{a+b}{n},$$

sodafs sich schliefslich aus Gl. (115) ergiebt:

$$(118)\qquad \left|\int f(z)\cdot dz\right| < \varepsilon\cdot 2\sqrt{a^2+b^2}\cdot(a+b)\ \text{d. h.} = 0,$$

da ja ε beliebig klein angenommen werden kann. Der hiermit zunächst für den Fall eines *Rechteckes* bewiesene Satz läfst sich aber ohne weiteres auf ein beliebiges, aus solchen Rechtecken zusammengesetztes „*Treppen-Polygon*" und sodann durch eine einfache Grenzbetrachtung auf einen im wesentlichen *beliebig begrenzten* Bereich (insbesondere einen Kreis oder Kreisring) übertragen.[1]) Daraus folgt dann aber weiter, dafs auch der TAYLORsche Satz unter der blofsen Voraussetzung eines für jedes einzelne z *endlichen*, aber an keinerlei *Stetigkeits*-Bedingungen gebundenen $f'(z)$ bewiesen werden kann.[2]) Und es ergiebt sich somit die merkwürdige Thatsache, dafs für Funktionen einer *komplexen* Veränderlichen der TAYLORsche Satz in der *vollen Allgemeinheit* gültig ist, wie ihn CAUCHY thatsächlich *ausgesprochen*, aber sicher nicht in diesem Umfange *gemeint* hat, geradeso wie andererseits das CAUCHYsche Restglied bei der Formulierung des nämlichen Satzes für Funktionen einer *reellen* Veränderlichen eine Bedeutung gewonnen hat, welche über die ursprünglich damit beabsichtigten Zwecke merklich hinausgeht.

1) Vgl. Münch. Ber. Bd. 25 (1895), p. 67.

2) Man kann schliefslich sogar auch noch die Voraussetzung der *Endlichkeit* von $f'(z)$ für eine endliche Anzahl von Punkten und Linien fallen lassen (vgl. Fufsnote 1), p. 474.

Über die von der „Royal Society" geplante mathematische Jahresbibliographie.

Von

G. Eneström in Stockholm.

Im vorigen Hefte der Bibliotheca Mathematica berichtete Herr J. H. Graf (S. 250—257) über die Verhandlungen, zu welchen die von der „Royal Society" geplante internationale naturwissenschaftliche Bibliographie Veranlassung gegeben hat, und am Ende seines Aufsatzes teilte er mit, dafs der Schlufskongrefs am 12. Juni 1900 abgehalten werden sollte. Dieser Kongrefs hat jetzt stattgefunden, und obgleich die finanzielle Frage des Unternehmens noch nicht vollständig erledigt ist[1]), dürfte der Beginn der Zusammenstellung der Bibliographie für den 1. Januar 1901 sicher zu erwarten sein, und zwar in wesentlicher Übereinstimmung mit den von den deutschen Delegierten 1899 wegen der Beteiligung gestellten Bedingungen (siehe Graf, a. a. O. S. 254—255). Die Zettelausgabe und die sog. sachlichen Nachweise („subject entries"), also das, worauf man ursprünglich das gröfste Gewicht legte, fallen vorläufig weg, und für jede der 17 in Betracht kommenden Wissenschaften soll in der Regel jährlich eine Bibliographie in Buchform erscheinen. Nach den kürzlich veröffentlichten näheren Bestimmungen[2]) soll jede solche Bibliographie

1) Von den 300 Exemplaren, die verkauft werden müssen, damit die finanzielle Seite des Unternehmens gesichert werde, sind zusammen 163 von England, Frankreich, Deutschland, Italien, der Schweiz und Norwegen subskribiert und von einigen anderen Ländern sind Abonnements in Aussicht gestellt. — Nach einer Mitteilung in Science ($\mathbf{12}_2$, 1900, S. 271) fehlten Anfang August 1900 von den 300 nötigen Abonnements etwa 90, aber ein Mitglied der Royal Society hatte sich bereit erklärt auf 45 Exemplare zu subskribieren, unter der Bedingung dafs ebenso viele Exemplare in den Vereinigten Staaten von Nordamerika vertrieben wurden. Einer späteren Notiz in Science ($\mathbf{12}_2$, 1900, S. 458) entnehme ich, dafs alle diese 45 Exemplare Mitte September vertrieben waren.

2) *Report of the proceedings at the third international conference on a catalogue of scientific literature* (London 1900), S. 11—24. — Abgedruckt unter dem Titel: *The international catalogue of scientific literature* (Scheme of publication approved by the International conference of 1900) in Science (New-York) $\mathbf{12}_2$, 1900, 215—222.

zuerst das für die betreffende Wissenschaft festgestellte Klassifikations-Schema, sowie ein alphabetisches Verzeichnis der Namen aller Abteilungen desselben mit den zugehörigen Registriersymbolen, enthalten, so daſs man unmittelbar den Platz jeder Abteilung in dem vorangehenden Schema auffinden kann. Dann folgt die eigentliche Bibliographie, nämlich ein nach den Verfassernamen *alphabetisch* geordnetes Verzeichnis der betreffenden Schriften mit genauen bibliographischen Angaben. Zuletzt kommt noch ein Verzeichnis derselben Schriften, geordnet nach dem Klassifikations-Schema, also ein systematisches Register zur alphabetischen Abteilung; in diesem Register brauchen die Titel der Schriften nicht vollständig und auch nicht immer in der Originalsprache angeführt zu werden.

Vergleicht man diesen Plan teils mit dem ursprünglichen, teils mit der Anordnung einer mathematischen Jahresbibliographie, die ich am Ende meines Vortrages[1]) am internationalen Mathematiker-Kongresse in Zürich 1897 als wünschenswert hervorgehoben habe, so findet man, daſs der Unterschied im ersten Falle, wie ich schon oben beiläufig bemerkt habe, sehr groſs, im zweiten Falle aber ganz unwesentlich ist; in der That sollte die von mir empfohlene Bibliographie jährlich in Buchform erscheinen, und, wie die gewöhnlichen Buchhandlungskataloge, teils eine nach den Verfassernamen alphabetisch geordnete Hauptabteilung, teils ein systematisches Register dazu enthalten. Ob man am Anfang jedes Jahrgangs der Bibliographie das Klassifikations-Schema mit alphabetischem Register abdrucken will oder nicht, ist offenbar eine Nebensache; ich werde unten auf diese Frage zurückkommen.

Wenn ich also mit dem Plan der zu erwartenden mathematischen Jahresbibliographie im wesentlichen einverstanden bin, so bin ich dagegen gar nicht überzeugt, daſs die Mathematiker durch das neue Unternehmen einen wirklich guten bibliographischen Führer bekommen werden. Um einen solchen herzustellen, genügt es ja nicht, daſs der allgemeine Plan der Arbeit gut ist, sondern die Arbeit selbst muſs zweckmäſsig geordnet und mit Sachkunde ausgeführt werden, und in dieser Hinsicht scheinen mir die in Aussicht gestellten Anordnungen zu wenig zu versprechen. Das Material, d. h. die Titelabschriften mit den bibliographischen Angaben, soll von den sogenannten Regionalbureaus hergestellt und an das Centralbureau in London eingesandt werden, wo es geordnet und veröffentlicht wird. Zuerst ist zu bemerken, daſs sicherlich nicht für alle Länder solche Regionalbureaus zustande kommen, und daſs es offenbar dem Centralbureau in London unmöglich sein wird das Fehlende auch nur annäherungsweise

1) Eneström, *Über die neuesten mathematisch bibliographischen Unternehmungen.* Biblioth. Mathem. 1897, S. 71.

selbst zu ergänzen; auch kann man betreffs der übrigen Länder nicht erwarten, dafs sich in jedem Regionalbureau ein bibliographisch geschulter und interessierter Mathematiker findet, und aus diesem Grunde wird das an das Centralbureau eingesandte Material zum Teil mangelhaft sein. Nun ist es ja wahr, dafs dem Centralbureau nach den Beschlüssen des Kongresses sachkundige Assistenten[1]) und Ratgeber[2]) zur Verfügung stehen sollen, aber ich fürchte, dafs es unmöglich sein wird in London passende Mitarbeiter für alle Wissenschaften zu bekommen und dafs die Ratgeber die Arbeit nur wenig fördern werden. Dafs man übrigens von Anfang an übersehen hat, wie wichtig eine speziell sachkundige Einsammlung und Bearbeitung des Materials ist, geht wohl aus dem Umstande hervor, dafs man keine Mafsregeln ergriff, um sich von den schon befindlichen bibliographisch-litterarischen Unternehmungen auf dem Gebiete der besonderen Wissenschaften wirksamen Beistandes zu versichern; bekanntlich haben wir für die Mathematik zwei solche vorzügliche, nämlich das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ in Berlin und die „Revue semestrielle des publications mathématiques“ in Amsterdam.

Ich habe oben auf einen Übelstand hingewiesen, welchen die Centralisation des geplanten Unternehmens in London mit sich führt, nämlich die Schwierigkeit passende Mitarbeiter für alle Wissenschaften zu finden. Ein anderer Übelstand, der aus derselben Ursache herrührt, ist, dafs die Bibliographien der besonderen Wissenschaften nicht alle gleichzeitig erscheinen können.[3]) Wären diese Bibliographien *nur* dazu bestimmt, unmittelbar nach ihrem Erscheinen benutzt und dann bei Seite gelegt zu werden, so würde der Zeitpunkt der Veröffentlichung gleichgültig sein, aber meiner Ansicht nach mufs man grofses Gewicht darauf legen, dafs sie auch für spätere Benutzung geeignet sind, und aus diesem Grunde wäre es erwünscht, dafs jede derselben die Litteratur eines besonderen *Kalenderjahres* enthielte.[4]) Es wäre also sehr vorteilhaft, wenn die mathe-

---

1) „The paid staff shall consist of . . . expert assistants skilled in the literature of various branches of science“. Science **12**$_2$, 1900, S. 217.

2) „If the International council so decide, there shall also be a Consultative committee . . . consisting of persons representing the several sciences“. — „The International council shall appoint for each science . . . five persons skilled in that science, to form an International committee of referees“. Science, a. a. O., S. 217.

3) Die Bibliographien sollen in vier Gruppen geteilt werden, und die der ersten Gruppe so bald wie möglich nach dem 1. Januar, die der zweiten Gruppe so bald wie möglich nach dem 1. April u. s. w. veröffentlicht werden (vgl. Science **12**$_2$, 1900, S. 219).

4) In jedem Falle scheint es mir wenig angemessen, dafs das Datum der *Einsendung* der Titelabschriften an das Centralbureau für die Publikation derselben mafsgebend sein wird (vgl. Science a. a. O., S. 219: „The titles to be indexed in each

matische Jahresbibliographie nicht von dem Centralbureau in London, sondern von einem besonderen mathematischen Sektionsbureau herausgegeben würde, das wohl am besten seinen Sitz entweder in Amsterdam oder in Berlin haben würde; im letzteren Falle könnte dies Bureau mit dem deutschen Regionalbureau vereinigt werden. An dieses Bureau sollte dann das Centralbureau alle mathematischen Titelabschriften übermitteln, und ohne Zweifel würde es dem Sektionsbureau leicht sein auch direkt von Mitarbeitern in verschiedenen Ländern gutes Material zu bekommen. Auf diese Weise würden wir sicherlich eine vorzügliche mathematische Jahresbibliographie haben.

In Bezug auf die Anordnung der Bibliographie habe ich mich schon mit dem neuen Plan im wesentlichen einverstanden erklärt. Ich bemerke nur, dafs es wünschenswert wäre, darin auch Recensionen mathematischer Schriften zu verzeichnen, und dafs, wenn man wirklich in jedem Jahrgange ein alphabetisches Verzeichnis der Namen aller Abteilungen des Klassifikations-Schemas einführen will, dies Verzeichnis ans Ende der Bibliographie gesetzt und mit Verweisen auf die zu jeder Abteilung gehörenden Schriften des Jahrganges versehen werden könnte. Diese Verweise sollten aber nur aus den Verfassernamen und, wenn die alphabetische Abteilung der Bibliographie mehrere Schriften desselben Verfassers verzeichnet, aus der Ordnungszahl der Schrift bestehen. Noch besser wäre es, wenn man im Verzeichnisse auch Kunstausdrücke aufnähme, die sich zwar nicht im Klassifikations-Schema finden, aber dennoch als Schlagwörter benutzt werden können.

Jeder Jahrgang der mathematischen Jahresbibliographie sollte also eventuell eine Übersicht über das Klassifikations-Schema und dann folgende drei Abteilungen: 1) Nominalverzeichnis, 2) Systematisches Verzeichnis, 3) Alphabetisches Realregister enthalten. Um zu zeigen, wie ich mir die Anordnung dieser Abteilungen denke, füge ich folgende Probe hinzu.[1])

[Nominalverzeichnis.]

Beltrami, E., [1] Quelques remarques au sujet des fonctions sphériques.
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **110,** 1890, 934—938.

Beltrami, E., [2] Sulle funzioni complesse.
Milano, Istituto Lombardo, Rendiconti 27_2, 1894, 337—344.

---

volume shall be those received at the Central Bureau from the Regional Bureaus not less than three calendar months, or such shorter period as the Central Bureau may fix, before the first day of the month in which the volume is to be published").

1) Da ich die Klassifikation als eine noch zu diskutierende Frage betrachte, habe ich hier keine spezielleren Abteilungen eingeführt.

Kronecker, L., Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Gröfsen.
Journ. für Mathem. **92,** 1882, 1—123.

Lie, S., Über die Grundlagen der Geometrie I, II.
Leipzig, Sächs. Gesellsch. der Wissensch., Berichte (Math. Cl.) **42,** 1890, 284—321, 355—418.

[Systematisches Verzeichnis.]

Algebra. Allgemeines.

Kronecker, Arithmetische Theorie der algebraischen Gröfsen. (Journ. für Mathem. **92.**)

Funktionentheorie. Allgemeines.

Beltrami, Sulle funzioni complesse. (*Milano,* Rend. 27_2.)

Funktionentheorie. Besondere Funktionen.

Beltrami, Remarque au sujet des fonctions sphériques. (*Paris,* CR. **110.**)

Geometrie. Allgemeines.

Lie, Grundlagen der Geometrie. (*Leipzig,* Ber. **42.**)

[Realregister.]

Algebra, siehe Algebraische Gröfsen.

Algebraische Gröfsen: Kronecker.

Funktionen, siehe Komplexe Funktionen, Kugelfunktionen.

Geometrie, siehe Grundlagen der Geometrie.

Grundlagen der Geometrie: Lie.

Komplexe Funktionen: Beltrami [2].

Kugelfunktionen: Beltrami [1].

Der zweite internationale Mathematiker-Kongrefs zu Paris vom 6. bis 11. August 1900.

Von

E. Lampe in Berlin.

Auf dem ersten internationalen Mathematiker-Kongresse in Zürich (9. bis 11. August 1897) wurde beschlossen, dass internationale mathematische Kongresse künftighin in Zwischenräumen von 3 bis 5 Jahren und unter gebührender Berücksichtigung der verschiedenen Länder veranstaltet werden sollten, ferner dafs der nächste Kongrefs im Jahre 1900 in Paris stattfinden sollte. Mit der Vorbereitung und Organisation desselben wurde die „Société Mathématique de France" beauftragt.

Dementsprechend ergingen schon sehr früh im Jahre 1899 die Einladungen zur Teilnahme an diesem zweiten internationalen Mathematiker-Kongresse, und in einem Rundschreiben vom Dezember 1899 teilte der Organisationsausschufs mit, dafs gegen 1000 Anmeldungen von Mathematikern eingegangen wären, in deren Begleitung noch 680 Familienmitglieder erscheinen würden.

In Anbetracht der Weltausstellung und des grofsen Reizes, den ein Besuch von Paris an sich hat, erschien diese Zahl, obgleich über Erwarten hoch, doch nicht unglaublich, und manchem, der sich angemeldet hatte, mag, wie dem Schreiber dieser Zeilen, ein gelindes Grauen angekommen sein ob der zu erwartenden Schwierigkeit, sich mit einer solchen Menge von Jüngern der Mathesis und den von ihnen in Aussicht stehenden Vorträgen abzufinden. Sei es nun die abschreckende Wirkung dieser Mitteilung, seien es die haarsträubenden Berichte über die fürchterliche Hitze in Paris während des Monats Juli mit ihren die Gesundheit schädigenden Folgen, sodafs es unmöglich sein sollte, Trinkwasser zu erhalten und Fahrgelegenheit zu gewinnen, sei es das Bedürfnis der Mehrzahl nach Erholung in frischer Luft auf den Bergen oder an der See, die Flucht vor dem lärmenden und tobenden Getreibe einer Millionenstadt bei einer Weltausstellung, sei es die Ungewifsheit über die Verhandlungen des Kongresses, vielleicht aus dem Zusammenwirken aller dieser Ursachen blieb die wirkliche Besuchsziffer des Kongresses weit hinter den oben angegebenen Zahlen zurück. Selbst die Pariser Mathematiker waren nicht alle zur Stelle, und wenn man auch verstehen kann und nur billigen mufs, dafs der greise HERMITE sich zu dieser Zeit à la campagne zurückzog, so erregte doch die Abwesenheit einiger im kräftigsten Mannesalter stehenden hervorragenden Pariser Mathematiker eine gewisse Verwunderung, zumal sie es unterlassen hatten, auch nur formell sich als Teilnehmer des Kongresses einzuschreiben.

Die einzige Teilnehmerliste, welche erst nach der Mitte der Kongrefswoche ausgegeben wurde, und welche noch vieler Berichtigungen bedarf, weist im ganzen 293 Namen auf, einschliefslich der angemeldeten Familienmitglieder. Da in diese Liste diejenigen aufgenommen sind, die ihren Beitrag bereits vor dem Beginne des Kongresses eingeschickt hatten, manche derselben aber nicht erschienen waren, so wird die Anzahl aller anwesenden Teilnehmer mit Einschlufs der sie begleitenden Familienmitglieder die Ziffer 300 kaum erreicht haben, eine verhältnismäfsig geringe Zunahme gegenüber den 242 Teilnehmern an dem ersten internationalen Mathematiker-Kongresse in Zürich.

Nach den häufigen und frühzeitigen Benachrichtigungen, die versandt worden waren, schien es, dafs alle Organe vortrefflich arbeiteten, und dafs alle Vorkehrungen rechtzeitig getroffen waren, sodafs eine ordnungsmäfsige Abwickelung des Programms zu erwarten war. Eine Enttäuschung erfuhren dann zuerst die früh eingetroffenen Gäste, als sie bei Empfangnahme ihrer Teilnehmerkarte in dem Laden der Buchhandlung von Carré & Naud, rue Racine 3, hörten, dafs ein Programm noch nicht existierte. Die später eingetroffenen Gäste aber, die sich in Übereinstimmung mit der ihnen zugeschickten Benachrichtigung zur Eröffnungsstunde um $2^1/_2$ Uhr am 6. August eingerichtet hatten, wurden durch die Nachricht überrascht, dafs die Eröffnung schon am Vormittag um 9 Uhr stattgefunden hatte. Diese Verschiebung war nämlich dadurch notwendig geworden, dafs der Saal im Palais des Congrès, in welchem die feierliche Eröffnung stattfinden sollte, um 3 Uhr nachmittags bereits an den internationalen Physiker-Kongrefs vergeben war. Die letztgekommenen konnten natürlich auch nicht wissen, dass am Sonntag Abend bereits eine zwanglose Zusammenkunft im Café Voltaire gegenüber dem Odeontheater stattgefunden hatte.

Hiernach ist es wohl nicht wunderbar, dafs die Eröffnungssitzung im Palais des Congrès noch nicht alle Teilnehmer, die schon in Paris waren, vereinigte, obgleich sie wohl die höchste Besuchsziffer unter allen Sitzungen aufzuweisen hatte. In geschäftsmäfsiger Weise leitete Hr. POINCARÉ, der zum Präsidenten des Kongresses gewählte Vorsitzende des Organisationsausschusses, die Verhandlungen zur Konstituierung des Kongresses, indem er die von diesem Ausschusse aufgestellte Liste der Mitglieder des Vorstandes durch Zuruf bestätigen ließ. Die Zusammensetzung war die folgende:

Ehrenpräsident: HERMITE.

Präsident: POINCARÉ.

Vize-Präsidenten: CZUBER, GEISER, GORDAN, GREENHILL, LINDELÖF, LINDEMANN, MITTAG-LEFFLER, MOORE, TICHOMANDRITZKY, VOLTERRA, ZEUTHEN.

Generalsekretär: DUPORCQ.

Schriftführer: BENDIXSON, CAPELLI, MINKOWSKI, PTASZYCKI, WHITEHEAD.

Offizielle Abgesandte aus Österreich: CZUBER, FINGER; Spanien: ZOËL DE GALDEANO; Vereinigte Staaten: Miß SCOTT, MOORE; Ungarn: RADOS; Japan: FUJISAWA; Mexiko: STAMPA; Ministerium der schönen Künste: J. TANNERY; Marineministerium: SIMONOT; Columbia Universität: STRINGHAM; Fakultät der Wissenschaften von Buenos-Ayres: GALLARDO.

Sektionen:	Vorsitzender:	Schriftführer:
1. Arithmetik und Algebra.	HILBERT.	CARTAN.
2. Analysis.	PAINLEVÉ.	HADAMARD.
3. Geometrie.	DARBOUX.	NIEWENGLOWSKI.
4. Mechanik.	LARMOR.	LEVI-CIVITA.
5. Bibliographie u. Geschichte.	Prinz ROLAND BONAPARTE	D'OCAGNE.
6. Unterricht und Methoden.	CANTOR.	LAISANT.

Es möge gleich hier bemerkt werden, daß die Abwesenheit einzelner der Genannten bei den Sitzungen der Sektionen einige Abänderungen nötig machte.

Nachdem somit der Kongreß konstituiert war, ergriffen einige der Delegierten das Wort zu kurzen Begrüßungsansprachen. Danach wurden die beiden für diese Sitzung angekündigten Vorträge gehalten. Hr. M. CANTOR hatte das Thema gewählt: *Sur l'historiographie des mathématiques.* Er besprach die Geschichtsschreibung der Mathematik von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart, schilderte kurz die Verdienste hervorragender Autoren und erörterte in großen Zügen die dem mathematischen Historiker zufallenden Aufgaben. An diesen mit großem und wohlverdientem Beifalle aufgenommenen französischen Vortrag des „Fürsten der mathematischen Geschichtsschreibung" schloß sich ebenfalls in französischer Sprache die feinsinnige Rede des Hrn. VOLTERRA über *Trois analystes italiens: BETTI, BRIOSCHI, CASORATI.* In durchsichtiger und geistvoller Rede zeigte der Vortragende, wie diese drei ausgezeichneten Analytiker in ihrer Eigenart die drei verschiedenen Richtungen verkörpern, die bei der Entwickelung liche Besuchsziffer des Kongresses weit hinter den oben angegebenen Zahlen zurück. Selbst die Pariser Mathematiker waren nicht alle zur Stelle, und wenn man auch verstehen kann und nur billigen mufs, dafs der greise Hermite sich zu dieser Zeit à la campagne zurückzog, so erregte doch die Abwesenheit einiger im kräftigsten Mannesalter stehenden hervorragenden Pariser Mathematiker eine gewisse Verwunderung, zumal sie es unterlassen hatten, auch nur formell sich als Teilnehmer des Kongresses einzuschreiben.

Die einzige Teilnehmerliste, welche erst nach der Mitte der Kongrefswoche ausgegeben wurde, und welche noch vieler Berichtigungen bedarf, weist im ganzen 293 Namen auf, einschliefslich der angemeldeten Familienmitglieder. Da in diese Liste diejenigen aufgenommen sind, die ihren Beitrag bereits vor dem Beginne des Kongresses eingeschickt hatten, manche derselben aber nicht erschienen waren, so wird die Anzahl aller anwesenden Teilnehmer mit Einschlufs der sie begleitenden Familienmitglieder die Ziffer 300 kaum erreicht haben, eine verhältnismäfsig geringe Zunahme gegenüber den 242 Teilnehmern an dem ersten internationalen Mathematiker-Kongresse in Zürich.

Nach den häufigen und frühzeitigen Benachrichtigungen, die versandt worden waren, schien es, dafs alle Organe vortrefflich arbeiteten, und dafs alle Vorkehrungen rechtzeitig getroffen waren, sodafs eine ordnungsmäfsige Abwickelung des Programms zu erwarten war. Eine Enttäuschung erfuhren dann zuerst die früh eingetroffenen Gäste, als sie bei Empfangnahme ihrer Teilnehmerkarte in dem Laden der Buchhandlung von Carré & Naud, rue Racine 3, hörten, dafs ein Programm noch nicht existierte. Die später eingetroffenen Gäste aber, die sich in Übereinstimmung mit der ihnen zugeschickten Benachrichtigung zur Eröffnungsstunde um $2^1/_2$ Uhr am 6. August eingerichtet hatten, wurden durch die Nachricht überrascht, dafs die Eröffnung schon am Vormittag um 9 Uhr stattgefunden hatte. Diese Verschiebung war nämlich dadurch notwendig geworden, dafs der Saal im Palais des Congrès, in welchem die feierliche Eröffnung stattfinden sollte, um 3 Uhr nachmittags bereits an den internationalen Physiker-Kongrefs vergeben war. Die letztgekommenen konnten natürlich auch nicht wissen, dass am Sonntag Abend bereits eine zwanglose Zusammenkunft im Café Voltaire gegenüber dem Odeontheater stattgefunden hatte.

Hiernach ist es wohl nicht wunderbar, dafs die Eröffnungssitzung im Palais des Congrès noch nicht alle Teilnehmer, die schon in Paris waren, vereinigte, obgleich sie wohl die höchste Besuchsziffer unter allen Sitzungen aufzuweisen hatte. In geschäftsmäfsiger Weise leitete Hr. Poincaré, der zum Präsidenten des Kongresses gewählte Vorsitzende des Organisations-

Art. Martin. A method of computing the common logarithm of a number without making use of any logarithm but that of some power of 10. — A rigorous method of finding biquadrat numbers whose sum is a biquadrat.

Section 2. Analyse.

Mittag-Leffler. Sur fonction analytique et expression analytique. — Une application de la théorie des séries n fois infinies. — Sur une extension de la série de Taylor.

I. Bendixson. Sur les courbes définies par les équations différentielles.

J. Drach. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.

E. Jahnke. Zur Theorie der Thetafunktionen von zwei Argumenten.

Tikhomandritzky. Sur l'évanouissement des fonctions H de plusieurs variables.

Section 3. Géométrie.

Lovett. Sur les transformations de contact entre les éléments les plus essentiels de l'espace.

Macfarlane. Application of space analysis to curvilinear coordinates.

d'Ocagne. Sur les divers modes d'application de la méthode graphique à l'art du calcul.

I. Stringham. Orthogonal transformations in elliptic or in hyperbolic space.

Jamet. Sur le théorème de Salmon concernant les cubiques planes.

Vaes. Sur les corps réguliers et semi-réguliers.

A. Padoa. Un nouveau système de définitions pour la géométrie euclidienne.

Issaly. Sur les pseudo-surfaces en général et sur un exemple particulier de pseudo-surfaces minima.

Section 4. Mécanique.

Ch. V. Zenger. Le mouvement des corps célestes d'après les lois électrodynamiques.

J. Boccardi. Sur le calcul des pertubations spéciales des petites planètes.

I. Fredholm. L'inversion des intégrales définies et son application aux problèmes de la physique mathématique.

C. Somigliana. Sulla teorica maxwelliana delle azioni a distanza.

Section 5. Bibliographie et histoire.

Fujisawa. The mathematics of the old Japanese school.

A. Gallardo. Les mathématiques et la biologie.

Section 6. Enseignement et méthodes.

Hilbert. Sur les problèmes futurs des mathématiques.

Zoël de Galdeano. Note sur la critique mathématique.

Veronese. Sur les postulats de la géométrie dans l'enseignement.

Capelli. Sur les opérations fondamentales de l'arithmétique.

Crawford. Démonstration élémentaire de ce théorème: la moyenne arithmétique d'un nombre quelconque de quantités positives est plus grande que leur moyenne géométrique.

Leau. Proposition d'un voeu pour l'adoption d'une langue scientifique universelle.

Zu diesem Verzeichnisse ist zu bemerken, daſs aus inneren oder äuſseren Gründen wiederholt Verlegungen von Vorträgen in andere Sektionen stattgefunden haben. Der sehr umfangreiche Vortrag des Herrn

Hilbert über die künftigen Probleme der Mathematik, der in deutscher Sprache gehalten wurde, war von ihm eigentlich für eine allgemeine Sitzung bestimmt gewesen, wozu sich ja der Gegenstand vortrefflich eignete. Da aber in den allgemeinen Sitzungen kein Raum mehr blieb, außerdem in den Sektionssitzungen die Zeitdauer einer Rede nicht beschränkt wurde, so kam die feindurchdachte Arbeit, die in scharf accentuiertem Vortrage und eindringlicher Sprechweise eine bedeutende Wirkung erzielte, auch so zu ihrem wohlverdienten Rechte. Die ganze Abhandlung, welche in den Göttinger Nachrichten ungekürzt erschienen ist, wurde nachher verteilt und wird gewiſs jedermann durch ihre Gedankenfülle lebhaft interessieren. Weder über die sonstigen Vorträge noch über die Diskussionen, welche sich an einzelne derselben anschlossen, kann hier etwas Näheres hinzugefügt werden.

