Die Physik der bewegten materie und die relativitätsth...

Max Bernhard Weinstein

Alexander Zivek

Die Physik der bewegten Materie

und die

Relativitätstheorie

von

Dr. Max B. Weinstein

Leipzig 1913
Verlag von Johann Ambrosius Barth

Druck
der Spamerschen
Buchdruckerei in Leipzig

Dem Andenken

Hermann Minkowskis

Denn was für Viele genügt, hat er als Einer getan
(Kallinos)

Vorwort.

Es wäre ein leichtes gewesen, zu den schon vorhandenen Theorien in der Physik der bewegten Materie eine neue Theorie hinzuzufügen. Allein wir leiden bereits an einem Überreichtum an Theorien, die den Zustand unserer Wissenschaft höchst verworren gestaltet haben, und es schien mir verdienstlicher, das Vorhandene zu sichten und zu untersuchen als es an Umfang zu vermehren. Gleichwohl wird der Leser nicht weniges finden, das hier zum ersten Male gesagt ist. Ich habe die Physik der bewegten Materie und die Relativitätslehre, die zu ihr gehört, so sorgfältig als mir möglich war, behandeln wollen. Mitteilung der Tatsachen und Theorien ist der eine Zweck meines Buches, eingehende Kritik der Versuchsergebnisse und der Grundlehren der andere gleichwichtige Zweck. Auf Klarheit der Kenntnisse und Erkenntnisse geht das Buch aus. Ich bin darum auch der Einseitigkeit und Voreingenommenheit möglichst ausgewichen. Die modernen und modernsten Lehren sind behandelt, aber auch diejenigen Lehren, die mancher Neueste schon als „abgetan" erachtet, obwohl sie lange das Fundament unserer Wissenschaft gebildet haben und von den größten Physikern und Mathematikern begründet und bearbeitet sind. Noch befinden wir uns in unserer Wissenschaft nicht entfernt so weit, daß wir das Frühere über Bord werfen dürften. Und der Einsichtige weiß, daß, selbst wenn er die Undulationstheorie und die Maxwell-Hertzsche Elektrodynamik als unsere Wissenschaft nicht mehr erschöpfend ansehen muß, er doch ihre Methode, ihren Vorstellungskreis und den größten Teil ihrer Ergebnisse nicht entbehren kann. In solchem Sinne haben diese Lehren im vorliegenden Buche Berücksichtigung gefunden. Auch dient man seiner Wissenschaft schlecht, wenn man sie wie von gestern behandelt. Wie oft sind wir schon genötigt worden, alte Lehren wieder hervorzusuchen, gleich den Kauniern, die ihre von ihnen vertriebenen Götter wieder einholen mußten, weil die neuen, die sie ersetzen sollten, das von ihnen Erwartete nicht leisteten. Ich will nicht so weit gehen, zu sagen, daß unsere Wissenschaft umkehren müsse, wiewohl nicht wenige bedeutende Forscher schon der Ansicht sind, daß sie durch die modernen Lehren in eine Sackgasse geraten sei, aus der sie nicht anders als durch Umkehr herauskäme. Wäre ich dieser Ansicht, so hätte ich dieses Buch, das ja den jetzigen Lehren wesentlich dient, nicht schreiben können, da ein negatives Verdikt etwas höchst Unerfreuliches ist. Aber wir übertreiben gegenwärtig die Alleinseligmachung der neuen Lehren in der Tat gar zu sehr. Es hat sich zu ihren Gunsten eine Unduldsamkeit eingestellt, die fast den Fortschritt der Wissenschaft hemmt, indem sie diktatorisch nur das zuläßt, was auf dem Boden dieser neuen Lehren steht. Sind wir dazu berechtigt? Ich glaube, der Leser wird aus meinem Buche ersehen, daß die modernen Lehren zwar sehr bedeutend sind, aber doch nicht so sicher und umfassend wie so oft behauptet wird. Auch bin ich nicht der einzige, der darüber klagen muß, daß so viele der modernen Theorien in ihren Grundanlagen einfach nicht zu durchschauen sind. Ich meine nicht, weil sie überhaupt eine neue Anschauung lehren, sondern weil sie Behauptung auf Behauptung aufstellen, deren Grund man nicht einsehen kann und deren Begründung mit allzu großer Vornehmheit fortgelassen ist. Wer sich in unsere jetzige Wissenschaft vertieft, stößt auf Schritt und Tritt voll Ärger auf Stellen, wo er Beschränktheit seiner Einsicht befürchten muß. Es ist mir darum auch ganz unmöglich gewesen, auch abgesehen von dem Wunsche, die Zeit auch produktiv, nicht bloß reproduktiv zu verwenden, allen Theorien nachzugehen, es mußte mir genügen, die führenden Lehren darzustellen und zu zerlegen. Einen Hauptwert habe ich auf die Verdeutlichung dieser Lehren gelegt und so beispielsweise Minkowskis geniale Leistung, der ihr Urheber in seiner prägnanten Kürze eine unsäglich schwer zu verstehende mathematische Form gegeben hat, auf ein menschliches Niveau zu versetzen gesucht. Ich hoffe, daß man mir das Dank wissen wird. Und es war eine anstrengende Arbeit, die des Rechnens und Überlegens unendlich müde machte.

Erscheinung und Versuch sind durchweg mit der Theorie verwoben. Leider steht es auch hier so, daß unsere Erfahrungen noch als höchst mangelhaft sich erweisen, daß selbst das Erkundete nicht als hinreichend sicher bezeichnet werden kann. Die enorme Schwierigkeit der Versuche und die großen Mittel, die sie erfordern, haben uns über einzelne Ergebnisse einfachster Fälle, die noch dazu nicht einmal eindeutig genug erklärt werden können, noch nicht hinauskommen lassen. Noch ist uns das elektrodynamische Feld unter dem Einfluß von Bewegungen experimentell so gut wie unbekannt (vgl. S. 262 dieses Buches), die Versuche Rowlands, Röntgens, Eichenwalds, Wilsons u. a. haben nicht einmal die einfachsten Fälle vollständig erschöpfen und sichern können. Es wäre ein außerordentliches Verdienst, das sich unsere an Mitteln und geschulten Arbeitskräften so reich ausgestattete Physikalisch-Technische Reichsanstalt um die Wissenschaft erwerben würde, wenn sie sich der Aufgabe, das elektrodynamische Feld unter dem Einfluß von Bewegungen nach allen Richtungen — ich meine das geradezu örtlich — zu untersuchen unterzöge. Auch der Michelsonsche Versuch harrt im Grunde noch seiner wirklichen Erledigung (S. 115ff. dieses Buches).

Wegen des genaueren Inhalts meines Buches muß ich auf das Inhaltsverzeichnis verweisen, aus dem auch die ganze Anlage erhellen wird. Ich habe das Buch ursprünglich nur als Relativitätstheorie schreiben wollen, mußte jedoch bald einsehen, daß es so den Zweck nicht würde erfüllen können, den ich mir vorgesetzt hatte. Auch bietet hinsichtlich des rein Mathematischen das sehr gute Buch von Laue schon vieles über die engere Relativitätslehre. Dem Zweck einer kritischen Darstellung konnte ich nur durch Einbeziehung der ganzen Physik der bewegten Materie genügen, was auch die Darstellung der Lehren der kinetischen Elektrodynamik bedingte. Dadurch hoffe ich dem Buche auch einen dauernderen und weiteren Wert verliehen zu haben, namentlich auch bei denjenigen, welche auf die Relativitätslehre nicht schwören wollen und ihr ein baldiges Ende prophezeien und wünschen. Was ich selbst über diese Lehre denke, ist in dem Buche vollständig gesagt und begründet.

Zu der Widmung an das Andenken Minkowskis, dessen grandiose Theorie, auch abgesehen von wandelbaren Anschauungen, von unvergänglichem Wert bleibt, hat mir die Witwe in der liebenswürdigsten Weise die Erlaubnis erteilt.

Ein Register wird die Brauchbarkeit des Buches erhöhen. Dem Verleger muß ich wegen der Aufopferung, mit der er den so schwierigen Satz ermöglicht hat, besonderen Dank sagen.

Charlottenburg, im Juni 1913.

Weinstein.

Inhaltsverzeichnis.

Zweiter Teil.

Die weitere Relativitätstheorie.

Vorbemerkung.

Das Buch zerfällt in zwei Teile. Der erste Teil behandelt die Theorien der optischen und elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Stoffen vom Standpunkte der Lehren der Optik und der Elektrodynamik, der zweite das damit zusammenhängende Relativitätsprinzip. Mit zehn Erscheinungen und Versuchsergebnissen werden wir es vor allem zu tun haben. Vier davon liegen auf optischem Gebiete: die Dopplersche Erscheinung, die Bradleysche Aberration, die Fresnel-Fizeausche Erscheinung, das Michelsonsche Versuchsergebnis. Die anderen sechs betreffen elektrodynamische Vorgänge: die Rowlandsche Erscheinung, die Röntgensche Erscheinung, das Versuchsergebnis von Des Coudres, das von Noble und Trouton, das von Blondlot und das von Wilson. Obwohl man nunmehr, seit den grundlegenden Arbeiten von Maxwell, Helmholtz und Hertz, zwischen Optik und Elektrodynamik nicht mehr unterscheidet, hat es sich doch als zweckmäßig erwiesen, im ersten Teil zuerst die optischen Vorgänge für sich zu untersuchen und erst im zweiten Abschnitt dieses Teiles sie mit den elektrodynamischen zu verbinden. Naturgemäß kommt damit im ersten Abschnitt auch die klassische Undulationstheorie zu ihrem Recht. Zwar wohnt dieser Theorie nicht mehr die Bedeutung bei, die sie früher als eine der vollendetsten Lehren der Physik besessen hat. Allein viele ihrer Ergebnisse sind noch von Wert und ohne weiteres in das neue Gebäude der Optik zu übertragen. Auch dienen ihre Entwicklungen zur Vorbereitung für die bei weitem schwierigeren und weniger übersichtlichen Darstellungen aus den Theorien der Elektrodynamik. Im zweiten Abschnitt ist dann versucht, eine kritische Übersicht über diese Theorien der Elektrodynamik mit Bezug auf die Gesamtheit aller genannten Erscheinungen und Ergebnisse herzustellen. Daß ich mich dabei auf die führenden Theorien habe beschränken müssen, bedarf kaum der Erwähnung. Im zweiten Teil, der das Relativitätsprinzip im engeren Sinne behandelt, bin ich wie im ersten Teil historisch vorgegangen. Das ist verhältnismäßig einfach durchzuführen gewesen, weil es sich im Grunde nur um zwei Theorien handelt: die Lorentz-Einsteinsche und die Minkowskische.

Erster Teil.

Optische und elektromagnetische Erscheinungen unter dem Einfluß von Bewegungen.

Erster Abschnitt.

I. Bewegung von Körpern im Äther und Bewegung des Äthers.

Wir behandeln erst diejenigen Erscheinungen in der Lichtverbreitung, welche sich aus der Bewegung von Körpern im Äther ergeben, dabei setzen wir voraus, daß durch diese Bewegung der außerhalb der Körper befindliche Äther in keiner Weise beeinflußt wird. Der innerhalb der Körper vorhandene Äther soll in diese Bewegung ganz oder zu einem Teil einbezogen sein können. Mit diesen Annahmen hat man vor allem, wenn wir vom einfachen zum weniger einfachen fortschreiten, die Dopplersche Erscheinung, die Aberration, die Fizeau-Fresnelsche Erscheinung und die Einflußlosigkeit absoluter Bewegung auf das Zusammenwirken der Strahlen zu erklären versucht, die wir einzeln betrachten wollen.

1. Die Dopplersche Erscheinung.

Sie besteht darin, daß Licht seine Farbe nach dem violetten Ende des Spektrums oder nach dem roten Ende für uns verschiebt, je nachdem wir seiner Quelle entgegenkommen oder uns von ihr entfernen. Das gleiche geschieht, wenn seine Quelle uns entgegenkommt oder von uns sich entfernt. Da zu beiden Seiten des Spektrums für uns nichtsichtbare Wellen vorhanden sind, kann auf diese Weise Licht für unsere optische Wahrnehmung ganz verschwinden, wenn die Geschwindigkeit der Annäherung oder der Entfernung hinreichend groß ist. Der Entdecker der Gesetze dieser, bei akustischen Wellen schon lange bekannten Erscheinung, Christian Doppler, hat hervorgehoben, daß es sich hier nicht sowohl um ein physikalisches als vielmehr um ein physiologisch-psychologisches Phänomen handelt, wenigstens wenn man Bewegung des Äthers innerhalb der Körper und mit ihnen, im optischen Instrument, im Auge, nicht in Rücksicht zieht. Sieht man die uns erscheinende Farbe des Lichtes als bestimmt an durch die Anzahl Wellen, die wir in bestimmter Zeit erhalten, so ist das von vornherein klar, denn indem wir der Lichtquelle entgegenkommen oder die Lichtquelle uns entgegenkommt, erhalten wir mehr Wellen, und indem wir uns von ihr entfernen oder sie sich von uns entfernt, weniger Wellen als wenn keines von beiden geschieht. Ist jedoch für die uns erscheinende Farbe des Lichtes nicht die Anzahl der Wellen entscheidend, sondern die Schwingungsdauer, so scheint die außerordentliche Geringfügigkeit dieser Dauer, die ja nur Billiontel von Sekunden in Anspruch nimmt, eine Schwierigkeit zu bieten. Indessen ist daran zu denken, daß auf einer Wellenlänge alle Phasen der Schwingung vertreten sind; kommen wir der Lichtquelle entgegen, so erhalten wir mehr Phasen in der gleichen Zeit, entfernen wir uns von ihr, so erhalten wir weniger Phasen, und entsprechend wenn die Lichtquelle uns entgegenkommt oder von uns aus sich entfernt. Alle Phasen auf der Wellenlänge bilden aber die Gesamtheit der Phasen innerhalb einer Schwingungsdauer. Und so kann man es auch hier verstehen, daß die Erscheinung eine physiologisch-psychologische ist.

Dopplers Ableitung der Gesetze dieser Erscheinung gebe ich möglichst mit seinen eigenen Worten[1]).

Fall 1. Es heiße die Geschwindigkeit, mit welcher die Wellen fortgepflanzt werden, c, ferner T die Anzahl Sekunden, die eine Welle nötig hat, um eine Wellenlänge λ zu durchlaufen, und t die Zeit, die sie braucht, um vom Beginn der letzten Wellenlänge den Beobachter zu erreichen. Man hat daher für den Fall der Annäherung sowohl wie der Entfernung des Beobachters an die oder von der Lichtquelle, wenn noch s die Geschwindigkeit der Bewegung des Beobachters in der Linie des Strahls bedeutet,

$$(1_1) \qquad \lambda = c\,T = c\,t \pm s\,t\,,$$

also

$$(1_2) \qquad t = T\,\frac{c}{c \pm s} \qquad \text{und} \qquad s = \mp\left(1 - \frac{T}{t}\right)c\,.$$

[1]) Ostwalds Klassiker Nr. 161, Abhandlungen von Christian Doppler, herausgegeben von H. A. Lorentz.

Fall 2. Wenn umgekehrt der Beobachter unbeweglich ist, die Quelle Q sich dagegen mit der Geschwindigkeit s zu oder von dem Beobachter bewegt, so hat man vor allem den Einfluß dieser Bewegung auf die der Quelle nächste Welle zu berücksichtigen, da die einzelnen entstandenen Wellen in völlig unveränderter Weise bis zum entfernten Beobachter fortgepflanzt werden. Während daher die erste Welle von Q nach A, wo ihr Endpunkt sein soll, so daß $QA = cT = \lambda$ ist, gelangt, ist die Quelle Q selbst auf dem Weg des Strahles zum Beobachter, nach einem Punkt Q' gekommen, so daß $QQ' = sT$ ist, und die zweite Welle braucht nur noch soviel Zeit, als zum Durchlaufen der entsprechenden Strecke $Q'A$ nötig ist. Man hat daher für Annäherung an den Beobachter wie für Entfernung vom Beobachter

$$(2_1) \qquad cT \mp sT = ct\,, \quad \text{oder} \quad \lambda = cT = ct \pm sT\,,$$

also

$$(2_2) \qquad t = T\,\frac{c \mp s}{c} \quad \text{und} \quad s = \mp\left(\frac{t}{T} - 1\right)c\,.$$

Aus diesen Formeln zieht Doppler die bekannten Schlüsse über die Farbe der Gestirne, wenn wir uns in bezug auf sie, oder sie sich in bezug auf uns nähern oder entfernen. So findet er, daß ein weißleuchtender Stern schon merklich grünlich erscheint, wenn er sich dem Beobachter mit 33 Meilen = 247,5 km in der Sekunde nähert, und merklich orange, wenn er mit dieser Geschwindigkeit sich von ihm entfernt. Damit ein Stern, weil seine scheinbare Wellenlänge durch die Bewegung über das eine oder andere Ende des sichtbaren Spektrums hinausgeht, für uns verschwindet, bedarf er einer Geschwindigkeit der Bewegung von (nach der neueren Berechnung von H. A. Lorentz, der für die äußersten Wellenlängen 4130 und 6550 Ångströmsche Einheiten setzt) 25 000 Meilen = 187 500 km in der Sekunde. Geschwindigkeiten von 247,5 km sind am Himmelszelt wohl bekannt, solche von 187 500 km hält Doppler nach den Beobachtungen seiner Zeit gleichfalls für erwiesen, und sogar Geschwindigkeiten, die die Lichtgeschwindigkeit erreichen oder übertreffen. Allein die neueren Ermittlungen lassen Geschwindigkeiten, die mit Bezug auf uns auch nur 600 oder 700 km übersteigen, nicht erkennen, und nach den Berechnungen William Thomsons, Lord Kelvin[1]), auch nicht annehmen. Die Beobachtung der Spektrallinien hat das Dopplersche Prinzip umgekehrt zu einem vorzüglichen Mittel, die Bewegungen am Himmelszelt zu berechnen, gestaltet, worauf aber hier nicht einzugehen ist.

Da im ersten Fall t die Zeit bedeutet, die das Licht braucht, vom Beginn der letzten Wellenlänge zum Beobachter zu gelangen, so können wir diese Zeit als „scheinbare Schwingungsdauer" bezeichnen. Entsprechendes gilt für den zweiten Fall. Schreiben wir hiernach T' für t, so wird

$$(3) \qquad \frac{T'}{T} = \frac{1}{1 \pm \frac{s}{c}} \quad \text{im ersten Fall,}$$

$$(4) \qquad \frac{T'}{T} = 1 \mp \frac{s}{c} \quad \text{im zweiten Fall.}$$

[1]) Molecular Dynamics and the theory of Light, Deutsche Ausgabe S. 447 f. Auch Weinstein: Die Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft, 1. Aufl. S. 118 ff., 2. Aufl. S. 98.

c die Lichtgeschwindigkeit wird von Doppler als Konstante angesehen; es soll also gelten, wenn die „scheinbare Wellenlänge“ λ' heißt,

$$\frac{\lambda'}{T'} = \frac{\lambda}{T} = c\,, \tag{5}$$

also bekommen wir

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{1 \pm \frac{s}{c}} \quad \text{im ersten Fall,} \tag{6}$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = 1 \mp \frac{s}{c} \quad \text{im zweiten Fall.} \tag{7}$$

Die $\pm$ Zeichen können wir durch $+$ ersetzen, wenn festgestellt wird, daß s positiv oder negativ sein soll, je nachdem in der Strahllinie eine Annäherung oder Entfernung der Körper erfolgt.

Die Ableitung Dopplers ist bis auf H. A. Lorentz' Untersuchungen im wesentlichen unverändert beibehalten worden. Dieser Forscher gewinnt Dopplers Gleichungen in verallgemeinerter Form aus einer Koordinatentransformation. In der Abhandlung XIV seiner Gesammelten Abhandlungen, Bd. I S. 343ff., verfährt er in folgender Weise für Dopplers Fall 1. Sind x, y, z die Koordinaten eines Punktes an dem sich bewegenden Körper (z. B. die Erde) mit Bezug auf ein ruhendes Koordinatensystem, so können wir die Lichtschwingungen einer ebenen Welle nach irgendeiner Richtung darstellen durch

$$\omega = A \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{c} + \delta\right), \tag{8_1}$$

wo α, β, γ die Richtungscosinus der Wellennormale bedeuten. Wir nehmen nun ein Achsensystem ξ, η, ζ, das mit dem sich bewegenden Körper fest verbunden ist. Handelt es sich nur um Translation, so sei die Geschwindigkeit des Körpers g, und wenn der Körper sich in gerader Linie bewegt, können wir die beiden Achsensysteme immer parallelbleibend und so richten, daß

$$\xi = x - gt\,, \quad \eta = y\,, \quad \zeta = z$$

ist. Hiernach wird bezogen auf das in dem sich bewegenden Körper feste Achsensystem

$$\omega = A \sin \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{g\cos\alpha}{c}\,t - \frac{\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma}{c} + \delta\right), \tag{8_2}$$

oder

$$\omega = A \sin \frac{2\pi}{T}\left(1 + \frac{g\cos\alpha}{c}\right)\left(t - \frac{\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma}{c\left(1 + \frac{g\cos\alpha}{c}\right)} + \frac{\delta}{\left(1 + \frac{g\cos\alpha}{c}\right)}\right). \tag{8_3}$$

Setzen wir

$$T' = \frac{T}{1 + \frac{g\cos\alpha}{c}}\,, \qquad c' = c\left(1 + \frac{g\cos\alpha}{c}\right), \qquad \delta' = \frac{\delta}{1 + \frac{g\cos\alpha}{c}}\,,$$

so kommt die ursprüngliche Form

$$\omega = A \sin \frac{2\pi}{T'}\left(t - \frac{\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma}{c'} + \delta'\right)$$

wieder zum Vorschein. Hiernach bedeutet T' die scheinbare Schwingungsdauer und da $g \cos \alpha = s$ ist, wird

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{1 + \frac{s}{c}},$$

s positiv genommen, wenn der Körper der Lichtquelle sich nähert, negativ, wenn das Entgegengesetzte stattfindet. Das stimmt mit der Dopplerschen Gleichung nach (3). Allein nach H. A. Lorentz ist auch eine „scheinbare Lichtgeschwindigkeit" von der wirklichen zu unterscheiden, was bei Doppler nicht geschieht, und sie ist

$$c' = c\left(1 + \frac{s}{c}\right) = c + s \,. \tag{9}$$

Hiernach wird aber die scheinbare Wellenlänge der wirklichen gleich

$$\lambda' = c'\,T' = c\,T = \lambda \,. \tag{10}$$

Außerdem muß auch, worauf H. A. Lorentz nicht eingeht, eine „scheinbare Phase" benutzt werden.

$$\delta' = \frac{\delta}{1 + \frac{s}{c}} \,. \tag{11}$$

Definiert man die Phase in der üblichen Form durch $\varepsilon = \frac{\delta}{T}$, so fällt die Änderung für ε fort. In der Anmerkung (40) zu seiner obengenannten Ausgabe der Dopplerschen Abhandlungen ist er etwas allgemeiner verfahren. Dort nimmt er Beobachter und Lichtquelle, beide als sich bewegend an und transformiert auf ein Koordinatensystem, das sich mit der Lichtquelle und auf ein solches, das sich mit dem Beobachter bewegt. Sind die Werte der einzelnen Größen an der Lichtquelle durch den Index e, an dem sich bewegenden Körper A durch den Index a gekennzeichnet, so wird hiernach

$$\frac{T_e'}{T} = \frac{1}{1 + \frac{s_e}{c}}, \quad \frac{T_a'}{T} = \frac{1}{1 + \frac{s_a}{c}}, \quad c_e' = c + s_e\,, \quad c_a' = c + s_a\,,$$

$$\frac{\delta_e'}{\delta} = \frac{1}{1 + \frac{s_e}{c}}, \quad \frac{\delta_a'}{\delta} = \frac{1}{1 + \frac{s_a}{c}},$$

somit

$$\frac{T_a'}{T_e} = \frac{c + s_e}{c + s_a}, \tag{12}$$

$$\frac{c_a'}{c_e'} = \frac{c + s_a}{c + s_e}, \tag{13}$$

$$\lambda_e' = \lambda_a' = \lambda\,, \tag{14}$$

$$\frac{\delta_a'}{\delta_e'} = \frac{c + s_e}{c + s_a}; \tag{15}$$

Die erste dieser Gleichungen faßt die Dopplerschen Formeln zusammen. Geht der Strahl von dem Körper A zu einem zweiten sich bewegenden Körper B, so haben wir zu den obigen Formeln noch die entsprechenden

$$\frac{T_b'}{T_a'} = \frac{c + s_a'}{c + s_b'}, \quad \frac{c_b'}{c_a'} = \frac{c + s_b'}{c + s_a'}, \quad \frac{\delta_b'}{\delta_a'} = \frac{c + s_a'}{c + s_b'}, \quad \lambda_b' = \lambda_a' = \lambda_e' = \lambda ,$$

somit

$$\text{(16)} \qquad \frac{T_b'}{T_e'} = \frac{c + s_a'}{c + s_b'} \frac{c + s_e}{c + s_a},$$

$$\text{(17)} \qquad \frac{c_b'}{c_e'} = \frac{c + s_b'}{c + s_a'} \frac{c + s_a}{c + s_e},$$

$$\text{(18)} \qquad \lambda_b' = \lambda ,$$

$$\text{(19)} \qquad \frac{\delta_b'}{\delta_e'} = \frac{c + s_a'}{c + s_b'} \frac{c + s_e}{c + s_a}.$$

Die s' sind die Bewegungsgeschwindigkeiten in Richtung AB. In dieser Weise sind die Formeln beliebig fortzusetzen, wenn das Licht, ehe es zum letzten Körper gelangt, auf irgendwelche andere Körper stößt, von denen es weiter gesandt wird, z. B. das Sonnenlicht erst auf einen Planeten fällt und dann uns erreicht usf.

Die vorstehenden Formeln gelten zunächst, wenn es sich allein um die Bewegung der Lichtquelle und der belichteten Körper handelt. H. A. Lorentz hat ihnen aber eine erweiterte Bedeutung beigelegt. Sie sollen auch gelten, wenn der Äther um die Lichtquelle und um die belichteten Körper in deren Bewegung einbezogen ist, jedoch in mit wachsendem Abstand abnehmender Stärke, so daß bei hinlänglicher Entfernung der Lichtquelle vom Körper zwischen ihnen ein Raum vorhanden ist, in dem der Äther ruht oder reine Translationsbewegung besitzt. Im ersteren Fall haben die s die angegebene Bedeutung, im zweiten Fall sollen für sie die betreffenden relativen Werte gegen die entsprechende Geschwindigkeit des Zwischenäthers in Ansatz zu bringen sein. Das ist klar, wenn es sich um reine Koordinatentransformation handelt. Wir werden über diese Verhältnisse bald eine allgemeinere Untersuchung anstellen.

In Dopplers Anschauung bleibt bei der nach ihm benannten Erscheinung die Lichtgeschwindigkeit als solche ungeändert, Schwingungsdauer und Wellenlänge ändern sich (scheinbar) zugleich, so daß ihr Verhältnis zueinander immer das gleiche bleibt. Hiernach ist es klar, daß die Brechungsquotienten der Medien durch die Bewegung allein dieser Medien im Sinne der Annahme von Doppler ungeändert bleiben. Somit gelten für Reflexion und Brechung, soweit sie nur von diesen Brechungsquotienten abhängen, die gleichen Gesetze wie für ruhende Körper. Wo jedoch Schwingungsdauern für sich oder Wellenlängen für sich in optischen Formeln erscheinen, wie bei Interferenzen oder Beugungen, müssen hiernach die Erscheinungen bei bewegten Körpern quantitativ anders ausfallen als bei ruhenden, wenn auch qualitativ die gleichen Formeln gelten sollten.

Nach H. A. Lorentz, dessen Berechnungsweisen sich übrigens älteren Ansätzen von Klinkerfueß nähern, sind die Verbreitungsgeschwindigkeiten, wenn die Körper sich bewegen, scheinbar verschieden von denen, wenn die Körper ruhen. Wie es sich nun mit den geometrisch-optischen Gesetzen und den Interferenz- und Beugungsregeln verhält, ist aus folgendem zu ersehen.

Für Strahlen in ruhenden Medien fließen alle geometrisch-optischen Gesetze aus dem von Fermat (1667) aufgestellten Prinzip, wonach ein Lichtstrahl der von einem Punkt A nach einem Punkt B gelangen soll, eine solche Bahn einschlägt, daß er die geringste (oder die längste) Zeit zu ihrer Zurücklegung braucht, wie viele Reflexionen oder Brechungen durch Spiegel und durchsichtige Körper er auf dieser Bahn auch erleidet. Nun seien die einzelnen durch solche Reflexionen und Brechungen bedingten Strecken seiner Bahn zwischen A und B gleich $l_{A1}, l_{12}, l_{23}, \ldots, l_{nB}$. Die Zeit t zum Durchlaufen dieser Strecken zusammengenommen, ist dann ein Minimum (oder Maximum). Wenn jetzt das ganze System, AB einbegriffen, eine Translatationsbewegung g erfährt, die mit den oben genannten Strecken die Winkel $\varphi_{A1}, \varphi_{12}, \varphi_{23}, \ldots, \varphi_{nB}$ bildet, so sind die Bewegungsgeschwindigkeiten in Richtung dieser Strecken

$$(20)\quad s_{A1} = g\cos\varphi_{A1}, \quad s_{12} = g\cos\varphi_{12}, \quad s_{23} = g\cos\varphi_{23}, \quad \ldots, \quad s_{nB} = g\cos\varphi_{nB},$$

folglich die scheinbaren Lichtgeschwindigkeiten

$$(21)\quad c'_{A1} = c_{A1} + g\cos\varphi_{A1}, \quad c'_{12} = c_{12} + g\cos\varphi_{12}, \quad \ldots, \quad c'_{nB} = c_{nB} + g\cos\varphi_{nB},$$

wo die c die Geschwindigkeiten bedeuten für die absoluten Strahlen. Die Zeiten für die relativen Strahlen zum Durchlaufen der einzelnen Wegstrecken werden so

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{l} t'_{A1} = \dfrac{l_{A1}}{c_{A1} + g\cos\varphi_{A1}}, \quad t'_{12} = \dfrac{l_{12}}{c_{12} + g\cos\varphi_{12}}, \quad \ldots, \\ \qquad t'_{nB} = \dfrac{l_{nB}}{c_{nB} + g\cos\varphi_{nB}}, \end{array}\right.$$

oder für gegen die Lichtgeschwindigkeit nicht erhebliche Geschwindigkeiten der Bewegung des Systems bis auf Glieder von der Ordnung $\left(\frac{g_2}{c}\right)^2\cos^2\varphi$ und noch höherer

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} t'_{A1} = \dfrac{l_{A1}}{c_{A1}}\left(1 - \dfrac{g}{c_{A1}}\cos\varphi_{A1}\right), \quad t'_{12} = \dfrac{l_{12}}{c_{12}}\left(1 - \dfrac{g}{c_{12}}\cos\varphi_{12}\right), \quad \ldots, \\ \qquad t'_{nB} = \dfrac{l_{nB}}{c_{nB}}\left(1 - \dfrac{g}{c_{nB}}\cos\varphi_{nB}\right), \end{array}\right.$$

somit

$$(24)\quad \sum t' = \sum t - \sum \frac{g}{c}\,\frac{l\cos\varphi}{c}.$$

Handelt es sich nur um Reflexionen, so daß alle Lichtwege im gleichen Medium liegen, so sind sämtliche c einander gleich, und da $\sum\limits_A^B l\cos\varphi = AB$ ist, so wird

$$(25)\quad \sum_A^B t' = \sum_A^B t - \frac{g}{c^2}\,AB.$$

Da nun das zweite Glied rechter Hand eine Konstante bedeutet für alle Wege zwischen A und B, so folgt, daß $\Sigma t'$ einen Grenzwert zugleich mit Σt erreicht. Also gelten in diesem Falle die gleichen Formeln, die für ruhende Medien bestehen. Liegen jedoch Wege in verschiedenen Medien, so daß auch Brechung in Frage kommt, so werden die betreffenden c von den anderen c verschieden sein und das zweite Glied rechter Hand in Gleichung (24) ist nicht mehr konstant. Die Brechungsgesetze sind also nicht mehr denen in ruhenden Medien gleich. Man könnte, da die $\frac{g}{c}$ immerhin unerheblich sind, für alle c einen Mittelwert ansetzen, aber das würde bedeuten, daß schon Glieder erster Ordnung fortgelassen werden, die man erfahrungsgemäß noch feststellen könnte, während für die Reflexion Glieder erst zweiter Ordnung zur Vernachlässigung kommen, die erfahrungsgemäß nicht mehr beachtlich sind.

Nehmen wir ferner zwei Strahlen 1, 2, die auf verschiedenen Wegen von A nach B gelangen und dort interferieren können, so geht in H. A. Lorentz' Anschauung, wonach $\lambda' = \lambda$ ist, die Interferenz unabhängig von der Bewegung des Systems vor sich, da man immer hat

$$\sum \frac{l_2'}{\lambda'} - \sum \frac{l_1'}{\lambda'} = \sum \frac{l_2}{\lambda} - \sum \frac{l_1}{\lambda} . \tag{26}$$

In der Anschauung von Doppler sind freilich die λ' zwar von den λ verschieden. Aber da sich jeder Teil des Systems als Ganzes bewegen soll, sind die Formeln (6) und (7) zu kombinieren, so daß $\lambda' = \lambda$ wird, da das eine Ende sich dem andern nähert, während dieses von jenem sich gleicherweise entfernt. Also hat die reine Dopplersche Erscheinung (ohne Bewegung des Äthers) nach beiden Anschauungen für Systeme, die sich als Ganzes bewegen, auf die Interferenz keinen Einfluß.

2. Aberration, Mitführung des Äthers und Strahlengang.

Wir sprechen von der von den Astronomen so genannten „Fixsternaberration", welche, wie die Dopplersche Erscheinung, allein aus Bewegungen hervorgeht. So ist die Aberration eines Fixsterns [1]) infolge

1. der jährlichen Bewegung der Erde

$$\left\{\begin{array}{l} \text{in astronomischer Länge:} \\ \Delta\lambda = -20'',492 \cos(\odot - \lambda)\cos\beta - 0'',343\cos(\lambda - \Gamma)\sec\beta\,, \\ \text{in astronomischer Breite:} \\ \Delta\beta = -20'',492 \sin(\odot - \lambda)\sin\beta - 0'',343\sin(\lambda - \Gamma)\sin\beta\,, \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{in Rektaszension:} \\ \Delta\alpha = -20'',492\,(\cos\odot\cos\alpha\cos\varepsilon + \sin\odot\sin\alpha)\sec\delta \\ \qquad\quad -\ \ 0'',343\,(\cos\Gamma\cos\alpha\cos\varepsilon + \sin\Gamma\sin\alpha)\sec\delta\,, \\ \text{in Deklination:} \\ \Delta\delta = +20'',492\,(\cos\odot(\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon) - \sin\odot\cos\alpha\sin\delta) \\ \qquad\quad +\ \ 0'',343\,(\cos\Gamma(\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon) - \sin\Gamma\cos\alpha\sin\delta)\,. \end{array}\right. \tag{2}$$

2. der täglichen Drehung der Erde um ihre Achse

$$\left\{\begin{array}{l} \text{in Rektaszension:} \\ \Delta\alpha = +0'',320\cos\varphi\cos(\theta - \alpha)\sec\delta\,, \\ \text{in Deklination:} \\ \Delta\delta = +0'',320\cos\varphi\sin(\theta - \alpha)\sin\delta\,. \end{array}\right. \tag{3}$$

Darin bedeutet $\odot$ die Länge der Sonne von der Erde aus gesehen, Γ die Länge des Perihels der Sonnenbahn, λ, β; α, δ Länge und Breite, Rektaszension und Deklination des Fixsterns, ε die Schiefe der Ekliptik, φ die geographische Breite, θ die Sternzeit des Beobachtungsortes. Die Größe $\alpha_j = 20'',492$ nennt man die jährliche, die $\alpha_t = 0'',320$ die tägliche Aberrationskonstante.

[1]) Literatur, z. B. Klinkerfueß-Buchholz, Theoretische Astronomie; Brünnow, Sphärische Astronomie; eine schöne Dissertation von Münch, die auch die Kosmische Aberration behandelt, usw.

Am Himmelszelt scheint der Fixstern nahezu eine Ellipse, die Aberrationsellipse, um eine mittlere Lage zu beschreiben. Bei der jährlichen Aberration ist die Aberrationskonstante 20,492 die halbe große Achse dieser Ellipse und der Radius des Kreises, in den die Ellipse für einen im Pol der Ekliptik stehenden Stern übergeht. Bei der täglichen Aberration ist die halbe große Achse 0,320 cos φ, die halbe kleine Achse 0,320 cos φ sin δ. Die Zeichen sind so gewählt, daß der wahre Ort des Sterns dem scheinbaren um die Aberration voraus liegt. Die jährliche Aberrationskonstante ist erhalten aus[1])

$$(4_1)\qquad \alpha_j = \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{dM}{dt},$$

wo e die Exzentrizität der Erdbahn und M die mittlere Anomalie bedeutet. Die gleiche Größe ist auch

$$(4_2)\qquad \alpha_j = \frac{g}{c}\cdot\frac{1}{1+e^2+2e\cos v},$$

wo v die wahre Anomalie der Sonne und g die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn an der betreffenden Stelle der Bahn angibt. Ist g' der Wert von g im Perihel, g'' der im Aphel, so wird

$$(4_3)\qquad \alpha_j = \frac{g'}{c}\,\frac{1}{(1+e)^2} = \frac{g''}{c}\,\frac{1}{(1-e)^2}.$$

Soweit man die Erdbahn als Kreisbahn ansehen darf, ist g konstant und $e = 0$, somit

$$(4_4)\qquad \alpha_j = \frac{g}{c}.$$

Die zweite in den jährlichen Aberrationsgleichungen enthaltene Konstante 0,″343 ist gleich $\alpha_j e$.

Für die tägliche Aberrationskonstante α_t unter jeder Breite φ hat man analytisch

$$(5)\qquad \alpha_t = \frac{\varrho\dfrac{d\theta}{dt}}{c},$$

wo ϱ den Erdhalbmesser und $\dfrac{d\theta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde in einem Tage nach Sternzeit gerechnet bedeutet.

Immer ist also die tägliche Aberrationskonstante gleich der Geschwindigkeit der Bewegung durch die Lichtgeschwindigkeit.

Überhaupt setzt man allgemein die Aberration gleich dem Verhältnis der zum Lichtstrahl queren Geschwindigkeit eines Körpers zu der Lichtgeschwindigkeit. Das ist auch in den obigen Formeln ausgesprochen. Nennen wir diese Quergeschwindigkeit g_q, so wäre die Aberration überhaupt

$$(6)\qquad \alpha = \frac{g_q}{c}.$$

Die Erklärung der Aberration hat eine Menge von Hypothesen veranlaßt. Die Schwierigkeit liegt teils auf physikalischem, teils auf physiologisch-psychologischem Gebiete. Auf den letzteren Umstand kann ich hier nicht eingehen,

[1]) Zur Reduktion auf Bogensekunden hier und im folgenden mit dem Faktor 206265 zu multiplizieren.

ich habe darüber — es handelt sich um die Frage wie wir überhaupt Richtungen eigentlich erkennen und Strahlen aus den reinen Wahrnehmungen durch Reiz auf der Netzhaut doch geometrisch-optisch richtig nach außen projizieren — in meinem Buche „Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften"[1]) eine, wie ich glaube, ziemlich eingehende Untersuchung angestellt. Hier ist es uns um das Physikalische zu tun. Oft werden die Verhältnisse so dargestellt, als wenn Aberration schon vorhanden wäre, wenn ein Strahl irgendeine Stelle eines sich bewegenden Körpers trifft. Das ist bei geraden Strahlen sicher unrichtig für ständig leuchtende Gestirne, denn da sie den Raum mit Strahlen erfüllt haben, trifft der sich bewegende Körper immerwährend auf schon vorhandene solche Strahlen, und alle Strahlen führen auf den Stern, so daß der Stern dem betreffenden Punkt immer nur an derselben Stelle des Himmels erscheinen kann. Vermöchten wir ohne Zuhilfenahme des optischen Apparates, den wir Auge nennen, allein mit der Netzhaut, Sterne zu sehen, wie manche Lebewesen mit der Haut schon Licht empfinden, so würde keine Aberration für uns vorhanden sein. Nur wenn man, wie es der Entdecker der Aberration, Bradley, getan hat, der Newtonschen Korpuskulartheorie des Lichtes folgt, bestünde auch dann Aberration, da sie nach dieser Theorie aus dem Stoß der Lichtteilchen auf die Retina hervorgeht, dessen Richtung mit der Richtung der Bewegung eine Diagonalrichtung geben muß. Aber das kommt hier nicht in Frage. Aberration bei geraden Strahlen kann erst auftreten, wenn es sich um das Verhältnis solcher Strahlen zu einer bestimmten Richtung handelt, etwa zu der Achse eines durch zwei Löcher oder zwei Fadenkreuze usf. gebildeten Diopters oder zu der eines Fernrohrs. Die gegenwärtige, insbesondere von H. A. Lorentz mit anderen vertretene Anschauung, geht dahin, daß im Falle eines Diopters die sogenannte phoronomische Ableitung genügt, im Falle eines Fernrohrs jedoch eine Hypothese unumgänglich ist, die von Fresnel herrührt.

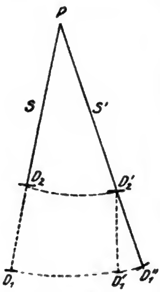

Fig. 1.

Wenden wir uns der phoronomischen Erklärung zu. Das Licht gehe (Fig. 1) von einem Objekt P aus und verbreite sich geradlnig. D_1D_2 sei die Achse des Diopters. Das Diopter sei erst geradeaus auf P gerichtet, so daß der Strahl S von P nach D_2 und die Achse entlang nach D_1 kommt. Nun verschiebesich das Diopter mit der Geschwindigkeit g parallel mit sich selbst quer zu den Strahlen von links nach rechts. In dem Moment, wo die Verschiebung beginnt, gehe ein neuer Strahl S' von P aus und die Verschiebung dauere so lange, bis der Strahl S' gerade auf D_2 trifft, die Stelle von D_2 sei dann D_2', die von D_1 entsprechend D_1'. Nach dem Aberrationsgesetz ist dann

$$\frac{PD_2'}{D_2D_2'} = \frac{c}{g}.$$

Die Verschiebung gehe weiter, bis D_1' zur Stelle D_1'' gelangt, wo der Strahl S' die Bahn von D_1 schneidet. Wir haben dann $D_1'D_1'' : D_1''D_2' = D_1D_1' : PD_2'$ oder

$$D_1'D_2'' = D_2'D_1''\frac{D_1D_1'}{PD_2'} = D_2'D_1''\frac{D_1D_1'}{D_2D_2'}\frac{g}{c} = D_2'D_1''\frac{g}{c}. \tag{7}$$

Ist aber τ_1 die Zeit, die D_1' braucht, von D_1' nach D_1'' zu gelangen, und τ_2 die Zeit, die der Strahl aufwendet, von D_2' nach D_1'' zu kommen, so haben wir

[1]) Bei Teubner 1906.

$D_1'D_2'' = \tau_1 g$, $D_2'D_1'' = \tau_2 c$. Also folgt $\tau_1 = \tau_2$, d. h. die Marke D_1 des Diopters gelangt mit dem Strahl S' zu derselben Zeit an die gleiche Stelle D_1''. Folglich ist diese Marke auf diesen Strahl eingestellt, und man sieht den Stern in der Richtung, die der Strahl S' angibt. Da aber der Beobachter, der von seiner eigenen Bewegung nichts fühlt, in der Achse seines Diopters zu beobachten glaubt, so tritt für ihn scheinbar eine Verdrehung der Richtung von $D_1'D_2'$ nach $D_1''P$ ein, eben die Aberration, die gleich $\frac{g}{c}$ angesetzt ist. Von der etwaigen Krümmung der Bahn ist dabei abgesehen. Die sonstigen Erklärungen der Aberration vermittels entsprechender Betrachtungen muß ich übergehen, der Leser findet eine sehr schöne Zusammenstellung und scharfe Kritik, samt den Äußerungen von H. A. Lorentz dazu, in der S. 2 genannten Sammlung der Abhandlungen von Doppler.

An der Hand der Undulationstheorie gibt man sich für den gleichen Fall über die Aberration nach H. A. Lorentz in folgender Weise mittels des Huyghensschen Prinzipes Rechenschaft. Das Diopter (Fig. 2) bestehe aus zwei Schirmen V_1, V_2 mit je einer Öffnung $a_1 b_1$, $a_2 b_2$. Die Achse ist die Verbindungslinie der Mitten der Öffnungen. Von einer Stelle S über V_1 und senkrecht dazu mögen parallele Strahlen ausgehen. Wenn V_1 ruht, ist nach dem Huyghensschen Prinzip die Lichtbewegung in jedem Moment hinter V_1 so geartet, als wenn die Punkte der Öffnung selbst Wellen aussendeten. Ist die Öffnung weit genug, daß von der Beugung des Lichtes abgesehen werden kann, so bildet der durch den Rand der Öffnung senkrecht gehende Zylindermantel die Grenze zwischen Hell und Dunkel und seine Achse ist die Strahlrichtung. Bewegt sich nun der Schirm V_1 von links nach rechts, so kann ein rechts liegender Punkt P_1 dadurch, daß rechts neue Punkte in die Öffnung $a_1 b_1$ treten, während links

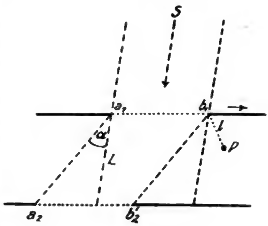

Fig. 2.

Punkte, ehe sie verdeckt werden, schon Wellen ausgesandt hatten, die in P zu gleicher Zeit wirksam werden, mehr Wellen erhalten als während der Schirm ruhte. Die Bewegung beginne zur Zeit t_0, eine von a_1 zu gleicher Zeit ausgehende Welle erreiche P zur Zeit t. Von allen folgenden Punkten der Öffnung können Wellen um so später als t_0 ausgehen, und P zur gleichen Zeit t erreichen, je näher sie P liegen. Vom letzten Punkt b_1 der Öffnung müssen sie jedoch, wenn sie in P zur Zeit t noch anlangen sollen, jedenfalls zur Zeit $\frac{l}{c}$, wo l die Entfernung $b_1 P$ bedeutet, von t ausgehen. Also empfängt P Wellen vom rechten Rand der Öffnung in der Lage dieses Randes, die zur Zeit $t - \frac{l}{c}$ stattfand. Und da die Belichtungsgrenze wieder durch den zum Schirm senkrechten Zylindermantel gegeben ist, der durch den Rand der Öffnung geht, so wird P auf dieser Grenze liegen, wenn das Lot von ihm auf den Schirm, den rechten Öffnungsrand da trifft, wo er sich zur Zeit $t - \frac{l}{c}$ befindet. Hiernach ist die Belichtungsgrenze gegen die Lage, die die Öffnung zur Zeit t einnimmt, nach links, gegen die Richtung der Bewegung, verschoben. Ganz so wird erwiesen, daß auch auf der linken Seite die Belichtungsgrenze in gleicher Weise verschoben ist. Die Verschiebung hängt aber ab von $\frac{l}{c}$, also vom Abstand des betrachteten Punktes P vom Schirm, und folglich erscheint das durch die Öffnung gesandte Strahlenbündel gegen die Richtung der Bewegung schräg. Entsprechend müßte daher der zweite Schirm gestellt werden, wenn das Bündel ganz die zweite Öffnung passieren soll; da nun aber beim Diopter beide Schirme sich gleich bewegen und wir die zu beiden Schirmen senkrechte Achse entlang zu beobachten glauben, so tritt auch jetzt eine Verdrehung der scheinbaren Strahlrichtung gegen die wahre ein, eine Aberration. Der zweite Schirm sollte zur Zeit t die Stellung einnehmen, die der erste Schirm zur Zeit $t - \frac{L}{c}$ besitzt, wo L den senkrechten Abstand beider Schirme bedeutet; seine Verschiebung nach links, gegen den ersten Schirm, betrüge also $\frac{L}{c} g$, und folglich ist die Tangente des Aberrationswinkels, des schrägen Strahlenbündels gegen den senkrechten $\operatorname{tg} \alpha = \frac{L}{c} g \frac{1}{L} = \frac{g}{c}$ und indem man statt der Tangente den Winkel selbst setzt, erhält man das frühere Gesetz. Das schräge Strahlenbündel wird als „relativer Strahl" bezeichnet, und dieser Strahl wird auch hier aus der Zusammensetzung der Bewegung des Lichtes mit der der Schirme nach den phoronomischen Regeln gewonnen.

Außerdem ist wieder angenommen, daß die Strahlen auf ihrem Wege keinerlei Änderung erfahren. Selbst die Diffraktion ist ausgeschlossen. Die einfachste Annahme, um dieses zu bewirken ist, daß der Äther, durch den die Strahlen hier gehen, überall ruht und durch die Bewegung des Diopters nicht in nennenswerte Bewegung einbezogen wird. Das ist bekanntlich die Annahme von Fresnel: Körper sollen in ihrer Bewegung den außer ihnen befindlichen Äther nicht mitreißen, jedenfalls nicht merklich und nicht in irgend merklichem Abstande von ihnen. Wie es sich mit Äther innerhalb der Substanz der Schirme verhält, ist dadurch nicht entschieden; er kann mitgeführt werden oder ebenfalls in Ruhe verharren, letzteres, indem die Molekel der Schirme durch den Äther streichen. Auf die Ableitung der Aberration hat das in dem betrachteten Falle, wo das Diopter einfach aus zwei Löchern in zwei parallelen Schirmen besteht, keinen Einfluß.

Anders verhält es sich, wenn der Äther als bewegt angesehen wird. Man nimmt dann an, daß die Wellen von ihm rein phoronomisch mitgeführt werden. Daher ist für die Aberration entscheidend die relative Bewegung des Äthers gegen die Substanz, und in der üblichen Aberrationsformel würde auch für Diopter g diese relative Bewegung bedeuten, wenn nicht die Erfahrung gelehrt hätte, daß es die ganze Bewegung der Erde ist, woraus eben die Annahme fließt, daß der Äther in der Umgebung der Erde (und in der Luft) ruht. Bewegt sich der Äther wie der Körper, innerhalb dessen das Licht sich verbreitet, so kann letzteres eine Aberration nicht aufweisen, weil die relative Bewegung Null ist. Eine Aberration ist, wie früher bemerkt, auch nicht zu bemerken für einen einzelnen Treffpunkt eines geraden Strahles, sofern der Körper durch ein bestehendes Strahlenbündel fährt. Kommen also Strahlen an das Objektiv eines Fernrohrs, so ist am Objektiv keine Aberration vorhanden. Und wenn das Fernrohr den in ihm enthaltenen Äther mit seiner eigenen Geschwindigkeit mitführen sollte, kann auch in dem Fernrohr Aberration nicht entstehen. Also wäre in diesem Falle Aberration überhaupt nicht festzustellen. Das ist auch die Ansicht von H. A. Lorentz[1]), obwohl ich seiner Beweisführung nicht habe

[1]) A. a. O. B. 343.

folgen können. Indessen vermöchte Aberration daraus zu erwachsen, daß der Strahl, indem er aus dem äußeren Äther in den inneren anders bewegten Äther des Objektivs tritt, dadurch allein eine Knickung erfährt. Diese Aberration ist objektiv physikalisch, und von ihr wird später gesprochen werden. Sehen wir davon ab, so kann jedenfalls zunächst nicht angenommen werden, daß Körper, wenn sie sich bewegen, den in ihnen enthaltenen Äther vollständig mitführen. Es kann auch nicht angenommen werden, daß die Körper ihren Äther nicht mitführen. Denn wäre dieses der Fall, so müßte man mit einem Fernrohr eine andere Aberration beobachten, als sich für ein Diopter ergibt, weil ja das brechende System nach dem Brechungsgesetz die Richtung der austretenden Strahlen gegen die der eintretenden ändert.

Nun hat schon Boscowich (1742) den Vorschlag gemacht, die Aberrationstheorie in der Weise zu prüfen, daß man das Fernrohr mit Wasser füllt und zusieht, ob dadurch die Aberration eines Fixsternes sich ändert. Dieser Versuch ist namentlich von Airy auf der Sternwarte zu Greenwich ausgeführt worden[1]), hat aber ein negatives Ergebnis gehabt; die Aberration hat sich so groß erwiesen wie in einem Luft enthaltenden Fernrohr, obwohl der Brechungsquotient des Wassers so erheblich größer ist als der der Luft. Das kann nach obigem nur erklärt werden, wenn man annimmt, daß der in den Körpern vorhandene Äther, wenn auch nicht ganz, so zum Teil, in die Bewegung, die jene besitzen, einbezogen wird. Fresnel hat schon theoretisch ermittelt zu welchem Teil. Es sei dieser Teil $a\,g$ und die Beobachtung auf einen Fixstern gerichtet, der immer in gleicher Weise seine Strahlen in das Fernrohr sendet. Das findet statt, wenn der Stern sich im Pol der Ekliptik befindet, seine Aberrationskurve also einen Kreis bildet mit einem Radius, der die Aberrationskonstante ist. Das Licht verbreitet sich im Fernrohr fast achsial. Ist die Bewegungsgeschwindigkeit der Erde g, so beträgt die reduzierte Geschwindigkeit des Äthers in der Fernrohrflüssigkeit $a\,g$, die relative Geschwindigkeit des Äthers also $g - a\,g$, somit die Aberration in Sekunden $\frac{g - a\,g}{c_f}\,206\,265$, wo c_f die Lichtgeschwindigkeit in der Flüssigkeit angibt. Nach dem Brechungsgesetz erscheint aber dieser Winkel in der Größe $\frac{g - a\,g}{c_f}\,206\,265 \cdot \frac{c}{c_f} = 206\,265\,\frac{g}{c}\,\frac{1-a}{c_f c_f}\,c^2$. Da nur die gewöhnliche dioptrische Aberration beobachtet wird, nämlich $206\,265\,\frac{g}{c}$, so müßte sein

$$\frac{1-a}{c_f c_f}\,c^2 = 1\,, \tag{8}$$

somit wird

$$a = 1 - \frac{c_f^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{n^2}\,, \tag{9}$$

wo n den Brechungsquotienten der Flüssigkeit bedeutet. Das ist aber die von Fresnel von vornherein gemachte Feststellung. Fresnel hat seine Formel dadurch ableiten zu können geglaubt, daß er den Äther in den Substanzen in zwei Teile zerlegte, einen Teil, der dem Äther im freien Raume entspricht und einen anderen, der sich nach der Eigenart der betreffenden Substanz richtet. Dieser Teil allein, als gewissermaßen an die Substanz gebunden, soll sich mit dieser Substanz und wie sie sich bewegen. Sei auf Raumeinheit bezogen die Äthermenge im freien Äther ϱ, die in einer Substanz ϱ', so daß $\varrho' - \varrho$ die in letzterer gebundene Äthermenge darstellt. Da letztere sich mit der Substanz-

[1]) Wie ich höre, soll dieser Versuch nunmehr wiederholt werden.

geschwindigkeit bewegen soll, sind die Verhältnisse so, als wenn die ganze Äthermenge ϱ' sich mit der Geschwindigkeit $g' = \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho'} g$ bewegte, und indem Fresnel nach seinen Anschauungen $\varrho' = n^2 \varrho$ setzt, erhält er den obigen Wert für a. In Franz Neumanns Anschauungen, wo nicht die Äthermengen in den verschiedenen Körpern voneinander verschieden sind, sondern die Ätherelasticitäten, kann eine solche Ableitung nicht zulässig sein. Auch sonst stehen ihr viele Bedenken entgegen. Gleichwohl hat sich Fresnels Ansatz über den Mitführungskoeffizienten a stets als der Erfahrung entsprechend erwiesen[1]). Hierher gehört namentlich der berühmte, in allen Lehrbüchern über Optik geschilderte Versuch von Fizeau, der auch hier kurz darzustellen ist. Von einer Lichtquelle S (Fig. 3), die (selbst oder als Spiegelbild im Spiegel G_1) sich im Brennpunkt einer Linse L_1 befindet, gehen Strahlen aus, die nach Reflexion von einer schrägen Glasplatte G_1 und Austritt aus der Linse L_1 parallel verlaufen, die oberen dringen durch einen Spalt P_1 und laufen achsial durch eine mit Wasser gefüllte Röhre R_1. Nachdem sie diese verlassen, treffen sie auf eine Linse L_2, die sie nach dem Spiegel G_2 biegt, welcher im Brennpunkt von L_2 steht. Dort werden die Strahlen reflektiert, gehen zurück durch L_2 und laufen durch die zweite, R_1 parallel gestellte und ebenfalls mit Wasser gefüllte Röhre R_2, dringen durch den Spalt P_2, die Linse L_1 und gehen wieder zur Glasplatte G_1, die sie zum Teil durchläßt, zum Teil nach S reflektiert. Die unteren Strahlen verfolgen den entgegengesetzten Weg $SG_1L_1P_2R_2L_2G_2R_1P_1L_1G_1$ und gehen dann ebenfalls teils durch G_1 weiter, teils nach S zurück. Wenn die Flüssigkeit

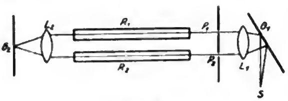

Fig. 3.

in beiden Röhren sich in Ruhe befindet, sieht man mit der Lupe hinter G_1 durch die Wegdifferenz der Strahlen in dieser Platte veranlaßte Interferenzstreifen, die zum Mittelstreifen, der in der Mitte zwischen den beiden Strahlenbündeln liegt, symmetrisch angeordnet sind. Strömt aber die Flüssigkeit in beiden Röhren nach entgegengesetzten Richtungen, so wird das eine Strahlenbündel mitgeführt, das andere aufgehalten; es entsteht also eine Phasendifferenz, die sich in einer Verschiebung aller Interferenzstreifen nach dem einen oder dem anderen Spalt hin zeigen muß. Diese Phasendifferenz ist leicht zu berechnen. Bedeutet c_f die Verbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in der Flüssigkeit, wenn diese sich in Ruhe befindet, g die Strömungsgeschwindigkeit und l die Länge der Flüssigkeitssäulen, so ist die Verbreitungsgeschwindigkeit für den Strahl, der immer mit der Flüssigkeit mitgeht, $c_f + a g$, die Zeit zum Durchlaufen der beiden Flüssigkeitssäulen also $\frac{2l}{c_f + a g}$. Für den anderen Strahl, der der Flüssigkeit entgegenzieht, sind die Größen gleich $c_f - a g$ und $\frac{2l}{c_f - a g}$. Die Phasendifferenz beträgt hiernach, da beide Strahlen der gleichen Lichtquelle entstammen,

$$\varepsilon = \frac{2l}{T}\left(\frac{1}{c_f - a g} - \frac{1}{c_f + a g}\right) = \frac{4 l g}{T c_f^2} a = \frac{4 l g}{c_f \lambda} a, \tag{10}$$

und diese Größe[2]) mißt auch die Verschiebung eines Interferenzstreifens in Teilen des Abstandes zweier aufeinanderfolgender Interferenzstreifen. Diese

[1]) Außer auf die besseren Lehrbücher über Optik darf namentlich auf die mehrfach zitierte Arbeit von H. A. Lorentz verwiesen werden.

[2]) Das Glied $a^2 g^2$ ist gegen c_f^2 vernachlässigt.

Verschiebung fand Fizeau, bei Röhren von 1,487 m Länge und z. B. einer Geschwindigkeit von $g = 7{,}06$ m in der Sekunde für Licht von der Wellenlänge 0.00053 mm im Durchschnitt zu 0,23 mit einer Genauigkeit von 0,026. Mit $n = 1{,}33$ für Wasser hätte diese Größe nach dem Fresnelschen Werte von a sein sollen 0,203. Die Größe λ oder T in der Formel für ε sollte dabei die Korrektion erhalten, die aus der Bewegung der Flüssigkeit sich ergibt. Ich werde später wahrscheinlich machen, daß T sich durch diese Bewegung nicht ändert; in der Form $\varepsilon = \frac{4\,l\,g}{T\,c_f^2}\,a$ ist also für T der in Luft stattfindende Wert zu benutzen. Schreibt man aber $\varepsilon = \frac{4\,l\,g}{c_f\,\lambda}\,a$, so wäre allerdings für λ der Wasserwert noch nach der Bewegung des Wassers zu korrigieren. Die Korrektion beträgt nur $\lambda\frac{g}{c}$, ist also zu vernachlässigen.

Die Fresnelsche Annahme hat die wichtige Folgerung, daß auch die Gesetze der Brechung für relative Strahlen so gelten wie für absolute. Den ersten strengeren Nachweis hierfür verdanken wir nach, nicht zweifelsfreien und unbequemen Rechnungen, Fresnel selbst, ferner Stokes[1]), dann in vielen Untersuchungen Ketteler[2]). Die klarste Auseinandersetzung darüber aber hat Veltmann[3]) gegeben, dem ich hier folgen will. Am einfachsten gestaltet sich die Untersuchung, wenn Licht senkrecht zur Grenzfläche zweier Medien fällt und die Bewegung beider Medien parallel der als eben angenommenen Grenzfläche vor sich geht. Es sei die Geschwindigkeit dieser Bewegung für beide Medien gleich g, die Bewegung des Äthers im oberen Medium also $a_1 g$, die im unteren $a_2 g$, die relative Bewegung hiernach $g - a_1 g$ und $g - a_2 g$. Indem die Welle durch die relative Bewegung fortgetragen wird, neigt sich der einfallende Strahl gegen das Einfallslot unter einem Winkel α_1, dessen Tangente

$$(11_1)\qquad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{g - a_1 g}{c_1},$$

sein muß. Im zweiten Medium haben wir entsprechend

$$(11_2)\qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{g - a_2 g}{c_2},$$

wobei c_1, c_2 die Lichtgeschwindigkeiten in diesen Medien, wenn sie ruhen, bedeuten. Hiernach wird

$$(12_1)\qquad \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{c_2}{c_1}\,\frac{g - a_1 g}{g - a_2 g} = \frac{c_2}{c_1}\,\frac{1 - a_1}{1 - a_2}$$

oder, da es sich um kleine Winkel handelt und, bis auf Größen zweiter Ordnung, die Tangenten mit den Sinus vertauscht werden dürfen

$$(12_2)\qquad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_2}{c_1}\,\frac{g - a_1 g}{g - a_2 g} = \frac{c_2}{c_1}\,\frac{1 - a_1}{1 - a_2}.$$

Nach dem Brechungsgesetz sollte aber sein

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

---

1) Phil. Mag. **28** (1846).
2) Poggendorfs Annalen **144**, 109, 287, 363, 550 (1871); **147**, 404, 478 (1872); **148**, 435 (1872).
3) Poggendorfs Annalen **150**, 497 (1873).

Trifft dieses Gesetz also auch für relative Strahlen zu, so müssen wir haben

$$(13_1) \qquad \frac{c_2 c_2}{c_1 c_1} \frac{1 - a_1}{1 - a_2} = 1 \,,$$

$$(13_2) \qquad \frac{1 - a_1}{1 - a_2} = \frac{c_1^2}{c_2^2} \,.$$

Nehmen wir für eines der Medien den leeren Raum, etwa für das erste, so wird

$$(14) \qquad 1 - a_2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} \,, \qquad a_2 = 1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} = 1 - \frac{1}{n^2} \,,$$

die Fresnelsche Formel, die sich also als Bedingung dafür einstellt, daß die relativen Strahlen im angenommenen Fall dem gewöhnlichen Brechungsgesetz folgen.

Veltmann erweitert die Betrachtung auf Strahlen, die schräg zur Grenzfläche einfallen und auf Bewegungen, die schräg zu dieser Fläche geschehen.

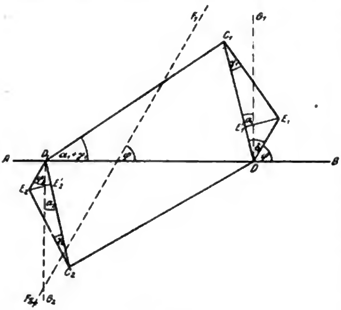

Fig. 4.

In Fig. 4 deutet AB die Grenze zweier Medien an, F_1F_2 die Richtung ihrer gemeinsamen Bewegung in der Bildebene, φ sei der Winkel dieser Richtung mit der Grenzspur AB. Geht zur Zeit t_0 von C_1 ein Strahl, der absolut in der Zeiteinheit nach E_1 gelangen würde, so trifft der ihm entsprechende relative Strahl nach dem Parallelogrammsatz die Grenze AB in demjenigen Punkte D, wo die von E_1 zu F_1F_2 gezogene Parallele AB schneidet. In demselben Moment t_0 habe ein anderer relativer Strahl CD_1 die Grenze bei D_1 erreicht. Ist C_2E_2 der zugehörige gebrochene absolute Strahl, der in der auf t_0 folgenden Zeiteinheit C_2 erreichte, so haben wir in C_2D_1 den entsprechenden relativen Strahl, falls D_1E_2 parallel zu F_1F_2 gezogen ist. Demnach ist DC_2 die Wellenfläche im zweiten Medium nach einer Zeiteinheit. Wir haben nun

$$C_1E_1 = c_1 \,, \quad C_2E_2 = c_2 \,, \quad DE_1 = g - a_1 g \,, \quad E_2D_1 = g - a_2 g \,.$$

Die Linie DD_1 gehört beiden Medien an. Sie ist aber im ersten Medium

$$DD_1 = \frac{C_1 D \sin(90^0 - \gamma_1)}{\sin(\alpha_1 + \gamma_1)} = \frac{C_1 D \cos\gamma_1}{\sin(\alpha_1 + \gamma_1)} \,.$$

Da nun

$$C_1D = C_1E_1' + E_1'D = C_1E_1 \cos\gamma_1 + E_1 D \cos\delta$$
$$= c_1 \cos\gamma + (g - a_1 g)\cos(90^0 + \alpha_1 - \varphi) = c_1 \cos\gamma - (g - a_1 g)\sin(\alpha_1 - \varphi) \,,$$

so haben wir

$$DD_1 = \frac{c_1 \cos\gamma_1 + (g - a_1 g)\sin(\varphi - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \gamma_1)} \cos\gamma_1 \,.$$

Im zweiten Medium ist entsprechend

$$DD_1 = \frac{c_2 \cos\gamma_2 + (g - a_2 g)\sin(\varphi - \alpha_2)}{\sin(\alpha_2 + \gamma_2)} \cos\gamma_2 .$$

DG_1, D_1G_2 sind die Einfallslote in beiden Medien, also bedeutet α_1 den Einfallswinkel des relativen Strahles C_1D, α_2 den Brechungswinkel des relativen Strahles C_2D_1; γ_1, γ_2 geben die Neigungen dieser relativen Strahlen gegen die absoluten Strahlen. Wir haben aber aus $DD_1 = DD_1$

$$(15_1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin\alpha_1\cos\gamma_1 + u_1\cos\alpha_1\cos(\varphi - \alpha_1)}{\cos\gamma_1 + u_1\sin(\varphi - \alpha_1)} \\ &= \frac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma_2}\cdot\frac{c_1}{c_2}\cdot\frac{\sin\alpha_2\cos\gamma_2 + u_2\cos\alpha_2\cos(\varphi - \alpha_2)}{\cos\gamma_2 + u_2\sin(\varphi - \alpha_2)}, \end{aligned}\right.$$

woselbst

$$u_1 = \frac{g(1 - a_1)}{c_1}, \qquad u_2 = \frac{g(1 - a_2)}{c_2}$$

gesetzt ist. Diese Gleichung kann man auch schreiben

$$\sin\alpha_1 + \frac{\sin\alpha_1\cos\gamma_1 + u_1\cos\alpha_1\cos(\varphi-\alpha_1) - \sin\alpha_1\cos\gamma_1 - u_1\sin\alpha_1\sin(\varphi - \alpha_1)}{\cos\gamma_1 + u_1\sin(\varphi - \alpha_1)}$$

$$= \frac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma_2}\frac{c_1}{c_2}\left(\sin\alpha_2 + \frac{\sin\alpha_2\cos\gamma_2 + u_2\cos\alpha_2\cos(\varphi-\alpha_2) - \sin\alpha_2\cos\gamma_2 - u_2\sin\alpha_2\sin(\varphi - \alpha_2)}{\cos\gamma_2 + u_2\sin(\varphi - \alpha_2)}\right),$$

d. h.

$$(15_2)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin\alpha_1 + \frac{u_1\cos\varphi}{\cos\gamma_1 + u_1\sin(\varphi - \alpha_1)} \\ &\qquad = \frac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma_2}\frac{c_1}{c_2}\left(\sin\alpha_2 + \frac{u_2\cos\varphi}{\cos\gamma_2 + u_2\sin(\varphi - \alpha_2)}\right). \end{aligned}\right.$$

Nun sind γ_1, γ_2 von der Ordnung u_1, u_2 somit $\cos\gamma_1$, $\cos\gamma_2$ gleich 1 bis auf Glieder höchstens von der Ordnung u_1^2, u_2^2. Vernachlässigen wir solche Größen überhaupt, so bleibt

$$\sin\alpha_1 + u_1\cos\varphi = \frac{c_1}{c_2}(\sin\alpha_2 + u_2\cos\varphi)$$

oder

$$(16)\qquad \frac{\sin\alpha_1}{c_1} - \frac{\sin\alpha_2}{c_2} = \left(\frac{u_2}{c_2} - \frac{u_1}{c_1}\right)\cos\varphi .$$

Das Brechungsgesetz ist so bis auf eine Größe erster Ordnung erfüllt. Soll auch diese Größe fortfallen, so müssen wir haben

$$(17)\qquad \frac{u_2}{c_2} = \frac{u_1}{c_1},$$

was wieder die Fresnelsche Formel ergibt. Alsdann gilt das Brechungsgesetz für die relativen Strahlen bis auf Größen zweiter Ordnung.

Aber wir können noch allgemeiner rechnen.

Wir wollen zu der Dopplerschen Erscheinung zurückkehren. Wir sahen, daß, wenn nur die Bewegung der Medien berücksichtigt wird, aus dieser Erscheinung folgt, daß bei dieser Bewegung nur die Reflexion bis auf Größen zweiter Ordnung ungeändert bleibt, daß aber Brechung und Interferenz sich um Größen erster Ordnung ändern würden. Betrachten wir die Verhältnisse, wie sie sich stellen, wenn der Äther von den Medien mitgeführt wird, so haben wir für den relativ bewegten Äther, wenn die Mitführungskoeffizienten in den verschiedenen Medien durch $a_{A1}, a_{12}, \ldots, a_{nB}$ bezeichnet werden, die Gleichungen (21) S. 7 zu ersetzen durch

$$(18)\quad \begin{cases} c'_{A1} = c_{A1} + g(1 - a_{A1})\cos\varphi_{A1}\,, \quad c'_{12} = c_{12} + g(1 - a_{12})\cos\varphi_{12}\,, \quad \ldots, \\ c'_{nB} = c_{nB} + g(1 - a_{nB})\cos\varphi_{nB}\,, \end{cases}$$

somit gehen die Gleichungen (23) S. 7 über in

$$(19)\quad \begin{cases} t'_{A1} = \dfrac{l'_{A1}}{c_{A1}} - g\, l'_{A1}\dfrac{1 - a_{A1}}{c^2_{A1}}\cos\varphi_{A1}\,, \quad t'_{12} = \dfrac{l'_{12}}{c_{12}} - g\, l'_{12}\dfrac{1 - a_{12}}{c^2_{12}}\cos\varphi_{12}\,, \quad \ldots, \\ t'_{nB} = \dfrac{l'_{nB}}{c_{nB}} - g\, l'_{nB}\dfrac{1 - a_{nB}}{c_{nB}}\cos\varphi_{nB}\,. \end{cases}$$

Nach dem Fresnelschen Gesetz (9) S. 13 oder (14) S. 16 soll aber sein

$$(20)\qquad \frac{1 - a_{A1}}{c^2_{A1}} = \frac{1 - a_{12}}{c^2_{12}} = \ldots = \frac{1 - a_{nB}}{c^2_{nB}} = \frac{1 - a_{BA}}{c^2_{BA}} = \frac{1}{c^2}\,,$$

also erhalten wir

$$(21)\quad \begin{cases} t'_{A1} = \dfrac{l'_{A1}}{c_{A1}} - \dfrac{g}{c^2} l'_{A1}\cos\varphi_{A1}\,, \quad t'_{12} = \dfrac{l'_{12}}{c_{12}} - \dfrac{g}{c^2} l'_{12}\cos\varphi_{12}\,, \quad \ldots \quad , \\ t'_{nB} = \dfrac{l'_{nB}}{c_{nB}} - \dfrac{g}{c^2} l'_{nB}\cos\varphi_{nB}\,, \end{cases}$$

und die Gleichung (25) S. 7 wird, welche Medien auch der Strahl durchläuft, genau wie früher

$$(22)\quad t'_{A1} + t'_{12} + t'_{23} + \ldots + t'_{nB} = t_{A1} + t_{12} + t_{23} + \ldots + t_{nB} - \frac{g}{c^2} AB\,,$$

so daß auch jetzt das Fermatsche Prinzip bis auf Größen zweiter Ordnung für die relativen Strahlen erfüllt wäre, wenn es für die absoluten Strahlen erfüllt ist, und die geometrisch-optischen Gesetze unter der Fresnelschen Annahme über die Mitführung des Äthers überhaupt für die relativen Strahlen die gleichen wären wie für die absoluten, bis auf Größen zweiter Ordnung. Und jetzt ist die Brechung einbegriffen. Weiter besteht auch die Gleichung (9) unabhängig von den Medien, also sind die Interferenzerscheinungen, in welchen Medien sie sich abspielen mögen, für die relativen Strahlen die gleichen wie für die absoluten.

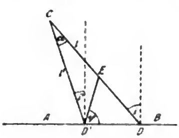

Fig. 5.

Die Wege l' der relativen Strahlen sind natürlich von den Wegen l der absoluten Strahlen in der Richtung und Länge verschieden. In welchem Maße, ist an der Hand der folgenden Figur 5 leicht zu ermitteln. C bedeutet den Ausgangspunkt eines relativen und eines absoluten Strahles. Bis zur auffangenden Grenzfläche AB zwischen zwei Medien sei ersterer $CD' = l'$, letzterer $CD = l$. i' bezeichne den Einfallswinkel des relativen, i den des absoluten Strahles, α die Abweichung dieser beiden Strahlen und φ den Winkel der Bewegungsrichtung in der Ebene beider Strahlen mit der Grenzlinie in dieser Ebene. Dann ist

$$(23_1)\qquad \frac{l'}{l} = \frac{\sin(90^\circ - i)}{\sin(90^\circ + i')} = \frac{\cos i}{\cos i'}\,.$$

Ferner gibt die Figur

$$i = i' + \alpha ,$$

somit

(23₂) $$l' = l\frac{\cos(\alpha + i')}{\cos i'} = l\frac{\cos i' - \alpha \sin i'}{\cos i'} ,$$

letzteres bis auf Größen zweiter Ordnung. Weiter haben wir, wenn $CE = c$ genommen wird

$$D'E = g(1 - a) ,$$

somit

(24₁) $$\frac{g(1 - a)}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin(90^\circ + i' - \varphi)} = \frac{c}{\cos(i' - \varphi)} ,$$

woraus bis auf Größen dritter Ordnung folgt

(24₂) $$\alpha = \frac{g(1 - a)}{c}\cos(i' - \varphi) .$$

Hiernach wird

(23₃) $$l' = l\left(1 - \frac{g(1 - a)}{c}\operatorname{tg} i' \cos(i' - \varphi)\right) = l\left(1 - \frac{g(1 - a)}{c}\operatorname{tg} i \cos(i - \varphi)\right) ,$$

beide Darstellungen bis auf Größen zweiter Ordnung. l' ist aber von l um eine Größe erster Ordnung verschieden, die noch von der jeweiligen Einfallsrichtung des relativen oder des absoluten Strahles abhängt. Daher wird

(25) $$\sum\frac{l'}{c} = \sum\frac{l}{c} - \sum\frac{g(1 - a)}{c^2}\operatorname{tg} i \cos(i - \varphi)$$

und die Zeit, die der Strahl braucht, von A nach B auf relativem Wege zu gelangen, ist um eine Größe erster Ordnung verschieden von der auf absolutem Wege und abhängig von der Stellung der Medien zueinander.

Wir können hiernach nur sagen: Bis auf Größen zweiter Ordnung, die außer acht gelassen werden, gestalten sich die Reflexions- und Brechungsgesetze für ein als Ganzes sich bewegendes System für die relativen Strahlen so wie für absolute, als wenn die relativen Wege mit der gleichen Geschwindigkeit durchlaufen würden wie die absoluten. Oder: Die Brechungsindices erfahren innerhalb dieser Grenzen keine Änderung.

Was die Interferenz anbetrifft, so hat Veltmann anscheinend angenommen, daß die Schwingungsdauer durch die Bewegung des Systems keine Änderung erfährt. Er geht nämlich von der Gleichung (22) aus und bemerkt, daß für zwei Strahlen 1, 2, die von A nach B auf verschiedenen Wegen laufen

$$\sum_A^B t_2' = \sum_A^B t_2 - \frac{g}{c^2}AB , \qquad \sum_A^B t_1' = \sum_A^B t_1 - \frac{g}{c^2}AB ,$$

also

(26) $$\sum_A^B t_2' - \sum_A^B t_1' = \sum_A^B t_2 - \sum_A^B t_1$$

ist. Und hieraus schließt er schon, daß bis auf Größen zweiter Ordnung die Interferenzerscheinung zweier Strahlen nicht durch die Bewegung des Systems als Ganzes alteriert wird, was aber offenbar die Gleichheit der Schwingungsdauer der beiden Strahlen auf ihrem ganzen Wege zur Voraussetzung hat. Nach H. A. Lorentz und anderen würde das nicht zutreffen, weil die Neigungen der

Strahlen gegen die Bewegungsrichtung verschieden sind. Da indessen die Werte $\frac{l'}{\lambda'}$ in Frage kommen und mit H. A. Lorentz λ' allgemein gleich λ gesetzt wird, so kann sich die Interferenzerscheinung durch die Bewegung des Systems überhaupt nicht ändern, nicht bloß nicht bis auf Größen zweiter Ordnung und nicht bloß nicht, wenn das Fresnelsche Gesetz gilt.

Zuletzt bemerke ich, daß Ketteler[1]) das Fresnelsche Gesetz auch aus anderen Erscheinungen der Optik theoretisch verifiziert hat, namentlich aus den Formeln für die Intensität der reflektierten und gebrochenen Wellen. Aber ich kann darauf an dieser Stelle nicht eingehen.

3. Theorien von Stokes und H. A. Lorentz.

Wir haben nun von anderen grundlegenden Theorien der Aberration und der Ätherbewegung Kenntnis zu nehmen. Die wichtigste ist wohl die physikalische Theorie von Stokes[2]), in der die Aberration einfach als Krümmung der Lichtstrahlen infolge von Bewegung im Äther erscheint.

Sei c_0 die Lichtgeschwindigkeit in ruhendem Äther, s die Bewegung des Äthers in Richtung der Wellennormale, S ein Stück dieser Wellennormale, so setzt er nach einer Reihe schwer zu übersehender Erwägungen, auf die es aber hier nicht ankommt,

$$\int dS = \int (c_0 + s)\, dt \,. \tag{1}$$

In der Form

$$\frac{dS}{dt} = c' = c_0 + s \,, \tag{2}$$

entspricht diese Gleichung den Annahmen von H. A. Lorentz. Nun stellt er fest, daß der Strahl sich von einer Geraden nur wenig unterscheidet, wählt diese Gerade zur x-Achse und findet so

$$S = S_0 + c_0 t + \int u\, dt \,, \tag{3$_1$}$$

wo u die Bewegung des Äthers in Richtung der x-Achse bedeuten würde. Hiernach werden die Richtungscosinus des Strahles

$$\alpha' = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int u\, dt \,, \quad \beta' = \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int u\, dt \,, \quad \gamma' = \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\int u\, dt \,, \tag{4$_1$}$$

und indem er die Differentiationen mit den Integrationen vertauscht,

$$\alpha' = \int \frac{\partial u}{\partial x} dt \,, \quad \beta' = \int \frac{\partial u}{\partial y} dt \,, \quad \gamma' = \int \frac{\partial u}{\partial z} dt \,. \tag{4$_2$}$$

Näherungsweise ist nun $\frac{dS}{dt} = c_0$, also $dt = \frac{dS}{c_0}$, und weil S nur wenig von x abweicht, $dt = \frac{dx}{c_0}$, also

$$\alpha' = \frac{1}{c_0}\int \frac{\partial u}{\partial x} dx \,, \quad \beta' = \frac{1}{c_0}\int \frac{\partial u}{\partial y} dx \,, \quad \gamma' = \frac{1}{c_0}\int \frac{\partial u}{\partial z} dx \,. \tag{4$_3$}$$

---

[1]) Poggendorfs Annalen **144** (1872), **147** (1872), **148** (1873).

[2]) Phil. Mag. **27**, 9 (1845); Mathem. and Phys. Papers **1**, 134 ff.

Jetzt setzt er voraus, daß die Bewegung des Äthers ein Potential Φ hat, so daß, wenn u, v, w ihre Komponenten sind

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

wird. Alsdann bekommen wir

$$(4_4) \qquad \alpha' - \alpha'_0 = \frac{u - u_0}{c_0}, \quad \beta' - \beta'_0 = \frac{v - v_0}{c_0}, \quad \gamma' - \gamma'_0 = \frac{w - w_0}{c_0}.$$

Gehen wir von einer Stelle im Äther aus, wo dessen Bewegung Null ist, so wird hiernach

$$(4_5) \qquad \alpha' - \alpha'_0 = \frac{u}{c_0}, \quad \beta' - \beta'_0 = \frac{v}{c_0}, \quad \gamma' - \gamma'_0 = \frac{w}{c_0}.$$

Die Vertauschung der Differentiation mit der Integration, um von (4_1) auf (4_2) zu gelangen, dürfte kaum zulässig sein, weil x, y, z von t abhängen. Ferner ist die Vertauschung von s mit u und von dS mit dx unbequem. Ist ein Potential vorhanden, so kann beides vermieden werden, indem nur die Näherung $dt = \frac{dS}{c_0}$ noch erforderlich ist. Man bekommt dann aus (1) unmittelbar

$$(3_2) \qquad S = S_0 + c_0 t + \frac{1}{c_0}\int \frac{\partial \Phi}{\partial S} dS = S_0 + c_0 t + \frac{1}{c_0}(\Phi - \Phi_0),$$

somit

$$(4_6) \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha' - \alpha'_0 &= \frac{1}{c_0}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_0}\right) = \frac{u - u_0}{c_0}, \\ \beta' - \beta'_0 &= \frac{1}{c_0}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_0}\right) = \frac{v - v_0}{c_0}, \\ \gamma' - \gamma'_0 &= \frac{1}{c_0}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial z_0}\right) = \frac{w - w_0}{c_0}. \end{aligned}\right.$$

Das wollte ich hinzufügen, um die Stokesschen Gleichungen mehr zu sichern.

Will man nun die Gleichungen (4_5) auf die Aberration an der Erde anwenden, so muß man, da diese Aberration erfahrungsmäßig einen Winkel gibt, dessen Sinus gleich ist der Erdgeschwindigkeit dividiert durch die Lichtgeschwindigkeit, annehmen, daß an der Erde der Äther sich mit der Geschwindigkeit der Erde bewegt. Betrachtet man die Bewegung der Erde an jeder Stelle als geradlinig und legt die xz-Ebene durch den Strahl und die Richtung dieser Bewegung, so wird $\beta' - \beta'_0 = 0$, und $\gamma' = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, wo $\alpha = \arccos\alpha'$. Indem man noch von der Bewegung in der Richtung des Strahles absieht, erhält man

$$\sin\alpha = \frac{g}{c_0},$$

die Aberrationsformel.

H. A. Lorentz hat darauf hingewiesen[1]), daß die beiden Annahmen von Stokes, nämlich daß die Bewegung des Äthers ein Potential hat, und daß der Äther an der Erde sich wie diese bewegt, also an ihr nicht gleitet, miteinander in Widerspruch stehen. Das trifft zu, wenn die Bewegung des Äthers durch die der Erde hervorgebracht ist und so geschieht, wie in einer reibungslosen, inkompressibeln Flüssigkeit. Da wir uns der Formeln noch zu bedienen haben werden, gehe ich darauf genauer ein.

[1]) l. c. S. 347 ff., 448 ff.

Gustav Kirchhoff[1]) hat abgeleitet, daß, wenn ein starrer Körper in einer ihn endlos umgebenden inkompressibeln, reibungslosen Flüssigkeit sich stationär und so bewegt, daß die Komponenten seiner fortschreitenden und drehenden Geschwindigkeit $u', v', w'; p', q', r'$, sind, auch innerhalb dieser Flüssigkeit allmählich eine stationäre Bewegung sich herstellt, die ein Potential besitzt, das im allgemeinsten Fall dargestellt ist durch

$$\Phi = \Phi_1 u' + \Phi_2 v' + \Phi_3 w' + \Phi_4 p' + \Phi_5 q' + \Phi_6 r', \tag{5}$$

wo jedes der $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_6$ der Laplaceschen Gleichung $\Delta\Phi_k=0$, $k=1, 2, \ldots, 6$, genügt und in der Unendlichkeit verschwindet, während an der Oberfläche des Körpers ist

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \cos(n, x), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \cos(n, y), \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} = \cos(n, z). \tag{6a}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi_4}{\partial n} = y\cos(n, z) - z\cos(n, y), \quad \frac{\partial \Phi_5}{\partial n} = z\cos(n, x) - x\cos(n, z), \\ &\frac{\partial \Phi_6}{\partial n} = x\cos(n, y) - y\cos(n, x). \end{aligned}\right. \tag{6b}$$

Hier bedeuten x, y, z die Koordinaten eines Oberflächenpunktes in einem mit dem Körper fest verbundenen Achsenystem, und ergibt n die Richtung der Innennormale an diesem Punkt. Es ist dann an der Oberfläche des Körpers

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = (u + zq - yr)\cos(n, x) &+ (v + xr - zp)\cos(n, y) \\ &+ (w + yp - xq)\cos(n, z), \end{aligned}\right. \tag{7}$$

d. h. die zur Oberfläche senkrechte Geschwindigkeit der Flüssigkeit ist gleich der Geschwindigkeit des Körpers selbst an dieser Stelle.

Wenn der Körper die Form einer Kugel vom Radius r_0 besitzt, und der Mittelpunkt sich in x', y', z' befindet, hat man nach Gustav Kirchhoff $\Phi_4 = \Phi_5 = \Phi_6 = 0$ und

$$\Phi_1 = \frac{r_0^3}{2}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \Phi_2 = \frac{r_0^3}{2}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \Phi_3 = \frac{r_0^3}{2}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \tag{8}$$

so daß

$$\Phi = \frac{r_0^3}{2}\left(u'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + v'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + w'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right), \quad r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}, \tag{9_1}$$

oder

$$\Phi = \frac{r_0^3}{2r^3}\Big(u'(x'-x) + v'(y'-y) + w'(z'-z)\Big), \tag{9_2}$$

wird. u', v', w' bedeuten die Geschwindigkeitskomponenten der Bewegung des Mittelpunktes des Körpers. Die Drehungskomponenten kommen nicht in Betracht. Die Größe r ist der Abstand des Flüssigkeitspunktes vom Mittelpunkt der

[1]) Mechanik (1883), S. 222 ff.

Kugel. Hiernach ergeben sich die Komponenten u, v, w der Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens zu

$$(10_1)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = -\dfrac{r_0^3}{2r^3}\left[u'\left(1 - 3\dfrac{(x'-x)(x'-x)}{r^2}\right) - 3v'\dfrac{(x'-x)(y'-y)}{r^2} - 3w'\dfrac{(x'-x)(z'-z)}{r^2}\right], \\ v = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -\dfrac{r_0^3}{2r^3}\left[v'\left(1 - 3\dfrac{(y'-y)(y'-y)}{r^2}\right) - 3w'\dfrac{(y'-y)(z'-z)}{r^2} - 3u'\dfrac{(y'-y)(x'-x)}{r^2}\right], \\ w = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = -\dfrac{r_0^3}{2r^3}\left[w'\left(1 - 3\dfrac{(z'-z)(z'-z)}{r^2}\right) - 3u'\dfrac{(z'-z)(x'-x)}{r^2} - 3v'\dfrac{(z'-z)(y'-y)}{r^2}\right], \end{cases}$$

Nennen wir α', β', γ' die Richtungscosinus von r und ϱ' die Bewegung des Körpers in Richtung von r, also

$$(11)\qquad \alpha' = \frac{x'-x}{r}, \quad \beta' = \frac{y'-y}{r}, \quad \gamma' = \frac{z'-z}{r};$$

$$(12)\qquad \varrho' = \alpha' u' + \beta' v' + \gamma' w',$$

so gehen die obigen Gleichungen über in

$$(9_3)\qquad \Phi = \frac{r_0^3}{2r^2}(\alpha' u' + \beta' v' + \gamma' w') = \frac{r_0^3}{2r^2}\varrho';$$

$$(10_2)\qquad \begin{cases} u = -\dfrac{r_0^3}{2r^3}(u' - 3\alpha'\varrho'), \\ v = -\dfrac{r_0^3}{2r^3}(v' - 3\beta'\varrho'), \\ w = -\dfrac{r_0^3}{2r^3}(w' - 3\gamma'\varrho'). \end{cases}$$

Nach Multiplikation der drei letzten dieser Gleichungen mit α', β', γ' und Addition, erhält man, da

$$(13)\qquad \alpha' u + \beta' v + \gamma' w = \varrho$$

die Bewegung der Flüssigkeit in Richtung von r ergibt

$$(13')\qquad \varrho = \frac{r_0^3}{r^3}\varrho'.$$

An der Kugeloberfläche ist $r = r_0$, somit $\varrho = \varrho'$, was der Bedingung (7) gleichkommt. Nehmen wir eine andere Richtung als die von r, etwa s mit den Richtungscosinus α, β, γ, so folgt aus denselben Gleichungen (10_2) in gleicher Weise

$$(14)\qquad \alpha u + \beta v + \gamma w = \sigma = -\frac{r_0^3}{2r^3}(\sigma' - 3\varrho'\cos(r, s)),$$

σ ist die Bewegung der Flüssigkeit, σ' die des Körpers in Richtung von s. Ist insbesondere die Richtung s senkrecht zu r, so wird

$$(15)\qquad \sigma = -\frac{r_0^3}{2r^3}\sigma',$$

und an der Oberfläche der Kugel $\sigma = -\dfrac{\sigma'}{2}$. Also hat dort die Flüssigkeit in Richtung der Tangente absolut eine nur halb so große Geschwindigkeit wie der Körper und außerdem eine entgegengerichtete Bewegung. Der von H. A. Lorentz hervorgehobene Widerspruch in den Stokesschen Annahmen würde also in der Tat bei den gemachten Voraussetzungen bestehen.

Nach einer Mitteilung von H. A. Lorentz[1]) hat Max Planck in einem Schreiben an ihn darauf hingewiesen, daß jener Widerspruch bis zu einem gewissen Grade behoben werden könne, wenn man annimmt, daß der Äther der allgemeinen Gravitation unterworfen ist, und dementsprechend um den sich bewegenden Körper, etwa die Erde, sich verdichtet. Es kommt hier auf die relative Bewegung des Äthers an, wir sehen also den Körper als ruhend an und den Äther als in der relativen Bewegung gegen ihn begriffen. Die relative Bewegung soll ein Potential besitzen und stationär sein, die absolute hat dann gleichfalls ein Potential und ist stationär, falls die Bewegung des Körpers ein Potential aufweist und sich stationär zeigt. Ist p der Gasdruck im Äther, μ die Dichtigkeit, $\overline{\Phi}$ das relative Potential der Ätherbewegung, V das Potential der Schwerkraft, so hat man nach den Lehren der Aerodynamik[2])

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial z}\right)=0, \tag{16a}$$

$$\int\frac{dp}{\mu}+V+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial z}\right)^2\right]=\text{konst.} \tag{16b}$$

Nun wird die Anahme gemacht, daß die Verdichtung des Äthers um den Körper von der relativen Bewegung unabhängig ist, also nur abhängt von der Schwere des Äthers. Das bedingt, daß die Bewegung des Äthers so gering ausfällt, daß ihr Quadrat in der zweiten Gleichung gegen die anderen Glieder nicht in Betracht kommt, oder daß ihr Quadrat wie eine Konstante nach x, y, z in dieser Gleichung behandelt werden darf. Weil außerdem $dp = R\,d\mu$ ist, wo R die Gaskonstante bedeutet und ferner

$$V=-g\frac{r_0^2}{r}$$

ist, wo nunmehr r_0 den Radius des Körpers und g die Beschleunigung auf ihm feststellt, findet man aus (16a)

$$\int\frac{dp}{\mu}+V=R\int\frac{d\mu}{\mu}-g\frac{r_0^2}{r}=\text{konst.} \tag{17_1}$$

oder

$$\lg\mu=\lg\mu_0+C\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right), \tag{17_2}$$

d. h.

$$\mu=\mu_0' e^{\frac{C}{r}},\qquad \mu_0'=\mu_0 e^{-\frac{C}{r_0}}, \tag{17_3}$$

wo C eine Konstante ist, nämlich

$$C=g\frac{r_0^2}{R}. \tag{18}$$

Um die weitere Zwischenrechnung nachzuholen, bemerke ich folgendes: Die Gleichung (16a), die nun zur Bestimmung von $\overline{\Phi}$ dient, gibt zunächst

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2\overline{\Phi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{\Phi}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{\Phi}}{\partial z^2}\right)=0. \tag{16a}$$

[1]) H. A. Lorentz, l. c. S. 454.

[2]) Gustav Kirchhoff, Mechanik (1883), S. 170.

Die absolute Bewegung des Äthers soll in der Unendlichkeit verschwinden, die relative Bewegung ist also dort gleich der des Körpers. letzterer bewege sich gleichförmig mit einer Geschwindigkeit g', nehmen wir die Richtung dieser Bewegung zur z-Achse, so wäre in der Unendlichkeit

$$\left(\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x} = \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial y} = 0\,, \qquad \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial z} = g'\right)_{r=\infty}. \tag{19}$$

Ferner ist auf der Oberfläche für $r = r_0$

$$\left(\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial r}\right)_{r=r_0} = 0\,, \tag{20}$$

entsprechend der Bedingung (7). Die Lösung, die Max Planck für Φ angegeben hat, ist von der Form $\overline{\Phi} = z \cdot R'$, wo R' eine Funktion nur von r ist. Nehmen wir allgemeiner $\overline{\Phi} = Z \cdot R'$, wo Z eine Funktion von z bedeutet, so wäre, da nach (17) μ nur von r abhängt,

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial\mu}{\partial r}\,, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial\mu}{\partial r}\,, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{\partial\mu}{\partial r}\,;$$

$$\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x} = Z\frac{x}{r}\frac{\partial R'}{\partial r}\,, \qquad \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial y} = Z\frac{y}{r}\frac{\partial R'}{\partial r}\,, \qquad \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial z} = R'\frac{\partial Z}{\partial z} + Z\frac{z}{r}\frac{\partial R'}{\partial r}\,.$$

$$\frac{\partial^2\overline{\Phi}}{\partial x^2} = Z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial R'}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial R'}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 R'}{\partial r^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2\overline{\Phi}}{\partial y^2} = Z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial R'}{\partial r} - \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial R'}{\partial r} + \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 R'}{\partial r^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2\overline{\Phi}}{\partial z^2} = R'\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + 2\frac{z}{r}\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial R'}{\partial r} + Z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial R'}{\partial r} - \frac{z^2}{r^3}\frac{\partial R'}{\partial r} + \frac{z^2}{r^2}\frac{\partial^2 R'}{\partial r^2}\right).$$

Die Differentialgleichung (16 a) gibt hiernach

$$\left\{\begin{aligned} & Z\frac{\partial\mu}{\partial r}\frac{\partial R'}{\partial r} + R'\frac{z}{r}\frac{\partial\mu}{\partial r}\frac{\partial Z}{\partial z} + Z\left(\frac{2}{r}\frac{\partial R'}{\partial r} + \frac{\partial^2 R'}{\partial r^2}\right)\mu \\ & \qquad + 2\frac{z}{r}\frac{\partial R'}{\partial r}\frac{\partial Z}{\partial z}\mu + R'\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\mu = 0\,, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

woraus, da Z nur von z abhängen soll, erhellt, daß $z\frac{\partial Z}{\partial z} = Z$ und $\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$ sein muß, d. h. $Z = a\,z$. Alsdann bleibt

$$\frac{\partial\mu}{\partial r}\left(\frac{\partial R'}{\partial r} + \frac{R'}{r}\right) + \mu\left(\frac{4}{r}\frac{\partial R'}{\partial r} + \frac{\partial^2 R'}{\partial r^2}\right) = 0\,,$$

oder zufolge des Wertes von μ unter (17_2)

$$-\frac{C}{r^2}\left(\frac{\partial R'}{\partial r} + \frac{R'}{r}\right) + \frac{4}{r}\frac{\partial R'}{\partial r} + \frac{\partial^2 R'}{\partial r^2} = 0\,,$$

d. h.

$$r^2\frac{\partial^2 R'}{\partial r^2} + (4r - C)\frac{\partial R'}{\partial r} - \frac{C}{r}R' = 0\,.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung hat nach Max Planck die allgemeine Form

$$R' = \left(\frac{a}{r} + b\right) e^{\frac{\lambda}{r}}.$$

Durch Einsetzen bekommt man wegen

$$\frac{\partial R'}{\partial r} = -\left(\frac{a + b\lambda}{r^2} + \frac{a\lambda}{r^3}\right) e^{\frac{\lambda}{r}}, \quad \frac{\partial^2 R'}{\partial r^2} = \left(2\frac{a + b\lambda}{r^3} + \frac{4a + b\lambda}{r^4}\lambda + \frac{a\lambda^2}{r^5}\right) e^{\frac{\lambda}{r}},$$

$$2\frac{a+b\lambda}{r} + \frac{4a+b\lambda}{r^2}\lambda + \frac{a\lambda^2}{r^3} - 4\frac{a+b\lambda}{r} - 4\frac{a\lambda}{r^2} + C\frac{a+b\lambda}{r^2} + C\frac{a\lambda}{r^3} - C\frac{a}{r^2} - C\frac{b}{r} = 0,$$

somit

$$2(a + b\lambda) = -Cb, \quad b\lambda^2 + C(a + b\lambda) = Ca, \quad a\lambda^2 = -Ca\lambda.$$

Die letzte Gleichung gibt

$$\text{entweder} \quad \lambda = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = -C,$$

aus den anderen beiden Gleichungen folgt dann

$$\text{entweder} \quad a = a, \quad b = -\frac{2a}{C} \quad \text{oder} \quad bC^2 + C(a - bC) = Ca, \quad 2(a - bC) = -Cb.$$

Die zweite Alternative gibt

$$b = +\frac{2a}{C}.$$

Somit ist die allgemeine Lösung

$$R' = \left\{a'\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{C}\right) + a''\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{C}\right) e^{-\frac{C}{r}}\right\},$$

also in der Planckschen Form

$$\overline{\Phi} = z\left[a\left(\frac{C}{2r} - 1\right) + b\left(\frac{C}{2r} + 1\right) e^{-\frac{C}{r}}\right]. \tag{22}$$

Da wir haben

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x} = \frac{x}{r} F, \quad \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y} = \frac{y}{r} F, \quad \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial z} = \frac{\overline{\Phi}}{z} + \frac{z}{r} F, \tag{23}$$

wo

$$F = z\left[-\frac{aC}{2r^2} - \frac{bC}{2r^2} e^{-\frac{C}{r}} + \frac{bC}{r^2}\left(\frac{C}{2r} + 1\right) e^{-\frac{C}{r}}\right] \tag{24}$$

ist und F für $r = \infty$ verschwindet, so werden für $r = \infty$ die $\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y} = 0$. Weiter gibt $\overline{\Phi}$ für $r = \infty$ den Wert $(-a + b)z$. Also muß nach (19) sein

$$-a + b = g'. \tag{25}$$

Zuletzt haben wir

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial r} = \frac{z}{r}\frac{\overline{\Phi}}{z} + z\left[-\frac{aC}{2r^2} - \frac{bC}{2r^2} e^{-\frac{C}{r}} + b\left(\frac{C}{2r} + 1\right)\frac{C}{r^2} e^{-\frac{C}{r}}\right], \tag{26}$$

also, da nach (20) $\left(\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial r}\right)_{r=r_0} = 0$ sein soll, nach einfacher Zwischenrechnung

$$a = b\left(1 + \frac{C}{r_0} + \frac{C^2}{2r_0^2}\right)e^{-\frac{C}{r_0}}, \tag{27}$$

somit

$$a = \frac{g'\left(1 + \frac{C}{r_0} + \frac{C^2}{2r_0^2}\right)e^{-\frac{C}{r_0}}}{1 - \left(1 + \frac{C}{r_0} + \frac{C^2}{2r_0^2}\right)e^{-\frac{C}{r_0}}}, \quad b = \frac{g'}{1 - \left(1 + \frac{C}{r_0} + \frac{C^2}{2r_0^2}\right)e^{-\frac{C}{r_0}}}. \tag{28}$$

Multiplizieren wir die Werte für $\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x}, \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y}, \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial z}$ mit α, β, γ und verstehen unter diesen Größen Richtungscosinus einer Linie s, die senkrecht steht zu r, so wird, weil dann $\frac{x\alpha + y\beta + z\gamma}{r} = 0$ ist, die Geschwindigkeit σ des Äthers in dieser Richtung nach (23)

$$\sigma = \gamma\frac{\overline{\Phi}}{z} = \gamma\left[a\left(\frac{C}{2r} - 1\right) + b\left(\frac{C}{2r} + 1\right)e^{-\frac{C}{r}}\right]. \tag{29}$$

Die Größe $\frac{C}{r_0} = \frac{1}{R}g\,r_0$ beträgt für Wasserstoff an der Oberfläche der Erde bei 0° C etwa

$$\frac{1}{273 \cdot 41{,}4 \cdot 10^6}\,985 \cdot 6{,}4 \cdot 10^8,$$

also ungefähr 56. Für Luft betrüge die Zahl etwa 790. Wenn also der Äther an der Erdoberfläche auch nur zur Dichte des Wasserstoffs verdichtet wäre, käme dort die Größe $e^{-\frac{C}{r}}$ gar nicht in Betracht. Also wären a und b beide sehr klein und σ, die Gleitgeschwindigkeit des Äthers an der Erde wäre zu vernachlässigen, d. h. der Äther bewegte sich an der Erde wie diese selbst.

H. A. Lorentz berechnet, daß die Gleitgeschwindigkeit des Äthers nur so viel betrüge, als sie sich durch die Aberration eben noch verraten würde (etwa $^1/_2$% der Revolutionsgeschwindigkeit der Erde), wenn $\frac{C}{r_0}$ = gegen 10 sein sollte.

An irdischen Gasen nimmt nun $\frac{C}{r}$ ab mit wachsender Dünnheit. Da dem Äther an der Erdoberfläche eine Verdichtung auch nur gleich der des Wasserstoffs zu-zu schreiben mißlich ist, und selbst eine solche von ein Zehntel der Dichte des Wasserstoffs noch zu hoch wäre, müßte man annehmen, daß für die Wirkung auf den Äther $\frac{g}{R}$ anders ausfällt, als für die auf irdische Gase.

So unsicher diese Berechnung ist, so zeigt sie doch die Möglichkeit, die beiden von Stokes gemachten Annahmen bis zu einem gewissen Grade zu versöhnen.

In einer anderen Arbeit (mehr Notiz) bezieht Stokes[1]) die Aberration auf eine andere Richtung als die der Wellennormale, eigentlich auf den relativen Strahl.

Grenzt man auf einer Wellenfläche ein Stück durch eine geschlossene Linie ab, so streift diese Linie während der Ausbreitung der Fläche auf einem Zylinder

[1]) Phil. Mag. **28**, 76 (1846); Mathem. and Phys. Papers **1**, 138.

mantel. Ist diese Linie hinreichend eng, so bildet der Zylindermantel den „Strahl". Für die Richtungscosinus dieses Strahls leitet Stokes die Formeln ab

$$(30_1) \qquad d\bar{\alpha} = 2q\,dt\,, \quad d\bar{\beta} = -2p\,dt\,.$$

Wenn man wieder $dt = \frac{1}{c_0}\,dz$ ansetzt, ist

$$(30_2) \qquad d\bar{\alpha} = \frac{2q}{c_0}\,dz\,, \quad d\bar{\beta} = -\frac{2p}{c_0}\,dz\,.$$

Stokes hat in seiner ersten Arbeit über Aberration erklärt, daß die Richtung, in der ein Himmelskörper gesehen wird, senkrecht ist zur Front der Wellen, die von diesem Körper ausgehen. Es kommt also die Richtung der Wellennormale in Frage. In der zweiten Arbeit aber hält er die Richtung des von ihm wie angegeben definierten Strahls (nämlich: the line along which the same portion of a wave moves relatively to the earth) für die zuletzt mit einem mit Fadenkreuz versehenen Teleskop beobachtete Richtung. Also wären dann die Gleichungen für $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ entscheidend. Diese aber geben Geradlinigkeit für den Strahl, wenn die Bewegung ein Potential hat. Darauf hat Stokes in dem Zusatz zur ersten Arbeit großen Wert gelegt. Denn nunmehr könne man ja die Erklärung der Aberration durch die Bewegung der Erde allein auf phoronomischem Wege (S. 10) wieder aufnehmen, obwohl der Äther sich bewegt. Diese Bemerkung ist von hoher Wichtigkeit. Wir kommen darauf und auf Stokes' Theorie überhaupt zurück.

Wir wenden uns wieder zu den Gleichungen (5) ff., um an sie noch einige Bemerkungen anzuschließen. An der Oberfläche des lichtempfangenden und sich bewegenden Körpers haben wir für die Ätherbewegung nach (10_2)

$$(31) \quad u_0 = -\tfrac{1}{2}(u' - 3\alpha'\varrho')\,, \quad v_0 = -\tfrac{1}{2}(v' - 3\beta'\varrho')\,, \quad w_0 = -\tfrac{1}{2}(w' - 3\gamma'\varrho')\,.$$

Kommt ein Strahl an den beleuchteten Körper, so krümmt sich seine Bahn. Wir werden aber später bemerken, daß von dieser Krümmung bis auf Größen, die selbst gegen die Aberration nicht in Betracht kommen, abgesehen werden kann. Alsdann haben wir an der Oberfläche des Körpers für die Lichtgeschwindigkeit

$$(32_1) \qquad c_0' = c_0 + \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0\,,$$

d. h.

$$(32_2) \quad c_0' = c_0 - \tfrac{1}{2}(s' - 3\varrho'\cos(r, S)) = c_0 - \frac{g'}{2}(\cos(g', S) - 3\cos(g', r)\cos(r, S))\,.$$

Die Gleichungen gelten an der Oberfläche des beleuchteten Körpers, aber noch innerhalb des diesen umgebenden Äthers. Was geschieht, wenn der Strahl in den Körper selbst eintritt, z. B. in ein optisches Instrument, können wir aus einer Theorie wie die vorstehende nicht ableiten. Denn mit der Voraussetzung dieser Theorie, daß nämlich der äußere Äther an dem Körper nur gleiten kann, sind mehrere Annahmen über das Verhalten des inneren Äthers vereinbar. So können wir den absoluten Widerstand des Körpers gegen das Eindringen oder Ausströmen von Äther in die Substanz des Körpers selbst verlegen; oder meinen, daß zwischen dem äußeren und dem inneren Äther jede Verbindung fehlt, als wenn es sich um zwei nicht mischbare Flüssigkeiten handelte; oder glauben, daß der Äther innerhalb des Körpers sich wie eine starre Substanz verhält usf. Die nächstliegende Annahme wäre, daß der Äther innerhalb des Körpers mit diesem fest verbunden ist und sich wie dieser bewegt. Die Verbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes muß dann, beim Eintritt in diesen Äther, z. B. in ein optisches Instrument, eine plötzliche Änderung erfahren, und zwar wird sie — abgesehen von der Änderung durch die Änderung der optischen Verhältnisse —

$$c = c_0' + \alpha(u'' - u_0) + \beta(v'' - v_0) + \gamma(w'' - w_0)\,, \tag{33}$$

woselbst, mit einem Koordinatensystem, dessen Ursprung sich in der Mitte des Körpers befindet,

$$u'' = u' + z_0 q' - y_0 r'\,, \quad v'' = v' + x_0 r' - z_0 p'\,, \quad w'' = w' + y_0 p' - x_0 q'$$

ist. Erleidet der Strahl keine plötzliche Knickung beim Eintritt in den Äther des Körpers, so ist

$$c = c_0 + \alpha u'' + \beta v'' + \gamma w''\,. \tag{34}$$

Doch kommen für den Strahlengang noch andere Umstände in Betracht, über die später gesprochen wird.

Ist nicht, wie bisher, der belichtete Körper der sich bewegende, sondern der leuchtende, so muß, da auch jetzt die Bewegung des Äthers tangential zur Oberfläche dieses Körpers im allgemeinen verschieden ist von der dieses Körpers nach gleicher Richtung, und nur normal zur Oberfläche mit der dieses Körpers nach gleicher Richtung übereinkommt, die Verbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes unmittelbar schon am Körper beim Übergang in den Äther einen Sprung erfahren, wenn das Licht nicht gerade senkrecht vom Körper ausgeht. Und überhaupt wird die Verbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes deshalb von der Ausgangsrichtung abhängig sein. Senkrecht ausgehende Strahlen werden eine andere Geschwindigkeit besitzen, als streifend ausgehende, und nur erstere werden diejenige Geschwindigkeit aufweisen, die ihnen aus der Bewegung des Körpers allein nach dem Dopplerschen Prinzip zukommen soll (s. jedoch später). Die weitere Bewegung des Äthers modifiziert noch diese Geschwindigkeiten, hört aber sehr bald auf zu wirken. Es kann kein Zweifel sein, daß für einen fernen Beobachter die Geschwindigkeit in Betracht kommt, wie sie zuletzt im Äther erreicht ist, nicht die Ausgangsgeschwindigkeit allein. Die Bewegung des Körpers spielt aber insofern mit, als sie die Bewegung des Äthers bestimmt und die Ausgangsgeschwindigkeit feststellt.

Nun sind die relativen Geschwindigkeitskomponenten des Äthers gegen den Körper unmittelbar am Körper selbst

$$\left\{\begin{aligned} -u'' &= u' - (z' - z_0)\,q' + (y' - y_0)\,r' + \tfrac{1}{2}(u' - 3\,\alpha'\varrho')\,,\\ -v'' &= v' - (x' - x_0)\,r' + (z' - z_0)\,p' + \tfrac{1}{2}(v' - 3\,\beta'\varrho')\,,\\ -w'' &= w' - (y' - y_0)\,p' + (x' - x_0)\,q' + \tfrac{1}{2}(w' - 3\,\gamma'\varrho')\,,\end{aligned}\right. \tag{35}$$

wo x_0, y_0, z_0 die Koordinaten eines Oberflächenpunktes und x', y', z' die des Mittelpunktes des leuchtenden Körpers bedeuten. Kennen wir c_0' die Ausgangsgeschwindigkeit des Strahls, bestimmt allein durch die fortschreitende Bewegung des Mittelpunkts des Körpers, so haben wir in der einfachsten Darstellung, für die Lichtgeschwindigkeit (c) im Äther unmittelbar am Körper

$$(c) = c_0' - (\alpha_0 u'' + \beta_0 v'' + \gamma_0 w'')\,, \tag{36}$$

und darin ist

$$c_0' = c_0 + \alpha_0 u' + \beta_0 v' + \gamma_0 w'\,, \tag{37}$$

wo c_0 die Lichtgeschwindigkeit bei ruhendem Körper in ruhendem Äther bedeuten würde, und α_0, β_0, γ_0 die Richtungscosinus der Welle unmittelbar am Körper angeben. Setzen wir

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \bar{c}_0 = c_0 + \alpha_0(u' - (z'-z_0)\,q' + (y'-y_0)\,r') + \beta_0(v' - (x'-x_0)\,r' + (z'-z_0)\,p') \\ + \gamma_0(w' - (y'-y_0)\,p' + (x'-x_0)\,q')\,, \end{aligned}\right.$$

so wird

$$(39_1)\qquad (c) = \bar{c}_0 + \tfrac{3}{2}\,(\alpha_0(u' - \varrho'\alpha') + \beta_0(v' - \varrho'\beta') + \gamma_0(w' - \varrho'\gamma'))\,.$$

$\bar{c}_0$ ist hier die Verbreitungsgeschwindigkeit aus dem Dopplerschen Prinzip. In anderer Schreibweise wird

$$(39_2)\qquad (c) = \bar{c}_0 + \tfrac{3}{2}\,g'(\cos(g', S) - \cos(g', r)\cos(r, S))\,.$$

Liegen die drei Richtungen g', S, r in einer Ebene, und handelt es sich um einen streifenden Strahl, so daß $\widehat{(g', S)} = 90^\circ - (g', r)$ wird, so kommt

$$(c) = \bar{c}_0 + \tfrac{3}{2}\,g'\sin(g', r)\,.$$

Das Zusatzglied $\frac{1}{2}g'\sin(g', r)$ findet sich bei H. A. Lorentz (l. c.) für die relative Bewegung des Äthers für diesen Fall angegeben. Die Formel lehrt aber, daß wir $(c) = \bar{c}_0$ haben, wenn

$$\cos(g', S) = \cos(r, g')\cos(r, S)$$

ist. Das findet statt, wenn r und S zusammenfallen, der Strahl senkrecht ausgeht, wie wir schon wissen. In der Ebene ist dieses die einzige Möglichkeit. Im Raume könnte die Gleichung auch erfüllt sein, wenn die Ebene $\overline{r, g'}$ senkrecht steht zur Ebene $\overline{r, S}$, denn wir haben nach der sphärischen Trigonometrie

$$\cos(g', S) = \cos(r, g')\cos(r, S) + \sin(r, g')\sin(r, S)\cos(\overline{r, g'},\ \overline{r, S})\,.$$

Also gibt es im allgemeinen nur zwei Richtungen, nach denen ausgehend Strahlen sich gemäß dem Dopplerschen Prinzip vertreiben, wenn wir von den Modifikationen durch die Ätherbewegung in einigem Abstand vom Körper absetzen. Sonst findet also Abweichung von jenem Prinzip statt, und es ist z. B. bei streifender Emision

$$(c) = \bar{c}_0 + \tfrac{3}{2}\,g'\cos(g', S) = c_0 + \tfrac{3}{2}\,g'\sin(r, g')\cos(\overline{r, g'},\ \overline{r, S})\,.$$

In der Entfernung r vom Körper ist die Lichtgeschwindigkeit

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} (c') = (c) - \frac{r_0^3}{2r^3}(\alpha\,u' + \beta\,v' + \gamma\,w' - 3\,\varrho'\cos(r, S)) \\ + \tfrac{1}{2}(\alpha\,u' + \beta\,v' + \gamma\,w' - 3\,\varrho'\cos(r, S))\,. \end{aligned}\right.$$

α, β, γ sind die Richtungscosinus des Strahls an der um r vom Mittelpunkt des Körpers abstehenden Stelle. Ist r gegen r_0 hinlänglich groß, so bleibt

$$(41)\qquad (c_0') = (c) + \tfrac{1}{2}(\alpha\,u' + \beta\,v' + \gamma\,w' - 3\,\varrho'\cos(r, S))\,.$$

Und hieraus ersieht man, daß, wenn der Strahl so wenig gekrümmt ist, daß man α_0, β_0, γ_0 mit α, β, γ vertauschen darf, die Verbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in hinreichendem Abstand vom leuchtenden Körper sich ganz allein nach dem Dopplerschen Prinzip richtet, als wenn der Äther überhaupt in Ruhe wäre. So finden wir auch hier, daß die Annahme einer Bewegung des Äthers nicht gegen die Erfahrung spricht, wenn nur die Geschwindigkeit gegen die der Lichtverbreitung hinreichend klein ist, und bei allen astronomischen Erfahrungen haben wir es mit sehr weit abstehenden Lichtquellen zu tun. Von dieser Anschauung scheint auch H. A. Lorentz bei der mitgeteilten Ableitung des Dopplerschen Prinzips ausgegangen zu sein, und ich glaube, auch Stokes in seiner Aberrationstheorie.

Wir kommen nun zu der Theorie von H. A. Lorentz selbst[1]). Er nimmt an: 1. Daß die Bewegung der Erde und der Körper auf ihr ein Potential hat. 2. Daß der freie Äther in der Umgebung der Erde sich in Bewegung befindet. 3. Daß auch diese Bewegung ein Potential hat, also rotationslos geschieht. 4. Daß der in einem durchsichtigen Körper enthaltene Äther an der Bewegung des äußeren Äthers teilnimmt, und zwar gleichfalls mit einem Potential. 5. Außerhalb und innerhalb des Körpers sollen die Geschwindigkeitskomponenten und das Potential der Ätherbewegung stetig sich ändern. 6. Jede Elementarwelle innerhalb eines Körpers soll in die Bewegung dieses Körpers gemäß dem Fresnelschen Gesetz einbezogen werden. Wenn g die Bewegung des Körpers bedeutet, so soll also die relative Bewegung des Äthers in früherer Bezeichnung $\bar{g} = g(1-a) = \frac{1}{n^2} g = \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 g$ sein, wo c_0 sich auf den freien ruhenden Äther, c auf den ruhenden Körper bezieht. Setzt man

(42) $$\frac{1}{n^2} = \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 = \varkappa \, .$$

so soll also bestehen

(43) $$\bar{g} = \varkappa g \, .$$

Sei (Fig. 6) P ein Punkt, von dem zur Zeit t eine Elementarwelle ausgeht, P' der Punkt, wohin in der Zeit dt die Elementarwelle mit ihrem Mittelpunkt durch die Relativbewegung fortgetragen wird, Q der Punkt, den sie in derselben Zeit erreicht, in der sie von P unmittelbar hingelangt wäre, so haben wir

Fig. 6.

$$P'Q^2 = PQ^2 + PP'^2 - 2\,PQ \cdot PP' \cos(PQ, PP') \, .$$

Es ist aber

$$\frac{P'Q}{dt} = \frac{c}{dt} \, , \quad \frac{PQ}{dt} = \frac{c'}{dt} \, , \quad PP' = \varkappa g \, ,$$

also wird

$$c'^2 - 2c'\varkappa g \cos(PQ, PP') = c^2 - \varkappa^2 g^2$$

oder

(44) $$c' = \varkappa g \cos(PQ, PP') + \sqrt{c^2 - \varkappa^2 g^2 \sin^2(PQ, PP')} \, .$$

Für im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit c geringe Geschwindigkeiten g erhält man

(45_1) $$c' = c + \varkappa g \cos(PQ, PP') \, .$$

Setzt man

$$g \cos(PQ, PP') = s' \, ,$$

so wird

(45_2) $$c' = c + \varkappa s' \, .$$

PQ ist der relative Strahl, s' die in seine Richtung fallende Bewegungsgeschwindigkeit. Aus meinen späteren Betrachtungen wird sich ergeben, daß diese hier als Näherungsformel auftretende Gleichung einer strengen Formel (S. 37) für die Verbreitung der Wellenfläche in Richtung der Wellennormale entspricht. Es mögen nun von A eine Reihe von relativen Strahlen S' ausgehen, die in einem

[1]) Abhandlungen 1, 351 ff.

anderen Punkt B enden können; für ein Element dS' eines der Strahlen ist die relative Verbreitungszeit

$$dt = \frac{dS'}{c'} = \frac{dS'}{c + \varkappa s'} = \frac{dS'}{c} - \frac{\varkappa s'}{c^2} dS' . \tag{46}$$

Für den ganzen Strahl also

$$t = \int_A^B \frac{dS'}{c} - \int_A^B \frac{\varkappa s' dS'}{c^2} = \frac{S'}{c} - \frac{\varkappa}{c^2} \int_A^B s' dS' . \tag{47}$$

Nun sollte die Bewegung ein Potential Φ haben, so daß, da es sich um die Bewegung des Äthers gegen die Materie handelt, $s' = \frac{\partial \varphi}{\partial S'}$ ist, also wird

$$t = \frac{S'}{c} - \frac{\varkappa}{c^2} (\varphi_B - \varphi_A) , \tag{48}$$

wonach also das zweite Glied für alle Wege von A nach dem gleichen Endpunkt B den gleichen Betrag aufweist. Nach dem Fermatschen Prinzip schlägt aber das Licht denjenigen Weg von A nach B tatsächlich ein, für den t Minimum (oder Maximum) wird, also ist auch für die relative Verbreitung $\frac{S'}{c}$ ein Minimum, d. h. der relative Strahl ist gerade.

In derselben Weise zeigt H. A. Lorentz, daß für die relativen Strahlen auch das Brechungsgesetz gilt, wenn beide Medien sich gleich bewegen. Geht ein relativer Strahl von A aus nach einem Punkt B' einer Grenzfläche zwischen zwei Medien 1 und 2 und von dort nach einem Punkt B des zweiten Mediums, so haben wir

$$t_1 = \frac{S'_{AB'}}{c_1} - \frac{\varkappa_1}{c_1^2} (\varphi_{B'} - \varphi_A) , \qquad t_2 = \frac{S'_{B'B}}{c_2} - \frac{\varkappa_2}{c_2^2} (\varphi_B - \varphi_{B'}) ,$$

also

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S'_{AB'}}{c_1} + \frac{S'_{B'B}}{c_2} - \left(\frac{\varkappa_1}{c_1^2} (\varphi_{B'} - \varphi_A) + \frac{\varkappa_2}{c_2^2} (\varphi_B - \varphi_{B'}) \right) .$$

Es ist aber

$$\frac{\varkappa_1}{c_1^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{c_1^2}{c_0^2} = \frac{1}{c_0^2} , \qquad \frac{\varkappa_2}{c_2^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{c_0^2}{c_0} = \frac{1}{c_0^2}$$

überhaupt

$$\frac{\varkappa}{c^2} = \frac{1}{c_0^2} \quad \text{eine universelle Konstante,} \tag{49}$$

somit

$$t = \frac{S'_{AB'}}{c_1} + \frac{S'_{B'B}}{c_2} - \frac{1}{c_0^2} (\varphi_B - \varphi_A) . \tag{50}$$

Das letzte Glied ist von der Lage von B' unabhängig, also wird t ein Minimum (oder Maximum), wenn $\frac{S_{AB'}}{c_1} + \frac{S_{B'B}}{c_2}$ ein solches ist, wie bei absoluten Strahlen. Der Satz schließt auch Reflexion ein. Nun gilt der Satz allgemein, wie viele Medien auch in Frage kommen, und es ist immer

$$t = \int \frac{dS'}{c'} = \int \frac{dS'}{c} - \frac{1}{c_0^2} (\varphi_B - \varphi_A) , \tag{51}$$

so daß die Minimumbedingung sich wie bei absoluten Strahlen auf $\int \frac{dS'}{c}$ erstreckt. Alles bis auf Größen zweiter Ordnung. Indessen möchte ich bemerken, daß da der Fermatsche Satz sich auf die kleinsten Strecken bezieht, sein eigentlicher Ausdruck lautet

(52) $$\int \delta(dt) = \int \delta\left(\frac{dS'}{c'}\right) = 0\,,$$

also hätte man

(53) $$\int \delta\left(\frac{dS'}{c} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial \varphi}{\partial S'}dS'\right) = 0\,,$$

und so müßte

$$\int \delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial S'}dS'\right) = 0$$

sein, was von vornherein nicht einleuchtet. Darauf kommen wir noch zu sprechen.

Der Winkel zwischen einem relativen Strahl S' und dem zugehörigen absoluten, der Wellennormale, ist gegeben durch

(54) $$\sin(S', S) = \frac{\varkappa g \sin(S', g)}{c}\,,$$

wie man aus dem Dreieck $PP'Q$ (Fig. 6) entnimmt, wo ja $PP' = \varkappa g$, $P'Q = S$, $PQ = S'$ und $\sphericalangle QPP' = (S', g)$ ist. Ist die Bewegung quer zu den relativen Strahlen gerichtet, und handelt es sich um die Verbreitung in Luft, wo $\varkappa$ sich von 1 nur um etwa $\frac{3}{10000}$ unterscheidet, so folgt

(55) $$\sin(S', S) = \frac{g}{c}$$

die übliche Aberrationsgleichung.

Sei A ein Punkt x', y', z', von dem Wellen ausgehen oder zu dem Wellen hinziehen, und l eine Strecke, auf der das Licht sich mit der Geschwindigkeit c verbreitet, die Komponenten von c sind dann $\pm\frac{x-x'}{l}c$, $\pm\frac{y-y'}{l}c$, $\pm\frac{z-z'}{l}c$ und die der relativen Bewegung des Äthers gegen den Körper $-\varkappa\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $-\varkappa\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $-\varkappa\frac{\partial \Phi}{\partial z}$. Die Resultante der beiden Bewegungen besitzt die Komponenten $\pm\frac{x-x'}{l}c - \varkappa\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\pm\frac{y-y'}{l}c - \varkappa\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\pm\frac{z-z'}{l}c - \varkappa\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, und da

$$l = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad \text{ist,}$$

so kann man diese Komponenten auch schreiben

$$\frac{\partial}{\partial x}(\pm cl - \varkappa\Phi)\,, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\pm cl - \varkappa\Phi)\,, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\pm cl - \varkappa\Phi)\,.$$

Folglich ist die Resultante senkrecht zu der Fläche

(56) $$\pm cl - \varkappa\Phi = \text{konst.} = C\,,$$

und da die Welle auch senkrecht ist zu der Resultante von c und $\varkappa g$, so ist eben $\pm c\, l - \varkappa \Phi =$ konst. die Wellenfläche, deren verschiedene Lagen durch verschiedene Werte der Konstante gegeben sind.

Ist die Bewegung im Medium nach Größe und Richtung gleichförmig, so kann man setzen, wenn ihre Komponenten g_x, g_y, g_z heißen

$$\Phi = \text{konst.} + (x' - x)\, g_x + (y' - y)\, g_y + (z' - z)\, g_z = \text{konst.} + l \cos(g, l)\, g\,,$$

also gibt die Gleichung (56)

$$l(c \mp \varkappa g \cos(g, l)) = C\,, \tag{56'}$$

oder bis auf Größen zweiter Ordnung

$$l = \frac{C}{c} \pm C \frac{\varkappa g}{c^2} \cos(g, l)\,, \tag{57}$$

das ist die Gleichung einer Kugelfläche mit dem Radius $\frac{C}{c}$ und einem Mittelpunkt, der in Richtung der Ätherbewegung um die Strecke $\frac{\varkappa g}{c^2}$ vorgeschoben ist. Auch von diesem Satz werde ich später beweisen, daß er nicht angenähert wie hier, sondern strenge Geltung hat. A ist der Konzentrationspunkt der ausgehenden Strahlen oder der ankommenden, je nachdem an den Gleichungen das obere Zeichen oder das untere für das zweite Glied gewählt wird. Da es sich um Kugeln handelt, so laufen die Strahlen (hier muß man sagen bis auf Größen zweiter Ordnung) in der Tat in diesem Punkte zusammen.

Die Gleichung 50) wird noch benutzt, um zu zeigen, daß auch die Diffraktion durch die Bewegung des Äthers, bis auf Größen zweiter Ordnung, nicht beeinflußt wird. In der Tat ist das zweite Glied $\frac{1}{c_0^2}(\varphi_B - \varphi_A)$ für alle Strahlen, welche von A ausgehend B erreichen, das gleiche, folglich haben zwei solche Strahlen, wenn Bewegung stattfindet, die gleiche Zeitdifferenz wie wenn solche nicht erfolgt. Also ist auch die Verteilung der Intensitäten die gleiche. In entsprechender Weise erfolgt die Darlegung für Interferenz.

Ehe ich weiter gehe, lasse ich eine allgemeine Untersuchung über die Verbreitung von Wellen in bewegtem Äther folgen, wobei über die Ursache der Bewegung und meist auch über ihre Größe keine Voraussetzungen gemacht werden.

Nur der einfacheren Ausdrucksweise wegen sprechen wir von bewegtem Äther, sollte sich der Äther nicht bewegen, so gelten die Ergebnisse für die bewegten Stoffe, innerhalb deren der Äther sich befindet, indem ihm die entgegengesetzte Bewegung unterstellt wird. Die ganze Untersuchung liegt zwar auf dem Gebiete der Undulationstheorie, aber ihre Ergebnisse sind auf gewisse Theorien der Elektrodynamik ohne Änderung zu übertragen, daher diese Untersuchung eingehender geführt ist, als manchem, dem die Undulationstheorie nur noch historischen Wert hat, vielleicht gerechtfertigt erscheinen könnte.

4. Verbreitung von Wellen in bewegtem Äther.

Wir benutzen die bekannten Gleichungen der Elastizitätstheorie, indem wir annehmen, daß Bewegungen sich den Lichtschwingungen superponieren, wie es auch die beiderseitigen Kräfte tun sollen. Wir haben dann für die Lichtschwingungen ξ, η, ζ, in Gustav Kirchhoffs Schreibweise (indem wir immer Schwingung und sonstige Bewegung durch die Worte „Schwingung", „Bewegung" unterscheiden)

$$(1)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -\dfrac{\partial X_x}{\partial x} - \dfrac{\partial X_y}{\partial y} - \dfrac{\partial X_z}{\partial z}, \\ \varrho \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -\dfrac{\partial Y_x}{\partial x} - \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} - \dfrac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ \varrho \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -\dfrac{\partial Z_x}{\partial x} - \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} - \dfrac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{cases}$$

unter üblicher Bedeutung der Buchstaben. Der Äther wird für die Lichtschwingungen inkompressibel angenommen. Für andere Bewegungen könnte er kompressibel sein, davon ist nichts bekannt. Wir werden meist annehmen, daß er für die ganze Bewegung inkompressibel ist, also die Beziehung besteht:

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dz}{dt}\right) = 0 .$$

Nun ist, indem

$$\frac{dx'}{dt} = u, \qquad \frac{dy'}{dt} = v, \qquad \frac{dz'}{dt} = w$$

gesetzt wird, wo u, v, w die Komponenten der Bewegung des Äthers bedeuten,

$$(3)\quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} u + \frac{\partial \xi}{\partial y} v + \frac{\partial \xi}{\partial z} w ,$$

$$(3')\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + u\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t\,\partial x} + v\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t\,\partial y} + w\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t\,\partial z} \\ \quad + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}u\right) + u\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}u\right) + v\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}u\right) + w\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}u\right) \\ \quad + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}v\right) + u\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}v\right) + v\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}v\right) + w\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}v\right) \\ \quad + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z}w\right) + u\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z}w\right) + v\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z}w\right) + w\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z}w\right) \\ = \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + 2\left(u\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t\,\partial x} + v\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t\,\partial y} + w\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t\,\partial z}\right) + \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial t} \\ \quad + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial t} + u^2\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + v^2\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + w^2\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} \\ \quad + \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\left(u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \quad + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\left(u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \quad + 2\left(uv\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} + vw\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} + wu\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial x}\right), \end{cases}$$

oder

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + 2\left(u\frac{\partial^2\xi}{\partial t\partial x} + v\frac{\partial^2\xi}{\partial t\partial y} + w\frac{\partial^2\xi}{\partial t\partial z}\right)\\
&\quad + 2\left(uv\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + vw\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial z} + wu\frac{\partial^2\xi}{\partial z\partial x}\right)\\
&\quad + u^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + v^2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + w^2\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\\
&\quad + \frac{du}{dt}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial\xi}{\partial z},
\end{aligned}\right.
$$

und ähnlich für die entsprechenden Größen η, ζ. Für die X_x usf. nehmen wir die üblichen Ausdrücke gleichfalls in der Darstellung von Gustav Kirchhoff.

a) Verbreitung von ebenen Wellen in gleichförmig bewegtem Äther.

Es sei die übrige Bewegung des Äthers konstant nach Zeit und Ort. Unter welchen Umständen ist eine ebene Welle möglich? Wir nehmen erst die Inkompressibilitätsbedingung (2). Für

$$\xi = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\alpha + y\beta + z\gamma}{\lambda} + \delta\right) \quad \text{usf.}$$

erhält man

$$\frac{dx}{dt} = A\,2\pi\left(\frac{1}{T} - u\frac{\alpha}{\lambda} + v\frac{\beta}{\lambda} + w\frac{\gamma}{\lambda}\right)\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\alpha + y\beta + z\gamma}{\lambda} + \delta\right) + u$$

und ähnlich die entsprechenden Größen.

Also

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dz}{dt}\right) =$$

$$\frac{(2\pi)^2}{\lambda}\left(\frac{1}{T} - \frac{\alpha u + \beta v + \gamma w}{\lambda}\right)(A\alpha + B\beta + C\gamma)\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\alpha + y\beta + z\gamma}{\lambda} + \delta\right).$$

Ist $\frac{1}{T} - \frac{\alpha u + \beta v + \gamma w}{\lambda}$ von Null verschieden, so müssen wir hiernach haben

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0\,.$$

Das ist die Bedingung für transversale Schwingungen, solche sind also in der Tat möglich. Nur wenn $\frac{1}{T} = \frac{\alpha u + \beta v + \gamma w}{\lambda}$ oder $\frac{\lambda}{T} = s$ sein sollte, wo s die Bewegung in Richtung der Wellennormale, des Strahles, ist, kann die Inkompressibilitätsbedingung erfüllt sein, ohne daß die Wellen quer zur Fortpflanzungsrichtung stehen. Wir werden aber bald sehen, daß $\frac{\lambda}{T}$ stets von s verschieden sein muß. Zugleich erkennt man, daß auch die gewöhnliche Beziehung

$$(5)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0$$

erfüllt ist.

Mit konstanten Werten für u, v, w haben wir nun als Bewegungsgleichungen aus (4) und (1)

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + 2\left(u \frac{\partial^2 \xi}{\partial t\, \partial x} + v \frac{\partial^2 \xi}{\partial t\, \partial y} + w \frac{\partial^2 \xi}{\partial t\, \partial z}\right) \\ &\quad + 2\left(u v \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial y} + v w \frac{\partial^2 \xi}{\partial y\, \partial z} + w u \frac{\partial^2 \xi}{\partial z\, \partial x}\right) \\ &\quad + u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + w^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{K}{\varrho} \Delta \xi \end{aligned}\right.$$

und zwei entsprechende Gleichungen für η und für ζ.

Wir setzen

$$(7)\quad \frac{K}{\varrho} = c_0^2 ,$$

c_0 ist alsdann die Verbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im ruhenden Äther. Wir bekommen aber

$$\frac{1}{T^2} - 2(u\alpha + v\beta + w\gamma)\frac{1}{\lambda T} + 2(uv\alpha\beta + vw\beta\gamma + wu\gamma\alpha)\frac{1}{\lambda^2} + (u^2\alpha^2 + v^2\beta^2 + w^2\gamma^2)\frac{1}{\lambda^2} = c_0^2 \frac{1}{\lambda^2} .$$

Die Größe

$$(8_1)\quad u\alpha + v\beta + w\gamma = s$$

ist die Geschwindigkeit des Äthers in Richtung der Wellennormale. Hiernach wird

$$(9_1)\quad \frac{1}{T^2} - \frac{2s}{\lambda T} + \frac{s^2}{\lambda^2} = c_0^2 \frac{1}{\lambda^2} ,$$

oder

$$(9_2)\quad \frac{\lambda}{T} = c_0 + s .$$

Hätten wir bei geringen Bewegungen die Glieder mit den Produkten und Quadraten der u, v, w fortgelassen, so wäre

$$\frac{\lambda}{T} = s + \sqrt{c_0^2 + s^2}$$

erfolgt, in erster Näherung also wieder wie (9_2).

Die gleiche Beziehung muß aus den Formeln für und η für ζ folgen. Da $\frac{\lambda}{T}$ auch die Verbreiterungsgeschwindigkeit der Welle im bewegten Äther bedeutet, so ist diese

$$(10_1)\quad c = c_0 + s .$$

Hieraus ergeben sich folgende Schlüsse:

a) Beziehen wir λ_0 und T_0 auf den ruhenden Äther, so wird

$$(11)\quad \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda_0}{T_0} + s .$$

Welche von den Größen durch die Bewegung des Äthers eine Änderung erfährt, ob λ oder T, oder ob beide sich ändern, läßt sich ohne weiteres nicht entscheiden. H. A. Lorentz, der die obige Beziehung auf einem ganz anderen

Wege als Näherungsgleichung abgeleitet hat, scheint λ für unveränderlich anzusehen, dann würde T variieren. Ich werde bald Gründe dafür beibringen, daß im Gegenteil λ als die veränderliche, T als die unveränderliche Größe angesehen werden muß. Alsdann wäre

(12) $$\lambda = \lambda_0 + s\,T_0\,,$$

statt wie bei H. A. Lorentz

(13) $$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} + \frac{s}{\lambda_0}\,.$$

Die Wellenlänge fände sich nach (12) algebraisch vergrößert um die Strecke, um welche der Äther innerhalb einer Schwingungsperiode in Richtung der Wellennormale, kurz des Strahls, sich fortbewegt. Sie fiele größer aus, wenn diese Bewegung so erfolgt wie die des Strahls, kleiner im entgegengesetzten Fall. Bewegungen quer zum Strahl hätten keinen Einfluß.

b) Die Beziehung $c = c_0 + s$ entspricht der Annahme von H. A. Lorentz, während früher man $c = c_0$ ansah und λ und T so variieren ließ, daß eben $\frac{\lambda}{T}$ immer gleich c_0 blieb. Die Lichtgeschwindigkeit findet sich also vermehrt um die Geschwindigkeit der Bewegung des Äthers in Richtung der Wellennormale, Querbewegungen haben keinen Einfluß. Bezeichnen wir die resultierende Bewegungsgeschwindigkeit des Äthers mit g und die Richtung der Wellennormale mit ν, so wäre

(8_2) $$s = g\cos(g\,,\,\nu)$$

und

(10_2) $$c = c_0 + g\cos(g\,,\,\nu)\,.$$

Das Licht würde sich in bewegtem Äther nach verschiedenen Richtungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten verbreiten. Gehen von einem Punkte in einem Moment $t = 0$ diese Wellen nach allen Seiten aus, so haben sie zu jeder Zeit verschiedene Abstände von diesem Punkt, und zwar zur Zeit t die Abstände

(14) $$\nu = (c_0 + s)t = (c_0 + u\,\alpha + v\,\beta + w\,\gamma)t\,.$$

Nehmen wir jenen Punkt, den wir, nachdem die Welle von ihm ausgegangen ist, nur noch geometrisch zu denken haben, zum Ursprung des Koordinatensystems, so wäre hiernach zu irgendeiner Zeit t die Gleichung einer Wellenebene mit dem Richtungscosinus α, β, γ

(15) $$x\,\alpha + y\,\beta + z\,\gamma = \nu = (c_0 + u\,\alpha + v\,\beta + w\,\gamma)t\,.$$

Zu den Gleichungen (14) und (15) kommt noch die Beziehung

(16) $$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\,.$$

Die Gleichung (14) stellt die Fläche dar, nach deren Punkten die Wellenebenen zu gleicher Zeit ankommen. Da wir haben

$$\alpha = \frac{x}{\nu}\,, \qquad \beta = \frac{y}{\nu}\,, \qquad \gamma = \frac{z}{\nu}\,,$$

so wird

$$\nu^2 = (c_0\,\nu + u\,x + v\,y + w\,z)t\,,$$

und indem $\nu^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist, erhält man als Gleichung jener Fläche

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + (u\,x + v\,y + w\,z)^2 t^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(u\,x + v\,y + w\,z)t = c_0^2\,(x^2 + y^2 + z^2)t^2\,.$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{(u x + v y + w z)^2}{x^2 + y^2 + z^2} t^2 = c_0^2 t^2 + 2(u x + v y + w z) t$$

als Fläche vierten Grades.

Die Wellenfläche finden wir in der üblichen Weise. Sehen wir nach (16) α und γ als die unabhängigen Variabeln an, so ergibt die Differentiation von (14), (15), (16) nach α und γ:

$$(17)\qquad \frac{d\nu}{d\alpha} - \left(u + v\frac{d\beta}{d\alpha}\right)t = 0, \qquad \frac{d\nu}{d\gamma} - \left(w + v\frac{d\beta}{d\gamma}\right)t = 0,$$

$$(18)\qquad x + y\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{d\nu}{d\alpha}, \qquad z + y\frac{d\beta}{d\gamma} = \frac{d\nu}{d\gamma},$$

$$(19)\qquad 2\alpha + 2\beta\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \qquad 2\gamma + 2\beta\frac{d\beta}{d\gamma} = 0.$$

Aus den letzten 4 Gleichungen folgt

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\alpha}{\beta}, \qquad \frac{d\beta}{d\gamma} = -\frac{\gamma}{\beta}; \qquad \frac{d\nu}{d\alpha} = x - \frac{\alpha}{\beta}y, \qquad \frac{d\nu}{d\gamma} = z - \frac{\gamma}{\beta}y.$$

Dadurch gehen die beiden ersten Gleichungen (17) über in

$$x - \frac{\alpha}{\beta}y - \left(u - v\frac{\alpha}{\beta}\right)t = 0, \qquad z - \frac{\gamma}{\beta}y - \left(w - v\frac{\gamma}{\beta}\right)t = 0,$$

oder in

$$\beta(x - u t) - \alpha(y - v t) = 0, \quad \beta(z - w t) - \gamma(y - v t) = 0.$$

Dazu kommt Gleichung (15) in der Form

$$\alpha(x - u t) + \beta(y - v t) + \gamma(z - w t) = c_0 t.$$

So erhält man für α, β, γ die Werte

$$(20)\qquad \alpha = \frac{c_0 t(x - u t)}{D}, \qquad \beta = \frac{c_0 t(y - v t)}{D}, \qquad \gamma = \frac{c_0 t(z - w t)}{D},$$

wobei

$$D = (x - u t)^2 + (y - v t)^2 + (z - w t)^2$$

ist. Aus (16) folgt dann als Gleichung der Wellenfläche

$$c_0^2 t^2((x - u t)^2 + (y - v t)^2 + (z - w t)^2) = ((x - u t)^2 + (y - v t)^2 + (z - w t)^2)^2$$

oder

$$(21)\qquad (x - u t)^2 + (y - v t)^2 + (z - w t)^2 = c_0^2 t^2,$$

also eine Kugelfläche mit um die Bewegung des Äthers vorgeschobenem Mittelpunkt. Für Elementarwellen hat H. A. Lorentz dieses Ergebnis allgemein vorausgesehen. Es ist gut, daß nun dafür ein Beweis auf ganz anderen Grundlagen wenigstens für gleichmäßige Bewegung erbracht ist.

c) Mit dem obigen steht noch folgende Bemerkung in Zusammenhang. Wir schreiben

$$\xi = A \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{T}t - (x\alpha + y\beta + z\gamma) + \varepsilon\right),$$

also wenn man für $\frac{\lambda}{T}$ seinen Wert nach (11) einsetzt,

$$\xi = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda_0}{T_0} t - [(x - u t)\alpha + (y - v t)\beta + (z - w t)\gamma] + \varepsilon\right). \tag{22}$$

Nimmt man mit H. A. Lorentz $\lambda = \lambda_0$ an, so hat die Gleichung die Bedeutung einer einfachen Koordinatentransformation von festen Koordinaten auf mit der Geschwindigkeit (u, v, w) parallel mit sich selbst sich bewegende. In diesem Falle also würde, die Bewegung des Äthers zu berücksichtigen, es genügen, eine einfache Koordinatentransformation auszuführen, wie auch H. A. Lorentz geschlossen hat. Wie bemerkt, aber scheint mir die Annahme $\lambda = \lambda_0$ nicht zulässig.

d) Zufolge (21) verbreiten sich die Strahlen so, als wenn sie von Punkten ausgingen, die in Richtung der Bewegung des Äthers vor der Lichtquelle liegen. Die Wellenflächen sind nicht mehr konzentrisch, wohl aber noch koaxial. Faßt man die Lichtverbreitung so auf, so fallen auch Strahl und Wellennormale zusammen. Die Richtungskosinus sind gegeben durch die Gleichungen (20). Wir haben dann, wenn die Strahlrichtung mit S bezeichnet wird,

$$s = \frac{1}{D}\left(u(x - u t) + v(y - v t) + w(z - w t)\right) = g \cos(S, g). \tag{23}$$

Von irgendeinem Punkt ausgehende, zu ebenen polarisierten Wellen gehörende Strahlen erreichen nach der Zeit t eine Kugelfläche, die mit dem Radius $c_0 t$ von einem vor jenem Punkt in Richtung der Ätherbewegung und im Abstande $g t$ liegenden Punkt ausgeht.

Nennen wir den relativen Strahl S', so war nach H. A. Lorentz (S. 33) die relative Verbreitungsgeschwindigkeit dieses Strahles bis auf Größen zweiter Ordnung

$$c' = c_0 + g \cos(S', g) = c_0 + s', \tag{24}$$

wo s' die Bewegungsgeschwindigkeit in Richtung des relativen Strahles feststellt. Da S' von S für gegen c unerhebliche Geschwindigkeiten nur sehr wenig abweicht, so haben wir auch

$$c' = c_0 + s, \tag{24'}$$

also verbreitet sich der relative Strahl fast mit derselben Geschwindigkeit wie die Wellenfläche, während der Winkel zwischen der Wellennormale S und dem relativen Strahl S' nach (55) (S. 33) gleich

$$\sphericalangle (S, S') = \frac{g}{c}$$

ist.

e) Da die Lösung, die wir kennen gelernt haben, von der für ruhenden Äther geltenden sich nur durch den besonderen Wert von c unterscheidet, so genügt sie auch den Differentialgleichungen für Schwingungen in ruhendem Äther, nur mit c statt c_0. Demnach haben wir auch

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (c_0 + s)^2 \Delta \xi \quad \text{usf.} \tag{25}$$

s variiert aber von Richtung zu Richtung der Wellennormale. Der gleiche Satz von Differentialgleichungen besteht also für parallele Wellen. Nun beruht die einzige einigermaßen befriedigende Ableitung des Huyghensschen Prinzips, die Helmholtz-Kirchhoffsche, auf der Annahme von Funktionen, die Differentialgleichungen der obigen Art genügen. Daraus folgt, daß auch in gleichmäßig bewegtem Äther das Huyghenssche Prinzip Geltung hat, zunächst, wie wir sagen müssen, für parallele Wellen. H. A. Lorentz hat dieses vorausgesetzt, wie es von anderen vor ihm schon geschehen ist.

f) Die Gleichung (10) zeigt, daß die Wellenverbreitung rascher geschieht in Richtung der Bewegung des Äthers, langsamer entgegen dieser Richtung. Ist im letzteren Falle $s = -c_0$, so folgt $c = 0$, das Licht wird mit dem Äther in gleichem Maße rückgeführt, wie es sich verbreitet. c wäre negativ, wenn das Rückschreiten des Äthers rascher geschähe, als die Wellenverbreitung im ruhenden Äther. Für die Erscheinung hätte das keine andere Bedeutung, als wenn das Rückschreiten nur ebenso rasch erfolgte, aber die Gleichung (11) würde wohl sinnlos, wenn man sie nicht, da sie aus der quadratischen Gleichung (9) sich ergibt, schriebe

$$\frac{\lambda}{T} = -(c_0 + s)\,.$$

Im übrigen kann man alle Betrachtungen, die Doppler an sein Prinzip geknüpft hat, hier wiederholen.

b) Kinetische Reflexion und Brechung.

Da die Lichtgeschwindigkeit sich zu $c_0 + s$ ergibt, so folgt, daß bewegter Äther einen andern Brechungsexponenten hat wie ruhender. Überhaupt verhalten sich zwei nach Intensität oder nach Richtung verschieden bewegte Äthermassen wie zwei verschieden brechende Substanzen. Wir werden also Reflexionen und Brechungen des Lichtes finden, wenn es zu Äther gelangt, der parallel zum Strahl sich anders bewegt, als der Äther den der Strahl verläßt. Doppler, Veltmann und H. A. Lorentz haben diese Erscheinung angedeutet; wir wollen hier ihre Gesetze entwickeln, da aus den Formeln sich vielleicht Mittel erkennen lassen sie experimentell nachzuweisen. Wir bezeichnen diese Reflexion und Brechung allein aus Bewegungsverschiedenheiten als kinetische Reflexion und kinetische Refraktion, im Gegensatz zu der gewöhnlichen Reflexion und Refraktion, die wir Substanz-Reflexion und Substanz-Refraktion nennen.

Der Gang dieser kinetischen Erscheinung hängt davon ab, welche der Größen λ und T wir als variabel ansehen. Entscheidung hierüber kann aus den Bedingungen an der Grenzfläche gewonnen werden. Man hat bisher allgemein als notwendig unter diesen Bedingungen diejenigen erachtet, welche ausdrücken, daß die Ätherschwingungen zu beiden Seiten der Grenzfläche die gleichen sind. Charakterisieren wir alle Größen mit Bezug auf einfallenden, reflektierten und gebrochenen Strahl durch die Indices e, r, g, so soll also an der Grenzfläche sein

$$\xi_e + \xi_r = \xi_g\,,\quad \eta_e + \eta_r = \eta_g\,,\quad \zeta_e + \zeta_r = \zeta_g\,. \tag{26}$$

Aber diesen Bedingungen kann man auf keine Weise genügen, sobald T als durch die Bewegung beeinflußt angesehen wird, denn Gleichungen von der Form

$$A_e \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_e} + \delta_e\right) + A_r \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_r} + \delta_r\right) = A_g \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_g} + \delta_g\right)$$

können mit konstanten und verschiedenen T allgemein, d. h. für jeden Wert von t, nicht bestehen, sondern nur für bestimmte Werte von t. Die Kontinuitätsgleichungen sind also nicht anwendbar. Nun besagen diese freilich, daß der Lichtdurchgang durch eine Grenzfläche eine Deformation, Zerreißung dieser Fläche nicht hervorbringen soll. Und es ist wohl verständlich, daß, wenn Bewegung die Schwingungsdauer beeinflussen kann, da, wo verschiedene Bewegungen aneinanderstoßen, durch die verschiedene Beeinflussung auch eine Rückwirkung auf die Bewegungen stattfindet und damit wiederum eine Änderung der Schwingungen. Es liegt darum der Gedanke nahe, die Kontinuität auf die ganze Bewegung zu beziehen und zu setzen

$$\frac{d\xi_e}{dt} + \frac{d\xi_r}{dt} + u_e = \frac{d\xi_g}{dt} + u_g \quad \text{usf.} \tag{27}$$

Allein auch mit solchen Bedingungen kommt man für einfache Schwingungen nicht vorwärts, ohne an der Grenzfläche Gegenschwingungen einzuführen, die die Lichtbewegung vernichten würden.

Wir stellen also Veränderungen der Schwingungsdauer, d. h. der Farbe, außer Betracht, wie das auch bei der gewöhnlichen Reflexion und Brechung geschieht. Auch nehmen wir zunächst an, daß die Schwingungen für sich kontinuierlich sind. Außerdem setzen wir einstweilen voraus, daß die Bewegungen der Äthermassen sich an der Grenzfläche nicht stören, diese also diskontinuierlich sein können. Die ersten Grenzgleichungen unter (26) ergeben nun wie in der Substanz-Reflexion und -Refraktion

$$\frac{\alpha_g}{\lambda_g} = \frac{\alpha_e}{\lambda_e} = \frac{\alpha_r}{\lambda_r}; \qquad \frac{\beta_g}{\lambda_g} = \frac{\beta_e}{\lambda_e} = \frac{\beta_r}{\lambda_r} \tag{28}$$

und zugleich haben wir

$$\lambda_e = T(c_0 + s_e), \quad \lambda_g = T(c_0 + s_g), \quad \lambda_r = T(c_0 + s_r). \tag{29}$$

Also

$$\alpha_g = \frac{c_0 + s_g}{c_0 + s_e}\alpha_e, \quad \beta_g = \frac{c_0 + s_g}{c_0 + s_e}\beta_e, \quad \gamma_g = +\sqrt{1 - \left(\frac{c_0 + s_g}{c_0 + s_e}\right)^2 (1 - \gamma_e^2)}; \tag{30}$$

$$\alpha_r = \frac{c_0 + s_r}{c_0 + s_e}\alpha_e, \quad \beta_r = \frac{c_0 + s_r}{c_0 + s_e}\beta_e, \quad \gamma_r = -\sqrt{1 - \left(\frac{c_0 + s_r}{c_0 + s_e}\right)^2 (1 - \gamma_e^2)}. \tag{31}$$

Ist i_e der Einfallswinkel, i_r der Reflexionswinkel, i_g der Brechungswinkel, so hat man

$$\frac{\sin i_e}{\sin i_g} = +\frac{c_0 + s_e}{c_0 + s_g}, \qquad \frac{\sin i_e}{\sin i_r} = -\frac{c_0 + s_e}{c_0 + s_r}. \tag{32}$$

Jede Äthermasse hat einen Brechungsquotienten und einen Reflexionsquotienten; ist jener n_g, dieser n_r, so wäre

$$n_g = +\frac{c_0 + s_e}{c_0 + s_g}, \qquad n_r = -\frac{c_0 + s_e}{c_0 + s_r}. \tag{33}$$

Beide sind abhängig von den Bewegungen der Äthermassen in Richtung der Wellennormale. Sind die Geschwindigkeitskomponenten in den beiden Massen u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2, so hat man

$$s_e = u_1\alpha_e + v_1\beta_e + w_1 g_e, \quad s_g = u_2\alpha_g + v_2\beta_g + w_2\gamma_g. \tag{34}$$

Bedeutet noch s_g' die Normalkomponente der Bewegung der zweiten Äthermasse in Richtung der einfallenden Wellennormale, so ist weiter

$$s_g' = u_2\alpha_e + v_2\beta_e + w_2\gamma_e, \tag{35}$$

s_g ist von s_g' verschieden, muß also jedesmal erst berechnet werden, ebenso wie s_r von s_e oder $-s_e$ abweicht und erst zu ermitteln ist. Wir brauchen nur eine Berechnung auszuführen, etwa die für s_g. Man hat

$$(36)\qquad s_g = \frac{c_0 + s_g}{c_0 + s_e}(s_g' - w_2\gamma_e) + w_2\sqrt{1 - \left(\frac{c_0 + s_g}{c_0 + s_e}\right)^2 (1 - \gamma_e^2)}\,,$$

oder

$$\frac{c_0 + s_g}{c_0 + s_e} = \frac{c_0}{c_0 + s_e} + \frac{c_0 + s_g}{c_0 + s_e}\,\frac{s_g' - w_2\gamma_e}{c_0 + s_e} + \frac{w_2}{c_0 + s_e}\sqrt{1 - \left(\frac{c_0 + s_g}{c_0 + s_e}\right)^2 (1 - \gamma_e^2)}\,,$$

d. h.

$$n_g^{-1}\left(1 - \frac{s_g' - w_2\gamma_e}{c_0 + s_e}\right) - \frac{c_0}{c_0 + s_e} = \frac{w_2}{c_0 + s_e}\sqrt{1 - n_g^{-2}(1 - \gamma_e^2)}\,,$$

als quadratische Gleichung für n_g^{-1}, aus welcher folgt

$$(37_1)\qquad n_g^{-1} = \frac{(c_0 + s_e - s_g' + w_2\gamma_e)c_0}{(c_0 + s_e - s_g' + w_2\gamma_e)^2 + w_2^2(1 - \gamma_e^2)}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{(c_0^2 - w_2^2)((c_0 + s_e - s_g' + w_2\gamma_e)^2 + w_2^2(1 - \gamma_e^2))}{c_0^2(c_0 + s_e - s_g' + w_2\gamma_e)^2}}\right),$$

oder indem man

$$(38_1)\qquad s_e - s_g' = \sigma_g$$

setzt,

$$(37_2)\qquad n_g^{-1} = \frac{c_0(c_0 + \sigma_g + w_2\gamma_e)}{(c_0 + \sigma_g + w_2\gamma_e)^2 + w_2^2(1 - \gamma_e^2)}\left(1 \pm \sqrt{\frac{(w_2 + \gamma_e c_0)^2 + \sigma_g^2 + 2\sigma_g(c_0 + \gamma_e w_2)}{c_0^2(c_0 + \sigma_g + \gamma_e w_2)^2}\,w_2^2}\right).$$

Entsprechend würde die Gleichung für n_r^{-1} lauten mit w_1 für w_2 und σ_r für σ_g. Da aber $s_r' = s_e$ ist, so folgt $\sigma_r = 0$, somit

$$n_r^{-1} = -\frac{c_0(c_0 + w_1\gamma_e)}{(c_0 + w_1\gamma_e)^2 + w_1^2(1 - \gamma_e^2)}\left(1 \pm \frac{(w_1 + c_0\gamma_e)w_1}{c_0(c_0 + w_1\gamma_e)}\right).$$

Indem wir das positive oder das negative Wurzelzeichen benutzen, wird allgemein

$$(39)\qquad n_r^{-1} = -1 \quad \text{oder} \quad = -\frac{c_0^2 - w_1^2}{c_0^2 + w_1^2 + 2c_0 w_1\gamma_e}.$$

Der erste Wert würde gewöhnliche Reflexion geben, der zweite von dieser abweichende, sobald w_1 von Null verschieden ist. Um zwischen den beiden Werten entscheiden zu können, berechnen wir den Winkel φ_r zwischen dem einfallenden und dem reflektierten Strahl. Wir haben

$$(40)\qquad \cos\varphi_r = \alpha_e\alpha_r + \beta_e\beta_r + \gamma_e\gamma_r = -n_r^{-1}(1 - \gamma_e^2) - \gamma_e\sqrt{1 - n_r^{-2}(1 - \gamma_e^2)}\,.$$

Für streifende Inzidenz muß jedenfalls $\varphi_r = 0°$, $\cos\varphi_r = 1$ sein, und da hierfür $\gamma_e = 0$ ist, haben wir $n_r^{-1} = -1$ anzusetzen. Es gilt also das positive Zeichen, und n_r^{-1} ist stets $= -1$. Die Reflexion ist also die gewöhnliche. Für den gebrochenen Strahl müssen wir gleichfalls das positive Wurzelzeichen wählen, denn wenn für alle Inzidenzen $s_g' = s_e$ ist, muß auch $w_2 = w_1$ sein, die zweite Äthermasse ist dann in jeder Hinsicht gleich der ersten, n_g muß also den Wert 1 erhalten, was eben nur bei Wahl des positiven Wurzelzeichens stattfindet. So haben wir für die Refraktion

$$(37_3)\quad \begin{cases} n_g^{-1} = \dfrac{1}{(c_0 + \sigma_g + w_2\gamma_e)^2 + w_2^2(1 - \gamma_e^2)} \\ \left(c_0(c_0 + \sigma_g + w_2\gamma_e) + w_2\sqrt{(c_0 + \sigma_g + w_2\gamma_e)^2 + (w_2 + c_0\gamma_e)^2 - (c_0 + w_2\gamma_e)^2}\right). \end{cases}$$

Bei streifender Inzidenz ist

$$n_g^{-1} = \frac{1}{(c_0 + \sigma_g)^2 + w_2^2}\left(c_0(c_0 + \sigma_g) + w_2\sqrt{w_2^2 + (c_0 + \sigma_g)^2 - c_0^2}\right), \tag{41}$$

bei senkrechter

$$n_g^{-1} = \frac{c_0 + w_2}{c_0 + \sigma_g + w_2}. \tag{42}$$

Da für diesen Fall $\alpha_e = \beta_e = 0$, $\gamma_e = 1$ ist, wird σ_g, welches gibt

$$\sigma_g = \alpha_e(u_1 - u_2) + \beta_e(v_1 - v_2) + \gamma_e(w_1 - w_2), \tag{38$_2$}$$

gleich $w_1 - w_2$, also

$$n_g^{-1} = \frac{c_0 + w_2}{c_0 + w_1}, \tag{43}$$

wie auch aus den Formeln (33) unmittelbar folgt. Für senkrechte Inzidenz ist der Brechungsexponent unabhängig von der Querbewegung der Äthermassen.

Der allgemeine Ausdruck für n_g^{-1} ist ziemlich kompliziert und nicht leicht zu übersehen. Er gibt stets reelle Werte, wenn $2\sigma_g(c_0 + w_2\gamma_e)$ positiv, also σ_g und $c_0 + w_2\gamma_e$ jedes positiv oder jedes negativ ist. Da wir α_e, β_e, γ_e immer positiv wählen können, so wird $c_0 + w_2\gamma_e$ positiv sein, wenn $c_0 + w_2$ positiv ausfällt. In diesem Falle ist auch $2\sigma_g(c_0 + w_2\gamma_e)$ positiv, wenn s_e und s_g' beide der Richtung des einfallenden Strahles folgen und zugleich $s_g' < s_e$ ist, oder wenn s_e in dieser Richtung liegt, s_g' in der entgegengesetzten, oder wenn auch s_e dieser Richtung entgegenläuft, s_g' aber $> s_e$ ist. Fällt $c_0 + w_2$ negativ aus, so kann gleichwohl $c_0 + w_2\gamma_e$ positiv sein, nämlich für $|w_2| < \frac{c_0}{\gamma_e}$. Alsdann treten wieder die früheren drei Fälle für σ_g ein. Solange aber $c_0 + w_2\gamma_e$ negativ sich zeigt, haben wir wieder in drei Fällen für $2\sigma_g(c_0 + w_2\gamma_e)$ positive Werte, wenn s_e und s_g' beide dem einfallenden Strahl gleichgerichtet sind und zugleich $|s_g'| > |s_e|$ ist, oder wenn beide diesem Strahle entgegengerichtet sind, aber $|s_g'| < |s_e|$ ist, oder wenn nur s_e entgegengerichtet ist. Sonst ist $2\sigma_g(c_0 + w_2\gamma_e)$ negativ und die Wurzel wird imaginär, sobald $|2\sigma_g(c_0 + w_2\gamma_e)| > \sigma_g^2 + (w_2 + c_0\gamma_e)^2$ ist. Für $\sigma_g > 0$ wäre $|w_2| > \frac{\sigma_0^2 + (w_2 + c_0\gamma_e)^2}{2\sigma_g} - c_0$, für $\sigma_g < 0$ dagegen $2|\sigma_g| > \frac{\sigma_g^2 + (w_2 + c_0\gamma_e)^2}{c_0 + w_2\gamma_e}$. Der letztere Fall ist der wichtigere, in dem es also keine reelle Refraktion gäbe. Doch sind an sich beide Fälle nicht von Bedeutung, weil sie Bewegungen voraussetzen, deren Geschwindigkeit die des Lichtes überschreitet. Alle übrigen Betrachtungen entsprechen denen der gewöhnlichen Refraktion; wir brauchen nicht auf sie einzugehen. Wenn die Geschwindigkeit der Äthermassen gering ist im Verhältnis zur Geschwindigkeit des Lichtes im ruhenden Äther, wird für streifende Inzidenz $n_g^{-1} = 1 - \frac{\sigma_g}{c_0} = 1 + \frac{s_g' - s_e}{c_0}$, für senkrechte $n_g^{-1} = 1 + \frac{w_2 - w_1}{c_0}$. Beide Formeln besagen das gleiche, da für senkrechte Inzidenz $s_e = w_1$, $s_g' = w_2$, $\sigma = w_1 - w_2$ ist. Überhaupt ist allgemein für gegen c_0 hinlänglich geringe Geschwindigkeiten

$$n_g = 1 - \frac{s_g' - s_e}{c_0} = 1 - \frac{\alpha_e(u_2 - u_1) + \beta_e(v_2 - v_1) + \gamma_e(w_2 - w_1)}{c_0}. \tag{44}$$

Verlegen wir die y-Achse senkrecht zur Einfallsebene, so wird auch

$$n_g = 1 - \frac{(u_2 - u_1)\sin i + (w_2 - w_1)\cos i}{c_0} \tag{45}$$

und

(46) $$n_g = 1 - \frac{u_2 - u_1}{c_0} \quad \text{für streifende Inzidenz,}$$

(47) $$n_g = 1 - \frac{w_2 - w_1}{c_0} \quad \text{für senkrechte Inzidenz.}$$

Die zweite Äthermasse verhält sich zur ersten wie eine optisch dichtere Substanz, wenn σ_g positiv ist, sonst wie eine optisch dünnere. Die Formeln sehen aus wie Aberrationsformeln, haben aber mit solchen nichts zu tun. Der Winkel zwischen dem einfallenden und dem gebrochenen Strahl ergibt sich aus

(48) $$\begin{cases} \cos\varphi_g = \alpha_g\alpha_e + \beta_g\beta_e + \gamma_g\gamma_e = n_g^{-1}(1-\gamma_e^2) + \gamma_e\sqrt{1 - n_g^{-2}(1-\gamma_e^2)} \\ \qquad = n_g^{-1}\sin^2 i + \cos i\sqrt{1 - n_g^{-2}\sin^2 i}\,. \end{cases}$$

Für im Verhältnis zu c_0 geringe Geschwindigkeiten in Richtung der Wellennormale ist $\cos\varphi_g = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{c_0}\right)^2 \operatorname{tg}^2 i$ bis auf Größen zweiter Ordnung, φ_g also $= \frac{\sigma}{c_0}\operatorname{tg} i$.

Wenn die zweite Äthermasse eine planparallele Platte innerhalb der ersten bildet, so ist für den aus ihr austretenden Strahl

(49) $$\begin{cases} n_a^{-1} = \dfrac{1}{(c_0 + s_g - s_a' + w_1\gamma_g)^2 + w_1^2(1-\gamma_g^2)} \\ \left(c_0(c_0+s_g-s_a'+w_1\gamma_g) + w_1\sqrt{(c_0+s_g-s_a'+w_1\gamma_g)^2 + (w_1+c_0\gamma_g)^2 - (c_0+w_1\gamma_g)^2}\right). \end{cases}$$

wo

(50) $$s_a' = \alpha_g u_1 + \beta_g v_1 + \gamma_g w_1\,.$$

Daraus erhellt schon, daß der austretende Strahl im allgemeinen dem eintretenden nicht parallel ist. Für im Verhältnis zu c_0 geringe Geschwindigkeiten wird

(51_1) $$n_a = 1 + \frac{\alpha_g(u_2-u_1) + \gamma_g(w_2-w_1)}{c_0},$$

also nach (31) S. 42

(51_2) $$\begin{cases} n_a = 1 + \left(\dfrac{c_0+s_g}{c_0+s_e}(u_2-u_1)\alpha_e + (w_2-w_1)\sqrt{1 - \left(\dfrac{c_0+s_g}{c_0+s_e}\right)^2(1-\gamma_e^2)}\right)\dfrac{1}{c_0} \\ \quad = 1 + \left(\left(1 - \dfrac{s_e - s_g}{c_0+s_e}\right)(u_2-u_1)\alpha_e + (w_2-w_1)\sqrt{1 - \left(1 - \dfrac{s_e-s_g}{c_0+s_e}\right)^2(1-\gamma_e^2)}\right)\dfrac{1}{c_0}, \end{cases}$$

und das gibt bis auf Größen zweiter Ordnung nach (44)

(51_3) $$n_a = 1 + \frac{(u_2-u_1)\alpha_e + (w_2-w_1)\gamma_e}{c_0} = n_g^{-1}\,.$$

Für solche Fälle tritt also der Strahl parallel dem einfallenden Strahl aus.

Hätten wir zu Kontinuitätsbedingungen (26) für die Verschiebungen die Gleichheit der Geschwindigkeiten der Schwingungen zu beiden Seiten der Grenzfläche genommen, also

(52) $$\frac{d\xi_e}{dt} + \frac{d\xi_r}{dt} = \frac{d\xi_g}{dt}, \qquad \frac{d\eta_e}{dt} + \frac{d\eta_r}{dt} = \frac{d\eta_g}{dt}, \qquad \frac{d\zeta_e}{dt} + \frac{d\zeta_r}{dt} = \frac{d\zeta_g}{dt},$$

so kämen abermals die Beziehungen (28) usf. heraus. Außerdem hätten wir statt der aus (26) noch folgende Beziehungen

$$A_e + A_r = A_g\,,\qquad B_e + B_r = B_g\,,\qquad C_e + C_r = C_g \tag{53}$$

die

$$A_e\left(\frac{1}{T} - \frac{\alpha_e u_1 + \beta_e v_1 + \gamma_e w_1}{\lambda_e}\right) + A_r\left(\frac{1}{T} - \frac{\alpha_r u_1 + \beta_r v_1 + \gamma_r w_1}{\lambda_r}\right)$$
$$= A_g\left(\frac{1}{T} - \frac{\alpha_g u_2 + \beta_g v_2 + \gamma_g w_2}{\lambda_g}\right),$$

d. h. mit $A' = \frac{A}{\lambda}$

$$A'_e\left(\frac{\lambda_e}{T} - s_e\right) + A'_r\left(\frac{\lambda_r}{T} - s_r\right) = A'_g\left(\frac{\lambda_g}{T} - s_g\right) \tag{54}$$

und entsprechend für B' und C'. Also zufolge (12) abermals $A'_e + A'_r = A'_g$ usf. Die Bedingungen (52) ergeben also formell keine anderen Beziehungen als die (26), wie bei der Substanz-Reflexion und -Refraktion.

Wir haben angenommen, daß die beiden Äthermassen in ihren Bewegungen an der Grenzfläche sich nicht beeinflussen, namentlich, daß sie nicht ineinander fahren. Mit konstanten Geschwindigkeiten kann das nicht anders erreicht werden, als indem die Massen nicht aneinander reiben und, daß außerdem quer zur Grenzfläche keine Bewegung vorhanden, $w_2 = w_1 = 0$ ist. Alsdann haben wir

$$n_g^{-1} = \frac{1}{(c_0 + \sigma_g)^2}\, c_0(c_0 + \sigma_g) = \frac{c_0}{c_0 + \sigma_g}\,, \tag{55}$$

$$\sigma_g = \alpha_e(u_1 - u_2) + \beta_e(v_1 - v_2)\,, \tag{56}$$

oder indem wir wieder die y-Achse quer zur Einfallsebene verlegen,

$$n_g = 1 - \frac{u_2 - u_1}{c_0}\sin i\,, \tag{57_1}$$

$$\sigma_g = (u_1 - u_2)\sin i\,, \tag{58}$$

und diese Formeln gelten ohne Vernachlässigungen.

Gehören z. B. beide Ätherschichten verschiedenen Körpern an, die ihrerseits sich zusammen mit der gleichen Geschwindigkeit g parallel zu ihrer Trennungsebene bewegen, so wäre $u_1 = g - a_1 g$, $u_2 = g - a_2 g$, wo a_1, a_2 die Fresnelschen Mitführungskoeffizienten bedeuten, und wir hätten

$$n_g = 1 + (a_2 - a_1)\frac{g}{c_0}\,. \tag{57_2}$$

Um den Betrag $(a_2 - a_1)\frac{g}{c_0}$ würde der Brechungsexponent des zweiten Körpers geändert erscheinen, was sich feststellen lassen sollte.

c) Kugelwellen in gleichmäßig bewegtem Äther.

Wir entwickeln erst die Inkompressibilitätsbedingung.

Infolge der Werte von $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ nach Gleichung (3) (S. 35) erhalten wir allgemein

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial t}+u\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+w\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial z}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\\ &+\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial t}+u\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial x}+v\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+w\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial z}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\\ &+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z\partial t}+u\frac{\partial^2\zeta}{\partial z\partial x}+v\frac{\partial^2\zeta}{\partial z\partial y}+w\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\,. \end{aligned}\right.$$

Und da die partiellen Differentiationen vertauscht werden dürfen, wird mit

$$(60)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=\tau\,.$$

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} &0=\frac{\partial\tau}{\partial t}+u\frac{\partial\tau}{\partial x}+v\frac{\partial\tau}{\partial y}+w\frac{\partial\tau}{\partial z}\\ &+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\\ &+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\,. \end{aligned}\right.$$

Die vier ersten Glieder können wir zu $\frac{d\tau}{dt}$ zusammenfassen, sie hängen also ab von der vollständigen Änderung der Größe τ mit der Zeit. Die folgenden Glieder tragen auch den örtlichen und zeitlichen Änderungen auch der Bewegung Rechnung.

Wenn Änderungen dieser Art nicht vorhanden sind, bleibt

$$(62_1)\qquad \frac{d\tau}{dt}=0\,.$$

Wir genügen dieser Gleichung, wenn wir $\tau=0$ annehmen. Alsdann haben wir also

$$(62_2)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0\,.$$

Jetzt können wir die übliche Analyse für Kugelwellen anwenden. Man setzt

$$(63)\qquad \xi=\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\,,\qquad \eta=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\,,\qquad \zeta=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\,,$$

wodurch der Gleichung $\tau=0$ genügt ist. Für U, V, W folgen dann Gleichungen genau derselben Art wie für ξ, η, ζ nach (6) (S. 37). Wenn der Äther in Ruhe ist, kann man diesen Gleichungen auch genügen durch Funktionen allein von $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Wir weisen nach, daß das gleiche stattfindet, auch wenn Bewegung herrscht. Nennen wir nämlich F eine der Größen U, V, W, und setzen dieses F als Funktion von r an, dem Abstand eines Ätherpunktes P, von dem als fest gedachten leuchtenden Punkt L, der auch Koordinatenursprung sein soll, so haben wir in unserem Falle

$$u\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial x} = u\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\frac{x}{r}\right) = u\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial r}\frac{x}{r} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial r}\frac{x}{r^2}\frac{\partial r}{\partial t}\right)$$

$$= u\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial r}\frac{x}{r} + \frac{1}{r}u^2\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{ux}{r^2}\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial r}$$

und ähnlich die entsprechenden Glieder. Hiernach wird

$$u\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial x} + v\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial y} + w\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial z}$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial t\partial r}\left(\frac{ux+vy+wz}{r}\right) + \frac{1}{r}(u^2+v^2+w^2)\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial r}\left(\frac{ux+vy+wz}{r}\right).$$

Nun ist

$$u^2+v^2+w^2 = g^2, \quad ux+vy+wz = x\frac{\partial x}{\partial t} + y\frac{\partial y}{\partial t} + z\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial t} = r\frac{\partial r}{\partial t}.$$

Also bekommen wir

$$2\left(u\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial x} + v\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial y} + w\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial z}\right) = 2\left[\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial r} + \frac{1}{r}g^2\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\frac{\partial F}{\partial r}\right],$$

nur abhängig von t und r, da g konstant sein soll. Die anderen Glieder ergeben in entsprechender Rechnung

$$2\left(uv\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + vw\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} + wu\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}\right)$$

$$= \frac{2}{4r^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial x^2}{\partial t}\frac{\partial y^2}{\partial t} + \frac{\partial y^2}{\partial t}\frac{\partial z^2}{\partial t} + \frac{\partial z^2}{\partial t}\frac{\partial x^2}{\partial t}\right),$$

$$u^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + v^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + w^2\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

$$= \frac{1}{4r^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\left[\left(\frac{\partial x^2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y^2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^2}{\partial t}\right)^2\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}g^2,$$

so daß wir für beide Gleichungen als Summe erhalten

$$\frac{1}{4r^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial x^2}{\partial t} + \frac{\partial y^2}{\partial t} + \frac{\partial z^2}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}g^2,$$

oder

$$\frac{1}{4r^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r^2}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}g^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}g^2\frac{\partial F}{\partial r},$$

und da

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}$$

ist, geht unsere Differentialgleichung über in

$$(64)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}\left(\dfrac{\partial r}{\partial t}\right)^2 - \dfrac{3}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r}\left(\dfrac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + \dfrac{3}{r}g^2\dfrac{\partial F}{\partial r} \\ \qquad = c_0^2\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r}\right) = \dfrac{c_0^2}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} rF, \end{cases}$$

in der neben t nur noch r als Variable auftritt. $\frac{\partial r}{\partial t}$ und $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$ sind hier als Konstanten zu behandeln. Ein allgemeines Integral der Gleichung zu ermitteln, ist mir nicht gelungen, aber Näherungsrechnungen kann man versuchen.

Um zu der üblichen Lösung zu gelangen, setzen wir $rF = G$, wo alsdann G eine Sinus- oder Kosinusfunktion sein soll. Dann ist

$$(65)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = -\dfrac{1}{r^2}G + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial G}{\partial r}, \qquad \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} = +\dfrac{2}{r^3}G - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial G}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 G}{\partial r^2}, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial r} = +\dfrac{2}{r^3}G\dfrac{\partial r}{\partial t} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial G}{\partial t} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial G}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial t} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t\,\partial r}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t} = -\dfrac{1}{r^2}G\dfrac{\partial r}{\partial t} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial G}{\partial t}, \qquad \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} = +\dfrac{2}{r^3}G\left(\dfrac{\partial r}{\partial t}\right)^2 - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial G}{\partial t}\dfrac{\partial r}{\partial t} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung gibt hiernach

$$(66_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial^2 G}{\partial t\,\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial r^2}\left(\dfrac{\partial r}{\partial t}\right)^2 - \dfrac{1}{r}\left\{4\dfrac{\partial G}{\partial t}\dfrac{\partial r}{\partial t} + \left[7\left(\dfrac{\partial r}{\partial t}\right)^2 - 3g^2\right]\dfrac{\partial G}{\partial r}\right\} \\ \qquad + \dfrac{1}{r^2}\left[11\left(\dfrac{\partial r}{\partial t}\right)^2 - 3g^2\right]G = c_0^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial r^2}. \end{cases}$$

Setzen wir

$$(67)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial t} = \varrho, \qquad \left(\dfrac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = \varrho^2, \qquad 7\left(\dfrac{\partial r}{\partial t}\right)^2 - 3g^2 = 4\eta, \\ 11\left(\dfrac{\partial r}{\partial t}\right)^2 - 3g^2 = \vartheta, \qquad c_0^2 - \left(\dfrac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = \bar{c}_0^2, \end{cases}$$

so wird

$$(66_2)\quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2\varrho\frac{\partial^2 G}{\partial t\,\partial r} - \bar{c}_0^2\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} - \frac{4}{r}\left(\varrho\frac{\partial G}{\partial t} + \eta\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\vartheta G = 0.$$

Die Größen ϱ, η, ϑ, $\bar{c}_0$ sind nach r und t in unserem Falle konstant. Wir betrachten zunächst die Lichtverbreitung in so großem Abstande von der Lichtquelle, daß alle Glieder, die mit $\frac{1}{r}$ multipliziert sind, fortgelassen werden können, dann haben wir

$$(68_1)\quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial^2 G}{\partial t\,\partial r} + \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = c_0^2\frac{\partial^2 G}{\partial r^2},$$

oder

$$(68_2)\quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2\varrho\frac{\partial^2 G}{\partial t\,\partial r} + \varrho^2\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = c_0^2\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}.$$

Also nimmt die Welle in hinreichendem Abstand von der Lichtquelle in der Tat Kugelform im üblichen Sinne an. Es ist, wenn man nunmehr

$$G = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta\right), \tag{69}$$

$$F = \frac{A}{r} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta\right). \tag{70}$$

setzt, wie früher

$$\frac{\lambda}{T} = c = c_0 + \varrho, \tag{71}$$

wo ϱ die Bewegung in Richtung des Strahles bedeutet. Für ξ, η, ζ bekommt man unter den üblichen Vernachlässigungen

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{2\pi}{\lambda r^2}\left[A_2 z \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta_2\right) - A_3 y \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta_3\right)\right], \\ \eta &= \frac{2\pi}{\lambda r^2}\left[A_3 x \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta_3\right) - A_1 z \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta_3\right)\right], \\ \zeta &= \frac{2\pi}{\lambda r^2}\left[A_1 y \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta_3\right) - A_2 x \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta_1\right)\right], \end{aligned}\right. \tag{72}$$

die üblichen Formeln für Kugelwellen.

Nehmen wir wieder T als unveränderlich an, so daß

$$\lambda = \lambda_0 + \varrho T_0$$

wird, so erscheinen in bewegtem Äther ξ, η, ζ noch dadurch verschieden von den ξ, η, ζ in ruhendem, daß sie auch andere Amplituden haben wie diese, nämlich im Verhältnis von $\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \varrho T_0}$ vergrößerte, so daß die Intensitäten im Verhältnis $\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \varrho T_0}\right)^2$ vermehrt sind. Kugelwellen nehmen also an Lichtstärke zu oder ab, wenn der Äther, in dem sie sich verbreiten, sich in Bewegung setzt. Außerdem sind sie auch aus diesem Grunde in verschiedenen Richtungen verschieden hell.

Die obige Lösung gibt Wellen aus der Rotation eines Lichtpunktes um eine zentrale Achse. Wellen aus der Schwingung eines solchen Punktes enthalten im Nenner der Amplituden λ^2, solche aus symmetrischen Schwingungen zweier Punkte λ^3 usf. Die Theorie der Kugelwellen liegt etwas im argen. Allgemein aber können wir Lösungen bekanntlich durch sukzessive Differentiation der schon vorhandenen Lösungen nach x, y, z erhalten, und da die Sinus und Kosinus immer wieder auftreten, wird man ansetzen dürfen

$$\xi = \sum \frac{D_\varkappa}{r^\varkappa \lambda^\varkappa} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta_\varkappa\right) + \sum \frac{E_\varkappa}{r^\varkappa \lambda^\varkappa} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta_\varkappa\right), \tag{73}$$

und entsprechend für η, ζ, woselbst die D und E Funktionen sind von x, y, z, r und den Richtungskosinus von r, falls man Glieder ohne λ im Nenner vernachlässigt. Läßt man auch die Phasen von x, y, z, r abhängen und bezeichnet sie alsdann mit φ, so kann man einfacher schreiben

$$\xi = \sum \frac{L_1}{r^\varkappa \lambda^\varkappa} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \varphi_1\right), \tag{74}$$

und entsprechend für η und ζ, mit $L_2, \varphi_2, L_3, \varphi_3$ für L_1, φ_1, wobei die L, φ von Glied zu Glied andere und andere Werte haben können.

Hiernach sind die Amplituden der einzelnen Wellensysteme gegen die im ruhenden Äther proportional $\frac{\lambda_0^{\varkappa}}{(\lambda_0 + \varrho T_0)^{\varkappa}}$, die Intensitäten proportional $\frac{\lambda_0^{2\varkappa}}{(\lambda_0 + \varrho T_0)^{2\varkappa}}$.

Für den **Fresnelschen Spiegelversuch** wäre noch zu bemerken, daß, wenn der Abstand der beiden Spiegel-Lichtpunkte vom belichteten Punkt r' und r'' ist, man für die Strahlen von diesen Spiegel-Lichtpunkten nach dem belichteten Punkte bekommt

$$\frac{\lambda'}{T'} = c_0 + g\cos(g, r')\,, \qquad \frac{\lambda''}{T''} = c_0 + g\cos(g, r'')\,. \tag{75}$$

Nennt man aber $2a$ den Abstand der beiden Spiegel-Lichtpunkte voneinander, r die Entfernung der Mitte dieses Abstandes vom belichteten Punkt, verlegt die x-Achse durch jene Punkte von der Mitte nach beiden Seiten, und die z-Achse nach dem belichteten Punkte hin, so hat man

$$r' = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}\,, \quad r'' = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$$

und wenn a klein genug ist gegen $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$r' = r\left(1 + \frac{a\,x}{r^2}\right), \quad r'' = r\left(1 - \frac{a\,x}{r^2}\right), \quad \frac{1}{r'} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a\,x}{r^2}\right), \quad \frac{1}{r''} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a\,x}{r^2}\right),$$

somit

$$\left\{\begin{aligned} \cos(g, r') &= l\,\frac{x+a}{r'} + m\,\frac{y}{r'} + n\,\frac{z}{r'} = \cos(g, r)\left(1 - \frac{a\,x}{r^2}\right) + l\,\frac{a}{r}\,, \\ \cos(g, r'') &= l\,\frac{x-a}{r''} + m\,\frac{y}{r''} + n\,\frac{z}{r''} = \cos(g, r)\left(1 + \frac{a\,x}{r^2}\right) - l\,\frac{a}{r}\,, \end{aligned}\right. \tag{76}$$

wo l, m, n die Richtungskosinus der Ätherbewegung bedeuten. Damit bekommen wir

$$\frac{\lambda'}{T'} = \frac{\lambda}{T} + g\,\frac{a}{r}\left(l - \frac{x}{r}\cos(g, r)\right), \quad \frac{\lambda''}{T''} = \frac{\lambda}{T} - g\,\frac{a}{r}\left(l - \frac{x}{r}\cos(g, r)\right), \tag{77}$$

wo $\frac{\lambda}{T}$ sich auf die Richtung r bezieht. Zwei Strahlen, von dem einen und dem anderen leuchtenden Punkte, die im belichteten Punkte zusammentreffen, seien nun, mit $T' = T'' = T_0$,

$$\xi' = \frac{L_1'}{\lambda' r'}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T_0} - \frac{r'}{\lambda'} + \varphi_1'\right), \quad \xi'' = \frac{L_1''}{\lambda'' r''}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T_0} - \frac{r''}{\lambda''} + \varphi_1''\right) \tag{78}$$

und entsprechend für η, ζ. Im Interferenzraum ist dann

$$\xi = \frac{L_1'}{\lambda' r'}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T_0} - \frac{r'}{\lambda'} + \varphi_1'\right) + \frac{L_1''}{\lambda'' r''}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T_0} - \frac{r''}{\lambda''} + \varphi_1''\right). \tag{79}$$

Setzen wir

$$(80)\quad \begin{cases} \dfrac{L_1'}{\lambda' r'}\cos 2\pi\left(\dfrac{r'}{\lambda'} - \varphi_1'\right) + \dfrac{L_1''}{\lambda'' r''}\cos 2\pi\left(\dfrac{r''}{\lambda''} - \varphi_1''\right) = \dfrac{M_1}{\lambda r}\cos 2\pi\sigma_1\,, \\ \dfrac{L_1'}{\lambda' r'}\sin 2\pi\left(\dfrac{r'}{\lambda'} - \varphi_1'\right) + \dfrac{L_1''}{\lambda'' r''}\sin 2\pi\left(\dfrac{r''}{\lambda''} - \varphi_1''\right) = \dfrac{M_1}{\lambda r}\sin 2\pi\sigma_1\,, \end{cases}$$

so folgt

$$(81)\qquad \xi = \frac{M_1}{\lambda r}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T_0} - \sigma_1\right).$$

Die Schwingungen setzen sich so zu einer einfachen Schwingung zusammen. Aber diese ist gleichwohl ziemlich kompliziert, weil ihre Phase von Punkt zu Punkt des Interferenzraumes variiert, was übrigens auch der Fall ist, wenn der Äther ruht. Für diese Phase haben wir

$$(82_1)\qquad \operatorname{tg} 2\pi\sigma_1 = \frac{\dfrac{L_1'}{\lambda' r'}\sin 2\pi\left(\dfrac{r'}{\lambda'} - \varphi_1'\right) + \dfrac{L_1''}{\lambda'' r''}\sin 2\pi\left(\dfrac{r''}{\lambda''} - \varphi_1''\right)}{\dfrac{L_1'}{\lambda' r'}\cos 2\pi\left(\dfrac{r'}{\lambda'} - \varphi_1'\right) + \dfrac{L_1''}{r'' \lambda''}\cos 2\pi\left(\dfrac{r''}{\lambda''} - \varphi_1''\right)}.$$

Es ist nun nach (77) bis auf Größen zweiter Ordnung

$$(77')\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda'} = \dfrac{1}{\lambda}\left[1 - g\dfrac{a}{r}\dfrac{T}{\lambda}\left(l - \dfrac{x}{r}\cos(g,r)\right)\right] = \dfrac{1}{\lambda}\left[1 - \dfrac{g}{c}\dfrac{a}{r}\left(l - \dfrac{x}{r}\cos(g,r)\right)\right], \\ \dfrac{1}{\lambda''} = \dfrac{1}{\lambda}\left[1 + g\dfrac{a}{r}\dfrac{T}{\lambda}\left(l - \dfrac{x}{r}\cos(g,r)\right)\right] = \dfrac{1}{\lambda}\left[1 + \dfrac{g}{c}\dfrac{a}{r}\left(l - \dfrac{x}{r}\cos(g,r)\right)\right], \end{cases}$$

also nach den angegebenen Werten von $\frac{1}{r'}$, $\frac{1}{r''}$, r', r'' wieder bis auf Größen zweiter Ordnung

$$(83_1)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda' r'} = \dfrac{1}{\lambda r}\left[1 - \dfrac{a x}{r^2} - \dfrac{g}{c}\dfrac{a}{r}\left(l - \dfrac{x}{r}\cos(g,r)\right)\right], \\ \dfrac{1}{\lambda'' r''} = \dfrac{1}{\lambda r}\left[1 + \dfrac{a x}{r^2} + \dfrac{g}{c}\dfrac{a}{r}\left(l - \dfrac{x}{r}\cos(g,r)\right)\right]; \\ \dfrac{r'}{\lambda'} = \dfrac{r}{\lambda}\left[1 + \dfrac{a x}{r^2} - \dfrac{g}{c}\dfrac{a}{r}\left(l - \dfrac{x}{r}\cos(g,r)\right)\right], \\ \dfrac{r''}{\lambda''} = \dfrac{r}{\lambda}\left[1 - \dfrac{a x}{r^2} + \dfrac{g}{c}\dfrac{a}{r}\left(l - \dfrac{x}{r}\cos(g,r)\right)\right]; \end{cases}$$

oder indem wir setzen

$$\frac{g}{c}\frac{a}{r}\left(l - \frac{x}{r}\cos(g,r)\right) = \varepsilon\,,$$

welches den Korrektionsfaktor für die Bewegung des Äthers darstellt,

$$(83_2)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda' r'} = \dfrac{1}{\lambda r}\left(1 - \dfrac{a x}{r^2} - \varepsilon\right), & \dfrac{1}{\lambda'' r''} = \dfrac{1}{\lambda r}\left(1 + \dfrac{a x}{r^2} + \varepsilon\right); \\ \dfrac{r'}{\lambda'} = \dfrac{r}{\lambda}\left(1 + \dfrac{a x}{r^2} - \varepsilon\right), & \dfrac{r''}{\lambda''} = \dfrac{r}{\lambda}\left(1 - \dfrac{a x}{r^2} + \varepsilon\right). \end{cases}$$

Damit wird

$$\frac{L_1'}{\lambda' r'}\sin 2\pi\left(\frac{r'}{\lambda'} - \varphi_1'\right)$$

$$= \frac{L_1'}{\lambda r}\left[\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\frac{a x}{r} - \frac{r}{\lambda}\varepsilon - \varphi_1'\right) - \left(\frac{a x}{r^2} + \varepsilon\right)\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\frac{a x}{r} - \frac{r}{\lambda}\varepsilon - \varphi_1'\right)\right].$$

In $\frac{r}{\lambda}\varepsilon = \frac{g}{\lambda c}a\left(l - \frac{x}{r}\cos(g, r)\right)$ kann das Glied $\frac{g}{\lambda c}a l$ als konstant zu φ_1' geschlagen werden. Man bekommt dann bis auf Glieder zweiter Ordnung

$$(84)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{L_1'}{\lambda' r'}\sin 2\pi\left(\frac{r'}{\lambda'} - \varphi_1'\right)\\
&= \frac{L_1'}{\lambda r}\left\{\sin 2\pi\left[\frac{r}{\lambda} + \frac{r a x}{\lambda r^2}\left(1 + \frac{\varrho}{c}\right) - \varphi_1'\right] - \left(\frac{a x}{r^2} + \varepsilon\right)\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - \varphi_1'\right)\right\},\\
&\frac{L_1''}{\lambda'' r''}\sin 2\pi\left(\frac{r''}{\lambda''} - \varphi_1''\right)\\
&= \frac{L_1''}{\lambda r}\left\{\sin 2\pi\left[\frac{r}{\lambda} - \frac{r a x}{\lambda r^2}\left(1 + \frac{\varrho}{c}\right) - \varphi_1''\right] + \left(\frac{a x}{r^2} + \varepsilon\right)\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - \varphi_1''\right)\right\},
\end{aligned}\right.$$

und entsprechend die Glieder mit Kosinus. Hiernach können wir in $\operatorname{tg} 2\pi\sigma$ den Zähler auch schreiben, indem $\frac{r}{\lambda} - \varphi_1' = q_1'$, $\frac{r}{\lambda} - \varphi_1'' = q_1''$ gesetzt wird,

$$(82_2)\quad \operatorname{tg} 2\pi\sigma_1 = \frac{L_1'\left(1 - \frac{a x}{r^2} - \varepsilon\right)\sin 2\pi q_1' + L_1''\left(1 + \frac{a x}{r^2} + \varepsilon\right)\sin 2\pi q_1'' + \frac{r}{\lambda}\frac{a x}{r^2}\left(1 + \frac{\varrho}{c}\right)(L_1'\cos 2\pi q_1' - L_1''\cos 2\pi q_1'')}{L_1'\left(1 - \frac{a x}{r^2} - \varepsilon\right)\cos 2\pi q_1' + L_1''\left(1 + \frac{a x}{r^2} + \varepsilon\right)\cos 2\pi q_1'' - \frac{r}{\lambda}\frac{a x}{r^2}\left(1 + \frac{\varrho}{c}\right)(L_1'\sin 2\pi q_1' - L_1''\sin 2\pi q_1'')}.$$

Dadurch ist die Interferenz der Strahlen bestimmt und sie geschieht im allgemeinen anders, als wenn der Äther ruht. Für die Intensität haben wir bei Benutzung der Definition

$$(85)\qquad J = \frac{1}{2}\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{dt}\right)^2\right]dt,$$

nach (81)

$$\lambda^2 r^2\frac{2T_0^2}{4\pi^2}J = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2.$$

Der Definition unter (80) zufolge ist dabei

$$M_1^2 = \frac{\lambda^2 r^2}{\lambda'^2 r'^2}L_1'^2 + \frac{\lambda^2 r^2}{\lambda''^2 r''^2}L_1''^2$$

$$+ 2\frac{\lambda^2 r^2}{\lambda' r'\lambda'' r''}L_1' L_1''\cos 2\pi\left(\frac{r'}{\lambda'} - \frac{r''}{\lambda''} - \varphi_1' + \varphi_1''\right),$$

und entsprechend M_2^2, M_3^2. Wenn die Komponenten gleiche Phasen haben, setzen wir

$$L_1'^2 + L_2'^2 + L_3'^2 = L'^2,\quad L_1''^2 + L_2''^2 + L_3''^2 = L''^2,$$

$$L_1' L_1'' + L_2' L_2'' + L_3' L_3'' = \Lambda$$

und erhalten nach (83_1)

$$
(86)\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda^2 r^2\, 2\, T_0^2}{4\pi^2} J = \left(1 - \dfrac{a x}{r^2} - \varepsilon\right)^2 L'^2 + \left(1 + \dfrac{a x}{r^2} + \varepsilon\right)^2 L''^2 \\ + 2\left(1 - \dfrac{a x}{r^2} - \varepsilon\right)\left(1 + \dfrac{a x}{r^2} + \varepsilon\right) \Lambda \cos 2\pi \left(\dfrac{r'}{\lambda'} - \dfrac{r''}{\lambda''} - \varphi' + \varphi''\right). \end{cases}
$$

Hierin ist nach den Gleichungen unter (83_1)

$$
(87)\qquad \frac{r'}{\lambda'} - \frac{r''}{\lambda''} = \frac{2 a x}{\lambda r} - 2\varepsilon
$$

und, indem wir in ε wieder den konstanten Teil $\dfrac{g}{c_0}\dfrac{a}{r} l$ zur Phase $-\varphi' + \varphi''$ schlagen,

$$
(88)\qquad \frac{r'}{\lambda'} - \frac{r''}{r''} = \frac{2 a x}{\lambda r}\left(1 + \frac{\varrho}{c}\right).
$$

Die für die Breite der Interferenzstreifen entscheidende Größe $\dfrac{2 a x}{\lambda r}$ erscheint also bei bewegtem Äther im Verhältnis von $1 + \dfrac{\varrho}{c_0}$ zu 1 vermehrt oder verringert, je nachdem die Bewegung in Richtung der Strahlen oder ihnen entgegengesetzt erfolgt. Im übrigen hängt auch die Intensitätsverteilung von der Bewegung ab, die Korrektion beträgt $2\varepsilon(L''^2 - L'^2)$ und ist Null für $L' = L''$.

Im ganzen ändert sich jedenfalls zwar nur sehr wenig an der Fresnelschen Erscheinung, aber vielleicht ist es doch nicht unmöglich, auf experimentellem Wege die Änderungen nachzuweisen.

Wenn wir mit H. A. Lorentz λ als konstant und T als variabel ansehen, ist im Interferenzraum eine einfache Schwingung nicht mehr möglich, und es handelt sich um optische Schwebungen, die an jeder Stelle bestehen und von Stelle zu Stelle variieren. Wir haben dann

$$
(89_1)\quad \xi = \frac{L_1'}{\lambda_0 r'} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} - \frac{r'}{\lambda_0} + \varphi_1'\right) + \frac{L_1''}{\lambda_0 r''} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T''} - \frac{r''}{\lambda_0} + \varphi_1''\right),
$$

und entsprechend für η, ζ. Nun ist nach (75)

$$
\frac{1}{T'} = \frac{c_0 + g\cos(g, r')}{\lambda_0}, \qquad \frac{1}{T''} = \frac{c_0 + g\cos(g, r'')}{\lambda_0},
$$

somit nach (76)

$$
(90)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{T'} = \dfrac{c + g\left(1 - \dfrac{a x}{r^2}\right)\cos(g, r) + l\dfrac{a}{r} g}{\lambda_0} = \dfrac{1}{T} + \dfrac{g\dfrac{a}{r}\left(l - \dfrac{x}{r}\cos(g, r)\right)}{\lambda_0}, \\ \dfrac{1}{T''} = \dfrac{c + g\left(1 + \dfrac{a x}{r^2}\right)\cos(g, r) - l\dfrac{a}{r} g}{\lambda_0} = \dfrac{1}{T} - \dfrac{g\dfrac{a}{r}\left(l - \dfrac{x}{r}\cos(g, r)\right)}{\lambda_0}, \end{cases}
$$

und wir bekommen

$$
(89_2)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{L_1'}{\lambda_0 r'} \sin \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left\{\left[\dfrac{\lambda_0}{T} + g\dfrac{a}{r}\left(l - \dfrac{x}{r}\cos(g, r)\right)\right] t - r' + \lambda_0 \varphi_1'\right\} \\ \quad + \dfrac{L_1''}{\lambda_0 r''} \sin \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left\{\left[\dfrac{\lambda_0}{T} - g\dfrac{a}{r}\left(l - \dfrac{x}{r}\cos(g, r)\right)\right] t - r'' + \lambda_0 \varphi_1''\right\} \end{cases}
$$

und entsprechend η und ζ.

Die Periode der Schwebung hängt ab von der Größe $\dfrac{r}{g\dfrac{a}{r}\left(l-\dfrac{x}{r}\cos(g,r)\right)}$, ist also, wie zu erwarten, sehr groß und darum wohl kaum nachweisbar. Die Erscheinung selbst, soweit es sich um die Breite der Interferenzstreifen handelt, wird nicht geändert, aber diese Erscheinung variiert mit der Zeit, sie flimmert. Eine Schwierigkeit bietet in diesem Falle noch die Intensitätsberechnung, da man nicht sagen kann, für welche Zeit die Durchschnitte der lebendigen Kräfte zu nehmen sind. Am zweckmäßigsten wird man wohl dafür die Durchschnittsperiode $\theta = \dfrac{T'+T''}{2}$ wählen. Alsdann hätte man bis auf Größen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}\frac{2\lambda^2}{4\pi^2\theta}\int_0^\theta\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 dt &= \frac{L_1'^2}{T'^2(T'+T'')r'^2}\left[\frac{T'+T''}{2}+(T''-T')\cos 4\pi\left(\frac{r'}{\lambda}-\varphi_1'\right)\right]\\ &+\frac{L_1''^2}{T''^2(T'+T'')r''^2}\left[\frac{T'+T''}{2}+(T'-T'')\cos 4\pi\left(\frac{r''}{\lambda}-\varphi_1''\right)\right]\\ &+\frac{2L_1'L_1''}{T'T''r'r''}\left[\frac{(T'-T'')^2}{(T'+T'')^2}\cos 2\pi\left(\frac{r'+r''}{\lambda}-\varphi_1'-\varphi_1''\right)+\cos 2\pi\left(\frac{r'-r''}{\lambda}-\varphi_1'+\varphi_1''\right)\right]\end{aligned}$$

und entsprechend die anderen Größen. Da $(T'-T'')^2$ von der zweiten Ordnung klein ist, und in $(T''-T')\cos 4\pi\left(\dfrac{r'}{\lambda}-\varphi_1'\right)$ und $(T'-T'')\cos 4\pi\left(\dfrac{r''}{\lambda}-\varphi_1''\right)$ man wiederum bis auf kleine Größen zweiter Ordnung r', r'' durch r ersetzen kann, hängen die Interferenzen in der Tat nur von $\dfrac{r'-r''}{\lambda}$ ab, wie schon bemerkt.

Für die Geschwindigkeit der Lichtverbreitung in Richtung r hatten wir

$$c = c_0 + \varrho = c_0 + u\cos(r,x) + v\cos(r,y) + w\cos(r,z)\,.$$

Die Strahllänge ist hiernach

$$r = (c_0+\varrho)\,t = (c_0 + u\alpha + v\beta + w\gamma)\,t\,,$$

wenn wir die Kosinus der Strahlrichtung mit α, β, γ bezeichnen. Ferner haben wir

$$r = x\alpha + y\beta + z\gamma\,,$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1\,.$$

Vergleicht man dieses mit den Formeln (14) bis (16) für ebene Wellen, so folgt, daß auch hier die Wellenfläche eine in Richtung der Bewegung verschobene Kugelfläche sein muß, so daß alle Schlußfolgerungen auf S. 37f. hier zu wiederholen wären.

Immerhin ist zu beachten, daß ϱ von der Richtung des Strahles abhängt, reine Kugelwellen also eigentlich nicht bestehen, sondern nur für dünne Strahlenkegel angesetzt werden können.

Wir kehren zur vollständigen Differentialgleichung (66) (S. 49) zurück. Wollen wir die von $\dfrac{1}{r}$ abhängigen Glieder nicht fortlassen, so können wir für hinlänglich große r wenigstens $\dfrac{1}{r}$, $\dfrac{1}{r^2}$ als Konstanten behandeln. Alsdann genügt auch eine Lösung

$$G = A\,e^{at+br}\sin(a't+b'r+\delta)\,,\qquad F = \frac{A}{r}\,e^{at+br}\sin(a't+b'r+\delta)$$

mit A, a, b, a', b', δ als Konstanten. Es wird

$$\frac{\partial G}{\partial r} = A\,b\,e^{at+br}\sin(a't+b'r+\delta) + A\,b'\,e^{at+br}\cos(a't+b'r+\delta)\,,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = A\,b^2\,e^{at+br}\sin(a't+b'r+\delta) + 2A\,b\,b'\,e^{at+br}\cos(a't+b'r+\delta) - A\,b'^2\,e^{at+br}\sin(a't+b'r+\delta)\,;$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = A\,a\,e^{at+br}\sin(a't+b'r+\delta) + A\,a'\,e^{at+br}\cos(a't+b'r+\delta)\,,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = A\,a^2\,e^{at+br}\sin(a't+b'r+\delta) + 2A\,a\,a'\,e^{at+br}\cos(a't+b'r+\delta) - A\,a'^2\,e^{at+br}\sin(a't+b'r+\delta)\,,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t\,\partial r} = A\,a\,b\,e^{at+br}\sin(a't+b'r+\delta) + A\,(a\,b'+a'\,b)\,e^{at+br}\cos(a't+b'r+\delta) - A\,a'\,b'\,e^{at+br}\sin(a't+b'r+\delta)\,.$$

Indem man diese Werte in die Differentialgleichung (66_2) einträgt und die Faktoren von sin und cos gleich Null setzt, erhält man

$$(91_1)\quad \begin{cases} a^2 - a'^2 + 2\varrho(a\,b - a'\,b') - \bar{c}_0^2(b^2 - b'^2) - \dfrac{4}{r}(a\,\varrho + b\,\eta) + \dfrac{1}{r^2}\,\vartheta = 0\,, \\ 2a\,a' + 2\varrho(a\,b' + a'\,b) - \bar{c}_0^2\,2b\,b' - \dfrac{4}{r}(a'\,\varrho + b'\,\eta) = 0\,, \end{cases}$$

oder, indem

$$(92)\qquad -\frac{4}{r}\,\varrho = 2\varrho'\,,\quad -\frac{4}{r}\,\eta = 2\varrho''\,,\quad -\frac{\vartheta}{r^2} = \bar{\varrho}$$

geschrieben wird

$$(91_2)\quad \begin{cases} a^2 - a'^2 + 2\varrho(a\,b - a'\,b') + 2\varrho'\,a + 2\varrho''\,b = \bar{c}_0^2(b^2 - b'^2) + \bar{\varrho}\,, \\ a\,a' + \varrho(a\,b' + b\,a') + \varrho'\,a' + \varrho''\,b' = \bar{c}_0^2\,b\,b'\,. \end{cases}$$

Man kann diese beiden Gleichungen in zwei der Form nach gleichartige umwandeln, indem man die mit 2 multiplizierte zweite Gleichung von der ersten abzieht und zu ihr addiert, es kommt dann

$$(91_3)\quad \begin{cases} a(a-a') - a'(a+a') + 2\varrho[a(b-b') - a'(b+b')] + 2\varrho'(a-a') + 2\varrho''(b-b') \\ \qquad = \bar{c}_0^2(b-b')(b+b') - \bar{c}_0^2\,\dfrac{(b+b')^2 - (b-b')^2}{2} + \bar{\varrho}\,, \\ a(a+a') + a'(a-a') + 2\varrho[a(b+b') + a'(b-b')] + 2\varrho'(a+a') + 2\varrho''(b+b') \\ \qquad = \bar{c}_0^2(b-b')(b+b') + \bar{c}_0^2\,\dfrac{(b+b')^2 - (b-b')^2}{2} + \bar{\varrho}\,. \end{cases}$$

Da die Gleichungen vier Größen enthalten, sind davon zwei willkürlich und müssen gegeben sein. Wir nehmen den Fall $a = 0$ und a' als bekannt $= \dfrac{2\pi}{T}$. Die Gleichungen in der Form (91_2) geben

$$(91_1')\quad \begin{cases} -a'^2 - 2\varrho\,a'\,b' + 2\varrho''\,b - \bar{\varrho} - \bar{c}_0^2(b^2 - b'^2) = 0\,, \\ \varrho\,b\,a' + \varrho'\,a' + \varrho''\,b' - \bar{c}_0^2\,b\,b' = 0\,. \end{cases}$$

Indem man beide Gleichungen durch a'^2 dividiert und setzt

$$\frac{b}{a'} = l\,, \qquad \frac{b'}{a'} = m = -\frac{T}{\lambda} = -\frac{1}{c}\,,$$

wird

$$(91_2'') \qquad \begin{cases} 1 + 2\varrho\, m - \dfrac{2\varrho''}{a'}\, l + \dfrac{\varrho}{a'^2} + \bar{c}_0^2(l^2 - m^2) = 0\,, \\ \varrho\, l + \dfrac{\varrho'}{a'} + \dfrac{\varrho''}{a'}\, m - \bar{c}_0^2\, l\, m = 0\,. \end{cases}$$

Hierin sei noch

$$\bar{c}_0 l = l'\,, \qquad \bar{c}_0 m = m'\,, \qquad \frac{\varrho}{\bar{c}_0} = \mathfrak{r}\,,$$

$$\frac{\varrho'}{a'} = \frac{T}{2\pi}\varrho' = -\frac{2}{r}\frac{T}{2\pi}\varrho = -\frac{2}{2\pi r}\frac{\lambda}{c}\varrho = \mathfrak{r}'\,,$$

$$\frac{\varrho''}{\bar{c}_0 a'} = \frac{T}{2\pi}\frac{\varrho''}{\bar{c}_0} = \frac{1}{2\pi}\frac{\lambda}{\bar{c}_0 c}\varrho'' = \mathfrak{r}''\,, \qquad \frac{\varrho}{a'^2} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \varrho = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\lambda^2}{c^2}\varrho = \bar{\mathfrak{r}}\,,$$

so wäre nach der zweiten Gleichung

$$(92\text{a}) \qquad l' = \bar{c}_0 l = -\frac{\mathfrak{r}' + \mathfrak{r}'' m'}{\mathfrak{r} - m'}\,.$$

Die erste Gleichung unter (92_2) wird dann

$$(92\text{b}_1) \qquad 1 + 2\mathfrak{r}\, m' + 2\mathfrak{r}''\frac{\mathfrak{r}' + \mathfrak{r}'' m'}{\mathfrak{r} - m'} + \bar{\mathfrak{r}} + \left(\frac{\mathfrak{r}' + \mathfrak{r}'' m'}{\mathfrak{r} - m'}\right)^2 - m'^2 = 0\,,$$

oder

$$(92\text{b}_2) \qquad \begin{cases} [1 + \bar{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}^2 - (\mathfrak{r} - m')^2](\mathfrak{r} - m')^2 + 2\mathfrak{r}''[\mathfrak{r}' + \mathfrak{r}\mathfrak{r}'' - \mathfrak{r}''(\mathfrak{r} - m')](\mathfrak{r} - m') \\ \qquad + [\mathfrak{r}' + \mathfrak{r}\mathfrak{r}'' - \mathfrak{r}''(\mathfrak{r} - m')]^2 = 0\,, \end{cases}$$

eine Gleichung vierten Grades für $\mathfrak{r} - m'$. Nun sind $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$, $\bar{\mathfrak{r}}$, m' von der Ordnung $\frac{1}{c}$, $\frac{\lambda}{c}$, $\frac{\lambda}{c^2}$, $\frac{\lambda^2}{c^2}$, 1. Somit hat das erste Glied die Ordnung $1 + \frac{\lambda^2}{c^2}$, das zweite die $\frac{\lambda^2}{c^3}$. Im dritten Gliede wäre das größte $\mathfrak{r}'^2$ von der Ordnung $\frac{\lambda^2}{c^2}$. Behalten wir nur Größen von dieser Ordnung, so folgt die biquadratische Gleichung

$$(92\text{a}_2) \qquad [1 + \bar{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}^2 - (\mathfrak{r} - m')^2](\mathfrak{r} - m')^2 + \mathfrak{r}'^2 = 0.$$

Also ergibt sich

$$(93_1) \qquad \begin{cases} m' = \mathfrak{r} - \sqrt{\dfrac{1 + \bar{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}^2}{2} + \sqrt{\mathfrak{r}'^2 + \left(\dfrac{1 + \bar{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}^2}{2}\right)^2}}\,, \\ l' = -\dfrac{\mathfrak{r}'}{\sqrt{\dfrac{1 + \bar{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}^2}{2} + \sqrt{\mathfrak{r}'^2 + \left(\dfrac{1 + \bar{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}^2}{2}\right)^2}}}\,. \end{cases}$$

Die Zeichen sind so gewählt, daß die Ergebnisse mit früheren Ergebnissen übereinkommen. Unter Beachtung der angegebenen Größenordnungen finden wir in Näherungsrechnung

$$(93_2)\qquad \begin{cases} m' = \mathfrak{r} - \sqrt{\dfrac{1+\mathfrak{r}+\mathfrak{r}^2}{2} + \dfrac{1}{2}(1+2\mathfrak{r}'^2+\mathfrak{r}+\mathfrak{r}^2)} \\[2ex] \quad = \mathfrak{r} - \sqrt{1+\mathfrak{r}'^2+2\dfrac{\mathfrak{r}+\mathfrak{r}^2}{2}} = \mathfrak{r} - 1 - \dfrac{1}{2}\left(\mathfrak{r}'^2 + 2\dfrac{\mathfrak{r}+\mathfrak{r}^2}{2}\right), \\[2ex] l' = -\dfrac{\mathfrak{r}'}{1+\dfrac{1}{2}\left(\mathfrak{r}'^2+2\dfrac{\mathfrak{r}+\mathfrak{r}^2}{2}\right)}. \end{cases}$$

Die erste Gleichung gibt

$$(93a_1)\qquad \frac{\bar{c}_0}{c} = 1 - \frac{\varrho}{c_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2}{c^2}\frac{\varrho^2}{\pi^2 r^2} + 2\,\frac{\dfrac{1}{(2\pi)^2}\dfrac{\lambda^2}{c^2}\varrho + \dfrac{\varrho^2}{\bar{c}_0^2}}{2}\right).$$

Läßt man die Glieder höherer Ordnung fort, so bleibt

$$(93a_2)\qquad \frac{\bar{c}_0}{c} = 1 - \frac{\varrho}{c_0}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\sqrt{c_0^2-\varrho^2}}{c} = 1 - \frac{\varrho}{\sqrt{c_0^2-\varrho^2}}$$

oder

$$c = c_0 + \varrho$$

die übliche Beziehung. Die zweite Gleichung lehrt, daß l' die Form hat $\frac{A}{r}\varrho + \frac{B}{r^3} + \ldots$ Also ist $b\,r$ von der Form $A\,\varrho + \frac{B}{r^2} + \ldots$, so daß, wenn nur das erste Glied beibehalten wird, die räumliche Dämpfung zwar von Strahl zu Strahl proportional ϱ variiert, auf dem gleichen Strahl aber unverändert bleibt. Dabei wäre

$$(93b)\qquad l = +\frac{1}{c_0}\,l' = -\frac{\lambda}{\pi r}\frac{\varrho}{c\,c_0} = -\frac{\lambda}{\pi r}\frac{\varrho}{c^2},$$

also

$$(93c)\qquad b = a'l = -\frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{\pi r}\frac{\varrho}{c^2} = -\frac{2}{r}\frac{\varrho}{c}, \qquad b\,r = -2\frac{\varrho}{c}.$$

Zweitens handle es sich um zeitliche Dämpfung, also b sei Null, a' wieder $\frac{2\pi}{T}$. Die Gleichungen (91_2) geben

$$(94_1)\qquad \begin{cases} a^2 - a'^2 - 2\varrho\,a'b' + 2\varrho'a + \bar{c}_0^2\,b'^2 - \varrho = 0, \\ a\,a' + \varrho\,a\,b' + \varrho'a' + \varrho''b' = 0, \end{cases}$$

oder mit den früheren Bezeichnungen und indem $\frac{a}{a'} = n$ gesetzt wird,

$$(94_2)\qquad \begin{cases} n^2 - 1 - 2\mathfrak{r}\,m' + 2\mathfrak{r}'n + m'^2 - \mathfrak{r} = 0, \\ n + \mathfrak{r}\,n\,m' + \mathfrak{r}' + \mathfrak{r}''m' = 0, \end{cases}$$

oder mit $n + \mathfrak{r}' = \nu$, $\mathfrak{r} - m' = \mu'$

$$(94_3)\qquad \begin{cases} \nu^2 + \mu'^2 = 1 + \mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2 + \mathfrak{r}, \\ \nu[1+\mathfrak{r}(\mathfrak{r}-\mu')] + (\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}'')(\mu' - \mathfrak{r}) = 0. \end{cases}$$

Die zweite Beziehnung gibt

$$(95b_1)\qquad \nu = \frac{\mathfrak{r} - \mu'}{1 + \mathfrak{r}(\mathfrak{r} - \mu')}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}''),$$

und die erste

$$(\mathfrak{r} - \mu')^2(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}'')^2 + \mu'^2[1 + \mathfrak{r}(\mathfrak{r} - \mu')]^2 - (1 + \mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2 + \bar{\mathfrak{r}})[1 + \mathfrak{r}(\mathfrak{r} - \mu')]^2 = 0,$$

als Gleichung vierten Grades für μ'. Da $(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}'')^2$ von der Ordnung $\frac{\lambda^2}{c^4}$ ist, kann das erste Glied fortgelassen werden. Dann bleibt, weil $1 + \mathfrak{r}(\mathfrak{r} - \mu')$ nicht Null sein darf,

$$(95a_1)\qquad \mu' = \sqrt{1 + \mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2 + \mathfrak{r}} = 1 + \frac{\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2 + \mathfrak{r}}{2},$$

d. h.

$$(95a_2)\qquad m' = \mathfrak{r} - 1 - \frac{\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2 + \mathfrak{r}}{2},$$

woraus auch jetzt die übliche Beziehung für c folgt. Außerdem ist dann

$$(95b_2)\qquad \nu = m'(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}'') = (\mathfrak{r} - 1)(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}'')$$

und

$$(95b_3)\qquad n = -\mathfrak{r}' + (\mathfrak{r} - 1)(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}'')$$

und in hinreichender Annäherung

$$(95b_4)\qquad n = \frac{a}{a'} = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{r}\frac{\varrho}{c}, \quad a = 2\frac{\varrho}{r},$$

so daß die zeitliche Dämpfung von Strahl zu Strahl wie die Geschwindigkeit variiert, auf demselben Strahl wie das Reziproke des Abstandes von der Lichtquelle.

Die Berechnung weiterer Näherungen darf unterbleiben, zumal die genaueren Gleichungen selbst lösbar sind.

d) Wellen in ungleichmäßig bewegtem Äther. Allgemeine Gleichungen.

Indem es sich auch um krummlinige Wellen handeln kann, setzen wir für ebene Wellen

$$(96)\qquad \xi = A_1 \sin\Psi, \quad \eta = A_2 \sin\Psi, \quad \zeta = A_3 \sin\Psi;$$

$$(97)\qquad \Psi = 2\pi\left(\vartheta t - \int\frac{dS}{\lambda} + \delta\right);$$

$$(98)\qquad \vartheta = \frac{1}{T};$$

woselbst auch

$$(99)\qquad \int\frac{dS}{\lambda} = \int\frac{\frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy + \frac{\partial S}{\partial z}dz}{\lambda} = \int\frac{\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz}{\lambda}$$

ist. Hiernach ist, wenn $\pi = \xi, \eta, \zeta$; $p = x, y, z$; $A = A_1, A_2, A_3$ gesetzt wird,

$$(100) \quad \begin{cases} \dfrac{d\pi}{dt} = \dfrac{dA}{dt}\sin\Psi + A\cos\Psi\dfrac{d\Psi}{dt}, \\ \dfrac{d^2\pi}{dt^2} = \dfrac{d^2A}{dt^2}\sin\Psi + 2\dfrac{dA}{dt}\cos\Psi\dfrac{d\Psi}{dt} - A\sin\Psi\left(\dfrac{d\Psi}{dt}\right)^2 + A\cos\Psi\dfrac{d^2\Psi}{dt^2}. \end{cases}$$

Da genau dieselben Formeln mit p statt t gelten, bekommen wir aus den allgemeinen Differentialgleichungen $\dfrac{d^2\pi}{dt^2} = c_0^2 \Delta\pi$ die $\sin\Psi$ und $\cos\Psi$ entsprechenden beiden Bedingungen

$$(101\text{a}) \qquad \frac{d^2A}{dt^2} - A\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2 = c_0^2\Delta A - c_0^2 A\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right],$$

$$(101\text{b}_1) \quad 2\frac{dA}{dt}\frac{d\Psi}{dt} + A\frac{d^2\Psi}{dt^2} = c_0^2\left[2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) + A\Delta\Psi\right].$$

Für spätere Untersuchungen bemerke ich, daß man statt der zweiten Gleichung eine der ersteren ähnliche ansetzen kann. Man hat

$$2\frac{dA}{dt}\frac{d\Psi}{dt} + A\frac{d^2\Psi}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(A\Psi) - \Psi\frac{d^2A}{dt^2},$$

$$2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) + A\Delta\Psi = \Delta(A\Psi) - \Psi\Delta A,$$

somit, wenn $A\Psi = A'$ gesetzt wird, nach (101 b_1)

$$(101\text{b}_2) \qquad \frac{d^2A'}{dt^2} - \Psi\frac{d^2A}{dt^2} = c_0^2\Delta A' - c_0^2\Psi\Delta A.$$

Addiert man hierzu die mit Ψ multiplizierte erste Bedingungsgleichung, so folgt

$$(101\text{b}_3) \quad \frac{d^2A'}{dt^2} - A'\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2 = c_0^2\Delta A' - c_0^2 A'\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right],$$

welche formell der ersten Bedingungsgleichung entspricht, mit $A' = A\Psi$ für A. Zugleich hat man, wenn diese Gleichung mit A, die erste mit A' multipliziert wird, nach Subtraktion

$$(101\text{b}_4) \qquad A\frac{d^2A'}{dt^2} - A'\frac{d^2A}{dt^2} = c_0^2(A\Delta A' - A'\Delta A),$$

oder auch

$$(101\text{b}_5) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(A\dfrac{dA'}{dt} - A'\dfrac{dA}{dt}\right) \\ = c_0^2\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(A\dfrac{\partial A'}{\partial x} - A'\dfrac{\partial A}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(A\dfrac{\partial A'}{\partial y} - A'\dfrac{\partial A}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(A\dfrac{\partial A'}{\partial z} - A'\dfrac{\partial A}{\partial z}\right)\right], \end{cases}$$

d. h.

$$(101\text{b}_6) \quad \frac{d}{dt}\left(A^2\frac{d\Psi}{dt}\right) = c_0^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(A^2\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A^2\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A^2\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right].$$

Die Ausführung der Differentiationen gibt unmittelbar die zweite Bedingungsgleichung in der ersten Form.

Die Bedingungsgleichungen gelten einzeln für A_1, A_2, A_3. Da sie partiell sind, könnten also an sich drei Lösungen dieser Gleichungen die Größen A_1, A_2, A_3 bedeuten. Lassen wir noch die übliche Transversalitätsbedingung bestehen, so müssen diese Lösungen so gewählt werden, daß noch ist

$$A_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0\,, \qquad \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = 0\,. \tag{102}$$

Zulässig sind aber jedenfalls auch Strahlen mit konstanter Schwingungsrichtung, mit $A_1 = C_1 F$, $A_2 = C_2 F$, $A_3 = C_3 F$, wo die C Konstanten angeben. Alsdann beziehen sich die Bedingungsgleichungen auf F und Ψ.

e) Gleichmäßige Wellen in ungleichmäßig bewegtem Äther.

1. Wir untersuchen erst, ob in ungleich bewegtem Äther unveränderliche Wellen möglich sind. Es ist dann

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial p} = \Delta \Psi = 0\,.$$

Die zweite Bedingungsgleichung erfordert hiernach

$$\frac{d^2 \Psi}{dt^2} = 0\,. \tag{103_1}$$

Es ist aber in diesem Falle

$$\frac{d\Psi}{dt} = 2\pi\vartheta + u\frac{\partial \Psi}{\partial x} + v\frac{\partial \Psi}{\partial y} + w\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 2\pi\vartheta - \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha u + \beta v + \gamma w) = 2\pi\left(\vartheta - \frac{s}{\lambda}\right),$$

somit müssen wir haben

$$\frac{ds}{dt} = 0\,, \tag{103_2}$$

d. h.

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} + v\frac{\partial s}{\partial y} + w\frac{\partial s}{\partial z} = 0\,. \tag{103_3}$$

Die erste Bedingungsgleichung aber gibt die alte Beziehung $c = c_0 + s$. Nun soll jedoch c konstant sein, nennen wir also u_0, v_0, w_0 den konstanten, u_1, v_1, w_1 den variabelen Teil der Bewegung, so daß $s = s_0 + s_1$ wird, so muß jedenfalls $s_1 = 0$ sein. Der Strahl muß senkrecht zum variabelen Teil der Bewegung verlaufen. Die Gleichung $\frac{ds}{dt} = 0$ läßt dann erkennen, daß $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$ sein muß; es darf die Bewegung längs des Strahles auch nicht lokal zeitlich variieren. Das sind fast selbstverständliche Bedingungen. Es seien φ, ψ, χ die Richtungskosinus der Schwingungsrichtung des Strahles, so wäre hiernach für linearpolarisiertes, transversales Licht

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0\,, \quad \alpha\varphi + \beta\psi + \gamma\chi = 0\,, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\,. \tag{104}$$

Die drei Gleichungen bestimmen die Richtung der Wellennormale. Wir bekommen zunächst:

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\varphi w_1 - \chi u_1}{\chi v_1 - \psi w_1}\,, \qquad \nu = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\psi u_1 - \varphi v_1}{\chi v_1 - \psi w_1}\,, \tag{105}$$

sodann, indem

$$(106) \qquad \sqrt{(\chi v_1 - \psi w_1)^2 + (\varphi w_1 - \chi u_1)^2 + (\psi u_1 - \varphi v_1)^2} = \varrho$$

gesetzt wird,

$$(107_1) \qquad \alpha = \frac{\chi v_1 - \psi w_1}{\varrho}, \quad \beta = \frac{\varphi w_1 - \chi u_1}{\varrho}, \quad \gamma = \frac{\psi u_1 - \varphi v_1}{\varrho},$$

$$(108_1) \qquad s = \frac{1}{\varrho}(u_0(\chi v_1 - \psi w_1) + v_0(\varphi w_1 - \chi u_1) + w_0(\psi u_1 - \varphi v_1)),$$

was wir auch schreiben können

$$(107_2) \qquad \alpha = \frac{\chi m_1 - \psi n_1}{\sin(g_1, \sigma)}, \quad \beta = \frac{\varphi n_1 - \chi l_1}{\sin(g_1, \sigma)}, \quad \gamma = \frac{\psi l_1 - \varphi m_1}{\sin(g_1, \sigma)},$$

$$(108_2) \qquad s = \frac{u_0(\chi m_1 - \psi n_1) + v_0(\varphi n_1 - \chi l_1) + w_0(\psi l_1 - \varphi m_1)}{\sin(g_1, \sigma)},$$

wobei ist

$$l_1 = \cos(g_1, x), \quad m_1 = \cos(g_1, y), \quad n_1 = \cos(g_1, z)$$

und σ die Schwingungsrichtung feststellt. g_1 bedeutet die ganze variabele Geschwindigkeit.

Da die Ausdrücke für α, β, γ und s nur von den Verhältnissen der φ, ψ, χ und denen der u_1, v_1, w_1 abhängen, so gehört zu allen Wellen mit gleichen solchen Verhältnissen in der Schwingungsrichtung und in der variabelen Bewegungsrichtung die gleiche Verbreitungsrichtung. In jedem Falle aber werden Wellen nur nach einer Richtung (oder der entgegengesetzten) ohne Änderung durchgelassen und hängt die Verbreitungsgeschwindigkeit außer von der Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung noch von den Richtungen der Schwingung und der variabelen Bewegung ab, besser von dem Verhältnis dieser Richtungen zueinander. Im letzteren Umstande tut sich die grundsätzliche Abweichung von dem einfachen Ausspruche des Dopplerschen Prinzipes dar; es tritt als mitentscheidend etwas hinzu, das in den Gesetzen der Lichtverbreitung durch Kristalle sein Analogon findet.

Wir haben aber noch zu beachten, daß s konstant sein soll. Wir nehmen erst die φ, ψ, χ als konstant an, betrachten also Wellen mit gleichbleibender Schwingungsrichtung, was schon der angenommenen Lösung wegen unumgänglich ist. Dann müssen noch die Verhältnisse der Bewegungskomponenten u_1, v_1, w_1 zueinander konstant sein, also etwa

$$(109) \qquad u_1 : v_1 : w_1 = L : M : N,$$

wo L, M, N Konstanten bedeuten. Hiernach wäre zu setzen

$$(110) \qquad u_1 = Lf(t; x, y, z), \quad v_1 = Mf(t; x, y, z), \quad w_1 = Nf(t; x, y, z).$$

Nur solche Bewegungen lassen ebene Wellen mit gleichbleibender Verbreitungsgeschwindigkeit durch. Im übrigen ist f willkürlich. Hiernach hätten wir

$$(111) \qquad \begin{cases} u = u_0 + Lf(t; x, y, z), \quad v = v_0 + Mf(t; x, y, z), \\ \qquad w = w_0 + Nf(t: x, y, z). \end{cases}$$

Die variabele Bewegung muß in geraden Linien vor sich gehen. Bei der ganzen Bewegung braucht das nicht zu geschehen, sie kann krummlinig sein. Geradlinig fällt auch sie aus, wenn u_0, v_0, w_0 gleichproportional sind L, M, N, etwa

$$u_0 = CL, \quad v_0 = CM, \quad w_0 = CN.$$

Alsdann haben zwar α, β, γ bestimmte Werte — u_1, v_1, w_1 sind nur durch L, M, N zu ersetzen — aber s ist identisch Null, wie sich von selbst versteht.

Wir können die Formeln durch besondere Wahl des Koordinatensystems beliebig vereinfachen. Verlegen wir die x-Achse in die Schwingungsrichtung ($\varphi = 1$, $\psi = \chi = 0$), so wird

$$(107_3) \quad \alpha = 0\,, \quad \beta = \frac{+w_1}{\sqrt{w_1^2 + v_1^2}} = \frac{+N}{\sqrt{M^2 + N^2}}\,, \quad \gamma = \frac{-v_1}{\sqrt{w_1^2 + v_1^2}} = \frac{-M}{\sqrt{M^2 + N^2}}\,;$$

$$(108_3) \qquad s = \frac{v_0 w_1 - w_0 v_1}{\sqrt{w_1^2 + v_1^2}} = \frac{N v_0 - M w_0}{\sqrt{M^2 + N^2}}\,.$$

Analog lauten die Gleichungen, wenn die x-Achse in die Richtung der variabelen Bewegung fällt ($v_1 = w_1 = 0$)

$$(107_4) \qquad \alpha = 0\,, \quad \beta = \frac{-\chi}{\sqrt{\psi^2 + \chi^2}}\,, \quad \gamma = \frac{+\psi}{\sqrt{\psi^2 + \chi^2}}\,;$$

$$(108_4) \qquad s = \frac{\psi w_0 - \chi v_0}{\sqrt{\psi^2 + \chi^2}}\,.$$

Entsprechende Gleichungen ergeben sich durch zyklische Vertauschung der Buchstaben. Allgemein können wir sagen: für die Ermittelung der Verbreitungsrichtung und der Verbreitungsgeschwindigkeit kommt die Bewegung in Richtung der Schwingung und die Schwingung in Richtung des variabelen Teils der Bewegung nicht in Betracht, wenn sonst allen Bedingungen genügt ist.

Ist die Schwingungsrichtung nicht von vornherein vorgeschrieben, so bestehen zur Ermittelung von α, β, γ nur zwei Gleichungen. Wir setzen

$$\frac{\beta}{\alpha} = \mu\,, \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \nu\,, \quad \frac{v_1}{u_1} = B'\,, \quad \frac{w_1}{u_1} = C'\,.$$

Die Gleichungen zur Berechnung von μ, ν sind dann

$$\mu^2 + \nu^2 = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2}\,, \qquad B'\mu + C'\nu = -1\,,$$

aus denen sich ergibt

$$(112) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mu &= \frac{1}{C'^2 + B'^2}\left(-B' \pm C'\sqrt{(C'^2 + B'^2)\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} - 1}\right), \\ \nu &= \frac{1}{C'^2 + B'^2}\left(-C' \mp B'\sqrt{(C'^2 + B'^2)\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} - 1}\right), \end{aligned} \right.$$

oder auch

$$(113) \qquad \left\{ \begin{aligned} \beta &= \alpha\,\frac{u_1^2}{v_1^2 + w_1^2}\left(-\frac{v_1}{u_1} \pm \frac{w_1}{u_1}\sqrt{\frac{v_1^2 + w_1^2}{u_1^2}\,\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} - 1}\right), \\ \gamma &= \alpha\,\frac{u_1^2}{v_1^2 + w_1^2}\left(-\frac{w_1}{u_1} \mp \frac{v_1}{u_1}\sqrt{\frac{v_1^2 + w_1^2}{u_1^2}\,\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} - 1}\right). \end{aligned} \right.$$

Durch zyklische Vertauschung der Buchstaben erhalten wir die entsprechenden Gleichungen, wenn β oder γ als bekannt vorausgesetzt werden. Diese Werte haben wir in den Wert für s einzutragen. Wir bekommen dann

$$(114)\quad \left\{\begin{aligned} s = \alpha\Biggl[u_0 &+ v_0\left(-\frac{u_1 v_1}{v_1^2+w_1^2} \pm \frac{u_1 w_1}{v_1^2+w_1^2}\sqrt{\frac{v_1^2+w_1^2}{u_1^2}\,\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}-1}\right) \\ &+ w_0\left(-\frac{u_1 w_1}{v_1^2+w_1^2} \mp \frac{u_1 v_1}{v_1^2+w_1^2}\sqrt{\frac{v_1^2+w_1^2}{u_1^2}\,\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}-1}\right)\Biggr].\end{aligned}\right.$$

Die Formeln ergeben für jedes α (oder β oder γ) zwei Wellennormalen ν. Unterscheiden wir die beiden Richtungen der Normale durch die Indizes 1 und 2 und bezeichnen die Wurzel mit R, so wäre hiernach

$$(115)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha\,, \quad \beta_1 = \alpha\frac{u_1^2}{v_1^2+w_1^2}\left(-\frac{v_1}{u_1}+\frac{w_1}{u_1}R\right), \quad \gamma_1 = \alpha\frac{u_1^2}{v_1^2+w_1^2}\left(-\frac{w_1}{u_1}-\frac{v_1}{u_1}R\right), \\ \alpha_2 &= \alpha\,, \quad \beta_2 = \alpha\frac{u_1^2}{v_1^2+w_1^2}\left(-\frac{v_1}{u_1}-\frac{w_1}{u_1}R\right), \quad \gamma_2 = \alpha\frac{u_1^2}{v_1^2+w_1^2}\left(-\frac{w_1}{u_1}+\frac{v_1}{u_1}R\right).\end{aligned}\right.$$

Damit findet man

$$\begin{aligned}\cos(\nu_1,\nu_2) &= \alpha^2 + \alpha^2\left(\frac{u_1^2}{v_1^2+w_1^2}\right)^2\left(\frac{v_1^2}{u_1^2}-\frac{w_1^2}{u_1^2}R^2+\frac{w_1^2}{u_1^2}-\frac{v_1^2}{u_1^2}R^2\right) \\ &= \alpha^2+\alpha^2\frac{u_1^2}{v_1^2+w_1^2}(1-R^2)\,,\end{aligned}$$

d. h.

$$(116)\quad \cos(\nu_1,\nu_2) = 2\alpha^2\frac{g_1^2}{v_1^2+w_1^2}-1 = 2\frac{\cos^2(\nu_1,x)}{\sin^2(g_1,x)}-1 = 2\frac{\cos^2(\nu_2,x)}{\sin^2(g_1,x)}-1.$$

Für s haben wir die beiden Werte

$$(117)\quad \left\{\begin{aligned} s_1 &= \alpha\left(u_0-\frac{u_1}{v_1^2+w_1^2}(v_0v_1+w_0w_1-v_0w_1R+w_0v_1R)\right), \\ s_2 &= \alpha\left(u_0-\frac{u_1}{v_1^2+w_1^2}(v_0v_1+w_0w_1+v_0w_1R-w_0v_1R)\right);\end{aligned}\right.$$

$$(118)\quad s_1-s_2 = 2\alpha\,u_1\frac{(v_0w_1-w_0v_1)}{v_1^2+w_1^2}R$$

mit den entsprechenden Gleichungen nach zyklischer Vertauschung der Buchstaben.

Jedem α oder β oder γ entsprechen so zwei Wellen und zwei Verbreitungsgeschwindigkeiten. Da wir $(\nu_1, x) = (\nu_2, x)$ angesetzt haben, gibt das sphärische Dreieck mit den Ecken ν_1, ν_2, x die Beziehung

$$\begin{aligned}\cos(\nu_1,\nu_2) &= \cos(\nu_1,x)\cos(\nu_2,x)+\sin(\nu_1,x)\sin(\nu_2,x)\cos(\overline{\nu_1,x},\overline{\nu_2,x}) \\ &= \cos^2(\nu,x)+\sin^2(\nu,x)\cos(\overline{\nu_1,x},\overline{\nu_2,x}) = \alpha^2+(1-\alpha^2)\cos(\overline{\nu_1,x},\overline{\nu_2,x}).\end{aligned}$$

$(\overline{\nu_1,x},\overline{\nu_2,x})$ ist der Winkel zwischen den beiden Ebenen durch ν_1 und x und durch ν_2 und x. Zusammen mit der Gleichung (116) bekommen wir

$$(119)\quad \cos(\overline{\nu_1,x},\overline{\nu_2,x}) = \frac{2\cos^2(g_1,x)}{\sin^2(g_1,x)}\,\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}-1\,.$$

Zu einem Wellensystem fallen die beiden Wellen zusammen, wenn $\alpha^2 = m_1^2+n_1^2 = 1-l_1^2$, d. h. die x-Achse sich so legen läßt, daß für ν_1 wie für ν_2 wir haben

$\cos(\nu, x) = \pm \sin(g_1, x)$, also $(\nu, x) = \frac{\pi}{2} \mp (g_1, x)$. Da dann ν_1, ν_2, x, g_1 in einer Ebene liegen, müssen ν_1, ν_2 die gleiche Richtung haben, weil ja g_1 senkrecht ist sowohl zu ν_1 wie zu ν_2.

Wir haben geradlinig polarisierte Wellen betrachtet. Für krummlinig polarisierte können wir setzen

$$\xi = A\, l_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\alpha + y\beta + z\gamma}{\lambda} + \delta_1\right)$$
$$+ B\, l_2 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\alpha + y\beta + z\gamma}{\lambda} + \delta_2\right) \quad \text{usf.}$$

Alsdann ergibt die Transversalitätsbedingung zwei Gleichungen für α, β, γ, eine mit l_1, m_1, n_1, eine zweite mit l_2, m_2, n_2, so daß insgesamt vier Gleichungen für α, β, γ vorhanden wären. Es ist nicht unmöglich, daß durch ein Wertsystem allen diesen Gleichungen genügt wird, so, wenn eine von den beiden geraden Schwingungen, aus denen die krumme sich zusammensetzt, die gleiche Richtung hat wie die variabele Bewegung. Im allgemeinen aber muß sich jede krummlinige Schwingung in zwei geradlinige Schwingungen mit verschiedenen Verbreitungsrichtungen und verschiedenen Verbreitungsgeschwindigkeiten zerlegen, was die Analogie mit der Doppelbrechung vervollständigt. Die Formeln entsprechen den früheren. Es wäre von großem Interesse unter diesen Umständen die Gesetze der Brechung und Reflexion abzuleiten; ich kann aber darauf nicht eingehen, obwohl die Rechnungen nach den früheren Auseinandersetzungen einfach sind.

Nunmehr lassen wir alle Größen der Welle einzeln variieren.

f) Wellen ungleichmäßiger Intensität in ungleichmäßig bewegtem Äther.

Es sei nur die Amplitude F einer geradlinig polarisierten Welle variabel. Ist die Veränderlichkeit von F nur zeitlich, so gibt die zweite Bedingungsgleichung unter ($101\,b_1$)

$$2\frac{dF}{dt}\frac{d\Psi}{dt} = -F\frac{d^2\Psi}{dt^2},$$

somit, wenn F_0' eine Konstante bedeutet,

(120₁) $$2\log F = F_0' - \log\frac{d\Psi}{dt},$$

und da für diesen Fall

$$\frac{d\Psi}{dt} = 2\pi\left(\vartheta - u\frac{\partial\Psi}{\partial x} - v\frac{\partial\Psi}{\partial y} - w\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) = 2\pi\left(\vartheta - \frac{\alpha u + \beta v + \gamma w}{\lambda}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(c - s)$$

ist, so wird, wenn F_0 eine neue Konstante festsetzt,

(120₂) $$F = F_0 (c - s)^{-\frac{1}{2}}.$$

Da $c - s$ fast c_0 ist, wird F wenig von $\frac{1}{\sqrt{c_0}} F_0$ abweichen. Die erste Bedingungsgleichung unter (101a) führt nunmehr zu der Beziehung

(121) $$(c - s)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2 (c - s)^{-\frac{1}{2}}}{dt^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left[(c - s)^2 - c_0^2\right] = 0.$$

Da c konstant sein soll, stellt dieses eine Differentialgleichung nach t für s dar, der die Bewegung genügen muß, wenn Strahlen der obigen Art möglich sein sollen. Man kann der Gleichung durch eine Reihenentwicklung nach t genügen. Setzt man

$$(c-s)^{\frac{1}{2}} = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \ldots,$$

so wird

$$(c-s) = C_0^2 + 2C_0 C_1 t + (C_1^2 + 2C_0 C_2)t^2 + 2(C_0 C_3 + C_1 C_2)t^3 + \ldots,$$
$$(c-s)^2 = C_0^4 + 4C_0^3 C_1 t + [4C_0^2 C_1^2 + 2C_0^2(C_1^2 + 2C_0 C_2)]t^2 + \ldots,$$
$$C_0^4 \frac{d^2(c-s)^{-\frac{1}{2}}}{dt^2} = 2C_0(C_1^2 - C_0 C_2) - 6(C_0^2 C_3 - 2C_0 C_1 C_2 + C_1^3)t + \ldots,$$

und man hat

$$2(C_1^2 - C_0 C_2) - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} C_0^2 (C_0^4 - c_0^2) = 0,$$
$$-6C_0^{-3}(C_0^2 C_3 + C_1^3 - 2C_0 C_1 C_2) + 2C_1 C_0^{-3}(C_1^2 - C_0 C_2) - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} 4C_0^3 C_1 = 0 \quad \text{usf.}$$

Die zwei willkürlichen C können beliebige Funktionen von x, y, z sein. Nehmen wir jedoch, früheren Ergebnissen entsprechend, $C_0^4 = c_0^2$, so bleibt nur eine willkürliche Funktion von x, y, z übrig, durch die alle C von C_1 ab bestimmt sind. Da α, β, γ Konstanten bedeuten, so werden die u, v, w die gleichen Funktionen von t; x, y, z sein, wie für s angenommen werden muß.

Zweitens sei F, die Amplitude, eine Funktion nur von x, y, z, nicht von t. Die zweite Bedingungsgleichung unter (101 b$_1$) (S. 60) geht dann über in

$$(122_1) \qquad 2(c-s)\frac{dF}{dt} + F\frac{d(c-s)}{dt} = -2c_0^2\left(\alpha\frac{\partial F}{\partial x} + \beta\frac{\partial F}{\partial y} + \gamma\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

oder

$$(122_2) \qquad \begin{cases} 2(c-s)\left(u\dfrac{\partial F}{\partial x} + v\dfrac{\partial F}{\partial y} + w\dfrac{\partial F}{\partial z}\right) + F\dfrac{d(c-s)}{dt} \\ \qquad = -2c_0^2\left(\alpha\dfrac{\partial F}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial F}{\partial y} + \gamma\dfrac{\partial F}{\partial z}\right), \end{cases}$$

während die erste Bedingungsgleichung (101 a) (S. 60) ergibt

$$(123_1) \qquad \lambda^2\frac{d^2F}{dt^2} - 4\pi^2 F(c-s)^2 = c_0^2\lambda^2 \Delta F - 4\pi^2 F c_0^2$$

oder nach dem Schema S. 36

$$(123_2) \qquad \begin{cases} 2\left(uv\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + vw\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} + wu\dfrac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}\right) + u^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + v^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + w^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} \\ \qquad + \dfrac{du}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{dv}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{dw}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \qquad = \dfrac{4\pi^2}{\lambda^2}F(c-s)^2 + c_0^2\Delta F - \dfrac{4\pi^2}{\lambda^2}c_0^2 F. \end{cases}$$

Wir behalten noch die Form (123_1) bei und haben

$$c = s + \sqrt{c_0^2 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\left(\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dt^2} - c_0^2\frac{\Delta F}{F}\right)}. \tag{124_1}$$

Nun soll c konstant sein. Setzen wir abermals $g = g_0 + g_1$, so daß wir haben

$$c = c_0 + s_0 - c_0 + s_1 + \sqrt{c_0^2 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\frac{1}{F}\left(\frac{d^2F}{dt^2} - c_0^2\Delta F\right)}, \tag{124_2}$$

so muß verlangt werden, daß

$$-c_0 + s_1 + \sqrt{c_0^2 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\frac{1}{F}\left(\frac{d^2F}{dt^2} - c_0^2\Delta F\right)}$$

von t; x, y, z unabhängig ist. Nun hängt s_1 von den willkürlichen Größen α, β, γ ab. Also müssen wir wieder haben

$$s_1 = \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0 \tag{125}$$

und außerdem muß sein

$$\frac{d^2F}{dt^2} - c_0^2\Delta F = CF, \tag{126}$$

wo C eine Konstante bedeutet.

Aus $s_1 = 0$ ergibt sich $\frac{d(c-s)}{dt} = 0$, folglich geht die Gleichung (122_2) über in

$$(c-s)\left(u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z}\right) + c_0^2\left(\alpha\frac{\partial F}{\partial x} + \beta\frac{\partial F}{\partial y} + \gamma\frac{\partial F}{\partial z}\right) = 0. \tag{122_3}$$

Die beiden Glieder dieser Gleichung sind von verschiedener Größenordnung, wenn u, v, w nicht von der Größenordnung von c_0 erscheinen sollen. Man kann diese Verschiedenheit auch nicht ausgleichen, indem man etwa im zweiten Glied $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ als von der Ordnung $\frac{1}{c_0}$ annimmt, da dann die Ordnung des ersten Gliedes in demselben Maße sich verringert. Also bleibt kaum etwas anderes übrig als die Glieder überhaupt einzeln gleich Null anzusetzen. Wir haben dann, was — wenn diese Argumentation nicht als genügend angesehen wird — eine besondere Annahme für besondere Verhältnisse bedeuten würde,

$$u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \qquad \alpha\frac{\partial F}{\partial x} + \beta\frac{\partial F}{\partial y} + \gamma\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{127}$$

Da für transversale Wellen zugleich ist

$$\varphi\frac{\partial F}{\partial x} + \psi\frac{\partial F}{\partial y} + \chi\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \tag{128}$$

so muß die Determinante dieser drei Gleichungen verschwinden, wenn F von x, y, z nicht unabhängig sein soll. Also haben wir

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \varphi & \psi & \chi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0 + u_1 & v_0 + v_1 & w_0 + w_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \varphi & \psi & \chi \end{vmatrix} = 0, \tag{129_1}$$

und weil u_0, v_0, w_0 von u_1, v_1, w_1 unabhängig sind, wird

$$(129_2)\qquad \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \varphi & \psi & \chi \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \varphi & \psi & \chi \end{vmatrix} = 0\,.$$

Außerdem gelten auch hier die Beziehungen unter (104), also ebenfalls die aus jenen folgenden unter (107). Nach diesen letzteren Beziehungen gibt die erste der Determinantengleichungen

$$u_0(\varphi(\chi n_1 + \psi m_1) - l_1(\chi^2 + \psi^2)) + v_0(\psi(\varphi l_1 + \chi n_1) - m_1(\varphi^2 + \chi^2))$$
$$+ w_0(\chi(\psi m_1 + \varphi l_1) - n_1(\psi^2 + \varphi^2)) = 0\,,$$

d. h.

$$(\varphi l_1 + \psi m_1 + \chi n_1)(u_0\varphi + v_0\psi + w_0\chi) = u_0 l_1 + v_0 m_1 + w_0 n_1\,,$$

oder

$$\cos(\sigma, g_1)\cos(\sigma, g_0) = \cos(g_1, g_0)\,.$$

Da aus dem sphärischen Dreieck der Richtungen σ, g_1, g_0 sich ergibt

$$\cos(g_1, g_0) = \cos(\sigma, g_1)\cos(\sigma, g_0) + \sin(\sigma, g_1)(\sin\sigma, g_0)\cos(\overline{\sigma, g_1}, \overline{\sigma, g_0})\,,$$

so muß sein

$$\sin(\sigma, g_1)\sin(\sigma, g_0)\cos(\overline{\sigma, g_1}, \overline{\sigma, g_0}) = 0\,.$$

Bemerken wir, daß die zweite der Determinantengleichungen in derselben Weise ergibt $\sin^2(\sigma, g_1) = 0$, so ist also die erste Determinantengleichung schon erfüllt, wenn die zweite zutrifft. Aus dieser ist aber zu schließen, daß σ und g_1 zusammenfallen. Eine Welle der betrachteten Art kann nur bestehen, wenn die Schwingung in Richtung der variabelen Bewegung vor sich geht; Schwingungen, welche die Neigung haben, ihre Weite während der Fortpflanzung zu variieren, werden in die Richtung der variabelen Bewegung hineingezogen, wodurch eine Art Polarisation entsteht. Zugleich haben wir

$$(130)\qquad \varphi = \pm l_1\,, \quad \psi = \pm m_1\,, \quad \chi = \pm n_1\,.$$

Nun ist die erste der Gleichungen (127) auch gleich

$$u_0\frac{\partial F}{\partial x} + v_0\frac{\partial F}{\partial y} + w_0\frac{\partial F}{\partial z} + g_1\left(l_1\frac{\partial F}{\partial x} + m_1\frac{\partial F}{\partial y} + n_1\frac{\partial F}{\partial z}\right) = 0\,,$$

also zerfällt diese Gleichung in die zwei Gleichungen

$$(131)\qquad u_0\frac{\partial F}{\partial x} + v_0\frac{\partial F}{\partial y} + w_0\frac{\partial F}{\partial z} = 0\,, \quad u_1\frac{\partial F}{\partial x} + v_1\frac{\partial F}{\partial y} + w_1\frac{\partial F}{\partial z} = 0\,,$$

wovon die zweite der Gleichung unter (128) gleich ist. Wir können hiernach allgemein in der ersten Gleichung (127) statt u, v, w auch setzen u_0, v_0, w_0 oder u_1, v_1, w_1. Führen wir in die zweite Gleichung unter (127) die Werte von α, β, γ nach (107) ein, so bekommen wir

$$(132_1)\qquad \varphi\left(w_1\frac{\partial F}{\partial y} - v_1\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \psi\left(u_1\frac{\partial F}{\partial z} - w_1\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \chi\left(v_1\frac{\partial F}{\partial x} - u_1\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0\,.$$

Nach der Gleichung unter (128) folgt also

$$(132_2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} = \varkappa\left(w_1\frac{\partial F}{\partial y} - v_1\frac{\partial F}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \varkappa\left(u_1\frac{\partial F}{\partial z} - w_1\frac{\partial F}{\partial x}\right), \\ &\qquad\qquad \frac{\partial F}{\partial z} = \varkappa\left(v_1\frac{\partial F}{\partial x} - u_1\frac{\partial F}{\partial y}\right). \end{aligned}\right.$$

Andererseits geben die erste und die zweite Gleichung unter (127)

$$(133)\qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{w\alpha - u\gamma}{v\gamma - w\beta}\,, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{u\beta - v\alpha}{v\gamma - w\beta}\,,$$

und da man z. B. hat

$$w_1(w\alpha - u\gamma) - v_1(u\beta - v\alpha) = \alpha(vv_1 + ww_1) - u(v_1\beta + w_1\gamma) = \alpha(uu_1 + vv_1 + ww_1)\,,$$

so folgt aus (132_2) und (133)

$$v\gamma - w\beta = \varkappa'\alpha\,, \quad w\alpha - u\gamma = \varkappa'\beta\,, \quad u\beta - v\alpha = \varkappa'\gamma\,;$$
$$\varkappa' = \varkappa(uu_1 + vv_1 + ww_1) = \varkappa g g_1 \cos(g, g_1)\,,$$

also

$$\varkappa' = \pm g \sin(g, \nu)\,, \quad \varkappa = \pm\frac{\sin(g, \nu)}{g_1\cos(g, g_1)}\,;$$

Nun dürfen wir dem obigen zufolge auch g durch g_0 oder g_1 ersetzen, somit wird

$$(134)\qquad \frac{\sin(g, \nu)}{\cos(g, g_1)} = \frac{\sin(g_0, \nu)}{\cos(g_0, g_1)} = \frac{\sin(g_1, \nu)}{\cos(g_1, g_1)}\,.$$

Daraus folgt

$$(135)\qquad (g, \nu) = \frac{\pi}{2} \pm (g, g_1)\,, \quad (g_0, \nu) = \frac{\pi}{2} \pm (g_0, g_1)\,, \quad (g_1, \nu) = \frac{\pi}{2} \pm (g_1, g_1)\,.$$

Die Wellennormale liegt also in der Ebene g, g_1, die die Richtung g_0 mitenthält.

Will man α, β, γ selbst bestimmen, so können hierzu die Gleichungen (107) deshalb nicht dienen, weil sie wegen $\varphi = l_1$, $\psi = m_1$, $\chi = n_1$ Werte $\frac{0}{0}$ ergeben. Man hat aber außer den Beziehungen

$$(136)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\,, \quad \alpha l_1 + \beta m_1 + \gamma n_1 = 0$$

die eben gewonnene neue Beziehung

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = \pm\sin(g, g_1) = \pm\sqrt{(lm_1 - ml_1)^2 + (mn_1 - nm_1)^2 + (nl_1 - ln_1)^2}\,,$$

wo l, m, n die Richtungskosinus der ganzen Bewegung g bedeuten. Die zweite und dritte Gleichung ergeben

$$\beta = +\frac{n_1\sin(g, g_1) - \alpha(ln_1 - nl_1)}{mn_1 - nm_1}\,, \quad \gamma = -\frac{m_1\sin(g, g_1) - \alpha(lm_1 - ml_1)}{mn_1 - nm_1}$$

somit wird nach der ersten Gleichung

$$\alpha^2\sin^2(g, g_1) - 2\alpha\sin(g, g_1)\big(n_1(ln_1 - nl_1) + m_1(lm_1 - ml_1)\big)$$
$$+ \sin^2(g, g_1)(m_1^2 + n_1^2) - (mn_1 - nm_1)^2 = 0\,.$$

Darin ist der Faktor des zweiten Gliedes gleich

$$l(m_1^2 + n_1^2) - l_1(mm_1 + nn_1) = l(1 - l_1^2) - l_1\big(\cos(g, g_1) - ll_1\big) = l - l_1\cos(g, g_1)\,.$$

Die beiden letzten Glieder geben wegen des Wertes von $\sin^2(g, g_1)$

$$\begin{aligned} &-l_1^2\sin^2(g, g_1) + (lm_1 - ml_1)^2 + (nl_1 - ln_1)^2 \\ &= -l_1^2\sin^2(g, g_1) + l^2(m_1^2 + n_1^2) + l_1^2(m^2 + n^2) - 2ll_1(mm_1 + nn_1) \\ &= -l_1^2\sin^2(g, g_1) + l^2 + l_1^2 - 2l_1^2 l^2 + 2l^2 l_1^2 - 2ll_1\cos(g, g_1) \\ &= l^2 + l_1^2\cos^2(g, g_1) - 2ll_1\cos(g, g_1) = \big(l - l_1\cos(g, g_1)\big)^2\,, \end{aligned}$$

so daß die linke Seite der Gleichung für α ein vollständiges Quadrat wird und man erhält

$$(137)\quad \alpha = \pm \frac{l - l_1 \cos(g, g_1)}{\sin(g, g_1)}, \quad \beta = \pm \frac{m - m_1 \cos(g, g_1)}{\sin(g, g_1)}, \quad \gamma = \pm \frac{n - n_1 \cos(g, g_1)}{\sin(g, g_1)}.$$

Kennt man zuletzt noch von F einen Differentialquotienten, so geben die Gleichungen (133) die anderen Differentialquotienten und damit F bis auf eine Konstante. Ist z. B. F eine Funktion von $ax + by + cz + d$, so hätte man

$$b = a \frac{w\alpha - u\gamma}{v\gamma - w\beta}, \quad c = a \frac{u\beta - v\alpha}{v\gamma - w\beta},$$

also

$$(138)\quad \begin{cases} b = \pm a \dfrac{lw - nu - (l_1 w - n_1 u)\cos(g, g_1)}{nv - mw - (n_1 v - m_1 w)\cos(g, g_1)}, \\ c = \pm a \dfrac{mu - lv - (m_1 u - l_1 v)\cos(g, g_1)}{nv - mw - (n_1 v - m_1 w)\cos(g, g_1)}. \end{cases}$$

Gehen wir noch zurück auf die Gleichung für die Verbreitungsgeschwindigkeit der Wellen, so ist sie nach (124_1)

$$(139)\quad c = s_0 + \sqrt{c_0^2 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} C},$$

wo C eine Konstante bedeutet, indem nach (126)

$$(140_1)\quad \frac{d^2 F}{dt^2} - c_0^2 \Delta F = CF$$

sein sollte, d. h. in unserem Falle

$$(140_2)\quad \begin{cases} 2\left(uv \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + vw \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + wu \dfrac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\right) \\ + u^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + v^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + w^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \dfrac{du}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{dv}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{dw}{dt}\dfrac{\partial F}{dz} = c_0^2 \Delta F + CF. \end{cases}$$

Nun haben wir nach (133), woselbst die u, v, w mit u_0, v_0, w_0 vertauscht werden dürfen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{w_0 \alpha - u_0 \gamma}{v_0 \gamma - w_0 \beta},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{w_0 \alpha - u_0 \gamma}{v_0 \gamma - w_0 \beta} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{w_0 \alpha - u_0 \gamma}{v_0 \gamma - w_0 \beta} \frac{u_0 \beta - v_0 \alpha}{v_0 \gamma - w_0 \beta},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{u_0 \beta - v_0 \alpha}{v_0 \gamma - w_0 \beta};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{w_0 \alpha - u_0 \gamma}{v_0 \gamma - w_0 \beta} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{w_0 \alpha - u_0 \gamma}{v_0 \gamma - w_0 \beta}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{u_0 \beta - v_0 \alpha}{v_0 \gamma - w_0 \beta} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{u_0 \beta - v_0 \alpha}{v_0 \gamma - w_0 \beta}\right)^2;$$

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{w_0 \alpha - u_0 \gamma}{v_0 \gamma - w_0 \beta)}\right)^2 + \left(\frac{u_0 \beta - v_0 \alpha}{v_0 \gamma - w_0 \beta}\right)^2\right],$$

und die obige Differentialgleichung gäbe

$$(141_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\{2(u\,v(w_0\alpha - u_0\gamma)(v_0\gamma - w_0\beta) + v\,w(w_0\alpha - u_0\gamma)(u_0\beta - v_0\alpha) \\ \qquad + w\,u(u_0\beta - v_0\alpha)(v_0\gamma - w_0\beta)) + u^2(v_0\gamma - w_0\beta)^2 \\ \qquad + v^2(w_0\alpha - u_0\gamma)^2 + w^2(u_0\beta - v_0\alpha)^2\} \\ = c_0^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}[(v_0\gamma - w_0\beta)^2 + (w_0\alpha - u_0\gamma)^2 + (u_0\beta - v_0\alpha)^2] + C(v_0\gamma - w_0\beta)^2 F \end{cases}$$

oder nach einiger Zwischenrechnung

$$(141_2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\{2[\alpha\,\gamma(v\,w_0(u\,v_0 - v\,u_0) + w\,v_0(v\,u_0 - u\,v_0) + c_0^2 u_0 w_0) \\ \qquad + \beta\,\alpha(w\,u_0(v\,w_0 - w\,v_0) + u\,w_0(w\,v_0 - v\,w_0) + c_0^2 v_0 u_0) \\ \qquad + \gamma\,\beta(u\,v_0(w\,u_0 - u\,w_0) + v\,u_0(u\,w_0 - w\,u_0) + c_0^2 w_0 v_0)] \\ \qquad + \gamma^2((u\,v_0 - v\,u_0)^2 - c_0^2(v_0^2 + u_0^2)) \\ \qquad + \alpha^2((v\,w_0 - w\,v_0)^2 - c_0^2(w_0^2 + v_0^2)) \\ \qquad + \beta^2((w\,u_0 - u\,w_0)^2 - c_0^2(u_0^2 + w_0^2))\} = CF(v_0\gamma - w_0\beta)^2 . \end{cases}$$

Wir haben die Buchstaben zyklisch zu vertauschen, um die entsprechenden Gleichungen für $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ zu erhalten. Da dabei der Faktor dieser Differentialquotienten seinen Wert nicht ändert, so folgt

$$(142)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \varkappa(v_0\gamma - w_0\beta)^2 F\,, \qquad \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \varkappa(w_0\alpha - u_0\gamma)^2 F\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \varkappa(u_0\beta - v_0\alpha)^2 F\,. \end{cases}$$

Die Größe $\varkappa$ als abhängig von u, v, w, ist an sich variabel. Läßt man jedoch Größen zweiter Ordnung fort, was darauf hinauskommt $\dfrac{d^2 F}{dt^2}$ gegen $c_0^2 \Delta F$ zu vernachlässigen, so wird nach (140_1) $\varkappa$ konstant

$$(143_1)\qquad \varkappa = \frac{C'}{(v_0\gamma - w_0\beta)^2 + (w_0\alpha - u_0\gamma)^2 + (u_0\beta - v_0\alpha)^2}\,.$$

$C' = -C/c_0^2$ kann positiv oder negativ sein. Schreiben wir

$$(v_0\gamma - w_0\beta) = \alpha'\,, \qquad (w_0\alpha - u_0\gamma) = \beta'\,, \qquad (u_0\beta - v_0\alpha) = \gamma'\,,$$

$$(143_2)\qquad \varkappa = \frac{C'}{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2} = \pm\frac{1}{\Lambda^2}\,,$$

so wird für ein positives $\varkappa$ gesetzt

$$(144')\qquad F = L\,e^{+\frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z}{\Lambda}} + M\,e^{-\frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z}{\Lambda}}\,,$$

für ein negatives $\varkappa = -\dfrac{1}{\Lambda^2}$ dagegen

$$(144'')\quad F = L\sin 2\pi\frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta'}{\Lambda} + M\cos 2\pi\frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta'}{\Lambda}\,.$$

Im letzteren Falle ist Λ die Periode der Amplitude, die „Amplitudenlänge“ entsprechend der Wellenlänge.

Zugleich haben wir für die Verbreitungsgeschwindigkeit der Welle, weil

$$(145)\qquad \frac{\Delta F}{F} = \pm(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\frac{1}{\Lambda^2} = \pm\frac{\sin^2(g_0, \nu)}{\Lambda^2} g_0^2 = \pm\frac{\cos^2(g_0, g_1)}{\Lambda^2} g_0^2$$

ist,

$$(146)\qquad c = c_0 + s_0 \mp \frac{1}{2} c_0 \frac{\lambda_0^2}{\Lambda^2} \frac{\cos^2(g_0, g_1)}{4\pi^2} g_0^2 .$$

Also auch dann, wenn etwa $s_0 = 0$ sein, die Welle sich senkrecht zur Richtung der konstanten Bewegung verbreiten sollte, weicht die Verbreitungsgeschwindigkeit von der in ruhendem Äther ab, und zwar ist sie größerer als diese, wenn die Amplitude periodisch variiert, kleiner, wenn es exponential geschieht. Diesen Fall hat hat man bis jetzt noch nicht in Erwägung gezogen.

Nur wenn $\frac{1}{\Lambda} = 0$, oder $\cos^2(g_0, g_1) = 0$ sein sollte, bliebe für c lediglich die Abhängigkeit von s_0 bestehen. Im ersten Fall muß, wie die vorstehenden Gleichungen dartun, F eine lineare Funktion von x, y, z werden

$$F = Lx + My + Nz + P .$$

Im zweiten Fall haben wir

$$u_0 : v_0 : w_0 = \alpha : \beta : \gamma ,$$

die Welle verbreitet sich in Richtung des konstanten Teils der Bewegung, der seinerseits senkrecht zum variabelen Teil verläuft. Dann darf F jede beliebige Funktion sein, die der Laplaceschen Gleichung $\Delta F = 0$ genügt, und es ist nun

$$c = c_0 \pm g_0 .$$

Ganz unabhängig von der Bewegung wird die Verbreitungsgeschwindigkeit, wenn

$$(147_1)\qquad s_0 \mp \frac{c_0}{2} \frac{\lambda_0^2}{\Lambda^2} \frac{\cos^2(g_0, g_1)}{4\pi^2} g_0^2 = 0$$

ist. Bei periodischer Variabilität der Amplitude muß die Strahlrichtung der konstanten Bewegung entgegenlaufen, bei exponentieller ihr gleichlaufen, und absolut muß angenähert sein

$$(147_2)\qquad s_0 = \pm \frac{c_0}{2} \frac{\lambda_0^2}{\Lambda^2} \frac{\cos^2(g_0, g_1)}{4\pi^2} g_0^2 .$$

Für Verhältnisse, bei denen in der Bedingungsgleichung (122_3) die Glieder nicht einzeln verschwinden, haben wir

$$(148_1)\qquad ((c-s)\,u + c_0^2\,\alpha)\frac{\partial F}{\partial x} + ((c-s)\,v + c_0^2\,\beta)\frac{\partial F}{\partial y} + ((c-s)\,w + c_0^2\,\gamma)\frac{\partial F}{\partial z} = 0 ,$$

und indem man setzt

$$(149)\qquad U = (c-s)\,u + c_0^2\,\alpha , \quad V = (c-s)\,v + c_0^2\,\beta , \quad W = (c-s)\,w + c_0^2\,\gamma ,$$

wird

$$(148_2)\qquad U\frac{\partial F}{\partial x} + V\frac{\partial F}{\partial y} + W\frac{\partial F}{\partial z} = 0 .$$

Zu dieser Gleichung, die der ersten Gleichung unter (127) entspricht, tritt dann noch die Gleichung (128). Die Gleichungen unter (104) und (107) gelten auch hier. Da aber die Determinantenbedingungen unter (129) entfallen, kommen so einfache Beziehungen für die Schwingungsrichtung und die Strahlrichtung wie im früheren Falle nicht mehr zum Vorschein. Die Schwingungsrichtung bestimmt die Verbreitungsrichtung und letztere die erstere, und beide werden von der Richtung der variabelen Bewegung bestimmt, aber eine von ihnen ist bis zu einem gewissen Grade willkürlich, so die Bewegungsrichtung innerhalb einer Ebene, die senkrecht ist zur Richtung der variabelen Bewegung. Im übrigen haben wir entsprechend den Beziehungen (133)

$$(150_1) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{W\varphi - U\chi}{V\chi - W\psi}, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{U\psi - V\varphi}{V\chi - W\psi},$$

und darin ist nach (149)

$$\begin{aligned} W\varphi - U\chi &= (c - s)(w\varphi - u\chi) + c_0^2(\gamma\varphi - \alpha\chi), \\ U\psi - V\varphi &= (c - s)(u\psi - v\varphi) + c_0^2(\alpha\psi - \beta\varphi), \\ V\chi - W\psi &= (c - s)(v\chi - w\psi) + c_0^2(\beta\chi - \gamma\psi). \end{aligned}$$

Ersetzen wir für gegen die Lichtgeschwindigkeit nicht erhebliche Bewegungen $c - s$ durch c_0 und schreiben $\frac{u}{c_0}, \frac{v}{c_0}, \frac{w}{c_0} = u', v', w'$, so wäre

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{w'\varphi - u'\chi + (\gamma\varphi - \alpha\chi)}{v'\chi - w'\psi + (\beta\chi - \gamma\psi)}, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{u'\psi - v'\varphi + (\alpha\psi - \beta\varphi)}{v'\chi - w'\psi + (\beta\chi - \gamma\psi)}.$$

Sind u', v', w' kleine Größen, so kommt man auf die früheren Entwickelungen zurück, die also in diesem Falle allgemein gelten, und die, wie ich glaube, aber nicht zweifelsfrei zu beweisen vermag, überhaupt allgemein gelten.

Jedenfalls zeigt sich schon hier, daß die Verhältnisse keineswegs so einfach zu liegen brauchen, wie immer vorausgesetzt wird. Gleiche Ergebnisse können auf die mannigfachste Weise erklärt werden, zunächst wenigstens qualitativ. Wir wissen aber von den Lichtvorgängen und den Vorgängen im Äther so wenig, daß nichts auch nur mit einiger Sicherheit ausgesagt werden kann, und daß man sich nicht auf so bestimmte Annahmen festlegen darf, wie gewöhnlich geschieht. Ob im freien Äther gedämpfte Schwingungen vorkommen, wird man bezweifeln wollen, da Absorptionserscheinungen im Raume noch nicht mit Sicherheit festgestellt sind. Im allgemeinen wird angenommen, daß solche Erscheinungen dort in wesentlicher Stärke nicht bestehen, und wir das Licht auch von den entferntesten Himmelskörpern fast ungeschwächt erhalten, wenngleich eine schwache Absorption nicht von der Hand gewiesen wird. Sollte eine solche sich in der Tat noch zeigen, so könnte sie auch sehr wohl ihren Grund in den im Raume anscheinend so weit verbreiteten Nebel- und Staubmassen haben. Denn die Absorption ist man geneigt an das Vorhandensein gewöhnlicher Materie zu knüpfen, solange sie eben nicht kinetisch entsteht. Wie aber kinetische Absorption mit materieller zusammenhängt, läßt sich nicht sagen. Unmöglich ist es nicht, daß letztere durch erstere zu erklären ist, denn nichts verbietet den Äther innerhalb der Körper in steter Bewegung, wirbelnder oder schwingender, sich vorzustellen. Gehöhte Schwingungen kennen wir nirgends, namentlich nicht innerhalb der Körper, mehr als absolut durchsichtig ist kein Körper, solche Schwingungen vermöchten nur kinetisch erklärt zu werden. Wie es sich mit dem freien Äther verhält, wissen wir nicht. Findet aber um einen Stern eine variabele Ätherbewegung statt, so könnte er uns dadurch sehr wohl bald heller, bald dunkler erscheinen, wie die „veränderlichen Sterne". Ähnliches gilt von periodischer Variation der Lichtintensität.

g) Ob Wellen mit ungleichmäßiger Schwingungsdauer möglich sind?

Die Amplitude der Welle sei konstant. Die Gleichungen (101) (S. 60) geben dann

$$\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2 = c_0^2\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right], \tag{151a$_1$}$$

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} = c_0^2 \Delta\Psi, \tag{151b$_1$}$$

wozu noch die Transversalitätsbedingung kommt

$$A_1\frac{\partial\Psi}{\partial x} + A_2\frac{\partial\Psi}{\partial y} + A_3\frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0. \tag{152}$$

Diese Beziehungen können wir auch schreiben

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + u\frac{\partial\Psi}{\partial x} + v\frac{\partial\Psi}{\partial y} + w\frac{\partial\Psi}{\partial z} = c_0\sqrt{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2}, \tag{151a$_2$}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2}\right) = c_0\Delta\Psi \tag{151b$_2$}$$

oder für eine dieser Gleichungen

$$2\frac{d\Psi}{dt}\Delta\Psi = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{151c}$$

Nur die Schwingungsdauer sei variabel. Wir fragen erst, ob sie allein von der Zeit abhängen kann. Es wird

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \vartheta + t\frac{\partial\vartheta}{\partial t}, \quad \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 2\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + t\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t\,\partial x} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t\,\partial y} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t\,\partial z} = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\lambda}, \quad \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial y} = -\frac{\beta}{\lambda}, \quad \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial z} = -\frac{\gamma}{\lambda},$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0,$$

also

$$\frac{\partial}{\partial t}(t\vartheta) - \frac{1}{\lambda}s = \frac{c_0}{\lambda}; \tag{153a}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(t\vartheta) - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{ds}{dt}\right) = 0. \tag{153b}$$

Die zweite Gleichung ist nur die differenzierte erste, da hier $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(t\vartheta) = \frac{d^2}{dt^2}(t\vartheta)$ ist. Diese aber gibt

$$\left\{\begin{aligned} \lambda\vartheta t &= \int(c_0 + s)\,dt = c_0 t + \int s\,dt, \\ c &= c_0 + \frac{1}{t}\int s\,dt = c_0 + s. \end{aligned}\right. \tag{154}$$

c ist gleich c_0 vermehrt um einen zeitlich mittleren Wert der Bewegung in der Strahlrichtung, wodurch auch ϑ bestimmt ist, wenn s als Funktion von t

sich gegeben findet. Indessen darf dann s nicht von x, y, z abhängen. Die frühere Beziehung gilt statt für die Verbreitungsgeschwindigkeit für die Strahlenlänge. Eigentümlich ist, daß ϑ auch von t abhängig erscheinen kann, wenn s nicht von t bestimmt ist. Es wird dann $\frac{\partial^2(t\vartheta)}{\partial t^2} = 0$, also $\frac{\partial(t\vartheta)}{\partial t} = \vartheta'$, $t\vartheta = \vartheta' t + \vartheta''$, $\vartheta = \vartheta' + \frac{\vartheta''}{t}$, wo ϑ', ϑ'' Konstanten bedeuten. Da indessen $t\vartheta = t\vartheta' + \vartheta''$ ist, so wirkt diese Abhängigkeit auf die Schwingung nur wie eine Phasenverschiebung. Zugleich ist $\vartheta' - \frac{1}{\lambda} s = \frac{c_0}{\lambda}$, also die Verbreitungsgeschwindigkeit der Welle in der gewöhnlichen Weise bestimmt.

Wir gehen zum Gegenfall über, daß die Schwingungsdauer nicht zeitlich, sondern nur räumlich variiert. In diesem Falle ist

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \vartheta\,, \quad \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0\,, \quad \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t\,\partial p} = \frac{\partial \vartheta}{\partial p}\,, \quad \frac{1}{2\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial p} = t\frac{\partial \vartheta}{\partial p} - \frac{\varkappa}{\lambda}\,,$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p^2} = t\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}\,, \quad \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p\,\partial q} = t\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p\,\partial q}\,,$$

$$p, q = x, y, z\,; \quad \varkappa = \alpha, \beta, \gamma\,,$$

und unsere Gleichungen (151) geben

$$(155\text{a})\left\{\begin{aligned} &\left[\vartheta - \frac{s}{\lambda} + t\left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + v\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + w\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)\right]^2 \\ &= c_0^2\left\{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2t}{\lambda}\left(\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \beta\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) + t^2\left[\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)^2\right]\right\},\end{aligned}\right.$$

$$(155\text{b})\left\{\begin{aligned} &2\left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + v\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + w\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) + 2t\left(uv\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\,\partial y} + vw\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y\,\partial z} + wu\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z\,\partial x}\right) \\ &\quad + t\left(u^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + v^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + w^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{\lambda}\frac{ds}{dt} \\ &\quad + t\left(\frac{du}{dt}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) = c_0^2\, t\,\Delta\vartheta\,.\end{aligned}\right.$$

Ist die Bewegung stationär, so folgt aus der zweiten Gleichung

$$2\left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + v\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + w\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) = \frac{1}{\lambda}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\lambda}\left(u\frac{\partial s}{\partial x} + v\frac{\partial s}{\partial y} + w\frac{\partial s}{\partial z}\right),$$

und demnach aus der ersten, indem

$$\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \beta\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\vartheta}{\partial z} = \theta'\,, \quad \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)^2 = \theta''$$

gesetzt wird,

$$\left(\vartheta - \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda}\frac{ds}{dt}\,t\right)^2 = c_0^2\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2\theta' t}{\lambda} + \theta'' t^2\right).$$

Daraus findet sich

$$\left(\vartheta - \frac{s}{\lambda}\right)^2 = \frac{c_0^2}{\lambda^2}\,; \quad \left(\vartheta - \frac{s}{\lambda}\right)\frac{ds}{dt} = -2c_0^2\,\theta'\,, \quad \frac{1}{4\lambda^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c_0^2\,\theta''.$$

Die erste ist die bekannte Beziehung; zusammen mit der zweiten ergibt sie

$$\frac{ds}{dt} = -2c_0 \lambda \theta'$$

und hiernach aus der dritten

$$\theta'^2 = \theta''.$$

Da θ'' von α, β, γ unabhängig ist, wovon θ' gerade abhängt, kann diese Beziehung nur bestehen, wenn $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0$ ist, d. h. bei stationärer Bewegung kann die Schwingungsdauer für sich allein nicht variieren.

Außerdem führt die Gleichung (155b) noch zu der Beziehung

$$\begin{aligned}
2\left(u v \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y} + v w \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y \partial z} + w u \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z \partial x}\right) + u^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + w^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \\
= c_0^2 \Delta \vartheta - \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\
- \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}\right),
\end{aligned}$$

die also identisch erfüllt wäre.

Für die allgemeine Behandlung haben wir nach den Gleichungen (151 a_2) und (151c)

$$\text{(156a)} \quad \left\{\begin{aligned}
&\vartheta - (\alpha u + \beta v + \gamma w)\frac{1}{\lambda} + t\left(u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) \\
&\qquad = c_0 \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2t}{\lambda}\theta' + t^2 \theta''},
\end{aligned}\right.$$

$$\text{(156b)} \quad \left\{\begin{aligned}
&\vartheta - \left(\frac{\alpha u + \beta v + \gamma w}{\lambda}\right) + t\left(u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) \\
&\qquad = \frac{1}{2t}\frac{1}{\Delta \vartheta}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2t}{\lambda}\theta' + t^2 \theta''\right).
\end{aligned}\right.$$

Es ist aber mit $\theta_p = \frac{\partial \theta}{\partial p}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2t}{\lambda}\theta' + t^2 \theta''\right)$$

$$= -\frac{2}{\lambda}\theta' + 2t\theta'' - u\left(\frac{2t}{\lambda}\theta'_x - t^2 \theta''_x\right) - v\left(\frac{2t}{\lambda}\theta'_y - t^2 \theta''_y\right) - w\left(\frac{2t}{\lambda}\theta'_z - t^2 \theta''_z\right),$$

somit wird die zweite Gleichung von der Form

$$-\frac{2}{\lambda}\theta' + 2t\theta + u(a' t + a'' t^2) + v(b' t + b'' t^2) + w(c' t + c'' t^2) = 0.$$

Soll nun θ' von Null verschieden sein, so müssen u, v, w Glieder enthalten, die umgekehrt proportional t oder t^2 verlaufen. Eine solche Annahme ist aber unzulässig, weil dann die Bewegung zu irgendeiner Zeit unendlich würde, denn von Ewigkeit her könnte sie in dieser Abhängigkeit nicht bestehen, da sie dann gegenwärtig unendlich oder Null sein müste. Also haben wir

$$(157)\qquad \theta' = \alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0$$

und

$$(158)\qquad \theta + u(a' + a''t) + v(b' + b''t) + w(c' + c''t) = 0\,,$$

woselbst mit Umkehrung der Zeichen ist:

$$(159)\quad \begin{cases} \theta = 2(\vartheta\Delta\vartheta - \theta'')\,, \\ a' = -2\dfrac{\alpha}{\lambda}\Delta\vartheta\,, \qquad b' = -2\dfrac{\beta}{\lambda}\Delta\vartheta\,, \qquad c' = -2\dfrac{\gamma}{\lambda}\Delta\vartheta\,; \\ a'' = 2\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x}\Delta\vartheta - \theta''_x\,, \quad b'' = 2\dfrac{\partial\vartheta}{\partial y}\Delta\vartheta - \theta''_y\,, \quad c'' = 2\dfrac{\partial\vartheta}{\partial z}\Delta\vartheta - \theta''_z\,. \end{cases}$$

Nun bildet die Inkompressibilitätsbedingung die beiden Gleichungen

$$(160)\qquad A_1\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + A_2\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + A_3\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0\,, \qquad A_1\alpha + A_2\beta + A_3\gamma = 0\,.$$

Die erste von ihnen in Verbindung mit (157) gäbe

$$(161)\qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = L\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = M\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\,,$$

wo L und M Konstanten sind. Also könnte ϑ nicht sowohl von x, y, z abhängen, als vielmehr von einer linearen Funktion dieser Größen. Nennen wir diese Funktion $p = p_0 + p_1x + p_2y + p_3z$, so wäre

$$(162)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\vartheta}{\partial x} = \dfrac{\partial\vartheta}{\partial p}p_1\,, \qquad \dfrac{\partial\vartheta}{\partial y} = \dfrac{\partial\vartheta}{\partial p}p_2\,, \qquad \dfrac{\partial\vartheta}{\partial z} = \dfrac{\partial\vartheta}{\partial p}p_3\,; \\ \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial p^2}p_1^2\,, \qquad \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial p^2}p_2^2\,, \qquad \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial p^2}p_3^2\,, \end{cases}$$

somit

$$(163)\qquad \Delta\vartheta = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial p^2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\,, \qquad \theta'' = \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\right)^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\,,$$

Die p sind bis auf einen Faktor bestimmt durch A_1, A_2, A_3; α, β, γ. Weiter hätten wir

$$(164)\quad \begin{cases} \theta''_x = 2\dfrac{\partial\vartheta}{\partial p}\dfrac{\partial}{\partial p}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 2\dfrac{\partial\vartheta}{\partial p}\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial p^2}p_1(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\,, \\ \theta''_y = 2\dfrac{\partial\vartheta}{\partial p}\dfrac{\partial}{\partial p}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial y}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 2\dfrac{\partial\vartheta}{\partial p}\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial p^2}p_2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\,, \\ \theta''_z = 2\dfrac{\partial\vartheta}{\partial p}\dfrac{\partial}{\partial p}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial z}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 2\dfrac{\partial\vartheta}{\partial p}\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial p^2}p_3(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\,. \end{cases}$$

Nach (159) ergibt sich demzufolge

$$(165)\quad \begin{cases} \bar{\theta} = 2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\left[\vartheta \dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2} - \left(\dfrac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^2\right]; \\ a' = -2\dfrac{\alpha}{\lambda}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}, \qquad b' = -2\dfrac{\beta}{\lambda}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}, \\ c' = -2\dfrac{\gamma}{\lambda}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}, \qquad a'' = b'' = c'' = 0, \end{cases}$$

und die Gleichung (158) geht über in

$$(166)\qquad \vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2} - \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^2 - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}\left(\frac{\alpha u + \beta v + \gamma w}{\lambda}\right) = 0,$$

woraus dann folgt, daß, wenn ϑ nicht konstant sein soll, auch u, v, w nur von p abhängen dürfen. Gehen wir jetzt zu der ersten Gleichung (156a) über. In Verbindung mit der zweiten (156b) ergibt sie nunmehr

$$(167_1)\qquad (2\theta'' + t(u\theta_x'' + v\theta_y'' + w\theta_z''))^2 = 4(\Delta\vartheta)^2\left(\frac{1}{\lambda^2} + t^2\theta''\right)c_0^2,$$

also nach Einsetzung der Werte für θ'', θ_x'', θ_y'', θ_z'', $\Delta\vartheta$,

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^2\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p} + t\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}(p_1 u + p_2 v + p_3 w)\right)^2 = \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}\right)^2\left[\frac{1}{\lambda^2} + (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)t^2\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^2\right]c_0^2,$$

d. h.

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^4 + 2t\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^3\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}(p_1 u + p_2 v + p_3 w) + t^2\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^2\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}\right)^2(p_1 u + p_2 v + p_3 w)^2$$
$$= \frac{c_0^2}{\lambda^2}\left[1 + \lambda^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)t^2\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}\right)^2$$

oder

$$(167_2)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^4 - \dfrac{c_0^2}{\lambda^2}\left(\dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}\right)^2 + 2t\left(\dfrac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^3\dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}(p_1 u + p_2 v + p_3 w) \\ + t^2\left(\dfrac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^2\left(\dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}\right)^2((p_1 u + p_2 v + p_3 w)^2 - c_0^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)) = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (166) und (167) können aber nicht ohne weiteres zusammen bestehen. Sehen wir ϑ als gegebene Funktion von p an, so kann der Gleichung (166) eine Bewegung angepaßt werden, deren Komponenten sind

$$u = \frac{U_\iota \mathfrak{T}_\iota + U_\varkappa \mathfrak{T}_\varkappa + \dots + U_n \mathfrak{T}_n}{J_{\iota'} \mathfrak{T}_{\iota'} + J_{\varkappa'} \mathfrak{T}_{\varkappa'} + \dots + J_{n'} \mathfrak{T}_{n'}},$$

$$v = \frac{V_\iota \mathfrak{T}_\iota + V_\varkappa \mathfrak{T}_\varkappa + \dots + V_n \mathfrak{T}_n}{J_{\iota'} \mathfrak{T}_{\iota'} + J_{\varkappa'} \mathfrak{T}_{\varkappa'} + \dots + J_{n'} \mathfrak{T}_{n'}},$$

$$w = \frac{W_\iota \mathfrak{T}_\iota + W_\varkappa \mathfrak{T}_\varkappa + \dots + W_n \mathfrak{T}_n}{J_{\iota'} \mathfrak{T}_{\iota'} + J_{\varkappa'} \mathfrak{T}_{\varkappa'} + \dots + J_{n'} \mathfrak{T}_{n'}},$$

wo die U, V, W; J beliebige Funktionen von x, y, z, die $\mathfrak{T}$ beliebige Funktionen von t sind. Es ist dann zu setzen

$$(168)\qquad J\left[\vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2} - \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^2\right] - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}\,\frac{\alpha U + \beta V + \gamma W}{\lambda} = 0.$$

i' darf nicht kleiner als i und n' darf nicht größer als n sein, wenn nicht $\vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2} - \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^2 = 0$ ist; kleiner als n darf man n' annehmen, etwa gleich m, und größer als i darf man i' annehmen, etwa gleich l, alsdann ist

$$\alpha U_q + \beta V_q + \gamma W_q = 0\,, \qquad q = m+1\,, m+2\,, \ldots, n\,,$$
$$\alpha U_r + \beta V_r + \gamma W_r = 0\,, \qquad r = i\,, i+1\,, i+2\,, \ldots, i'-1\,.$$

Selbstverständlich darf $i' = i$, $n' = n$ sein, dann fallen die Gleichungen letzter Art fort.

Wir können diese Ansätze noch erweitern, indem wir unter U, V, W; J nicht reine Funktionen von x, y, z verstehen, sondern ganze Funktionen von t mit Koeffizienten $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$; $\mathfrak{J}$, die nur reine Funktionen von x, y, z sind. Die vorstehenden Gleichungen beziehen sich dann auf diese Koeffizienten.

Gehen wir zu der Gleichung (167_2) über, so kann man auch ihr die gemachten Ansätze für u, v, w anpassen. Nennen wir die Zähler in diesen Ansätzen Z_1, Z_2, Z_3, den Nenner N, so wäre

$$(169)\quad \begin{cases} N^2\left[\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^4 - \frac{c_0^2}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}\right)^2\right] + 2t\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^3\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}\right) N(p_1 Z_1 + p_2 Z_2 + p_3 Z_3) \\ + t^2\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^2\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2}\right)^2\left((p_1 Z_1 + p_2 Z_2 + p_3 Z_3)^2 - c_0^2 N^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\right) = 0\,. \end{cases}$$

Indem man die Produkte und Quadrate der Z_1, Z_2, Z_3; N entwickelt, hat man die Faktoren der Produkte und Quadrate der $\mathfrak{T}$ gleich Null zu setzen, was Beziehungen zwischen den U, V, W; J gibt. Sodann muß man innerhalb jeder so gewonnenen Gleichung die Glieder der verschiedenen Potenzen von t sammeln und gleich Null setzen, wodurch Gleichungen zwischen den $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$; $\mathfrak{J}$ resultieren. Man überzeugt sich leicht, daß sich das konsequent durchführen läßt. Allein da das erste Glied der obigen Gleichung kein explizites t enthält, darf, wenn sein Faktor nicht Null ist, die Größe N kein von t unabhängiges Glied besitzen. Alle ganzen Funktionen $\mathfrak{J}$ von t müssen also mit $\mathfrak{J}\,t$ beginnen. Dadurch aber würden u, v, w umgekehrt proportional t, und da für $t = 0$ eine Kompensation durch die $\mathfrak{T}$ zum unbestimmten Wert 0∞ nichts fruchten könnte, weil die $\mathfrak{T}$ auch im Zähler stehen, würden u, v, w für diesen Grenzwert $t = 0$ unendlich werden. Schließen wir diese Möglichkeit wie früher aus, so bleibt nichts übrig, als den Faktor von N gleich Null anzusetzen. So bekommen wir

$$(170)\qquad \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^2 = \pm \frac{c_0}{\lambda}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\frac{\partial \vartheta}{\partial p}}\right) = \mp \frac{\lambda}{c_0}\,,$$

woraus folgt

$$(171)\qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial p} = \frac{1}{\vartheta' \mp \frac{\lambda}{c_0} p}\,,$$

$$(172)\qquad \vartheta = \vartheta'' + \frac{c_0}{\lambda}\log\left(\vartheta' \mp \frac{\lambda}{c_0} p\right)$$

mit ϑ' und ϑ'' als Konstanten. Welches Zeichen man zu wählen hat, ist leicht zu entscheiden. Die Gleichung (166) gibt für diesen Fall

$$\pm \vartheta - \frac{c_0}{\lambda} \mp \frac{s}{\lambda} = 0\,, \quad \pm \lambda\,\vartheta = c_0 \pm s\,.$$

Also haben wir, da $\lambda\vartheta = c$ ist,

$$\vartheta = \vartheta'' - \frac{c_0}{\lambda}\log\left(\vartheta' - \frac{\lambda}{c_0}p\right) \tag{173}$$

und in bekannter Beziehung

$$\lambda\vartheta = c = c_0 + s\,. \tag{174}$$

Hätten wir die letzte Gleichung von vornherein als Postulat gesetzt, so gäbe die Gleichung (166)

$$\lambda\left[\vartheta\frac{\partial^2\vartheta}{\partial p^2} - \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\right)^2\right] = (\lambda\vartheta - c_0)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial p^2}\,, \tag{175}$$

d. h. unsere Beziehung

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\right)^2 = \frac{c_0}{\lambda}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial p^2}\,.$$

Jetzt können wir auf die Hauptgleichung (156a) zurückgehen, welche mit $\lambda\vartheta - s = c_0$ ergibt

$$c_0 + \lambda t\frac{\partial\vartheta}{\partial p}(p_1 u + p_2 v + p_3 w) = \lambda c_0\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + t^2\theta''} \tag{176$_1$}$$

oder wenn quadriert wird

$$2c_0\frac{\partial\vartheta}{\partial p}(p_1 u + p_2 v + p_3 w) + \lambda t\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\right)^2(p_1 u + p_2 v + p_3 w)^2 = \lambda c_0^2 t\,\theta'' \tag{176$_2$}$$

und zufolge des Wertes von θ'' nach (163)

$$\left\{\begin{aligned} &2c_0(p_1 u + p_2 v + p_3 w) + \lambda t\frac{\partial\vartheta}{\partial p}(p_1 u + p_2 v + p_3 w)^2 \\ &\qquad = \lambda c_0^2 t\frac{\partial\vartheta}{\partial p}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\,, \end{aligned}\right. \tag{177}$$

die identisch ist mit (167_2) für diesen Fall und nun allein noch in Frage kommt. Hiernach ergeben sich aus den Faktoren der Quadrate der $\mathfrak{T}$ Gleichungen von der Form

$$\left\{\begin{aligned} &2c_0 J_l(p_1 U_l + p_2 V_l + p_3 W_l) + \lambda t\frac{\partial\vartheta}{\partial p}(p_1 U_l + p_2 V_l + p_3 W_l)^2 \\ &\qquad = \lambda c_0^2 t\frac{\partial\vartheta}{\partial p}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)J_l^2 \end{aligned}\right. \tag{178}$$

und aus denen der Produkte der $\mathfrak{T}$

$$\left\{\begin{aligned} &c_0\{J_l(p_1 U_m + p_2 V_m + p_3 W_m) + J_m(p_1 U_l + p_2 V_l + p_3 W_l)\} \\ &\qquad + \lambda t\frac{\partial\vartheta}{\partial p}(p_1 U_m + p_2 V_m + p_3 W_m)(p_1 U_l + p_2 V_l + p_3 W_l) \\ &\qquad = \lambda c_0^2 t\frac{\partial\vartheta}{\partial p}J_m J_l(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\,. \end{aligned}\right. \tag{179}$$

Wir schreiben unsere Ansätze in der allgemeinsten Form

$$\left\{\begin{aligned} &u = \frac{U_1\mathfrak{T}_1 + U_2\mathfrak{T}_2 + \ldots + U_n\mathfrak{T}_n}{J_1\mathfrak{T}_1 + J_2\mathfrak{T}_2 + \ldots + J_n\mathfrak{T}_n}\,, \quad v = \frac{V_1\mathfrak{T}_1 + V_2\mathfrak{T}_2 + \ldots + V_n\mathfrak{T}_n}{J_1\mathfrak{T}_1 + J_2\mathfrak{T}_2 + \ldots + J_n\mathfrak{T}_n}\,, \\ &w = \frac{W_1\mathfrak{T}_1 + W_2\mathfrak{T}_2 + \ldots + W_n\mathfrak{T}_n}{J_1\mathfrak{T}_1 + J_2\mathfrak{T}_2 + \ldots + J_n\mathfrak{T}_n}\,. \end{aligned}\right. \tag{180}$$

und haben also zwischen den U, V, W, J die obigen $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen. Da die Anzahl der Größen $4n$ beträgt, besitzen wir mehr oder ebenso viele Größen wie Gleichungen, solange $n \leq 7$ ist, übersteigt n den Betrag von 7, so sind zu viel Gleichungen vorhanden, und es muß in jedem Falle entschieden werden, ob ihnen genügt werden kann. Von $n = 1$ ab, ist die Zahl der willkürlichen Größen $+3$, $+5$, $+6$, $+6$, $+5$, $+3$, 0, -4, -9, -15, -22, ...

Ersetzt man weiter jedes $U, V, W; J$ durch ganze Funktionen nach t, etwa gemäß dem Schema

$$(181)\quad \begin{cases} U_m = \mathfrak{U}_0^{(m)} + \mathfrak{U}_1^{(m)} t + \ldots + \mathfrak{U}_m^{(m)} t^m, & V_m = \mathfrak{B}_0^{(m)} + \mathfrak{B}_1^{(m)} + \ldots + \mathfrak{B}_m^{(m)} t^m, \\ W_m = \mathfrak{W}_0^{(m)} + \mathfrak{W}_1^{(m)} t + \ldots + \mathfrak{W}_m^{(m)} t^m, & J_m = \mathfrak{J}_0^{(m)} + \mathfrak{J}_1^{(m)} t + \ldots + \mathfrak{J}_m^{(m)} t^m, \end{cases}$$

so gibt jede der obigen Gleichungen die Beziehungen zwischen den $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{W}; \mathfrak{J}$.