In der allgemeinen Schluſssitzung vom Sonnabend den 11. August wurden zunächst die geschäftlichen Angelegenheiten erledigt. Gemäſs den in Zürich angenommenen Grundlagen wurde nach Vorschlag des Vorstandes für den nächsten internationalen Mathematiker-Kongreſs als Jahr 1904, als Zeit die des Anfangs oder des Endes der Sommerferien, als Land Deutschland festgesetzt. Inbezug auf den Ort war von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Baden-Baden vorgeschlagen worden; gerade von nichtdeutscher Seite her wurden jedoch Wünsche für andere Städte vorgebracht, so unter anderem für Berlin. Aus diesem Grunde wurde der Antrag des Vorstandes angenommen, die Deutsche Mathematiker-Vereinigung mit der Organisation des Kongresses im Jahre 1904 zu betrauen und es ihr zu überlassen, die Wahl des Ortes unter Berücksichtigung der in Paris vorgebrachten Wünsche und Bedenken endgültig zu treffen.

Nach Beendigung aller geschäftlichen Angelegenheiten hielt Herr Mittag-Leffler seinen angekündigten Vortrag *Une page de la vie de Weierstrass.* Die Seite aus dem Leben des einzigen Mannes, um welche es sich handelt, ist seine Freundschaft für Sonja Kowalevsky, ein Verhältnis, das inniger gewesen ist, als selbst diejenigen ahnten, die dem groſsen deutschen Gelehrten nahestanden. In den Aufzeichnungen der Schwester des Redners aus dem Leben der berühmten Schülerin von Weierstrass tritt dies nicht in der Weise hervor, wie es nach dem Wissen der Verfasserin hätte geschehen können. Anna Charlotte Leffler (Herzogin von Cajanello) kannte nämlich den reichen Briefwechsel zwischen Lehrer und Schülerin und wuſste auch, daſs derselbe nach dem Tode des Meisters der Öffentlichkeit übergeben werden sollte; daher unterlieſs sie es, in dem zu Lebzeiten von Weierstrass erschienenen Lebensbilde ihrer so früh verschiedenen Freundin, an der Intimität dieser zarten Beziehungen zu rühren. Mit der Nachricht von dem

Vorhandensein der WEIERSTRASSschen Briefe an SONJA KOWALEVSKY überraschte Herr MITTAG-LEFFLER in seinem Vortrage die Pariser Versammlung. Einige vierzig Briefe mit reichem wissenschaftlichen Inhalte enthielt das Manuskript. Aus diesem kostbaren Schatze wurden ausgewählte Stellen vorgelesen, indem der Redner den historischen und sachlichen Zusammenhang in französischer Sprache erläuterte. Der Eindruck des Vortrags, der etwa ein und eine halbe Stunde währte, war ganz überwältigend. Die Innigkeit der Zuneigung des genialen Forschers zu seiner begabten und verständnisvollen Schülerin leuchtet überall hervor und rührte jedes unbefangene Gemüt. Die Selbstlosigkeit des auf der höchsten Höhe wandelnden Genius, der seinem der jungen Freundin gegebenen Versprechen nachkommt, ihr immer zuerst von seinen Entdeckungen Kunde zu geben, weil sie ihn besser verstehe als jeder andere Schüler, hebt diese Idealgestalt zu Regionen empor, die für andere Sterbliche unerreichbar sind. Wie rührend sind seine Klagen über das Ausbleiben lange erwarteter brieflicher Nachrichten! In diesen Briefen findet man die Rechtfertigung des hart klingenden Ausspruches von ANNA CHARLOTTE LEFFLER über SONJA KOWALEVSKY: „Ihre ganze wissenschaftliche Produktion bewegte sich immer in der von WEIERSTRASS angegebenen Richtung; alle ihre wissenschaftlichen Arbeiten sind Anwendungen oder Entwickelungen der Sätze des Meisters“.

Dieser Vortrag, der durch seinen allgemein menschlichen Inhalt und durch die wissenschaftliche Bedeutung das Interesse aller Anwesenden vom Anfange bis zum Ende in höchstem Maſse fesselte, bezeichnete unzweifelhaft den Höhepunkt des Pariser Kongresses. Nachdem der rauschende Beifall verklungen war, hatte Herr POINCARÉ mit seinem Vortrage *Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques* einen schweren Stand. Er selbst fühlte auch wohl das Miſsliche seiner Lage, eine durch mehr als zweistündige gespannte Aufmerksamkeit erschöpfte Zuhörerschaft, der keine Minute Pause zur Erholung gegönnt wurde, noch weiter in der Weise zu fesseln, wie dies seinem Vorredner gelungen war. In ungemeiner Schnelligkeit verlas er seine geistvollen und pointierten Auslassungen über die Berechtigung und Notwendigkeit der beiden Richtungen in der Mathematik, die er als die anschauliche und die logische bezeichnete, und für die er als allgemein bekannte Vertreter den jüngst dahingegangenen BERTRAND und seinen noch immer thätigen Altersgenossen HERMITE nannte und in dieser ihrer Eigenart schilderte. Dank der Geläufigkeit des Redners und der durch ihn gegebenen Anregungen wurde die Geduld der Versammlung nicht ermüdet, und mit der gebührenden Anerkennung wurde am Schlusse nicht gespart. Damit waren die Verhandlungen des Kongresses zu Ende geführt.

Von den geselligen Zusammenkünften ist die erste am Sonntag den 5. August Abends bereits erwähnt worden. Eine zweite fand als „Lunch“ am Dienstag den 7. Nachmittag 4 Uhr in der École Normale supérieure statt und soll — Referent war an der Teilnahme verhindert — von etwa hundert Personen besucht gewesen sein. Das Schlufsbankett wurde Sonntag den 12. Mittag um $11\frac{1}{2}$ Uhr in der Salle de l'Athénée Saint-Germain, 21 rue du Vieux-Colombier, abgehalten. Die Zahl der Teilnehmer war gröfser als beim Lunch, reichte aber bei weitem nicht an die Ziffer 300 heran. Aus einem nicht aufgeklärten Grunde blieb der für Herrn Poincaré in der Mitte der hufeisenförmigen Tafel aufgestellte Präsidentenstuhl leer, und als beim Schaumweine die Reihe der Trinksprüche anhub, mufste Herr Darboux den Vorsitz mit der in launige Form gekleideten Erklärung übernehmen, dafs er so wenig wie irgend einer der Anwesenden den Grund des Ausbleibens des Herrn Poincaré wüfste. Eine aus der Mitte der Versammlung gegebene Anregung, den Sonntagnachmittag zu einem gemeinsamen Ausfluge zu benutzen, fand zwar vielen Beifall; doch kam nichts zustande, weil eine energische und geschickte Hand fehlte, die Leitung des Stromes nach einem geeigneten Punkte zu übernehmen.

Aufserdem ist mit ehrerbietigem Danke zu erwähnen, dafs der Präsident der französischen Republik, Herr Loubet, nebst seiner Frau Gemahlin die Mitglieder des internationalen Mathematiker-Kongresses mit Einladungen zu dem grofsen Empfange aller Kongresse am Freitag den 10. um 4 Uhr im Palais des Élysées beehrte, einem Feste, dem auch der Schah von Persien beiwohnte; ferner dafs der Prinz Roland Bonaparte am Sonnabend den 11. Abends $9\frac{1}{2}$ Uhr die Mitglieder des mathematischen und des physikalischen Kongresses in den Räumen seines fürstlich ausgestatteten Palastes, der eine kostbare wissenschaftliche Bibliothek enthält, aufs freundlichste empfing und bewirtete. Beide Tage boten die bequemste Gelegenheit, die Bekanntschaft der anwesenden Kongrefsmitglieder zu machen.

Wenn wir nun die Ergebnisse des Kongresses überschauen und mit den Zielen vergleichen, die auf dem ersten Kongrefs in Zürich den internationalen Mathematiker-Versammlungen gesteckt wurden, so ist zunächst anzuerkennen, dafs den Anwesenden eine Fülle von Anregungen auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik von den berufensten Vertretern geboten worden ist. Dagegen ist der absolute Mangel an Ideen oder Plänen für gemeinschaftlich auszuführende internationale Unternehmungen bemerkenswert. Sollte dies bedeuten, dafs im Augenblicke derartige Aufgaben nicht vorhanden sind? Referent mufs bekennen, dafs er nicht zu denjenigen gehört, die von internationalen Kongressen eine intensive Förderung solcher Unternehmungen erwarten. Dies geschieht durch thatkräftige und schaffensfreudige Individuen, denen die erforderlichen Geldmittel zur

Verfügung gestellt werden. Was in dieser Hinsicht geleistet werden kann, zeigt die Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Von einzelnen treibenden Elementen beseelt, hat sie die Anregung zu verschiedenen gemeinsamen Unternehmungen gegeben und eine Unterstützung der neuen mathematischen Encyklopädie durch mehrere Akademien und gelehrte Gesellschaften herbeigeführt. In gleicher Weise können Arbeiten, die als allgemein nützlich anerkannt sind, durch die Zustimmung internationaler Kongresse Ermutigung und Förderung erhalten; den Besuchern des Pariser Kongresses ist keine Mitteilung darüber zugegangen, ob derartige Fragen in den vorbereitenden Organen des Kongresses zur Erörterung gelangt sind. In dieser Hinsicht trat das Züricher Comité, das ja mit der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in einem engen persönlichen Zusammenhange stand, mit weiter ausschauenden Gedanken vor die geladenen Gäste. Nach dem Verlaufe des heurigen Kongresses könnten die Zweifler an dem Bedürfnisse internationaler Mathematiker-Kongresse Recht zu haben behaupten; denn derselbe ähnelte durchaus, was die Gegenstände der Vorträge anlangt, denjenigen Zusammenkünften, welche von den nationalen Gesellschaften zur Beförderung der Wissenschaften alljährlich veranstaltet werden. Allerdings mufs man dawider anführen, dafs einzelne Vorträge durch die Persönlichkeit der den verschiedensten Nationen angehörenden Redner und durch den tiefen und reichen Inhalt über dasjenige hinausragten, was bei den erwähnten Versammlungen geboten zu werden pflegt. Wer jedoch den letzten Tagungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung beigewohnt hat, wird zugeben müssen, dafs dieselben zufolge ihrer sorgfältigen Vorbereitung und planmäfsig straffen Abhaltung dem Pariser internationalen Kongresse nicht gerade nachstanden.

Von den durch internationale Kongresse erstrebten Zielen ist vielleicht das wertvollste die Anbahnung und Förderung persönlicher Beziehungen zwischen den Forschern der verschiedenen Länder auf demselben Gebiete. Dies ist gewifs durch den Pariser Kongrefs für viele der Besucher erreicht worden, obschon nicht alles so eingerichtet war, dafs die Angehörigen der über die ganze Erde zerstreuten Völker sich leicht finden konnten. Während sonst bei derartigen Versammlungen ein Restaurant zum gemeinschaftlichen Einnehmen der Mahlzeiten und zu Zusammenkünften in den Abendstunden bezeichnet zu werden pflegt, war dies in Paris unterblieben, wohl aus dem Grunde, damit die Teilnehmer weder beim Besuche der Ausstellung noch bei ihren Vergnügungen an den Abenden beschränkt wären. Es hätte aber keine Beschränkung vorgelegen, wenn für jeden Tag ein Ort innerhalb der Ausstellung und ein anderer in Paris als Sammelpunkt für solche genannt worden wäre, die mit Gleichgesinnten zusammenzutreffen wünschten. Da dieser Wunsch wirklich vorhanden war, so hätten sich gewiſs an den bezeichneten Stellen immer viele Besucher freiwillig eingefunden, die statt dessen nun einsam oder mit recht wenigen Bekannten die Zeit in dem groſsen Paris verbrachten.

Bei den Sitzungen der Sektionen folgte regelmäſsig ohne Unterbrechung ein Vortrag dem anderen; natürlich trat nach zwei bis drei Stunden eine solche Ermüdung und Abspannung der Zuhörer ein, daſs auf allgemeinen Wunsch die Sitzung geschlossen werden muſste. Jeder eilte dann so rasch wie möglich aus der Sorbonne fort, um frische Luft zu schöpfen und einige Stärkungen einzunehmen; es war daher schwierig, sich gegenseitig bekannt zu machen. Anderswo hält man Sitzungen von längerer Dauer, unterbricht dieselben aber durch Pausen, in denen kleine Erfrischungen eingenommen werden können, die zur Stelle sind; gerade hierbei können alle Anwesenden zwanglos mit einander verkehren und sofort ihre Gedanken über das Gehörte mit einander austauschen.

Aus den in Paris gemachten Erfahrungen ist für die künftigen Kongresse vielleicht Folgendes zur Beachtung zu empfehlen. Die Vorbereitungen sind so zeitig zu treffen, daſs denen, welche die Absicht haben, den Kongreſs zu besuchen, das Programm der Sitzungen wenigstens in seinen Grundzügen vor ihrer Abreise zugestellt werden kann. Es ist ferner ratsam, daſs der Organisationsausschuſs sich mit den groſsen Körperschaften der einzelnen Länder in Verbindung setzt, um bei der Feststellung des Programms die Wünsche der Gäste zu kennen und zu berücksichtigen. Die Anordnungen für die geselligen Zusammenkünfte sind in zwangloser Weise so zu treffen, daſs innerhalb der kurzen Zeit des Kongresses den Besuchern ausgiebige Gelegenheit geboten werde, sich gegenseitig bekannt zu machen.

Wenn ich im Vorstehenden rückhaltlos meine Ansichten ausgesprochen habe, so ist dies lediglich in der Absicht geschehen, um für die Veranstalter der künftigen Kongresse diejenigen Wünsche hier niederzulegen, die unter den Mitgliedern des Pariser Kongresses während der Dauer und nach der Beendigung desselben vielfach geäuſsert sind. Indem ich in Übereinstimmung mit den gehörten Meinungen die Ursachen für die bemerkten Unvollkommenheiten den Schwierigkeiten zuschiebe, denen ein wissenschaftlicher Kongreſs in einer Millionenstadt während des heiſsesten Monats im Jahre zur Zeit einer Weltausstellung notwendig begegnen muſs, will ich es nicht versäumen, am Schlusse dieses Berichtes alles Groſsartige anzuerkennen, was den Mitgliedern des Pariser Kongresses von der „Société Mathématique de France", von der Stadt, von dem Staate geboten worden ist, und will dafür auch hier warmen Dank aussprechen.

Berlin, im September 1900.

Kleine Mitteilungen.

Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Aachen, 16.—23. September 1900.

Auf der diesjährigen Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung wurden folgende Vorträge gehalten:

1. Mittag-Leffler, Analytische Darstellung monogener Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.
2. Kneser, Über die Entwickelung und den gegenwärtigen Stand der Variationsrechnung.
3. Wangerin, Bestimmung aller Flächen konstanten Krümmungsmafses.
4. Minkowski, Über die Begriffe: Länge, Oberfläche, Volumen.
5. Stäckel, Zur Theorie der geodätischen Linien.
6. Wangerin, Beweis eines Satzes über Krümmungslinien.
7. Fricke, Zur Theorie der Poincaréschen Reihen.
8. Franz Meyer, Über geometrische Sätze vom Charakter des Pascalschen und des Desarguesschen.
9. Steinitz, Zur Theorie der Abelschen Gruppen.
10. Schoute, Ein besonderer Bündel von quadratischen Räumen Q_2^3 im R^4.
11. Klein, Die Mechanik in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.
12. Jürgens, Berechnung von Determinanten.
13. E. Kötter, Bestimmung der Oberfläche zweiter Ordnung, welche neun gegebene Punkte enthält.
14. Franz Meyer, Über singuläre bilineare Formen und Relationen zwischen Unterdeterminanten.
15. von Mangoldt, Eine Aufgabe der kaufmännischen Arithmetik.

Der Vortrag 2 gab eine Übersicht über einzelne Teile eines ausführlichen Berichtes über die Entwickelung der Variationsrechnung, welcher demnächst im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erscheinen wird.

An den Vortrag 11, dem eine Disposition der Bände IV (Mechanik) und V (Physik) der Encyklopädie zu Grunde lag, knüpfte sich eine eingehende Diskussion, an der sich auch Vertreter der Physik und der Ingenieurwissenschaften beteiligten.

Aus der Geschäftssitzung der Vereinigung, die unter dem Vorsitz des Herrn Hilbert stattfand, sei mitgeteilt, dafs dem Vorstande des Jahres 1902 der Auftrag gegeben wurde, der Versammlung dieses Jahres ein Programm für den nächsten internationalen Mathematiker-Kongrefs vorzulegen, der nach dem zu Paris gefafsten Beschlufs 1904 in Deutschland tagen wird.

Die nächste Jahresversammlung der Vereinigung wird in Gemeinschaft mit den Sitzungen der Abteilung I der 73. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte im September 1901 zu Hamburg stattfinden.

Jena. A. Gutzmer.

Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences à Paris, 2—9 août 1900.

Dans son discours inaugural sur les progrès des industries mécaniques et les moyens de les développer, M. le général Sebert, président du congrès, s'est occupé très largement d'une question qui intéresse aussi les sciences en général et les mathématiques en particulier. En effet, un troisième de son discours avait trait aux mesures à prendre pour recueillir et classer les matériaux scientifiques qui vont s'accumulant sans cesse sous les efforts des travailleurs de tous les pays. D'après M. Sebert, cette question serait déjà à moitié résolue, grâce à l'invention de la classification décimale, due à M. Melvil Dewey, et par la fondation, en 1895, de l'Institut international de bibliographie à Bruxelles, dont le Répertoire bibliographique universel contient déjà plus de 5,000,000 (?) fiches; il suffirait d'aider l'Institut à compléter et continuer son oeuvre. Malheureusement la question n'est guère si simple que l'a supposé M. Sebert, et en tout cas il semble un peu étrange qu'il n'ait dit aucun mot sur le catalogue scientifique projeté par la „Royal Society" à London.

Les deux premières sections (mathématiques, astronomie, géodésie, mécanique) de l'Association française étaient présidées par M. E. Fontaneau, et leurs séances avaient lieu le 3, 4, 6 et 8 août. Une vingtaine de communications furent faites, parmi lesquelles il convient de signaler:

R. Feret, Déformations et tensions rémanentes pendant le déchargement d'un prisme fléchi imparfaitement élastique (suite à une communication présentée l'année précédente au congrès de Boulogne).

A. Pellet, Sur l'équation aux périodes des racines de l'unité.

M. Lémeray, Equations fonctionnelles linéaires à fonction de substitution inconnue.

Dans une communication sur l'application des principes de l'arithmétique graphique, M. M. G. Arnoux et C. A. Laisant firent voir comment on peut démontrer à son aide les théorèmes de Fermat et de Wilson.

M. E. Lemoine présenta quelques notes sur la géométrie du triangle, et M. G. Tarry s'occupa de démontrer l'impossibilité de résoudre le problème des 36 officiers. Ajoutons encore que M. L. Ripert continua ses études sur des groupes de triangles trihomologiques inscrits ou circonscrits à une même conique ou à des familles de coniques.

Mathematics at the British Association Meeting, 1900.

The British Association met this year at Bradford, the mathematical session being held on Monday September 10, under the presidency of Major Mac Mahon. The following is a list of the communications, with brief notices on them.

1. Report of the Committee appointed to calculate tables of certain Mathematical Functions.

2. Report (Intermediate) on the Present State of the Theory of Point-Groups, by Miss F. HARDCASTLE.
3. P. A. MAC MAHON, A Property of the characteristic symbolic determinant of any n quantics in n variables.
4. CYPARISSOS STEPHANOS, Sur les relations entre la géométrie projective et la mécanique.
5. H. S. CARSLAW, The use of Multiple Space in Applied Mathematics.
6. ALLAN CUNNINGHAM and H. J. WOODALL, Determination of Successive High Primes.
7. J. WILLIS, On the construction of Magic Squares.
8. P. A. MAC MAHON, The Asyzygetic and Perpetuant Covariants of systems of binary quantics.
9. P. A. MAC MAHON, On the symbolism appropriate to the study of orthogonal and BOOLian invariant systems which appertain to binary and other quantics.
10. A. B. BASSET, A quintic curve cannot have more than fifteen real points of inflexion.
11. J. D. EVERETT, On NEWTON's contribution to Central-Difference Interpolation.
12. J. D. EVERETT, On a Central-Difference Interpolation Formula.

1) The Committee reported that the printing of the *New Canon Arithmeticus* is almost completed, and the work will shortly appear. It will give the solutions of the congruence of $2^x \equiv R \pmod{m}$ for moduli less than 1000.

2) Miss HARDCASTLE is preparing a Report on the Present State of the Theory of Point-Groups; a first instalment is to appear in this year's Report of the Association.

3) Let
$$a_{1x} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m,$$
where $a_{11}, a_{12}, \cdots$ are umbrae and $a_{1x}^{\xi_1}$ is a quantic; and let
$$a_{1x}^{\xi_1} a_{2x}^{\xi_2} \cdots a_{nx}^{\xi_n} = \cdots + C_{\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n} x_1^{\xi_1} x_2^{\xi_2} \cdots x_n^{\xi_n} + \cdots.$$
Then Major MAC MAHON shews that
$$\sum \sum \cdots \sum C_{\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n} = \frac{(-1)^n}{f(1)},$$
where $f(\theta)$ is the characteristic determinant of the umbrae.

4) Professor STEPHANOS shews that the only transformations which change a system of forces in equilibrium into another system of forces, also in equilibrium, are those which, considered as performed on the PLÜCKERian coordinates of the forces, are linear and homogeneous.

5) Mr. CARSLAWS work is an extension of Professor SOMMERFELD's theory of Branched Space, and leads to the solution of several important problems in the Potential Theory.

6) Lieut.-Col. CUNNINGHAM described a process, involving the formation of two small tables, by which the factors of any series of large numbers can be found.

7) Dr. WILLIS shewed some diagrams exemplifying new methods for the construction of Magic Squares.

8) In this paper, the author extended results which have been found in connexion with the seminvariant forms of a single binary quantic, to systems containing any number of binary quantics.

9) Major MAC MAHON explained a new symbolic method, analogous to ARONHOLD's symbolic method, for obtaining the forms which are invariant for orthogonal and BOOLian transformations. There are 6 symbolic factors, analogous to the factors a_x and (ab) of the ordinary Invariant-Theory. The family of invariants thus obtained is more extended than the family of forms which are invariant for the general linear transformation; the latter family can be derived from the former, by rejecting forms which contain certain factors.

10) Mr. BASSET's theorem is an extension of the corresponding result obtained by ZEUTHEN for quartic curves.

11) The author observed that some of STIRLING's formulae in the Calculus of Finite Differences had been previously given by NEWTON.

12) Professor EVERETT established a new interpolation formula, somewhat more symmetrical than those usually given in text-books.

Trinity College, Cambridge. E. T. WHITTAKER.

Mathematics at the meeting of the American association and the American mathematical society at New York, 1900.

This year the section A of the American association for the advancement of science held its meeting in joint session with the American mathematical society at New York, June 27th—29th. The unusually early date of the meeting involved some conflict with the academic duties of many professors, but in spite of this 56 members of the American mathematical society were in attendance, and about 30 mathematical papers were on the programme of the combined meeting of the two scientific bodies. Among these papers there was a *Report on groups of an infinite order* by Mr. G. A. MILLER, which may be considered as supplementary to the Report of Mr. L. E. DICKSON at the meeting at Columbus 1899 (see Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 263). Another paper of historical interest was that of Mr. G. T. SELLEW, on the *History of the complex number*, and Miss M. E. TRUEBLOOD contributed with a paper on *The directive force of philosophy upon mathematics*. Mr. E. H. MOORE gave *A simple proof of the fundamental CAUCHY-GOURSAT theorem*, and Mr. G. B. HALSTED read a paper on *Construction problems in non-Euclidean geometry*.

The final session of the meeting was devoted to an extensive discussion of the following question: „What course in mathematics should be offered to the student who desires to devote one-half, one-third, or one-fourth of his undergraduate time to preparation for graduate work in mathematics?“ The discussion was opened by papers read by Mr. E. H. MOORE, Mr. J. HARKNESS, Mr. W. F. OSGOOD, Mr. F. MORLEY and Mr. J. W. A. YOUNG, and then a general discussion of the subject took place.

›ine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen". BM = Bibliotheca Mathematica.

1: 12, 22, 29, 34, 103, 135, 190, 197, 202, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266.

---

1 : 283. Der sogenannte „Loculus Archimedius" ist im Jahre 1899 von SUTER (Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **9**, S. 491—499) heraus;eben worden.

---

1 : 284, 321, 383, 400, 432, 437, 440, 467, 469, 475, 476, 537, 540, 542, siehe $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—268.

---

1 : 661. Nicht HONEIN B. ISHÂQ, sondern sein Sohn ISHÂQ B. HONEIN hat › *Almagest* ins Arabische übersetzt, wie die älteste Quelle, der *Fihrist*, und › Pariser Ms. 2482 haben, also hat WENRICH (p. 228) Recht, nicht WÜSTEN-D, bezw. STEINSCHNEIDER, der merkwürdigerweise, wahrscheinlich nur WÜSTEN-D folgend ohne Autopsie, behauptet, das Pariser Ms. 1107 (jetzt 2482) ›ne HONEIN als Übersetzer (vergl. Zeitschr. d. deutschen morgenländ. ›sellsch. **50**, p. 202). (Siehe SUTER, *die Mathematiker und Astronomen der* ›*aber und ihre Werke*; Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **10**, 1900, p. 39).

---

1 : 662. ABÛ'L-WEFÂ hat den DIOPHANT nicht übersetzt, sondern nur ›mmentiert (vergl. SUTER, l. c. p. 71).

1:671. In Bezug auf die von BONCOMPAGNI (1857) herausgegebene ano›me Übersetzung der Arithmetik des ALKHWARIZMI bemerkt Herr CANTOR, dafs ›n auf einen Landsmann und Zeitgenossen des ATELHART von Bath als Über›zer wird schliefsen dürfen. Ich erlaube mir darauf hinzuweisen, dafs wir ›zt eine solche Person kennen, die im Jahre 1145 eine andere Schrift (*Al›r wal mukabula*) des ALKHWARIZMI übersetzt hat, nämlich ROBERT CASTRENSIS ›gl. Biblioth. Mathem. $\mathbf{13}_2$, 1899, 90; $\mathbf{1}_3$, 1900, 273). Vielleicht würde man ›rch eine Vergleichung der Kunstwörter dieser beiden Übersetzungen ersehen ›nnen, ob sie von einer und derselben Person herrühren. In jedem Falle ›rfte ROBERT CASTRENSIS verdienen unter den ersten Übersetzern mathema›cher Werke aus dem Arabischen (S. 851—854) genannt zu werden.

G. ENESTRÖM.

---

1 : 694, 704. Tangenten und Cotangententafeln hat schon AHMED B. ›BDALLÂH, genannt HABAŠ EL-MERWAZÎ aufgestellt, nicht erst ABÛ'L-WEFÂ ›ergl. SUTER, l. c. p. 209 nach C. A. NALLINO).

---

1 : 706. EL-SIĜZÎ heifst AHMED B. MUH. B. 'ABDELĜALÎL (nicht '*Abdelĝâlîb*). ›ergl. SUTER, l. c. p. 80).

---

1 : 708. El-Chogendî heifst mit vollem Namen Hâmid b. el-Chidr Abû Mahmûd (nicht Muh.) el-Chogendî (vergl. Suter, l. c. p. 74).

---

1 : 714. Abû'l Gûd hat nicht den Beinamen el-Šannî, es sind dies zwei verschiedene Persönlichkeiten, die aber Zeitgenossen waren, der letztere heifst mit vollem Namen Muh. b. Ahmed Abû ʿAbdallâh el-Šannî (vergl. Suter, l. c. p. 97, 98).

---

1 : 735. Das Todesjahr Qâdizâdehs ist mit 1412 oder 1413 zu früh angegeben, er kann erst etwa zwischen 840 u. 850 d. H. (1436 u. 1446) gestorben sein (vergl. Suter, l. c. p. 175).

---

1 : 735. Das Leben Euklids von Qâdizâdeh befindet sich in der Bibl. Med.-Palat. zu Florenz (Nr. 280) (vergl. Suter, l. c. p. 175).

---

1 : 736. Mirâm Čelebî ist nicht der Sohn, sondern der Enkel Qâdizâdehs (vergl. Suter, l. c. p. 188).

---

1 : 744. Ibn el-Haitams Kreisquadratur ist jetzt herausgegeben mit deutscher Übersetzung von H. Suter in Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abt. p. 33—47.

---

1 : 748. Als Lebenszeit Gâbir b. Aflahs sollte eher das 12. statt das 11. Jahrh. angegeben sein, er wird so zwischen 1140 u. 1150 gestorben sein. M. Cantor sagt: „Seine Lebenszeit ist dadurch festgesetzt, dafs sein Sohn in Spanien mit dem berühmten Maimonides persönlich verkehrte, was nur um das Jahr 1100 herum möglich war". Maimonides ist aber erst 1135 (od. 39) geboren (vergl. Suter, l. c. p. 119).

1: 749, siehe BM. 1_3, 1900, S. 268.

---

1 : 756. Das Werk, auf dem Ibn el-Bennâs *Talchîs* teilweise fufst (ich werde hierauf in einem besonderen Artikel, der im nächsten Bande der Biblioth. Mathem. erscheinen wird, näher eintreten), hatte nicht den Titel „der kleine Sattel"; *el-hassâr* heifst „der Schilfmattenflechter", es war dies der Beiname des Verfassers des Buches: Muh. b. ʿAbdallâh b. ʿAijâš Abû Zakarijâ (od. Abû Bekr), und vielleicht hiefs das Buch: *kitâb el-hassâr el-sagîr fîʾl-hisâb* (das kleine Buch des Hassâr, oder das Buch des kleinen Hassâr über die Rechenkunst). (Vergl. Suter, l. c. p. 197 u. 222, ebenso Biblioth. Mathem. **13**, 1899, p. 87). H. Suter.