Wir schreiben

$$(182)\qquad p_1 \mathfrak{U}_\varkappa^{(m)} + p_2 \mathfrak{B}_\varkappa^{(m)} + p_3 \mathfrak{W}_\varkappa^{(m)} = \mathfrak{P}_\varkappa^{(m)},$$

dann gehen die Gleichungen (178) und (179) über in

$$(178')\quad \begin{cases} 2c_0 \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=l} \mathfrak{J}_\varkappa^{(l)} t^\varkappa \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=l} \mathfrak{P}_\varkappa^{(l)} t^\varkappa + \lambda t \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \left(\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=l} \mathfrak{P}_\varkappa^{(l)} t^\varkappa \right)^2 \\ \qquad = \lambda c_0^2 t \frac{\partial \vartheta}{\partial p} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \left(\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=l} \mathfrak{J}_\varkappa^{(l)} t^\varkappa \right)^2, \end{cases}$$

$$(179')\quad \begin{cases} c_0 \left\{ \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=l} \mathfrak{J}_\varkappa^{(l)} t^\varkappa \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=m} \mathfrak{P}_\varkappa^{(m)} t^\varkappa + \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=m} \mathfrak{J}_\varkappa^{(m)} t^\varkappa \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=l} \mathfrak{P}_\varkappa^{(l)} t^\varkappa \right\} + \lambda t \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=l} \mathfrak{P}_\varkappa^{(l)} t^\varkappa \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=m} \mathfrak{P}_\varkappa^{(m)} t^\varkappa \\ \qquad = \lambda c_0^2 t \frac{\partial \vartheta}{\partial p} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=l} \mathfrak{J}_\varkappa^{(l)} t^\varkappa \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=m} \mathfrak{J}_\varkappa^{(m)} t^\varkappa \end{cases}$$

oder mit $\mathfrak{J}_\alpha = \mathfrak{P}_\alpha = 0$, $\alpha > l$

$$(178'')\quad \begin{cases} 2c_0 \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=2l} t^\varkappa \left(\sum_{i=0}^{i=\varkappa} \mathfrak{J}_i^{(l)} \mathfrak{P}_{\varkappa-i}^{(l)} \right) + \lambda t \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=2l} t^\varkappa \left(\sum_{i=0}^{i=\varkappa} \mathfrak{P}_i^{(l)} \mathfrak{P}_{\varkappa-i}^{(l)} \right) \\ \qquad = \lambda t c_0^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial p} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=2l} t^\varkappa \left(\sum_{i=0}^{i=\varkappa} \mathfrak{J}_i^{(l)} \mathfrak{J}_{\varkappa-i}^{(l)} \right), \end{cases}$$

$$(179'')\quad \begin{cases} c_0 \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=l+m} t^\varkappa \left(\sum_{i=0}^{i=\varkappa} \mathfrak{J}_i^{(l)} \mathfrak{P}_{\varkappa-i}^{(m)} + \sum_{i=0}^{i=\varkappa} \mathfrak{J}_i^{(m)} \mathfrak{P}_{\varkappa-i}^{(l)} \right) + \lambda t \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=l+m} t^\varkappa \left(\sum_{i=0}^{i=\varkappa} \mathfrak{P}_i^{(l)} \mathfrak{P}_{\varkappa-i}^{(m)} \right) \\ \qquad = \lambda t c_0^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial p} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=l+m} t^\varkappa \left(\sum_{i=0}^{i=\varkappa} \mathfrak{J}_i^{(l)} \mathfrak{J}_{\varkappa-i}^{(m)} \right), \end{cases}$$

somit ist

$$(183)\quad \begin{cases} 2c_0 \sum_{i=0}^{i=\varkappa} \mathfrak{J}_i^{(l)} \mathfrak{P}_{\varkappa-i}^{(l)} + \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \sum_{i=0}^{i=\varkappa-1} \mathfrak{P}_i^{(l)} \mathfrak{P}_{\varkappa-i-1}^{(l)} \\ \qquad = \lambda c_0^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial p} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \sum_{i=0}^{i=\varkappa-1} \mathfrak{J}_i^{(l)} \mathfrak{J}_{\varkappa-i-1}^{(l)}; \\ \qquad \varkappa = 0, 1, \ldots, 2l+1; \quad l = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$(184)\quad \begin{cases} c_0 \sum_{i=0}^{i=\varkappa} (\mathfrak{J}_i^{(l)} \mathfrak{P}_{\varkappa-i}^{(m)} + \mathfrak{J}_i^{(m)} \mathfrak{P}_{\varkappa-i}^{(l)}) + \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \sum_{i=0}^{i=\varkappa-1} \mathfrak{P}_i^{(l)} \mathfrak{P}_{\varkappa-i-1}^{(m)} \\ \qquad = \lambda c_0^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial p} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \sum_{i=0}^{i=\varkappa-1} \mathfrak{J}_i^{(l)} \mathfrak{J}_{\varkappa-i-1}^{(m)}; \\ \varkappa = 0, 1, \ldots l+m+1; \quad l, m = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Es genügt, das erste System dieser Gleichungen zu betrachten. Es enthält $2l + 2$ Einzelgleichungen mit $2l + 2$ Größen. Da es in bezug auf diese Größen homogen ist, so stellt sich eine dieser Größen als willkürlich dar. Also ist eine Gleichung überschüssig, und diese läßt sich mit variabelem ϑ nicht erfüllen. Man übersieht das am einfachsten in folgender Weise. Die Gleichungen können in zwei Sätzen geschrieben werden. Sei

$$\frac{\lambda}{2c_0}\frac{\partial\vartheta}{\partial p} = \vartheta_1, \tag{185}$$

$$\frac{\lambda c_0}{2}\frac{\partial\vartheta}{\partial p}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \vartheta_2, \tag{186}$$

so haben wir für diese beiden Sätze

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{i=\varkappa}\mathfrak{J}_i^{(l)}\mathfrak{P}_{\varkappa-i}^{(l)} + \vartheta_1\sum_{i=0}^{i=\varkappa-1}\mathfrak{P}_i^{(l)}\mathfrak{P}_{\varkappa-i-1}^{(l)} = \vartheta_2\sum_{i=0}^{i=\varkappa-1}\mathfrak{J}_i^{(l)}\mathfrak{J}_{\varkappa-i-1}^{(l)};\\ &\qquad\qquad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, l,\\ &\sum_{i=0}^{i=\varkappa}\mathfrak{J}_{l-\varkappa+i}^{(l)}\mathfrak{P}_{l-i}^{(l)} + \vartheta_1\sum_{i=0}^{i=\varkappa+1}\mathfrak{P}_{l-\varkappa-1+i}^{(l)}\mathfrak{P}_{l-i}^{(l)} = \vartheta_2\sum_{i=0}^{i=\varkappa+1}\mathfrak{J}_{l-\varkappa-1+i}^{(l)}\mathfrak{J}_{l-i}^{(l)};\\ &\qquad\qquad \varkappa = -1, 0, 1, \ldots, l-1, \end{aligned}\right. \tag{187}$$

wobei zu beachten, daß $\mathfrak{P}_{-1}$, $\mathfrak{J}_{-1}$ gleich Null anzusehen sind. Den ersten Satz von Gleichungen benutzen wir, um die $\mathfrak{P}$ durch die $\mathfrak{J}$ auszudrücken. Nimmt man z. B. $\varkappa = 0$, so gibt er, indem wir jetzt den oberen Index (l) fortlassen,

$$\mathfrak{J}_0\mathfrak{P}_0 = 0, \quad \mathfrak{P}_0 = 0.$$

Für $\varkappa = 1$ ist

$$\mathfrak{J}_0\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{J}_1\mathfrak{P}_0 + \vartheta_1\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_0 = \vartheta_2\mathfrak{J}_0\mathfrak{J}_0,$$

also

$$\mathfrak{P}_1 = \vartheta_2\mathfrak{J}_0.$$

Für $\varkappa = 2$ findet man

$$\mathfrak{J}_0\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{J}_1\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{J}_2\mathfrak{P}_0 + \vartheta_1(\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_0) = \vartheta_2(\mathfrak{J}_0\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_0),$$

also

$$\mathfrak{P}_2 = \vartheta_2\mathfrak{J}_1.$$

Bei $\varkappa = 3$ ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_0\mathfrak{P}_3 + \mathfrak{J}_1\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{J}_2\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{J}_3\mathfrak{P}_0 + \vartheta_1(\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_0)\\ = \vartheta_2(\mathfrak{J}_0\mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2\mathfrak{J}_0),\end{aligned}$$

also

$$\mathfrak{P}_3 = \vartheta_2(\mathfrak{J}_2 - \vartheta_1\vartheta_2\mathfrak{J}_0).$$

Fährt man in dieser Reduktion fort, so ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_4 &= \vartheta_2(\mathfrak{J}_3 - \vartheta_1\vartheta_2\mathfrak{J}_1),\\
\mathfrak{P}_5 &= \vartheta_2(\mathfrak{J}_4 - \vartheta_1\vartheta_2\mathfrak{J}_2 + 2\vartheta_1^2\vartheta_2^2\mathfrak{J}_0),\\
\mathfrak{P}_6 &= \vartheta_2(\mathfrak{J}_5 - \vartheta_1\vartheta_2\mathfrak{J}_3 + 2\vartheta_1^2\vartheta_2^2\mathfrak{J}_1),\\
\mathfrak{P}_7 &= \vartheta_2(\mathfrak{J}_6 - \vartheta_1\vartheta_2\mathfrak{J}_4 + 2\vartheta_1^2\vartheta_2^2\mathfrak{J}_2 - 5\vartheta_1^3\vartheta_2^3\mathfrak{J}_0),\\
\mathfrak{P}_8 &= \vartheta_2(\mathfrak{J}_7 - \vartheta_1\vartheta_2\mathfrak{J}_5 + 2\vartheta_1^2\vartheta_2^2\mathfrak{J}_3 - 5\vartheta_1^3\vartheta_2^3\mathfrak{J}_1),\\
\mathfrak{P}_9 &= \vartheta_2(\mathfrak{J}_8 - \vartheta_1\vartheta_2\mathfrak{J}_6 + 2\vartheta_1^2\vartheta_2^2\mathfrak{J}_4 - 5\vartheta_1^3\vartheta_2^3\mathfrak{J}_2 + 14\vartheta_1^4\vartheta_2^4\mathfrak{J}_0),\\
\mathfrak{P}_{10} &= \vartheta_2(\mathfrak{J}_9 - \vartheta_1\vartheta_2\mathfrak{J}_7 + 2\vartheta_1^2\vartheta_2^2\mathfrak{J}_5 - 5\vartheta_1^3\vartheta_2^3\mathfrak{J}_3 + 14\vartheta_1^4\vartheta_2^4\mathfrak{J}_1) \quad \text{usf.}
\end{aligned}$$

Jedes der $\mathfrak{P}$ erscheint als lineare Funktion der $\mathfrak{Z}$ mit Koeffizienten, die aus ϑ_2 und Potenzen von $\vartheta_1 \vartheta_2$ bestehen. Die Reihe ist leicht fortzusetzen.

Aus dem zweiten Satz von Gleichungen erhält man für

$$(\varkappa = -1) \qquad \vartheta_1 \mathfrak{P}_l \mathfrak{P}_l = \vartheta_2 \mathfrak{Z}_l \mathfrak{Z}_l\,,$$

$$(\varkappa = 0) \qquad \mathfrak{Z}_l \mathfrak{P}_l + \vartheta_1 (\mathfrak{P}_{l-1} \mathfrak{P}_l + \mathfrak{P}_l \mathfrak{P}_{l-1}) = \vartheta_2 (\mathfrak{Z}_{l-1} \mathfrak{Z}_l + \mathfrak{Z}_l \mathfrak{Z}_{l-1})\,,$$

$$(\varkappa = 1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{Z}_{l-1} \mathfrak{P}_l + \mathfrak{Z}_l \mathfrak{P}_{l-1} + \vartheta_1 (\mathfrak{P}_{l-2} \mathfrak{P}_l + \mathfrak{P}_{l-1} \mathfrak{P}_{l-1} + \mathfrak{P}_l \mathfrak{P}_{l-2}) \\ &\quad = \vartheta_2 (\mathfrak{Z}_{l-2} \mathfrak{Z}_l + \mathfrak{Z}_{l-1} \mathfrak{Z}_{l-1} + \mathfrak{Z}_l \mathfrak{Z}_{l-2})\,. \end{aligned} \right.$$

Zufolge der Werte der $\mathfrak{P}$ bekommt man so jedes $\mathfrak{Z}$ ausgedrückt als lineare Funktion aller folgenden $\mathfrak{Z}$ mit Koeffizienten, die sämtlich Potenzen sind von ϑ_2 und $\sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}$. Zuletzt ergibt sich für $\mathfrak{Z}_0$ die Beziehung $A \vartheta_2 (\sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2})^l \mathfrak{Z}_0 = 0$, die die überschüssige Bedingung darstellt. Darin aber ist die Zahl A von Null verschieden, und zwar gleich 1. Da nun $\mathfrak{Z}_0$ nicht Null sein kann, muß ϑ_1 oder ϑ_2 Null sein; ϑ_1 ist aber eine bestimmte Größe, nämlich nach (173)

$$(188) \qquad \vartheta_1 = \frac{\lambda}{2 c_0} \frac{\partial \vartheta}{\partial p} = \frac{\lambda}{2 c_0} \frac{1}{\vartheta' - \dfrac{\lambda}{c_0} p}\,,$$

also muß $\vartheta_2 = 0$ sein, und da

$$(189) \qquad \vartheta_2 = \frac{\lambda c_0}{2} \frac{1}{\vartheta' - \dfrac{\lambda}{c_0} p} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$$

ist, so folgt $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, d. h. $p = p_0$, und somit $\vartheta =$ Konstante. Was wir also für stationäre Bewegung schon gefunden haben, gilt für jede hier mögliche, auch von der Zeit abhängige Bewegung; es können sich nicht transversale Wellen so verbreiten, daß nur ihre Schwingungsdauer variiert. Und dabei ist es gleichgültig, ob die Bewegung erheblich oder unerheblich ist. Das ist neben dem, was S. 41 schon gesagt ist, ein zweiter wichtiger Grund, warum mir Lorentz' Annahme einer Konstanz der Wellenlänge und Veränderlichkeit der Schwingungsdauer bedenklich erscheint; denn wenn diese Schwingungsdauer bei irgendeiner Bewegung allein nicht variieren kann, so sehe ich nicht, wie sie soll variieren können, wenn man von Bewegung zu Bewegung oder von Ruhe zu Bewegung übergeht.

h) Wellen mit ungleichmäßiger Richtung in ungleichmäßig bewegtem Äther.

Schwingungsdauer und Wellenlänge seien konstant, die Richtung des Strahles soll jedoch räumlich variieren können. Es ist dann

$$(190) \qquad \Psi = 2\pi \left(\vartheta t - \frac{S}{\lambda} + \delta \right),$$

somit

$$(191) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 2\pi\vartheta\,, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t\, \partial p} = 0\,, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial p} = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial S}{\partial p}\,, \\ &\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p^2} = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial^2 S}{\partial p^2}\,, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial p\, \partial q} = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial^2 S}{\partial p\, \partial q}\,; \\ &\qquad p, q = x, y, z\,. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (151) (S. 74) geben hiernach

$$\left[\vartheta - \frac{1}{\lambda}\left(u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} + w\frac{\partial S}{\partial z}\right)\right]^2 = c_0^2\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]\frac{1}{\lambda^2}, \tag{192a}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vartheta - \frac{1}{\lambda}\left(u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} + w\frac{\partial S}{\partial z}\right)\right] = -\frac{1}{\lambda}c_0^2 \Delta S. \tag{192b}$$

Nun ist

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \tag{193}$$

also werden die Gleichungen

$$\vartheta - \frac{1}{\lambda}\left(u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} + w\frac{\partial S}{\partial z}\right) = \frac{c_0}{\lambda}, \tag{194a}$$

$$0 = \Delta S. \tag{194b}$$

Die erste gibt wieder

$$c = c_0 + s. \tag{195}$$

Da c konstant sein soll, muß der Strahl sich so krümmen, daß die in seine Richtung fallende Bewegung zeitlich und räumlich ebenfalls konstant ist. Diese Beziehung würde unter Umständen bereits genügen, die Form des Strahles zu bestimmen. Nennen wir C eine Konstante, so wäre, da

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{dx}{dS}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{dy}{dS}, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{dz}{dS} \tag{196}$$

gesetzt werden kann, indem beide Größenarten den Richtungskosinus der Linie S darstellen sollen,

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = C\,dS = C(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{197}$$

Ist der Strahl eben, so haben wir hiernach

$$C^2\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \left(u + v\frac{dy}{dx}\right)^2 = u^2 + v^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2uv\frac{dy}{dx} \tag{198}$$

als Differentialgleichung für den Strahl, die nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst gibt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{uv}{C^2 - v^2} \pm \sqrt{\frac{u^2 - C^2}{C^2 - v^2} + \frac{u^2 v^2}{(C^2 - v^2)^2}} = \frac{1}{C^2 - v^2}\left(uv \pm C\sqrt{g^2 - C^2}\right), \tag{199}$$

wo g die ganze Geschwindigkeit in der Strahlebene bedeutet.

Die Bahn und die Intensität der Bewegung müssen als Funktionen von x, y, z gegeben sein. Wir nehmen als Beispiel eine Kreisbewegung in jeder Bahn mit konstanter Geschwindigkeit. Alle Bahnen seien konzentrisch und ihr Mittelpunkt sei Ursprung des Koordinatensystems. Dann wäre

$$u = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}g, \qquad v = +\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}g,$$

also

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{C^2 - g^2\dfrac{x^2}{x^2 + y^2}}\left(-g^2\frac{xy}{x^2 + y^2} \pm C\sqrt{g^2 - C^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^2(C^2 - g^2) + C^2 y^2}\left(-g^2 xy \pm C(x^2 + y^2)\sqrt{g^2 - C^2}\right). \end{aligned}\right. \tag{200$_1$}$$

Setzt man

$$C' = \pm\sqrt{g^2 - C^2}\,, \quad g^2 = C'^2 + C^2\,,$$

so geht die Gleichung über in

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{C'^2 x^2 - C^2 y^2}\left(-(C'^2 + C^2)\,xy + CC'(x^2 + y^2)\right),$$

d. h.

(200₂)
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Cx - C'y}{C'x + Cy}\,,$$

wo $C' = \pm\sqrt{g^2 - C^2}$ ist. Wenn die Bewegung nicht bloß in jedem Kreise für sich, sondern überhaupt konstant ist, gibt die Substitution $\frac{y}{x} = z$ die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}\left(\frac{C - C'z}{C' + Cz} + z\right) = -\frac{1}{x}\frac{C(1 + z^2)}{C' + Cz}$$

oder

$$\frac{C' + Cz}{1 + z^2}\,dz = -C\frac{dx}{x}\,,$$

woraus folgt

$$\frac{C}{2}\log(1 + z^2) + C'\operatorname{arctg} z = -C\log x + C_0\,,$$

wo C_0 eine Konstante. Damit wird

(201₁)
$$\frac{C}{2}\log(x^2 + y^2) + C'\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C_0$$

und nach Einführung von Polarkoordinaten $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, indem A eine neue Konstante bedeutet,

(201₂)
$$\varrho = Ae^{-\frac{C'}{C}\varphi}\,,$$

also

(201₃)
$$\varrho = Ae^{-\frac{\sqrt{g^2 - C^2}}{C}\varphi} \quad \text{und} \quad \varrho = Ae^{+\frac{\sqrt{g^2 - C^2}}{C}\varphi}\,.$$

Jede dieser Lösungen gibt eine logarithmische Spirale. Die allgemeine Lösung aber ist

(202₁)
$$\left(\varrho - Ae^{-\frac{\sqrt{g^2 - C^2}}{C}\varphi}\right)\left(\varrho - Ae^{+\frac{\sqrt{g^2 - C^2}}{C}\varphi}\right) = 0\,,$$

d. h.

(202₂)
$$\varrho^2 - A\varrho\left(e^{-\frac{\sqrt{g^2 - C^2}}{C}\varphi} + e^{+\frac{\sqrt{g^2 - C^2}}{C}\varphi}\right) + A^2 = 0$$

und wenn $g^2 \geqq C^2$ ist

(202₃)
$$\varphi^2 - 2A\varrho\cos\operatorname{hyp}\left(\frac{\sqrt{g^2 - C^2}}{C}\varphi\right) + A^2 = 0\,.$$

Ist g nicht überhaupt konstant, sondern auf jedem Kreise etwa proportional dem Radius dieses Kreises, also $g = \alpha\sqrt{x^2 + y^2}$, so haben wir

$$C' = \pm\sqrt{\alpha^2(x^2 + y^2) - C^2}\,.$$

Die Einführung von Polarkoordinaten $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$ ergibt dann $z = \operatorname{tg}\varphi$, $dz = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$, $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{d\varrho}{\varrho} - \operatorname{tg}\varphi\,d\varphi$, somit

$$(203_1)\qquad \left(\pm\sqrt{\alpha^2\varrho^2 - C^2} + C\operatorname{tg}\varphi\right)d\varphi = -C\left(\frac{d\varrho}{\varrho} - \operatorname{tg}\varphi\,d\varphi\right),$$

d. h.

$$(203_2)\qquad d\varphi = \mp\frac{C\,d\varrho}{\varrho\sqrt{\alpha^2\varrho^2 - C^2}}\,.$$

Das Integral dieser Gleichung ist mit φ_0 als einer Konstanten

$$(204_1)\qquad \varphi_0 \mp \varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\alpha^2\varrho^2}{C^2} - 1}\,,$$

somit

$$(204_2)\qquad \sqrt{\frac{\alpha^2\varrho^2}{C^2} - 1} = \operatorname{tg}(\varphi_0 + \varphi) \quad\text{und}\quad \sqrt{\frac{\alpha^2\varrho^2}{C^2} - 1} = \operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi)$$

oder

$$(204_3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\alpha^2\varrho^2}{C^2} = 1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_0 + \varphi) = \frac{1}{\cos^2(\varphi_0 + \varphi)}\\ &\text{und}\\ &\frac{\alpha^2\varrho^2}{C^2} = 1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_0 - \varphi) = \frac{1}{\cos^2(\varphi_0 - \varphi)}\,.\end{aligned}\right.$$

Jede dieser Lösungen stellt zwei Geradenpaare dar, nämlich

$$x\cos\varphi_0 - y\sin\varphi_0 = \pm\frac{C}{\alpha} \qquad\text{und}\qquad x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 = \pm\frac{C}{\alpha}\,.$$

Als allgemeines Integral haben wir

$$(204_4)\qquad \left(\frac{\alpha^2\varrho^2}{C^2} - \frac{1}{\cos^2(\varphi_0 + \varphi)}\right)\left(\frac{\alpha^2\varrho^2}{C^2} - \frac{1}{\cos^2(\varphi_0 - \varphi)}\right) = 0$$

oder

$$(204_5)\qquad \left(\frac{\alpha^2\varrho^2}{C^2}\cos^2(\varphi_0 + \varphi) - 1\right)\left(\frac{\alpha^2\varrho^2}{C^2}\cos^2(\varphi_0 - \varphi) - 1\right) = 0\,.$$

In x, y ausgedrückt, gibt dieses

$$(204_6)\qquad \left(\frac{\alpha^2(x\cos\varphi_0 - y\sin\varphi_0)^2}{C^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha^2(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0)^2}{C^2} - 1\right) = 0$$

und aufgelöst

$$(204_7)\qquad \frac{\alpha^4(x^2\cos^2\varphi_0 - y^2\sin^2\varphi_0)^2}{C^4} - \frac{2\,\alpha^2(x^2\cos^2\varphi_0 + y^2\sin^2\varphi_0)}{C^2} + 1 = 0\,.$$

Drittens nehmen wir, um zu zeigen, daß und wann auch Kreisstrahlen möglich sind, an,

$$u = \frac{C}{2}\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}}\,,\quad v = -\frac{C}{2}\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}\,,\quad\text{also}\quad g^2 = \frac{C^2}{4}\,\frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 y^2}\,.$$

Die Bewegung geht in den Hyperbeln $xy =$ Konst. vor sich und die Differentialgleichung wird

$$(205_1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^2}{3x^2 - y^2}\left(-\dfrac{x^2+y^2}{4xy} \pm \sqrt{\dfrac{(x^2+y^2)^2}{4x^2y^2} - 1}\right) \\ \qquad = \dfrac{4x^2}{3x^2 - y^2}\left(-\dfrac{x^2+y^2}{4xy} \pm \dfrac{x^2 - y^2}{2xy}\right). \end{cases}$$

Nimmt man beim zweiten Klammerglied das negative Zeichen, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

d. h. der Strahl biegt sich zur Kreislinie um den Mittelpunkt der Hyperbel. Mit dem positiven Zeichen ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{x}{y}\,\frac{x^2 - 3y^2}{3x^2 - y^2},$$

also unter Einführung wieder von $\dfrac{y}{x} = z$ als Variabeler

$$x\frac{dz}{dx} = -z + \frac{1}{z}\,\frac{1 - 3z^2}{3 - z^2} = \frac{1 + z^4 - 6z^2}{z(3 - z^2)},$$

somit

$$\frac{z(3 - z^2)}{1 + z^4 - 6z^2}\,dz = \frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3 - z^2 - \sqrt{8}} + \frac{1}{3 - z^2 + \sqrt{8}}\right) d(z^2),$$

woraus folgt

$$(205_2)\qquad \log x + \log c = -\tfrac{1}{4}\log(3 - z^2 - \sqrt{8})(3 - z^2 + \sqrt{8}),$$

also

$$(c\,x)^4 = \frac{1}{1 + z^4 - 6z^2}$$

oder mit A als neuer Konstante,

$$(205_3)\qquad \begin{cases} x^4 + y^4 - 6x^2y^2 = x^2(x^2 - 3y^2) + y^2(y^2 - 3x^2) \\ \qquad = 2(x^2 - y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2 = A. \end{cases}$$

oder in Polarkoordinaten

$$(205_4)\qquad \begin{cases} \varrho^4(1 - 8\sin^2\varphi + 8\sin^4\varphi) = \varrho^4(1 - 8\sin^2\varphi\cos^2\varphi) \\ \qquad = \varrho^4(1 - 2\sin^2 2\varphi) = \varrho^4\cos 4\varphi = A. \end{cases}$$

Das allgemeine Integral wird

$$(205_5)\qquad (x^4 + y^4 - 6x^2y^2 - A)(x^2 + y^2 - B) = 0.$$

Ähnlich lassen sich noch viele andere Fälle behandeln. Indessen haben diese Berechnungen doch nur ideellen Wert, denn offenbar ist die Theorie noch unvollständig. Zu ihrer weiteren Ausführung bemerken wir, daß man annimmt, daß das Fermatsche Minimumprinzip der Verbreitung des Lichtes auch in bewegtem Äther gilt. Da, wie wir gesehen haben, die Bewegung des Äthers so wirkt, wie eine Änderung seiner Reflexions- und Brechungsverhältnisse, so können wir dieser Annahme folgen und haben also eine Untersuchung anzustellen, indem wir unsere Gleichungen auf dieses Prinzip anwenden. Um Wiederholungen zu vermeiden, seien die Berechnungen sogleich für den allgemeinen Fall geführt.

i) Wellen mit ungleichmäßiger Richtung und ungleichmäßiger Wellenlänge in ungleichmäßig bewegtem Äther.

Verbreitungsrichtung und Wellenlänge seien also variabel. Wir setzen

$$\int \frac{dS}{\lambda} = \vartheta \int \frac{dS}{\vartheta \lambda} = \vartheta \int \frac{dS}{c} = \vartheta \tau, \quad \tau = \int \frac{dS}{c}, \tag{206}$$

so werden die Bedingungsgleichungen (151) S. 74.

$$\left[1 - \left(u \frac{\partial \tau}{\partial x} + v \frac{\partial \tau}{\partial y} + w \frac{\partial \tau}{\partial z}\right)\right]^2 = c_0^2 \left[\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^2\right], \tag{207a}$$

$$\frac{d}{dt}\left[1 - \left(u \frac{\partial \tau}{\partial x} + v \frac{\partial \tau}{\partial y} + w \frac{\partial \tau}{\partial z}\right)\right] = c_0^2 \Delta \tau. \tag{207b}$$

Wir betrachten erst Strahlen, bei denen λ, also auch τ, nicht sowohl von x, y, z, t, als von der Strahlenlänge S abhängt. Dann ist

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x} = \alpha \frac{\partial \tau}{\partial S} = \frac{\alpha}{c}, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial \tau}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial y} = \beta \frac{\partial \tau}{\partial S} = \frac{\beta}{c},$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial z} = \gamma \frac{\partial \tau}{\partial S} = \frac{\gamma}{c};$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\alpha}{c^2}\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\alpha^2}{c^2}\frac{\partial c}{\partial S},$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\beta}{c^2}\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\beta^2}{c^2}\frac{\partial c}{\partial S},$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\gamma}{c^2}\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\gamma^2}{c^2}\frac{\partial c}{\partial S},$$

also

$$\Delta \tau = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial c}{\partial S}.$$

Die erste Bedingungsgleichung gibt hiernach

$$\left(1 - \frac{\alpha u + \beta v + \gamma w}{c}\right)^2 = \frac{c_0^2}{c^2},$$

d. h. wieder $c = c_0 + s$. Da c nur von der Strahlenlänge abhängen soll, muß der Strahl sich so krümmen, daß auch die in ihn fallende Bewegung nur von der Strahlenlänge bestimmt ist. Darauf kommen wir später noch zurück. Aus der zweiten Bedingung und der ersten folgt dann weiter

$$\frac{1}{c_0}\frac{d}{dt}\frac{1}{c} = -\frac{1}{c^2}\frac{1}{c_0}\left(u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial c}{\partial S}$$

oder

$$-\frac{1}{c}\left(u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z}\right)\frac{\partial c}{\partial S} = -\frac{1}{c} s \frac{\partial c}{\partial S} = c_0\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial S}\right).$$

Da c und s nur von S abhängen, muß das gleiche bei α, β, γ der Fall sein. Dann aber ist

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\partial\alpha}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x} = \alpha\frac{\partial\alpha}{\partial S} = \frac{1}{2}\frac{\partial\alpha^2}{\partial S}, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial y} = \frac{\partial\beta}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial y} = \beta\frac{\partial\beta}{\partial S} = \frac{1}{2}\frac{\partial\beta^2}{\partial S},$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{\partial\gamma}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial z} = \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial S} = \frac{1}{2}\frac{\partial\gamma^2}{\partial S},$$

somit

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0$$

und

$$s\frac{\partial c}{\partial S} = c_0\frac{\partial c}{\partial S}. \tag{208}$$

Diese Gleichung gibt entweder $s = c_0$, der Äther muß sich den Strahl entlang mit der Lichtgeschwindigkeit des ruhenden Äthers bewegen. Oder man hat $\frac{\partial c}{\partial S} = 0$; die Wellenlänge ist dann unveränderlich. Im ersten Fall ist aber die Wellenlänge gleichfalls unveränderlich, da ja alsdann $c = 2c_0$ wird. Also führt die Annahme zu dem Ergebnis, daß allein von der Strahlenlänge die Wellenlänge nicht abhängen kann, sie ist durch x, y, z, t bestimmt oder überhaupt konstant.

Wir gehen also auf die allgemeinen Gleichungen (207) zurück. Setzen wir $c = c_0 + \varrho$ und nehmen Bewegungen, durch die ϱ nur unerheblich gegen c_0 werden kann, so haben wir, indem

$$(209)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{c_0+\varrho} &= \frac{1}{c_0}\left[1 - \frac{\varrho}{c_0} + \left(\frac{\varrho}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{\varrho}{c_0}\right)^3 + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{c_0} - \frac{\varrho}{c_0^2}\left[1 - \frac{\varrho}{c_0} + \left(\frac{\varrho}{c_0}\right)^2 - \cdots\right] = \frac{1}{c_0} - k\frac{\varrho}{c_0^2} \end{aligned}\right.$$

gesetzt wird, wo also k nahezu gleich 1 ist,

$$(210_1)\quad \left\{\begin{aligned} \tau &= \int\frac{dS}{c} = \int\frac{dS}{c_0+\varrho} = \frac{S}{c_0} - \frac{1}{c_0^2}\int k\varrho\,dS = \frac{S}{c_0} - \frac{k}{c_0^2}\int\varrho\,dS = \frac{S}{c_0} - \frac{k}{c_0^2}\mathrm{P}, \\ \mathrm{P} &= \int\varrho\,dS. \end{aligned}\right.$$

Dabei ist k zuletzt als Konstante behandelt, etwa als Mittelwert der betreffenden Größe den Strahl entlang. Damit wird

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} = \frac{\alpha}{c_0} - \frac{k}{c_0^2}\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial y} = \frac{\beta}{c_0} - \frac{k}{c_0^2}\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial z} = \frac{\gamma}{c_0} - \frac{k}{c_0^2}\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial z}.$$

Bis jetzt haben wir meist $\varrho = s$ gefunden; setzen wir allgemeiner $\varrho = \varepsilon s$, so wird jedenfalls ε sehr wenig von 1 abweichen. Alsdann können wir wieder ε als Mittelwert den Strahl entlang ansehen und schreiben

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} = \frac{\alpha}{c_0} - \frac{\varepsilon k}{c_0^2}\frac{\partial\Sigma}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial y} = \frac{\beta}{c_0} - \frac{\varepsilon k}{c_0^2}\frac{\partial\Sigma}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial z} = \frac{\gamma}{c_0} - \frac{\varepsilon k}{c_0^2}\frac{\partial\Sigma}{\partial z};$$

$$\tau = \frac{S}{c_0} - \frac{\varepsilon k}{c_0^2}\Sigma; \qquad \Sigma = \int s\,dS. \tag{210_2}$$

Wenn die Bewegung ein Potential Φ hat, ist

$$\Sigma = \int \frac{\partial \Phi}{\partial S} \partial S = \Phi - \Phi_0 ,$$

somit

$$\tau = \frac{S}{c_0} - \frac{\varepsilon k}{c_0^2} (\Phi - \Phi_0) , \tag{211}$$

wo Φ_0 einen Ausgangswert von Φ bedeutet. Eine Gleichung dieser Art hat H. A. Lorentz angewendet[1]). Doch besitzt εk noch eine andere Bedeutung als bloß den des Produkts zweier Näherungsfaktoren, worauf wir später zu sprechen kommen. Weiter wird in diesem Falle

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\alpha}{c_0} - \frac{\varepsilon k}{c_0^2} u , \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\beta}{c_0} - \frac{\varepsilon k}{c_0^2} v , \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\gamma}{c_0} - \frac{\varepsilon k}{c_0^2} w ,$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\varepsilon k}{c_0^2} \frac{\partial u}{\partial x} , \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\varepsilon k}{c_0^2} \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\varepsilon k}{c_0^2} \frac{\partial w}{\partial z} ,$$

und hieraus

$$\Delta \tau = \frac{1}{c_0} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) - \frac{\varepsilon k}{c_0^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) .$$

$\varepsilon \varkappa$ ist als Konstante behandelt.

Die erste Bedingungsgleichung (207a) gibt hiernach, wenn $\varepsilon k = \varepsilon'$ gesetzt wird, mit $g^2 = u^2 + v^2 + w^2$

$$\left(1 - \frac{s}{c_0} + \frac{\varepsilon'}{c_0^2} g^2 \right)^2 = 1 - \frac{2 \varepsilon'}{c_0} s + \frac{\varepsilon'^2}{c_0^2} g^2 .$$

Das größte Glied dieser Gleichung nach c_0 ist $\frac{2s}{c_0}(1 - \varepsilon')$. Da nun ε' nur sehr wenig von 1 abweicht, ist es jedenfalls von geringerer Ordnung als $\frac{1}{c_0}$. Die folgenden Glieder sind höchstens von der Ordnung $\frac{1}{c_0^2}$.

Für die zweite Bedingungsgleichung, (207b), hat man

$$- \frac{ds}{dt} + \frac{\varepsilon'}{c_0} \frac{dg^2}{dt} = \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\varepsilon'}{c_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] c_0^2 .$$

Gilt die Inkompressibilität des Äthers auch der Bewegung allein gegenüber, so wird hiernach

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \Delta S = \frac{2 \varepsilon'}{c_0^3} g \frac{dg}{dt} - \frac{1}{c_0^2} \frac{ds}{dt} .$$

ΔS ist alsdann, wenn die Beschleunigungen der Bewegung nicht gerade exzessiv ausfallen, auch bei einer Veränderlichkeit der Wellenlänge nur von der Ordnung $\frac{1}{c_0^2}$, und wenn man Glieder von der Ordnung $\frac{1}{c_0^3}$ fortläßt, wird

$$\Delta S = - \frac{1}{c_0^2} \frac{ds}{dt} \quad \text{oder} \quad = 0 . \tag{212}$$

Die Formeln gelten zwar nur, wenn ein Potential für die Bewegung vorhanden ist. Was aber über die Größenordnung gesagt ist, muß bestehen, auch wenn kein

[1]) Abhandlungen 1, 359.

solches Potential stattfindet; denn ob Bewegungen bedeutend oder nicht bedeutend sind, hängt ja von der Art ihrer Darstellung nicht ab.

Das Fermatsche Minimumprinzip schreiben wir in der, wie ich glaube, allein zulässigen Form

$$\int \delta(d\tau) = 0 \tag{213$_1$}$$

und beweisen zunächst, daß es identisch erfüllt ist, wenn $d\tau$ ein vollständiges Differential sein sollte. In diesem Falle haben wir

$$d\tau = \frac{\partial\tau}{\partial x}dx + \frac{\partial\tau}{\partial y}dy + \frac{\partial\tau}{\partial z}dz\,,$$

somit

$$\int\delta(d\tau) = \int\left[\delta\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)dx + \delta\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)dy + \delta\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)dz + \frac{\partial\tau}{\partial x}\delta(dx) + \frac{\partial\tau}{\partial y}\delta(dy) + \frac{\partial\tau}{\partial z}\delta(dz)\right].$$

Nun ist unter der gleichen Bedingung z. B.

$$\delta\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)dx = \left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}\delta x + \frac{\partial^2\tau}{\partial y\,\partial x}\delta y + \frac{\partial^2\tau}{\partial z\,\partial x}\delta z\right)dx \quad \text{usf.}$$

Zusammen geben hiernach die drei ersten Glieder

$$\begin{aligned}\int\Bigg[\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2\tau}{\partial x\,\partial y}dy + \frac{\partial^2\tau}{\partial x\,\partial z}dz\right)\delta x + \left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x\,\partial y}dx + \frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2\tau}{\partial y\,\partial z}dz\right)\delta y\\ + \left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x\,\partial z}dx + \frac{\partial^2\tau}{\partial y\,\partial z}dy + \frac{\partial^2\tau}{\partial z^2}dz\right)\delta z\Bigg]\\ = \int\left[d\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)\delta x + d\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)\delta y + d\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)\delta z\right].\end{aligned}$$

Bei den drei letzten Gliedern ist z. B.

$$\int\frac{\partial\tau}{\partial x}\delta(dx) = \int\frac{\partial\tau}{\partial x}d(\delta x) = \left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\delta x\right)'' - \left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\delta x\right)' - \int d\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)\delta x\,.$$

Die Akzente kennzeichnen die Werte der betreffenden Größen am Beginn und am Ende des Integrationsweges; diese Stellen aber variieren nicht, also fallen die betreffenden Werte fort und insgesamt heben sich die Faktoren von dx, dy, dz auf.

Nun ist $d\tau = \dfrac{dS}{c}$, es müßte also $c = f(S)$ sein, wo $f(S)$ eine Funktion nur von S sein dürfte. Damit kommen wir auf die S. 88 gegebenen Entwickelungen.

Für die allgemeine Untersuchung müssen wir nach dem Lagrangeschen Schema die beiden Bedingunsgleichungen (207) in das Minimumprinzip einarbeiten. Dadurch kommen wir aber zu unübersehbaren Rechnungen. Einfacher verfahren wir, wenn wir entweder $c = c_0 + s'$ setzen, oder $c = c_0 + \varrho$ mit der Bedingung $\varrho - s' = 0$. Alsdann ist die erste Bedingungsgleichung, wie erwiesen, bis auf Glieder, die jedenfalls nicht mehr als $\left(\dfrac{g}{c_0}\right)^2$ betragen, erfüllt und reduziert sich die zweite Bedingungsgleichung bis auf Glieder von der Ordnung $\dfrac{ds}{dt}/c_0^2$ auf $\Delta S = 0$. Setzen wir erst $c = c_0 + s'$. Dann ist also

$$\int\delta(d\tau) = \int\delta\left(\frac{dS}{c_0 + s'}\right) = \int\frac{\delta(dS)}{c_0 + s'} - \int\frac{dS}{(c_0 + s')^2}\delta s'\,. \tag{213$_2$}$$

Wir haben aber mit $u' = \varepsilon u$, $v' = \varepsilon v$, $w' = \varepsilon w$; $s' = \varepsilon s$

$$\begin{aligned}\delta s' &= \delta\left(u'\frac{dx}{dS} + v'\frac{dy}{dS} + w'\frac{dz}{dS}\right)\\ &= \frac{1}{dS}\delta(u'dx + v'dy + w'dz) - \frac{1}{(dS)^2}(u'dx + v'dy + w'dz)\,\delta(dS)\\ &= \frac{1}{dS}\left(\delta(u'dx + v'dy + w'dz) - s'\delta(dS)\right),\end{aligned}$$

somit

$$(213_3)\qquad \int\delta(d\tau) = \int\frac{c_0 + 2s'}{(c_0 + s')^2}\delta(dS) - \int\frac{1}{(c_0 + s')^2}\delta(u'dx + v'dy + w'dz)\,.$$

Multiplizieren wir die Variation von ΔS mit einem Faktor ν, so wäre hiernach im Lagrangeschen Schema das Minimumprinzip ausgedrückt durch

$$(214'\text{a})\quad \int\frac{c_0 + 2s'}{(c_0 + s')^2}\delta(dS) - \int\frac{dS}{(c_0 + s')^2}\delta(u'dx + v'dy + w'dz) + \int\nu\, dS\,\delta\Delta S = 0\,.$$

Hätten wir in dieses Schema auch die erste Bedingungsgleichung in der Form $\varrho - s' = 0$ einbezogen, so wäre mit μ als neuem Faktor

$$(214''\text{a})\qquad \int\frac{\delta(dS)}{c_0 + \varrho} - \int\frac{dS}{(c_0 + \varrho)^2}\delta\varrho + \int\mu\, dS\,\delta(\varrho - s') + \int\nu\, dS\,\delta(\Delta S) = 0,$$

oder wegen des angegebenen Wertes von $\delta s'$

$$(214''\text{b})\quad \begin{cases}\displaystyle\int\frac{c_0 + \varrho + \mu(c_0 + \varrho)^2 s'}{(c_0 + \varrho)^2}\delta(dS) - \int\frac{\mu(c_0 + \varrho)^2}{(c_0 + \varrho)^2}\delta(u'dx + v'dy + w'dz)\\ \displaystyle\qquad + \int\left(\mu - \frac{1}{(c_0 + \varrho)^2}\right)dS\,\delta\varrho + \int\nu\, dS\,\delta(\Delta S) = 0\,.\end{cases}$$

Soll diese Form mit der unter (214'a) übereinstimmen, so müssen wir setzen

$$(215)\qquad \mu = \frac{1}{(c_0 + \varrho)^2}\,,\qquad \varrho = s'\,.$$

Wir behalten noch allgemein (214''b) bei und schreiben

$$(216_1)\quad \frac{c_0 + \varrho + \mu(c_0 + \varrho)^2 s'}{(c_0 + \varrho)^2} = \frac{1}{c_0 + \varrho} + \mu s' = \varkappa\,,\qquad \mu - \frac{1}{(c_0 + \varrho)^2} = \varkappa',$$

wobei nach (215) auch

$$(216_2)\qquad \varkappa' = 0\,,\quad \varkappa = \frac{c_0 + \varrho + s'}{(c_0 + \varrho)^2} = \frac{c_0 + 2\varrho}{(c_0 + \varrho)^2} = \frac{c_0 + 2s'}{(c_0 + s')^2}\,,$$

sein wird.

Die Gleichung (214''b) geht aber über in

$$(214\text{b})\quad \int\varkappa\,\delta(dS) - \int\mu\,\delta(u'dx + v'dy + w'dz) + \int\varkappa'\, dS\,\delta\varrho + \int\nu\, dS\,\delta(\Delta S) = 0\,.$$

Hierin ist nun

$$\int\varkappa\,\delta(dS) = \int\varkappa\,\delta\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int\varkappa\left(\frac{dx}{dS}\delta(dx) + \frac{dy}{dS}\delta(dy) + \frac{dz}{dS}\delta(dz)\right).$$

und da z. B.

$$\int \varkappa \frac{dx}{dS}\,\delta(dx) = \int \varkappa \frac{dx}{dS}\,d(\delta x) = \left(\varkappa \frac{dx}{dS}\,\delta x\right)'' - \left(\varkappa \frac{dx}{dS}\,\delta x\right)' - \int d\left(\varkappa \frac{dx}{dS}\right)\delta x \quad \text{usf.}$$

ist, und die Grenzen des Strahls fest, also $\delta x'' = \delta x' = 0$ sein sollen, wird

$$\int \varkappa\,\delta(dS) = -\int\left[d\left(\varkappa \frac{dx}{dS}\right)\delta x + d\left(\varkappa \frac{dy}{dS}\right)\delta y + d\left(\varkappa \frac{dz}{dS}\right)\delta z\right].$$

Weiter haben wir

$$\int \mu\,\delta(u'dx) = \int [\mu\,dx\,\delta u' + \mu\,u'\,\delta(dx)]\,.$$

Das zweite Glied gibt nach obiger Schlußweise $-\int d(\mu u')\,\delta x$, das erste wird

$$\int \mu\,dx\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial u'}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial u'}{\partial z}\,\delta z\right).$$

Entsprechend sind die Glieder für v' und w' zu behandeln, so daß zusammen kommt

$$\begin{aligned}\int \mu\,\delta(u'dx + v'dy + w'dz) = &-\int [d(\mu u')\,\delta x + d(\mu v')\,\delta y + d(\mu w')\,\delta z]\\ &+\int \mu\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v'}{\partial x}\,dy + \frac{\partial w'}{\partial x}\,dz\right)\delta x\right.\\ &+\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\,dx + \frac{\partial v'}{\partial y}\,dy + \frac{\partial w'}{\partial y}\,dz\right)\delta y\\ &\left.+\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\,dx + \frac{\partial v'}{\partial z}\,dy + \frac{\partial w'}{\partial z}\,dz\right)\delta z\right].\end{aligned}$$

Sodann finden wir

$$\int \nu\,dS\,\delta(\varDelta S) = \int \nu\,dS\left(\frac{\partial(\varDelta S)}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial(\varDelta S)}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial(\varDelta S)}{\partial z}\,\delta z\right) = 0\,,$$

weil $\varDelta S = 0$. Zuletzt wird

$$\int \varkappa' dS\,\delta\varrho = \int \varkappa' dS\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\varrho}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial\varrho}{\partial z}\,\delta z\right).$$

Nun haben wir die Faktoren von δx, δy, δz zu sammeln und gleich Null zu setzen. So bekommen wir die drei Grundgleichungen

$$(217)\quad \left\{\begin{aligned} d\left(\varkappa\frac{dx}{dS}\right) - d(\mu u') - \varkappa'\frac{\partial\varrho}{\partial x}\,dS + \mu\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v'}{\partial x}\,dy + \frac{\partial w'}{\partial x}\,dz\right) = 0\,,\\ d\left(\varkappa\frac{dy}{dS}\right) - d(\mu v') - \varkappa'\frac{\partial\varrho}{\partial y}\,dS + \mu\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\,dx + \frac{\partial v'}{\partial y}\,dy + \frac{\partial w'}{\partial y}\,dz\right) = 0\,,\\ d\left(\varkappa\frac{dz}{dS}\right) - d(\mu w') - \varkappa'\frac{\partial\varrho}{\partial z}\,dS + \mu\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\,dx + \frac{\partial v'}{\partial z}\,dy + \frac{\partial w'}{\partial z}\,dz\right) = 0\,.\end{aligned}\right.$$

Die Zeichen d beziehen sich hier nur auf Differentiation längs der Bahn, nicht nach der Zeit; mit S als unabhängigen Variabeln können wir sie ersetzen durch $\frac{d}{dS}\,dS$.

Multipliziert man die drei Gleichungen mit dx, dy, dz, addiert sie und beachtet folgende Beziehungen

$$d\left(\varkappa\frac{dx}{dS}\right)dx + d\left(\varkappa\frac{dy}{dS}\right)dy + d\left(\varkappa\frac{dz}{dS}\right)dz$$

$$= \varkappa\left[d\left(\frac{dx}{dS}\right)\frac{dx}{dS} + d\left(\frac{dy}{dS}\right)\frac{dy}{dS} + d\left(\frac{dz}{dS}\right)\frac{dz}{dS}\right]dS + \left[\left(\frac{dx}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dS}\right)^2\right]dS\,d\varkappa$$

$$= \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dS}\left[\left(\frac{dx}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dS}\right)^2\right]dS + \left[\left(\frac{dx}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dS}\right)^2\right]dS\,d\varkappa = dS\,d\varkappa,$$

$$d(\mu u')\,dx + d(\mu v')\,dy + d(\mu w')\,dz = \mu(du'dx + dv'dy + dw'dz)$$
$$+\left(u'\frac{dx}{dS} + v'\frac{dy}{dS} + w'\frac{dz}{dS}\right)dS\,d\mu$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial x}dx + \frac{\partial\varrho}{\partial y}dy + \frac{\partial\varrho}{\partial z}dz = d\varrho\,,$$

$$dx\left(\frac{\partial u'}{\partial x}dx + \frac{\partial u'}{\partial y}dy + \frac{\partial u'}{\partial z}dz\right) + dy\left(\frac{\partial v'}{\partial x}dx + \frac{\partial v'}{\partial y}dy + \frac{\partial v'}{dz}dz\right)$$
$$+ dz\left(\frac{\partial w'}{\partial x}dx + \frac{\partial w'}{\partial y}dy + \frac{\partial w'}{\partial z}dz\right)$$
$$= dx\,du' + dy\,dv' + dz\,dw',$$

so findet man

$$d\varkappa - \varkappa' d\varrho - s' d\mu = 0\,.$$

Es ist aber nach (216)

$$d\varkappa = -\frac{1}{(c_0+\varrho)^2}d\varrho + \mu\,ds' + s'd\mu\,, \quad \varkappa' = \mu - \frac{1}{(c_0+\varrho)^2}\,.$$

Also geht die obige Gleichung über in

$$\mu\,ds' - \mu\,d\varrho = 0$$

und diese Beziehung ist identisch erfüllt, weil nach der Bedingungsgleichung $ds' = d\varrho$ sein soll.

Wir betrachten erst den besonderen Fall, daß in jeder der Gleichungen (217) die von der Variation der Bewegung selbst herrührenden Glieder für sich verschwinden. Also die Bewegung soll den Bedingungen genügen

$$(218)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u'}{\partial x}dx + \frac{\partial v'}{\partial x}dy + \frac{\partial w'}{\partial x}dz = 0\,,\\ &\frac{\partial u'}{\partial y}dx + \frac{\partial v'}{\partial y}dy + \frac{\partial w'}{\partial y}dz = 0\,,\\ &\frac{\partial u'}{\partial z}dx + \frac{\partial v'}{\partial z}dy + \frac{\partial w'}{\partial z}dz = 0\,.\end{aligned}\right.$$

Hiernach muß die Funktionaldeterminante Null sein,

$$(219)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x} & \frac{\partial v'}{\partial x} & \frac{\partial w'}{\partial x} \\ \frac{\partial u'}{\partial y} & \frac{\partial v'}{\partial y} & \frac{\partial w'}{\partial y} \\ \frac{\partial u'}{\partial z} & \frac{\partial v'}{\partial z} & \frac{\partial w'}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

woselbst u', v', w' die Komponenten sind der Geschwindigkeit $\varepsilon g = g'$.

Multipliziert man die Gleichungen (218) mit dx, dy, dz und addiert sie, so erhält man

$$(220)\qquad du'dx + dv'dy + dw'dz = 0$$

und da aus der Differentiation von $\varrho - s' = 0$ folgt

$$dS\,d\varrho + \varrho\,d^2S - u'd^2x - v'd^2y - w'd^2z - du'dx - dv'dy - dw'dz = 0,$$

so ergibt sich, indem S als unabhängige Variabele gewählt wird, nach (220)

$$(221_1)\qquad u'\frac{d^2x}{dS^2} + v'\frac{d^2y}{dS^2} + w'\frac{d^2z}{dS^2} = \frac{d\varrho}{dS},$$

oder

$$(221_2)\qquad \frac{d\varrho}{dS} = \frac{g'}{R}\cos(g', R),$$

wo R den Krümmungsradius des Strahles bedeutet und g' die resultierende Geschwindigkeit der Komponenten u', v', w' ist. Mit $\varrho = \varepsilon s = s'$ hat man auch

$$(221_3)\qquad \frac{ds'}{dS} = \frac{g'}{R}\cos(g', R) = \frac{r'}{R},$$

d. h. die Änderung der Bewegung s' längs des Strahles ist proportional der zu g' gehörigen Bewegungskomponente r' in Richtung des Krümmungsradius des Strahles und umgekehrt proportional dem Krümmungsradius. Dadurch zeigt sich der Gang des Strahles bestimmt. Ist $r' = 0$, so wird $s' =$ Konst., der Strahl kann also auch so laufen, daß nach seiner ganzen Erstreckung die Bewegungskomponente s' konstant ist.

Die Gleichungen (217) geben für diesen Fall mit $\varkappa' = 0$, nach (216_2)

$$(222_1)\qquad d\left(\varkappa\frac{dx}{dS} - \mu u'\right) = 0, \quad d\left(\varkappa\frac{dy}{dS} - \mu v'\right) = 0, \quad d\left(\varkappa\frac{dz}{dS} - \mu w'\right) = 0,$$

oder

$$(222_2)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{dx}{dS} - \mu u'\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{dx}{dS} - \mu u'\right)dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{dx}{dS} - \mu u'\right)dz = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{dy}{dS} - \mu v'\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{dy}{dS} - \mu v'\right)dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{dy}{dS} - \mu v'\right)dz = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{dz}{dS} - \mu w'\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{dz}{dS} - \mu w'\right)dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{dz}{dS} - \mu w'\right)dz = 0. \end{cases}$$

Sollen diese Gleichungen bestehen können, ohne daß die Faktoren der dx, dy, dz Null sind, so muß ihre Determinante Null sein. Diese Determinante nun können wir schreiben

$$\begin{vmatrix} \mu\frac{\partial u'}{\partial x}+u'\frac{\partial \mu}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{dx}{dS}\right) & \mu\frac{\partial v'}{\partial x}+v'\frac{\partial \mu}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{dy}{dS}\right) & \mu\frac{\partial w'}{\partial x}+w'\frac{\partial \mu}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{dz}{dS}\right) \\ \mu\frac{\partial u'}{\partial y}+u'\frac{\partial \mu}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{dx}{dS}\right) & \mu\frac{\partial v'}{\partial y}+v'\frac{\partial \mu}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{dy}{dS}\right) & \mu\frac{\partial w'}{\partial y}+w'\frac{\partial \mu}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{dz}{dS}\right) \\ \mu\frac{\partial u'}{\partial z}+u'\frac{\partial \mu}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{dx}{dS}\right) & \mu\frac{\partial v'}{\partial z}+v'\frac{\partial \mu}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{dy}{dS}\right) & \mu\frac{\partial w'}{\partial z}+w'\frac{\partial \mu}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{dz}{dS}\right) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Vergleicht man das mit der Determinante (219) die auch Null sein soll, so folgt, daß die in dieser Determinante mehr vorhandenen Glieder verschwinden müssen, so daß wir hätten

$$u'\frac{\partial \mu}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{dx}{dS}\right)=0,\quad u'\frac{\partial \mu}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{dx}{dS}\right)=0,\quad u'\frac{\partial \mu}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{dx}{dS}\right)=0;$$

$$v'\frac{\partial \mu}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{dy}{dS}\right)=0,\quad v'\frac{\partial \mu}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{dy}{dS}\right)=0,\quad v'\frac{\partial \mu}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{dy}{dS}\right)=0;$$

$$w'\frac{\partial \mu}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{dz}{dS}\right)=0,\quad w'\frac{\partial \mu}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{dz}{dS}\right)=0,\quad w'\frac{\partial \mu}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{dz}{dS}\right)=0.$$

Multiplizieren wir die Gleichungen z. B. der ersten Zeile mit dx, dy, dz und addieren sie, so folgt

$$u'd\mu-d\left(\varkappa\frac{dx}{dS}\right)=0,$$

und dieses kann mit der ersten Gleichung unter (222) nur bestehen, wenn $\mu\,du'=0$, d. h. entweder $\mu=0$ oder $u'=$ Konst. wird. Das erste ist ausgeschlossen, das zweite ist für das Problem bedeutungslos, also müssen in (222_2) die Faktoren der dx, dy, dz Null sein. Und hieraus folgt

$$(223_1)\qquad \begin{cases} \varkappa\alpha-\varkappa_0\alpha_0=\mu u'-\mu_0 u_0', \quad \varkappa\beta-\varkappa_0\beta_0=\mu v'-\mu_0 v_0', \\ \varkappa\gamma-\varkappa_0\gamma_0=\mu w'-\mu_0 w_0'. \end{cases}$$

Der Index 0 bezeichnet Ausgangswerte.

Die Quadrierung und Addierung dieser Gleichungen gibt

$$\varkappa^2+\varkappa_0^2-2\varkappa\varkappa_0\cos(S,S_0)=\mu^2 g'^2+\mu_0^2 g_0'^2-2\mu\mu_0 g' g_0'\cos(g',g_0'),$$

also

$$(224_1)\qquad \cos(S,S_0)=\frac{\varkappa^2+\varkappa_0^2-(\mu^2 g'^2+\mu_0^2 g_0'^2-2\mu\mu_0 g' g_0'\cos(g',g_0'))}{2\varkappa\varkappa_0},$$

oder

$$1-\cos(S,S_0)=2\sin^2\left(\frac{S,S_0}{2}\right)=\frac{\mu^2 g'^2+\mu_0^2 g_0'^2-2\mu\mu_0 g' g_0'\cos(g',g_0')-(\varkappa-\varkappa_0)^2}{2\varkappa\varkappa'},$$

d. h.

$$(224_2)\qquad \sin\frac{S,S_0}{2}=\frac{1}{2\sqrt{\varkappa\varkappa_0}}\sqrt{\mu^2 g'^2+\mu_0^2 g_0'^2-2\mu\mu_0 g' g_0'\cos(g',g_0')-(\varkappa-\varkappa_0)^2}.$$

Als Gleichung für die Abweichung des Strahls von der Ausgangsrichtung. Schreibt man die Beziehungen (223_1) in Form

$$(223_2) \quad \begin{cases} \varkappa\alpha - \mu u' = \varkappa_0\alpha_0 - \mu_0 u_0', \qquad \varkappa\beta - \mu v' = \varkappa_0\beta_0 - \mu v_0', \\ \varkappa\gamma - \mu w' = \varkappa_0\gamma_0 - \mu_0 w_0' \end{cases}$$

und quadriert und addiert wieder, so folgt

$$\varkappa^2 + \mu^2 g'^2 - 2\varkappa\mu s' = \varkappa_0^2 + \mu_0^2 g_0'^2 - 2\varkappa_0\mu_0 s_0'.$$

Nun haben wir nach (215), (216) (S. 92)

$$\varkappa = \frac{c_0 + 2s'}{(c_0 + s')^2}, \qquad \mu = \frac{1}{(c_0 + s')^2},$$

also aus der obigen Gleichung

$$\frac{(c_0 + 2s')^2 + g'^2 - 2(c_0 + 2s')s'}{(c_0 + s')^4} = \frac{(c_0 + 2s_0')^2 + g_0'^2 - 2(c_0 + 2s_0')s_0'}{(c_0 + s_0')^4},$$

d. h.

$$(225_1) \qquad \frac{c_0^2 + g'^2 + 2c_0 s'}{(c_0 + s')^4} = \frac{c_0^2 + g_0'^2 + 2c_0 s_0'}{(c_0 + s_0')^4}$$

oder indem $c_0 + s' = c$ ist und $c_0 + s_0' = c^{(0)}$ den Anfangswert von c bedeutet

$$(225_2) \qquad \frac{g'^2 - c_0^2 + 2c_0 c}{c^4} = \frac{g_0'^2 - c_0^2 + 2c_0 c^{(0)}}{(c^{(0)})^4}$$

als Gleichung vierten Grades für c. Durch c ist dann s' und $\varkappa$ und μ bestimmt, somit auch $\sin\frac{S, S_0}{2}$. Für Bewegungen mit gegen c_0 nicht erheblichen Geschwindigkeiten kann man Näherungsformeln rechnen, z. B. indem man im Nenner $c = c_0 = c^{(0)}$ setzt, dann hat man

$$(226) \qquad c = c^{(0)} + \frac{g_0'^2 - g'^2}{2c_0} = c_0 + s_0' + \frac{g_0'^2 - g'^2}{2c_0}.$$

Oder man macht $c^4 = c c_0^3$ oder $c^4 = c^2 c_0^2$ oder $c^4 = c^3 c_0$ usf. Vernachlässigt man überhaupt den Unterschied zwischen $\varkappa$ und $\varkappa_0$ und zwischen μ und μ_0, indem man in diesen Größen unter s' einen Mittelwert versteht, oder s' überhaupt Null ansetzt, was ja bis auf Größen von der Ordnung $1/c_0^2$ und $1/c_0^3$ zulässig ist, so wird

$$\varkappa = \frac{1}{c_0}, \qquad \mu = \frac{1}{c_0^2}$$

und

$$(227) \qquad \begin{cases} \sin\frac{S, S_0}{2} = \frac{1}{2c_0}\sqrt{g'^2 + g_0'^2 - 2g'g_0'\cos(g', g_0')}, \\ \sphericalangle(S, S_0) = \frac{\sqrt{g'^2 + g_0'^2 - 2g'g_0'\cos(g', g_0')}}{c_0}. \end{cases}$$

Die Differentiation der Gleichung (225_2) nach S gibt noch

$$(227_1) \qquad g'\frac{dg'}{dS} + c_0\frac{dc}{dS} = 2\frac{c^3}{(c^{(0)})^4}(g_0'^2 - c_0^2 + 2c_0 c^{(0)})\frac{dc}{dS}$$

oder weil $\frac{dc}{dS} = \frac{ds'}{dS}$ ist, und indem $\frac{c^3}{(c^{(0)})^4} = \frac{1}{c^{(0)}}$ gesetzt wird,

$$g' \frac{dg'}{dS} = \frac{2}{c^{(0)}} \left(g_0'^2 - c_0^2 + \frac{3}{2} c_0 c^{(0)}\right) \frac{ds'}{dS}. \tag{227_2}$$

g' und s' variieren zugleich den Strahl entlang, eines ist konstant, wenn das andere sich konstant erweist. Aber g' variiert im Verhältnis von c/g' stärker als s', denn für nicht erhebliche Bewegungen wird

$$\frac{dg'}{dS} = \frac{c_0}{g'} \frac{ds'}{dS}. \tag{227_3}$$

Aus (221_3) folgt dann noch für diesen Fall

$$\frac{dg'}{dS} = c_0 \frac{\cos(g', R)}{R}. \tag{227_4}$$

Soll der Strahl gerade verlaufen, so müssen s' und g' in seiner Richtung beide konstant sein. Es muß also, wie geartet die Bewegung auch sein mag, eine gerade Linie geben, längs deren sie in allen Punkten den gleichen Betrag besitzt. So könnte z. B. der Strahl Achse eines geraden Wirbels sein und diese ohne Störung seiner Verbreitung durchlaufen.

Eine Reihe anderer nicht uninteressanter Beziehungen leitet man durch Multiplikation der Gleichungen (223_1), (222) mit l', m', n'; l_0', m_0', n_0'; $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; α, β, γ und Addition, nämlich

$$\left\{\begin{aligned} \varkappa \cos(g', S) &= \varkappa_0 \cos(g', S_0) + \mu g' - \mu_0 g_0' \cos(g', g_0'), \\ \varkappa \cos(g_0', S) &= \varkappa_0 \cos(g_0', S_0) + \mu g' \cos(g', g_0') - \mu_0 g_0', \\ \varkappa \cos(S, S_0) &= \varkappa_0 + \mu g' \cos(g', S_0) - \mu_0 g_0' \cos(g_0', S_0), \\ \varkappa_0 \cos(S_0, S) &= \varkappa + \mu_0 g_0' \cos(g_0', S) - \mu g' \cos(g', S). \end{aligned}\right. \tag{228}$$

Für schwache Bewegungen haben wir

$$\left\{\begin{aligned} \cos(g', S) &= \cos(g', S_0) + \frac{1}{c_0}\left(g' - g_0' \cos(g', g_0')\right), \\ \cos(g_0', S) &= \cos(g_0', S_0) + \frac{1}{c_0}\left(g' \cos(g', g_0') - g_0'\right), \\ \cos(S, S_0) &= 1 + \frac{1}{c_0}\left(g' \cos(g', S_0) - g_0' \cos(g_0', S_0)\right), \\ \cos(S_0, S) &= 1 + \frac{1}{c_0}\left(g_0' \cos(g_0', S) - g' \cos(g', S)\right). \end{aligned}\right. \tag{228'}$$

Die Interpretation ist sehr einfach. Alle Gleichungen lehren, daß der Strahl an jeder Stelle nur schwach gekrümmt sein kann, was nicht verhindert, daß er als Ganzes selbst in sich zurückzulaufen vermöchte.

Die Gleichungen des Strahles bekommen wir aus den Beziehungen unter (223_1) oder (223_2) in der Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu v' - \mu_0 v_0' + \varkappa_0 \beta_0}{\mu u' - \mu_0 u_0' + \varkappa_0 \alpha_0}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\mu w' - \mu_0 w_0' + \varkappa_0 \gamma_0}{\mu u' - \mu_0 u_0' + \varkappa_0 \alpha_0}. \tag{229}$$

Wenn die Bewegung g' den Beziehungen unter (218) nicht entspricht — daß man unzählige Bewegungen namhaft machen kann, die es tun, werden wir noch sehen — geben die Gleichungen unter (217) mit $\varkappa' = 0$

$$(230_1)\quad \begin{cases} d\left(\varkappa\dfrac{dx}{dS}\right) - \mu\left\{\left(\dfrac{\partial u'}{\partial y} - \dfrac{\partial v'}{\partial x}\right)dy + \left(\dfrac{\partial u'}{\partial z} - \dfrac{\partial w'}{\partial x}\right)dz\right\} = u'd\mu\,, \\ d\left(\varkappa\dfrac{dy}{dS}\right) - \mu\left\{\left(\dfrac{\partial v'}{\partial z} - \dfrac{\partial w'}{\partial y}\right)dz + \left(\dfrac{\partial v'}{\partial x} - \dfrac{\partial u'}{\partial y}\right)dx\right\} = v'd\mu\,, \\ d\left(\varkappa\dfrac{dz}{dS}\right) - \mu\left\{\left(\dfrac{\partial w'}{\partial x} - \dfrac{\partial u'}{\partial z}\right)dx + \left(\dfrac{\partial w'}{\partial y} - \dfrac{\partial v'}{\partial z}\right)dy\right\} = w'd\mu\,. \end{cases}$$

Führen wir die zur Bewegung g' gehörenden Drehungskomponenten ein mit

$$(231)\quad p' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}\right), \quad q' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}\right), \quad r' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right),$$

so gehen die Gleichungen über in

$$(230_2)\quad \begin{cases} d\left(\varkappa\dfrac{dx}{dS}\right) + 2\mu(r'dy - q'dz) = u'd\mu\,, \\ d\left(\varkappa\dfrac{dy}{dS}\right) + 2\mu(p'dz - r'dx) = v'd\mu\,, \\ d\left(\varkappa\dfrac{dz}{dS}\right) + 2\mu(q'dx - p'dy) = w'd\mu\,. \end{cases}$$

Die Multiplikation der Gleichungen mit p', q', r' und Addition ergibt

$$(232_1)\quad p'd\left(\varkappa\frac{dx}{dS}\right) + q'd\left(\varkappa\frac{dy}{dS}\right) + r'd\left(\varkappa\frac{dz}{dS}\right) = (p'u' + q'v' + r'w')\,d\mu\,.$$

Da die Drehungsachse so definiert ist, daß alle Bewegung senkrecht um sie erfolgt, muß $p'u' + q'v' + r'w' = D'g'\cos(D', g') = 0$ sein, wo D' die Drehungsgeschwindigkeit bedeutet. Also bleibt

$$(232_2)\quad \varkappa\left[p'd\left(\frac{dx}{dS}\right) + q'd\left(\frac{dy}{dS}\right) + r'd\left(\frac{dz}{dS}\right)\right] + \left(p'\frac{dx}{dS} + q'\frac{dy}{dS} + r'\frac{dz}{dS}\right)d\varkappa = 0\,,$$

d. h.

$$(232_3)\quad \varkappa D'_R + RD'_S\frac{d\varkappa}{dS} = 0\,.$$

D'_R ist die Drehungskomponente um den Krümmungsradius des Strahles, D'_S die um den Strahl selbst. Der Strahl windet sich also so, daß diese Komponenten durch die obige Beziehung verbunden sind.

Mit dem angegebenen Wert von $\varkappa$ hat man nach (216_2) (S. 92)

$$\frac{d\varkappa}{dS} = -2\frac{c_0 + 2s'}{(c_0 + s')^3}\frac{ds'}{dS} + \frac{2}{(c_0 + s')^2}\frac{ds'}{dS} = -\frac{2s'}{(c_0 + s')^3}\frac{ds'}{dS}\,,$$

somit

$$(232_4)\quad \frac{D'_R}{R} = \frac{2s'}{(c_0 + 2s')(c_0 + s')}\frac{ds'}{dS}D'_S\,.$$

Ist R von Unendlich verschieden und s' auch nicht den Strahl entlang konstant, so können D'_R und D'_S nur gleichzeitig Null sein, so daß die Drehung nur um den Torsionsradius erfolgt. Soll der Strahl gerade verlaufen, $R = \infty$ sein, so müssen wir haben entweder $\frac{ds'}{dS} = 0$, die Bewegung wird entlang der Bahn des Strahls konstant sein, oder $D'_S = 0$, Drehung um den Strahl darf nicht stattfinden.

Ferner ist nach (215) (S. 92)

$$\frac{d\mu}{dS} = -\frac{2}{(c_0 + s')^3}\frac{ds'}{dS}.$$

Mit dem obigen Werte von $\frac{d\varkappa}{dS}$ und mit den Werten von μ und $\varkappa$ nach (215), (216$_2$) (S. 92) geben also die Gleichungen (230$_2$)

$$(230_3)\quad \begin{cases} (c_0 + 2s')\,d\left(\frac{dx}{dS}\right) + 2(r'dy - q'dz) + \frac{2}{c_0 + s'}\left(u' - \frac{dx}{dS}s'\right)ds' = 0\,, \\ (c_0 + 2s')\,d\left(\frac{dy}{dS}\right) + 2(p'dz - r'dx) + \frac{2}{c_0 + s'}\left(v' - \frac{dy}{dS}s'\right)ds' = 0\,, \\ (c_0 + 2s')\,d\left(\frac{dz}{dS}\right) + 2(q'dx - p'dy) + \frac{2}{c_0 + s'}\left(w' - \frac{dz}{dS}s'\right)ds' = 0\,. \end{cases}$$

Beziehen wir alles auf α, β, γ, so erhalten wir drei Differentialgleichungen zur Bestimmung dieser Größen

$$(230_4)\quad \begin{cases} (c_0 + 2s')\frac{d\alpha}{dS} + 2(r'\beta - q'\gamma) + \frac{2}{c_0 + s'}(u' - \alpha s')\frac{ds'}{dS} = 0\,, \\ (c_0 + 2s')\frac{d\beta}{dS} + 2(p'\gamma - r'\alpha) + \frac{2}{c_0 + s'}(v' - \beta s')\frac{ds'}{dS} = 0\,, \\ (c_0 + 2s')\frac{d\gamma}{dS} + 2(q'\alpha - p'\beta) + \frac{2}{c_0 + s'}(w' - \gamma s')\frac{ds'}{dS} = 0\,, \end{cases}$$

wobei noch zu beachten wäre, daß $s' = \alpha u' + \beta v' + \gamma w'$ ist. Die Gleichungen sind also sehr kompliziert, da sie sich nicht einmal linear darstellen. Daß sie der Bedingung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ entsprechen, haben wir nachgewiesen.

Wenn die Geschwindigkeit der Bewegung nicht erheblich ist gegen die Verbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes, dürfen die Glieder mit ds'/dS fortgelassen werden, die besonders unbequem sind. Wir haben dann

$$(233_1)\quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dS} = \frac{2}{c_0 + 2s'}(q'\gamma - r'\beta)\,, \\ \frac{d\beta}{dS} = \frac{2}{c_0 + 2s'}(r'\alpha - p'\gamma)\,, \\ \frac{d\gamma}{dS} = \frac{2}{c_0 + 2s'}(p'\beta - q'\alpha)\,. \end{cases}$$

Nennen wir $\pi', \varkappa', \varrho'$ den Richtungskosinus der Drehung D', so wird dann

$$(233_2)\quad \begin{cases} (c_0 + 2s')\frac{d\alpha}{dS} = 2(\varkappa'\gamma - \varrho'\beta)D'\,, \quad (c_0 + 2s')\frac{d\beta}{dS} = 2(\varrho'\alpha - \pi'\gamma)D'\,, \\ (c_0 + 2s')\frac{d\gamma}{dS} = 2(\pi'\beta - \varkappa'\alpha)D'\,. \end{cases}$$

Die Quadrierung und Addierung mit S als unabhängiger Variabelen ergibt

$(c_0 + 2s')^2 = 4R^2D'^2\sin^2(D', S) = 4R^2D'^2 - 4R^2D'^2\cos^2(D', S) = 4R^2D'^2 - 4R^2D_S'^2$.

Ist der Strahl gerade, so haben wir $D_S' = D'$, die ganzen Drehung geschieht um ihn als Achse. Da also $D_R' = 0$ ist, so folgt nach (232_2), daß $\frac{ds'}{dS} = 0$ ist. Also kann sich auch jetzt ein Strahl längs der Achse eines geraden Wirbels ohne jede Änderung verbreiten (S. 98).

Wenn die Bewegung g' ein Potential hat (oder wenn $p' : q' : r' = \alpha : \beta : \gamma$ ist, der Strahl der Drehungsachse folgt), gehen die Gleichungen (230_2) über in

$$(234_1) \qquad d(\varkappa\alpha) = u'd\mu\,, \quad d(\varkappa\beta) = v'd\mu\,, \quad d(\varkappa\gamma) = w'd\mu\,.$$

Also wird

$$(235_1) \quad v'd(\varkappa\alpha) = u'd(\varkappa\beta)\,, \quad w'd(\varkappa\beta) = v'd(\varkappa\gamma)\,, \quad u'd(\varkappa\gamma) = w'd(\varkappa\alpha)\,,$$

oder wenn l', m', n' die Richtungskosinus der Bewegung g' bedeuten,

$$(235_2) \quad m'd(\varkappa\alpha) = l'd(\varkappa\beta)\,, \quad n'd(\varkappa\beta) = m'd(\varkappa\gamma)\,, \quad l'd(\varkappa\gamma) = n'd(\varkappa\alpha)\,.$$

Wir betrachten nur den Fall einer geraden Bewegung. Die Integration ergibt dann

$$(236) \quad \begin{cases} m'(\varkappa\alpha - \varkappa_0\alpha_0) = l'(\varkappa\beta - \varkappa_0\beta_0)\,, \quad n'(\varkappa\beta - \varkappa_0\beta_0) = m'(\varkappa\gamma - \varkappa_0\gamma_0)\,, \\ \qquad\qquad l'(\varkappa\gamma - \varkappa_0\gamma_0) = n'(\varkappa\alpha - \varkappa_0\alpha_0)\,. \end{cases}$$

Da als dritte Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ hinzukommt, so sind α, β, γ bestimmt. Setzt man für den Augenblick $\varkappa\alpha = a$, $\varkappa\beta = b$, $\varkappa\gamma = c$, $\varkappa_0\alpha_0 = a_0$, $\varkappa_0\beta_0 = b_0$, $\varkappa_0\gamma_0 = c_0$, so daß $a^2 + b^2 + c^2 = \varkappa^2$, $a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = \varkappa_0^2$ ist, so hat man zunächst

$$m'a - l'b = m'a_0 - l'b_0\,, \quad n'a - l'c = n'a_0 - l'c_0\,.$$

Somit durch Quadrierung und Addierung

$$\begin{aligned} &a^2(m'^2 + n'^2) + l'^2(b^2 + c^2) - 2l'a(m'b + n'c) \\ &= a_0^2(m'^2 + n'^2) + l'^2(b_0^2 + c_0^2) - 2l'a_0(m'b_0 + l'c_0) \end{aligned}$$

oder da $l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1$

$$\begin{aligned} &a^2 + l'^2(a^2 + b^2 + c^2) - 2l'a(l'a + m'b + n'c) \\ &= a_0^2 + l'^2(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) - 2l'a_0(l'a_0 + m'b_0 + n'c_0)\,. \end{aligned}$$

Beachten wir noch die Beziehungen

$$b = \frac{m'a}{l'} - \frac{m'a_0 - l'b_0}{l'}\,, \quad c = \frac{n'a}{l'} - \frac{n'a_0 - l'c_0}{l'}\,,$$

so wird

$$\begin{aligned} &a^2 + 2a\big(l'(l'a_0 + m'b_0 + n'c_0) - a_0\big) \\ &= a_0^2 + 2a_0\big(l'(l'a_0 + m'b_0 + n'c_0) - a_0\big) - l'^2(\varkappa_0^2 - \varkappa^2) \end{aligned}$$

und indem

$$l'a_0 + m'b_0 + n'c_0 = \varkappa_0\cos(g', S_0)$$

ist, wird, da die gleichen Rechnungen für b und c gelten.

$$(237)\quad \begin{cases} \varkappa\alpha = \varkappa_0\alpha_0 - \varkappa_0 l'\cos(g', S_0) + l'\sqrt{\varkappa^2 - \varkappa_0^2\sin^2(g', S_0)}\,, \\ \varkappa\beta = \varkappa_0\beta_0 - \varkappa_0 m'\cos(g', S_0) + m'\sqrt{\varkappa^2 - \varkappa_0^2\sin^2(g', S_0)}\,, \\ \varkappa\gamma = \varkappa_0\gamma_0 - \varkappa_0 n'\cos(g', S_0) + n'\sqrt{\varkappa^2 - \varkappa_0^2\sin^2(g', S_0)}\,. \end{cases}$$

Daß die Wurzel mit dem positiven Zeichen genommen werden muß, folgt aus dem Grenzfall $\varkappa = \varkappa_0$; $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$.

Durch Multiplikation dieser Gleichungen mit α_0, β_0, γ_0 und l', m', n' und Addition erhält man

$$(238_1)\quad \varkappa\cos(S, S_0) = \varkappa_0\sin^2(g', S_0) + \cos(g', S_0)\sqrt{\varkappa^2 - \varkappa_0^2\sin^2(g', S_0)}\,,$$

$$(239_1)\quad \varkappa\cos(g', S) = \sqrt{\varkappa^2 - \varkappa_0^2\sin^2(g', S_0)}\,.$$

Durch die letzte Gleichung geht die erste über in

$$(238_2)\quad \varkappa\cos(S, S_0) = \varkappa_0\sin^2(g', S_0) + \varkappa\cos(g', S_0)\cos(g', S)\,.$$

Und da dieselbe letzte Gleichung auch gibt

$$(239_2)\quad \varkappa\sin(g', S) = \varkappa_0\sin(g', S_0)\,,$$

so folgt

$$(240_1)\quad \cos(S, S_0) = \cos\big((g', S) - (g', S_0)\big)\,,$$

und auch

$$(240_2)\quad \sin(S, S_0) = \sin\big((g', S) - (g', S_0)\big)\,.$$

Zur Bestimmung von s', also auch von c, hat man die obige Gleichung (239_1)

$$\varkappa^2\cos^2(g', S) = \varkappa^2 - \varkappa_0^2\sin^2(g', S_0)\,.$$

Nach Multiplikation mit g'^2 und Einsetzung der Werte für $\varkappa$, $\varkappa_0$ geht sie über in

$$(241)\quad \frac{(c_0 + 2s')^2}{(c_0 + s')^4}s'^2 = g'^2\left(\frac{(c_0 + 2s')^2}{(c_0 + s')^4} - \frac{(c_0 + 2s_0')^2}{(c_0 + s_0')^4}\sin^2(g', S_0)\right),$$

eine Gleichung vierten Grades.

Ist die Bewegungsgeschwindigkeit nicht erheblich gegen die Lichtgeschwindigkeit, so hat man bis auf Glieder von der Ordnung $(s/c_0)^3$

$$\varkappa = \frac{1}{c_0}\left[1 - \left(\frac{s'}{c_0}\right)^2\right], \quad \varkappa_0 = \frac{1}{c_0}\left[1 - \left(\frac{s_0'}{c_0}\right)^2\right]; \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa} = 1 - \left(\frac{s_0'^2 - s'^2}{c_0^2}\right).$$

Also geht die Gleichung (239_2) über in

$$(242_1)\quad \sin(g', S) - \sin(g', S_0) = \frac{s'^2 - s_0'^2}{c_0^2}\sin(g', S_0)\,.$$

Nun ist

$$\sin\big((g', S) - (g', S_0)\big) = \sin(g', S)\cos(g', S_0) - \cos(g', S)\sin(g', S_0)\,.$$

Andererseits haben wir aus (242_1)

$$\cos^2(g', S) = 1 - \sin^2(g', S_0)\left(1 + 2\frac{s'^2 - s_0'^2}{c_0^2}\right),$$

also

$$\cos(g', S) = \cos(g', S_0)\left(1 - \frac{s'^2 - s_0'^2}{c_0^2}\operatorname{tg}^2(g, S_0)\right)$$

und

$$\sin((g', S) - (g', S_0)) = \cos(g', S_0)\left[\sin(g', S_0) - \left(1 - \frac{s'^2 - s_0'^2}{c_0^2}\operatorname{tg}^2(g', S_0)\right)\sin(g', S_0)\right]$$

$$= \cos(g', S_0)\sin(g', S_0)\frac{s'^2 - s_0'^2}{c_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2(g', S_0)),$$

letzteres nach (242_1), also

$$(242_2) \qquad \sphericalangle(g', S) - \sphericalangle g', S_0 = \frac{s'^2 - s_0'^2}{c_0^2}\operatorname{tg}(g', S_0)$$

und nach Gleichung (240_2)

$$(243) \qquad \sphericalangle(S, S_0) = \frac{s'^2 - s_0'^2}{c_0^2}\operatorname{tg}(g', S_0).$$

Die Abweichung ist also in diesem Falle nur von der Ordnung $\left(\frac{s'}{c_0}\right)^2$. Darauf kommt es des Folgenden wegen an. Das Ergebnis gilt für geradlinige Bewegung, es steht zu vermuten, daß es auch auf krummlinige Bewegung Anwendung findet, doch ist es mir nicht gelungen, dafür einen Beweis zu finden.

Wir haben für g' ein Potential angenommen, daraus folgt nicht, daß auch g ein solches allgemein besitzen muß. Nennen wir nämlich p, q, r die Drehungskomponenten zu g, so ist

$$(244) \qquad 2p = \frac{\partial\frac{w'}{\varepsilon}}{\partial y} - \frac{\partial\frac{v'}{\varepsilon}}{\partial z}, \quad 2q = \frac{\partial\frac{u'}{\varepsilon}}{\partial z} - \frac{\partial\frac{w'}{\varepsilon}}{\partial x}, \quad 2r = \frac{\partial\frac{v'}{\varepsilon}}{\partial x} - \frac{\partial\frac{u'}{\varepsilon}}{\partial y},$$

also im Falle g' ein Potential Φ' besitzt

$$(245) \qquad \begin{cases} 2p = \dfrac{\partial\Phi'}{\partial z}\dfrac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial y} - \dfrac{\partial\Phi'}{\partial y}\dfrac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial z}, \quad 2q = \dfrac{\partial\Phi'}{\partial x}\dfrac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial z} - \dfrac{\partial\Phi'}{\partial z}\dfrac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial x}, \\ 2r = \dfrac{\partial\Phi'}{\partial y}\dfrac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial x} - \dfrac{\partial\Phi'}{\partial x}\dfrac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial y}. \end{cases}$$

Hiernach gibt die Multiplikation dieser Gleichungen mit $\frac{\partial\Phi'}{\partial x}, \frac{\partial\Phi'}{\partial y}, \frac{\partial\Phi'}{\partial z}$; $\frac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial x}, \frac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial y}, \frac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial z}$; p, q, r und jeweilige Addition

$$(246) \qquad p\frac{\partial\Phi'}{\partial x} + q\frac{\partial\Phi'}{\partial y} + r\frac{\partial\Phi'}{\partial z} = 0,$$

$$(247) \qquad p\frac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial x} + q\frac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial y} + r\frac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial z} = 0, \quad \text{d. h.} \quad p\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + q\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + r\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} = 0,$$

$$(248) \qquad p^2 + q^2 + r^2 = D^2 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} p & q & r \\ \dfrac{\partial\Phi'}{\partial x} & \dfrac{\partial\Phi'}{\partial y} & \dfrac{\partial\Phi'}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial x} & \dfrac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial y} & \dfrac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\varepsilon^2}\begin{vmatrix} p & q & r \\ \dfrac{\partial\Phi'}{\partial x} & \dfrac{\partial\Phi'}{\partial y} & \dfrac{\partial\Phi'}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x} & \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y} & \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Wenn umgekehrt die Bewegung g ein Potential Φ besitzt, rotationslos erfolgt, werden

$$
(245') \quad \begin{cases} 2p' = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y} - \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z}, \quad 2q' = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z} - \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x}, \\ 2r' = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y}, \end{cases}
$$

woraus entsprechend folgt

$$
(246') \qquad p'\frac{\partial\Phi}{\partial x} + q'\frac{\partial\Phi}{\partial y} + r'\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0,
$$

$$
(247') \qquad p'\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + q'\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + r'\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} = 0,
$$

$$
(248') \qquad p'^2 + q'^2 + r'^2 = D'^2 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x} & \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y} & \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z} \end{vmatrix}.
$$

Vernachlässigt man die Größe $\dfrac{d\varkappa}{dS}$, so ist nach (232_3)

$$
\frac{1}{R}(p'\varphi + q'\psi + r'\chi) = 0,
$$

wo φ, ψ, χ die Richtungskosinus des Strahlenradius bedeutet. Somit haben wir, indem die Werte von p', q', r' nach (245′) eingesetzt werden,

$$
(249') \qquad \frac{1}{R}\begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x} & \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y} & \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.
$$

Ist der Strahl nicht gerade, so muß die Determinante Null sein, und dann muß es drei Größen L, M, N geben, so geartet, daß

$$
(249) \quad \begin{cases} L\varphi + M\psi + N\chi = 0, \\ L\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + M\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + N\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad L\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x} + M\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y} + N\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z} = 0 \end{cases}
$$

ist. Die zweite und dritte dieser Gleichungen aber entsprechen den Gleichungen unter (246′), (247′), somit müssen L, M, N bis auf einen gleichen Faktor p', q', r' gleich sein, und damit ist dann auch die erste Gleichung unter (247) erfüllt.

Übrigens folgt, daß im ersten Falle die Drehungsachse zu g senkrecht ist zur Bewegungsrichtung zu g', im zweiten Falle die Drehungsache zu g' senkrecht ist zur Bewegungsrichtung zu g. Führt man eine Richtung σ ein, deren Winkelkosinus proportional sind $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x}, \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y}, \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z}$, so stehen die betreffenden Achsen senkrecht zu der Ebene $\overline{g', \sigma}$ oder $\overline{g, \sigma}$. Da allgemein die Drehungsachse zu g' senkrecht steht zu R, so windet sich im zweiten Fall der Strahl so, daß sein

Krümmungsradius immer in die Ebene $\overline{g, \sigma}$ fällt, oder, wenn wir die Richtung σ fortlassen, daß die Drehungsachse zu g' senkrecht steht zur Ebene $\overline{R, g}$.

Sollen g, g' gleichzeitig rotationslos sein, so müssen wir $\varepsilon =$ Konst. haben, was ja näherungsweise unter den gemachten Annahmen immer zutrifft. Oder es müßte

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \frac{\partial \Phi'}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right) = 0\,,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{\partial \Phi'}{\partial z}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) = 0\,,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial \Phi'}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right) = 0\,,$$

also $\sin(g, \sigma) = \sin(g', \sigma) = 0$ sein, da g' die gleiche Richtung hat wie g, müßte die Richtung von σ mit der von g oder g' zusammenfallen oder ihnen entgegenlaufen.

Um die Gleichungen des Strahles zu bilden, nehmen wir x als unabhängige Variabele. Alsdann ist in den Formeln unter (230), wenn π eine der Größen x, y, z bedeutet,

$$d\left(\frac{d\pi}{dS}\right) = \frac{d^2\pi}{dS} - d\pi\frac{d^2S}{dS^2} = \frac{d^2\pi}{dS} - \frac{d\pi}{dS^2}\, d\left(dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right),$$

d. h.

$$d\left(\frac{d\pi}{dS}\right) = \frac{d^2\pi\, dS^2 - d\pi(d^2y\, dy + d^2z\, dz)}{dS^3}\,.$$

Hiernach werden die Gleichungen des Strahles, wenn

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dz}{dx} = z'$$

gesetzt wird, unter Vernachlässigung der Änderungen von $\varkappa$ und μ nach (230_2)

$$(250_1)\quad \begin{cases} \dfrac{y'\left(y'\dfrac{dy'}{dx} + z'\dfrac{dz'}{dx}\right) - (1 + y'^2 + z'^2)\dfrac{dy'}{dx}}{\left(y'\dfrac{dy'}{dx} + z'\dfrac{dz'}{dx}\right)} = +\dfrac{p'z' - r'}{r'y' - q'z'}\,, \\[2ex] \dfrac{z'\left(y'\dfrac{dy'}{dx} + z'\dfrac{dz'}{dx}\right) - (1 + y'^2 + z'^2)\dfrac{dz'}{dx}}{y'\dfrac{dy'}{dx} + z'\dfrac{dz'}{dx}} = -\dfrac{p'y' - q'}{r'y' - q'z'} \end{cases}$$

oder

$$(250_2)\quad \begin{cases} \left[z'\left(y'\dfrac{dz'}{dx} - z'\dfrac{dy'}{dx}\right) - \dfrac{dy'}{dx}\right](r'y' - q'z') = \left(y'\dfrac{dy'}{dx} + z'\dfrac{dz'}{dx}\right)(p'z' - r')\,, \\[2ex] \left[y'\left(z'\dfrac{dy'}{dx} - y'\dfrac{dz'}{dx}\right) - \dfrac{dz'}{dx}\right](r'y' - q'z') = \left(y'\dfrac{dy'}{dx} + z'\dfrac{dz'}{dx}\right)(q' - p'y')\,. \end{cases}$$

Dabei ist zu beachten, daß wegen $u' = \varepsilon u$, $v' = \varepsilon v$, $w' = \varepsilon w$ die Größen p', q' r' selbst noch von y', z' und den Differentialquotienten dieser Größen abhängen. Man wird darum die Gleichungen kaum anders behandeln können als in sukzessiven Näherungen.

k) Vergleichung mit anderen Theorien und Zusammenfassung.

Offenbar handelt es sich in der ganzen Untersuchung, abgesehen von den einzelnen Bestimmungsgrößen der Wellen, auch um Aberrationserscheinungen. Hier bieten sich zunächst die Formeln (223) (S. 96f.) und namentlich (227) (S. 97) dar. Sie stimmen mit den von Stokes ohne Rücksichtnahme auf das Minimumprinzip aus ganz anderen Erwägungen abgeleiteten Formeln (4_5) (S. 21) im wesentlichen überein.

Denn mit ausreichender Genauigkeit können wir für schwache Bewegungen, wie Stokes sie annimmt, $\varkappa = \varkappa_0 = \frac{1}{c_0}$, $\mu = \mu_0 = \frac{1}{c_0^2}$ und u', v', w' durch u, v, w ersetzen. Diese unsere Formeln nun haben die Existenz eines Potentials nicht zur Voraussetzung, was wegen des Einwandes von H. A. Lorentz (S. 21) von Wichtigkeit ist. Es stünde also nichts im Wege anzunehmen, daß an der Erdoberfläche u', v', w' mit den Bewegungskomponenten der Erde ganz oder sehr nahe übereinstimmen. Freilich setzt man in der Hydrodynamik voraus, daß die Bewegung, die ein in einer inkompressiblen, reibungslosen Flüssigkeit sich bewegender Körper in dieser Flüssigkeit hervorbringt, ein Potential besitzt. Nichts aber zwingt diese Bewegung als die einzig mögliche im Äther anzusehen; es können Bewegungen im Äther vorhanden sein, die nicht bloß durch die Bewegung des betreffenden Himmelskörpers verursacht sind. Und wenn man auch die Reibungslosigkeit fallen läßt, d. h. die Einflußlosigkeit des Äthers in den Körpern auf den Äther außerhalb der Körper, so bietet es auch dem Verständnis keine Schwierigkeit, anzunehmen, daß von den Körpern, eben durch den Einfluß ihres Äthers auf den äußeren Äther, die Bewegung dieses Äthers der des Himmelskörpers bis zu einem gewissen Grade oder ganz angepaßt wird. Die Aberration wäre nach (227) bis auf Größen zweiter Ordnung $\sphericalangle (S, S_0) = \frac{g'}{c^0}$ und die Verbreitungsgeschwindigkeit $c_0 + s_0' - \frac{g'^2}{2c_0}$.

Indessen hätte die Bewegung g' den Gleichungen (218) (S. 94) zu genügen. Besitzt sie ein Potential Φ', so könnte es nach diesen Gleichungen, welche dann $d\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) = d\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) = d\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right) = 0$ ergeben, nur eine lineare Funktion von x, y, z sein, so daß u', v', w' Konstanten darstellten. Alsdann fände eine Aberration aus der Ätherbewegung nicht statt. Gleichwohl ist das wichtig, wie bald zu bemerken. Daß aber andere Bewegungen vorhanden sind, welche den bezeichneten Bedingungen genügen können, ist zweifellos. Setzen wir z. B. jede der Komponenten gleich einer Funktion zweiten Grades von x, y, z mit U', V', W' als Koeffizienten, etwa

$$u' = U_0' + U_1' x + U_2' y + U_3' z + U_{11}' x^2 + U_{22}' y^2 + U_{33}' z^2 \\ + 2U_{12}' xy + 2U_{23}' yz + 2U_{31}' zx$$

und entsprechend v', w', so gibt die Determinante (219) (S. 95), die Null sein soll, 20 Bedingungen zwischen den 27 Koeffizienten $U_1' \ldots$, $V_1' \ldots$, $W_1' \ldots$ Es bleiben also noch insgesamt 10 Koeffizienten willkürlich, und die Gleichungen (218) (S. 94) stellen die Bahn fest mit 12 willkürlichen Koeffizienten. Selbst lineare Funktionen können genügen. So im obigen Falle mit der einen Bedingung

$$\begin{vmatrix} U_1' & V_1' & W_1' \\ U_2' & V_2' & W_2' \\ U_3' & V_3' & W_3' \end{vmatrix} = 0.$$

Ferner genügen auch Bewegungen von der Form $u' = f_1(r)$, $v' = f_2(r)$, $w' = f_3(r)$; wo r den Abstand von irgendeinem Zentrum bedeutet, weil dann die Determinante identisch erfüllt wird. Auch Bewegungen, die nicht von x, y, z selbst, sondern von einer linearen Funktion dieser Koordinaten abhängen, können hierher gehören; auch hier ist die Determinante identisch erfüllt. Allgemein auch, wenn u', v', w' überhaupt nur von einem Argument abhängen, welche Funktion von x, y, z auch dieses Argument sein mag. Also an zulässigen Bewegungen fehlt es hier nicht, und das ist von Bedeutung angesichts des Umstandes, daß wir von den Bewegungen des Äthers gar nichts wissen, also doch irgendwelche Annahmen machen müssen. Und bis jetzt beruht ja jede Aberrationstheorie auf Annahmen.

Den Formeln (30) (S. 28) der zweiten Theorie von Stokes entsprechen die Gleichungen (233_1), welche nach unserer Theorie für schwache Bewegungen allgemein gelten, und sie gehen in jene über, wenn man s' gegen c_0 fortläßt und das Achsensystem so wählt, daß $r' = 0$ ist. Hat nun die Bewegung ein Potential, so werden $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, d. h. die neue Richtung ist geradlinig. In einem Zusatz[1]) hat Stokes darauf großen Wert gelegt, denn nunmehr könne man ja die phoronomische Erklärung der Aberration durch die Bewegung der Erde allein wieder aufnehmen, auch wenn der Äther sich bewegt. Das ist sicher richtig. Da unsere Theorie genau das gleiche für die Wellennormale gibt, so trifft auf sie dieselbe Schlußweise zu, und es würde also folgen, daß trotz Bewegung des Äthers Aberration nach Art der beobachteten vorhanden sein kann, nämlich allein infolge der Erdbewegung, indem trotz der Bewegung des Äthers, wenn diese nur ein Potential hat, die Wellenebene sich in gerader Linie verbreitet. Man braucht also die von Stokes eingeführte neue Richtung nicht. Freilich treten im Falle eines Potentials an Stelle der Gleichungen (233_1) die strengeren Formeln (236). Allein auch von diesen ist gezeigt, daß mindestens für den Fall ganz geradliniger oder nur schwach gekrümmter Bewegung die kinetische Aberration höchstens von der Ordnung $(s/c_0)^2$ ist, während die beobachtete phoronomische Aberration die Ordnung g/c_0 besitzt. Jene kann also den Beobachtungen gegenüber völlig außer acht gelassen werden, so daß der Strahl als gerade anzusehen wäre.

Zusammenfassend können wir sagen, daß unsere Theorie entweder die Aberration aus Bewegungen des Äthers erklärt, wenn diese den Bedingungen (218) genügen und der Äther an der Erde ganz oder fast ganz deren Bewegung sich anschließt. Oder daß sie trotz etwaiger Bewegung des Äthers die gewöhnliche Aberrationserklärung, allein durch die Bewegung der Erde, zuläßt. Letzteres sobald die Ätherbewegung ein Potential hat oder der Strahl Achse ihrer Rotation ist. Und in allen Fällen bezieht sich die Aberration auf die Wellennormale. Im ganzen also steht diese Theorie auf dem Standpunkt von Stokes, nur daß sie die von H. A. Lorentz aufgedeckten Widersprüche in den Annahmen nicht enthält und sich nicht auf die Verbreitung von Wellenstücken bezieht. Stokes gab beide Theorien nebeneinander. Die erste Theorie betrifft eine absolute Aberration, wie sie z. B. an einem Diopter zu beobachten wäre. Die zweite ist anscheinend den Beobachtungen mit einem Fernrohr angepaßt; es ist eine relative Aberration; das Wellenstück wäre der durch die Öffnung des Fernrohrs dringende oder von dem Spiegel reflektierte Teil der Welle. Dieser Teil streift über eine Kegelfläche und zieht sich am Fadenkreuz zum Bild zusammen. Leider hat Stokes seine zweite Theorie gar zu knapp dargestellt, mehr als einen Einfall. Bei Annahme der Wellennormale scheint alles klar. Auch H. A. Lorentz (S. 31) benutzt zur Erklärung der Aberration nicht den Gang der Wellennormale selbst, sondern den der „relativen Strahlen". Mathematisch

[1]) Math. and Phys. Pap. 1, 38.

gesprochen, sind diese Strahlen (S. 31) die Resultante der ungestörten Verbreitung der Wellen von der vertragenen Stelle aus und der Bewegung des Äthers.

Was die Vergleichung mit der H. A. Lorentzschen Theorie anbetrifft, so bietet diese allgemeine Untersuchung in sehr wesentlichen Punkten eine Unterstützung dieser Theorie. Annahmen, die in ihr gemacht sind, haben sich aus dieser Untersuchung als Folgerungen der Theorie ergeben, Formeln, die nur näherungsweise gelten sollten, konnten als genau erwiesen werden. Auch stimmen die von H. A. Lorentz für die „relativen Strahlen" aufgestellten Formeln mit den aus unserer Theorie abgeleiteten überein (S. 40).

Ferner zeigt sich, daß nach unserer Theorie bei Annahme der Existenz eines Potentials der Ätherbewegung, allein aus der physischen Krümmung der Strahlen, eine Aberration von der zweiten Ordnung folgt, so daß die Strahlen in diesem Falle wie gerade angesehen werden können, was ja H. A. Lorentz von seinen relativen Strahlen ebenfalls behauptet. Gleichwohl bestehen sehr fundamentale Unterschiede. Namentlich läßt sich die von H. A. Lorentz angenommene Variabilität allein der Schwingungsdauer nach unserer Theorie nicht aufrecht erhalten. Im Gegensatz dazu erweist sich die Wellenlänge als das variabele Element, das bei H. A. Lorentz gerade konstant sein sollte.

Die Fresnel-Fizeausche Erscheinung läßt sich aus der klassischen Undulationstheorie allein, ohne molekulartheoretische Betrachtungen, nicht ableiten. In der Tat ist in der ganzen Theorie nichts über die Herkunft der vorausgesetzten Bewegungen des Äthers gesagt; es sind diese Bewegungen als vorhanden angenommen und es ist nur ihre Wirkung auf die Lichtverbreitung untersucht, wenn sie eben bestehen. Wir bedürften darum noch einer Theorie, welche diese Bewegungen aus Bewegungen von Körpern im Äther und von Körpern mit dem Äther ableitet. Für den ersten Fall könnte man sich der schon dargelegten (S. 22 ff.) Entwickelungen der Hydrodynamik bedienen; daß und worin diese nicht ausreichen, haben wir gesehen. Für den zweiten Fall aber sind wir nicht einmal in der Lage einen Weg anzugeben, auf dem wir eine Theorie durchzubilden hätten, die von selbst auch quantitativ — und das ist ja das Wesentliche — zu den Ergebnissen der Fresnel-Fizeauschen Erscheinung zu führen vermöchte, weil wir fast nichts von dem Verhältnisse zwischen Äther und Materie wissen. Wir befinden uns hier in einer fast noch übleren Lage als in der Dispersionslehre. Freilich sind Versuche zur Klärung der Verhältnisse gemacht worden. Den Versuch von Fresnel habe ich schon erwähnt (S. 13), der sich mit Franz Neumanns Anschauungen von den Eigenheiten des Äthers in keiner Weise vereinigen läßt und auch sonst zu sehr erheblichen Schwierigkeiten führt. W. Voigt[1]) hat sodann in einer eingehenden Untersuchung, in der er auch diese Schwierigkeiten würdigt, die Eigentümlichkeit der Lichtverbreitung in bewegten Stoffen durch die Annahme einer besonderen Wirkung zwischen Äther und ponderabler Substanz abzuleiten versucht. Er kommt nach ziemlich schwierigen und nicht recht zu übersehenden Betrachtungen für isotrope, nicht absorbierende Stoffe, zu folgenden Differentialgleichungen für die Lichtschwingungen

$$M\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A\Delta\xi - A'\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial t},$$

$$M\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = A\Delta\eta - A'\frac{\partial^2 \eta}{\partial y\,\partial t},$$

$$M\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = A\Delta\zeta - A'\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z\,\partial t}.$$

[1]) Ann. d. Phys. **35**, 370, 524 (1888).

Wenn wir in unseren Gleichungen S. 37 die u, v, w als irgendwelche Faktoren ansehen, stellen sie allgemeinere Fälle dieser Voigtschen Gleichungen dar, da Voigt für die Größe A' aus seiner Theorie soviel nur ableitet, daß sie mit der Translationsgeschwindigkeit des Stoffes verschwinden muß, im übrigen aber sie erst aus der Fresnel-Fizeauschen Erscheinung bestimmt. Setzen wir hiernach mit Voigt

$$c = c_0 + \varkappa s,$$

wo $\varkappa$ den Fresnelschen Faktor bedeutet, so kommt nur noch zum Vorschein, daß, wenn M der Dichte des freien Äthers gleich ist, man nach Voigt haben würde

$$\varkappa = \frac{A_0 - A}{A_0},$$

wo $A_0 - A$ die Bedeutung eines Maßes der Einwirkung zwischen Materie und Äther im ruhenden Medium, A_0 die einer inneren Kraft des Äthers haben würde. Die Untersuchung Voigts ist höchst bedeutungsvoll, zumal sie auch auf absorbierende und kristallinische Substanzen ausgedehnt ist. Aber aus dem angegebenen Grunde muß ich auf ihre Darlegung verzichten. Sie führt nicht aus sich heraus zur Lösung der uns beschäftigenden Aufgabe. Wie übrigens in unserer Theorie die Lichtverbreitung in dispegierenden oder absorbierenden oder in kristallinischen Substanzen zu behandeln sein würde, ist klar. Die linken Seiten der Gleichungen (1) (S. 35) bleiben immer ungeändert, und auf den rechten Seiten sind die üblichen Ansätze einzutragen. Auch darauf einzugehen, hat noch keinen Wert.

5. Versuch von Michelson.

Alle voraufgehenden Betrachtungen haben zum Ziele, nachzuweisen, daß wenn der Äther sich bewegt, man aus dieser Bewegung die Gesetze der Erscheinungen, mit denen wir es bis jetzt zu tun gehabt haben, abzuleiten vermag, falls diese Bewegung an der Erde sich der Bewegung der Erde selbst anschließt, und daß, wenn letzteres nicht stattfindet, man jedenfalls für den Äther Bewegungen in reicher Zahl anzugeben vermag, welche die Gesetze jener Erscheinungen, falls sie aus anderen Betrachtungen fließen sollten, z. B. aus den älteren phoronomischen, nicht merklich abändern. Aus ihnen ist also eine Entscheidung darüber, ob der Äther sich bewegt oder in Ruhe verharrt, nicht zu entnehmen. Nun hat Michelson geglaubt, diese Entscheidung durch einen Versuch herbeiführen zu können. Zum leichteren Verständnis schicken wir folgendes voraus.

Alle Vorgänge der Natur spielen sich in Raum und Zeit ab. Wenn wir nun Messungen ausführen wollen, müssen wir Ausgangsstellen haben, von denen wir fordern werden, daß sie keiner Änderung unterliegen. Schon für Raummessungen steht uns kein Fixpunkt zur Verfügung, von dem aus wir alle Messungen ausführen könnten. Nur der Schwerpunkt des Weltalls käme als solcher in Betracht, falls die Gesamtheit der Körper sich nicht durch den Raum bewegt, was aber nicht zu entscheiden ist. Raummessungen auf der Erde sind anscheinend ausführbar, denn abgesehen von den sehr geringfügigen relativen Verschiebungen auf ihr durch ungleiche Erwärmung, Ebbe und Flut usf., bewegt sich die Erde wie ein starres Gebilde durch das Weltall und um ihre Achse. In der Regel reicht auch solche Messung aus für manche Vorgänge, nämlich für alle, deren Träger sich mit der Erde wie sie selbst bewegen. Für Vorgänge aber, deren Träger der Erde gar nicht oder nur teilweise folgen, kann auch diese Messung nicht in Frage kommen.

Setzen wir für den Träger der Lichtvorgänge, den Äther, voraus, daß er sich mit der Erde und genau wie diese bewegt, so sollten alle optischen Erscheinungen auf der Erde sich genau so abspielen, als wenn alles, Erde und Äther, ruhte; mit anderen Worten, es sollte gleich sein, nach welchen Richtungen die Erscheinungen orientiert sind, ganz wie wir es von den akustischen Erscheinungen kennen, deren Träger, Luft, Körper usf., sich jedenfalls mit der Erde und wie diese bewegen.

Anders verhält es sich, wenn der Träger der Lichterscheinungen, der Äther, sich nicht ganz, oder überhaupt nicht mit der Erde bewegen sollte. Wir betrachten den Fall, daß der Äther vollständig ruhen sollte, indes die Erde sich bewegt. Welchen Weg hat dann z. B. ein Lichtblitz von einem Ausgangspunkt auf der Erde zu einem Ankunftspunkt tatsächlich zurückgelegt? Liegt der Ankunftspunkt im Verhältnis zum Ausgangspunkt in Richtung der Erdbewegung, so hat er sich während der Zeit, die der Lichtblitz braucht, ihn zu erreichen, mit der Erde fortbewegt, also muß der Lichtblitz tatsächlich eine längere Strecke durchziehen als auf der Erde von Ausgangspunkt zu Ankunftspunkt gemessen ist. Die Strecke muß wachsen mit der Geschwindigkeit der Erde. Bewegte sich die Erde gar mit Lichtgeschwindigkeit, so könnte der Lichtblitz die Ankunftsstelle überhaupt nicht erreichen, da diese in demselben Maß von ihm wiche, wie er auf sie zueilt; die tatsächliche Strecke des Lichtblitzes wäre hier unendlich groß. Kehren wir die Lage der beiden Punkte um, so kommt jetzt der Ankunftspunkt durch die Bewegung mit der Erde dem Lichtblitz entgegen. Also ist nunmehr die tatsächlich vom Lichtblitz vom Ankunftspunkt zum Ausgangspunkt durchlaufene Strecke kürzer als die zwischen den beiden Punkten gemessene, und würde auf Null sinken, wenn die Erde sich mit der Lichtgeschwindigkeit bewegte. Man sieht hieraus, daß man auch durch Messungen der Strecken auf der Erde den Lichtweg nicht sollte bestimmen können; je nach der Lage des Ankunftsortes, ob in bezug auf die Bewegungsrichtung der Erde vor dem Ausgangsorte oder hinter ihm, müßte man zu große oder zu geringe Wege erhalten, und im ideellen Falle, einer Bewegungsgeschwindigkeit der Erde gleich der Lichtgeschwindigkeit, würde sich der Lichtweg zu Unendlich oder Null ergeben. Genau die gleiche Betrachtung gälte für den Weg, den irgendeine sich ausbreitende Erscheinung zurücklegt, ihr Ziel wiche von ihr oder käme ihr entgegen infolge der Bewegung der Erde, wenn die Träger dieser Erscheinung ruhten oder sich anders bewegten als die Erde. Die optischen und elektromagnetischen Änderungen aber haben den Äther zum Träger, und man sollte darum aus optischen oder elektromagnetischen Erscheinungen entscheiden können, ob der Äther sich bewegt und wie er sich im Verhältnis zur Erde bewegt, oder ob er ganz ruht. Michelsons[1]) Versuch bezieht sich auf eine optische Erscheinung. Versuche hinsichtlich elektromagnetischer Erscheinungen werden wir später kennen lernen.

Wenn zwei von derselben Lichtquelle ausgehende gleichgefärbte Strahlen nach optisch verschieden langen Wegen zusammentreffen, so interferieren sie am Orte der Vereinigung in einer Weise, die von den näheren Umständen des Versuches bestimmt wird. Ist das Medium, innerhalb dessen die Strahlen sich verbreiten, der Äther, in derselben Weise bewegt wie die Umgebung und der ganze Apparat, so hat es, wie bemerkt, keinen Einfluß, wie die Strahlen im übrigen im Raum orientiert sind, die Interferenzerscheinung ändert also weder Form noch Lage zum Apparat, wenn man diesen dreht, vorausgesetzt, daß alle Teile der Einrichtung und der Erscheinung relativ zueinander genau die gleiche

[1]) Am. Journ. of Science **22**, 120 (1881); **24**, 333 (1887).

Lage behalten. Wenn jedoch der Äther ganz oder teilweise mit Bezug auf den Ort, an dem der Versuch ausgeführt wird, ruht, während der Ort selbst mit dem Apparat sich bewegt, so muß ein Einfluß der Bewegung auf die Lage der Interferenzerscheinung sofort hervortreten, sobald man den Apparat dreht.

Michelson sagt[1]): „Das Problem wurde praktisch in der Weise gelöst, daß man einen Teil des Lichtes eine Anzahl Male hin und her reflektieren und dann zu seinem Ausgangspunkt zurückkehren ließ. Der andere Weg verlief senkrecht zu dem ersten und auf ihm machte das Licht eine ähnliche Reihe von Hin- und Hergängen und wurde gleichfalls zum Ausgangspunkte zurückreflektiert." Die bei diesem Versuch entscheidenden näheren Umstände haben Kohl[2]), Laue[3]), Grünbaum[4]) u. a. untersucht. Schematisch stellen sie sich wie folgt dar.

Von einer Lichtquelle L (Fig. 7) mögen eine Reihe paralleler gleichgefärbter Strahlen ausgehen. Fallen sie auf eine zu ihnen geneigte planparallele Glasplatte P, so wird jeder von ihnen zum Teil reflektiert, zum Teil durchgelassen, so daß wir nunmehr zwei zueinander geneigte Strahlenbüschel A_1, A_2 haben. Im Wege jedes dieser Strahlenbüschel und geneigt zu ihnen stehen Spiegel S_1, S_2, die sie zurückwerfen. Gelangen die so zurückgeworfenen Büschel A_1', A_2' zurück zur Platte P, so gehen sie wieder zum Teil durch, zum Teil werden sie reflektiert, jedenfalls aber kommt der vom Büschel A_1 nach der Reflexion von S_1 durch P durchgehende Teil A_1'' mit dem vom Büschel A_2 nach Reflexion von S_2 an P reflektierte Teil A_2'' im Raume B zusammen und soll mit ihm in diesem Raume interferieren. Wenn die Lage von P, S_1, S_2 bekannt ist, läßt sich die Interferenzerscheinung vollständig berechnen. Nun steht der ganze Apparat auf der Erde und bewegt sich also mit dieser. Ruht, wie Fresnel will, der Äther mit Bezug auf diese Bewegung, so sind, wie wir gesehen haben, die Längen der Strahlen in ihm andere, als wenn er sich mit der Erde und in gleicher Weise wie sie bewegte, und diese Längen hängen dann ganz ab von der Richtung der Strahlen in bezug auf die Richtung der Bewegung. Dreht man den Apparat, ohne sonst etwas an ihm zu ändern, so ändern gleichwohl die Strahlen ihre Längen, und so muß die Interferenzerscheinung in B sich gleichfalls ändern.

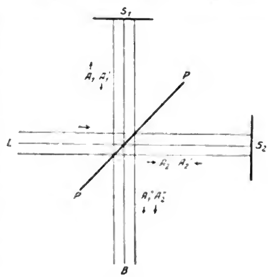

Fig. 7.

In dem Versuche von Michelson sollte die Platte P um 45° geneigt zu den ankommenden Strahlen stehen und sollten die Spiegel S_1, S_2 senkrecht zu den reflektierten Strahlen A_1', A_2' sein. Dann fallen die Büschel A_1, A_1' einerseits, A_2, A_2' andererseits, bis auf den Gegensatz der Richtungen, zusammen und ebenso die Büschel A_1'', A_2'', diese auch in der Richtung. Ferner sollten die Spiegel S_1, S_2 gleichweit von der Platte P abstehen, so daß sie in der Platte P Spiegelbilder voneinander waren. Wir kommen dann schematisch zu der Fig. 7. Hat Michelson die Absicht in der Einrichtung seines Apparates vollständig

[1]) Lichtwellen und ihre Anwendung S. 165 (1911). Ich verweise auf diese populäre Schrift, weil sie die Literatur des Gegenstandes von 1880 bis 1910 enthält.

[2]) Ann. d. Phys. **28**, 259 (1909).

[3]) Ann. d. Phys. **33**, 186 (1910).

[4]) Verh. d. physik. Ges. S. 584 (1911).

erreicht, so konnten Interferenzen im Raum B nur entstehen, weil die Erde sich bewegt, falls wir die Interferenzerscheinungen aus der Platte P selbst außer acht lassen, da sonst die in B zusammenlaufenden Strahlen gleich lang sind.

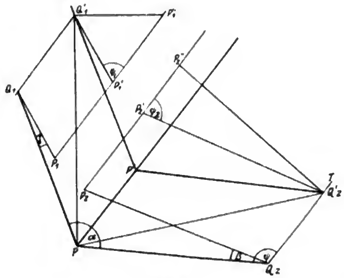

Fig. 8.

Von der Bewegung der Erde berücksichtigen wir nur die für die Dauer der Versuche als gleichförmig anzusehende Bewegung um die Sonne und mit der Sonne im Raume. Es seien drei Punkte, P, Q_1, Q_2, in Fig. 8 miteinander fest verbunden, die Verbindungslinien von Q_1 und von Q_2 nach P mögen in P den Winkel α einschließen. Die Bewegung des Systems der drei Punkte in ihrer Ebene erfolge nach der Richtung Q_2T und bilde mit Q_2P den Winkel ψ in Q_2. Wir lassen von P einen Lichtblitz sowohl nach Q_1 als nach Q_2 gehen. Besteht dieser Blitz nur aus einem Strahl, so kann Q_2 ihn nicht empfangen, weil während der Dauer, die der Lichtblitz braucht, den Weg PQ_2 zu durchlaufen, Q_2 sich bereits in Richtung Q_2T fortbewegt hat. Also muß P mehrere Strahlen, einen Strahlenkegel ausgehen lassen, damit Q_2 einen dieser Strahlen auf seiner Bahn trifft. Ist PQ_2' dieser Strahl, so haben wir

$$PQ_2'^2 = PQ_2^2 + Q_2Q_2'^2 - 2\,PQ_2 \cdot Q_2Q_2' \cos\psi\,, \tag{1}$$

$$Q_2Q_2' = PQ_2' \frac{v}{c}\,, \tag{1'}$$

woselbst c die Lichtgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit des Systems bedeuten soll. Danach wird

$$PQ_2' = PQ_2\left(-\frac{cv}{c^2 - v^2}\cos\psi + \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2} + \frac{c^2 v^2}{(c^2 - v^2)^2}\cos^2\psi}\right), \tag{2}$$

und weil $\sphericalangle PQ_1Q_1' = 360 - (\alpha + \psi)$ ist, entsprechend

$$PQ_1' = PQ_1\left(-\frac{cv}{c^2 - v^2}\cos(\psi + \alpha) + \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2} + \frac{c^2 v^2}{(c^2 - v^2)^2}\cos^2(\psi + \alpha)}\right). \tag{3}$$

Nun soll noch von den Punkten Q in dem Moment, in dem sie das Signal empfangen, zurücksignalisiert werden; der Allgemeinheit wegen jedoch nicht nach P, sondern von Q_1 nach P_1, von Q_2 nach P_2. Da diese Punkte P_1, P_2 sich während des Signalisierens von P nach Q_1, Q_2 zu P_1', P_2' schon fortbewegt haben, und während des Signalisierens von Q_1', Q_2' aus nach ihnen in der Lage P_1', P_2' sich noch weiter bewegen, haben wir, wenn die Signale sie aus den Lagen P_1'', P_2'' erreichen, wie aus Fig. 8 zu entnehmen ist,

$$Q_2'P_2'' = Q_2P_2\left(+\frac{cv}{c^2 - v^2}\cos(\psi - \beta) + \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2} + \frac{c^2 v^2}{(c^2 - v^2)^2}\cos^2(\psi - \beta)}\right), \tag{4}$$

$$Q_1'P_1'' = Q_1P_1\left(+\frac{cv}{c^2 - v^2}\cos(\psi + \alpha + \gamma) + \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2} + \frac{c^2 v^2}{(c^2 - v^2)^2}\cos^2(\psi + \alpha + \gamma)}\right). \tag{5}$$

Fallen P_1, P_2 mit P zusammen, so daß $\beta = \gamma = 0°$ ist, so haben wir

$$(6)\quad Q_2'P_2'' = Q_2P\left(+\frac{cv}{c^2-v^2}\cos\psi + \sqrt{\frac{c^2}{c^2-v^2} + \frac{c^2v^2}{(c^2-v^2)^2}\cos^2\psi}\right),$$

$$(7)\quad Q_1'P_1'' = Q_1P\left(+\frac{cv}{c^2-v^2}\cos(\psi+\alpha) + \sqrt{\frac{c^2}{c^2-v^2} + \frac{c^2v^2}{(c^2-v^2)^2}\cos^2(\psi+\alpha)}\right).$$

Für die Summe der Hin- und Rückwege bekommen wir in diesem Falle

$$(8)\qquad PQ_2' + Q_2'P'' = 2\,PQ_2\sqrt{\frac{c^2}{c^2-v^2} + \frac{c^2v^2}{(c^2-v^2)^2}\cos^2\psi},$$

$$(9)\qquad PQ_1' + Q_1'P'' = 2\,PQ_1\sqrt{\frac{c^2}{c^2-v^2} + \frac{c^2v^2}{(c^2-v^2)^2}\cos^2(\psi+\alpha)}\,.$$

Wir verstehen nunmehr unter P einen Punkt der Platte P, die wir als unendlich dünn ansehen dürfen, wenn bei der Michelsonschen Einrichtung die zusammengehörigen Strahlen in der Platte denselben Weg zurücklegen, und unter Q_1, Q_2 die Treffpunkte zusammengehöriger Strahlen mit den Spiegeln S_1, S_2. α bedeutet den Winkel zusammengehöriger Strahlen an der Platte P, in diesem Falle also 90°. Ist ferner der Apparat so orientiert, daß die Richtung der Strahlen PQ_2 auf dem Wege von P nach Q_2 in der Richtung der Erdbewegung fällt, so haben wir $\psi = 180°$, also nach (2)

$$(10)\qquad PQ_2' = PQ_2\left(\frac{cv}{c^2-v^2} + \frac{c^2}{c^2-v^2}\right) = \frac{c}{c-v}\,PQ_2\,.$$

Da für den Rückweg von Q_2' nach P zufolge (6) sein muß

$$(11)\qquad Q_2'P'' = \frac{c}{c+v}\,Q_2P\,,$$

so wird, wenn PQ_2 als absoluter Wert gerechnet wird,

$$(12)\qquad PQ_2' + Q_2'P'' = 2\,\frac{c^2}{c^2-v^2}\,PQ_2 = 2\,\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,PQ_2\,,$$

wie auch aus der Formel (8) unmittelbar folgt.

Entsprechend wird, wenn die Spiegel senkrecht zueinander stehen, wegen $\alpha = 90°$, $\alpha + \psi = 270°$, zufolge (3) und (7)

$$(13)\qquad PQ_1' = \frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}\,PQ_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,PQ_1\,,$$

$$(14)\qquad Q_1'P'' = PQ_1' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,PQ_1\,,$$

also

$$(15)\qquad PQ_1' + Q_1'P'' = 2\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,PQ_1\,,$$

wie auch aus Formel (9) unmittelbar sich ergibt.

Im idealen Fall, daß auch noch die Spiegel gleich weit von der Platte P abstehen, so daß $PQ_2 = PQ_1$ ist, was wir dem absoluten Werte nach durch PQ bezeichnen, wird hiernach die für die Interferenzerscheinung entscheidende Größe

$$(16) \qquad \Delta PQ = PQ_2' + Q_2'P'' - (PQ_1' + Q_1'P'') = 2\,PQ\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Die Geschwindigkeit der Erde im Raume (s. Tabelle unten), durchschnittlich mit 36 km in der Sekunde angesetzt, hat man $\frac{v}{c} = 0{,}00012$. Man darf also schreiben

$$(17) \qquad \Delta PQ = PQ_2' + Q_2'P'' - (PQ_1' + Q_1'P'') = PQ\frac{v^2}{c^2}.$$

Drehen wir den Apparat um 90°, so wird

$$(\Delta PQ) = -PQ\frac{v^2}{c^2},$$

somit

$$\Delta PQ - (\Delta PQ) = 2\,PQ\frac{v^2}{c^2}.$$

Es hängt hiernach die Interferenzerscheinung und ihre Änderung durch Umlegung des Apparates um 90° von dem Quadrat des Geschwindigkeitsverhältnisses $\frac{v}{c}$ ab. Da außerdem Proportionalität mit dem Abstand der Platte P von den Spiegeln stattfindet, kann diese Abhängigkeit durch hinlängliche Vergrößerung beliebig verstärkt werden. Auch die richtige Wahl der Jahreszeit für die Beobachtung kann zu ihrer Verschärfung beitragen. Nachfolgende Tabelle enthält die vollständige Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne und mit der Sonne durch den Raum (noch weitere Bewegungen, etwa mit dem System, zu dem das Sonnensystem selbst gehört, durch den Raum um ein anderes System usf., kennen wir leider nicht) in den verschiedenen Monaten des Jahres[1]).

Januar	36	Kilometer
Februar	41	„
März	44	„
April	45	„
Mai	44	„
Juni	41	„
Juli	36	„
August	31	„
September	27	„
Oktober	25	„
November	26	„
Dezember	30	„

Das Maximum der Erdgeschwindigkeit mit 45 km in der Sekunde fällt auf den 5. April, das Minimum mit 25 km auf den 8. Oktober. Die Durchschnitts-

[1]) Ich verdanke die Tabelle meinem Kollegen im Amte, dem Astronomen (ständigen Mitarbeiter bei der Kaiserlichen Normal-Eichungskommission) Dr. Kramer, der sie für mich gerechnet hat.

geschwindigkeit beträgt gegen 36 km in der Sekunde und wird am 6. Januar und 1. Juli erreicht.

Michelson hat auch in Beziehung auf die Jahreszeit fast das Richtige getroffen.

Der Punkt P ist beliebig auf der Platte gewählt; nehmen wir einen zweiten Punkt P^0 mit den zugehörigen Spiegelpunkten Q_1^0, Q_2^0, so wird

$$\Delta P^0Q^0 = P^0Q^0 \frac{v^2}{c^2}. \tag{18}$$

Also geben beide Strahlenpaare im Interferenzfeld die gleiche Erscheinung, z. B. Auslöschung des Lichtes, wenn

$$(PQ - P^0Q^0)\frac{v^2}{c^2} = \lambda \tag{19}$$

ist. Nimmt man $\frac{v}{c} = 0{,}00012$, $\lambda = 0{,}0006$ mm, so müßte $PQ - P^0Q^0$ gegen 60 m betragen. Grünbaum schließt darum mit Recht, daß bei der von Michelson gewollten Einrichtung eine Interferenzerscheinung, allein durch die Bewegung der Erde verursacht, nicht beobachtet werden kann, und ebensowenig selbstverständlich irgendeine Änderung einer so enststandenen Interferenz. Die Interferenzerscheinungen, die Michelson tatsächlich beobachtet hat, müssen also einen anderen Ursprung gehabt haben als in der Bewegung der Erde begründet ist, und zwar aus Abweichungen der Apparatanordnung von der von Michelson gewünschten und erstrebten, so daß es sich nur noch um Änderungen handeln kann infolge Änderung der Orientierung des Apparates gegen die Bewegungsrichtung der Erde.

Wichtig ist nun zunächst eine etwaige Neigung der Spiegel S_1, S_2 gegeneinander, um mehr oder weniger als 90°. Da die Spiegel S_1, S_2 dann unter anderen Winkeln gegen die Strahlen geneigt sind als 90°, so werden die rückkehrenden Strahlen die Platte P in einem anderen Punkte treffen, als von dem sie zu den Spiegeln gegangen sind. Wir haben daher für die rückkehrenden Strahlen von den Formeln (4), (5) (S. 112) Gebrauch zu machen. In ihnen sind β, γ die doppelten Einfallswinkel i_2, i_1 der ankommenden Strahlen an den Spiegeln S_1, S_2. Ferner haben wir

$$Q_1P_1 = Q_1P\frac{\sin 45^\circ}{\sin(180^\circ - 45^\circ - 2i_1)} = Q_1P\frac{\sin 45^\circ}{\sin(45^\circ + 2i_1)}, \tag{20}$$

$$Q_2P_2 = Q_2P\frac{\sin 45^\circ}{\sin(180^\circ - 45^\circ - 2i_2)} = Q_2P\frac{\sin 45^\circ}{\sin(45^\circ + 2i_2)}. \tag{21}$$

Bei der Michelsonschen Anordnung sind die Winkel i_1, i_2 als kleine anzusetzen; indem wir auch noch $Q_1P = Q_2P = QP$ annehmen, wird

$$Q_1P_1 = QP(1 - 2i_1), \tag{20'}$$

$$Q_2P_2 = QP(1 - 2i_2). \tag{21'}$$

α ist nach der Lage der Platte 90°, φ setzen wir wieder gleich 180° an. So wird

$$Q_2'P_2'' = QP\left(-\frac{cv}{c^2 - v^2}\cos 2i_2 + \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2} + \frac{c^2v^2}{(c^2 - v^2)^2}\cos^2 2i_2}\right)(1 - 2i_2), \tag{22}$$

$$Q_1'P_1'' = QP\left(+\frac{cv}{c^2 - v^2}\sin 2i_1 + \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2} + \frac{c^2v^2}{(c^2 - v^2)^2}\sin^2 2i_1}\right)(1 - 2i_1), \tag{23}$$

und in hinreichender Annäherung

$$Q_2'P_2'' = QP\left(\frac{c}{c+v} - 2\,i_2\,\frac{c}{c+v}\right), \tag{22'}$$

$$Q_1'P_1' = QP\left[\sqrt{\frac{c^2}{c^2-v^2}} + 2\,i_1\left(\frac{c\,v}{c^2-v^2} - \sqrt{\frac{c^2}{c^2-v^2}}\right)\right]. \tag{23'}$$

Hiernach haben wir

$$\left\{\begin{aligned} \varDelta PQ &= 2\,PQ\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\\ &\quad - 2\,PQ\left(i_2\,\frac{c}{c+v} + i_1\,\frac{c\,v}{c^2-v^2} - i_1\sqrt{\frac{c^2}{c^2-v^2}}\right) \end{aligned}\right. \tag{24}$$

oder abgekürzt

$$\varDelta PQ = PQ\,\frac{v^2}{c^2} + 2(i_1-i_2)PQ - 2\,\frac{v}{c}(i_1-i_2)PQ\,. \tag{24'}$$

Lassen wir das Glied $PQ\,\frac{v^2}{c^2}$ als, wie wir wissen, für die Beobachtung unzugänglich fort, so äußert sich also der Einfluß der Bewegung der Erde auf die Interferenzerscheinung in dem Gliede $2\frac{v}{c}(i_1-i_2)PQ$, und es ist

$$\varDelta PQ = 2\,PQ(i_1-i_2)\left(1-\frac{v}{c}\right) = 2\,PQ\,\frac{i_1-i_2}{1+\frac{v}{c}}\,. \tag{24''}$$

Hieraus folgt, daß die Bewegung der Erde an der Interferenzerscheinung nur die Breite der Streifen ändert, und zwar im Verhältnis von 1 zu $1+\frac{v}{c}$. Nach Drehung des Apparates um 90° hat man $-(\varDelta PQ)$ statt $\varDelta PQ$, somit

$$\varDelta PQ - (\varDelta PQ) = 4\,PQ\,\frac{i_1-i_2}{1+\frac{v}{c}}\,. \tag{25}$$

Die Streifen müssen ihre Lage geändert haben, auch unabhängig von der Erdbewegung. Es tritt aber durch die Erdbewegung eine geringe Änderung dieser Lagenänderung im Verhältnis von 1 zu $1+\frac{v}{c}$ oder von etwa $\frac{1}{10000}$ Streifenbreite auf, was wohl jeder Beobachtung entgehen würde. Indessen hat Michelson Verschiebungen der Streifen nach Umlegung des Apparates um 90° überhaupt nicht gesehen. Also kann die von ihm beobachtete Interferenzerscheinung auch nicht in der Neigung der Spiegel ihren Grund gehabt haben. Übrigens folgt, daß, wenn man für das Glied $2\,PQ(i_1-i_2)\frac{v}{c}$ einen beobachtbaren Wert verlangt, selbst im wohl kaum noch zulässigen Betrage von 10 cm, $2\,PQ(i_1-i_2)$ schon 10^5 cm, also 1 km, sein müßte. Nehmen wir selbst Neigungen von 5° bis 6° noch als nicht vermieden an, was angesichts der Sorgfalt und der Kontrollen, die Michelson auf die Justierung seines Apparates angewendet hat, ganz unzulässig ist, so müßte PQ noch 2 km betragen, eine Länge, die bei Michelsons

Apparat nicht entfernt zur Verfügung stand. Aber, wie bemerkt, kommt das alles nicht in Frage. Der Einfluß der Schiefheit der Strahlen gegeneinander im Raume B ist außer acht gelassen; für die Deutung im Verhältnis zur Bewegung des Äthers kommt er nicht in Betracht, wie man leicht sieht. Ebenso nicht die Verschiedenheit der Wege in der Platte, da diese Wege für den uns hier beschäftigenden Vorgang gar zu kurz sind. Nun ist es noch möglich, daß eine Neigung der Platte gegen die Strahlen um mehr oder weniger als 45° die Interferenzerscheinung hervorgerufen hat. Die Spiegel S_1, S_2 können dabei senkrecht zu den Strahlen gestanden haben. Dann durchlaufen die Strahlen in der Platte die gleichen Wege, und es wäre nur die Abweichung ε des Winkels α von 90° zu beachten.

Da man jedoch hat

$$PQ_2' + Q_2'P'' = 2\,PQ_2 \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}, \tag{26}$$

$$\left\{\begin{aligned} PQ_1' + Q_1'P &= 2\,PQ_1 \sqrt{\frac{c^2}{c^2-v^2} + \frac{c^2 v^2}{(c^2-v^2)^2}\cos^2\alpha} \\ &= 2\,PQ_1 \sqrt{\frac{c^2}{c^2-v^2} + \frac{c^2 v^2}{(c^2-v^2)^2}\sin^2\varepsilon}\,, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

so macht sich der Einfluß der Abweichung ε nur in Gliedern von der Ordnung $\frac{v^2}{c^2}\varepsilon^2$ bemerkbar, wird also nicht merkbar.

Endlich könnte es noch sein, daß der Abstand von der Platte P doch nicht für beide Spiegel der gleiche war. Dann hätten wir

$$\varDelta PQ = \frac{2\,PQ_2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{2\,PQ_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2(PQ_2 - PQ_1) + 2\frac{v^2}{c^2}(PQ_2 - \tfrac{1}{2}PQ_1). \tag{28}$$

Das erste Glied würde die Interferenzerscheinung bestimmen, die sich verschieben müßte, wenn man den Apparat dreht. Das zweite Glied kann wieder nicht zu beobachtbarer Verschiebung der Interferenzerscheinung bei Drehung des Apparates führen, wenn die Interferenzerscheinung als solche überhaupt beobachtbar soll sein können, da $PQ_2 - PQ_1$ nicht beliebig gesteigert werden kann und bei den Versuchen, wenn nicht Null, so jedenfalls nur klein gewesen ist.

Hiernach sehen wir uns in der merkwürdigen Lage nicht sagen zu können, wodurch eigentlich die Interferenzerscheinung verursacht gewesen ist, die Michelson beobachtet hat, wenn nicht folgender Umstand entscheidend mitgewirkt haben sollte. Michelson setzte voraus, daß der Strahlengang so stattfindet, wie in Fig. 9a angedeutet. Alsdann läuft S_1 zweimal durch die Platte P, S_2 aber nur einmal. Um beide Strahlen gleich lang zu machen (man weiß eigentlich nicht warum), hat er eine kompensierende Platte P_1, die mit P aus demselben Stück geschnitten war, in einen Teil des Weges von S_2 unter 45° gestellt. Indessen kommen auch Strahlen von dem abweichenden Weg, z. B. nach Fig. 9b, selbstverständlich zur Wirkung. Hier läuft S_2 dreimal, S_1 nur einmal durch die Platte; man müßte also eine sogar doppelt so dicke Platte in den Weg jetzt von S_1 stellen. Wenn ferner die Strahlen alle von gleicher Art sind, kommen auch Strahlengänge, z. B. nach Fig. 9c und 9d, in Betracht. In beiden Fällen haben S_1 und S_2 gleich lange Wege in der Platte, so daß eine Kompensation überhaupt nicht nötig ist. So kann man unendlich viele Strahlengänge konstruieren, deren jeder gar keine oder eine besondere Lage und Dicke der Kompensationsplatte erfordern würde. Die Wahrheit ist, daß, da wir es mit Übereinanderlagerung von Interferenzerscheinungen zu tun haben, die Platte P ohne Kompensationsplatte überhaupt keine Interferenzerscheinung gibt. Die Kompensationsplatte kann nur das Entgegengesetzte vom Gewollten bewirkt und ihrerseits Interferenzerscheinungen hervorgebracht haben.

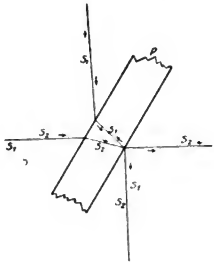

Fig. 9a.

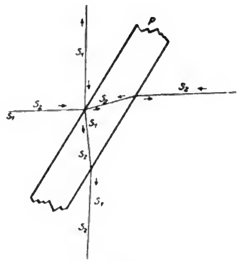

Fig. 9b.

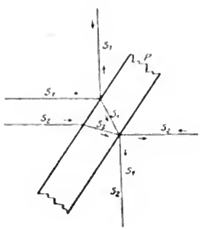

Fig. 9c.

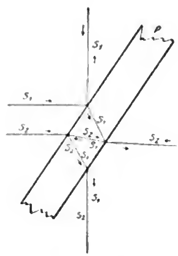

Fig. 9d.

Nach allem kann man nur sagen, daß der Versuch von Michelson, so wie er ausgeführt ist, zurückgelegt werden muß. Wir können nicht sagen, woher das kam, was Michelson gesehen hat, wenn es nicht gerade aus dem entstanden ist, was Michelson aus einem Gedankengange, dem man nicht folgen kann, getan hat, um Verschiedenheiten der geometrischen Strahlenwege zu vermeiden. Also sind auch alle Schlüsse aus seinen Ergebnissen noch hinfällig; diese Ergebnisse sind nicht mit Sicherheit zu deuten. Es bleibt Michelson das große Verdienst, einen höchst geistvollen Versuch erdacht zu haben; der Versuch selbst muß aber wiederholt werden, und zwar mit genauester Prüfung jedes einzelnen Umstandes. Die von den Herren Morley und Miller[1]) ausgeführten Versuche kommen nicht in Betracht, weil sie (bis auf das Material der Unterlagen) lediglich eine absolute Kopie der Michelsonschen Versuche darstellen, ohne jede Prüfung der Strahlenwege.

Aus Michelsons Versuch aber hat man schließen zu müssen geglaubt, daß der Äther sich durchaus mit der Erde wie diese bewegen muß. Das stünde in Gegensatz zu Fresnels Annahme und würde sich auch mit dem Fresnelschen Gesetze von der teilweisen Mitführung des Äthers nicht vereinigen lassen. Es ist für die Wissenschaft fast verhängnisvoll gewesen, daß man dieses Ergebnis des Michelsonschen Versuches so ohne weiteres hat hinnehmen zu dürfen geglaubt. Wir müssen aber gegenwärtig sagen, daß auch nach Michelsons Versuch die Frage nach dem Verhalten des Äthers noch unentschieden ist.

II. Elektrodynamische Theorien über die Verbreitung von elektromagnetischen Störungen und des Lichtes in bewegten Stoffen.

1. Vorbemerkung über Vektorrechnung und Lorentz-Transformationen.

a) Formeln für Vektorrechnung.

Da ich im folgenden mich oft der vektoriellen Schreib- und Rechnungsweise bedienen werde, seien hier die erforderlichen Formeln zusammengestellt, indem bemerkt wird, daß für „curl" von vielen auch „rot" oder „Rot" geschrieben wird, und daß die meisten skalare Produkte durch Klammern, Multiplikationszeichen oder gar nicht hervorheben. Letzteres ist bei umfangreicheren Rechnungen ungemein störend. Die hier angewendete Bezeichnungsweise, $(\overline{\quad})$ für skalare Produkte, schließt jede Verwechslung mit anderen Operationen aus. Das Zeichen [ ] für vektorielle Produkte ist das bei uns übliche, ebenso üblich sind die Zeichen div, grad, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{d}{dt}$ usf.

Wir unterscheiden also Skalaren, Vektoren und Tensoren. Skalare Größen sind richtungslos wie die Arbeit. Vektorgrößen und Tensorgrößen haben die Richtungen des Gebietes, für das sie gelten, z. B. die des Raumes. Aber während Vektorgrößen so viele Komponenten besitzen, als diesem Gebiete Abmessungen zukommen, zeigen Tensorgrößen nach jeder Abmessung so viele Komponenten, als dieses Gebiet Abmessungen aufweist, insgesamt also das Quadrat der Zahl dieser Abmessungen. Dementsprechend werden Vektoren so transformiert wie Koordinaten, Tensoren dagegen wie Quadrate und Produkte von Koordinaten. Eine besondere Tensorrechnung werden wir hier nicht entwickeln, die Vektorrechnung genügt auch für Rechnung mit Tensoren. Ebenso werden wir uns hier auf das Raumgebiet beschränken, da für das später noch zu benützende Raum-Zeit-Gebiet die Formeln sich ohne weiteres ergeben und dort entwickelt werden Doch ist neuerdings von Sommerfeld[2]) eine umfassende Analyse für erweiterte Vektor- und Tensorrechnung ausgebildet worden. Übrigens sind Beispiele für Vektoren Kräfte, Geschwindigkeiten, für Tensoren elastische Spannungen.

Mit $A, B, C \ldots$ bezeichnen wir irgendwelche Vektoren, mit $A_p, B_p, C_p \ldots$ deren Komponenten nach einer bestimmten Richtung p. Wir haben

$$(\mathrm{a}_1) \qquad (\overline{AB})_p = A_p B_p, \qquad (\overline{AB}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,$$

$$(\mathrm{a}_2) \qquad (\overline{AB})_p = A\,B\cos(A, p)\cos(B, p), \qquad (\overline{AB}) = A\,B\cos(A, B),$$

[1]) Phil. Mag. **8**, 753 (1904); **9**, 680 (1905).

[2]) Ann. d. Phys. **32**, 749 (1910); **33**, 649 (1910).

(b) $$(\overline{AB}) = (\overline{BA}).$$

(c₁) $$[AB]_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad [AB]_y = A_z B_x - A_x B_z, \quad [AB]_z = A_x B_y - A_y B_x,$$

(c₂) $$[AB]_x = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad [AB]_y = \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix}, \quad [AB]_z = \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix},$$

(c₃) $$\left\{ \begin{aligned} [AB]_x &= AB \begin{vmatrix} \cos(A, y) & \cos(A, z) \\ \cos(B, y) & \cos(B, z) \end{vmatrix}, \\ [AB]_y &= AB \begin{vmatrix} \cos(A, z) & \cos(A, x) \\ \cos(B, z) & \cos(B, x) \end{vmatrix}, \\ [AB]_z &= AB \begin{vmatrix} \cos(A, x) & \cos(A, y) \\ \cos(B, x) & \cos(B, y) \end{vmatrix}, \end{aligned} \right.$$

d₁) $$[AB]_l = [AB]_x \cos(l, x) + [AB]_y \cos(l, y) + [AB]_z \cos(l, z),$$

(d₂) $$[AB]_l = \begin{vmatrix} \cos(l, x) & \cos(l, y) & \cos(l, z) \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix},$$

(d₃) $$[AB]_l = AB \begin{vmatrix} \cos(l, x) & \cos(l, y) & \cos(l, z) \\ \cos(A, x) & \cos(A, y) & \cos(A, z) \\ \cos(B, x) & \cos(B, y) & \cos(B, z) \end{vmatrix},$$

(d₄) $$[AB] = \sqrt{[AB]_x^2 + [AB]_y^2 + [AB]_z^2} = AB \sin(A, B),$$

(e) $$[AB] = -[BA],$$

(e₁) $$[AA] = 0.$$

(f) $$(\overline{A[BC]}) = (\overline{B[CA]}) = (\overline{C[AB]}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

(g) $$[A[BC]] = B(\overline{AC}) - C(\overline{AB}),$$

(g₁) $$[A[BC]] = [B[AC]] - [C[AB]],$$

(h₁) $$(\overline{[AB][CD]}) = (\overline{A[B[CD]]}),$$

(h₂) $$[[AB][CD]] = A(\overline{C[BD]}),$$

(h₃) $$(\overline{[AB][CD]}) = (\overline{AC})(\overline{BD}) - (\overline{BC})(\overline{AD}) = \begin{vmatrix} (\overline{AC}) & (\overline{AD}) \\ (\overline{BC}) & (\overline{BD}) \end{vmatrix}.$$

(i) $$\operatorname{grad}_p U = \nabla_p U = \frac{\partial U}{\partial p},$$

(k) $$(g\nabla) F_p = g_x \frac{\partial F_p}{\partial x} + g_y \frac{\partial F_p}{\partial y} + g_z \frac{\partial F_p}{\partial z}.$$

(l) $$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

(m) $$\Delta F_p = \operatorname{div} \nabla F_p = \frac{\partial^2 F_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_p}{\partial z^2}.$$

(n) $$\operatorname{curl}_x F = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \operatorname{curl}_y F = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \operatorname{curl}_z F = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y},$$

(o) $$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{curl}_x[FG] = \frac{\partial}{\partial y}[FG]_z - \frac{\partial}{\partial z}[FG]_y, \quad \operatorname{curl}_y[FG] = \frac{\partial}{\partial z}[FG]_x - \frac{\partial}{\partial x}[FG]_z, \\ &\operatorname{curl}_z[FG] = \frac{\partial}{\partial x}[FG]_y - \frac{\partial}{\partial y}[FG]_x. \end{aligned}\right.$$

(p) $$\nabla_p\left(\overline{FG}\right) = (F\nabla)G_p + (G\nabla)F_p + [F \operatorname{curl} G]_p + [G \operatorname{curl} F]_p.$$

(q) $$\operatorname{div}[FG] = \left(\overline{G \operatorname{curl} F}\right) - \left(\overline{F \operatorname{curl} G}\right),$$

(r) $$\operatorname{div} \operatorname{curl} F = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{curl}_x F) + \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{curl}_y F) + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{curl}_z F) = 0.$$

(s) $$\left\{\begin{aligned} \operatorname{curl}_x \nabla F &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0, \\ \operatorname{curl}_y \nabla F &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = 0, \\ \operatorname{curl}_z \nabla F &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

(t) $$\operatorname{curl} \operatorname{curl} F = \nabla(\operatorname{div} F) - \Delta F,$$

(u) $$\operatorname{curl}_p[FG] = (G\nabla)F_p - (F\nabla)G_p + F_p \operatorname{div} G - G_p \operatorname{div} F.$$

(v) $$\frac{d}{dt}[FG] = \left[F\frac{dG}{dt}\right] + \left[\frac{dF}{dt}G\right].$$

Ferner schreiben wir

(w_1) $$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + g_x\frac{\partial}{\partial x} + g_y\frac{\partial}{\partial y} + g_z\frac{\partial}{\partial z},$$

(w_2) $$\left(\frac{d}{dt}\right)_p = \frac{\partial}{\partial t} + p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z},$$

(w_3) $$\left(\frac{\delta}{\delta t}\right)_p = \frac{\partial}{\partial t} - p_x\frac{\partial}{\partial x} - p_y\frac{\partial}{\partial y} - p_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

g bedeutet die ganze Geschwindigkeit, p einen Teil davon.

b) Formeln für Lorentz-Transformationen.

Im folgenden werden wir vielfach mit der sogenannten Lorentz-Transformation zu tun haben, die sich auf die Koordinaten wie auf die Zeit erstreckt. An Stelle der relativen Koordinaten, die wir mit ξ, η, ζ bezeichnen, und der Zeit t werden neue Variabele $\xi', \eta', \zeta'; t'$ eingeführt gemäß den Beziehungen

(a$_1'$) $$\xi' = \varkappa_1 \xi , \quad \eta' = \varkappa_2 \eta , \quad \zeta' = \varkappa_3 \zeta ;$$

(b$_1'$) $$t' = \theta_0 t - \theta_1 \xi - \theta_2 \eta - \theta_3 \zeta ,$$

also

(a$_2'$) $$\xi = \frac{1}{\varkappa_1} \xi', \quad \eta = \frac{1}{\varkappa_2} \eta', \quad \zeta = \frac{1}{\varkappa_3} \zeta';$$

(b$_2'$) $$t = \frac{1}{\theta_0}\left(t' + \frac{\theta_1}{\varkappa_1}\xi' + \frac{\theta_2}{\varkappa_2}\eta' + \frac{\theta_3}{\varkappa_3}\zeta'\right).$$

Die $\varkappa$ und θ sind als Konstanten anzusehen. Eine Funktion $\bar F$ von $\xi, \eta, \zeta; t$ geht so über in $\bar F\left[\frac{1}{\varkappa_1}\xi', \ \frac{1}{\varkappa_2}\eta', \ \frac{1}{\varkappa_3}\zeta'; \ \frac{1}{\theta_0}\left(t' + \frac{\theta_1}{\varkappa_1}\xi' + \frac{\theta_2}{\varkappa_2}\eta' + \frac{\theta_3}{\varkappa_3}\zeta'\right)\right]$.

In eine Funktion von $\xi', \eta', \zeta'; t'$ übergeführt, bezeichnen wir sie mit $\bar F'$, ihre Differentialquotienten entweder durch $\frac{\partial \bar F'}{\partial \xi'}, \ \frac{\partial \bar F'}{\partial \eta'}, \ \frac{\partial \bar F'}{\partial \zeta'}, \ \frac{\partial \bar F'}{\partial t'}$; oder durch $\left(\frac{\partial \bar F}{\partial \xi}\right)', \ \left(\frac{\partial \bar F}{\partial \eta}\right)', \ \left(\frac{\partial \bar F}{\partial \zeta}\right)', \ \left(\frac{\partial \bar F}{\partial t}\right)'$.

Nun haben wir

(c') $$\frac{\partial \bar F'}{\partial t'} = \frac{\partial \bar F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'}, \qquad \frac{\partial^2 \bar F}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 \bar F}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)^2 + \frac{\partial \bar F}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial t' \partial t'};$$

sodann

(d') $$\left\{\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \bar F}{\partial \xi}\right)' &= \frac{\partial \bar F}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \xi'} + \frac{\partial \bar F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi'},\\
\left(\frac{\partial \bar F}{\partial \eta}\right)' &= \frac{\partial \bar F}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \eta'} + \frac{\partial \bar F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta'},\\
\left(\frac{\partial \bar F}{\partial \zeta}\right)' &= \frac{\partial \bar F}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta'} + \frac{\partial \bar F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \zeta'},
\end{aligned}\right.$$

(e') $$\left\{\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 \bar F}{\partial \eta \partial \xi}\right)' &= \frac{\partial^2 \bar F}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial \eta'}\frac{\partial \xi}{\partial \xi'} + \frac{\partial^2 \bar F}{\partial t \partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \eta'}\frac{\partial \xi}{\partial \xi'} + \frac{\partial^2 \bar F}{\partial \eta \partial t}\frac{\partial \eta}{\partial \eta'}\frac{\partial t}{\partial \xi'}\\
&\quad + \frac{\partial \bar F}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial \eta' \partial \xi'} + \frac{\partial^2 \bar F}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial \eta'}\frac{\partial t}{\partial \xi'},\\
\left(\frac{\partial^2 \bar F}{\partial \zeta \partial \eta}\right)' &= \frac{\partial^2 \bar F}{\partial \zeta \partial \eta}\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta'}\frac{\partial \eta}{\partial \eta'} + \frac{\partial^2 \bar F}{\partial t \partial \eta}\frac{\partial t}{\partial \zeta'}\frac{\partial \eta}{\partial \eta'} + \frac{\partial^2 \bar F}{\partial \zeta \partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta'}\frac{\partial t}{\partial \eta'}\\
&\quad + \frac{\partial \bar F}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial \zeta' \partial \eta'} + \frac{\partial^2 \bar F}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial \zeta'}\frac{\partial t}{\partial \eta'},\\
\left(\frac{\partial^2 \bar F}{\partial \xi \partial \zeta}\right)' &= \frac{\partial^2 \bar F}{\partial \xi \partial \zeta}\frac{\partial \xi}{\partial \xi'}\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta'} + \frac{\partial^2 \bar F}{\partial t \partial \zeta}\frac{\partial t}{\partial \xi'}\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta'} + \frac{\partial^2 \bar F}{\partial \xi \partial t}\frac{\partial \xi}{\partial \xi'}\frac{\partial t}{\partial \zeta'}\\
&\quad + \frac{\partial \bar F}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial \xi' \partial \zeta'} + \frac{\partial^2 \bar F}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial \xi'}\frac{\partial t}{\partial \zeta'};
\end{aligned}\right.$$

$$
(\mathrm{f}') \quad \begin{cases}
\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\right)' = \dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial \xi'}\right)^2 + 2\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \xi}\,\dfrac{\partial t}{\partial \xi'}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial \xi'} + \dfrac{\partial F}{\partial t}\,\dfrac{\partial^2 t}{\partial \xi'^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}\left(\dfrac{\partial t}{\partial \xi'}\right)^2, \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)' = \dfrac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial \eta'}\right)^2 + 2\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \eta}\,\dfrac{\partial t}{\partial \eta'}\,\dfrac{\partial \eta}{\partial \eta'} + \dfrac{\partial F}{\partial t}\,\dfrac{\partial^2 t}{\partial \eta'^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}\left(\dfrac{\partial t}{\partial \eta'}\right)^2, \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial \zeta}\right)' = \dfrac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2}\left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial \zeta'}\right)^2 + 2\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \zeta}\,\dfrac{\partial t}{\partial \zeta'}\,\dfrac{\partial \zeta}{\partial \zeta'} + \dfrac{\partial F}{\partial t}\,\dfrac{\partial^2 t}{\partial \zeta'^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}\left(\dfrac{\partial t}{\partial \zeta'}\right)^2;
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{g}') \quad \begin{cases}
\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \xi}\right)' = \dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \xi}\,\dfrac{\partial t}{\partial t'}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial \xi'} + \dfrac{\partial F}{\partial \xi}\,\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t\,\partial \xi'}\,\dfrac{\partial t}{\partial t'} \\[1ex]
\qquad\qquad + \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}\,\dfrac{\partial t}{\partial t'}\,\dfrac{\partial t}{\partial \xi'} + \dfrac{\partial F}{\partial t}\,\dfrac{\partial^2 t}{\partial t\,\partial \xi'}\,\dfrac{\partial t}{\partial t'}, \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \eta}\right)' = \dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \eta}\,\dfrac{\partial t}{\partial t'}\,\dfrac{\partial \eta}{\partial \eta'} + \dfrac{\partial F}{\partial \eta}\,\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t\,\partial \eta'}\,\dfrac{\partial t}{\partial t'} \\[1ex]
\qquad\qquad + \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}\,\dfrac{\partial t}{\partial t'}\,\dfrac{\partial t}{\partial \eta'} + \dfrac{\partial F}{\partial t}\,\dfrac{\partial^2 t}{\partial t\,\partial \eta'}\,\dfrac{\partial t}{\partial t'}, \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \zeta}\right)' = \dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \zeta}\,\dfrac{\partial t}{\partial t'}\,\dfrac{\partial \zeta}{\partial \zeta'} + \dfrac{\partial F}{\partial \zeta}\,\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t\,\partial \zeta'}\,\dfrac{\partial t}{\partial t'} \\[1ex]
\qquad\qquad + \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}\,\dfrac{\partial t}{\partial t'}\,\dfrac{\partial t}{\partial \zeta'} + \dfrac{\partial F}{\partial t}\,\dfrac{\partial^2 t}{\partial t\,\partial \zeta'}\,\dfrac{\partial t}{\partial t'}.
\end{cases}
$$

Es ist aber in unserem Fall

$$
\frac{\partial \xi}{\partial \xi'} = \frac{1}{\varkappa_1}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \eta'} = \frac{1}{\varkappa_2}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta'} = \frac{1}{\varkappa_3}; \quad \frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{1}{\theta_0}, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial t'^2} = 0;
$$

$$
\frac{\partial t}{\partial \xi'} = \frac{\theta_1}{\varkappa_1 \theta_0}, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta'} = \frac{\theta_2}{\varkappa_2 \theta_0}, \quad \frac{\partial t}{\partial \zeta'} = \frac{\theta_3}{\varkappa_3 \theta_0},
$$

und alle zweiten Differentialquotienten der ξ, η, ζ; t sind $= 0$.

Hiernach bekommen wir durch Umkehrung

$$
(\mathrm{h}') \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial t} = \theta_0 \dfrac{\partial F'}{\partial t'}, \qquad \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \theta_0^2 \dfrac{\partial^2 F'}{\partial t'^2}; \\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial \xi} = \varkappa_1\left(\dfrac{\partial F}{\partial \xi}\right)' - \dfrac{\theta_1}{\theta_0}\,\dfrac{\partial F}{\partial t} = \varkappa_1\left(\dfrac{\partial F}{\partial \xi}\right)' - \theta_1 \dfrac{\partial F'}{\partial t'}, \\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial \eta} = \varkappa_2\left(\dfrac{\partial F}{\partial \eta}\right)' - \dfrac{\theta_2}{\theta_0}\,\dfrac{\partial F}{\partial t} = \varkappa_2\left(\dfrac{\partial F}{\partial \eta}\right)' - \theta_2 \dfrac{\partial F'}{\partial t'}, \\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial \zeta} = \varkappa_3\left(\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}\right)' - \dfrac{\theta_3}{\theta_0}\,\dfrac{\partial F}{\partial t} = \varkappa_3\left(\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}\right)' - \theta_3 \dfrac{\partial F'}{\partial t'}.
\end{cases}
$$

Weiter folgt aus den Gleichungen unter (g'):

$$
\text{(i')}\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar F}{\partial t\,\partial \xi} &= \varkappa_1\theta_0\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \xi}\right)' - \frac{\theta_1}{\theta_0}\,\frac{\partial^2 \bar F}{\partial t^2} = \varkappa_1\theta_0\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \xi}\right)' - \theta_0\theta_1\,\frac{\partial^2 F'}{\partial t'^2}\,,\\
\frac{\partial^2 \bar F}{\partial t\,\partial \eta} &= \varkappa_2\theta_0\left(\frac{\partial^2 \bar F}{\partial t\,\partial \eta}\right)' - \frac{\theta_2}{\theta_0}\,\frac{\partial^2 \bar F}{\partial t^2} = \varkappa_2\theta_0\left(\frac{\partial^2 \bar F}{\partial t\,\partial \eta}\right)' - \theta_0\theta_2\,\frac{\partial^2 \bar F'}{\partial t'^2}\,,\\
\frac{\partial^2 \bar F}{\partial t\,\partial \zeta} &= \varkappa_3\theta_0\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \zeta}\right)' - \frac{\theta_3}{\theta_0}\,\frac{\partial^2 \bar F}{\partial t^2} = \varkappa_3\theta_0\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \zeta}\right)' - \theta_0\theta_3\,\frac{\partial^2 \bar F'}{\partial t'^2}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Mit diesen letzteren Gleichungen gibt z. B. die erste Gleichung unter (e')

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta\,\partial \xi}\right)' = \frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \eta\,\partial \xi} + \frac{\theta_2}{\varkappa_2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \xi}\right)' - \frac{\theta_1\theta_2}{\varkappa_1\varkappa_2}\,\frac{\partial^2 F'}{\partial t'^2} + \frac{\theta_1}{\varkappa_1}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \eta}\right)'&\\
- \frac{\theta_1\theta_2}{\varkappa_1\varkappa_2}\,\frac{\partial^2 F'}{\partial t'^2} + \frac{\theta_1\theta_2}{\varkappa_1\varkappa_2}\,\frac{\partial^2 F'}{\partial t'^2}&\\
= \frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \eta\,\partial \xi} + \frac{\theta_2}{\varkappa_2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \xi}\right)' + \frac{\theta_1}{\varkappa_1}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \eta}\right)' - \frac{\theta_1\theta_2}{\varkappa_1\varkappa_2}\,\frac{\partial^2 F'}{\partial t'^2}\,.&
\end{aligned}
$$

So wird insgesamt durch Umkehrung

$$
\text{(k')}\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial \eta\,\partial \xi} &= \varkappa_1\varkappa_2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta\,\partial \xi}\right)' - \varkappa_2\theta_1\left(\frac{\partial^2 \bar F}{\partial t\,\partial \eta}\right)' - \varkappa_1\theta_2\left(\frac{\partial^2 \bar F}{\partial t\,\partial \xi}\right)' + \theta_1\theta_2\,\frac{\partial^2 \bar F'}{\partial t'^2}\,,\\
\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta\,\partial \eta} &= \varkappa_2\varkappa_3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta\,\partial \eta}\right)' - \varkappa_3\theta_2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \zeta}\right)' - \varkappa_2\theta_3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \eta}\right)' + \theta_2\theta_3\,\frac{\partial^2 \bar F'}{\partial t'^2}\,,\\
\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \zeta} &= \varkappa_3\varkappa_1\left(\frac{\partial^2 \bar F}{\partial \xi\,\partial \zeta}\right)' - \varkappa_1\theta_3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \xi}\right)' - \varkappa_3\theta_1\left(\frac{\partial^2 \bar F}{\partial t\,\partial \zeta}\right)' + \theta_3\theta_1\,\frac{\partial^2 F'}{\partial t'^2}\,;
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{(l')}\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar F}{\partial \xi^2} &= \varkappa_1^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\right)' - 2\,\varkappa_1\theta_1\left(\frac{\partial^2 \bar F}{\partial t\,\partial \xi}\right)' + \theta_1^2\,\frac{\partial^2 F'}{\partial t'^2}\,,\\
\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} &= \varkappa_2^2\left(\frac{\partial^2 \bar F}{\partial \eta^2}\right)' - 2\,\varkappa_2\theta_2\left(\frac{\partial^2 \bar F}{\partial t\,\partial \eta}\right)' + \theta_2^2\,\frac{\partial^2 F'}{\partial t'^2}\,,\\
\frac{\partial^2 \bar F}{\partial \zeta^2} &= \varkappa_3^2\left(\frac{\partial^2 \bar F}{\partial \zeta^2}\right)' - 2\,\varkappa_3\theta_3\left(\frac{\partial^2 \bar F}{\partial t\,\partial \zeta}\right)' + \theta_3^2\,\frac{\partial^2 F'}{\partial t'^2}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Mit zwei Fällen werden wir es zu tun haben. Im ersten Fall setzen wir $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = 1$. Diese Transformation nennen wir Ortszeittransformation. Für θ_0, θ_1, θ_2, θ_3 machen wir dabei zwei Ansätze. Erstens

$$
\theta_0 = 1\,,\quad \theta_1 = \frac{p_x}{c_0^2}\quad \theta_2 = \frac{p_y}{c_0^2}\,,\quad \theta_3 = \frac{p_z}{c_0^2}\,,
$$

dann ist

$$
\text{(a}_2''\text{)}\qquad t' = t - \frac{p_x}{c_0^2}\,\xi - \frac{p_y}{c_0^2}\,\eta - \frac{p_z}{c_0^2}\,\zeta\,;\quad t = t' + \frac{p_x}{c_0^2}\,\xi + \frac{p_y}{c_0^2}\,\eta + \frac{p_z}{c_0^2}\,\zeta\,.
$$

Diese Ortszeit t' soll Substanz-Ortszeit heißen, c_0 wird dabei die Verbreitungsgeschwindigkeit einer Störung (des Lichtes usw.) in dem betreffenden ruhenden Stoffe bedeuten. Zweitens sei

$$\theta_0 = 1\,,\quad \theta_1 = \frac{p_x}{C_0^2}\,,\quad \theta_2 = \frac{p_y}{C_0^2}\,,\quad \theta_3 = \frac{p_z}{C_0^2}\,,$$

somit, indem wir für t' jetzt τ' schreiben

$$(a_2''')\qquad \tau' = t - \frac{p_x}{C_0^2}\xi - \frac{p_y}{C_0^2}\eta - \frac{p_z}{C_0^2}\zeta\,;\quad t = \tau' + \frac{p_x}{C_0^2}\xi + \frac{p_y}{C_0^2}\eta + \frac{p_z}{C_0^2}\zeta\,.$$

τ' nennen wir Äther-Ortszeit, C_0 wird dabei die Vorbereitungsgeschwindigkeit einer Störung (des Lichtes usw.) im reinen ruhenden Äther bedeuten.

Es genügt, die Umwandlungsformeln für eine der Zeiten, wir nehmen τ', anzugeben. Wir haben nach den obigen Gleichungen, noch deutlicher,

$$(c'')\qquad \frac{\partial \overline{F}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{F}'}{\partial \tau'}\,,\quad \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \overline{F}'}{\partial \tau'^2}\,;$$

$$(h'')\qquad \frac{\partial \overline{F}}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \xi}\right)' - \frac{p_x}{C_0^2}\frac{\partial \overline{F}'}{\partial \tau'}\,,\quad \frac{\partial \overline{F}}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \eta}\right)' - \frac{p_y}{C_0^2}\frac{\partial \overline{F}'}{\partial \tau'}\,,\quad \frac{\partial \overline{F}}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \zeta}\right)' - \frac{p_z}{C_0^2}\frac{\partial \overline{F}'}{\partial \tau'}\,;$$

$$(i'')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial t\,\partial \xi} = \left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \tau'\,\partial \xi}\right)' - \dfrac{p_x}{C_0^2}\dfrac{\partial^2 \overline{F}'}{\partial \tau'^2}\,,\quad \dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial t\,\partial \eta} = \left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \tau'\,\partial \eta}\right)' - \dfrac{p_y}{C_0^2}\dfrac{\partial^2 \overline{F}'}{\partial \tau'^2}\,,\\[2ex] \dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial t\,\partial \zeta} = \left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \tau'\,\partial \zeta}\right)' - \dfrac{p_z}{C_0^2}\dfrac{\partial^2 \overline{F}'}{\partial \tau'^2}\,; \end{cases}$$

$$(k'')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \eta\,\partial \xi} = \left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \eta\,\partial \xi}\right)' - \dfrac{p_y}{C_0^2}\left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \tau'\,\partial \xi}\right)' - \dfrac{p_x}{C_0^2}\left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \tau'\,\partial \eta}\right)' + \dfrac{p_y p_x}{C_0^4}\dfrac{\partial^2 \overline{F}'}{\partial \tau'^2}\,,\\[2ex] \dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \zeta\,\partial \eta} = \left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \zeta\,\partial \eta}\right)' - \dfrac{p_z}{C_0^2}\left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \tau'\,\partial \eta}\right)' - \dfrac{p_y}{C_0^2}\left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \tau'\,\partial \zeta}\right)' + \dfrac{p_z p_y}{C_0^4}\dfrac{\partial^2 \overline{F}'}{\partial \tau'^2}\,,\\[2ex] \dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \xi\,\partial \zeta} = \left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \xi\,\partial \zeta}\right)' - \dfrac{p_x}{C_0^2}\left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \tau'\,\partial \zeta}\right)' - \dfrac{p_z}{C_0^2}\left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \tau'\,\partial \xi}\right)' + \dfrac{p_x p_z}{C_0^4}\dfrac{\partial^2 \overline{F}'}{\partial \tau'^2}\,; \end{cases}$$

$$(l'')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \xi^2} = \left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \xi^2}\right)' - 2\dfrac{p_x}{C_0^2}\left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \tau'\,\partial \xi}\right)' + \dfrac{p_x^2}{C_0^4}\dfrac{\partial^2 \overline{F}'}{\partial \tau'^2}\,,\\[2ex] \dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \eta^2} = \left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \eta^2}\right)' - 2\dfrac{p_y}{C_0^2}\left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \tau'\,\partial \eta}\right)' + \dfrac{p_y^2}{C_y^4}\dfrac{\partial^2 \overline{F}'}{\partial t'^2}\,,\\[2ex] \dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \zeta^2} = \left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \zeta^2}\right)' - 2\dfrac{p_z}{C_0^2}\left(\dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \tau'\,\partial \zeta}\right)' + \dfrac{p_z^2}{C_0^4}\dfrac{\partial^2 \overline{F}'}{\partial \tau'^2}\,. \end{cases}$$

Aus diesen Beziehungen ergeben sich noch folgende Formeln, wobei

$$g = p + q$$

gesetzt und unter p ein konstanter, unter q ein variabeler Teil der Bewegung verstanden ist.

$$\text{(m'')} \qquad \operatorname{curl} F = (\operatorname{curl} F)' - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial}{\partial \tau'}[p\,F'] \,,$$

$$\text{(n'')} \qquad (G\Gamma)F = ((G\Gamma)F)' - \frac{1}{C_0^2}\overline{(Gp)}\frac{\partial F'}{\partial \tau'} \,,$$

$$\text{(o'')} \qquad \operatorname{div} F = (\operatorname{div} \overline{F})' - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial}{\partial \tau'}\overline{(pF')} \,,$$

$$\text{(p'')} \qquad \Delta F = (\Delta F)' - \frac{2}{C_0^2}\frac{\partial}{\partial \tau'}((p\Gamma)F)' + \frac{p^2}{C_0^4}\frac{\partial^2 F'}{\partial \tau'^2} \,,$$

$$\text{(q'')} \qquad \left(\frac{dF}{dt}\right)_p = \frac{\partial F'}{\partial \tau'}\left(1 - \frac{p^2}{C_0^2}\right) + p_x\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)' + p_y\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)' + p_z\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)' ,$$

$$\text{(r'')} \qquad \left(\frac{d\overline{F}}{dt}\right)_q = \frac{\partial F'}{\partial \tau'}\left(1 - \frac{p_x q_\xi + p_y q_\eta + p_z q_\zeta}{C_0^2}\right) + q_\xi\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)' + q_\eta\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)' + q_\zeta\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)' ,$$

$$\text{(s'')} \qquad \left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)_p = \frac{\partial F'}{\partial \tau'}\left(1 + \frac{p^2}{C_0^2}\right) - p_x\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)' - p_y\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)' - p_z\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \zeta}\right)' ,$$

$$\text{(t'')} \qquad \left(\frac{\delta \overline{F}}{\delta t}\right)_q = \frac{\partial \overline{F}'}{\partial \tau'}\left(1 + \frac{p_x q_\xi + p_y q_\eta + p_z q_\zeta}{C_0^2}\right) - q_\xi\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \xi}\right)' - q_\eta\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \eta}\right)' - q_\zeta\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial \zeta}\right)' .$$

Weiter haben wir noch nach a_2''')

$$q_\xi = \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{d\tau' + \frac{p_x}{C_0^2}d\xi + \frac{p_y}{C_0^2}d\eta + \frac{p_z}{C_0^2}d\zeta} ,$$

also

$$\text{(u'')} \qquad \left\{ \begin{aligned} q_\xi &= \frac{1}{1 + \frac{p_x}{C_0^2}(q_\xi)' + \frac{p_y}{C_0^2}(q_\eta)' + \frac{p_z}{C_0^2}(q_\zeta)'}(q_\xi)' , \\ q_\eta &= \frac{1}{1 + \frac{p_x}{C_0^2}(q_\xi)' + \frac{p_y}{C_0^2}(q_\eta)' + \frac{p_z}{C_0^2}(q_\zeta)'}(q_\eta)' , \\ q_\zeta &= \frac{1}{1 + \frac{p_x}{C_0^2}(q_\xi)' + \frac{p_y}{C_0^2}(q_\eta)' + \frac{p_z}{C_0^2}(q_\zeta)'}(q_\zeta)' . \end{aligned} \right.$$

Im zweiten Fall richten wir zunächst die x-Achse nach der konstanten Bewegung p und setzen

$$(\alpha) \qquad \varkappa_1 = \frac{\varkappa}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}} , \qquad \varkappa_2 = \varkappa , \qquad \varkappa_3 = \varkappa ,$$

$$(\beta) \qquad \vartheta_0 = \varkappa\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}} , \qquad \vartheta_1 = -\frac{\varkappa}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}}\frac{p}{V^2} , \qquad \vartheta_2 = 0 , \qquad \vartheta_3 = 0 .$$

V wird gleich C_0 angenommen; wir behalten aber diesen Buchstaben noch bei. Dann wird, indem wir die neue Zeit mit τ bezeichnen,

$$(\gamma_1) \qquad \xi' = \frac{\varkappa}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\xi, \quad \eta' = \varkappa\eta, \quad \zeta' = \varkappa\zeta;$$

$$(\delta_1) \qquad \xi = \frac{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}{\varkappa}\xi', \quad \eta = \frac{1}{\varkappa}\eta', \quad \zeta = \frac{1}{\varkappa}\zeta'.$$

$$(\varepsilon_1) \qquad \tau = \varkappa\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,t - \frac{p}{V^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\xi\right) = \varkappa\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\left(t - \frac{p}{V^2-p^2}\xi\right),$$

$$(\zeta) \qquad t = \frac{1}{\varkappa\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left(\tau + \frac{p}{V^2}\xi'\right).$$

In absoluten Koordinaten x, y, z wäre

$$(\gamma_2) \qquad \xi' = \frac{\varkappa}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}(x-p_x t), \quad \eta' = \varkappa(y-p_y t), \quad \zeta' = \varkappa(z-p_z t),$$

$$(\delta_2) \qquad \tau = \frac{\varkappa}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left(t - \frac{p}{V^2}x\right).$$

Zur Vergleichung haben wir im ersten Fall

$$\xi' = x - p_x t, \quad \eta' = y - p_y t, \quad \zeta' = z - p_z t,$$

$$\tau' = \left(1 + \frac{p^2}{V^2}\right)t - \frac{p}{V^2}x.$$

Nunmehr bekommen wir, da $p_x = p$, $p_y = p_z = 0$ sein soll

$$(\eta) \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \varkappa\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\frac{\partial F'}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \varkappa^2\left(1-\frac{p^2}{V^2}\right)\frac{\partial^2 F'}{\partial \tau^2};$$

$$(\vartheta) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \xi} = \dfrac{\varkappa}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left\{\left(\dfrac{\partial F}{\partial \xi}\right)' - \dfrac{p}{V^2}\dfrac{\partial F'}{\partial \tau}\right\}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \eta} = \varkappa\left(\dfrac{\partial F}{\partial \eta}\right)', \\ \dfrac{\partial F}{\partial \zeta} = \varkappa\left(\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}\right)'; \end{cases}$$

$$(\iota)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial t\,\partial\xi} &= \varkappa^2\left\{\left(\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\tau\,\partial\xi}\right)' - \frac{p}{V^2}\,\frac{\partial^2\overline{F}'}{\partial\tau^2}\right\},\\
\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial t\,\partial\eta} &= \varkappa^2\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\left(\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\tau\,\partial\eta}\right)',\\
\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial t\,\partial\zeta} &= \varkappa^2\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\left(\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\tau\,\partial\zeta}\right)';
\end{aligned}\right.$$

$$(\varkappa)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\eta\,\partial\xi} &= \frac{\varkappa^2}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left\{\left(\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\eta\,\partial\xi}\right)' - \frac{p}{V^2}\left(\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\tau\,\partial\eta}\right)'\right\},\\
\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\zeta\,\partial\eta} &= \varkappa^2\left(\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\zeta\,\partial\eta}\right)',\\
\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\xi\,\partial\zeta} &= \frac{\varkappa^2}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left\{\left(\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\xi\,\partial\zeta}\right)' - \frac{p}{V^2}\left(\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\tau\,\partial\zeta}\right)'\right\};
\end{aligned}\right.$$

$$(\lambda)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\xi^2} &= \frac{\varkappa^2}{1-\frac{p^2}{V^2}}\left\{\left(\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\xi^2}\right)' - 2\,\frac{p}{V^2}\left(\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\tau\,\partial\xi}\right)' + \frac{p^2}{V^4}\,\frac{\partial^2\overline{F}'}{\partial\tau^2}\right\},\\
\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\eta^2} &= \varkappa^2\left(\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\eta^2}\right)',\\
\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\zeta^2} &= \varkappa^2\left(\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\zeta^2}\right)';
\end{aligned}\right.$$

$$(\mu)\quad\left\{\begin{aligned}
\operatorname{curl}_\xi\overline{F} &= \varkappa(\operatorname{curl}_\xi\overline{F})',\\
\operatorname{curl}_\eta\overline{F} &= \varkappa(\operatorname{curl}_\eta\overline{F})' + \frac{\varkappa}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left\{\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}-1\right)\left(\frac{\partial\overline{F}_\zeta}{\partial\xi}\right)' + \frac{p}{V^2}\,\frac{\partial\overline{F}'_\zeta}{\partial\tau}\right\},\\
\operatorname{curl}_\zeta\overline{F} &= \varkappa(\operatorname{curl}_\zeta\overline{F})' - \frac{\varkappa}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left\{\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}-1\right)\left(\frac{\partial\overline{F}_\eta}{\partial\xi}\right)' + \frac{p}{V^2}\,\frac{\partial\overline{F}'_\eta}{\partial\tau}\right\};
\end{aligned}\right.$$

$$(\nu)\quad (GV)\overline{F} = \varkappa((GV)F)' - \frac{\varkappa}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left\{\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}-1\right)\left(\frac{\partial\overline{F}}{\partial\xi}\right)' + \frac{p}{V^2}\,\frac{\partial\overline{F}'}{\partial\tau}\right\}G_{\xi'},$$

$$(o)\quad \operatorname{div}\overline{F} = \varkappa(\operatorname{div}\overline{F})' - \frac{\varkappa}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left\{\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}-1\right)\left(\frac{\partial\overline{F}_\xi}{\partial\xi}\right)' + \frac{p}{V^2}\,\frac{\partial\overline{F}'_\xi}{\partial\tau}\right\},$$

$$(\pi)\qquad \Delta F = \varkappa^2(\Delta F)' + \frac{\varkappa^2}{1-\frac{p^2}{V^2}}\left\{\frac{p^2}{V^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\right)' - \frac{2p}{V^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \tau\,\partial \xi}\right)' + \frac{p^2}{V^4}\frac{\partial^2 F'}{\partial \tau^2}\right\},$$

$$(\varrho)\qquad \left(\frac{dF}{dt}\right)_p = \frac{\varkappa}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left\{\left(1-\frac{2p^2}{V^2}\right)\frac{\partial F'}{\partial \tau} + p\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)'\right\},$$

$$(\sigma)\qquad \left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)_p = \frac{\varkappa}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left\{\frac{\partial F'}{\partial \tau} - p\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)'\right\},$$

oder

$$(\tau_1)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{dF}{dt}\right)_q = \dfrac{\varkappa}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left\{\left(1-\dfrac{p^2}{V^2}-\dfrac{p\,q_\xi}{V^2}\right)\dfrac{\partial F'}{\partial \tau} + q_\xi\left(\dfrac{\partial F}{\partial \xi}\right)'\right. \\ \qquad\qquad \left. + \sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}\left(q_\eta\left(\dfrac{\partial F}{\partial \eta}\right)' + q_\zeta\left(\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}\right)'\right)\right\}, \end{cases}$$

oder nach den folgenden Formeln

$$(\tau_2)\qquad \left(\frac{dF}{dt}\right)_q = \frac{\varkappa\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}{1+\frac{p\,q'_\xi}{V^2}}\left(\frac{dF}{d\tau}\right)'_{q'}.$$

Man hat nämlich

$$(\varphi)\qquad \begin{cases} q_\xi = \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{1}{\varkappa}\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}\,\dfrac{d\xi'}{\dfrac{1}{\varkappa\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left(d\tau+\dfrac{p}{V^2}d\xi'\right)} = \left(1-\dfrac{p^2}{V^2}\right)\dfrac{q'_\xi}{1+\dfrac{p}{V^2}q'_\xi}, \\[2ex] q_\eta = \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{1}{\varkappa}\,\dfrac{d\eta'}{\dfrac{1}{\varkappa\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left(d\tau+\dfrac{p}{V^2}d\xi'\right)} = \sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}\,\dfrac{q'_\eta}{1+\dfrac{p}{V^2}q'_\xi}, \\[2ex] q_\zeta = \dfrac{d\zeta}{dt} = \dfrac{1}{\varkappa}\,\dfrac{d\zeta'}{\dfrac{1}{\varkappa\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left(d\tau+\dfrac{p}{V^2}d\xi'\right)} = \sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}\,\dfrac{q'_\zeta}{1+\dfrac{p}{V^2}q'_\xi}. \end{cases}$$

Diese Werte hätten wir in die Gleichung (τ_1) noch einzusetzen, wodurch eben diese Gleichung in (τ_2) übergeht. Aus den Gleichungen (φ) folgt noch

$$(\psi)\qquad q^2 = \frac{1-\frac{p^2}{V^2}}{\left(1+\frac{p}{V^2}q'_\xi\right)^2}\left(q'^2 - \frac{p^2}{V^2}q'^2_\xi\right).$$

Nennt man ferner l, m, n die Richtungskosinus der Bewegung q im System ξ, η, ζ; l', m', n' die im System ξ', η', ζ', so wird nach (φ) und (ψ)

$$(\chi_1)\qquad \left\{\begin{aligned} l &= \sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,\frac{l'}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}l'^2}}\,,\\ m &= \frac{m'}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}l'^2}}\,,\\ n &= \frac{n'}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}l'^2}}\,. \end{aligned}\right.$$

Gleichungen, nach denen auch

$$(\omega)\qquad l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1$$

ist. Die Umkehrung der Gleichungen (φ), (ψ), (χ) ergibt

$$(\varphi')\qquad \left\{\begin{aligned} q'_\xi &= \frac{q_\xi}{1-\frac{p^2}{V^2}-\frac{p\,q_\xi}{V^2}}\,, \quad q'_\eta = \sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,\frac{q_\eta}{1-\frac{p^2}{V^2}-\frac{p\,q_\xi}{V^2}}\,,\\ q'_\zeta &= \sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,\frac{q_\zeta}{1-\frac{p^2}{V^2}-\frac{p\,q_\xi}{V^2}}\,; \end{aligned}\right.$$

$$(\psi')\qquad q'^2 = \frac{\left(1-\frac{p^2}{V^2}\right)q^2 + \frac{p^2}{V^2}q_\xi^2}{\left(1-\frac{p^2}{V^2}-\frac{p\,q_\xi}{V^2}\right)^2}\,,$$

$$(\chi')\qquad \left\{\begin{aligned} l' &= \frac{l}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}+\frac{p^2}{V^2}l^2}}\,, \quad m' = \sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,\frac{m}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}+\frac{p^2}{V^2}l^2}}\,,\\ n' &= \sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,\frac{n}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}+\frac{p^2}{V^2}l^2}}\,. \end{aligned}\right.$$

Im folgenden werden wir stets x, y, z absolute Koordinaten, ξ, η, ζ relative Koordinaten, ξ', η', ζ' Relativkoordinaten, t absolute Zeit, $t-t_0$ relative Zeit, τ Relativzeit nennen; x, y, z, t heiße das absolute, $\xi, \eta, \zeta, t-t_0$ das relative, $\xi', \eta', \zeta', \tau$ das Relativ-Raum-Zeit-System.

Die Größe $\varkappa$ ist zwar willkürlich, muß jedoch konstant sein und von p so abhängen, daß sie für $p = 0$ gleich 1 wird. Ihre Mitführung wird sich übrigens später erübrigen.

Die zweite Transformationsweise ist, wie H. A. Lorentz[1]) selbst hervorhebt, zuerst von Voigt[2]) zu gleichem Zwecke wie von dem erstgenannten an-

[1]) The Theory of Electrons usf. (1909), S. 198, Anm. 1.

[2]) Über das Dopplersche Prinzip, Göttinger Nachrichten (1887), S. 41.

gewendet worden. Die große Bedeutung dieser Transformation, mit der wir uns oft zu beschäftigen haben, ist erst durch die Arbeiten von Lorentz, Einstein, Minkowski u. a. hervorgetreten.

Da in irgendeiner Funktion $\bar{F}$ von ξ, η, ζ, wenn wir diese Größen durch $x-p_x t$, $y-p_y t$, $z-p_z t$ ersetzen, wodurch sie übergehen soll in F, die x, y, z so vertreten sind wie die ξ, η, ζ in $\bar{F}$, so folgt, daß alle vorstehenden Beziehungen unverändert bleiben, wenn man in ihnen $\bar{F}$ durch F und zugleich ξ, η, ζ durch x, y, z ersetzt. Sie geben also auch die Transformationen für absolute Koordinaten.

2. Grundgleichungen der Theorie.

Die allgemeinen Grundgleichungen entsprechen in der Form den nicht mehr bezweifelten Maxwellschen Grundgleichungen für ruhende Substanzen. Sie lauten für ein festes Koordinatensystem x, y, z, also für einen ruhenden Beobachter, wenn $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ die Komponenten einer Größe $\mathfrak{F}$ darstellen.

$$(\mathrm{I}_1 a)\quad \left\{\begin{aligned} &+\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}\right)=\frac{D\mathfrak{D}_x}{Dt}+J_x\,,\\ &+\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}\right)=\frac{D\mathfrak{D}_y}{Dt}+J_y\,,\\ &+\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}\right)=\frac{D\mathfrak{D}_z}{Dt}+J_z\,; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{I}_1 b)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}\right)=\frac{D\mathfrak{B}_x}{Dt}\,,\\ &-\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}\right)=\frac{D\mathfrak{B}_y}{Dt}\,,\\ &-\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}\right)=\frac{D\mathfrak{B}_z}{Dt}\,, \end{aligned}\right.$$

oder in Vektorschreibweise[1]) zusammenfassend

$$(\mathrm{I}_2 a)\qquad +\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\mathfrak{H}=\frac{D\mathfrak{D}}{Dt}+J\,,$$

$$(\mathrm{I}_2 b)\qquad -\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\mathfrak{E}=\frac{D\mathfrak{B}}{Dt}\,.$$

Unter C_0 ist die Geschwindigkeit der Lichtverbreitung im freien, unbewegten Äther verstanden; elektrische Größen sind dann elektrostatisch, magnetische magnetisch zu messen. Der Faktor $\frac{1}{4\pi}$ ist hinzugefügt, um bei den Verbindungen zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$, sowie zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ mit den Maxwellschen Festsetzungen in Einklang zu bleiben, denen auch H. A. Lorentz früher wesentlich gefolgt ist.

Diese je drei Gleichungen bestehen zwischen den fünfzehn Komponenten der $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, J. Dabei ist in ruhenden Stoffen: $\mathfrak{E}$ die elektrische, $\mathfrak{H}$ die magnetische Kraft oder Feldintensität, $\mathfrak{D}$ die elektrische, $\mathfrak{B}$ die magnetische Polari-

[1]) Wegen der vektoriellen Schreibweise und der im nachfolgenden angewandten Vektorrechnung sei auf die Zusammenstellung S. 119ff. verwiesen.

sierung (oder Induktion, Verschiebung, Erregung usf.), J ist die Stärke des Leitungsstromes. Alle Größen, wie die Beobachtung sie kennen lehrt. Findet Bewegung statt, so können die gleichen Benennungen beibehalten werden, was dann aber der Beobachtung unterliegt, richtet sich nach der betreffenden Theorie.

Die in den Formeln angedeuteten mathematischen Operationen sind die üblichen, bis auf die durch $\frac{D}{Dt}$ bezeichnete. Wenn die Stoffe ruhen, stellt diese Operation die partielle Differentation nach der Zeit dar, also $\frac{\partial}{\partial t}$, und erstreckt sich allein auf Änderungen in der Zeit, an derselben Stelle. Handelt es sich um Stoffe in Bewegung, so beginnen eigentlich die Verschiedenheiten der Theorien gegeneinander schon in der Festsetzung der Operation, die $\frac{D}{Dt}$ bedeuten soll. Alle Festsetzungen leiten sich jedoch aus der Darstellung ab, die Maxwell[1]), Heaviside[2]) und Heinrich Hertz[3]) angegeben haben, nämlich mit $\mathfrak{F}$ für $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{B}$ bezogen auf ein ruhendes Koordinatensystem.

$$(\mathrm{II}_1)\quad\begin{cases}\dfrac{D\mathfrak{F}_x}{Dt}=\dfrac{\partial\mathfrak{F}_x}{\partial t}+g_x\left(\dfrac{\partial\mathfrak{F}_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{F}_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{F}_z}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{F}_x g_y-\mathfrak{F}_y g_x)-\dfrac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{F}_z g_x-\mathfrak{F}_x g_z)\,,\\[2ex]\dfrac{D\mathfrak{F}_y}{Dt}=\dfrac{\partial\mathfrak{F}_y}{\partial t}+g_y\left(\dfrac{\partial\mathfrak{F}_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{F}_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{F}_z}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{F}_y g_z-\mathfrak{F}_z g_y)-\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{F}_x g_y-\mathfrak{F}_y g_x)\,,\\[2ex]\dfrac{D\mathfrak{F}_z}{Dt}=\dfrac{\partial\mathfrak{F}_z}{\partial t}+g_z\left(\dfrac{\partial\mathfrak{F}_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{F}_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{F}_z}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{F}_z g_x-\mathfrak{F}_x g_z)-\dfrac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{F}_y g_z-\mathfrak{F}_z g_y)\,.\end{cases}$$

In der Sprache der Vektorrechnung schreiben wir zusammenfassend

$$(\mathrm{II}_2)\qquad \frac{D\mathfrak{F}}{Dt}=\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial t}+g\,\mathrm{div}\,\mathfrak{F}+\mathrm{curl}[\mathfrak{F}g]\,.$$

Andere gleichbedeutende Formen sind

$$(\mathrm{II}_3)\quad\begin{cases}\dfrac{D\mathfrak{F}_x}{Dt}=\dfrac{\partial\mathfrak{F}_x}{\partial t}+g_x\dfrac{\partial\mathfrak{F}_x}{\partial x}+g_y\dfrac{\partial\mathfrak{F}_x}{\partial y}+g_z\dfrac{\partial\mathfrak{F}_x}{\partial z}-\mathfrak{F}_x\dfrac{\partial g_x}{\partial x}-\mathfrak{F}_y\dfrac{\partial g_x}{\partial y}-\mathfrak{F}_z\dfrac{\partial g_x}{\partial z}\\[1ex]\qquad\qquad+\mathfrak{F}_x\left(\dfrac{\partial g_x}{\partial x}+\dfrac{\partial g_y}{\partial y}+\dfrac{\partial g_z}{\partial z}\right),\\[2ex]\dfrac{D\mathfrak{F}_y}{Dt}=\dfrac{\partial\mathfrak{F}_y}{\partial t}+g_x\dfrac{\partial\mathfrak{F}_y}{\partial x}+g_y\dfrac{\partial\mathfrak{F}_y}{\partial y}+g_z\dfrac{\partial\mathfrak{F}_y}{\partial z}-\mathfrak{F}_x\dfrac{\partial g_y}{\partial x}-\mathfrak{F}_y\dfrac{\partial g_y}{\partial y}-\mathfrak{F}_z\dfrac{\partial g_y}{\partial z}\\[1ex]\qquad\qquad+\mathfrak{F}_y\left(\dfrac{\partial g_x}{\partial x}+\dfrac{\partial g_y}{\partial y}+\dfrac{\partial g_z}{\partial z}\right),\\[2ex]\dfrac{D\mathfrak{F}_z}{Dt}=\dfrac{\partial\mathfrak{F}_z}{\partial t}+g_x\dfrac{\partial\mathfrak{F}_z}{\partial x}+g_y\dfrac{\partial\mathfrak{F}_z}{\partial y}+g_z\dfrac{\partial\mathfrak{F}_z}{\partial z}-\mathfrak{F}_x\dfrac{\partial g_z}{\partial x}-\mathfrak{F}_y\dfrac{\partial g_z}{\partial y}-\mathfrak{F}_z\dfrac{\partial g_z}{\partial z}\\[1ex]\qquad\qquad+\mathfrak{F}_z\left(\dfrac{\partial g_x}{\partial x}+\dfrac{\partial g_y}{\partial y}+\dfrac{\partial g_z}{\partial z}\right)\end{cases}$$

---

[1]) Phil. Mag. April 1861 „On Physical Lines of Force" (1861).

[2]) Electromagnetic Theory 2 Bde, insbesondere Bd. I (1893), sowie eine Reihe von Aufsätzen in der Zeitschrift „Electrician".

[3]) Gesammelte Werke 2, 256ff., Wied. Ann. 41, 369 (1890).

und vektoriell geschrieben

$$(\mathrm{II}_4)\qquad \frac{D\mathfrak{F}}{Dt} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + (g\nabla)\mathfrak{F} - (\mathfrak{F}\nabla)g + \mathfrak{F}\operatorname{div} g\,.$$

Setzen wir noch

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial t} + g_x\frac{\partial}{\partial x} + g_y\frac{\partial}{\partial y} + g_z\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + (g\nabla) = \frac{d}{dt}\,,$$

so haben wir auch

$$(\mathrm{II}_5)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{D\mathfrak{F}_x}{Dt} &= \frac{d\mathfrak{F}_x}{dt} - \mathfrak{F}_x\frac{\partial g_x}{\partial x} - \mathfrak{F}_y\frac{\partial g_x}{\partial y} - \mathfrak{F}_z\frac{\partial g_x}{\partial z} + \mathfrak{F}_x\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right),\\
\frac{D\mathfrak{F}_y}{Dt} &= \frac{d\mathfrak{F}_y}{dt} - \mathfrak{F}_x\frac{\partial g_y}{\partial x} - \mathfrak{F}_y\frac{\partial g_y}{\partial y} - \mathfrak{F}_z\frac{\partial g_y}{\partial z} + \mathfrak{F}_y\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right),\\
\frac{D\mathfrak{F}_z}{Dt} &= \frac{d\mathfrak{F}_z}{dt} - \mathfrak{F}_x\frac{\partial g_z}{\partial x} - \mathfrak{F}_y\frac{\partial g_z}{\partial y} - \mathfrak{F}_z\frac{\partial g_z}{\partial z} + \mathfrak{F}_z\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right.$$

und vektoriell geschrieben

$$(\mathrm{II}_6)\qquad \frac{D\mathfrak{F}}{Dt} = \frac{d\mathfrak{F}}{dt} - (\mathfrak{F}\nabla)g + \mathfrak{F}\operatorname{div} g\,.$$

Endlich ist auch, abermals gleichbedeutend

$$(\mathrm{II}_7\mathrm{a})\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{D\mathfrak{F}_x}{Dt} &= \frac{d\mathfrak{F}_x}{dt} + \mathfrak{F}_x\frac{\partial g_y}{\partial y} - \mathfrak{F}_y\frac{\partial g_x}{\partial y} + \mathfrak{F}_x\frac{\partial g_z}{\partial z} - \mathfrak{F}_z\frac{\partial g_x}{\partial z}\,,\\
\frac{D\mathfrak{F}_y}{Dt} &= \frac{dF_y}{dt} + \mathfrak{F}_y\frac{\partial g_z}{\partial z} - \mathfrak{F}_z\frac{\partial g_y}{\partial z} + \mathfrak{F}_y\frac{\partial g_x}{\partial x} - \mathfrak{F}_x\frac{\partial g_y}{\partial x}\,,\\
\frac{D\mathfrak{F}_z}{Dt} &= \frac{d\mathfrak{F}_z'}{dt} + \mathfrak{F}_z\frac{\partial g_x}{\partial x} - \mathfrak{F}_x\frac{\partial g_z}{\partial x} + \mathfrak{F}_z\frac{\partial g_y}{\partial y} - \mathfrak{F}_y\frac{\partial g_z}{\partial y}\,.
\end{aligned}\right.$$

Zu den obigen Grundgleichungen fügen alle Theorien noch zwei Gleichungen hinzu, welche die wahren Dichten[1]) ϱ_e, ϱ_m der Elektrizität und des Magnetismus definieren, nämlich

$$(\mathrm{III}_1\mathrm{a})\qquad \frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} = \varrho_e\,,$$

$$(\mathrm{III}_1\mathrm{b})\qquad \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} = \varrho_m$$

oder vektoriell geschrieben

$$(\mathrm{III}_2\mathrm{a})\qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho_e\,,$$

$$(\mathrm{III}_2\mathrm{b})\qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = \varrho_m\,.$$

Alle Theorien setzen

$$(\mathrm{III}_3\mathrm{b})\qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = \varrho_m = 0\,.$$

Für den hauptsächlich in Betracht kommenden Fall, daß die Bewegung sich zusammensetzt aus einem gleichförmigen Teil p, der die Substanz als Ganzes

[1]) In meinem Buche Thermodynamik und Kinetik der Körper **3**, 186 ff. habe ich die aus der Polarisierung berechnete Ladung die *freie*, die aus den Feldintensitäten berechnete die *wahre* genannt, hier folge ich umgekehrt der üblichen Bezeichnungsweise.

betrifft, und einem gleichförmigen oder ungleichförmigen Teil q der relative Verschiebungen der Teile der Substanz gegeneinander bedeutet, führen wir ein mit der Substanz verbundenes Koordinatensystem ξ, η, ζ ein, das sich also, mit ihr, sich selbst und dem ruhenden Koordinatensystem parallel bleibend, mit der Geschwindigkeit p bewegt. Alsdann ist

$$x = \xi + p_x t\,, \quad y = \eta + p_y t\,, \quad z = \zeta + p_z t\,. \tag{2}$$

Eine Funktion $\mathfrak{F}(t; x, y, z)$ geht dadurch über in $\mathfrak{F}(t; \xi + p_x t,\ \eta + p_y t,\ \zeta + p_z t) = \bar{\mathfrak{F}}(t; \xi, \eta, \zeta)$. Also haben wir

$$\left|\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial(\xi + p_x t)}\,\frac{\partial(\xi + p_x t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial(\eta + p_y t)}\,\frac{\partial(\eta + p_y t)}{\partial t} \\ &\qquad + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial(\zeta + p_z t)}\,\frac{\partial(\zeta + p_z t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \xi} p_x + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} p_y + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \zeta} p_z\,,\end{aligned}\right. \tag{3$_1$}$$

und da

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \xi}\,, \quad \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta}\,, \quad \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \zeta}$$

ist, so wird auch

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \xi} p_x + \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \eta} p_y + \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \zeta} p_z\,, \tag{3$_2$}$$

somit

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial t} - p_x \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \xi} - p_y \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \eta} - p_z \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \zeta}\,. \tag{3$_3$}$$

Zugleich hat man allgemeiner

$$\frac{\partial^n \mathfrak{F}}{\partial x^n} = \frac{\partial^n \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \xi^n}\,, \quad \frac{\partial^n \mathfrak{F}}{\partial y^n} = \frac{\partial^n \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \eta^n}\,, \quad \frac{\partial^n \mathfrak{F}}{\partial z^n} = \frac{\partial^n \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \zeta^n}\,. \tag{4}$$

$\bar{\mathfrak{F}}$ bezeichnet die Größe $\mathfrak{F}$ als Funktion von ξ, η, ζ; t.

Hiernach bekommen wir als Grundgleichungen mit ξ, η, ζ als Koordinaten dieselben Formeln wie früher mit x, y, z als Koordinaten, jedoch steht in der Operation $\frac{D}{Dt}$ an Stelle von $\frac{\partial}{\partial t}$ die Größe $\left(\frac{\delta \bar{\mathfrak{F}}}{\delta t}\right)_p$,

$$\left(\frac{\delta \mathfrak{F}}{\delta t}\right)_p = \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial t} - p_x \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \xi} - p_y \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \eta} - p_z \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \zeta} \tag{3$_4$}$$

und es wird

$$\frac{D\mathfrak{F}}{Dt} = \left(\frac{\delta \mathfrak{F}}{\delta t}\right)_p + g \operatorname{div} \mathfrak{F} + \operatorname{curl}[\mathfrak{F} g]\,, \tag{II$_8$}$$

oder

$$\frac{D\mathfrak{F}}{Dt} = \left(\frac{\delta \mathfrak{F}}{\partial t}\right)_p + (g\Gamma)\mathfrak{F} - (\mathfrak{F}\Gamma) g + \bar{\mathfrak{F}} \operatorname{div} g\,. \tag{II$_9$}$$

Zerlegen wir g in seine beiden Teile $p + q$, so wird

$$\frac{D\mathfrak{F}}{Dt} = \left(\frac{\delta \mathfrak{F}}{\delta t}\right)_p + p \operatorname{div} \mathfrak{F} + \operatorname{curl}[\mathfrak{F} p] + q \operatorname{div} \mathfrak{F} + \operatorname{curl}[\mathfrak{F} q]\,. \tag{II$_{10}$}$$

Nun können wir auch schreiben z. B.

$$\left(\frac{\delta \bar{\mathfrak{F}}_\xi}{\delta t}\right)_p = \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\xi}{\partial t} - p_x \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\xi}{\partial \xi} - p_y \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\xi}{\partial \eta} - p_z \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\xi}{\partial \zeta}$$

$$= \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\xi}{\partial t} - p_y \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\xi}{\partial \eta} + p_x \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\eta}{\partial \eta} - p_z \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\xi}{\partial \zeta} + p_x \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\zeta}{\partial \zeta} - p_x \left(\frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\zeta}{\partial \zeta}\right),$$

also, da p konstant sein sollte, auch

$$(5_1)\quad \begin{cases} \left(\frac{\delta \bar{\mathfrak{F}}_\xi}{\delta t}\right)_p = \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta}(p_x \bar{\mathfrak{F}}_\eta - p_y \bar{\mathfrak{F}}_\xi) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(p_z \bar{\mathfrak{F}}_\xi - p_x \bar{\mathfrak{F}}_\zeta) \\ \qquad - p_x \left(\frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}_\zeta}{\partial \zeta}\right). \end{cases}$$

In der Darstellungsweise der Vektorrechnung ist hiernach (vgl. (c_1) und (n) S. 120f.)

$$(5_2)\qquad \left(\frac{\delta \bar{\mathfrak{F}}}{\delta t}\right)_p = \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial t} + \operatorname{curl}[p\,\bar{\mathfrak{F}}] - p \operatorname{div} \bar{\mathfrak{F}}$$

und da

$$(6)\qquad [p\,\bar{\mathfrak{F}}] = -[\bar{\mathfrak{F}}\,p]$$

ist, so wird nunmehr nach (II_{10})

$$(II_{11})\qquad \frac{D\bar{\mathfrak{F}}}{Dt} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial t} + q \operatorname{div} \bar{\mathfrak{F}} + \operatorname{curl}[\bar{\mathfrak{F}}\,q]$$

und entsprechend

$$(II_{12})\qquad \frac{D\bar{\mathfrak{F}}}{Dt} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial t} + (q\,V)\,\bar{\mathfrak{F}} - (\bar{\mathfrak{F}}\,V)\,q + \bar{\mathfrak{F}} \operatorname{div} q\,.$$

Setzen wir noch entsprechend (w_1) S. 121

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial t} + (q\,V)\,\bar{\mathfrak{F}} = \left(\frac{d\bar{\mathfrak{F}}}{dt}\right)_q,$$

so gibt die letzte Beziehung auch

$$(II_{13})\qquad \frac{D\bar{\mathfrak{F}}}{Dt} = \left(\frac{d\bar{\mathfrak{F}}}{dt}\right)_q - (\bar{\mathfrak{F}}\,V)\,q + \bar{\mathfrak{F}} \operatorname{div} q\,.$$

Aus allen diesen Beziehungen aber ist die Translationsbewegung p verschwunden; die Gleichungen gelten, als wenn eine solche gar nicht bestände, wenn nur das System ξ, η, ζ sich mit der Translationsgeschwindigkeit der Substanz bewegt.

Die Grundgleichungen aber lauten, vektoriell dargestellt, für diesen Fall

$$(I_3a)\qquad + \frac{C_0}{4\pi} \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{D\mathfrak{D}}{Dt} + J_e\,,$$

$$(I_3b)\qquad - \frac{C_0}{4\pi} \operatorname{curl} \mathfrak{E} = \frac{D\mathfrak{B}}{Dt}\,.$$

wozu noch kommt

$$(III_3a)\qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho_e\,,$$

$$(III_3b)\qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0\,.$$

Endlich können wir unsere Grundgleichungen auch in Integralform schreiben. Bedeutet S eine feste Fläche und σ deren begrenzende, gleichfalls feste Randlinie, so gilt auch nach dem bekannten Stokesschen Integralsatz

$$(\mathrm{I}_4\mathrm{a}) \qquad +\frac{C_0}{4\pi}\int\limits_{\sigma}\mathfrak{H}_\sigma\,d\sigma = \frac{D}{Dt}\iint\limits_{S}\mathfrak{D}_n\,dS + \iint\limits_{S} J_n\,dS\,,$$

$$(\mathrm{I}_4\mathrm{b}) \qquad -\frac{C_0}{4\pi}\int\limits_{\sigma}\mathfrak{E}_\sigma\,d\sigma = \frac{D}{Dt}\iint\limits_{S}\mathfrak{B}_n\,dS\,.$$

$\mathfrak{H}_\sigma$, $\mathfrak{E}_\sigma$ bedeuten die Werte der Größe $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}$ in Richtung der Linie σ, $\mathfrak{D}_n$, $\mathfrak{B}_n$ die der Größen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ in Richtung der nach dem Inneren der Fläche S gehenden Normale n. Diese Gleichungen dienen auch zur unmittelbaren Ableitung der elektrischen und magnetischen Kräfte.

Aus einer Entwicklung, die Carl Neumann[1]) zwar für die Maxwell-Hertzsche Theorie durchgeführt hat, die aber allgemein dargestellt werden kann, ergibt sich noch eine andere sehr bemerkenswerte Form der Grundgleichungen.

Bezeichnet dV ein Element des Äthers und r dessen Abstand von irgendeiner Stelle x_1, y_1, z_1, und setzt man für den Punkt x_1, y_1, z_1

$$U_1 = \int \mathfrak{E}_x \frac{dV}{r}\,, \qquad V_1 = \int \mathfrak{E}_y \frac{dV}{r}\,, \qquad W_1 = \int \mathfrak{E}_z \frac{dV}{r}\,,$$

wo U_1, V_1, W_1 als Potentiale angesehen werden können von fingierter Materie, die mit der Dichte $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$ verteilt ist, so folgt

$$(7_1) \quad \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \int \mathfrak{E}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} dV = -\int \mathfrak{E}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dV = -\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\mathfrak{E}_x\right) dV + \int \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{E}_x)\,dV \text{ usf.}$$

Das erste Integral gibt bei partieller Integration $-\int \frac{1}{r}\mathfrak{E}_x \cos(n, x)\,dO$, wenn O die Oberfläche des Raumes und n die in dO gezogene Normale darstellt. Für den ganzen unendlichen Raum fällt dieses Integral nach bekannten Lehren fort. Es bleibt also

$$(7_2) \quad \frac{\partial U_1}{\partial p_1} = \int \frac{\partial}{\partial p}\mathfrak{E}_x \frac{dV}{r}\,, \quad \frac{\partial V_1}{\partial p_1} = \int \frac{\partial}{\partial p}\mathfrak{E}_y \frac{dV}{r}\,, \quad \frac{\partial W_1}{\partial p_1} = \int \frac{\partial}{\partial p}\mathfrak{E}_z \frac{dV}{r}\,; \ p = x, y, z.$$

Nun wird auf die Identität hingewiesen

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z_1^2}\right) = &-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial y_1}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial z_1}\right). \end{aligned} \right.$$

Da nach dem Laplace-Poissonschen Satz die linksstehende Größe $4\pi\mathfrak{E}_x$ ergibt, so haben wir, indem

$$(9\mathrm{a}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial W_1}{\partial x_1} = \int\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}\right)\frac{dV}{r} = 4\pi\int \varrho_e' \frac{dV}{r} = 4\pi\,\Phi_e\,, \\ &\Phi_e = \int \varrho_e' \frac{dV}{r} \end{aligned} \right.$$

---

[1]) Über die Maxwell-Hertzsche Theorie, Abhdl. der Mathem.-Physik. Klasse der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften **27**, Nr. II (1901).

gesetzt wird, wo also ϱ_e' die Raumdichte der freien Ladung bedeuten würde, nach (7_2) und (8)

$$(10)\qquad 4\pi\mathfrak{E}_{x_1} = -4\pi\frac{\partial\Phi_e}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}\right)\frac{dV}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z}\right)\frac{dV}{r}$$

und entsprechend für die anderen Komponenten und für die Größen $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$. Beachtet man jetzt die Grundgleichungen (I a) und (I b), so folgt, wenn wir bei der früheren Anordnung bleiben,

$$(\mathrm{I}_5\mathrm{a})\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{H}_x &= -\frac{\partial\Phi_m}{\partial x} + \frac{1}{C_0}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int\left(4\pi J_z + \frac{D\mathfrak{D}_z}{Dt}\right)\frac{dV}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int\left(4\pi J_y + \frac{D\mathfrak{D}_y}{Dt}\right)\frac{dV}{r}\right\},\\
\mathfrak{H}_y &= -\frac{\partial\Phi_m}{\partial y} + \frac{1}{C_0}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\int\left(4\pi J_x + \frac{D\mathfrak{D}_x}{Dt}\right)\frac{dV}{r} - \frac{\partial}{\partial x}\int\left(4\pi J_z + \frac{D\mathfrak{D}_z}{Dt}\right)\frac{dV}{r}\right\},\\
\mathfrak{H}_z &= -\frac{\partial\Phi_m}{\partial z} + \frac{1}{C_0}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int\left(4\pi J_y + \frac{D\mathfrak{D}_y}{Dt}\right)\frac{dV}{r} - \frac{\partial}{\partial y}\int\left(4\pi J_x + \frac{D\mathfrak{D}_x}{Dt}\right)\frac{dV}{r}\right\};
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{I}_5\mathrm{b})\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= -\frac{\partial\Phi_e}{\partial x} - \frac{1}{C_0}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{D\mathfrak{B}_z}{Dt}\frac{dV}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int\frac{D\mathfrak{B}_y}{Dt}\frac{dV}{r}\right),\\
\mathfrak{E}_y &= -\frac{\partial\Phi_e}{\partial y} - \frac{1}{C_0}\left(\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{D\mathfrak{B}_x}{Dt}\frac{dV}{r} - \frac{\partial}{\partial x}\int\frac{D\mathfrak{B}_z}{Dt}\frac{dV}{r}\right),\\
\mathfrak{E}_z &= -\frac{\partial\Phi_e}{\partial z} - \frac{1}{C_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{D\mathfrak{B}_y}{Dt}\frac{dV}{r} - \frac{\partial}{\partial y}\int\frac{D\mathfrak{B}_x}{Dt}\frac{dV}{r}\right).
\end{aligned}\right.$$

Die Integrationen sind auf den ganzen unendlichen Raum, einschließlich alle Träger der Ladungen, auszudehnen. Das erste Glied gibt die statischen Feldintensitäten, die folgenden Glieder enthalten die elektromagnetischen Feldintensitäten. Differenziert man die Gleichungen nach x, y, z und addiert in jedem System, so folgt

$$\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial z} = -\Delta\Phi_m = 4\pi\varrho_m',$$

$$\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial z} = -\Delta\Phi_e = 4\pi\varrho_e'.$$

Die betreffenden statischen Beziehungen sind also auch allgemein erfüllt, oder die Beziehungen bilden nur Definitionen für die freien Dichten ϱ'.

Im folgenden werden wir uns bald der einen, bald der anderen Form bedienen. Für die nächsten Rechnungen schreiben wir die Gleichungen in der Form (II_1) vollständig hin

$$(\mathrm{I}_6\mathrm{a})\left\{\begin{aligned}
&+\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial z}\right) = J_x + \frac{\partial\mathfrak{D}_x}{\partial t} + g_x\varrho_e + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{D}_x g_y - \mathfrak{D}_y g_x)\\
&\qquad\qquad - \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{D}_z g_x - \mathfrak{D}_x g_z) = \frac{D\mathfrak{D}_x}{Dt} + J_x,\\
&+\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial x}\right) = J_y + \frac{\partial\mathfrak{D}_y}{\partial t} + g_y\varrho_e + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{D}_y g_z - \mathfrak{D}_z g_y)\\
&\qquad\qquad - \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{D}_x g_y - \mathfrak{D}_y g_x) = \frac{D\mathfrak{D}_y}{Dt} + J_y,\\
&+\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial y}\right) = J_z + \frac{\partial\mathfrak{D}_z}{\partial t} + g_z\varrho_e + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{D}_z g_x - \mathfrak{D}_x g_z)\\
&\qquad\qquad - \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{D}_y g_z - \mathfrak{D}_z g_y) = \frac{D\mathfrak{D}_z}{Dt} + J_z;
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{I_6 b})\quad\left\{\begin{aligned}
-\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}\right) &= \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial t}+g_x\varrho_m+\frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{B}_x g_y-\mathfrak{B}_y g_x)\\
&\qquad -\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{B}_z g_x-\mathfrak{B}_x g_z)=\frac{D\mathfrak{B}_x}{Dt},\\
-\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial t}+g_y\varrho_m+\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{B}_y g_z-\mathfrak{B}_z g_y)\\
&\qquad -\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{B}_x g_y-\mathfrak{B}_y g_x)=\frac{D\mathfrak{B}_y}{Dt},\\
-\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}\right) &= \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t}+g_z\varrho_m+\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{B}_z g_x-\mathfrak{B}_x g_z)\\
&\qquad -\frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{B}_y g_z-\mathfrak{B}_z g_y)=\frac{D\mathfrak{B}_z}{Dt}.
\end{aligned}\right.$$

Differenzieren wir jedes der Systeme nach x, y, z und addieren in jedem System, so fallen alle curl-Größen fort und es bleibt nach ($\mathrm{III_1}$a, b)

$$(\mathrm{IV_1 a})\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}+\frac{\partial J_z}{\partial z}+\frac{\partial \varrho_e}{\partial t}+g_x\frac{\partial \varrho_e}{\partial x}+g_y\frac{\partial \varrho_e}{\partial y}+g_z\frac{\partial \varrho_e}{\partial z}\\
&\qquad+\varrho_e\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)=0\,.
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{IV_1 b})\quad \frac{\partial \varrho_m}{\partial t}+g_x\frac{\partial \varrho_m}{\partial x}+g_y\frac{\partial \varrho_m}{\partial y}+g_z\frac{\partial \varrho_m}{\partial z}+\varrho_m\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)=0\,,$$

oder mit der Bezeichnung unter (w) (S. 121)

$$(\mathrm{IV_2 a})\quad \frac{d\varrho_e}{dt}+\varrho_e\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)=-\left(\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}+\frac{\partial J_z}{\partial z}\right),$$

$$(\mathrm{IV_2 b})\quad \frac{d\varrho_m}{dt}+\varrho_m\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)=0\,.$$

Die Größe

$$(10)\quad \frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}=\frac{1}{dV}\,\frac{d(dV)}{dt}$$

stellt die relative Dilatation oder Kompression des Stoffes in der Zeiteinheit infolge der Bewegung g dar. Also wird

$$(\mathrm{IV_3 a})\quad \frac{d(\varrho_e dV)}{dt}=\frac{de}{dt}=-\left(\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}+\frac{\partial J_z}{\partial z}\right)dV\,.$$

$$(\mathrm{IV_3 b})\quad \frac{d(\varrho_m dV)}{dt}=\frac{dm}{dt}=0\,.$$

Die magnetische wahre Ladung m bleibt also unter allen Umständen, die elektrische wahre Ladung e sicher in Isolatoren von der Bewegung unbeeinflußt; die Ladungen sind an die sich bewegenden Teile gebunden. Alle Theorien, die von den angegebenen Grundgleichungen Gebrauch machen, können also an die Elektronentheorie angeschlossen werden. Das gilt also namentlich von der bald zu behandelnden Maxwell-Hertzschen Theorie.

Eine weitere Untersuchung betrifft die Energieverhältnisse und die Maxwellschen Spannungen.

Wir multiplizieren die Grundgleichungen (I_6a, b) mit $4\pi\mathfrak{E}_x$, $4\pi\mathfrak{E}_y$, $4\pi\mathfrak{E}_z$; $4\pi\mathfrak{H}_x$, $4\pi\mathfrak{H}_y$, $4\pi\mathfrak{H}_z$ und addieren alles. Dann kommt

$$
(\mathrm{V}_1)\left\{\begin{aligned}
&C_0\Big(\mathfrak{E}_x\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial y}-\mathfrak{E}_z\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial z}-\mathfrak{H}_x\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial y}+\mathfrak{H}_x\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial z}+\mathfrak{E}_y\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial z}-\mathfrak{E}_y\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial x}-\mathfrak{H}_y\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z}+\mathfrak{H}_y\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}\\
&\qquad+\mathfrak{E}_z\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial x}-\mathfrak{E}_z\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial y}-\mathfrak{H}_z\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x}+\mathfrak{H}_z\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}\Big)\\
&=4\pi\Big(\mathfrak{E}_x\frac{D\mathfrak{D}_x}{Dt}+\mathfrak{E}_y\frac{D\mathfrak{D}_y}{Dt}+\mathfrak{E}_z\frac{D\mathfrak{D}_z}{Dt}+\mathfrak{H}_x\frac{D\mathfrak{B}_x}{Dt}+\mathfrak{H}_y\frac{D\mathfrak{B}_y}{Dt}+\mathfrak{H}_z\frac{D\mathfrak{B}_z}{Dt}\Big)\\
&+4\pi(\mathfrak{E}_xJ_x+\mathfrak{E}_yJ_y+\mathfrak{E}_zJ_z)\,.
\end{aligned}\right.
$$

Die Glieder der linken Seite ziehen sich zusammen zu

$$C_0\Big(\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y-\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z)+\frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_z-\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_x)+\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_x-\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_y)\Big)=-C_0\operatorname{div}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\,.$$

Die Glieder der rechten Seite geben nach (II_5) (S. 133)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big\{\frac{d}{dt}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x+\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y+\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z)+\frac{d}{dt}(\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x+\mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y+\mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z)\Big\}\\
&+\frac{1}{2}\Big\{\mathfrak{E}_x\frac{d\mathfrak{D}_x}{dt}+\mathfrak{E}_y\frac{d\mathfrak{D}_y}{dt}+\mathfrak{E}_z\frac{d\mathfrak{D}_z}{dt}-\mathfrak{D}_x\frac{d\mathfrak{E}_x}{dt}-\mathfrak{D}_y\frac{d\mathfrak{E}_y}{dt}-\mathfrak{D}_z\frac{d\mathfrak{E}_z}{dt}\\
&\qquad+\mathfrak{H}_x\frac{d\mathfrak{B}_x}{dt}+\mathfrak{H}_y\frac{d\mathfrak{B}_y}{dt}+\mathfrak{H}_z\frac{d\mathfrak{B}_z}{dt}-\mathfrak{B}_x\frac{d\mathfrak{H}_x}{dt}-\mathfrak{B}_y\frac{d\mathfrak{H}_y}{dt}-\mathfrak{B}_z\frac{d\mathfrak{H}_z}{dt}\Big\}\\
&-\Big\{\mathfrak{E}_x\Big(\mathfrak{D}_x\frac{\partial g_x}{\partial x}+\mathfrak{D}_y\frac{\partial g_x}{\partial y}+\mathfrak{D}_z\frac{\partial g_x}{\partial z}\Big)+\mathfrak{E}_y\Big(\mathfrak{D}_x\frac{\partial g_y}{\partial x}+\mathfrak{D}_y\frac{\partial g_y}{\partial y}+\mathfrak{D}_z\frac{\partial g_y}{\partial z}\Big)\\
&\qquad+\mathfrak{E}_z\Big(\mathfrak{D}_x\frac{\partial g_z}{\partial x}+\mathfrak{D}_y\frac{\partial g_z}{\partial y}+\mathfrak{D}_z\frac{\partial g_z}{\partial z}\Big)\Big\}\\
&-\Big\{\mathfrak{H}_x\Big(\mathfrak{B}_x\frac{\partial g_x}{\partial x}+\mathfrak{B}_y\frac{\partial g_x}{\partial y}+\mathfrak{B}_z\frac{\partial g_x}{\partial z}\Big)+\mathfrak{H}_y\Big(\mathfrak{B}_x\frac{\partial g_y}{\partial x}+\mathfrak{B}_y\frac{\partial g_y}{\partial y}+\mathfrak{B}_z\frac{\partial g_y}{\partial z}\Big)\\
&\qquad+\mathfrak{H}_z\Big(\mathfrak{B}_x\frac{\partial g_z}{\partial x}+\mathfrak{B}_y\frac{\partial g_z}{\partial y}+\mathfrak{B}_z\frac{\partial g_z}{\partial z}\Big)\Big\}\\
&+\Big\{\Big(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\Big)(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x+\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y+\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z+\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x+\mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y+\mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z)\Big\}\\
&+\{\mathfrak{E}_xJ_x+\mathfrak{E}_yJ_y+\mathfrak{E}_zJ_z\}
\end{aligned}
$$

oder vektoriell geschrieben und ein wenig anders geordnet

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\big(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}\big)+\big(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{B}}\big)\Big\}+\frac{1}{2}\Big\{\Big(\overline{\mathfrak{E}\frac{d\mathfrak{D}}{dt}}\Big)+\Big(\overline{\mathfrak{H}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}}\Big)-\Big(\overline{\mathfrak{D}\frac{d\mathfrak{E}}{dt}}\Big)-\Big(\overline{\mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{H}}{dt}}\Big)\Big\}\\
&\qquad-\Big\{\big(\overline{\mathfrak{E}(\mathfrak{D}\nabla)g}\big)+\big(\overline{\mathfrak{H}(\mathfrak{B}\nabla)g}\big)\Big\}+\Big\{\big(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}\big)+\big(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{B}}\big)\Big\}\operatorname{div}g+\big(\overline{\mathfrak{E}J}\big)\,.
\end{aligned}
$$

Wir setzen

(VI) $$\frac{4\pi}{2}\left\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right\} = R\,,$$

(VII) $$\frac{4\pi}{2}\left\{\left(\mathfrak{E}\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right) + \left(\mathfrak{H}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right) - \left(\mathfrak{D}\frac{d\mathfrak{E}}{dt}\right) - \left(\mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{H}}{dt}\right)\right\} = L\,,$$

(VIII) $$4\pi\left\{\left(\mathfrak{E}(\mathfrak{D}V)g\right) + \left(\mathfrak{H}(\mathfrak{B}V)g\right)\right\} = P\,,$$

(IX) $$4\pi(\mathfrak{E}J) = Q\,,$$

(X_1) $$C_0[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \mathfrak{P}\,,$$

wobei also $\mathfrak{P}$ aus drei Komponenten besteht, und haben dann

(V_2) $$-\operatorname{div}\mathfrak{P} = \frac{dR}{dt} + L + Q - P + 2R\operatorname{div}g\,.$$

Beachten wir die Beziehung unter (6) für div g, so wird auch

(V_3) $$-(\operatorname{div}\mathfrak{P} + Q)\,dV = \frac{d}{dt}(R\,dV) + (L - P + R\operatorname{div}g)\,dV\,.$$

Wir setzen noch

(XI_1) $$\frac{dR}{dt} + R\operatorname{div}g = \frac{\mathfrak{d}R}{\mathfrak{d}t}\,.$$

Beachtet man die Beziehung (7), so ist auch

(XI_2) $$\frac{\mathfrak{d}R}{\mathfrak{d}t} = \frac{dR}{dt} + R\frac{d(dV)}{dt}\frac{1}{dV} = \frac{1}{dV}\frac{d(RdV)}{dt}\,.$$

Es wird aber

(V_4) $$-(\operatorname{div}\mathfrak{P} + Q) = \frac{\mathfrak{d}R}{\mathfrak{d}t} + L - (P - R\operatorname{div}g)\,.$$

Die Glieder $P - R\operatorname{div}g$ können wir noch in besonderer Weise schreiben. Wir führen eine Größe mit 9 Komponenten — eine solche Größe heißt ein T e n s o r — ein, die in folgender Weise bestimmt sind:

(XII) $$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi}X_x &= \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x - \frac{1}{2}\left\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right\},\\
\frac{1}{4\pi}X_y &= \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y\,,\\
\frac{1}{4\pi}X_z &= \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_z\,;\\
\frac{1}{4\pi}Y_x &= \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_x\,,\\
\frac{1}{4\pi}Y_y &= \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y - \frac{1}{2}\left\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right\},\\
\frac{1}{4\pi}Y_z &= \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_z\,;\\
\frac{1}{4\pi}Z_x &= \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_x\,,\\
\frac{1}{4\pi}Z_y &= \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_y\,,\\
\frac{1}{4\pi}Z_z &= \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z - \frac{1}{2}\left\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Die Größen $X_x, \ldots, Z_z$ sind die Maxwellschen Spannungen in ruhenden Stoffen. Ferner setzen wir

(11) $$\begin{cases} x_x = \dfrac{\partial g_x}{\partial x}, \quad y_y = \dfrac{\partial g_y}{\partial y}, \quad z_z = \dfrac{\partial g_z}{\partial z}, \\ x_y' = \dfrac{\partial g_x}{\partial y}, \quad x_z' = \dfrac{\partial g_x}{\partial z}, \quad y_x' = \dfrac{\partial g_y}{\partial x}, \quad y_z' = \dfrac{\partial g_y}{\partial z}, \quad z_x' = \dfrac{\partial g_z}{\partial x}, \quad z_y' = \dfrac{\partial g_z}{\partial y}. \end{cases}$$

Dann wird zufolge (VI), (VIII) und wegen

(12) $$\operatorname{div} \mathfrak{g} = x_x + y_y + z_z$$

(V_5) $$\begin{cases} -(\operatorname{div}\mathfrak{P} + Q) = \dfrac{\mathfrak{d}R}{\mathfrak{d}t} + L \\ -(x_x X_x + y_y Y_y + z_z Z_z + x_y' X_y + x_z' X_z + y_x' Y_x + y_z' Y_z + z_x' Z_x + z_y' Z_y). \end{cases}$$

Wir multiplizieren die letzte Darstellung mit dV, einem Volumenelement, und integrieren über einen zusammenhängenden Raum V, dessen Oberfläche O sein soll. Es ist dann

(V_6) $$\begin{cases} -\iiint (\operatorname{div}\mathfrak{P} + Q)\, dV \\ = \iiint \left\{\dfrac{\mathfrak{d}R}{\mathfrak{d}t} + L - (x_x X_x + y_y Y_y + z_z Z_z + x_y' X_y + x_z' X_z + y_x' Y_x + y_z' Y_z + z_x' Z_x + z_y' Z_y\right\} dV. \end{cases}$$

Da man hat

$$\iiint \operatorname{div}\mathfrak{P}\, dV = + \iint \mathfrak{P}_n\, dO,$$

wo

(XIII) $$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}_x \cos(n, x) + \mathfrak{P}_y \cos(n, y) + \mathfrak{P}_z \cos(n, z)$$

die Komponente von P entlang der nach außen gerichteten Normalen an dO ist, so stellt P die Poyntingsche Energieströmung dar. Ihre Komponenten sind

(X_2) $$\begin{cases} \mathfrak{P}_x = C_0[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x = C_0(\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y), \\ \mathfrak{P}_y = C_0[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_y = C_0(\mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_z), \\ \mathfrak{P}_z = C_0[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_z = C_0(\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_x). \end{cases}$$

Multipliziert man sie mit $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$; $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$ und addiert jedesmal, so folgt

(XIVa) $$\mathfrak{E}_x \mathfrak{P}_x + \mathfrak{E}_y \mathfrak{P}_y + \mathfrak{E}_z \mathfrak{P}_z = 0,$$

(XIVb) $$\mathfrak{H}_x \mathfrak{P}_x + \mathfrak{H}_y \mathfrak{P}_y + \mathfrak{H}_z \mathfrak{P}_z = 0.$$

Die Poyntingsche Energieströmung zieht also senkrecht zu jeder der Feldstärken $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, d. h. senkrecht zu der Ebene durch die Richtungen dieser Feldstärken an jeder Stelle.

Wir können in der Umwandlung der Integrale noch weiter gehen. So ist beispielsweise

$$\iiint x_x X_x\, dV = \iiint \frac{\partial g_x}{\partial x} X_x\, dV = \iiint \frac{\partial}{\partial x}(g_x X_x)\, dV - \iiint g_x \frac{\partial X_x}{\partial x}\, dV$$
$$= + \iint g_x X_x \cos(n, x)\, dO - \iiint g_x \frac{\partial X_x}{\partial x}\, dV$$

und entsprechend für die anderen Glieder. Also haben wir für die Spannungsglieder

$$\iiint (x_x X_x + y_y Y_y + z_z Z_z + x_y' X_y + x_z' X_z + y_z' Y_x + y_z' Y_z + z_x' Z_x + z_y' Z_y)\, dV$$

$$= \iint \big((g_x X_x + g_y Y_x + g_z Z_x)\cos(n, x) + (g_x X_y + g_y Y_y + g_z Z_y)\cos(n, y)$$
$$+ (g_x X_z + g_y Y_z + g_z Z_z)\cos(n, z)\big)\, dO$$

$$-\iiint \Big\{ g_x\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) + g_y\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)$$
$$+ g_z\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\Big\} dV .$$

Setzt man

$$\text{(XV)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}_x' = \mathfrak{P}_x - (g_x X_x + g_y Y_x + g_z Z_x)\,, \\ \mathfrak{S}_y' = \mathfrak{P}_y - (g_x X_y + g_y Y_y + g_z Z_y)\,, \\ \mathfrak{S}_z' = \mathfrak{P}_z - (g_x X_z + g_y Y_z + g_z Z_z)\,, \end{cases}$$

ferner

$$\text{(XVI)} \qquad \begin{cases} K_x' = \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z}\,, \\ K_y' = \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z}\,, \\ K_z' = \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z}\,, \end{cases}$$

so wird hiernach

$$(\text{V}_7) \qquad \begin{cases} -\iint \mathfrak{S}_n' \, dO = \iiint \dfrac{\mathfrak{d} R}{\mathfrak{d} t} dV + \iiint L\, dV \\ \qquad + \iiint (g_x K_x' + g_y K_y' + g_z K_z')\, dV + \iiint Q\, dV . \end{cases}$$

$\mathfrak{S}_n'$ nennen wir die ganze relative Energieströmung. Auf Raumeinheit bezogen ist, entsprechend (V_5)

$$(\text{V}_8) \qquad Q + \operatorname{div} \mathfrak{S}' = -\frac{\mathfrak{d} R}{\mathfrak{d} t} - (L + g_x K_x' + g_y K_y' + g_z K_z')\,.$$

In weiterer Umwandlung lösen wir die Differentialquotienten $\dfrac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d} t}$ nach (XI) wieder auf in

$$(\text{XI}_3) \qquad \frac{\mathfrak{d} R}{\mathfrak{d} t} = \frac{\partial R}{\partial t} + g_x \frac{\partial R}{\partial x} + g_y \frac{\partial R}{\partial y} + g_z \frac{\partial R}{\partial z} + R \operatorname{div} g\,.$$

Nun ist

$$\iiint g_x \frac{\partial R}{\partial x} dV = \iiint \frac{\partial}{\partial x}(g_x R)\, dV - \iiint R \frac{\partial g_x}{\partial x} dV$$
$$= \iint g_x R \cos(n, x)\, dO - \iiint R \frac{\partial g_x}{\partial x} dV$$

und entsprechend für die anderen Glieder, also wird

$$\iiint \frac{\mathfrak{d} R}{\mathfrak{d} t}\, dV = \iint \big(R\,[g_x \cos(n, x)] + g_y \cos(n, y) + g_z \cos(n, z)\big)\, dO + \iiint \frac{\partial R}{\partial t}\, dV.$$

Setzen wir nunmehr

$$(\text{XVII})\quad \begin{cases} \mathfrak{S}_x = \mathfrak{S}'_x + g_x R = \mathfrak{P}_x + g_x R - (g_x X_x + g_y Y_x + g_z Z_x)\,, \\ \mathfrak{S}_y = \mathfrak{S}'_y + g_y R = \mathfrak{P}_y + g_y R - (g_x X_y + g_y Y_y + g_z Z_y)\,, \\ \mathfrak{S}_z = \mathfrak{S}'_z + g_z R = \mathfrak{P}_z + g_z R - (g_x X_z + g_y Y_z + g_z Z_z)\,, \end{cases}$$

so wird

$$(\text{V}_9)\quad -\iint \mathfrak{S}_n\, dV = \iiint \frac{\partial R}{\partial t} dV + \iiint L\, dV + \iiint (g_x K'_x + g_y K'_y + g_z K'_z)\, dV + \iiint Q\, dV$$

und für Raumeinheit

$$(\text{V}_{10})\qquad Q + \operatorname{div} \mathfrak{S} = -\frac{\partial R}{\partial t} - (L + g_x K'_x + g_y K'_y + g_z K'_z)\,.$$

$\mathfrak{S}$ nennen wir die ganze absolute Energieströmung. Q ist, wie nachträglich bemerkt wird, die Stromwärme (Jouleeffekt), R die Energiedichte.

Die Gleichungen (V) in ihren verschiedenen Formen stellen im Ruhezustande den Energiesatz dar. Ob es auch im Bewegungszustande geschieht, bedarf jedesmal einer besonderen Untersuchung, da es von der Bedeutung der einzelnen Größen abhängt.

Ehe wir zu den besonderen Theorien übergehen, seien noch folgende Bemerkungen vorausgeschickt:

1. Der Faktor C_0 in den Grundgleichungen ist lediglich Umrechnungsfaktor zwischen den elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten; daß er der Geschwindigkeit der Lichtverbreitung im freien Äther an Betrag gleicht, ist eine der großen Entdeckungen Maxwells. An sich jedoch spielt er keine andere Rolle als die eines Umrechnungsfaktors. Wir hätten ihn, wie es jetzt vielfach geschieht, fortlassen können; alle Größen sind dann in den gleichen Einheiten zu messen. Behalten wir ihn bei, wie es geschehen soll, um die Maxwellschen Konstanten K, μ für den freien Äther gleich 1 setzen zu können, so sind die elektrischen Größen in elektrostatischen, die magnetischen in magnetischen Einheiten zu messen. Da, auf freien Äther bezogen, wir jene Konstanten K_0, μ_0 nennen werden, setzen wir also

$$K_0 = 1\,, \qquad \mu_0 = 1\,.$$

Doch sind diese Gleichungen nichtssagend gegenüber der Maxwellschen Entdeckung

$$\frac{1}{\sqrt{K_0 \mu_0}} = C_0\,,$$

wenn alle Größen in magnetischen Einheiten gemessen werden, C_0 also in den Gleichungen fehlt. Wir werden also auch die Buchstaben K_0, μ_0 benutzen.

2. Setzt man

$$(\text{XVIII a})\qquad \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = J'_e\,, \quad g \operatorname{div} \mathfrak{D} = g\,\varrho_e = J''_e\,, \quad \operatorname{curl}[\mathfrak{D} g] = J'''_e\,,$$

$$(\text{XVIII b})\qquad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = J'_m\,, \quad g \operatorname{div} \mathfrak{B} = g\,\varrho_m = J''_m\,, \quad \operatorname{curl}[\mathfrak{B} g] = J'''_m\,,$$

so wird bei Benutzung der Form (II_2) S. 132 für $\frac{D}{Dt}$

$$(I_7a) \qquad + \frac{C_0}{4\pi} \operatorname{curl} \mathfrak{H} = J_e + J_e' + J_e'' + J_e''',$$

$$(I_7b) \qquad - \frac{C_0}{4\pi} \operatorname{curl} \mathfrak{E} = J_m' + J_m'' + J_m'''.$$

J ist der Leitungsstrom, J', J'', J''' bedeuten den (Maxwellschen) Polarisierungsstrom, den Konvektionsstrom, den Röntgenstrom. Allein die ursprüngliche, physikalisch zu deutende Form für $\frac{D}{Dt}$ ist die (II_3), S. 132 und sie besteht nach Heinrich Hertz aus folgenden vier Teilen: 1. einem Teile aus der Änderung der Umstände allein mit der Zeit; 2. einem aus der Änderung der Umstände allein im Raum; 3. einem aus der mit der Bewegung verbundenen Drehung des elektromagnetischen Feldes; 4. einem aus der mit der Bewegung verbundenen Deformation des elektromagnetischen Feldes. Hiernach ist die eigentliche Form der Maxwell-Hertzschen Annahmen für die Operation $\frac{D}{Dt}$ die S. 133 unter (II_7a) gegebene, welche zu schreiben wäre

$$(II_7b) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{D\mathfrak{F}_x}{Dt} &= \left(\frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial t}\right) + \left(g_x \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x} + g_y \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial y} + g_z \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial z}\right) + \left(-\mathfrak{F}_y \frac{\partial g_x}{\partial y} - \mathfrak{F}_z \frac{\partial g_x}{\partial z}\right) \\ &\qquad + \mathfrak{F}_x \left(\frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right), \\ \frac{D\mathfrak{F}_y}{Dt} &= \left(\frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial t}\right) + \left(g_x \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial x} + g_y \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial y} + g_z \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial z}\right) + \left(-\mathfrak{F}_z \frac{\partial g_y}{\partial z} - \mathfrak{F}_x \frac{\partial g_y}{\partial x}\right) \\ &\qquad + \mathfrak{F}_y \left(\frac{\partial g_z}{\partial z} + \frac{\partial g_x}{\partial x}\right), \\ \frac{D\mathfrak{F}_z}{Dt} &= \left(\frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial t}\right) + \left(g_x \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial x} + g_y \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial y} + g_z \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial z}\right) + \left(-\mathfrak{F}_x \frac{\partial g_z}{\partial x} - \mathfrak{F}_y \frac{\partial g_z}{\partial y}\right) \\ &\qquad + \mathfrak{F}_z \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right), \end{aligned} \right.$$

woselbst die vier genannten Teile durch Einklammerung voneinander geschieden sind. Von dieser, durch Carl Neumann noch streng mathematisch begründeten Form, muß man bei einer physikalischen Deutung der Theorie ausgehen; die anderen Formen ergeben sich daraus durch Addition und Subtraktion von $g_x\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial z}\right)$, $g_y\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x}\right)$, $g_z\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial y}\right)$ und geeignete Zusammenfassung. Hiernach sind die tatsächlich zu berücksichtigenden Ströme, außer dem Leitungsstrom, z. B. für die Richtung der x-Achse

$$(13) \qquad J_x' = \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial t},$$

$$(14) \qquad J_x'' = g_x \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x} + g_y \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial y} + g_z \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial z},$$

$$(15) \qquad J_x''' = -\mathfrak{F}_y \frac{\partial g_x}{\partial y} - \mathfrak{F}_z \frac{\partial g_x}{\partial z},$$

$$(16) \qquad J_x''' = \mathfrak{F}_x \left(\frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right).$$

Da nun alle Theorien von der angegebenen Darstellung für $\frac{D}{Dt}$ Gebrauch machen, so enthält keine von ihnen auf der rechten, von $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{B}$ abhängigen Seite der Grundgleichungen einen eigentlichen Konvektionsstrom, sondern außer dem Leitungs- und Polarisierungsstrom nur Deformationsströme; ein Teil des Röntgenstromes hebt den Konvektionsstrom vollständig und allgemein auf. Wenn daher außer der Maxwell-Hertzschen Theorie andere Theorien gleichwohl Konvektionsströme ergeben, so kann das nur in den Annahmen über den Leitungsstrom oder über die linksstehenden Größen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und ihre Verknüpfung mit den rechtsstehenden Größen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ liegen, oder an beiden Umständen, wie auch die verschiedenen Forscher festgestellt haben, und wie im folgenden hervortreten wird.

3. Die elektromagnetischen Gleichungen und die Verbreitung elektromagnetischer Störungen nach Maxwell-Hertz.

a) Die Grundgleichungen.

Da ich für die Maxwell-Hertzsche Theorie eine, wie ich glaube, brauchbare Erweiterung vorzuschlagen habe, will ich diese Theorie, die doch schließlich die Grundlage aller Theorien bildet, eingehend behandeln. Auch soll hier vieles zur Sprache kommen und vorbereitet werden, was für alle anderen Theorien Anwendung findet.

In der Maxwell-Hertzschen Theorie lauten die Grundgleichungen wie sonst, in vektorieller Schreibweise:

$$(A_1a)\qquad +\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\mathfrak{H} = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + g\operatorname{div}\mathfrak{D} + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}g] + J_e,$$

$$(A_1b)\qquad -\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\mathfrak{E} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + g\operatorname{div}\mathfrak{B} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}g],$$

$$(Ba)\qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho_e,$$

$$(Bb)\qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0.$$

Charakteristisch für diese Theorie ist die Annahme über den Zusammenhang zwischen den Größen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und denen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ und die Deutung, die diesen Größen verliehen wird. Dieser Zusammenhang wird in der Bewegung so angesetzt, wie es von Maxwell für den Ruhezustand geschehen ist und gegenwärtig noch allgemein geschieht. Demnach sollen die $\mathfrak{D}_x$, $\mathfrak{D}_y$, $\mathfrak{D}_z$ lineare, homogene Funktionen der $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$ und die $\mathfrak{B}_x$, $\mathfrak{B}_y$, $\mathfrak{B}_z$ ebensolche der $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ sein. Also

$$(Ca)\qquad \begin{cases} 4\pi\mathfrak{D}_x = K_{xx}\mathfrak{E}_x + K_{xy}\mathfrak{E}_y + K_{xz}\mathfrak{E}_z, \\ 4\pi\mathfrak{D}_y = K_{yx}\mathfrak{E}_x + K_{yy}\mathfrak{E}_y + K_{yz}\mathfrak{E}_z, \\ 4\pi\mathfrak{D}_z = K_{zx}\mathfrak{E}_x + K_{zy}\mathfrak{E}_y + K_{zz}\mathfrak{E}_z; \end{cases}$$

$$(Cb)\qquad \begin{cases} 4\pi\mathfrak{B}_x = \mu_{xx}\mathfrak{H}_x + \mu_{xy}\mathfrak{H}_y + \mu_{xz}\mathfrak{H}_z, \\ 4\pi\mathfrak{B}_y = \mu_{yx}\mathfrak{H}_x + \mu_{yy}\mathfrak{H}_y + \mu_{yz}\mathfrak{H}_z, \\ 4\pi\mathfrak{B}_z = \mu_{zx}\mathfrak{H}_x + \mu_{zy}\mathfrak{H}_y + \mu_{zz}\mathfrak{H}_z. \end{cases}$$

Die K sind die Dielektrizitätskoeffizienten, die μ die magnetischen Permeabilitätskoeffizienten der Substanz. Diese Beziehungen sollen also nach Maxwell, Heaviside und Heinrich Hertz, auch wenn die Substanz sich bewegt, gelten, indem Heinrich Hertz ausdrücklich annimmt, daß der Äther in der Substanz sich mit dieser Substanz und in gleicher Weise wie diese Substanz sich bewegt, so daß die Beziehung zwischen Äther und ponderabler Substanz sich durch die Bewegung nicht ändert, insbesondere also auch keine relative Verschiebung zwischen Substanz und elektromagnetischem Zustand vorhanden ist. Wenn die elektromagnetische Lichttheorie die Lichtverbreitung in einer Verbreitung von elektromagnetischen Störungen sieht, so könnte hiernach die Maxwell-Hertzsche Theorie von den Erscheinungen, die man mittels des Fresnelschen Gesetzes erklärt, keine Rechenschaft geben, was schon von Heinrich Hertz selbst als ein Mangel seiner Theorie bezeichnet ist. Darüber später.

Jedenfalls haben wir für isotrope Stoffe in der Maxwell-Hertzschen Theorie, zufolge (Ca, b), welche für solche Stoffe geben

$$\mathfrak{D} = \frac{K}{4\pi}\mathfrak{E}\,, \tag{C'a}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}\,, \tag{C'b}$$

als Grundgleichungen

$$+\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{H} = \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + g\operatorname{div}\mathfrak{E} + \operatorname{curl}[\mathfrak{E}g] + \frac{4\pi}{K}J_e\,. \tag{A$_2$a}$$

$$-\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{E} = \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} + g\operatorname{div}\mathfrak{H} + \operatorname{curl}[\mathfrak{H}g] \tag{A$_2$b}$$

oder nach (II_6) (S. 133)

$$+\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{H} = \frac{d\mathfrak{E}}{dt} + \mathfrak{E}\operatorname{div}g - (\mathfrak{E}V)g + \frac{4\pi}{K}J_e\,, \tag{A$_3$a}$$

$$-\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{E} = \frac{d\mathfrak{H}}{dt} + \mathfrak{H}\operatorname{div}g - (\mathfrak{H}V)g\,. \tag{A$_3$b}$$

Sodann auch entsprechend in $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$

$$+\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + g\operatorname{div}\mathfrak{D} + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}g] + J_e\,, \tag{A$_4$a}$$

$$-\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + g\operatorname{div}\mathfrak{B} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}g] \tag{A$_4$b}$$

und

$$+\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \frac{d\mathfrak{D}}{dt} + \mathfrak{D}\operatorname{div}g - (\mathfrak{D}V)g + J_e\,, \tag{A$_5$a}$$

$$-\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt} + \mathfrak{B}\operatorname{div}g - (\mathfrak{B}V)g\,. \tag{A$_5$b}$$

Zerfällt die Geschwindigkeit g in einen absoluten Teil p und einen relativen q, so unterscheiden wir wie früher zwei andere vollständige Differentiationen durch

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_p = \frac{\partial}{\partial t} + p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z}\,, \tag{1}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_q = \frac{\partial}{\partial t} + q_x\frac{\partial}{\partial x} + q_y\frac{\partial}{\partial y} + q_z\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{2}$$

Nun geben die Gleichungen (A_4a, b) auch

$$+\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + p\operatorname{div}\mathfrak{D} + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}p] + q\operatorname{div}\mathfrak{D} + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}q] + 4\pi J_e\,,$$

$$-\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + p\operatorname{div}\mathfrak{B} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}p] + q\operatorname{div}\mathfrak{B} + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}q]\,,$$

also erhalten wir entsprechend (A_5a, b), wenn die absolute Bewegung p gleichförmig, mithin div $p = \nabla p = 0$ ist, zufolge der Umwandlung zu (A_5a, b)

$$(A_6a)\qquad +\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \left(\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right)_p + q\operatorname{div}\mathfrak{D} + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}q] + J_e\,,$$

$$(A_6b)\qquad -\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \left(\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right)_p + q\operatorname{div}\mathfrak{B} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}q]\,.$$

Weiter führen wir für diesen Fall auch relative Koordinaten ξ, η, ζ ein, die mit der Substanz fest verbunden sind und sich mit ihr mit der Geschwindigkeit p bewegen. Es ist dann (II_8) (S. 134)

$$(A_7a)\qquad +\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \left(\frac{\delta\mathfrak{D}}{\delta t}\right)_p + (p+q)\operatorname{div}\mathfrak{D} + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}(p+q)] + J_e\,,$$

$$(A_7b)\qquad -\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \left(\frac{\delta\mathfrak{B}}{\delta t}\right)_p + (p+q)\operatorname{div}\mathfrak{B} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}(p+q)]\,;$$

oder nach (II_{11}) (S. 135)

$$(A_8a)\qquad +\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + q\operatorname{div}\mathfrak{D} + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}q] + J_e\,,$$

$$(A_8b)\qquad -\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + q\operatorname{div}\mathfrak{B} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}q]\,;$$

oder nach (II_{12}) (S. 135)

$$(A_8'a)\qquad +\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + (q\nabla)\mathfrak{D} - (\mathfrak{D}\nabla)q + \mathfrak{D}\operatorname{div}q + J_e\,,$$

$$(A_8'b)\qquad -\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + (q\nabla)\mathfrak{B} - (\mathfrak{B}\nabla)q + \mathfrak{B}\operatorname{div}q\,;$$

oder nach (II_{13}) (S. 135)

$$(A_8''a)\qquad +\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \left(\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right)_q + \mathfrak{D}\operatorname{div}q - (\mathfrak{D}\nabla)q + J_e\,,$$

$$(A_8''b)\qquad -\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \left(\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right)_q + \mathfrak{B}\operatorname{div}q - (\mathfrak{B}\nabla)q\,.$$

Diese Gleichungen entsprechen vollständig den Gleichungen (A_5a, b) für absolute Koordinaten, wenn man in letzteren g durch q ersetzt. Darin spricht sich das Gesetz aus, daß, abgesehen von Substanzwechsel die Vorgänge sich unabhängig von einer etwaigen gleichförmigen Bewegung des Ganzen abspielen, wie auch die Erfahrung zum Teil gelehrt hat. Die Maxwell-Hertzsche Theorie gibt dieses Gesetz als streng erfülltes. Mathematisch ausgedrückt sind die Maxwell-Hertzschen Gleichungen unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Nachdem Hertz dieses behauptet hatte, ist es von C. Neumann[1]), der zuerst die Richtigkeit bezweifelte, in strenger Analyse bewiesen worden. Findet diese Unabhängigkeit statt, so müssen die Gleichungen unverändert auch für das mit der Substanz festverbundene Achsensystem gelten, in bezug auf welches nur relative Bewegung in Frage kommt, als wenn die Substanz als Ganzes ruhte.

Andere Formen sind noch folgende: Setzt man

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B} - \mu'[p\,\mathfrak{D}]\,, \tag{3'a}$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D} + K'[p\,\mathfrak{B}]\,, \tag{3'b}$$

wobei

$$\mu' = \frac{\mu}{C_0}\,, \tag{4a}$$

$$K' = \frac{K}{C_0} \tag{4b}$$

sein soll, so folgt aus (A_8 a, b)

$$+\frac{1}{\mu'}\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + q\operatorname{div}\mathfrak{D} + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}(p+q)] + J_e\,, \tag{A_9a}$$

$$-\frac{1}{K'}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + q\operatorname{div}\mathfrak{B} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}(p+q)] \tag{A_9b}$$

und mit

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho_e\,, \tag{Ba}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0\,, \tag{Bb}$$

$$+\frac{1}{\mu'}\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + q\,\varrho_e + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}(p+q)] + J_e\,, \tag{A_{10}a}$$

$$-\frac{1}{K'}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}(p+q)]\,. \tag{A_{10}b}$$

Sodann bei

$$\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} + \mu'[p\,\mathfrak{D}]\,, \tag{3''a}$$

$$\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D} - K'[p\,\mathfrak{B}]\,, \tag{3''b}$$

nach (A_7 a, b)

$$+\frac{1}{\mu'}\operatorname{curl}\mathfrak{B}^* = \left(\frac{\delta\mathfrak{D}}{\delta t}\right)_p + (p+q)\operatorname{div}\mathfrak{D} + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}\,q] + J_e\,, \tag{A_{11}a}$$

$$-\frac{1}{K'}\operatorname{curl}\mathfrak{D}^* = \left(\frac{\delta\mathfrak{B}}{\delta t}\right)_p + (p+q)\operatorname{div}\mathfrak{B} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\,q] \tag{A_{11}b}$$

und entsprechend (A_{10} a, b) auch

$$+\frac{1}{\mu'}\operatorname{curl}\mathfrak{B}^* = \left(\frac{\delta\mathfrak{D}}{\delta t}\right)_p + (p+q)\,\varrho_e + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}\,q] + J_e\,, \tag{A_{12}a}$$

$$-\frac{1}{K'}\operatorname{curl}\mathfrak{D}^* = \left(\frac{\delta\mathfrak{B}}{\delta t}\right)_p + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\,q]\,. \tag{A_{12}b}$$

---

[1]) „Über die Maxwell-Hertzsche Theorie", Abhdl. der Mathem.-Physik. Klasse der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften **27**, Nr. II (1901).

Wir haben bis jetzt die Gleichungen so behandelt, als wenn alle Teile des Systems an der Bewegung teilnehmen, namentlich die Träger der Ladungen und die Teile des Mediums, das diese Träger umgibt und erfüllt. Und so bedeuten in den Gleichungen $\mathfrak{H}, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \mathfrak{B}, J$ Kräfte, Induktionen und Ströme an der Stelle x, y, z oder ξ, η, ζ, wo sich die Ladung ϱ befindet, und die das ganze System beherrschende Bewegung den Wert g hat. Wir bringen in den Ausgangsgleichungen (A_1 a, b) das curl$[\mathfrak{D} g]$, curl$[\mathfrak{B} g]$ nach links und schreiben hier g' statt g, setzen also

$$(A_{13}a) \qquad + \frac{C_0}{4\pi} \operatorname{curl}\left(\mathfrak{H} + \frac{4\pi}{C_0}[g' \mathfrak{D}]\right) = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + g \varrho_e + J_e,$$

$$(A_{13}b) \qquad - \frac{C_0}{4\pi} \operatorname{curl}\left(\mathfrak{E} - \frac{4\pi}{C_0}[g' \mathfrak{B}]\right) = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + g \varrho_m .$$

Jetzt können wir unter g' eine andere Geschwindigkeit verstehen als die Geschwindigkeit g, die der Ladung zukommt, nämlich die Geschwindigkeit des Mediums an der Stelle, wo die Ladung ϱ sich befindet, also — wenn man Durchdringung von Medium und Ladungsträger bei gleichzeitiger Erhaltung eigener Selbständigkeit nicht zugeben will — die der unmittelbaren Umgebung der Ladung. Dadurch haben die Gleichungen eine Verallgemeinerung erfahren, indem nunmehr für die Ladungen für sich und für das Medium für sich Bewegungen angenommen werden können, obwohl noch die Gleichungen sich immer auf die Stelle beziehen, an der die Ladungen sich aufhalten sollen.

Allein nunmehr ist zu beachten, daß die Bewegungen g, g' doch nicht ganz unabhängig voneinander sein können, denn die durch die Bewegung des einen ausgelösten Kräfte müssen an sich schon die Bewegungen des anderen beeinflussen. Hierfür die allgemeinen Gesichtspunkte zu entwickeln, die auf dem Wege liegen, den die später zu behandelnde Theorie von Helmholtz eingeschlagen hat, ist nicht Aufgabe dieses Buches, während einzelne Fälle sich leicht durchführen lassen. Das Wesentliche ist, daß zu den Sätzen von Grundgleichungen aus (A_{13}a, b) noch Sätze nach Art der Helmholtzschen Gleichungen (6_2) (S. 193) hinzukommen, samt etwaigen, rein mechanischen Bedingungen, die nun alle zusammen als ein System simultaner Differentialgleichungen zu behandeln wären.

Einen großen Vorteil aber bieten die Gleichungen (A_{13}a, b), der nicht unerwähnt bleiben darf; sie lassen auch für die Maxwell-Hertzsche Theorie Konvektionsströme mit allen Wirkungen zu. Und so sind sie im Grunde auch die Ausgangsgleichungen für Lorentz' Theorie. Heaviside[1]) hat von ihnen schon mannigfachen Gebrauch gemacht, wie überhaupt die behandelten Grundgleichungen zwischen Maxwells und Hertz' Namen noch mit dem Heavisides bezeichnet werden könnten.

Im folgenden werden wir es fast ausschließlich mit der üblichen Form der Gleichungen zu tun haben und von der erweiterten letzten Form nur hin und wieder Gebrauch machen.

Für die Energieströmung können wir die Gleichungen S. 139ff. beibehalten, doch haben wir nach den Beziehungen (VI)f., S. 140ff.

$$(4) \qquad L = 0,$$

$$(5) \qquad X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z .$$

[1]) Electromagnetic Theory 1, 466 ff. (1893).

Außerdem können wir in allen Gleichungen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ durch $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ mittels der Beziehungen $4\pi\mathfrak{D} = K\mathfrak{E}$, $4\pi\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ ersetzen. Und so haben wir

$$\text{(D)} \quad R = \frac{(4\pi)^2}{2}\left(\frac{1}{K}\mathfrak{D}^2 + \frac{1}{\mu}\mathfrak{B}^2\right) = \frac{1}{2}(K\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)\,,$$

$$\text{(E)} \quad P = (4\pi)^2\left(\frac{1}{K}\left(\overline{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}V)g}\right) + \frac{1}{\mu}\left(\overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{B}V)g}\right)\right) = \left(K\left(\overline{\mathfrak{E}(\mathfrak{E}V)g}\right) + \mu\left(\overline{\mathfrak{H}(\mathfrak{H}V)g}\right)\right),$$

$$\text{(F)} \quad Q = \frac{(4\pi)^2}{K}\left(\overline{\mathfrak{D}J}\right) = 4\pi\left(\overline{\mathfrak{E}J}\right),$$

$$\text{(G)} \quad \mathfrak{P} = \frac{(4\pi)^2}{K\mu}C_0[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] = (4\pi)^2\left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2 C_0[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] = C_0[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\,,$$

$$\text{(H)} \quad \left\{\begin{aligned}
X_x &= K\mathfrak{E}_x^2 + \mu\mathfrak{H}_x^2 - \frac{1}{2}(K\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)\\
&= (4\pi)^2\left\{\frac{1}{K}\mathfrak{D}_x^2 + \frac{1}{\mu}\mathfrak{B}_x^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K}\mathfrak{D}^2 + \frac{1}{\mu}\mathfrak{B}^2\right)\right\},\\
Y_y &= K\mathfrak{E}_y^2 + \mu\mathfrak{H}_y^2 - \frac{1}{2}(K\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)\\
&= (4\pi)^2\left\{\frac{1}{K}\mathfrak{D}_y^2 + \frac{1}{\mu}\mathfrak{B}_y^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K}\mathfrak{D}^2 + \frac{1}{\mu}\mathfrak{B}^2\right)\right\},\\
Z_z &= K\mathfrak{E}_z^2 + \mu\mathfrak{H}_z^2 - \frac{1}{2}(K\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)\\
&= (4\pi)^2\left\{\frac{1}{K}\mathfrak{D}_z^2 + \frac{1}{\mu}\mathfrak{B}_z^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K}\mathfrak{D}^2 + \frac{1}{\mu}\mathfrak{B}^2\right)\right\},\\
X_y &= Y_x = K\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y + \mu\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y = (4\pi)^2\left(\frac{1}{K}\mathfrak{D}_x\mathfrak{D}_y + \frac{1}{\mu}\mathfrak{B}_x\mathfrak{B}_y\right),\\
Y_z &= Z_y = K\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z + \mu\mathfrak{H}_y\mathfrak{H}_z = (4\pi)^2\left(\frac{1}{K}\mathfrak{D}_y\mathfrak{D}_z + \frac{1}{\mu}\mathfrak{B}_y\mathfrak{B}_z\right).\\
Z_x &= X_z = K\mathfrak{E}_z\mathfrak{E}_x + \mu\mathfrak{H}_z\mathfrak{H}_x = (4\pi)^2\left(\frac{1}{K}\mathfrak{D}_z D_x + \frac{1}{\mu}\mathfrak{B}_z\mathfrak{B}_x\right)
\end{aligned}\right.$$

und als Energiesatz, bezogen auf Raumeinheit, eine der Beziehungen unter (V_2) usf., ohne L und mit den oben angegebenen Werten der R usf. Insbesondere wird nach (V_6)

$$(\mathrm{J}_1) \quad \left\{\begin{aligned}
&-\iiint(\operatorname{div}\mathfrak{P} + Q)\,dV\\
&= \iiint\left(\frac{\partial R}{\partial t} - (x_x X_x + y_y Y_y + z_z Z_z + x_y X_y + y_z Y_z + z_x Z_x)\right)dV,
\end{aligned}\right.$$

wo

$$(6) \qquad x_y = x_y' + y_x'\,, \quad y_z = y_z' + z_y'\,, \quad z_x = z_x' + x_z'$$

und

$$\frac{\mathfrak{d}R}{\mathfrak{d}t} = \frac{dR}{dt} + R\,\mathrm{div}\,\mathfrak{g} = \frac{\partial R}{\partial t} + g_x\frac{\partial R}{\partial x} + g_y\frac{\partial R}{\partial y} + g_z\frac{\partial R}{\partial z} + R\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(g_x R) + \frac{\partial}{\partial y}(g_y R) + \frac{\partial}{\partial z}(g_z R)\,,$$

ist, so daß für Raumeinheit noch wäre

$$(\mathrm{J}_2)\qquad \left\{\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\mathfrak{P} - Q = \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(g_x R) + \frac{\partial}{\partial y}(g_y R) + \frac{\partial}{\partial z}(g_z R)\\ -(x_x X_x + y_y Y_y + z_z Z_z + x_y X_y + y_z Y_z + z_x Z_x)\,, \end{aligned}\right.$$

Gleichungen, auf die wir zurückkommen.

b) Gleichförmige Bewegung.

Wir betrachten die Verbreitung von Störungen bei gleichförmiger Bewegung der Stoffe und nehmen erst Isolatoren.

Aus den Gleichungen (B) (S. 145) folgt

$$(1\mathrm{a})\qquad \mathrm{div}\,\mathfrak{D} = 0\,,$$
$$(1\mathrm{b})\qquad \mathrm{div}\,\mathfrak{B} = 0\,.$$

Ferner haben wir aus den Gleichungen (A_5a, b) (S. 146)

$$(2\mathrm{a})\qquad \left\{\begin{aligned} +\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial z}\right) &= \frac{d\mathfrak{D}_x}{dt}\,,\\ +\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial x}\right) &= \frac{d\mathfrak{D}_y}{dt}\,,\\ +\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial y}\right) &= \frac{d\mathfrak{D}_z}{dt}\,; \end{aligned}\right.$$

$$(2\mathrm{b})\qquad \left\{\begin{aligned} -\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial z}\right) &= \frac{d\mathfrak{B}_x}{dt}\,,\\ -\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}\right) &= \frac{d\mathfrak{B}_y}{dt}\,,\\ -\frac{C_0}{4\pi}\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}\right) &= \frac{d\mathfrak{B}_z}{dt}\,, \end{aligned}\right.$$

und auch

$$(2'\mathrm{a})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{C_0}{\mu}\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{B}_y}{dz}\right) &= +\frac{d\mathfrak{D}_x}{dt}\,,\\ \frac{C_0}{\mu}\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{B}_z}{\partial x}\right) &= +\frac{d\mathfrak{D}_y}{dt}\,,\\ \frac{C_0}{\mu}\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial y}\right) &= +\frac{d\mathfrak{D}_z}{dt}\,, \end{aligned}\right.$$

$$(2'\mathrm{b})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{C_0}{K}\left(\frac{\partial\mathfrak{D}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{D}_y}{\partial z}\right) &= -\frac{d\mathfrak{B}_x}{dt}\,,\\ \frac{C_0}{K}\left(\frac{\partial\mathfrak{D}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{D}_z}{\partial x}\right) &= -\frac{d\mathfrak{B}_y}{dt}\,,\\ \frac{C_0}{K}\left(\frac{\partial\mathfrak{D}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{D}_x}{\partial y}\right) &= -\frac{d\mathfrak{B}_z}{dt}\,. \end{aligned}\right.$$

Versuchen wir, ob diesen Gleichungen durch ebene Wellen genügt werden kann, so daß mit irgendeiner Funktion f wird

$$\mathfrak{B}_x = B_x f\left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda}\right), \quad \mathfrak{B}_y = B_y f\left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda}\right),$$

$$\mathfrak{B}_z = B_z f\left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda}\right),$$

$$\mathfrak{D}_x = D_x f\left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda}\right), \quad \mathfrak{D}_y = D_y f\left(\frac{T}{t} - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda}\right),$$

$$\mathfrak{D}_z = D_z f\left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda}\right),$$

so folgen aus (2a, b) die Bedingungsgleichungen (vgl. auch S. 36)

(3a)
$$\left|\begin{aligned}
\frac{C_0}{\mu}\left(\frac{B_y \gamma - B_z \beta}{\lambda}\right) &= + D_x\left(\frac{1}{T} - \frac{s}{\lambda}\right), \\
\frac{C_0}{\mu}\left(\frac{B_z \alpha - B_x \gamma}{\lambda}\right) &= + D_y\left(\frac{1}{T} - \frac{s}{\lambda}\right), \\
\frac{C_0}{\mu}\left(\frac{B_x \beta - B_y \alpha}{\lambda}\right) &= + D_z\left(\frac{1}{T} - \frac{s}{\lambda}\right);
\end{aligned}\right.$$

(3b)
$$\left|\begin{aligned}
\frac{C_0}{K_0}\left(\frac{D_y \gamma - D_z \beta}{\lambda}\right) &= - B_x\left(\frac{1}{T} - \frac{s}{\lambda}\right), \\
\frac{C_0}{K_0}\left(\frac{D_z \alpha - D_x \gamma}{\lambda}\right) &= - B_y\left(\frac{1}{T} - \frac{s}{\lambda}\right), \\
\frac{C_0}{K_0}\left(\frac{D_x \beta - D_y \alpha}{\lambda}\right) &= - B_z\left(\frac{1}{T} - \frac{s}{\lambda}\right),
\end{aligned}\right.$$

wo

$$s = \alpha p_x + \beta p_y + \gamma p_z$$

ist. Multipliziert man die Gleichungen des ersten Systems mit B_x, B_y, B_z, die des zweiten mit D_x, D_y, D_z und addiert jedesmal, so folgt aus beiden Systemen

(4)
$$B_x D_x + B_y D_y + B_z D_z = 0 ,$$

welche Beziehung die bekannte Eigenschaft aussagt, daß die magnetischen Schwingungen senkrecht geschehen zu den elektrischen, was also auch erfolgt, wenn gleichförmige Bewegung stattfindet. Die Multiplikation der Gleichungssysteme mit α, β, γ und jedesmalige Addition ergibt ferner

(5a)
$$\alpha D_x + \beta D_y + \gamma D_z = 0 ,$$

(5b)
$$\alpha B_x + \beta B_y + \gamma B_z = 0 ,$$

d. h. die Wellen schwingen transversal, wie gleichfalls bekannt, abermals, auch wenn gleichförmige Bewegung besteht. Dadurch sind auch die Gleichungen (1a, b) erfüllt.

Aus der Quadrierung und Addierung des Gleichungssystems (3a) folgt sodann

$$B_x^2(\beta^2+\gamma^2)+B_y^2(\gamma^2+\alpha^2)+B_z^2(\alpha^2+\beta^2)-2B_xB_y\alpha\beta-2B_yB_z\beta\gamma-2B_zB_x\gamma\alpha$$
$$=\mu^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)\left(\frac{c-s}{C_0}\right)^2$$

oder

$$B_x^2+B_y^2+B_z^2-(B_x^2\alpha^2+B_y^2\beta^2+B_z^2\gamma^2+2B_xB_y\alpha\beta+2B_yB_z\beta\gamma+2B_zB_x\gamma\alpha)$$
$$=\mu^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)\left(\frac{c-s}{C_0}\right)^2,$$

d. h. wegen (5a)

(6a) $$B_x^2+B_y^2+B_z^2=\mu^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)\left(\frac{c-s}{C_0}\right)^2.$$

Ebenso hat man aus (3b) und (5b)

(6b) $$D_x^2+D_y^2+D_z^2=K^2(B_x^2+B_y^2+B_z^2)\left(\frac{c-s}{C_0}\right)^2.$$

Somit findet man durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen, da bei $\mu_0=K_0=1$

7) $$\mu K=\frac{C_0^2}{c_0^2}$$

ist, wo c_0 sich auf die betreffende Substanz in ihrem Ruhezustand bezieht,

(8_1) $$c=c_0+s.$$

Das ist die sooft behandelte Gleichung, die also auch aus der Maxwell-Hertzschen Theorie sich streng richtig ergibt, nicht bloß angenähert[1]). Es ist die Geschwindigkeit mit Bezug auf ein festes Koordinatensystem, also für einen ruhenden Beobachter. Wir schreiben darum auch

(8_2) $$c_r=c_0+s,$$

um durch den Index r hervorzuheben, daß auf einen ruhenden Beobachter Bezug genommen ist.

Es ist hier davon ausgegangen, daß die Koeffizienten K, μ in bewegter Substanz die gleichen sind wie in der ruhenden. Heinrich Hertz hat von dieser Annahme allgemein keinen Gebrauch gemacht; er läßt diese Koeffizienten abhängen außer von der Konstitution der Substanz (des in ihr enthaltenen Äthers) noch von den relativen Verschiebungen infolge der Bewegung, so daß tatsächlich nach ihm das Licht in bewegter Substanz sich nicht so verbreitet wie in ruhender, aber freilich auch nicht so, wie es nach dem Fresnelschen Gesetze der Fall sein sollte. Bei gleichförmiger Bewegung sind auch nach Heinrich Hertz die Koeffizienten K, μ von der Bewegung unabhängig. Noch sei darauf hingewiesen, daß die obigen Gleichungen (6a, b) ergeben

(9a) $$B=\pm\sqrt{\frac{\mu}{K}}\,D,$$

(9b) $$D=\pm\sqrt{\frac{K}{\mu}}\,B$$

für das Verhältnis der ganzen Amplituden der beiden Schwingungsarten.

[1]) Poincaré, Electricité et Optique (1901), S. 301f.

Differenzieren wir die erste Gleichung unter (2′a) nach y, die zweite nach x, und subtrahieren, so folgt, weil p_x, p_y, p_z konstant sein sollten,

$$\frac{C_0}{\mu}\left\{\Delta\mathfrak{B}_z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{B}_z}{\partial z}\right)\right\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathfrak{D}_x}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{D}_y}{\partial x}\right).$$

Allgemein ist

(10a) $$+\frac{C_0}{\mu}(\Delta\mathfrak{B} - \nabla\operatorname{div}\mathfrak{B}) = -\frac{d}{dt}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = +\frac{K}{C_0}\frac{d^2\mathfrak{B}}{dt^2},$$

(10b) $$-\frac{C_0}{K}(\Delta\mathfrak{D} - \nabla\operatorname{div}\mathfrak{D}) = -\frac{d}{dt}\operatorname{curl}\mathfrak{B} = -\frac{\mu}{C_0}\frac{d^2\mathfrak{D}}{dt^2}.$$

Letzteres weil die entsprechenden Rechnungen auch für die Gleichungen (2′b) gelten. Also wird

(11_1a) $$\frac{d^2\mathfrak{B}}{dt^2} = \frac{C_0^2}{\mu K}(\Delta\mathfrak{B} - \nabla\operatorname{div}\mathfrak{B}),$$

(11_1b) $$\frac{d^2\mathfrak{D}}{dt^2} = \frac{C_0^2}{\mu K}(\Delta\mathfrak{D} - \nabla\operatorname{div}\mathfrak{D});$$

oder auch

(11_2a) $$\frac{d^2\mathfrak{B}}{dt^2} = c_0^2(\Delta\mathfrak{B} - \nabla\operatorname{div}\mathfrak{B}),$$

(11_2b) $$\frac{d^2\mathfrak{D}}{dt^2} = c_0^2(\Delta\mathfrak{D} - \nabla\operatorname{div}\mathfrak{D}).$$

Wären wir von diesen Gleichungen ausgegangen, so hätten wir zunächst

$$\Delta\mathfrak{B} = \frac{B}{\lambda^2}f''\left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda}\right), \qquad \Delta\mathfrak{D} = \frac{D}{\lambda^2}f''\left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda}\right),$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = -\frac{1}{\lambda}(\alpha B_x + \beta B_y + \gamma B_z)f'\left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda}\right),$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = -\frac{1}{\lambda}(\alpha D_x + \beta D_y + \gamma D_z)f'\left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda}\right).$$

Ferner nach den Rechnungen S. 37

$$\frac{d^2\mathfrak{B}}{dt^2} = \left\{\frac{1}{T^2} - \frac{2}{\lambda T}(p_x\alpha + p_y\beta + p_z\gamma) + \frac{2}{\lambda^2}(p_x p_y\alpha\beta + p_y p_z\beta\gamma + p_z p_x\gamma\alpha)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\lambda^2}(p_x^2\alpha^2 + p_y^2\beta^2 + p_z^2\gamma^2)\right\}Bf'' = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda}{T} - s\right)^2 Bf'',$$

also mit

(12_1a) $$\alpha B_x + \beta B_y + \gamma B_z = B_S,$$

(12_1b) $$\alpha D_x + \beta D_y + \gamma D_z = D_S.$$

$$(13a)\quad \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{T}-s\right)^2 B_x = c_0^2 (B_x - \alpha B_S)\,, \\ \left(\frac{\lambda}{T}-s\right)^2 B_y = c_0^2 (B_y - \beta B_S)\,, \\ \left(\frac{\lambda}{T}-s\right)^2 B_z = c_0^2 (B_z - \gamma B_S)\,; \end{cases}$$

$$(13b)\quad \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{T}-s\right)^2 D_x = c_0^2 (D_x - \alpha D_S)\,, \\ \left(\frac{\lambda}{T}-s\right)^2 D_y = c_0^2 (D_y - \beta D_S)\,, \\ \left(\frac{\lambda}{T}-s\right)^2 D_z = c_0^2 (D_z - \gamma D_S)\,, \end{cases}$$

und diese Gleichungen können, wenn $\frac{\lambda}{T} - s = c_0$ ist, nur bestehen mit

$$(12_2a)\qquad B_S = 0\,,$$
$$(12_2b)\qquad D_S = 0\,.$$

entsprechend den Beziehungen (5a, b).

Deutlicher sieht man das ein, wenn man jedes der Systeme (13a, b) mit α, β, γ multipliziert und addiert; es folgt dann

$$\left(\frac{\lambda}{T}-s\right)^2 B_s = c_0^2 (B_s - B_s)\,,\qquad \left(\frac{\lambda}{T}-s\right)^2 D_s = c_0^2 (D_s - D_s)\,,$$

was nur mit $\frac{\lambda}{T} = s$ oder mit $B_s = D_s = 0$ zulässig wäre. Die erste Alternative würde die Bewegung in die Strahlrichtung verlegen und ihr die Geschwindigkeit des Lichtes zuteilen, was ohne Wert ist.

Also muß sein

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = \operatorname{div}\mathfrak{D} = 0\,;\qquad \varrho_m = \varrho_e = 0\,,$$

$\operatorname{div}\mathfrak{B}$ wird immer $= 0$ angesetzt, $\operatorname{div}\mathfrak{D}$ nur in Isolatoren. **Jedenfalls können sich ebene Wellen, wenn Bewegung stattfindet, hiernach nur in Isolatoren verbreiten.** Dieses Ergebnis gilt auch für die anderen Theorien. Übrigens würde man, da ϱ_m stets gleich 0 gesetzt wird, schließen können, daß die elektrische Welle es ist, die die Lichterscheinungen bewirkt, nicht die magnetische, wofür wir noch einen anderen Grund kennen lernen werden. Wir haben aber für Isolatoren

$$(14a)\qquad \frac{d^2\mathfrak{B}}{dt^2} = c_0^2 \Delta\mathfrak{B}\,,$$

$$(14b)\qquad \frac{d^2\mathfrak{D}}{dt^2} = c_0^2 \Delta\mathfrak{D}\,,$$

für jede Richtung.

Und daraus folgt, daß bei gleichförmiger Bewegung alle in Abschnitt 4, S. 34 bis 59 abgeleiteten Ergebnisse auch hier gelten. Namentlich sind wieder Kugelwellen möglich mit allen dort geschilderten Einzelheiten.

Betrachten wir noch die Poyntingsche Energieströmung (S. 150). Ihre Richtungskosinus stehen im Verhältnis

$$(\alpha):(\beta):(\gamma) = \mathfrak{P}_x : \mathfrak{P}_y : \mathfrak{P}_z \tag{15$_1$}$$

und so haben wir nach (G) (S. 150)

$$(\alpha):(\beta):(\gamma) = \mathfrak{D}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{D}_z \mathfrak{B}_y : \mathfrak{D}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{D}_x \mathfrak{B}_z : \mathfrak{D}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{D}_y \mathfrak{B}_x , \tag{15$_2$}$$

so daß wird

$$(\alpha):(\beta):(\gamma) = D_y B_z - D_z B_y : D_z B_x - D_x B_z : D_x B_y - D_y B_x . \tag{15$_3$}$$

Ferner folgt aus den Gleichungen (3a, b)

$$(D_x B_y - D_y B_x)(c - s) = \frac{C_0}{\mu}(B_y^2 \gamma + B_x^2 \gamma - B_y B_z \beta - B_z B_x \alpha) ,$$

also mit

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 , \quad D^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 \tag{16}$$

wegen (5a, b) allgemein

$$\left|\begin{aligned} D_x B_y - D_y B_x &= [DB]_z = + \frac{C_0}{\mu} B^2 \gamma \frac{1}{c-s} , \\ D_y B_z - D_z B_y &= [DB]_x = + \frac{C_0}{\mu} B^2 \alpha \frac{1}{c-s} , \\ D_z B_x - D_x B_z &= [DB]_y = + \frac{C_0}{\mu} B^2 \beta \frac{1}{c-s} . \end{aligned}\right. \tag{17$_1$a}$$

$$\left|\begin{aligned} B_x D_y - B_y D_x &= [BD]_z = - \frac{C_0}{K} D^2 \gamma \frac{1}{c-s} , \\ B_y D_z - B_z D_y &= [BD]_x = - \frac{C_0}{K} D^2 \alpha \frac{1}{c-s} , \\ B_z D_x - B_x D_z &= [BD]_y = - \frac{C_0}{K} D^2 \beta \frac{1}{c-s} . \end{aligned}\right. \tag{17$_1$b}$$

Gleichungen, welche auch zu den Beziehungen (9a, b) führen, weil $[DB] = -[BD]$ ist. Durch Multiplikation der auf gleicher Zeile stehenden Gleichungen folgt dann

$$[DB]_x^2 = \frac{C_0^2}{\mu K} B^2 D^2 \frac{\alpha^2}{(c-s)^2} , \quad [DB]_y^2 = \frac{C_0^2}{\mu K} B^2 D^2 \frac{\beta^2}{(c-s)^2} ,$$

$$[DB]_z^2 = \frac{C_0^2}{\mu K} B^2 D^2 \frac{\gamma^2}{(c-s)^2} ,$$

also nach (7) und (8) (S. 153)

$$[DB]_x = \alpha DB , \quad [DB]_y = \beta DB , \quad [DB]_z = \gamma DB \tag{17}$$

und nach (G) (S. 150)

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{P}_x = (4\pi)^2 \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2 \alpha C_0 DB f^2 , \quad \mathfrak{P}_y = (4\pi)^2 \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2 \beta C_0 DB f^2 , \\ &\mathfrak{P}_z = (4\pi)^2 \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2 \gamma C_0 DB f^2 , \end{aligned}\right. \tag{18$_1$}$$

$$\mathfrak{P} = \sqrt{\mathfrak{P}_x^2 + \mathfrak{P}_y^2 + \mathfrak{P}_z^2} = (4\pi)^2 \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2 C_0 DB f^2 , \tag{19$_1$}$$

oder, wenn wir entsprechend den Gleichungen für $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ setzen

(20a) $$\mathfrak{E}_p = E_p f\left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda}\right),$$

(20b) $$\mathfrak{H}_p = H_p f\left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda}\right); \quad p = x, y, z,$$

wobei dann

(21a) $$K E_p = 4\pi D_p,$$

(21b) $$\mu H_p = 4\pi B_p; \quad p = x, y, z$$

sein würde,

(18₂) $\mathfrak{P}_x = C_0 \alpha E H f^2$, $\mathfrak{P}_y = C_0 \beta E H f^2$, $\mathfrak{P}_z = C_0 \gamma E H f^2$

(19₂) $\mathfrak{P} = \sqrt{\mathfrak{P}_x^2 + \mathfrak{P}_y^2 + \mathfrak{P}_z^2} = C_0 E H f^2$

$$\left.\begin{aligned} E &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}, \\ H &= \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}. \end{aligned}\right.$$

Die Poyntingsche Energieströmung ist bei gleichförmiger Bewegung unabhängig von der Bewegung.

Zugleich folgt

(22) $$(\alpha) : (\beta) : (\gamma) = \alpha : \beta : \gamma .$$

Die Richtung der Wellennormale fällt mit der Richtung der Poyntingschen Energieströmung zusammen. Deshalb hat man auch die Wellennormale vonvornherein als die Richtung der Poyntingschen Energieströmung definiert.

Wir machen noch von den anderen Formen der Maxwell-Hertzschen Gleichungen Gebrauch. Die unter A_8 a, b) geben für unseren Fall der gleichförmigen Bewegung

(23a) $$\left\{\begin{aligned} &+\frac{C_0}{\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_\zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathfrak{B}_\eta}{\partial \zeta}\right) = \frac{\partial \mathfrak{D}_\xi}{\partial t}, \\ &+\frac{C_0}{\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \mathfrak{B}_\zeta}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial \mathfrak{D}_\eta}{\partial t}, \\ &+\frac{C_0}{\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial \mathfrak{B}_\xi}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial \mathfrak{D}_\zeta}{\partial t}; \end{aligned}\right.$$

(23b) $$\left\{\begin{aligned} &-\frac{C_0}{K}\left(\frac{\partial \mathfrak{D}_\zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathfrak{D}_\eta}{\partial \zeta}\right) = \frac{\partial \mathfrak{B}_\xi}{\partial t}, \\ &-\frac{C_0}{K}\left(\frac{\partial \mathfrak{D}_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \mathfrak{D}_\zeta}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial \mathfrak{B}_\eta}{\partial t}, \\ &-\frac{C_0}{K}\left(\frac{\partial \mathfrak{D}_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial \mathfrak{D}_\xi}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial \mathfrak{B}_\zeta}{\partial t}, \end{aligned}\right.$$

woraus, wie früher, folgt

(24a) $$\mathfrak{B}_\pi = B_\pi f\left(\frac{t}{T'} - \frac{\alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta}{\lambda'}\right),$$

(24b) $$\mathfrak{D}_\pi = D_\pi f\left(\frac{t}{T'} - \frac{\alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta}{\lambda'}\right); \quad \pi = \xi, \eta, \zeta.$$

und entsprechend (3a, b)

$$
(25\text{a})\qquad \begin{cases} \dfrac{C_0}{\mu}(B_\eta\gamma - B_\zeta\beta) = +\dfrac{\lambda'}{T'}D_\xi\,, \\ \dfrac{C_0}{\mu}(B_\zeta\alpha - B_\xi\gamma) = +\dfrac{\lambda'}{T'}D_\eta\,, \\ \dfrac{C_0}{\mu}(B_\xi\beta - B_\eta\alpha) = +\dfrac{\lambda'}{T'}D_\zeta\,; \end{cases}
$$

$$
(25\text{b})\qquad \begin{cases} \dfrac{C_0}{K}(D_\eta\gamma - D_\zeta\beta) = -\dfrac{\lambda'}{T'}B_\xi\,, \\ \dfrac{C_0}{K}(D_\zeta\alpha - D_\xi\gamma) = -\dfrac{\lambda'}{T'}B_\eta\,, \\ \dfrac{C_0}{K}(D_\xi\beta - D_\eta\alpha) = -\dfrac{\lambda'}{T'}B_\zeta\,. \end{cases}
$$

Genau die gleiche Rechnung, die zu der Gleichung (8) für $\dfrac{\lambda}{T} = c$ geführt hat, ergibt jetzt

$$
(4') \qquad D_\xi B_\xi + D_\eta B_\eta + D_\zeta B_\zeta = 0\,,
$$

$$
(12'\text{a}) \qquad D_S = 0\,,
$$

$$
(12'\text{b}) \qquad B_S = 0
$$

und

$$
(26_1) \qquad c' = \frac{\lambda'}{T'} = \frac{\lambda_0}{T_0} = c_0\,.
$$

Für den mitbewegten Beobachter ist die Verbreitungsgeschwindigkeit, wie wenn er und die Substanz ruhten; wir nennen sie c_b und haben

$$
(26_2) \qquad c_b = c_0\,.
$$

Um die absolute Verbreitungsgeschwindigkeit für einen gegen die Substanz ruhenden Beobachter zu erhalten, haben wir der Substanz die ihr in Richtung der Verbreitungsgeschwindigkeit zukommende Bewegungsgeschwindigkeit zu erteilen, so wird wieder $c = c_0 + s$. Ersetzt man übrigens in (24a, b) die ξ, η, ζ durch ihre Werte $x - p_x t$, $y - p_y t$, $z - p_z t$, so erhält man als Faktor von t

$$
\frac{1}{T'} + \frac{\alpha p_x + \beta p_y + \gamma p_z}{\lambda'} = \frac{1}{T'} + \frac{s}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda'}(c_0 + s)\,.
$$

Im Sinne von H. A. Lorentz ist $\lambda' = \lambda_0$. Daß $\dfrac{\lambda'}{T'} = c_0$ angesetzt werden muß, sieht man noch deutlicher aus den Gleichungen

$$
(27\text{a}) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \mathfrak{B}\,,
$$

$$
(27\text{b}) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{D}}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \mathfrak{D}\,,
$$

die aus den Formeln (23a, b) so folgen wie die (14a, b) aus (2a, b) sich ergeben haben. Wenn man will, kann man in obigem eine Ableitung des Dopplerschen Prinzipes erkennen, denn die einfache Koordinatentransformation hat das gleiche ergeben, wie das, was aus den Grundgleichungen gefolgt ist. Indessen werde ich später über das Verhältnis des Dopplerschen Prinzipes zu den Grundgleichungen der elektromagnetischen Theorie (und überhaupt jeder Theorie, welche sich auf Vorgänge innerhalb von Substanzen bezieht) eine andere Ansicht zu äußern haben. Vorläufig genügt es, hervorzuheben, daß die Maxwell-Hertzsche Theorie in dieser Hinsicht allen anderen Theorien gleichgestellt ist.

Von den weiteren Formen der Maxwell-Hertzschen Gleichungen für unseren Fall haben wir noch mit

(28a) $$\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} + \frac{\mu}{C_0}[p\,\mathfrak{D}],$$

(28b) $$\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D} - \frac{K}{C_0}[p\,\mathfrak{B}];$$

nach (A_{11}a, b) (S. 148)

(29_1a) $$+\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{B}^* = \left(\frac{\delta\mathfrak{D}}{\delta t}\right)_p + p\operatorname{div}\mathfrak{D} + J_e = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} - \operatorname{curl}[\mathfrak{D}\,p] + J_e,$$

(29_1b) $$-\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{D}^* = \left(\frac{\delta\mathfrak{B}}{\delta t}\right)_p + p\operatorname{div}\mathfrak{B} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} - \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\,p],$$

und für Isolatoren

(29_2a) $$+\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{B}^* = \left(\frac{\delta\mathfrak{D}}{\delta t}\right)_p,$$

(29_2b) $$-\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{D}^* = \left(\frac{\delta\mathfrak{B}}{\delta t}\right)_p.$$

Ferner nach (A_{10}a, b)

(30_1a) $$+\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\overline{\mathfrak{B}} = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}\,p] + J_e,$$

(30_1b) $$-\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\overline{\mathfrak{D}} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\,p],$$

mit

(31a) $$\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} - \frac{\mu}{C_0}[p\,\mathfrak{D}],$$

(31b) $$\overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} + \frac{K}{C_0}[p\,\mathfrak{B}],$$

und für Isolatoren nach leichter Zwischenrechnung

(30_2a) $$+\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\overline{\mathfrak{B}} = \left(\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right)_p,$$

(30_2b) $$-\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\overline{\mathfrak{D}} = \left(\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right)_p.$$

Es gelten für die neuen Größen $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{D}^*$; $\overline{\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{D}}$, denen wir in späteren Theorien noch begegnen werden, die Beziehungen

(32a) $$B^* = B + \frac{\mu}{C_0}[p\,D],$$ (32b) $$D^* = D - \frac{K}{C_0}[p\,B];$$

(33a) $$\overline{B} = B - \frac{\mu}{C_0}[p\,D],$$ (33b) $$\overline{D} = D + \frac{K}{C_0}[p\,B].$$

Es folgt aus diesen Gleichungen wegen (4′) (S. 158)

$$B_\xi^* D_\xi^* + B_\eta^* D_\eta^* + B_\zeta^* D_\zeta^* =$$
$$-\frac{\mu K}{C_0^2}\{(p_y D_\zeta - p_z \bar{D}_\eta)(p_y B_\zeta - p_z B_\eta) + (p_z D_\xi - p_x D_\zeta)(p_z B_\xi - p_x B_\zeta) + (p_x D_\eta - p_y D_\xi)(p_x B_\eta - p_y B_\xi)\}\,,$$

oder, wie leicht zu beweisen, (h_3) S. 120

$$(34_1)\quad \begin{cases} B_\xi^* D_\xi^* + B_\eta^* \bar{D}_\eta^* + B_\zeta^* D_\zeta^* = \dfrac{\mu K}{C_0^2}(p_x D_\xi + p_y D_\eta + p_z \bar{D}_\zeta)(p_x B_\xi + p_y B_\eta + p_z \bar{B}_\zeta) \\ \qquad = \dfrac{p^2}{c_0^2} D_p B_p\,, \end{cases}$$

letzteres wegen (7) (S. 153) und wenn D_p, B_p die Komponenten der Amplituden in Richtung der Bewegung bedeuten. Entsprechend haben wir

$$(35_1)\qquad B_\xi D_\xi + B_\eta D_\eta + B_\zeta D_\zeta = \frac{p^2}{c_0^2}\bar{D}_p B_p\,.$$

Die Störungen $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{D}^*$ sind also im allgemeinen nicht genau senkrecht zueinander, ebenso nicht die $\bar{\mathfrak{B}}$, $\bar{\mathfrak{D}}$. Jedoch bis auf Größen zweiter Ordnung findet die quere Richtung jedenfalls statt. Ferner bekommt man z. B.

$$p_x B_\xi^* + p_y B_\eta^* + p_z B_\zeta^* = p_x B_\xi + p_y B_\eta + p_z B_\zeta\,,$$

also allgemein

(36a) $\quad B_p^* = B_p\,,$ (36b) $\quad D_p^* = D_p\,;$

(37a) $\quad \bar{B}_p = B_p\,,$ (37b) $\quad \bar{D}_p = D_p\,.$

In Richtung der Bewegungen fallen die Störungen B^*, D^*; $\bar{B}$, $\bar{D}$ mit denen B, D zusammen, und wir haben so auch

$$(34_2)\qquad B_\xi^* D_\xi^* + \bar{B}_\eta^* D_\eta^* + B_\zeta^* D_\zeta^* = \frac{p^2}{c_0^2} D_p^* B_p^*\,,$$

$$(35_2)\qquad B_\xi D_\xi + B_\eta D_\eta + B_\zeta D_\zeta = \frac{p^2}{c_0^2} D B\,.$$

Endlich wird noch

$$(38a)\qquad D_\xi B_\xi^* + D_\eta B_\eta^* + D_\zeta B_\zeta^* = 0\,,$$

$$(38b)\qquad B_\xi D_\xi^* + B_\eta D_\eta^* + B_\zeta D_\zeta^* = 0\,;$$

$$(39a)\qquad D_\xi B_\xi + \bar{D}_\eta B_\eta + D_\zeta B_\zeta = 0\,,$$

$$(39b)\qquad \bar{B}_\xi D_\xi + B_\eta D_\eta + B_\zeta D_\zeta = 0\,.$$

Es stehen also senkrecht aufeinander die Schwingung $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}^*$ und $\bar{\mathfrak{B}}$; B und $\mathfrak{D}$, $\bar{\mathfrak{D}}$ und $\mathfrak{B}$.

Bilden wir noch $\bar{B}_S^*$, $\bar{D}_S^*$; $\bar{B}_S$, $\bar{\bar{D}}_S$, so ist wegen (12_2) (S. 155) z. B.

$$\bar{B}_S^* = +\frac{\mu}{C_0}\{\alpha[p\bar{D}]_\xi + \beta[p\bar{D}]_\eta + \gamma[p\bar{D}]_\zeta\}, \tag{36'_1a}$$

$$\bar{D}_S^* = -\frac{K}{C_0}\{\alpha[pB]_\xi + \beta[pB]_\eta + \gamma[pB]_\zeta\}; \tag{36'_1b}$$

$$\bar{B}_S = -\frac{\mu}{C_0}\{\alpha[p\bar{D}]_\xi + \beta[p\bar{D}]_\eta + \gamma[p\bar{D}]_\zeta\}, \tag{37'_1a}$$

$$\bar{D}_S = +\frac{K}{C_0}\{\alpha[pB]_\xi + \beta[pB]_\eta + \gamma[pB]_\zeta\}. \tag{37'_1b}$$

Diese Störungen sind also nicht transversal, wenn man Größen erster Ordnung noch berücksichtigt.

Anders geordnet hat man z. B.

$$\alpha[p\bar{D}]_\xi + \beta[p\bar{D}]_\eta + \gamma[p\bar{D}]_\zeta = p_x(\gamma\bar{D}_\eta - \beta\bar{D}_\zeta) + p_y(\alpha\bar{D}_\zeta - \gamma\bar{D}_\xi) + p_z(\beta\bar{D}_\xi - \alpha\bar{D}_\eta).$$

Beachtet man die Gleichungen (25a, b), so folgt aus den Gleichungen (36), (37)

$$\bar{B}_S^* = -\frac{K\mu}{C_0^2}\frac{\lambda'}{T'}(p_x\bar{B}_\xi + p_y\bar{B}_\eta + p_z\bar{B}_\zeta) = -\frac{c'}{c_0}\frac{p}{c_0}\bar{B}_p = -\frac{c'}{c_0}\frac{p}{c_0}\bar{B}_p^*, \tag{36'_2a}$$

$$\bar{D}_S^* = -\frac{K\mu}{C_0^2}\frac{\lambda'}{T'}(p_x\bar{D}_\xi + p_y\bar{D}_\eta + p_z\bar{D}_\zeta) = -\frac{c'}{c_0}\frac{p}{c_0}\bar{D}_p = -\frac{c'}{c_0}\frac{p}{c_0}\bar{D}_p^*, \tag{36'_2b}$$

$$\bar{B}_S = +\frac{K\mu}{C_0^2}\frac{\lambda'}{T'}(p_x\bar{B}_\xi + p_y\bar{B}_\eta + p_z\bar{B}_\zeta) = +\frac{c'}{c_0}\frac{p}{c_0}\bar{B}_p = +\frac{c'}{c_0}\frac{p}{c_0}\bar{B}_p, \tag{37'_2a}$$

$$D_S = +\frac{K\mu}{C_0^2}\frac{\lambda'}{T'}(p_x D_\xi + p_y D_\eta + p_z D_\zeta) = +\frac{c'}{c_0}\frac{p}{c_0}\bar{D}_p = +\frac{c'}{c_0}\frac{p}{c_0}\bar{D}_p. \tag{37'_2b}$$

Wir wenden nun die S. 125f. dargestellte Lorentz-Transformation erster Art nach Äther-Ortszeit an. Der Zweck dieser Transformation ist, wie bemerkt (S. 122), Gleichungen, die sich auf Bewegungszustände beziehen, in solche für Ruhezustand überzuführen. Da bei den Maxwell-Hertzschen Gleichungen diese Überführung schon durch die Umwandlung auf relative Koordinaten vollständig und ganz allgemein erreicht ist, und zwar in aller Strenge, so können hier die Ergebnisse der Lorentz-Transformation an sich in bezug auf den Zweck dieser Transformation nur negative sein. Allein es stellen sich dabei doch mehrere Folgerungen, zum Teil höchst sonderbarer Art ein, die namentlich auch zur Beurteilung anderer Theorien herangezogen werden können, daß es von Interesse ist, sie zu entwickeln.

Beginnen wir mit den Gleichungen (23a, b), so ist nach (m'') (S. 128)

$$\operatorname{curl}\mathfrak{F} = (\operatorname{curl}\mathfrak{F})' - \frac{\partial}{\partial\tau'}\left[\frac{p}{C_0^2}\bar{\mathfrak{F}}'\right], \quad \frac{\partial\bar{\mathfrak{F}}}{\partial t} = \frac{\partial\bar{\mathfrak{F}}'}{\partial\tau'}, \quad \bar{\mathfrak{F}} = \bar{\mathfrak{D}}, \mathfrak{B},$$

also gehen die genannten Gleichungen über in

$$+\frac{C_0}{\mu}(\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{B}})' = \frac{\partial}{\partial\tau'}\left(\bar{\mathfrak{D}} + \frac{C_0}{\mu C_0^2}[p\mathfrak{B}]\right)', \tag{40a}$$

$$-\frac{C_0}{K}(\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{D}})' = \frac{\partial}{\partial\tau'}\left(\mathfrak{B} - \frac{C_0}{KC_0^2}[p\bar{\mathfrak{D}}]\right)'. \tag{40b}$$

Von den Gleichungen für den Ruhezustand unterscheiden sich diese Gleichungen durch Glieder erster Ordnung und sie sind noch genau.