---

1 : 757. Herr Cantor sagt hier: „Auffallenderweise fehlt in diesem von einem Landsmanne Ibn Albannâs herrührenden Verzeichnisse die durch Ibn Chaldûn so hoch gestellte Aufhebung des Schleiers, fehlt in ihm auch der

Auszug aus dem kleinen Sattel". Dies ist unrichtig; im Verzeichnis der Schriften IBN EL-BENNÂS steht: „Der *Talchîṣ* der Rechenkunst und Kommentar dazu"; dieser Kommentar ist eben die Schrift, die den Titel führt „das Aufheben des Schleiers", wie uns EL-QALAṢÂDÎ (nicht Qalṣâdî) in seinem *Talchîṣ* (Gotha Ms. 1477) belehrt (vergl. SUTER, l. c. p. 220—21).

---

1 : 767. In der Ausgabe von Fes v. J. 1315 (1897/98) der Schrift EL-QALAṢÂDÎS, betitelt: Enthüllung der Geheimnisse von der Wissenschaft des *Ġobâr* ist in der Darstellung algebraischer Ausdrücke auch die absolute Zahl durch ein Zeichen über derselben hervorgehoben und zwar durch ein ـع (Anfangsbuchstabe von *'adad* = Zahl); wir wissen nicht, ob dies eine neuere Einschiebung ist, oder ob das Original schon dieses Zeichen enthält; auffallend wäre es, wenn WOEPCKE dies übersehen hätte. H. SUTER.

---

1 : 804, 805, 807, 808, 812, 823, 852, siehe BM 1_3, 1900, S. 268—269.

---

1 : 853. Der *liber embadorum* des SAVASORDA verdiente eine ausgedehntere Beachtung, als sie ihm hier zu teil geworden ist. Er ist die Hauptquelle für die *Practica Geometriae* des LEONARDO PISANO, der die ganze Anlage seines Werkes ihm nachgebildet hat. Er hat außerdem sämtliche Sätze SAVASORDAS bis auf die Zahlenbeispiele übernommen, hat sie aber meist genauer und ausführlicher bewiesen. SAVASORDA kennt alle Fälle der quadratischen Gleichungen, beachtet und beweist, daſs für $x^2 + a = bx$ zwei verschiedene Werthe der Unbekannten, die er *latus* nennt, während die zweite Potenz als *embadum* bezeichnet wird, existieren, und daſs für $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a < 0$ die Aufgabe unmöglich wird. Der hebräische Text soweit ihn v. BRAUNMÜHL für seine *Geschichte der Trigonometrie* benutzt hat, stimmt mit der Übersetzung gut überein. Auch STEINSCHNEIDER ist nicht im Zweifel, daſs die Arbeit ihm angehört.

M. CURTZE.

---

1 : 854. Unter den Übersetzungen GERARDS VON CREMONA hätte wohl die wichtige Schrift des AN-NAIRÎZÎ zu den Elementen des EUKLIDES Erwähnung verdient.

---

1 : 855. Die Formel

$$a \cdot b = 10\,(a - (10 - b)) + (10 - a)\,(10 - b)$$

findet sich auch in der von CURTZE in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 8, 1898 veröffentlichten Algorismusschrift aus dem Ende des XII. Jahrhunderts.

---

2 : 8. L. 3 en remontant, il faut lire »*in additione*« (non *in ac ditione*).

---

2 : 10. L'expression grecque *coris canon*, pour désigner les nombres pr[illegible] miers, paraît correspondre à χωρὶς κανόνων et signifier *extra tabulas* (c. à. [illegible] les nombres qui ne figurent pas dans les tables formées par produits).

P. Tannery.

---

2 : 20. L. 11, il faut lire *geometrischen* au lieu de *arithmetischen*.

---

2 : 37. Das Wort *casus* hat Leonardo aus der Übersetzung des *Li*[illegible] *embadorum* des Savasorda durch Plato von Tivoli genommen.

M. Curtze.

---

2 : 37. Die Teilung der Figuren ist, wie schon der Titel: „*In*[illegible] *distinctio quarta de divisione camporum inter consortes*" andeutet, dem [illegible] schaftsrechte der Araber entnommen. Noch mehr geht dieses aus seinem [illegible] bilde, dem *liber embadorum* Savasordas, hervor, wo dieser Abschnitt folgen[illegible] maſsen beginnt: *In secundo quidem capitulo agrorum ac domorum dimension*[illegible] *executis, eorumdemque arcarum secundum figurarum alterationes cognitione* [illegible] *bita, geometricalibus quoque demonstrationibus, ut dimensionum modus pla*[illegible] *intelligeretur, adductis, deinceps in hoc tertio capitulo agrorum domorumque* [illegible] *visiones inter consortes et conheredes ostendere proposuimus*". Die von Sa[illegible] sorda gegebenen Teilungen hat Leonardo sämtlich in derselben Anord[illegible]g, fügt dann aber noch eine groſse Zahl anderer hinzu.

M. Curtze.

---

2 : 39. Hier hätte, worauf Giesing in seinem Programm über Leon[illegible] schon hingewiesen hat, bemerkt werden sollen, daſs in diesem Abschnitte der *liber trium fratrum* wörtlich benutzt ist.

M. Curtze.

---

2 : 57, siehe BM 1_3, 1900, S. 269.

---

2 : 59. Die Phillippsschen Handschriften sind jetzt in Berlin.

---

2 : 73. Not. 3 lire *termino* au lieu de *termine*.

---

2 : 82. Le problème de la trisection est ramené à mener par le poi[illegible] donné une droite *est* telle que le segment *st* intercepté entre le cercle et la dr[illegible] *bz* ait une longueur *bd* déterminée. Il suffit donc, pour le résoudre, d'une [illegible] choïde ordinaire, et la considération de la conchoïde du cercle, relative au p[illegible] *q*, est inutile.

P. Tannery.

---

2 : 87. Der in Anm. 4 genannten Ausgabe des Sacrobosco durch H[illegible] well reiht sich jetzt die Ausgabe von Curtze (Hauniae 1897) an, welche den Halliwellschen Text wesentlich verbessert liefert.

---

2 : 88. Das *Halbieren* dürfte deshalb *vor* dem Verdoppeln gelehrt worden sein, weil Addition, Subtraction und Mediation von rechts nach links, *alle übrigen Operationen* aber von links nach rechts ausgeführt wurden. Da man entweder auf dem Rechenbrett oder der Wachstafel unter Auslöschung der Ziffern rechnete, so würden beim Halbieren von links nach rechts, unter sonstiger Festhaltung des Prinzips der Rechnung, grobe Fehler sich eingeschlichen haben. Man hätte so z. B. als Hälfte der Zahl 3372 erhalten $1433\frac{1}{2}$. Die Hälfte von 3 ist 1, die wegen der überschiefsenden 1 zu der vorhergehenden Ziffer 3 zu addierende 5 giebt mit dieser 8, also ist die Hälfte 4. Ebenso ist die Hälfte von 7 3, und die 5 zur 2 addiert giebt wieder 7, deren Hälfte dann $3\frac{1}{2}$ ist. Nur aus diesem Grunde mufste bei der damaligen Praxis des Rechnens das Halbieren von rechts nach links ausgeführt werden. M. Curtze.

---

2 : 89. Anm. 2. Der verbesserte Abdruck bei Curtze lautet: *Et sciendum*, quod supra quamlibet figuram loco millenarii positam competenter *potest* poni quidam punctus ad denotandum, quod tot millenarios debet ultima figura repraesentare, quot *sunt* puncta pertransita.

---

2 : 90. In Zeile 3 ist die richtige, durch den Kommentar des Petrus de Dacia sichergestellte Lesart:

Extrahe radicem *duplam* sub parte sinistra,

wo das *duplam* auf die Quadrat- und Kubikwurzel bezogen wird.

M. Curtze.

---

2 : 92. *Planetes* (l. 12) est une fausse lecture de Ch. Henry pour *planeces*. De même, l. 17, au lieu de *linel ou lunax*, il faut lire *livel ou liviax*. Ce sont des formes médiévistes du mot *niveau*. P. Tannery.

2: 98, siehe BM 1_3, 1900, S. 269—270.

---

2 : 105. Note 3, lire *minuunt* (non *minunt*), ἰσάκις (non ἰσάχις). — Kästner a parfaitement raison de dire que le mot ἅμα, qui est dans le texte grec, aurait dû être traduit par *simul*. La faute de traduction, dans le texte de Campanus, n'est pas seulement relative aux mots ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ; toute la fin est inintelligible; il faudrait: »aut simul aequa sunt aut simul suo ordine superant aut superantur.« P. Tannery.

---

2 : 122. Il existe des éditions du livre de Suisset antérieures à celle de 1520. J'en possède une qui est sans date, mais qui porte sur le verso de son dernier feuillet une inscription faite par son premier possesseur qui dit l'avoir achetée en 1484. Ce livre, qui est devenu, comme le remarque justement Brucker, „albis corvis rarior", se compose de 86 feuillets (in folio, à 2 col.), dont le premier est blanc; l'ouvrage commence par la phrase suivante:

Penes quid habeant intensio et remissio qualitatis attēdi pl'es sunt opiniões" (f. 2 recto),
et se termine (f. 86 recto) par l'„Explicit":

„Subtilissimi Doctoris Anglici Suiset Calculationuz Liber. Per Egregiū Artiū et Medicine Doctorē Magistrū Johanē de Cipro diligētissīe emēdat' foeliciter Explicit. Deo Gratias. Padue."

La comparaison des titres (ou plutôt des „initia") des chapitres avec ceux donnés par Brucker prouve que c'est le même ouvrage. Mais le livre est sans dessins. J'ai trouvé de legères différences entre l'extrait de Brucker et le texte correspondant de mon exemplaire. Mais je n'ai pas eu encore le loisir de bien examiner l'ouvrage entier dont la lecture présente de grandes difficultés. „Adeo compendiis literarum deformis est liber", comme dit Brucker, „ut non nisi summo impedimento legi possit, et interdum Oedipo opus sit".

J. Timtchenko.

---

2 : 128. Die von uns im Verein mit Paul Tannery beabsichtigte Herausgabe der *Practica Geometriae* des Dominicus de Clavasio wird zeigen, daſs dieser wirklich sich einer Art Meſstisch bedient hat. M. Curtze.

---

2 : 143. Die Arbeit Alberts, *de maximo et minimo* ist auch in zwei Münchner Handschriften erhalten. Sie ist jedoch mehr philosophischer als mathematischer Natur. Der *tractatus de latitudinibus formarum* ist von Aschbach fälschlich Albert zugeschrieben: es ist der bekannte Tractat des Nicole Oresme. M. Curtze.

---

2 : 163. Danach ist also die S. 283 dieses Bandes gegebene Behauptung, es sei eine Aufgabe des Regiomontan *die erste Maximalaufgabe*, welche seit Apollonius und Zenodorus bekannt geworden sei, zu modifizieren. Übrigens ist die der Aufgabe Regiomontans unmittelbar folgende Aufgabe bei diesem ebenfalls eine Maximalaufgabe: „In ein gegebenes Dreieck das gröſste Quadrat einzubeschreiben". M. Curtze.

---

2 : 166. Le traité de Blaise de Parme ou Pelacani, dont M. Cantor fait mention, pourrait être considéré plutôt comme un abrégé du grand ouvrage de Suisset, cité à la page 122, que comme un commentaire sur celui de N. Oresme. Il n'y est parlé que des „uniformément difformes" et on n'y trouve rien d'original ni de particulièrement intéressant. En comparant ce commentaire au traité de N. Oresme, on est frappé de la supériorité du grand savant français. J. Timtchenko.

---

2 : 229. Von dem Buche „Behennd und hüpsch Rechnung uff allen kauffmanschafften" des Johannes Widman von Eger giebt es auſser den vier von Cantor genannten noch eine Ausgabe von 1500, die (wie die von 1508) zu Pforzheim von Thomas Anszhelm gedruckt ist. Ich habe Gelegenheit gehabt, beide Ausgaben zu vergleichen, und mich überzeugt, daſs 1508 wirklich ein *vollständiger Neudruck* stattgefunden hat. Zwar ist der Inhalt wörtlich derselbe, aber die Verteilung des Textes auf die Seiten stimmt oft nicht ganz überein, auch ist die Orthographie in beiden Ausgaben etwas verschieden. Das Register vollends ist in der älteren Ausgabe weniger vollständig als in der späteren. So z. B. ist die Bruchrechnung, die in beiden Ausgaben fol. 26 verso bis fol. 31 verso gelehrt wird, im Register der Ausgabe von 1500 nicht angegeben, in das Register der Ausgabe von 1508 ist wenigstens „Addiern in brüchen" aufgenommen.

Auf fol. 50 verso fehlt in der älteren Ausgabe die Überschrift „Regula detri" (Platz ist dafür gelassen), sie fehlt auch im Register. Im *Register* der Ausgabe von 1500 fehlen ferner die Zeilen

„Boreat das sind stich 120",
„Geselschafften 124",
„Von teilung 132"

des Registers der Ausgabe von 1508. Im *Text* steht allerdings

fol. 121 recto „Boreat",
fol. 124 verso „Geselschafft",
fol. 133 recto „Teilung".

Der Schlufs lautet in der älteren Ausgabe:

„Gedruckt zu Pfortzheim von Thoman anszhelm. Im Jubel Jar als man zalt 1500. Got sey lob",

in der Ausgabe von 1508:

„Gedruck zu Pfhortzheim von Thoman Anszhelm Im iar als man zalt 1508."

G. Wertheim.

---

2 : 242. Das Zeichen 𝔛 für *Zahl* in der Dresdner Algebra ist die Abkürzung für *Denarius* oder *Dragma*. Dasselbe Zeichen benutzt die dem Initius Algebras zugeschriebene Göttinger Algebra mit der ausdrücklichen Lesart *Dragma*.

M. Curtze.

---

2 : 243. Wenn man die Quadratwurzel durch *einen* Punkt bezeichnete, so ist es durchaus folgerichtig, die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel durch *zwei* solche zu bezeichnen, wie wir ja wohl auch $\sqrt{\sqrt{a}}$ schreiben. Da man damals von andern Wurzeln als diesen beiden und der dritten Wurzel nichts kannte, so ergab sich die Bezeichnung der Kubikwurzel durch *drei* Punkte ganz von selbst.

M. Curtze.

---

2 : 273. Es giebt noch eine zweite Arbeit Regiomontans zur Erläuterung seiner *Tabula primi mobilis:* Joannis Regiomontani Franci clarissimi mathematici *Fundamenta operationum, quae fiunt per tabulam generalem: Vel Apodixes et demonstrationes eorum, quae in tabulis primi mobilis, cum tabulis eclipsium* Burbachii *praeceptoris editis à* Tanstettero, *praecepit, in communem omnium Mathematum studiosorum utilitatem nunc primum editae.* Habes hic, optime Lector, praeter caetera pulcherrima exempla doctrinae de triangulis Sphaericis. Neuburgi ad Danubium. Anno M. D. LVII. fol. Am Ende: Excudebatur Neuburgi ad Danubium in officina Johannis Kiliani: Electori Palatini à Secretis. Anno M. D. LVII. 38 Blatt, wovon die beiden letzten leer. Herausgegeben ist sie von Andreas Schoner.

M. Curtze.

---

2 : 282—283. Die Behauptung Regiomontans, es liege der Werth $\frac{1554}{497}$ für π zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$, beruht auf folgendem Rechenfehler desselben im Nürnberger Manuskripte seines Briefwechsels. Er setzt:

$$\begin{array}{ccl} „3\frac{1}{7} & \cdot & 3\frac{10}{71} \\ \frac{22}{7} & \cdot & \frac{221}{71} \quad (\text{statt } \frac{223}{71}) \\ \hline 142 & & 1547 \quad (\text{statt } 1561) \\ 142 & & \\ \hline \frac{1562}{497} & & \frac{1547}{497}. \end{array}$$

„Dum igitur semidiameter circuli est 497, semicircumferentia est minor 1562 et maior 1547“ (statt 1561)

$$\begin{array}{r} 1562 \\ 1547 \\ \hline 15 \\ 1547 \\ \hline 1554 \end{array}$$

d. h. er addiert zu der kleineren Zahl den halben Unterschied der beiden gefundenen Werte. Mit den richtigen Werten würde er so $\frac{3123}{994}$ erhalten haben.

M. Curtze.

---

2 : 283. Siehe die Bemerkung zu **2** : 163 (oben S. 504).

---

2 : 284. Aus Rechnungen, welche sich in dem eigenhändigen Briefwechsel Regiomontans mit Bianchini und Jacob von Speier, sowie Cristoph Roeder erhalten haben, geht die gute Bekanntschaft desselben mit Algebra hervor. Regiomontan hat darin sogar sicher ein Gleichheitszeichen — einen längeren Horizontalstrich — und für *minus* das Zeichen $\overline{\iota g}$ benutzt, während die Quadratwurzel durch ℞ bezeichnet wird.

In dem Briefe von Roeder ist die Aufgabe, welche auf eine Gleichung dritten Grades führt, in etwas abgeänderter Form nochmals gestellt, es wären auch wohl noch einige andere Probleme, speziell solche, welche sich auf stereometrische Fragen beziehen, der Beachtung wert.

M. Curtze.

---

2 : 286. L. 22, il faut lire 241 au lieu de 214.

---

2 : 287. Dafs Regiomontan die vollständige Lösung des von Cantor als Aufgabe Nr. 2 bezeichneten Gleichungssystemes besafs, geht aus folgender Stelle seines Briefwechsels unzweideutig hervor: *„In octavo bene reddidistis „numerum quesitum minimum 1103, secundum autem 3313. Satis est, nam „infiniti sunt tales, quorum minimus est 1103. Huic si addiderimus numerum „numeratum ab ipsis tribus divisoribus, scilicet 17, 13 et 10, habebitur secun„dus, item eodem addito resultat tertius etc.“.*

M. Curtze.

---

2 : 289. Levi ben Gerson kennt ebenfalls den Namen *Baculus Jacob.* Die Handschrift in Paris, das Original, welches Clemens VI überreicht wurde, hat diesen Namen nur deshalb nicht, weil einer Miniatur halber das erste Blatt spoliiert ist (CURTZE, Biblioth. Mathem. 1898, S. 100).

---

2 : 290—291. In einer Handschrift zu Wolfenbüttel ist eine gedruckte Ankündigung der Ratdoltschen Ausgabe des EUKLIDES von 1482 enthalten. Die beiden ersten Seiten derselben sind auf der Innenseite eines Folioblattes abgedruckt und darunter steht der gedruckte Vermerk: „*Imprimetur Venetiis per Erhardum ratdolt de Augusta et Uldaricum Krafftshofer de Nuremberga*". Ob letzterer die Kosten des Druckes bezahlte, oder ob er der Herausgeber, beziehungsweise Korrektor der Ausgabe war, mufs unentschieden bleiben. Einer gütigen Mitteilung S. GÜNTHERS verdanke ich die Notiz, dafs Kraftshofen ein Flecken in der Nähe von Nürnberg ist. M. CURTZE.

---

2 : 313. Nach RICCARDI lebte MARCUS MORETUS aus Brescia in der 2. Hälfte des XV. Jahrhunderts. Das von CANTOR angeführte Beispiel steht in einer Abhandlung *Introductorium in Arithmeticam ad calculum astrologie* im Mscpt. Cracov. 601, f. 405—413. REGIOMONTAN dividiert häufig durch den *sinus totus* 60000 in folgender Weise:

$$\begin{array}{l|l} \;\;122 & \\ 337508 & 2608 \\ \;\;56251 & \end{array}$$

also genau wie PIETRO BORGI (**2** : 305) vorschreibt. REGIOMONTAN schreibt dabei den Divisor 60000 gar nicht erst hin. M. CURTZE.

---

2 : 334. L. 10, au lieu de $5\frac{3}{5}$, lire 6.

---

2 : 353. L. 2 en remontant, lire »*a luy*« (non »*a lay*«).

---

2 : 381. L. 14, lire „*durch Diagonalen in* $5\,(n-2)$ *kleinere Winkel*".

---

2 : 386. L'édition de 1495 de l'*Arithmetica* de BRADWARDINUS par CIRUELO existe en deux exemplaires à Paris. P. TANNERY.

---

2 : 395. Im Titel des Rechenbuches von GRAMMATEUS mufs es heifsen: Kunstlich; gewifs; vñ etlichẽ; mancherlay; vñ; notürfftig rechnũg; gesanngs; aufs zutaylẽ, monochordũ orgelpfeiffẽ vñ ander; aufs; buechhalten; Zornal; zumachen; quadrat vnnd; auff; Wieñ; Henricũ; siebẽ: Mit Kayserlichẽ gnaden vnd Privilegien das buech nicht nach zu truckẽ in sechs jare. Am Ende: Gedruckt zu Nürnberg durch Johannem Stüchs Für Lucas Alantsee Büchfurer vnd Bürger zu Wien: das Buch ist also nicht in Nürnberg erschienen, sondern nur gedruckt, der Erscheinungsort ist Wien. Es ist auch nicht 1521, sondern schon 1518 gedruckt worden. Es kommt wenigstens die Jahreszahl 1521 in dem ganzen Buche nicht vor. M. Curtze.

---

2 : 401. Im Jahre 1524 lehrte zu Ingolstadt ein gewisser Magister Johannes Knoufftte in öffentlicher Vorlesung die Algebra unter Zugrundelegung der Arbeit des Alchwarismi in der von Libri veröffentlichten Übersetzung. In dem Codex Vindobon. Palat. 5277 heifst es nämlich am Ende der nachgeschriebenen Vorlesung: *Anno dm̄ 1524 Ingolstadii in domo Doctoris S. Mauricii Domino Magistro Joanne Knoufflte procurante diurna decima Septembris.* M. Curtze.

---

2 : 405. L. 9, au lieu de „A *nach C*“, lire „B *nach C*“.

---

2 : 425. Zeile 5 lies: „*quantum ad excessum, productum habebit* ¦ ±“. Es heifst aber auch noch weiter:

Conditiones circa + *et* — *in multiplicatione.*

+ *per* + *vel* — *per* — *surgit* +,

+ *per* — *vel* — *per* + *crescit* —.

Die in dieser Algebra benutzten Zeichen und ihre Namen sind: *Numerus* = *N*; *Radix sive res* = ℞; *zensus* = ʒ; *Cubus* = ce; *zensus de zensu* = ʒʒ; *altera parte longior* = *alt*; *zensus et cubus* = ʒ + ce; *cubus et zensus de zensu* = ce + ʒʒ; *zensus de zensu et altera parte longior* = ʒʒ + *alt*. Sie befindet sich auch im Clm 19691, der aber erst 1520 für 13 Kr. erstanden ist.
M. Curtze.

---

2 : 481. Die Richtigkeit der Vermutung, dafs Ghaligais *Summa de arithmetica* (1521) von der *Practica d'arithmetica* (1548, 1552) desselben Verfassers nicht verschieden ist, kann unmittelbar durch Zuhilfenahme von Riccardis *Bibliotheca matematica italiana* (I, S. 500—502) bestätigt werden.

---

2 : 481. Ligne 26, l'attribution à Uberti, d'après Libri, du *Thesoro universale de abacho* doit être corrigée d'après la note 7 de la page 305. — Ligne 28, lire *grimaldelli* (non *grimadelli*). P. Tannery.

---

2 : 482. In der ersten Auflage der *Vorlesungen* wurde (S. 443) angegeben, dafs Annibale della Nave 1526—1550 Professor der Mathematik in Bologna war; statt 1550, das offenbar ein Druckfehler war, steht in der zweiten Auflage 1560. Es ist mir nicht bekannt, woher diese Angabe stammt; nach Gherardi, *Einige Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät der alten Universität Bologna, übersetzt von* M. Curtze (Berlin 1871, S. 63), erscheint Annibale della Nave in den „Rotoli“ der Universität Bologna nur bis zum Jahre 1558 inklusive, und verschwindet dann. G. Eneström.

---

2 : 486. Ligne 9, lire „18. Februar“ (non 12).

2 : 489. Ligne 25, lire: $x^3 + ax = b$.

2 : 490. Les mots »*che sono creato suo*«, dits par FERRARI de CARDAN, signifient simplement »moi qui suis son domestique«, et non pas „dafs er sich selbst von ihm geschaffen nannte“. P. TANNERY.

2 : 497. Dernière ligne, dans le titre de l'ouvrage de CARDAN, après *Arithmeticae*, ajouter *et mensurandi*. P. TANNERY.

2 : 509. Ligne 3 en remontant, au lieu de »addo tantum utriquendue«, lire »addendo tantum utrique«.

2: 509, siehe BM 1_3, 1900, S. 270.

2 : 510. L. 2: »binomium reductum ad binomium«. Corriger en »trinomium« le second »binomium«.

2 : 514. Dans sa *Nuova scienza*, TARTAGLIA, contrairement au dire de LIBRI, soutient que le mouvement des projectiles commence par une droite (inclinée) et finit par une droite (verticale). Il prétend de plus que ces deux droites sont reliées par un arc de cercle. P. TANNERY.

2 : 516—517. Une preuve assez curieuse que le dialogue des *Ragionamenti* entre TARTAGLIA et RICHARD WENTWORTH est purement fictif, ainsi que le soupçonne M. CANTOR, est que, dans la réédition posthume de 1562, l'imprimeur Curtio Trojano n'a eu aucun scrupule à se substituer à l'interlocuteur anglais. P. TANNERY.

2 : 532. Anm. 7. Statt *possum* lies *potui*. M. CURTZE.

2: 535, 541. Der 173. Satz des *Opus novum de proportionibus* (vgl. LE PAIGE, Biblioth. Mathem. 1887, S. 107), den CARDANO und nach ihm CANTOR als eine Erfindung des FERRARI erklärten, ist in der That schon früher gefunden worden. Er ist nämlich mit dem Satze identisch, den CANTOR S. 471 als von COPPERNICUS ausgesprochen und bewiesen erwähnt, und aus der dort zitierten Note von CURTZE in der Biblioth. Mathem. 1895, S. 33—34, geht hervor, dafs auch NASIR EDDIN denselben Satz („Wenn ein Kreis im Innern eines festen Kreises von doppeltem Radius rollt, so beschreibt jeder Punkt des rollenden Kreises einen Durchmesser des festen“) gekannt und richtig bewiesen hat.

G. ENESTRÖM.

2:548. Den zwei von Cantor genannten Schriften über Geschichte der Zahlzeichen könnte auch eine dritte hinzugefügt werden, nämlich S. Medici, *De latinis numerorum notis*, Venetiis 1557 (s. Riccardi, *Bibliot. matem. ital.* I, S. 146; Favaro, Biblioth. Mathem. 1892, S. 70).

---

2 : 549. C'est Montucla qui a eu le premier la fantaisie d'écrire, sans aucun garant, Jean de la Pène au lieu de J. Pena. La famille provençale Pena a subsisté jusqu'au commencement du 19e siècle. P. Tannery.

---

2 : 554. Foix-Candale a été évêque d'Aire. P. Tannery.

---

2 : 569. L. 2 en remontant, lire »*CA*« au lieu de »*CR*«.

2:569. Die Bemerkung, dafs Benedetti (1585) bis zu einem gewissen Grade sich einer 1570 veröffentlichten, von Ferrari gemachten Erfindung bediente, dürfte auf einem Mifsverständnis beruhen. Der fragliche, von Ferrari nacherfundene Satz, bezieht sich, wie oben S. 509 auseinandergesetzt worden ist, auf die Verwandlung einer kreisförmigen Bewegung in eine einfach gradlinige (also nicht hin- und hergehende) oder umgekehrt. G. Eneström.

2:572—573. Die Angabe, dafs Stevins fünf Bücher geometrischer Aufgaben dem Jahre 1585 gehören, ist schon von Cantor selbst im Vorworte (S. VIII) dahin berichtigt, dafs die *Problematum geometricorum libri V* im Jahre 1583 in Antwerpen erschienen (vgl. hierzu Bierens de Haan, *Bibliographie néerlandaise . . . des ouvrages . . . sur les sciences mathématiques et physiques*, Rome 1883, S. 263), so dafs sich der S. 573 citierte Ausspruch des Adrian van Roomen als richtig erweist. Übrigens scheint diese Schrift gar nicht selten zu sein; ich besitze selber ein Exemplar derselben, und zufälliger Weise habe ich erfahren, dafs in der Universitätsbibliothek in Messina ein anderes befindlich ist. G. Eneström.

---

2 : 582. D'après les nouvelles recherches de Fréd. Ritter (*François Viète*, Paris 1895), Viette (c'est ainsi qu'on devrait écrire) ne paraît pas avoir jamais abjuré le catholicisme, quelles qu'aient été ses relations avec le parti huguenot. C'est dès 1564 qu'il a quitté sa situation d'avocat à Poitiers pour s'attacher à la dame de Soubise. Nommé en 1574 conseiller au Parlament de Rennes, il fut presqu'immédiatement détaché au service du roi Henri III, qui, dès 1581, le nomma maître des requêtes au Conseil privé. Après une interruption amenée par des motifs politiques, il en reprit les fonctions en 1589, mais ne fit point partie du Parlement de Tours. P. Tannery.

2:583, 594, 597, 602, 603—604, siehe BM 1_3, 1900, S. 270—271. — **2:612, 621, 623**, siehe BM 1_3, 1900, S. 277. — **2:642, 643, 665, 700, 701, 703, 704, 705, 721, 742, 746, 747**, siehe BM 1_3, 1900, S. 271—273.

---

2 : 876. Au lieu de »Persone« (l. 22) lire »Personnier« comme à la ligne 19. — La chaire de mathématiques du Collège de France donnant lieu à concours était celle que RAMUS avait fondée.

---

2 : 878. Ce n'est qu'en 1638 (non en 1635) que FERMAT et DESCARTES eurent connaissance de la quadrature de la cycloïde par ROBERVAL et qu'ils donnèrent leurs démonstrations. Toutefois ROBERVAL l'avait communiquée dès 1637 à MERSENNE, qui, cette année même, en fit l'objet d'une remarque dans un appendice de son *Harmonie universelle*. C'est d'ailleurs en 1637 que devait avoir lieu le concours pour la chaire de RAMUS en vue duquel ROBERVAL réserva, dit-il, sa découverte pendant un an. Cette découverte est donc, au plus tôt, du commencement du 1636. C'est certainement par une erreur de mémoire que, dans les lettres à TORRICELLI, ROBERVAL fait remonter l'invention à 1634.

P. TANNERY.

2:879. ROBERVAL ne parle cependant pas expressément de la *ligne des sinus*. Cette ligne a été formellement introduite dans un ouvrage curieux qui a pour titre: *Opusculum geometricum de linea sinuum et cycloide. Auctore* ANTIMO FARBIO. (Romae Typis HH. Francisci Corbelletti, 1659, in 4°). „Antimus Farbius" est le pseudonyme du célèbre jésuite français HONORÉ FABRI (1607—1688). Dans les Définitions I et II, p. 5 (Cf. Prop. XXIII, p. 33), l'auteur donne *rhétoriquement* les équations de la sinusoïde et de la cycloïde sous la forme $y = \sin x$ et $y = a \sin u + a\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$.

J. TIMTCHENKO.

2: 891, siehe BM 1_3, 1900, S. 273.

2:901. La définition de la limite se trouve déjà dans le grand ouvrage de GRÉGOIRE DE ST. VINCENT: *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (1647), Lib. II, def. 3, p. 15: „Terminus progressionis est seriei finis, ad quem nulla progressio pertinget, licet in infinitum continuetur: sed quovis intervallo dato propius ad eum accedere poterit." Le livre II contient une théorie complète des progressions géométriques infinies basée sur cette définition.

J. TIMTCHENKO.

---

2 : IX (Vorwort). Zu Seite 642. Die Göttinger Handschrift beginnt, ebenso wie die drei Dresdner, mit einem Briefe des INITIUS ALGEBRAS *ad summum mathematicum eo tempore Geometram* YLEM, in welchem der supponierte ALGEBRAS seinem Lehrer YLES seine Verwunderung darüber ausspricht, dafs dieser nicht gesehen habe, es seien in seinem *dritten* Buche die Prinzipien der Gebra und Almochabola gegeben, und er beweist nun in dem Folgenden, dafs dem so ist. Das *dritte* Buch ist aber jedenfalls so gemeint, dafs die Definitionen, Postulate und Animi conceptiones als das erste Buch gerechnet werden, die Beweise des ersten als das zweite, und das zweite als das dritte. Er nimmt der Reihe nach die Sätze des zweiten Buches in Betrachtung, giebt lateinischen Wortlaut, und danach in deutscher Sprache den Nachweis, dafs

einer der sechs Fälle der Algebra durch einen jeden Satz gelöst werde. Nachdem er so die Sätze durchgenommen hat, fängt erst die eigentliche Gebra und Almochabola des Initius Algebras wirklich an. Dafs also Yles Euklides sein soll, ist sicher. M. Curtze.

2 : X (Vorwort). Z. 8, statt 1758 lies 1658.

3 : 12. Nach Riccardi erschienen die von E. Astorini herausgegebenen *Apollonii Conica restituta* zum erstenmal in Neapel 1698. — Da wir vergebens bei Riccardi irgend eine Erwähnung des Astorini beigelegten Buches: „Archimedes restitutus" gesucht haben, so vermuten wir, dass die Angabe Poggendorffs nicht richtig ist. G. Eneström.

3 : 17. Die Bezeichnung der Potenzen durch rechts von den Buchstaben aber auf gleicher Linie mit ihnen angeschriebenen Zahlen kommt auch bei anderen gleichzeitigen Verfassern, z. B. de Billy und A. Spole vor (vgl. L'intermédiaire des mathématiciens **2**, 1895, 181; **4**, 1897, 60).
G. Eneström.

3 : 22. „Kochansky behauptet . . ., wenn AD Durchmesser eines Kreises, BC eine Senkrechte auf den Durchmesser im Punkte B bis zum Durchschnitte C mit der Kreisperipherie sei, so verhalte sich nicht nur, wie allgemein bekannt ist, $AB : BC = BC : BD$, sondern es sei auch weiter $BC : BD = BD : AD$, . . . Kochansky bestätigt seine jedenfalls nur näherungsweise aufgestellte Behauptung durch . . . Zahlenwerte, . . . und diese Zahlenwerte erfüllen die zweite der behaupteten Proportionen". Aus diesen Worten könnte man leicht glauben, Kochansky habe behauptet, die zweite Proportion sei ebenso wie die erste allgemein gültig, wenn auch nur annäherungsweise, was natürlich Unsinn gewesen wäre. In der That *verlangt* Kochansky eine rein *geometrische* Lösung des Problems den Punkt B zu *bestimmen*, so dass nicht nur $AB : BC = BC : BD$, sondern auch $BC : BD = BD : AD$ ist, und giebt die Zahlenwerte für AB, BD, BC an, die selbstverständlich nur annäherungsweise richtig sein können, da das Problem zur Gleichung $x(x+1)^2 = 1$ $\left(\text{wo } x = \frac{AB}{BD}\right)$ führt. — Übrigens hat Kochansky dies Problem nur im Vorübergehen berührt, und sein Aufsatz behandelt auch ganz andere Fragen, als die von Herrn Cantor zuerst genannte. G. Eneström.

3 : 45—48. Nachdem Herr Cantor über De Witts Herleitung des Wertes einer Leibrente berichtet hat, bemerkt er: „Wir haben die De Wittsche Schrift ausführlich geschildert, damit ersichtlich werde, wie sehr die Lehre von der Wahrscheinlichkeit nur erfahrungsgemäfs bekannter Ereignisse und insbesondere die Lehre von der Sterblichkeit damals noch im Argen lag." Dieser Behauptung können wir nicht ganz beipflichten; in der That wird die De Wittsche Herleitung vollständig exakt, wenn man in seiner Darstellung „Anzahl der Verstorbenen" statt „Sterbenswahrscheinlichkeit" setzt, und bei seiner numerischen Berechnung der Leibrente die Multiplikatoren $1, \frac{3}{2}, 2, 3$ statt die von ihm benutzten $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ einführt. Die erste Änderung ist unmittelbar zulässig, da

De Witt unter „Sterbenswahrscheinlichkeit für das $(x+1)$:ste Altersjahr“ nicht $\frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$ (wo l_x die Anzahl der x-jährig Lebenden bedeutet) sondern $\frac{l_x - l_{x+1}}{l_4}$ versteht, und die Sterbenswahrscheinlichkeiten also den Anzahlen der Verstorbenen proportional sind. Dafs De Witt bei der Berechnung der Leibrente die Multiplikatoren 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ anwendet, obgleich sie nach seinen Voraussetzungen 1, $\frac{2}{3}$, 2, 3 sein sollten, kann zwar ein wirklicher Fehler sein, aber es ist auch möglich sein Verfahren so zu erklären, dafs er aus gewissen Gründen (vgl. Cantor, a. a. O. S. 46) den Preis der Leibrente erniedrigen wollte. — Führt man diese beide Änderungen ein, so sieht man unmittelbar, dafs alles richtig wird, und man kann auch leicht die allgemeine Formel für den Wert der Leibrente herstellen (vgl. Jahrb. über die Fortschr. d. Mathem. **27**, 1896, 187; **28**, 1897, 40). G. Eneström.

---

3 : 49—50. S. 49, Zeile 32 ist das Wort „proportionalen“ zu streichen; in der That ist bei Halley die Anfangszahl 1000 nicht eine willkürlich gewählte runde Zahl, da die Summe der Zahlen seiner Liste die ganze Bevölkerung in Breslau repräsentieren mufs. — S. 50, Zeile 15 mufs 1378 statt 1000 gesetzt werden; die letzte Zahl ist bei Halley nicht die Anzahl der Geburten in einem Kalenderjahre, sondern die Anzahl der gleichzeitig Lebenden im ersten Lebensjahre, wenn jährlich 1378 Geburten stattfinden. Aus ähnlichem Grunde dürfte der Ausdruck (Z. 27—28), dafs man nach Halley „6 gegen 1 wetten kann, dafs ein im ersten Lebensjahre stehendes Kind *in das zweite Lebensjahr eintreten* würde“ modifiziert werden müssen. G. Eneström.

---

3 : 116. Der Brief von Tschirnhaus an Leibniz, wo das Wesentlichste des Inhaltes der Abhandlung von 1683: *Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione* entwickelt wurde, ist nicht vom 10. April 1678, sondern vom 17. April 1677 (siehe *Briefwechsel von* G. W. Leibniz *mit Mathematikern, herausg. von* C. I. Gerhardt, I, Berlin 1899, S. 332—333). Der Brief vom 10. April 1678 enthielt (siehe a. a. O. S. 360—370) eine „Methodus generalis omnium aequationum radices exhibendi“, aber diese Methode ist eine ganz andere G. Eneström.

---

3 : 123. Wenn Rolle als fundamentale Eigenschaft der „Cascaden“ angegeben hat, dafs die Gleichung, welche Herr Cantor am Anfang der Seite zitiert, durch Bezugnahme auf die Cascadengleichungen für jedes x erfüllt wird, so ist dies offenbar ein Versehen, da die Gleichung $a_0 x^n = 0$ nur durch den Wert $x = 0$ befriedigt ist, sofern nicht $a_0 = 0$. G. Eneström.

---

3 : 201. Zeile 30 dürfte es richtiger sein „gleich einer endlichen Gröfse“ statt „gleich einer Constanten“ zu setzen.

---

3 : 218. Über den Punkt P der Fig. 70 giebt der Text keinen Aufschlufs.

---

3 : 224, 250. Man weifs jetzt ganz bestimmt, dafs die Methode zur Auswertung von Brüchen, deren Zähler und Nenner gleichzeitig in Null übergehen, von Johann Bernoulli erfunden und im Jahre 1694 brieflich dem Marquis de l'Hôpital mitgeteilt wurde (vgl. Jahrb. über die Fortschr. d. Mathem. **25**, 1893/94, S. 66—67). G. Eneström.

---

3 : 232. Dass Descartes schon 1639 die logarithmische Curve behandelte, geht aus einer Note des Herrn P. Tannery in L'intermédiaire des mathématiciens **7**, 1900, S. 94—95 hervor.

---

3 : 246. Der Briefwechsel über Wendepunkte von Curven fand schon im Jahre 1694 zwischen Johann Bernoulli und Hôpital statt und wurde in demselben Jahre abgeschlossen. Der erste Brief ist vom 7. April 1694, und nach dem 16. Juli 1694 enthält der Briefwechsel nichts über diesen Gegenstand.

G. Eneström.

Vermischte historische Notizen.

Moderne Überschreibung der Kýklu métresis. Die geometrischen Grundlagen der Rechnung, mit deren Hülfe Archimedes den Umfang des umgeschriebenen, resp. eingeschriebenen 96-Ecks bestimmt hat, sind in der *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter* des Herrn Zeuthen (Seite 228) durch

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{1+\cos x} \quad \left(\text{oder } \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x + 1}\right)$$

wiedergegeben. Ich erlaube mir darauf aufmerksam zu machen, dafs eine — an sich geringfügige — Änderung dieser Darstellung ein deutlicheres und treueres Bild von jener Rechnung giebt. Man braucht nur zu sagen, Archimedes berechnete wiederholt $\cot\frac{1}{2}x$ und $\operatorname{cosec}\frac{1}{2}x$ aus $\cot x$ und $\operatorname{cosec} x$ nach einem Verfahren, das sich mit

$$\text{(A)} \qquad \cot\tfrac{1}{2}x = \cot x + \operatorname{cosec} x$$

$$\text{(B)} \qquad \operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}x = \cot^2\tfrac{1}{2}x + 1$$

wiedergeben läfst. Er findet so aus $\cot\frac{1}{6}\pi = \sqrt{3}$ und $\operatorname{cosec}\frac{1}{6}\pi = 2$ ausgehend:

$$\cot\frac{\pi}{96} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153} \quad \text{resp.} \quad \operatorname{cosec}\frac{\pi}{96} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}.$$

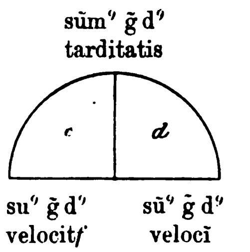
Daraus ergiebt sich

$$\pi < 96\operatorname{tg}\frac{\pi}{96} < \frac{96 \times 153}{4673\frac{1}{2}} < 3\tfrac{1}{7}, \qquad \pi > 96\sin\frac{\pi}{96} > \frac{96\times 66}{2017\frac{1}{4}} > 3\tfrac{10}{71}.$$

Der Inhalt von (A) und (B), so weit er hier in Betracht kommt, kann auch durch elegante Relationen zwischen den reciproken Werten des Kreisdurchmessers und der Seiten gewisser Vielecke ausgedrückt werden. Man entfernt sich aber dadurch sehr von der Denkweise ARCHIMEDES' und dem Inhalte seiner Abhandlung.

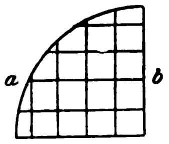
Budapest. J. KÜRSCHÁK.

Sur un point du „Tractatus de latitudinibus formarum" de Nicolas Oresme. Dans le 2ᵈ tome des *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* de M. CANTOR, on trouve (p. 132 de la 2ᵉ édition) l'indication suivante: „ORESMES Augen offenbarte sich die Wahrheit des Satzes ...: an den Höhen- und Tiefenpunkten einer Kurve sei der Differentialquotient der Ordinate nach der Abscisse Null". Voici en quelques termes s'exprime ORESME dans le passage que M. CANTOR a en vue: „Quarto est notandum quod in quolibet semicirculo incipit intensio latitudinis a summo gradu velocitatis; et terminatur ad summum gradum latitudinis tarditatis scilicet in medio puncto arcus. Remissio vero que incipit ab eodem medio incipit a summo gradu tarditatis et terminatur ad summum gradum velocitatis", ce qui est illustré par la figure suivante:



(*De latitudinibus formarum*, éd. de 1486, fol. 10 recto-verso; la figure se trouve sur la marge de fol. 10 recto).

Sur le verso du feuillet précédent se trouve une autre figure dont la considération a probablement amené ORESME à son théorème:



avec la remarque suivante:

„In figura autem *a*. *b*. excessus graduum non sunt inter se equales".

Sous la dénomination „excessus graduum" l'auteur entend les différences ou accroissements de la fonction („latitudo") correspondant aux accroissements successifs et égaux de la variable („longitudo"). Il remarque un peu plus loin (f. 10 verso), que la „summa velocitas" ainsi que la „summa tarditas" augmentent en même temps que les dimensions du cercle. Cela prouve qu'il était encore assez loin du théorème exprimé par la formule $\frac{dy}{dx} = 0$ (pour le sommet de la figure).

Toutes les notions et dénominations employées par ORESME se trouvent aussi dans le *Calculationum liber* de SUISSET qui est d'ailleurs beaucoup plus étendu. Mais l'ouvrage de Suisset, autant que j'ai pu le voir, ne considère que les „latitudines uniformiter difformes“ représentées par des lignes droites. A ce point de vue, les considérations de N. Oresme constituent donc un véritable progrès.

Odessa. J. Timtchenko.

Anfragen.

85. Sur l'origine du terme „surdus“ (= incommensurable). Dans l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* **1**:1 (1898), p. 50, M. A. Pringsheim fait observer qu'on a attribué à Leonardo Pisano le terme „numerus surdus“ pour désigner un nombre incommensurable. En effet, le *Liber abbaci* de Leonardo contient (voir p. 356 de l'édition de Boncompagni) le passage suivant: „radix numeri non quadrati ... dicitur surda, cum numerari non possit, sed eius potentia numeratur“. D'autre part, nous savons à présent par l'édition que M. Curtze nous a donnée (1899) de la traduction latine du commentaire d'Anaritius sur les *Elementa*, que le mot „surdus“ a été employé dans le même sens déjà antérieurement à Leonardo par Gherardo Cremonese; ainsi p. ex. nous trouvons à la page 253 de l'édition de M. Curtze: „[quantitas] surda ... est, que verbis exprimi est impossibile, quemadmodum numerorum radices, qui non sunt quadrati“.

Est-ce que le terme „surdus“ a été utilisé par quelques auteurs antérieurs à Gherardo Cremonese?

G. Eneström.

86. Gabriel de Aratoribus (1539). In den *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II², S. 482 erwähnt Herr Cantor, dafs Cardano in der Arbeit: *Practica arithmeticae* (1539) seinem Landsmann Gabriel de Aratoribus eine Bemerkung, die zum Rationalmachen gewisser Brüche führt, beigelegt hat. Über diesen Gabriel de Aratoribus habe ich in den mir zugänglichen Aufschlagebüchern keine anderen Aufschlüsse bekommen können. Giebt es überhaupt solche, und wo sind sie zu haben?

G. Eneström.

87. Über den Ursprung der Benennung „Radius“ für Halbmesser. In allen mir vorgekommenen handschriftlichen oder gedruckten Werken bis in das XVII. Jahrhundert hinein ist der Halbmesser eines Kreises oder der der Kugel stets *semidiameter* und niemals *radius* genannt. In den mir zugänglichen Werken über Geschichte der Mathematik habe ich vergeblich darüber Belehrung gesucht, von wem die Bezeichnung *radius* zuerst in dem jetzt geläufigen Sinne gebraucht ist: kann mir wohl irgend Jemand Auskunft geben, von wem und wo das Wort *radius* im Sinne von Kreis- oder Kugelhalbmesser zuerst benutzt ist?

M. Curtze.

88. On the technical terms „Differential Quotient, Definite Integral". Who introduced the technical terms: „Differential Quotient"[1]), and „Definite and Indefinite Integrals"[2])? J. G. Hagen.

Antwort auf die Anfrage 84 über die Legendre'sche Transformation. Legendre hat die nach ihm benannte Transformation, die darin besteht, daſs statt x und y als unabhängige Veränderliche p und q, statt z als gesuchte Funktion $v = px + qy - z$ eingeführt wird, angegeben in dem *Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles;* Histoire de l'académie. Mémoire de mathématiques et de physique, Année 1787 (Paris 1789), S. 347. Dieselbe Transformation war jedoch vorher von Euler angewandt worden, siehe dessen *Institutiones calculi integralis* (t. III, St. Petersburg 1770, Pars I, Caput V, § 158 und 164). Mansion sagt sogar, daſs „die erste Idee davon Leibniz zukommt" (*Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, herausgegeben von* H. Maser [Berlin 1892], S. 41), ohne jedoch anzugeben, wo sich Leibniz darüber geäuſsert hat. P. Stäckel.

---

1) The „quantitas differentialis" of Leibniz was first considered for itself, and any combination of such differentials was called „formula differentialis". The *quotient* of two differentials became technical through Lagrange's definition by Taylor's series (Mém. de Berlin, 1772, p. 185) and was called „derived function", in opposition to the „primitive function".

The technical term „Differential Coefficient" was introduced by Lacroix (*Traité du Calc. Différ. et Int.,* 2e éd. I, §§ 4 et 81) and has been adopted in all languages. The term „Differential Quotient", however, is confined almost exclusively to books written in the German language. It is found in the *Mathem. Wörterbuch* by Klügel (I, 1803, pp. 267, 809, etc.), and seems to have originated in the combinatorial school, to which Klügel belonged.

2) The name „Integral", as is well known, was introduced by James Bernoulli (Acta Eruditorum 1690, p. 218). While integrations with and without conditions or limits are of constant occurence in Euler's writings, the definiton of the terms „definite" and „indefinite" is given by Lacroix in his *Traité du Calc. Différ. et Int.* (2. éd. II, § 470). They are also found in the earliest writings of Cauchy.

Recensionen.

Moritz Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Erste Abteilung. Von 1668—1699. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner 1900. 261 S. 8⁰. M. 6,60.

Da dies Heft zum gröfsten Teil der Darstellung der Entdeckung und der ersten Ausbildung der Differential- und Integralrechnung gewidmet ist, und da während der letzten Zeit nur wenige wichtigere, hierher gehörende Aktenstücke veröffentlicht worden sind, so ist es natürlich, dafs verhältnismäfsig wenige Zusätze nötig waren. Doch enthielt die erste Auflage nur 251 Seiten, so dafs auch hier viel neues hinzugekommen ist, und die meisten Schreib- oder Druckfehler, die wir in der ersten Auflage notiert hatten, sind jetzt verbessert worden. Ausnahmsweise sind einige solche stehen geblieben, z. B. S. 10 die Bemerkung, dafs Collins „eine Mitwirkung bei dem Drucke der *1687, mithin vier Jahre nach seinem Tode* [1683] erschienenen *Algebra* des Wallis nachgerühmt wird"; bekanntlich erschien die *Algebra* des Wallis 1685, wie Herr Cantor S. 4 und 102 ganz richtig angegeben hat. Als ein nicht verbesserter Schreibfehler der ersten Auflage dürfte auch die Bemerkung (S. 117), bezeichnet werden können, dafs die Benutzung von Tschirnhausens Methode, um die Gleichung 5. Grades auf die Form $x^5 + Ax + B = 0$ zu bringen, einige dreifsig Jahre jünger als Abels Abhandlung vom Jahre 1824 ist, da es jetzt allgemein bekannt ist, dafs dies Verfahren nicht zuerst von Jerrard sondern schon von E. S. Bring (1786) angewendet wurde (siehe z. B. L'intermédiaire des mathématiciens **5**, 1898, S. 40 und die dort citierten Arbeiten, sowie *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* I, S. 516).

Auf der anderen Seite kann man auch in Bezug auf dies Heft bemerken, dafs Herr Cantor einige Resultate der neuesten mathematisch-historischen Forschung übersehen hat, und dafs es zuweilen vom Zufall abhängig gewesen ist, ob eine wünschenswerte Änderung zu stande gekommen ist oder nicht. So z. B. hat Herr Cantor (S. 225) die von uns (Biblioth. Mathem. 1894, S. 65—72) veröffentlichten Auszüge aus dem Briefwechsel zwischen Johann Bernoulli und Hôpital gebührend berücksichtigt, aber (S. 116) übersehen, dafs Tschirnhausens Brief an Leibniz vom 10. April 1678 jetzt im Wortlaute durch den Druck bekannt gegeben worden ist (*Der Briefwechsel von* G. W. Leibniz *mit Mathematikern, herausgegeben von* C. I. Gerhardt, I, Berlin 1899, S. 354—371), und dadurch verfehlt, seine Darstellung auch hier zu berichtigen und zu ergänzen. Dagegen ist offenbar das Ausbleiben gewisser anderer Zusätze oder Änderungen, die wir als wünschenswert bezeichnen möchten, nicht dem Zufall zuzuschreiben, z. B. in Bezug auf die von Barrow ausgeführten Integrationen (siehe die von Herrn Cantor S. 157 zitierte Abhandlung von Zeuthen), für welche es nicht leicht sein dürfte in der Cantorschen Darstellung einen passenden Platz zu finden. Etwas schwieriger ist es zu verstehen, warum Herr CANTOR, bei seiner Besprechung der *Principia*, auch in der neuen Auflage (S. 207) den 1. Satz des 5. Abschnittes besonders hervorhebt, nachdem ZEUTHEN (Bulletin de l'académie des sciences de Danemark 1895, S. 275—276) darauf hingewiesen hat, daſs dies Hervorheben nicht gut begründet und noch dazu irreleitend ist, da der Satz ja gar nicht von NEWTON herrührt, sondern schon von APOLLONIOS und PAPPOS, später von FERMAT und DESCARTES behandelt und bewiesen worden ist. G. ENESTRÖM.

K. Fink. A brief history of mathematics. An authorized translation of „Geschichte der Elementar-Mathematik" by W. W. BEMANN and D. E. SMITH. Chicago, The open court publishing company 1900. XII + 333 S. 8°. Doll. 1,50.

In ihrem Vorworte bemerken die Übersetzer, daſs K. FINK in seinem 1890 erschienenen *Kurzen Abriſs der Geschichte der Elementar-Mathematik, mit Hinweis auf die sich anschlieſsenden höheren Gebiete* nicht, wie es bei den meisten bisher herausgegebenen Kompendien der Geschichte der Mathematik der Fall ist, zum groſsen Teil den Raum mit Anekdoten und anderen Notizen, die für die Kenntnis der Entwickelung der Wissenschaft wenig oder gar keinen Wert haben, ausfüllt, und daſs er auſserdem eine sehr systematische Einteilung des Gegenstandes bringt. Sie haben sich darum vorgenommen, das Buch ins Englische zu übersetzen, und dabei selbstverständlich die Angaben, die anerkannt unrichtig sind, zu verbessern versucht, aber sonst keine gröſseren Änderungen zweckmäſsig erachtet; nur einige bibliographische Verweise sind hinzugefügt, und die biographischen Notizen am Ende des Buches revidiert.

Es ist klar, daſs eine Arbeit, die vor 10 Jahren verfaſst wurde, auch in dem Falle, daſs sie *alle* vorhandenen Untersuchungen gebührend berücksichtigt hätte, viele Angaben enthalten muſs, die jetzt berichtigt werden können, aber ebenso klar scheint es uns, daſs eine Ausfüllung der Lücken, die unsere Kenntnisse der Entwickelung besonderer Zweige der Mathematik im Jahre 1890 zeigten, die aber durch die neuesten Forschungen beseitigt worden sind, ebenso wünschenswert wäre. In gewissen Fällen kann die Nichtberücksichtigung dieser Forschungen die Darstellung der Geschichte einer Theorie ganz verfehlt machen, während zuweilen eine unrichtige Angabe ziemlich unschädlich ist. So z. B. dürfte die Abteilung V (Trigonometrie) nach den grundlegenden Untersuchungen des Herrn BRAUNMÜHL (1899) über die dort behandelten Gegenstände kaum als befriedigend bezeichnet werden können, während auf der anderen Seite der Umstand, daſs die Übersetzer (S. 47) die von GERHARDT herrührende unrichtige Angabe: „the signs + and — . . . appear also in a Vienna MS. *of the fifteenth century*" (vgl. WAPPLER, *Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert* [1887], S. 3; CURTZE, Centralbl. für Bibliotheksw. 1899, S. 290) nicht verbessert haben, keine eigentliche Bedeutung hat.

Der Grund warum die Übersetzer keine Umarbeitung des Originals vorgenommen haben, ist in ihrem Vorworte nicht mitgeteilt, aber vielleicht ist er in den Schwierigkeiten, die eine solche Umarbeitung darbietet, zu suchen, und auch in ihrer jetzigen Form wird sich die Übersetzung sicherlich als brauchbar für Studierende erweisen. Wir heiſsen also das Buch willkommen, und erlauben uns die Hoffnung auszudrücken, dafs die Herren BEMANN und SMITH in der voraussichtlich bald nötigen neuen Auflage desselben unsere Bemerkungen, soweit möglich, berücksichtigen werden.

Betreffs der Einzelheiten haben wir hie und da einige Bemerkungen notiert, deren folgende hier Platz finden mögen.

S. 74. Die Angabe, ALKHWARIZMIS Algebra sei wahrscheinlich von ATELHART VON BATH übersetzt, dürfte auf einer Verwechselung beruhen. Von dieser Algebra besitzen wir Übersetzungen von ROBERT CASTRENSIS und von GHERARDO CREMONESE, aber so viel wir wissen, giebt es keine solche von ATELHART. Dagegen hat man vermutet (vgl. CANTOR, *Vorles. über Gesch. d. Mathem.* I², S. 671), eine anonyme Übersetzung von ALKHWARIZMIS Arithmetik rühre von ATELHART her, aber unserer Ansicht nach ist es wenigstens ebenso wahrscheinlich, dafs auch diese Übersetzung von der Hand des ROBERT CASTRENSIS ist.

S. 77. Nicht nur die Summen der Quadratzahlen und der Kubikzahlen, sondern auch die Summe der Biquadratzahlen waren den Arabern bekannt (vgl. z. B. CANTOR, l. c., S. 736).

S. 97. Es ist uns unmöglich zu verstehen, woher die Bemerkung: „half a century after STIFEL it [d. h. das Zeichen der unbekannten Gröfse] was read by all mathematicians as x" gekommen ist. Bekanntlich ist es DESCARTES, der im Jahre 1637 (d. h. 70 Jahre nach STIFELS Tode) *zum ersten Mal* eine unbekannte Gröfse durch x bezeichnete, und es dauerte noch einige Jahrzehnte, ehe diese Bezeichnung allgemein angenommen wurde. — Mit Bezug auf die Worte: „there are two opinions concerning the origin of the x of mathematicians" sei bemerkt, dafs die zweite dieser Ansichten, die von P. DELAGARDE herrührende, ganz unhistorisch ist und darum keine Beachtung verdienen dürfte; dagegen hätte hervorgehoben werden können, dafs in der ersten Schrift, wo x als Zeichen für die Unbekannte vorkommt, zuerst z, dann y und in dritter Linie x dazu benutzt wird, was darauf hinzudeuten scheint, dafs DESCARTES x anwandte, weil es einer der letzten Buchstaben des Alphabets war (vgl. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 1899, S. 91; WERTHEIM, Zeitschr. für mathem. Unterr. **31**, 1900, S. 201).

S. 142, 156. Einige Werte symmetrischer Funktionen der Wurzeln einer Gleichung finden sich schon bei GIRARD, *Invention nouvelle en l'algèbre* (1629). Auch hat GIRARD daselbst den Zusammenhang zwischen den Koefficienten und den Wurzeln angegeben.

S. 152. Die Behauptung: „MACLAURIN developed a rigorous proof of TAYLORS Theorem" scheint uns nicht richtig. Ohne den Restterm zu berücksichtigen, kann wohl kaum ein strenger Beweis des TAYLORschen Theorems gegeben werden, und das hat MACLAURIN, so viel wir wissen, nicht einmal versucht (vgl. *Treatise of fluxions*, art. 751).

S. 174. „The integral calculus was first further extended by COTES, who showed how to integrate rational algebraic functions", ist eine Bemerkung, der wir eine wesentlich andere Form hätten geben mögen.