Auch die Gleichungen (27a, b) transformieren wir. Man hat nach (c″) und (p″) (S. 125, 126)

$$\frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{F}}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{F}}'}{\partial \tau'^2},$$

$$(41) \qquad \Delta \overline{\mathfrak{F}} = (\Delta \overline{\mathfrak{F}})' - \frac{2}{C_0^2} \frac{\partial}{\partial \tau'} \left(p_x \frac{\partial \overline{\mathfrak{F}}}{\partial \xi} + p_y \frac{\partial \overline{\mathfrak{F}}}{\partial \eta} + p_z \frac{\partial \overline{\mathfrak{F}}}{\partial \zeta} \right)' + \frac{p^2}{C_0^4} \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{F}}'}{\partial \tau'^2},$$

$$\overline{\mathfrak{F}} = \overline{\mathfrak{D}}, \overline{\mathfrak{B}}, \quad p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2.$$

Also wäre

$$(42_1\text{a}) \quad \left(1 - \frac{c_0^2}{C_0^4} p^2\right) \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{B}}'}{\partial \tau'^2} + 2 \frac{c_0^2}{C_0^2} \frac{\partial}{\partial \tau'} \left(p_x \frac{\partial \overline{\mathfrak{B}}'}{\partial \xi} + p_y \frac{\partial \overline{\mathfrak{B}}'}{\partial \eta} + p_z \frac{\partial \overline{\mathfrak{B}}'}{\partial \zeta} \right)' = c_0^2 (\Delta \overline{\mathfrak{B}}')',$$

$$(42_1\text{b}) \quad \left(1 - \frac{c_0^2}{C_0^4} p^2\right) \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{D}}'}{\partial \tau'^2} + 2 \frac{c_0^2}{C_0^2} \frac{\partial}{\partial \tau'} \left(p_x \frac{\partial \overline{\mathfrak{D}}'}{\partial \xi} + p_y \frac{\partial \overline{\mathfrak{D}}'}{\partial \eta} + p_z \frac{\partial \overline{\mathfrak{D}}'}{\partial \zeta} \right)' = c_0^2 (\Delta \overline{\mathfrak{D}}')'$$

und vektoriell

$$(42_2) \quad \left(1 - \frac{c_0^2}{C_0^4} p^2\right) \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{F}}'}{\partial \tau'^2} + 2 \frac{c_0^2}{C_0^2} \frac{\partial}{\partial \tau'} ((p\Gamma) \overline{\mathfrak{F}}')' = c_0^2 (\Delta \overline{\mathfrak{F}}')', \quad \overline{\mathfrak{F}}' = \overline{\mathfrak{B}}', \overline{\mathfrak{D}}'.$$

Auch diese Gleichungen sind genau. Nimmt man als Lösung, indem $\overline{\mathfrak{B}}'$, $\overline{\mathfrak{D}}'$ nunmehr Funktionen von $\xi', \eta', \zeta'; \tau'$ sein sollen, eine ebene Welle

$$(43) \qquad \overline{\mathfrak{F}}' = F' f\left(\frac{\tau'}{T'} - \frac{\alpha' \xi + \beta' \eta + \gamma' \zeta}{\lambda'} \right); \quad \overline{\mathfrak{F}}' = \overline{\mathfrak{B}}', \overline{\mathfrak{D}}',$$

so wird vor allem die Gleichung zur Bestimmung der Verbreitungsgeschwindigkeit c'

$$(44_1) \qquad \left(1 - \frac{c_0^2}{C_0^4} p^2\right) \frac{1}{T'^2} - 2 \frac{c_0^2}{C_0^2} \frac{s'}{\lambda' T'} = \frac{c_0^2}{\lambda'^2},$$

d. h.

$$(44_2) \qquad \left(1 - \frac{c_0^2}{C_0^4} p^2\right) c'^2 - 2 \frac{c_0^2}{C_0^2} c' s' = c_0^2,$$

also

$$(45_1) \qquad c' = \frac{1}{1 - \frac{c_0^2}{C_0^4} p^2} \left(c_0 \sqrt{1 - \frac{c_0^2}{C_0^4} (p^2 - s'^2)} + \frac{c_0^2}{C_0^2} s' \right)$$

und bis auf Größen noch höherer Ordnung als erster

$$(45_2) \qquad c' = c_0 + \frac{c_0^2}{C_0^2} s' + \frac{1}{2} c_0^3 \frac{p^2 + s'^2}{C_0^4}.$$

c'; α', β', γ' beziehen sich auf die Verhältnisse bei Rechnung nach der Äther-Ortszeit. Wir setzen nun die Komponenten der Verbreitungsgeschwindigkeit c' in dieser Zeit

$$(46') \qquad c'_\xi = c' \alpha', \quad c'_\eta = c' \beta', \quad c'_\zeta = c' \gamma'.$$

Dann wird

$$(47_1) \qquad \overline{\mathfrak{F}}' = F' f\left\{ \frac{1}{T'} \left(\tau' - \frac{\xi c'_\xi + \eta c'_\eta + \zeta c'_\zeta}{c'^2} \right) \right\}.$$

Indem wir für τ' seinen Wert nach (a_2''') (S. 125) einführen, erhalten wir

$$(47_2) \qquad \mathfrak{F}' = \overline{F}' f\left\{\frac{1}{T'}\left(t - \frac{\left(c'_\xi + \frac{c'^2}{C_0^2} p_x\right)\xi + \left(c'_\eta + \frac{c'^2}{C_0^2} p_y\right)\eta + \left(c'_\zeta + \frac{c'^2}{C_0^2} p_z\right)\zeta}{c'^2}\right)\right\}.$$

Bedeuten nun entsprechend

$$(46) \qquad c_\xi = c\,\alpha\,, \quad c_\eta = c\,\beta\,, \quad c_\zeta = c\,\gamma$$

die Komponenten der Verbreitungsgeschwindigkeit der Wellen bei Rechnung nach absoluter Zeit, so haben wir hiernach

$$(48) \qquad c_\xi = \frac{c^2}{c'^2}\left(c'_\xi + \frac{c'^2}{C_0^2} p_x\right), \quad c_\eta = \frac{c^2}{c'^2}\left(c'_\eta + \frac{c'^2}{C_0^2} p_y\right), \quad c_\zeta = \frac{c^2}{c'^2}\left(c'_\zeta + \frac{c'^2}{C_0^2} p_z\right).$$

Die Multiplikation dieser Gleichungen mit c_ξ, c_η, c_ζ und Addition ergibt

$$(49) \qquad c_\xi \frac{c'_\xi + \frac{c'^2}{C_0^2} p_x}{c'^2} + c_\eta \frac{c'_\eta + \frac{c'^2}{C_0^2} p_y}{c'^2} + c_\zeta \frac{c'_\zeta + \frac{c'^2}{C_0^2} p_z}{c'^2} = 1\,.$$

Diese Gleichung besagt, daß, wenn die Zeit t um dt wächst, die Welle vom Orte ξ, η, ζ zu dem Orte $\xi + \frac{d\xi}{dt}dt$, $\eta + \frac{d\eta}{dt}dt$, $\zeta + \frac{d\zeta}{dt}dt$, d. h. zu dem Orte $\xi + c_\xi dt$, $\eta + c_\eta dt$, $\zeta + c_\zeta dt$ sich ausbreitet, und ist so selbstverständlich. Im übrigen erhält man, wenn gesetzt wird

$$(50) \qquad \left(c'_\xi + \frac{c'^2}{C_0^2} p_x\right)^2 + \left(c'_\eta + \frac{c'^2}{C_0^2} p_y\right)^2 + \left(c'_\zeta + \frac{c'^2}{C_0^2} p_z\right)^2 = I''^2 = c'^2 + 2\frac{c'^2}{C_0^2} c' s' + \frac{c'^4}{C_0^4} p^2$$

$$(51) \qquad c = c_b = \frac{c'^2}{I''}\,.$$

Ferner haben wir nach (46) und (48)

$$(52_1) \qquad \alpha = \frac{c_\xi}{c} = \frac{c'_\xi + \frac{c'^2}{C_0^2} p_x}{I''}\,, \quad \beta = \frac{c_\eta}{c} = \frac{c'_\eta + \frac{c'^2}{C_0^2} p_y}{I''}\,, \quad \gamma = \frac{c_\zeta}{c} = \frac{c'_\zeta + \frac{c'^2}{C_0^2} p_z}{I''}$$

oder auch

$$(52_2) \qquad \alpha = c\left(\frac{\alpha'}{c'} + \frac{p_x}{C_0^2}\right), \quad \beta = c\left(\frac{\beta'}{c'} + \frac{p_y}{C_0^2}\right), \quad \gamma = c\left(\frac{\gamma'}{c'} + \frac{p_z}{C_0^2}\right)$$

und durch Umkehrung

$$(52') \qquad \alpha' = c'\left(\frac{\alpha}{c} - \frac{p_x}{C_0^2}\right), \quad \beta' = c'\left(\frac{\beta}{c} - \frac{p_y}{C_0^2}\right), \quad \gamma' = \left(\frac{\gamma}{c} - \frac{p_z}{C_0^2}\right).$$

Der zur Äther-Ortszeit gehörige Strahl S' hat also jedenfalls eine andere Richtung als der Strahl S. Wir bekommen

$$(53) \qquad \cos(S, S') = c\left(\frac{1}{c'} + \frac{s'}{C_0^2}\right) = c'\left(\frac{1}{c} - \frac{s}{C_0^2}\right),$$

eine Doppelgleichung, aus der auch noch folgt

$$(54) \qquad \frac{c s' + s c'}{C_0^2} = \frac{c'^2 - c^2}{c' c}\,.$$

Doch haben wir aus (52) und (52′) durch Multiplikation mit p_x, p_y, p_z und Addition auch

$$s = c\left(\frac{s'}{c'} + \frac{p^2}{C_0^2}\right), \tag{55}$$

$$s' = c'\left(\frac{s}{c} - \frac{p^2}{C_0^2}\right). \tag{55'}$$

Führen wir den Wert von s' in die Gleichung (44_2) für c' ein, so geht diese über in

$$\left(1 - \frac{c_0^2}{C_0^4}p^2\right)c'^2 - 2\left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2 c'^2\left(\frac{s}{c} - \frac{p^2}{C_0^2}\right) = c_0^2\,, \tag{44_3}$$

also

$$c' = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{c_0^2}{C_0^4}p^2 - 2\frac{c_0^2}{C_0^2}\frac{s}{c}}}\,. \tag{45_3}$$

Nun haben wir aus (50) und (51) auch

$$c = \frac{c'^2}{\sqrt{c'^2 + 2\frac{c'^2}{C_0^2}c's' + \frac{c'^4}{C_0^4}p^2}} = \frac{c'}{\sqrt{1 + 2\frac{c's'}{C_0^2} + \frac{c'^2}{C_0^4}p^2}}\,, \tag{56_1}$$

also unter Benutzung des obigen Wertes für c'

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{c_0^2}{C_0^4}p^2 - 2\frac{c_0^2}{C_0^2}\frac{s}{c}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2c's'}{C_0^2} + \frac{c'^2}{C_0^4}p^2}}\,. \tag{56_2}$$

Zufolge des Wertes von s' nach (55′) gibt die zweite Wurzel

$$1 + \frac{2c'^2}{C_0^2}\left(\frac{s}{c} - \frac{p^2}{C_0^2}\right) + \frac{c'^2}{C_0^4}p^2 = 1 + \frac{c'^2}{C_0^2}\left(\frac{2s}{c} - \frac{p^2}{C_0^2}\right)$$

und nach Einsetzung des Wertes für c'^2 aus (45_3) geht diese über in das Reziproke der ersten Wurzel. Wir erhalten also

$$c = c_b = c_0\,, \tag{56_3}$$

wie zu erwarten stand. So bekommen wir aus (45_3)

$$c' = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{c_0^2}{C_0^4}p^2 - 2\frac{c_0^2}{C_0^2}\frac{s}{c_0}}} \tag{45_4}$$

und in Näherungsrechnung

$$c' = c_0 + \frac{c_0^2}{C_0^2}s - \frac{1}{2}c_0\left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2\frac{p^2}{C_0^2} + \frac{3}{2}c_0\frac{c_0^4}{C_0^4}\frac{s^2}{c_0^2}\,. \tag{45_5}$$

Vernachlässigt man Glieder von der Ordnung $c_0\frac{p}{C_0^2}$, $c_0\frac{s}{c_0^2}$ gegen p und s, so haben wir also

$$c' = c_0 + \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2 s\,, \tag{45_6}$$

oder auch

$$c' = c_0 + \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2 s'\,. \tag{45_7}$$

Die Hauptsache ist, die Welle verbreitet sich entsprechend dem Fresnelschen Gesetz. Weiter folgt dann aus (45_2)

$$\frac{1}{c'} = \frac{1}{c_0}\left(1 - \frac{c_0^2}{C_0^2}\frac{s'}{c_0} - \frac{1}{2}c_0^2\frac{p^2 - s'^2}{C_0^4} + \dots\right),$$

somit nach Gleichung (53) und (56_3)

$$(57_1) \qquad \cos(S, S') = 1 - \frac{1}{2}\frac{c_0^2}{C_0^2}\frac{p^2 - s'^2}{C_0^2},$$

d. h.

$$(57_2) \qquad \sphericalangle(S, S') = \frac{c_0}{C_0}\sqrt{\frac{p^2 - s'^2}{C_0^2}}.$$

Für $s' = 0$ folgt

$$(57_3) \qquad \sphericalangle(S, S') = \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2\frac{p}{c_0},$$

die Aberrationsformel im Sinne des Fresnelschen Gesetzes. Da s und s' beide klein sind und sich voneinander nur durch gegen sie noch kleinere Größen unterscheiden, gilt die gleiche Beziehung auch für $s = 0$. Auch findet man aus (55′) leicht

$$\frac{s' - s}{c_0} = \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2\frac{s^2 - p^2}{c_0^2}.$$

Endlich hat man nach (45_2) und (52′)

$$(57_4) \qquad \left\{\begin{aligned}
\alpha' &= \alpha - \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2\frac{p_x - \alpha s'}{c_0} - \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^4\left(\frac{p_x s'}{c_0^2} - \frac{1}{2}\alpha\frac{p^2 + s'^2}{c_0^2}\right),\\
\beta' &= \beta - \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2\frac{p_y - \beta s'}{c_0} - \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^4\left(\frac{p_y s'}{c_0^2} - \frac{1}{2}\beta\frac{p^2 + s'^2}{c_0^2}\right),\\
\gamma' &= \gamma - \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2\frac{p_z - \gamma s'}{c_0} - \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^4\left(\frac{p_z s'}{c_0^2} - \frac{1}{2}\gamma\frac{p^2 + s'^2}{c_0^2}\right).
\end{aligned}\right.$$

Die Glieder zweiter Ordnung sind zu beachten, wenn man zur Gleichung (57_1) übergehen will, sonst könnten sie fortgelassen werden.

Hätten wir von den ursprünglichen Gleichungen (40a, b) Gebrauch gemacht, so wären die Bedingungen

$$(58_1\,\mathrm{a}) \qquad \left\{\begin{aligned}
-\frac{C_0}{\mu}(\beta'\bar{B}'_\zeta - \gamma'\bar{B}'_\eta) &= \frac{\lambda'}{T'}\left(\bar{D}'_\xi + \frac{C_0}{\mu}\frac{1}{C_0^2}(p_y\bar{B}'_\zeta - p_z\bar{B}'_\eta)\right),\\
-\frac{C_0}{\mu}(\gamma'\bar{B}'_\xi - \alpha'\bar{B}'_\zeta) &= \frac{\lambda'}{T'}\left(\bar{D}'_\eta + \frac{C_0}{\mu}\frac{1}{C_0^2}(p_z\bar{B}'_\xi - p_x\bar{B}'_\zeta)\right),\\
-\frac{C_0}{\mu}(\alpha'\bar{B}'_\eta - \beta'\bar{B}'_\xi) &= \frac{\lambda'}{T'}\left(\bar{D}'_\zeta + \frac{C_0}{\mu}\frac{1}{C_0^2}(p_x\bar{B}'_\eta - p_y\bar{B}'_\xi)\right);
\end{aligned}\right.$$

$$(58_1\,\mathrm{b}) \qquad \left\{\begin{aligned}
+\frac{C_0}{K}(\beta'\bar{D}'_\zeta - \gamma'\bar{D}'_\eta) &= \frac{\lambda'}{T'}\left(\bar{B}'_\xi - \frac{C_0}{K}\frac{1}{C_0^2}(p_y\bar{D}'_\zeta - p_z\bar{D}'_\eta)\right),\\
+\frac{C_0}{K}(\gamma'\bar{D}'_\xi - \alpha'\bar{D}'_\zeta) &= \frac{\lambda'}{T'}\left(\bar{B}'_\eta - \frac{C_0}{K}\frac{1}{C_0^2}(p_z\bar{D}'_\xi - p_x\bar{D}'_\zeta)\right),\\
+\frac{C_0}{K}(\alpha'\bar{D}'_\eta - \beta'\bar{D}'_\xi) &= \frac{\lambda'}{T'}\left(\bar{B}'_\zeta - \frac{C_0}{K}\frac{1}{C_0^2}(p_x\bar{D}'_\eta - p_y\bar{D}'_\xi)\right).
\end{aligned}\right.$$

Multipliziert man das erste System mit $\bar{B}'_\xi, \bar{B}'_\eta, \bar{B}'_\zeta$, das zweite mit $\bar{D}'_\xi, \bar{D}'_\eta, \bar{D}'_\zeta$ und addiert, so folgt in beiden Fällen

$$\bar{B}'_\xi \bar{D}'_\xi + \bar{B}'_\eta \bar{D}'_\eta + \bar{B}'_\zeta \bar{D}'_\zeta = 0 \,. \tag{59}$$

Die beiden Wellen schwingen also auch jetzt senkrecht zueinander. Dagegen findet Transversalität gegen die Verbreitungsrichtung S' nicht statt. Die Multiplikation mit α', β', γ' in jedem System und Addition ergibt nämlich

$$\text{(60a)}\quad \begin{cases} \bar{D}'_{S'} = \alpha' \bar{D}'_\xi + \beta' \bar{D}'_\eta + \gamma' \bar{D}'_\zeta \\ \qquad = -\dfrac{C_0}{\mu}\dfrac{1}{C_0^2}\left\{p_x(\gamma' \bar{B}'_\eta - \beta' \bar{B}'_\zeta) + p_y(\alpha' \bar{B}'_\zeta - \gamma' \bar{B}'_\xi) + p_z(\beta' \bar{B}'_\xi - \alpha' \bar{B}'_\eta)\right\} \,, \end{cases}$$

$$\text{(60b)}\quad \begin{cases} \bar{B}'_{S'} = \alpha' \bar{B}'_\xi + \beta' \bar{B}'_\eta + \gamma' \bar{B}'_\zeta \\ \qquad = +\dfrac{C_0}{K}\dfrac{1}{C_0^2}\left\{p_x(\gamma' \bar{D}'_\eta - \beta' \bar{D}'_\zeta) + p_y(\alpha' \bar{D}'_\zeta - \gamma' \bar{D}'_\xi) + p_z(\beta' \bar{D}'_\xi - \alpha' \bar{D}'_\eta)\right\} \,. \end{cases}$$

Andererseits folgt nach entsprechendem Verfahren mit p_x, p_y, p_z

$$\text{(61a)}\quad \begin{cases} +\dfrac{C_0}{\mu}\left\{p_x(\gamma' \bar{B}'_\eta - \beta' \bar{B}'_\zeta) + p_y(\alpha' \bar{B}'_\zeta - \gamma' \bar{B}'_\xi) + p_z(\beta' \bar{B}'_\xi - \alpha' \bar{B}'_\eta)\right\} \\ = +\dfrac{\lambda'}{T'}(p_x \bar{D}'_\xi + p_y \bar{D}'_\eta + p_z \bar{D}'_\zeta) = +\dfrac{\lambda'}{T'}\, p\, \bar{D}'_p \,, \end{cases}$$

$$\text{(61b)}\quad \begin{cases} -\dfrac{C_0}{K}\left\{p_x(\gamma' \bar{D}'_\eta - \beta' \bar{D}'_\zeta) + p_y(\alpha' \bar{D}'_\zeta - \gamma' \bar{D}'_\xi) + p_z(\beta' \bar{D}'_\xi - \alpha' \bar{D}'_\eta)\right\} \\ = +\dfrac{\lambda'}{T'}(p_x \bar{B}'_\xi + p_y \bar{B}'_\eta + p_z \bar{B}'_\zeta) = +\dfrac{\lambda'}{T'}\, p\, \bar{B}'_p \,. \end{cases}$$

Daher haben wir auch nach (60a, b)

$$\bar{D}'_{S'} = -\frac{1}{C_0^2}\frac{\lambda'}{T'}\, p\, \bar{D}'_p = -\frac{c'}{C_0}\frac{p}{C_0}\bar{D}'_p \,, \tag{62a}$$

$$\bar{B}'_{S'} = -\frac{1}{C_0^2}\frac{\lambda'}{T'}\, p\, \bar{B}'_p = -\frac{c'}{C_0}\frac{p}{C_0}\bar{B}'_p \,. \tag{62b}$$

Es verschwinden also $\bar{D}'_{S'}$, $\bar{B}'_{S'}$ zugleich mit $\bar{D}'_p$, $\bar{B}'_p$, d. h. in diesem Falle, wenn die Verbreitung der Strahlen S' in Richtung der Bewegung geschieht; nur dann sind die Störungen transversal, sonst nicht. Die Abweichung von der Transversalität ist von der ersten Ordnung.

Wir setzen noch

$$\bar{\alpha}' = \frac{1}{M'}\left(\alpha' + \frac{p_x}{C_0^2}c'\right), \quad \bar{\beta}' = \frac{1}{M'}\left(\beta' + \frac{p_y}{C_0^2}c'\right), \quad \bar{\gamma}' = \frac{1}{M'}\left(\gamma' + \frac{p_z}{C_0^2}c'\right), \tag{63_1}$$

wo

$$M'^2 = \left(\alpha' + \frac{p_x}{C_0^2}c'\right)^2 + \left(\beta' + \frac{p_y}{C_0^2}c'\right)^2 + \left(\gamma' + \frac{p_z}{C_0^2}c'\right)^2 = 1 + \frac{2c's'}{C_0^2} + \frac{c'^2 p^2}{C_0^4}$$

ist. Dann gehen die Gleichungen (58_1a, b) über in

$$(58_2\text{a})\qquad \left\{\begin{aligned} -\frac{C_0}{\mu}\left(\bar\beta'\bar B'_\zeta - \bar\gamma'\bar B'_\eta\right) &= \frac{c'}{M'}\bar D'_\xi\,,\\ -\frac{C_0}{\mu}\left(\bar\gamma'\bar B'_\xi - \bar\alpha'\bar B'_\zeta\right) &= \frac{c'}{M'}\bar D'_\eta\,,\\ -\frac{C_0}{\mu}\left(\bar\alpha'\bar B'_\eta - \bar\beta'\bar B'_\xi\right) &= \frac{c'}{M'}\bar D'_\zeta\,;\end{aligned}\right.$$

$$(58_2\text{b})\qquad \left\{\begin{aligned} +\frac{C_0}{K}\left(\bar\beta'\bar D'_\zeta - \bar\gamma'\bar D'_\eta\right) &= \frac{c'}{M'}\bar B'_\xi\,,\\ +\frac{C_0}{K}\left(\bar\gamma'\bar D'_\xi - \bar\alpha'\bar D'_\zeta\right) &= \frac{c'}{M'}\bar B'_\eta\,,\\ +\frac{C_0}{K}\left(\bar\alpha'\bar D'_\eta - \bar\beta'\bar D'_\xi\right) &= \frac{c'}{M'}\bar B'_\zeta\,.\end{aligned}\right.$$

Da nunmehr

$$(64\text{a})\qquad \bar\alpha'\bar D'_\xi + \bar\beta'\bar D'_\eta + \bar\gamma'\bar D'_\zeta = 0\,,$$

$$(64\text{b})\qquad \bar\alpha'\bar B'_\xi + \bar\beta'\bar B'_\eta + \bar\gamma'\bar B'_\zeta = 0$$

ist, so findet die Transversalität statt in bezug auf die durch $\bar\alpha'$, $\bar\beta'$, $\bar\gamma'$ gegebene Richtung, d. h., wie wir bald sehen werden, in bezug auf die Wellennormale bei absoluter Zeitrechnung. Weiter haben wir nach den Rechnungen zu (56_3) (S. 164)

$$(65_1)\qquad \frac{c'}{M'} = c_0\,,\quad \text{also}\quad c' = M'c_0\,,$$

oder vermöge des Wertes von M'

$$(65_2)\qquad c' = c_0\sqrt{1 + \frac{c'^2}{C_0^4}p^2 + 2\frac{c'}{C_0^2}s'}\,.$$

Diese Gleichung gibt

$$(44_4)\qquad c'^2\left(1 - \frac{c_0^2 p^2}{C_0^4}\right) - 2\frac{c_0^2}{C_0^2}c's' = c_0^2\,,$$

die aus (44_2) und (55) schon bekannte Beziehung. Alle diese Formeln sind wieder genau. Da die Formeln (58_2a, b) vollständig den Formeln (25a, b) entsprechen, so folgt weiter

$$(66)\qquad \bar B' = \bar B\,,\quad \bar D' = \bar D\,,$$

$$(67)\qquad (\alpha'):(\beta'):(\gamma') = \bar\alpha':\bar\beta':\gamma'\,.$$

Das erstere besagt, wie zu erwarten stand, daß durch Rechnung nach Äther-Ortszeit die Amplituden der Wellen nicht gestört werden. Nun folgt wegen

$$M' = \frac{c'}{c_0}$$

nach (63_1)

$$(63_2)\quad \bar\alpha' = c_0\left(\frac{\alpha'}{c'} + \frac{p_x}{C_0^2}\right),\quad \bar\beta' = c_0\left(\frac{\beta'}{c'} + \frac{p_y}{C_0^2}\right),\quad \gamma' = c_0\left(\frac{\gamma'}{c'} + \frac{p_z}{C_0^2}\right),$$

d. h. wegen $c_0 = c$ und der Gleichungen (52_2)

$$(63_3)\qquad \bar\alpha' = \alpha\,,\quad \bar\beta' = \beta\,,\quad \bar\gamma' = \gamma\,,$$

also bleibt nach (67) auch die Richtung der Poyntingschen Energiestörung ungeändert, und sind die Komponenten dieser Störung

$$(68_1)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}'_\xi = (4\pi)^2\left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2 \alpha\, C_0 \bar{D}\bar{B}\, f'^2, \qquad \mathfrak{P}'_\eta = (4\pi)^2\left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2 \beta\, C_0 \bar{D}\bar{B}\, f'^2, \\ \qquad\qquad \mathfrak{P}'_\zeta = (4\pi)^2\left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2 \gamma\, C_0 \bar{D}\bar{B}\, f'^2 \end{cases}$$

oder

$$(68_2)\qquad \mathfrak{P}'_\xi = \alpha\, C_0 \bar{E}\bar{H}\, f'^2, \quad \mathfrak{P}'_\eta = \beta\, C_0 \bar{E}\bar{H}\, f'^2, \quad \mathfrak{P}'_\zeta = \gamma\, C_0 \bar{E}\bar{H}\, f'^2,$$

mit

$$f' = f\left(\frac{\tau'}{T'} - \frac{\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta}{\lambda'}\right).$$

Die Gleichungen beziehen sich also auf die Verbreitung ebener polarisierter Wellen in dem mit der Materie bewegten Äther, wenn die Erscheinung sich nach Lorentzscher Äther-Ortszeit abspielt.

Handelt es sich um die Verbreitung in ruhendem Äther, so haben wir zu c' die Größe $-s'$ zu addieren. Dadurch wird

$$(69')\qquad (c') = c_0 - \left\{1 - \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2\right\} s'.$$

Das wäre dann auch die Verbreitungsgeschwindigkeit relativ zur Materie bei ruhendem Äther, und wenn wir umgekehrt die Verbreitungsgeschwindigkeit bei ruhender Materie haben wollen, ist das Zeichen von s' umzukehren, so daß man als Verbreitungsgeschwindigkeit $\bar{c}$ im ruhenden Äther, relativ zu dem ruhenden Beobachter, erhielte

$$(69'')\qquad \bar{c} = c_0 + \left\{1 - \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2\right\} s'.$$

Wir haben also für den Fall, daß die Wellen sich gemäß der Lorentzschen Äther-Ortszeit verbreiten sollten, aus der Maxwell-Hertzschen Theorie alle Gleichungen zur Erklärung der Aberration (am Diopter wie im Fernrohr), der Fresnel-Fizeauschen Erscheinung und der Dopplerschen Erscheinung erhalten. Denn es ist zu beachten, daß nach der Maxwell-Hertzschen Theorie der Äther an die Materie gebunden ist, sich also mit ihr und wie sie bewegt. Der Koeffizient der „Fresnelschen Mitführung" ist hier nur ein Zeichen für die Wirkung der Lorentzschen Äther-Ortszeit auf die Verbreitung der Wellen in Stoffen; die Mitführung selbst ist immer eine vollständige. Zugleich ist bemerkenswert, wie sich hier das Verhältnis des Relativen und Absoluten umkehrt, denn offenbar entspricht c' den Umständen bei Wahl absoluter Koordinaten, während (c') zu den relativen Koordinaten paßt. Der Michelsonsche Versuch, wenn wir ihm die behauptete Bedeutung beimessen, ist durch die Maxwell-Hertzsche Theorie ohnedies erklärt, weil der Träger der Lichtschwingungen sich wie die Erde selbst bewegen soll. Es blieben also noch die eigentlichen elektromagnetischen Erscheinungen und Versuche. Von denen wird später gesprochen.

Wir transformieren noch in derselben Weise die Divergenzgleichungen und haben nach (o'') (S. 126)

$$(70\text{a})\qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = (\operatorname{div}\mathfrak{D})' - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial}{\partial\tau'}\left(\underline{p\,\mathfrak{D}'}\right),$$

$$(70\text{b})\qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = (\operatorname{div}\mathfrak{B})' - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial}{\partial\tau'}\left(\underline{p\,\mathfrak{B}'}\right).$$

Nennen wir die Dichten bei der neuen Zeitrechnung (ϱ_e), (ϱ_m), und die Komponenten der Maxwellschen Polarisierungsströme $(\overline{P}^{(e)})$, $(P^{(m)})$, so ist hiernach

(71a) $$\varrho_e = (\varrho_e) - \frac{p_x(\overline{P}_\xi^{(e)}) + p_y(\overline{P}_\eta^{(e)}) + p_z(\overline{P}_\zeta^{(e)})}{C_0^2} = (\varrho_e) - \frac{p(\overline{P}_p^{(e)})}{C_0^2},$$

(71b) $$\varrho_m = (\varrho_m) - \frac{p_x(\overline{P}_\xi^{(m)}) + p_y(\overline{P}_\eta^{(m)}) + p_z(\overline{P}_\zeta^{(m)})}{C_0^2} = (\varrho_m) - \frac{p(\overline{P}_p^{(m)})}{C_0^2}.$$

In bei absoluter Zeitrechnung isolierenden Stoffen wird so

(71′a) $$-(\varrho_e) = -\frac{p_x(\overline{P}_\xi^{(e)}) + p_y(\overline{P}_\eta^{(e)}) + p_z(\overline{P}_\zeta^{(e)})}{C_0^2} = -\frac{p(\overline{P}_p^{(e)})}{C_0^2},$$

(71′b) $$-(\varrho_m) = -\frac{p_x(\overline{P}_\xi^{(m)}) + p_y(\overline{P}_\eta^{(m)}) + p_z(\overline{P}_\zeta^{(m)})}{C_0^2} = -\frac{p(\overline{P}_p^{(m)})}{C_0^2}.$$

Der Übergang zur Rechnung nach Äther-Ortszeit bedingt also die Ansetzung von Zusatzladungen zu den wahren Ladungen von obigem Betrage, die nur verschwinden, wenn bei dieser Zeitrechnung die Polarisierungsströme senkrecht zur Bewegungsrichtung erfolgen. H. A. Lorentz, der ähnliche Zusatzladungen für andere Verhältnisse, jedoch mit einem anderen Faktor im Nenner berechnet hat, nennt sie „Kompensationsladungen". Wir behalten hier diesen Namen bei, obwohl also die obigen Ausdrücke nicht genau mit den Lorentzschen übereinstimmen, die im Nenner, wie wir sehen werden, $c_0^2 - p^2$ besitzen. Gehen nun die Erscheinungen in der Tat nach einem wie angenommen beweglichen Raum-Zeit-System vor sich, so müssen diese Ladungen, da sie weder kompensiert werden noch etwas kompensieren, weshalb auf sie der Name Kompensationsladungen auch nicht paßt, z. B. bei jeder Ladung oder Entladung eines Kondensators sich zeigen. Aber infolge des Faktors $\frac{1}{C_0}\frac{p}{C_0}$ sind sie außerordentlich geringfügig; für die Erde betrügen sie in Luft nur $\frac{1}{3}10^{-14}(P^{(e)})$. Sie mögen daher vorhanden sein, ohne daß man sie selbst bei stärksten Entladungsvorgängen nachzuweisen vermöchte.

Aus der Clausiusschen Theorie der elektrodynamischen Gesetze hatte Budde[1]) berechnet, daß ein Strom J zu seiner sonstigen elektrostatischen Wirkung eine weitere solche Wirkung besitze, wenn er mit dem ganzen System sich bewegt, und zwar in der Weise, als wenn er eine neue Ladung vom Betrage $-p\frac{J_p}{C_0^2}$ bekäme. Budde hat nur den Leitungsstrom berücksichtigt und für diesen nachgewiesen, daß die neue Wirkung nicht zum Vorschein kommen könne, weil sie von einer anderen Wirkung kompensiert werde. Nämlich der Strom wirke in dieser Weise auch auf sich selbst, nicht bloß in der Umgebung. Ein Leitungsstrom müsse also in seinem Leiter dadurch eine wirkliche neue Ladung $+p\frac{J_p}{C_0^2}$ hervorrufen, und deren Wirkung in Verbindung mit der oben bezeichneten Wirkung nach außen gebe wegen der entgegengesetzten Gleichheit der Ladungen Null. Hier handelt es sich also in der Tat um eine Neutralisierung. Man darf in Buddes Formel unter J_p auch den ganzen Strom verstehen, also Leitungsstrom und Polarisierungsstrom; dann aber ist Neutralisierung vorhanden

[1]) Wiedem. Annalen der Physik u. Chemie **10**, 553 (1880).

nur hinsichtlich des Leitungsstromes; der Polarisierungsstrom wirkt zwar ebenfalls auf sich selbst, vermag jedoch die Elektizitäten nicht zu scheiden, also auch nicht eine die Wirkung nach außen kompensierende wirkliche Ladung $+p\,\frac{(P)_p}{C_0^2}$ hervorzubringen. Wir hätten in beiden Theorien neue Wirkungen, die an sich zu beobachten sein müßten. Übrigens ist auch bei Budde $c_0^2 - p^2$ vertreten durch C_0^2. Daß die von Budde aus Clausius' elektrodynamischem Grundgesetz abgeleitete Wirkung für ein ruhendes Raum-Zeit-System, nicht wie das obige für ein bewegliches gilt, muß noch besonders hervorgehoben werden. Budde nennt diese von ihm ermittelte Wirkung, weil sie auf der Erde infolge der Bewegung der Erde auftreten sollte, die „geokinetische Wirkung"; besser wäre sie als „Translationswirkung" zu bezeichnen. Dieser Wirkung eines Stromes nach außen entspräche eine Wirkung von außen auf den Strom. Sie ist jener nicht gleich und entgegengesetzt, weil das Clausiussche Grundgesetz dem Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion nicht entspricht; außer dem entgegengesetzt gleichen Teil kommt noch ein zweiter hinzu, der sich durch die Wirkung einer einfachen Ladung nicht darstellen läßt. Bei einem Leitungsstrom kann auch hier in der Beobachtung nichts zum Vorschein gelangen, weil dabei alles zusammen sich neutralisiert. Das ist aber der Maxwell-Hertzschen Theorie schon fremd und darf übergangen werden.

Auch die durch (29a, b) und (31a, b) (S. 159) definierten Größen $\bar{\mathfrak{D}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$; $\bar{\mathfrak{D}}^*$, $\bar{\mathfrak{B}}^*$ haben hier eine gewisse Bedeutung. Wir bilden auch für sie die Divergenzen im beweglichen Raum-Zeit-System $\xi, \eta, \zeta; \tau'$. Zunächst ist

$$\operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}} = \operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}} - \frac{K}{C_0}\operatorname{div}[\bar{\mathfrak{B}}p] = \operatorname{div}\mathfrak{D} - \frac{K}{C_0}\left(\overline{p\operatorname{curl}\mathfrak{B}}\right),$$

letzteres nach (q) (S. 121). Somit nach (23a), und da die entsprechende Rechnung auch für $\bar{\mathfrak{B}}$ gilt,

$$\text{(72a)}\qquad \operatorname{div}\bar{\bar{\mathfrak{D}}} = \operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}} - \frac{K\mu}{C_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{p\,\bar{\mathfrak{D}}}\right) = \operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{p\,\bar{\mathfrak{D}}}\right),$$

$$\text{(72b)}\qquad \operatorname{div}\bar{\bar{\mathfrak{B}}} = \operatorname{div}\bar{\mathfrak{B}} - \frac{K\mu}{C_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{p\,\bar{\mathfrak{B}}}\right) = \operatorname{div}\bar{\mathfrak{B}} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{p\,\bar{\mathfrak{B}}}\right).$$

Für Isolatoren, mit denen namentlich wir uns hier beschäftigen, wird so

$$\text{(73a)}\qquad \operatorname{div}\bar{\bar{\mathfrak{D}}} = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{p\,\bar{\mathfrak{D}}}\right),$$

$$\text{(73b)}\qquad \operatorname{div}\bar{\bar{\mathfrak{B}}} = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{p\,\bar{\mathfrak{B}}}\right).$$

Nun haben wir einerseits nach o'') (S. 126)

$$\operatorname{div}\bar{\bar{\mathfrak{D}}} = (\operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}})' - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial}{\partial\tau'}\left(\overline{p\,\mathfrak{D}}\right)$$

und andererseits nach (c'') (S. 125) noch $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\tau'}$. Also bekommen wir

$$\text{(74a)}\qquad (\operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}})' = \operatorname{div}\bar{\bar{\mathfrak{D}}} + \frac{\partial}{\partial\tau'}\left(\overline{p\left(\frac{\mathfrak{D}}{C_0^2} - \frac{\bar{\mathfrak{D}}}{c_0^2}\right)}\right),$$

$$\text{(74b)}\qquad (\operatorname{div}\bar{\mathfrak{B}})' = \operatorname{div}\bar{\bar{\mathfrak{B}}} + \frac{\partial}{\partial\tau'}\left(\overline{p\left(\frac{\mathfrak{B}}{C_0^2} - \frac{\bar{\mathfrak{B}}}{c_0^2}\right)}\right).$$

Und wenn man Größen zweiter Ordnung fortläßt, wird

(75 a) $$\left(\operatorname{div}\mathfrak{D}\right)' = \operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}}\,,$$

(75 b) $$\left(\operatorname{div}\mathfrak{B}\right)' = \operatorname{div}\bar{\mathfrak{B}}\,.$$

Entsprechendes gilt von den Größen $\mathfrak{D}^*$, $\mathfrak{B}^*$. Man hat

(76 a) $$\operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}}^* = \operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}} + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{p\,\bar{\mathfrak{D}}}\right),$$

(76 b) $$\operatorname{div}\bar{\mathfrak{B}}^* = \operatorname{div}\bar{\mathfrak{B}} + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{p\,\bar{\mathfrak{B}}}\right)$$

und für Isolatoren

(77 a) $$\operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}}^* = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{p\,\bar{\mathfrak{D}}}\right),$$

(77 b) $$\operatorname{div}\bar{\mathfrak{B}}^* = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{p\,\bar{\mathfrak{B}}}\right).$$

als Kompensationsladungen. Ferner

(78 a) $$\left(\operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}}^*\right)' = \operatorname{div}\bar{\bar{\mathfrak{D}}} + \frac{\partial}{\partial \tau'}\left(\overline{p\left(\frac{\bar{\mathfrak{D}}^*}{C_0^2} + \frac{\bar{\mathfrak{D}}}{c_0^2}\right)}\right),$$

(78 b) $$\left(\operatorname{div}\bar{\mathfrak{B}}^*\right)' = \operatorname{div}\bar{\bar{\mathfrak{B}}} + \frac{\partial}{\partial \tau'}\left(\overline{p\left(\frac{\bar{\mathfrak{B}}^*}{C_0^2} + \frac{\bar{\mathfrak{B}}}{c_0^2}\right)}\right)$$

und angenähert

$$\left(\operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}}^*\right)' = \operatorname{div}\bar{\bar{\mathfrak{D}}} + \frac{\partial}{\partial \tau'}\left(\overline{p\left(\frac{1}{C_0^2} + \frac{1}{c_0^2}\right)\bar{\mathfrak{D}}}\right),$$

$$\left(\operatorname{div}\bar{\mathfrak{B}}^*\right)' = \operatorname{div}\bar{\bar{\mathfrak{B}}} + \frac{\partial}{\partial \tau'}\left(\overline{p\left(\frac{1}{C_0^2} + \frac{1}{c_0^2}\right)\bar{\mathfrak{B}}}\right).$$

Hinsichtlich der Kompensationsladungen bilden also die Größenpaare $\bar{\mathfrak{D}}$, $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ einen gewissen Gegensatz zu dem Größenpaar $\bar{\mathfrak{D}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$, indem sie Kompensationsladungen erfordern, wo diese keine haben, nämlich bei Rechnung nach absoluter Zeit und keine (bis auf Größen zweiter Ordnung) aufweisen, wo diesen solche entsprechen, nämlich bei Rechnung nach Ortszeit. Und die Kompensationsladungen sind absolut von gleicher Größe wie bei $\bar{\mathfrak{D}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$, bei $\bar{\bar{\mathfrak{D}}}$, $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ auch von gleichem Zeichen, bei $\mathfrak{D}^*$, $\mathfrak{B}^*$ von entgegengesetztem.

Wenn wir für die Transformation von den Formeln ausgegangen wären

(79 a) $$+\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\,,$$

(79 b) $$-\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\,,$$

die ja ursprünglich bestehen sollen, so hätten wir an Stelle von (40 a, b) erhalten

$$+\frac{C_0}{4\pi}\left(\operatorname{curl}\mathfrak{H}\right)' = \frac{\partial}{\partial \tau'}\left(\bar{\mathfrak{D}} + \frac{C_0}{4\pi}\frac{1}{C_0^2}\left[p\,\bar{\mathfrak{H}}\right]\right)',$$

$$-\frac{C_0}{4\pi}\left(\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{E}}\right) = \frac{\partial}{\partial \tau'}\left(\bar{\mathfrak{B}} - \frac{C_0}{4\pi}\frac{1}{C_0^2}\left[p\,\mathfrak{E}\right]\right)'.$$

Setzen wir

$$(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D} + \frac{1}{4\pi C_0}[p\mathfrak{H}], \qquad (\mathfrak{B}) = \bar{\mathfrak{B}} - \frac{1}{4\pi C_0}[p\bar{\mathfrak{E}}],$$

so erscheinen die $(\bar{\mathfrak{D}})$, $(\bar{\mathfrak{B}})$ als neue Polarisierungen, und wir haben

$$+\frac{C_0}{4\pi}(\mathrm{curl}\,\mathfrak{H})' = \frac{\partial(\bar{\mathfrak{D}})}{\partial\tau'},$$

$$-\frac{C_0}{4\pi}(\mathrm{curl}\,\bar{\mathfrak{E}})' = \frac{\partial(\bar{\mathfrak{B}})}{\partial\tau'},$$

entsprechend den Gleichungen für absolute Zeit (bei gleichen relativen Koordinaten). Dadurch könnte man zu einer neuen Theorie geführt werden, indem man jetzt setzt

$$\mathfrak{H}' = \frac{4\pi}{\mu}(\bar{\mathfrak{B}}), \qquad \bar{\mathfrak{E}}' = \frac{4\pi}{K}(\bar{\mathfrak{D}}),$$

wo $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{E}'$ sich auf die Lorentzsche Zeitrechnung beziehen.

Alsdann wäre die Analogie mit den Verhältnissen bei Rechnung nach absoluter Zeit vollkommen. Das heißt, Erscheinungen, die man für einen nach absoluter Zeit rechnenden Beobachter auf irgend einem Wege (z. B. auf dem der Undulationslehre für die Aberration) ableitete, würden auch für einen nach Lorentzscher Ortszeit rechnenden, und in derselben Weise, stattfinden. Doch kommen wir darauf bei den anderen Theorien zurück.

Obwohl die Transformation nach Substanz-Ortszeit t' nicht zu dem Fresnelschen Gesetze führt, ist doch auch sie nicht ohne Interesse; es sei darum auch von ihren Ergebnissen einiges hervorgehoben. Für die Gleichungen (23a, b) führt sie zu den bemerkenswerten Beziehungen

$$+\frac{C_0}{\mu}(\mathrm{curl}\,\bar{\mathfrak{B}})' = \frac{\partial}{\partial t'}\left(\bar{\mathfrak{D}} + \frac{K}{C_0}[p\bar{\mathfrak{B}}]\right) = \frac{\partial\bar{\bar{\mathfrak{D}}}}{\partial t'},$$

$$-\frac{C_0}{\mu}(\mathrm{curl}\,\bar{\mathfrak{D}})' = \frac{\partial}{\partial t'}\left(\bar{\mathfrak{B}} - \frac{\mu}{C_0}[p\bar{\mathfrak{D}}]\right) = \frac{\partial\bar{\bar{\mathfrak{B}}}}{\partial t'},$$

so daß, wenn man die Form (79a, b) anwendet auch wird

$$+\frac{C_0}{4\pi}(\mathrm{curl}\,\mathfrak{H})' = \frac{\partial(\bar{\mathfrak{D}})}{\partial t'},$$

$$-\frac{C_0}{4\pi}(\mathrm{curl}\,\mathfrak{E})' = \frac{\partial(\bar{\mathfrak{B}})}{\partial t'}.$$

Als transformierte weitere Grundgleichungen erhält man nach (29_1a, b) und (30_1a, b) (S. 159)

(80a) $$+\frac{C_0}{\mu}(\mathrm{curl}\,\mathfrak{B})' = \frac{\partial\bar{\mathfrak{D}}}{\partial t'} + (\mathrm{curl}[\bar{\mathfrak{D}}p])',$$

(80b) $$-\frac{C_0}{K}(\mathrm{curl}\,\bar{\mathfrak{D}})' = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t'} + (\mathrm{curl}[\mathfrak{B}p])';$$

und

(81a) $$+\frac{C_0}{\mu}(\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}^*)' = \frac{\partial\mathfrak{D}^*}{\partial t'} - (\mathrm{curl}[\mathfrak{D}p])',$$

(81b) $$-\frac{C_0}{K}(\mathrm{curl}\,\mathfrak{D}^*)' = \frac{\partial\mathfrak{B}^*}{\partial t'} - (\mathrm{curl}[\mathfrak{B}p])'.$$

Die Gleichungen (80_1a, b) sind durch die Gleichungen (40a, b) (S. 161) und die (31a, b) (S. 159) kontrolliert. Die Gleichungen (81_1a, b) müssen durch Zeichenänderung des p aus jenen folgen.

Gewöhnlich werden Glieder, wie die rechts an zweiter Stelle stehenden, fortgelassen. Alsdann wäre vollständige Analogie vorhanden für die Größen $\overline{\mathfrak{D}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ mit den Gleichungen für absolute Koordinaten und absolute Zeit, für die $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{D}^*$ gleichfalls, jedoch mit entgegengesetzt genommener Bewegungsrichtung. Indessen halte ich diese Rechnungsweise nicht für zulässig.

Wir führen noch die Transformation nach dem Relativsystem ξ', η', ζ'; τ aus. Nach (η) und (ϑ) (S. 127) gehen die Grundgleichungen (23a, b) mit $\varkappa = 1$ über in

$$
(82\text{a})\left\{\begin{aligned}
&+\frac{C_0}{\mu}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{B}}_\zeta}{\partial\eta'}-\frac{\partial\overline{\mathfrak{B}}_\eta}{\partial\zeta'}\right)=\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,\frac{\partial\overline{\mathfrak{D}}_\xi}{\partial\tau}\,,\\
&+\frac{C_0}{\mu}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{B}}_\xi}{\partial\zeta'}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\frac{\partial\overline{\mathfrak{B}}_\zeta}{\partial\xi'}\right)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\overline{\mathfrak{D}}_\eta\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}-\frac{C_0}{\mu}\overline{\mathfrak{B}}_\zeta\frac{p}{V^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\right),\\
&+\frac{C_0}{\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\frac{\partial\overline{\mathfrak{B}}_\eta}{\partial\xi'}-\frac{\partial\overline{\mathfrak{B}}_\xi}{\partial\eta'}\right)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\overline{\mathfrak{D}}_\zeta\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}+\frac{C_0}{\mu}\overline{\mathfrak{B}}_\eta\frac{p}{V^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\right);
\end{aligned}\right.
$$

$$
(82\text{b})\left\{\begin{aligned}
&-\frac{C_0}{K}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{D}}_\zeta}{\partial\eta'}-\frac{\partial\overline{\mathfrak{D}}_\eta}{\partial\zeta'}\right)=\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,\frac{\partial\overline{\mathfrak{B}}_\xi}{\partial\tau}\,,\\
&-\frac{C_0}{K}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{D}}_\xi}{\partial\zeta'}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\frac{\partial\overline{\mathfrak{D}}_\zeta}{\partial\xi'}\right)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\overline{\mathfrak{B}}_\eta\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}+\frac{C_0}{K}\overline{\mathfrak{D}}_\zeta\frac{p}{V^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\right),\\
&-\frac{C_0}{K}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\frac{\partial\overline{\mathfrak{D}}_\eta}{\partial\xi'}-\frac{\partial\overline{\mathfrak{D}}_\xi}{\partial\eta'}\right)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\overline{\mathfrak{B}}_\zeta\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}-\frac{C_0}{K}\overline{\mathfrak{D}}_\eta\frac{p}{V^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\right),
\end{aligned}\right.
$$

während die Gleichungen (27a, b) nach (λ) (S. 128) ergeben

$$
(83\text{a})\left\{\begin{aligned}
&c_0^2\left(\frac{1}{1-\frac{p^2}{V^2}}\frac{\partial^2\overline{\mathfrak{B}}}{\partial\xi'^2}+\frac{\partial^2\overline{\mathfrak{B}}}{\partial\eta'^2}+\frac{\partial^2\overline{\mathfrak{B}}}{\partial\zeta'^2}\right)\\
&=\left(\left(1-\frac{p^2}{V^2}\right)-c_0^2\frac{p^2}{V^4}\frac{1}{1-\frac{p^2}{V^2}}\right)\frac{\partial^2\overline{\mathfrak{B}}}{\partial\tau^2}+2\,c_0^2\frac{p}{V^2}\frac{1}{1-\frac{p^2}{V^2}}\frac{\partial^2\overline{\mathfrak{B}}}{\partial\tau\,\partial\xi'}\,,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(83\text{b})\left\{\begin{aligned}
&c_0^2\left(\frac{1}{1-\frac{p^2}{V^2}}\frac{\partial^2\overline{\mathfrak{D}}}{\partial\xi'^2}+\frac{\partial^2\overline{\mathfrak{D}}}{\partial\eta'^2}+\frac{\partial^2\overline{\mathfrak{D}}}{\partial\zeta'^2}\right)\\
&=\left(\left(1-\frac{p^2}{V^2}\right)-c_0^2\frac{p^2}{V^4}\frac{1}{1-\frac{p^2}{V^2}}\right)\frac{\partial^2\overline{\mathfrak{D}}}{\partial\tau^2}+2\,c_0^2\frac{p}{V^2}\frac{1}{1-\frac{p^2}{V^2}}\frac{\partial^2\overline{\mathfrak{D}}}{\partial\tau\,\partial\xi'}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Auch diesen Gleichungen kann man durch ebene polarisierte Wellen genügen. Setzt man

$$\bar{\mathfrak{F}} = \bar{F}'' f\left(\frac{\tau}{T''} - \frac{\alpha''\xi' + \beta''\eta' + \gamma''\zeta'}{\lambda''}\right), \quad \bar{\mathfrak{F}} = \bar{\mathfrak{B}}, \bar{\mathfrak{D}}; \quad \bar{F}'' = \bar{B}'', \bar{D}'',$$

so hat man zur Bestimmung der Verbreitungsgeschwindigkeit $c'' = \dfrac{\lambda''}{T''}$

$$(84_1) \quad \left|\begin{aligned} &\frac{c_0^2}{\lambda''^2}\left(\frac{1}{1-\frac{p^2}{V^2}}\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2\right) \\ &= \frac{1}{T''^2}\left(\left(1-\frac{p^2}{V^2}\right) - c_0^2\frac{p^2}{V^4}\frac{1}{1-\frac{p^2}{V^2}}\right) - 2c_0^2\frac{\alpha''}{\lambda'' T''}\frac{p}{V^2}\frac{1}{1-\frac{p^2}{V^2}}\end{aligned}\right.$$

oder

$$(84_2) \quad c''^2\left\{\left(1-\frac{p^2}{V^2}\right)^2 - c_0^2\frac{p^2}{V^4}\right\} - 2c_0^2\frac{s''}{V^2}c'' = c_0^2\left(\frac{s''^2}{V^2} + 1 - \frac{p^2}{V^2}\right).$$

Darin haben wir, da $p = p_z$ gesetzt ist,

$$\alpha'' p = p_{s''} = s''$$

Die Auflösung ergibt

$$(85_1) \quad c'' = \frac{c_0}{\left(1-\frac{p^2}{V^2}\right)^2 - c_0^2\frac{p^2}{V^4}}\left(\frac{c_0 s''}{V^2} + \sqrt{\left\{\left(1-\frac{p^2}{V^2}\right)^2 - c_0^2\frac{p^2}{V^4}\right\}\left(\frac{s''^2}{V^2} + 1 - \frac{p^2}{V^2}\right) + c_0^2\frac{s''^2}{V^4}}\right).$$

Setzt man, wie üblich, $V = C_0$, und läßt höhere Glieder fort, so wird

$$(85_2) \quad c'' = c_0 + \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2 s''.$$

Man kommt also auch hier zum Fresnelschen Gesetz, was auch angesichts der Darstellung von τ' und τ vorauszusehen ist.

Die Gleichungen (82a, b) geben noch

$$(86a)\left\{\begin{aligned} &-\frac{C_0}{\mu}(\beta''\bar{B}_{\zeta''}'' - \gamma''\bar{B}_{\eta''}'') = \frac{\lambda''}{T''}\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,\bar{D}_{\xi''}'', \\ &-\frac{C_0}{\mu}\left(\gamma''\bar{B}_{\xi''}'' - \alpha''\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\bar{B}_{\zeta''}''\right) = \frac{\lambda''}{T''}\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,\bar{D}_{\eta''}'' - \frac{C_0}{\mu}\frac{p}{V^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\bar{B}_{\zeta''}''\right), \\ &-\frac{C_0}{\mu}\left(\alpha''\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\bar{B}_{\eta''}'' - \beta''\bar{B}_{\xi''}''\right) = \frac{\lambda''}{T''}\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,\bar{D}_{\zeta''}'' + \frac{C_0}{\mu}\frac{p}{V^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\bar{B}_{\eta''}''\right);\end{aligned}\right.$$

$$(86b)\left\{\begin{aligned} &+\frac{C_0}{K}(\beta''\bar{D}_{\zeta''}'' - \gamma''\bar{D}_{\eta''}'') = \frac{\lambda''}{T''}\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,\bar{B}_{\xi''}'', \\ &+\frac{C_0}{K}\left(\gamma''\bar{D}_{\xi''}'' - \alpha''\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\bar{D}_{\zeta''}''\right) = \frac{\lambda''}{T''}\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,\bar{B}_{\eta''}'' + \frac{C_0}{K}\frac{p}{V^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\bar{D}_{\zeta''}''\right), \\ &+\frac{C_0}{K}\left(\alpha''\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\bar{D}_{\eta''}'' - \beta''\bar{D}_{\xi''}''\right) = \frac{\lambda''}{T''}\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,\bar{B}_{\zeta''}'' - \frac{C_0}{K}\frac{p}{V^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\bar{D}_{\eta''}''\right).\end{aligned}\right.$$

Multipliziert man das erste System mit $\overline{B}_\xi^{\prime\prime}$, $\overline{B}_\eta^{\prime\prime}$, $\overline{B}_\zeta^{\prime\prime}$ oder das zweite mit $\overline{D}_\xi^{\prime\prime}$, $\overline{D}_\eta^{\prime\prime}$, $\overline{D}_\zeta^{\prime\prime}$ und addiert, so bekommt man

$$\text{(87)} \qquad \overline{B}_\xi^{\prime\prime}\overline{D}_\xi^{\prime\prime} + \overline{B}_\eta^{\prime\prime}\overline{D}_\eta^{\prime\prime} + \overline{B}_\zeta^{\prime\prime}\overline{D}_\zeta^{\prime\prime} = 0\,.$$

Die Wellen schwingen also wieder senkrecht zueinander. Transversal zur neuen Verbreitungsrichtung $S''(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ sind die Wellen nicht, wohl aber zu der Richtung

$$\text{(88)} \quad (\alpha'') = \frac{1}{M''\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left(\alpha'' + \frac{c''p}{V^2}\right), \qquad (\beta'') = \frac{1}{M''}\beta'', \qquad (\gamma'') = \frac{1}{M''}\gamma'',$$

wo

$$M'' = \sqrt{\left(\alpha'' + \frac{c''p}{V^2}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{p^2}{V^2}} + \beta''^2 + \gamma''^2}$$

ist. Alle übrigen Rechnungen entsprechen völlig den früher ausgeführten, wie auch die Ergebnisse jenen analog ausfallen.

Für geringe Geschwindigkeiten können wir hiernach die beiden Transformationsweisen mit gleichem Erfolg anwenden, weil sie sich für solche Geschwindigkeiten überhaupt nicht wesentlich voneinander unterscheiden. Sobald aber die Geschwindigkeiten gegen die Verbreitungsgeschwindigkeit C_0 in Betracht kommen, weichen die beiden Transformationsweisen durchaus voneinander ab. In den Kathodenstrahlen, namentlich aber in den β-Strahlen radioaktiver Stoffe, haben wir Bewegungen mit solchen hohen Geschwindigkeiten; an ihnen ließe sich entscheiden, welche Transformation die entscheidende sei. Allein es ist fraglich, ob diese Strahlen ihrerseits Träger von elektromagnetischen Wellen sein können, in dem Sinne wie Stoffe es sind.

c) Wellenverbreitung bei ungleichförmiger Bewegung.

In diesem Falle ist es nicht möglich die Größen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ allgemein von einander zu trennen, und wir haben nach (A_5a, b) (S. 146) für absolute Koordinaten

$$\text{(1a)} \left\{\begin{aligned}
&+\frac{C_0}{\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z}\right)\\
&= \frac{d\mathfrak{D}_x}{dt} - \mathfrak{D}_x\frac{\partial g_x}{\partial x} - \mathfrak{D}_y\frac{\partial g_x}{\partial y} - \mathfrak{D}_z\frac{\partial g_x}{\partial z} + \mathfrak{D}_x\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right) + J_x,\\
&+\frac{C_0}{\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x}\right)\\
&= \frac{d\mathfrak{D}_y}{dt} - \mathfrak{D}_x\frac{\partial g_y}{\partial x} - \mathfrak{D}_y\frac{\partial g_y}{\partial y} - \mathfrak{D}_z\frac{\partial g_y}{\partial z} + \mathfrak{D}_y\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right) + J_y,\\
&+\frac{C_0}{\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y}\right)\\
&= \frac{d\mathfrak{D}_z}{dt} - \mathfrak{D}_x\frac{\partial g_z}{\partial x} - \mathfrak{D}_y\frac{\partial g_z}{\partial y} - \mathfrak{D}_z\frac{\partial g_z}{\partial z} + \mathfrak{D}_z\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right) + J_z;
\end{aligned}\right.$$

$$
(1\text{b}) \quad \begin{cases}
-\frac{C_0}{K}\left(\frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial z}\right)=\frac{d\mathfrak{B}_x}{dt}-\mathfrak{B}_x\frac{\partial g_x}{\partial x}-\mathfrak{B}_y\frac{\partial g_x}{\partial y}-\mathfrak{B}_z\frac{\partial g_x}{\partial z}+\mathfrak{B}_x\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right), \\
-\frac{C_0}{K}\left(\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial x}\right)=\frac{d\mathfrak{B}_y}{dt}-\mathfrak{B}_x\frac{\partial g_y}{\partial x}-\mathfrak{B}_y\frac{\partial g_y}{\partial y}-\mathfrak{B}_z\frac{\partial g_y}{\partial z}+\mathfrak{B}_y\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right), \\
-\frac{C_0}{K}\left(\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial y}\right)=\frac{d\mathfrak{B}_z}{dt}-\mathfrak{B}_x\frac{\partial g_z}{\partial x}-\mathfrak{B}_y\frac{\partial g_z}{\partial y}-\mathfrak{B}_z\frac{\partial g_z}{\partial z}+\mathfrak{B}_z\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right).
\end{cases}
$$

Die Gleichungen zeigen unmittelbar, daß nur Schwingungen mit variabler Amplitude zulässig sind, mag das Argument der Schwingung noch besonders variieren oder nur wie bei geradlinig polarisierten geraden Strahlen sich verhalten. Wir lassen J fort und setzen wie S. 59

$$(2\text{a}) \qquad \mathfrak{B}_p = B_p f(\Psi)\,,$$

$$(2\text{b}) \qquad \mathfrak{D}_p = D_p f(\Psi)\,; \quad p = x, y, z\,;$$

$$(3) \qquad \Psi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \int\frac{dS}{\lambda}\right),$$

so hätten wir als Bedingungsgleichungen: erstens zwei Sätze entsprechend den obigen Gleichungen (1a, b) mit B und D an Stelle von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$, zweitens zwei andere Sätze von der Form

$$
(4\text{a}) \quad \begin{cases}
+\frac{C_0}{\mu}\left(B_z\frac{\partial \Psi}{\partial y} - B_y\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = D_x\frac{d\Psi}{d!}\,, \\
+\frac{C_0}{\mu}\left(B_x\frac{\partial \Psi}{\partial z} - B_z\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = D_y\frac{d\Psi}{dt}\,, \\
+\frac{C_0}{\mu}\left(B_y\frac{\partial \Psi}{\partial x} - B_x\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = D_z\frac{d\Psi}{dt}\,;
\end{cases}
$$

$$
(4\text{b}) \quad \begin{cases}
-\frac{C_0}{K}\left(D_z\frac{\partial \Psi}{\partial y} - D_y\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = B_x\frac{d\Psi}{dt}\,, \\
-\frac{C_0}{K}\left(D_x\frac{\partial \Psi}{\partial z} - D_z\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = B_y\frac{d\Psi}{dt}\,, \\
-\frac{C_0}{K}\left(D_y\frac{\partial \Psi}{\partial x} - D_x\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = B_z\frac{d\Psi}{dt}\,.
\end{cases}
$$

Multipliziert man diese Sätze mit B_x, B_y, B_z; D_x, D_y, D_z und addiert in jedem System, so folgt jedesmal

$$(5) \qquad B_x D_x + B_y D_y + B_z D_z = 0\,.$$

Die elektrischen und magnetischen Schwingungen gehen also wieder senkrecht zueinander vor sich. Ferner ergibt die Multiplikation mit $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ und Addition

$$(6\text{a}) \qquad D_x\frac{\partial \Psi}{\partial x} + D_y\frac{\partial \Psi}{\partial y} + D_z\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0\,,$$

$$(6\text{b}) \qquad B_x\frac{\partial \Psi}{\partial x} + B_y\frac{\partial \Psi}{\partial y} + B_z\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0\,,$$

Gleichungen, die die Transversalitätsbedingungen vertreten.

Da wir ferner für Isolatoren haben

$$\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} = 0\,, \qquad \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} = 0\,,$$

so folgten auch hieraus die obigen beiden Gleichungen. Also besteht die angenommene Lösungsform nur für Isolatoren. Außerdem wird

$$\text{(7 a)} \qquad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0\,,$$

$$\text{(7 b)} \qquad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0\,.$$

Endlich ergibt die Quadrierung und Addierung der Gleichungen (4a, b) wegen (6a, b) entsprechend (6a, b) (S. 153).

$$\text{(8a)} \quad \frac{C_0^2}{\mu^2}\left\{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right\}(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) = (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2,$$

$$\text{(8b)} \quad \frac{C_0^2}{K^2}\left\{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right\}(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) = (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2,$$

also zunächst entsprechend (9a, b) (S. 153)

$$\text{(9)} \qquad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{\frac{\mu}{K}}\sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} = \sqrt{\frac{\mu}{K}}\, D\,,$$

sodann entsprechend (8) (S. 153)

$$\text{(10)} \qquad \left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2 = c_0^2\left\{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

hier als Differentialgleichung für Ψ.

Wir betrachten den Fall stationärer Bewegung; T und $\int \frac{dS}{\lambda}$ werden dann nur von x, y, z, nicht von t abhängen. Setzen wir $\int \frac{dS}{\lambda} = \Sigma$, so ist

$$\text{(11)} \qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = 2\pi t\,\dfrac{\partial \frac{1}{T}}{\partial x} - 2\pi\,\dfrac{\partial \Sigma}{\partial x}\,, \qquad \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = 2\pi t\,\dfrac{\partial \frac{1}{T}}{\partial y} - 2\pi\,\dfrac{\partial \Sigma}{\partial y}\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} = 2\pi t\,\dfrac{\partial \frac{1}{T}}{\partial z} - 2\pi\,\dfrac{\partial \Sigma}{\partial z}\,; \end{array}\right.$$

$$\text{(12)} \quad \frac{d\Psi}{dt} = \frac{2\pi}{T} + 2\pi t\left(g_x\frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial x} + g_y\frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial y} + g_z\frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial z}\right) - 2\pi\left(g_x\frac{\partial \Sigma}{\partial x} + g_y\frac{\partial \Sigma}{\partial y} + g_z\frac{\partial \Sigma}{\partial z}\right)$$

und wir müssen nach (10) haben

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}
&\left(g_x\frac{\partial\frac{1}{T}}{\partial x}+g_y\frac{\partial\frac{1}{T}}{\partial y}+g_z\frac{\partial\frac{1}{T}}{\partial z}\right)^2=c_0^2\left\{\left(\frac{\partial\frac{1}{T}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{1}{T}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{1}{T}}{\partial z}\right)^2\right\},\\
&\left\{\frac{1}{T}-\left(g_x\frac{\partial\Sigma}{\partial x}+g_y\frac{\partial\Sigma}{\partial y}+g_z\frac{\partial\Sigma}{\partial z}\right)\right\}\left(g_x\frac{\partial\frac{1}{T}}{\partial x}+g_y\frac{\partial\frac{1}{T}}{\partial y}+g_z\frac{\partial\frac{1}{T}}{\partial z}\right)\\
&\qquad=-c_0^2\left(\frac{\partial\frac{1}{T}}{\partial x}\frac{\partial\Sigma}{\partial x}+\frac{\partial\frac{1}{T}}{\partial y}\frac{\partial\Sigma}{\partial y}+\frac{\partial\frac{1}{T}}{\partial z}\frac{\partial\Sigma}{\partial z}\right),\\
&\left\{\frac{1}{T}-\left(g_x\frac{\partial\Sigma}{\partial x}+g_y\frac{\partial\Sigma}{\partial y}+g_z\frac{\partial\Sigma}{\partial z}\right)\right\}^2=c_0^2\left\{\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial z}\right)^2\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Wir fragen wieder, ob T allein variieren kann. In diesem Falle gehen die obigen Gleichungen über in

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}
&\left(g_x\frac{\partial T}{\partial x}+g_y\frac{\partial T}{\partial y}+g_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2=c_0^2\left\{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right\},\\
&(c-s)\left(g_x\frac{\partial T}{\partial x}+g_y\frac{\partial T}{\partial y}+g_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=-c_0^2\left(\alpha\frac{\partial T}{\partial x}+\beta\frac{\partial T}{\partial y}+\gamma\frac{\partial T}{\partial z}\right)\\
&(c-s)^2=c_0^2\,.
\end{aligned}\right.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, daß $\alpha\frac{\partial T}{\partial x}+\beta\frac{\partial T}{\partial y}+\gamma\frac{\partial T}{\partial z}$ von der Ordnung $\frac{1}{c_0}$ klein sein müßte gegen $g_x\frac{\partial T}{\partial x}+g_y\frac{\partial T}{\partial y}+g_z\frac{\partial T}{\partial z}$, und da α, β, γ nicht alle unendlich klein sein können, darf nur $\alpha\frac{\partial T}{\partial x}+\beta\frac{\partial T}{\partial y}+\gamma\frac{\partial T}{\partial z}=0$ sein. Alsdann ist auch $g_x\frac{\partial T}{\partial x}+g_y\frac{\partial T}{\partial y}+g_z\frac{\partial T}{\partial z}=0$, somit auch, nach der ersten Gleichung, $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2=0$, d. h. $T=$ Konst. Das gleiche folgt auch, wenn α, β, γ und λ von x, y, z abhängen. Also kann T überhaupt nur konstant sein, wie in der Undulationstheorie (vgl. S. 83). So bleibt nur die dritte Gleichung

$$(15_1)\quad\frac{1}{T}-\left(g_x\frac{\partial\Sigma}{\partial x}+g_y\frac{\partial\Sigma}{\partial y}+g_z\frac{\partial\Sigma}{\partial z}\right)=c_0\sqrt{\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial z}\right)^2}$$

übrig, welche die Beziehung $c-s=c_0$ vertritt. Oder wie wir nun auch schreiben können

$$(15_2)\quad\left\{1-\left(g_x\frac{\partial\tau}{\partial x}+g_y\frac{\partial\tau}{\partial y}+g_z\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)\right\}^2=c_0^2\left\{\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

eine Gleichung, die vollständig der S. 88 aufgestellten Gleichung (207a) der Undulationstheorie entspricht, da τ die gleiche Bedeutung wie dort besitzt, nämlich die Zeit feststellt, die die Störung braucht, bis zur Stelle x, y, z zu gelangen, und $\mu_0 K_0=1$ sein sollte. Daher ist die ganze frühere Betrachtung (S. 88—109) einfach hierher zu übertragen.

Auch die Gleichung (207b) vertretende Beziehungen lassen sich hier ableiten; diese sind jedoch von jener Gleichung durchaus verschieden in der Form.

Differenziert man nämlich die Gleichungen (4a, b) nach x, y, z und addiert, so folgt unter Berücksichtigung von (7a, b)

$$(16_1 a) \left\{ \begin{aligned} &+\frac{C_0}{\mu}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) \\ &\qquad = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{d\Psi}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{d\Psi}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z \frac{d\Psi}{dt}\right) \\ &\qquad = D_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + D_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + D_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right); \end{aligned} \right.$$

$$(16_1 b) \left\{ \begin{aligned} &-\frac{C_0}{K_0}\left(\frac{\partial D_z}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial D_y}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial D_x}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial D_z}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial D_x}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) \\ &\qquad = \frac{\partial}{\partial x}\left(B_x \frac{d\Psi}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B_y \frac{d\Psi}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(B_z \frac{d\Psi}{dt}\right) \\ &\qquad = B_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + B_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + B_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right). \end{aligned} \right.$$

Wir nehmen spezialisierend an, daß jede der beiden Schwingungen immer gleich gerichtet bleibt, alsdann haben wir

$$B_x = B'_x F, \quad B_y = B'_y F, \quad B_z = B'_z F; \qquad D_x = D'_x F, \quad D_y = D'_y F, \quad D_z = D'_z F,$$

wo F eine Funktion von x, y, z bedeutet, die B', D' aber Konstanten darstellen. Nunmehr geben die obigen Gleichungen

$$(17_1 a) \left\{ \begin{aligned} &+B'_x\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + B'_y\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) \\ &\qquad + B'_z\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\mu}{C_0}\left\{D'_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + D'_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + D'_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)\right\} F, \end{aligned} \right.$$

$$(17_1 b) \left\{ \begin{aligned} &-D'_x\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) - D'_y\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) \\ &\qquad - D'_z\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) \\ &= \frac{K}{C_0}\left\{B'_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + B'_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + B'_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)\right\} F, \end{aligned} \right.$$

oder

$$(17_2 a) \quad \begin{vmatrix} B'_x & B'_y & B'_z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} & \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{vmatrix} = +\frac{\mu}{C_0}\left\{D'_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + D'_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + D'_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)\right\} F,$$

$$(17_2 b) \quad \begin{vmatrix} D'_x & D'_y & D'_z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} & \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{vmatrix} = -\frac{K}{C_0}\left\{B'_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + B'_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + B'_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)\right\} F.$$

Da die Schwingungsrichtungen konstant bleiben sollen, können wir in sie die Richtung zweier Achsen verlegen. Nehmen wir hiernach $B'_y = B'_z = 0$, so muß $D'_x = D'_z = 0$ sein und wir haben

$$\begin{matrix} D'_y \\ B'_z \end{matrix} = \frac{1}{F} \frac{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)} \frac{C_0}{\mu} = -\frac{K}{C_0} \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)}{\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}} F .$$

Hieraus folgt nach (7) (S. 177)

$$(\alpha) \qquad c_0^2 \frac{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)}{\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}} F^2 .$$

Andererseits ist nach (9) (S. 177) auch

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)} \frac{C_0^2}{\mu^2} = -\left(\frac{D'_y}{B'_z}\right)^2 \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)}{\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}} F^2 ,$$

d. h.

$$(\beta) \qquad 1 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)} \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)}{\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}} .$$

Diese Gleichung aber kann mit Gleichung (α) nicht bestehen. Also müssen in den Gleichungen (17a, b) die linken wie die rechten Seiten für sich Null sein, und wir bekommen

$$(18_1\text{a}) \quad \begin{vmatrix} D'_x & D'_y & D'_z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} & \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 , \qquad (18_1\text{b}) \quad \begin{vmatrix} B'_x & B'_y & B'_z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} & \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 ;$$

oder

$$(18_2\text{a}) \quad \begin{vmatrix} D'_x & D'_y & D'_z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 , \qquad (18_2\text{b}) \quad \begin{vmatrix} B'_x & B'_y & B'_z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$(19\text{a}) \qquad D'_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + D'_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + D'_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) = 0 ,$$

$$(19\text{b}) \qquad B'_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + B'_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + B'_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) = 0 .$$

In diesen letzten Gleichungen ist

$$\frac{d\Psi}{dt} = \left(1 - g_x\frac{\partial\tau}{\partial x} - g_y\frac{\partial\tau}{\partial y} - g_z\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)\frac{2\pi}{T}\,, \tag{19}$$

wo T eine Konstante, so daß man in diesen Gleichungen die Differentiationen auch an der Größe $g_x\frac{\partial\tau}{\partial x} + g_y\frac{\partial\tau}{\partial y} + g_z\frac{\partial\tau}{\partial z}$ ausführen darf.

Unter den gleichen Umständen haben wir aus (5) und (6)

$$D_x'B_x' + D_y'B_y' + D_z'B_z' = 0\,, \tag{20}$$

$$D_x'\frac{\partial\tau}{\partial x} + D_y'\frac{\partial\tau}{\partial y} + D_z'\frac{\partial\tau}{\partial z} = 0\,, \tag{21a}$$

$$B_x'\frac{\partial\tau}{\partial x} + B_y'\frac{\partial\tau}{\partial y} + B_z'\frac{\partial\tau}{\partial z} = 0\,. \tag{21b}$$

Von diesen Gleichungen geben die erste und zweite zusammen mit (18_2a) ein System von drei linearen homogenen Gleichungen, ebenso die erste und dritte zusammen mit (18_2b). Aus beiden Systemen folgt

$$\begin{vmatrix} D_x' \text{ oder } B_x' & D_y' \text{ oder } B_y' & D_z' \text{ oder } B_z' \\ \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\tau}{\partial x} & \frac{\partial\tau}{\partial y} & \frac{\partial\tau}{\partial z} \end{vmatrix} = 0\,, \tag{22}$$

also nach (18_2a, b)

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} = \varkappa\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \varkappa\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right), \\ &\frac{\partial F}{\partial z} = \varkappa\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right), \end{aligned}\right. \tag{23}$$

wo $\varkappa$ eine Funktion von x, y, z sein mag. Multipliziert man aber diese Gleichungen mit $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ und addiert, so ergibt sich

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = 0\,.$$

Daraus folgt, daß F konstant ist. Die polarisierten Wellen sind also nur mit konstanten Amplituden möglich. Die Gleichungen (18a, b) sind dann identisch erfüllt.

Weiter folgt aus den Beziehungen (21a, b), daß $\frac{\partial\tau}{\partial x}$, $\frac{\partial\tau}{\partial y}$, $\frac{\partial\tau}{\partial z}$ konstant proportional sind der gleichen Funktion θ von x, y, z, nämlich

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} = \theta_1\,\theta\,, \quad \frac{\partial\tau}{\partial y} = \theta_2\,\theta\,, \quad \frac{\partial\tau}{\partial z} = \theta_3\,\theta\,, \tag{24}$$

so daß

$$\frac{d\Psi}{dt} = (1 - (\theta_1 g_x + \theta_2 g_y + \theta_3 g_z)\,\theta)\frac{2\pi}{T} \tag{25}$$

wird, wo $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ Konstanten bedeuten. Da nun nach (19a, b) auch $\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\Psi}{dt}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\Psi}{dt}$, $\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\Psi}{dt}$ konstant proportional sind einer und derselben Funktion, so muß das gleiche gelten von den Differentialquotienten von $(\theta_1 g_x + \theta_2 g_y + \theta_3 g_z)\,\theta$. Hiernach sind τ so wie g_x, g_y, g_z Funktionen nicht sowohl von x, y, z als von linearen Funktionen von x, y, z, etwa

$$\tau = f(\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \theta_0), \tag{26}$$

$$g_x = g_1 G, \quad g_y = g_2 G, \quad g_z = g_3 G; \quad G = G(\Gamma_1 x + \Gamma_2 y + \Gamma_3 z + \Gamma_0), \tag{27}$$

mit Γ_0, Γ_1, Γ_2, Γ_3 als Konstanten, so daß die Bewegung geradlinig ist. Wir haben dann

$$g_x \frac{\partial \tau}{\partial x} + g_y \frac{\partial \tau}{\partial y} + g_z \frac{\partial \tau}{\partial z} = (g_1 \theta_1 + g_2 \theta_2 + g_3 \theta_3)\,\theta G, \tag{28}$$

also zufolge (21a, b) und (19a, b)

$$D_x' \theta_1 + D_y' \theta_2 + D_z' \theta_3 = 0, \tag{29a}$$

$$B_x' \theta_1 + B_y' \theta_2 + B_z' \theta_3 = 0; \tag{29b}$$

$$D_x' \frac{\partial(\theta G)}{\partial x} + D_y' \frac{\partial(\theta G)}{\partial y} + D_z' \frac{\partial(\theta G)}{\partial z} = 0, \tag{30a}$$

$$B_x' \frac{\partial(\theta G)}{\partial x} + B_y' \frac{\partial(\theta G)}{\partial y} + B_z' \frac{\partial(\theta G)}{\partial z} = 0, \tag{30b}$$

d. h.

$$\theta G = \text{Funktion}\big((a\theta_1 + a'\Gamma_1)\,x + (b\theta_2 + b'\Gamma_2)\,y + (c\theta_3 + c'\Gamma_3)\,z + d\theta_0 + d'\Gamma_0\big) \tag{31}$$

und zugleich

$$\left\{\begin{aligned} \theta_1 : \theta_2 : \theta_3 &= (a\theta_1 + a'\Gamma_1) : (b\theta_2 + b'\Gamma_2) : (c\theta_3 + c'\Gamma_3) \\ &= (D_y' B_z' - D_z' B_y') : (D_z' B_x' - D_x' B_z') : (D_x' B_y' - D_y' B_x'). \end{aligned}\right. \tag{32}$$

In dieser hier notwendigen Bedingung liegt ein grundsätzlicher Unterschied zwischen der Undulationstheorie und der elektromagnetischen Lehre, der darin begründet ist, daß die letztere immer zwei Wellensysteme, das elektrische und das magnetische, aufweist, wo erstere nur ein Wellensystem besitzt, und der naturgemäß auch besteht, wenn die Wellenverbreitung in ruhendem Äther erfolgt. Jedenfalls ist aber nach der Theorie von Maxwell-Hertz auch in ungleichförmig bewegtem Äther geradlinige Verbreitung von polarisierten Strahlen mit konstanter Amplitude und Schwingungsdauer möglich, nämlich wenn die Bewegung geradlinig ist und nicht von x, y, z selbst, sondern von einer linearen Funktion dieser Koordinaten bestimmt wird. Die Ankunftszeit ist dann gleichfalls eine Funktion einer linearen Funktion der Koordinaten.

Gehen wir zu den Differentialgleichungen für die Amplituden über, so haben wir in dem betrachteten Falle geradlinig polarisierter Wellen

$$(33a)\quad \begin{cases} + \dfrac{C_0}{\mu}\left(B_z'\dfrac{\partial F}{\partial y} - B_y'\dfrac{\partial F}{\partial z}\right) \\ = D_x'\dfrac{dF}{dt} - \left(D_x'\dfrac{\partial g_x}{\partial x} + D_y'\dfrac{\partial g_x}{\partial y} + D_z'\dfrac{\partial g_x}{\partial z}\right)F + D_x'\left(\dfrac{\partial g_x}{\partial x} + \dfrac{\partial g_y}{\partial y} + \dfrac{\partial g_z}{\partial z}\right)F, \\ + \dfrac{C_0}{\mu}\left(B_x'\dfrac{\partial F}{\partial z} - B_z'\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) \\ = D_y'\dfrac{dF}{dt} - \left(D_x'\dfrac{\partial g_y}{\partial x} + D_y'\dfrac{\partial g_y}{\partial y} + D_z'\dfrac{\partial g_y}{\partial z}\right)F + D_y'\left(\dfrac{\partial g_x}{\partial x} + \dfrac{\partial g_y}{\partial y} + \dfrac{\partial g_z}{\partial z}\right)F, \\ + \dfrac{C_0}{\mu}\left(B_y'\dfrac{\partial F}{\partial x} - B_x'\dfrac{\partial F}{\partial y}\right) \\ = D_z'\dfrac{dF}{dt} - \left(D_x'\dfrac{\partial g_z}{\partial x} + D_y'\dfrac{\partial g_z}{\partial y} + D_z'\dfrac{\partial g_z}{\partial z}\right)F + D_z'\left(\dfrac{\partial g_x}{\partial x} + \dfrac{\partial g_y}{\partial y} + \dfrac{\partial g_z}{\partial z}\right)F; \end{cases}$$

$$(33b)\quad \begin{cases} - \dfrac{C_0}{K}\left(D_z'\dfrac{\partial F}{\partial y} - D_y'\dfrac{\partial F}{\partial z}\right) \\ = B_x'\dfrac{dF}{dt} - \left(B_x'\dfrac{\partial g_x}{\partial x} + B_y'\dfrac{\partial g_x}{\partial y} + B_z'\dfrac{\partial g_x}{\partial z}\right)F + B_x'\left(\dfrac{\partial g_x}{\partial x} + \dfrac{\partial g_y}{\partial y} + \dfrac{\partial g_z}{\partial z}\right)F, \\ - \dfrac{C_0}{K}\left(D_x'\dfrac{\partial F}{\partial z} - D_z'\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) \\ = B_y'\dfrac{dF}{dt} - \left(B_x'\dfrac{\partial g_y}{\partial x} + B_y'\dfrac{\partial g_y}{\partial y} + B_z'\dfrac{\partial g_y}{\partial z}\right)F + B_y'\left(\dfrac{\partial g_x}{\partial x} + \dfrac{\partial g_y}{\partial y} + \dfrac{\partial g_z}{\partial z}\right)F, \\ - \dfrac{C_0}{K}\left(D_y'\dfrac{\partial F}{\partial x} - D_x'\dfrac{\partial F}{\partial y}\right) \\ = B_z'\dfrac{dF}{dt} - \left(B_x'\dfrac{\partial g_z}{\partial x} + B_y'\dfrac{\partial g_z}{\partial y} + B_z'\dfrac{\partial g_z}{\partial z}\right)F + B_z'\left(\dfrac{\partial g_x}{\partial x} + \dfrac{\partial g_y}{\partial y} + \dfrac{\partial g_z}{\partial z}\right)F. \end{cases}$$

Wir multiplizieren die Systeme mit B_x', B_y', B_z'; D_x', D_y', D_z' und addieren in jedem System, so folgt mit Rücksicht auf (20)

$$(34_1a)\quad \begin{cases} B_x'\left(D_x'\dfrac{\partial g_x}{\partial x} + D_y'\dfrac{\partial g_x}{\partial y} + D_z'\dfrac{\partial g_x}{\partial z}\right) + B_y'\left(D_x'\dfrac{\partial g_y}{\partial x} + D_y'\dfrac{\partial g_y}{\partial y} + D_z'\dfrac{\partial g_y}{\partial z}\right) \\ \qquad + B_z'\left(D_x'\dfrac{\partial g_z}{\partial x} + D_y'\dfrac{\partial g_z}{\partial y} + D_z'\dfrac{\partial g_z}{\partial z}\right) = 0\,, \end{cases}$$

$$(34_1b)\quad \begin{cases} D_x'\left(B_x'\dfrac{\partial g_x}{\partial x} + B_y'\dfrac{\partial g_x}{\partial y} + B_z'\dfrac{\partial g_x}{\partial z}\right) + D_y'\left(B_x'\dfrac{\partial g_y}{\partial x} + B_y'\dfrac{\partial g_y}{\partial y} + B_z'\dfrac{\partial g_y}{\partial z}\right) \\ \qquad + D_z'\left(B_x'\dfrac{\partial g_z}{\partial x} + B_y'\dfrac{\partial g_z}{\partial y} + B_z'\dfrac{\partial g_z}{\partial z}\right) = 0 \end{cases}$$

und zufolge (27)

$$(34_2a)\qquad (B_x' g_1 + B_y' g_2 + B_z' g_3)(D_x' \Gamma_1 + D_y' \Gamma_2 + D_z' \Gamma_3) = 0\,,$$

$$(34_2b)\qquad (D_x' g_1 + D_y' g_2 + D_z' g_3)(B_x' \Gamma_1 + B_y' \Gamma_2 + B_z' \Gamma_3) = 0\,.$$

Diese Beziehungen können bestehen, wenn

$$B_x' g_1 + B_y' g_2 + B_z' g_3 = 0\,, \qquad D_x' g_1 + D_y' g_2 + D_z' g_3 = 0\,,$$

d. h. die Störungsverbreitung in Richtung der Bewegung erfolgt.

Oder wenn

$$B_x' g_1 + B_y' g_2 + B_z' g_3 = 0 \quad \text{oder} \quad D_x' g_1 + D_y' g_2 + D_z' g_3 = 0$$

und zugleich

$$B_x' \Gamma_1 + B_y' \Gamma_2 + B_z' \Gamma_3 = 0 \quad \text{oder} \quad D_x' \Gamma_1 + D_y' \Gamma_2 + D_z' \Gamma_3 = 0$$

ist, d. h. eine Störungsverbreitung in Richtung einer der Schwingungen geschieht, indes zugleich ihre charakteristischen Konstanten Γ mit der Amplitude der anderen Schwingung in der angegebenen Beziehung steht.

Oder wenn

$$B_x' \Gamma_1 + B_y' \Gamma_2 + B_z' \Gamma_3 = 0\,, \qquad D_x' \Gamma_1 + D_y' \Gamma_2 + D_z' \Gamma_3 = 0$$

ist. Die Bewegung kann dann beliebig gerichtet sein, aber die Amplituden der Wellen sind nicht willkürlich, sondern für jede Welle in ihren Komponenten durch die charakteristischen Konstanten Γ der Bewegung bestimmt, wenn auch nur durch je eine Gleichung. Sprechen wir wie von einer Wellennormale, so von einer Bewegungsnormale, deren Richtungskosinus sein würden

$$\bar{\alpha} = \frac{\Gamma_1}{\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2}}\,, \quad \bar{\beta} = \frac{\Gamma_2}{\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2}}\,, \quad \bar{\gamma} = \frac{\Gamma_3}{\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2}}\,,$$

so ständen in diesem letzten Fall die Schwingungen senkrecht zur Bewegungsnormale. Im ganzen ist bei ungleichförmiger Bewegung die Möglichkeit der ungestörten Verbreitung von ebenen polarisierten, elektromagnetischen Wellen doch von vielen Bedingungen eingeengt, wie bemerkt, weil es sich immer zugleich um zwei Wellen handelt.

Zuletzt haben wir noch die Gleichung (15_2) für die Verbreitungsgeschwindigkeit der Wellen. Sie geht in unserem Falle nach (24) und (27) über in

$$(35) \qquad (1 - (g_1\theta_1 + g_2\theta_2 + g_3\theta_3)\,G\,\theta)^2 = c_0^2(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)\,\theta^2\,.$$

Nun ist nach (206) (S. 88)

$$(36) \qquad \tau = \int \frac{dS}{c}\,,$$

also in unserem Falle

$$(37) \qquad \int \frac{dS}{c} = f(\theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z)\,,$$

und mit

$$(38) \qquad \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z = \omega$$

wird

$$(39) \qquad \theta = \frac{\partial f}{\partial \omega}\,.$$

Die Gleichung (35) bestimmt dann die Funktion $\frac{\partial f}{\partial \omega}$ durch G, so daß f bis auf eine Konstante zu ermitteln ist. Wegen des weiteren ist auf die Bemerkung S. 71 zu verweisen.

Ohne jede Änderung gelten nach den Formeln (A_8''a, b), die den Formeln (A_8a, b) völlig entsprechen, alle obigen Ergebnisse auch für ein relatives Koordinatensystem. Nur haben wir statt $g = p + q$ allein zu setzen q, die relative Bewegung, und statt $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ die Größen $\overline{\mathfrak{D}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$.

Wir wollen noch die Lorentz-Transformationen kurz betrachten. Indem ein isolierender Stoff vorausgesetzt wird, benutzen wir die Gleichungen (A_8a, b), S. 147, die also werden

$$(40\text{a}) \qquad + \frac{C_0}{\mu} \operatorname{curl} \overline{\mathfrak{B}} = \frac{\partial \overline{\mathfrak{D}}}{\partial t} + \operatorname{curl} [\overline{\mathfrak{D}} q],$$

$$(40\text{b}) \qquad - \frac{C_0}{K} \operatorname{curl} \overline{\mathfrak{D}} = \frac{\partial \overline{\mathfrak{B}}}{\partial t} + \operatorname{curl} [\overline{\mathfrak{B}} q],$$

und haben hiernach mit $\varkappa$ für C_0^2 oder c_0^2 und $\bar{t}$ für t' oder τ' nach den Formeln (c''), (m'') S. 125f.

$$(41_1\text{a}) \qquad + \frac{C_0}{\mu} (\operatorname{curl} \overline{\mathfrak{B}}')' = \frac{\partial \overline{\mathfrak{D}}'}{\partial \bar{t}} + (\operatorname{curl} [\overline{\mathfrak{D}}' q])' + \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{C_0}{\mu \varkappa} [p \overline{\mathfrak{B}}'] - \frac{1}{\varkappa} [p [\overline{\mathfrak{D}}' q]] \right),$$

$$(41_1\text{b}) \qquad - \frac{C_0}{K} (\operatorname{curl} \overline{\mathfrak{D}}')' = \frac{\partial \overline{\mathfrak{B}}'}{\partial \bar{t}} + (\operatorname{curl} [\overline{\mathfrak{B}}' q])' - \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{C_0}{K \varkappa} [p \overline{\mathfrak{D}}'] + \frac{1}{\varkappa} [p [\overline{\mathfrak{B}}' q]] \right)$$

oder zufolge (II_{11}) und (II_{13}) S. 135

$$(41_2\text{a}) \qquad \left\{ \begin{aligned} + \frac{C_0}{\mu} (\operatorname{curl} \overline{\mathfrak{B}}')' &= \left(\frac{d \overline{\mathfrak{D}}'}{d \bar{t}} \right)_q - ((\overline{\mathfrak{D}}' \Gamma) q)' + \overline{\mathfrak{D}}' (\operatorname{div} q)' \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{C_0}{\mu \varkappa} [p \overline{\mathfrak{B}}'] - \frac{1}{\varkappa} [p [\overline{\mathfrak{D}}' q]] \right), \end{aligned} \right.$$

$$(41_2\text{b}) \qquad \left\{ \begin{aligned} - \frac{C_0}{K} (\operatorname{curl} \overline{\mathfrak{D}}')' &= \left(\frac{d \overline{\mathfrak{B}}'}{d \bar{t}} \right)_q - ((\overline{\mathfrak{B}}' \Gamma) q)' + \overline{\mathfrak{B}}' (\operatorname{div} q)' \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{C_0}{K \varkappa} [p \overline{\mathfrak{D}}'] + \frac{1}{\varkappa} [p [\overline{\mathfrak{B}}' q]] \right). \end{aligned} \right.$$

Hiernach hätten wir als einen Satz von Bedingungen

$$(42\text{a}) \qquad \left\{ \begin{aligned} + \frac{C_0}{\mu} \left(\overline{B}_\zeta' \frac{\partial \Psi'}{\partial \eta} - \overline{B}_\eta' \frac{\partial \Psi'}{\partial \zeta} \right) &= \overline{D}_\xi' \left(\frac{d \Psi'}{d \bar{t}} \right)_q + \left(\frac{C_0}{\mu \varkappa} [p \overline{B}']_\xi - \frac{1}{\varkappa} [p [\overline{D}' q]]_\xi \right) \frac{\partial \Psi'}{\partial \bar{t}}, \\ + \frac{C_0}{\mu} \left(\overline{B}_\xi' \frac{\partial \Psi'}{\partial \zeta} - \overline{B}_\zeta' \frac{\partial \Psi'}{\partial \xi} \right) &= \overline{D}_\eta' \left(\frac{d \Psi'}{d \bar{t}} \right)_q + \left(\frac{C_0}{\mu \varkappa} [p \overline{B}']_\eta - \frac{1}{\varkappa} [p [\overline{D}' q]]_\eta \right) \frac{\partial \Psi'}{\partial \bar{t}}, \\ + \frac{C_0}{\mu} \left(\overline{B}_\eta' \frac{\partial \Psi'}{\partial \xi} - \overline{B}_\xi' \frac{\partial \Psi'}{\partial \eta} \right) &= \overline{D}_\zeta' \left(\frac{d \Psi'}{d \bar{t}} \right)_q + \left(\frac{C_0}{\mu \varkappa} [p \overline{B}']_\zeta - \frac{1}{\varkappa} [p [\overline{D}' q]]_\zeta \right) \frac{\partial \Psi'}{\partial \bar{t}}; \end{aligned} \right.$$

$$(42\text{b}) \qquad \left\{ \begin{aligned} - \frac{C_0}{K} \left(\overline{D}_\zeta' \frac{\partial \Psi'}{\partial \eta} - \overline{D}_\eta' \frac{\partial \Psi'}{\partial \zeta} \right) &= \overline{B}_\xi' \left(\frac{d \Psi'}{d \bar{t}} \right)_q - \left(\frac{C_0}{K \varkappa} [p \overline{D}']_\xi + \frac{1}{\varkappa} [p [\overline{\mathfrak{B}}' q]]_\xi \right) \frac{\partial \Psi'}{\partial \bar{t}}, \\ - \frac{C_0}{K} \left(\overline{D}_\xi' \frac{\partial \Psi'}{\partial \zeta} - \overline{D}_\zeta' \frac{\partial \Psi'}{\partial \xi} \right) &= \overline{B}_\eta' \left(\frac{d \Psi'}{d \bar{t}} \right)_q - \left(\frac{C_0}{K \varkappa} [p \overline{D}']_\eta + \frac{1}{\varkappa} [p [\overline{\mathfrak{B}}' q]]_\eta \right) \frac{\partial \Psi'}{\partial \bar{t}}, \\ - \frac{C_0}{K} \left(\overline{D}_\eta' \frac{\partial \Psi'}{\partial \xi} - \overline{D}_\xi' \frac{\partial \Psi'}{\partial \eta} \right) &= \overline{B}_\zeta' \left(\frac{d \Psi'}{d \bar{t}} \right)_q - \left(\frac{C_0}{K \varkappa} [p \overline{D}']_\zeta + \frac{1}{\varkappa} [p [\overline{\mathfrak{B}}' q]]_\zeta \right) \frac{\partial \Psi'}{\partial \bar{t}}. \end{aligned} \right.$$

Da nach (g) (S. 120) ist

$$(\gamma) \qquad \left[p[\overline{D}'q]\right] = \overline{D}'\left(\overline{pq}\right) - q\left(\overline{p\overline{D}'}\right), \qquad \left[p[\overline{\mathfrak{B}}'q]\right] = \overline{\mathfrak{B}}'\left(\overline{pq}\right) - q\left(\overline{p\overline{\mathfrak{B}}'}\right),$$

so gibt die Multiplikation des ersten Systems mit $\overline{B}'_\xi$, $\overline{B}'_\eta$, $\overline{B}'_\zeta$, des zweiten mit $\overline{D}'_\xi$, $\overline{D}'_\eta$, $\overline{D}'_\zeta$ und jeweilige Addition

$$(43\text{a}) \qquad \left(\overline{\overline{B}'\overline{D}'}\right)\left(\frac{d\Psi'}{dt}\right)_q = \frac{1}{\varkappa}\left(\left(\overline{\overline{B}'\overline{D}'}\right)\left(\overline{pq}\right) - \left(\overline{\overline{B}'q}\right)\left(\overline{p\overline{D}'}\right)\right)\frac{\partial\Psi'}{\partial t},$$

$$(43\text{b}) \qquad \left(\overline{\overline{D}'\overline{B}'}\right)\left(\frac{d\Psi'}{dt}\right)_q = \frac{1}{\varkappa}\left(\left(\overline{\overline{D}'\overline{B}'}\right)\left(\overline{pq}\right) - \left(\overline{\overline{D}'q}\right)\left(\overline{p\overline{B}'}\right)\right)\frac{\partial\Psi'}{\partial t}.$$

Hieraus folgt zunächst, daß wir haben müssen

$$(44_1) \qquad \left(\overline{\overline{B}'q}\right)\left(\overline{p\overline{D}'}\right) = \left(\overline{\overline{D}'q}\right)\left(\overline{p\overline{B}'}\right)$$

oder nach leichter Umrechnung

$$(44_2) \quad \begin{cases} (p_x q_y - p_y q_x)\left(\overline{B}'_x\overline{D}'_y - \overline{B}'_y\overline{D}'_x\right) + (p_y q_z - p_z q_y)\left(\overline{B}'_y\overline{D}'_z - \overline{B}'_z\overline{D}'_y\right) \\ \qquad\qquad + (p_z q_x - p_x q_z)\left(\overline{B}'_z\overline{D}'_x - \overline{B}'_x\overline{D}'_z\right) = 0\,. \end{cases}$$

Zweitens muß, wenn die Wellen senkrecht zueinander schwingen sollen, sein

$$(45) \quad \left(\overline{\overline{B}'\overline{D}'}\right)\left(\overline{pq}\right) - \left(\overline{\overline{B}'q}\right)\left(\overline{p\overline{D}'}\right) = \left(\overline{\overline{D}'\overline{B}'}\right)\left(\overline{pq}\right) - \left(\overline{\overline{D}'q}\right)\left(\overline{p\overline{B}'}\right) = 0$$

oder nach leichter Umrechnung

$$(45_1\text{a}) \quad \begin{cases} \left(p_x\overline{B}'_\eta - p_y\overline{B}'_\xi\right)\left(q_\xi\overline{D}'_\eta - q_\eta\overline{D}'_\xi\right) + \left(p_y\overline{B}'_\zeta - p_z\overline{B}'_\eta\right)\left(q_\eta\overline{D}'_\zeta - q_\zeta\overline{D}'_\eta\right) \\ \qquad\qquad + \left(p_z\overline{B}'_\xi - p_x\overline{B}'_\zeta\right)\left(q_\zeta\overline{D}'_\xi - q_\xi\overline{D}'_\eta\right) = 0\,, \end{cases}$$

$$(45_1\text{b}) \quad \begin{cases} \left(p_x\overline{D}'_\eta - p_y\overline{D}'_\xi\right)\left(q_\xi B_\eta - q_\eta\overline{B}'_\xi\right) + \left(p_y\overline{D}'_\xi - p_z\overline{D}'_\eta\right)\left(q_\eta\overline{B}'_\zeta - q_\zeta\overline{B}'_\eta\right) \\ \qquad\qquad + \left(p_z\overline{D}'_\xi - p_x\overline{D}'_\zeta\right)\left(q_\zeta\overline{B}'_\xi - q_\xi\overline{B}'_\eta\right) = 0\,. \end{cases}$$

Durch diese beiden Gleichungen ist natürlich auch die erste Gleichung erfüllt. Vektoriell geschrieben, lauten die Gleichungen

$$(45_2\text{a}) \qquad \left(\overline{[p\overline{B}'][q\overline{D}']}\right) = 0\,,$$

$$(45_2\text{b}) \qquad \left(\overline{[p\overline{D}'][q\overline{B}']}\right) = 0$$

und die durch sie mit erfüllte ist

$$(44_3) \qquad \left(\overline{[pq][\overline{B}'\overline{D}']}\right) = 0\,,$$

wozu die Beziehung (h_3) (S. 120) zu vergleichen ist. In diesen Gleichungen können wir nach (c″) (S. 125) die g ersetzen durch die $(\overline{g})$, welche in der Zeit $\overline{t}$ gemessen sind. Multipliziert man noch die beiden Systeme (42a, b) je mit p_x, p_y, p_z und addiert, so erhält man unter Beachtung der Beziehungen unter (γ), S. 186

$$\text{(46a)}\quad \left\{\begin{aligned} &+\frac{C_0}{\mu}\left\{p_x\left(\bar{B}'_\zeta\frac{\partial\Psi'}{\partial\eta}-\bar{B}'_\eta\frac{\partial\Psi'}{\partial\zeta}\right)+p_y\left(\bar{B}'_\xi\frac{\partial\Psi'}{\partial\zeta}-\bar{B}'_\zeta\frac{\partial\Psi'}{\partial\xi}\right)+p_z\left(\bar{B}'_\eta\frac{\partial\Psi'}{\partial\xi}-\bar{B}'_\xi\frac{\partial\Psi'}{\partial\eta}\right)\right\}\\ &\qquad=\left(p_x\bar{D}'_\xi+p_y\bar{D}'_\eta+p_z\bar{D}'_\zeta\right)\left(\frac{d\Psi'}{dt}\right)_q,\end{aligned}\right.$$

$$\text{(46b)}\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{C_0}{K}\left\{p_x\left(\bar{D}'_\zeta\frac{\partial\Psi'}{\partial\eta}-\bar{D}'_\eta\frac{\partial\Psi'}{\partial\zeta}\right)+p_y\left(\bar{D}'_\xi\frac{\partial\Psi'}{\partial\zeta}-\bar{D}'_\zeta\frac{\partial\Psi'}{\partial\xi}\right)+p_z\left(\bar{D}'_\eta\frac{\partial\Psi'}{\partial\xi}-\bar{D}'_\xi\frac{\partial\Psi'}{\partial\eta}\right)\right\}\\ &\qquad=\left(p_x\bar{B}'_\xi+p_y\bar{B}'_\eta+p_z\bar{B}'_\zeta\right)\left(\frac{d\Psi'}{dt}\right)_q.\end{aligned}\right.$$

Weitere allgemeine Beziehungen habe ich nicht ableiten können. Näherungsrechnungen darf man in folgender Weise ausführen. Zunächst ist das zweite Glied in den Faktoren von $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ in (42a, b) fortzulassen. Nun setzen wir

$$\frac{\partial\Psi'}{\partial\xi}-\frac{p_x}{\varkappa}\frac{\partial\Psi'}{\partial t}=\Psi'_1,\quad \frac{\partial\Psi'}{\partial\eta}-\frac{p_y}{\varkappa}\frac{\partial\Psi'}{\partial t}=\Psi'_2,\quad \frac{\partial\Psi'}{\partial\zeta}-\frac{p_z}{\varkappa}\frac{\partial\Psi'}{\partial t}=\Psi'_3,$$

so gehen die Gleichungen (42a, b) vollständig über in die (4a, b) mit Ψ'_1, Ψ'_2, Ψ'_3 für $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial z}$. Also bleiben auch alle an jene Gleichungen angeschlossenen Entwickelungen bestehen. Insbesondere haben wir für die Verbreitungsgeschwindigkeit entsprechend (10) (S. 177)

$$\left(\frac{d\Psi'}{dt}\right)_q^2=c_0^2\left(\Psi_1'^2+\Psi_2'^2+\Psi_3'^2\right),$$

woraus dann folgt

$$\left(\frac{d\Psi'}{dt}\right)_q^2=c_0^2\left\{\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial\zeta}\right)^2+\frac{p^2}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial t}\right)^2-\frac{2}{\varkappa}\frac{\partial\Psi'}{\partial t}\left(p_x\frac{\partial\Psi'}{\partial\xi}+p_y\frac{\partial\Psi'}{\partial\eta}+p_z\frac{\partial\Psi'}{\partial\zeta}\right)\right\}.$$

Hier darf man, weil $\frac{1}{\varkappa}=\frac{1}{C_0^2}$, $\frac{1}{c_0^2}$ ist, $\frac{\partial\Psi'}{\partial t}$ ersetzen durch $\left(\frac{d\Psi'}{dt}\right)_q$ und hat dann eine quadratische Gleichung für diese Größe

$$\left(\frac{d\Psi'}{dt}\right)_q^2\left(1-p^2\frac{c_0^2}{\varkappa^2}\right)+\frac{2c_0^2}{\varkappa}\left(\frac{d\Psi'}{dt}\right)_q\left(p_x\frac{\partial\Psi'}{\partial\xi}+p_y\frac{\partial\Psi'}{\partial\eta}+p_z\frac{\partial\Psi'}{\partial\zeta}\right)$$
$$=c_0^2\left\{\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial\zeta}\right)^2\right\}.$$

Unter Fortlassung von Größen zweiter Ordnung wird daraus

$$\left(\frac{d\Psi'}{dt}\right)_q+\frac{c_0^2}{\varkappa}\left(p_x\frac{\partial\Psi'}{\partial\xi}+p_y\frac{\partial\Psi'}{\partial\eta}+p_z\frac{\partial\Psi'}{\partial\zeta}\right)=c_0\sqrt{\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial\zeta}\right)^2},$$

oder

$$\frac{\partial\Psi'}{\partial t}+\left(q_\xi+\frac{c_0^2}{\varkappa}p_x\right)\frac{\partial\Psi'}{\partial\xi}+\left(q_\eta+\frac{c_0^2}{\varkappa}p_y\right)\frac{\partial\Psi'}{\partial\eta}+\left(q_\zeta+\frac{c_0^2}{\varkappa}p_z\right)\frac{\partial\Psi'}{\partial\zeta}$$
$$=c_0^2\sqrt{\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial\zeta}\right)^2},$$

also

$$\left(\frac{d\Psi'}{dt}\right)^2_{q+\frac{c_0^2}{\varkappa}p} = \left(\frac{\partial\Psi'}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi'}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi'}{\partial\zeta}\right)^2.$$

Diese Gleichung entspricht völlig der unter (10) nur mit $\frac{c_0^2}{\varkappa}p + q$ als Geschwindigkeit an Stelle von $p + q$, wie bei absoluten Koordinaten. Also haben wir auch hier eine Fresnelsche Gleichung, bei der jedoch die innere Bewegung nicht in Betracht kommt, sondern nur die Bewegung als Ganzes. Das gilt alles in erster Näherung, in weiterer Näherung wird auch die innere Bewegung in Betracht kommen. Doch gehe ich auf diese schwierigen und unsicheren Rechnungen nicht ein. Ebenso lasse ich die der vorigen in der Form und in den Ergebnissen durchaus entsprechende Transformation nach Relativkoordinaten und Relativzeit hier fort, nachdem sie für gleichförmige Bewegung bereits behandelt ist. Zu den obigen Ergebnissen bemerke ich nur noch, daß sie auch gelten, wenn $\operatorname{div}\overline{\mathfrak{D}}$ nicht Null ist.

d) Änderung der Maxwell-Hertzschen Theorie.

Will man der Maxwell-Hertzschen Theorie nicht zugestehen, daß sie auch der Aberrationserscheinung und der Fresnel-Fizeauschen Erscheinung genügt, weil sie hierzu von den besonderen Zeitrechnungen Gebrauch machen muß, und dann sich auf relative Verhältnisse bezieht, so scheint mir eine Änderung dieser Theorie, die ihre Eigenart nicht verletzt, kaum in anderer Weise möglich zu sein als etwa in folgender[1]).

Hinsichtlich der Grundannahme seiner Theorie sagt bekanntlich Heinrich Hertz: „Wir behaupten nun, es sei der Einfluß der Bewegung derart, daß, wenn er allein wirksam wäre, er die magnetischen Kraftlinien mit der Materie fortführen würde. Oder genauer bestimmt: Denken wir uns in einem bestimmten Augenblicke den magnetischen Zustand der Substanz nach Richtung und Größe dargestellt durch ein System von Kraftlinien, so würde ein durch die nämlichen materiellen Punkte gelegtes System von Kraftlinien auch in jedem späteren Augenblick den magnetischen Zustand noch nach Richtung und Größe darstellen, wenn nämlich der Einfluß der Bewegung allein zur Geltung käme. Die entsprechende Aussage gilt für die Änderungen, welche die elektrische Polarisation durch die Bewegung erleidet." Heinrich Hertz läßt darum die Glieder $\operatorname{curl}\mathfrak{E}$ und $\operatorname{curl}\mathfrak{H}$ unverändert. Da die allein von zeitlichen Änderungen abhängigen Glieder $\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}$ und $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}$ gleichfalls nicht unter dem „Einfluß der Bewegung" stehen, so stelle ich sie zu den Gliedern $\operatorname{curl}\mathfrak{E}$ und $\operatorname{curl}\mathfrak{H}$, und wende die Änderung nur auf die mit den Geschwindigkeiten multiplizierten Glieder an. Demnach setze ich, indem die auf den Äther sich beziehenden Größen durch einen Index (0) hervorgehoben werden, an Stelle der Grundgleichungen in der Form (A_4a, b) (S. 146)

$$(A_1'a)\quad +\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + g\operatorname{div}\mathfrak{D} - g^{(0)}\operatorname{div}\mathfrak{D}^{(0)} + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}g] - \operatorname{curl}[\mathfrak{D}^{(0)}g^{(0)}] + J_e,$$

$$(A_1'b)\quad -\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + g\operatorname{div}\mathfrak{B} - g^{(0)}\operatorname{div}\mathfrak{B}^{(0)} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}g] - \operatorname{curl}[\mathfrak{B}^{(0)}g^{(0)}].$$

---

[1]) Kurz vorgeschlagen ist diese Änderung in meiner Thermodynamik **3**, 222 (1905).

Für isotrope Substanzen wird

(B′) $$g^{(0)} = \varkappa g$$

sein, wo $\varkappa$ konstant ist. Im Sinne der Maxwellschen Lehre hat man weiter

(C′a) $$\mathfrak{D}^{(0)} = \frac{K_0}{K}\mathfrak{D},$$

(C′b) $$\mathfrak{B}^{(0)} = \frac{\mu_0}{\mu}\mathfrak{B}.$$

Somit bekommt man

(A′₂a) $$+\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + \left(1 - \varkappa\frac{K_0}{K}\right)(g\operatorname{div}\mathfrak{D} + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}g]) + J_e,$$

(A′₂b) $$-\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + \left(1 - \varkappa\frac{\mu_0}{\mu}\right)(g\operatorname{div}\mathfrak{B} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}g]).$$

Hiernach bleiben alle früheren Formeln unverändert bestehen, nur daß statt g tritt $\left(1 - \varkappa\frac{K_0}{K}\right)g$ oder $\left(1 - \varkappa\frac{\mu_0}{\mu}\right)g$, als wenn diese Größe selbst die Änderung erfahren hätte, was jedoch hier nicht angenommen ist. Vor allem bleiben auch die wichtigen Darstellungen (A_8a, b) (S. 147) bestehen. Für gleichförmige Bewegung bekommen wir so statt der Gleichungen (6a, b) (S. 153)

(1a) $$B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = \frac{\mu^2}{C_0^2}(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\left\{c - \left(1 - \varkappa\frac{K_0}{K}\right)s\right\}^2,$$

(1b) $$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 = \frac{K^2}{C_0^2}(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)\left\{c - \left(1 - \varkappa\frac{\mu_0}{\mu}\right)s\right\}^2,$$

also wenn man die Beziehung (7) (S. 153) allgemein gelten läßt,

(2_1a) für die elektrische Welle $$c_e = c_0 + \left(1 - \varkappa\frac{K_0}{K}\right)s,$$

(2_1b) für die magnetische Welle $$c_m = c_0 + \left(1 - \varkappa\frac{\mu_0}{\mu}\right)s.$$

In der Anschauung von Heinrich Hertz ist $\varkappa = 1$. Ferner haben wir für durchsichtige Stoffe $\mu = \mu_0$, also $\frac{K_0}{K} = \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$, somit

(2_2a) $$c_e = c_0 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)s,$$

(2_2b) $$c_m = c_0.$$

Die erste Gleichung stellt das Fresnelsche Gesetz dar, wenn die Welle als durch die Bewegung des Körpers mitgenommen angesehen wird. Die zweite läßt die Verbreitungsgeschwindigkeit der magnetischen Welle als durch die Bewegung nicht beeinflußt erscheinen. Dadurch wäre zugleich entschieden, daß als Lichtwellen die elektrischen Wellen anzusehen seien, worauf ja bekanntlich auch manches andere deutet (S. 155). Ferner würde der Übergang der Störungen aus einer bewegten Schicht in eine anders bewegte Schicht eine Trennung zwischen der elektrischen und der magnetischen Welle herbeiführen; es bestände also namentlich in gleichförmig bewegter Substanz Dispersion der beiden Wellen. Endlich würde, wie schon bemerkt, Bewegung auf die magnetische Welle so gut wie gar keinen Einfluß haben, sondern nur auf die elektrische Welle. Ob Beobachtungen auf diesem Gebiete vorhanden sind, vermag ich nicht zu sagen.

Setzen wir

$$(3\text{a})\qquad \left(1 - \varkappa \frac{K_0}{K}\right) g = g',$$

$$(3\text{b})\qquad \left(1 - \varkappa \frac{\mu_0}{\mu}\right) g = g'',$$

so werden die Grundgleichungen

$$(\text{A}_3'\text{a})\qquad + \frac{C_0}{\mu} \operatorname{curl} \mathfrak{B} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + g' \operatorname{div} \mathfrak{D} + \operatorname{curl} [\mathfrak{D} g'] + J_e,$$

$$(\text{A}_3'\text{b})\qquad - \frac{C_0}{K} \operatorname{curl} \mathfrak{D} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + g'' \operatorname{div} \mathfrak{B} + \operatorname{curl} [\mathfrak{D} g'']$$

und entsprechend in einer der anderen Formen. Die Gleichungen (IV_3a, b) (S. 138) gehen so über in

$$(4\text{a})\qquad \frac{d' e_e}{dt} = -\left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right) dV,$$

$$(4\text{b})\qquad \frac{d'' e_m}{dt} = 0,$$

wo

$$\frac{d'}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + g_x' \frac{\partial}{\partial x} + g_y' \frac{\partial}{\partial y} + g_z' \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{d''}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + g_x'' \frac{\partial}{\partial x} + g_y'' \frac{\partial}{\partial y} + g_z'' \frac{\partial}{\partial z}$$

ist. An die Elektronentheorie können also auch die jetzigen Gleichungen angeschlossen werden, jedoch, wie man bemerkt, in besonderer Weise.

Die Poyntingsche Energieströmung bleibt ungeändert. Über die Energiesätze sprechen wir später (S. 249).

Wenn wir $\varkappa = 0$ ansetzen, gehen die Gleichungen in die der einfachen Maxwell-Hertzschen Theorie über, als wenn letztere für den Fall gälte, daß der Äther absolut ruht. Unter den hier gemachten Annahmen wäre also der Äther nicht als an die Materie gebunden zu denken, wie unter den Annahmen von Maxwell und Hertz selbst, sondern im Gegenteil als absolut frei, obwohl dann dieselben Formeln gelten wie in der Theorie von Maxwell-Hertz. Ferner ergäbe sich, daß im freien Äther (wo jedenfalls $\varkappa = 1$, $K = K_0$, $\mu = \mu_0$ ist) die Störungen sich völlig unabhängig von etwaigen Bewegungen verbreiten würden, wie im absolut ruhenden Äther. Ich glaube, daß dafür sehr vieles spricht, namentlich der Mangel jeder Dispersion des Lichtes im freien Äther. Und so würde nach dieser Theorie aus optischen oder elektromagnetischen Erscheinungen im freien Äther überhaupt nicht zu entscheiden sein, ob der Äther sich bewegt oder ruht. Darauf kommen wir im zweiten Teil zurück.

4. Helmholtz' Theorie der Bewegungen im Äther.

Die Theorie von Maxwell-Hertz nimmt die Bewegung als ein von vornherein Gegebenes an, und zwar ohne Rücksicht auf die Eigenschaften des Äthers, letzteres, weil nach ihr ja der Äther an den Stoff gebunden sein soll. Da die elektromagnetischen Kräfte die Bewegung beeinflussen müssen, bedarf es also noch eines zweiten Satzes von Gleichungen, der dieser Beeinflussung Rechnung trägt, so daß die ganze Theorie aus zwei Sätzen von Gleichungen bestehen würde, die gleichzeitig zu lösen wären, weil ja die Bewegung das Feld und dieses die Bewegung beeinflußt. Helmholtz[1]) hat den zweiten Satz von Gleichungen für freien Äther unter der Annahme aufgestellt, daß dieser Äther sich wie eine inkompressible reibungslose Flüssigkeit bewegt. Er nimmt dabei weiter an, daß auch in der Bewegung die Spannungen im Äther formal nach den Maxwellschen Ansätzen zu bestimmen sind; aber selbstverständlich nur formal, die darin vertretenen Größen müssen die mit aus den Bewegungen sich ergebenden sein.

Es gelten also für die Spannungen formal die Gleichungen (H) (S. 150) und für den freien Äther ist noch $\mu = K = 1$ zu setzen. Die auf ein Ätherteilchen von der Raumeinheit 1 wirkenden Kräfte sind dann, wenn statt $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$; $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$ geschrieben wird X, Y, Z; L, M, N

$$(1_1a)\quad \left\{\begin{aligned}
\Xi_e &= \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}(X^2 - Y^2 - Z^2) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}(XY) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}(XZ)\\
&= \frac{1}{4\pi}\left\{X\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right\},\\
\mathsf{H}_e &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}(YX) + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial y}(Y^2 - Z^2 - X^2) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}(YZ)\\
&= \frac{1}{4\pi}\left\{Y\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + X\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\right\},\\
\mathsf{Z}_e &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}(ZX) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}(ZY) + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial z}(Z^2 - X^2 - Y^2)\\
&= \frac{1}{4\pi}\left\{Z\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + X\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\right\};
\end{aligned}\right.$$

herrührend von den elektrischen Spannungen, und

$$(1_1b)\quad \left\{\begin{aligned}
\Xi_m &= \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}(L^2 - M^2 - N^2) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}(LM) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}(LN)\\
&= \frac{1}{4\pi}\left\{L\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) + M\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) + N\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\right\},\\
\mathsf{H}_m &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}(ML) + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial y}(M^2 - N^2 - L^2) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}(MN)\\
&= \frac{1}{4\pi}\left\{M\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) + N\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + L\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\right\},\\
\mathsf{Z}_m &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}(NL) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}(NM) + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial z}(N^2 - L^2 - M^2)\\
&= \frac{1}{4\pi}\left\{N\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) + L\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + M\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\right\};
\end{aligned}\right.$$

herrührend von den magnetischen Spannungen. Die Komponente der Gesamtkraft wird

$$(2_1)\qquad \Xi = \Xi_e + \Xi_m\,, \quad \mathsf{H} = \mathsf{H}_e + \mathsf{H}_m\,, \quad \mathsf{Z} = \mathsf{Z}_e + \mathsf{Z}_m\,.$$

[1]) Helmholtz, Wiedemanns Annalen f. Phys. u. Chemie **53**, 135ff. (1894).

Freie Elektrizität und freier Magnetismus werden dem reinen Äther nicht zugeschrieben, es ist also

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z}{\partial z}=0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial x}+\dfrac{\partial M}{\partial y}+\dfrac{\partial N}{\partial z}=0\,. \end{cases}$$

Benutzt man diese Gleichungen, so verwandeln sich die obigen Ausdrücke in

$$(1_2a)\qquad \begin{cases} \Xi_e=\dfrac{1}{4\pi}\left\{Y\left(\dfrac{\partial X}{\partial y}-\dfrac{\partial Y}{\partial x}\right)+Z\left(\dfrac{\partial X}{\partial z}-\dfrac{\partial Z}{\partial x}\right)\right\}, \\[2ex] \mathsf{H}_e=\dfrac{1}{4\pi}\left\{Z\left(\dfrac{\partial Y}{\partial z}-\dfrac{\partial Z}{\partial y}\right)+X\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial y}\right)\right\}, \\[2ex] \mathsf{Z}_e=\dfrac{1}{4\pi}\left\{X\left(\dfrac{\partial Z}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial z}\right)+Y\left(\dfrac{\partial Z}{\partial y}-\dfrac{\partial Y}{\partial z}\right)\right\}; \end{cases}$$

$$(1_2b)\qquad \begin{cases} \Xi_m=\dfrac{1}{4\pi}\left\{M\left(\dfrac{\partial L}{\partial y}-\dfrac{\partial M}{\partial x}\right)+N\left(\dfrac{\partial L}{\partial z}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\right\}, \\[2ex] \mathsf{H}_m=\dfrac{1}{4\pi}\left\{N\left(\dfrac{\partial M}{\partial z}-\dfrac{\partial N}{\partial y}\right)+L\left(\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial L}{\partial y}\right)\right\}, \\[2ex] \mathsf{Z}_m=\dfrac{1}{4\pi}\left\{L\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial L}{\partial z}\right)+M\left(\dfrac{\partial N}{\partial y}-\dfrac{\partial M}{\partial z}\right)\right\}. \end{cases}$$

Hierauf wenden wir die Maxwell-Hertzschen Gleichungen an und erhalten, da J fortfällt und $4\pi\mathfrak{D}=\mathfrak{E}$, $4\pi\mathfrak{B}=\mathfrak{H}$ ist,

$$(1_3a)\qquad \begin{cases} -C_0\,\Xi_e=Z\dfrac{DM}{Dt}-Y\dfrac{DN}{Dt}, \qquad -C_0\,\mathsf{H}_e=X\dfrac{DN}{Dt}-Z\dfrac{DL}{Dt}, \\[2ex] \qquad -C_0\,\mathsf{Z}_e=Y\dfrac{DL}{Dt}-X\dfrac{DM}{Dt}; \end{cases}$$

$$(1_3b)\qquad \begin{cases} +C_0\,\Xi_m=N\dfrac{DY}{Dt}-M\dfrac{DZ}{Dt}, \qquad +C_0\,\mathsf{H}_m=L\dfrac{DZ}{Dt}-N\dfrac{DX}{Dt}, \\[2ex] \qquad +C_0\,\mathsf{Z}_m=M\dfrac{DX}{Dt}-L\dfrac{DY}{Dt} \end{cases}$$

und für die ganze Kraft, indem[1])

$$(4)\qquad ZM-YN=-\mathfrak{P}\,,\qquad XN-ZL=-\mathfrak{Q}\,,\qquad YL-XM=-\mathfrak{R}$$

gesetzt wird,

$$(2_2)\qquad \Xi=\frac{1}{C_0}\frac{D\mathfrak{P}}{Dt}\,,\qquad \mathsf{H}=\frac{1}{C_0}\frac{D\mathfrak{Q}}{Dt}\,,\qquad \mathsf{Z}=\frac{1}{C_0}\frac{D\mathfrak{R}}{Dt}\,.$$

Der Äther wird als inkompressibel angesehen, so daß mit α, β, γ für g_x, g_y, g_z ist

$$(5)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}=0\,.$$

[1]) Bei Helmholtz mit entgegengesetztem Zeichen, wie auch in den Grundformeln.

Nun bemerkt Helmholtz, daß in einer reibungslosen Flüssigkeit nur solche Kräfte aufgehoben werden, deren Gang ein Potential hat. Nennen wir dieses Potential P, so wäre also

$$(6_1)\qquad \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{C_0}\frac{D\mathfrak{P}}{Dt}=0\,,\quad \frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{C_0}\frac{D\mathfrak{Q}}{Dt}=0\,,\quad \frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{C_0}\frac{D\mathfrak{R}}{Dt}=0\,.$$

Als bestimmte Gleichungen gibt Helmholtz demnach an[1])

$$(6_2)\qquad \left|\begin{aligned}
&\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{C_0}\left\{\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}+\beta\left(\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x}\right)-\gamma\left(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial z}\right)\right\}=0\,,\\
&\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{C_0}\left\{\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial t}+\gamma\left(\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y}\right)-\alpha\left(\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x}\right)\right\}=0\,,\\
&\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{C_0}\left\{\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial t}+\alpha\left(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial z}\right)-\beta\left(\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y}\right)\right\}=0\,.
\end{aligned}\right.$$

Es ist dann P von der Form

$$(7)\qquad P=P_0+\frac{2}{C_0}(\alpha\,\mathfrak{P}+\beta\,\mathfrak{Q}+\gamma\,\mathfrak{R})+S\,,$$

woselbst P_0 der Wert im Ruhezustande nach Maxwell mit

$$(8)\qquad P_0=\frac{1}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2+L^2+M^2+N^2)$$

anzusetzen wäre, während S eine willkürliche Funktion darstellt. Die Gleichungen (5) und (6) dienen zur Berechnung von α, β, γ; P. Multipliziert man die Gleichungen (6_2) mit

$$\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial z}\,,\quad \frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x}$$

und addiert, so folgt als reine Gleichung für P

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{C_0}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{C_0}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial z}\right)\\
&\qquad+\left(\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{C_0}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x}\right)=0\,.
\end{aligned}\right.$$

Außerdem hat man durch Multiplikation derselben Gleichungen mit α, β, γ und Addition

$$(10_1)\qquad \alpha\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{C_0}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}\right)+\beta\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{C_0}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial t}\right)+\gamma\left(\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{C_0}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial t}\right)=0$$

oder

$$(10_2)\qquad \frac{dP}{dt}-\frac{\partial}{\partial t}\left(P-\frac{1}{C_0}(\alpha\,\mathfrak{P}+\beta\,\mathfrak{Q}+\gamma\,\mathfrak{R})\right)=\frac{1}{C_0}\left(\mathfrak{P}\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\mathfrak{Q}\frac{\partial\beta}{\partial t}+\mathfrak{R}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right).$$

[1]) Diese Gleichungen lassen sich schreiben

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{C_0}\left(\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial x}+\beta\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial z}-\alpha\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial x}-\beta\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x}-\gamma\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}\right)=0\quad\text{usf.}$$

an Stelle der letzten drei Klammerglieder ergeben sich eigentlich $-\mathfrak{P}\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\mathfrak{Q}\frac{\partial\beta}{\partial x}-\mathfrak{R}\frac{\partial\gamma}{\partial x}$ usf., was mit dem Obigen sich nur vereinigen ließe, wenn $\alpha\,\mathfrak{P}+\beta\,\mathfrak{Q}+\gamma\,\mathfrak{R}$ konstant wäre. Helmholtz scheint das anzunehmen, denn er setzt ja $P=P_0+\frac{2}{C_0}(\alpha\,\mathfrak{P}+\beta\,\mathfrak{Q}+\gamma\,\mathfrak{R})+S$ und benutzt S als willkürliche Funktion, alsdann kann S so bestimmt werden, daß in der Tat $\alpha\,\mathfrak{P}+\beta\,\mathfrak{Q}+\gamma\,\mathfrak{R}$ konstant ist.

Helmholtz hatte die Absicht, Beispiele für das Verhalten des Äthers in der Umgebung elektrisch und magnetisch polarisierter Körper dieser Theorie entsprechend zu geben, aber der Tod hat diesen Großen daran gehindert. Näher ausgeführt hat er nur, daß unter Umständen der Äther an diesen Körpern muß gleiten können, da die Integration nicht immer willkürliche Funktionen in genügender Zahl einführt, um die α, β, γ an der Grenze der Körper den Werten dieser Größen an diesen Körpern selbst gleichzumachen.

W. Wien [1]) verdanken wir die Berechnung einiger Beispiele, deren Ergebnisse ich anführe, obwohl ich mit ihnen nicht einverstanden sein kann. Das erste Beispiel bezieht sich auf den Fall, daß ein ruhender Doppelpol der Zeit proportional an Ladung zunimmt. Ist die Achse des Doppelpols die z-Achse, so findet W. Wien, daß der durch die Zunahme der Ladung in Bewegung gesetzte Äther nach den obigen Helmholtzschen Gleichungen für α, β, γ in Linien fließen müßte, in denen die durch die Achse des Doppelpols gelegten Ebenen die Flächen $r^2 z =$ Konst. schneiden, wo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ den Abstand der betreffenden Stelle der Flächen vom Doppelpol bedeutet. Es ergibt sich dann aber, daß die Geschwindigkeit des Äthers unendlich würde, und zwar sogleich bei Beginn der Aufladung des Doppelpols mit Unendlich begänne [2]).

Die Helmholtzschen Gleichungen (6) sehen von einer Trägheit des Äthers ab. Dieses korrigiert Wien in seinem zweiten Beispiel. Es handelt sich um die Bewegung im Äther infolge eines gleichmäßig in gerader Linie fortschreitenden elektrischen Poles. Ohne Berücksichtigung der Trägheit ergibt sich nach Wien, daß eine Bewegung des Äthers nur in der Weise erfolgt, daß der Äther in dem Maße dem Pol entgegenströmt, wie dieser fortschreitet, d. h. daß er sich in bezug auf einen ruhenden Beobachter überhaupt nicht bewegt, so daß Wien meint, daß hiernach in der Bewegung elektrischer Quanten kein Grund liege für (absolute) Bewegung des Äthers. Schreibt man jedoch dem Äther Trägheit, und zwar eine Dichte s zu, so daß zu den Gleichungen (6_2) noch die Glieder $s\frac{d\alpha}{dt}$, $s\frac{d\beta}{dt}$, $s\frac{d\gamma}{dt}$ hinzugefügt werden, so zeigt sich nach Wien, daß der Äther Kreiswirbel bilden kann mit kreisförmiger Drehungsachse um die Translationslinie des elektrischen Poles. Die Drehungsgeschwindigkeit wäre umgekehrt proportional der Dichte des Äthers; unter günstigsten Verhältnissen findet Wien Geschwindigkeiten nur von der Ordnung $\frac{10^{-3}}{s}$. Endlich bemerkt Wien, daß bei der Reflexion elektromagnetischer Wellen an bewegten Stoffen Spannungen im Äther entstehen können, die den Äther in Bewegung setzen. Im ganzen scheint er schon damals Bewegungen im Äther infolge elektromagnetischer Störungen nicht für sehr wahrscheinlich gehalten zu haben [3]).

---

[1]) W. Wien, Wiedemanns Annalen d. Physik u. Chemie **65** (1898). Beilage.

[2]) Die andere Angabe Wiens, daß die Geschwindigkeit in Richtung der Achse des Doppelpoles immer unendlich sei, habe ich nicht verifizieren können; sie ist dort $\frac{2z}{10t}$ und nur für $t = 0$ unendlich.

[3]) Allein seine Berechnungen scheinen mir schon in ihren Ausgangspunkten sehr anfechtbar. Analytisch bemerke ich folgendes. In seinem ersten Beispiel sind die beiden ersten Helmholtzschen Gleichungen

$$\frac{a^2}{C_0} x \left\{\left(\frac{1}{r^6} - \frac{3z^2}{r^8}\right) - 6\gamma\frac{z}{r^8}t\right\} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \qquad \frac{a^2}{C_0} y \left\{\left(\frac{1}{r^6} - \frac{3z^2}{r^8}\right) - 6\gamma\frac{z}{r^8}t\right\} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt $x\frac{\partial\gamma}{\partial y} - y\frac{\partial\gamma}{\partial x} = 0$, also allgemein $\gamma = f(z, r, t)$, somit auch $P = P(z, r, t)$. Die dritte Helmholtzsche Gleichung gibt

$$-\frac{a^2}{C_0} z \left\{3\frac{(x^2 + y^2)}{r^8} - 6t\frac{(x\alpha + y\beta)}{}\right\} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0,$$

5. Verbreitung elektromagnetischer Störungen nach der Theorie von E. Cohn.

E. Cohn[1]) schreibt die Grundgleichungen für ein ruhendes Koordinatensystem in der Form

$$\text{(Aa)} \qquad + \frac{C_0}{4\pi} \operatorname{curl}\left(\mathfrak{H}^\times + \frac{4\pi}{C_0}[g\,\mathfrak{D}^\times]\right) = \frac{\partial \mathfrak{D}^\times}{\partial t} + g \operatorname{div} \mathfrak{D}^\times + J\,,$$

$$\text{(Ab)} \qquad - \frac{C_0}{4\pi} \operatorname{curl}\left(\mathfrak{E}^\times - \frac{4\pi}{C_0}[g\,\mathfrak{B}^\times]\right) = \frac{\partial \mathfrak{B}^\times}{\partial t} + g \operatorname{div} \mathfrak{B}^\times\,;$$

$$\text{(Ba)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D}^\times = \varrho\,,$$

$$\text{(Bb)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B}^\times = 0\,.$$

Da wir haben

$$\operatorname{curl}(A + B) = \operatorname{curl} A + \operatorname{curl} B\,, \qquad [AB] = -[BA]\,,$$

so folgt durch Umsetzen, daß in der Form Cohns Gleichungen sich von den Maxwell-Hertzschen nicht unterscheiden, nur daß $\mathfrak{H}^\times$, $\mathfrak{E}^\times$; $\mathfrak{B}^\times$, $\mathfrak{D}^\times$ für $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ stehen. Während nun in der Maxwell-Hertzschen Theorie die Be-

---

also muß sein $\alpha = x\,\Phi + y\,\Psi$, $\beta = y\,\Phi - x\,\Psi$, wo Φ und Ψ Funktionen sind von z, r, t. Das alles stimmt mit den Annahmen Wiens formal überein. Man braucht aber aus den obigen Gleichungen nicht zu schließen, daß die einzig mögliche Lösung α, β, γ der Zeit umgekehrt proportional mache. Man kann z. B. auch setzen $\gamma = 0$, $x\,\alpha + y\,\beta = 0$. Letztere Gleichung ist erfüllt, wenn man $\alpha = \frac{\partial G}{\partial y}$, $\beta = -\frac{\partial G}{\partial x}$ macht, wo G eine Funktion nur von z, r, t ist. Es ist dann auch die Inkompressibilitätsbedingung erfüllt, und die Lösung verlangt nur, daß

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{a^2}{C_0} r \left(\frac{1}{r^6} - \frac{3z^2}{r^8}\right), \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{a^2}{C_0} z \frac{3(r^2 - z^2)}{r^8}$$

wird. Ansätze, denen, soviel ich sehen kann, nichts entgegensteht. α, β, γ brauchen nun aber nicht mehr umgekehrt proportional t zu sein. Man kann aber weiter auch $\alpha = \beta = 0$ setzen, wenn $\gamma = 0$ sein konnte. Und in der Tat hat W. Wien bei der Berechnung der Kräfte gar keine Bewegung vorausgesetzt, also ist es ganz folgerichtig, daß ihm die Helmholtzschen Gleichungen auch keine Bewegung ergeben. Mit dem zweiten Beispiel verhält es sich genau so, denn die von W. Wien benutzten Werte Heavisides für die Kräfte gelten gleichfalls für ruhenden Äther. Auch findet hier W. Wien selbst keine Bewegung aus den Helmholtzschen Gleichungen. Ich kann also in Wiens Berechnungen keinen Einwand gegen die Annahme einer Beweglichkeit des Äthers sehen. Wie diese Berechnungen angelegt sind, d. h. ohne Berücksichtigung der Bewegung des Äthers bei den Ansätzen für die Kräfte, müssen sie eben zu reinen Spannungen ohne Bewegung führen, und daß im ersten Beispiel eine ganz unmögliche Bewegung gefunden wird, die mit Unendlich einsetzt und bei stetig weiterer Steigerung der Ladung zu Null führt, liegt m. E. an einem nicht zutreffenden Ansatz, ein anderer Ansatz ergibt keine Bewegung. Ebenso, daß im zweiten Beispiel bei Berücksichtigung der Trägheit eine Bewegung herauskommt, die der Dichte umgekehrt proportional ist, also unendlich wird, wenn man dem Äther gar keine Dichte zuschreibt, was übrigens schon dem Ergebnis widerspricht, daß ohne Berücksichtigung der Dichte überhaupt keine Bewegung vorhanden sein sollte. Dem gleichen Umstande ist es zuzuschreiben, daß die Spannungen auch in Wiens Berechnungen nicht in dem zu erwartenden Sinne von der Zeit abhängig erscheinen, denn eine Zeitfunktion allein, entsprechend einer Integrationskonstante, kann nicht dafür gelten. Die Kräfte dürfen eben nicht unabhängig von der Bewegung des Äthers angesetzt werden, da hier der Fall gegenseitiger Beeinflussung vorliegt; die Bewegung bestimmt die Kräfte und die Kräfte bestimmen die Bewegung.

[1]) E. Cohn, Archives Néerlandaires **5**, 2; Festschrift für H. A. Lorentz S. 516; Wiedemanns Annalen d. Physik u. Chemie **7**, 29ff. (1902).

ziehungen zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ und die zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ so angesetzt werden wie im Ruhezustande, nimmt E. Cohn die Formeln an

$$(C_1 a) \qquad 4\pi\mathfrak{D}^\times = K\mathfrak{E}^\times - \frac{K_0\mu_0}{C_0}[g\mathfrak{H}^\times]\,,$$

$$(C_1 b) \qquad 4\pi\mathfrak{B}^\times = \mu\mathfrak{H}^\times + \frac{K_0\mu_0}{C_0}[g\mathfrak{E}^\times]\,.$$

Hierin bedeuten noch $\mathfrak{E}^\times$, $\mathfrak{H}^\times$ die Werte der Feldintensitäten im Bewegungszustande des Feldes. Mit den Werten $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ dieses Feldes im Ruhezustande verbindet E. Cohn sie durch die Beziehungen

$$(Da) \qquad \mathfrak{E}^\times = \mathfrak{E} + \frac{\mu_0}{C_0}[g\mathfrak{H}^\times]\,,$$

$$(Db) \qquad \mathfrak{H}^\times = \mathfrak{H} - \frac{K_0}{C_0}[g\mathfrak{E}^\times]\,,$$

so daß man nach $(C_1 a)$, $(C_1 b)$ hat

$$(C_2 a) \qquad 4\pi\mathfrak{D}^\times = K\mathfrak{E} + \frac{K - K_0}{C_0}\mu_0[g\mathfrak{H}^\times]\,,$$

$$(C_2 b) \qquad 4\pi\mathfrak{B}^\times = \mu\mathfrak{H} - \frac{\mu - \mu_0}{C_0}K_0[g\mathfrak{E}^\times]\,.$$

Die Gründe für diese Ansätze werden wir später kennen lernen.

Wir betrachten seine Ableitung der Aberration und der Doppler-Erscheinung.

Es ist nach $(C_1 a, b)$

$$(C_3 a) \qquad 4\pi\mathfrak{D}^\times = K\mathfrak{E}^\times - \frac{K_0\mu_0}{C_0}[g\mathfrak{H}^\times] = K\mathfrak{E}^\times - \frac{K_0\mu_0}{C_0}\left[g\left(\frac{4\pi\mathfrak{B}^\times}{\mu} - \frac{K_0\mu_0}{\mu C_0}[g\mathfrak{E}^\times]\right)\right],$$

$$(C_3 b) \qquad 4\pi\mathfrak{B}^\times = \mu\mathfrak{H}^\times + \frac{K_0\mu_0}{C_0}[g\mathfrak{E}^\times] = \mu\mathfrak{H}^\times + \frac{K_0\mu_0}{C_0}\left[g\left(\frac{4\pi\mathfrak{D}^\times}{K} + \frac{K_0\mu_0}{KC_0}[g\mathfrak{H}^\times]\right)\right].$$

Lassen wir Glieder von höherer Ordnung als $1/C_0$ fort, so wird

$$(C'a) \qquad 4\pi\mathfrak{D}^\times = K\mathfrak{E}^\times - 4\pi\frac{K_0\mu_0}{C_0\mu}[g\mathfrak{B}^\times]\,,$$

$$(C'b) \qquad 4\pi\mathfrak{B}^\times = \mu\mathfrak{H}^\times + 4\pi\frac{K_0\mu_0}{C_0 K}[g\mathfrak{D}^\times]$$

und für den freien Äther mit $K = K_0$, $\mu = \mu_0$

$$(C''a) \qquad 4\pi\mathfrak{D}^\times = K_0\left(\mathfrak{E}^\times - \frac{4\pi}{C_0}[g\mathfrak{B}^\times]\right),$$

$$(C''b) \qquad 4\pi\mathfrak{B}^\times = \mu_0\left(\mathfrak{H}^\times + \frac{4\pi}{C_0}[g\mathfrak{D}^\times]\right).$$

Hiernach gehen die Gleichungen (Aa, b) über in

$$\text{(1a)}\qquad + \frac{C_0}{\mu_0} \operatorname{curl} \mathfrak{B}^\times = \frac{\partial \mathfrak{D}^\times}{\partial t} + g \operatorname{div} \mathfrak{D}^\times + J_e ,$$

$$\text{(1b)}\qquad - \frac{C_0}{K_0} \operatorname{curl} \mathfrak{D}^\times = \frac{\partial \mathfrak{B}^\times}{\partial t} + g \operatorname{div} \mathfrak{B}^\times .$$

Im dielektrischen Äther und bei Abwesenheit von Ladungen haben wir

$$\text{(1'a)}\qquad + \frac{C_0}{\mu_0} \operatorname{curl} \mathfrak{B}^\times = \frac{\partial \mathfrak{D}^\times}{\partial t} ,$$

$$\text{(1'b)}\qquad - \frac{C_0}{K_0} \operatorname{curl} \mathfrak{D}^\times = \frac{\partial \mathfrak{B}^\times}{\partial t} .$$

Das sind aber die Maxwellschen Gleichungen für den Ruhezustand. Von denen für den gleichförmigen Bewegungszustand der Maxwell-Hertzschen Theorie unterscheiden sie sich dadurch, daß rechts $\frac{\partial}{\partial t}$ statt $\frac{d}{dt}$ steht. Dagegen stimmen sie wieder mit den Gleichungen dieser Theorie überein, wenn man alles auf relative Koordinaten bezieht. Diese Unterschiede sind aber durch die Annahme der Gleichungen unter (Ca, b) bedingt, die das Neue und Charakteristische der Cohnschen Theorie bilden gegenüber den Gleichungen (C'a, b) (S. 146) der Maxwell-Hertzschen Theorie.

Nun betrachtet E. Cohn als Strahlrichtung, wie auch aus der Maxwell-Hertzschen Theorie folgt (S. 157), die Richtung des Poyntingschen Vektors $(\mathfrak{E}^\times \mathfrak{H}^\times)$ der Poyntingschen Energieströmung (S. 141) und nimmt als Beispiel ein System paralleler ebener Wellen, das sich im freien Äther in Richtung der x-Achse verbreitet. Die Schwingungen sollen für $\mathfrak{D}$ parallel der y-Achse, für $\mathfrak{B}$ parallel der z-Achse erfolgen (da sie ja senkrecht zueinander sein müssen). So ist also

$$\text{(2)}\qquad \mathfrak{D}_x^\times = \mathfrak{D}_z^\times = 0 , \quad \mathfrak{B}_x^\times = \mathfrak{B}_y^\times = 0 ; \quad \alpha = 1 , \quad \beta = \gamma = 0 .$$

Setzen wir hiernach

$$\text{(3)}\qquad \mathfrak{D}_y^\times = D_y^\times f\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) , \quad \mathfrak{B}_z^\times = B_z^\times f\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) ,$$

so folgt nach den Gleichungen (1'a, b)

$$\text{(4)}\qquad C_0 \frac{B_z^\times}{\lambda \mu_0} = D_y^\times \frac{1}{T} , \quad C_0 \frac{D_y^\times}{\lambda K_0} = B_z^\times \frac{1}{T} ,$$

also entsprechend der Theorie von Maxwell-Hertz (9a, b) (S. 153)

$$\text{(5)}\qquad \frac{B_z^\times}{D_y^\times} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0}{K_0}} .$$

Nunmehr wird nach den Gleichungen (C''a, b)

$$\text{(6)}\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_x^\times = + \frac{4\pi}{C_0} g_y \mathfrak{B}_z^\times , \quad \mathfrak{E}_y^\times = 4\pi \frac{\mathfrak{D}_y^\times}{K_0} - \frac{4\pi}{C_0} g_x \mathfrak{B}_z^\times , \quad \mathfrak{E}_z^\times = 0 ; \\ \mathfrak{H}_x^\times = + \frac{4\pi}{C_0} g_z \mathfrak{D}_y^\times , \quad \mathfrak{H}_y^\times = 0 , \quad \mathfrak{H}_z^\times = 4\pi \frac{\mathfrak{B}_z^\times}{\mu_0} - \frac{4\pi}{C_0} g_x \mathfrak{D}_y^\times . \end{cases}$$

also

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
[\mathfrak{E}^\times \mathfrak{H}^\times]_x &= \mathfrak{E}_y^\times \mathfrak{H}_z^\times - \mathfrak{E}_z^\times \mathfrak{H}_y^\times = (4\pi)^2 \left(\frac{\mathfrak{D}_y^\times}{K_0} - \frac{g_x}{C_0}\mathfrak{B}_z^\times\right)\left(\frac{\mathfrak{B}_z^\times}{\mu_0} - \frac{g_x}{C_0}\mathfrak{D}_y^\times\right) \\
&= \pm \frac{(4\pi)^2}{C_0^2}\frac{1}{K_0}(C_0 + g_x)^2 \mathfrak{D}_y^{\times 2}, \\
[\mathfrak{E}^\times \mathfrak{H}^\times]_y &= \mathfrak{E}_z^\times \mathfrak{H}_x^\times - \mathfrak{E}_z^\times \mathfrak{H}_z^\times = -(4\pi)^2 \frac{g_y}{C_0}\mathfrak{B}_z^\times \left(\frac{\mathfrak{B}_z^\times}{\mu_0} - \frac{g_x}{C_0}\mathfrak{D}_y^\times\right) \\
&= -\frac{(4\pi)^2}{C_0}\frac{1}{K_0}\frac{g_y}{C_0}(C_0 \mp g_x)\mathfrak{D}_y^{\times 2}, \\
[\mathfrak{E}^\times \mathfrak{H}^\times]_z &= \mathfrak{E}_x^\times \mathfrak{H}_y^\times - \mathfrak{E}_y^\times \mathfrak{H}_x^\times = -(4\pi)^2 \frac{g_z}{C_0}\mathfrak{D}_y^\times \left(\frac{\mathfrak{D}_y^\times}{K_0} - \frac{g_x}{C_0}\mathfrak{B}_z^\times\right) \\
&= -\frac{(4\pi)^2}{C_0}\frac{1}{K_0}\frac{g_z}{C_0}(C_0 \mp g_x)\mathfrak{D}_y^{\times 2}
\end{aligned}
\right.
$$

und

$$(8)\qquad \alpha' : \beta' : \gamma' = \mp (C_0 + g_x) : g_y : g_z .$$

Da $C_0 \mp g_x$ die ganze Geschwindigkeit in der Linie des Strahles bedeutet, so verhält sich der Strahl so, als wenn er von der Bewegung fortgetragen würde, g_x, g_y, g_z sind dabei die Geschwindigkeiten am Beobachtungsort, und in allem dem beruht das Prinzip der Erklärung der Aberration für eine dioptrische Beobachtung. Hiernach wird die Erklärung der Aberration statt aus den Differentialgleichungen aus der besonderen Angabe für den Poyntingschen Vektor gewonnen und angenommen, daß, was wir physiologisch als Strahlrichtung auffassen, die Richtung eben dieses Vektors ist. Letztere Annahme hat an sich viel Anmutendes, bildet jedoch keine Besonderheit dieser Theorie, da sie auch bei der Maxwell-Hertzschen Theorie benutzt werden kann, und auch in dieser Theorie der Poyntingsche Vektor, wie bemerkt, der Strahlrichtung entspricht (S. 157).