S. 237. Dafs NIKOLAUS CUSANUS die Cykloide *nicht* gekannt hat, dürfte wohl jetzt als bewiesen angesehen werden können (vgl. z. B. GÜNTHER, Biblioth. Mathem. 1887, S. 8—14).

S. 242. Nachdem CLAIRAUTS klassische Arbeit über die Kurven doppelter Krümmung erwähnt worden ist, wird bemerkt, dafs „scarcely thirty years later EULER established the analytic theory of the curvature of surfaces", aber

CLAIRAUTS *Recherches sur les courbes à double courbure* wurde 1729 verfaſst und 1731 gedruckt, während der 2. Band von EULERS *Introductio in analysin infinitorum* schon 1748 erschien.

S. 284. Daſs „the relation of the half-chord to the arc" nicht zuerst von den Indern, sondern schon von den Griechen benutzt wurde, geht wohl aus den Untersuchungen von HULTSCH hervor (vgl. Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, S. 208).

S. 285. Durch die Untersuchungen der letzten Jahre weiſs man ganz bestimmt, daſs das Wort sinus *nicht* in der von PLATONE TIBURTINO verfertigten Übersetzung des AL-BATTANI vorkommt (vgl. z. B. BRAUNMÜHL, *Vorles. über Gesch. d. Trigonom.* I, S. 49—50). Dagegen benutzte GHERARDO CREMONESE das Wort, und vielleicht war es schon vor ihm gebräuchlich.

Am Ende des Buches findet sich, wie oben bemerkt, eine Sammlung biographischer Notizen über verstorbene Mathematiker, die alphabetisch nach den Namen geordnet sind. Hier giebt es auch einige Namen, die im Texte nicht genannt sind, z. B. NICOLE, SACROBOSCO und E. S. UNGER; auf der anderen Seite fehlen einige verstorbene Mathematiker ersten Ranges, z. B. BRIOSCHI und KRONECKER. Eine etwas auffällige Notiz haben wir unter SACROBOSCO entdeckt, er soll nämlich auch über *Trigonometrie* geschrieben haben; kaum weniger überraschend ist die Angabe, daſs LEONARDO PISANO im Jahre 1250 starb. Daſs WILLEBRORD SNELLIUS 1581 und nicht 1591 geboren wurde, darf wohl jetzt als entschieden betrachtet werden.

Von Redaktions-, Schreib- oder Druckfehlern haben wir nur eine ziemlich kleine Anzahl notiert. S. 148 ist eine schon S. 57 befindliche Notiz über DE WITT wiederholt. — S. 144, 164, 168 (fehlt im Register) wird O. H. NÖTHER genannt, wo „O. H." ohne Zweifel durch Verkürzung von „OTTO HESSE" entstanden ist, und sich also auf den Titel des fraglichen Aufsatzes bezieht. — S. 156 ist die Bemerkung: „the theorem was first stated in full by DESCARTES (1683)" etwas auffallend, da DESCARTES bekanntlich 1650 starb. — S. 158 ist LALOUVÈRE (der 1664 starb) unter die Mathematiker am Ende des 17. und am Anfang des 18. Jahrhunderts gesetzt. — S. 305, Z. 13 muſs 1883 statt 1833 stehen. — Daſs öfters (S. 142, 198, 247, 249, 252, 258, 275; die 6 letzten Stellen fehlen im Register) eine *ungedruckte* Rede von A. BRILL (1884) auch in der englischen Übersetzung citiert wird, ist wohl unnötig.

Der „Index" ist gut, könnte aber vielleicht etwas vollständiger sein; so fehlen u. a. die Worte *Algorists* (40, 41), HEATH (84), *Surds* (100).

Stockholm. G. ENESTRÖM.

A. Laussedat. Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques. Tome I. Aperçu historique sur les instruments et les méthodes. La Topographie dans tous les temps. Paris, Gauthier-Villars 1898. XI + 449 p. in-8° + 14 planches. Fr. 15.

L'auteur a entrepris son étude à propos du Congrès des sciences géographiques, tenu à Londres en juillet 1895, auquel il se proposait de présenter dans toute son étendue la question de l'application de la photographie au lever des plans. Mais „la méthode photographique étant traitée dans une foule d'ouvrages et de brochures", il lui sembla „plus interéssant de démontrer par *l'histoire des instruments, des méthodes et du dessin topographiques*, que l'utilisation des *vues panoramiques naturelles* pour la construction et l'illustration des plans topographiques, est en quelque sorte le couronnement de tous les efforts, qui ont été faits pour créer et perfectionner l'art de la Topographie".

L'ouvrage doit comprendre deux volumes. Le premier, répondant déjà au titre général, contient un historique des progrès de l'*art de lever le plans*, divisé en deux chapitres: 1) Aperçu historique sur les instruments et les méthodes: 2) La Topographie dans tous les temps; Vues pittoresques et plans géométriques. La *méthode des perspectives* doit faire l'objet du second volume.

Les anciens instruments topographiques appartenant les uns à l'astronomie et les autres à la géométrie pratique, presque toute la partie historique du premier volume touche de près l'histoire des mathématiques. Développant avec un talent réel la thèse qu'il s'est posée, l'auteur donne dans le premier chapitre et dans quelques paragraphes du second, un tableau historique net et précis, mais nécessitant pour devenir une source d'informations, des notes un peu plus détaillées. L'auteur en promet une, se rapportant à l'antiquité. Elle sera jointe au second volume.

Pour l'antiquité et le moyen âge l'auteur a utilisé presque exclusivement des traductions et des recherches françaises, et il cite PERRAULT, VINCENT, MARTIN, les deux SÉDILLOT, J. KLAPROTH, LIBRI et quelques ouvrages géographiques. Probablement il ne manquera pas de profiter aussi, dans la note promise, des indications contenues dans les *Vorlesungen* de M. CANTOR et dans les publications récentes, comme celles de M. N. BUBNOV ou de M. A. VON BRAUNMÜHL.

Passant en revue les instruments topographiques du XVI[e] siècle, l'auteur cite les ouvrages publiés dans les différents pays, mais son choix paraît un peu trop limité. Ainsi la note sur GEMMA FRISIUS mentionne seulement son ouvrage posthume *De astrolabio catholico,* passant sous silence les autres ouvrages de ce géomètre, notamment la dissertation d'une grande importance pour l'histoire de la triangulation: *Libellus de locorum describendorum ratione et de eorum distantiis inveniendis nunquam ante hac visus* (1533), et la description de son arbalestrille: *De Radio Astronomico et Geometrico liber* (1545).

L'auteur a tiré la figure du quarré géométrique „d'un petit Traité spécial assez ancien sur l'usage de cet instrument": *Quadrati geometrici usus per* JOHANNEM DEMERLIOREM (1579). Cette figure représente le quarré combiné avec le quadrant et possédant une règle mobile avec des pinnules, mais on employait aussi au XV[e] siècle le quarré sans règle mobile, ayant les pinnules fixées sur un côté. Une idée très nette de ces deux aspects de l'instrument en question donne la *Geometria practica* de Mag. MARTINUS DE ŻÒRAVICA (géomètre polonais de la moitié du XV[e] siècle), publiée en 1895 par M. L. BIRKENMAJER (cf. Biblioth. Mathem. 1896, p. 27); M. CURTZE les distingue aussi dans sa note *Über die im Mittelalter zur Feldmessung benutzten Instrumente* (Biblioth. Mathem. 1896, 65—72), mentionnée par M. LAUSSEDAT. De même le quadrant avec la règle mobile, extrait de l'ouvrage de BION[1]) découle des anciens quadrants plus simples, comme celui de ROBERTUS ANGLICUS signalé dans

1) M. LAUSSEDAT cite deux éditions de l'ouvrage de BION: La Haye 1723 et Paris 1726 (pages 89 et 92). L'édition dont nous nous servons, intitulée: *Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématiques* (Paris 1716), contient la même figure du quadrant que celle donnée par M. LAUSSEDAT sur la page 41 son ouvrage.

une autre note de M. CURTZE: *Der Tractatus quadrantis des ROBERTUS ANGLICUS in deutscher Übersetzung aus dem Jahre 1477* (Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **9**, 1899, p. 41—63), ou bien d'ORONCE FINÉ dans la *Protomathesis* (fol. 65^r).

L'histoire de la boussole, basée quant aux origines de l'aiguille aimantée sur les écrits de J. KLAPROTH, est traitée minutieusement. Entre autres M. v. BEZOLD de Nürnberg a signalé à l'auteur une boussole d'HULSIUS. M. LAUSSEDAT en donne la figure, mais sans mentionner le *Tractatus primus instrumentorum mechanicorum* LEVINI HULSII . . . (Francofurti ad Moenum 1609), sur le frontispice duquel est représentée la même boussole. Cet ouvrage est une source importante d'informations, car HULSIUS y donne au commencement „Elenchus autorum quibus in hisce instrumentis mechanicis et machinis usi sumus, qui ordine quaque lingua scripserint, qua de re egerint et ubi impressi fuerint."

A propos du graphomètre et du trigomètre de PHILIPPE DENFRIE, décrits dans son opuscule du 1597, on pourrait faire la remarque que ces instruments semblent découler de l'holomètre d'ABEL FULLONE, dont la description a été publiée a Venise en 1564 dans une brochure in-4°, intitulée: *Descrittione et uso dell' holometro, per saper misurare tutte le cose, che si possono veder coll' occhio cosi in lunghezza, et larghezza; come in altezza et profundita. Ritrovato per* ABEL FULLONE *Valetto di Camera del Re di Francia.*

M. LAUSSEDAT a étudié avec beaucoup de soin la planchette de PRAETORIUS, en assignant à cet instrument sa place bien méritée dans le développement des instruments topographiques. C'était d'autant plus nécessaire, que l'invention de PRAETORIUS, dans sa forme décrite en détail par DANIEL SCHWENTER, a été pendant longtemps inconnue en France. Les anciens auteurs français mentionnent seulement la planchette simple. BION parle d'une planchette circulaire en bois ou en métal, et MALLET dans sa *Géométrie pratique* (1702) donne l'information: „La planchette (selon VITRUVE) est un instrument fort ancien." Or VITRUVE ne parle que de la table du gnomon („marmoreum amussium"), sur laquelle on traçait la direction du vent et les rues d'une ville à batir (lib. I cap. 6), et le mot „planchette" ne figure même pas dans l'index de la traduction de PERRAULT. Ainsi l'origine de la planchette praetorienne étant établie, l'histoire de la planchette simple reste encore à faire.

Dans cette classe d'instruments l'auteur n'a pas mentionné le pantomètre d'ATHANASE KIRCHER, auquel GASPARD SCHOTT a consacré tout un ouvrage: *Pantometrum Kircherianum* (Herbipoli 1660). Cet ouvrage présente cependant quelque intérèt pour l'histoire de la topographie, car SCHOTT s'étend aussi sur les niveaux et donne même à la page 271 l'énumération des écrits antérieurs sur ce sujet. Et justement dans l'histoire générale des niveaux, comme l'a donnée M. LAUSSEDAT, je me suis permis de constater une lacune, ce qui a fait l'objet de ma note *Sur quelques niveaux du XVI^e^ siècle* (Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, p. 60—63). D'un autre côté, il est à désirer qu'une note dans le second volume puisse donner quelques détails sur l'invention du niveau à bulle d'air, attribuée à THÉVENOT et sur la mention de LIBRI (*Histoire des sciences mathém. en Italie,* t. I, p. 133), que les anciens Hindous se servaient de cet instrument.

A partir des travaux de PICARD, qui ont introduit des organes nouveaux dans la construction des instruments, le tableau du développement des instruments et des méthodes topographiques, peint à larges traits par M. LAUSSEDAT, présente encore plus de précision et de netteté. Les planches très soignées donnent quelques échantillons d'anciens plans topographiques, et il y en a aussi une, qui représente les trophées de la façade méridionale de l'Observatoire de Paris, particulièrement interessants en ce qu'ils font connaître à peu près complètement les instruments, dont les marins, les voyageurs et les arpenteurs se servaient pendant la seconde moitié du XVII^e siècle.

Ce premier essai d'une histoire raisonnée des instruments et des méthodes, rend à la Topographie le même service qu'ont rendu à la mécanique appliquée les *Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik* (1885) de M. RÜHLMANN. Il contribue à assurer à cette branche importante de l'art d'ingénieur son rang parmi les sciences, et constitue en même temps un chapitre de l'histoire générale des sciences techniques, laquelle mérite sans doute une place parmi les cours professés aux écoles techniques supérieures.

Warszawa. F. KUCHARZEWSKI.

P. Tannery et Clerval. Une correspondance d'écolâtres du XI^e siècle. Tirée des Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale et autres bibliothèques T. **36**. Paris 1900. 61 S. 4⁰.

Les correspondants dont les lettres ont été publiées ici, d'après trois manuscrits de la bibliothèque nationale de Paris, sont RAGIMBOLD de Cologne et RADOLF de Liége, et la date de la correspondance peut être fixée aux environs de l'an 1025. Elle est précédée d'une introduction par M. PAUL TANNERY, et elle contient 9 lettres, dont la dernière est adressée à RAGIMBOLD par un moine inconnu B., ainsi qu'un fragment sur la quadrature du cercle et certaines notions de géométrie.

Les questions débattues sont en partie arithmétiques, en partie géométriques, et les lettres montrent que les correspondants étaient des calculateurs assez habiles, mais qu'ils avaient très peu de connaissances géométriques; ils ignoraient même le vrai sens du terme: »angle extérieur d'un triangle«.

Dans l'introduction, où un chapitre est relatif à FRANCON de Liége, M. TANNERY fait ressortir que les correspondants n'avaient évidemment aucune connaissance de *l'Ars geometriae* attribuée à BOËTIUS, et il en conclut que cet écrit est postérieur au commencement du 11^e siècle; il signale aussi un passage de la première partie de la *Geometria* GERBERTI, d'où il semble résulter que cette partie est postérieure à la correspondance entre RAGIMBOLD et RADOLF, et il ajoute quelques remarques sur la provenance du reste de la *Geometria* GERBERTI.

A la fin on trouve un Appendice sur le recueil »Geometricales diversitates« dans le manuscrit latin 73776 de la bibliothèque nationale de Paris, et un Postscriptum, où M. TANNERY compare ses conclusions avec celles de M. BUBNOV dans le livre: GERBERTI *Opera* (1899).

G. ENESTRÖM.

Felix Müller. Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français contenant les termes techniques employés dans les mathématiques pures et appliquées. — Mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch-französisch, enthaltend die

Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. Erste Hälfte. Leipzig, Teubner 1900. IX + (2) + 132 S. 8⁰. M. 8.

Schon in der „Wissenschaftlichen Chronik" des vorigen Heftes berichteten wir über den Plan und den Zweck des *Mathematischen Vokabulariums*, dessen erste Hälfte jetzt erschienen ist. Im Vorwort, wo der Verfasser sich hierüber ausführlich äufsert, wird auch hervorgehoben, dafs die Arbeit bei der voraussichtlich bald notwendigen Revision der mathematischen Nomenklatur, sowie bei Herstellung von mathematischen Sachkatalogen und Sachregistern angewendet werden kann.

Das Buch des Herrn Müller enthält auch eine grofse Anzahl von historischen Notizen. Diese Notizen, die in der Regel nur Namen und Jahreszahlen umfassen, beziehen sich im Allgemeinen auf den Ursprung der mathematischen Begriffe, ausnahmsweise auf den Ursprung der Kunstausdrücke. Leider ist es fast immer unmöglich diese zwei Arten von Aufschlüssen zu unterscheiden, so dafs bei dem nicht besonders sachkundigen Leser leicht ein Mifsverständnis entstehen kann. So z. B. findet man unter »*art de conjecturer* (ou probabilité)« den Zusatz: „Jacques Bernoulli 1679", ohne dafs es ersichtlich ist, ob der Begriff oder der Kunstausdruck von Jakob Bernoulli herrührt; in Bezug auf die Jahreszahl bemerken wir im Vorübergehen, dafs es vielleicht besser gewesen wäre 1685 statt 1679 zu setzen. Wie grofse Schwierigkeiten übrigens sich bei so kurzen Notizen über den Ursprung der mathematischen Begriffe darbieten, dürfte am leichtesten aus folgenden Beispielen hervorgehen: »*calcul différentiel* (Leibniz 1684, Newton 1676)«; »*calcul infinitésimal* (Leibniz 1684, Newton 1676)«; »*calcul intégral* (Leibniz 1675, 1686, Euler 1768)«; »*calcul des variations* (Euler 1766, Lagrange, Jacques Bernoulli)«. Aber selbstverständlich sind diese historischen Notizen nur als ein »hors d'œuvre« zu betrachten, und wenn auch einige solche verbessert werden können, so hat dieser Umstand keinen Einflufs auf unser allgemeines Urteil über die Arbeit des Herrn Müller, die wir als sehr nützlich und zeitgemäfs bezeichnen müssen.

Am Ende des Vorwortes spricht der Verf. die Hoffnung aus, dafs durch sein *Vokabularium* bei recht vielen Fachgenossen der Wunsch rege werde, es möchten mehrere Mathematiker zur baldigen Herstellung und Herausgabe eines mathematischen Wörterbuches sich vereinigen. Wir würden uns sehr freuen, wenn diese Hoffnung recht bald erfüllt würde, und wir sind überzeugt, dafs alsdann das Buch des Herrn Müller sich als eine sehr brauchbare Vorarbeit erweisen wird.

G. Eneström

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, dafs die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat

Autoren-Register.

Ahrens, 139.
Albattani, 42.
Anaritius, 43.
Archibald, 87.
Aubry, 21, 57, 67.
Beman, 10.
Birkenmajer 53, 63.
Bobynin, 4, 160.
Boltzmann, 61, 140.
Bolyai, W., 107.
Bosmans, 76.
Bosscha, 81.
Bouché-Leclerq, 29
Boyer, 9, 129, 160.
Braunmühl, 13, 56
Brocard, 14.
Brown, 26.
Brudzewo, 53.
Bryan, 128, 129.
Bubnow, 44.
Burnside 139.
Cantor, M., 5, 8, 62, 104, 134, 159.
Cerruti, 128.
Clerval, 48.
Cornu, 129.
Cremona, 128.
Curtze, 43, 50, 52, 127.
Czuber, 59.
Darboux, 129.
Delaunay, 120.
Dickmann 137.
Dini, 128.
Duhem, 34.
Dutordoir, 32.
Elliott, 142.
Eneström, 2, 11, 47, 49, 86, 147, 161.
Engel, 111, 139.
Favaro, 70, 71, 72, 74.
Fink, 10.
Fitzgerald, 126.
Fontès, 64.
Frattini, 128.
Galdeano, 153.
Galilei, 72.
Gauss, 106, 107.
Gerbert, 44.
Gerhardt, 85.
Gerland, 19.
Gherardo Cremonese, 43.
Goldbeck, 75.
Goldschmidt, 118.
Graf, 151.
Guimarães, 94.
Gundermann, 23.
Günther, 58, 144.
Gutzmer, 133, 154
Hagen, 89, 103.
Hahn, 84.
Halsted, 116.
Heiberg, 39.
Heinrich, 80.
Hultsch, 30, 35.
Huygens, 83.
Janssen van Raay, 95.
Kapteyn, 7.
Klein, 105.
Kluyver, 7.
Knauff, 37.
Knott, 110.
Köhler, 145.
Korteweg, 7, 82, 92.
Koteljnikoff, 97.
Kucharzewski, 65, 66.
Kugler, 24.
Laisant, 150.
Lampe, 6, 114, 122, 129.
Lange, 113.
Laussedat, 15.
Lebon, 17.
Leibniz, 85.
Lévy, 128, 129.
Lobatschewsky, 111
Loria, 3, 28, 79, 128, 148.
Macaulay, 143.
Macfarlane, 93, 158.
Mach, 18.
Mansion, 12, 121.
Maupin, 54.
Mehmke, 16.
Meyer, Fr., 117.
Milhaud, 31.
Morgan, 116.
Müller, F., 134, 152.
Nallino, 42.
Noether, 115, 139
Olbers, 106.
Oudemans, 92.
Ovidio, 128.
Pahl, 99.
Pick, 130.
Pierpont, 155.
Pincherle, 128.
Pinto, 128.
Rebière, 55
Riccardi, 22.
Richter, 100.
Riecke, 101.
Riehm, 141.
Robert Linconiensis, 50.
Schilling, 106.
Schlegel, 98.
Schmidt, F., 107.
Schmidt, W., 33, 36.
Schorr, 69.
Schoute, 7, 135.
Sintzoff, 90, 125, 139.
Smith, 10.
Somigliana, 128.
Stäckel, 88, 107, 108.
Staigmüller, 27.
Steinschneider, 48.
Sterne, 68.
Suter, 40.
Tait, 109.
Tannery, 45, 46, 78.
Taylor, 77.
Teixeira, 138.
Thompson, 25.
Traumüller, 19.
Tropke, 20.
Valentin, 91, 149.
Vaux, 41.
Vivanti, 117, 123.
Wappler, 51.
Wassilief, 112, 119, 120.
Whittaker, 156.
Wirtinger, 146.
Wohlwill, 73.
Wölffing, 96.
Woodward, 102.
Zeeman, 7, 92.
Zeuthen, 38.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8°. [1
10 (1900). — **9** (1899). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. **24**$_2$, 1900, 22—25. (P. Tannery.) — Biblioth. Mathem. **1**$_3$, 1900, 288. (G. Eneström.) — Mathesis **10**$_2$, 1900, 140. (P. M.) — Monatsh. für Mathem. **11**, 1900; Lit.-Ber. 35—36. — Naturwiss. Rundschau **15**, 1900, 216—217. (E. Lampe.)

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften, herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2
1$_3$ (1900): 1—2. — [Recension:] Periodico di matem. **2**$_2$, 1900, 271. — El progreso matem. **2**$_2$, 1900, 249—250. — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin **6**$_2$, 1900, 408. — Zeitschr. für mathem. Unterr. **31**, 1900, 383—386. (G. Wertheim.) — [Anzeige der 3. Folge:] Wiadomości matem. **4**, 1900, 116.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [3
1900: 2—3.

Физико-математическія науки въ ходѣ ихъ развитія. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°. [4
t$_2$: 4. — Die physisch-mathematischen Wissenschaften im Laufe ihrer Entwickelung. Zeitschrift herausgegeben von V. V. Bobynin.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. Cantor. Leipzig. 8°. [5
45 (1900): 2—3.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8°. [6
29 (1898): 1—2. — Die Seiten 1—42 enthalten Referate über die im Jahre 1898 erschienenen mathematisch-historischen Schriften.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la sociétée mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. Zeeman. Amsterdam. 8°. [7
8: 2 (octobre 1899 — avril 1900)

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Erste Abtheilung. Von 1668—1699. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner 1900. [8
8°, 261 S. — [6, 60 *M*] = **1**^{2} (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem **1**$_3$, 1900, 265—269. (P. Tannery, G. Eneström.) = **2**^{2} (1900). [Recension oder kleine Bemerkungen:] Zeitschr. für mathem. Unterr. **31**, 1900, 199—201. (G. Wertheim.) — Götting. gel. Anz. 1900, 254—264. (P. Stäckel.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 41—46. (G. L.) — Mathesis **10**$_2$, 1900, 139—140. (P. M.) — Naturwiss. Rundschau **15**, 1900, 11—12. (E. Lampe.) — Biblioth. Mathem. **1**$_3$, 1900, 269—273, 276—278. (G. Eneström, H. G. Zeuthen, A. von Braunmühl.) = **3**: **3** (1898). [Recension:] Götting. gel. Anz. 1900, 254—264. (P. Stäckel.) — Allgem. Litteraturblatt (Wien) **9**, 1900, 95—97. (W. Wirtinger.)

Boyer, J., Histoire des mathématiques (1900). Recension:] Biblioth. Mathem. **1**$_3$, 1900, 278—280. (G. Eneström.) — Revue encyclop. Larousse **10**, 1900, 339—340. (J. Mascart.) — Wiadomósci matemat. **4**, 1900, 109—112. (S. D.) — *México*, Soc. Alzate, Revista **14**, 1900, 12—13. — Nature **61**, 1900, 510—511. (G. B. M.) — Zeitschr. für das Realschulwesen (Wien) **25**, 1900, 429—431. (Czuber.) — Science (New-York) **11**$_2$, 1900, 947—948. (F. Cajori.) — Mathesis **10**$_2$, 1900, 162. (P. M.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin **6**$_2$, 1900, 405—406. (F. Cajori.) — L'enseignement mathém. **2**, 1900, 309—311. (S. Dickstein.). — Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abt. 98—99. (M. Cantor.) — Monatsh. für Mathem. **11**, 1900: Lit.-Ber. 40. — Bullet. d. sc. mathém. **24**$_2$, 1900, 132—134. (P. Tannery.) [9

Finck, K., A brief history of mathematics. An authorized translation of „Geschichte der Elementar-Mathematik", by W. W. Beman and D. E. Smith. Chicago, The Open court publ. comp. 1900. [10
8°, XII + 333 S. — [1½ Doll.] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 2165—2166 (M. Cantor.)

Eneström, G., Ziele und Aufgaben eines Organs für mathematisch-historische Forschung und für aktuelle Fragen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. [11
Biblioth. Mathem. **1**$_3$, 1900, 1—7.

Mansion, P., Programme du cours d'histoire des mathématiques de l'université de Gand. 12]
Biblioth. Mathem. **1**$_3$, 1900, 232—236.

Braunmühl, A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Erster Theil (1900). [Recension:] Biblioth. Mathem. **1**$_3$, 1900, 280—284. (W. M. Kutta.) — Monatsh. für Mathem. **11**, 1900: Lit.-Ber. 27—28. — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin **6**$_2$, 1900, 404—405. (F. Cajori.) — Liter. Centralbl. 1899, 1611. (M. Cantor.) — Zeitschr. für das Realschulwesen (Wien) **25**, 1900, 302—305. (Czuber.) [13

Brocard, H., Notes de bibliographie des courbes. Partie complémentaire (1899). [Recension:] Bollett. di bibliogr. de sc. matem. 1899, 133—134. (G. L.). — Bullet. d. sc. mathém. **24**$_2$, 1900, 25—27. (P. Tannery.) — Biblioth. Mathem. **1**$_3$, 1900, 287. (G. Eneström.) [14

Laussedat, A., Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques. Tome I. Aperçu historique (1898). [Recension:] *México*, Soc. Alzate, Revista **12**, 1899, 43. — Revue génér. d. sc. **10**, 1900, 637. [15

Mehmke, R., Bericht über die Winkelteilung. [16
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **8**: 1, 1900, 139—158. — Hauptsächlich historischen Inhalts.

Lebon, E., Histoire abrégée de l'astronomie (1899). [Recension:] Jornal de sc. mathem. **14**, 1900, 11—13. (G. T.) — *México*, Soc. Alzate, Revista **12**, 1899, 73. — Mathesis **10**$_2$, 1900, 162—163. (P. M.) — L'enseignement mathém. **2**, 1900, 308—309. (R. Guimarães.) — Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 2422. [17

***Mach, E.,** Die Prinzipien der Wärmelehre, historisch-kritisch entwickelt. Zweite Auflage. Leipzig, Barth 1900. [18
8°, 12 + 484 S. + 6 Portr. — [10 *M*]

Gerland, E. und **Traumüller, F.,** Geschichte der physikalischen Experimentierkunst (1899). [Recension:] Monatsh. für Mathem. **11**, 1900; Lit.-Ber. 3. [19

Tropke, J., Erstmaliges Auftreten der einzelnen Bestandteile unserer Schulmathematik. I. Berlin 1899. [20
4°, 37 S. — Programm des Friedrichs-Realgymnasiums. — [Recension:] Zeitschrift für mathem. Unterr. **31**, 1900, 302—303. (Stegemann.) — Naturwiss. Rundschau **15**, 1900, 48. (E. Lampe.)

Aubry, A., Noticia histórica sobre la cuadratura del círculo. [21
El progreso matem. **1**$_2$, 1900, 273—305.

Riccardi, P., Contributo degl' Italiani alla storia delle scienze matematiche pure ed applicate. Saggio bibliografico. II. [22
Bologna, Accad. d. sc., Memorie **7**$_5$, 1898, 371—425. — [Résumé:] *Bologna*, Accad. d. sc., Rendiconti **2**$_2$, 1898, 94. (P. Riccardi.)

b) Geschichte des Altertums.

***Gundermann, G.,** Die Zahlzeichen. Giessen 1899. [23
4°, 49 S. — Universitäts-Programm. — [Recension:] Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abt. 99—100. (Cantor.)

***Kugler, F. X.,** Die babylonische Mondrechnung. Zwei Systeme der Chaldäer über den Lauf des Mondes und der Sonne. Auf Grund mehrerer von J. N. Strassmaier kopierten Keilinschriften des britischen Museums. Mit einem Anhang über chaldäische Planetentafeln. Freiburg i. B., Herder 1900. [24
8°, 15 + 215 S. + 13 Taf. — [24 *M*] — [Recen-

sion:] Naturwiss. Rundschau **15**, 1900, 294—296. (A. Berberich.)

*****Thompson, R. C.,** The reports of the magicians and astrologers of Niniveh and Babylon. Vol. 1, 2. London, Lusac 1900. [25
1: XVIII S. + 85 Pl. — 2: XCI + 148 S. — [Recension:] Nature **62**, 1900, 51—52.

*****Brown, R.,** Researches into the origin of the primitive constellations of the Greeks, Phoenicians and Babylonians. Vol. I. London, William & Norgate 1899. [26
8°, XVI + 361 S. — [$10\frac{1}{2}$ sh.] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 1058—1059. (G. Thiele.)

*****Stalgmüller H.,** Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften im klassischen Altertume. Stuttgart 1899. [27
8°, 40 S. — [Recension:] Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abt. 100. (Cantor.)

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro III. Il substrato matematico della Filosofia naturale dei Greci. [28
Modena, Accad. d. sc., Memorie $\mathbf{12}_2$, 1900. 138 S.

Bouché-Leclerq, A., L'astrologie grecque (1899). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{24}_2$, 1900, 37—41. (P. Tannery.) [29

Hultsch, F., Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen. [30
Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 8—12.

Milhaud, G., La géométrie au temps de Platon. [31
Revue génér. d. sc. **10**, 1899, 847—854.

Dutordoir, Sur la différence de la philosophie naturelle et des mathématiques d'après Aristote. [32
Bruxelles, Soc. scient., Annales **24** : 1, 1900, 52—54.

Schmidt, W., Archimedes' Ephodikôn. [33
Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 13—14.

Duhem, P., Archimède connaissait-il le paradoxe hydrostatique? [34
Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 15—19.

Hultsch, F., Hipparchos über die Gröfse und Entfernung der Sonne. [35
Leipzig, Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Berichte (Phil. Cl.) 1900, 169—200.

Schmidt, W., Heron von Alexandria (Neue Jahrb. für das klass. Altert., 1899). [Recension:] Monatsh. für Mathem. **11**, 1900; Lit.-Ber. 7. [36

*****Knauff, F.,** Die Physik des Heron von Alexandria, Berlin, Gärtner 1900. [37
4°, 23 S. — [1 *M*] — Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Sophien-Gymnasiums zu Berlin. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 1720—1721. (W. Schmidt.)

Zeuthen, H. G., Note sur la trigonométrie de l'antiquité. [38
Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 20—27.

Heiberg, J. L., Quelques papyrus traitant de mathématiques. [39
Kjöbenhavn, Vidensk. Selsk., Oversigt 1900, 147—171.

c) **Geschichte des Mittelalters.**

Suter, H., Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. [40
Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wissensch. **10**, 1900. IX + 277 + (1) S.

Vaux, C. de, Notice sur un manuscrit arabe traitant de machines attribuées à Héron, Philon et Archimède. [41
Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 28—38.

Al-Battâni sive Albattenii opus astronomicum. Ad fidem codicis escurialensis arabice editum, latine versum, adnotationibus instructum a C. A. Nallino. Pars III. Textum arabicum continens. Mediolani 1899. [42
Milano, Osservatorio di Brera, Pubblicazioni **40** : 3. 279 S. — [Recension:] Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 285—286. (H. Suter.)

Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis edidit M. Curtze (1899). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Annales **24** : 1, 1900, 47—49. [43

Bubnow, N., Gerberti postea Silvestri II papae Opera mathematica (1899). [Recension:] Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 286—287. (P. Tannery.) [44

Tannery, P., Notes sur la Pseudo-Géométrie de Boèce. [45
Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 39—50.

Tannery, P., et **Clerval,** Une correspondance d'écolâtres du XI^e siècle. [46
Paris, Bibliothèque nationale, Notices et extraits des manuscrits **36**, 1900, 487—543.

Eneström, G., Sur un problème plaisant appartenant à la théorie des nombres. [47
Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 274. — Anfrage.

Steinschneider, M., Robertus Castrensis. [48
Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 273—274.

Eneström, G., Sur le „Liber augmenti et diminutionis" compilé par Abraham. [49
Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 274—275. — Anfrage.

Curtze, M., Zwei Beiträge zur Geschichte der Physik im Mittelalter. 1. Das Buch Euclids de gravi et levi. 2. Der Tractatus de fractionibus et reflexionibus radiorum des Robertus Linconiensis. [50
Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 51—59.

Wappler, E., Zur Geschichte der Mathematik im 15. Jahrhundert. [51
Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abt. 47—56.

Curtze, M., Der „Tractatus de quantitatibus terre et stellarum". Ein Nachtrag zu meinem Aufsatze in der Festschrift zu Moritz Cantors 70. Geburtstage. [52
Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abt. 41—46.

Birkenmajer, L. A., Commentariolum super Theoricas novas planetarum Georgii Purbachii in studio generali Cracoviensi per Mag. Albertum de Brudzewo diligenter corrogatum A. D. MCCCCLXXXII. Post editionem prin-

cipem Mediolanensem a. MCCCCXCV ad fidem codicum praestantissimorum denuo edendum curavit. Cracoviae 1900. [53
8°, LVI + 169 + (1) S.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Maupin, G., Opinions et curiosités touchant la mathématique, d'après les ouvrages français des XVI^e, XVII^e et XVIII^e siècles (1898). [Recension:] Revue génér. d. sc. **10**, 1899, 164. — Nature **60**, 1899, 590. — *México*, Soc. Alzate, Revista **12**, 1899, 57. — Monatsh. für Mathem. **11**, 1900; Lit.-Ber. 8. [54

Rebière, A., Pages choisies des savants modernes extraites de leurs œuvres (1900). [Recension:] Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 287—288. (G. Eneström.) — Nature **62**, 1900, 6. — Mathesis $\mathbf{10}_2$, 1900, 141. (J. N.) — Bullet. d. sc mathém. $\mathbf{24}_2$, 1900, 117—118. (C. Bourlet.) [55

Braunmühl, A. von, Die Entwickelung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie. [56
Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 64—74.

Aubry, A., Etude élémentaire sur la théorie des maxima et minima. [57
El progreso matem. $\mathbf{2}_2$, 1900, 41—49, 185—193, 233—241, 321—324. — Zum gröſsten Teil historischen Inhalts.

Günther, S., Le développement historique de l'enseignement mathématique en Allemagne. [58
L'enseignement mathém. **2**, 1900, 237—265.

Czuber, E., Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen (1899). [Recension:] Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 1526—1527. (A. von Braunmühl.) [59

Vorreden und Einleitungen zu klassischen Werken der Mechanik: Galilei, Newton, d'Alembert, Lagrange, Kirchhoff, Hertz, Helmholtz (1899). [Recension:] Monatsh. für Mathem. **11**, 1900, 29—30. [60

Boltzmann, L., Über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit. [61
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **8**:1, 1900, 71—95. — Vgl. oben S. 291.

Cantor, M., Niclaus Koppernikus. Ein Vortrag. [62
Neue Heidelberger Jahrb. **10**, 1900, 90—106.

Birkenmajer, L. A., Mikołaj Kopernik. Część 1. Studya nad pracami Kopernika oraz materyały biograficzne. Krakow 1900. [63
4°, XIII + 711 S.

Fontès, J., Les Arithmétiques et les Algèbres du seizième siècle à la bibliothèque communale de Toulouse. [64
Toulouse, Acad. d. sc., Bulletin **2**, 1899, 202—208.

Kucharzewski, F., Sur quelques niveaux du seizième siècle. [65
Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 60—63.

Kucharzewski, F., O początnach piśmiennictwa technicznego w polsce. Warszawa 1900. [66
8°, 55 S. — Enthält u. a. Notizen über die polnischen Lehrbücher der Feldmessung im 16. und 17. Jahrhundert.

Aubry, A., La formule du binôme, avant Newton. [67
Journ. de mathém. élém. **24**, 1900, 24—28, 39—45, 72—76, 87—92.

Sterne, C., Copernicus, Tycho Brahe and Kepler. [68
The open court (Chicago) **14**, 1900, 385—408. — Übersetzt aus dem Deutschen von D. E. Smith. — Mit vielen Porträts.

Шоръ, Д., Объ элементарномъ объясненіи явленія прилива и отлива. [69
Vjestnik elem. matem. **23**, 1899, 253—260, 273—279. — **Schorr, D.,** Die Theorie der Ebbe und Flut nach ihrer historischen Entwickelung elementar dargestellt.

Favaro, A., Due lettre inedite di Guidobaldo del Monte a Giacomo Contarini. [70
Venezia, Istituto Veneto, Atti **59**, 1900, 303—312.

Favaro, A., Intorno alle opere scientifiche di Galileo Galilei nella Edizione nazionale sotto gli auspicii di S. M. il re d'Italia. [71
Venezia, Istituto Veneto, Atti **58**, 1899, 129—204.

Favaro, A., Delle Mecchaniche lette in Padova l'anno 1594 da Galileo Galilei, per la prima volta pubblicate ed illustrate. [72
Venezia, Istituto Veneto, Memorie **26**:5, 1899. 26 S.

Wohlwill, E., Die Entdeckung der Parabelform der Wurflinie (1899). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{24}_2$, 1900, 33—37. (P. Tannery.) [73

Favaro, A., Le osservazioni di Galileo circa i pianeti Medicei dal 7 gennaio 1610 al 23 febbraio 1613. [74
Venezia, Istituto Veneto, Atti **59**, 1900, 519—526.

Goldbeck, E., Die Gravitationshypothese bei Galilei und Borelli. Berlin, Gärtner 1897. [75
4°, 31 S. — Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Luisenstädtischen Gymnasiums zu Berlin, Ostern 1897.

Bosmans, H., Le degré du méridien terrestre mesuré par la distance des parallèles de Berg-op-Zoom et de Malines par Willebrord Snellius. [76
Bruxelles, Soc. scient., Annales **24**:2, 1900. 22 S.

Taylor, C., The geometry of Kepler and Newton. [77
Cambridge, Philos. soc., Transactions **18**, 1900, 197—217. — [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 92.

Tannery, P., Remarques sur l'histoire de la courbe et de la spirale logarithmique. [78
L'intermédiaire des mathém. **7**, 1900, 94—95.

Loria, G., Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logaritmica. [79
Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 75—89.

Heinrich, G., Notiz zur Geschichte der Simpsonschen Regel. [80
Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 90—92.

Bosscha, J., Les „Œuvres complètes de Christiaan Huygens". [81
Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 93—96.

Korteweg, D. J., La solution de Christiaan Huygens du problème de la chaînette. [82
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 97—108.

Œuvres complètes de CHRISTIAAN HUYGENS publiées par la société hollandaise des sciences. Tome VIII (1899). [Recension:] Nature **60**, 1899, 457. (J. L. E. DREYER.) [83

***Hahn, R.,** Die Entwicklung der Leibniz'schen Metaphysik und der Einfluſs der Mathematik auf dieselbe bis zum Jahre 1686. Halle 1899. [84
4°, 35 S. — [Recension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. **31**, 1900, 389—390. (NORRENBERG.)

Der Briefwechsel von GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ mit Mathematikern. Herausgegeben von C. I. GERHARDT. Band I (1899). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 24_2, 1900, 15—22. (P. TANNERY.) [85

Eneström, G., Sur une brochure publiée en 1700 per Jacques Bernoulli. [86
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 274.

Archibald, R. C., The cardioide and some of its related curves. Straſsburg 1900. [87
4°, (7) + 32 S. + 3 Taf. — Inauguraldissertation, wesentlich historischen und bibliographischen Inhalts.

Stäckel, P., Integration durch imaginäres Gebiet. Ein Beitrag zur Geschichte der Funktionentheorie. [88
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 109—128.

Hagen, J. G., On the „formula exponentialis replicata" of Euler. — On the so-called Legendres transformation. [89
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 275. — Anfragen.

Синцовъ, Д., Объ аналитическомъ параллелограммѣ Лагранжа-Ньютона. Историческая справка. [90
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 9_2, 1899, 44—46. — SINTZOFF, D., Historische Bemerkung über das Lagrange-Newtonsche Parallelogramm.

Valentin, G., Filippo Ferrari (1761). [91
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 275. — Anfrage.

Korteweg, D. J., Oudemans, J. A. C., Zeeman, P., Verslag over de handschriften en bescheiden afkomstig van J. H. van Swinden. [92
Amsterdam, Akad. van Wetensch., Verslagen [illegible], 1900, 389—402, 523—529.

Macfarlane, A., The fundamental principles of algebra (1899). [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1899, 140—141. [93

Guimarães, R., Les mathématiques en Portugal au XIX^e siècle. Aperçu historique et bibliographique. Coimbre 1900. [94
4°, 164 + (3) S.

Janssen van Raay, W. H. L., Opinions de quelques géomètres hollandais sur la théorie des parallèles et sur la géométrie non-euclidienne. [95
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 10_2, 1900, 1—13.

Wölffing, E., Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten. [96
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 142—159.

Котельниковъ, А. П., Проэктивная теорія векторовъ. [97
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 9_4, 1899. 40 S. — KOTELJNIKOFF, A. P., Über die Entwickelung und den gegenwärtigen Stand der projektiven Theorie der Vektoren.

Schlegel, V., Sur le développement et l'état de la géométrie à *n* dimensions (1900). [Bemerkungen:] L'enseignement mathém. **2**, 1900, 219. (R. LIPSCHITZ.) [98

***Pahl, F.,** Die Entwickelung des mathematischen Unterrichtes an unseren höheren Schulen. II. Charlottenburg 1899. [99
4°, 30 S. — [Recension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. **31**, 1900, 304—305. (SIEGEMANN.)

Richter, Die Entwickelung des mathematischen Unterrichts auf den preuſsischen Gymnasien während des neunzehnten Jahrhunderts. [100
Zeitschr. für mathem. Unterr. **31**, 1900, 253—262.

Riecke, E., Zur Geschichte des physikalischen Instituts und des physikalischen Unterrichts an der Universität zu Göttingen. [101
Über angewandte Mathematik und Physik; Vorträge (Leipzig, Teubner 1900), S. 1—14.

Woodward, R. S., Die Fortschritte der angewandten Mathematik im letzten Jahrhundert. [102
Naturwiss. Rundschau **15**, 1900, 249—252, 262—266, 273—276. — Übersetzt aus dem Englischen (vgl. oben S. 292).

Hagen, J. G., On the history of the extensions of the calculus. [103
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 6_2, 1900, 381—390.

Cantor, M., Carl Friedrich Gauss. Vortrag. [104
Neue Heidelberger Jahrb. **9**, 1900, 234—255.

Klein, F., Über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken. Zweiter Bericht. [105
Math. Ann. **53**, 1900, 45—48.

Briefwechsel zwischen OLBERS und GAUSS. Herausgegeben von C. SCHILLING. Erste Abteilung (1900) [Recension:] Nature **61**, 1900, 486—487. (J. L. E. DREYER.) — Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 2037—2040. (W. SCHUR.) [106

Briefwechsel zwischen CARL FRIEDRICH GAUSS und WOLFGANG BOLYAI. Herausgegeben von FR. SCHMIDT und P. STÄCKEL (1899). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 23_2, 1899, 321—324. (G. D.) — Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 1084—1087. (S. GÜNTHER.) [107

Stäckel, P., Eine Zeitungsnotiz über Gauss' Stellung zur Parallelen-Lehre. [108
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 275. — Anfrage.

Tait, P. G., On the claim recently made for Gauss to the invention (not the discovery) of quaternions. [109
Edinburgh, Royal soc., Proceedings **23**, 1900, 17—23.

Knott, C. G., Professor Kleins views of quaternions. [110
Edinburgh, Royal soc., Proceedings **23**, 1900, 24—34.

Urkunden zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie. I. NIKOLAJ IWANOWITSCH LOBATSCHEWSKY. Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von F. Engel (1899). [Recension:] *New-York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 6_2, 1900, 339—344. (F. S. Woods.) — Revue génér. d. sc. **10**, 1900, 745. — Bullet. d. sc. mathém. 24_2, 1900, 118—120. (G. D.) [111

Wassilief, A., Les idées d'Auguste Comte sur la philosophie des mathématiques. [112
L'enseignement mathém. **2**, 1900, 157—172. — Traduit du journal Voprossou filosofii i psichologii 1899 par Mlle. A. Gromeka.

Lange, J., Jacob Steiners Lebensjahre in Berlin 1821—1863. Nach seinen Personalakten dargestellt (1899). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 23_2, 1899, 319—320. (G. D.) — Monatsh. für Mathem. **11**, 1900; Lit.-Ber. 12. — Zeitschr. für mathem. Unterr. **31**, 1900, 306. (Stegemann.) [113

Lampe, E., Zur Biographie von Jacob Steiner. [114
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 129—141.

Noether, M., Über Riemann's Vorlesungen von 1861—62 über Abel'sche Functionen. [115
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **8**: 1, 1900, 177—178.

Halsted, G. B., De Morgan to Sylvester. Four letters. [116
The Monist **10**, 1900, 188—197.

Meyer, Fr., Rapporto sui progressi della teoria proiettiva degli invarianti nell' ultimo quarto di secolo. Traduzione dal tedesco di G. Vivanti (1900). [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 87. (G. L.) [117

***Goldschmidt, L.,** Kant und Helmholtz. Hamburg, Voss 1898. [118
8°, XVI + 135 S. — [5 *M*] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 859—860. (V. Heyfelder.) — Monatsh. für Mathem. **11**, 1900; Lit.-Ber. 4. (K. Zindler.)

Wassilieff, A., Pafnutii Lvovitch Tchébycheff et son œuvre (1898). [Recension:] El progreso matem. 2_2, 1900, 144—145. [119

Wassilief, A. und **Delaunay, N.,** P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen. Die Tschebyschefschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen (1900). [Recension:] Deutsche Litteraturz. **21**, 1900, 1399—1400, 1787—1788. (P. Stäckel.) [120

M[ansion], P., Tchebychef (1821—1894). [121
Mathesis 10_2, 1900, 67—68.

Lampe, E., Die reine Mathematik in den Jahren 1884—1899. Nebst Aktenstücken zum Leben von S. A. Aronhold (1899). [Recension:] L'enseignement mathém. **2**, 1900, 150—151. — Wiadomości matem. **4**, 1900, 120. — Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abt. 97—98. (Cantor.) [122

Vivanti, G., Lista bibliografica della teoria degli aggregati 1893—1899. [123
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 160—165.

Complete index of all the papers printed in the Proceedings of the London mathematical society vols. I—XXX. London, Hodgson 1900. [124
8°, 32 S.

Sintzoff, D., Bibliographia mathematica rossica 1898. [125
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 9_2, 1899. 20 S.

***Fitzgerald, G. F.,** Lord Kelvin, professor of natural philosophy in the university of Glasgow, 1846—1899. With an essay on his scientific work. Glasgow 1899. [126
4°. — [7½ sh.]

Curtze, M., Zum siebenzigsten Geburtstage Moritz Cantors. [127
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 227—231.

e) Nekrologe.

Eugenio **Beltrami.** [128
Bologna, Accad. d. sc. dell' istituto, Rendiconto 4_2, 1900. 11 S. (S. Pincherle.) — *Milano*, Istit. Lomb., Rendiconto **33**, 1900, 241—245. (C. Somigliana.) — *Napoli*, Accad. d. sc., Rendiconto 6_3, 1900, 74—80 [mit Schriftverzeichnis]. (L. Pinto.) — *Roma*, Accad. d. Lincei, Rendiconti 9_5: 1, 1900, 139—141 (Cerruti); Rendiconto dell' adunanza solenne 1900, 462—477 [mit Schriftverzeichnis]. (L. Cremona.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 52—62 (Abdruck des Necrologes von E. d'Ovidio mit Schriftverzeichnis von G. Loria). — Annali di matem. 4_3, 1900, 151—160 [mit Schriftverzeichnis]. (U. Dini.) — Periodico di matem. 2_2, 1900, 185—190 [mit Schriftverzeichnis]. (G. Frattini.) — L'enseignement mathém. **2**, 1900, 173—179 (französische Übersetzung des Necrologes von G. Frattini). — Il Pitagora **6**, 1900, 86—87. — Nature **61**, 1900, 568—569. (G. H. Bryan.) — *Kazan*, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 10_2, 1900, 32—35 [russische Übersetzung des Necrologes von M. Lévy in den Pariser „Comptes rendus"].

Joseph-Louis-François **Bertrand.** [129
Paris, Acad. d. sc., Comptes Rendus **130**, 1900, 961—978. (J. Lemaitre, M. Lévy, Berthelot, G. Darboux, A. Cornu, Duclaux, G. Paris, G. Perrot.) — Revue encyclop. Larousse **10**, 1900, 336—338 [mit Porträt]. (J. Boyer.) — Periodico di matem. 2_2, 1900, 280. — Nature **61**, 1900, 614—616 [mit Porträt]. (G. H. Bryan.) — Giorn. di matem. **28**, 1900, 171—176 [italienische Übersetzung des Nekrologes von G. H. Bryan]. — Naturwiss. Rundschau **15**, 1900, 320—323. (E. Lampe.)

Karl **Bobek.** [130
Monatsh. für Mathem. **11**, 1900, 97—101 [mit Schriftverzeichnis]. (G. Pick.)

Francesco **Brioschi.** [131
Mathesis 10_2, 1900, 112—113.

Thomas **Craig.** [132
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 6_2, 1900, 410—411. — L'enseignement mathém. **2**, 1900, 302.

Luis Gonzaga **Gascó.** [133
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **8**: 1, 1900, 26—27. — Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 225—226. (A. Gutzmer.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 63.

Karl Immanuel **Gerhardt.** [134
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **8**: 1, 1900, 28—30 [mit Porträt]. (M. Cantor.) — Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 205—216 [mit Porträt]. (F. Müller.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 63.

Abraham Nikolaus **Godefroy.** [135
Amsterdam, Wisk. Genoots., Nieuw Archief 4_2, 1900, 353—358. (P. H. Schoute.)

C. H. C. **Grinwis.** [136
Amsterdam, Akad. van Wetensch., Verslagen **8**, 1900, 326.

Hermann **Heilermann.** [137
Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abt. 57. (J. Diekmann.)

Francisco da Ponte **Horta.** [138
Jornal de sc. mathem. **14**, 1900, 3—9. (G. Teixeira.)

Sophus **Lie.** [139
Mathem. Ann. **53**, 1900, 1—41. (M. Noether.) — Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 8:1 1900, 30—46 [mit Porträt]. (F. Engel.) — Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 166—204 [mit Porträt und ausführlichem Schriftverzeichnis]. (F. Engel.) — *London*, Mathem. soc., Proceedings **30**, 1899, 334—336. (W. Burnside.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. **31**, 1900, 319—322 [L. als Pädagog]. (W. Ahrens.) — *Kazan*, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 9_2, 1899. 32 S. [mit Schriftverzeichnis]. (D. Sintzoff.)

Eugen von **Lommel.** [140
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 8 : 1, 1900, 47—58 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (L. Boltzmann.)

Friedrich **Meyer.** [141
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 8 : 1, 1900, 59—61 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (G. Riehm.)

Bartholomew **Price.** [142
London, Mathem. soc., Proceedings **30**, 1899, 332—334. (E. B. Elliott.)

Samuel Oliver **Roberts.** [143
London, Mathem. soc., Proceedings **31**, 1900, 283—285 [mit Schriftverzeichnis]. (F. S. Macaulay.)

Ferdinand **Rosenberger.** [144
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 217—224 [mit Porträt]. (S. Günther.) — Wiadomości matem. **4**, 1900, 131.

Hermann **Schapira.** [145
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 8 : 1, 1900, 61—66 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (C. Koehler.)

Karl **Schober.** [146
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 8 : 1, 1900, 66—68 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (W. Wirtinger.)

Emil **Wappler.** [147
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 225 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (G. Eneström.)

f) Aktuelle Fragen.

Loria, G., Sui metodi di compilazione dei cataloghi bibliografici. Pensieri e desiderii. [148
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 65—70.

Valentin, G., Die Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie. [149
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 237—245.

Laisant, C. A., Sur l'état d'avancement du répertoire bibliographique des sciences mathématiques. [150
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 246—249.

Graf, J. H., Über die geplante internationale naturwissenschaftliche Bibliographie. [151
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 250—257.

Müller, Felix, Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français, contenant les termes techniques employés dans les mathématiques pures et appliquées. — Mathematisches Vokabularium französisch-deutsch und deutsch-französisch, enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. Erste Hälfte. Leipzig, Teubner 1900. [152
8°, XI + (2) + 132 S. [8 ℳ] — [Anzeige:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 92—96.

Galdeano, Z. G. de, La moderna organización de la matemática. [153
El progreso matem. 2_2, 1900, 54—59, 173—178, 241—245, 310—313.

Gutzmer, A., Jahresversammlung der deutschen Mathematiker-Vereinigung zu München, 17.—23. September 1899. [154
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 258—261.

Pierpont, J., The summer meeting of the „Deutsche Mathematiker-Vereinigung" at Munich, September 1899. [155
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 6_2, 1900, 282—287.

Whittaker, E. T., Mathematics at the meeting of the British Association at Dover, 1899. [156
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 262—263.

Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences à Boulogne-sur-mer, 14—21 Septembre 1899. [157
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 261.

Macfarlane, A., Meeting of the American association for the advancement of science at Columbus 1899. [158
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 263—264.

Cantor, M., Die wissenschaftlichen Kongresse in Paris im Sommer 1900. [159
Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abt. 58.

[Der internationale Mathematikerkongreſs in Paris 6.—12. August 1900.] [160
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 264—265. (J. Boyer.) — Fiziko-matem. naouki 1_2, 1900, 97—99. (V. Bobynin.) — Nature **62**, 1900, 418—420.

Eneström, G., Le congrès d'histoire des sciences à Paris (23—28 juillet 1900). [161
Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 265.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— A. V. Bäcklund, Professor der Mechanik an der Universität in Lund zum Professor der Physik daselbst.

— Dr. H. Y. Benedikt zum Professor der Mathematik und Astronomie an der Universität in Austin (Texas).

— Prof. L. Boltzmann in Wien zum Professor der theoretischen Physik an der Universität in Leipzig.

— Dr. Warren G. Bullard, „Instructor in mathematics" an der University zu Vermont, zum Professor an der Syracuse University in Syracuse N. Y.

— Prof. C. Cailler in Genf zum Professor der Differential- und Integralrechnung an der Universität in Genf.

— Dr. J. B. Chittenden an der Universität in Columbia zum Professor der Mathematik am Polytechnikum in Brooklyn, N. Y.

— Prof. G. Darboux in Paris zum ständigen Sekretär der Pariser „Académie des sciences".

— Prof. L. E. Dickson in Austin (Texas) zum Professor der Mathematik an der Universität in Chicago.

— Prof. P. Drude in Leipzig zum Professor der Physik an der Universität in Giessen.

— Privatdoz. H. Fehr in Genf zum Professor der Geometrie und Algebra an der Universität in Genf.

— Privatdoz. M. Grübler in Charlottenburg zum Professor der Mechanik an der technischen Hochschule in Dresden.

— „Instructor in mathematics" H. Hancock in Chicago zum Professor der Mathematik an der Universität in Cincinnati.

— Privatdoz. J. Horn in Charlottenburg zum Professor der Mathematik an der Bergakademie in Clausthal.

— Fritz Kötter, Professor der Mathematik an der Bergakademie in Berlin zum Professor der technischen Mechanik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Dr. G. H. Ling zum Professor der Mathematik an der Universität in Cincinnati.

— Prof. H. Lorenz in Halle a. S. zum Professor an der Universität Göttingen.

— Prof. E. Meyer in Göttingen zum Professor der Mechanik an der technischen Hochschule in Charlottenburg.

— Prof. F. Morley in Haverford zum Professor der Mathematik an der Johns Hopkins Universität in Baltimore.

— Prof. Fr. Pockels in Dresden zum Professor der mathematischen Physik an der Universität in Heidelberg.

— Dr. J. Rajewski zum Professor der Mathematik an der Universität in Lemberg.

— Dr. E. D. Roe jr. zum Professor an der Syracuse University in Syracuse, N. Y.

— Dr. Th. Schmid zum Professor der darstellenden Geometrie an der technischen Hochschule in Wien.

— Privatdoz. E. Wölffing in Stuttgart zum Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in Stuttgart.

— Prof. Karl Zahradnik in Agram zum Professor an der Technischen Hochschule in Brünn (Mähren).

— Privatdoz. K. Zindler in Wien zum Professor der Mathematik an der Universität in Innsbruck.

Todesfälle.

— Thomas Craig, Professor der Mathematik an der Johns Hopkins Universität in Baltimore, geboren in Pittston (Pennsylvania) den 20. December 1855, gestorben in Baltimore den 8. Mai 1900.

— Ernst Reinhold Eduard Hoppe, Privatdozent der Mathematik an der Universität in Berlin, Herausgeber des Archivs der Mathematik und Physik, geboren in Naumburg den 18. November 1816, gestorben in Berlin den 7. Juni 1900.

— Karl J. Küpper, ehem. Professor der Geometrie an der deutschen Technischen Hochschule zu Prag, gestorben daselbst im September 1900, 72 Jahre alt.

— Valerian Nikolajewitsch Ligin, Professor in Warschau, geboren in St. Petersburg den 14. Juli 1846, gestorben in Warschau den 6. Januar 1900.

— Charles Scott Venable, emeritierter Professor der Mathematik an der Universität in Virginia, geboren in Prince Edward County (Virginia) den 19. April 1827, gestorben in Charlotteville den 11. August 1900.

— Ernst Eduard Wiltheiss, Professor der Mathematik an der Universität in Halle, gestorben in Halle den 9. Juli 1900, im 45. Jahre.

— Karl Zelbr, Privatdocent an der Technischen Hochschule in Brünn, geboren den 30. November 1854 zu Oszlan, gestorben den 13. Mai 1900.

Mathematisch-historische Arbeiten in Vorbereitung.

— M. H. G. Zeuthen prépare une seconde partie de son traité de l'histoire des mathématiques (*Forelæsning over Mathematikens Historie*), dont la première partie (Antiquité et Moyen âge) fut publiée en 1893. Cette seconde partie contiendra l'historie des mathématiques aux 16e et 17e siècles. — Une traduction française de la première partie, faite d'après l'édition allemande (1896) et dont le manuscrit a déjà été revu par l'auteur, paraîtra dans peu de temps.

— Die bayerische Akademie der Wissenschaften in München hat Herrn F. Boll in München eine Unterstützung von 600 Mark zur Fortsetzung seiner Studien über Astronomie und Astrologie der Griechen, besonders zur Vergleichung von Handschriften im Vatikan, gewährt.

— Die preufsische Akademie der Wissenschaften in Berlin hat Herrn Wilhelm Schmidt in Helmstedt zu einer Reise nach Italien zum Zwecke der Vergleichung von Handschriften des Heron 700 Mark bewilligt.

Mathematisch-encyklopädische Arbeiten.