Schreibt man die Lösung in der Form

$$\mathfrak{D}_y = D_y f'(x - C_0 t), \quad \mathfrak{B}_z = B_z f'(x - C_0 t)$$

und setzt für den Ausgangsort

$$x = x_0 + g_{0x} t,$$

für den Ankunftsort

$$x = x_1 + g_{1x} t,$$

wo g_{0x} die Geschwindigkeit am Ausgangsort zur Ausgangszeit, g_{1x} die am Ankunftsort zur Ankunftszeit bedeutet, so nimmt die Funktion f' an diesen Orten die Werte an

$$f'\{x_0 - (C_0 - g_{0x}) t_0\}, \quad f'\{x_1 - (C_0 - g_{1x}) t_1\},$$

indem t_0 die Ausgangszeit, t_1 die Ankunftszeit festsetzt. Es ist aber

$$(9)\qquad \frac{(C_0 - g_{1x}) - (C_0 - g_{0x})}{C_0 - g_{0x}} = \frac{g_{0x} - g_{1x}}{C_0 - g_{0x}}$$

und mit Fortlassung von Größen zweiter Ordnung gleich $\frac{g_{0x} - g_{1x}}{C_0}$. Das entspricht dem Dopplerschen Prinzip, und es handelt sich wieder um ein Ergebnis aus einer Koordinatentransformation, das als Dopplersche Regel gedeutet und bei dem von den eigentlichen Vorgängen gar keine Notiz genommen wird (S. 204).

Weiter wird der Fall der Lichtverbreitung von Ort zu Ort auf einem sich gleichförmig bewegenden Körper, etwa auf der Erde, betrachtet. Ist p diese Bewegung, so bekommen wir nach (A_6a, b) (S. 147) jedoch in E. Cohns Schreibweise

$$\text{(10a)} \qquad +\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\left(\mathfrak{H}^\times + \frac{4\pi}{C_0}[q\,\mathfrak{D}^\times]\right) = \left(\frac{d\,\mathfrak{D}^\times}{dt}\right)_p + q\operatorname{div}\mathfrak{D}^\times + J_e\,,$$

$$\text{(10b)} \qquad -\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\left(\mathfrak{E}^\times - \frac{4\pi}{C_0}[q\,\mathfrak{B}^\times]\right) = \left(\frac{d\,\mathfrak{B}^\times}{dt}\right)_p + q\operatorname{div}\mathfrak{B}^\times\,.$$

Wir haben nur $\left(\frac{d}{dt}\right)_p$ durch $\frac{\partial}{\partial t}$ und $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ durch $\bar{\mathfrak{H}}$, $\bar{\mathfrak{E}}$; $\bar{\mathfrak{B}}$, $\bar{\mathfrak{D}}$ zu ersetzen, um, auf relative Koordinaten bezogen zu erhalten, entsprechend (A_8a, b) (S. 147),

$$\text{(11a)} \qquad +\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\left(\bar{\mathfrak{H}}^\times + \frac{4\pi}{C_0}[q\,\bar{\mathfrak{D}}^\times]\right) = \frac{\partial\,\bar{\mathfrak{D}}^\times}{\partial t} + q\operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}}^\times + J_e\,,$$

$$\text{(11b)} \qquad -\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\left(\bar{\mathfrak{E}}^\times - \frac{4\pi}{C_0}[q\,\bar{\mathfrak{B}}^\times]\right) = \frac{\partial\,\bar{\mathfrak{B}}^\times}{\partial t} + q\operatorname{div}\bar{\mathfrak{B}}^\times\,.$$

Findet relative Bewegung nicht statt, so ist

$$\text{(12a)} \qquad +\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{H}}^\times = \frac{\partial\,\bar{\mathfrak{D}}^\times}{\partial t} + J_e\,,$$

$$\text{(12b)} \qquad -\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{E}}^\times = \frac{\partial\,\bar{\mathfrak{B}}^\times}{\partial t}\,.$$

Für einen Beobachter auf der Erde, der sich mit ihr bewegt, und für stationäre Verhältnisse wird $\frac{\partial\,\bar{\mathfrak{D}}^\times}{\partial t} = \frac{\partial\,\bar{\mathfrak{B}}^\times}{\partial t} = 0$, also

$$\text{(13a)} \qquad \frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{H}}^\times = J_e\,,$$

$$\text{(13b)} \qquad \frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{E}}^\times = 0\,.$$

Die zweite Gleichung besagt, daß $\bar{\mathfrak{E}}^\times$ ein Potential hat wie bei überhaupt statischen Verhältnissen. Auch $\bar{\mathfrak{H}}^\times$ hat ein Potential, sobald es sich um ein Dielektrikum handelt, in dem $J_e = 0$ ist. Findet dieses nicht statt, so ist

$$\text{(14)} \qquad \operatorname{div} J_e = \frac{C_0}{4\pi}\operatorname{div}\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{H}}^\times = 0\,.$$

letzteres nach (r) (S. 121), so daß auch die Kontinuitätsgleichung wie in statischen Feldern erfüllt ist. Endlich haben wir aus (C_1a, b) (S. 196)

$$4\pi\operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}}^\times =$$

$$K\operatorname{div}\bar{\mathfrak{E}}^\times - \left(\frac{\partial}{\partial\xi}(p_y\bar{\mathfrak{H}}_\zeta^\times - p_z\bar{\mathfrak{H}}_\eta^\times) + \frac{\partial}{\partial\eta}(p_z\bar{\mathfrak{H}}_\xi^\times - p_x\bar{\mathfrak{H}}_\zeta^\times) + \frac{\partial}{\partial\zeta}(p_x\bar{\mathfrak{H}}_\eta^\times - p_y\bar{\mathfrak{H}}_\xi^\times)\right)\frac{K_0\mu_0}{C_0}$$

$$= K\operatorname{div}\bar{\mathfrak{E}}^\times + (p_x\operatorname{curl}_\xi\bar{\mathfrak{H}}^\times + p_y\operatorname{curl}_\eta\bar{\mathfrak{H}}^\times + p_z\operatorname{curl}_\zeta\bar{\mathfrak{H}}^\times)\frac{K_0\mu_0}{C_0}\,,$$

also

$$\text{(15a)} \qquad 4\pi\operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}}^\times = K\operatorname{div}\bar{\mathfrak{E}}^\times + \frac{4\pi}{C_0^2}K_0\mu_0(p_x J_\xi + p_y J_\eta + p_z J_\zeta).$$

Analog folgt

(15b) $$4\pi \operatorname{div} \overline{\mathfrak{B}}^\times = \mu \operatorname{div} \overline{\mathfrak{H}}^\times .$$

Die letztere Gleichung gibt

$$4\pi \mathfrak{B}^\times = \mu \mathfrak{H}^\times ,$$

die erstere

$$4\pi \mathfrak{D}^\times = K \overline{\mathfrak{E}}^\times$$

in Dielektrizis, d. h. es gelten dann die Maxwellschen Beziehungen für absolute Ruhe.

Wenn leitende Körper in Frage kommen, finden diese Beziehungen nach E. Cohns Theorie zwar nicht mehr statt, wenigstens nicht zwischen den elektrischen Größen. Gleichwohl soll aber für jede Fläche O wie in der Maxwellschen Theorie noch sein

(16) $$4\pi \iint \mathfrak{D}_n^\times \, dO = K \iint \mathfrak{E}_n^\times \, dO ,$$

wo allgemein A_n für $A_x \cos(n, x) + A_y \cos(n, y) + A_z \cos(n, z)$ steht[1]).

Das eben behandelte Feld wird als „stationär" bezeichnet. „Quasistationär" soll es sein, wenn nur $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = 0$ sich findet. Es bleiben dann die Gleichungen

(17a) $$C_0 \operatorname{curl} \mathfrak{H}^\times = +4\pi J_e ,$$

(17b) $$C_0 \operatorname{curl} \mathfrak{E}^\times = -4\pi \frac{\partial \overline{\mathfrak{B}}^\times}{\partial t} = -\frac{\partial \mu \overline{\mathfrak{H}}^\times}{\partial t} - \frac{K_0 \mu_0}{C_0} \frac{\partial}{\partial t} [g \overline{\mathfrak{E}}^\times] .$$

Die erste Gleichung gibt wieder

$$\operatorname{div} J = 0$$

mit allen hervorgehobenen Folgerungen, wie sie überhaupt den Maxwellschen Gleichungen für die Stromkomponenten in ruhendem Felde entspricht. Die zweite Gleichung enthält das Faraday-Neumannsche Induktionsgesetz mit dem Unterschiede, daß zu dem Gliede nach Maxwell-Hertz: $-\frac{\partial \mu \overline{\mathfrak{H}}^\times}{\partial t}$ noch das Glied $-\frac{K_0 \mu_0}{C_0} \frac{\partial}{\partial t} (g \overline{\mathfrak{E}}^\times)$ hinzukommt. Dieses Zusatzglied gibt als eine induzierte Kraft durch eine Fläche O, also in einem Leiter, der diese Fläche umgrenzt,

(18_1) $$\mathsf{E} = -\frac{K_0 \mu_0}{C_0} \frac{\partial}{\partial t} \iint [g \mathfrak{E}^\times]_n \, dO$$

oder

(18_2) $$\left\{ \begin{aligned} \mathsf{E} = -\frac{K_0 \mu_0}{C_0} \frac{\partial}{\partial t} \iint \{ & (g_y \mathfrak{E}_z^\times - g_z \mathfrak{E}_y^\times) \cos(n, x) + (g_z \mathfrak{E}_x^\times - g_x \mathfrak{E}_z^\times) \cos(n, y) \\ & + (g_x \mathfrak{E}_y^\times - g_y \mathfrak{E}_x^\times) \cos(n, z) \} \, dO . \end{aligned} \right.$$

[1]) Dem Beweise hierfür habe ich aber nicht folgen können. Die schöne Arbeit von E. Cohn enthält überhaupt viele Schwierigkeiten aus unzureichenden Erklärungen; so führt er z. B. die Operation $\frac{\delta}{\delta t}$, die er selbst durch $\frac{\partial}{\partial t} + p V$ erklärt und die also unserer $\left(\frac{d}{dt}\right)_p$ entspricht, noch mit, wo er m. E. nur $\frac{\partial}{\partial t}$ meint. Ich habe mich, so gut ich vermochte, durchzufinden versucht, doch mag ich manches anders aufgefaßt haben, als E. Cohn es eigentlich meint.

Hiernach hat man für $g = p$

$$
(19)\left\{\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1}\mathsf{E}\,dt = -\frac{K_0\mu_0}{C_0}\Big\{\iint\big((p_y\mathfrak{E}_z^\times - p_z\mathfrak{E}_y^\times)\cos(n,x) + (p_z\mathfrak{E}_x^\times - p_x\mathfrak{E}_z^\times)\cos(n,y) \\ + (p_x\mathfrak{E}_y^\times - p_y\mathfrak{E}_x^\times)\cos(n,z)\big)\,dO\Big\}_{t_0}^{t_1}. \end{aligned}\right.
$$

Da hier Bewegungen des Leiters selbst durch $q = 0$ ausgeschlossen sind, und p konstant ist, wird die gesamte Induktion 0, wenn am Ende des Induktionsstoßes die elektrischen Kräfte die gleichen sind wie am Beginne. In der Tat hat man einen Einfluß der Erdbewegung auf die Induktionsgesetze nicht feststellen können[1]). Überhaupt soll die Zusatzkraft selbst für die stärksten Induktionen bei den zur Verfügung stehenden Geschwindigkeiten nicht zu merkbaren Erscheinungen führen.

E. Cohn führt noch in den Gleichungen (12a, b) die Lorentz-Transformation aus, und zwar mit der Äther-Ortszeit τ'. Da diese Gleichungen sich in nichts von den entsprechenden Gleichungen der Maxwell-Hertzschen Theorie unterscheiden, so haben wir (S. 161)

$$
(20\text{a}) \qquad + \frac{C_0}{4\pi}(\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{H}}^\times)' = \frac{\partial}{\partial\tau'}\left(\mathfrak{D}^\times + \frac{C_0}{4\pi}\frac{1}{C_0^2}[p\,\mathfrak{H}^\times]\right) + J_e,
$$

$$
(20\text{b}) \qquad - \frac{C_0}{4\pi}(\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{E}}^\times)' = \frac{\partial}{\partial\tau'}\left(\mathfrak{B}^\times - \frac{C_0}{4\pi}\frac{1}{C_0^2}[p\,\bar{\mathfrak{E}}^\times]\right).
$$

Nun ist für unseren Fall nach (C_1a, b)

$$
\mathfrak{D}^\times + \frac{C_0}{4\pi}\frac{1}{C_0^2}[p\,\mathfrak{H}^\times] = \frac{K}{4\pi}\mathfrak{E}^\times, \qquad \mathfrak{B}^\times - \frac{C_0}{4\pi}\frac{1}{C_0^2}[p\,\mathfrak{E}^\times] = \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}^\times,
$$

also folgt[2])

$$
(21\text{a}) \qquad + C_0(\operatorname{curl}\mathfrak{H}^\times)' = K\frac{\partial\mathfrak{E}^\times}{\partial\tau'} + 4\pi J_e,
$$

$$
(21\text{b}) \qquad - C_0(\operatorname{curl}\mathfrak{E}^\times)' = \mu\frac{\partial\mathfrak{H}^\times}{\partial\tau'}.
$$

Diese Gleichungen, die für Cohns Theorie allerdings charakteristisch sind, stimmen mit den Maxwellschen für den Ruhezustand vollständig überein und sind streng, und sie besagen, daß die gleichförmige Bewegung bei Rechnung nach Äther-Ortszeit keinen Einfluß auf die Verbreitung der Störungen $\mathfrak{H}^\times$ und $\mathfrak{E}^\times$ hat. Sind es also diese Störungen, welche die Lichtvorgänge bedeuten, so geschieht die Lichtverbreitung auf der Erde unabhängig von der Erdbewegung, falls für die Beobachter die Äther-Ortszeit entscheidend ist. Namentlich wären also unter diesen Umständen Interferenzerscheinungen und Beugungserscheinungen für den mit der Erde sich bewegenden von der Erdbewegung unbeeinflußt. Die Maxwell-Hertzsche Theorie gibt dieses Resultat für diese besondere Zeitrechnung nicht, dagegen gibt sie das gleiche für Rechnung nach absoluter

[1]) Diese Schlußweise bezieht sich nur auf den Integralstrom und ergibt sich schon aus (17b) selbst. Sonst hat man jedenfalls einen Einfluß erster Ordnung.

[2]) E. Cohn schreibt $\frac{\delta}{\delta t}$, das wäre nach seiner eigenen Definition $\frac{\partial}{\partial t} + (p\,V)$. Ich habe angenommen, daß er $\frac{\partial}{\partial t}$ meint, sonst wären seine sämtlichen Schlüsse für mich unverständlich.

Zeit, wenn als Störungen, die die Lichtverbreitung bedeuten, $\mathfrak{B}^\times$ und $\mathfrak{D}^\times$ oder auch $\mathfrak{H}^\times$ und $\mathfrak{E}^\times$ angesehen werden. Die Cohnsche Theorie würde $\mathfrak{B}^\times$ und $\mathfrak{D}^\times$ dafür ausschließen. Daß in dieser Hinsicht die beiden Theorien trotz gleicher formaler Darstellung sich unterscheiden, ist dem Umstande zuzuschreiben, daß Cohn andere Beziehungen zwischen den in Frage kommenden Größen ansetzt als Maxwell-Hertz.

Sind also die E. Cohnschen Ansätze für die Beziehung zwischen Feldintensitäten und Polarisierungen aus anderen Gründen (S. 264ff.) notwendig, so folgt, daß seine Theorie der Erfahrung nur gerecht wird, wenn dem mit der Erde bewegten Beobachter die Erscheinungen sich nach Lorentzscher Äther-Ortszeit abspielen (oder, da hier Glieder höherer Ordnung nicht in Frage kommen, nach Lorentz-Einsteinscher Relativzeit). Unter denselben Verhältnissen fände das gleiche für die Maxwell-Hertzsche Theorie nur statt, wenn man schon Glieder erster Ordnung fortlassen wollte. So bilden die beiden Theorien eine Art Gegensatz, die absolute Zeit hat für die eine Theorie die gleiche Bedeutung wie die Äther-Ortszeit für die andere Theorie.

E. Cohn berechnet auch noch die Verbreitungsgeschwindigkeit. Dem dabei eingeschlagenen Verfahren vermag ich aber nicht zuzustimmen. Es ist folgendes.

Setzt man als Lösung z. B. für $\mathfrak{D}^\times$

$$\mathfrak{D}^\times = D^\times f(\tau' - \nu_\xi \xi - \nu_\eta \eta - \nu_\zeta \zeta), \qquad \nu = \frac{\alpha', \beta', \gamma'}{c_0}, \tag{22}$$

so müßte sein (vgl. S. 153)

$$\nu^2 = \nu_\xi^2 + \nu_\eta^2 + \nu_\zeta^2 = \frac{\mu K}{C_0^2}. \tag{23}$$

Führt man aber für τ' den Wert [S. 125, (a_2''')]

$$\tau' = t - \frac{1}{C_0^2}(p_x \xi + p_y \eta + p_z \zeta) \tag{24}$$

ein, so geht das Argument von f über in

$$t - n_\xi \xi - n_\eta \eta - n_\zeta \zeta,$$

woselbst ist

$$n_\xi = \nu_\xi + \frac{1}{C_0^2} p_x, \qquad n_\eta = \nu_\eta + \frac{1}{C_0^2} p_y, \qquad n_\zeta = \nu_\zeta + \frac{1}{C_0^2} p_z. \tag{25}$$

Es wird nun der „Strahl" definiert als Normale zur Ebene $\tau' - \nu_\xi \xi - \nu_\eta \eta - \nu_\zeta \zeta$, als „Strahlgeschwindigkeit" ein Vektor c, der die Richtung des „Strahls" hat und dessen Größe durch die Länge des Strahls zwischen den Ebenen $(t+1) - n_\xi \xi - n_\eta \eta - n_\zeta \zeta$ und $t - n_\xi \xi - n_\eta \eta - n_\zeta \zeta$ dargestellt ist. Das letztere soll zu der Beziehung (49) (S. 163) führen, nämlich

$$n_\xi c_\xi + n_\eta c_\eta + n_\zeta c_\zeta = 1. \tag{26}$$

Das erstere ergibt

$$c_\xi = \varkappa \nu_\xi, \qquad c_\eta = \varkappa \nu_\eta, \qquad c_\zeta = \varkappa \nu_\zeta, \tag{27}$$

und so hätte man zunächst

$$\varkappa = \frac{1}{\nu_\xi n_\xi + \nu_\eta n_\eta + \nu_\zeta n_\zeta} \tag{28}$$

und dann

$$(29)\qquad \begin{cases} c_\xi = \dfrac{\nu_\xi}{\nu_\xi n_\xi + \nu_\eta n_\eta + \nu_\zeta n_\zeta}, & c_\eta = \dfrac{\nu_\eta}{\nu_\xi n_\xi + \nu_\eta n_\eta + \nu_\zeta n_\zeta}, \\ c_\zeta = \dfrac{\nu_\zeta}{\nu_\xi n_\xi + \nu_\eta n_\eta + \nu_\zeta n_\zeta}, & c = \dfrac{\nu}{\nu_\xi n_\xi + \nu_\eta n_\eta + \nu_\zeta n_\zeta}, \end{cases}$$

also nach (25) und (23)

$$(30_1)\qquad c = \frac{C_0 \sqrt{\mu K}}{\mu K + \mu_0 K_0 \dfrac{p_\nu}{c_0}} = \frac{C_0}{\sqrt{\mu K} + \mu_0 K_0 \dfrac{p_\nu}{C_0}},$$

wo p_ν die in Richtung der Normale zu $t - \nu_\xi \xi - \nu_\eta \eta - \nu_\zeta \zeta$ fallende Geschwindigkeit bedeutet. Bis auf Größen zweiter Ordnung erhält man so

$$(30_2)\qquad c = \frac{C_0}{\sqrt{\mu K}}\left(1 - \frac{1}{C_0}\frac{\mu_0 K_0}{\sqrt{\mu K}} p_\nu\right) = c_0 - \frac{p_\nu}{n^2},$$

d. h. das Fresnelsche Gesetz für einen mitbewegten Beobachter. Allein die Beziehungen (27) dürften nicht zulässig sein. Cohns Begründung ist folgende. Es muß nicht nur die Gleichung (26) bestehen, sondern auch ihre Variation, welche sein soll

$$(31_1)\qquad c_\xi \delta n_\xi + c_\eta \delta n_\eta + c_\zeta \delta n_\zeta = 0.$$

Nun wird

$$\delta n_\xi = \delta \nu_\xi, \quad \delta n_\eta = \delta \nu_\eta, \quad \delta n_\zeta = \delta \nu_\zeta$$

gesetzt, so daß man erhält

$$(31_2)\qquad c_\xi \delta \nu_\xi + c_\eta \delta \nu_\eta + c_\zeta \delta \nu_\zeta = 0,$$

und da nach (23)

$$(32)\qquad \nu_\xi \delta \nu_\xi + \nu_\eta \delta \nu_\eta + \nu_\zeta \delta \nu_\zeta = 0$$

ist, so werden die Gleichungen (27) erschlossen. Indessen sind, da es sich hier einfach um parallele Strahlen handelt, die ν überhaupt nicht variabel; es ist also die Beziehung (31_2) identisch erfüllt, so wie die Beziehung (32), und die Vergleichung ergibt nichts. Es erhellt dieses noch klarer aus der Bemerkung, daß man hat

$$\nu_\xi = \frac{c_\xi^{(0)}}{c_0^2}, \quad \nu_\eta = \frac{c_\eta^{(0)}}{c_0^2}, \quad \nu_\zeta = \frac{c_\zeta^{(0)}}{c_0^2},$$

wo die $c_\xi^{(0)}$, $c_\eta^{(0)}$, $c_\zeta^{(0)}$ Komponenten sind von c_0. Sollen die ν variierbar sein, so müßte das auch für diese $c_\xi^{(0)}$, $c_\eta^{(0)}$, $c_\zeta^{(0)}$ zutreffen, die doch nur Komponenten einer gleichförmigen Geschwindigkeit bedeuten, also Größen derselben Art wie p_x, p_y, p_z, so daß, wenn jene variiert werden, auch diese variiert werden müßten; dann würde die Vergleichung mit (31_2) ganz entfallen. Ich vermag also nicht die Formeln (27) und folgende, demnach auch nicht die bedeutungsvolle Formel (30_1) oder (30_2) als aus dieser Theorie folgend anzuerkennen. Die Rechnung muß m. E. so geführt werden wie S. 163 ff. für die Maxwell-Hertzsche Theorie. Dann aber erhält man nichts anderes als bei der letzteren Theorie nach Umrechnung von Substanz-Ortszeit, nämlich $c = c_0$ ohne die Fresnelsche Korrektion. Und eigentlich ist das selbstverständlich, da ja hier genau dasselbe herauskommen muß wie in der Maxwell-Hertzschen Theorie für absolute Zeitrechnung, indem bei E. Cohn c sich auf Äther-Ortszeit so beziehen muß, wie bei Maxwell-Hertz auf absolute Zeit. Denn wenn die Gleichungen nicht mathematischen, sondern physikalischen Wert haben sollen, indem die Vorgänge nach ihnen tatsächlich sich so abspielen, als verliefe die Zeit nach der Äther-Ortszeit, so ist die Verbreitungsgeschwindigkeit auch tatsächlich die aus ihnen folgende, eben $c' = c_0$ relativ und gleich $c_0 + s'$ absolut, und die Zurückrechnung von dieser Ortszeit auf absolute Zeit hat nur informatorische Bedeutung, keine reale, weil sich nichts feststellen ließe, die Beobachtung ergäbe nichts anderes, als jene Verbreitungsgeschwindigkeit nach Äther-Ortszeit. Darin steht die Maxwell-Hertzsche Theorie bei weitem besser, denn diese ergibt das Fresnelsche Gesetz gerade bei Rechnung nach Äther-Ortszeit, wer also die Vorgänge dieser Zeit entsprechend ablaufen glaubt, findet diese Theorie in vollem Einklang mit der Erfahrung.

Dagegen halte ich einen Einwand, den W. Wien gegen die Cohnsche Theorie erhoben hat [1]), nicht für entscheidend. Er bezieht sich vor allem darauf, daß diese Theorie nicht dem Dopplerschen Prinzipe entspreche. Die Berechnung, auf der der Einwand beruht, darf ich übergehen [2]). Es handelt sich um die viel wichtigere Frage, auf die schon mehrmals hingewiesen ist, ob Theorien, die sich auf die Verhältnisse innerhalb bewegter Substanzen beziehen, überhaupt auf die Dopplersche Erscheinung Anwendung finden können. Das muß ich — ich glaube mit E. Cohn [3]) — zum Teil verneinen. Wenn die Lichtquelle sich bewegt, so beziehen sich die Gleichungen — soviel ich sehen kann, aller Theorien — lediglich auf den Gang der Störungen innerhalb der Lichtquelle und der sich mitbewegenden Umgebung. Eine physikalische Erklärung der Dopplerschen Erscheinung aus diesen Theorien könnte also nur den Sinn haben, daß untersucht wird, mit welcher durch die Bewegung innerhalb der Lichtquelle und ihrer sich mitbewegenden Umgebung modifizierten Geschwindigkeit der Strahl in den unbewegten Äther tritt.

Allein dann müßte der freie, sich nicht bewegende Äther Wellen mit verschiedener Geschwindigkeit, eben mit der durch die Bewegung in dem sich bewegenden leuchtenden Körper selbst und in der sich bewegenden Umgebung modifizierten Geschwindigkeit, weiter verbreiten, was wohl angesichts des Umstandes, daß der freie Äther nicht einmal für verschiedene Farben verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeit zeigt, wohl niemand wird zugeben wollen. Man wird immer annehmen müssen, daß, mit welchen Geschwindigkeiten Wellen auch in den freien unbewegten Äther treten, sie dort, schon unmittelbar an der Grenze, so geordnet werden, daß sie sich mit gleicher Geschwindigkeit, eben der aus der Eigenschaft des Äthers allein sich ergebenden, weiter verbreiten. Etwas anders scheinen die Verhältnisse zu liegen, wenn der empfangende Körper der sich bewegende ist. Hier könnte eine physikalische Modifikation der Verbreitungsgeschwindigkeit durch die Bewegung, entweder durch den sich mitbewegenden Äther oder durch die ponderablen Molekeln, indem sie durch ihre Bewegung Modifikationen im Äther hervorzubringen vermöchten, allerdings entstehen, wie sie im leuchtenden, sich bewegenden Körper angenommen werden kann. Und das liegt denn auch innerhalb aller Theorien, auch der E. Cohnschen. Die Gleichungen dürfen dann ebenfalls nur innerhalb der sich bewegenden Körper Verwendung finden; außerhalb dieser Körper müssen sie geändert werden.

[1]) W. Wien, Wiedemanns Annalen d. Physik u. Chemie **13**, 641 (1904); **14**, 632 (1904).

[2]) Doch scheint mir auch diese Berechnung ein Zeichenversehen zu enthalten; in Wiens Formel für $\mathfrak{E}$ muß das zweite Glied, $+2v\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x\, \partial t}$, wohl $-2v\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x\, \partial t}$ lauten; alsdann erhält man auch nicht $\frac{n}{\mathfrak{E}} = \frac{c+v}{\varkappa^2}$, sondern $\frac{c-v}{\varkappa^2}$, und der Einwand, daß Cohns Theorie die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der Bewegungsrichtung immer größer ergibt als im Ruhezustand, fällt überhaupt fort.

[3]) E. Cohn, Wiedemanns Annalen d. Physik u. Chemie **14**, 208 (1904).

und es bedarf dann der Übergangsbedingungen, die, wie bemerkt, für den freien Äther nicht einmal etwas nützen würden.

Hiernach wären die beiden Fälle der Dopplerschen Erscheinung: aus der sich bewegenden Lichtquelle und aus dem sich bewegenden Lichtempfänger, an sich grundsätzlich verschieden. Die Theorien könnten nur zur Erklärung des zweiten Falles herangezogen werden, und da haben sie ja auch alles geleistet. Der erste Fall wird immer noch am besten — wie schon von Doppler — als rein physiologisch behandelt werden, der einer physikalischen Erklärung gar nicht bedarf. Und für das Physiologische genügt, wie die Erfahrung gelehrt hat, selbst die so rein äußerliche Ableitung durch eine Koordinatentransformation, die ja physikalisch gar nichts erklären kann, sondern nur ein bequemes Verlegungsmittel ist der Bewegung aus dem leuchtenden Körper rein kinematisch in das beobachtende Auge, um die Vermehrung oder Verminderung der Zahl der Wellen, die das Auge treffen, bequem angeben zu können. Daß beide Fälle zu demselben Gesetz führen, ist eine Tatsache. Aber einmal ist dieses Gesetz physikalisch in physikalischen Theorien zu begründen, das anderemal ist es rein durch Abzählung gewonnen. Weil aber beide das gleiche geben, kann man zwar auch in dem Falle der physikalischen Begründung abzählend verfahren, eine Koordinatentransformation vornehmen; man kommt zu demselben Ergebnis. Es ist aber nicht richtig, zu verlangen, daß nun auch umgekehrt der Abzählungsfall aus physikalischen Theorien, die für ganz andere Verhältnisse geschaffen sind, abgeleitet werden soll.

Charakteristisch für die Theorie von E. Cohn sind die Beziehungen (Ca, b), da im übrigen die Theorie der Maxwell-Hertzschen sich so sehr anschließt, daß der Urheber selbst das überall betont. Es ist aber auffallend, wie wenig optisch (anders verhält es sich mit dem elektromagnetischen Gewinn) mit der Abweichung gegen die Maxwell-Hertzsche Theorie erreicht werden kann. Im Grunde genommen besteht der ganze Gewinn in den Gleichungen (21a, b) gegenüber den Gleichungen (40a, b) (S. 161) der Maxwell-Hertzschen Theorie. Aber aus diesem Gewinn folgt nichts erheblich über die Ergebnisse der Maxwell-Hertzschen Theorie Hinausgehendes, was als solches behauptet wird, glaube ich als nur Scheingewinn nachgewiesen zu haben. Die neu hinzugefügten Beziehungen (Ca, b) sind aber auf Bedenken gestoßen, weil sie auch für den freien Äther einen Unterschied zwischen den Feldintensitäten und den Polarisierungen feststellen, Bedenken, die ich selbst freilich nicht teile, weil dieser Unterschied ja auf den Bewegungszustand beschränkt ist.

Wir kehren zu den Ausgangsgleichungen von E. Cohn zurück. Da die Grundgleichungen (Aa, b) und (Ba, b) sich in der Form gar nicht von den Maxwell-Hertzschen unterscheiden, so können sie einen Konvektionsstrom nur in demselben Sinne enthalten wie diese Gleichungen. Der Einwand, der aus dem Mangel des eigentlichen Konvektionsstromes $g \operatorname{div} \mathfrak{D} = g\varrho$ gegen die Maxwell-Hertzsche Theorie erhoben wird, trifft also auch die Cohnsche Theorie, soweit die Grundgleichungen in Frage kommen. Wandelt man diese Grundgleichungen um in solche nur für Polarisierungen, wie beispielsweise durch die Näherungsgleichungen (1a, b) geschehen ist, so zeigt sich der eigentliche Konvektionsstrom. Allein dann fehlen die Röntgenströme, und die Gleichungen besagen auch, gerade im Sinne der Cohnschen Theorie, etwas anderes, als die Grundgleichungen. Man kann also eigentlich nicht behaupten, daß hinsichtlich des Konvektionsstromes Cohns Theorie einen Vorzug vor der von Maxwell-Hertz hat. Oder man muß Gleichungen, wie die vorgenannten (1a, b), als die Grundgleichungen in der üblichen Deutung ansehen, wo dann das Übel des Mangels des Röntgenstromes sich einstellt.

Anders soll es sich in Cohns Theorie hinsichtlich der weiteren elektromagnetischen Erscheinungen verhalten. Vernachlässigt man Größen zweiter Ordnung, so kann man statt der Gleichungen (Da, b) und (C_2a, b) setzen

(D′a) $\mathfrak{E}^\times = \mathfrak{E}^{(0)} + \frac{\mu_0}{C_0}[g\,\mathfrak{H}^{(0)}]$, ($C_2'$a) $4\pi\,\mathfrak{D}^\times = K\,\mathfrak{E}^{(0)} + \frac{K-K_0}{C_0}[g\,\mathfrak{H}^{(0)}]$,

(D′b) $\mathfrak{H}^\times = \mathfrak{H}^{(0)} - \frac{K_0}{C_0}[g\,\mathfrak{E}^{(0)}]$, ($C_2'$b) $4\pi\,\mathfrak{B}^\times = \mu\,\mathfrak{H}^{(0)} - \frac{\mu-\mu_0}{C_0}[g\,\mathfrak{E}^{(0)}]$,

wobei der Index (0) sich auf den Ruhezustand bezieht.

Hiernach wird z. B. die erste Grundgleichung

$$\operatorname{curl}\left(\mathfrak{H}^{(0)} - \frac{K_0}{C_0}[g\,\mathfrak{E}^{(0)}] + \frac{K}{C_0}[g\,\mathfrak{E}^{(0)}] + \frac{K-K_0}{C_0^2}[g[g\,\mathfrak{H}^{(0)}]]\right)$$
$$= \frac{1}{C_0}\frac{\partial(K\,\mathfrak{E}^{(0)})}{\partial t} + \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\{(K-K_0)[g\,\mathfrak{H}^{(0)}]\} + \frac{g}{C_0}\operatorname{div}(K\,\mathfrak{E}^{(0)})$$
$$+ \frac{g}{C_0^2}\operatorname{div}\{(K-K_0)[g\,\mathfrak{H}^{(0)}]\} + 4\pi J_e.$$

Lassen wir links und rechts Größen zweiter Ordnung fort, so erhalten wir hiernach als neue Grundgleichungen

(A′a) $$+C_0\operatorname{curl}\mathfrak{H}^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t}(K\,\mathfrak{E}^{(0)}) + g\operatorname{div}(K\,\mathfrak{E}^{(0)}) - \frac{(K-K_0)}{C_0}\operatorname{curl}[\mathfrak{E}^{(0)}g],$$

(A′b) $$-C_0\operatorname{curl}\mathfrak{E}^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t}(\mu\,\mathfrak{H}^{(0)}) + g\operatorname{div}(\mu\,\mathfrak{H}^{(0)}) - \frac{\mu-\mu_0}{C_0}\operatorname{curl}[\mathfrak{H}^{(0)}g].$$

Die Vergleichung mit den Formeln (A_2a, b) (S. 146) der Maxwell-Hertzschen Theorie zeigt, daß ein Unterschied nur im letzten Gliede rechts vorhanden ist, indem der Röntgenstrom bei E. Cohn den Faktor $\frac{K_0-K}{C_0}$, $\frac{\mu_0-\mu}{C_0}$ hat, statt des Faktors $\frac{K}{C_0}$, $\frac{\mu}{C_0}$. Das sollen aber die Ergebnisse der Versuche von Eichenwald, Wilson und anderen (S. **266** ff.) verlangt haben. E. Cohns Theorie würde also in dieser Hinsicht besser gestellt sein als die Theorie von Maxwell-Hertz. Nochmals aber muß darauf hingewiesen werden, daß auch die obigen Gleichungen den eigentlichen Konvektionsstrom an sich nicht enthalten. Soweit er sich zu einem Teil in ihnen findet, ist dieser Teil allein aus den Vernachlässigungen bei den anderen Gliedern hinübergerettet.

Anderes die Cohnsche Theorie betreffende wird bei der Besprechung der Lorentzschen Theorie, die übrigens weit älter als jene Theorie ist, erwähnt werden.

6. Theorie von H. A. Lorentz.

H. A. Lorentz[1]) ist bei der Ableitung seiner Grundgleichungen von der Elektronenlehre ausgegangen. Den Äther betrachtet er als alles erfüllend und durchdringend, selbst die Elektronen, aber als absolut ruhend. Alle elektro-

[1]) Ich halte mich an die beiden Veröffentlichungen, von denen die eine in der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften" **5** (2), 63 ff. (1904) sich findet, die andere als besondere Schrift „Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern" 1906 erschienen ist. Wo mir Abweichungen vorhanden zu sein scheinen, richte ich mich nach der zuletzt genannten Schrift, die ja die jüngere ist. Doch wird das im Text vermerkt. Ferner ist auch „The Theory of Electrons" (1909) benutzt.

magnetischen Erscheinungen werden hervorgebracht durch sich bewegende Elektronen, die Erscheinungen hängen ab von der Bewegung der Materie innerhalb deren (an Ionen oder Korpuskeln gebunden oder auch frei) die Elektronen sich befinden. Der Äther verbreitet die elektromagnetischen Störungen als elektromagnetisches Feld und wirkt als solches auf die Elektronen, während er als Stoff keine Rückwirkung erfährt, namentlich nicht in Bewegung gesetzt wird.

Die Grundgleichungen in ponderablen Körpern sind nun für ein festes Achsensystem mit $\mathfrak{C}^\times$ für den Gesamtstrom

(Aa) $$\operatorname{div}\mathfrak{D}^\times = \varrho\,,$$

(Ab) $$\operatorname{div}\mathfrak{B}^\times = 0\,,$$

(Ac) $$\operatorname{div}\mathfrak{C}^\times = 0\,;$$

(B_1 a) $$+\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\mathfrak{H}^\times = \mathfrak{C}^\times\,,$$

(B_1 b) $$-\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\mathfrak{E} = \frac{\partial\mathfrak{B}^\times}{\partial t}\,.$$

ϱ ist die beobachtbare Dichte der Elektrizität. Die Größe $\mathfrak{D}^\times$ setzt sich bei Lorentz aus zwei Größen zusammen, der „Maxwellschen Verschiebung" $\mathfrak{D}$ und der „Polarisierung" $\mathfrak{P}_e$, so daß ist

(Ea) $$\mathfrak{D}^\times = \mathfrak{D} + \mathfrak{P}_e\,.$$

Erstere entspricht innerhalb des reinen Äthers der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$, etwa

$$\mathfrak{D} = \frac{K_0}{4\pi}\mathfrak{E}\,.$$

Letztere, auch als elektrisches Moment bezeichnet, fehlt innerhalb des reinen Äthers, wo

$$\mathfrak{D}^\times = \mathfrak{D}$$

ist und bedeutet innerhalb ponderabler Stoffe den Mittelwert des Produkts der Ladungen e und ihrer Ausweichungen u während der Bewegung, also

(Ca) $$\mathfrak{P}_e = \frac{1}{V}\int \varrho\, u_e\, dV\,,$$

wo V ein Raum innerhalb der Substanz ist und u sich also bestimmt aus

$$g_e = \frac{du_e}{dt}\,,$$

indem g_e die Bewegungsgeschwindigkeit der Elektronen festsetzt. Nach Lorentz haben wir nun folgende Beziehungen (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, deren Seitenzahl und Formelnummer ich anführe)

(D_1 a) $$\mathfrak{E}^\times = \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{C_0}[g_m\mathfrak{B}^\times] \qquad [149, (XXXI')]$$

(E_1 a) $$4\pi\,\mathfrak{D}^\times = K_0\mathfrak{E} + \mathfrak{P}_e \qquad [149, (XXV)]$$

(F) $$\mathfrak{P}_e = \eta\,\mathfrak{E}^\times \qquad [227, (XXXIV''')]$$

(G) $$\eta = K - K_0 \qquad [224, (128)]$$

$\mathfrak{E}^\times$ bedeutet die beobachtbare elektrische Kraft im Bewegungszustand auf eine mit der Materie verbundene Elektrizitätseinheit, und g_m die Geschwindigkeit der Materie. Die letzte dieser Gleichungen ist freilich als für den Ruhezustand geltend angegeben. Nimmt man an, daß sie auch im Bewegungszustand bestehen soll, weil K als Konstante behandelt wird, so wäre

$$(E_2 a) \qquad 4\pi\mathfrak{D}^\times = K_0\mathfrak{E} + (K - K_0)\,\mathfrak{E}^\times = K_0\mathfrak{E} + (K - K_0)\left(\mathfrak{E} + \frac{4\pi}{C_0}[g_m\mathfrak{B}^\times]\right).$$

Man kann diese Gleichung auch schreiben

$$(E_3 a) \qquad 4\pi\mathfrak{D}^\times = K\mathfrak{E} + \frac{(K - K_0)}{C_0}\,4\pi\,[g_m\mathfrak{B}^\times]$$

oder

$$4\pi\mathfrak{D}^\times = K\left(\mathfrak{E} + \frac{4\pi}{C_0}[g_m\mathfrak{B}^\times]\right) - \frac{4\pi}{C_0}K_0[g_m\mathfrak{B}^\times],$$

d. h.

$$(E_4 a) \qquad 4\pi\mathfrak{D}^\times = K\mathfrak{E}^\times - \frac{4\pi}{C_0}K_0[g_m\mathfrak{B}^\times]$$

Für $\mathfrak{B}^\times$ hat Lorentz die Beziehung

$$(E_1 b) \qquad 4\pi\mathfrak{B}^\times = \mu\mathfrak{H}^\times. \qquad [150, (XXXVI)]$$

Zugleich aber ist in Lorentz' Theorie

$$(H) \qquad \mathfrak{H}^\times = \mathfrak{H},$$

so daß $\mathfrak{B}^\times$ auch mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet werden könnte. Dann ist noch

$$(E_5 a) \qquad 4\pi\mathfrak{D}^\times = K\mathfrak{E}^\times - \frac{\mu}{C_0}K_0[g_m\mathfrak{H}^\times].$$

Die Darstellung (E_4a) für $\mathfrak{D}$ entfällt dann. E. Cohns Formeln sind diesen ähnlich gestaltet, jedoch keineswegs ihnen gleich, auch nicht, wenn man sie in der vereinfachten Form unter (D') und (C') (S. 196) anwendet.

Es findet sich auch an Stelle von (E_1b) die Beziehung

$$(E_2 b) \qquad 4\pi\mathfrak{B}^\times = 4\pi\mathfrak{B} + \mathfrak{P}_m$$

und

$$(Cb) \qquad \mathfrak{P}_m = \frac{1}{2C_0V}\int \varrho_e \operatorname{curl}[u\,v_e]\,dV,$$

wo v_e die innere Bewegung der Elektronen bedeutet, mit q_e als Geschwindigkeit dieser inneren Bewegung der Elektronen, definiert durch

$$q_e = \frac{dv_e}{dt}.$$

Indessen werde ich mich an die bisherigen Gleichungen halten, die auch H. A. Lorentz selbst gegeben hat.

Also bleibt es bei (Ea_5) und (E_1b), und es kommt zu (D_1a) noch die Beziehung

$$(D_2 a) \qquad \mathfrak{E}^\times = \mathfrak{E} + \frac{\mu}{C_0}[g_m\mathfrak{H}].$$

Wir setzen nun noch[1])

(J) $$4\pi\mathfrak{D}^{\times\times} = K\mathfrak{E}^{\times},$$

so folgt aus (E_4a)

(K) $$\mathfrak{D}^{\times\times} = \mathfrak{D}^{\times} + \frac{K_0}{C_0}[g_m\mathfrak{B}^{\times}].$$

ϱ ist immer nur die elektrische Dichte, eine magnetische wird mit allen Theorien nicht angenommen. Die Elektronen, welche zu den $\mathfrak{P}$ beitragen, werden als Polarisierungselektronen bezeichnet.

Weiter ist, wenn wie bisher g_m die Geschwindigkeit der geladenen Materie, q_e die der Elektronen gegen die Materie angibt, der Gesamtstrom

(L_1) $$\mathfrak{C}^{\times} = \frac{\partial\mathfrak{D}^{\times}}{\partial t} + \varrho g_m + \overline{\varrho q_e} + \operatorname{curl}[\mathfrak{P}_e g_m]. \qquad [149, (XXIII) \text{ bis } (XXVIII)]$$

Das erste Glied stellt dar den Polarisierungsstrom, das zweite den Konvektionsstrom, das dritte den Leitungsstrom, das vierte den von den Polarisierungselektronen herrührenden Röntgenstrom. Wo man $\overline{\varrho q_e} = \varrho q_e$ setzen darf, ziehen sich Konvektionsstrom und Leitungsstrom zu einem Strom ϱg zusammen, da nach Lorentz' und der Elektronenlehre Anschauung ein eigentlicher Leitungsstrom überhaupt nicht besteht, sondern nur ein solcher infolge Bewegung der Elektronen, sei es mit der Materie (Geschwindigkeit g_m), sei es relativ zu ihr (Geschwindigkeit q). Man sieht, worin sich der Ausdruck für $\mathfrak{C}^{\times}$ von dem der Maxwell-Hertzschen Theorie unterscheidet. Identifiziert man $\overline{\varrho q_e}$ mit J dieser Theorie, so fehlt bei Lorentz $\operatorname{curl}[\mathfrak{P}_e q_e] + \operatorname{curl}[\mathfrak{D} g]$, wenn $\mathfrak{D}^{\times}$ der Lorentzschen Theorie dem $\mathfrak{D}$ der Maxwell-Hertzschen Theorie entsprechen soll und $g = q_e + g_m$ ist. Der Lorentzsche Röntgenstrom ist also nur ein Teil des Maxwell-Hertzschen und des E. Cohnschen. Deshalb kann er auch den Konvektionsstrom nicht aufheben. Darauf hat Lorentz eben hingewiesen.

$\mathfrak{H}^{\times}$ gibt die beobachtbare magnetische Kraft (S. 210).

Endlich soll für den Leitungsstrom sein

(M) $$J = \varrho q_e = \frac{C_0}{4\pi}\sigma\mathfrak{E}^{\times}.$$

Doch dient diese Gleichung mehr zur Definition der Leitfähigkeit σ. Wir setzen die Gleichung für $\mathfrak{C}^{\times}$ in der Form an

(L_2) $$\mathfrak{C}^{\times} = \frac{\partial\mathfrak{D}^{\times}}{\partial t} + \varrho g_m + \overline{\varrho q_e} + \operatorname{curl}[(\mathfrak{D} + \mathfrak{P}_e) g_m] - \operatorname{curl}[\mathfrak{D} g_m],$$

d. h. nach (Ea)

(L_3) $$\begin{aligned}\mathfrak{C}^{\times} &= \frac{\partial\mathfrak{D}^{\times}}{\partial t} + \varrho g_m + \varrho q_e + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}^{\times} g_m] - \operatorname{curl}[\mathfrak{D} g_m] \\ &= \frac{\partial\mathfrak{D}^{\times}}{\partial t} + g_m \operatorname{div}\mathfrak{D}^{\times} + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}^{\times} g_m] - \operatorname{curl}[\mathfrak{D} g_m] + J.\end{aligned}$$

Demnach wird nach (B_1a)

(B_2a) $$+\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\mathfrak{H}^{\times} = \frac{\partial\mathfrak{D}^{\times}}{\partial t} + g_m \operatorname{div}\mathfrak{D}^{\times} + \operatorname{curl}[\mathfrak{D}^{\times} g_m] - \operatorname{curl}[\mathfrak{D} g_m] + J.$$

[1]) Bei Lorentz findet sich die Beziehung $4\pi\mathfrak{D}^{\times} = K\mathfrak{E}$ [150, (XXXV)], die ich mit den anderen Gleichungen nicht zu vereinigen weiß. Doch bezieht sich wohl diese Formel, ebenso wie die $\mathfrak{P} = \eta\mathfrak{E}$ [150, (XXXIV)] auf ruhende Körper.

Von der Maxwell-Hertzschen Form (II_2) unterscheidet sich diese Gleichung durch das Glied $-\mathrm{curl}[\mathfrak{D} g_m]$, welches bewirkt, daß der Röntgenstrom nicht wie bei Maxwell-Hertz $\mathrm{curl}[\mathfrak{D}^\times g_m]$ beträgt, sondern nur $\mathrm{curl}[\mathfrak{D}^\times g_m] - \mathrm{curl}[\mathfrak{D} g_m] = \mathrm{curl}[\mathfrak{P}_e g_m]$, weshalb er auch den Konvektionsstrom nicht aufheben kann, wie schon bemerkt. Setzt man jedoch

$$(D_1 b) \qquad \mathfrak{H}^\times - \frac{4\pi}{C_0}[g_m \mathfrak{D}] = \mathfrak{H}', \qquad [209, (XXX')]$$

so erhält man mit $\mathfrak{H}'$ genau die Maxwell-Hertzsche Beziehung

$$(B_3 a) \qquad +\frac{C_0}{4\pi}\mathrm{curl}\,\mathfrak{H}' = \frac{\partial \mathfrak{D}^\times}{\partial t} + g_m \mathrm{div}\,\mathfrak{D}^\times + \mathrm{curl}[\mathfrak{D}^\times g_m] + J. \qquad [209, (III''a)]$$

Da übrigens, weil $\mathfrak{D}$ sich auf reinen ruhenden Äther bezieht,

$$4\pi\mathfrak{D} = K_0 \mathfrak{E}$$

sein soll, so wird, entsprechend der aus ($D_1 a$) und ($E_1 b$) folgenden Beziehung

$$(D_2 a) \qquad \mathfrak{E}^\times = \mathfrak{E} + \frac{\mu}{C_0}[g_m \mathfrak{H}^\times], \qquad [209, (106)]$$

$$(D_2 b) \qquad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H}^\times - \frac{K_0}{C_0}[g_m \mathfrak{E}]. \qquad [209, (XXX')]$$

Der Gleichung ($B_3 a$) entsprechend haben wir auch

$$(B_3 b) \qquad -\frac{C_0}{4\pi}\mathrm{curl}\,\mathfrak{E}^\times = \frac{\partial \mathfrak{B}^\times}{\partial t} + \mathrm{curl}[\mathfrak{B}^\times g_m], \qquad [209, (IV''a)]$$

die sich aus ($B_1 b$) ergibt, wenn die Gleichung ($D_1 a$) beachtet wird. Diese Gleichung entspricht der Maxwell-Hertzschen in jeder Hinsicht, weil hier $\mathfrak{E}^\times$ die gleiche Bedeutung haben soll wie in der Maxwell-Hertzschen Gleichung, nämlich die beobachtbare elektrische Kraft, wie sich aus der Definitionsgleichung (M) für den Leitungsstrom ergibt. Dagegen ist in ($B_3 a$) das $\mathfrak{H}'$ nicht die beobachtbare magnetische Kraft, welche vielmehr $\mathfrak{H}^\times$ sein soll. In der Tat, wäre $\mathfrak{H}'$ diese Kraft, so entfiele jeder Unterschied zwischen der Maxwell-Hertzschen und Lorentzschen Theorie, und die letztere Theorie könnte so wenig einen Konvektivstrom enthalten wie die erstere, auf den ja Lorentz gerade den größten Wert legt. Auch hätte dann Lorentz z. B. für unmagnetisierbare Substanzen ($\mu = 1$) nicht $\mathrm{div}\,\mathfrak{H}^\times = 0$ gesetzt, wie er es tut [vgl. erste Schrift S. 272, Gl. (183), zweite Schrift S. 76, Gl. (IIc)], sondern $\mathrm{div}\,\mathfrak{H}' = 0$, da er doch zugleich nicht $\mathrm{div}(K\mathfrak{E}) = 4\pi\varrho$ macht, sondern $\mathrm{div}\,\mathfrak{D}^\times = \varrho$, wo $\mathfrak{D}^\times$ ja zu $K\mathfrak{E}$ noch ein Zusatzglied nach ($E_5 a$) enthält, welches dem Zusatzglied bei $\mathfrak{H}'$ entspricht. Also ist, glaube ich, $\mathfrak{H}'$ ein Rechenvektor, wie $\mathfrak{D}'$ einen solchen bedeuten würde. Ferner wird die magnetische Energie in bewegten, unmagnetisierbaren Körpern wie in ruhenden gleich $\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2$ gesetzt. Dagegen die entsprechende elektrische Energie in Nichtleitern nicht

$$\frac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{E}\mathfrak{P}_e\right) = \frac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \frac{(K - K_0)}{2}\mathfrak{E}^2,$$

sondern

$$\frac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{E}^\times \mathfrak{P}_e\right) = \frac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \frac{(K - K_0)}{2}\mathfrak{E}^{\times 2} = \frac{K}{2}\mathfrak{E}^{\times 2} + \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{E}^{\times 2}).$$

[Vgl. die erstgenannte Schrift S. 251, Gl. (XXXIX'') und (XL').]

Wir können nun mit den Gleichungen (B_3a, b) alle Transformationen vornehmen, die an den Maxwell-Hertzschen Gleichungen ausgeführt sind, zumal in diesen Gleichungen g die gleiche Bedeutung hat wie in den Lorentzschen die Größe g_m, nämlich die Bewegung der Materie, da die Maxwell-Hertzsche Theorie zwischen dieser Bewegung und der des Äthers nicht unterscheidet.

Alle Gleichungen gelten für ein ruhendes Achsensystem, wofür sie auch entsprechend früheren Bezeichnungsweisen geschrieben sind.

Zusätzlich sei noch auf eine Reihe von Beziehungen hingewiesen, die aus den Ansätzen (D_2a, b) und (E_4a) folgen. Multipliziert man jedes der Systeme mit g_x, g_y, g_z, so ergibt sich

(Ia) $$\mathfrak{E}^\times_{g_m} = \mathfrak{E}_{g_m}.$$

(Ib) $$\mathfrak{H}'_{g_m} = \mathfrak{H}^\times_{g_m},$$

Die Größen $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{E}^\times$, in Richtung der Bewegung g_m genommen, haben also die Beträge, die ihnen im Ruhezustand zukommen. Ebenso findet sich aus (E_4a)

(IIa) $$4\pi\,\mathfrak{D}^\times_{g_m} = K\mathfrak{E}^\times_{g_m}$$

und da

(IIb) $$4\pi\,\mathfrak{B}^\times = \mu\,\mathfrak{H}^\times$$

überhaupt sein sollte, so gelten in der Bewegungsrichtung die Maxwell-Hertzschen Ansätze und die Maxwell-Hertzschen Gleichungen.

Weiter seien l, m, n die Richtungskosinus von g_m; l', m', n'; l'', m'', n'' die Richtungskosinus zweier anderer Strecken g', g'', die zueinander und zu g senkrecht stehen. Dann haben wir aus denselben Gleichungen

$$\mathfrak{H}'_{g'_m} = \mathfrak{H}^\times_{g'_m} - \frac{K_0}{C_0}\left\{\mathfrak{E}_x(m'g_z - n'g_y) + \mathfrak{E}_y(n'g_x - l'g_z) + \mathfrak{E}_z(l'g_y - m'g_x)\right\}$$

oder

$$\mathfrak{H}'_{g'_m} = \mathfrak{H}^\times_{g'_m} - \frac{K_0}{C_0}\,g_m\,\mathfrak{E}_{g''_m}\sqrt{(m'n - n'm)^2 + (n'l - l'n)^2 + (l'm - m'l)^2}\,.$$

Nach bekannten Lehren ist die Quadratwurzel 1. Wir bekommen also, indem mit den anderen Gleichungen entsprechend verfahren wird, und auch die Akzente vertauscht werden

(IIIa) $$\mathfrak{E}^\times_{g'_m} = \mathfrak{E}_{g'_m} + \frac{4\pi}{C_0}\,g_m\,\mathfrak{B}^\times_{g''_m}\,,$$ (IVa) $$\mathfrak{E}^\times_{g''_m} = \mathfrak{E}_{g''_m} - \frac{4\pi}{C_0}\,g_m\,\mathfrak{B}^\times_{g'_m}\,;$$

(IIIb) $$\mathfrak{H}'_{g'_m} = \mathfrak{H}^\times_{g'_m} - \frac{K_0}{C_0}\,g_m\,\mathfrak{E}_{g''_m}\,,$$ (IVb) $$\mathfrak{H}'_{g''_m} = \mathfrak{H}^\times_{g''_m} + \frac{K_0}{C_0}\,g_m\,\mathfrak{E}_{g'_m}\,;$$

(V) $$4\pi\,\mathfrak{D}^\times_{g'_m} = K\mathfrak{E}^\times_{g'_m} - \frac{4\pi K_0}{C_0}\,g_m\,\mathfrak{B}^\times_{g''_m}\,,$$ (VI) $$4\pi\,\mathfrak{D}^\times_{g''_m} = K\mathfrak{E}^\times_{g''_m} + \frac{4\pi K_0}{C_0}\,g_m\,\mathfrak{B}^\times_{g'_m}\,.$$

Da die Komponenten nach g, g', g'' zueinander senkrecht stehen, hat man noch zufolge (Ia, b)

(VIIa) $$\mathfrak{E}^{\times 2} = \mathfrak{E}^2 + \frac{(4\pi)^2}{C_0^2}\,g_m^2(\mathfrak{B}^{\times 2} - \mathfrak{B}^{\times 2}_{g_m}) + 2\,\frac{4\pi}{C_0}\,g_m\left(\mathfrak{E}_{g'_m}\mathfrak{B}^\times_{g''_m} - \mathfrak{E}_{g''_m}\mathfrak{B}^\times_{g'_m}\right),$$

(VIIb) $$\mathfrak{H}'^2 = \mathfrak{H}^{\times 2} + \frac{K_0^2}{C_0^2}\,g_m^2(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{E}^2_{g_m}) - 2\,\frac{K_0}{C_0}\,g_m\left(\mathfrak{H}^\times_{g'_m}\mathfrak{E}_{g''_m} - \mathfrak{H}^\times_{g''_m}\mathfrak{E}_{g'_m}\right).$$

Von diesen Beziehungen kann man unmittelbar Gebrauch machen, indem man in jedem Fall das Achsensystem entsprechend dreht.

Weitere Beziehungen bekommt man durch Multiplikation derselben Gleichungen mit $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$ usf. und Addition.

So ist

$$\text{(VIII)} \qquad \left(\overline{\mathfrak{H}'\mathfrak{E}}\right) = \left(\overline{\mathfrak{H}^\times\mathfrak{E}}\right),$$

$$\text{(IX)} \qquad (4\pi)^2\left(\overline{\mathfrak{B}^\times\mathfrak{D}^\times}\right) = K\mu\left(\overline{\mathfrak{H}^\times\mathfrak{E}}\right) = K\mu\left(\overline{\mathfrak{H}^\times\mathfrak{E}^\times}\right),$$

als wenn, wie in Maxwells Theorie $\mathfrak{H}^\times$, $\mathfrak{E}$ oder auch $\mathfrak{H}^\times$, $\mathfrak{E}^\times$ die Kräfte, $\mathfrak{B}^\times$, $\mathfrak{D}^\times$ die Polarisierungen wären.

Andere Beziehungen sind

$$\text{(X)} \qquad \left(\overline{g_m(\mathfrak{E}^\times - \mathfrak{E})}\right) = g_m(\overline{\mathfrak{E}^\times - \mathfrak{E}})_{g_m} = 0,$$

$$\text{(XI)} \qquad \begin{cases} \left(\overline{g_m(\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}^\times)}\right) = g_m(\overline{\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}^\times})_{g_m} = 0, \\ \left(\overline{g_m(\mathfrak{D}^\times - \mathfrak{D})}\right) = g_m(\overline{\mathfrak{D}^\times - \mathfrak{D}})_{g_m} = 0, \end{cases}$$

so daß die Vektoren $\mathfrak{E}^\times - \mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}^\times$, $\mathfrak{D}^\times - \mathfrak{D}$ senkrecht zur Bewegung g_m gerichtet sind.

Zuletzt hat man noch

$$\text{(XII)} \qquad \left(\overline{\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}^\times}\right) = \left(\overline{\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}^\times}\right),$$

$$\text{(XIII)} \qquad \left(\overline{\mathfrak{H}'\mathfrak{E}}\right) = \left(\overline{\mathfrak{H}^\times\mathfrak{E}^\times}\right),$$

$$\text{(XIV)} \qquad \left(\overline{\mathfrak{B}^\times\mathfrak{D}^\times}\right) = \left(\overline{\mathfrak{B}\,\mathfrak{D}}\right),$$

Alle Beziehungen sind vom Koordinatensystem unabhängig und gelten in gleicher Weise für alle Theorien, u. a. also auch für die von E. Cohn.

Im ganzen unterscheidet sich die Lorentzsche Theorie von der Maxwell-Hertzschen dadurch, daß

1. in den Bewegungsgleichungen (B_3a, b) die Größe $\mathfrak{H}'$ nicht die beobachtbare magnetische Kraft bedeutet, welche vielmehr $\mathfrak{H}^\times$ sein soll;

2. in den Verbindungsgleichungen (E_3a), (D_2a) die Größe $\mathfrak{E}$ nicht die beobachtbare elektrische Kraft bedeutet, welche vielmehr $\mathfrak{E}^\times$ ist.

Noch habe ich zu bemerken: In der zweiten, S. 206, Anm., genannten Schrift setzt Lorentz

$$\varkappa\,\mathfrak{E}^\times = 4\pi C_0^2\mathfrak{D} + \frac{1}{C_0}[g_m\mathfrak{H}^\times] = C_0^2 K\mathfrak{E} + \frac{1}{C_0}[g_m\mathfrak{H}^\times],$$

welche also für die Gleichung (D_2a) träte. Demnach wäre anzunehmen

$$\varkappa = C_0^2 K$$

und es käme

$$\mathfrak{E}^\times = \mathfrak{E} + \frac{1}{C_0^2 K C_0}[g_m\mathfrak{H}^\times]$$

und da in Lorentz' in dieser Schrift angenommenen Rechenweise $K\mu = \frac{1}{C_0^2}$ ist, so folgt wieder die Formel (D_2a).

Wir betrachten nun die Verhältnisse für reinen Äther, innerhalb dessen Elektronen sich bewegen können, fortschreitend und schwingend. Für q_e schreiben wir q. Hier soll $\mathfrak{P}_e = \mathfrak{P}_m = 0$, $K = 1$, $\mu = 1$ sein. Wir schreiben die Lorentzschen Gleichungen für diesen Fall in der von ihm selbst gewählten Form und für ein bewegliches Achsensystem ξ, η, ζ, wenn p wieder die fortschreitende, q die relative Geschwindigkeit der Elektronen feststellt. Es soll also sein [zweite Schrift Gleichungen (4a) und (IIIa), (IVa), (Ia), (IIa) (S. 33, 34); man beachte auch, daß für reinen Äther $\mathfrak{P}_e$, also in (L) curl $[\mathfrak{P}_e\, g_m] = 0$ ist, um die folgenden Gleichungen mit den Hauptgleichungen zu kontrollieren]

$$(1_1\text{a}) \qquad + \frac{C_0}{\mu_0} \operatorname{curl} \mathfrak{B} = \left(\frac{\delta \mathfrak{D}}{\delta t}\right)_p + (p+q) \operatorname{div} \mathfrak{D} \,,$$

$$(1_1\text{b}) \qquad - \frac{C_0}{K_0} \operatorname{curl} \mathfrak{D} = \left(\frac{\delta \mathfrak{B}}{\delta t}\right)_p ;$$

$$(2\text{a}) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho \,,$$

$$(2\text{b}) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \,.$$

Zugleich haben wir [l. c. Gleichung (Va)]

$$(3\text{a}) \qquad \mathfrak{E}^\times = \frac{4\pi}{K_0} \mathfrak{D} + \frac{1}{C_0} [g\, \mathfrak{H}^\times] \,,$$

$$(3\text{b}) \qquad \mathfrak{H}^\times = \frac{4\pi}{\mu_0} \mathfrak{B}^\times$$

und

$$\mathfrak{D}^\times = \mathfrak{D} \,, \qquad \mathfrak{B}^\times = \mathfrak{B} \,,$$

also

$$\mathfrak{D}^\times = \frac{K_0}{4\pi} \mathfrak{E} \,, \qquad \mathfrak{B}^\times = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathfrak{H}^\times \,.$$

Wir betrachten erst den Fall, daß die Substanz sich nur als Ganzes bewegt, und zwar gleichförmig, da p konstant sein sollte. Es ist dann $g = p$. Für ebene parallele Wellen schreiben wir wieder

$$(4\text{a}) \qquad \mathfrak{B}_\pi = B_\pi f\left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta}{\lambda}\right) ,$$

$$(4\text{b}) \qquad \mathfrak{D}_\pi = D_\pi f\left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta}{\lambda}\right) ; \quad \pi = \xi, \eta, \zeta \,.$$

Dann bekommen wir mit

$$(5\text{a}) \qquad \alpha B_\xi + \beta B_\eta + \gamma B_\zeta = B_S \,,$$

$$(5\text{b}) \qquad \alpha D_\xi + \beta D_\eta + \gamma D_\zeta = D_S \,.$$

wegen $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ und $\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho$

$$(6\text{a}) \qquad B_S = 0 \,,$$

$$(6\text{b}) \qquad \varrho_e = -\frac{1}{\lambda} D_S f'\left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta}{\lambda}\right) .$$

Hiernach folgt aus den Grundgleichungen (1_1a, b) selbst

$$(7\text{a})\qquad \left\{\begin{aligned} &+\frac{1}{\mu_0'}(\gamma \bar{B}_\eta - \beta \bar{B}_\zeta) = \bar{D}_\xi\left(\frac{\lambda}{T} + s\right) - p_x \bar{D}_S,\\ &+\frac{1}{\mu_0'}(\alpha \bar{B}_\zeta - \gamma \bar{B}_\xi) = \bar{D}_\eta\left(\frac{\lambda}{T} + s\right) - p_y \bar{D}_S,\\ &+\frac{1}{\mu_0'}(\beta \bar{B}_\xi - \alpha \bar{B}_\eta) = \bar{D}_\zeta\left(\frac{\lambda}{T} + s\right) - p_z \bar{D}_S,\end{aligned}\right.$$

$$(7\text{b})\qquad \left\{\begin{aligned} &-\frac{1}{K_0'}(\gamma \bar{D}_\eta - \beta \bar{D}_\zeta) = \bar{B}_\xi\left(\frac{\lambda}{T} + s\right),\\ &-\frac{1}{K_0'}(\alpha \bar{D}_\zeta - \gamma \bar{D}_\xi) = \bar{B}_\eta\left(\frac{\lambda}{T} + s\right),\\ &-\frac{1}{K_0'}(\beta \bar{D}_\xi - \alpha \bar{D}_\eta) = \bar{B}_\zeta\left(\frac{\lambda}{T} + s\right).\end{aligned}\right.$$

Die Multiplikation jedes der Systeme mit α, β, γ und jedesmalige Addition ergibt

$$(8\text{a})\qquad \bar{D}_S\left(\frac{\lambda}{T} + s\right) = s\,\bar{D}_S\,,$$

$$(8\text{b})\qquad \bar{B}_S\left(\frac{\lambda}{T} + s\right) = 0\,.$$

Die zweite Gleichung ist erfüllt, weil $\bar{B}_s = 0$ ist nach (6a). Die erste Gleichung aber würde auch $\bar{D}_s = 0$ verlangen, was nach (6b) nur stattfindet, wenn $\varrho_e = 0$ ist. Also sind im Falle, daß Ladungen bestehen, ebene polarisierte Wellen nur für $\bar{\mathfrak{B}}$, nicht für $\bar{\mathfrak{D}}$ möglich. Und da die Systeme zugleich bestehen, sind solche Wellen überhaupt nur bei Abwesenheit von Ladungen zulässig, wie in der Maxwell-Hertzschen Theorie.

Für den allgemeinen Fall ist folgendes zu bemerken.

Nach H. A. Lorentz gibt es magnetische Kräfte, nur wenn die geladenen Teilchen sich gegeneinander bewegen, folglich sind die $\bar{\mathfrak{H}}$ und $\mathfrak{B}$ von der Ordnung von q, und man darf die Gleichung (3a) ersetzen durch

$$(3'\text{a})\qquad \bar{\mathfrak{E}}^\times = \frac{4\pi}{K_0}\bar{\mathfrak{D}} + \frac{1}{C_0}[p\bar{\mathfrak{H}}] = \frac{4\pi}{K_0}\left(\bar{\mathfrak{D}} + \frac{1}{C_0}\frac{K_0}{\mu_0}[p\bar{\mathfrak{B}}]\right),$$

somit wird

$$(3''\text{a})\qquad K_0\bar{\mathfrak{E}}^\times = 4\pi\,\bar{\mathfrak{D}} + \frac{4\pi}{C_0}K_0[p\bar{\mathfrak{B}}] = 4\pi\,\bar{\mathfrak{D}}^{\times\times},$$

d. h. in Lorentz' Theorie entspricht bei vorhandener Bewegung nicht $\bar{\mathfrak{D}}$, sondern $\bar{\mathfrak{D}}^{\times\times}$ der Polarisierung im Sinne Maxwells, was zu (J) gehört.

Die Grundgleichungen sollen für beliebige Bewegungen gelten. In durchsichtigen Körpern und für gleichförmige Bewegung gehen sie in die Maxwell-Hertzschen über.

Wenden wir auf die Gleichungen (1_1a, b) die Beziehung (5_2) (S. 135) an, so erhalten wir

$$(1_2\text{a})\qquad +\frac{C_0}{\mu_0}\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{B}} = \frac{\partial\bar{\mathfrak{D}}}{\partial t} + q\operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}} + \operatorname{curl}[p\bar{\mathfrak{D}}] = \frac{\partial\bar{\mathfrak{D}}}{\partial t} + q\,\varrho_e + \operatorname{curl}[p\bar{\mathfrak{D}}],$$

$$(1_2\text{b})\qquad -\frac{C_0}{K_0}\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{D}} = \frac{\partial\bar{\mathfrak{B}}}{\partial t} + \operatorname{curl}[p\bar{\mathfrak{B}}].$$

Diese Gleichungen mit den Gleichungen (A_8a, b) (S. 147) der Maxwell-Hertzschen Theorie zusammengehalten, lassen den ganzen Unterschied deutlich hervortreten; sie enthalten $\operatorname{curl}[p\bar{\mathfrak{D}}]$, $\operatorname{curl}[p\bar{\mathfrak{B}}]$ anstatt $-\operatorname{curl}[q\mathfrak{D}]$, $-\operatorname{curl}[q\bar{\mathfrak{B}}]$. Sie ergeben

$$(1_3\text{a})\qquad +\frac{C_0}{\mu_0}\operatorname{curl}\mathfrak{B}' = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + q\operatorname{div}\mathfrak{D} = \frac{\partial\bar{\mathfrak{D}}}{\partial t} + q\varrho_e, \qquad (3''\text{a})\quad \mathfrak{B}' = \mathfrak{B} - \frac{\mu_0}{C_0}[p\bar{\mathfrak{D}}],$$

$$(1_3\text{b})\qquad -\frac{C_0}{K_0}\operatorname{curl}\mathfrak{D}' = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}, \qquad (3''\text{b})\quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + \frac{K_0}{C_0}[p\mathfrak{B}].$$

Aus (1_1a) folgt weiter

$$\frac{C_0}{\mu_0}\operatorname{curl}\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{B}} = \operatorname{curl}\left(\frac{\delta\bar{\mathfrak{D}}}{\delta t}\right)_p + \operatorname{curl}(g\varrho_e) = \left(\frac{\delta\operatorname{curl}\mathfrak{D}}{\delta t}\right)_p + \operatorname{curl}(g\varrho_e)$$

$$= -\frac{K_0}{C_0}\left(\frac{\delta^2\bar{\mathfrak{B}}}{\delta t^2}\right)_p + \operatorname{curl}(g\varrho_e).$$

Nun ist nach (t) (S. 121)

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{B}} = \nabla(\operatorname{div}\bar{\mathfrak{B}}) - \Delta\mathfrak{B} = -\Delta\mathfrak{B},$$

und

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \nabla(\operatorname{div}\mathfrak{D}) - \Delta\bar{\mathfrak{D}} = \nabla\varrho - \Delta\mathfrak{D}.$$

Also bekommen wir die zuerst von H. A. Lorentz aufgestellten Beziehungen

$$(9_1\text{a})\qquad K_0'\mu_0'\left(\frac{\delta^2\mathfrak{B}}{\delta t^2}\right)_p = \Delta\mathfrak{B} + \mu_0'\operatorname{curl}(g\varrho_e),$$

$$(9_1\text{b})\qquad K_0'\mu_0'\left(\frac{\delta^2\mathfrak{D}}{\delta t^2}\right)_p = \Delta\mathfrak{D} - \nabla\varrho - K_0'\mu_0'\left(\frac{\delta}{\delta t}g\varrho_e\right)_p; \qquad K_0' = \frac{K_0}{C_0}, \quad \mu_0' = \frac{\mu_0}{C_0}$$

und ausgeschrieben

$$(9_2\text{a})\qquad \begin{cases} K_0'\mu_0'\left(\dfrac{\delta^2\bar{\mathfrak{B}}_\xi}{\delta t^2}\right)_p = \Delta\bar{\mathfrak{B}}_\xi + \mu_0'\left(\dfrac{\partial(g_\zeta\varrho_e)}{\partial\eta} - \dfrac{\partial(g_\eta\varrho_e)}{\partial\zeta}\right), \\ K_0'\mu_0'\left(\dfrac{\delta^2\mathfrak{B}_\eta}{\delta t^2}\right)_p = \Delta\mathfrak{B}_\eta + \mu_0'\left(\dfrac{\partial(g_\xi\varrho_e)}{\partial\zeta} - \dfrac{\partial(g_\zeta\varrho_e)}{\partial\xi}\right), \\ K_0'\mu_0'\left(\dfrac{\delta^2\mathfrak{B}_\zeta}{\delta t^2}\right)_p = \Delta\mathfrak{B}_\zeta + \mu_0'\left(\dfrac{\partial(g_\eta\varrho_e)}{\partial\xi} - \dfrac{\partial(g_\xi\varrho_e)}{\partial\eta}\right); \end{cases}$$

$$(9_2\text{b})\qquad \begin{cases} K_0'\mu_0'\left(\dfrac{\delta^2\bar{\mathfrak{D}}_\xi}{\delta t^2}\right)_p = \Delta\mathfrak{D}_\xi - \dfrac{\partial\varrho_e}{\partial\xi} - K_0'\mu_0'\left(\dfrac{\delta(g_\xi\varrho_e)}{\delta t}\right)_p, \\ K_0'\mu_0'\left(\dfrac{\delta^2\mathfrak{D}_\eta}{\delta t^2}\right)_p = \Delta\bar{\mathfrak{D}}_\eta - \dfrac{\partial\varrho_e}{\partial\eta} - K_0'\mu_0'\left(\dfrac{\delta(g_\eta\varrho_e)}{\delta t}\right)_p, \\ K_0'\mu_0'\left(\dfrac{\delta^2\mathfrak{D}_\zeta}{\delta t^2}\right)_p = \Delta\mathfrak{D}_\zeta - \dfrac{\partial\varrho_e}{\partial\zeta} - K_0'\mu_0'\left(\dfrac{\delta(g_\zeta\varrho_e)}{\delta t}\right)_p. \end{cases}$$

Wir zerlegen wieder die Geschwindigkeit g in ihre beiden Teile p und q, multiplizieren die zweite Gleichung unter (9_2b) mit p_z und ziehen sie von der mit p_y multiplizierten ersten Gleichung ab. Es folgt

$$K_0' \mu_0' \left(\frac{\delta^2}{\delta t^2} (p_y \mathfrak{D}_\xi - p_x \mathfrak{D}_\eta) \right)_p = \Delta (p_y \overline{\mathfrak{D}}_\xi - p_x \overline{\mathfrak{D}}_\eta) - \left(p_y \frac{\partial \varrho_e}{\partial \xi} - p_x \frac{\partial \varrho_e}{\partial \eta} \right)$$
$$- K_0' \mu_0' \left(p_y \frac{\delta (q_\xi \varrho_e)}{\delta t} - p_x \frac{\delta (q_\eta \varrho_e)}{\delta t} \right)_p .$$

Addiert man dazu die dritte Gleichung unter (9_2a), nachdem man sie durch μ_0' dividiert hat, so folgt

$$K_0' \mu_0' \left\{ \frac{\delta^2}{\delta t^2} \left((p_y \mathfrak{D}_\xi - p_x \mathfrak{D}_\eta) + \frac{1}{\mu_0'} \right) \overline{\mathfrak{B}}_\zeta \right\}_p = \Delta \left(p_y \overline{\mathfrak{D}}_\xi - p_x \mathfrak{D}_\eta + \frac{1}{\mu_0'} \overline{\mathfrak{B}}_\zeta \right)$$
$$+ \frac{\partial (q_\eta \varrho_e)}{\partial \xi} - \frac{\partial (q_\xi \varrho_e)}{\partial \eta} - K_0' \mu_0' \left(p_y \frac{\delta (q_\xi \varrho_e)}{\delta t} - p_x \frac{\delta (q_\eta \varrho_e)}{\delta t} \right)_p$$

und allgemein

$$(10) \quad K_0' \mu_0' \left\{ \frac{\delta^2}{\delta t^2} \left(\frac{1}{\mu_0'} \mathfrak{B} - [p\, \mathfrak{D}] \right) \right\}_p = \Delta \left(\frac{1}{\mu_0'} \overline{\mathfrak{B}} - [p\, \overline{\mathfrak{D}}] \right) + \operatorname{curl}(\varrho') + K_0' \mu_0' \left(\frac{\delta}{\delta t} [p\, \varrho'] \right)_p ,$$

woselbst

$$(11) \qquad \varrho_\xi' = q_\xi \varrho_e , \quad \varrho_\eta' = q_\eta \varrho_e , \quad \varrho_\zeta' = q_\zeta \varrho_e$$

die Komponenten des inneren Konvektivstromes bedeuten. Hiernach erhalten wir mit

$$(3'''\text{a}) \qquad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + \frac{K}{C_0} [p\, \mathfrak{B}] ,$$

$$(3'''\text{b}) \qquad \mathfrak{B}' = \mathfrak{B} - \frac{\mu}{C_0} [p\, \mathfrak{D}]$$

die Beziehungen

$$(12) \quad \begin{cases} K_0' \mu_0' \left(\dfrac{\delta^2 \mathfrak{B}_\xi'}{\delta t^2} \right)_p = \Delta \overline{\mathfrak{B}}_\xi' + \mu_0' \left(\dfrac{\partial \varrho_\zeta'}{\partial \eta} - \dfrac{\partial \varrho_\eta'}{\partial \zeta} \right) - K_0' \mu_0' \left(p_z \dfrac{\delta \varrho_\eta'}{\delta t} - p_y \dfrac{\delta \varrho_\zeta'}{\delta t} \right)_p \mu_0' , \\[2ex] K_0' \mu_0' \left(\dfrac{\delta^2 \mathfrak{B}_\eta'}{\delta t^2} \right)_p = \Delta \mathfrak{B}_\eta' + \mu_0' \left(\dfrac{\partial \varrho_\xi'}{\partial \zeta} - \dfrac{\partial \varrho_\zeta'}{\partial \xi} \right) - K_0' \mu_0' \left(p_x \dfrac{\delta \varrho_\zeta'}{\delta t} - p_z \dfrac{\delta \varrho_\xi'}{\delta t} \right)_p \mu_0' , \\[2ex] K_0' \mu_0' \left(\dfrac{\delta^2 \mathfrak{B}_\zeta'}{\delta t^2} \right)_p = \Delta \mathfrak{B}_\zeta' + \mu_0' \left(\dfrac{\partial \varrho_\eta'}{\partial \xi} - \dfrac{\partial \varrho_\xi'}{\partial \eta} \right) - K_0' \mu_0' \left(p_y \dfrac{\delta \varrho_\xi'}{\delta t} - p_x \dfrac{\delta \varrho_\eta'}{\delta t} \right)_p \mu_0' . \end{cases}$$

Es ist bemerkenswert, daß ein solcher Satz von Gleichungen sich nur für $\mathfrak{B}'$ ableiten läßt, nicht für $\mathfrak{D}'$. Zwei wichtige Vorteile haben diese Gleichungen: 1. enthalten sie nicht mehr die Größe ϱ, sondern nur noch die Größen ϱ', welche den realtiven Geschwindigkeiten proportional sind, also mit diesen fortfallen. Dieser Vorteil kommt keinem der Systeme unter (9_2a, b) zu. 2. Sie lassen sich, wie noch gezeigt wird, durch die Lorentz-Transformation auf eine sehr einfache Form bringen, für die Lorentz auch allgemeine Lösungen gefunden hat. Wie es sich in dieser Hinsicht mit den Gleichungen (9_2a, b) verhält, werden wir noch sehen.

Wir verfolgen zunächst den ersten Vorteil. Mit $q = 0$ haben wir

$$K_0' \mu_0' \left(\frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{B}}'}{\partial t^2}\right)_p = \Delta \overline{\mathfrak{B}}'. \tag{13}$$

Hieraus folgt, daß, wenn auch nicht für die Störungen $\overline{\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ selbst, doch wenigstens für ihre Kombination in $\mathfrak{B}'$ die Verbreitung in ebenen Wellen möglich ist. Die Hauptrolle fällt dabei der magnetischen Störung zu, die elektrische kommt nur als eine Art, infolge der Bewegung, jene Störung beeinflussendes Element in Betracht. Allein die Gleichung (13) gilt dann auch für $\mathfrak{B}_p$ selbst. Dies tritt hervor, wenn man die Gleichungen (9_2a) mit p_x, p_y, p_z multipliziert und addiert, sie geben für unseren Fall mit

$$p_x \mathfrak{B}_\xi + p_y \mathfrak{B}_\eta + p_z \overline{\mathfrak{B}}_\zeta = p\, \mathfrak{B}_p \tag{14}$$

die Formel

$$K_0' \mu_0' \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}_p}{\partial t^2}\right)_p = \Delta \mathfrak{B}_p\,, \tag{15}$$

eine Gleichung, die auch aus den Formeln (13) abzuleiten ist, denn multipliziert man die Definitionsgleichungen

$$\overline{\mathfrak{B}}' = \overline{\mathfrak{B}} - \mu_0' [p\, \overline{\mathfrak{D}}] \tag{16}$$

mit p_x, p_y, p_z und addiert, so folgt

$$p_x \mathfrak{B}_\xi' + p_y \overline{\mathfrak{B}}_\eta' + p_z \mathfrak{B}_\zeta' = p_x \mathfrak{B}_\xi + p_y \mathfrak{B}_\eta + p_z \mathfrak{B}_\zeta = p\, \mathfrak{B}_p\,. \tag{17}$$

Man hat also nur entsprechend mit den Gleichungen (13) zu verfahren, um die Gleichung (15) für $\mathfrak{B}_p$ zu erhalten.

Diese Gleichungen (13) für relative Koordinaten entsprechen nun ganz den Undulationsgleichungen (mit $-p_x$, $-p_y$, $-p_z$ an Stelle von $+p_x$, $+p_y$, $+p_z$) und den Maxwell-Hertzschen Gleichungen für Isolatoren, beides für absolute Koordinaten. Alle früher erhaltenen Ergebnisse treffen also hier zu, wenn man $-p$ für $+p$ setzt, so daß auf sie nicht weiter eingegangen zu werden braucht.

Sie führen aber zu der Beziehung

$$c = c_0 - s$$

für die Verbreitungsgeschwindigkeit von $\mathfrak{B}'$ relativ zur Materie. Relativ zum Äther soll sein

$$c = c_0 - s + s = c_0\,.$$

Der Äther wird ja auch als ruhend angenommen.

Eine strenge Transversalität freilich ist für $\mathfrak{B}'$ nicht vorhanden. Man hat mit $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B}' = \mu_0' \operatorname{div} [\mathfrak{D}\, p] = \mu_0' \left(\underline{\overline{p \operatorname{curl} \mathfrak{D}}}\right), \tag{18_1}$$

letzteres nach (q) auf S. 121, somit nach (1_1b)

$$\operatorname{div} \mathfrak{B}' = - K_0' \mu_0' \left(\underline{\overline{p \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right)_p}}\right). \tag{18_2}$$

Soll die linksstehende Größe Null, die Welle transversal sein, so dürfte $\overline{\mathfrak{B}}$ total nicht nach der Zeit variieren. Übrigens hat man auch, weil

$$\left(\overline{p[p\,\mathfrak{D}]}\right) = 0$$

ist, aus (18_2)

$$(18_3) \qquad \operatorname{div} \overline{\mathfrak{B}}' = -K_0' \mu_0' \left(p \frac{\delta \overline{\mathfrak{B}}'}{\delta t} \right)_p ,$$

also mit

$$\overline{\mathfrak{B}}' = B' f\left(t - \frac{\alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta}{\lambda}\right),$$

$$\frac{1}{\lambda}(\alpha \overline{B}_\xi' + \beta \overline{B}_\eta' + \gamma \overline{B}_\zeta')$$

$$= K_0' \mu_0' \left(\frac{1}{T} (p_x \overline{B}_\xi' + p_y \overline{B}_\eta' + p_z \overline{B}_\zeta') + \frac{1}{\lambda} (p_x \overline{B}_\xi' + p_y \overline{B}_\eta' + p_z \overline{B}_\zeta') s \right)$$

oder mit

$$(19) \quad \alpha \overline{\mathfrak{B}}_\xi' + \beta \overline{\mathfrak{B}}_\eta' + \gamma \overline{\mathfrak{B}}_\zeta' = \overline{\mathfrak{B}}_s' \qquad (20) \quad p_x \overline{\mathfrak{B}}_\xi' + p_y \overline{\mathfrak{B}}_\eta' + p_z \overline{\mathfrak{B}}_\zeta' = p\, \overline{\mathfrak{B}}_p' ,$$

$$(21) \qquad \overline{\mathfrak{B}}_s' = \frac{p}{C_0^2}\left(\frac{\lambda}{T} + s\right) \overline{\mathfrak{B}}_p' .$$

Hiernach ist $\overline{\mathfrak{B}}_s'$ gleich Null und die Welle transversal nur für $\overline{\mathfrak{B}}_p' = 0$, d. h. wenn die Störung $\overline{\mathfrak{B}}'$ senkrecht zur Bewegungsrichtung von p erfolgt. Sonst findet lediglich angenäherte Transversalität statt. Wir schreiben nun die Gleichungen (12) in der Form, z. B. für die erste Gleichung

$$K_0 \mu_0 \left(\frac{\delta^2 \overline{\mathfrak{B}}'}{\delta t^2} \right)_p = C_0^2 \Delta \overline{\mathfrak{B}}' + C_0 \mu_0 \operatorname{curl} \varrho' + \frac{K_0 \mu_0}{C_0} \left(\frac{\delta}{\delta t} [p\, \varrho'] \right)_p \mu_0 .$$

Die Größe auf der linken Seite enthält außer $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ Glieder mit $p_x, \ldots$; $p_x p_y, \ldots$; $p_x^2, \ldots$, ebenso die letzte Größe auf der rechten Seite. Nun sagt H. A. Lorentz, daß, da in der Gleichung Glieder mit C_0 und C_0^2 enthalten seien, man solche, die nur mit den p oder mit den Produkten und Quadraten der p multipliziert sind, fortlassen dürfe. Indessen behält er doch von der letzten mit $\frac{1}{C_0}$ multiplizierten Größe auf der rechten Seite der Gleichung den ersten Teil $\frac{\partial}{\partial t}[p\,\varrho']$ bei[1]) und schreibt demgemäß allgemein

$$(22) \qquad K_0' \mu_0' \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{B}}'}{\partial t^2} = \Delta \overline{\mathfrak{B}}' + \mu_0' \operatorname{curl} \varrho' + K_0' \mu_0' \frac{\partial}{\partial t} [p\, \varrho'] \mu_0' .$$

Hierauf die Lorentz-Transformation für Äther-Ortszeit angewendet, gibt nach S. 125 f. unter Fortlassung von Größen zweiter Ordnung

$$K_0' \mu_0' \left(\frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{B}}'}{\partial t^2} \right)' = (\Delta \overline{\mathfrak{B}}')' + \mu_0' (\operatorname{curl} \varrho')' - \mu_0' \frac{\partial}{\partial \tau'} \left[\frac{p}{C_0^2} \varrho' \right] + K_0' \mu_0' \frac{\partial}{\partial \tau'} [p\, \varrho'] \mu_0' ,$$

---

[1]) Man muß dann annehmen, daß Glieder mit $\frac{\partial}{\partial t}$ sehr groß sind gegen solche mit $p \frac{\partial}{\partial \xi}, \ldots$

und da $K_0' \mu_0' = \frac{1}{C_0^2}$ ist, bekommt man

$$K_0' \mu_0' \left(\frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{B}}'}{\partial t^2} \right)' = (\Delta \overline{\mathfrak{B}}')' + \mu_0' (\operatorname{curl} \varrho')' \tag{23}$$

als einfache Form bei Messung nach Äther-Ortszeit und unter der angewendeten Rechnungsweise. Für diese Gleichungen gibt H. A. Lorentz folgende allgemeine Lösungen (zweite Schrift S. 50f.). Man ermittelt drei Funktionen $\overline{\Psi}_\xi$, $\overline{\Psi}_\eta$, $\overline{\Psi}_\zeta$, welche den drei Gleichungen genügen

$$K_0' \mu_0' \left(\frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial t^2} \right)' = (\Delta \overline{\Psi})' + \mu_0' \varrho' \,. \tag{24}$$

Alsdann ist

$$\overline{\mathfrak{B}}' = (\operatorname{curl} \overline{\Psi})' \,. \tag{25}$$

In der Tat hat man aus (24) z. B. auch

$$K_0' \mu_0' \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \overline{\Psi}_\zeta}{\partial \eta} \right) \right\}' = \left\{ \Delta \left(\frac{\partial \overline{\Psi}_\zeta}{\partial \eta} \right) \right\}' + \mu_0' \left(\frac{\partial \varrho'}{\partial \eta} \right)' ,$$

$$K_0' \mu_0' \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \overline{\Psi}_\eta}{\partial \zeta} \right) \right\}' = \left\{ \Delta \left(\frac{\partial \overline{\Psi}_\eta}{\partial \zeta} \right) \right\}' + \mu_0' \left(\frac{\partial \varrho'}{\partial \zeta} \right)' .$$

Die Differenz gibt

$$K_0' \mu_0' \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{curl}_\xi \overline{\Psi} \right)' = (\Delta \operatorname{curl}_\xi \overline{\Psi})' + \mu_0' (\operatorname{curl}_\xi (\varrho'))' ,$$

woraus durch Vergleichung mit (23) der Wert (25) von $\overline{\mathfrak{B}}'$ folgt. Die Funktionen $\overline{\Psi}$ aber findet H. A. Lorentz aus den Gleichungen

$$\overline{\Psi}_\pi = -\iiint \frac{1}{r} f_\pi \left(\xi^*,\ \eta^*,\ \zeta^*;\ \tau' - \frac{r}{C_0} \right) d\xi^*\, d\eta^*\, d\zeta^* , \qquad \pi = \xi, \eta, \zeta \,. \tag{26}$$

Hierin bedeuten ξ^*, η^*, ζ^* Koordinaten aller Punkte des Raumes, innerhalb dessen $q\varrho$ einen von Null verschiedenen Wert hat, r den Abstand des Punktes ξ, η, ζ, für den die Funktionen gesucht werden, von den Punkten ξ^*, η^*, ζ^* dieses Raumes und f_π die Werte der Größen $q_\pi \varrho$ an der Stelle ξ^*, η^*, ζ^* zur Zeit τ', also

$$q_\pi \varrho = f_\pi (\xi^*,\ \eta^*,\ \zeta^*;\ \tau') , \quad \pi = \xi, \eta, \zeta \,. \tag{27}$$

Für die Ermittelung der $\overline{\Psi}$ kommt nicht der Wert zur Zeit τ', sondern an jeder Stelle des Raumes zu einer dort um $\frac{r}{C_0}$ zurückliegenden Zeit $\tau' - \frac{r}{C_0}$ in Frage.

Ist so $\overline{\mathfrak{B}}'$ bestimmt, so gibt die Gleichung (1_3a) die Größe $\overline{\mathfrak{D}}$, aus der Definitionsgleichung (3″b) für $\overline{\mathfrak{B}}'$ (S. 215) folgt dann $\overline{\mathfrak{B}}$ und die Gleichungen (3a, b) geben $\overline{\mathfrak{E}}^\times$ und $\overline{\mathfrak{H}}^\times$. Das von H. A. Lorentz behandelte Beispiel, die Verbreitung der Störungen durch die Schwingungen eines Ion, muß kurz skizziert werden, da die Möglichkeit üblicher Kugelwellen bewiesen wird. Die Abmessungen des Ion sollen klein sein gegen die Wellenlänge und gegen den Abstand r von der Stelle, in der die Störung zu bestimmen ist, so daß in letzterer Hinsicht das Ion wie ein Punkt behandelt werden darf. Es ist dann

$$\overline{\Psi}_\pi = -\frac{1}{r} \iiint q_\pi \varrho\, d\xi^*\, d\eta^*\, d\zeta^* = -\frac{1}{r} q_\pi e \,, \qquad \pi = \xi, \eta, \zeta \,, \tag{28_1}$$

wo e die Ladung des Ion bedeutet. Stellen u_ξ, u_η, u_ζ die Komponenten der Verrückung des Ion dar, so wird

$$\Psi'_\pi = -\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(u_\pi e)\,, \tag{28$_2$}$$

da die Ladung als unveränderlich angesehen wird.

Die Verrückungen u_π sollen gegen r sehr gering sein, dann darf unter Fortlassung von Größen zweiter Ordnung $\frac{d}{dt}$ durch $\frac{\partial}{\partial t}$ und dieses durch $\frac{\partial}{\partial \tau'}$ ersetzt, und ferner darf r als nach τ' konstant behandelt werden. So erhält man

$$\Psi'_\pi = -\frac{\partial}{\partial \tau'}\frac{u_\pi e}{r} = -\frac{\partial \frac{\mathfrak{m}_\pi}{r}}{\partial \tau'}\,, \tag{28$_3$}$$

wo

$$\mathfrak{m}_\pi = u_\pi e \tag{29}$$

von **Lorentz** als elektrisches Moment des Ion bezeichnet wird. Die Größe $\mathfrak{m}_\pi$ ist dabei zur Zeit $\tau' - \frac{r}{C_0}$ zu nehmen. Hiernach haben wir nach (25) absolut

$$\mathfrak{B}' = \left(\operatorname{curl}\frac{\partial \frac{\mathfrak{m}}{r}}{\partial \tau'}\right)' = \frac{\partial}{\partial \tau'}\left(\operatorname{curl}\frac{\mathfrak{m}}{r}\right)'\,. \tag{30}$$

Die Umgebung des Ion soll ein Dielektrikum sein, so daß dort $\varrho = 0$ ist. Nach Gleichung (1_3a) wird dann

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0'}\operatorname{curl}\mathfrak{B}'\,, \tag{31$_1$}$$

also nach Ausführung der **Lorentz**-Transformation gemäß (c″) und (m″) (S. 125f.)

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \tau'} = \frac{1}{\mu_0'}(\operatorname{curl}\mathfrak{B}')' - \frac{1}{\mu_0'}\frac{\partial}{\partial \tau'}\left[\frac{\mathfrak{p}}{C_0^2}\mathfrak{B}'\right] \tag{31$_2$}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial \tau'}\left(\mu_0' C_0^2 \mathfrak{D} + [\mathfrak{p}\,\mathfrak{B}']\right) = C_0^2(\operatorname{curl}\mathfrak{B}')' = C_0^2 \frac{\partial}{\partial \tau'}\left(\operatorname{curl}\operatorname{curl}\frac{\mathfrak{m}}{r}\right)', \tag{31$_3$}$$

also unter Fortlassung von Größen, die nicht von τ' abhängen, nunmehr nach (t) (S. 121)

$$\mu_0' C_0^2 \mathfrak{D} + [\mathfrak{p}\,\mathfrak{B}'] = C_0^2\left(\operatorname{curl}\operatorname{curl}\frac{\mathfrak{m}}{r}\right)' = C_0^2\left\{\nabla\left(\operatorname{div}\frac{\mathfrak{m}}{r}\right) - \Delta\frac{\mathfrak{m}}{r}\right\}', \tag{32}$$

so daß wird

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{\mu_0' C_0^2}\left\{C_0^2\left(\nabla\left(\operatorname{div}\frac{\mathfrak{m}}{r}\right) - \Delta\frac{\mathfrak{m}}{r}\right) - \left(\mathfrak{p}\frac{\partial}{\partial \tau'}\left(\operatorname{curl}\frac{\mathfrak{m}}{r}\right)\right)\right\}'. \tag{33}$$

alle Größen rechts für die Zeit $\tau' - \frac{r}{C_0}$ genommen.

Das Ion möge einfache stehende Schwingungen vollführen, so daß

(34) $$\mathfrak{m}_\pi = m_\pi \sin 2\pi \left(\frac{\tau'}{T'} + \delta_\pi\right)$$

ist. Für die Berechnung der gesuchten Größen ist τ' zu ersetzen durch $\tau' - \frac{r}{C_0}$. Wir schreiben darum

$$\mathfrak{m}_\pi = m_\pi \sin \frac{2\pi}{T'}\left(\tau' - \frac{r}{C_0} + \varepsilon_\pi\right).$$

Hiernach bestimmen sich die $\overline{\mathfrak{B}}'_\pi$ aus $\frac{2\pi}{T'} m_\pi \cos \frac{2\pi}{T'}\left(\tau' - \frac{r}{C_0} + \varepsilon\right)$ genau wie die Verschiebungskomponenten von gewöhnlichen Kugelwellen (S. 50), und unter den üblichen Vernachlässigungen werden sie, wenn die Koordinaten von der Schwingungsmitte des leuchtenden Ion ausgehen

(35) $$\overline{\mathfrak{B}}'_\xi = -\frac{2\pi}{C_0 T' r^2}\left\{m_\zeta \eta \sin \frac{2\pi}{T'}\left(\tau' - \frac{r}{C_0} + \varepsilon_3\right) - m_\eta \zeta \sin \frac{2\pi}{T'}\left(\tau' - \frac{r}{C_0} + \varepsilon_2\right)\right\}$$

und entsprechend $\overline{\mathfrak{B}}'_\eta$, $\overline{\mathfrak{B}}'_\zeta$. Also folgt, daß jedenfalls alle Größen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ sich in der Form darstellen

(36) $$A_1 \sin \frac{2\pi}{T'}\left(\tau' - \frac{r}{C_0} + \varepsilon_1\right) + A_2 \sin \frac{2\pi}{T'}\left(\tau' - \frac{r}{C_0} + \varepsilon_2\right) + A_3 \sin \frac{2\pi}{T'}\left(\tau' - \frac{r}{C_0} + \varepsilon_3\right),$$

wo die A_1, A_2, A_3 noch von den ξ, η, ζ; r, p abhängen, und namentlich umgekehrt proportional r^2 sind. Indem nun

$$r = \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta$$

gesetzt und für τ' sein Wert nach (a_2''') (S. 125) eingeführt wird, gehen die trigonometrischen Funktionen über in

(37) $$\sin \frac{2\pi}{T'}\left\{t - \left(\frac{\alpha'}{C_0} + \frac{p_x}{C_0^2}\right)\xi - \left(\frac{\beta'}{C_0} + \frac{p_y}{C_0^2}\right)\eta - \left(\frac{\gamma'}{C_0} + \frac{p_z}{C_0^2}\right) + \varepsilon\right\},$$

wo an sich die α', β', γ' von der Richtung von r abhängen, da sie deren Richtungskosinus sind. Ist r sehr groß, so sind die α', β', γ' wie Konstanten anzusehen; wir haben es dann mit ebenen Wellen zu tun und die Rechnungen entsprechen ganz den S. **163** ff. ausgeführten.

Wir gehen zu dem allgemeinen Fall über, daß die Bewegungen und die Verbreitung der Störungen innerhalb ponderabler Substanz stattfinden.

Auf relative Koordinaten bezogen, haben wir als Grundgleichungen

(38a) $$\operatorname{div} \mathfrak{D}^\times = \varrho\,,$$

(38b) $$\operatorname{div} \mathfrak{B}^\times = 0\,,$$

(39a) $$+\frac{C_0}{4\pi} \operatorname{curl} \overline{\mathfrak{H}}' = \frac{\partial \mathfrak{D}^\times}{\partial t} + q \operatorname{div} \mathfrak{D}^\times + \operatorname{curl}\left[\mathfrak{D}^\times q\right] + J\,,$$

(39b) $$-\frac{C_0}{4\pi} \operatorname{curl} \overline{\mathfrak{E}}^\times = \frac{\partial \mathfrak{B}^\times}{\partial t} + \operatorname{curl}\left[\mathfrak{B}^\times q\right];$$

q ist der relative Teil der Bewegung der Materie, der Index m ist fortgelassen. Außerdem ist

(40a) $$\overline{\mathfrak{E}}^{\times} = \overline{\mathfrak{E}} + \frac{4\pi}{C_0}[g\,\overline{\mathfrak{B}}^{\times}]\,,$$

(40b) $$\overline{\mathfrak{H}}' = \overline{\mathfrak{H}}^{\times} - \frac{K_0}{C_0}[g\,\overline{\mathfrak{E}}]\,;$$

(40′a) $$4\pi\,\overline{\mathfrak{B}} = \mu_0\,\overline{\mathfrak{H}}\,,$$

(40′b) $$4\pi\,\overline{\mathfrak{D}} = K_0\,\overline{\mathfrak{E}}\,;$$

(41a) $$4\pi\,\overline{\mathfrak{D}}^{\times} = K\overline{\mathfrak{E}} + \frac{4\pi(K-K_0)}{C_0}[g\,\overline{\mathfrak{B}}^{\times}] = K\,\overline{\mathfrak{E}}^{\times} - \frac{4\pi K_0}{C_0}[g\,\overline{\mathfrak{B}}^{\times}]\,.$$

(41b) $$4\pi\,\overline{\mathfrak{B}}^{\times} = \mu\,\overline{\mathfrak{H}}^{\times}\,.$$

Da die Elektronen an die Materie gebunden sind und in J ihre innere Bewegung schon Berücksichtigung gefunden hat, nehmen wir g als Bewegung der Materie als Ganzes und betrachten den Fall, daß diese Bewegung als gleichförmige verläuft. Ferner sollen Dielektrika in Betracht kommen, in denen $J = 0$ anzusetzen ist. Alsdann haben wir

(42a) $$\operatorname{div}\overline{\mathfrak{D}}^{\times} = 0\,,$$

(42b) $$\operatorname{div}\overline{\mathfrak{B}}^{\times} = 0\,;$$

(43a) $$+\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\overline{\mathfrak{H}}' = \frac{\partial\,\overline{\mathfrak{D}}^{\times}}{\partial t}\,,$$

(43b) $$-\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\overline{\mathfrak{E}}^{\times} = \frac{\partial\,\overline{\mathfrak{B}}^{\times}}{\partial t}\,;$$

(44a) $$\overline{\mathfrak{E}}^{\times} = \overline{\mathfrak{E}} + \frac{4\pi}{C_0}[p\,\overline{\mathfrak{B}}^{\times}] = \overline{\mathfrak{E}} + \frac{\mu}{C_0}[p\,\overline{\mathfrak{H}}^{\times}]\,,$$

(44b) $$\overline{\mathfrak{H}}' = \overline{\mathfrak{H}}^{\times} - \frac{K_0}{C_0}[p\,\overline{\mathfrak{E}}]\,;$$

(45a) $$4\pi\,\overline{\mathfrak{D}}^{\times} = K\overline{\mathfrak{E}} + \frac{4\pi(K-K_0)}{C_0}[p\,\overline{\mathfrak{B}}^{\times}] = K\overline{\mathfrak{E}} + \frac{(K-K_0)}{C_0}\mu[p\,\overline{\mathfrak{H}}^{\times}]\,,$$

(45b) $$4\pi\,\overline{\mathfrak{B}}^{\times} = \mu\,\overline{\mathfrak{H}}^{\times}\,.$$

Wir transformieren auf Lorentz' Äther-Ortszeit τ'. Nach (o″) (S. 126) wird

$$\operatorname{div}\overline{\mathfrak{D}}^{\times} = (\operatorname{div}\overline{\mathfrak{D}}^{\times})' - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial}{\partial\tau'}\left(p_x\,\overline{\mathfrak{D}}_\xi^{\times} + p_y\,\overline{\mathfrak{D}}_\eta^{\times} + p_z\,\overline{\mathfrak{D}}_\zeta^{\times}\right).$$

Es ist aber nach (c″) (S. 125) zugleich $\dfrac{\partial}{\partial\tau'} = \dfrac{\partial}{\partial t}$, somit nach (43a)

$$\operatorname{div}\overline{\mathfrak{D}}^{\times} = (\operatorname{div}\overline{\mathfrak{D}}^{\times})' - \frac{1}{4\pi C_0}\left(\overline{p\operatorname{curl}\mathfrak{H}'}\right)'.$$

Nun ist

$$\left(\overline{p\operatorname{curl}\mathfrak{H}'}\right) = p_x\left(\frac{\partial\,\overline{\mathfrak{H}}_\zeta'}{\partial\eta} - \frac{\partial\,\overline{\mathfrak{H}}_\eta'}{\partial\zeta}\right) + p_y\left(\frac{\partial\,\overline{\mathfrak{H}}_\xi'}{\partial\zeta} - \frac{\partial\,\overline{\mathfrak{H}}_\zeta'}{\partial\xi}\right) + p_z\left(\frac{\partial\,\overline{\mathfrak{H}}_\eta'}{\partial\xi} - \frac{\partial\,\overline{\mathfrak{H}}_\xi'}{\partial\eta}\right)$$

in anderer Anordnung auch [vgl. auch (q) (S. 121)]

$$\left(\overline{p \operatorname{curl} \overline{\mathfrak{H}}'}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial \xi}(p_y \overline{\mathfrak{H}}_\zeta' - p_z \overline{\mathfrak{H}}_\eta') + \frac{\partial}{\partial \eta}(p_z \overline{\mathfrak{H}}_\xi' - p_x \overline{\mathfrak{H}}_\zeta') + \frac{\partial}{\partial \zeta}(p_x \overline{\mathfrak{H}}_\eta' - p_y \overline{\mathfrak{H}}_\xi')\right)$$
$$= -\operatorname{div}[p \overline{\mathfrak{H}}'] .$$

Setzen wir also

(46₁a) $$\overline{\mathfrak{D}}^\times + \frac{1}{4\pi C_0}[p \overline{\mathfrak{H}}'] = \overline{\mathfrak{D}}^* ,$$

so wird wegen (42a)

(42′a) $$(\operatorname{div} \overline{\mathfrak{D}}^*)' = 0 .$$

Gleicherweise haben wir mit

(46₁b) $$\overline{\mathfrak{B}}^\times - \frac{1}{4\pi C_0}[p \overline{\mathfrak{E}}^\times] = \overline{\mathfrak{B}}^*$$

die Beziehung

(42′b) $$(\operatorname{div} \overline{\mathfrak{B}}^*)' = 0 .$$

Transformieren wir entsprechend die Gleichungen (43a, b), so geben sie zunächst nach (c″) und (m″) (S. 125f.)

(43′₁a) $$+\frac{C_0}{4\pi}(\operatorname{curl} \overline{\mathfrak{H}}')' = \frac{\partial \overline{\mathfrak{D}}^\times}{\partial \tau'} + \frac{1}{4\pi C_0} \frac{\partial}{\partial \tau'}[p \overline{\mathfrak{H}}'] ,$$

(43′₁b) $$-\frac{C_0}{4\pi}(\operatorname{curl} \overline{\mathfrak{E}}^\times)' = \frac{\partial \overline{\mathfrak{B}}^\times}{\partial \tau'} - \frac{1}{4\pi C_0} \frac{\partial}{\partial \tau'}[p \overline{\mathfrak{E}}^\times] .$$

Also bekommen wir nach (46a, b)

(43′₂a) $$+\frac{C_0}{4\pi}(\operatorname{curl} \overline{\mathfrak{H}}')' = \frac{\partial \overline{\mathfrak{D}}^*}{\partial \tau'} ,$$

(43′₂b) $$-\frac{C_0}{4\pi}(\operatorname{curl} \overline{\mathfrak{E}}^\times)' = \frac{\partial \overline{\mathfrak{B}}^*}{\partial \tau'} .$$

Es treten hiernach im neuen Zeitsystem die Größen $\overline{\mathfrak{D}}^*$, $\overline{\mathfrak{B}}^*$ in jeder Hinsicht an die Stelle der Größen $\overline{\mathfrak{D}}^\times$, $\overline{\mathfrak{B}}^\times$. Nun können wir aber bis auf Größen zweiter Ordnung auch schreiben

(46₂b) $$\overline{\mathfrak{B}}^* = \overline{\mathfrak{B}}^\times - \frac{1}{4\pi C_0}[p \overline{\mathfrak{E}}] ,$$

und weil in Dielektrizis $\mu = 1$ angesetzt werden darf, hiernach weiter

(46₃b) $$4\pi \overline{\mathfrak{B}}^* = \mu \overline{\mathfrak{H}}' .$$

Aus entsprechenden Gründen folgt aus (46₁a) mit hinreichender Annäherung

(46₂a) $$\overline{\mathfrak{D}}^* = \overline{\mathfrak{D}}^\times + \frac{1}{4\pi C_0}[p \overline{\mathfrak{H}}] = \overline{\mathfrak{D}}^{\times\times} ,$$

letzteres nach (K) (S. 209), und wegen (J), (S. 209)

(46₃a) $$\overline{\mathfrak{D}}^* = K \overline{\mathfrak{E}}^\times .$$

Hiernach bekommen wir

(43$_3'$a) $$+C_0(\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{H}}')' = K\,\frac{\partial\,\bar{\mathfrak{E}}^\times}{\partial\,\tau'}\,,$$

(43$_3'$b) $$-C_0(\operatorname{curl}\bar{\mathfrak{E}}^\times)' = \mu\,\frac{\partial\,\bar{\mathfrak{H}}'}{\partial\,\tau'}\,.$$

Und da zugleich in demselben Grade der Annäherung

(42''a) $$(\operatorname{div}\bar{\mathfrak{D}}^{\times\times})' = 0\,,$$

(42''b) $$(\operatorname{div}\mathfrak{B}^\times)' = 0$$

und

(47a) $$4\,\pi\,\bar{\mathfrak{D}}^{\times\times} = K\,\bar{\mathfrak{E}}^\times\,,$$

(47b) $$4\,\pi\,\mathfrak{B}^* = \mu\,\bar{\mathfrak{H}}'\,,$$

also auch

(42'''a) $$(\operatorname{div}\bar{\mathfrak{E}}^\times)' = 0\,,$$

(42'''b) $$(\operatorname{div}\bar{\mathfrak{H}}')' = 0$$

ist, so besteht vollständige Übereinstimmung mit den Maxwellschen Gleichungen für den Ruhezustand, nur daß die Zeit nach der Äther-Ortszeit τ' gerechnet ist, statt nach der absoluten Zeit. Sind $\bar{\mathfrak{E}}^\times$, $\bar{\mathfrak{H}}'$ und damit $\mathfrak{B}^*$, $\bar{\mathfrak{D}}^{\times\times}$ aus einem Problem für den Ruhestand nach Maxwells Theorie bestimmt, so geben die Gleichungen (40a, b) die Größe $\bar{\mathfrak{E}}$ und $\bar{\mathfrak{H}}^\times$ und aus (46$_2$b), (41a, b) folgen dann die Größen $\mathfrak{D}^\times$, $\mathfrak{B}^\times$. Insgesamt zieht nun H. A. Lorentz folgende Schlüsse:

1. Jedem Schwingungszustand $\bar{\mathfrak{E}}^\times$ und $\bar{\mathfrak{H}}'$, berechnet nach Maxwells Formeln für ein ruhendes System, entspricht ein Schwingungszustand $\bar{\mathfrak{E}}^\times$, $\bar{\mathfrak{H}}^\times$ im gleichmäßig bewegten System mit derselben Schwingungsdauer innerhalb der Äther-Ortszeit τ'. Diese Schwingungsdauer nennen wir die relative.

2. Sind $\bar{\mathfrak{D}}^{\times\times}$, $\bar{\mathfrak{H}}'$ gleich Null, so folgt aus (J) auch $\bar{\mathfrak{E}}^\times = 0$, aus (43a, b) und (44a, b) auch $\bar{\mathfrak{H}}^\times = 0$ und $\bar{\mathfrak{E}} = 0$, zuletzt aus (45a, b) $\mathfrak{D}^\times = 0$ und $\mathfrak{B}^\times = 0$, d. h. Fortbewegung für sich bringt keine Lichterscheinung hervor. Schließt eine Fläche im ruhenden System ein Lichtbündel aus, so kann sie es auch im bewegten tun, wobei sie sich nach Maßgabe der Transformation ändert. Jedem „absoluten Lichtbündel" entspricht so ein „relatives Lichtbündel".

3. In einem bewegten System werden relative Strahlen nach den gleichen Gesetzen gespiegelt und gebrochen wie absloute Strahlen von der gleichen Schwingungsdauer im ruhenden System.

Zu diesen drei Sätzen ist dann folgende analytische Erläuterung gegeben, die ich mit den mir erforderlich erscheinenden Änderungen wiederhole. Wir nehmen für ein ruhendes System an

$$\bar{\mathfrak{E}}_\pi = \bar{E}_\pi \sin\Psi\,, \qquad \bar{\mathfrak{H}}_\pi = \bar{H}_\pi \sin\Psi\,; \qquad \pi = \xi,\ \eta,\ \zeta$$

mit

$$\Psi = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\alpha\,\xi + \beta\,\eta + \gamma\,\zeta}{c_0} + \varepsilon\right).$$

Hiernach bekommen wir $\bar{\mathfrak{E}}^\times$, $\bar{\mathfrak{H}}'$, wenn wir t ersetzen durch τ' und entsprechend die Buchstaben akzentuieren. Also wird

$$\Psi = \frac{2\pi}{T'}\left(\tau' - \frac{\alpha'\,\xi + \beta'\,\eta + \gamma'\,\zeta}{c_0'} + \varepsilon\right).$$

α', β', γ' geben die Richtungskosinus der Strahlen an, welche hier mit denen der Wellennormale zusammenfallen. Und dieser Wert von Ψ gilt auch für die andern Größen. Da aus den Gleichungen (43$_3'$a, b) für die Verbreitungsgeschwindigkeit sich ergibt

$$c_0' = \frac{C_0}{\sqrt{\mu K}}$$

und diese Gleichung unabhängig von irgendeiner Bewegung besteht, sondern einfach dem Maxwellschen Gesetz entspricht, so ist $c_0' = c_0$, indessen behalten wir noch die Bezeichnung c_0' bei.

Ersetzen wir nur τ' durch seinen Wert, so geht Ψ über in

$$(48_1)\qquad \Psi = \frac{2\pi}{T'}\left(t - \frac{\left(\alpha' + \frac{c_0'}{C_0^2}p_x\right)\xi + \left(\beta' + \frac{c_0'}{C_0^2}p_y\right)\eta + \left(\gamma' + \frac{c_0'}{C_0^2}p_z\right)\zeta}{c_0'}\right).$$

Also werden die Richtungskosinus der Wellennormale bei absoluter Zeitmessung t

$$(49)\qquad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{N}\left(\alpha' + \frac{c_0'}{C_0^2}p_x\right), \qquad \beta = \frac{1}{N}\left(\beta' + \frac{c_0'}{C_0^2}p_y\right), \\ \gamma = \frac{1}{N}\left(\gamma' + \frac{c_0'}{C_0^2}p_z\right), \end{cases}$$

woselbst ist

$$(50)\qquad \begin{cases} N^2 = \left(\alpha' + \frac{c_0'}{C_0^2}p_x\right)^2 + \left(\beta' + \frac{c_0'}{C_0^2}p_y\right)^2 + \left(\gamma' + \frac{c_0'}{C_0^2}p_z\right)^2 \\ \quad = 1 + 2\frac{c_0'}{C_0^2}s' + \frac{c_0'^2}{C_0^4}p^2. \end{cases}$$

Wir haben hiernach

$$(48_2)\qquad \Psi = \frac{2\pi}{T'}\left(t - \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta}{\frac{c_0'}{N}}\right),$$

und wenn wir die Verbreitungsgeschwindigkeit im Zeitsystem t für einen mit der Substanz fortschreitenden Beobachter c_b nennen

$$(51_1)\qquad c_b = \frac{c_0'}{N} = \frac{c_0'}{\sqrt{1 + \frac{2c_0'}{C_0^2}s' + \frac{c_0'^2}{C_0^4}p^2}}.$$

Die Multiplikation der Gleichungen (49) mit p_x, p_y, p_z und Addition ergibt

$$N s = s\frac{c_0'}{c_b} = s' + \frac{c_0'}{C_0^2}p^2,$$

also

$$(52)\qquad s' = s\frac{c_0'}{c_b} - \frac{c_0'}{C_0^2}p^2.$$

so daß (51_1) übergeht in

$$(51_2)\quad \begin{cases} c_b^2\left(1 + 2s\dfrac{c_0'}{C_0^2}\dfrac{c_0'}{c_b} - \dfrac{c_0'^2}{C_0^4}p^2\right) = c_0'^2, \\ \text{d. h.}\quad c_b^2\left(1 - \dfrac{c_0'^2}{C_0^4}p^2\right) + 2s\dfrac{c_0'^2}{C_0^2}c_b = c_0'^2, \end{cases}$$

also

$$(51_3)\quad c_b = \frac{c_0'}{\left(1 - \dfrac{c_0'^2}{C_0^4}p^2\right)}\left(\sqrt{1 - \frac{c_0'^2}{C_0^4}(p^2 - s^2)} - \frac{c_0'}{C_0^2}s\right).$$

Lassen wir Größen zweiter Ordnung fort, so geht der Ausdruck über in

$$(53)\quad c_b = c_0' - \left(\frac{c_0'}{C_0}\right)^2 s$$

und gibt die Verbreitungsgeschwindigkeit relativ zu der sich bewegenden Materie. Der Ausdruck enthält so das Fresnelsche Gesetz für einen Beobachter, der mit der Substanz fortschreitet. Und in der Form

$$(54)\quad c_r = c_0' + \left\{1 - \left(\frac{c_0'}{C_0}\right)^2\right\}s,$$

wobei c_r die Verbreitungsgeschwindigkeit relativ zum ruhenden Äther darstellen soll, für einen Beobachter, der in bezug auf die fortschreitende Substanz ruht. Das gilt also, wenn Größen zweiter Ordnung vernachlässigt werden.

Setzen wir $c = \dfrac{\lambda}{T}$ und betrachten mit H. A. Lorentz λ als für absolute Zeit und Ortszeit gleich, so wäre

$$(55)\quad \frac{1}{T} = \frac{1}{T_0}\frac{c_b}{c_0'} = \frac{1}{T_0}\frac{c_0' - \left(\dfrac{c_0'}{C_0}\right)^2 s}{c_0'},$$

für einen mit der Substanz fortgeführten Beobachter. Darin wird der Ausdruck des Dopplerschen Prinzips gesehen, da für freien Äther $c_0' = C_0$ ist. Für einen gegen die Substanz ruhenden Beobachter ist

$$(56)\quad \frac{1}{T} = \frac{1}{T_0}\frac{c_r}{c_0'} = \frac{1}{T_0}\frac{c_0' + \left(1 - \dfrac{c_0'^2}{C_0^2}\right)s}{c_0'} = \frac{1}{T_0}\left(\frac{c_b + s}{c_0'}\right).$$

s ist positiv, wenn die Lichtvertreibung der Bewegung folgt, und negativ, wenn sie dieser entgegen geschieht. Da c_0' die Verbreitungsgeschwindigkeit gibt in ruhender Substanz, so gehören c_0' und T_0 zusammen. Hiernach wäre für den ruhenden Beobachter

$$(57)\quad T_0 = T\frac{c_b}{c_0'}\left(1 + \frac{s}{c_b}\right).$$

Beachtet man, daß bis auf Größen zweiter Ordnung $\dfrac{c_b}{c_0'}$ durch 1 und $\dfrac{s}{c_b}$ durch $\dfrac{s}{c_0'}$ ersetzt werden, so kommt

$$(58)\quad T_0 = T\left(1 + \frac{s}{c_0'}\right).$$

Lorentz nimmt c_0' nicht gleich c_0, wie man zunächst zu tun geneigt wäre, sondern berechnet es in folgender Weise. Ist der Brechungsexponent für die Periode T gleich n, so wird der für T_0 nach (58) gleich

$$n' = n + \frac{s}{c_0'} T \frac{dn}{dT}.$$

Demnach bekommt man

$$(59) \qquad c_0' = \frac{C_0}{n + \frac{s}{c_0'} T \frac{dn}{dT}} = \frac{C_0}{n} - \frac{s}{n^2} \frac{C_0}{c_0'} T \frac{dn}{dT} = \frac{C_0}{n} - \frac{s}{n} T \frac{dn}{dT},$$

letzteres, weil $\frac{C_0}{n}$ nahezu c_0' ist. So folgt aus (54)

$$(60) \qquad c_b = \frac{C_0}{n} - \frac{s}{n} T \frac{dn}{dT} - \frac{1}{C_0^2}\left(\frac{C_0}{n} - \frac{s}{n} T \frac{dn}{dT}\right)^2 s = \frac{C_0}{n} - \frac{s}{n^2} - \frac{s}{n} T \frac{dn}{dT}.$$

unter Fortlassung von Größen zweiter Ordnung und höherer Ordnung. Entsprechend ist

$$(61) \qquad c_r = \frac{C_0}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) s - \frac{s}{n} T \frac{dn}{dT} = \frac{C_0}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} T \frac{dn}{dT}\right) s.$$

Für den Faktor von s haben Michelson und Morley durch den Versuch 0,434 gefunden, entsprechend dem Werte, den $1 - \frac{1}{n^2}$ hat, der für das benutzte Licht der D-Linie 0,438 ergibt. Mit dem von ihm noch hinzugefügten Gliede $\frac{1}{n} T \frac{dn}{dT}$ ermittelt Lorentz 0,451, was sich also von dem aus der Beobachtung erzielten Werte weiter entfernt als der unter der Annahme, daß die Bewegung die Schwingungsdauer als solche nicht verändert, berechnete Betrag, eine Annahme, die ja hier immer vertreten wird[1]).

Kehren wir zu den Formeln (49), (50) zurück. Die Multiplikation mit α', β', γ' ergibt

$$(62_1) \qquad \cos(S, S') = \frac{1}{N}\left(1 + \frac{c_0'}{C_0^2} s'\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2c_0'}{C_0^2} s' + \frac{c_0'^2}{C_0^4} p^2}}\left(1 + \frac{c_0'}{C_0^2} s'\right),$$

d. h.

$$(62_2) \qquad \cos(S, S') = \left(1 + \frac{c_0'}{C_0^2} s'\right)\left(1 - \frac{c_0'}{C_0^2} s' - \frac{1}{2} \frac{c_0'^2}{C_0^4} p^2 + \frac{3}{2} \frac{c_0'^2}{C_0^4} s'^2 + \ldots\right),$$

also unter Fortlassung von Gliedern dritter Ordnung

$$(62_3) \qquad \cos(S, S') = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c_0'}{C_0}\right)^2\left(p^2 - \frac{s'^2}{C_0^2}\right).$$

---

[1]) Indessen weiß ich nicht, ob diese Berechnungsweise von Lorentz wirklich zutrifft, denn aus den Grundgleichungen kann man nur schließen, daß $c_0' = c_0$ ist (man vergleiche die ganz entsprechenden Berechnungen S. 163 f.), so daß das entscheidende Glied $\frac{1}{n} T \frac{dn}{dT} s$ hiernach in der Tat entfallen sollte.

Der Strahl weicht also von der Normalen ab um $\frac{c_0'}{C_0}\sqrt{\frac{p^2 - s'^2}{C_0^2}}$. Die Größe s' ermitteln wir durch Multiplikation der Gleichungen (49) mit p_x, p_y, p_z und Addition, es folgt dann

$$(63_1) \qquad s N = s' + \frac{c_0'}{C_0^2} p^2,$$

also

$$(63_2) \qquad s'^2 + 2 s' \frac{c_0'}{C_0^2}(p^2 - s^2) = s^2 - \frac{c_0'^2}{C_0^4} p^2 (p^2 - s^2)$$

und

$$(63_3) \qquad s' = s\sqrt{1 - \frac{c_0'^2}{C_0^4}(p^2 - s^2)} - c_0' \frac{p^2 - s^2}{C_0^2} = s - c_0' \frac{p^2 - s^2}{C_0^2} = s - c_0 \frac{p^2 - s^2}{C_0^2},$$

letzteres unter Fortlassung von Größen höherer Ordnung. Hieraus ergibt sich

$$p^2 - s'^2 = p^2 - s^2 + 2 c_0 s \frac{p^2 - s^2}{C_0^2} = (p^2 - s^2)\left(1 + 2\frac{c_0 s}{C_0^2}\right).$$

Läßt man Größen zweiter Ordnung fort, so bleibt also nach (62_3)

$$(64_1) \qquad \sphericalangle(S, S') = \frac{c_0'}{C_0^2}\sqrt{p^2 - s^2} = \left(\frac{c_0'}{C_0}\right)^2 \sqrt{\frac{p^2 - s^2}{c_0'^2}} = \left(\frac{c_0}{C_0}\right)^2 \sqrt{\frac{p^2 - s^2}{c_0^2}}$$

als **Aberrationsgesetz**. In der Luft und für Sternenlicht ist $\frac{c_0}{C_0} = 1$, $s = 0$ und

$$(64_2) \qquad \sphericalangle(S, S') = \frac{p}{C_0}.$$

Es ist von großem Interesse, die Berechnungen mit den für die Maxwell-Hertzschen Gleichungen ausgeführten zusammenzuhalten (S. 166ff). Bei allen vorhandenen Unterschieden in den Ausgangsbeziehungen sind die Endergebnisse doch die gleichen, nur mit anderer Interpretation, auf die noch zurückgekommen wird.

Die Beziehungen zwischen den $\overline{\mathfrak{D}}^\times$ und $\overline{H}'$ entsprechen denen des Ruhezustandes, wofür die Formeln (25a, b) (S. 158) ein Muster bilden. Also verbreiten sich $\mathfrak{D}^\times$, $\mathfrak{H}'$ in transversalen Wellen mit α', β', γ' als Richtungskosinus ihrer Wellennormale, und stehen aufeinander senkrecht. Aus (47a) folgt, wenn wir die Amplitude von $\mathfrak{E}^\times$ gleich $E^\times$ ansetzen,

$$(65) \qquad E_\pi^\times = \frac{4\pi}{K}\mathfrak{D}_\pi^{\times\times}; \quad \pi = \xi, \eta, \zeta.$$

Hiernach haben wir zwischen den Amplituden $\overline{H}^\times$ von $\overline{\mathfrak{H}}^\times$ und $\overline{E}$ von $\overline{\mathfrak{E}}$ nach (44b)

$$(66) \qquad \left\{\begin{aligned} &\overline{H}_\xi^\times = H_\xi' + \frac{K_0}{C_0}(p_y \overline{E}_\zeta - p_z \overline{E}_\eta), \quad H_\eta^\times = H_\eta' + \frac{K_0}{C_0}(p_z \overline{E}_\xi - p_x \overline{E}_\zeta), \\ &H_\zeta^\times = H_\zeta' + \frac{K_0}{C_0}(p_x E_\eta - p_y E_\xi). \end{aligned}\right.$$

Entsprechend ist nach (44a)

$$(67) \qquad \left\{\begin{aligned} &\overline{E}_\xi = \overline{E}_\xi^\times - \frac{\mu}{C_0}(p_y \overline{H}_\zeta^\times - p_z \overline{H}_\eta^\times), \quad \overline{E}_\eta = \overline{E}_\eta^\times - \frac{\mu}{C_0}(p_z \overline{H}_\xi^\times - p_x \overline{H}_\zeta^\times), \\ &E_\zeta = \overline{E}_\zeta^\times - \frac{\mu}{C_0}(p_x H_\eta^\times - p_y H_\xi^\times), \end{aligned}\right.$$

Gleichungen, welche dazu dienen, die Amplituden $\overline{H}^\times$, $\overline{E}$ zu ermitteln.

Läßt man Größen zweiter Ordnung unbeachtet, so darf man in obigen Gleichungen rechts vom Gleichheitszeichen $\overline{E}$ und $\overline{H}$ durch $\overline{E}^{\times}$, $\overline{H}'$ ersetzen. Dann findet man in leichter Zwischenrechnung, weil

$$\overline{E}^{\times}_{s'} = 0\,, \quad \overline{H}'_{s'} = 0$$

ist,

(68a) $\quad \overline{E}_{s'} = +\dfrac{K\mu}{C_0^2}\,p^2\,\overline{E}^{\times}_{p}\,,$ $\qquad$ (68b) $\quad \overline{H}^{\times}_{s'} = -\dfrac{K_0\mu}{C_0^2}\,p^2\,\overline{H}'_{p}\,,$

so daß die Störungen $\overline{\mathfrak{E}}$, $\overline{\mathfrak{H}}^{\times}$ ebenfalls transversal sind, sobald die Störungen $\overline{\mathfrak{E}}^{\times}$, $\overline{\mathfrak{H}}'$ in Richtung der Bewegung erfolgen.

Da die absolute Periode sich aus der Formel (55) oder (56) berechnet, und s bei einem reflektierten Strahl und einem gebrochenen einen anderen Wert hat, als bei dem einfallenden, so erfährt sie bei Reflexion und Brechung eine Änderung erster Ordnung. Ebenso ändert sich dabei das Verhältnis der Amplituden der Schwingungen zufolge der Formeln (66), (67), und zwar wiederum um Größen erster Ordnung. Ganz bleiben also, wie Lorentz selbst hervorhebt, die Gesetze der Reflexion und Brechung nicht erhalten, wenn ein System eine fortschreitende Bewegung annimmt. Dagegen sollen wenigstens die Bedingungen an der trennenden Fläche erhalten bleiben, also die Reflexions- und Brechungsgesetze. Wie für ruhende Systeme wird gesetzt

$$\overline{\mathfrak{D}}^{\times\times}_{n1} = \overline{\mathfrak{D}}^{\times\times}_{n2}\,, \quad \overline{\mathfrak{H}}'_{n1} = \overline{\mathfrak{H}}'_{n2}\,, \tag{69}$$

wo n die Normale der Trennungsfläche ist und 1, 2 die getrennten Medien unterscheiden. Ebenso ist, wenn h eine Richtung senkrecht zu n, also in der Trennungsfläche, andeutet,

$$\overline{\mathfrak{D}}^{\times\times}_{h1} = \overline{\mathfrak{D}}^{\times\times}_{h2}\,, \quad \overline{\mathfrak{H}}'_{h1} = \overline{\mathfrak{H}}'_{h2}\,. \tag{70}$$

Hiernach wird zufolge (47a) auch

$$K_1\overline{\mathfrak{E}}^{\times}_{n1} = K_2\overline{\mathfrak{E}}^{\times}_{n2}\,, \quad K_1\overline{\mathfrak{E}}^{\times}_{h1} = K_2\overline{\mathfrak{E}}^{\times}_{h2}\,. \tag{71}$$

Da für die letzte Gleichung $K_1 = K_2$ zu setzen ist, so bekommt man

$$\overline{\mathfrak{E}}^{\times}_{h1} = \overline{\mathfrak{E}}^{\times}_{h2}\,. \tag{72}$$

Aus (44b) folgt, wenn h' eine zweite Richtung in der Trennungsfläche andeutet, senkrecht zu n und zu h,

$$\overline{\mathfrak{H}}'_{n} = \overline{\mathfrak{H}}^{\times}_{n} - \frac{K_0}{C_0}(p_h\mathfrak{E}_{h'} - p_{h'}\mathfrak{E}_h)\,,$$

also haben wir auch bis auf Größen zweiter Ordnung

$$\overline{\mathfrak{H}}^{\times}_{n1} = \overline{\mathfrak{H}}^{\times}_{n2} \tag{73}$$

und da

$$\overline{\mathfrak{H}}^{\times}_{h1} = \overline{\mathfrak{H}}^{\times}_{h2} = \overline{\mathfrak{H}}^{\times}_{h'1} = \overline{\mathfrak{H}}'_{h'2} \tag{74}$$

ist, wird in derselben Schlußweise

$$\overline{\mathfrak{D}}^{\times}_{n1} = \overline{\mathfrak{D}}^{\times}_{n2}\,; \quad \overline{\mathfrak{D}}^{\times}_{h1} = \overline{\mathfrak{D}}^{\times}_{h2}\,. \tag{75}$$

Die Bedingungsgleichungen entsprechen somit, immer unter Fortlassung von Größen zweiter Ordnung, denen in der Ruhe. Hier darf ich auf die Berechnungen aus der Undulationstheorie in Abschnitt 4 (S. 41ff.) verweisen.

Zusammenfassend sagt H. A. Lorentz: „Überhaupt wird nach unserer Theorie die Bewegung der Erde nie einen Einfluß erster Ordnung auf Versuche mit terrestrischen Lichtquellen haben.“ Das ist verstanden unter der Annahme, daß die Erscheinungen für den Beobachter in der Äther-Ortszeit ablaufen, und daß es nicht auf die absoluten Intensitäten ankommt, welche in der Tat schon um Größen erster Ordnung sich ändern, wenn nicht die Störungen $\overline{\mathfrak{H}}'$, $\overline{\mathfrak{T}}$, sondern die $\mathfrak{H}^\times$, $\overline{\mathfrak{T}}^\times$ für die optischen Erscheinungen entscheidend sind, was Lorentz wohl annimmt. Zugleich erhellt, daß, wo Größen zweiter Ordnung in Betracht kommen, auch die Lorentzsche Theorie versagen kann, wie etwa in dem Michelsonschen Versuche, falls diesem die Deutung zukommt, die ihm ziemlich allgemein zugeschrieben wird (S. 119).

Wir haben nun noch einige Nebenergebnisse nachzuholen. Wenn keine innere Bewegung vorhanden ist, und stationärer Zustand herrscht, wird in den Gleichungen (9_2a, b) (S. 215)

$$\left(\frac{\delta}{\delta t}\right)_p = -p_x\frac{\partial}{\partial \xi} - p_y\frac{\partial}{\partial \eta} - p_z\frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$\left(\frac{\delta^2}{\delta t^2}\right)_p = 2\left(p_x p_y\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta} + p_y p_z\frac{\partial^2}{\partial \eta\,\partial \zeta} + p_z p_x\frac{\partial^2}{\partial \zeta\,\partial \xi}\right) + p_x^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + p_y^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + p_z^2\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}.$$

Man bestimme eine Funktion $\overline{\Omega}$ gemäß der Beziehung

$$(76_1)\quad \begin{cases} \Delta\Omega - K_0'\mu_0'\Big\{2\left(p_x p_y\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta} + p_y p_z\frac{\partial^2}{\partial \eta\,\partial \zeta} + p_z p_x\frac{\partial^2}{\partial \zeta\,\partial \xi}\right) \\ \qquad\qquad + p_x^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + p_y^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + p_z^2\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\Big\}\,\Omega = 4\pi\varrho\,. \end{cases}$$

Unter ϱ wird ϱ_e verstanden. Wir verlegen die ξ-Achse in Richtung der Bewegung p. Dann wird die letzte Gleichung

$$(76_2)\qquad \left(1 - \frac{p^2}{C_0^2}\right)\frac{\partial^2\Omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial \zeta^2} = 4\pi\varrho\,.$$

Außerhalb der Ladungen, wo $\varrho_e = 0$ ist, folgt demnach

$$(77)\qquad \frac{\partial^2\overline{\Omega}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\left(\partial\sqrt{1-\frac{p^2}{C_0^2}}\,\eta\right)^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\left(\partial\sqrt{1-\frac{p^2}{C_0^2}}\,\zeta\right)^2} = 0\,.$$

Beispielsweise ist also das Potential eines Ion oder Elektron an einer von ihm um $r = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ abstehenden Stelle

$$(78)\qquad \Omega = \frac{e}{\sqrt{\xi^2 + \left(1 - \frac{p^2}{C_0^2}\right)(\eta^2 + \zeta^2)}}\,.$$

Eine ähnliche Formel hat schon Heaviside[1]) abgeleitet. Er läßt ihre Gültigkeit zu von $p = 0$ bis $p = C_0$. Überschreitet p den Wert c_0, so soll an deren Stelle die Beziehung treten

$$(79_1)\qquad \Omega = \frac{2e}{\sqrt{\xi^2 - \left(\frac{p^2}{C_0^2} - 1\right)(\eta^2 + \zeta^2)}}\,.$$

[1]) Electrician 1, 167. Electromagnetic Theory 1, § 164, S. 269ff.

Auf diese Verhältnisse kommen wir beim weiteren Relativitätsprinzip zu sprechen, wenn es sich sowohl um die Transformation als auch um die Existenz von Überlichtgeschwindigkeiten handelt. Von Interesse ist jedoch der Weg, auf dem Heaviside zu seiner Formel gelangt ist. Er geht von der Darstellung unter (A_{13}a, b) (S. 149) der Maxwell-Hertzschen Gleichungen aus und betrachtet den Gegenfall, daß die Ladungen ruhen, und der Äther sich gleichmäßig bewegt. Es ist dann $g = 0$, und in stationärem Zustande, wo auch keine Polarisierungsströme bestehen, wird

$$(80_1\,\mathrm{a})\qquad \operatorname{curl}\left(\mathfrak{H} + \frac{4\pi}{C_0}[p'\,\mathfrak{D}]\right) = 0\,,$$

$$(80_1\,\mathrm{b})\qquad \operatorname{curl}\left(\mathfrak{E} - \frac{4\pi}{C_0}[p'\,\mathfrak{B}]\right) = 0\,,$$

oder im Sinne der Maxwell-Hertzschen Theorie

$$(80_2\,\mathrm{a})\qquad \operatorname{curl}\left(\mathfrak{H} + \frac{K}{C_0}[p'\,\mathfrak{E}]\right) = 0\,,$$

$$(80_2\,\mathrm{b})\qquad \operatorname{curl}\left(\mathfrak{E} - \frac{\mu}{C_0}[p'\,\mathfrak{H}]\right) = 0\,.$$

p' steht für p, und das Koordinatensystem ist ein absolutes, verbunden mit den festen Ladungen. Die Gleichungen besagen, daß die beiden Vektoren $\mathfrak{H} + \frac{K}{4\pi}[p'\,\mathfrak{E}]$ und $\mathfrak{E} - \frac{\mu}{4\pi}[p'\,\mathfrak{H}]$ ein Potential besitzen müssen. Ist ein besonders magnetisches Feld nicht vorhanden, so haben wir

$$\mathfrak{H} = \frac{K}{C_0}[\mathfrak{E}\,p']\,,$$

also wird nach der zweiten Gleichung, wenn wir sie $\operatorname{curl}\mathfrak{F} = 0$ schreiben,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} - \frac{\mu}{C_0}[p'\,\mathfrak{H}] = \mathfrak{E} + \frac{K\mu}{C_0^2}[p'\,[p'\,\mathfrak{E}]] = \mathfrak{E} + c_0^{-2}[p'\,[p'\,\mathfrak{E}]]$$

und z. B. für die x-Richtung nach (g) (S. 120)

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{E}_x + c_0^{-2}\left(p'_x\,\underline{(p'\,\mathfrak{E})} - \mathfrak{E}_x\,\underline{(p'\,p')}\right) = \left(1 - \frac{p'^2}{c_0^2}\right)\mathfrak{E}_x + \frac{1}{c_0^2}\,p'_x\,\underline{(p'\,\mathfrak{E})}\,.$$

Es möge die x-Axe der Richtung der Bewegung folgen, so werden hiernach die drei Komponenten von $\mathfrak{F}$

$$(81)\qquad \mathfrak{F}_x = \left(1 - \frac{p'^2}{c_0^2}\right)\mathfrak{E}_x + \frac{p'^2}{c_0^2}\,\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_x\,,\qquad \mathfrak{F}_y = \left(1 - \frac{p'^2}{c_0^2}\right)\mathfrak{E}_y\,,\qquad \mathfrak{F}_z = \left(1 - \frac{p'^2}{c_0^2}\right)\mathfrak{E}_z\,.$$

Nun sollte $\mathfrak{F}$ ein Potential haben; ist dieses Potential Ω, so muß demnach sein

$$\Omega = f\left(x,\ \sqrt{1 - \frac{p'^2}{c_0^2}}\,y,\ \sqrt{1 - \frac{p'^2}{c_0^2}}\,z\right)\,,$$

wo f die Form des Potentials im Ruhezustande hat. Für eine einzelne Ladung kommt so die Beziehung (79) mit x, y, z statt ξ, η, ζ. Bewegt sich die Ladung und nicht der Äther, so bleibt alles bestehen mit $-p'$ für $+p'$, wenn wir nunmehr x, y, z durch ξ, η, ζ ersetzen, das Koordinatensystem also mit der fortschreitenden Ladung sich bewegen lassen. Soweit die Ableitung nach Heaviside gemäß der Maxwell-Hertzschen Theorie, die darum also in Heavisides Darstellung das gleiche ergibt wie die Lorentzsche Theorie.

Lorentz macht von der Formel (76_2) einen anderen Gebrauch. Führt man für ξ, η, ζ ein gleich gerichtetes, gleich beginnendes ruhendes System ξ', η', ζ' ein, definiert durch (γ_2) (S. 127) und (8a) (S. 284)

(82) $$\xi' = \left(\sqrt{1 - \frac{p^2}{C_0^2}}\right)^{-1} \xi\,, \qquad \eta' = \eta\,, \qquad \zeta' = \zeta\,,$$

so ist das Volumen in diesem System [(16) (S. 326) mit $g' = 0$, $g = p$]

$$d\xi'\,d\eta'\,d\zeta' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{C_0^2}}}\, d\xi\,d\eta\,d\zeta\,,$$

also die Dichte

(83) $$\varrho' = \varrho\sqrt{1 - \frac{p^2}{C_0^2}}\,.$$

Die Substanz mit diesen neuen Dimensionen ξ', η', ζ' soll ruhen. Dann haben wir für ihr Potential Ω_0 an irgendeiner Stelle ξ', η', ζ'

(84) $$\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \eta'^2} + \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \zeta'^2} = 4\pi\varrho'\,.$$

Andererseits ist aber nach (76_2) für die sich bewegende Substanz

(79_2) $$\frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial \eta'^2} + \frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial \zeta'^2} = 4\pi\varrho\,,$$

somit muß sein

(85) $$\overline{\Omega} = \frac{\overline{\Omega}_0}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{C_0^2}}}\,.$$

Nun haben wir für die dem Potential Ω_0 der ruhenden Substanz entsprechenden elektrischen Kräfte

(86) $$\overline{\mathfrak{E}}_\xi^{(0)} = \frac{\partial \Omega_0}{\partial \xi'}\,, \qquad \overline{\mathfrak{E}}_\eta^{(0)} = \frac{\partial \Omega_0}{\partial \eta'}\,, \qquad \overline{\mathfrak{E}}_\zeta^{(0)} = \frac{\partial \overline{\Omega}_0}{\partial \zeta'}\,.$$

Also bekommen wir für die von der bewegten Substanz ausgeübten elektrischen Kräfte

(87_1) $$\mathfrak{E}_\xi^\times = \mathfrak{E}_\xi^{(0)}\,, \qquad \mathfrak{E}_\eta^\times = \sqrt{1 - \frac{p^2}{C_0^2}}\,\overline{\mathfrak{E}}_\eta^{(0)}\,, \qquad \overline{\mathfrak{E}}_\zeta^\times = \sqrt{1 - \frac{p^2}{C_0^2}}\,\overline{\mathfrak{E}}_\zeta^{(0)}\,.$$

Durch die Bewegung ändern sich also die elektrischen Kräfte nur um Größen zweiter Ordnung, und außerdem bestehen alle elektrostatischen Gesetze unverändert auch in der gemeinsamen Bewegung des ganzen Systems, nur die Verteilung der Elektrizität scheint um Größen zweiter Ordnung verschoben.

Aus den Gleichungen (9a, b) (S. 215) folgt mit der durch (76) definierten Funktion Ω für unseren Fall des stationären Zustandes (vgl. S. 219)

(88a) $$4\pi\,\overline{\mathfrak{B}}_\xi^\times = \mu_0'\left(p_y\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} - p_z\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial \eta}\right) \quad \text{usf.},$$

(88b) $$4\pi\,\mathfrak{D}_\xi^\times = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - K_0'\mu_0' p_x\left(p_x\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + p_y\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} + p_z\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial \zeta}\right) \quad \text{usf.}$$

Hiernach wird nach (3a, b) (S. 213) z. B.

$$(87_2)\quad \begin{cases} \bar{\mathfrak{E}}_\xi^\times = K_0\left\{\dfrac{\partial \bar\Omega}{\partial \xi} - K_0'\mu_0' p_x\left(p_x\dfrac{\partial \Omega}{\partial \xi} + p_y\dfrac{\partial \Omega}{\partial \eta} + p_z\dfrac{\partial \Omega}{\partial \zeta}\right)\right\} \\ \qquad + \dfrac{\mu_0'}{C_0}\left\{p_y\left(p_x\dfrac{\partial \Omega}{\partial \eta} - p_y\dfrac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right) - p_z\left(p_z\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial \xi} - p_x\dfrac{\partial \Omega}{\partial \zeta}\right)\right)\right\}. \end{cases}$$

Da bei unserer Rechnungsweise $K_0 = \mu_0 = 1$, $K_0' = \mu_0' = \dfrac{1}{C_0}$ ist, so folgt

$$(87_3)\qquad \bar{\mathfrak{E}}_\xi^\times = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - \frac{p^2}{C_0^2}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = \frac{C_0^2 - p^2}{C_0^2}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \quad \text{usf.}$$

Gleichungen, die wegen (82), (85) und (86) mit den unter (87_1) übereinstimmen.

Wir nehmen den allgemeineren Fall, daß innere Bewegungen q stattfinden, so daß $\varrho_e q_\xi = \varrho_\xi'$, $\varrho_e q_\eta = \varrho_\eta'$, $\varrho_e q_\zeta = \varrho_\zeta'$, die Komponenten des entsprechenden Konvektionsstromes von Null verschieden sind. Die q beziehen sich auf einzelne Punkte. Lorentz schreibt deshalb alles für Mittelwerte innerhalb eines kleinen Raumes. Dieser Mittelwert nun soll für die Ladung ϱ_e selbst gleich Null sein, es sollen also freie Ladungen nicht existieren. Die Gleichungen $(9_2\,\text{a, b})$ (S. 215) gehen dann über in

$$K_0'\mu_0'\left(\frac{\delta^2 \mathfrak{B}}{\delta t^2}\right)_p = \Delta \mathfrak{B} + \mu_0' \operatorname{curl}(\varrho'), \quad K_0'\mu_0'\left(\frac{\delta^2 \mathfrak{T}}{\delta t^2}\right)_p = \Delta \mathfrak{T} - K_0'\mu_0'\left(\frac{\delta \varrho'}{\delta t}\right)_p.$$

Wieder sollen nur stationäre Verhältnisse vorausgesetzt werden. Bestimmen wir drei Funktionen Φ entsprechend der Beziehung

$$(89)\quad \begin{cases} \Delta \Phi_\pi - K_0'\mu_0'\left\{2\left(p_x p_y \dfrac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + p_y p_z \dfrac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} + p_z p_x \dfrac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \xi}\right)\right. \\ \qquad \left. + p_x^2\dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} + p_y^2\dfrac{\partial^2}{\partial \eta^2} + p_z^2\dfrac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right\}\Phi_\pi = 4\pi\varrho_\pi', \quad \pi = \xi, \eta, \zeta, \end{cases}$$

so wird [vgl. (24), (25) S. 219]

$$(90\text{a})\qquad 4\pi\mathfrak{B} = -\mu_0' \operatorname{curl}\Phi,$$

$$(90\text{b})\qquad 4\pi\mathfrak{T} = -K_0'\mu_0'\left(p_x\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + p_y\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + p_z\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\right).$$

An einer Stelle des Raumes, an der eine innere Bewegung q nicht vorhanden ist, haben wir für die elektrische Kraft nach (3a, b) (S. 213)

$$\mathfrak{E}^\times = \frac{4\pi}{K_0}\mathfrak{T} + \frac{4\pi}{C_0}[p\,\mathfrak{B}] = 4\pi\left(\mathfrak{T} + \frac{1}{C_0}[p\,\mathfrak{B}]\right),$$

also wird z. B.

$$\mathfrak{E}_\xi^\times = -\frac{1}{C_0^2}\left\{p_x\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \xi} + p_y\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \eta} + p_z\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \zeta} + p_y\left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \eta}\right) - p_z\left(\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \Phi_\zeta}{\partial}\right)\right\},$$

d. h.

$$(91)\qquad \bar{\mathfrak{E}}_\pi^\times = -\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial}{\partial \pi}(p_x\Phi_\xi + p_y\Phi_\eta + p_z\Phi_\zeta), \quad \pi = \xi, \eta, \zeta.$$

Da nach der Anschauung von H. A. Lorentz die Größe ϱ' einen (hier stationären) Strom darstellt, so würde zufolge seiner Theorie ein solcher auch auf ruhende Elektrizität eine elektrische Kraft ausüben, sobald das ganze System sich in fortschreitender Bewegung befindet, also z. B. auf der Erde, und diese Kraft wäre von der ersten Ordnung. Eine solche Kraft ist nicht beobachtet. Um ihr Fehlen zu erklären, nimmt Lorentz die vorhin abgeleitete und durch (87_2) dargestellte statische Kraft zu Hilfe. Diese Kraft entspräche der jetzigen, wenn man setzte

$$\bar{\Omega} = -\frac{p_x \bar{\Phi}_\xi + p_y \bar{\Phi}_\eta + p_z \bar{\Phi}_\zeta}{C_0^2 - p^2}. \tag{92}$$

Die zugehörige Dichte ϱ_e wäre demnach die aus (76_1) mit diesem Werte von $\bar{\Omega}$ zu ermittelnde. Und da diese Gleichung vollständig der unter (89) für die $\bar{\Phi}$ gegebenen entspricht, so folgte

$$\varrho_e = -\frac{p_x \varrho'_\xi + p_y \varrho'_\eta + p_z \varrho'_\zeta}{C_0^2 - p^2}. \tag{93}$$

Indem nun die von der Theorie vorausgesetzte Wirkung der Bewegung tatsächlich nicht vorhanden ist, nimmt also Lorentz an, daß durch die Bewegung eine Ladung von dieser angegebenen Größe hervorgerufen wird, die durch ihre Gegenwirkung die bezeichnete Wirkung des Stromes aufhebt. Es ist die „Kompensationsladung“. Sie ist nicht vorhanden, wenn innere Bewegung der Ionen, also ein Strom im Sinne von Lorentz nicht besteht. Diese Kompensationsladung entspricht in der Art und Aufgabe vollständig der von Budde aus dem Clausiusschen elektrodynamischen Grundgesetz abgeleiteten geokinetischen Ladung (S. 169), wie Lorentz selbst hervorhebt, nur daß im Nenner C_0^2 statt $C_0^2 - p^2$ steht, was aber quantitativ bedeutungslos ist. Mit der aus der Maxwell-Hertzschen Theorie ermittelten Translationsladung ist eine Vergleichung insofern nicht angängig, weil diese nur in Ortszeit vorhanden ist, jene dagegen in absoluter Zeit. Außerdem handelt es sich in dem einen Falle nur um den Polarisierungsstrom ohne Kompensation, in dem anderen nur um den Leitungsstrom mit Kompensation. In jenem entspricht darum der elektrischen Ladung auch eine magnetische, die sich weder bei Lorentz noch bei Budde findet.

Wenn die Verhältnisse nicht stationär sind, scheint es mir nicht immer möglich zu sein, Kompensationsladungen anzugeben, da dann neue Kräfte in Betracht kommen, von denen die einen von der Form $\frac{\partial \bar{\Phi}_\xi}{\partial \tau'}, \frac{\partial \bar{\Phi}_\eta}{\partial \tau'}, \frac{\partial \bar{\Phi}_\zeta}{\partial \tau'}$ sind, die anderen von der $p_x \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \xi}, p_y \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \eta}, p_z \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \zeta}$, die man nicht in Parallele stellen kann, wenn nicht $\frac{\bar{\Phi}_\xi}{p_x}, \frac{\bar{\Phi}_\eta}{p_y}, \frac{\bar{\Phi}_\zeta}{p_z}$ ein Potential haben.

Die größte Schwierigkeit der Lorentzschen Theorie besteht bekanntlich darin, daß sie dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung nicht entspricht.

Den Beweis dafür hat Poincaré[1]) gegeben. Sein Beispiel besagt, daß, wenn ein geladener ponderabler Körper von einer elektromagnetischen Störung, die sich durch den umgebenden Äther verbreitet, getroffen wird, die Verteilung der Ladung alteriert sein und eine ponderomotorische Kraft auf den Körper wirken muß. Aber der Körper würde nicht auf den Äther ponderomotorisch zurück-

[1]) Poincaré, Electricité et Optique (1901) 448 ff., 599 ff.; Archive Néerlandaise (II) **5**, 252 ff. (1900); Festschrift für Lorentz.

wirken, denn der Äther nimmt nach der Anschauung von Lorentz keine solche Wirkung auf, da er unter allen Umständen ruht. In der Theorie von Maxwell-Hertz ist eine solche Reaktion vorhanden, weil der Äther mit den Körpern verbunden sein soll, und zwar besteht eine vollständige Reaktion, wenn die Verbindung vollständig ist. Poincaré bemerkt daher, daß keine Theorie dem Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion ohne weiteres genügen kann, die eine nur teilweise nicht vollständige Einbeziehung des Äthers in die Bewegung der Körper annimmt. Aber man hat keine Bedenken getragen, hier das genannte Prinzip außer acht zu lassen. [Zu vergleichen noch S. 170. Ferner W. Ritz, Recherches critiques sur l'électrodynamique générale in Annales de Physique et de chimie S. VIII, Bd. 13 (1908) S. 145 ff.]

7. Theorie von Herrmann Minkowski, erste angenäherte Darstellung.

Die große Bedeutung von Minkowskis Theorie liegt auf dem Gebiet des Relativitätsprinzips in der ihr von diesem genialen Manne gegebenen besonderen und so ausgreifenden Fassung. Wir werden diese Theorie später sehr eingehend behandeln. Soweit sie hier schon in Betracht kommt, ist folgendes, als erste Annäherung, zu bemerken.

Minkowskis Theorie[1]) hängt mit der Maxwell-Hertzschen Theorie zusammen, sofern sie die magnetische Polarisierung mit der elektrischen gleichberechtigt behandelt, und mit der Lorentzschen, indem sie die Grundgleichungen denen dieser Theorie nachbildet. Sie stellt sich aber von vornherein auf einen radikalen Standpunkt, indem sie die Form der Grundgleichungen für den Bewegungszustand sofort gleich der Form für Ruhe ansetzt. Dadurch ist sie naturgemäß gezwungen, die in den Gleichungen enthaltenen Größen in besonderer Weise auszudrücken, da sonst gegen den Ruhezustand nichts herauskäme, und dadurch nähert sie sich nach einer Seite wenigstens wieder der Lorentzschen und E. Cohnschen Theorie. Minkowskis Grundgleichungen sind hiernach für jede beliebige Bewegung g wie für den Ruhezustand

$$(1_1\mathrm{a})\qquad +\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{D}^\times}{\partial t} + J\,,$$

$$(1_1\mathrm{b})\qquad -\frac{C_0}{4\pi}\operatorname{curl}\mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{B}^\times}{\partial t}\,;$$

$$(2\mathrm{a})\qquad \operatorname{div}\mathfrak{D}^\times = \varrho_e\,,$$

$$(2\mathrm{b})\qquad \operatorname{div}\mathfrak{B}^\times = 0\,.$$

Unter J versteht jedoch Minkowski den ganzen, nicht durch Polarisierung entstandenen Strom, also Leitungsstrom und Konvektionsstrom zusammen.

$$(3)\qquad J = J + g\,\varrho_e\,.$$

Nun bedeuten aber die Größen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ nicht die zur Beobachtung gelangenden Kräfte und Polarisierungen. Die genauen Formeln werden wir später kennen lernen (S. 390 ff.). Für gegen die Lichtgeschwindigkeit nicht erhebliche Bewegungs-

[1]) Gesammelte Abhandlungen **2**, 352. Den obigen Bezeichnungen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, J entsprechen bei Minkowski $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{s}$. Ferner ist bei ihm $C_0 = 1$, $\frac{K}{4\pi} = \varepsilon$, $\frac{\mu}{4\pi} = \mu$ gesetzt.

geschwindigkeiten berechnen sich die Größen, wenn wir sie mit $\mathfrak{E}^\times$, $\mathfrak{H}^\times$, $\mathfrak{D}^\times$, $\mathfrak{B}^\times$ bezeichnen, aus denen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ durch die Beziehungen

$$\mathfrak{D}^\times = \mathfrak{D} + \frac{1}{4\pi C_0}[g\,\mathfrak{H}]\,, \tag{4a}$$

$$\mathfrak{B}^\times = \mathfrak{B} - \frac{1}{4\pi C_0}[g\,\mathfrak{E}]\,; \tag{4b}$$

$$\mathfrak{E}^\times = \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{C_0}[g\,\mathfrak{B}^\times] = \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{C_0}[g\,\mathfrak{B}]\,, \tag{5a}$$

$$\mathfrak{H}^\times = \mathfrak{H} - \frac{4\pi}{C_0}[g\,\mathfrak{D}^\times] = \mathfrak{H} - \frac{4\pi}{C_0}[g\,\mathfrak{D}]\,. \tag{5b}$$

Ferner setzt Minkowski entsprechend den Maxwellschen Beziehungen

$$\mathfrak{D}^{\times\times} = \frac{K}{4\pi}\mathfrak{E}^\times\,; \qquad \mathfrak{D}^{\times\times} = \mathfrak{D}^\times + \frac{1}{4\pi C_0}[g\,\mathfrak{H}]\,, \tag{6$_1$a}$$

$$\mathfrak{B}^{\times\times} = \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}^\times\,; \qquad \mathfrak{B}^{\times\times} = \mathfrak{B}^\times - \frac{1}{4\pi C_0}[g\,\mathfrak{E}]\,. \tag{6$_1$b}$$

$$\mathfrak{D}^\times = \frac{K}{4\pi}\left(\mathfrak{E} + \frac{4\pi}{C_0}[g\,\mathfrak{B}^\times]\right) - \frac{1}{4\pi C_0}[g\,\mathfrak{H}]\,, \tag{6$_2$a}$$

$$\mathfrak{B}^\times = \frac{\mu}{4\pi}\left(\mathfrak{H} - \frac{4\pi}{C_0}[g\,\mathfrak{D}^\times]\right) + \frac{1}{4\pi C_0}[g\,\mathfrak{E}]\,, \tag{6$_2$b}$$

oder

$$4\pi\,\mathfrak{D}^\times = K\,\mathfrak{E}^\times - \frac{1}{C_0}[g\,\mathfrak{H}]\,, \tag{6$_3$a}$$

$$4\pi\,\mathfrak{B}^\times = \mu\,\mathfrak{H}^\times + \frac{1}{C_0}[g\,\mathfrak{E}]\,. \tag{6$_3$b}$$

Zuletzt für den Strom

$$J = \frac{C_0}{4\pi}\,\sigma\,\mathfrak{E}^\times\,, \tag{7}$$

wo σ die Leitfähigkeit der als isotrop angenommenen Substanz ist. Warum Minkowski diese Ansätze macht, werden wir im zweiten Teil dieses Buches erfahren, wie überhaupt Minkowskis Theorie an dieser Stelle nur ganz obenhin nach einigen wenigen Ergebnissen besprochen werden kann.

Aus den Gleichungen unter (5a) ergibt sich

$$K\,\mathfrak{E}^\times = 4\pi\,\mathfrak{D} + \frac{K}{C_0}[g\,\mathfrak{H}]\,.$$

Das entspricht für unmagnetisierbare Stoffe der Beziehung unter (E_4a) (S. 208) der Lorentzschen Theorie, und in beiden Theorien haben diese $\mathfrak{E}^\times$ physikalisch auch gleiche Bedeutung. Doch ist zu beachten, daß in Lorentz' Theorie $\mathfrak{D}^\times$ und $\mathfrak{H}^\times$ sich auf den Bewegungszustand beziehen, in Minkowskis dagegen auf den Ruhezustand. Die Übereinstimmung ist also nur scheinbar.

Die Gleichungssysteme unter (4a, b), (5a, b) lassen sich auch in der Form (IIIa, b) usf. (S. 211) schreiben, nämlich

$$\text{(8a)}\quad \mathfrak{D}_g^\times = \mathfrak{D}_g\,,\quad \mathfrak{D}_{g'}^\times = \mathfrak{D}_{g'} + \frac{1}{4\pi C_0}\, g\, \mathfrak{H}_{g''}\,,\quad \mathfrak{D}_{g''}^\times = \mathfrak{D}_{g''} - \frac{1}{4\pi C_0}\, g\, \mathfrak{H}_{g'}\,;$$

$$\text{(8b)}\quad \mathfrak{B}_g^\times = \mathfrak{B}_g\,,\quad \mathfrak{B}_{g'}^\times = \mathfrak{B}_{g'} - \frac{1}{4\pi C_0}\, g\, \mathfrak{E}_{g''}\,,\quad \mathfrak{B}_{g''}^\times = \mathfrak{B}_{g''} + \frac{1}{4\pi C_0}\, g\, \mathfrak{E}_{g'}\,.$$

$$\text{(9a)}\quad \mathfrak{E}_g^\times = \mathfrak{E}_g\,,\quad \mathfrak{E}_{g'}^\times = \mathfrak{E}_{g'} + \frac{4\pi}{C_0}\, g\, \mathfrak{B}_{g''}^\times\,,\quad \mathfrak{E}_{g''}^\times = \mathfrak{E}_{g''} - \frac{4\pi}{C_0}\, g\, \mathfrak{B}_{g'}^\times\,;$$

$$\text{(9b)}\quad \mathfrak{H}_g^\times = \mathfrak{H}_g\,,\quad \mathfrak{H}_{g'}^\times = \mathfrak{H}_{g'} - \frac{4\pi}{C_0}\, g\, \mathfrak{D}_{g''}^\times\,,\quad \mathfrak{H}_{g''}^\times = \mathfrak{H}_{g''} + \frac{4\pi}{C_0}\, g\, \mathfrak{D}_{g'}^\times\,;$$

Wir können nun alle Größen durch zwei, z. B. $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, ausdrücken. Setzen wir

$$\text{(10a)}\qquad \Delta = \frac{1}{4\pi}\left(K\,\mathfrak{E} - \frac{1}{C_0}\,[g\,\mathfrak{H}]\right),$$

$$\text{(10b)}\qquad \mathsf{B} = \frac{1}{4\pi}\left(\mu\,\mathfrak{H} + \frac{1}{C_0}\,[g\,\mathfrak{E}]\right),$$

so wird nach (6_2a, b)

$$\text{(6}_4\text{a)}\qquad \mathfrak{D}^\times = \Delta + \frac{K}{C_0}\,[g\,\mathfrak{B}^\times]\,,$$

$$\text{(6}_4\text{b)}\qquad \mathfrak{B}^\times = \mathsf{B} - \frac{\mu}{C_0}\,[g\,\mathfrak{D}^\times]\,.$$

Hieraus folgt

$$[g\,\mathfrak{D}^\times] = [g\,\Delta] + \frac{K}{C_0}\,[g\,[g\,\mathfrak{B}^\times]]\,,$$

$$[g\,\mathfrak{B}^\times] = [g\,\mathsf{B}] - \frac{\mu}{C_0}\,[g\,[g\,\mathfrak{D}^\times]]\,,$$

und nach (g) (S. 120)

$$[g\,\mathfrak{D}^\times] = [g\,\Delta] + \frac{K}{C_0}\left(g\left(\overline{g\,\mathfrak{B}^\times}\right) - \mathfrak{B}^\times\left(\overline{g\,g}\right)\right),$$

$$[g\,\mathfrak{B}^\times] = [g\,\mathsf{B}] - \frac{\mu}{C_0}\left(g\left(\overline{g\,\mathfrak{D}^\times}\right) - \mathfrak{D}^\times\left(\overline{g\,g}\right)\right).$$

Nun ergibt sich aus (6_3a, b)

$$\text{(11a)}\qquad \left(\overline{g\,\mathfrak{D}^\times}\right) = \frac{K}{4\pi}\left(\overline{g\,\mathfrak{E}^\times}\right),$$

$$\text{(11b)}\qquad \left(\overline{g\,\mathfrak{B}^\times}\right) = \frac{\mu}{4\pi}\left(\overline{g\,\mathfrak{H}^\times}\right)$$

und aus (5a, b)

$$\text{(12a)}\qquad \left(\overline{g\,\mathfrak{E}^\times}\right) = \left(\overline{g\,\mathfrak{E}}\right),$$

$$\text{(12b)}\qquad \left(\overline{g\,\mathfrak{H}^\times}\right) = \left(\overline{g\,\mathfrak{H}}\right),$$

also auch

(13a) $$\left(g\mathfrak{D}^{\times}\right) = \frac{K}{4\pi}\left(\overline{g\mathfrak{E}}\right).$$

(13b) $$\left(g\mathfrak{B}^{\times}\right) = \frac{\mu}{4\pi}\left(\overline{g\mathfrak{H}}\right).$$

Zuletzt aus (4a, b)

(13′a) $$\left(g\mathfrak{D}^{\times}\right) = \left(\overline{g\mathfrak{D}}\right).$$

(13′b) $$\left(g\mathfrak{B}^{\times}\right) = \left(g\mathfrak{B}\right).$$

Hiernach bekommen wir

$$[g\mathfrak{D}^{\times}] = [gA] + \frac{K\mu}{4\pi C_0} g\left(g\mathfrak{H}\right) - \frac{K}{C_0}(gg)\mathfrak{B}^{\times},$$

$$[g\mathfrak{B}^{\times}] = [g\mathsf{B}] - \frac{K\mu}{4\pi C_0} g\left(g\mathfrak{E}\right) + \frac{\mu}{C_0}(\overline{gg})\mathfrak{D}^{\times}.$$

So ergibt sich aus (6_4a, b)

$$\mathfrak{D}^{\times}\left(1 - \frac{K\mu}{C_0^2}(gg)\right) = A + \frac{K}{C_0}[g\mathsf{B}] - \frac{K^2\mu}{4\pi C_0^2} g\left(g\mathfrak{E}\right),$$

$$\mathfrak{B}^{\times}\left(1 - \frac{K\mu}{C_0^2}(gg)\right) = \mathsf{B} - \frac{\mu}{C_0}[gA] - \frac{K\mu^2}{4\pi C_0^2} g\left(g\mathfrak{H}\right).$$

Hierin haben wir nach (10a, b) unter Benutzung derselben Gleichungen auf S. 236

$$[gA] = \frac{K}{4\pi}[g\mathfrak{E}] - \frac{1}{4\pi C_0}[g[g\mathfrak{H}]] = \frac{K}{4\pi}[g\mathfrak{E}] - \frac{1}{4\pi C_0}\left(g\left(g\mathfrak{H}\right) - \mathfrak{H}(gg)\right),$$

$$[g\mathsf{B}] = \frac{\mu}{4\pi}[g\mathfrak{H}] + \frac{1}{4\pi C_0}[g[g\mathfrak{E}]] = \frac{\mu}{4\pi}[g\mathfrak{H}] + \frac{1}{4\pi C_0}\left(g\left(g\mathfrak{E}\right) - \mathfrak{E}(gg)\right),$$

so daß wir bekommen

$$\mathfrak{D}^{\times}\left(1 - \frac{K\mu}{C_0^2}(gg)\right)$$
$$= \frac{K}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{C_0^2}(\overline{gg})\right)\mathfrak{E} - \frac{1}{4\pi C_0}(1 - K\mu)[g\mathfrak{H}] - \frac{Kg}{4\pi C_0^2}(K\mu - 1)\left(g\mathfrak{E}\right),$$

$$\mathfrak{B}^{\times}\left(1 - \frac{K\mu}{C_0^2}(\overline{gg})\right)$$
$$= \frac{\mu}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{C_0^2}(gg)\right)\mathfrak{H} + \frac{1}{4\pi C_0}(1 - K\mu)[g\mathfrak{E}] - \frac{\mu g}{4\pi C_0^2}(K\mu - 1)\left(g\mathfrak{H}\right).$$

Diese Gleichungen bestimmen explizite $\mathfrak{D}^{\times}$ und $\mathfrak{B}^{\times}$. Sie lauten auch

(14_1a) $$4\pi\mathfrak{D}^{\times}\left(1 - \frac{K\mu}{C_0^2}(\overline{gg})\right) = K\left(1 - \frac{1}{C_0^2}(\overline{gg})\right)\mathfrak{E} + \frac{K\mu - 1}{C_0^2}\left(C_0[g\mathfrak{H}] - Kg\left(\overline{g\mathfrak{E}}\right)\right),$$

(14_1b) $$4\pi\mathfrak{B}^{\times}\left(1 - \frac{K\mu}{C_0^2}(gg)\right) = \mu\left(1 - \frac{1}{C_0^2}(gg)\right)\mathfrak{H} - \frac{K\mu - 1}{C_0^2}\left(C_0[g\mathfrak{E}] + \mu g\left(g\mathfrak{H}\right)\right).$$

Aus (6_3a, b) finden wir dann

$$(15_1\text{a})\qquad \mathfrak{E}^\times\left(1-\frac{K\mu}{C_0^2}(gg)\right)=\left(1-\frac{1}{C_0^2}(gg)\right)\left(\mathfrak{E}+\frac{\mu}{C_0}[g\mathfrak{H}]\right)-\frac{K\mu-1}{C_0^2}g(g\mathfrak{E}),$$

$$(15_1\text{b})\qquad \mathfrak{H}^\times\left(1-\frac{K\mu}{C_0^2}(gg)\right)=\left(1-\frac{1}{C_0^2}(gg)\right)\left(\mathfrak{H}-\frac{K}{C_0}[g\mathfrak{E}]\right)-\frac{K\mu-1}{C_0^2}g(g\mathfrak{H})$$

und aus (6_1a, b)

$$(16_1\text{a})\quad 4\pi\mathfrak{D}^{\times\times}\left(1-\frac{K\mu}{C_0^2}(gg)\right)=K\left(1-\frac{1}{C_0^2}(gg)\right)\left(\mathfrak{E}+\frac{\mu}{C_0}[g\mathfrak{H}]\right)-K\frac{K\mu-1}{C_0^2}g(g\mathfrak{E}),$$

$$(16_1\text{b})\quad 4\pi\mathfrak{B}^{\times\times}\left(1-\frac{K\mu}{C_0^2}(gg)\right)=\mu\left(1-\frac{1}{C_0^2}(gg)\right)\left(\mathfrak{H}-\frac{K}{C_0}[g\mathfrak{E}]\right)-\mu\frac{K\mu-1}{C_0^2}g(g\mathfrak{H}).$$

Diese Formeln, die also $\mathfrak{D}^{\times\times}$, $\mathfrak{B}^{\times\times}$, $\mathfrak{E}^\times$, $\mathfrak{H}^\times$, $\mathfrak{D}^\times$, $\mathfrak{B}^\times$ durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ausdrücken, habe ich der späteren Anwendung wegen abgeleitet, in allen bedeutet (gg) die Größe $g_x^2+g_y^2+g_z^2$.

Der Bequemlichkeit der Schreibweise wegen setze ich

$$\frac{g}{C_0}=\Gamma,\qquad \frac{(gg)}{C_0^2}=(\Gamma\Gamma)=\Gamma_x^2+\Gamma_y^2+\Gamma_z^2=\mathfrak{G}^2.$$

Damit ist

$$(14_2\text{a})\qquad 4\pi(1-K\mu\mathfrak{G}^2)\mathfrak{D}^\times=K(1-\mathfrak{G}^2)\mathfrak{E}+(K\mu-1)\left([\Gamma\mathfrak{H}]-K\Gamma(\Gamma\mathfrak{E})\right),$$

$$(14_2\text{b})\qquad 4\pi(1-K\mu\mathfrak{G}^2)\mathfrak{B}^\times=\mu(1-\mathfrak{G}^2)\mathfrak{H}-(K\mu-1)\left([\Gamma\mathfrak{E}]+\mu\Gamma(\Gamma\mathfrak{H})\right);$$

$$(15_2\text{a})\qquad (1-K\mu\mathfrak{G}^2)\mathfrak{E}^\times=(1-\mathfrak{G}^2)(\mathfrak{E}+\mu[\Gamma\mathfrak{H}])-(K\mu-1)\Gamma(\Gamma\mathfrak{E}),$$

$$(15_2\text{b})\qquad (1-K\mu\mathfrak{G}^2)\mathfrak{H}^\times=(1-\mathfrak{G}^2)(\mathfrak{H}-K[\Gamma\mathfrak{E}])-(K\mu-1)\Gamma(\Gamma\mathfrak{H});$$

$$(16_2\text{a})\quad 4\pi(1-K\mu\mathfrak{G}^2)\mathfrak{D}^{\times\times}=K(1-\mathfrak{G}^2)(\mathfrak{E}+\mu[\Gamma\mathfrak{H}])-K(K\mu-1)\Gamma(\Gamma\mathfrak{E}),$$

$$(16_2\text{b})\quad 4\pi(1-K\mu\mathfrak{G}^2)\mathfrak{B}^{\times\times}=\mu(1-\mathfrak{G}^2)(\mathfrak{H}-K[\Gamma\mathfrak{E}])-\mu(K\mu-1)\Gamma(\Gamma\mathfrak{H}).$$

Zur Verifikation beachten wir, daß

$$(\Gamma[\Gamma\mathfrak{H}])=(\Gamma[\Gamma\mathfrak{E}])=0$$

ist und erhalten

$$4\pi(1-K\mu\mathfrak{G}^2)(\Gamma\mathfrak{D}^\times)$$

$$=K(1-\mathfrak{G}^2)(\Gamma\mathfrak{E})-(K\mu-1)K\mathfrak{G}^2(\Gamma\mathfrak{E})=K(1-K\mu\mathfrak{G}^2)(\Gamma\mathfrak{E}),$$

$$4\pi(1-K\mu\mathfrak{G}^2)(\Gamma\mathfrak{B}^\times)$$

$$=\mu(1-\mathfrak{G}^2)(\Gamma\mathfrak{H})-(K\mu-1)\mu\mathfrak{G}^2(\Gamma\mathfrak{H})=\mu(1-K\mu\mathfrak{G}^2)(\Gamma\mathfrak{H}).$$

Also folgt entsprechend (13a, b)

$$(17\text{a})\qquad 4\pi(\Gamma\mathfrak{D}^\times)=K(\Gamma\mathfrak{E}),\quad \text{d. h.}\quad 4\pi(g\mathfrak{D}^\times)=K(g\mathfrak{E}),$$

$$(17\text{b})\qquad 4\pi(\Gamma\mathfrak{B}^\times)=\mu(\Gamma\mathfrak{H}),\quad \text{d. h.}\quad 4\pi(g\mathfrak{B}^\times)=\mu(g\mathfrak{H}).$$

Die Maxwellschen Beziehungen für $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ gelten also bei Minkowski wie auch bei Cohn und Lorentz für die skalaren Produkte mit der Geschwindigkeit. Die Gleichungen folgen aber sofort auch aus (6_3a, b), da nach (5a, b)

$$\left(\overline{\Gamma\mathfrak{E}^\times}\right) = \left(\overline{\Gamma\mathfrak{E}}\right), \tag{18a}$$

$$\left(\overline{\Gamma\mathfrak{H}^\times}\right) = \left(\overline{\Gamma\mathfrak{H}}\right) \quad \text{ist.} \tag{18b}$$

Max Abraham hat den Minkowskischen Grundgleichungen eine Form verliehen, welche an die der Maxwell-Hertzschen Gleichungen erinnert. Beachtet man nämlich die Beziehung

$$\frac{D\mathfrak{B}^\times}{Dt} = \frac{\partial\mathfrak{B}^\times}{\partial t} + g\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B}^\times + \mathrm{curl}[\mathfrak{B}^\times g]$$
$$= \frac{\partial\mathfrak{B}^\times}{\partial t} - \mathrm{curl}[g\,\mathfrak{B}^\times] = \frac{\partial\mathfrak{B}^\times}{\partial t} - \frac{C_0}{4\pi}\,\mathrm{curl}(\mathfrak{E}^\times - \mathfrak{E}),$$

letzteres nach (5a), so folgt

$$\frac{C_0}{4\pi}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{E} = \frac{D\mathfrak{B}^\times}{Dt} - \frac{\partial\mathfrak{B}^\times}{\partial t} + \frac{C_0}{4\pi}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{E}^\times.$$

Analog hat man

$$\frac{D\mathfrak{D}^\times}{Dt} = \frac{\partial\mathfrak{D}^\times}{\partial t} + g\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D}^\times + \mathrm{curl}[\mathfrak{D}^\times g] = \frac{\partial\mathfrak{D}^\times}{\partial t} + g\,\varrho_e - \mathrm{curl}[g\,\mathfrak{D}^\times]$$
$$= \frac{\partial\mathfrak{D}^\times}{\partial t} + g\,\varrho_e + \frac{C_0}{4\pi}\,\mathrm{curl}(\mathfrak{H}^\times - \mathfrak{H}),$$

letzteres wegen (5b). Also

$$\frac{C_0}{4\pi}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H} = -\frac{D\mathfrak{D}^\times}{Dt} + \frac{\partial\mathfrak{D}^\times}{\partial t} + g\,\varrho_e + \frac{C_0}{4\pi}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H}^\times.$$

Die Grundgleichungen (1_1a, b) gehen so über in

$$+\frac{C_0}{4\pi}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H}^\times = \frac{D\mathfrak{D}^\times}{Dt} + J, \tag{1_2a}$$

$$-\frac{C_0}{4\pi}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{E}^\times = \frac{D\mathfrak{B}^\times}{Dt}, \tag{1_2b}$$

Gleichungen, die auch dem Sinne nach vollständig den Maxwell-Hertzschen entsprechen würden, wenn an Stelle der Größen $\mathfrak{D}^\times$, $\mathfrak{B}^\times$ stünden die $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$.

Mit Hilfe der Beziehungen (6_2a, b) können wir ferner die Gleichungen unter (1_1a, b) in solche für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ allein überführen. Es folgt aus jenen

$$\mathfrak{E} = \frac{4\pi}{K}\left(\mathfrak{D}^\times + \frac{1}{4\pi C_0}[g\,\mathfrak{H}]\right) - \frac{4\pi}{C_0}[g\,\mathfrak{B}^\times], \tag{19a}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{\mu}\left(\mathfrak{B}^\times - \frac{1}{4\pi C_0}[g\,\mathfrak{E}]\right) + \frac{4\pi}{C_0}[g\,\mathfrak{D}^\times], \tag{19b}$$

zwei Gleichungssysteme für die Komponenten der $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}^\times$ und $\mathfrak{B}^\times$. Schreibt man für die nun allein in Betracht kommenden Größen $\mathfrak{D}^\times$, $\mathfrak{B}^\times$ bequemer $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, so wird

$$\mathfrak{E} = \frac{4\pi}{K}\left(\mathfrak{D} + \frac{1}{\mu C_0}[g\,\mathfrak{B}]\right) - \frac{4\pi}{C_0}[g\,\mathfrak{B}], \tag{20_1a}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{\mu}\left(\mathfrak{B} - \frac{1}{K C_0}[g\,\mathfrak{D}]\right) + \frac{4\pi}{C_0}[g\,\mathfrak{D}], \tag{20_1b}$$

oder

$$(20_2\text{a})\qquad \mathfrak{E} = \frac{4\pi}{K}\mathfrak{D} + \frac{4\pi}{C_0}\left(\frac{1}{K\mu} - 1\right)[g\,\mathfrak{B}]\,,$$

$$(20_2\text{b})\qquad \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{\mu}\mathfrak{B} - \frac{4\pi}{C_0}\left(\frac{1}{K\mu} - 1\right)[g\,\mathfrak{D}]\,.$$

Die Gleichungen (1_1a, b) werden so

$$(1_3\text{a})\qquad +\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + \left(\frac{1}{K\mu} - 1\right)\operatorname{curl}[g\,\mathfrak{D}] + \bar{J}\,,$$

$$(1_3\text{b})\qquad -\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + \left(\frac{1}{K\mu} - 1\right)\operatorname{curl}[g\,\mathfrak{B}]\,.$$

Die Gleichungen haben eine gewisse Ähnlichkeit mit den Gleichungen von E. Cohn (S. 206), stimmen jedoch sachlich mit ihnen nicht überein.

Wir betrachten nur den Fall gleichförmiger Bewegung p in Dielektrizis. Es ist demnach (u) (S. 121)

$$\operatorname{curl}_u[g\,\mathfrak{D}] = -p_x\frac{\partial\mathfrak{D}_u}{\partial x} - p_y\frac{\partial\mathfrak{D}_u}{\partial y} - p_z\frac{\partial\mathfrak{D}_u}{\partial z}\,,\quad u = x, y, z\,,$$

$$\operatorname{curl}_u[g\,\mathfrak{B}] = -p_x\frac{\partial\mathfrak{B}_u}{\partial x} - p_y\frac{\partial\mathfrak{B}_u}{\partial y} - p_z\frac{\partial\mathfrak{B}_u}{\partial z}\,,\quad u = x, y, z\,,$$

und wir erhalten

$$(21\text{a})\qquad +\frac{C_0}{\mu}\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} - \left(\frac{1}{K\mu} - 1\right)(p\,\nabla)\,\mathfrak{D}\,,$$

$$(21\text{b})\qquad -\frac{C_0}{K}\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} - \left(\frac{1}{K\mu} - 1\right)(p\,\nabla)\,\mathfrak{B}\,.$$

Für ebene Wellen wird hiernach unter Benutzung früherer Bezeichungsweisen

$$(22\text{a})\qquad \begin{cases} -\dfrac{C_0}{\mu}(\beta B_z - \gamma B_y) = \left\{c + \left(\dfrac{1}{K\mu} - 1\right)s\right\}D_x\,,\\[2ex] -\dfrac{C_0}{\mu}(\gamma B_x - \alpha B_z) = \left\{c + \left(\dfrac{1}{K\mu} - 1\right)s\right\}D_y\,,\\[2ex] -\dfrac{C_0}{\mu}(\alpha B_y - \beta B_x) = \left\{c + \left(\dfrac{1}{K\mu} - 1\right)s\right\}D_z\,;\end{cases}$$

$$(22\text{b})\qquad \begin{cases} +\dfrac{C_0}{K}(\beta D_z - \gamma D_y) = \left\{c + \left(\dfrac{1}{K\mu} - 1\right)s\right\}B_x\,,\\[2ex] +\dfrac{C_0}{K}(\gamma D_x - \alpha D_z) = \left\{c + \left(\dfrac{1}{K\mu} - 1\right)s\right\}B_y\,,\\[2ex] +\dfrac{C_0}{K}(\alpha D_y - \beta D_x) = \left\{c + \left(\dfrac{1}{K\mu} - 1\right)s\right\}B_z\,,\end{cases}$$

Gleichungen, aus denen wie in früheren Rechnungen folgt, daß die Wellen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ transversal und senkrecht zueinander verlaufen, und daß ihre Verbreitungsgeschwindigkeit beträgt

$$c = c_0 + \left(1 - \frac{1}{K\mu}\right)s\,,$$

was, da das Koordinatensystem ein absolutes ist, das Fresnelsche Gesetz für einen ruhenden Beobachter zum Ausdruck bringt. Das letztere Gesetz muß auch für die der Beobachtung entsprechenden Größen $\mathfrak{E}^\times$, $\mathfrak{H}^\times$ gelten, da ja diese linear aus den Größen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}^\times$, $\mathfrak{B}^\times$ zusammengesetzt sind.

Weiter gehe ich also an dieser Stelle auf die Theorie von Minkowski noch nicht ein.

8. Vergleichungen und Berechnungen von Max Abraham.

In einer Abhandlung hat Max Abraham[1]) es unternommen, die dargelegten Theorien miteinander zu vergleichen, und er hat zugleich eine Reihe von Untersuchungen über die im bewegten elektromagnetischen Felde herrschenden Kräfte und Energien angestellt. Da es sich um eine sehr bedeutende Arbeit handelt, müssen die Ergebnisse Erwähnung finden, wobei ich einiges zu bemerken habe. Die Grundgleichungen schreibt er in der Maxwell-Hertzschen Form

$$(1\,a) \qquad + \frac{C_0}{4\pi} \operatorname{curl} \mathfrak{H}^\times = \frac{D\mathfrak{D}^\times}{Dt} + J,$$

$$(1\,b) \qquad - \frac{C_0}{4\pi} \operatorname{curl} \mathfrak{E}^\times = \frac{D\mathfrak{B}^\times}{Dt},$$

wo also $\frac{D}{Dt}$ der Maxwell-Hertzsche Operator (S. 132ff.) — Max Abraham bezeichnet ihn mit $\frac{\partial'}{\partial t}$ — ist. $\mathfrak{H}^\times$ und $\mathfrak{E}^\times$ bedeuten die im bewegten Felde herrschenden magnetischen und elektrischen Kräfte. $\mathfrak{D}^\times$ und $\mathfrak{B}^\times$ sind noch unbestimmt. Das Koordinatensystem ist ruhend gewählt. Es ist mir nicht gelungen, zu ermitteln, wie die obige Form auch auf die Lorentzschen Gleichungen Anwendung soll finden können, wenigstens wenn man diese Gleichungen so nimmt, wie sie mir in Lorentz' Theorie enthalten zu sein scheinen[2]). Zu den obigen Gleichungen fügt Max Abraham noch Beziehungen für die ponderomotorischen Kräfte, die im elektromagnetischen Felde an bewegten Körpern wirken und für die Energien hinzu. Sind die Komponenten jener Kräfte auf Volumeneinheit bezogen $\mathfrak{K}_x$, $\mathfrak{K}_y$, $\mathfrak{K}_z$ und bedeutet g eine Größe, die als elektromagnetische Bewegungsgröße oder Impulsdichte bezeichnet und später bestimmt wird, so soll sein

$$(2_1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{K}_x &= \frac{\partial X_x^\times}{\partial x} + \frac{\partial X_y^\times}{\partial y} + \frac{\partial X_z^\times}{\partial z} - \frac{d\mathfrak{g}_x}{dt} - \mathfrak{g}_x \operatorname{div} \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{K}_y &= \frac{\partial Y_x^\times}{\partial x} + \frac{\partial Y_y^\times}{\partial y} + \frac{\partial Y_z^\times}{\partial z} - \frac{d\mathfrak{g}_y}{dt} - \mathfrak{g}_y \operatorname{div} \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{K}_z &= \frac{\partial Z_x^\times}{\partial x} + \frac{\partial Z_y^\times}{\partial y} + \frac{\partial Z_z^\times}{\partial z} - \frac{d\mathfrak{g}_z}{dt} - \mathfrak{g}_z \operatorname{div} \mathfrak{g}. \end{aligned} \right.$$

Die $X_x^\times \ldots$ entsprechen den Maxwellschen elektromagnetischen Spannungen, sie werden als relative bezeichnet und sind wie folgt festgesetzt

[1]) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **28** (1909), 2 semestre. Das Verständnis dieser wichtigen Arbeit ist sehr erschwert durch den Mangel einer sicheren Bezeichnung für skalare Produkte.

[2]) Wo m. E. $\mathfrak{H}^\times$, dort mit $\mathfrak{H}'$ bezeichnet, nicht die beobachtbare magnetische Kraft bedeuten soll (vgl. S. 210), welche vielmehr $\mathfrak{H}$, dort mit $\mathfrak{H}^\times$ bezeichnet, ist.

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} X_x^\times &= \mathfrak{E}_x^\times \mathfrak{D}_x^\times + \mathfrak{H}_x^\times \mathfrak{B}_x^\times - \frac{1}{2}\left(\overline{\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times}\right), \\
\frac{1}{4\pi} X_y^\times &= \mathfrak{E}_x^\times \mathfrak{D}_y^\times + \mathfrak{H}_x^\times \mathfrak{B}_y^\times , \\
\frac{1}{4\pi} X_z^\times &= \mathfrak{E}_x^\times \mathfrak{D}_z^\times + \mathfrak{H}_x^\times \mathfrak{B}_z^\times . \\
\frac{1}{4\pi} Y_x^\times &= \mathfrak{E}_y^\times \mathfrak{D}_x^\times + \mathfrak{H}_y^\times \mathfrak{B}_x^\times , \\
\frac{1}{4\pi} Y_y^\times &= \mathfrak{E}_y^\times \mathfrak{D}_y^\times + \mathfrak{H}_y^\times \mathfrak{B}_y^\times - \frac{1}{2}\left(\overline{\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times}\right), \\
\frac{1}{4\pi} Y_z^\times &= \mathfrak{E}_y^\times \mathfrak{D}_z^\times + \mathfrak{H}_y^\times \mathfrak{B}_z^\times , \\
\frac{1}{4\pi} Z_x^\times &= \mathfrak{E}_z^\times \mathfrak{D}_x^\times + \mathfrak{H}_z^\times \mathfrak{B}_x^\times , \\
\frac{1}{4\pi} Z_y^\times &= \mathfrak{E}_z^\times \mathfrak{D}_y^\times + \mathfrak{H}_z^\times \mathfrak{B}_y^\times , \\
\frac{1}{4\pi} Z_z^\times &= \mathfrak{E}_z^\times \mathfrak{D}_z^\times + \mathfrak{H}_z^\times \mathfrak{B}_z^\times - \frac{1}{2}\left(\overline{\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Es handelt sich also bei den $X_x^\times \ldots$ um die S. 140 unter (XII) eingeführten, jedoch nicht ganz gleichbedeutenden Größen.

Aus den Ansätzen (3) folgt

$$
(4)\qquad X_x^\times + Y_y^\times + Z_z^\times = -\frac{4\pi}{2}\left(\overline{\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times}\right).
$$

Ferner ist z. B.

$$
X_y^\times - Y_x^\times = 4\pi\left(\mathfrak{E}_x^\times \mathfrak{D}_y^\times - \mathfrak{E}_y^\times \mathfrak{D}_x^\times + \mathfrak{H}_x^\times \mathfrak{B}_y^\times - \mathfrak{H}_y^\times \mathfrak{B}_x^\times\right) = 4\pi\left([\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times]_z + [\mathfrak{H}^\times \dot{\mathfrak{B}}^\times]_z\right),
$$

also allgemein das Drehungsmoment der relativen Spannungen

$$
(5)\qquad N^\times = 4\pi[\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times].
$$

Als Energiegleichung wird angesetzt entsprechend (V_8) (S. 142)

$$
(6_1)\qquad Q^\times + \operatorname{div} \mathfrak{S}^\times = -\frac{\mathfrak{d}\psi}{\mathfrak{d}t} - \left(\underline{g\,\mathfrak{K}}\right).
$$

$Q^\times$, $\mathfrak{S}^\times$, ψ und $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t}$ haben entsprechende Bedeutung wie S. 140ff., nämlich

$$
(7)\qquad Q^\times = 4\pi\left(\overline{\mathfrak{E}^\times J}\right),
$$

$$
(8)\qquad \mathfrak{S}_u^\times = C_0[\mathfrak{E}^\times \mathfrak{H}^\times]_u - (g_x X_u^\times + g_y Y_u^\times + g_z Z_u^\times), \quad u = x,\ y,\ z,
$$

ψ wird von Fall zu Fall bestimmt, und $\frac{\mathfrak{d}\psi}{\mathfrak{d}t}$ ist

$$
\frac{\mathfrak{d}\psi}{\mathfrak{d}t} = \frac{d\psi}{dt} + \psi \operatorname{div} g .
$$

Benutzen wir die letzte Beziehung, so ist auch

$$(6_2) \qquad Q^\times + \operatorname{div}\mathfrak{S}^\times = -\frac{d\psi}{dt} - \psi \operatorname{div} g - (\overline{g\,\mathfrak{K}})\,.$$

Ferner haben wir entsprechend (V_4) (S. 141)

$$(6_3) \qquad Q^\times + \operatorname{div}\mathfrak{P}^\times = -\frac{\mathfrak{d}\psi}{\mathfrak{d}t} + \left(\overline{g\frac{\mathfrak{d}\mathfrak{g}}{\mathfrak{d}t}}\right) + P^\times - R^\times \operatorname{div} g\,.$$

Darin ist

$$(9_1) \qquad \mathfrak{P}^\times = C_0[\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}^\times]$$

die beobachtbare Poyntingsche Energiestörung, sodann

$$(10) \qquad R^\times = \frac{4\pi}{2}\left((\overline{\mathfrak{E}^\times\mathfrak{D}^\times}) + (\overline{\mathfrak{H}^\times\mathfrak{B}^\times})\right),$$

$$(11) \qquad P^\times = 4\pi\left((\overline{\mathfrak{E}^\times(\mathfrak{D}^\times V)g}) + (\overline{\mathfrak{H}^\times(\mathfrak{B}^\times V)g})\right)$$

entsprechend den Beziehungen (X_1), (VI) und (VIII) (S. 140).

Endlich wird auch gesetzt entsprechend (V_{10}) S. 143

$$(6_4) \qquad Q^\times + \operatorname{div}\mathfrak{S}^\times = -\frac{\partial\psi}{\partial t} - (\overline{g\,\mathfrak{K}})\,.$$

woselbst bedeutet

$$(12) \qquad \mathfrak{S}_u^\times = \mathfrak{S}^\times + g_u\psi\,, \quad u = x\,,\ y\,,\ z\,,$$

entsprechend $\mathfrak{S}_u$ nach (XVII) S. 143.

Für ψ, die elektromagnetische Energiedichte, und $\mathfrak{g}$, die Impulsdichte, werden mit Hilfe der Grundgleichungen Formeln abgeleitet. Aus (9_1) folgt

$$(9_2) \qquad \operatorname{div}\mathfrak{P}^\times = C_0 \operatorname{div}[\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}^\times] = C_0(\mathfrak{H}^\times \operatorname{curl}\mathfrak{E}^\times - \mathfrak{E}^\times \operatorname{curl}\mathfrak{H}^\times)\,,$$

letzteres zufolge (q) S. 121. Also wird nach den Grundgleichungen (1a, b)

$$(9_3) \qquad \operatorname{div}\mathfrak{P}^\times = -4\pi\left(\overline{\mathfrak{H}^\times\frac{D\mathfrak{B}^\times}{Dt} + \mathfrak{E}^\times\frac{D\mathfrak{D}^\times}{Dt} + \mathfrak{E}^\times J}\right)$$

somit wegen (7)

$$(6_5) \qquad Q^\times + \operatorname{div}\mathfrak{P}^\times = -4\pi\left(\overline{\mathfrak{H}^\times\frac{D\mathfrak{B}^\times}{Dt} + \mathfrak{E}^\times\frac{D\mathfrak{D}^\times}{Dt}}\right)$$

und wegen (6_3)

$$(6_6) \qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\overline{g\frac{d\mathfrak{g}}{dt}}\right) - \frac{d\psi}{dt} + (\overline{g\,\mathfrak{g}})\operatorname{div} g - \psi\operatorname{div} g + P^\times - R^\times\operatorname{div} g \\ &\qquad = -4\pi\left(\overline{\mathfrak{H}^\times\frac{D\mathfrak{B}^\times}{Dt} + \mathfrak{E}^\times\frac{D\mathfrak{D}^\times}{Dt}}\right). \end{aligned}\right.$$

Läßt man nun für $\frac{D}{Dt}$ die Maxwell-Hertzsche Definition gelten, so ist auch (II_6) (S. 133)

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{dF}{dt} - (FV)g + F\operatorname{div} g\,.$$

somit

$$
(6_7)\begin{cases}
\dfrac{d\psi}{dt} - \overline{\left(g\dfrac{d\mathfrak{g}}{dt}\right)} + \psi \operatorname{div} g - \overline{(g\,\mathfrak{g})} \operatorname{div} g - P^\times + R^\times \operatorname{div} g \\
= 4\pi \overline{\left(\mathfrak{E}^\times \dfrac{d\mathfrak{D}^\times}{dt} + \mathfrak{H}^\times \dfrac{d\mathfrak{B}^\times}{dt} - \mathfrak{E}^\times(\mathfrak{D}^\times V)g - \mathfrak{H}^\times(\mathfrak{B}^\times V)g + (\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times) \operatorname{div} g\right)}
\end{cases}
$$

und nach (10) und (11)

$$
(6_8)\begin{cases}
\dfrac{d\psi}{dt} - \overline{\left(g\dfrac{d\mathfrak{g}}{dt}\right)} + (\overline{\psi - g\,\mathfrak{g}}) \operatorname{div} g \\
= 4\pi \overline{\left(\mathfrak{E}^\times \dfrac{d\mathfrak{D}^\times}{dt} + \mathfrak{H}^\times \dfrac{d\mathfrak{B}^\times}{dt} - \{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times) - \mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times - \mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times\} \operatorname{div} g\right)},
\end{cases}
$$

also

$$
(6_9)\begin{cases}
\dfrac{d\psi}{dt} - \overline{\left(g\dfrac{d\mathfrak{g}}{dt}\right)} + (\overline{\psi - g\,\mathfrak{g}}) \operatorname{div} g \\
= 4\pi \overline{\left(\mathfrak{E}^\times \dfrac{d\mathfrak{D}^\times}{dt} + \mathfrak{H}^\times \dfrac{d\mathfrak{B}^\times}{dt} + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times) \operatorname{div} g\right)},
\end{cases}
$$

oder mit

$$
(13) \qquad \psi - \overline{(g\,\mathfrak{g})} = \varphi ,
$$

$$
(14) \quad \frac{d\varphi}{dt} + \overline{\left(\mathfrak{g}\frac{dg}{dt}\right)} - 4\pi \overline{\left(\mathfrak{E}^\times \frac{d\mathfrak{D}^\times}{dt} + \mathfrak{H}^\times \frac{d\mathfrak{B}^\times}{dt}\right)} + \overline{\left(\varphi - \frac{4\pi}{2}(\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times)\right)} \operatorname{div} g = 0.
$$

Da nach allen bisherigen Annahmen die Beziehungen zwischen $\mathfrak{E}^\times$, $\mathfrak{H}^\times$ und $\mathfrak{D}^\times$, $\mathfrak{B}^\times$ zwar die Geschwindigkeiten, nicht aber die Beschleunigungen enthalten, so nimmt Max Abraham an, daß auch ψ und $\mathfrak{g}$ nicht von den Beschleunigungen abhängen. Infolgedessen zerlegt er die obige Gleichung in zwei Gleichungen, nämlich

$$
(15) \qquad \varphi = \frac{4\pi}{2} \overline{(\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times)} .
$$

$$
(16) \qquad \frac{d\varphi}{dt} + \overline{\left(\mathfrak{g}\frac{dg}{dt}\right)} = 4\pi \overline{\left(\mathfrak{E}^\times \frac{d\mathfrak{D}^\times}{dt} + \mathfrak{H}^\times \frac{d\mathfrak{B}^\times}{dt}\right)} .
$$

Differenziert man (15) nach t und zieht von (16) ab, so folgt

$$
(17_1) \qquad \overline{\left(\mathfrak{g}\frac{dg}{dt}\right)} = \frac{4\pi}{2} \overline{\left(\mathfrak{E}^\times \frac{d\mathfrak{D}^\times}{dt} + \mathfrak{H}^\times \frac{d\mathfrak{B}^\times}{dt} - \mathfrak{D}^\times \frac{d\mathfrak{E}^\times}{dt} - \mathfrak{B}^\times \frac{d\mathfrak{H}^\times}{dt}\right)} = L^\times ,
$$

wo $L^\times$ der durch (VII) (S. 140) definierten Größe L entspricht. Sonnit

$$
(17_2) \qquad \overline{\left(\mathfrak{g}\frac{dg}{dt}\right)} = L^\times ,
$$

Mit Hilfe dieser letzteren Gleichung will ich erst nachweisen, daß formal die von Max Abraham für die Energie angesetzte Gleichung (6_1) der S. 142 aufgestellten entspricht.

Aus (13) und (15) folgt

$$\psi = (g\mathfrak{g}) + \frac{4\pi}{2}\left(\overline{\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times}\right), \tag{18_1}$$

also nach (VI) (S. 140) oder (10) (S. 244)

$$\psi = (g\mathfrak{g}) + R^\times. \tag{18_2}$$

Beachtet man noch, daß nach (2_1) (S. 242)

$$(g\mathfrak{K}) = (gK^\times) - \left(g\frac{d\mathfrak{g}}{dt}\right) - (g\mathfrak{g})\operatorname{div} g \tag{19}$$

ist, wo

$$\left\{\begin{aligned} K_x^\times &= \frac{\partial X_x^\times}{\partial x} + \frac{\partial X_y^\times}{\partial y} + \frac{\partial X_z^\times}{\partial z}, \\ K_y^\times &= \frac{\partial Y_x^\times}{\partial x} + \frac{\partial Y_y^\times}{\partial y} + \frac{\partial Y_z^\times}{\partial z}, \\ K_z^\times &= \frac{\partial Z_x^\times}{\partial x} + \frac{\partial Z_y^\times}{\partial y} + \frac{\partial Z_z^\times}{\partial z} \end{aligned}\right. \tag{20}$$

den durch (XVI) (S. 142) definierten Größen K' entsprechen, so wird

$$\left|\begin{aligned} Q^\times + \operatorname{div}\mathfrak{S}^\times &= -\frac{\mathfrak{d}R^\times}{\mathfrak{d}t} - \frac{\mathfrak{d}(g\mathfrak{g})}{\mathfrak{d}t} - (gK^\times) + \left(g\frac{d\mathfrak{g}}{dt}\right) + (g\mathfrak{g})\operatorname{div} g \\ &= -\frac{\mathfrak{d}R^\times}{\mathfrak{d}t} - \frac{d(g\mathfrak{g})}{dt} - (gK^\times) + \left(g\frac{d\mathfrak{g}}{dt}\right). \end{aligned}\right. \tag{6_{10}}$$

Das gibt

$$Q^\times + \operatorname{div}\mathfrak{S}^\times = -\frac{\mathfrak{d}R^\times}{\mathfrak{d}t} - \left(\mathfrak{g}\frac{dg}{dt}\right) - (gK^\times), \tag{6_{11}}$$

also nach (17_2)

$$Q^\times + \operatorname{div}\mathfrak{S}^\times = -\frac{\mathfrak{d}R^\times}{\mathfrak{d}t} - \left(L^\times + (gK^\times)\right). \tag{6_{12}}$$

Das stimmt mit der hier abgeleiteten Gleichung (V_8) (S. 142) überein, nur mit $\mathfrak{E}^\times$ und $\mathfrak{H}^\times$ für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in den Definitionen von L, K, $X_x, \ldots$, so daß die beiden Rechnungsweisen und Ansätze sich kontrollieren und bestätigen. Doch geht die Bedeutung der Max Abrahamschen Theorie selbstverständlich darüber hinaus.

Zufolge (4) und (18_1) ergibt sich

$$\psi = (g\mathfrak{g}) - X_x^\times - Y_y^\times - Z_z^\times = -(X^\times - g\mathfrak{g})_x - (Y^\times - g\mathfrak{g})_y - (Z^\times - g\mathfrak{g})_z. \tag{18_3}$$

Zu den „relativen" Spannungen werden so „absolute" Spannungen

$$\left\{\begin{aligned} X_x &= X_x^\times - g_x\mathfrak{g}_x, & Y_x &= Y_x^\times - g_x\mathfrak{g}_y, & Z_x &= Z_x^\times - g_x\mathfrak{g}_z, \\ X_y &= X_y^\times - g_y\mathfrak{g}_x, & Y_y &= Y_y^\times - g_y\mathfrak{g}_y, & Z_y &= Z_y^\times - g_y\mathfrak{g}_z, \\ X_z &= X_z^\times - g_z\mathfrak{g}_x; & Y_z &= Y_z^\times - g_z\mathfrak{g}_y; & Z_z &= Z_z^\times - g_z\mathfrak{g}_z; \end{aligned}\right. \tag{21}$$

zugeordnet, aus denen folgt

$$(2_2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{K}_x &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{g}_x}{\partial t}, \\ \mathfrak{K}_y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{g}_y}{\partial t}, \\ \mathfrak{K}_z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{g}_z}{\partial t} \end{aligned}\right.$$

und

$$(18_4)\quad \psi = -(X_x + Y_y + Z_z).$$

Wir haben dann

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} X_y - Y_x &= X_y^\times - Y_x^\times + (g_x \mathfrak{g}_y - g_y \mathfrak{g}_x) = X_y^\times - Y_x^\times + [g\,\mathfrak{g}]_z, \\ Y_z - Z_y &= Y_z^\times - Z_y^\times + (g_y \mathfrak{g}_z - g_z \mathfrak{g}_y) = Y_z^\times - Z_y^\times + [g\,\mathfrak{g}]_x, \\ Z_x - X_z &= Z_x^\times - X_z^\times + (g_z \mathfrak{g}_x - g_x \mathfrak{g}_z) = Z_x^\times - X_z^\times + [g\,\mathfrak{g}]_y. \end{aligned}\right.$$

Nun wird von den absoluten Spannungen in bekannter Weise verlangt, daß sie kein Drehungsmoment besitzen. Also soll sein

$$(23_1)\quad -[g\,\mathfrak{g}]_x = Y_z^\times - Z_y^\times, \quad -[g\,\mathfrak{g}]_y = Z_x^\times - X_z^\times, \quad -[g\,\mathfrak{g}]_z = X_y^\times - Y_x^\times,$$

d. h. nach (5)

$$(23_2)\quad [g\,\mathfrak{g}] = -4\pi[\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times].$$

Da $\left(g[g\,\mathfrak{g}]\right) = 0$ und entsprechend $\left(\mathfrak{g}[g\,\mathfrak{g}]\right) = 0$ ist, so führt die obige Gleichung zu zwei Bedingungsgleichungen, nämlich

$$(24_1)\quad \left(g[\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times]\right) = -\left(g[\mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times]\right),$$

$$(25_1)\quad \left(\mathfrak{g}[\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times]\right) = -\left(\mathfrak{g}[\mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times]\right),$$

oder nach (f) (S. 120)

$$(24_2)\quad \left(\mathfrak{E}^\times [g\,\mathfrak{D}^\times]\right) = -\left(\mathfrak{H}^\times [g\,\mathfrak{B}^\times]\right),$$

$$(25_2)\quad \left(\mathfrak{E}^\times [\mathfrak{g}\,\mathfrak{D}^\times]\right) = -\left(\mathfrak{H}^\times [\mathfrak{g}\,\mathfrak{B}^\times]\right).$$

Diese Bedingungsgleichungen finden sich zwar bei Max Abraham nicht, er benutzt statt ihrer die Gleichung (23_2) selbst. Im Grunde aber besagen diese Bedingungsgleichungen nur, daß die Beziehungen zwischen den $\mathfrak{E}^\times, \mathfrak{H}^\times$ und $\mathfrak{B}^\times, \mathfrak{D}^\times$ so zu wählen sind, daß die absoluten Spannungen kein Drehungsmoment geben, und das wird in allen Theorien zu untersuchen sein.

Zuletzt sei noch erwähnt, daß nach (8), (12) und (18_1) für $\mathfrak{S}^\times$ auch der Ausdruck benutzt werden darf

$$(26_1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S}^\times = C_0[\mathfrak{E}^\times \mathfrak{H}^\times] &+ 4\pi g\left(\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times\right) \\ &- 4\pi\,\mathfrak{D}^\times\left(g\,\mathfrak{E}^\times\right) - 4\pi\,\mathfrak{B}^\times\left(g\,\mathfrak{H}^\times\right) + g\left(g\,\mathfrak{g}\right) \end{aligned}\right.$$

oder zufolge der Gleichungen (h_2) usf. auf S. 120f.

$$(26_2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S}^\times = C_0\Big[\Big(\mathfrak{E}^\times - \frac{4\pi}{C_0}[g\,\dot{\mathfrak{B}}^\times]\Big),\ \Big(\mathfrak{H}^\times + \frac{4\pi}{C_0}[g\,\mathfrak{D}^\times]\Big)\Big] \\ - \frac{(4\pi)^2}{C_0}\,g\big(g[\mathfrak{D}^\times\,\mathfrak{B}^\times]\big) + g(g\,\mathfrak{g})\,. \end{aligned}\right.$$

Wir folgen nun Max Abraham in der Diskussion der bisher behandelten Theorien, wiederum mit den uns erforderlich scheinenden Änderungen.

1. Die Maxwell-Hertzsche Theorie nimmt an

(a) $4\pi\,\mathfrak{D}^\times = K\,\mathfrak{E}^\times$, (b) $4\pi\,\mathfrak{B}^\times = \mu\,\mathfrak{H}^\times$,

(c) $\mathfrak{E}^\times = \mathfrak{E}$, (d) $\mathfrak{H}^\times = \mathfrak{H}$,

(e) $\mathfrak{D}^\times = \mathfrak{D}$, (f) $\mathfrak{B}^\times = \mathfrak{B}$.

Hiernach sind die Bedingungsgleichungen (24_1), (25_1) identisch erfüllt, welchen Wert auch $\mathfrak{g}$ haben möge, da nach diesen Annahmen $[\mathfrak{E}^\times\,\mathfrak{D}]$, $[\mathfrak{H}^\times\,\mathfrak{B}]$ überhaupt Null sind. Ferner folgt nach (17_1) $L^\times = 0$, also nach (17_2) und nach (23_2)

$$\Big(\mathfrak{g}\,\overline{\frac{dg}{dt}}\Big) = 0\,,\qquad [\mathfrak{g}\,g] = 0\,,$$

woraus zu schließen ist

$$(g)\qquad \mathfrak{g} = 0\,.$$

Sodann haben wir infolgedessen nach (21)

$$(h)\quad \left\{\begin{aligned} X_x^\times = X_x\,,\quad Y_y^\times = Y_y\,,\quad Z_z^\times = Z_z\,,\quad X_y^\times = X_y\,,\quad Y_z^\times = Y_z\,, \\ Z_x^\times = Z_x\,,\quad Y_x^\times = Y_x\,,\quad Z_y^\times = Z_y\,,\quad X_z^\times = Z_x\,. \end{aligned}\right.$$

Die relativen Spannungen sind schon absolute, und es ist auch

$$(i)\qquad X_y^\times = Y_x^\times\,,\quad Y_z^\times = Z_y^\times\,,\quad Z_x^\times = X_z^\times\,.$$

Weiter wird nach (5)

$$(k)\qquad N = 0$$

und nach (18_2)

$$(l)\quad \left\{\begin{aligned} \psi = R^\times &= \frac{4\pi}{2}\big(\overline{\mathfrak{E}^\times\,\mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times\,\mathfrak{B}^\times}\big) = \frac{1}{2}\,(K\,\mathfrak{E}^{\times 2} + \mu\,\mathfrak{H}^{\times 2}) \\ &= \frac{(4\pi)^2}{2}\Big(\frac{\mathfrak{D}^{\times 2}}{K} + \frac{\mathfrak{B}^{\times 2}}{\mu}\Big) \end{aligned}\right.$$

und nach (19)

$$(m)\qquad \big(g\,\mathfrak{K}\big) = \big(g\,\overline{K^\times}\big)$$

überhaupt

$$(n)\qquad \mathfrak{K} = K^\times\,.$$

Hiernach als Energiegleichung

$$(o_1)\qquad Q^\times + \operatorname{div}\mathfrak{S}^\times = -\frac{\mathfrak{d}R^\times}{\mathfrak{d}t} - \big(g\,\overline{K^\times}\big)\,,$$

$$(o_2)\qquad Q^\times + \operatorname{div}\mathfrak{P}^\times = -\frac{\mathfrak{d}R^\times}{\mathfrak{d}t} + P^\times - R^\times \operatorname{div} g\,,$$

$$(o_3)\qquad Q^\times + \operatorname{div}\overline{\mathfrak{S}}^\times = -\frac{\partial R^\times}{\partial t} - \big(g\,\overline{K^\times}\big)\,,$$

wie S. 150f. Gehen wir von der hier S. 188ff. vorgeschlagenen Änderung der Maxwell-Hertzschen Theorie aus, so verbinden wir sie zunächst mit der Annahme, daß in allen voraufgeschriebenen Formeln statt $\mathfrak{D}^\times$ und $\mathfrak{B}^\times$ gesetzt wird

$$\left(1 - \varkappa \frac{K_0}{K}\right)\mathfrak{D}^\times, \qquad \left(1 - \varkappa \frac{\mu_0}{\mu}\right)\mathfrak{B}^\times.$$

Hiernach soll sein, indem hier bei den weiteren Größen Akzente benutzt werden,

$$(\mathrm{a}')\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} X'_x &= \left(1 - \varkappa \frac{K_0}{K}\right)\left(\mathfrak{E}_x^\times \mathfrak{D}_x^\times - \frac{1}{2}\overline{(\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times)}\right) \\
&\qquad + \left(1 - \varkappa \frac{\mu_0}{\mu}\right)\left(\mathfrak{H}_x^\times \mathfrak{B}_x^\times - \frac{1}{2}\overline{(\mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times)}\right), \\
\frac{1}{4\pi} X'_y &= \left(1 - \varkappa \frac{K_0}{K}\right)\mathfrak{E}_x^\times \mathfrak{D}_y^\times + \left(1 - \varkappa \frac{\mu_0}{\mu}\right)\mathfrak{H}_x^\times \mathfrak{B}_y^\times, \\
\frac{1}{4\pi} X'_z &= \left(1 - \varkappa \frac{K_0}{K}\right)\mathfrak{E}_x^\times \mathfrak{D}_z^\times + \left(1 - \varkappa \frac{\mu_0}{\mu}\right)\mathfrak{H}_x^\times \mathfrak{B}_z^\times; \\
\frac{1}{4\pi} Y'_x &= \left(1 - \varkappa \frac{K_0}{K}\right)\mathfrak{E}_y^\times \mathfrak{D}_x^\times + \left(1 - \varkappa \frac{\mu_0}{\mu}\right)\mathfrak{H}_y^\times \mathfrak{B}_x^\times, \\
\frac{1}{4} Y'_y &= \left(1 - \varkappa \frac{K_0}{K}\right)\left(\mathfrak{E}_y^\times \mathfrak{D}_y^\times - \frac{1}{2}\overline{(\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times)}\right) \\
&\qquad + \left(1 - \varkappa \frac{\mu_0}{\mu}\right)\left(\mathfrak{H}_y^\times \mathfrak{B}_y^\times - \frac{1}{2}\overline{(\mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times)}\right), \\
\frac{1}{4\pi} Y'_z &= \left(1 - \varkappa \frac{K_0}{K}\right)\mathfrak{E}_y^\times \mathfrak{D}_z^\times + \left(1 - \varkappa \frac{\mu_0}{\mu}\right)\mathfrak{H}_y^\times \mathfrak{B}_z^\times; \\
\frac{1}{4\pi} Z'_x &= \left(1 - \varkappa \frac{K_0}{K}\right)\mathfrak{E}_z^\times \mathfrak{D}_x^\times + \left(1 - \varkappa \frac{\mu_0}{\mu}\right)\mathfrak{H}_z^\times \mathfrak{B}_x^\times, \\
\frac{1}{4\pi} Z'_y &= \left(1 - \varkappa \frac{K_0}{K}\right)\mathfrak{E}_z^\times \mathfrak{D}_y^\times + \left(1 - \varkappa \frac{\mu_0}{\mu}\right)\mathfrak{H}_z^\times \mathfrak{B}_y^\times, \\
\frac{1}{4\pi} Z'_z &= \left(1 - \varkappa \frac{K_0}{K}\right)\left(\mathfrak{E}_z^\times \mathfrak{D}_z^\times - \frac{1}{2}\overline{(\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times)}\right) \\
&\qquad + \left(1 - \varkappa \frac{\mu_0}{\mu}\right)\left(\mathfrak{H}_z^\times \mathfrak{B}_z^\times - \frac{1}{2}\overline{(\mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times)}\right).
\end{aligned}\right.$$

Indem aber wieder

$$(\mathrm{b}')\qquad X'_y = Y'_x, \qquad Y'_z = Z'_y, \qquad Z'_x = X'_z$$

ist, wird nach (5) abermals

$$(\mathrm{c}')\qquad N = 0.$$

Sodann auch

$$[g\,\mathfrak{g}] = 0$$

und

$$(\mathrm{d}')\qquad \mathfrak{g} = 0.$$

Die Gleichungen (24) und (25) sind identisch erfüllt. Da L' auch jetzt gleich Null wird, so bleibt als Energiegleichung nach (V_{10}) (S. 143)

$$(\mathrm{e}')\qquad Q' + \mathrm{div}\,\mathfrak{S}' = -\frac{\partial R'}{\partial t} - \overline{(g K')}.$$

Darin hat R' entsprechenden Wert wie früher R, nämlich

(f′) $$R' = \frac{4\pi}{2}\left\{\left(1 - \varkappa\frac{K_0}{K}\right)\left(\underline{\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times}\right) + \left(1 - \varkappa\frac{\mu_0}{\mu}\right)\left(\underline{\mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times}\right)\right\},$$

ebenso

(g′) $$Q' = 4\pi\left(\underline{\mathfrak{E}^\times J}\right).$$

Für $\mathfrak{S}'$ gelten an Stelle von (XVII) (S. 143) die Beziehungen

(h′) $$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{S}'_x &= \mathfrak{P}^\times_x + \left\{\left(1 - \varkappa\frac{K_0}{K}\right)\left(\underline{\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times}\right) + \left(1 - \varkappa\frac{\mu_0}{\mu}\right)\left(\underline{\mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times}\right)\right\} g_x \\ &\qquad - (g_x X'_x + g_y Y'_x + g_z Z'_x)\,, \\ \mathfrak{S}'_y &= \mathfrak{P}^\times_y + \left\{\left(1 - \varkappa\frac{K_0}{K}\right)\left(\underline{\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times}\right) + \left(1 - \varkappa\frac{\mu_0}{\mu}\right)\left(\underline{\mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times}\right)\right\} g_y \\ &\qquad - (g_x X'_y + g_y Y'_y + g_z Z'_y)\,, \\ \mathfrak{S}'_z &= \mathfrak{P}^\times_z + \left\{\left(1 - \varkappa\frac{K_0}{K}\right)\left(\underline{\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times}\right) + \left(1 - \varkappa\frac{\mu_0}{\mu}\right)\left(\underline{\mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times}\right)\right\} g_z \\ &\qquad - (g_x X'_z + g_y Y'_z + g_z Z'_z)\,, \end{aligned}\right.$$

woselbst den $X'_x, \ldots, Z'_z$ die neuen Werte unter (a′) zukommen. Die Größen K' behalten die Definitionen nach (XVI) (S. 142) ebenfalls mit den neuen Werten von $X'_x, \ldots, Z'_z$. Die Größe $\mathfrak{P}$ ändert sich nicht und bleibt

(i′) $$\mathfrak{P}^\times = C_0[\mathfrak{E}^\times \mathfrak{H}^\times]\,.$$

Auch $\mathfrak{S}'$ behält seine Definitionsgleichungen (XV) (S. 142) mit den neuen Werten von $X'_x, \ldots, Z'_z$.

2. Nach den Ansätzen von E. Cohn ist mit $K_0 = \mu_0 = 1$ (S. 196)

(a) $$4\pi\mathfrak{D}^\times = K\mathfrak{E}^\times - \frac{1}{C_0}[g\mathfrak{H}^\times]\,,$$

(b) $$4\pi\mathfrak{B}^\times = \mu\mathfrak{H}^\times + \frac{1}{C_0}[g\mathfrak{E}^\times]\,.$$

Zur Berechnung von $\mathfrak{g}$ nach (17_1) haben wir

$$\mathfrak{E}^\times\frac{d\mathfrak{D}^\times}{dt} - \mathfrak{D}^\times\frac{d\mathfrak{E}^\times}{dt} = -\frac{1}{4\pi C_0}\mathfrak{E}^\times\frac{d[g\mathfrak{H}^\times]}{dt} + \frac{1}{4\pi C_0}[g\mathfrak{H}^\times]\frac{d\mathfrak{E}^\times}{dt}\,,$$

$$\mathfrak{H}^\times\frac{d\mathfrak{B}^\times}{dt} - \mathfrak{B}^\times\frac{d\mathfrak{H}^\times}{dt} = +\frac{1}{4\pi C_0}\mathfrak{H}^\times\frac{d[g\mathfrak{E}^\times]}{dt} - \frac{1}{4\pi C_0}[g\mathfrak{E}^\times]\frac{d\mathfrak{H}^\times}{dt}\,.$$

Nun ist

$$\mathfrak{E}^\times\frac{d[g\mathfrak{H}^\times]}{dt} = \mathfrak{E}^\times\left(\left[\frac{dg}{dt}\mathfrak{H}^\times\right] + \left[g\frac{d\mathfrak{H}^\times}{dt}\right]\right).$$

Hiernach wird

$$\left(\mathfrak{E}^\times\left[\frac{dg}{dt}\mathfrak{H}^\times\right]\right)=\mathfrak{E}_x^\times\left(\frac{dg_y}{dt}\mathfrak{H}_z^\times-\frac{dg_z}{dt}\mathfrak{H}_y\right)+\mathfrak{E}_y^\times\left(\frac{dg_z}{dt}\mathfrak{H}_x^\times-\frac{dg_z}{dt}\mathfrak{H}_z^\times\right)$$

$$+\mathfrak{E}_z^\times\left(\frac{dg_x}{dt}\mathfrak{H}_y^\times-\frac{dg_y}{dt}\mathfrak{H}_x^\times\right)$$

$$=\frac{dg_x}{dt}(\mathfrak{H}_y^\times\mathfrak{E}_z^\times-\mathfrak{H}_z^\times\mathfrak{E}_y^\times)+\frac{dg_y}{dt}(\mathfrak{H}_z^\times\mathfrak{E}_x^\times-\mathfrak{H}_x^\times\mathfrak{E}_z^\times)+\frac{dg_z}{dt}(\mathfrak{H}_x^\times\mathfrak{E}_y^\times-\mathfrak{H}_y^\times\mathfrak{E}_x^\times)$$

$$=\left(\frac{dg}{dt}[\mathfrak{H}^\times\mathfrak{E}^\times]\right)=-\left(\frac{dg}{dt}[\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}^\times]\right).$$

Analog ist

$$\left(\mathfrak{E}^\times\left[g\frac{d\mathfrak{H}^\times}{dt}\right]\right)=-\left(g\left[\mathfrak{E}^\times\frac{d\mathfrak{H}^\times}{dt}\right]\right),$$

$$\left(\frac{d\mathfrak{E}^\times}{dt}[g\mathfrak{H}^\times]\right)=-\left(g\left[\frac{d\mathfrak{E}^\times}{dt}\mathfrak{H}^\times\right]\right)\quad\text{usf.}$$

Also bekommen wir

$$2C_0\left(\mathfrak{g}\frac{dg}{dt}\right)=\left(2\frac{dg}{dt}[\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}^\times]+g\left[\mathfrak{E}^\times\frac{d\mathfrak{H}^\times}{dt}\right]-g\left[\mathfrak{H}^\times\frac{d\mathfrak{E}^\times}{dt}\right]-g\left[\frac{d\mathfrak{E}^\times}{dt}\mathfrak{H}^\times\right]+g\left[\frac{d\mathfrak{H}^\times}{dt}\mathfrak{E}^\times\right]\right)$$

oder

$$(c_1)\qquad\left(\mathfrak{g}\frac{dg}{dt}\right)=\frac{1}{C_0}\left([\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}^\times]\frac{dg}{dt}\right).$$

Hiernach kann man, wie es Max Abraham tut, setzen

$$(c_2)\qquad\mathfrak{g}=\frac{1}{C_0}[\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}^\times]=\frac{\mathfrak{P}^\times}{C_0^2}.$$

Dieser Wert genügt auch der Gleichung (23_2). Man hat nämlich aus diesem Werte zufolge (g_1) (S. 120)

$$C_0[g\mathfrak{g}]=[g[\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}^\times]]=[\mathfrak{E}^\times[g\mathfrak{H}^\times]]-[\mathfrak{H}^\times[g\mathfrak{E}^\times]],$$

also da nach (a), (b)

$$\frac{1}{C_0}[g\mathfrak{H}^\times]=K\mathfrak{E}^\times-4\pi\mathfrak{D}^\times,\qquad\frac{1}{C_0}[g\mathfrak{E}^\times]=4\pi\mathfrak{B}^\times-\mu\mathfrak{H}^\times$$

sein soll,

$$[g\mathfrak{g}]=K[\mathfrak{E}^\times\mathfrak{E}^\times]+\mu[\mathfrak{H}^\times\mathfrak{H}^\times]-4\pi[\mathfrak{E}^\times\mathfrak{D}^\times]-4\pi[\mathfrak{H}^\times\mathfrak{B}^\times],$$

d. h.

$$[g\mathfrak{g}]=-4\pi([\mathfrak{E}^\times\mathfrak{D}^\times]+[\mathfrak{H}^\times\mathfrak{B}^\times])$$

entsprechend Gleichung (23_2).

Auch den Gleichungen (24) und (25) genügen die Annahmen. Es ist nach Cohns Ansätzen

$$(g[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{E}^\times])=\frac{K}{4\pi}(g[\mathfrak{E}^\times\mathfrak{E}^\times])-\frac{1}{4\pi C_0}(g[[g\mathfrak{H}^\times]\mathfrak{E}^\times])=+\frac{1}{4\pi C_0}(g[\mathfrak{E}^\times[g\mathfrak{H}^\times]]).$$

Analog haben wir

$$\left(\overline{g[\mathfrak{B}^\times\mathfrak{H}^\times]}\right) = \frac{\mu}{4\pi}\left(\overline{g[\mathfrak{H}^\times\mathfrak{H}^\times]}\right) + \frac{1}{4\pi C_0}\left(\overline{g[[g\,\mathfrak{E}^\times]\mathfrak{H}^\times]}\right) = -\frac{1}{4\pi C_0}\left(\overline{g[\mathfrak{H}^\times[g\,\mathfrak{E}^\times]]}\right).$$

Es müßte also sein

$$\left(\overline{g[\mathfrak{E}^\times[g\,\mathfrak{H}^\times]]}\right) = \left(\overline{g[\mathfrak{H}^\times[g\,\mathfrak{E}^\times]]}\right).$$

Nach (g) (S. 120) ist nun

$$[\mathfrak{E}^\times[g\,\mathfrak{H}^\times]] = g\left(\overline{\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}^\times}\right) - \mathfrak{H}^\times\left(\overline{\mathfrak{E}^\times g}\right),$$

$$[\mathfrak{H}^\times[g\,\mathfrak{E}^\times]] = g\left(\overline{\mathfrak{H}^\times\mathfrak{E}^\times}\right) - \mathfrak{E}^\times\left(\overline{\mathfrak{H}^\times g}\right).$$

Wir bekommen hiernach

$$g^2\left(\overline{\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}^\times}\right) - \left(\overline{g\,\mathfrak{H}^\times}\right)\left(\overline{\mathfrak{E}^\times g}\right) = g^2\left(\overline{\mathfrak{H}^\times\mathfrak{E}^\times}\right) - \left(\overline{g\,\mathfrak{E}^\times}\right)\left(\overline{\mathfrak{H}^\times g}\right)$$

eine Identität. Die Bedingung (24) wird hiernach durch die Cohnschen Ansätze erfüllt.

Um die Gleichung (25) zu prüfen, haben wir

$$\left(\overline{\mathfrak{g}[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{E}^\times]}\right) = \left(\overline{\mathfrak{g}\left[\frac{K}{4\pi}\,\mathfrak{E}^\times\mathfrak{E}^\times - \frac{1}{4\pi C_0}\,\mathfrak{E}^\times[g\,\mathfrak{H}^\times]\right]}\right) = -\frac{1}{4\pi C_0}\left(\overline{\mathfrak{g}[\mathfrak{E}^\times[g\,\mathfrak{H}^\times]]}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi C_0}\left(\overline{\mathfrak{g}_x[\mathfrak{E}^\times[g\,\mathfrak{H}^\times]]_x + \mathfrak{g}_y[\mathfrak{E}^\times[g\,\mathfrak{H}^\times]]_y + \mathfrak{g}_z[\mathfrak{E}^\times[g\,\mathfrak{H}^\times]]_z}\right).$$

Wenden wir die Gleichungen unter (g) (S. 120) an, so folgt

$$-4\pi C_0\left(\overline{\mathfrak{g}[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{E}^\times]}\right) = (\mathfrak{g}_x g_x + \mathfrak{g}_y g_y + \mathfrak{g}_z g_z)\left(\overline{\mathfrak{H}^\times\mathfrak{E}^\times}\right) - (\mathfrak{g}_x\mathfrak{H}_x^\times + \mathfrak{g}_y\mathfrak{H}_y^\times + \mathfrak{g}_z\mathfrak{H}_z^\times)\left(\overline{\mathfrak{E}^\times g}\right).$$

Entsprechend wird

$$+4\pi C_0\left(\overline{\mathfrak{g}[\mathfrak{B}^\times\mathfrak{H}^\times]}\right) = (\mathfrak{g}_x g_x + \mathfrak{g}_y g_y + \mathfrak{g}_z g_z)\left(\overline{\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}^\times}\right) - (\mathfrak{g}_x\mathfrak{E}_x^\times + \mathfrak{g}_y\mathfrak{E}_y^\times + \mathfrak{g}_z\mathfrak{E}_z^\times)\left(\overline{\mathfrak{H}^\times g}\right).$$

Die Gleichung (25) geht also über in

$$\left(\overline{\mathfrak{g}\,\mathfrak{H}^\times}\right)\left(\overline{g\,\mathfrak{E}^\times}\right) = \left(\overline{\mathfrak{g}\,\mathfrak{E}^\times}\right)\left(\overline{g\,\mathfrak{H}^\times}\right).$$

In Cohns Theorie ist nun [Gleichungen (f) (S. 120)]

$$\left(\overline{\mathfrak{g}\,\mathfrak{H}^\times}\right) = \left(\overline{\mathfrak{H}^\times\mathfrak{g}}\right) = \frac{1}{C_0^2}\left(\overline{\mathfrak{H}^\times[\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}^\times]}\right) = \frac{1}{C_0^2}\left(\overline{\mathfrak{E}^\times[\mathfrak{H}^\times\mathfrak{H}^\times]}\right) = 0$$

und ebenso

$$\left(\overline{\mathfrak{g}\,\mathfrak{E}^\times}\right) = \left(\overline{\mathfrak{E}^\times\mathfrak{g}}\right) = \frac{1}{C_0^2}\left(\overline{\mathfrak{E}^\times[\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}^\times]}\right) = \frac{1}{C_0^2}\left(\overline{\mathfrak{H}^\times[\mathfrak{E}^\times\mathfrak{E}^\times]}\right) = 0.$$

Also könnte man auch die Gleichung (25) als erfüllt ansehen, weil sie in der Form

$$0\left(\overline{g\,\mathfrak{E}^\times}\right) = 0\left(\overline{g\,\mathfrak{H}^\times}\right)$$

erscheint. Doch ist das freilich eher eine unbestimmte Gleichung, weil ja $\left(\overline{g\,\mathfrak{E}^\times}\right)$ und $\left(\overline{g\,\mathfrak{H}^\times}\right)$ einander nicht gleich sind. So daß mir von dieser Seite ein Zweifel an der Vereinbarkeit der Cohnschen Ansätze mit der allgemeinen Theorie von Max Abraham nicht unberechtigt erschiene.

Die Energiedichte ψ ergibt sich aus (18_1) und (c_2) zu

$$(d_1)\qquad \psi = + \frac{4\pi}{2}\left(\overline{\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times}\right) + \frac{1}{C_0}\left(\overline{g[\mathfrak{E}^\times \mathfrak{H}^\times]}\right).$$

Das erste Glied ist nach (a) und (b)

$$\frac{K}{2}\mathfrak{E}^{\times 2} + \frac{\mu}{2}\mathfrak{H}^{\times 2} - \frac{1}{2C_0}\left(\overline{\mathfrak{E}^\times [g\mathfrak{H}^\times] - \mathfrak{H}^\times [g\mathfrak{E}^\times]}\right)$$

$$= \frac{K}{2}\mathfrak{E}^{\times 2} + \frac{\mu}{2}\mathfrak{H}^{\times 2} - \frac{1}{2C_0}\left(\overline{g[\mathfrak{H}^\times \mathfrak{E}^\times] - g[\mathfrak{E}^\times \mathfrak{H}^\times]}\right),$$

letzteres nach (f) (S. 120), also fällt wegen $[AB] = -[BA]$ das mit $\frac{1}{2C_0}$ multiplizierte Glied mit dem zweiten Glied in ψ zusammen, und es kommt

$$(d_2)\qquad \psi = \frac{K}{2}\mathfrak{E}^{\times 2} + \frac{\mu}{2}\mathfrak{H}^{\times 2} + \frac{2}{C_0}\left(\overline{g[\mathfrak{E}^\times \mathfrak{H}^\times]}\right) = \frac{K}{2}\mathfrak{E}^{\times 2} + \frac{\mu}{2}\mathfrak{H}^{\times 2} + \frac{2}{C_0^2}\left(\overline{g\,\mathfrak{P}^\times}\right).$$

3. Wir nehmen noch an, daß auch in der Lorentzschen Theorie $\mathfrak{H}^\times$ der Gleichung (1a) (S. 242), welches der früher (40b) (S. 222) mit $\mathfrak{H}'$ bezeichneten Größe entspricht, die beobachtbare magnetische Kraft sein soll. Wir haben dann mit $K_0 = \mu_0 = 1$ aus (E_5a), (H) (S. 208) und (D_2a, b) (S. 210)

$$(a_1)\qquad 4\pi\mathfrak{D}^\times = K\mathfrak{E}^\times - K_0\frac{\mu}{C_0}[g\mathfrak{H}],$$

$$(b_1)\qquad 4\pi\mathfrak{B}^\times = \mu\mathfrak{H}^\times + \frac{\mu}{C_0}K_0[g\mathfrak{E}],$$

$$(c)\qquad \mathfrak{E}^\times = \mathfrak{E} + \frac{\mu}{C_0}[g\mathfrak{H}],$$

$$(d)\qquad \mathfrak{H}^\times = \mathfrak{H} - \frac{K_0}{C_0}[g\mathfrak{E}].$$

Die letzte Gleichung ist die für $\mathfrak{H}'$ [nach (D_2b) S. 210] in Lorentz' Theorie, welche nicht die beobachtbare magnetische Feldintensität darstellt, da das eigentliche $\mathfrak{H}^\times = \mathfrak{H}$ ist [Gleichung (H) S. 208]. Indessen wird diese Gleichung wie die Gleichung (b_1) der Symmetrie wegen angenommen. Wir lassen sie darum hier stehen (S. 257).

Hiernach wird nach (e_1) (S. 120)

$$[\mathfrak{E}^\times \mathfrak{D}^\times] = \frac{K}{4\pi}[\mathfrak{E}^\times \mathfrak{E}^\times] - \frac{\mu}{4\pi C_0}K_0[\mathfrak{E}^\times [g\mathfrak{H}]] = -\frac{\mu}{4\pi C_0}K_0[\mathfrak{E}^\times [g\mathfrak{H}]],$$

$$[\mathfrak{H}^\times \mathfrak{B}^\times] = \frac{\mu}{4\pi}[\mathfrak{H}^\times \mathfrak{H}^\times] + \frac{\mu}{4\pi C_0}K_0[\mathfrak{H}^\times [g\mathfrak{E}]] = +\frac{\mu}{4\pi C_0}K_0[\mathfrak{H}^\times [g\mathfrak{E}]].$$

Also sollte nach (24) sein

$$\left(\overline{g[\mathfrak{E}^\times [g\mathfrak{H}]]}\right) = \left(\overline{g[\mathfrak{H}^\times [g\mathfrak{E}]]}\right),$$

d. h. nach (g) (S. 120)

$$\left(\overline{g(g(\mathfrak{E}^\times \mathfrak{H}) - \mathfrak{H}(\mathfrak{E}^\times g))}\right) = \left(\overline{g(g(\mathfrak{H}^\times \mathfrak{E}) - \mathfrak{E}(\mathfrak{H}^\times g))}\right).$$

Diese Gleichung aber gäbe

$$g^2(\mathfrak{E}^\times \mathfrak{H}) - (g\mathfrak{H})(\mathfrak{E}^\times g) = g^2(\mathfrak{H}^\times \mathfrak{E}) - (g\mathfrak{E})(\mathfrak{H}^\times g)\,.$$

Hierin nun ist nach (c), (d)

$$(\mathfrak{E}^\times \mathfrak{H}) = (\mathfrak{E}\mathfrak{H}) + \frac{\mu}{C_0}(\mathfrak{H}[g\mathfrak{H}]) = (\mathfrak{E}\mathfrak{H})\,,$$

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{H}^\times) = (\mathfrak{E}\mathfrak{H}) - \frac{K_0}{C_0}(\mathfrak{E}[g\mathfrak{E}]) = (\mathfrak{E}\mathfrak{H})\,.$$

Die Glieder mit g^2 heben sich auf. Ferner wird

$$(\mathfrak{E}^\times g) = (\mathfrak{E}g) + \frac{\mu}{C_0}(g[g\mathfrak{H}]) = (\mathfrak{E}g)\,,$$

$$(\mathfrak{H}^\times g) = (\mathfrak{H}g) - \frac{K_0}{C_0}(g[g\mathfrak{E}]) = (\mathfrak{H}g)\,.$$

Also heben sich auch die beiden anderen Glieder auf, und die Gleichung **(24)** zeigt sich identisch erfüllt. Zur Prüfung der anderen Gleichungen ist $\mathfrak{g}$ nach **(17_1)** zu berechnen. Es ist nach (a_1), (b_1)

$$(e_1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{E}^\times \frac{d\mathfrak{D}^\times}{dt} - \mathfrak{D}^\times \frac{d\mathfrak{E}^\times}{dt} &= +\frac{K}{4\pi}\mathfrak{E}^\times \frac{d\mathfrak{E}^\times}{dt} - \frac{\mu}{4\pi C_0}K_0\mathfrak{E}^\times\left[\frac{dg}{dt}\mathfrak{H}\right] - \frac{\mu}{4\pi C_0}K_0\mathfrak{E}^\times\left[g\frac{d\mathfrak{H}}{dt}\right] \\ &\qquad - \frac{K}{4\pi}\mathfrak{E}^\times\frac{d\mathfrak{E}^\times}{dt} + K_0\frac{\mu}{4\pi C_0}\frac{d\mathfrak{E}^\times}{dt}[g\mathfrak{H}] \\ &= +K_0\frac{\mu}{4\pi C_0}\left(\frac{d\mathfrak{E}^\times}{dt}[g\mathfrak{H}] - \mathfrak{E}^\times\frac{d}{dt}[g\mathfrak{H}]\right).\end{aligned}\right.$$

Entsprechend wird

$$(e_2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{H}^\times \frac{d\mathfrak{B}^\times}{dt} - \mathfrak{B}^\times \frac{d\mathfrak{H}^\times}{dt} &= \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}^\times \frac{d\mathfrak{H}^\times}{dt} + \frac{\mu}{4\pi C_0}K_0\mathfrak{H}^\times\left[\frac{dg}{dt}\mathfrak{E}\right] + \frac{\mu}{4\pi C_0}K_0\mathfrak{H}^\times\left[g\frac{d\mathfrak{E}^\times}{dt}\right] \\ &\qquad - \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}^\times\frac{d\mathfrak{H}^\times}{dt} - \frac{\mu}{4\pi C_0}K_0\frac{d\mathfrak{H}^\times}{dt}[g\mathfrak{E}] \\ &= -\frac{\mu}{4\pi C_0}K_0\left(\frac{d\mathfrak{H}^\times}{dt}[g\mathfrak{E}] - \mathfrak{H}^\times\frac{d}{dt}[g\mathfrak{E}]\right).\end{aligned}\right.$$

Setzt man für $\mathfrak{E}^\times$ und $\mathfrak{H}^\times$ die Werte ein, so erhält man als Summe dieser beiden Beziehungen

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{4\pi C_0}K_0\Big(\frac{d\mathfrak{E}}{dt}[g\mathfrak{H}] - \frac{d\mathfrak{H}}{dt}[g\mathfrak{E}] + \frac{\mu}{C_0}\frac{d[g\mathfrak{H}]}{dt}[g\mathfrak{H}] + \frac{K_0}{C_0}\frac{d[g\mathfrak{E}]}{dt}[g\mathfrak{E}] \\ - \mathfrak{E}\frac{d[g\mathfrak{H}]}{dt} - \frac{\mu}{C_0}\frac{d[g\mathfrak{H}]}{dt}[g\mathfrak{H}] + \mathfrak{H}\frac{d[g\mathfrak{E}]}{dt} - \frac{K_0}{C_0}\frac{d[g\mathfrak{E}]}{dt}[g\mathfrak{E}]\Big)\end{aligned}$$

und es resultiert

$$2\left(\overline{\mathfrak{g}\frac{dg}{dt}}\right)=\frac{\mu}{C_0}K_0\left(\overline{[g\mathfrak{H}]\frac{d\mathfrak{E}}{dt}-[g\mathfrak{E}]\frac{d\mathfrak{H}}{dt}+\mathfrak{H}\frac{d[g\mathfrak{E}]}{dt}-\mathfrak{E}\frac{d[g\mathfrak{H}]}{dt}}\right)$$

$$=\frac{\mu}{C_0}K_0\left(\overline{[g\mathfrak{H}]\frac{d\mathfrak{E}}{dt}-[g\mathfrak{E}]\frac{d\mathfrak{H}}{dt}+\mathfrak{H}\left[g\frac{d\mathfrak{E}}{dt}\right]-\mathfrak{E}\left[g\frac{d\mathfrak{H}}{dt}\right]+\mathfrak{H}\left[\frac{dg}{dt}\mathfrak{E}\right]-\mathfrak{E}\left[\frac{dg}{dt}\mathfrak{H}\right]}\right)$$

$$=\frac{\mu}{C_0}K_0\left(\overline{2\frac{dg}{dt}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}\right),$$

letzteres nach (f) (S. 120), wodurch das erste und dritte und das zweite und vierte Glied in der Gesamtoperation fortfallen, und das fünfte und sechste sich wie angegeben zusammenziehen. Also haben wir

(f) $$\left(\overline{\mathfrak{g}\frac{dg}{dt}}\right)=\frac{\mu}{C_0}K_0\left(\overline{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\frac{dg}{dt}}\right),$$

woraus Max Abraham wieder schließt

(g_1) $$\mathfrak{g}=\frac{\mu}{C_0}K_0[\mathfrak{E}\mathfrak{H}],$$

was der Formel von Cohn entspricht, nur mit $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ statt $\mathfrak{E}^\times$, $\mathfrak{H}^\times$ und dem Faktor μ statt 1.

Die Gleichung (25_1) gibt hiernach

$$\left(\overline{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}][\mathfrak{D}^\times\mathfrak{E}^\times]}\right)=-\left(\overline{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}][\mathfrak{B}^\times\mathfrak{H}^\times]}\right),$$

d. h. nach (h_3) (S. 120)

$$\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}^\times}\right)\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{E}^\times}\right)-\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{D}^\times}\right)\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{E}^\times}\right)=-\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{B}^\times}\right)\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{H}^\times}\right)+\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{B}^\times}\right)\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{H}^\times}\right)$$

und zufolge (c), (d)

$$\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}^\times}\right)\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{E}+\frac{\mu}{C_0}\mathfrak{H}[g\mathfrak{H}]}\right)-\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{D}^\times}\right)\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{E}+\frac{\mu}{C_0}\mathfrak{E}[g\mathfrak{H}]}\right)$$

$$=-\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{B}^\times}\right)\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{H}-\frac{K_0}{C_0}\mathfrak{H}[g\mathfrak{E}]}\right)+\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{B}^\times}\right)\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{H}-\frac{K_0}{C_0}\mathfrak{E}[g\mathfrak{E}]}\right)$$

oder

$$\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}^\times}\right)\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{E}}\right)-\mathfrak{E}^2\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{D}^\times}\right)-\frac{\mu}{C_0}\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{D}^\times}\right)\left(\overline{\mathfrak{E}[g\mathfrak{H}]}\right)$$

$$=\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{B}^\times}\right)\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{E}}\right)-\mathfrak{H}^2\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{B}^\times}\right)+\frac{K_0}{C_0}\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{B}^\times}\right)\left(\overline{\mathfrak{H}[g\mathfrak{E}]}\right).$$

Setzen wir für $\mathfrak{D}^\times$ und $\mathfrak{B}^\times$ ihre Werte nach (a) bis (d) (S. 253) ein, nämlich

(a_2) $$\mathfrak{D}^\times=\frac{K}{4\pi}\mathfrak{E}+\frac{K-K_0}{4\pi C_0}\mu[g\mathfrak{H}],$$ (b_2) $$\mathfrak{B}^\times=\frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H},$$

so wird

$$\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}^\times}\right) = \frac{K}{4\pi}\mathfrak{E}^2 + \frac{K-K_0}{4\pi C_0}\mu\left(\overline{\mathfrak{E}[g\mathfrak{H}]}\right),$$

$$\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{D}^\times}\right) = \frac{K}{4\pi}\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{E}}\right) + \frac{K-K_0}{4\pi C_0}\mu\left(\overline{\mathfrak{H}[g\mathfrak{H}]}\right) = \frac{K}{4\pi}\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{E}}\right),$$

$$\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{B}^\times}\right) = \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}^2,$$

$$\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{B}^\times}\right) = \frac{\mu}{4\pi}\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{E}}\right).$$

Hiernach bekommen wir

$$\frac{K-K_0}{C_0}\mu\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{E}}\right)\left(\overline{\mathfrak{E}[g\mathfrak{H}]}\right) - \frac{K\mu}{C_0}\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{E}}\right)\left(\overline{\mathfrak{E}[g\mathfrak{H}]}\right) = \frac{\mu K_0}{C_0}\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{E}}\right)\left(\overline{\mathfrak{H}[g\mathfrak{E}]}\right)$$

und diese Gleichung ist nach (f) (S. 120) identisch erfüllt.

Für die Energiedichte ergibt sich nach (18_1) und (g_1)

$$(h_1)\qquad \psi = K_0\frac{\mu}{C_0}\left(\overline{g[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}\right) + \frac{4\pi}{2}\left(\overline{\mathfrak{E}^\times\mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times\mathfrak{B}^\times}\right).$$

Dieser Ausdruck läßt sich in mannigfacher Weise ausbilden. Wir rechnen ihn zunächst mit (a_1) und (b_1) (S. 253) um

$$4\pi\left(\overline{\mathfrak{E}^\times\mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times\mathfrak{B}^\times}\right) = \left(\overline{\mathfrak{E}^\times\left(K\mathfrak{E}^\times - K_0\frac{\mu}{C_0}[g\mathfrak{H}]\right) + \mathfrak{H}^\times\left(\mu\mathfrak{H}^\times + K_0\frac{\mu}{C_0}[g\mathfrak{E}]\right)}\right)$$

oder nach (c), (d) (S. 253)

$$4\pi\left(\overline{\mathfrak{E}^\times\mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times\mathfrak{B}^\times}\right)$$
$$= K\mathfrak{E}^{\times 2} + \mu\mathfrak{H}^{\times 2} - K_0\frac{\mu}{C_0}\left(\overline{\mathfrak{E}^\times(\mathfrak{E}^\times - \mathfrak{E})\frac{C_0}{\mu} + \frac{C_0}{K_0}\mathfrak{H}^\times(\mathfrak{H}^\times - \mathfrak{H})}\right),$$

d. h.

$$4\pi\left(\overline{\mathfrak{E}^\times\mathfrak{D}^\times + \mathfrak{H}^\times\mathfrak{B}^\times}\right) = (K-K_0)\,\mathfrak{E}^{\times 2} + K_0\frac{\mu}{C_0}\left(\left(\overline{\mathfrak{E}^\times\mathfrak{E}}\right)\frac{C_0}{\mu} + \left(\overline{\mathfrak{H}^\times\mathfrak{H}}\right)\frac{C_0}{K_0}\right).$$

Demnach wäre

$$(h_2)\qquad \psi = K_0\frac{\mu}{C_0}\left(\overline{g[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}\right) + \frac{K-K_0}{2}\mathfrak{E}^{\times 2} + K_0\frac{\mu}{2C_0}\left(\left(\overline{\mathfrak{E}^\times\mathfrak{E}}\right)\frac{C_0}{\mu} + \left(\overline{\mathfrak{H}^\times\mathfrak{H}}\right)\frac{C_0}{K_0}\right).$$

Wir schreiben noch nach (f) (S. 120) und nach (c), (d) (S. 253)

$$\left(\overline{g[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\mathfrak{H}[g\mathfrak{E}] - \mathfrak{E}[g\mathfrak{H}]}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\mathfrak{H}(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}^\times)\frac{C_0}{K_0} + \mathfrak{E}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^\times)\frac{C_0}{\mu}}\right),$$

also

$$\left(\overline{g[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}\right) = \frac{C_0}{2K_0}\left(\mathfrak{H}^2 - \left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{H}^\times}\right)\right) + \frac{C_0}{2\mu}\left(\mathfrak{E}^2 - \left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{E}^\times}\right)\right)$$

und erhalten hiernach

$$(\mathrm{h}_3) \qquad \psi = \frac{\mu}{2}\mathfrak{H}^2 + \frac{K_0}{2}\mathfrak{E}^2 + \frac{K-K_0}{2}\mathfrak{E}^{\times 2},$$

oder

$$(\mathrm{h}_4) \qquad \psi = \frac{K_0}{2}\mathfrak{E}^2 + \frac{\mu_0}{2}\mathfrak{H}^2 + \frac{K-K_0}{2}\mathfrak{E}^{\times 2} + \frac{\mu-\mu_0}{2}\mathfrak{H}^2,$$

oder wegen $K_0 = \mu_0 = 1$

$$(\mathrm{h}_5) \qquad \psi = \frac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2 + \frac{K-1}{2}\mathfrak{E}^{\times 2} + \frac{\mu-1}{2}\mathfrak{H}^2.$$

Die von Max Abraham gegebene davon abweichende Formel

$$\psi = \frac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2 + \frac{K-1}{2}\mathfrak{E}^{\times 2} + \frac{\mu-1}{2}\mathfrak{H}^{\times 2}$$

erklärt sich durch die abweichende Annahme für die Ansätze (a), (b), (c), in denen das μ vor $[g\mathfrak{E}]$, $g[g\mathfrak{H}]$ fehlt, weshalb bei ihm die Gleichung für $\mathfrak{g}$ auch lautet

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{C_0}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}].$$

Die Gleichungen von Max Abraham müssen auch zum Vorschein kommen, wenn man in der Gleichung (d) die Größe $[g\mathfrak{E}]$ ebenfalls mit dem Faktor μ versehen würde, dann träte nur an Stelle von g die Größe μg. Allein immer müßte man dann auch die Beziehung

$$4\pi\mathfrak{B}^\times = \mu\mathfrak{H}^\times$$

aufgeben.

Wenn wir in der Lorentzschen Theorie nicht $\mathfrak{H}^\times$ sondern $\mathfrak{H}$ als die beobachtbare magnetische Kraft ansehen, bleibt alles bestehen, falls gleichwohl in den Abrahamschen Grundformeln $\mathfrak{H}^\times$, nicht $\mathfrak{H}$ entscheidend sein soll. Sonst müssen alle diese Formeln umgewandelt werden durch Ersetzen von $\mathfrak{H}^\times$ durch $\mathfrak{H}$.

Der hier unter (h_5) angegebene Ausdruck für ψ stimmt mit dem von Lorentz selbst ermittelten. [Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften V, 2, S. 251, Formeln (XXXIX″) und (XL′), wozu zu bemerken ist, daß $\mathfrak{P}_e = \eta\mathfrak{E}^\times = (K-1)\mathfrak{E}^\times$ sein soll.] Hieraus schließe ich, daß, wenn nach Lorentz' Theorie nicht $\mathfrak{H}^\times$ (früher $\mathfrak{H}'$), sondern $\mathfrak{H}$ die beobachtbare magnetische Kraft sein sollte (S. 215), gleichwohl in den Abrahamschen Formeln $\mathfrak{H}^\times$ stehen bleiben muß. In der Tat gibt Lorentz für die relative Energieströmung die gleiche Formel wie Max Abraham und wie hier abgeleitet [vgl. l. c. S. 253, Gl. (XLIV)].

4. Für Minkowskis angenäherte Theorie sind die Gleichungen (S. 236)

$$(\mathrm{a}) \qquad 4\pi\mathfrak{D}^\times = K\mathfrak{E}^\times - \frac{1}{C_0}[g\mathfrak{H}],$$

$$(\mathrm{b}) \qquad 4\pi\mathfrak{B}^\times = \mu\mathfrak{H}^\times + \frac{1}{C_0}[g\mathfrak{E}],$$

$$(\mathrm{c}) \qquad \mathfrak{E}^\times = \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{C_0}[g\mathfrak{B}^\times],$$

$$(\mathrm{d}) \qquad \mathfrak{H}^\times = \mathfrak{H} - \frac{4\pi}{C_0}[g\mathfrak{D}^\times].$$

Die Bedingungsgleichung (24_2) gibt hiernach

$$\left(\mathfrak{E}^\times(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}^\times)\right)=\left(\mathfrak{H}^\times(\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^\times)\right),$$

d. h.

$$\text{(e)}\qquad \left(\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}\right)=\left(\mathfrak{H}^\times\mathfrak{E}\right).$$

Diese Gleichung aber ist durch Minkowskis Ansätze identisch erfüllt, wie man sich überzeugt, wenn man $\mathfrak{E}^\times$ und $\mathfrak{H}^\times$ nach den Formeln (15_1a, b) (S. 239) ausdrückt, denn da

$$\left(\mathfrak{H}[g\mathfrak{H}]\right)=\left(\mathfrak{E}[g\mathfrak{E}]\right)=0$$

ist, erhält man für $\left(\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}\right)$ und $\left(\mathfrak{H}^\times\mathfrak{E}\right)$ denselben Wert

$$\text{(f)}\quad \left(\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}\right)=\left(\mathfrak{H}^\times\mathfrak{E}\right)=\frac{1}{1-\frac{K\mu}{C_0^2}(gg)}\left\{\left(1-\frac{1}{C_0^2}(gg)\right)\left(\mathfrak{H}\mathfrak{E}\right)-\frac{K\mu-1}{C_0^2}\left(g\mathfrak{H}\right)\left(g\mathfrak{E}\right)\right\}.$$

Andere Ausdrücke für die Bedingung (24_1) sind

$$\text{(g)}\quad\left\{\begin{array}{ll}
\left(g\mathfrak{E}^\times[g\mathfrak{H}]\right)=\left(g\mathfrak{H}^\times[g\mathfrak{E}]\right), & \\
\left(g[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{E}]\right)=-\left(g[\mathfrak{B}^\times\mathfrak{H}]\right), & \left(\mathfrak{D}^\times[g\mathfrak{E}]\right)=-\left(\mathfrak{B}^\times[g\mathfrak{H}]\right), \\
 & \left(\mathfrak{E}[g\mathfrak{D}^\times]\right)=-\left(\mathfrak{H}[g\mathfrak{B}^\times]\right), \\
\left(g[\mathfrak{B}^\times\mathfrak{E}]\right)=-\left(g[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{H}]\right), & \left(\mathfrak{B}^\times[g\mathfrak{E}]\right)=-\left(\mathfrak{D}^\times[g\mathfrak{H}]\right), \\
 & \left(\mathfrak{E}[g\mathfrak{B}^\times]\right)=-\left(\mathfrak{H}[g\mathfrak{D}^\times]\right), \\
\mu\left(\mathfrak{D}^\times\mathfrak{H}^\times\right)=K\left(\mathfrak{B}^\times\mathfrak{E}^\times\right), & \mu\left(\mathfrak{D}^\times\mathfrak{H}\right)=K\left(\mathfrak{B}^\times\mathfrak{E}\right), \\
\left(\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times\right)=\left(\mathfrak{B}\mathfrak{D}^{\times\times}\right), & \left(\mathfrak{E}\mathfrak{H}^\times\right)=\left(\mathfrak{H}\mathfrak{E}^\times\right).
\end{array}\right.$$

Für $\mathfrak{g}$ leitet Max Abraham den Ausdruck ab

$$(\mathrm{h}_1)\quad C_0^2\mathfrak{g}=C_0[\mathfrak{E}^\times\mathfrak{H}^\times]+4\pi g\left(\mathfrak{E}^\times\mathfrak{D}^\times+\mathfrak{H}^\times\mathfrak{B}^\times\right)-4\pi\mathfrak{D}^\times\left(g\mathfrak{E}^\times\right)-4\pi\mathfrak{B}^\times\left(g\mathfrak{H}^\times\right)+g\left(g\mathfrak{g}\right),$$

der zwar $\mathfrak{g}$ selbst explizite nicht gibt, aber nach (26_1) (S. 247) die Beziehung feststellt

$$(\mathrm{h}_2)\qquad \mathfrak{g}=\frac{\overline{\mathfrak{S}}^\times}{C_0^2}.$$

Beachtet man dann die Formel (26_2) (S. 248) für $\overline{\mathfrak{S}}^\times$, so wird nach (c), (d)

$$(\mathrm{h}_3)\quad C_0\mathfrak{g}=[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]-\frac{g}{C_0^2}\left((4\pi)^2 g\left([\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times]-C_0\mathfrak{g}\right)\right)=[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]-\frac{(4\pi)^2 g}{C_0^2}\left(g[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times]\right)+\frac{g}{C_0}\left(g\mathfrak{g}\right).$$

Eine explizite Gleichung erhalten wir in folgender Weise. Aus der letzten Gleichung folgt

$$C_0\left(g\mathfrak{g}\right)=\left(g[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\right)-\frac{(4\pi)^2(gg)}{C_0^2}\left(g[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times]\right)+\frac{(gg)}{C_0}\left(g\mathfrak{g}\right),$$

woraus sich ergibt

$$\text{(i)}\qquad C_0\left(g\mathfrak{g}\right)=\frac{1}{1-\frac{(gg)}{C_0^2}}\left\{\left(g[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\right)-\frac{(4\pi)^2(gg)}{C_0^2}\left(g[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times]\right)\right\}.$$

Führen wir diesen Wert in die Gleichung (h_3) ein und setzen zugleich (vgl. S. 239)

$$\frac{g}{C_0} = \Gamma, \qquad \frac{(\overline{g\,g})}{C_0^2} = (\overline{\Gamma\Gamma}) = \Gamma_x^2 + \Gamma_y^2 + \Gamma_z^2 = \mathfrak{G}^2,$$

so wird

$$(k_1)\quad C_0\mathfrak{g} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - (4\pi)^2\Gamma(\overline{\Gamma[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times]}) + \frac{\Gamma}{1-\mathfrak{G}^2}\left\{(\overline{\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}) - (4\pi)^2\mathfrak{G}^2(\overline{\Gamma[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times]})\right\}$$

oder

$$(k_2)\qquad (1-\mathfrak{G}^2)\,C_0\,\mathfrak{g} = (1-\mathfrak{G}^2)[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + \Gamma(\overline{\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}) - (4\pi)^2\Gamma(\overline{\Gamma[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times]}).$$

Diese Formel stimmt mit einer Spezialformel, die Max Abraham für $\Gamma_y = \Gamma_z = 0$ angegeben hat; es wird dann

$$(k_3)\quad \begin{cases} (1-\mathfrak{G}^2)\,C_0\,\mathfrak{g}_x = (1-\mathfrak{G}^2)[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x + \mathfrak{G}^2[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x - (4\pi)^2\mathfrak{G}^2[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times]_x \\ \qquad\qquad\qquad\quad = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x - (4\pi)^2\mathfrak{G}^2[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times]_x, \\ (1-\mathfrak{G}^2)\,C_0\,\mathfrak{g}_y = (1-\mathfrak{G}^2)[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_y, \\ (1-\mathfrak{G}^2)\,C_0\,\mathfrak{g}_z = (1-\mathfrak{G}^2)[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_z, \end{cases}$$

eben die Max Abrahamschen Formeln für diesen Fall. Um die Gleichung für $\mathfrak{g}$ zu vervollständigen, haben wir noch die Größe $\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times$ zu bilden. Die Beziehungen (14_2a, b) auf S. 239 geben

$$(l)\quad \begin{cases} (4\pi)^2(1-K\mu\,\mathfrak{G}^2)^2[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times] = K\mu(1-\mathfrak{G}^2)^2[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] \\ \qquad - (K\mu-1)^2\left\{[[\Gamma\mathfrak{H}][\Gamma\mathfrak{E}]] - \mu[\Gamma[\Gamma\mathfrak{H}]](\overline{\Gamma\mathfrak{H}}) - K[\Gamma[\Gamma\mathfrak{E}]](\overline{\Gamma\mathfrak{E}})\right\} \\ \qquad - K(1-\mathfrak{G}^2)(K\mu-1)\left\{[\mathfrak{E}[\Gamma\mathfrak{E}]] - \mu[\Gamma\mathfrak{E}](\overline{\Gamma\mathfrak{H}})\right\} \\ \qquad - \mu(1-\mathfrak{G}^2)(K\mu-1)\left\{[\mathfrak{H}[\Gamma\mathfrak{H}]] + K[\Gamma\mathfrak{H}](\overline{\Gamma\mathfrak{E}})\right\}. \end{cases}$$

Es ist aber unter Benutzung der Formeln (f) und (g) auf S. 120

$$[[\Gamma\mathfrak{H}][\Gamma\mathfrak{E}]] = \Gamma(\overline{\mathfrak{E}[\Gamma\mathfrak{H}]}) - \mathfrak{E}(\overline{\Gamma[\Gamma\mathfrak{H}]}) = \Gamma(\overline{\mathfrak{E}[\Gamma\mathfrak{H}]}) = -\Gamma(\overline{\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}),$$

$$[\Gamma[\Gamma\mathfrak{H}]] = \Gamma(\overline{\Gamma\mathfrak{H}}) - \mathfrak{H}(\overline{\Gamma\Gamma}) = \Gamma(\overline{\Gamma\mathfrak{H}}) - \mathfrak{G}^2\mathfrak{H},$$

$$[\Gamma[\Gamma\mathfrak{E}]] = \Gamma(\overline{\Gamma\mathfrak{E}}) - \mathfrak{E}(\overline{\Gamma\Gamma}) = \Gamma(\overline{\Gamma\mathfrak{E}}) - \mathfrak{G}^2\mathfrak{E},$$

$$[\mathfrak{E}[\Gamma\mathfrak{E}]] = \Gamma(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{E}}) - \mathfrak{E}(\overline{\Gamma\mathfrak{E}}),$$

$$[\mathfrak{H}[\Gamma\mathfrak{H}]] = \Gamma(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{H}}) - \mathfrak{H}(\overline{\Gamma\mathfrak{H}}).$$

Nun ist noch alles mit Γ zu multiplizieren und dann das skalare Produkt zu nehmen. So geben die fünf letztgenannten Größen

$$\mathfrak{G}^2(\overline{\mathfrak{E}[\Gamma\mathfrak{H}]}) = -\mathfrak{G}^2(\overline{\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}), \qquad \mathfrak{G}^2(\overline{\Gamma\mathfrak{H}}) - \mathfrak{G}^2(\overline{\Gamma\mathfrak{H}}) = 0,$$

$$\mathfrak{G}^2(\overline{\Gamma\mathfrak{E}}) - \mathfrak{G}^2(\overline{\Gamma\mathfrak{E}}) = 0, \qquad \mathfrak{G}^2(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{E}}) - (\overline{\Gamma\mathfrak{E}})^2, \qquad \mathfrak{G}^2(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{H}}) - (\overline{\Gamma\mathfrak{H}})^2.$$

und wir erhalten

$$(\mathrm{m}_1)\quad\left\{\begin{aligned}
&(4\pi)^2(1-K\mu\mathfrak{G}^2)^2\big(\Gamma[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times]\big) = \\
&\qquad K\mu(1-\mathfrak{G}^2)^2\big(\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\big)+(K\mu-1)^2\mathfrak{G}^2\big(\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\big) \\
&\quad -K(1-\mathfrak{G}^2)(K\mu-1)\Big(\mathfrak{G}^2\big(\mathfrak{E}\mathfrak{E}\big)-\big(\Gamma\mathfrak{E}\big)^2-\mu\big(\Gamma[\Gamma\mathfrak{E}]\big)\big(\Gamma\mathfrak{H}\big)\Big) \\
&\quad -\mu(1-\mathfrak{G}^2)(K\mu-1)\Big(\mathfrak{G}^2\big(\mathfrak{H}\mathfrak{H}\big)-\big(\Gamma\mathfrak{H}\big)^2+K\big(\Gamma[\Gamma\mathfrak{H}]\big)\big(\Gamma\mathfrak{E}\big)\Big).
\end{aligned}\right.$$

In der zweiten und dritten Zeile fallen die mit μ und K multiplizierten Glieder noch fort, wonach bleibt

$$(\mathrm{m}_2)\quad\left\{\begin{aligned}
&(4\pi)^2(1-K\mu\mathfrak{G}^2)^2\big(\Gamma[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times]\big) = \\
&\qquad \big(K\mu(1-\mathfrak{G}^2)^2+(K\mu-1)^2\mathfrak{G}^2\big)\big(\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\big) \\
&\quad -(K\mu-1)(1-\mathfrak{G}^2)\Big\{K\Big(\mathfrak{G}^2\big(\mathfrak{E}\mathfrak{E}\big)-\big(\Gamma\mathfrak{E}\big)^2\Big)+\mu\Big(\mathfrak{G}^2\big(\mathfrak{H}\mathfrak{H}\big)-\big(\Gamma\mathfrak{H}\big)^2\Big)\Big\}.
\end{aligned}\right.$$

Nach leichter Zwischenrechnung folgt daraus

$$(\mathrm{k}_4)\quad\left\{\begin{aligned}
&C_0(1-K\mu\mathfrak{G}^2)^2\,\mathfrak{g} = (1-K\mu\mathfrak{G}^2)^2[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] \\
&-\Gamma(K\mu-1)\Big\{(1+K\mu\mathfrak{G}^2)\big(\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\big)-K\Big(\mathfrak{G}^2\big(\mathfrak{E}\mathfrak{E}\big)-\big(\Gamma\mathfrak{E}\big)^2\Big)-\mu\Big(\mathfrak{G}^2\big(\mathfrak{H}\mathfrak{H}\big)-\big(\Gamma\mathfrak{H}\big)^2\Big)\Big\}.
\end{aligned}\right.$$

Auch diese Formel stimmt mit den Sonderformeln Max Abrahams, wenn man in letzteren für $[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times]$ ihre Sonderwerte für $\Gamma_x=\Gamma$, $\Gamma_y=\Gamma_z=0$ einsetzt.

Der Ausdruck ist von der Form

$$(\mathrm{k}_5)\qquad C_0\,\mathfrak{g} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + A\,\Gamma,$$

wo A für alle Komponenten den gleichen Betrag

$$(\mathrm{n})\quad\Big\{A = -\frac{K\mu-1}{(1-K\mu\mathfrak{G}^2)^2}\Big((1+K\mu\mathfrak{G}^2)\big(\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\big)-\mathfrak{G}^2(K\mathfrak{E}^2+\mu\mathfrak{H}^2)+K\big(\Gamma\mathfrak{E}\big)^2+\mu\big(\Gamma\mathfrak{H}\big)^2\Big)$$

besitzt.

Als Bedingungsgleichung (25_1) haben wir

$$\big(\mathfrak{g}[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{E}^\times]\big) = -\big(\mathfrak{g}[\mathfrak{B}^\times\mathfrak{H}^\times]\big).$$

Setzt man für $\mathfrak{E}^\times, \mathfrak{H}^\times$ die Werte nach (a), (b), so wird, da $[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{D}^\times]=[\mathfrak{B}^\times\mathfrak{B}^\times]=0$ ist,

$$\frac{1}{K}\big(\mathfrak{g}[\mathfrak{D}^\times[\Gamma\mathfrak{H}]]\big) = +\frac{1}{\mu}\big(\mathfrak{g}[\mathfrak{B}^\times[\Gamma\mathfrak{E}]]\big)$$

und nach (h_1) (S. 120)

$$\frac{1}{K}\big([\Gamma\mathfrak{H}][\mathfrak{g}\mathfrak{D}^\times]\big) = \frac{1}{\mu}\big([\Gamma\mathfrak{E}][\mathfrak{g}\mathfrak{B}^\times]\big),$$

also nach (h_3) (S. 120)

$$\frac{1}{K}\Big(\big(\mathfrak{g}\Gamma\big)\big(\mathfrak{H}\mathfrak{D}^\times\big)-\big(\mathfrak{g}\mathfrak{H}\big)\big(\Gamma\mathfrak{D}^\times\big)\Big) = \frac{1}{\mu}\Big(\big(\mathfrak{g}\Gamma\big)\big(\mathfrak{E}\mathfrak{B}^\times\big)-\big(\mathfrak{g}\mathfrak{E}\big)\big(\Gamma\mathfrak{B}^\times\big)\Big).$$

Nach den Gleichungen unter (g) oben ist $\mu\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{D}^{\times}}\right) = K\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{B}^{\times}}\right)$. Es bleibt

$$\mu\left(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{H}}\right)\left(\overline{\Gamma\mathfrak{D}^{\times}}\right) = K\left(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{E}}\right)\left(\overline{\Gamma\mathfrak{B}^{\times}}\right),$$

und da zufolge (k_6) wegen $\left(\overline{\mathfrak{H}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}\right) = \left(\overline{\mathfrak{E}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}\right) = 0$

$$\left(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{H}}\right) = \frac{A}{C_0}\left(\overline{\Gamma\mathfrak{H}}\right), \qquad \left(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{E}}\right) = \frac{A}{C_0}\left(\overline{\Gamma\mathfrak{E}}\right)$$

ist, so resultiert

$$\mu\left(\overline{\Gamma\mathfrak{H}}\right)\left(\overline{\Gamma\mathfrak{D}^{\times}}\right) = K\left(\overline{\Gamma\mathfrak{E}}\right)\left(\overline{\Gamma\mathfrak{B}^{\times}}\right).$$

Diese Gleichung aber zeigt sich identisch erfüllt, weil nach a) bis d)

$$\left(\overline{\Gamma\mathfrak{D}^{\times}}\right) = \frac{K}{4\pi}\left(\overline{\Gamma\mathfrak{E}}\right), \qquad \left(\overline{\Gamma\mathfrak{B}^{\times}}\right) = \frac{\mu}{4\pi}\left(\overline{\Gamma\mathfrak{H}}\right),$$

ist.

Zuletzt bestimmen wir noch die Energiedichte ψ nach Gl. (18_1) (S. 246) Es ist nach (c), (d) (S. 257) und (f) (S. 120)

$$\left(\overline{\mathfrak{E}^{\times}\mathfrak{D}^{\times}}\right) = \left(\overline{\mathfrak{D}^{\times}\mathfrak{E}}\right) + \frac{4\pi}{C_0}\left(\overline{\mathfrak{D}^{\times}[g\mathfrak{B}^{\times}]}\right) = \left(\overline{\mathfrak{D}^{\times}\mathfrak{E}}\right) - 4\pi\left(\overline{\Gamma[\mathfrak{D}^{\times}\mathfrak{B}^{\times}]}\right),$$

$$\left(\overline{\mathfrak{H}^{\times}\mathfrak{B}^{\times}}\right) = \left(\overline{\mathfrak{B}^{\times}\mathfrak{H}}\right) - \frac{4\pi}{C_0}\left(\overline{\mathfrak{B}^{\times}[g\mathfrak{D}^{\times}]}\right) = \left(\overline{\mathfrak{B}^{\times}\mathfrak{H}}\right) - 4\pi\left(\overline{\Gamma[\mathfrak{D}^{\times}\mathfrak{B}^{\times}]}\right),$$

also

$$\psi = \frac{4\pi}{2}\left(\overline{\mathfrak{D}^{\times}\mathfrak{E}}\right) + \frac{4\pi}{2}\left(\overline{\mathfrak{B}^{\times}\mathfrak{H}}\right) - (4\pi)^2\left(\overline{\Gamma[\mathfrak{D}^{\times}\mathfrak{B}^{\times}]}\right) + C_0\left(\overline{\Gamma\mathfrak{g}}\right).$$

Nach (k_2) wird

$$\begin{aligned}(1-\mathfrak{G}^2)\,C_0\left(\overline{\Gamma\mathfrak{g}}\right) &= (1-\mathfrak{G}^2)\left(\overline{\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}\right) + \mathfrak{G}^2\left(\overline{\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}\right) - (4\pi^2)\,\mathfrak{G}^2\left(\overline{\Gamma[\mathfrak{D}^{\times}\mathfrak{B}^{\times}]}\right)\\ &= \left(\overline{\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}\right) - (4\pi)^2\,\mathfrak{G}^2\left(\overline{\Gamma[\mathfrak{D}^{\times}\mathfrak{B}^{\times}]}\right),\end{aligned}$$

also

$$(1-\mathfrak{G}^2)\,\psi = \frac{4\pi}{2}(1-\mathfrak{G}^2)\left(\left(\overline{\mathfrak{D}^{\times}\mathfrak{E}}\right) + \left(\overline{\mathfrak{B}^{\times}\mathfrak{H}}\right)\right) + \left(\overline{\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}\right) - (4\pi)^2\left(\overline{\Gamma[\mathfrak{D}^{\times}\mathfrak{B}^{\times}]}\right),$$

und darin sind alle Größen durch die bisherigen Rechnungen bestimmt. So ist nach (14_2a, b) (S. 239)

$$\begin{aligned}4\pi(1-K\mu\mathfrak{G}^2)\left(\left(\overline{\mathfrak{D}^{\times}\mathfrak{E}}\right) + \left(\overline{\mathfrak{B}^{\times}\mathfrak{H}}\right)\right) &= (1-\mathfrak{G}^2)\left(K\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{E}}\right) + \mu\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{H}}\right)\right)\\ &+ (K\mu-1)\left\{\left(\overline{\mathfrak{E}[\Gamma\mathfrak{H}]}\right) - \left(\overline{\mathfrak{H}[\Gamma\mathfrak{E}]}\right) - K\left(\overline{\Gamma\mathfrak{E}}\right)^2 - \mu\left(\overline{\Gamma\mathfrak{H}}\right)^2\right\},\end{aligned}$$

oder nach (f) (S. 120)

$$\begin{aligned}&+\frac{4\pi}{2}(1-K\mu\mathfrak{G}^2)^2(1-\mathfrak{G}^2)\left(\left(\overline{\mathfrak{D}^{\times}\mathfrak{E}}\right) + \left(\overline{\mathfrak{B}^{\times}\mathfrak{H}}\right)\right)\\ &= \frac{(1-\mathfrak{G}^2)^2}{2}\left(K\left(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{E}}\right) + \mu\left(\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{H}}\right)\right)(1-K\mu\mathfrak{G}^2)\\ &-\frac{(K\mu-1)}{2}\left(2\left(\overline{\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}\right) + K\left(\overline{\Gamma\mathfrak{E}}\right)^2 + \mu\left(\overline{\Gamma\mathfrak{H}}\right)^2\right)(1-\mathfrak{G}^2)(1-K\mu\mathfrak{G}^2).\end{aligned}$$

Ferner gibt (m_2) (S. 260)

$$-(4\pi)^2(1-K\mu\mathfrak{G}^2)^2\left(\overline{\underline{\Gamma[\mathfrak{D}^\times\mathfrak{B}^\times]}}\right)=-\left(K\mu(1-\mathfrak{G}^2)^2+(K\mu-1)^2\mathfrak{G}^2\right)\left(\overline{\underline{\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}}\right)$$
$$+(K\mu-1)(1-\mathfrak{G}^2)\left\{\mathfrak{G}^2\left(K\left(\overline{\underline{\mathfrak{E}\mathfrak{E}}}\right)+\mu\left(\overline{\underline{\mathfrak{H}\mathfrak{H}}}\right)\right)-K\left(\overline{\underline{\Gamma\mathfrak{E}}}\right)^2-\mu\left(\overline{\underline{\Gamma\mathfrak{H}}}\right)^2\right\}.$$

So bekommt man nach einiger Zwischenrechnung

$$(o_1)\quad\begin{cases}(1-K\mu\mathfrak{G}^2)^2\,\psi=2(1-K\mu)\left(\overline{\underline{\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}}\right)\\ \qquad+\frac{1}{2}\left(1+K\mu\mathfrak{G}^2-\mathfrak{G}^2(3-K\mu\mathfrak{G}^2)\right)\left(K\left(\overline{\underline{\mathfrak{E}\mathfrak{E}}}\right)+\mu\left(\overline{\underline{\mathfrak{H}\mathfrak{H}}}\right)\right)\\ \qquad-\frac{1}{2}(K\mu-1)(3-K\mu\mathfrak{G}^2)\left(K\left(\overline{\underline{\Gamma\mathfrak{E}}}\right)^2+\mu\left(\overline{\underline{\Gamma\mathfrak{H}}}\right)^2\right),\end{cases}$$

oder anders geordnet

$$(o_2)\quad\begin{cases}\psi=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1+K\mu\mathfrak{G}^2-\mathfrak{G}^2(3-K\mu\mathfrak{G}^2)}{(1-K\mu\mathfrak{G}^2)^2}(K\mathfrak{E}^2+\mu\mathfrak{H}^2)\\ \quad-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{(K\mu-1)(3-K\mu\mathfrak{G}^2)}{(1-K\mu\mathfrak{G}^2)^2}\left(K\left(\overline{\underline{\Gamma\mathfrak{E}}}\right)^2+\mu\left(\overline{\underline{\Gamma\mathfrak{H}}}\right)^2\right)\\ \quad+\dfrac{2(1-K\mu)}{(1-K\mu\mathfrak{G}^2)^2}\left(\overline{\underline{\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}}\right),\end{cases}$$

oder auch

$$(o_3)\quad\begin{cases}\psi=\frac{1}{2}(K\mathfrak{E}^2+\mu\mathfrak{H}^2)\\ \quad+\dfrac{1}{2}\,\dfrac{(K\mu-1)(3-K\mu\mathfrak{G}^2)}{(1-K\mu\mathfrak{G}^2)^2}\left\{K\left(\mathfrak{G}^2\mathfrak{E}^2-\left(\overline{\underline{\Gamma\mathfrak{E}}}\right)^2\right)+\mu\left(\mathfrak{G}^2\mathfrak{H}^2-\left(\overline{\underline{\Gamma\mathfrak{H}}}\right)^2\right)\right\}\\ \quad+\dfrac{2(1-K\mu)}{(1-K\mu\mathfrak{G}^2)^2}\left(\overline{\underline{\Gamma[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}}\right).\end{cases}$$

Wie wir aber später sehen werden, liegen die von Max Abraham angesetzten Hauptformeln (2_1) (S. 242) für die Kräfte nicht ganz im Sinne der Minkowskischen Theorie, so daß den vergleichenden Entwickelungen mit Bezug auf diese Theorie nur beschränkte Bedeutung beizumessen ist.

9. Elektromagnetische Störungen an und in bewegten Stoffen.

a) Wirkung konvektiver Elektrizität.

Nach den meisten Untersuchungen, die über diesen schwierigen Gegenstand angestellt sind, scheint nicht mehr bezweifelt werden zu können, daß Elektrizität in Bewegung, konvektive Elektrizität, elektromagnetisch wie ein elektrischer Strom wirkt. Und zwar ist es gleich, ob die Elektrizität auf Metallen sich befindet, oder auf Dielektrizis, sei es durch unmittelbare Ladung (wie in Versuchen von Röntgen), sei es durch Influenz (wie in Versuchen von Eichenwald) hervorgerufen. Die Hauptarbeiten hierüber rühren von Rowland[1]), Röntgen[2]), Eichenwald[3]) her. Andere Arbeiten von Rowland und

[1]) Rowland, Berichte d. Berl. Akademie (1876), 211, oder Poggendorfs Annalen **158** (1876), Mitteilung von Helmholtz S. 487.

[2]) Röntgen, Berichte d. Berl. Akademie (1885), 195; Wiedemanns Annalen f. Physik u. Chemie **35**, 264 (1888).

[3]) Eichenwald, Annalen d. Physik **11**, 1, 421 (1903); **13**, 919 (1904).

Hutchison[1]), Himstedt[2]), Pender[3]), Crémieu[4]) u. a. Die meisten dieser Arbeiten bestätigen die Annahme jener Wirkung, einige widersprechen ihr, so eine Arbeit von Lecher[5]), dann die des eben genannten Crémieu, und meiner Meinung nach auch die Arbeit von Noble und Trouton[6]), auf die wir später zu sprechen kommen. Nach den bestätigenden Arbeiten erstrecken sich die Wirkungen sowohl auf magnetische Anziehung und Abstoßung, als auch auf Induktion. Entscheidend wäre elektrolytische Wirkung, worüber sichere Ergebnisse wohl nicht vorliegen.

In diesen Wirkungen konvektiver Elektrizität hat man immer den größten Einwand gegen die Maxwell-Hertzsche Theorie gesehen. Zunächst möchte ich einen dieser Einwände entkräften. Eichenwald, dem die genauesten Untersuchungen zu verdanken sind, findet, daß die durch Influenz hervorgebrachte konvektive Elektrizität auf Dielektrizis nicht proportional K wirkt, sondern proportional $K-1$, d. h. $K-K_0$. Darin sieht er einen Widerspruch gegen die Maxwell-Hertzsche Theorie und eine Bestätigung der Theorien von E. Cohn und H. A. Lorentz. Allein hier liegt wohl ein Versehen vor. Die Gleichungen der Elektrodynamik beziehen sich sämtlich auf das Innere der Stoffe. An der Grenze herrschen andere Bedingungen. Wo auf Dielektrizis durch Influenz eine Ladung hervorgerufen wird, kommt die Coulomb-Gaußsche Oberflächengleichung aus der Elektrostatik zur Anwendung, die allen Theorien gemein ist. Diese gibt für die „fingierte Ladung" der Oberfläche des Dielektrikums $\mathfrak{D}_{n1}+\mathfrak{D}_{n2}$, also im Versuchsfalle Eichenwalds, $(K-K_0)\frac{\sigma}{4\pi}$, wo σ die Dichte der influenzierenden Ladung bedeutet und K, K_0 die Dielektrizitätskonstanten des Dielektrikums und der Umgebung feststellen. Bei Eichenwalds Versuchen war die Umgebung Luft, da die dielektrische Platte in Luft rotierte, also K_0 fast gleich 1. Er konnte also gar nichts anderes finden, als daß die „fingierte Ladung" eines Dielektrikums im Verhältnis von $(K-1)$ zu 1 der influenzierenden Ladung wirkt. Und die Anwendung einer der elektrodynamischen Theorien auf die Berechnung dieser fingierten Ladung kommt gar nicht in Frage, weder der Maxwell-Hertzschen Theorie noch irgendeiner der anderen.

Übler für die Maxwell-Hertzsche (und meiner Meinung nach auch für die E. Cohnsche) Theorie steht es um die elektromagnetische Wirkung selbst. Hierüber läßt sich aber gegenwärtig noch nichts mit Sicherheit feststellen. Eine elektromagnetische Wirkung konvektiver Elektrizität überhaupt sagt auch die Maxwell-Hertzsche Theorie voraus. Aber die Wirkung soll in der Bewegung der Ladung selbst ihren Grund haben und dieser Ladung und der Bewegungsgeschwindigkeit proportional sein, während nach der Maxwell-Hertzschen Theorie die Wirkung ihren Grund hätte in den räumlichen Ungleichheiten der Bewegung und in den räumlichen Ungleichheiten der elektrischen Polarisierung. Mathematisch wird die Wirkung angenommen proportional $g\varrho$, und läßt die Maxwell-Hertzsche Theorie sie suchen in Größen von der Art $\mathfrak{D}_u\frac{\partial g_u}{\partial v}$, $v_u\frac{\partial \mathfrak{D}_u}{\partial v}$, $u,\ v=x,\ y,\ z$, nämlich in

$$W=(g\Gamma)\mathfrak{D}-(\mathfrak{D}\Gamma)g+\mathfrak{D}\operatorname{div}g. \tag{1}$$

[1]) Rowland u. Hutchison, Phil. Mag. **27**, 445 (1889).

[2]) Himstedt, Wiedemanns Annalen d. Physik u. Chemie **38**, 560 (1889).

[3]) Pender, Phil. Mag. **2**, 179 (1901); **5**, 34 (1903).

[4]) Crémieu, Compt. rend. de l'Acad. des Sc. **130**, 1545 (1900); **131**, 578, 797 (1901); Phil. Mag. **2**, 235 (1901).

[5]) Lecher, Repertorium der Physik **20**, 151 (1884).

[6]) Noble u. Trouton, Phil. Trans. **202**, 165 (1904).

Nun haben namentlich die Untersuchungen von Himstedt und Eichenwald auch quantitativ die Proportionalität der Wirkung mit $g\varrho$ nachgewiesen, bei Eichenwald bis zu Spannungen von 10000 Volt, bei Himstedt nur bis etwa 4500 Volt, wonach Abweichungen von der Proportionalität sich fanden. Indessen darf nicht außer acht gelassen werden, daß die Größe $g\varrho = g \operatorname{div} \mathfrak{D}$ doch von ganz derselben Art ist, wie die in W zuerst stehende Größe $(g\nabla)\mathfrak{D}$. In einem Felde, in dem $\mathfrak{D}$ nur von einer Koordinate abhängt, ist sie ihr sogar gleich. Bei der ganz außerordentlichen Schwierigkeit der Untersuchungen und den unzähligen Fehlerquellen, die sie beeinflussen, deren möglichste Vermeidung selbst dem größten Scharfsinn der genannten Forscher kaum geglückt sein dürfte, glaube ich nicht, daß jetzt schon entschieden werden kann, ob die beobachtete Proportionalität durchaus nur auf $g \operatorname{div} \mathfrak{D}$ sich erstreckt und in keiner Weise auf $(g\nabla)\mathfrak{D}$ bezogen werden darf. Nur Beobachtungen in verschiedenen Richtungen zu der sich bewegenden Elektrizität könnten eine Entscheidung herbeiführen, da im ersten Falle der Proportionalitätsfaktor sich nicht ändern dürfte, im zweiten er gerade eine Wandlung erfahren müßte. Solche Beobachtungen fehlen, wie viel mehr genaue Analysen des Feldes um eine sich bewegende Elektrizitätsmenge selbst. Um die experimentelle quantitative Untersuchung der elektrodynamischen Gleichungen ist es überhaupt noch übel bestellt, kaum daß einige Sicherheit über das Glied $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$ besteht, und wenn man will, über $g \operatorname{div} \mathfrak{D}$ oder $(g\nabla)\mathfrak{D}$. Von den anderen Gliedern, wie $(\mathfrak{D}\nabla)g$, $\mathfrak{D} \operatorname{div} g$, die doch in keiner der Theorien ganz fehlen, weiß man experimentell quantitativ so gut wie nichts, qualitativ nur einiges durch Röntgen. Vielleicht werden die Kathoden- und β-Strahlen (auch α-Strahlen) zu Methoden führen, die genaue quantitative Durchforschung der Felder um bewegte Elektrizität gestatten, da sie anscheinend die einfachsten Verhältnisse haben. Es ist ja schon mit ihrer Hilfe manches über die elektromagnetische Wirkung bewegter Ladungen ermittelt, wenn auch auf Grund noch recht unsicherer Hypothesen.

Mit der Theorie von E. Cohn ist es, wie bemerkt (S. 206), ganz so bestellt wie mit der Maxwell-Hertzschen.

Daß die Theorien von H. A. Lorentz und Minkowski die behauptete elektromagnetische Wirkung konvektiver Ladung, proportional $g \operatorname{div} \mathfrak{D}$, angeben, ist in ihrer Anlage schon begründet.

b) Elektromagnetische Erscheinungen an und in bewegten Stoffen.

1. Der Versuch von Des Coudres[1]) ist das genaue elektromagnetische Gegenstück zu dem optischen Versuch von Michelson. Zwei primäre Rollen standen parallel zu einer zwischen ihnen befindlichen, von beiden gleich weit entfernten, Sekundärrolle. Sie waren entgegengesetzt gewickelt. Wird durch sie ein Strom intermittierend gesandt, so heben sich ihre Induktionen in der Mittelrolle auf. Wenn aber das ganze System z. B. in Richtung seiner Achse sich bewegt, während der die Induktionsstöße verbreitende Äther ruht, kommen von der einen (vorderen) Rolle die Stöße früher, von der anderen (hinteren) später an, sie interferieren in der Mittelrolle, und diese muß Induktionserscheinungen zeigen. Des Coudres benutzte die Bewegung des Systems mit der Erde und ordnete die Achse möglichst in Richtung dieser Bewegung an. Er konnte aber, obwohl zur Zeit seiner Beobachtungen Juni/Juli die Geschwindigkeit der Erdbewegung gegen 40 km beträgt (Tabelle S. 114), Erscheinungen, die den vorauszusehenden entsprechen, nicht feststellen. Der Versuch wurde mannigfaltig abgeändert, das Er-

[1]) Wiedemanns Annalen d. Physik u. Chemie **38**, 71 (1889).

gebnis blieb aber immer negativ. Gleichwohl darf der Schluß, daß der Äther sich mit der Erde wie diese bewegt, noch nicht gezogen werden, denn — worauf H. A. Lorentz hingewiesen hat — die Erscheinung hängt wie im Michelsonschen Versuch nur vom Quadrat des Verhältnisses der Erdgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit, die der Geschwindigkeit der Verbreitung elektromagnetischer Wellen gleichgesetzt werden darf, ab und entzieht sich so der Feststellung.

2. Von den anderen Versuchen erwähne ich zunächst den von Noble und Trouton[1]) ausgeführten. Wenn ein geladener ebener Kondensator sich in Richtung seiner Erstreckung bewegt, so stellt er für den Raum zwischen seinen Belegungen einen doppelten flachen Konvektivstrom dar, weil die beiden Ladungen als entgegengesetzt sich wie nach entgegengesetzten Richtungen bewegen, eine Ladung aber zur einen, die andere zur anderen Seite der Bewegungslinien liegt. Hiernach entsteht im Innenraum zu jeder Seite im Kondensator parallel zu ihm und senkrecht zur Bewegungsrichtung ein elektromagnetisches Feld, welches den Kondensator um eine in ihm gelegene Achse so zu drehen strebt, daß er sich senkrecht zu der Bewegungsrichtung stelle, weil dann jeder Partikel positiver Ladung eine wie nach entgegengesetzter Richtung sich bewegende Partikel negativer Ladung entspräche, und in diesem Falle beide Partikel ganz gleich zu der sie verbindenden Bewegungslinie lägen, so daß zu den Strömen der einen Ladung entgegengesetzte gleichliegende Ströme der anderen Ladung gehörten. Ist der Kondensator um eine in ihm verlaufende Achse drehbar aufgehängt, so wird er also im ersten Fall in der Tat eine Drehung erfahren. Die Anordnung des Versuches ist in der Fig. 10 dargestellt. *B* ist der Kondensator, dem die Ladungen durch den oberen als Aufhängung dienenden und den unteren in das Flüssigkeitsgefäß tauchenden Draht zugeführt wird. Bei *A* befindet sich ein Spiegel zur Beobachtung der Drehungen um den Zuführungsdraht. Die übrigen Teile stellen Schutzhüllen usf. dar. Die magnetische Feldintensität ist $4\pi\sigma g$ wenn σ die Ladungs-

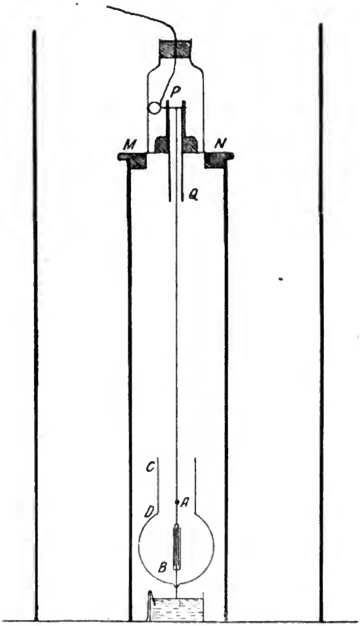

Fig. 10.

[1]) Noble und Trouton, Phil. Trans. **202**, 165ff. (1904).

dichte bedeutet, die Energie also $\frac{1}{C_0^2}\frac{\mu}{8\pi}(4\pi\sigma g)^2 = \frac{2\pi\mu}{C_0^2}\sigma^2 g^2$ auf Raumeinheit bezogen. Ist l die Dicke des Kondensators, S seine Fläche, so beträgt diese Energie für ihn $E_m = \frac{2\pi S l \mu \sigma^2 g^2}{C_0^2}$. Sei V die Potentialdifferenz der Belegungen des Kondensators, K seine Dielektrizitätskonstante, so wird $\sigma = \frac{KV}{4\pi l}$, also jene Energie

$$(2_1) \qquad E_m = \frac{2\pi\mu g^2}{C_0^2}\frac{K^2 S}{(4\pi)^2 l}V^2,$$

oder da die elektrostatische Energie ist

$$E_e = \frac{1}{2}\frac{KS}{4\pi}\frac{V^2}{l},$$

auch

$$(2_2) \qquad E_m = \frac{\mu K}{C_0^2}g^2 E_e = E_e\left(\frac{g}{c_0}\right)^2$$

und die ganze Energie wird

$$(3') \qquad E = E_e + E_m = E_e\left(1 + \frac{g^2}{c_0^2}\right).$$

Bildet die Kondensatorfläche mit der Bewegungsrichtung den Winkel ψ, so ist

$$(3) \qquad E = E_e\left(1 + \frac{g^2}{c_0^2}\cos^2\psi\right).$$

Hiernach haben wir für das Drehungsmoment bei konstantem E_e

$$(4) \qquad \frac{dE}{dt} = -E_e\frac{g^2}{c_0^2}\sin 2\psi.$$

Noble und Trouton berechnen mit Hilfe dieser Formel und mit den Konstanten ihrer Einrichtung, daß durch die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne der Kondensator eine Drehung hätte erfahren müssen, die an ihrer Skala in einem Ausschlag von 3,4 cm sichtbar geworden wäre. Für die Gesamtbewegung der Erde erhöht sich diese Zahl, da sie im März beobachtet haben, wo die Geschwindigkeit der Erde 44 km beträgt (Tabelle S. 114), sogar auf etwa 7,5 cm. Gleichwohl haben sie nichts von einer solchen Ablenkung bemerken können. Ich selbst würde daraus schließen, entweder daß die Ladung unter der Versuchsbedingung überhaupt keine elektromagnetischen Wirkungen hervorgebracht hat, oder daß konvektive Elektrizität auf in gleicher Weise bewegte Apparate nicht einwirkt, als wenn ein Strom in Gegenständen, die mit ihm treiben, seine Bewegung nicht verrät. Die Verhältnisse im Inneren der Ströme sind uns ja nicht bekannt. Noble und Trouton meinen, daß, da wir doch gegenwärtig das Vorhandensein magnetischer Energie bei konvektiver Ladung annehmen müssen, durch die Bewegung die elektrostatische Energie sich gerade um den Betrag dieser magnetischen Energie verringert, wodurch im Gesamtergebnis alles wie in Ruhe verbliebe. Von einer solchen Verringerung der elektrostatischen Energie verraten aber die Versuche von Rowland, Himstedt, Eichenwald usf. nichts. Wäre sie begründet, so hätte sie auch in deren Versuchen die elektromagnetische Energie ganz oder zum Teil aufheben müssen. Dieses Ergebnis erklärt mit Ausnahme der Maxwell-Hertzschen Theorie keine der anderen Theorien. Nach dieser Theorie aber kann eine elektromagnetische Wirkung hier gar nicht zum Vorschein kommen, weil zwischen den Platten des Kondensators in dessen Erstreckung die Polarisierung überall die gleiche, also $(g\,\Gamma')\,\mathfrak{D}$ gleich Null ist. Außerhalb des Kondensators aber kommt überhaupt nichts zum Vorschein. Nur noch die Relativitätstheorie vermag eine Erklärung ähnlich wie für das negative Ergebnis des Michelsonschen Versuches zu geben. Aber diese „Erklärung" müßte auch für die sonstigen Ergebnisse der Versuche über konvektive Elektrizität Bedeutung haben, und es dürften dann diese Ergebnisse nicht so gedeutet werden, wie es geschieht, so daß mir diese Erklärung auch auf den Versuch von Noble und Trouton nicht anwendbar zu sein scheint. Freilich sind die Berechnungen sehr unsicher, da sie so ausgeführt sind, als wenn die Ladung ruhte, oder als wenn sie die ganze Bahn in gleicher Weise ausfüllte, während sie doch ständig Stellen verläßt und neue Stellen erreicht, und während doch die elektromagnetischen Wirkungen, da sie sich verbreiten, keineswegs genau mitgeführt werden. Daß die Versuche von Rowland und Eichenwald ergeben haben, daß es für die elektromagnetischen Wirkungen konvektiver Elektrizität gleich ist, ob diese Elektrizität auf einem ununterbrochenen Körper sich befindet, oder auf einem einmal oder mehrere Male unterbrochenen, scheint mir durch die gegenseitige Influenz der gegenüberstehenden Unterbrechungsenden zu erklären zu sein, wodurch die Unterbrechung gleichsam überbrückt wird. Änderungen durch solche Unterbrechungen müssen eintreten, für solche sprechen schon die Versuche Röntgens mit der sich über zwei geladenen Halbringen drehenden Ebonitscheibe, die eben die Existenz des „Röntgenstromes" nachgewiesen haben. Doch sind genauere Rechnungen gegenwärtig nicht ausführbar, wo selbst die Theorie nur eines einzelnen sich bewegenden Elektrons noch so unvollkommen ist.