— Von der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, deren erstes Heft 1898 erschien, sind augenblicklich fünf Hefte (zusammen 720 Seiten) des ersten Bandes (*Arithmetik und Algebra*) unter der Redaktion des Herrn W. Fr. Meyer in Königsberg, und vier Hefte (zusammen 560 Seiten) des zweiten Bandes (*Analysis*) unter der Redaktion des Herrn H. Burkhardt in Zürich, herausgegeben worden. Es werden im ganzen 7 Bände erscheinen; und zwar wird die reine Mathematik drei Bände (*Arithmetik und Algebra, Analysis, Geometrie*) umfassen, die angewandte Mathematik ebenfalls drei Bände (*Mechanik; Physik; Geodäsie, Geophysik und Astronomie*), während der Schlufsband historische, philosophische und didaktische Fragen behandeln wird. Band 1 und 3 werden von Herrn W. Fr. Meyer, Band 2 von Herrn H. Burkhardt in Zürich, Band 4 von Herrn F. Klein in Göttingen, Band 5 von Herrn A. Sommerfeld in Aachen, der auf *Geodäsie und Geophysik* bezügliche Teil des Bandes 6 von Herrn E. Wiechert in Göttingen redigiert. Über die Redaktion des astronomischen Teiles von Band 6, wie über die Redaktion von Band 7 sind endgültige Festsetzungen noch nicht getroffen. — Die erschienenen Hefte enthalten eine sehr grofse Anzahl von historischen und bibliographischen Notizen. — Eine französische Ausgabe unter der Redaktion des Herrn J. Molk in Nancy wird demnächst zu erscheinen beginnen.

— Unter dem Titel *Synopsis der höheren Mathematik* begann Herr J. G. Hagen vor etwa 10 Jahren eine zusammenfassende Arbeit über die höhere Mathematik herauszugeben, deren Zweck ist, nicht nur die schon erlangten Resultate, sondern auch die noch vorhandenen Lücken anzugeben, und dazu durch zahlreiche Litteratur-Angaben die historische Entwickelung der einzelnen Theorien zu berücksichtigen, so dafs es als ein Nachschlagebuch benutzt werden kann. Dem Prospekte nach sollte die ganze *Synopsis* in 4 Bänden vollendet werden; das Format der Bände kann am angemessensten als Folio bezeichnet werden. — Von dieser

Arbeit erschien der erste Band (398 Seiten) 1891 und der zweite Band (416 Seiten) 1894; sie behandelten beziehungsweise *Arithmetische und algebraische Analyse* und *Geometrie der algebraischen Gebilde*. Vom dritten Bande (*Differential- und Integralrechnung*) sind soeben zwei Lieferungen (128 Seiten) herausgegeben worden.

— Seit dem Jahre 1893 veröffentlicht Herr G. Peano in Turin ein *Formulaire de mathématiques*, das in gewisser Hinsicht als eine Encyklopädie der Mathematik betrachtet werden kann. Das *Formulaire* soll nämlich die bisher bekannten Sätze einzelner mathematischer Theorien in der von Herrn Peano ausgebildeten pasigraphischen Zeichensprache zusammenstellen und dabei auch Notizen über die ersten Entdecker der einzelnen Sätze geben. Der erste Band (144 Seiten) wurde 1895 abgeschlossen, vom zweiten Bande sind drei Hefte (63, 60, 199 Seiten) 1897—1899 erschienen. Dabei ist jedoch zu bemerken, daſs die neueren Hefte teilweise nur verbesserte und vermehrte Neuausgaben der älteren sind. Das letzte erschienene Heft enthält die Abteilungen: Logique mathématique, arithmétique, limites, nombres complexes, vecteurs, dérivées, intégrales.

— Unter dem Titel Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften ist kürzlich ein neues mathematisch-encyklopädisches Unternehmen vorbereitet worden, das eine längere Reihe von zusammenfassenden Werken über die wichtigsten Abschnitte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluſs ihrer Anwendungen bringen soll. Das Wort „Lehrbuch" im Titel der Sammlung ist so zu verstehen, daſs die einzelnen Bände derselben neben den rein wissenschaftlichen auch pädagogische Interessen berücksichtigen, und darum nicht nur Resultate, sondern auch Beweise und eingehende Darlegungen der Methoden enthalten. Von dieser Sammlung sind bisher etwa 40 Bände in Angriff oder in Aussicht genommen, und 3 Bände (*Vorlesungen über das* Pfaffsche *Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, von E. von Weber. — *Die Determinanten* von E. Pascal; deutsche Ausgabe von Herm. Leitzmann. — *Theoretische Arithmetik* von O. Stolz und J. A. Gmeiner) erschienen. Unter den geplanten Bänden sind einige wesentlich historischen Inhalts.

— Im Jahre 1897 wurde eine Sammlung mathematischer Lehrbücher für Studierende und zum Selbstunterricht geplant, die 1899 unter der Redaktion des Herrn H. Schubert in Hamburg zu erscheinen begann und den Namen „Sammlung Schubert" bekam. Diese Sammlung soll einen einheitlich angelegten und aus systematisch sich entwickelnden Einzel-Darstellungen bestehenden Lehrgang der reinen und angewandten Mathematik umfassen. Bis jetzt sind im ganzen 42 Bände in Aussicht genommen, von denen fünf *Elementare Arithmetik und Algebra; Ebene und sphärische Trigonometrie; Algebra, Determinanten und elementare Zahlentheorie; Ebene Geometrie der Lage; Analytische Geometrie der Ebene*) erschienen, und acht andere gegenwärtig im Druck sind. Jeder Band wird 8—24 Druckbogen umfassen. Daſs die Sammlung auch eine *Geschichte der Mathematik* enthalten wird, haben wir schon in der vorigen Chronik (S. 294) angekündigt.

Systematische Darstellungen mit historischen Bemerkungen.

— Unter dem Titel: *The teaching of elementary mathematics* hat Herr D. E. Smith in Brockport (New York) neuerdings eine Arbeit über den mathematischen Unterricht herausgegeben, worin drei Kapitel („How arithmetic has developed", S. 42—70; „The growth of algebra", S. 145—160; „The growth of geometry", S. 224—233) historischen Inhalts sind, und auch die übrigen Kapitel viele historische Bemerkungen enthalten.

— Herr M. Brückner in Bautzen hat kürzlich ein Werk über die *Vielecke und Vielflache* veröffentlicht, worin eine groſse Anzahl von geschichtlichen Bemerkungen eingeflochten worden ist. Die meisten dieser Bemerkungen beziehen sich auf Verfasser aus dem 18. und 19. Jahrhundert, z. B. Euler, Lhuilier, Poinsot, Möbius, Cayley, Hess, aber auch die älteren Untersuchungen über die behandelten Gegenstände sind berücksichtigt worden.

Gesammelte Werke kürzlich verstorbener Mathematiker.

— Die Werke von P. L. Tchebycheff († 1894) werden gleichzeitig in zwei Auflagen, einer russischen und einer französischen, von den Herren A. Markoff und N. Sonin herausgegeben. Der erste Band erschien schon 1899 und der zweite ist jetzt unter der Presse.

— Die Werke von F. Brioschi († 1897) werden von den Herren L. Cremona und G. B. Guccia herausgegeben. Der erste Band ist soeben gedruckt.

— Eine Ausgabe der sämtlichen Abhandlungen von E. Beltrami († 1900) in drei oder vier Bänden ist von der mathematischen Fakultät der Universität in Rom geplant.

Gekrönte Preisschriften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Le prix des sciences mathématiques et physiques a été décerné en 1899 à M. L. Autonne pour un mémoire *Sur les formes quaternaires à deux séries de variables; applications à la géométrie et au calcul intégral.*

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Akademie der Wissenschaften in Berlin.* Preisaufgabe der Steiner-Stiftung für das Jahr 1904. Es soll irgend ein bedeutendes, auf die Lehre von den krummen Flächen sich beziehendes, bis jetzt noch nicht gelöstes Problem möglichst mit Berücksichtigung der von J. Steiner aufgestellten Methode und Prinzipien vollständig gelöst werden. Besonders richtet die Akademie die Aufmerksamkeit auf die speziellen Aufgaben, auf welche J. Steiner in der allgemeinen Anmerkung am Schlusse seiner zweiten Abhandlung über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt hingewiesen hat.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Concours pour l'année 1901. On demande une contribution importante à l'étude des formes mixtes à un nombre quelconque de séries de variables, et d'en appliquer les resultats à la géométrie des espaces quelconques.

— *Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen.* Preisaufgabe für das Jahr 1901. Es soll für einen beliebigen Zahlkörper das allgemeinste Reciprocitätsgesetz der l-ten Potenzreste ausgeführt und bewiesen werden, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet.

— *Jablonowskische Gesellsch. in Leipzig.* Preisaufgabe für das Jahr 1901. Die Theorie der quadratischen Differentialformen ist in einem wesentlichen Punkte zu vervollkommnen.

Vermischtes.

— Unter dem Titel: Astronomischer Jahresbericht hat Herr W. F. Wislicenus in Strafsburg mit Unterstützung der Astronomischen Gesellschaft eine Publikation angefangen, die dem Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik ähnlich ist, und deren soeben erschienener I. Band (XXIII + 577 S.) die Litteratur des Jahres 1899 behandelt. Der Band führt 1768 Arbeiten und Mitteilungen auf, von denen etwa 40 dem Berichterstatter nicht zugänglich waren, sodafs keine Referate darüber gegeben werden. Mathematische und physikalische Arbeiten sind nur insoweit berücksichtigt, als sie inhaltlich selbst auf astronomische oder astrophysikalische Fragen Bezug nehmen. Der Herausgeber wurde durch die Herren C. Burrau, E. F. v. d. S. Bakhuyzen, A. Iwanow, von Kövesligethy und Láska unterstützt, welche über die in dänischer, holländischer, russischer, ungarischer und polnisch-böhmischer Sprache erschienenen Arbeiten referierten.

— The Australian association for the advancement of science met at Melbourne January 9th, 1900. The presidential address was delivered by Mr. R. L. J. Ellery on *The beginnings and growth of astronomy in Australia*, and the presidential address of the mathematical section by Mr. G. H. Knibbs on *The developement of the atomic theory of matter.* The next meeting of the association will he held at Hobart in January, 1902.

Namenregister.

Abbo von Fleury, 287.
Abdank-Abakanowicz, B., 151, 155.
Abel, N. H., 168, 170, 195, 198—201, 233, 235, 421, 495, 518, 531.
Abraham, 274, 528.
Abraham bar Chijja, 321—337, 501, 502.
Abraham ibn Esra, 27[illegible].
Abu Bekr, 500.
Abu Zakarija, 500.
Abul Dschud, 500.
Abulfaradj, 38.
Abul Hassan Ali, 60.
Abul Wafa, 282, 499.
Ackermann-Teubner, A., 230, 288.
Adalbero, 268.
Adelbold, 287.
Aeneas Tacticus, 308.
Aganis, 309.
Agathias, 267.
Agesistratos, 301, 302.
Agnesi, Maria Gaetana, 291.
Agnesi, Maria Teresia, 291.
Agnesi, Paolina, 291.
Agnesi, Pietro, 291.
Agrippa, 298.
Ahmed ben Abdallah, 499.
Ahmed ben Ahmed, siehe Alfraganus.
Ahmes, 234.
Ahrens, W., 526, 532.
Albattani, 281, 282, 285, 521, 526, 528.
Albertus de Saxonia, 504.
Albis, Th. de, siehe White.
Albrecht, G., 221.
d'Alembert, J., 109, 112, 113, 124, 125, 207, 235, 287, 291, 439, 440, 450, 451, 529.
Alexander von Afrodisias, 266.
Alfraganus, 353.
Alkalasadi, 501.
Alkarkhi, 417, 418.
Alkhwarizmi, 273, 282, 285, 499, 508, 520.
Allman, G. J., 279.
Al-Mutilillah, 285.
al-Sidjzi, 16.
Amati, A., 289, 291.
Amodeo, F., 488.
Ampère, A. M., 147, 148, 155, 179, 196, 197, 235, 288, 441, 449, 450, 455, 456, 458.
Anaritius, siehe Neirizi.
Anaxagoras, 234.
Anaximander, 266.
Anthemios, 267.
Antifon, 234.
Aoust, L., 142, 144—146, 149, 154, 155.
Apollonios, 210, 234, 266, 314, 504, 512, 519.
Arago, F., 288.
Aratoribus, G. de, 516.
Aratos, 26, 290.
Archibald, R. C., 526, 530.
Archimedes, 13—19, 28, 29, 31, 32, 76, 163, 206, 234, 279, 298, 302, 306, 313, 322, 499, 512, 514, 515, 528.
Archytas, 234, 268, 290.
Argand, J. R., 124, 125.
Ariston, 31, 34, 35.
Aristoteles, 55, 215, 234, 266, 267, 290, 302, 305, 307, 308, 528.
Arnaudeau, A., 488.
Arneth, A., 5.
Arnoux, G., 496.
Aronhold, S. A., 498, 531.
Aschbach, J. von, 504.
Astier, R., 289, 290.
Astorini, E., 512.
Atelhard von Bath, 499, 520.
Athenaios, 301, 302.
Attalos I, 308.
Attalos II, 308.
Atticus, 303.
Aubry, A., 289, 291, 526, 527, 529.
August, F., 293.
Autonne, L., 488, 536.

Bachet de Méziriac, G., 235.
Bäcklund, A. W., 188, 533.
Bacon, R., 269.
Baire, R., 165.
Bakhuysen, E. F. v. d. S., 536.
Balbus, 48, 50, 316.
Ball, W. W. R., 5, 68, 236, 279.
Baltzer, R., 112.
Barentin, F. W., 137.
Barlaam, 267.
Barrow, I., 98, 518.
Basset, A. B., 497, 498.
Bauer, G., 258.
Bauschinger, J., 258, 259.

Beaune, siehe Debeaune.
Beck, J. S., 440.
Beck, Th., 303, 304.
Beda, 41.
Beha-Eddin, 294.
Bellavitis, G., 147, 155.
Beltrami, E., 292, 293, 483, 484, 531, 536.
Beman, W. W., 289, 291, 519, 520, 526, 527.
Bendixson, I., 293, 487, 489.
Benedetti, G. B., 510.
Benedikt, H. Y., 533.
Bentley, R., 220.
Berberich, A., 528.
Berdellé, Ch., 291.
Bernelinus, 279.
Berner, Th., 136.
Bernoulli, Daniel, 73, 430.
Bernoulli, Jakob, 70, 71, 97, 98, 208, 210, 235, 274, 279, 287, 517, 525, 530.
Bernoulli, Johann I, 70, 74, 98, 99, 109—112, 116, 125, 148, 155, 210, 235, 274, 287, 435—437, 514, 518.
Bernoulli, Nikolaus, 210.
Berthelot, M. P. E., 531.
Berthold, G., 430.
Bertrand, J., 96, 229, 293, 437, 491, 531.
Bessel, F. W., 118, 126.
Bettazzi, R., 163.
Betti, E., 264, 487.
Bezold, G. von, 523.
Bézout, E., 235.
Biagio di Parma, 504.
Bianchi, L., 183, 184, 188, 289, 292.
Bianchi, T., siehe White.
Bianchini, J., 506.
Biasi, G., 163.
Bierens de Haan, D., 93, 510.
Bigeon, 148, 155.
Billy, J., de, 512.
Bion, N., 522, 523.
Biot, J. B., 288.
Birkenmajer, L., 522, 526, 528, 529.
Bisschoffsheim, R., 247.
Biton, 308.
Bjerknes, C. A., 174, 175.
Blanken, H. van, 152.
Bloch, L., 290.
Blume, F., 39—41, 43, 44, 297.
Bobek, K., 293, 531.
Bobynin, V. V., 2, 288, 289, 526, 532.
Boccardi, J. 489.
Bodenhausen, von, 209.
Boeck, Th., 204.
Boerhave, H., 96.
Boetius, 39—50, 55, 265, 268, 278, 286, 287, 318, 524, 528.
Bohlmann, G., 164.
Boissonade, J. F., 267.
Boll, F., 289, 290, 534.
Boltzmann, L., 259, 289, 291, 526, 529, 532, 533.
Bolyai, J., 233, 292.
Bolyai, W., 289, 292, 526, 530.
Bombelli, R., 277.
Bonaparte, Roland, 247, 487, 492.
Boncompagni, B., 2, 242, 275, 322, 337, 499.
Bonnet, O., 455, 477.
Bonnevie, J. A., 201.
Boole, G., 498.
Borel, E., 160, 164, 165.
Borelli, G. A., 529.
Borgi, P., 507.
Bose, G. M., 221.
Bosmans, H., 526, 529.
Bosscha, J., 93, 289, 291, 526, 529.
Bossut, Ch., 5, 274.
Bouché-Leclerq, A., 289, 290, 526, 528.
Bourlet, C., 529.
Bouwman, W., 147.
Boyer, J., 5, 236, 265, 278—280, 289, 526, 527, 531, 532.
Boyle, R., 220.
Bradwardin, Th., 507.
Brahe, Tycho, 279, 283, 529.
Brand, E., 232.
Braunmühl, A. von, 6, 20—23, 27, 64, 90, 270—273, 280—282, 288—290, 319, 321, 330, 337, 338, 346, 354, 372, 380, 391, 413, 501, 519, 521, 522, 526, 527, 529.
Bravais, A., 144, 155.
Bressieu, M., 271, 282.
Briggs, H., 70, 235, 272.
Brill, A. von, 109, 115, 116, 118, 121—123, 259, 521.
Bring, E. S., 518.
Brioschi, F., 264, 487, 521, 531, 536.
Brix, Ph. W., 292.
Brocard, H., 144, 155, 248, 287, 526, 527.
Brouncker, W., 93, 488.
Brown, E. W., 289, 291, 292, 296.
Brown, R., 526, 528.
Brucker, J., 503, 504.
Brückner, M., 535.
Brudzewo, A. de, 526, 528.
Bruns, H., 262.
Bryan, G. H., 526, 531.
Bryson, 234.
Bubnov, N., 40—42, 268, 286, 287, 289, 290, 322, 522, 524, 526, 528.
Budan, F., 149.
Budérus, 143, 155.
Buée, 125.
Bullard, W. G., 533.
Bullet, 62.
Burali-Forti, C., 147, 155, 161—163.
Burgersdyk, L. A. J., 93.
Bürgi, J., 271, 283.
Burkhardt, H., 4, 534.
Burnside, W., 526, 532.
Burrau, C., 536.

Cailler, C., 533.
Cajori, F., 5, 236, 288—290, 292, 527.
Camerer, I. G., 212.
Campanus von Novarra, 282, 503.
Campbell, F. A. G., 93.
Cantor, G., 160—164.
Cantor, M., 1, 3, 6, 9, 12, 13, 42, 43, 60, 61, 98, 111, 112, 152, 155, 211, 212, 222, 227—231, 233, 235, 242, 264, 265, 268, 270—274, 276, 277, 279, 280, 286, 288—293, 297, 299, 307—311, 314—320, 417, 431, 432, 434, 437, 438, 440, 487, 499—516, 518—520, 522, 526—532.
Capelli, A., 487, 489.
Caqué, J., 456.
Cardano, H., 33, 34, 228, 509, 516.
Carnot, L., 147, 150, 154, 155, 287.
Carslaw, H. S., 497.
Cartan, E., 199, 487.
Caesar, Julius, 47.
Casey, J., 143, 155.
Casiri, M., 285.
Casorati, F., 264, 487.
Cassini, J. D., 287.
Cassiodorius, 46, 47, 49, 279.
Castillon, J., 434.
Caswell, J., 70.
Cataldi, P. A., 488.
Cauchy, A. L., 109, 113, 115, 117, 118, 120—125, 127, 128, 176—178, 207, 235, 287, 442, 445, 446, 450—453, 456—458, 460, 461, 464, 466—479, 498, 517.
Cavalieri, B., 75.
Cavallin, C. B. S., 144, 155.
Cavani, A., 289, 292.
Cayley, A., 147, 155, 186, 190, 235, 535.
Cellérier, Ch., 463.
Cercignani, 289, 290.
Cerruti, V., 526, 531.
Cesàro, E., 145—148, 150, 151, 154, 155.
Ceulen, L. van, 279.
Chasles, M., 16, 60, 153, 174, 207, 229, 261, 267, 287.
Châtelet, Marquise de, 278.
Chiaramonti, S., 60, 62, 63.
Chittenden, J. B., 533.
Christoffel, E. B., 293.
Chrystal, G., 153, 156.
Chuquet, N., 235.
Cicero, 303.
Cifarelli, T., 146, 156.
Ciruelo, P. S., 507.
Clairaut, A., 235, 287, 520, 521.
Clarke, S., 212.
Clebsch, A., 174—176, 294.
Clemens VI, 506.
Clerval, 524, 526, 528.
Collignon, E., 150, 151, 153, 156, 261.
Collins, Joh., 70, 209, 518.
Collins, J. V., 263.
Colocci, A., 41, 42.
Columella, 310—314, 318.
Commodus, 303.
Compère, C., 289, 291.
Comte, A., 531.
Condorcet, M. J. A. N. C., 439, 440.
Constantin der Grofse, 267.
Constantinus Miciacensis, 269, 286.
Contarini, G., 529.
Conti, A., 296.
Copernicus, siehe Koppernicus.
Cora, G., 285.
Corancez, L. A. O. de, 148, 156.
Cornu, A., 147, 156, 526, 531.
Cotes, R., 71, 220, 520.
Coulomb, Ch. A., 222, 288.
Cournot, A., 460.
Couturat, L., 163.
Cozza-Luzi, G., 289, 291.
Craig, Th., 531, 533.
Cranz, C., 162.
Crawford, L., 489.
Crelle, A. L., 131, 248, 275, 456.
Cremona, L., 526, 531, 536.
Crüger, P., 273.
Cunningham, A., 497.
Cunningham, S. J., 263.
Curtze, M., 51, 60, 211, 227, 269, 273, 282, 288—291, 309, 311, 316, 317, 321, 417, 418, 501—509, 512, 516, 519, 522, 523, 526, 528, 531.
Cusanus, siehe Nicolaus von Cusa.
Czuber, E., 487, 526, 527, 529.

Damascius, 267.
Damianos, 302.
Darboux, G., 167, 168, 185, 197, 248, 265, 469, 487, 492, 526, 531, 533.
Dasypodius, C., 268.
Davy H., 222.
Dawson, H. G., 145, 156.
Debeaune, Fl., 235.
del Monte, G. U., 529.
Delambre, J. B., 23, 272, 287, 346.
Delaunay, C. E., 152.
Delaunay, N., 289, 292, 526, 531.
della Nave, A., 508.
Demerlior, J., 522.
Demoklitos, 308.
Demokritos, 234, 302.
Demoulin, A., 153, 156.
Denfrie, Ph., 523.
Desargues, G., 215, 235, 495.
Descartes, R., 142, 215, 232, 235, 287, 295, 422, 430, 511, 514, 519, 520, 521.

Desrousseaux, A., 268.
Devrient, L., 135.
Dewey, M., 252, 253, 496.
Dicaearchus, 307.
Dickson, L. E., 263, 488, 498, 533.
Dickstein, S., 276, 288, 289, 291, 292, 527.
Diekmann, J., 526, 531.
Diels, H., 266.
Dini, U., 449, 526, 531.
Dinostratos, 234.
Diofantos, 234, 267, 289, 290, 314, 417, 418, 499.
Diokles, 234.
Dionysodoros, 267.
Dirichlet, P. L., 131, 134, 139, 140, 206, 227, 235, 259, 295.
Dirichlet, Rebecka, 140.
Dirksen, E. H., 206.
Dixon, A. C., 262.
Döhlemann, K., 259.
Dominicus de Clavasio, 413, 504.
Domninos von Larissa, 267.
Doublet, Ph., 427.
Dove, H. W., 206.
Drach, J., 294, 488, 489.
Dreyer, J. L. E., 94, 530.
Drude, P., 533.
Dschabir ibn Aflah, 268, 282, 383, 388, 389, 500.
du Bois-Aymé, 148, 155.
du Bois-Reymond, P., 461, 462, 464.
Dubravius, J., 60, 61.
Duclaux, P. E., 531.
Dufay, Ch., 221.
Duhem, P., 15, 526, 528.
Dulong, P. L., 288.
Dupin, P. Ch. F., 147, 156.
Duporcq, E., 264, 487.
du Rieu, W. N., 93.
Dutordoir, H., 526, 528.

Eggers, H., 148, 156.
Eisenlohr, A., 266.
Eisenlohr, F., 228.
el-Chodschendi, 500.
el-Djazari, 28, 38.
el-Fazzari, 294.
Elia Misrachi, 274.
el-Kalasadi, siehe Alkalasadi.
Ellery, R. L. J., 536.
Elliott, E. B., 526, 532.
el-Sanni, 500.
Elsässer, W., 289, 290.
el-Sidjzi, 499.
Encke, J. F., 206.
Eneström, G., 1, 110, 128, 225, 237, 249, 265, 268—271, 273—275, 278, 280, 287—290, 440, 480, 481, 499, 508—510, 512—514, 516, 519—521, 524—530, 532.
Engel, F., 166, 171, 191—197, 258, 259, 289, 292, 526, 531, 532.
Epaphroditus, 41, 317.
Epigenes, 266.
Epikuros, 307.
Eratosthenes, 233, 234, 278, 307, 308.
Ersch, J. S., 297.
Ettingshausen, A. von, 144, 156.
Eudemos, 266.
Eudoxos, 26, 234.
Euklides, 9—11, 21, 42—51, 54, 58, 149, 150, 186, 228, 229, 233, 234, 266, 268, 278, 302, 307—309, 314, 316, 326, 351, 373, 374, 377, 381—386, 388, 389, 415, 500, 501, 507, 512, 528.
Euler, L., 72—74, 109, 113—117, 120, 121, 124, 126, 128, 142, 144—146, 148, 150—152, 156, 169, 173, 206, 207, 235, 244, 275, 287, 436, 438, 517, 520, 521, 525, 530, 535.
Eutokios, 13, 14, 234, 314.
Evellin, 164.
Everett, J. D., 497, 498.

Fabbroni, A., 76.
Fabri, H., 511.
Fagnano, G. C. de, 153, 235,
Falk, M., 469.
Faraday, M., 222.
Farbius, A. = Fabri.
Farcy, A., 146.
Fatio de Duillier, N., 94.
Faure, A., 125.
Favaro, A., 276, 288, 289, 291, 510, 526, 529.
Fazzari, G., 289, 290.
Fearnley, C., 174.
Fehr, H., 7, 292, 533.
Feilberg, M. W., 204.
Feliciano, Fr., 277.
Ferdinando II, 75.
Ferdinando III, 76.
Feret, R., 261, 496.
Fermat, P., 98, 235, 263, 273, 279, 287, 496, 511, 519.
Ferrari, F., 275, 530.
Ferrari, L., 270, 509, 510.
Ferroni, P., 76, 146, 156.
Férussac, A. E. J. P. J. F., 152.
Fessenden, R. A., 263.
Fibonacci, siehe Pisano.
Filon von Byzanz, 28, 29, 34, 35, 37, 38, 300, 301, 528.
Filopatris, 267.
Filoponos, 267.
Fine, O., 523.
Finger, J., 487.
Fink, K., 5, 519, 526, 527.
Fink, Th., 283.
Fischer, E. G., 151, 156.
Fiske, Th. S., 296.
Fitzgerald, G. F., 526, 531.
Flaccus Siculus, 40.
Fleckeisen, A., 299, 316.
Fleischer, C. R., 151, 156.
Foix Candalla, F. de, 510.
Fontaine, A., 144, 156.

Fontana, G., 275.
Fontaneau, E., 261, 496.
Fontès, J., 269, 526, 529.
Förster, W., 289, 290.
Forsyth, A. R., 262, 275.
Fourier, J., 235, 287, 463, 477.
Franco von Lüttich, 269, 524.
François, J. F., 125.
Franklin, B., 221.
Frattini, G., 526, 531.
Fredholm, I., 489.
Frénicle de Bessy, B., 235.
Fresnel, A., 288.
Fricke, R., 495.
Friedlein, G., 11, 42, 43, 308.
Frolow, M., 261.
Frommel, E. W., 140.
Frontinus, J., 40, 315.
Fuchs, L., 186.
Fujisawa, R., 487, 489.
Fullenius, B., 95.
Fullone, A., 523.
Fufs, N., 145, 150, 157.

Galdeano, Z. G. de, 164, 289, 292, 487, 489, 526, 532.
Galilei, G., 75—77, 80, 97, 233, 287, 289, 291, 421, 526, 529.
Gallardo, A., 487, 489.
Galois, E., 192, 197, 235.
Galloys, J., 209.
Galton, F., 262.
Galvani, L., 222.
Garibaldi, C., 161, 162.
Gascheau, G., 152.
Gascò, L. G., 225, 226, 531.
Gauss, C. F., 118, 126, 213, 227, 233, 235, 275, 287, 289, 292, 295, 526, 530.
Gavrilovic, B., 488.
Geber, siehe Dschabir ibn Aflah.
Gebhardt, J. F. A., 293.
Geiser, C. F., 129, 487.
Gelcich, E., 288.
Gellibrand, H., 70, 273.
Geminos, 11, 234, 308, 309, 316, 318.
Gemma-Frisius, R., 522.
Genocchi, A., 164, 435.
Gent, P. van, 94.
Gerbaldi, F., 162.
Gerbert, 40—42, 45, 213, 235, 265, 268, 269, 286, 287, 289, 290, 322, 524, 526, 528.
Gergonne, J. D., 123, 148, 149, 157, 291, 455.
Gerhardt, C. I., 125, 205—216, 278, 421, 431, 513, 518, 519, 526, 530, 531.
Gerke, 423.
Gerland, E., 223, 291, 421, 424—426, 428—430, 526, 527.
Gerschow, A., 62.
Ghaligai, F., 508.
Gherardi, S., 508.
Gherardo Cremoneso, 51, 268, 289, 290, 330, 337, 346, 501, 516, 520, 521, 526, 528.
Ghinassi, G., 75, 76, 79.
Giesing, J., 322, 502.
Giordano, V., 209.
Girard, A., 65—67, 70, 235, 271, 273, 520.
Giudice, F., 161.
Gmeiner, J. A., 535.
Godefroy, A. N., 531.
Godefroy, R., 144, 147, 150, 157.
Goesius, W., 40.
Goldbeck, E., 526, 529.
Goldschmidt, L., 526, 531.
Gollob, E., 289, 290.
Gompertz, B., 294.
Goodspeed, E. J., 289, 290.
Gordan, P., 258, 487.
Gordon, A., 221.
Görland, A., 289, 290.
Göthe, J. W., 120, 140.
Goursat, E., 201, 477, 478, 498.
Graf, J. H., 129, 139, 140, 250, 288, 480, 526, 532.
Grammateus, H., 507.
Grandi, G., 78, 211.
Grassmann, H., 180, 263, 295.
Gravelaar, N. L. W. A., 278, 289, 291.
Graves, R. P., 124.
Gravesande, W. J. s', 96.
Gray, St., 221.
Greenhill, A. G., 143, 157, 487.
Grégoire de Saint-Vincent, 235, 511.
Gregory, J., 70, 78, 79, 90—92.
Grinwis, C. H. C., 93, 531.
Gromeka, M^lle A., 531.
Gross, R., 289, 292.
Gruber, J. G., 297.
Grübler, M., 533.
Grunert, J. A., 207, 210.
Guccia, G. B., 536.
Guericke, O. von, 221, 428.
Guhrauer, G. E., 207.
Guilelmus Anglicus, 347, 349—353.
Guimarães, R., 526, 527, 530.
Guldberg, A. 196.
Guldberg, C. M., 175.
Gundermann, G., 526, 527.
Günther, L., 289, 291.
Günther, S., 217, 229, 288—291, 302, 507, 520, 526, 529, 530, 532.
Gutzmer, A., 226, 261, 496, 526, 531, 532.
Guyou, E., 144, 157.
Gwyther, R. F., 150, 157.
Gyldén, H., 262.

Haas, A., 151, 157.
Habasch el-Merwazi, 499.
Habich, E., 144, 157.
Hadamard, J., 163, 164, 487.

Hadrianus, 267.
Hagen, J. G., 173, 275, 517, 526, 530, 534.
Hagi Khalfa, 37.
Hahn, R., 526, 530.
Hall, A., 264.
Halley, E., 513.
Halliwell, J. O., 502.
Halma, N. B., 308.
Halphen, G. H., 170, 187, 192.
Halsted, G. B., 263, 289, 292, 498, 526, 531.
Halvorsen, J. B., 204.
Hamburger, M., 262.
Hamilton, W. R., 124, 295.
Hancock, H., 488, 533.
Handson, R., 271.
Hankel, H., 5, 460.
Hannequin, A., 165.
Hansen, P. A., 272.
Happner, V., 203.
Hardcastle, Miss F., 497.
Harkness, J., 498.
Harnack, A., 477.
Hassar, 500.
Haton de la Goupillière, J. N., 144, 148, 157.
Hauck, G., 258, 260.
Hausen, Ch. A., 221.
Haussner, R., 294.
Hautsch, H., 430.
Havet, J., 268.
Hawksbee, Fr., 221.
Heath, T. L., 288, 521.
Heiberg, J. L., 13, 14, 21, 23, 24, 44—46, 49, 51, 267, 279, 284, 288, 290, 302, 307, 314, 526, 528.
Heilbronner, J. C., 242.
Heilermann, H., 531.
Heinrich, G., 90, 526, 529.
Heinsius, W., 241, 242.
Heller, A., 223, 288, 294.
Helm, G., 289, 291.
Helmholtz, H. von, 191, 192, 195, 222, 291, 292, 529, 531.
Henri III, 510.
Henricus Amicus, 404.
Henry, Ch., 503.
Hensel, Fanny, 139, 140.
Hensel, K., 259.
Hensel, S., 140.
Heriger von Lobbes, 287.
Herigone, P., 67.
Hermann, J., 72, 73, 211.
Hermannus Contractus, 287.
Hermite, Ch., 455, 486, 487, 491.
Heron, 13, 14, 28, 29, 35, 36, 60—62, 234, 289, 290, 297—320, 354, 528, 534.
Herschel, W., 287.
Hertz, H., 222, 259, 291, 529.
Herwagen, J., 51.
Hess, E., 535.
Hesse, O., 521.
Heun, K., 259.
Heuraet, H. van, 235.
Heyfelder, V., 531.
Hicks, W. M., 143, 157.
Hiern, W. Ph., 143, 157.
Hilbert, D., 258, 259, 487, 489, 490, 495.
Hill, G. W., 262.
Hill, T., 145, 150, 154, 157.
Hiller, E., 11, 308.
Hipparchos, 21, 22, 24, 26, 27, 308, 528.
Hippias, 234, 279.
Hippokrates von Chios, 234, 266.
Hoefer, F., 5, 236, 278.
Hoffmann, L., 143, 158.
Holst, E., 174, 193, 202, 203.
Homersham-Cox, 455.
Honein ben Isak, 499.
Hooke, R., 93, 94.
l'Hôpital, G. F. A. de, 207, 209, 514, 518.
Hoppe, E., 221, 289, 291.
Hoppe, R., 145, 154, 533.
Horn, J., 259, 533.
Horta, F. de, 532.
Hudde, J., 208.
Hugo de Saint-Victor, 46.
Hugo Physicus, 269.
Hulsius, L., 523.
Hultsch, F., 8, 13, 51, 212, 284, 288, 297, 299—301, 304, 308—310, 312—316, 320, 343, 521, 526, 528.
Hunrath, K., 288.
Hurwitz, A., 164, 189.
Husquin de Rheville, 147, 148, 157.
Huygens, Chr., 76, 78—80, 84, 93—108, 209, 235, 287, 289, 291, 421, 427, 430, 526, 529, 530.
Hyginus, 315, 316, 395.
Hypsikles, 234, 279.

Ibn abi Usaibia, 285.
Ibn Albanna, 500, 501.
Ibn al-Haitam, 274, 500.
Ibn Chaldun, 500.
Ibn Jûnos, 283.
Ideler, Ch. L., 206, 302, 308.
Illigens, E., 161.
Initius Algebras, 505, 511, 512.
Isak ben Honein, 499.
Isak ben Salomo, 275, 290.
Isidoros von Alexandria, 267.
Isidorus von Sevilla, 48.
Issaly, 489.
Iwanow, A., 536.

Jäck, H. J., 39, 45.
Jacobi, C. G. J., 120, 131, 138—140, 177, 178, 189, 233, 235, 262.
Jacquier, F., 434.
Jahib fil. Albumazaris, 348.
Jahn, Fr. L., 207, 214.
Jahnke, E., 489.
Jakob ben Machir, 347.
Jakob von Speier, 506.
Jamblichos, 11, 234, 266.
Jamet, V., 489.
Jan, L. von, 39.

Janssen van Raay, W. H. L., 162, 164, 526, 530.
Jerrard, G. B., 518.
Joachimsthal, F., 206.
Job filius Salomonis, 274, 275.
Jöcher, Ch. J., 273.
Johann von Gmunden, 235, 346.
Johannes Danck de Saxonia, 390.
Johannes de Cypro, 504.
Johannes de Lineriis, 381, 390—413.
Johannes de Muris, 390, 413—416.
Jordan, C., 167, 452.
Jordanus Nemorarius, 51, 235, 279, 354, 417—419.
Josephus Hispanus, 269.
Josephus Rhacendytes, 269.
Jöstel, M., 271.
Jovianus, J., siehe Pontanus.
Julius Africanus, 308, 317.
Julius Capitolinus, 303.
Jürgens, E., 495.

Kadizadeh, 500.
Kant, I., 531.
Kapteyn, W., 526, 527.
Kästner, A. G., 60, 77, 242, 273, 277, 503.
Kayser, Ch. G., 241.
Keill, J., 152, 157.
Kekulé, F. A., 228.
Keppler, J., 235, 273, 287, 289, 291, 529.
Killing, W., 162, 164, 189.
Kimura, S., 263.
Kircher, A., 523.
Kirchhoff, G., 291, 529.
Klaproth, J., 522, 523.
Klein, F., 167, 169, 171, 174—176, 178, 183, 189, 195, 200, 203, 259, 495, 526, 530, 534.
Kleomedes, 302.
Kleoxenos, 308.
Klügel, G. S., 439, 440, 517.
Kluyver, J. C., 526, 527.
Knauff, F., 526, 528.
Kneser, A., 495.
Knibbs, G. H., 536.
Knott, C. G., 526, 530.
Knouffte, J., 508.
Koch, H. von, 488.
Kochansky, A., 512.
Köchly, H., 300, 301.
Köhler, C., 526, 532.
König, J., 464.
König, Sam., 216.
Koenigs, G., 152, 199.
Königsberger, L., 173, 204.
Konow, S., 290.
Koppernicus, N., 235, 283, 287, 288, 291, 509, 529.
Korteweg, D. J., 94, 95, 97, 526, 527, 530.
Kosta ben Luka, 28.
Koteljnikoff, A. P., 526, 530.
Kötter, E., 495.
Kötter, Fr., 533.
Kövesligethy, R. von, 536.
Kowalevski, Sophie, 278, 292, 490, 491.
Krafftshofer, U., 507.
Krause, K. C. F., 142, 143, 147, 149, 151, 157.
Kresa, J., 71, 72.
Krohn, F., 298, 305.
Kroll, W., 8, 9.
Kronecker, L., 235, 452, 484, 488, 521.
Krüger, J. G., 221.
Krumbacher, K., 268.
Ktesibios, 32.
Kucharzewski, F., 60, 524, 526, 529.
Kugler, F. X., 526, 527.
Kummer, E. E., 137, 175, 189, 235.
Küpper, K. J., 534.
Kürschák, J., 515.
Kutta, W. M., 284, 527.
Lachmann, K., 39, 40, 43, 44, 47, 48, 297, 315, 395.
Lacroix, S. F., 144, 145, 157, 439, 440, 451, 517.
Lagarde, P. de, 520.
Lagny, Th. F. de, 73.
Lagrange, J. L., 15, 19, 118, 148, 177, 206, 207, 210, 230, 235, 287, 291, 440—451, 453, 455, 457—461, 464, 466, 467, 517, 525, 529, 530.
Laisant, C. A., 7, 147, 150, 157, 246, 261, 264, 487, 496, 526, 532.
Lalanne, L., 96.
Lalouvère, A., 521.
Lamarle, E., 474, 475.
Lambert, J. H., 291.
Lampe, E., 129, 142, 289, 292, 421, 485, 526, 527, 531.
Landen, J., 235.
Landerbeck, N., 152, 157.
Lange, J., 130, 131, 141, 289, 292, 526, 531.
Lange, L., 220.
Lansberg, Ph. van, 271.
Laplace, P. S., 109, 116, 117, 119, 120, 121, 126, 128, 235, 287, 442, 452, 458.
Larmor, J., 487.
Laska, W., 536.
Laurent, H., 468.
Laurent, P. A., 476.
Laussedat, A., 60, 265, 521—524, 526, 527.
Leau, L., 489.
Lebon, E., 526, 527.
Leeuwenhoek, A. van, 95.
Leffler, Anna Charlotta, 490, 491.
Legendre, A. M., 117, 120, 121, 148, 155, 234, 235, 275, 287, 517, 530.
Legrand, A., 15, 16.
Leibniz, G. W., 70, 90, 97—99, 109—112, 125, 205

—213, 215, 216, 235, 287, 291, 421—432, 434—437, 513, 517, 518, 525, 526, 530.
Leitschuh, F., 41, 42.
Leitzmann, H., 535.
Lelewel, J., 285.
Lemaitre, J., 531.
Leméray, E. M., 261, 496.
Lemoine, E., 261, 496.
Leo de Balneolis, siehe Levi ben Gerson.
Leonardo Cremonese, 354.
Le Paige, C., 232, 509.
Lerch, M., 258, 463.
Le Roy, E., 163.
Leseur, T., 434.
Lessing, G. E., 213.
Leverrier, U. J., 288.
Levi ben Gerson, 282, 372—381, 391, 506.
Levi-Civita, T., 161, 164, 487.
Lévy, L., 197.
Lévy, M., 289, 292, 526, 531.
Lewinstein, G., 228.
Lhardy, 210.
Lhuilier, S., 207, 440, 535.
Libri, G., 207, 242, 274, 277, 321, 322, 508, 509, 522, 523.
Lichtenberg, C. G., 291.
Lie, S., 149, 159, 166—204, 235, 258, 259, 275, 279, 292, 484, 532.
Lie-Birch, Anna, 168.
Lieblein, J. D. C., 200.
Ligin, V. N., 534.
Lindelöf, L. L., 487.
Lindemann, F., 195, 289, 290, 487.
Ling, G. H., 533.
Liouville, J., 185, 186, 248, 473, 474.
Lipschitz, R., 530.
Lobatchewsky, N. I., 202, 233, 261, 289, 292, 526, 530.
Locke, J., 212.
Loewy, M., 289, 292.
Lommel, E. von, 532.
Lorenz, H., 533.
Lorenz, O., 241.
Lorey, W., 163.
Loria, G., 2, 75, 288, 289, 293, 294, 526, 528, 529, 531, 532.
Loubet, E., 492.
Lovett, E. O., 263, 489.
Lupitus von Barcelona, 287.
Lüroth, J., 449.
Luther, M., 214.

Maass, E., 289, 290.
Macaulay, F. S., 526, 532.
Maccaferri, E., 162.
Macfarlane, A., 263, 264, 295, 489, 526, 530, 532.
Mach, E., 289, 290, 526, 527.
Machovec, F., 151, 158.
Maclaurin, C., 16, 152, 158, 207, 235, 438, 442, 445, 451, 454, 458, 461, 462, 468, 474, 475, 520.
Mac Mahon, P. A., 496—498.
Macrobius, 41.
Magiotti, R., 77.
Maier, F. Ch., 71—73.
Maillet, E., 261, 488.
Maimonides, 500.
Mallet, A. M., 523.
Malus, E. L., 198, 288.
Mangoldt, H. von, 495.
Manitius, K., 26.
Mannheim, A., 145—147, 158.
Mansfeld, A. von, 214.
Mansfeld, G. von, 214.
Mansion, P., 144, 158, 232, 288, 469, 517, 526, 527, 531.
Marie, M., 5.
Mariotte, E., 288.
Mariston, 31.
Markoff, A., 147, 158, 457, 536.
Marloh, E., 440.
Marotte, F., 162, 163.
Marre, A., 294.
Marsiliensis, siehe Guilelmus Anglicus.
Martianus Capella, 41.
Martin, A., 488, 489.
Martin, Th. H., 28, 267, 522.
Martini, E., 309.
Martinus de Zorawica, 522.
Marum, M. van, 291.
Mascart, J., 527.
Maser, H., 201, 517.
Maseres, F., 91.
Maupin, G., 289, 290, 526, 529.
Maurer, L., 201.
Maurolycus, F., 64.
Maximilian II, 213, 224.
Maxwell, Cl., 220, 222.
Mayer, A., 168, 171, 177—179, 183, 198.
Mayer, Robert, 292.
Mayhoff, K., 306.
Medici, S., 510.
Mehmke, R., 258, 259, 526, 527.
Meinsma, K. O., 93.
Melanchton, Ph., 214.
Menaichmos, 234, 279.
Mendelsohn, F., 139, 140.
Menelaos, 20, 21, 64, 234, 281, 282.
Mercator, N., 70.
Merckel, C., 289, 290.
Mersenne, M., 97, 511.
Messahala, 353.
Metellus Sequanus, 41, 42.
Metius, A., 279.
Metrodoros, 267.
Meusnier, J. B. M. Ch., 199, 200.
Meyer, E., 533.
Meyer, Fr., 532.
Meyer, W. Fr., 4, 288, 289, 292, 488, 495, 526, 531, 534.
Migne, J. P., 46.

[illegible]

Nal [illegible], 285.
Nagy, A., 288.
Nadine, C. A., 285, 286, 499, 526, 528.
Nanson, E., 152, 158.

[illegible]

Oldenburg, [illegible]
Olivier, [illegible]
Olbers, [illegible]
Olympiodorus [illegible]

[illegible]

Peter, [illegible]
Petrus de Dacia, [illegible]

Peurbach, G. von, 235, 338, 505, 528.
Peyrard, F., 16.
Pfaff, J. F., 170, 176, 177, 179, 180, 199, 200, 535.
Pfleiderer, Ch. F., 440.
Phillips, Th., 502.
Philo . . ., siehe Filo . . .
Picard, E., 195, 477.
Picard, J., 60, 62, 523.
Pick, G., 526, 531.
Pierpont, J., 289, 292, 526, 532.
Pincherle, S., 164, 526, 531.
Pinto, L., 526, 531.
Pirondini, G., 144, 147, 153, 154, 158.
Pisano, Leonardo, 207, 235, 274, 322, 328, 329, 336, 337, 501, 502, 516, 521.
Pistelli, H., 11.
Pitiscus, B., 235, 270, 271, 277, 278.
Planudes, 211, 268.
Platon, 8—11, 234, 266, 267, 279, 528.
Platone Tiburtino, 285, 321, 322, 330, 502, 521.
Plinius, 41, 267, 306—308.
Plücker, J., 147, 167, 497.
Plutarchos, 302, 307.
Pockels, Fr., 533.
Poggendorff, J. C., 223, 244, 428, 512.
Pohlke, K., 137.
Poincaré, H., 186, 199, 246, 262, 264, 295, 486, 487, 491, 492, 495.
Poinsot, L., 535.
Poisson, S. D., 109, 117—120, 122, 126, 128, 148, 178, 235.
Polybios, 302, 308.
Poncelet, J. V., 167, 287.
Pontanus, J. J., 353, 354.
Poppe, H. M., 5.
Poseidonios, 298, 302, 309.
Praetorius, J., 523.
Praxidamas, 298.
Price, B., 532.
Pringsheim, A., 165, 274, 433, 459, 516.
Profatius, siehe Jakob ben Machir.
Proklos, 8—12, 234, 267, 308, 309.
Prony, G. C. F. M. R. de, 452.
Psellos, 269.
Ptaszycki, J., 487.
Ptolemaios, 20—27, 234, 281, 285, 302, 307, 308, 323, 348, 354, 373.
Puiseux, V., 144, 147, 158.
Purkiss, H. J., 143, 152, 158.
Purser, F., 153, 158.
Pyrrhos, 301.
Pythagoras, 9, 234, 415.

Qadisadeh, siehe Kadizadeh.
Quérard, J. M., 241, 242.

Rabut, C., 151, 158.
Radolf von Lüttich, 524.
Rados, G., 487, 488.
Ragimbold von Köln, 524.
Rajewski, J., 533.
Ramorino, A., 289, 291.
Ramus, P., 228, 277, 511.
Ratdolt, E., 507.
Rausenberger, O., 217.
Razzaboni, C., 292.
Rebière, A., 287—290, 292, 293, 526, 529.
Regiomontanus, J., 64, 235, 279, 282, 283, 346, 380, 504—507.
Regnault, V., 288.
Reiff, R., 438.
Renan, E., 28.
Retali, V., 144, 158.
Reye, Th., 174.
Rheticus, G. J., 235, 271, 283.
Ribaucour, A., 146, 151, 295.
Riccardi, P., 241, 277, 507, 508, 510, 512, 526, 527.
Riccati, J. F., 188.
Ricci, M., 75, 78.
Richter, M., 526, 530.
Riecke, E., 526, 530.
Riehm, G., 526, 532.
Riemann, B., 233, 235, 258, 531.
Ripert, L., 496.
Ritter, F., 270, 510.
Roberts, S. O., 532.
Robertus Anglicus, 522, 523.
Robertus Castrensis, 273, 274, 499, 520, 528.
Robertus Linconiensis, 54, 55, 59, 526, 528.
Roberval, G. P. de, 77, 235, 511.
Roche, E., 453, 454, 469.
Röder, Chr., 506.
Roe, E. D., 533.
Rogg, J., 240.
Rogge, H. C., 93.
Rolle, M., 454, 513.
Roomen, A. van, 65, 67, 270, 279, 510.
Rose, V., 299, 300, 303.
Rosenberger, F., 4, 217—224, 288, 292, 532.
Rothmann, Chr., 391.
Rouché, E., 455.
Rücker, A. W., 254.
Rudel, K., 260.
Rudio, F., 288.
Rudorff, A., 297.
Ruffini, F. P., 154, 158.
Rühlmann, M., 524.
Ruoss, H., 153, 158.
Ruska, J., 284.
Rüstow, W., 300.
Rutter (nicht Ritter), E., 145, 156.

Saalschütz, L., 289, 290.
Sacchi, G., 152, 153, 158.
Sacrobosco, J., 278, 502, 521.
Sahib al Shorta (=Abraham bar Chijja), 321.
Salhani, 38.
Salmon, G., 489.

Salomo, 33.
Sars, G. O., 170, 203.
Satchell, T., 60.
Saussure, R. de, 147, 159.
Savasorda, siehe Abraham bar Chijja.
Schäffer, K. J. H., 293.
Schapira, H., 532.
Scheffers, G., 149, 159, 171, 194—196, 198, 201, 275.
Schelhammer, G. Ch., 422.
Schepp, A., 164.
Schiaparelli, G., 234.
Schilling, C., 289, 292, 526, 530.
Schimpf, E., 258.
Schläfli, L., 134, 138—140.
Schlegel, V., 289, 292, 526, 530.
Schlömilch, O., 453, 454, 456, 469.
Schmid, Th., 533.
Schmidt, Fr., 289, 292, 526, 530.
Schmidt, W., 13, 29, 289, 290, 297, 299, 319, 526, 528, 534.
Schneider, J. G., 310.
Schober, K., 532.
Schöll, R., 8.
Schöne, H., 13, 307, 311, 316, 319.
Schöne, R., 300, 302.
Schonerus, A., 505.
Schönflies, A., 160—163, 165, 259.
Schooten, F. van, 67, 235.
Schorr, D., 526, 529.
Schott, G., 60, 62, 63, 523.
Schotten, H., 260.
Schoute, P. H., 495, 526, 527, 531.
Schröder, E., 163, 164.
Schröter, H., 133.
Schubert, H., 535.
Schukowski, N. E., 289, 292.
Schülke, A., 258, 259.
Schulz, 275.
Schum, W., 347.
Schur, F., 195, 530.
Schwalbe, B., 296.
Schwenter, D., 523.
Scott, Charlotte A., 487.
Sebert, H., 496.
Sédillot, J. J., 60, 522.
Sédillot, L. A., 60, 522.
Sellew, G. T., 498.
Seneca, 302, 310.
Serenai, L., 75, 76, 79.
Serenos, 234, 267.
Serret, J. A., 275, 455.
Servais, Cl., 147, 159.
Sexe, S. A, 174.
Sharp, C., 144, 150, 156.
Simart, G., 144, 157.
Simon, M., 436.
Simonot, 487.
Simplikios, 266, 267, 307.
Simpson, Th., 90, 92, 529.
Sintzoff, D., 526, 530—532.
Sludskij, Th. A., 292.
Sluse, R. F. de, 232, 235.
Smith, D. E., 519, 520, 526, 527, 529, 535.
Snellius, R., 235, 272, 283, 284, 521, 529.
Sobotka, J., 151, 159.
Sohncke, L. A., 240.
Sokrates, 48, 266.
Somigliana, C., 488, 489, 526, 531.
Sommer, J., 259.
Sommerfeld, A., 259, 293, 497, 534.
Sonin, N., 536.
Sosigenes, 298.
Spengel, L., 266.
Speusippos, 234.
Spitzer, S., 152, 159.
Spole, A., 512.
Stäckel, P., 109, 128, 197, 241, 275, 288, 289, 291, 292, 495, 517, 526, 527, 530, 531.
Staigmüller, H., 288, 526, 528.
Stampa, 487.
Stampioen, J., 67.
Starkoff, A., 151, 159.
Stegemann, W., 527, 531.
Steiner, J., 129—141, 180, 292, 531, 536.
Steinitz, E., 495.
Steinschneider, M., 274, 282, 288—290, 321, 347, 499, 501, 526, 528.
Steinweller, F., 289.
Stephanos, C., 488, 497.
Sterne, C., 526, 529.
Stevin, S., 15, 17, 19, 235, 271, 510.
Stifel, M., 228, 235, 279, 291, 520.
Stirling, J., 498.
Stokes, G. J., 263.
Stolz, O., 449, 453, 454, 465, 470, 476, 477, 535.
Storm, G., 203.
Strabon, 267.
Strassmaier, J., 527.
Stringham, I., 262, 487, 489.
Strumieński, O., 62.
Studnicka, F. J., 289, 291.
Study, E., 202, 259, 261.
Sturm, A., 288.
Sturm, J. C., 69.
Sucharda, A., 145, 159.
Suidas, 13, 14.
Suisset, R., 503, 504, 515, 516.
Suter, H., 5, 270, 286, 288—290, 294, 499—501, 526, 528.
Swinden, J. H. van, 530.
Sylow, L., 170, 200, 202.
Sylvester, J. J., 143, 150, 153, 159, 192, 235, 294, 531.
Symmer, R., 221.
Syrianus, 267.
Szinnyei, J., 241.

Tabit ben Kurra, 285.
Tait, P. G., 526, 530.
Tannery, J., 164, 165, 487.
Tannery, P., 13, 25, 39, 162, 265—269, 279, 287,

288, 309, 314, 317, 319, 414, 502—504, 507—511, 514, 524, 526—530.
Tanstetter, G., 505.
Tarry, G., 496.
Tartaglia, N., 509.
Taylor, Br., 433—440, 443, 444, 446—448, 450—452, 454—461, 463—465, 467, 469, 470, 476, 477, 479, 489, 517, 520.
Taylor, C., 526, 529.
Tchebycheff, P., 292, 531, 536.
Teixeira, F. G., 294, 526, 532.
Tellkampf, A., 143, 159.
Terquem, O., 1.
Thales, 234.
Theaitetos, 234, 266, 279.
Theodoros von Cyrene, 266.
Theodosios III, 285.
Theodosios von Tripolis, 13, 14, 234.
Theon von Alexandria, 307, 308, 314, 320.
Theon von Smyrna, 11, 12, 234, 308.
Thévenot, M., 523.
Thibaut, G., 289, 290.
Thiel, M., 301.
Thiele, G., 528.
Thomae, J., 162, 477.
Thomas, 423.
Thompson, R. C., 526, 528.
Thomson (Kelvin), W., 222, 531.
Thurot, Ch., 16.
Thymaridas, 234.
Tichomandritzky, M., 487, 489.
Tilly, J. de, 195, 223.
Timmermans, A., 148, 159.
Timtchenko, I., 128, 289—291, 504, 511, 516.
Tittel, 308, 309.
Torricelli, E., 75—89, 511, 529.
Tortolini, B., 152, 159.
Trajanus, 310.
Transon, A., 147, 159.
Traumüller, F., 422, 428, 430, 526, 527.
Trebra, F. W. H. von, 424.
Trendelenburg, A., 206.
Treutlein, P., 417.
Troels-Lund, 289, 290.
Tropke, J., 526, 527.
Trueblood, Miss M. E., 498.
Truel, H. D., 125.
Tschirnhaus, E. von, 94, 210, 211, 215, 513, 518.
Tucker, R., 145, 159.

Uberti, L. A., 508.
Ulug Beg, 338.
Unger, E. S., 521.
Unger, F. A., 288.
Urbanitzsky, A. von, 221.
Ussing, J. L., 298.
Uylenbroek, P. J., 97.

Vacca, G., 289, 291.
Vaes, F. J., 488, 489.
Vailati, G., 289.
Valentin, G., 237, 275, 526, 530, 532.
Vallée Poussin, Ch. de la, 232, 233.
Vallès, F., 125.
Valson, C. A., 109, 123, 470.
Van den Berg, F. J., 93.
Vandermonde, A. Th., 235.
Vargas, J. de, 294.
Varicak, V., 293.
Varignon, P., 110, 146, 211.
Varro, 287.
Vaux, Carra de, 28, 298, 302, 526, 528.
Venable, Ch. S., 534.
Venturi, J. B., 297.
Veronese, G., 162—164, 195, 488, 489.
Vessiot, E., 196.
Victorius, 287.
Viète, F., 65, 235, 270, 279, 283, 287, 510.
Vincent, A. J. H., 62, 212, 297, 303, 306, 307, 315, 316, 522.
Vincent, G., 163.
Vinci, L. da, 290.
Vitruvius Pollio, 60—
297—310, 318, 523.
Vitruvius Rufus, 41,
318.
Vivanti, G., 160—162, 16
289, 292, 462, 526, 53
Viviani, V., 76, 78.
Volder, B. de, 95.
Volkmann, P., 289, 291.
Vollheim, Fr., 213.
Volpi, R., 162.
Volta, A., 288.
Volterra, V., 264, 487.
Voss, A., 433.
Vossius, G. J., 271.

Wall, 428.
Wallis, J., 69, 70, 211, 27
291, 518.
Walton, W., 143, 159.
Walz, Chr., 269.
Wangerin, A., 294, 495.
Wappler, E., 225, 288—29
519, 526, 528, 532.
Waring, E., 235.
Wäschke, H., 211.
Wassilieff, A., 202, 289, 2
526, 531.
Watt, J., 288.
Weber, C. M. von, 135.
Weber, E. von, 259, 53
Weber, H., 258, 260.
Weber, W., 227.
Weerth, O., 146.
Weierstrass, K., 235,
470, 490, 491.
Weifsenborn, H., 60, 2
Wenrich, J. G., 499.
Wentworth, R., 509.
Werneburg, J. F. Ch.,
—152, 159.
Werner, J., 271, 283.
Wertheim, G., 273, 274,
—290, 417, 505, 520,
527.