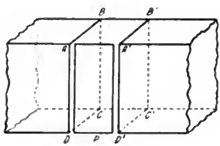

Fig. 11.

3. Die Anordnung des Versuches von Blondlot[1]) zeigt die Fig. 11. Darin bezeichnen $A\,B\,C\,D$, $A'\,B'\,C'\,D'$ die Pole eines Elektromagnets, P eine Metallplatte, die mit einer anderen ihr gegenüberstehenden einen Kondensator bildet. Jene andere Platte ist mit der Armatur des Elektromagneten verlötet und mit dieser zur Erde abgeleitet, P dagegen steht frei, indem zwischen ihr und der Armatur schmale Spalten gelassen sind. Durch den Raum zwischen den Polen und den Platten wird Luft in ständigem Strome gesaugt, der also sich im magnetischen Felde des Elektromagnets senkrecht zu den Kraftlinien bewegt. Es fragt sich, ob und welche Ladung die Platten dadurch erhalten, wenn man sie durch einen Draht verbindet. Die übliche Berechnung geschieht in folgender Weise:

Nehmen wir die vertikale Richtung der Bewegung zur z-Achse, die Richtung der magnetischen Kraft zur y-Achse, so ist die Richtung der hervorgerufenen elektrischen Kraft die x-Achse. Wir benutzen die Formeln (I_4b) (S. 136), denken uns die Leitlinie σ von Platte zu Platte als ebene vertikale Kurve, so daß die Richtung n der Normale der von ihr umgrenzten Fläche S die y-Achse, also die der magnetischen Kraft, ist und ergänzen diese Kurve durch eine Gerade l in Richtung der x-Achse zwischen den beiden Belegungen. Wir haben dann, unter $\mathfrak{E}'$ den elektromagnetischen Teil der elektrischen Kraft verstanden,

$$(5) \qquad -\frac{C_0}{4\pi}\int\limits_{\sigma} \mathfrak{E}'_\sigma\, d\sigma = \frac{D}{Dt}\iint\limits_{S} \mathfrak{B}_n\, dS = \mathfrak{B}_y \frac{\partial S}{\partial t},$$

[1]) Blondlot, Compt. rend. de l'Acad. des Sc. **133**, 778 (1901).

letzteres, weil $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_y$ und ebenfalls g konstant nach x, y, z ist. Nimmt nun die sich bewegende Luft das Ergänzungsstück l der Kurve mit, so ändert sich in der Zeiteinheit die Fläche S um $g_z l$. Also wird

(6) $$\frac{C_0}{4\pi}\int\limits_\sigma \mathfrak{E}'_\sigma \, d\sigma = + \mathfrak{B}_y g_z l = + \frac{1}{4\pi} \mathfrak{H}_y g_z l,$$

letzteres, weil μ für Luft gleich 1 anzusetzen ist. Das Integral links zerfällt in einen Teil über die Leitung und durch die Platten und einen anderen über die Gerade l in der Luft. In den metallischen Teilen aber ist $\mathfrak{E} = 0$, also bleibt

(7) $$\int\limits_l \mathfrak{E}'_z \, dx = + \frac{1}{C_0} \mathfrak{H}_y g_z l.$$

Das Feld zwischen den beiden Belegungen ist teils elektrostatisch, teils elektromagnetisch, nennen wir die ganze elektrische Kraft $\mathfrak{E}_z^\times$ und den elektrostatischen Teil davon $\mathfrak{E}_z^{(0)}$, so ist

(8) $$\mathfrak{E}_z^\times = \mathfrak{E}'_z + \mathfrak{E}_z^{(0)},$$

also

(9) $$\int\limits_l \mathfrak{E}_z^\times \, dx = \left(\mathfrak{E}_z^{(0)} + \frac{1}{C_0} \mathfrak{H}_y g_z\right) l.$$

Wenn man nun hierin mit Maxwell-Hertz $\mathfrak{E}^\times = \frac{4\pi}{K}\mathfrak{D}$ setzt, dann geht die Gleichung über in

(10) $$\int\limits_l \mathfrak{D}_z \, dx = \left(\frac{K}{4\pi}\mathfrak{E}_z^{(0)} + \frac{K}{4\pi C_0} \mathfrak{H}_y g_z\right) l.$$

Zwischen den Platten ist freie Elektrizität nicht vorhanden, also div $\mathfrak{D} = 0$. Es kann aber $\mathfrak{D}$ nur von x abhängen (falls man sich innen von dem Rande der Platten hinlänglich fern hält). Somit ist $\mathfrak{D}$ überhaupt konstant, und man hat

(11) $$\mathfrak{D}_z = \frac{K}{4\pi}\mathfrak{E}_z^{(0)} + \frac{K}{4\pi C_0} \mathfrak{H}_y g_z.$$

Bezeichnen wir noch die Dichte der Ladungen an den Belegungen mit σ, so ist $\sigma = \mathfrak{D}_z$ also

(12) $$\sigma = \frac{K}{4\pi}\mathfrak{E}_z^{(0)} + \frac{K}{4\pi C_0} \mathfrak{H}_y g_z.$$

$\mathfrak{E}_z^{(0)}$ ist durch die Anordnung des Versuches eliminiert. Blondlot aber konnte enie Ladung nicht nachweisen.

Deshalb nimmt man an, daß der Maxwell-Hertzsche Ansatz $\mathfrak{E} = \frac{4\pi\mathfrak{D}}{K}$ für Verhältnisse, wie sie durch Bewegung im Felde hervorgerufen werden, nicht zutreffen könne, und daß die Ansätze der anderen Theorien, z. B. der Ansatz der Lorentzschen Theorie, anzuwenden seien. Dieser letztere Ansatz gibt nach (E_4a) (S. 208) mit $\mu = 1$

(13) $$4\pi\mathfrak{D}^\times = K\mathfrak{E}^\times - \frac{K_0}{C_0}[g\mathfrak{H}],$$

also in unserem Falle

$$\mathfrak{E}_z^\times = \left(4\pi\,\mathfrak{D}_z^\times + \frac{K_0}{C_0} g_z \mathfrak{H}_y\right)\frac{1}{K}, \tag{14}$$

somit folgt aus (7)

$$\sigma = \frac{K}{4\pi}\mathfrak{E}_z^{(0)} + \frac{K - K_0}{4\pi\,C_0} g_z \mathfrak{H}_y. \tag{15}$$

Da $K_0 = 1$ und K sich auf Luft bezieht, also auch fast 1 ist, so fiele das zweite Glied fort, und das Ergebnis des Blondlotschen Versuchs wäre erklärt.

Indessen scheint mir das Negative des Blondlotschen Versuches noch in anderer Weise zum Teil deutbar. Wenn die Platte P ebenfalls mit der Armatur verlötet gewesen wäre, so hätte überhaupt ein negatives Ergebnis erzielt werden müssen. Nun war sie freilich durch zwei Spalten von der Armatur getrennt. Allein diese Spalten sind sehr schmal gewesen, wenige Zehntel Millimeter in der Weite, und da muß die Influenz der Armatur auf die Platte zu beiden Seiten wirksam sein, die die Spalten überbrückt und so wirkt, als wäre die Platte mit der Armatur ganz oder zum Teil metallisch verbunden. Das Blondlotsche Versuchsergebnis findet also allerdings in Annahmen wie die Lorentzsche seine Erklärung, aber meiner Meinung nach streitet es nicht unmittelbar gegen die Maxwell-Hertzschen Annahmen, die Influenz auf die Platte P ist nicht berücksichtigt. So gering sie sein mag, es sind auch außerordentlich geringe Größen, um deren Feststellung es sich hier handelt. Überhaupt hat Blondlot, soweit sich aus der knappen Beschreibung schließen läßt, wenig für den so wichtigen Schutz der Platte P gegen Influenzen von außen getan.

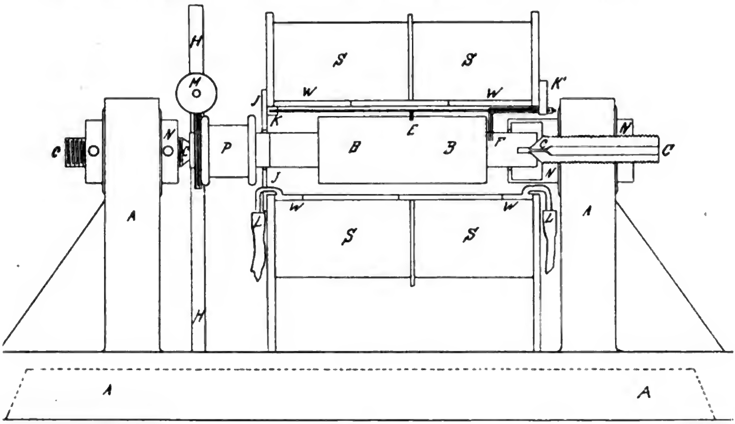

Fig. 12.

4. In dieser Beziehung ungemein sorgfältig ist der Versuch von Wilson[1]) ausgeführt. Innerhalb eines Solenoid-Elektromagneten S, Fig. 12, befindet sich koaxial und symmetrisch ein erheblich kürzerer Ebonit-Hohlzylinder B. Dieser steckt

[1]) Phil. Trans. **204**, 121 (1904).

auf einem Blech-Hohlzylinder, der seinerseits, durch eine Lage aus Vulkanfiber getrennt, auf die Welle einer Umdrehungsmaschine gezogen ist. Auf die äußere Fläche des Ebonitzylinders ist eine zweite Metallhülle fest aufgesteckt. Die innere und die äußere Metallhülle sind die Belegungen des Ebonitzylinders und bilden mit ihm einen zylindrischen Kondensator; von zwei Bürsten, deren obere E in der Mitte an der äußeren Belegung, die untere F an einem Ende an der inneren Belegung anliegt, diente die obere zur Verbindung mit den Meßapparaten, die untere unter Vermittelung des Mantels um den Elektromagnet und aller anderen gegen Influenz zu schützenden oder auszuschaltenden Teile zur ständigen Verbindung mit der Erde. Wird die Maschine in Gang gesetzt, so rotiert der Kondensator innerhalb des Magnets.

Die Maxwellschen Induktionsgleichungen, die hier in Betracht kommen und nicht angezweifelt werden, geben zunächst

$$(16)\qquad \mathfrak{E}^{\times} = \mathfrak{E}^{(0)} + \frac{\mu}{C_0}[\mathfrak{g}\,\mathfrak{H}].$$

Im Abstand r von der Mittelachse sei das elektrostatische Potential Φ, so daß man hat

$$(17)\qquad \mathfrak{E}_x^{(0)} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y^{(0)} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z^{(0)} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Verlegen wir die z-Achse in die Mittelachse und nennen ω die Winkelgeschwindigkeit, so ist

$$(18)\qquad \mathfrak{g} = r\omega; \quad \mathfrak{g}_x = -r\omega\frac{y}{r}, \quad \mathfrak{g}_y = r\omega\frac{x}{r}, \quad \mathfrak{g}_z = 0,$$

und da das magnetische Feld axial und gleichmäßig angesetzt wird, weiter

$$(19)\qquad \mathfrak{H}_x = 0, \quad \mathfrak{H}_y = 0, \quad \mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}.$$

Also

$$(20)\qquad [\mathfrak{g}\,\mathfrak{H}]_x = +r\omega\frac{x}{r}\mathfrak{H}, \quad [\mathfrak{g}\,\mathfrak{H}]_y = +r\omega\frac{y}{r}\mathfrak{H}, \quad [\mathfrak{g}\,\mathfrak{H}]_z = 0,$$

und damit bei $\mu = 1$

$$(21)\qquad \mathfrak{E}_x^{\times} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{r\omega}{C_0}\frac{x}{r}\mathfrak{H}, \quad \mathfrak{E}_y^{\times} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{r\omega}{C_0}\frac{y}{r}\mathfrak{H}, \quad \mathfrak{E}_z^{\times} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Nun kann Φ nur von r abhängen, wir erhalten also als elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}_r^{\times}$ senkrecht zur Rotationsachse

$$(22)\qquad \mathfrak{E}_r^{\times} = \frac{x}{r}\mathfrak{E}_x^{\times} + \frac{y}{r}\mathfrak{E}_y^{\times} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{r\omega}{C_0}\mathfrak{H}.$$

Wilson behandelt die Vorgänge in den Belegungen und in dem Ebonitzylinder als unabhängig voneinander. Im Ebonitzylinder wäre nach H. Lorentz' Theorie wieder

$$(23)\qquad \mathfrak{E}^{\times} = \frac{1}{K}\left(4\pi\,\mathfrak{D}^{\times} + \frac{K_0}{C_0}[\mathfrak{g}\,\mathfrak{H}]\right),$$

somit

$$(24')\qquad 4\pi\,\mathfrak{D}_r^{\times} = K\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{(K-K_0)}{K}\frac{r\omega}{C_0}\mathfrak{H}\right).$$

Da in der Maxwell-Hertzschen Theorie K_0 fehlen würde, schreiben wir allgemein

$$\mathfrak{D}_r^\times = \frac{K}{4\pi}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r} + L\frac{r\omega}{C_0}\mathfrak{H}\right). \tag{24}$$

Nun ist

$$\mathfrak{D}_r^\times = \frac{e}{2\pi l r}, \tag{25}$$

wenn e die gesamte Ladung einer Mantelfläche vom Radius r und der Länge l des Zylinders angibt. Also haben wir für den Ebonitzylinder

$$\frac{e}{lr} = \frac{K}{2}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r} + L\frac{r\omega}{C_0}\mathfrak{H}\right), \tag{26}$$

und integriert vom inneren Radius r_1 des Ebonitzylinders bis zum äußeren r_2 ebenfalls des Ebonitzylinders

$$\frac{e}{l}\log\frac{r_2}{r_1} = \frac{K}{2}\left\{-(\Phi_2 - \Phi_1) + L\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2}\right)\frac{\omega}{C_0}\mathfrak{H}\right\}, \tag{27}$$

weil e von r nicht abhängen kann. Zu dieser so berechneten Ladung e, die für irgendeine Mantelfläche, also auch für die äußere Oberfläche des Ebonitzylinders gilt, bestimmt nun Wilson eine Reihe von Zusatzgliedern. Erstens zeigte die Untersuchung des magnetischen Feldes in dem vom Ebonitzylinder eingenommenen Raume mittels Induktionsrollen, daß die magnetische Kraft daselbst nicht gleichmäßig verteilt war. Die Länge des Zylinders betrug gegen 10 cm. Rechnet man den Abstand einer Stelle von der Achse und von einem Ende des Zylinders, so fand folgende Verteilung der magnetischen Kraft statt:

Abstand von einem Zylinderende in cm	Magnetische Kraft am		
	äußeren Radius	inneren Radius	im Durchschnitt
0	168	168	168
1	186	183	184
2	195	193	194
3	200	199	200
4	203	202	203
5	206	205	205
6	207	207	207
7	207	208	208
8	207	208	207
9	205	205	205
10	201	199	200
10,3	—	196	196

Radial bestehen also nur sehr geringe Unterschiede der magnetischen Kräfte, axial aber sind die Unterschiede nicht unerheblich, die Kraft wächst, wie zu erwarten, von den Enden nach der Mitte an, wenn auch nicht von beiden Enden in gleicher Weise. Wilson hat darum eine Ausgleichung vorgenommen und im Durchschnitt die Kraft für den inneren Radius gleich 199,4, für den äußeren gleich 200 angesetzt. Diese Zahlen sind noch mit der Stärke des Stromes zu multiplizieren, der das Solenoid magnetisierte, und stellen dann die Änderung der magnetischen Kraft bei Umwechslung des Stromes dar, entsprechend der Versuchsanordnung, die auch die Änderung der Ladung bei Umwechslung der magnetischen Kraft ergab. Da bei dieser Beobachtungsweise der statische Teil fortfällt, wird gesetzt

$$2\,\frac{2\,e\log\frac{r_2}{r_1}}{l} = K\,L\,(200\,r_2^2 - 199{,}4\,r_1^2)\,\omega\;.$$

Sodann berücksichtigte Wilson die Induktion durch die äußern Belegungen, durch eine Korrektion

$$e_1 = (r_2'^2 - r_2^2)\,\omega\,200\,C\;,$$

weil die mittlere magnetische Kraft bei r_2 eben 200 betrug; C bedeutet dabei die Kapazität des Kondensators zwischen der äußeren und inneren Belegung, r_2' den äußeren Radius der äußeren Belegung. Eine zweite Korrektion wird dafür gerechnet, daß an der Bürste der äußeren Belegung eine höhere magnetische Kraft, 206, als im Durchschnitt, 200, an der inneren und äußeren Seite dieser Belegung geherrscht hat. Sie gibt

$$e_2 = (206 - 200)\,\omega\,r_2'^2\,C\;.$$

Diese Korrektion dürfte kaum zulässig sein. An sich ist $\mathfrak{D}^\times = \sigma$ gleich der Dichtigkeit der Elektrizität. Ist diese, wie geschehen [Gl. (25)], gleich $\frac{e}{2\pi r l}$ gesetzt, so meint man damit einen mittleren für die ganze Fläche geltenden Wert. Dieser mittlere Wert setzt einen mittleren Wert der magnetischen Kraft an der Fläche voraus. Und so sind die Formeln auch gerechnet. Also kann der Sonderbetrag dieser Kraft an der Bürste nicht mehr in Betracht kommen, er ist durch die Mittelbildung in den Formeln schon berücksichtigt. Das gilt aber nicht bloß rechnerisch. Auch für die Beobachtung kommt sie nicht in Frage, denn da Belegung und Bürste Metall sind, nimmt die Bürste nicht den an ihr lokal stattfinden sollenden Betrag ab, sondern einen Betrag, der sich nach der Ladung der ganzen Fläche richtet, also einen mittleren. Der Einfluß der Bürste auf die Elektrizitätsverteilung auf der Belegung überhaupt ist durch die Versuchsanordnung eliminiert worden, die Theorie aber setzt ihn von vornherein gleich Null, wenn sie alle Ungleichmäßigkeit ausgleicht, um überhaupt rechnen zu können.

Drittens wird eine Korrektion aufgestellt genau derselben Art, nämlich

$$e_3 = (206 - 200)\,\omega\,r_2'^2\,C_1\,,$$

in der C_1 die Kapazität bedeuten soll zwischen der äußern Fläche und dem umgebenden Rohr (between the outside surface and the surrounding tube). Von dieser Kapazität, sie unterscheidet sich nur unwesentlich von der Kapazität C (24 statt 25,4), ist sonst in der Arbeit nirgends die Rede, ich weiß auch nicht, wie sie zu deuten sein müßte, die obige Angabe dafür reicht zu ihrer Aufklärung nicht hin. Gleichwohl ist diese Korrektion aus demselben Grunde zu beanstanden wie die Korrektion e_2.

Endlich soll noch eine vierte sehr unbedeutende Korrektion

$$e_4 = (199{,}4 - 196)\,\omega\,r_1^2\,C$$

in Betracht kommen für die Abweichung des Betrages der magnetischen Kraft an der unteren Bürste von dem mittleren Betrage an der inneren Belegung, die also den Korrektionen e_2, e_3 entspricht.

Scheinen mir hiernach die Korrektionen e_2, e_3, e_4 fortfallen zu müssen, weil sie in den Formeln durch Benutzung der Mittelwerte schon berücksichtigt sind, da sonst ganz andere Formeln hätten angesetzt werden müssen, so ist auch die Korrektion e_1, die man als berechtigt anerkennen wird, erheblich zu verringern. Aus dem angenommenen Wert der Kapazität C, als solchem für den ganzen Kondensator, sieht man, daß diese Korrektion lediglich die Erweiterung des Ebonitzylinders bis an die äußere Fläche der äußeren Belegung bedeutet. Da aber die Belegung eben Metall ist, muß der Wert noch durch K dividiert werden, um die Kapazität entsprechend zu rechnen. K betrug 3,54, die ganze Korrektion e_1 in elektrostatischen Einheiten ausgedrückt war unter den gegebenen Umständen $132 \times 25{,}4 \times \frac{1}{3} 10^{-10} = 1{,}12 \times 10^{-7}$. Dieses mit 3,54 dividiert gibt 0,32. Rechnet man nun die Größe $K\,L\,(200\,r_2^2 - 199{,}4\,r_1^2)\,C\,\frac{1}{3}\,10^{-10}$ mit dem Maxwell-Hertzschen Wert für L, nämlich 1, so erhält man $17{,}5\ 10^{-7}$, und mit der Korrektion $17{,}82 \times 10^{-7}$. Benutzt man dagegen für L den Wert nach Lorentz

$$\frac{K - K_0}{K} = 1 - \frac{1}{3{,}54},$$

so folgt $12{,}58 \times 10^{-7}$, und mit der Korrektion $12{,}90 \times 10^{-7}$. Beobachtet war $15{,}35 \times 10^{-7}$. Die Differenz beträgt also nach Maxwell-Hertz $+2{,}47 \times 10^{-7}$, nach Lorentz $-2{,}45 \times 10^{-7}$. Der Versuch ließe also die Frage, welche Annahme die zutreffende sei, unentschieden, da beide Differenzen gleich groß sind, die eine Annahme (die Maxwell-Hertzsche) gibt zu viel, die andere gibt um den gleichen Betrag zu wenig.

Leider ist Wilson gerade in den Angaben über den Gang des Versuchs so kurz gewesen, daß es nicht möglich ist, sich alles mit Sicherheit nach der Lektüre der Arbeit herzustellen, und am meisten bedauerlich ist die ungewisse Art seiner Bezeichnungen für die einzelnen in Betracht kommenden Flächen. Mit Hilfe der genannten Korrektionen hat er selbst den gesuchten Betrag mit dem Lorentzschen Werte für L zu $15{,}19 \times 10^{-7}$ berechnet, mit dem Maxwell-Hertzschen Werte für L hätte sich $20{,}11 \times 10^{-7}$ ergeben, der Versuch hätte also unmittelbar für Lorentz' Theorie entschieden. Ich kann aber nach obigem nicht sehen, wie sich die Wilsonschen Korrektionen sollen aufrechterhalten lassen. Daß das elektrostatische Glied fortfällt, ist schon hervorgehoben. Das soll es wohl bedeuten, wenn Wilson sagt, die beobachtete Ladung sei so groß, wie sie die Induktion auf der Außenseite der Außenbelegung hervorgebracht hätte, wenn beide Belegungen zur Erde abgeleitet gewesen wären.

Nach allem muß ich also sagen, daß von den elektromagnetischen Versuchen gegenwärtig noch keiner mit Sicherheit gegen die Maxwell-Hertzschen Gleichungen geltend gemacht werden kann, während der Versuch von Noble und Trouton für diese Gleichungen gedeutet werden darf. Bleibt also die Unzulänglichkeit dieser Theorie hinsichtlich der Aberration und der Fresnel-Fizeauschen Erscheinung. Wie dieser entweder durch besondere Zeitrechnung oder durch einfache Änderung der Gleichungen ohne Änderung des Wesentlichen abzuhelfen sei, ist dargelegt. Diese Bemerkung scheint mir wichtig namentlich auch mit Rücksicht auf Minkowskis Relativitätstheorie.

Zweiter Teil.

Die weitere Relativitätstheorie.

1. Anwendung des Relativsystems durch H. A. Lorentz.

Im vorstehenden sind schon viele Entwickelungen und Darlegungen gegeben, die der Relativitätstheorie angehören. Den Ausgangspunkt der weiteren Relativitätstheorie bildet die S. 126ff. behandelte Relativtransformation in der von H. A. Lorentz[1]) gemachten Anwendung auf die Gleichungen seiner Elektrodynamik. Wir nehmen diese Gleichungen für reinen Äther in der Form (1_1a, b), (2a, b) (S. 213) und führen die reduzierten Relativkoordinaten und die Relativzeit ein.

Wir setzen

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{C_0^2}}}=\beta$$

und haben nach (ϑ) S. 127 mit $V=C_0$

$$(a_1)\qquad \varrho=\operatorname{div}\mathfrak{D}=\varkappa\beta\left(\frac{\partial\mathfrak{D}_\xi}{\partial\xi}\right)'+\varkappa\left(\frac{\partial\mathfrak{D}_\eta}{\partial\eta}\right)'+\varkappa\left(\frac{\partial\mathfrak{D}_\zeta}{\partial\zeta}\right)'-\varkappa\beta\frac{p}{C_0^2}\frac{\partial\mathfrak{D}_\xi}{\partial\tau}\,.$$

Andererseits gibt die Gleichung ($1a_1$) in Verbindung mit (η), (μ) und (o) S. 127ff.

$$(b_1)\qquad \frac{C_0\varkappa}{4\pi}\left(\frac{\partial\bar{\mathfrak{H}}_\zeta}{\partial\eta}-\frac{\partial\bar{\mathfrak{H}}_\eta}{\partial\zeta}\right)'=\varkappa\beta\frac{\partial\mathfrak{D}_\xi}{\partial\tau}-\varkappa\beta p\left(\frac{\partial\mathfrak{D}_\xi}{\partial\xi}\right)'+(p+q_\xi)\varrho\,,$$

somit

$$(b_2)\qquad \varkappa\beta\frac{\partial\mathfrak{D}_\xi}{\partial\tau}=\frac{C_0\varkappa}{4\pi}\left(\frac{\partial\bar{\mathfrak{H}}_\zeta}{\partial\eta}-\frac{\partial\bar{\mathfrak{H}}_\eta}{\partial\zeta}\right)'+\varkappa\beta p\left(\frac{\partial\mathfrak{D}_\xi}{\partial\xi}\right)'-(p+q_\xi)\varrho\,.$$

Damit wird

$$(a_2)\qquad \left\{\begin{aligned}\varrho=\operatorname{div}\mathfrak{D}&=\varkappa\beta^{-1}\left(\frac{\partial\mathfrak{D}_\xi}{\partial\xi}\right)'+\varkappa\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mathfrak{D}_\eta-\frac{p}{4\pi C_0}\bar{\mathfrak{H}}_\zeta\right)\right\}'\\&\quad+\varkappa\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\mathfrak{D}_\zeta+\frac{p}{4\pi C_0}\bar{\mathfrak{H}}_\eta\right)\right\}'+\frac{p}{C_0^2}(p+q_\xi)\varrho\end{aligned}\right.$$

oder

$$(a_3)\qquad \left\{\begin{aligned}\beta^{-2}\varrho-\frac{pq_\xi}{C_0^2}\varrho&=\varkappa\beta^{-1}\left(\frac{\partial\mathfrak{D}_\xi}{\partial\xi}\right)'+\varkappa\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mathfrak{D}_\eta-\frac{p}{4\pi C_0}\bar{\mathfrak{H}}_\zeta\right)\right\}'\\&\quad+\varkappa\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\mathfrak{D}_\zeta+\frac{p}{4\pi C_0}\bar{\mathfrak{H}}_\eta\right)\right\}'.\end{aligned}\right.$$

Lorentz führt nunmehr neue Größen ein, nämlich

$$(1)\qquad \varrho^*=\frac{\varrho}{\beta\varkappa^3}\,,$$

$$(2)\qquad q_\xi^*=\beta^2 q_\xi\,,\quad q_\eta^*=\beta q_\eta\,,\quad q_\zeta^*=\beta q_\zeta\,,$$

---

[1]) H. A. Lorentz, Akad. v. Vetenskapen te Amsterdam **12**, 986 (1904); doch zitiere ich nach „The Theory of Electrons (1909) S. 197.

sodann

(3) $\mathfrak{D}^*_\xi = \frac{1}{\varkappa^2}\bar{\mathfrak{D}}_\xi\,,\quad \mathfrak{D}^*_\eta = \frac{\beta}{\varkappa^2}\left(\bar{\mathfrak{D}}_\eta - \frac{p}{4\pi C_0}\bar{\mathfrak{H}}_\zeta\right),\quad \mathfrak{D}^*_\zeta = \frac{\beta}{\varkappa^2}\left(\bar{\mathfrak{D}}_\zeta + \frac{p}{4\pi C_0}\bar{\mathfrak{H}}_\eta\right);$

(4) $\mathfrak{B}^*_\xi = \frac{1}{\varkappa^2}\bar{\mathfrak{B}}_\xi\,,\quad \mathfrak{B}^*_\eta = \frac{\beta}{\varkappa^2}\left(\bar{\mathfrak{B}}_\eta + \frac{p}{4\pi C_0}\bar{\mathfrak{E}}_\zeta\right),\quad \mathfrak{B}^*_\zeta = \frac{\beta}{\varkappa^2}\left(\bar{\mathfrak{B}}_\zeta - \frac{p}{4\pi C_0}\bar{\mathfrak{E}}_\eta\right);$

(5) $\mathfrak{E}^*_\xi = \frac{1}{\varkappa^2}\bar{\mathfrak{E}}_\xi\,,\quad \mathfrak{E}^*_\eta = \frac{\beta}{\varkappa^2}\left(\bar{\mathfrak{E}}_\eta - \frac{4\pi p}{C_0}\bar{\mathfrak{B}}_\zeta\right),\quad \mathfrak{E}^*_\zeta = \frac{\beta}{\varkappa^2}\left(\bar{\mathfrak{E}}_\zeta + \frac{4\pi p}{C_0}\bar{\mathfrak{B}}_\eta\right);$

(6) $\mathfrak{H}^*_\xi = \frac{1}{\varkappa^2}\bar{\mathfrak{H}}_\xi\,,\quad \mathfrak{H}^*_\eta = \frac{\beta}{\varkappa^2}\left(\bar{\mathfrak{H}}_\eta + \frac{4\pi p}{C_0}\bar{\mathfrak{D}}_\zeta\right),\quad \mathfrak{H}^*_\zeta = \frac{\beta}{\varkappa^2}\left(\bar{\mathfrak{H}}_\zeta - \frac{4\pi p}{C_0}\bar{\mathfrak{D}}_\eta\right).$

Die Gleichung für ϱ geht dann über in

$$(\operatorname{div}\mathfrak{D}^*)' = \varrho^*\left(1 - \frac{p\,q^*_\xi}{C_0^2}\right).$$

Setzt man ferner den aus (a_1) genommenen Wert von $\left(\frac{\partial \bar{\mathfrak{D}}_\xi}{\partial \xi}\right)'$, nämlich

$$\varkappa\beta\left(\frac{\partial \bar{\mathfrak{D}}_\xi}{\partial \xi}\right)' = \varrho - \varkappa\left(\frac{\partial \bar{\mathfrak{D}}_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{D}}_\zeta}{\partial \zeta}\right)' + \varkappa\beta\frac{p}{C_0^2}\frac{\partial \bar{\mathfrak{D}}_\xi}{\partial \tau}$$

in die Gleichung (b_1), so folgt

$$\varkappa\frac{C_0}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\bar{\mathfrak{H}}_\zeta - \frac{4\pi p}{C_0}\bar{\mathfrak{D}}_\eta\right) - \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\bar{\mathfrak{H}}_\eta + \frac{4\pi p}{C_0}\bar{\mathfrak{D}}_\zeta\right)\right\}' = \varkappa\beta^{-1}\frac{\partial \bar{\mathfrak{D}}_\xi}{\partial \tau} + q_\xi\,\varrho$$

und mit den obigen neuen Größen

$$\frac{C_0}{4\pi}(\operatorname{curl}_\xi \mathfrak{H}^*)' = \frac{\partial \mathfrak{D}^*_\xi}{\partial \tau} + q^*_\xi\,\varrho^*.$$

Indem man diese Rechnungsweise fortsetzt, erhält man alles zusammenfassend

(7a) $$(\operatorname{div}\mathfrak{D}^*)' = \left(1 - \frac{p\,q^*_\xi}{C_0^2}\right)\varrho^*,$$

(7b) $$(\operatorname{div}\mathfrak{B}^*)' = 0\,;$$

(8a) $$+\frac{C_0}{4\pi}(\operatorname{curl}\mathfrak{H}^*)' = \frac{\partial \mathfrak{D}^*}{\partial \tau} + q^*\varrho^*,$$

(8b) $$-\frac{C_0}{4\pi}(\operatorname{curl}\mathfrak{E}^*)' = \frac{\partial \mathfrak{B}^*}{\partial \tau}.$$

Abgesehen von der ersten Gleichung sind die anderen Gleichungen so geartet, als wenn eine fortschreitende allgemeine Bewegung des Systems nicht bestände. Ist eine innere Bewegung überhaupt nicht vorhanden, oder bestehen keine räumlich verteilten Ladungen, so verhalten sich die neuen Größen wie in ruhendem Äther. Hat man eine Lösung für ruhenden Äther gefunden, so folgt die zur Bewegung p gehörige Lösung, wenn man aus den Gleichungen (3) bis (6) die Größen $\bar{\mathfrak{D}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$, $\bar{\mathfrak{E}}$, $\bar{\mathfrak{H}}$ durch die gefundenen Werte $\mathfrak{D}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{H}^*$ ausdrückt, ϱ erhält man aus (1). Im ganzen ist es zunächst lediglich eine mathematische Transformation, mit der wir es hier zu tun haben. So bedeuten ja auch die q^* nach (2) nicht die Geschwindigkeiten q' im Relativsystem, welche vielmehr durch die Gleichungen

(φ') (S. 130) bestimmt sind, und mit jenen nicht einmal in Näherungsrechnungen identificiert werden dürfen, da nichts rechtfertigt, $\frac{p q_\xi}{C_0^2}$ fortzulassen und $\frac{p^2}{C_0^2}$ beizubehalten; diese Größen sind ja von gleicher Bedeutung. Ferner sei bemerkt, daß in den Definitionsgleichungen (3) bis (6) an sich das $\varkappa^2$ fortgelassen werden kann, wenn man in der Gleichung (1) für ϱ^* im Nenner statt $\varkappa^3$ setzt $\varkappa$.

Da übrigens das Achsensystem so gewählt ist, daß $p_y = p_z = 0$, $p_x = p$ wird, so fällt die Form der Definitionsgleichungen (3) bis (6) mit schon benutzten Formen zusammen, z. B. den unter (40a, b) (S. 222) angesetzten, nur daß die Zahlenfaktoren $\frac{1}{\varkappa^2}$ und $\frac{\beta}{\varkappa^2}$ hinzutreten. Auf alles dieses kommen wir noch zurück.

2. Vorbemerkungen über Relativität.

Umfassend und zugleich vorsichtig ausgedrückt besagt das weitere **Relativitätsprinzip**, daß im allgemeinen aus gewissen Erscheinungen nicht allemal eindeutig auf die Umstände geschlossen werden kann, unter denen die Erscheinungen stattfinden, so daß bei verschiedenen Umständen diese Erscheinungen gleichwohl in derselben Weise sich geltend machen, auch wo wir zu erwarten geneigt sein müßten, daß die Umstände auf die Erscheinungen einwirken. Es richten sich dann die Erscheinungen für uns so, daß sie uns sich immer gleich darbieten. Relativ zu unserer Wahrnehmung sind sie immer gleich, mögen sie sonst sich wie immer verhalten; mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln sind wir nicht imstande, Abänderungen an ihnen festzustellen, und darum auch nicht aus ihnen Abänderungen an den Umständen, unter denen sie vor sich gehen, zu bestimmen. Sind diese Umstände nicht für sich in anderer Weise erkennbar, so verlieren sie dadurch jede Bedeutung und können ganz ausgelassen werden, indem es dann nur noch sich darum handelt, auf welche Weise sich unsere Feststellung nach den Beeinflussungen richtet, die wir für die Erscheinung annehmen müssen, so daß diese Erscheinung gleichwohl unbeeinflußt uns vorkommt.

Die schlagendsten Beispiele für dieses Prinzip bieten die Erscheinungen der Massen und Energien. Diese treten immer in der gleichen Menge auf, welche Umstände auch bei den Operationen mit ihnen walten mögen; wir sagen Materie und Energie bleiben absolut erhalten. Wir besitzen kein Mittel, um irgendeine Abnahme oder Zunahme an Materie oder Energie, wenn eine solche stattfinden sollte, festzustellen. Mögen an ihnen chemische, physikalische, biologische oder sonstwelche Vorgänge stattfinden, sie zeigen sich uns immer in der gleichen Menge. Relativ zu uns und zu unseren Wahrnehmungsmitteln erleiden sie selbst in den eingreifendsten und intensivsten Vorgängen keinerlei Änderung in der Menge. Aus diesen Mengen vermögen wir nicht das geringste über die Umstände zu schließen, unter denen die genannten Gegenstände bestehen; hätten wir für die Wandlung der Umstände kein anderes Erkennungszeichen als die Mengen dieser Gegenstände, die Umstände würden für uns jede Bedeutung verlieren. In diesem Falle haben wir andere Erkennungszeichen, weil wir uns **außerhalb** dieser Umstände befinden oder setzen können. Und deshalb hat man **diese** Relativität als eine objektive aufgefaßt und gesagt im Verhältnis zu irgendwelchen Vorgängen, ob wir sie wahrnehmen oder nicht wahrnehmen, bleiben die Mengen Materie und die Mengen Energie immer die gleichen, so daß diese Aussagen nunmehr die Gegenstände selbst betreffen. Ein anderes Beispiel aber lehrt, wie vorsichtig man bei Aussagen über eine Relativität sein muß.

Längst ist bekannt, daß die Gleichungen, welche die Vorgänge selbst beschreiben, Unbestimmtheiten übriglassen. Das berufenste Beispiel, auf das gegenwärtig meist Bezug genommen wird, bieten die Gleichungen der Mechanik. Wenden wir sie in der Galileischen Form

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = R$$

an, so bleibt R unbeeinflußt, wenn wir für r setzen $r' = a^2 r + b$ und für t setzen $t' = at + c$, wo a, b, c, ganz willkürliche Konstanten angeben. Dem System $x' = a^2 x + b_1$, $y' = a^2 y + b_2$, $z' = a^2 z + b_3$, $t' = at + c$ gehören also dieselben bewegenden Kräfte an wie dem x, y, z, t; die Galileischen Gleichungen geben keine Entscheidung darüber, mit welchem von den unendlich vielen Systemen x', y', z', t' wir es bei gegebenen bewegenden Kräften zu tun haben. Lassen wir z. B. Zeit und Raum sich dehnen, aber den Raum im quadratischen Verhältnis wie die Zeit, so bleiben die bewegenden Kräfte ungeändert. Wir können noch andere Änderungen vornehmen, z. B. x, y, z überführen in ax, ay, az und m in $\frac{m}{a}$. Dann verkleinert sich die Masse in demselben Verhältnis wie der Raum auseinandergeht. Oder t in at und m in $a^2 m$, die Masse dehnt sich dann im quadratischen Verhältnis wie die Zeit. Oder x, y, z in ax, ay, az, m in am und t in at; es wachsen dann alle Größen in demselben Maße usf. Allgemein können wir für m, x, y, z, t irgendein System Am, $Bx + C_1$, $By + C_2$, $Bz + C_3$, $Dt + E$ setzen mit der einzigen Bedingung $AB = D^2$. Nehmen wir die Gleichungen in der Form

$$m \frac{dg}{dt} = G\,,$$

so bezieht sich die Unbestimmtheit, außer auf m und t, auf g_x, g_y, g_z, und zwar in derselben Weise wie die auf x, y, z. Bisher hat man den besonderen Fall herausgegriffen, daß für g_x, g_y, g_z gesetzt wird $g_x + c_1$, $g_y + c_2$, $g_z + c_3$ und es als Galileisches Relativitätsprinzip bezeichnet, daß die bewegenden Kräfte von den wirklichen Beträgen der Geschwindigkeiten unabhängig sind, daß man zu jeder Geschwindigkeit noch eine gleichmäßige andere Geschwindigkeit von beliebiger Größe und Richtung hinzufügen darf, ohne daß dieses in der bewegenden Kraft zu erkennen wäre[1]). Aber dieses ist, wie wir sehen, nur ein besonderer Fall, und er ist allgemein ausgedrückt nicht einmal zutreffend.

Als die am wenigsten Zweifeln unterworfenen Gleichungen der Mechanik haben wir nämlich nicht die Galileischen Gleichungen, sondern die Lagrangeschen Gleichungen anzusehen, von denen die Galileischen Gleichungen nur einen besonderen Fall darstellen, den wir genau überhaupt nicht realisieren können, da dazu die Herrschaft über die ganze Welt erforderlich wäre. Wenden wir nun die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

an, wo $\dot{q}$ die zeitliche Änderung der Variabelen q ist, und T, die lebendige Kraft, eine homogene Funktion zweiten Grades der $\dot{q}$ bedeutet, mit Koeffizienten, die im allgemeinen Fall Funktionen der Variabelen q sind, so können allgemein nur solche Abwandlungen sich als zulässig erweisen, welche T, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$, t um Konstanten

[1]) So vorsichtig wie im Text hat man sich nicht einmal ausgedrückt, sondern sogleich behauptet, daß eine gleichmäßige Bewegung mechanisch auch gedanklich überhaupt nicht zu erkennen wäre, was natürlich ganz falsch ist.

verändern. Von T und t sieht man das sofort ein, daß auch $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ um eine Konstante vermehrt oder verringert werden darf, folgt aus dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen, es ändert sich dann T um eine lineare Funktion der $\dot{q}$ mit konstantem Koeffizienten, die also in $\frac{\partial T}{\partial q}$ herausfällt. Allgemeine Änderungen in den Maßverhältnissen der Größen sind jetzt ausgeschlossen, wenn sie auch in besonderen Fällen stattfinden können. Aber von besonderer Bedeutung ist, daß die Geschwindigkeiten, wenigstens allgemein, nicht einmal um eine Konstante geändert werden dürfen. Zwar im ersten Gliede der Lagrangeschen Gleichungen wäre das zulässig. Man überzeugt sich davon am einfachsten an einer Form für diese Gleichungen, die ich selbst abgeleitet habe[1]). Bezeichnet man die lebendige Kraft als halbe Summe der Produkte aus Bewegungsmomenten p und Geschwindigkeiten $\dot{q}$ durch $T_{\dot{q}p}$, dagegen als Funktion zweiten Grades der Geschwindigkeiten $\dot{q}$ oder als solche der Bewegungsmomente p durch $T_{q\dot{q}}$, T_{qp}, so daß die Lagrangesche Form und die ihr von Hamilton gegebene Form lauten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{q\dot{q}}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T_{q\dot{q}}}{\partial q} = Q\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{q\dot{q}}}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} = Q\,,$$

so sind die von mir aufgestellten Formen

$$2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{\dot{q}p}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T_{q\dot{q}}}{\partial q} = Q\,,$$

$$2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{\dot{q}p}}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} = Q\,.$$

Vermehren wir die $\dot{q}$ um Konstanten c, so geht $T_{\dot{q}p}$ über in $\frac{1}{2}\Sigma\dot{q}p + \frac{1}{2}\Sigma c p$, also bleibt $\frac{\partial T_{\dot{q}p}}{\partial \dot{q}}$ ungeändert. Aber das zweite Glied läßt diese Änderung nicht zu. Denn setzt man z. B.

$$T_{q\dot{q}} = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma Q_{i\varkappa}\dot{q}_i\dot{q}_\varkappa\,,$$

so folgt nach der Änderung

$$T'_{q\dot{q}} = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma Q_{i\varkappa}\dot{q}_i\dot{q}_\varkappa + \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma Q_{i\varkappa}c_i c_\varkappa + \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma Q_{i\varkappa}c_i\dot{q}_\varkappa + \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma Q_{i\varkappa}c_\varkappa\dot{q}_i\,,$$

und es ist $\frac{\partial T'_{q\dot{q}}}{\partial q}$ nicht identisch mit $\frac{\partial T_{q\dot{q}}}{\partial q}$. Nun spielt freilich in sehr vielen Problemen dieses zweite Glied keine Rolle. Darauf kommt es aber nicht an; allgemein kann es nicht entbehrt werden, und hier handelt es sich immer nur um das allgemeine, nicht um das, was in besonderen Fällen stattfinden kann.

Also müssen wir sagen: das Galileische Relativitätsprinzip betrifft nicht die gleichmäßige Bewegung, sondern das Bewegungsmoment, und dieses tritt in ganz anderer Weise in Erscheinung als die gleichmäßige Bewegung. Für das Bewegungsmoment aber besteht in der Mechanik in der Tat allgemein ein Relativitätsprinzip, nicht minder jedoch auch für die lebendige Kraft und für die Zeit, und dieses Prinzip betrifft immer nur die absoluten Beträge. Aus den bewegenden Kräften ist nichts über diese absoluten Beträge zu entnehmen.

[1]) Weinstein, Wied. Ann. **15**, 675 (1882).

Die Änderung der Bewegungen um gleichmäßige Beträge muß sich dagegen nach den Lagrangeschen Gleichungen in den Kräften im allgemeinen zu erkennen geben, da $\frac{\partial T}{\partial q}$ sich dadurch ändert.

Ganz so verhält es sich überall in der Natur, wo die Lagrangeschen Gleichungen die Ordnung bestimmen, und ähnlich auch in der Thermodynamik. Aber das Realitivitätsprinzip, mit dem wir es hier zu tun haben, soll besonderer Art sein.

3. Die Grundarbeit von A. Einstein.

Da Einstein[1]) der eigentliche Urheber des modernen Relativitätsprinzips ist, muß seine grundlegende Arbeit hierüber einer genauen Analyse unterzogen werden. Erkennen wir das Ergebnis des Michelsonschen Versuches als zweifelfrei und entscheidend an, so fragt es sich, wie müssen wir die Erscheinung, zunächst der Lichtverbreitung, auffassen, daß verschiedene Orientierung gegen eine bestimmte gleichmäßige Bewegung sich in unseren Versuchen über diese Verbreitung nicht zu erkennen gibt.

Wir knüpfen an das S. 110 Gesagte an. Dort sahen wir, daß, wenn der Träger einer Erscheinung in bezug auf die Orte, von denen die Erscheinung ausgeht oder zu denen sie gelangt, ruht, während die Orte selbst sich bewegen, es ohne besondere Umrechnungen nicht angängig ist, die wirkliche Geschwindigkeit der Verbreitung der Erscheinung zu bestimmen, weil die Verbreitungsstrecke von der Bewegung und von der Richtung der Bewegung im Verhältnis zur Geschwindigkeit der Erscheinungsverbreitung und der Richtung dieser Verbreitung abhängt. Einstein hat sich nun gefragt, ob man nicht die andere Größe, von der die Verbreitungsgeschwindigkeit abhängt, die Zeit, so bestimmen kann, daß diese Geschwindigkeit sich gleichwohl nun immer in gleicher Weise ausdrückt.

Allgemein gibt es ein solches Mittel nicht, wenn man von ihm verlangt, daß es nicht ständig wechseln, sondern, einmal festgesetzt, immer gelten soll. Für den wichtigen Fall gleichförmiger Bewegung aber hat Einstein ein solches Mittel gefunden.

Die sicherste Erscheinung zur Messung von Zeitabschnitten bietet die Umdrehung der Erde, die mit solcher Gleichmäßigkeit vor sich geht, daß Schwankungen für unsere feinsten Messungsmittel ausgeschlossen sind, obwohl sie schon durch die ständige Verlegung der Erdachse an sich vorhanden sein sollten, und daß die stetigen Änderungen, die sich aus geologischen und astronomischen Gründen ergeben, selbst in Jahrhunderten sich als kaum merkbar erweisen. Will man von dieser Erscheinung unmittelbar keinen Gebrauch machen, so bedient man sich der Uhren, die man an ihr kontrolliert. Wir wollen voraussetzen, daß wir im Besitze von Uhren seien, die absolut gleichmäßig gehen, also weder schwanken, noch vor- noch nachgehen. Können wir mit ihnen nun alle Zeitbestimmungen ausführen? An derselben Stelle zweifellos. Wenn es sich aber um Zeitbestimmung an verschiedenen Stellen handelt? Man sollte meinen, das Verfahren sei sehr einfach. Die Beobachter kommen zusammen, stellen ihre Uhren genau gleich, begeben sich dann auf ihre Posten und machen, wenn sie zugleich beobachten sollen, jeder nach seiner Uhr zur verabredeten Zeigerstellung ihre Beobachtungen, oder wenn die Zeigerstellung anheimgegeben ist, notieren sie diese und teilen sie sich gegenseitig mit. Da die Uhren der Annahme nach absolut gleichmäßig gehen, sollte dieses Verfahren genügen. „Gleichzeitigkeit" an verschiedenen Stellen hieße, wenn die an einer und derselben Stelle gleichgestellten Uhren an jenen

[1]) Ann. d. Phys. **17**, 891 (1905).

verschiedenen Stellen die gleiche Zeigerstellung aufweisen, Zeitunterschiede wären Unterschiede in der Zeigerstellung dieser Uhren. Wir hätten so absolute Zeit und absolute Zeitunterschiede. Statt dieses Verfahrens, das unter Benutzung der Kontrolle durch die Drehung der Erde allgemein Anwendung findet, wendet Einstein ein anderes, davon ganz abweichendes an. In den Mitteln selbst ist das nicht begründet, da auch Einstein absolut gleiche und gleichmäßig gehende Uhren voraussetzt. Der wahre Grund ist vielmehr, wie bemerkt, der Wunsch, für die Geschwindigkeit der Ausbreitung aller Erscheinungen den gleichen Ausdruck zu gewinnen. Die Zeitdauer ist so zu bestimmen, daß die Vieldeutigkeit des Weges der Erscheinung ausgeglichen wird. Das geschieht, wenn definitionsweise mit Einstein gesagt wird: Zeitdauern sollen so gemessen werden, daß sie für die Ausbreitung einer Erscheinung nach einer Richtung zwischen zwei Punkten denselben Betrag aufweisen wie für die nach der entgegengesetzten Richtung. Daraus ergibt sich dann auch die Feststellung für „Gleichzeitigkeit" in zwei Punkten. Ein Beobachter läßt die Erscheinung unter Notierung der Zeigerstellung an einer Uhr vom ersten Punkt zum zweiten laufen, im zweiten Punkt wird die Ankunft an der Zeigerstellung einer dort befindlichen Uhr vom zweiten Beobachter notiert, sofort läßt dieser die Erscheinung zum ersten Punkt zurücklaufen und dort notiert wieder der erste Beobachter die Zeigerstellung an der Uhr daselbst bei Rückkunft. Das Mittel aus den Zeigerstellungen der ersten Uhr ist dann „gleichzeitig" mit der Zeigerstellung der zweiten Uhr. Mit dieser Festsetzung für Gleichzeitigkeit, aus der sich dann auch die für Zeitdauern ergibt, kann die Definition für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Erscheinungen allgemein als Entfernung zwischen den beiden Punkten dividiert durch die Zeitdauer beibehalten werden, ob die Träger der Ausbreitung ruhen oder sich bewegen, und ob die Punkte, zwischen denen die Erscheinungen sich ausbreiten, ruhen oder sich bewegen. Die Festsetzung ist also gleichbedeutend mit der: der Weg für die Zeiteinheit soll immer der gleiche sein, vorwärts so groß wie rückwärts oder seitwärts. Wir wollen unter „Strahlen" allgemein Linien verstehen, längs deren eine Erscheinung sich ausbreitet, und mit „Strahlenlänge" den Weg auf solchen Linien für die Zeiteinheit bezeichnen. Dann sollen also die Strahlenlängen vorwärts und rückwärts zwischen zwei Punkten und überhaupt nach allen Richtungen gleich sein.

Sind die Zeitnotierungen in den zwei Punkten A, B gleich t_A, t_B, t'_A, so gilt hiernach die Gleichung

$$(1) \qquad t_B - t_A = t'_A - t_B\,, \quad \text{d. h.} \quad t_B = \frac{t'_A + t_A}{2}\,,$$

und die Uhren laufen „synchron", wenn diese Beziehung durch die Zeigernotierungen erfüllt wird. Dieser Synchronismus ist ein gegenseitiger und gilt in beliebiger Wechselvergleichung, wenn er in der Reihe besteht. Sind auf diese Weise alle Uhren synchron gemacht, so gilt als „Zeit": die an einer am betreffenden Ort ruhenden Uhr abgelesene Zeigerstellung. Das ist Einsteins Definition für Zeit und Gleichzeitigkeit. Einstein nennt diese Zeit „die Zeit des ruhenden Systems", definiert durch ruhende Uhren im ruhenden System. Unter „ruhendes System" versteht er ein Raumsystem, in welchem die gewöhnlichen mechanischen Gleichungen gelten. Das letztere ist nach obigem (S. 278f.) nicht ganz eindeutig. Gemeint sind von ihm und von allen Anderen alle Raumsysteme, die sich voneinander nur durch eine gleichförmige Bewegung unterscheiden. Wir nennen sie Ruhsysteme. Alle solche Ruhsysteme sollen für die Definition der Zeit und Gleichzeitigkeit grundsätzlich gleichwertig sein. Da aber nach den Lagrangeschen Gleichungen die Äquivalenz der Systeme tatsächlich sich nicht auf gleichförmige Bewegung, sondern auf gleichförmiges Bewegungsmoment oder gleichförmige lebendige Kraft bezieht, so steht die Einsteinsche Definition nur dann in Einklang mit der wichtigsten Grundlage der Mechanik, wenn man als Ruhsystem alle solche Systeme bezeichnet, die sich voneinander nur um gleichförmige Bewegungsmomente oder um gleichförmige lebendige Kräfte unterscheiden. Was bedeutet das aber für die Vorstellung? Die Einsteinsche Definition ist nur sinngemäß in einer Welt von lauter unzusammenhängenden Punkten, also in einer rein mathematischen Welt, nicht in einer physikalischen Welt. Oder man darf sich auf die Mechanik überhaupt nicht beziehen und muß von vornherein alle Raumsysteme, die sich nur durch eine gleichförmige Bewegung voneinander unterscheiden, für äquivalent für die betreffende Definition erklären. Dann verläßt man freilich den Boden der Wirklichkeit, indem solche Systeme für das Gebiet der Lagrangeschen Mechanik, der doch gegenwärtig mit Recht die ganze Naturwissenschaft, geschweige die engere Mechanik, zugewiesen wird, allgemein nicht äquivalent sind. Denn entweder können die additiven Geschwindigkeiten variabel sein, wenn man die Momente um Konstanten vermehrt, nach den Gleichungen

$$p_i^{(0)} = Q_{i1}\dot{q}_1^{(0)} + Q_{i2}\dot{q}_2^{(0)} + \ldots + Q_{in}\dot{q}_n^{(0)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

wo $p^{(0)}$ die Vermehrung des Moments p, $\dot{q}^{(0)}$ die entsprechende der Geschwindigkeit $\dot{q}$ bedeutet. Oder die Änderungen der Bewegungsmomente sind variabel nach den Gleichungen

$$\dot{q}_i^{(0)} = P_{i1}p_1^{(0)} + P_{i2}p_2^{(0)} + \ldots + P_{in}p_n^{(0)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

wenn $\dot{q}^{(0)}$ die konstante Vermehrung der Geschwindigkeit $\dot{q}$ festsetzt. Die Q wie die P sind allgemein Funktionen der q, und in beiden Fällen ändern sich die Lagrangeschen Gleichungen. In Sonderfällen können die $\dot{q}^{(0)}$ oder die $p^{(0)}$ aus jenen Gleichungen sich konstant ergeben. Aber Sonderfälle, sie mögen noch so bedeutend sein, haben für solche Fragen keinen Wert, wie schon bemerkt. Die Einsteinsche Definition des ruhenden Systems ist also in der Lagrangeschen Mechanik nicht zulässig, und ebenso sind alle entsprechenden Definitionen der üblichen Relativitätstheorie abzulehnen. Sie versagen mit der Einsteinschen Definition auf dem allerwichtigsten und umfassendsten Gebiet.

Als Relativitätsprinzip stellt Einstein zwei Grundsätze auf, die mit seinen Worten wiedergegeben lauten:

1. „Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden.

2. Jeder Lichtstrahl bewegt sich im ‚ruhenden' Koordinatensystem mit der bestimmten Geschwindigkeit V, unabhängig davon, ob dieser Lichtstrahl von einem ruhenden oder bewegten Körper emittiert ist. Hierbei ist

$$(2_1) \qquad \text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Lichtweg}}{\text{Zeitdauer}},$$

wobei ‚Zeitdauer' im Sinne der Definition aufzufassen ist."

Nach diesen Grundsätzen, von denen also schon der erste für die aus den Lagrangeschen Gleichungen allgemein sich ergebenden Zustände nicht zutreffen kann, wird nun zunächst die Raummessung beurteilt. Ein starrer ruhender Stab, gemessen mit einem ebenfalls ruhenden starren Stab habe die Länge l. Die Stabachse sei die x-Achse und der Stab erhalte nunmehr eine gleichförmige Bewegung p in Richtung dieser x-Achse. Seine Länge in diesem Zustande kann von einem sich mit ihm mitbewegenden Beobachter gemessen werden, oder von einem ruhenden Beobachter. Nach dem ersten Grundsatz ist die gefundene Länge, die „Länge des bewegten Stabes im bewegten System", gleich l, ein Ergebnis, dem ja auch niemand widersprechen wird, wenn Stab und Maßstab sich ganz gleich verhalten, da alsdann, sollte die Bewegung einen Einfluß auf die Abmessungen der Körper haben, etwa im Sinne von H. A. Lorentz, dieser Einfluß sich an beiden Stäben in gleicher Weise geltend macht. Führt ein gegen den Stab ruhender Beobachter die Messung aus, so stellt er mittels synchroner, in seinem Ruhsystem angebrachter Uhren fest, in welchen Punkten dieses Ruhsystems sich Anfang und Ende des Stabes zu einer bestimmten Zeit t befinden, und mißt dann die Entfernung l' dieser Punkte mit dem ruhenden Maßstab aus. Das wäre dann „die Länge des bewegten Stabes im ruhenden System". Diese beiden Längen werden sonst als gleich angesehen, nach Einsteins Anschauung aber sollen sie verschieden voneinander sein, und zwar darum, weil die Aufenthaltsorte der Enden des Maßstabes mittels Uhren bestimmt sind, die im betreffenden Ruhsystem synchron sind, nicht mittels Uhren, die im bewegten System synchron sind. Uhren aber, die mit Uhren im betreffenden Ruhsystem synchron sind, werden gegen sie asynchron, sobald sie sich bewegen. Es habe der sich bewegende Stab an seinen Enden A, B zwei Uhren, die mit Uhren im betreffenden Ruhsystem synchron, also auch miteinander in diesem System synchron sind. Für Beobachter, die sich mit Stab und Uhren bewegen, sind diese Uhren auch jetzt noch synchron. Anders verhalten sich die Uhren von Beobachtern vom gegebenen Ruhsystem aus beurteilt. Es gehe bei einer Ablesung t_A an der Uhr bei A ein Lichtstrahl nach der Uhr bei B und gelange dort zur Zeit t_B an, darauf gehe er zur Uhr bei A zurück und komme dort an zur Zeit t'_A an dieser Uhr abgelesen. Die Lichtwege vom gegebenen Ruhsystem aus beurteilt sind dann $l' + p\,(t_B - t_A)$, $l' - p\,(t'_A - t_B)$.

Also haben wir nach dem zweiten Grundsatz

$$V = \frac{l' + p\,(t_B - t_A)}{t_B - t_A}, \quad V = \frac{l' - p\,(t'_A - t_B)}{t'_A - t_B} \;{}^{1)},$$

d. h.

(3) $$t_B - t_A = \frac{l'}{V - p}, \quad t'_A - t_B = \frac{l'}{V + p},$$

somit ist $t'_A - t_B < t_B - t_A$, die Uhren, die im ruhenden System synchron waren, der Gleichung (1) entsprechend, sind jetzt im bewegten System, an Uhren im ruhenden System verglichen, nicht mehr synchron miteinander. Uhren, auf Synchronismus so kontrolliert wie festgesetzt, ändern also ihr Verhalten von System zu System, und wenn p die relative Bewegung eines Systemes gegen ein anderes ist, hat man

(4) $$(t_B - t_A) - (t'_A - t_B) = \frac{l'}{V - p} - \frac{l'}{V + p} = \frac{2pl'}{V^2 - p^2}$$

als Abweichung im ersten System gegen den Synchronismus im zweiten. Und diese Abweichung ist auch abhängig von dem Abstande der Uhren, sie wächst gleich diesem Abstande. Dagegen haben wir vom bewegten Systeme aus beurteilt nach dem ersten Grundsatz $(t_B - t_A) - (t'_A - t_B) = 0$

(2_2) $$V = \frac{l}{t_B - t_A} = \frac{l}{t'_A - t_B} = \frac{2l}{t'_A - t_A}.$$

[1]) Die Gleichungen setzen voraus, daß, vom ruhenden System gemessen, eine bewegte Strecke vorwärts und rückwärts gleiche Länge hat.

Das Verhältnis der verschiedenen Systeme, eines vom anderen beurteilt, bestimmt Einstein in sehr geistvoller Weise. Sei das eine System, als ruhend bezeichnet, charakterisiert durch die Parameter x, y, z, t, das andere gegen es gleichförmig bewegte durch die $\xi', \eta', \zeta', \tau$. Die Bewegung des zweiten Systems gehe in Richtung der x-Achse vor sich. Setzen wir $x = \xi + p\,t$, so wird jedem Wertsystem ξ', η', ζ' ein von t unabhängiges Wertsystem ξ, y, z zukommen, und es fällt der Ursprung des Systems ξ, y, z mit dem ξ', η', ζ' zusammen. Im bewegten Wertsystem lassen wir vom Ursprung der ξ', η', ζ' einen Strahl zur Zeit τ_0 nach irgendeinem Punkt in Richtung der ξ'-Achse, welche die Richtung der x-Achse ist, gehen, dort zur Zeit τ_1 anlangen, sofort zurückgesandt werden und zur Zeit τ_2 zum Ursprung zurückkommen. Nach der Definition synchroner Zeiten haben wir

$$(5_1) \qquad \tau_1 = \frac{\tau_0 + \tau_2}{2} .$$

Die τ sind Funktionen der Lage der Punkte und der Zeit t. Die Koordinaten im System ξ, y, z sind nun $0, 0, 0;\ \xi, 0, 0$. Für die den τ_0, τ_1, τ_2 entsprechenden Zeiten, vom ruhenden System beurteilt, aber haben wir

$$t, \quad t + \frac{\xi}{V-p}, \quad t + \frac{\xi}{V-p} + \frac{\xi}{V+p} .$$

Also wird ausgeschrieben

$$(5_2\text{a}) \quad \tau\left(\xi, 0, 0;\ t + \frac{\xi}{V-p}\right) = \frac{1}{2}\left\{\tau(0, 0, 0;\ t) + \tau\left(0, 0, 0;\ t + \frac{\xi}{V-p} + \frac{\xi}{V+p}\right)\right\}$$

und indem zur Grenze übergegangen wird nach dem Taylorschen Satz

$$(5_3\text{a}) \qquad \frac{\partial \tau}{\partial \xi} + \frac{1}{V-p}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-p} + \frac{1}{V+p}\right)\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{V}{V^2-p^2}\frac{\partial \tau}{\partial t} .$$

Entsprechend ist für die y- und z-Achse

$$(5_3\text{b}) \qquad \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 ,$$

$$(5_3\text{c}) \qquad \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 .$$

Man genügt diesen partiellen Differentialgleichungen, von denen die erste die Form hat

$$(5_4\text{a}) \qquad \frac{\partial \tau}{\partial \xi} + \frac{p}{V^2-p^2}\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$$

durch irgendeine Funktion f einer linearen Funktion von t und ξ, nämlich

$$(6') \qquad \tau = f\left(t - \frac{p}{V^2-p^2}\xi\right).$$

Einstein setzt

$$(6) \qquad \tau = a\left(t - \frac{p}{V^2-p^2}\xi\right),$$

wo a eine Größe ist, die nur von V und p abhängen kann. Da im System $\xi', \eta', \zeta', \tau$ nach den beiden Grundsätzen sein soll

$$(2_3) \qquad V = \frac{\xi'}{\tau}$$

und vom ruhenden System ξ, y, z ist

$$V - p = \frac{\xi}{t}, \qquad \text{also} \quad t = \frac{\xi}{V - p},$$

so folgt

$$\xi' = a \frac{V^2}{V^2 - p^2} \xi .$$

Durch Rechnungen ganz entsprechend den S. 122 ff. allgemein ausgeführten findet man

$$\eta' = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - p^2}} y ,$$

$$\zeta' = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - p^2}} z .$$

Mit ξ, η, ζ als relativen Koordinaten und x, y, z als ursprünglichen hat man also

$$(7) \quad \begin{cases} \tau = a\left(t - \dfrac{p}{V^2 - p^2}\xi\right) = a \dfrac{V^2}{V^2 - p^2}\left(t - \dfrac{p}{V^2} x\right), \\ \xi' = a \dfrac{1}{1 - \dfrac{p^2}{V^2}} \xi = a \dfrac{1}{1 - \dfrac{p^2}{V^2}} (x - p\,t), \\ \eta' = a \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{p^2}{V^2}}} \eta = a \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{p^2}{V^2}}} y, \\ \zeta' = a \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{p^2}{V^2}}} \zeta = a \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{p^2}{V^2}}} z . \end{cases}$$

Die Beziehungen entsprechen den S. 127 zusammengestellten Lorentzschen Ansätzen, wenn man annimmt

$$\frac{a}{\sqrt{1 - \dfrac{p^2}{V^2}}} = \varkappa .$$

Lorentz hat die Größe $\varkappa$ unbestimmt gelassen, Einstein bestimmt sie aus einer Überlegung, wegen deren auf seine Arbeit verwiesen werden muß, zum Betrage 1, so daß

$$a = \sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}} = \frac{1}{\beta}$$

wird. Dadurch erhält man

$$(8a) \quad \begin{cases} \tau = \dfrac{1}{\beta}\left(t - \beta^2 \dfrac{p}{V^2} \xi\right), \\ \xi' = \beta\, \xi , \\ \eta' = \eta , \\ \zeta' = \zeta ; \end{cases}$$

und in absoluten Koordinaten

(8b)
$$\begin{cases} \tau = \beta\left(t - \dfrac{p}{V^2}x\right), \\ \xi' = \beta(x - pt), \\ \eta' = y, \\ \zeta' = z, \end{cases}$$

wobei ist

(9)
$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{p^2}{V^2}}}.$$

Das also sind die Lorentz-Einsteinschen Transformationsformeln zum Übergang von absoluten und relativen Systemen auf ein Relativsystem, welches bestimmt ist durch die Grundformel für Zeitmessung und welches den beiden Einsteinschen Grundsätzen entsprechen soll. Letzteres ist zunächst der Fall bei der Lichtverbreitung. Eine Kugelwelle im System x, y, z, t ist auch eine solche im System ξ', η', ζ', τ mit derselben Ausbreitungsgeschwindigkeit. Da man nämlich durch Umkehrung hat

(10)
$$t = \beta\left(\tau + \frac{p}{V^2}\xi'\right),$$

(11a)
$$\begin{cases} x = \beta(\xi' + p\tau), \\ y = \eta', \\ z = \zeta', \end{cases}$$

(11b)
$$\begin{cases} \xi = \dfrac{1}{\beta}\xi', \\ \eta = \eta', \\ \zeta = \zeta', \end{cases}$$

so folgt aus

(12)
$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2$$

die Beziehung

(12′)
$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = V^2\tau^2.$$

Stellt man die Gleichheit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes als Postulat, so ergibt sich von vornherein, daß $\varkappa = 1$ angesetzt werden muß. An sich braucht selbstverständlich V keineswegs die Ausbreitungsgeschwindigkeit gerade des Lichtes zu sein, es könnte V auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit irgendeiner anderen Erscheinung bedeuten, die man zur Zeitdefinition nach dem angenommenen Verfahren benutzt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes bietet sogar die Unbequemlichkeit, daß sie von Stoff zu Stoff variiert und von der Farbe abhängt. Die Definition der Zeit also entweder nach den Stoffen und Farben sich richtet oder auf einen bestimmten Stoff und eine bestimmte Farbe bezogen werden muß. Gewöhnlich wird zur Definition der sog. leere Raum benutzt, der auch keine Dispersion hat. Alle zahlenmäßigen Ergebnisse gelten dann für diesen leeren Raum oder für Stoffe, die hinsichtlich der Lichtverbreitung nur wenig von dem Verhalten des leeren Raumes abweichen, wie Luft usf. Darum sind auch selbst gleichbewegte Systeme im allgemeinen nicht einander äquivalent, und ist das Relativitätsprinzip immer auf diejenigen Stoffe beschränkt, innerhalb deren die Signalerscheinung zur Kontrolle der Zeit sich quantitativ gleich verhält, und zwar nach allen Richtungen. Von einem allgemeinen Relativitätsprinzip könnte nur die Rede sein, wenn zur Zeitkontrolle eine Erscheinung herangezogen zu werden vermöchte, welche von jeder stofflichen Besonderheit unabhängig ist. Eine solche Erscheinung wäre nach unserem gegenwärtigen Wissen die Schwerkraft. Aber deren Verbreitungsgeschwindigkeit zu ermitteln, ist doch nicht gelungen. Und alles Rechnerische steht und fällt mit der Zeitbestimmung, während das Relativitätsprinzip als solches freilich ideell Geltung haben kann, falls es den Tatsachen entspricht. Zur Annahme $V = C_0$ ist man, wie wir sehen werden, durch Anpassung an die optischen Erscheinungen in und an bewegten Stoffen geführt worden.

Wir haben nun die Folgerungen dieses Prinzipes und der mit ihm verbundenen quantitativen Festsetzungen zu untersuchen. Vorher aber sei nochmals darauf hingewiesen, daß diese quantitativen Festsetzungen nur aus Definitionen über Lichtsignale gewonnen sind. In den Hauptgleichungen (8) bis (12) bedeuten deshalb die Größen $x, y, z; \xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta'$ lediglich Strahlenlängen, nichts anderes, irgendeine Bezugnahme auf Verhältnisse wirklicher Körper kommt nicht in Frage. Was man aus diesen entscheidenden Gleichungen auch ableiten mag, es kann sich alles nur auf Strahlenlängenverhältnisse beziehen. Ist nun im Relativsystem die Gleichung eine Fläche $f(\xi', \eta', \zeta') = 0$, als der geometrische Ort der Endpunkt von Strahlenlängen gegeben, so erscheint dieselbe Fläche, vom ruhenden System aus betrachtet, unter der Gleichung $f\left(\frac{x - pt}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}}, y, z\right) = 0$. Sie ändert also erstens ihre Gestalt fortdauernd und stimmt auch in keinem Moment mit der Form, die sie einem mit ihr bewegten Beobachter bietet. So geht eine Kugel im Relativsystem für einen ruhenden Beobachter über in ein Rotationsellipsoid, dessen Abplattung und Lage sich ständig ändert. Daraus zu schließen, wie es von Einstein geschieht, daß ein solches Verhalten auch wirkliche Körper betrifft, ist unzulässig. Es besagt nur, daß Strahlen, welche, von einem Punkte ausgehend, für einen mit ihnen bewegten Beobachter im Relativsystem auf einer Fläche $f(\xi', \eta', \zeta') = 0$ enden, für den ruhenden Beobachter auf der Fläche $f\left(\frac{x - pt}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}}, y, z\right) = 0$ ihr Ende finden. Darin liegt nichts Besonderes, worüber man sich so zu verwundern brauchte, wie es sooft geschieht. Es ist eine mathematische Transformation, die physikalisch für Strahlen und nur für Strahlen Wert gewinnt, wenn ein ruhender Beobachter die Zeit und Länge für die bewegten Strahlen so zu rechnen gezwungen ist, wie angenommen. Also sind auch alle solche Angaben, wie, daß bewegte Körper dem ruhenden Beobachter sogar unendlich abgeplattet und ins Unendliche gedehnt erscheinen können, wenn nämlich die Körper sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen (wodurch $\beta = \infty$ wird), ganz müßig, es betrifft die Körper gar nicht. Geradezu unrichtig ist es, wenn man gar diese Angaben auf die mit den Körpern verbundenen Eigenschaften, wie Masse, Schwere usf., überträgt, wovon bald gesprochen werden wird. Noch sonderbarer werden die Verhältnisse, wenn wir auch den Beobachter sich bewegen lassen, aber für ihn die relativen Bestimmungen in Anspruch nehmen. Die Flächengleichung geht dann über in $f\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}}, \eta, \zeta\right) = 0$. Auch für einen mitbewegten Beobachter wandelt sich also die Fläche um, wenn er ihre Abmessungen statt in Relativgrößen ξ', η', ζ' in den gewöhnlichen relativen Größen ξ, η, ζ feststellt, er berechnet dann die Fläche ganz so wie ein ruhender Beobachter in jedem einzelnen Zeitmoment für sich. Überträgt man das, wie es immer geschieht, in die Wirklichkeit, so muß man annehmen, daß es dem mitbewegten Beobachter absolut unmöglich ist (und zwar nicht etwa praktisch unmöglich, sondern nach der Vorstellung unmöglich), anders Dimensionen und Zeiten aufzufassen als im Relativgebiet, was man ja auch folgerichtig getan hat. Wird die Lichtgeschwindigkeit übertroffen, so geht die Fläche für den ruhenden Beobachter ins Unvorstellbare über, indes sie dann für den bewegten Beobachter real vorhanden ist. Um dieser Folgerung auszuweichen, hat man angenommen, daß Bewegungen mit Überlichtgeschwindigkeit unmöglich seien. Das ist gar nicht nötig, wenn man sich auf das beschränkt, auf was die Theorie allein sich bezieht, auf Strahlenverhältnisse; werden Strahlen noch rascher fortgeführt, als sie sich verbreiten, so verbreiten sie sich für einen ruhenden Beobachter eben nicht, sie können keinen Punkt des Raumes des Beobachters erreichen, weil er ihnen vorher schon entrückt ist.

Ähnlich steht es mit einer entsprechenden Folgerung hinsichtlich der Zeit. Die Lage einer Uhr des Relativsystems im ruhenden System sei gegeben durch die Koordinaten x, 0, 0. Dann ist $x = p\,t$. Also wird die Relativzeit

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}}\left(t - \frac{p}{V^2}x\right) = t\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}.$$

Ist $p = V$, so wird $\tau = 0$, für den ruhenden Beobachter schreitet die Zeit im Relativsystem überhaupt nicht fort, sie deutet ihm dort immer Gegenwert. Ein mittelalterlicher Philosoph hat die Behauptung aufgestellt, daß für Gott die Zeit überhaupt absolute Gegenwart bleibt. Dieser Gedanke ist sehr hoch und bedeutend. Aber dem Relativiker selbstverständlich, wenn die Welt mit Lichtgeschwindigkeit durch den Raum jagen sollte. Allgemein bleibt dem ruhenden Beobachter die Relativzeit gegen seine Zeit stets zurück um den Betrag

$$\Delta t = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}\right)t. \tag{13}$$

Hieraus schließt Einstein, daß, wenn man von zwei an einem Ort synchron gehenden Uhren eine auf einer beliebigen Kurve bewegt und zur anderen zurückführt, daß sie dann dieser andern gegenüber zurückgeblieben sich zeigen muß. Allein die Uhr als Mechanismus ist nicht zurückgeblieben, nur die Kontrollen nach der Definition mittels Strahlen zeigen auf dem Wege ein Zurückbleiben an. Am Ausgangspunkt zurückgekehrt, findet man durch gleiche Kontrolle wieder Synchronismus. — Das Ganze betrifft wieder nur Strahlenverhältnisse, nicht das Verhalten von Gegenständen.

Müssen wir so die Bedeutung der von Einstein aus seinen Formeln gezogenen Schlüsse auf rein geometrische Verhältnisse beschränken, so bleibt doch sein Relativitätsprinzip davon unberührt. Und in allen noch folgenden Diskussionen wird sich das gleiche zeigen: Einsteins Gedanke des Relativitätsprinzipes ist außer aller Frage groß, selbst nachdem er sich mittlerweile als der Wirklichkeit gegenüber allgemein undurchführbar erwiesen hat. Aber von den an dieses Prinzip geknüpften, mit ihm gar nicht zusammenhängenden Folgerungen muß man das meiste ins Geometrische verweisen. Ich gehe aber erst zur Theorie von Minkowski über.

4. Herrmann Minkowskis Relativitätsprinzip.

In seinem leider so kurzen Leben hat Herrmann Minkowski so Außerordentliches geleistet wie nicht vielen Menschen beschieden ist; er gehörte zu den bedeutendsten Erscheinungen im Reiche der Geister. Seine Theorie der Relativität bildet nur einen Teil seiner Entdeckungen, und es ist im höchsten Grade zu bedauern, daß er sie unvollendet, und nicht bis an die Grenzen durchdacht, hat lassen müssen. Fast geniert man sich, an seinem wundervollen Gebäude Mängel nachzuweisen, die nur geblieben sind, weil ihm nicht vergönnt war, dieses Gebäude in aller Sicherheit durchzuführen.

Minkowskis Grundgedanke ist zunächst, Zeit und Raum in eins zusammenzufassen und die Zeit wie eine weitere Dimension des Raumes zu behandeln. Ein Punkt, eine Linie, eine Fläche, ein Körper sind für ihn Dinge in den vier Dimensionen x, y, z, t, und als solche werden sie „Weltdinge" genannt. Bezeichnen wir jetzt alles, was in der Welt Wirkungen erfährt und Wirkungen ausübt, als Substanz, so können wir bildlich das ganze Raum-Zeit-Gebiet als von Substanz oder von Substanzpunkten erfüllt ansehen, und jeder Substanzpunkt ist in seiner Lage im Raum-Zeit-Gebiet durch die vier Koordinaten x, y, z, t bestimmt. Die Gesamtheit aller Werte dieser vier Koordinaten für den betreffenden Substanzpunkt ist seine „Weltlinie". So löst sich das ganze Weltgebiet auf in Weltlinien, „und ich möchte sogleich vorwegnehmen, daß meiner Meinung nach die physikalischen Gesetze ihren vollkommensten Ausdruck als Wechselbeziehungen unter diesen Weltlinien finden dürften", sagt Minkowski. Wie wir für die Koordinaten x, y, z einen Nullpunkt festsetzen und von diesem aus nach $+$ und $-$ rechnen, wird das gleiche auch für die Zeit angeordnet. Das ganze Raum-Zeit-Gebiet erhält so eine Mitte $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$, von der auch nach einer Seite x, y, z, t positiv, nach der anderen Seite negativ gerechnet werden. Alle Weltlinien und Gebilde mit $t > 0$ werden als „obere Welt" bezeichnet.

Minkowski weist nun auf das zum Teil schon behandelte Verhalten der Galileischen Bewegungsgleichungen hin. Diese Gleichungen sind erstens überhaupt invariant, wenn wir das System x, y, z, t ersetzen durch das $x - p_x t$, $y - p_y t$, $z - p_z t$, $t - t_0$, falls p_x, p_y, p_z, t_0 Konstanten bedeuten. Ersetzen wir zweitens das System x, y, z, t durch ein System $x' = \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} z$, $y' = \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23} z$, $z' = \alpha_{31} x + \alpha_{32} y + \alpha_{33} z$, $t - t_0$ mit α als Konstanten, so findet zwar eine Invarianz der Gleichungen nicht mehr statt, aber eine Kovarianz besteht, indem die bewegenden Kräfte sich genau so ändern, wie die Beschleunigungen; es werden diese bewegenden Kräfte

$$X' = \alpha_{11} X + \alpha_{12} Y + \alpha_{13} Z\,,\ Y' = \alpha_{21} X + \alpha_{22} Y + \alpha_{23} Z\,,\ Z' = \alpha_{31} X + \alpha_{32} Y + \alpha_{33} Z$$

und die Galileischen Gleichungen besitzen im neuen System genau die Form, die sie im alten System hatten. Geometrisch bedeutet das, daß man an Stelle des Raumsystems x, y, z das gegen dieses um den Anfangspunkt gedrehte Raumsystem x', y', z' gesetzt hat. Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kräfte erfahren dieselbe Änderung wie das Raumsystem, und die Galileischen Gleichungen der Mechanik sind in der analytischen Darstellung unabhängig von der Richtung des Raumsystems im Raume. Zugleich sind die Größen $x^2 + y^2 + z^2$ und $X^2 + Y^2 + Z^2$ invariant, die neuen Größen α gehorchen den bekannten sechs Bedingungen, daß

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2\,, \tag{1a}$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2 \tag{1b}$$

ist. Nun besagt diese zweite Transformation, daß für die Galileische Mechanik die Achsen beliebig im Raume gerichtet werden dürfen, die Gleichungsgrößen ändern sich immer kovariant, und die Form bleibt so erhalten. Die erste Transformation, derzufolge die Raumpunkte auch gleichmäßig in der Zeit verschoben werden dürfen, deutet Minkowski von seinem Standpunkte aus, ganz entsprechend der Zulässigkeit der Drehung der Raumachsen, als Zulässigkeit der Drehung der Zeitachse im Raum-Zeit-Gebiet. Wie man sich das versinnlichen könnte, werden wir später sehen. Die Folge aber ist, daß nunmehr im Raum-Zeit-Gebiet die beiden Transformationen sich in eine Transformation zusammenfassen lassen, die der Transformation durch Drehung im Raume allein genau entspricht.

Nehmen wir also zwei Raum-Zeit-Systeme x, y, z, t und $\xi', \eta', \zeta', \tau$ an, so haben wir zu ihrer vollständigen Überführung in einander die Beziehungen

$$(2_1)\qquad \begin{cases} \xi' = \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} z + \alpha_{14} a t, \\ \eta' = \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23} z + \alpha_{24} a t, \\ \zeta' = \alpha_{31} x + \alpha_{32} y + \alpha_{33} z + \alpha_{34} a t, \\ a\tau = \alpha_{41} x + \alpha_{42} y + \alpha_{43} z + \alpha_{44} a t. \end{cases}$$

$$(3_1)\qquad \begin{cases} x = \alpha_{11} \xi' + \alpha_{21} \eta' + \alpha_{31} \zeta' + \alpha_{41} a\tau, \\ y = \alpha_{12} \xi' + \alpha_{22} \eta' + \alpha_{32} \zeta' + \alpha_{42} a\tau, \\ z = \alpha_{13} \xi' + \alpha_{23} \eta' + \alpha_{33} \zeta' + \alpha_{43} a\tau, \\ at = \alpha_{14} \xi' + \alpha_{24} \eta' + \alpha_{34} \zeta' + \alpha_{44} a\tau. \end{cases}$$

Die α stellen die Richtungskosinus der Achsensysteme gegeneinander dar, in demselben Sinne wie im Raume allein. a ist zur Zeit t oder τ als Faktor hinzugefügt, um in $a\,t$, $a\,\tau$ Größen zu gewinnen, die als „Längen" den x, y, z; ξ', η', ζ' entsprechen. Als Bedingung wird nun abermals entsprechend den Verhältnissen im Raume angesetzt

$$(4)\qquad x^2 + y^2 + z^2 + a^2 t^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + a^2 \tau^2.$$

Wir werden später sehen, daß diese Bedingung notwendig ist, wenn man von Minkowskis Transformation zur Lorenz-Einsteinschen gelangen will, wenn sie sich auch nicht als hinreichend dazu erweist, und so scheint auch Minkowski ihre Bedeutung aufgefaßt zu haben. Es ergeben sich aber aus ihr die Gleichungen entsprechend den Verhältnissen in der Raumtransformation

$$(5_1)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 + \alpha_{41}^2 = 1, \\ \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{42}^2 = 1, \\ \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 + \alpha_{43}^2 = 1, \\ \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2 + \alpha_{44}^2 = 1, \end{cases} \qquad (5_2)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 + \alpha_{14}^2 = 1, \\ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2 = 1, \\ \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 + \alpha_{34}^2 = 1, \\ \alpha_{41}^2 + \alpha_{42}^2 + \alpha_{43}^2 + \alpha_{44}^2 = 1. \end{cases}$$

$$(6_1)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} + \alpha_{41}\alpha_{42} = 0, \\ \alpha_{11}\alpha_{13} + \alpha_{21}\alpha_{23} + \alpha_{31}\alpha_{33} + \alpha_{41}\alpha_{43} = 0, \\ \alpha_{11}\alpha_{14} + \alpha_{21}\alpha_{24} + \alpha_{31}\alpha_{34} + \alpha_{41}\alpha_{44} = 0, \\ \alpha_{12}\alpha_{13} + \alpha_{22}\alpha_{23} + \alpha_{32}\alpha_{33} + \alpha_{42}\alpha_{43} = 0, \\ \alpha_{12}\alpha_{14} + \alpha_{22}\alpha_{24} + \alpha_{32}\alpha_{34} + \alpha_{42}\alpha_{44} = 0, \\ \alpha_{13}\alpha_{14} + \alpha_{23}\alpha_{24} + \alpha_{33}\alpha_{34} + \alpha_{43}\alpha_{44} = 0. \end{cases}$$

$$(6_2)\quad \begin{cases} \alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}+\alpha_{13}\alpha_{23}+\alpha_{14}\alpha_{24}=0\,, \\ \alpha_{11}\alpha_{31}+\alpha_{12}\alpha_{32}+\alpha_{13}\alpha_{33}+\alpha_{14}\alpha_{34}=0\,, \\ \alpha_{11}\alpha_{41}+\alpha_{12}\alpha_{42}+\alpha_{13}\alpha_{43}+\alpha_{14}\alpha_{44}=0\,, \\ \alpha_{21}\alpha_{31}+\alpha_{22}\alpha_{32}+\alpha_{23}\alpha_{33}+\alpha_{24}\alpha_{34}=0\,, \\ \alpha_{21}\alpha_{41}+\alpha_{22}\alpha_{42}+\alpha_{23}\alpha_{43}+\alpha_{24}\alpha_{44}=0\,, \\ \alpha_{31}\alpha_{41}+\alpha_{32}\alpha_{42}+\alpha_{33}\alpha_{43}+\alpha_{34}\alpha_{44}=0\,. \end{cases}$$

Zwischen den 16 Größen α bestehen so 10 Gleichungen (5_1), (6_1) oder (5_2), $6_2)$, die das gleiche besagen, so daß 6 dieser Größen willkürlich gewählt werden können. Jedes der α ist gleich der zugehörigen Unterdeterminante der α (mit dem zugehörigen Zeichen), dividiert durch die Derminante der α, welche letztere gleich $+1$ gesetzt ist. Den Inbegriff aller Transformationen dieser Art nennt Minkowski Lorentz-Transformationen. Allein die eigentliche Lorentz-Transformation bildet einen besonderen Fall dieser Transformation und muß auch ganz anders interpretiert werden, wie wir sogleich sehen werden. Ich werde darum die Gesamtheit der obigen Transformationen als Minkowski-Transformation bezeichnen. Sie bilden ein besonderes Neues, das durchaus mit dem Namen des Mannes verbunden ist.

Um zur eigentlichen Lorentz-Einstein-Transformation zu gelangen, haben wir zu setzen

$$\xi' = \alpha_{11}x + \alpha_{14}at\,,\qquad \eta' = y\,,\qquad \zeta' = z\,,\qquad a\tau = \alpha_{41}x + \alpha_{44}at\,,$$

so daß ist

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{41}^2 = 1\,,\qquad \alpha_{14}^2 + \alpha_{44}^2 = 1\,,\qquad \alpha_{11}\alpha_{14} + \alpha_{41}\alpha_{44} = 0\,,$$

also

$$\alpha_{11} = \alpha_{44}\,,\qquad \alpha_{14} = \mp\sqrt{1-\alpha_{44}^2}\,,\qquad \alpha_{41} = \pm\sqrt{1-\alpha_{44}^2}\,.$$

Schreiben wir $\alpha_{44} = b$, so wird

$$(7_1)\qquad \xi' = bx \mp a\sqrt{1-b^2}\,t\,,\qquad \eta' = y\,,\qquad \zeta' = z\,,\qquad \tau = \pm\frac{1}{a}\sqrt{1-b^2}\,x + bt\,.$$

Die Formeln (8 b) (S. 285) ergeben alsdann

$$b = \beta\,,\qquad \mp a\sqrt{1-b^2} = -p\beta\,,\qquad \pm\frac{1}{a}\sqrt{1-b^2} = -\beta\frac{p}{V^2}\,.$$

Diese drei Gleichungen sind miteinander vereinbar, es folgt aus ihnen vermöge des Wertes von β (Gl. 9) (S. 285)

$$(8_1)\qquad b = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\,,\qquad\qquad (9_1)\qquad a = \pm\sqrt{-V^2}\,.$$

Aus der zweiten Gleichung findet man

$$(9_2)\qquad a = \pm iV\,.$$

Das ist der Grund, warum Minkowski die Zeit t oder τ immer mit dem imaginären Faktor i behaftet ansetzt. Und infolgedessen müssen auch die Größen α_{14}, α_{24}, α_{34}, α_{41}, α_{42}, α_{43} imaginär sein, d. h. die ξ'-, η'-, ζ'-Achsen sind gegen die t-Achse, die x-, y-, z-Achsen gegen die τ-Achse um imaginäre Winkel gedreht. Trotz der alsdann sich ergebenden Übereinstimmung zwischen den Sonderformeln von Minkowski und den Lorentz-Einsteinschen Ansätzen besteht zwischen den Anschauungen ein grundsätzlicher Unterschied. In den Lorentz-Einsteinschen Ansätzen handelt es sich um Transformationen aus realen fortschreitenden Bewegungen, in Minkowskis Formeln um solche aus imaginären Drehungen der Zeitachse t gegen die Raumachse ξ' und der Zeitachse τ gegen die Raumachse x. Man muß diese imaginären Drehungen von Zeitachsen gegen Raumachsen als reellen Fortschreitungen im Raume äquivalent erklären, wenn aus der formalen Übereinstimmung eine sachliche werden soll. Darüber sind in meinem Buche „Die Grundgesetze der Natur" Andeutungen gegeben.

Die Größe $\alpha_{44} = b$ wäre zwar reell, da sie aber gleich

$$(8_2) \qquad \alpha_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}}$$

ausfällt, ergäbe sie sich größer als 1, so daß auch die Drehung der beiden Zeitachsen gegeneinander imaginär würde. Reell wären also immer die Drehungen der Raumachsen gegeneinander, die Zeitachsen aber besäßen gegen die Raumachsen und gegeneinander imaginäre Drehungen. Nennt man den Drehungswinkel der τ-Achse gegen die t-Achse $i\psi$, so wird

$$(10) \qquad \alpha_{11} = \alpha_{44} = \cos i\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}},$$

$$(11) \quad \alpha_{14} = \sin i\psi = i\frac{p}{V}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}}, \qquad (12) \quad \alpha_{41} = -\alpha_{14} = -i\frac{p}{V}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}},$$

$$(13_1) \quad -i\,\mathrm{tg}\,i\psi = \frac{e^{+\psi} - e^{-\psi}}{e^{+\psi} + e^{-\psi}} = \frac{p}{V}, \qquad (13_2) \quad \psi = \frac{1}{2}\log\frac{1 + \frac{p}{V}}{1 - \frac{p}{V}}.$$

Dieser Formeln hat sich in der Tat Minkowski zur Transformation der Lorentzschen elektrodynamischen Gleichungen bedient, worauf wir noch zurückkommen.

An sich aber ist die Gleichung für α_{44} für Minkowskis Theorie lediglich eine Umrechnungsgleichung, in der — selbst wenn wir V die Bedeutung der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum beilegen — p immer noch eine ganz willkürliche Größe darstellt, die sich durch α_{44} bestimmt, nämlich

$$(14) \qquad p = V\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha_{44}^2}}.$$

Nehmen wir $\alpha_{44} > 1$, so daß die t-Achse gegen die τ-Achse um einen imaginären Winkel gedreht ist, so ist p reell. Lassen wir jedoch die Zeitachsen um reelle Winkel gegeneinander geneigt sein, so wird p imaginär, etwa gleich iq. Wir haben dann

$$(15) \qquad \alpha_{11} = \alpha_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{q^2}{V^2}}},$$

$$(16) \quad \alpha_{14} = -\frac{q}{V}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{q^2}{V^2}}}, \qquad (17) \quad \alpha_{41} = +\frac{q}{V}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{q^2}{V^2}}},$$

und Minkowskis Gleichungen würden

$$\xi' = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{q^2}{V^2}}}\left(x - \frac{q}{V}\,a\,t\right), \tag{18}$$

$$a\,\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{q^2}{V^2}}}\left(a\,t + \frac{q}{V}\,x\right). \tag{19}$$

Alsdann müßte auch a reell sein und die den Zeiten t, τ entsprechenden Längen $a\,t$, $a\,\tau$, woselbst man $a = V$ setzen, aber auch gleich irgendeiner anderen Geschwindigkeit annehmen darf, würden gegen die Raumgrößen reell gemessen, was sicher von Vorteil ist. Es würden dann auch alle Drehungen reell und — was weiter von Bedeutung ist — man hätte nicht mehr mit dem Gespenst der Unendlichkeit in Wirklichkeitsbereichen zu kämpfen. Zur Bestimmung von q hat man, wenn die, jetzt reelle, Drehung der Zeitachsen gegeneinander φ ist,

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{q^2}{V^2}}}, \qquad \sin\varphi = \frac{q}{V}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{q^2}{V^2}}}, \qquad q = V\operatorname{tg}\varphi\,. \tag{20}$$

Minkowski hat von dieser Möglichkeit keinen Gebrauch gemacht. Er setzt hiernach allgemein

$$a = +i\,V\,, \tag{9_3}$$

die Bedingungsgleichung (4) geht dann über in

$$V^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = V^2\tau^2 - \xi'^2 - \eta'^2 - \zeta'^2 \tag{21}$$

und differentiell ausgedrückt

$$V^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = V^2d\tau^2 - d\xi'^2 - d\eta'^2 - d\zeta'^2\,. \tag{22}$$

Wiederum nicht durch seine Theorie selbst gezwungen, sondern mit Rücksicht auf die Lorentz-Einsteinsche Transformation, wie man sofort sieht, wenn man die symbolischen Formeln in Worte faßt, verteilt Minkowski die Gesamtheit aller Weltpunkte in drei Gebiete, indem er zur Scheidung ein Gebilde

$$V^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

nimmt. Dieses Gebilde entspricht einem Doppelkegel im cartesischen Raume und seine Charakteristik besteht darin, daß die Strahlenlängen nach seinen Oberflächenpunkten so groß sind wie die geometrischen Weiten nach ihren. Ist O die Spitze dieses Kegels, also die „Weltmitte", wie kurz gesagt wurde, so wird das Gebiet, in dem Vt, also $t<0$ ist, als „Vorkegel", dasjenige, in dem Vt, also $t>0$ ist, als „Nachkegel" bezeichnet. Das erste Gebiet, als „diesseits von O" angesehen, scheidet sich in zwei Teile, im ersten Teil ist $V^2t^2-x^2-y^2-z^2>0$, d. h. die Strahlenlänge zu den Punkten größer als die geometrische Weite dahin. Dieser Teil wird als einer betrachtet, von dem Ereignisse ausgehen (wegen $t<0$), der also beeinflussend wirkt. Im anderen Teil wäre $V^2t^2-x^2-y^2-z^2<0$ die Strahlenlänge nach seinen Punkten also kleiner als die geometrische Weite zu ihnen; er wird als neutral aufgefaßt, weder Ereignisse aussendend, noch solche empfangend. Auch das Gebiet des Nachkegels, als „jenseits von O" angesehen, zerlegen wir in zwei entsprechende Teile. Der erste Teil wieder mit $V^2t^2-x^2-y^2-z^2>0$ also mit Strahlenlängen, die die geometrischen Weiten übertreffen, ist der Ereignisse empfangende, also der beeinflußte (wegen $t>0$), der zweite Teil mit

$V^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 < 0$ stellt einen neutralen, nicht empfangenden und nicht beeinflußten Teil. Die drei Gebiete insgesamt sind also charakterisiert durch

$$(23)\quad \begin{cases} V^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0\,, & t < 0 \text{ aussendendes Vorkegelgebiet; früher als } O; \\ V^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0\,, & t > 0 \text{ empfangendes Nachkegelgebiet; später als } O; \\ V^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 < 0\,, & t \lesseqgtr 0 \text{ neutrales Zwischengebiet; früher, gleichzeitig} \\ & \qquad \text{oder später als } O. \end{cases}$$

Vor- und Nachkegel sind Asymptotenkegel zu den Gebilden

$$(24)\quad V^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = k^2\,,\quad Vt > 0\,;\quad V^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = -k^2\,,\quad Vt \gtrless 0\,,$$

welche einem zweischaligen und einem einschaligen Hyperboloid im cartesischen Raum entsprechen und gleichfalls O als Mitte haben, und die wir als $+H$-Gebilde und als $-H$-Gebilde bezeichnen. Weltvektoren, welche von O zu Punkten der ersten Hyperboloide gehen, die im Raume des Nachkegels liegen, nennt Minkowski „zeitartig", solche, die von O zu Punkten der zweiten Hyperboloide gerichtet sind, die also im Zwischengebiet sich befinden, „raumartig". Der Grund ist nach obigem klar. Ein Weltvektor x, y, z, t von O an eine der obigen Gebilde $+H$, $-H$ soll als „normal" zu einem Weltvektor x_1, y_1, z_1, t_1 angesehen werden, der das Gebilde an der Treffstelle berührt. Demnach wäre die Bedingung der Normalität zweier solcher Vektoren

$$(25)\quad V^2 t t_1 - x x_1 - y y_1 - z z_1 = 0\,.$$

Jedem raumartigen Vektor nach dem Gebilde $-H = 1$ wird der Betrag 1 zugeschrieben, jedem zeitartigen Vektor nach dem Gebilde $+H = 1$, $t > 0$ der Betrag $\frac{1}{V}$. Das Element eines zeitartigen Vektors ist hiernach

$$(26_1)\quad d\theta = \frac{1}{V}\sqrt{V^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}\,,$$

als parallel der Weltlinie daselbst. Bilden wir

$$(26_2)\quad \int_{P_0}^{P} d\theta = \frac{1}{V}\int_{P_0}^{P}\sqrt{V^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}\,,$$

so bezeichnet Minkowski die Größe $\int d\theta$ als Eigenzeit des substantiellen Weltpunktes in der Weltstelle P der Weltlinie, längs der integriert wird. Setzt man hiernach

$$(27)\quad \dot{x} = \frac{dx}{d\theta}\,,\quad \dot{y} = \frac{dy}{d\theta}\,,\quad \dot{z} = \frac{dz}{d\theta}\,,\quad \dot{t} = \frac{dt}{d\theta}\,,$$

so sollen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$ Bewegungsvektoren sein. Und macht man weiter

$$(28)\quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{d\theta^2}\,,\quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{d\theta^2}\,,\quad \ddot{z} = \frac{d^2z}{d\theta^2}\,,\quad \ddot{t} = \frac{d^2t}{d\theta^2}\,,$$

so gewinnt man die Beschleunigungsvektoren. Diese Vektoren aber sind nach (26_1) der Bedingung unterworfen

$$(29)\quad V^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = V^2\,,$$

$$(30)\quad V^2\dot{t}\ddot{t} - \dot{x}\ddot{x} - \dot{y}\ddot{y} - \dot{z}\ddot{z} = 0\,.$$

Zufolge der Gleichung (25) besagt die letztere Bedingung, daß die Beschleunigungsvektoren normal stehen zu den Bewegungsvektoren. Da letztere zeitartig sind, so werden erstere raumartig sein. Auf diese Verhältnisse kommen wir in dem Abschnitt über Relativitätsmechanik zurück. Hier erwähne ich die geometrische Deutung, die Minkowski von seinem Standpunkt aus der Einstein-Lorentz-Transformation verliehen hat, und die also mit allen seinen Festsetzungen in Verbindung steht. Betrachtet man in dem Gebilde

$$V^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

den Schnitt mit der yz-Ebene, so erhält man, Fig. 13, die hyperbolische Kurve $V^2t^2 - x^2 = 1$ mit t und x als Achsen, die vom Mittelpunkt O ausgehen. Ist nun OA_1' irgendein Radiusvektor nach einem Punkte A_1' des betreffenden Hyperbelastes, legt man in A_1' eine Tangente und von O aus zu ihr eine Parallele $O\,A_2'$, so kann diese Parallele als ξ'-Achse, der Radiusvektor OA_1' als τ-Achse gewählt werden,

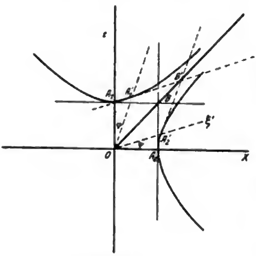

Fig. 13.

und es wird dann $V^2\tau^2 - \xi'^2 = 1$. Die Maßeinheiten sind dann so zu bestimmen: Wenn sie im System t, x sind $1/V$ von der t-Koordinate OA_1 des Scheitelpunktes A_1 und 1 von der x-Koordinate $AB = OA_2$ des Schnittpunktes der Tangente am Scheitelpunkt A_1 mit der Asymptote, so betragen sie im τ, ξ'-System $1/V$ von OA_1' und 1 von OA_2'. Dabei ist A_2' der Schnittpunkt einer Parallelen zum Radiusvektor OA_1', gezogen vom Schnittpunkt B' der Tangente an A_1' mit der Asymptote mit der Parallelen derselben Tangente, gezogen von O aus. $OA_1'B'A_2'$ entsprechen OA_1BA_2. Die Durchrechnung der Konstruktion ergibt dann, daß τ und ξ' die Form der Einstein-Lorentzschen Gleichungen erhalten. Übrigens ist OA_2' der zu OA_1' entsprechende Vektor an der um 90° gedrehten Hyperbel $x^2 - V^2t^2 = 1$, denn es ist $A_1OA_1' = A_2OA_2'$, wobei A_2 den Scheitelpunkt der Hyperbel $x^2 - V^2t^2 = 1$ feststellt.

Demnach haben wir [1]), wenn $Vt = u$ gesetzt wird,

$$u^2 - x^2 = 1\,, \quad u^2 - x^2 = -1$$

für die obere und für die seitliche Hyperbel. Mit q für $\operatorname{tg}\psi$ sind nun die Gleichungen der Linien OA_1', OA_2'

$$x = q\,u\,, \quad u = q\,x\,,$$

somit nach den Hyperbelgleichungen die Koordinaten

$$\text{von } A_1'\colon \quad u_{A_1'} = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}\,, \quad x_{A_1'} = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}\,,$$

$$\text{von } A_2'\colon \quad u_{A_2'} = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}\,, \quad x_{A_2'} = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}\,.$$

Im System $u' = V\tau$, ξ' soll aber

$$u'_{A_1'} = 1\,, \quad \xi'_{A_2'} = 1\,; \quad u'_{A_2'} = \xi'_{A_1'} = 0$$

---

[1]) Laue, Das Relativitätsprinzip. Das beste mathematische Buch auf diesem Gebiete, wenn man von der, auch nicht beabsichtigten, Kritik absieht.

sein, ersteres nach den Festsetzungen über die Maßeinheiten, letzteres weil OA_1' die neue u'-Achse, OA_2' die neue ξ'-Achse angibt, also müssen wir setzen

$$u' = \frac{u - q x}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad \xi' = \frac{x - q u}{\sqrt{1 - q^2}}.$$

Es ist dann nach den oben angegebenen Koordinatenwerten in der Tat

$$u'_{A_1'} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-q^2}} - \frac{q^2}{\sqrt{1-q^2}}}{\sqrt{1-q^2}} = 1, \quad \xi'_{A_2'} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-q^2}} - \frac{q^2}{\sqrt{1-q^2}}}{\sqrt{1-q^2}} = 1,$$

$$u'_{A_2'} = \frac{\frac{q}{\sqrt{1-q^2}} - \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}}{\sqrt{1-q^2}} = 0, \quad \xi'_{A_1'} = \frac{\frac{q}{\sqrt{1-q^2}} - \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}}{\sqrt{1-q^2}} = 0,$$

q ist noch willkürlich. Macht man

$$q = \operatorname{tg} \psi = \frac{p}{V},$$

so hat man in den Gleichungen für u', ξ' die Lorentz-Einsteinschen Formeln.

Ich setze nunmehr in der Bezeichnung von Minkowski

$$\begin{aligned} &x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad i V t = x_4, \\ &\xi' = x_1', \quad \eta' = x_2', \quad \zeta' = x_3', \quad i V \tau = x_4' \end{aligned}$$

und weise der z-, ζ'-Achse die Rolle zu, die bis jetzt der x-, ξ'-Achse vorbehalten war. Die Lorentz-Einsteinsche Transformation ergibt sich dann aus den Minkowskischen Sonderansätzen

$$(31_1) \quad x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = \alpha_{33} x_3 + \alpha_{34} x_4, \quad x_4' = \alpha_{43} x_3 + \alpha_{44} x_4;$$

$$(31_2) \quad x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = \alpha_{33} x_3' + \alpha_{43} x_4', \quad x_4 = \alpha_{34} x_3' + \alpha_{44} x_4'$$

mit den Beziehungen

$$(32) \quad \alpha_{33} = \alpha_{44} = \delta, \quad \alpha_{34} = \mp\sqrt{1 - \delta^2}, \quad \alpha_{43} = -\alpha_{34} = \pm\sqrt{1 - \delta^2},$$

wo δ für α_{44} steht, und wobei also mit Bezug auf die Lorentz-Einsteinschen Gleichungen sein sollte

$$(33) \quad \delta = \alpha_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}}.$$

Da $\delta > 1$ sein muß, zeigen sich alle Drehungen imaginär, selbst die der Raumachsen gegeneinander. Die nächste Transformation wäre

$$(34_1) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3 + \alpha_{24} x_4, \\ x_3' &= \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3 + \alpha_{34} x_4, \\ x_4' &= \alpha_{42} x_2 + \alpha_{43} x_3 + \alpha_{44} x_4, \end{aligned} \right. \qquad (34_2) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= x_1', \\ x_2 &= \alpha_{22} x_2' + \alpha_{32} x_3' + \alpha_{42} x_4', \\ x_3 &= \alpha_{23} x_2' + \alpha_{33} x_3' + \alpha_{43} x_4', \\ x_4 &= \alpha_{24} x_2' + \alpha_{34} x_3' + \alpha_{44} x_4'. \end{aligned} \right.$$

Man hat dann nach bekannter Rechnungsweise

$$(35)\quad \begin{cases} \alpha_{22}=-\beta\gamma\delta-\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}, & \alpha_{32}=-\gamma\delta\sqrt{1-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\gamma^2}, & \alpha_{42}=\gamma\sqrt{1-\delta^2},\\ \alpha_{23}=-\beta\delta\sqrt{1-\gamma^2}+\gamma\sqrt{1-\beta^2}, & \alpha_{33}=-\delta\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}-\beta\gamma, & \alpha_{43}=\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{1-\delta^2},\\ \alpha_{24}=+\beta\sqrt{1-\delta^2}; & \alpha_{34}=+\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\delta^2}; & \alpha_{44}=\delta. \end{cases}$$

β, γ, δ sind drei willkürliche Größen und können die Kosinus der Winkel der Ebene $x_3' x_4'$ gegen die x_4-Achse, der Ebene $x_3 x_4$ gegen die x_4'-Achse, der x_4'-Achse gegen die x_4-Achse bedeuten. Die Größe δ ist reell. Da die Größen α_{24}, α_{34}, α_{42}, α_{43} imaginäre Bedeutung haben sollen, so ist $\sqrt{1-\delta^2}$ imaginär, also $\delta > 1$, d. h. die Neigung der beiden Zeitachsen gegeneinander ist auch jetzt imaginär. β und γ müssen reell sein, sie müssen auch kleiner als 1 sein, weil sonst α_{24}, α_{43} reell würden. Also sind α_{22}, α_{23}, α_{32}, α_{33} reell.

Ob die ihnen entsprechenden Drehungen reell sind, hängt von ihren absoluten Werten ab, die auch durch δ bestimmt sind, das größer als 1 ist. Und man kann β und γ nicht immer so wählen, daß bei gegebenem δ die Drehungen der Raumachsen x_2, x_3 gegen die Raumachsen x_2', x_3' reell sind, weil vier Ungleichungen mit nur zwei willkürlichen Größen zu erfüllen sind. Ist z. B. δ groß, so fordert die Gleichung für α_{33}, daß β oder γ oder β und γ sehr nahe gleich 1 gewählt werden. Nehmen wir beide nahe gleich 1, so können wir zwar α_{33}, α_{32}, α_{23} kleiner als 1 erhalten, nicht aber α_{22}. Ist nur β nahe gleich 1, so muß γ sehr klein sein, damit α_{22} kleiner als 1 wird. Alsdann aber kann α_{23} nicht kleiner werden als 1. Entsprechend verhält es sich, wenn wir γ nahe gleich 1, und β sehr klein ansetzen, α_{32} kann dann nicht kleiner als 1 werden. Reelle Drehungen der Raumachsen gegeneinander werden wir also nur erhalten, wenn δ eine gewisse Grenze über 1 nicht überschreitet. Ist diese Grenze überschritten, so können auch die Drehungen der Raumachsen x_2, x_3 gegen x_2', x_3' nicht alle reell gemacht werden, die Drehung mindestens einer Achse bleibt imaginär, so der von x_2 nach x_2' (bei β, γ nahezu 1), von x_3 nach x_3' (bei β, γ nahezu 0), von x_2 nach x_3' (bei β nahezu 1, γ nahezu 0), von x_3 nach x_2' (bei β nahezu 0, γ nahezu 1). Selbstverständlich können auch alle räumlichen Drehungen imaginär ausfallen, wie sie alle reell werden können, wenn δ sich von 1 nicht zu sehr entfernt.

Deutet man daher imaginäre Drehungen als Fortschreitungen im Raume (S. 291), so könnte es sich hier um Fortschreitungen allein handeln, aber auch um Fortschreitungen in Verbindung mit reellen Drehungen im Raume. Da aber im Raume nur eine Fortschreitung zur Verfügung steht, dagegen drei willkürliche Größen vorhanden sind, kann man diese durch Fortschreitungen nicht erschöpfen, es bleiben Drehungen, reelle oder imaginäre oder reelle und imaginäre immer übrig. Nur wenn man von einer Zusammensetzungsmöglichkeit der Fortschreitungen absieht, und auch Fortschreitungen in Richtung der Zeitachse zuläßt, gewinnt man die drei Bestimmungen für die drei Größen β, γ, δ. Minkowskis Definition der „Bewegungsgröße" deutet den Weg an, der einzuschlagen wäre. Indessen kann das keine allgemeine Bedeutung haben.

Gehen wir nämlich zum letzten Fall über

$$(36_1)\quad \begin{cases} x_1' = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \alpha_{14} x_4,\\ x_2' = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3 + \alpha_{24} x_4,\\ x_3' = \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3 + \alpha_{34} x_4,\\ x_4' = \alpha_{41} x_1 + \alpha_{42} x_2 + \alpha_{43} x_3 + \alpha_{44} x_4; \end{cases}$$

$$
(36_2)\qquad \begin{cases}
x_1 = \alpha_{11} x_1' + \alpha_{21} x_2' + \alpha_{31} x_3' + \alpha_{41} x_4', \\
x_2 = \alpha_{12} x_1' + \alpha_{22} x_2' + \alpha_{32} x_3' + \alpha_{42} x_4', \\
x_3 = \alpha_{13} x_1' + \alpha_{23} x_2' + \alpha_{33} x_3' + \alpha_{43} x_4', \\
x_4 = \alpha_{14} x_1' + \alpha_{24} x_2' + \alpha_{34} x_3' + \alpha_{44} x_4',
\end{cases}
$$

so haben wir sechs Größen zur Verfügung, aber nur vier Fortschreitungsmöglichkeiten. Hier müssen also Drehungen übrigbleiben. Wir setzen hier

$$
(37)\qquad \begin{cases}
\alpha_{14} = \sin F \cos\Phi \sin\vartheta, & \alpha_{41} = \sin f \cos\varphi \sin\vartheta, \\
\alpha_{24} = \cos F \cos\Phi \sin\vartheta, & \alpha_{42} = \cos f \cos\varphi \sin\vartheta, \\
\alpha_{34} = \sin\Phi \sin\vartheta, & \alpha_{43} = \sin\varphi \sin\vartheta, \\
\alpha_{44} = \cos\vartheta, & \alpha_{44} = \cos\vartheta.
\end{cases}
$$

Zu diesen Gleichungen fügen wir als weitere Beziehung hinzu

$$
(38)\qquad \alpha_{33} = \cos\theta .
$$

Die Bedingungen

$$
\alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2 + \alpha_{44}^2 = 1, \quad \alpha_{41}^2 + \alpha_{42}^2 + \alpha_{43}^2 + \alpha_{44}^2 = 1
$$

sind identisch erfüllt. Die sin und cos können kleiner oder größer als 1, die F, Φ, f, φ, ϑ, θ beliebig reelle oder imaginäre Winkel bedeuten.

Die übrigen acht α berechnen sich aus den sechs eingeführten Winkeln. Insbesondere wird

$$
(39_1)\qquad \begin{cases}
\alpha_{13} = -\dfrac{\sin\Phi\cos\theta + \sin\varphi\cos\vartheta}{\cos\Phi}\left(\sin F + \cos F\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta - \sin^2\vartheta\sin^2\varphi}{(\sin\Phi\cos\theta + \sin\varphi\cos\vartheta)^2}\cos^2\Phi - 1}\right), \\
\alpha_{23} = -\dfrac{\sin\Phi\cos\theta + \sin\varphi\cos\vartheta}{\cos\Phi}\left(\cos F - \sin F\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta - \sin^2\vartheta\sin^2\varphi}{(\sin\Phi\cos\theta + \sin\varphi\cos\vartheta)^2}\cos^2\Phi - 1}\right), \\
\alpha_{31} = -\dfrac{\sin\varphi\cos\theta + \sin\Phi\cos\vartheta}{\cos\varphi}\left(\sin f + \cos f\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta - \sin^2\vartheta\sin^2\Phi}{(\sin\varphi\cos\theta + \sin\Phi\cos\vartheta)^2}\cos^2\varphi - 1}\right), \\
\alpha_{32} = -\dfrac{\sin\varphi\cos\theta + \sin\Phi\cos\vartheta}{\cos\varphi}\left(\cos f - \sin f\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta - \sin^2\vartheta\sin^2\Phi}{(\sin\varphi\cos\theta + \sin\Phi\cos\vartheta)^2}\cos^2\varphi - 1}\right).
\end{cases}
$$

Die noch fehlenden vier Größen ergeben sich dann aus den Beziehungen

$$
(40_1)\qquad \begin{cases}
\alpha_{11} = +\dfrac{\alpha_{32}(\alpha_{13}\alpha_{43} + \alpha_{14}\alpha_{44}) - \alpha_{42}(\alpha_{13}\alpha_{33} + \alpha_{14}\alpha_{34})}{\alpha_{31}\alpha_{42} - \alpha_{32}\alpha_{41}} \\
\qquad = +\dfrac{\alpha_{23}(\alpha_{31}\alpha_{34} + \alpha_{41}\alpha_{44}) - \alpha_{24}(\alpha_{31}\alpha_{33} + \alpha_{41}\alpha_{43})}{\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{23}\alpha_{14}}, \\
\alpha_{12} = -\dfrac{\alpha_{31}(\alpha_{13}\alpha_{43} + \alpha_{14}\alpha_{44}) - \alpha_{41}(\alpha_{13}\alpha_{33} + \alpha_{14}\alpha_{34})}{\alpha_{31}\alpha_{42} - \alpha_{32}\alpha_{41}} \\
\qquad = +\dfrac{\alpha_{23}(\alpha_{32}\alpha_{34} + \alpha_{42}\alpha_{44}) - \alpha_{24}(\alpha_{32}\alpha_{33} + \alpha_{42}\alpha_{43})}{\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{23}\alpha_{14}}, \\
\alpha_{21} = +\dfrac{\alpha_{32}(\alpha_{23}\alpha_{43} + \alpha_{24}\alpha_{44}) - \alpha_{42}(\alpha_{23}\alpha_{33} + \alpha_{24}\alpha_{34})}{\alpha_{31}\alpha_{42} - \alpha_{32}\alpha_{41}} \\
\qquad = -\dfrac{\alpha_{13}(\alpha_{31}\alpha_{34} + \alpha_{41}\alpha_{44}) - \alpha_{14}(\alpha_{31}\alpha_{33} + \alpha_{41}\alpha_{43})}{\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{23}\alpha_{14}}, \\
\alpha_{22} = -\dfrac{\alpha_{31}(\alpha_{23}\alpha_{43} + \alpha_{24}\alpha_{44}) - \alpha_{41}(\alpha_{23}\alpha_{33} + \alpha_{24}\alpha_{34})}{\alpha_{31}\alpha_{42} - \alpha_{32}\alpha_{41}} \\
\qquad = -\dfrac{\alpha_{13}(\alpha_{32}\alpha_{34} + \alpha_{42}\alpha_{44}) - \alpha_{14}(\alpha_{32}\alpha_{33} + \alpha_{42}\alpha_{43})}{\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{23}\alpha_{14}}.
\end{cases}
$$

Der Nenner ist

$$\alpha_{31}\alpha_{42} - \alpha_{32}\alpha_{41} =$$
$$-\sin\vartheta(\sin\varphi\cos\theta + \sin\Phi\cos\vartheta)\sqrt{\frac{\sin^2\theta - \sin^2\vartheta\sin^2\Phi}{(\sin\varphi\cos\theta + \sin\Phi\cos\vartheta)^2}\cos^2\varphi - 1}\,,$$

$$\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{23}\alpha_{14} =$$
$$-\sin\vartheta(\sin\Phi\cos\theta + \sin\varphi\cos\vartheta)\sqrt{\frac{\sin^2\theta - \sin^2\vartheta\sin^2\varphi}{(\sin\Phi\cos\theta + \sin\varphi\cos\vartheta)^2}\cos^2\Phi - 1}\,.$$

Die Zähler sind in allen Fällen gleichfalls proportional $\sin\vartheta$, so daß diese Größe herausfällt. Eine einfache Form habe ich für diese Zähler nicht gefunden. Schreibt man aber

$$(39_2)\qquad \begin{cases} \alpha_{13} = A\sin F + B\cos F\,, & \alpha_{31} = A'\sin f + B'\cos f\,, \\ \alpha_{23} = A\cos F - B\sin F\,, & \alpha_{32} = A'\cos f - B'\sin f\,, \end{cases}$$

wo

$$(41)\qquad \begin{cases} A = -\dfrac{\sin\Phi\cos\theta + \sin\varphi\cos\vartheta}{\cos\Phi}\,, \\ B = A\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta - \sin^2\vartheta\sin^2\varphi}{(\sin\Phi\cos\theta + \sin\varphi\cos\vartheta)^2}\cos^2\Phi - 1}\,; \\ A' = -\dfrac{\sin\varphi\cos\theta + \sin\Phi\cos\vartheta}{\cos\varphi}\,, \\ B' = A'\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta - \sin^2\vartheta\sin^2\Phi}{(\sin\varphi\cos\theta + \sin\Phi\cos\vartheta)^2}\cos^2\varphi - 1} \end{cases}$$

ist, so wird

$$(40_2)\qquad \begin{cases} \alpha_{11} = +\dfrac{(A'\cos f - B'\sin f)((A\sin F + B\cos F)\sin\varphi + \sin F\cos\Phi\cos\vartheta) - \cos f\cos\varphi((A\sin F + B\cos F)\cos\theta + \sin F\sin\Phi\cos\Phi\sin^2\vartheta)}{B'\cos\varphi}\,, \\ \alpha_{12} = -\dfrac{(A'\sin f + B'\cos f)((A\sin F + B\cos F)\sin\varphi + \sin F\cos\Phi\cos\vartheta) - \sin f\cos\varphi((A\sin F + B\cos F)\cos\theta + \sin F\sin\Phi\cos\Phi\sin^2\vartheta)}{B'\cos\varphi}\,, \\ \alpha_{21} = +\dfrac{(A'\cos f - B'\sin f)((A\cos F - B\sin F)\sin\varphi + \cos F\cos\Phi\cos\vartheta) - \cos f\cos\varphi((A\cos F - B\sin F)\cos\theta + \cos F\sin\Phi\cos\Phi\sin^2\vartheta)}{B'\cos\varphi}\,, \\ \alpha_{22} = -\dfrac{(A'\sin f + B'\cos f)((A\cos F - B\sin F)\sin\varphi + \cos F\cos\Phi\cos\vartheta) - \sin f\cos\varphi((A\cos F - B\sin F)\cos\theta + \cos F\sin\Phi\cos\Phi\sin^2\vartheta)}{B'\cos\varphi}\,, \end{cases}$$

und entsprechend in der anderen Darstellung.

$\cos\vartheta$ ist reell und > 1. Hiernach müssen $\sin F$, $\cos F$, $\sin\Phi$, $\cos\Phi$, $\sin f$, $\cos f$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ reell sein, $\cos\theta$, $\sin\theta$ kann man beliebig wählen. Nimmt man $\cos\theta$ reell, so sind A, A' reell, aber B, B' können imaginär sein. Die Drehungswinkel der Raumachsen gegen die Zeitachsen sind wieder imaginär. Die Drehungswinkel der Raumachsen gegeneinander können alle oder zum Teil reell oder imaginär gemacht werden.

Wenn die Zeiten t, τ im Verhältnis zu den Raumabmessungen nicht imaginär gemessen werden, sondern reell, können alle Drehungen reell sein, falls wir in vier Dimensionen von ebenen Winkeln in demselben Sinne sprechen wie in drei oder zwei Dimensionen. Eine Änderung in den allgemeinen Formeln tritt nicht ein, oder vielmehr nur so weit, als beispielsweise statt der Hyperboloide Rotationsellipsoide zum Vorschein kommen usf.

Wir nehmen nun sechzehn Größen f_{hk}; $h, k = 1, 2, 3, 4$ zu je vier und ordnen ihnen sechzehn andere φ_{hk}; $h, k = 1, 2, 3, 4$ zu je vier zu, die aus jenen so zusammengesetzt sind, wie die Koordinaten x_1', x_2', x_3', x_4' aus den x_1, x_2, x_3, x_4. Es ist dann

$$(42_1)\quad \left\{\begin{array}{llll} \varphi_{11}=\Sigma\alpha_{1i}f_{1i}, & \varphi_{12}=\Sigma\alpha_{2i}f_{1i}, & \varphi_{13}=\Sigma\alpha_{3i}f_{1i}, & \varphi_{14}=\Sigma\alpha_{4i}f_{1i}, \\ \varphi_{21}=\Sigma\alpha_{1i}f_{2i}, & \varphi_{22}=\Sigma\alpha_{2i}f_{2i}, & \varphi_{23}=\Sigma\alpha_{3i}f_{2i}, & \varphi_{24}=\Sigma\alpha_{4i}f_{2i}, \\ \varphi_{31}=\Sigma\alpha_{1i}f_{3i}, & \varphi_{32}=\Sigma\alpha_{2i}f_{3i}, & \varphi_{33}=\Sigma\alpha_{3i}f_{3i}, & \varphi_{34}=\Sigma\alpha_{4i}f_{3i}, \\ \varphi_{41}=\Sigma\alpha_{1i}f_{4i}, & \varphi_{42}=\Sigma\alpha_{2i}f_{4i}, & \varphi_{43}=\Sigma\alpha_{3i}f_{4i}, & \varphi_{44}=\Sigma\alpha_{4i}f_{4i}. \end{array}\right\}\ i=1,2,3,4.$$

Allgemein

$$(42_2)\qquad \varphi_{h\varkappa}=\sum_{i=1}^{i=4}\alpha_{\varkappa i}f_{hi}, \qquad h,\varkappa=1,2,3,4.$$

Zugleich wird

$$(43)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_{11}^2+\varphi_{12}^2+\varphi_{13}^2+\varphi_{14}^2=f_{11}^2+f_{12}^2+f_{13}^2+f_{14}^2, \\ \varphi_{21}^2+\varphi_{22}^2+\varphi_{23}^2+\varphi_{24}^2=f_{21}^2+f_{22}^2+f_{23}^2+f_{24}^2, \\ \varphi_{31}^2+\varphi_{32}^2+\varphi_{33}^2+\varphi_{34}^2=f_{31}^2+f_{32}^2+f_{33}^2+f_{34}^2, \\ \varphi_{41}^2+\varphi_{42}^2+\varphi_{43}^2+\varphi_{44}^2=f_{41}^2+f_{42}^2+f_{43}^2+f_{44}^2, \end{array}\right.$$

also auch

$$(44)\qquad \Sigma\varphi_{h\varkappa}^2=\Sigma f_{h\varkappa}^2, \qquad h,\varkappa=1,2,3,4.$$

Umgekehrt haben wir

$$(45_1)\quad \left\{\begin{array}{llll} f_{11}=\Sigma\alpha_{i1}\varphi_{1i}, & f_{12}=\Sigma\alpha_{i2}\varphi_{1i}, & f_{13}=\Sigma\alpha_{i3}\varphi_{1i}, & f_{14}=\Sigma\alpha_{i4}\varphi_{1i}, \\ f_{21}=\Sigma\alpha_{i1}\varphi_{2i}, & f_{22}=\Sigma\alpha_{i2}\varphi_{2i}, & f_{23}=\Sigma\alpha_{i3}\varphi_{2i}, & f_{24}=\Sigma\alpha_{i4}\varphi_{2i}, \\ f_{31}=\Sigma\alpha_{i1}\varphi_{3i}, & f_{32}=\Sigma\alpha_{i2}\varphi_{3i}, & f_{33}=\Sigma\alpha_{i3}\varphi_{3i}, & f_{34}=\Sigma\alpha_{i4}\varphi_{3i}, \\ f_{41}=\Sigma\alpha_{i1}\varphi_{4i}, & f_{42}=\Sigma\alpha_{i2}\varphi_{4i}, & f_{43}=\Sigma\alpha_{i3}\varphi_{4i}, & f_{44}=\Sigma\alpha_{i4}\varphi_{4i}. \end{array}\right\}\ i=1,2,3,4.$$

Allgemein

$$(45_2)\qquad f_{h\varkappa}=\sum_{i=1}^{i=4}\alpha_{i\varkappa}\varphi_{hi}, \qquad h,\varkappa,i=1,2,3,4.$$

Wir nennen die φ, f im **Verhältnis zueinander Vektoren I-Art**, sie gehen auseinander so hervor, wie die Vektoren x_1', x_2', x_3', x_4'; x_1, x_2, x_3, x_4 auseinander sich bestimmen.

Nun bilden wir aus den φ sechzehn neue Vektoren $f_{h\varkappa}'$; $h, \varkappa = 1, 2, 3, 4$ nach folgendem Schema

$$(46_1)\quad \left\{\begin{array}{llll} f_{11}'=\Sigma\alpha_{1i}\varphi_{i1}, & f_{21}'=\Sigma\alpha_{2i}\varphi_{i1}, & f_{31}'=\Sigma\alpha_{3i}\varphi_{i1}, & f_{41}'=\Sigma\alpha_{4i}\varphi_{i1}, \\ f_{12}'=\Sigma\alpha_{1i}\varphi_{i2}, & f_{22}'=\Sigma\alpha_{2i}\varphi_{i2}, & f_{32}'=\Sigma\alpha_{3i}\varphi_{i2}, & f_{42}'=\Sigma\alpha_{4i}\varphi_{i2}, \\ f_{13}'=\Sigma\alpha_{1i}\varphi_{i3}, & f_{23}'=\Sigma\alpha_{2i}\varphi_{i3}, & f_{33}'=\Sigma\alpha_{3i}\varphi_{i3}, & f_{43}'=\Sigma\alpha_{4i}\varphi_{i3}, \\ f_{14}'=\Sigma\alpha_{1i}\varphi_{i4}, & f_{24}'=\Sigma\alpha_{2i}\varphi_{i4}, & f_{34}'=\Sigma\alpha_{3i}\varphi_{i4}, & f_{44}'=\Sigma\alpha_{4i}\varphi_{i4}. \end{array}\right\}\ i=1,2,3,4.$$

Allgemein

$$(46_2)\qquad f_{h\varkappa}'=\sum_{i=1}^{i=4}\alpha_{hi}\varphi_{i\varkappa}, \qquad h,\varkappa=1,2,3,4.$$

Es folgt wieder

$$(47)\qquad \begin{cases} f_{11}'^2 + f_{21}'^2 + f_{31}'^2 + f_{41}'^2 = \varphi_{11}^2 + \varphi_{21}^2 + \varphi_{31}^2 + \varphi_{41}^2\,, \\ f_{12}'^2 + f_{22}'^2 + f_{32}'^2 + f_{42}'^2 = \varphi_{12}^2 + \varphi_{22}^2 + \varphi_{32}^2 + \varphi_{42}^2\,, \\ f_{13}'^2 + f_{23}'^2 + f_{33}'^2 + f_{43}'^2 = \varphi_{13}^2 + \varphi_{23}^2 + \varphi_{33}^2 + \varphi_{43}^2\,, \\ f_{14}'^2 + f_{24}'^2 + f_{34}'^2 + f_{44}'^2 = \varphi_{14}^2 + \varphi_{24}^2 + \varphi_{34}^2 + \varphi_{44}^2\,, \end{cases}$$

somit auch

$$(48)\qquad \Sigma f_{h\varkappa}'^2 = \Sigma \varphi_{h\varkappa}^2\,; \qquad h,\varkappa = 1, 2, 3, 4,$$

also weiter

$$(49)\qquad \Sigma f_{h\varkappa}'^2 = \Sigma f_{h\varkappa}^2\,; \qquad h,\varkappa = 1, 2, 3, 4\,.$$

Die Vektoren f' und f im Verhältnis zueinander bezeichnen wir als Vektoren II-Art oder als Tensoren. Sie transformieren sich ineinander wie die Quadrate und die Produkte der Koordinaten. So wird zufolge der Werte der φ

$$(50_1)\qquad \left.\begin{cases} f_{11}' = \Sigma\alpha_{1i}\Sigma\alpha_{1l}f_{il}, & f_{21}' = \Sigma\alpha_{2i}\Sigma\alpha_{1l}f_{il}, & f_{31}' = \Sigma\alpha_{3i}\Sigma\alpha_{1l}f_{il}, & f_{41}' = \Sigma\alpha_{4i}\Sigma\alpha_{1l}f_{il}. \\ f_{12}' = \Sigma\alpha_{1i}\Sigma\alpha_{2l}f_{il}, & f_{22}' = \Sigma\alpha_{2i}\Sigma\alpha_{2l}f_{il}, & f_{32}' = \Sigma\alpha_{3i}\Sigma\alpha_{2l}f_{il}, & f_{42}' = \Sigma\alpha_{4i}\Sigma\alpha_{2l}f_{il}. \\ f_{13}' = \Sigma\alpha_{1i}\Sigma\alpha_{3l}f_{il}, & f_{23}' = \Sigma\alpha_{2i}\Sigma\alpha_{3l}f_{il}, & f_{33}' = \Sigma\alpha_{3i}\Sigma\alpha_{3l}f_{il}, & f_{43}' = \Sigma\alpha_{4i}\Sigma\alpha_{3l}f_{il}. \\ f_{14}' = \Sigma\alpha_{1i}\Sigma\alpha_{4l}f_{il}, & f_{24}' = \Sigma\alpha_{2i}\Sigma\alpha_{4l}f_{il}, & f_{34}' = \Sigma\alpha_{3i}\Sigma\alpha_{4l}f_{il}, & f_{44}' = \Sigma\alpha_{4i}\Sigma\alpha_{4l}f_{il}. \end{cases}\right\} i, l = 1, 2, 3, 4.$$

Allgemein

$$(50_2)\qquad f_{h\varkappa}' = \sum_{i=1}^{i=4}\alpha_{hi}\sum_{l=1}^{l=4}\alpha_{\varkappa l}f_{il}\,; \qquad h,\varkappa = 1, 2, 3, 4\,.$$

Jedes der f' ist eine lineare Funktion der sechzehn f. So haben wir beispielsweise

$$\begin{aligned} f_{21}' = \alpha_{21}(\alpha_{11}f_{11} + \alpha_{12}f_{12} + \alpha_{13}f_{13} + \alpha_{14}f_{14}) &+ \alpha_{22}(\alpha_{11}f_{21} + \alpha_{12}f_{22} + \alpha_{13}f_{23} + \alpha_{14}f_{24}) \\ &+ \alpha_{23}(\alpha_{11}f_{31} + \alpha_{12}f_{32} + \alpha_{13}f_{33} + \alpha_{14}f_{34}) \\ &+ \alpha_{24}(\alpha_{11}f_{41} + \alpha_{12}f_{42} + \alpha_{13}f_{43} + \alpha_{14}f_{44}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{12}' = \alpha_{11}(\alpha_{21}f_{11} + \alpha_{22}f_{12} + \alpha_{23}f_{13} + \alpha_{21}f_{14}) &+ \alpha_{12}(\alpha_{21}f_{21} + \alpha_{22}f_{22} + \alpha_{23}f_{23} + \alpha_{24}f_{21}) \\ &+ \alpha_{13}(\alpha_{21}f_{31} + \alpha_{22}f_{32} + \alpha_{23}f_{33} + \alpha_{24}f_{34}) \\ &+ \alpha_{14}(\alpha_{21}f_{41} + \alpha_{22}f_{42} + \alpha_{23}f_{43} + \alpha_{24}f_{44}). \end{aligned}$$

Die Summe gibt

$$\begin{aligned} f_{21}' + f_{12}' = 2(\alpha_{21}\alpha_{11}f_{11} &+ \alpha_{22}\alpha_{12}f_{22} + \alpha_{23}\alpha_{13}f_{33} + \alpha_{24}\alpha_{14}f_{44}) \\ &+ (\alpha_{12}\alpha_{21} + \alpha_{22}\alpha_{11})(f_{12} + f_{21}) + (\alpha_{13}\alpha_{21} + \alpha_{23}\alpha_{11})(f_{13} + f_{31}) \\ &+ (\alpha_{14}\alpha_{21} + \alpha_{24}\alpha_{11})(f_{14} + f_{41}) + (\alpha_{13}\alpha_{22} + \alpha_{23}\alpha_{12})(f_{23} + f_{32}) \\ &+ (\alpha_{14}\alpha_{22} + \alpha_{24}\alpha_{12})(f_{24} + f_{42}) + (\alpha_{14}\alpha_{23} + \alpha_{24}\alpha_{13})(f_{34} + f_{43})\,. \end{aligned}$$

Ferner ist z. B.

$$\begin{aligned} f_{11}' &= \alpha_{11}^2 f_{11} + \alpha_{12}^2 f_{22} + \alpha_{13}^2 f_{33} + \alpha_{14}^2 f_{44} \\ &+ \alpha_{11}\alpha_{12}(f_{12} + f_{21}) + \alpha_{11}\alpha_{13}(f_{13} + f_{31}) + \alpha_{11}\alpha_{14}(f_{14} + f_{41}) \\ &+ \alpha_{12}\alpha_{13}(f_{23} + f_{32}) + \alpha_{12}\alpha_{14}(f_{24} + f_{42}) + \alpha_{13}\alpha_{14}(f_{34} + f_{43}) \end{aligned}$$

und entsprechend $f_{31}' + f_{13}'$, $f_{41}' + f_{14}'$, $f_{23}' + f_{32}'$ usf., f_{22}', f_{33}', f_{44}' usf.

Wir werden später mit Funktionen zu tun haben, die den Bedingungen entsprechen

$$\left\{\begin{aligned} f_{11} &= f_{22} = f_{33} = f_{44} = 0\,, \\ f_{h\varkappa} &= -f_{\varkappa h}\,. \end{aligned}\right. \tag{51}$$

Alsdann ist dem Obigen zufolge auch

$$\left\{\begin{aligned} f'_{11} &= f'_{22} = f'_{33} = f'_{44} = 0\,, \\ f'_{h\varkappa} &= -f'_{\varkappa h}\,. \end{aligned}\right. \tag{52}$$

Hiernach haben wir für diesen Fall ausgeschrieben

$$\left\{\begin{aligned}
f'_{12} = -f'_{21} &= (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) f_{12} + (\alpha_{11}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{21}) f_{13} + (\alpha_{11}\alpha_{24} - \alpha_{14}\alpha_{21}) f_{14} \\
&\quad + (\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22}) f_{23} + (\alpha_{12}\alpha_{24} - \alpha_{14}\alpha_{22}) f_{24} + (\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{14}\alpha_{23}) f_{34}\,, \\
f'_{13} = -f'_{31} &= (\alpha_{11}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{31}) f_{12} + (\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{31}) f_{13} + (\alpha_{11}\alpha_{34} - \alpha_{14}\alpha_{31}) f_{14} \\
&\quad + (\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{32}) f_{23} + (\alpha_{12}\alpha_{34} - \alpha_{14}\alpha_{32}) f_{24} + (\alpha_{13}\alpha_{34} - \alpha_{14}\alpha_{33}) f_{34}\,, \\
f'_{14} = -f'_{41} &= (\alpha_{11}\alpha_{42} - \alpha_{12}\alpha_{41}) f_{12} + (\alpha_{11}\alpha_{43} - \alpha_{13}\alpha_{41}) f_{13} + (\alpha_{11}\alpha_{44} - \alpha_{14}\alpha_{41}) f_{14} \\
&\quad + (\alpha_{12}\alpha_{43} - \alpha_{13}\alpha_{42}) f_{23} + (\alpha_{12}\alpha_{44} - \alpha_{14}\alpha_{42}) f_{24} + (\alpha_{13}\alpha_{44} - \alpha_{14}\alpha_{43}) f_{34}\,, \\
f'_{23} = -f'_{32} &= (\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31}) f_{12} + (\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{31}) f_{13} + (\alpha_{21}\alpha_{34} - \alpha_{24}\alpha_{31}) f_{14} \\
&\quad + (\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}) f_{23} + (\alpha_{22}\alpha_{34} - \alpha_{24}\alpha_{32}) f_{24} + (\alpha_{23}\alpha_{34} - \alpha_{24}\alpha_{33}) f_{34}\,, \\
f'_{24} = -f'_{42} &= (\alpha_{21}\alpha_{42} - \alpha_{22}\alpha_{41}) f_{12} + (\alpha_{21}\alpha_{43} - \alpha_{23}\alpha_{41}) f_{13} + (\alpha_{21}\alpha_{44} - \alpha_{24}\alpha_{41}) f_{14} \\
&\quad + (\alpha_{22}\alpha_{43} - \alpha_{23}\alpha_{42}) f_{23} + (\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}\alpha_{42}) f_{24} + (\alpha_{23}\alpha_{44} - \alpha_{24}\alpha_{43}) f_{34}\,, \\
f'_{34} = -f'_{43} &= (\alpha_{31}\alpha_{42} - \alpha_{32}\alpha_{41}) f_{12} + (\alpha_{31}\alpha_{43} - \alpha_{33}\alpha_{41}) f_{13} + (\alpha_{31}\alpha_{44} - \alpha_{34}\alpha_{41}) f_{14} \\
&\quad + (\alpha_{32}\alpha_{43} - \alpha_{33}\alpha_{42}) f_{23} + (\alpha_{32}\alpha_{44} - \alpha_{34}\alpha_{42}) f_{24} + (\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}\alpha_{43}) f_{34}\,.
\end{aligned}\right. \tag{53}$$

Die Koeffizienten rechter Hand sind die Unterdeterminanten zweiter Ordnung der Hauptdeterminante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} \tag{54}$$

als Matrix, und zwar die der ersten und zweiten, der ersten und dritten, der ersten und vierten, der zweiten und dritten, der zweiten und vierten, der dritten und vierten Zeile, nach den Indizes der f'. Wir bezeichnen diese Koeffizienten nach den Indizes der f mit

$$(12)_{h\varkappa},\ (13)_{h\varkappa},\ (14)_{h\varkappa},\ (23)_{h\varkappa},\ (24)_{h\varkappa},\ (34)_{h\varkappa};\quad h, \varkappa = 1, 2, 3, 4,\ h < \varkappa\,.$$

Nun muß nach (49) jetzt sein

$$f'^2_{12} + f'^2_{13} + f'^2_{14} + f'^2_{23} + f'^2_{24} + f'^2_{34} = f^2_{12} + f^2_{13} + f^2_{14} + f^2_{23} + f^2_{24} + f^2_{34}\,. \tag{55}$$

Also bekommen wir

$$
(56)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
\Sigma(12)_{h\varkappa}^2 = 1\,, & \Sigma(13)_{h\varkappa}^2 = 1\,, & \Sigma(14)_{h\varkappa}^2 = 1\,, \\
\Sigma(23)_{h\varkappa}^2 = 1\,, & \Sigma(24)_{h\varkappa}^2 = 1\,, & \Sigma(34)_{h\varkappa}^2 = 1\,, \\
\Sigma(12)_{h\varkappa}(13)_{h\varkappa} = 0\,, & \Sigma(12)_{h\varkappa}(14)_{h\varkappa} = 0\,, & \Sigma(12)_{h\varkappa}(23)_{h\varkappa} = 0\,, \\
 & \Sigma(12)_{h\varkappa}(24)_{h\varkappa} = 0\,, & \Sigma(12)_{h\varkappa}(34)_{h\varkappa} = 0\,, \\
\Sigma(13)_{h\varkappa}(14)_{h\varkappa} = 0\,, & \Sigma(13)_{h\varkappa}(23)_{h\varkappa} = 0\,, & \Sigma(13)_{h\varkappa}(24)_{h\varkappa} = 0\,, \\
 & & \Sigma(13)_{h\varkappa}(34)_{h\varkappa} = 0\,, \\
\Sigma(14)_{h\varkappa}(23)_{h\varkappa} = 0\,, & \Sigma(14)_{h\varkappa}(24)_{h\varkappa} = 0\,, & \Sigma(14)_{h\varkappa}(34)_{h\varkappa} = 0\,, \\
\Sigma(23)_{h\varkappa}(24)_{h\varkappa} = 0\,, & \Sigma(23)_{h\varkappa}(34)_{h\varkappa} = 0\,, & \\
\Sigma(24)_{h\varkappa}(34)_{h\varkappa} = 0 & &
\end{array}
\right.
$$

und überall ist

$$h\,,\ \varkappa = 1, 2, 3, 4\,; \quad h < \varkappa\,.$$

Wir bilden nunmehr die Funktion

$$F' = (f'_{12} + f'_{34})^2 + (f'_{13} - f'_{24})^2 + (f'_{14} + f'_{23})^2\,.$$

In den Faktoren der $f_{12}, f_{13}, \ldots$ fallen die Summen der Produkte der Koeffizienten gleicher Zeilen nach den obigen Gleichungen fort, es bleiben nur die Summen der Produkte der Koeffizienten ungleicher Zeilen. Diese sind aber, mit Ausnahme derjenigen, die zu $f_{12}f_{34}$, $f_{13}f_{24}$, $f_{14}f_{23}$ gehören, identisch Null, indem die einzelnen Glieder sich paarweise aufheben. Dagegen sind die Faktoren der herausgehobenen Produkte der f für $f_{12}f_{34}$, $f_{13}f_{24}$, $f_{14}f_{23}$

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 = &+(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{22}\alpha_{21})(\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}\alpha_{43}) + (\alpha_{31}\alpha_{42} - \alpha_{32}\alpha_{41})(\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{14}\alpha_{23}) \\
&- (\alpha_{11}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{31})(\alpha_{23}\alpha_{44} - \alpha_{24}\alpha_{43}) - (\alpha_{21}\alpha_{42} - \alpha_{22}\alpha_{41})(\alpha_{13}\alpha_{34} - \alpha_{14}\alpha_{33}) \\
&+ (\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31})(\alpha_{13}\alpha_{44} - \alpha_{14}\alpha_{43}) + (\alpha_{11}\alpha_{42} - \alpha_{12}\alpha_{41})(\alpha_{23}\alpha_{34} - \alpha_{24}\alpha_{33})\,, \\
\Delta_2 = &+(\alpha_{11}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{21})(\alpha_{32}\alpha_{44} - \alpha_{34}\alpha_{42}) + (\alpha_{31}\alpha_{43} - \alpha_{33}\alpha_{41})(\alpha_{12}\alpha_{24} - \alpha_{14}\alpha_{22}) \\
&- (\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{31})(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}\alpha_{42}) - (\alpha_{21}\alpha_{43} - \alpha_{23}\alpha_{41})(\alpha_{12}\alpha_{34} - \alpha_{14}\alpha_{32}) \\
&+ (\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{31})(\alpha_{12}\alpha_{44} - \alpha_{14}\alpha_{42}) + (\alpha_{11}\alpha_{43} - \alpha_{13}\alpha_{41})(\alpha_{22}\alpha_{34} - \alpha_{24}\alpha_{32})\,, \\
\Delta_3 = &+(\alpha_{11}\alpha_{24} - \alpha_{14}\alpha_{21})(\alpha_{32}\alpha_{43} - \alpha_{33}\alpha_{42}) + (\alpha_{31}\alpha_{44} - \alpha_{34}\alpha_{41})(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22}) \\
&- (\alpha_{11}\alpha_{34} - \alpha_{14}\alpha_{31})(\alpha_{22}\alpha_{43} - \alpha_{23}\alpha_{42}) - (\alpha_{21}\alpha_{44} - \alpha_{24}\alpha_{41})(\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{32}) \\
&+ (\alpha_{21}\alpha_{34} - \alpha_{24}\alpha_{31})(\alpha_{12}\alpha_{43} - \alpha_{13}\alpha_{42}) + (\alpha_{11}\alpha_{44} - \alpha_{14}\alpha_{41})(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32})\,.
\end{aligned}
$$

Diese Faktoren geben jeder die Hauptdeterminante mit den Zeichen $+$, $-$, $+$ und da diese Hauptdeterminante gleich $+1$ genommen ist, werden

$$\Delta_1 = +1\,, \quad \Delta_2 = -1\,, \quad \Delta_3 = +1\,.$$

Es bleiben noch die Faktoren der Quadrate der f. Beispielsweise ist für f_{12}^2 der Faktor

$$
\begin{aligned}
\Delta_a &= ((12)_{12} + (12)_{34})^2 + ((12)_{13} - (12)_{24})^2 + ((12)_{14} + (12)_{23})^2 \\
&= 1 + 2((12)_{12}(12)_{34} - (12)_{13}(12)_{24} + (12)_{14}(12)_{23})\,.
\end{aligned}
$$

Der Faktor von 2 ist nun

$$(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})(\alpha_{31}\alpha_{42}-\alpha_{32}\alpha_{41})-(\alpha_{11}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{31})(\alpha_{21}\alpha_{42}-\alpha_{22}\alpha_{41})$$
$$+(\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{31})(\alpha_{11}\alpha_{42}-\alpha_{12}\alpha_{41})\,,$$

in dem sich die Glieder paarweise aufheben. Das gleiche findet man für die Faktoren aller anderen entsprechenden Glieder. Hiernach wird

$$(57_1)\quad (f'_{12}+f'_{34})^2+(f'_{13}-f'_{24})^2+(f'_{14}+f'_{23})^2=(f_{12}+f_{34})^2+(f_{13}-f_{24})^2+(f_{14}+f_{23})^2$$

und folglich

$$(58_1)\qquad f'_{12}f'_{34}-f'_{13}f'_{24}+f'_{14}f'_{23}=f_{12}f_{34}-f_{13}f_{24}+f_{14}f_{23}\,,$$

so daß die betreffenden Größen invariant sind. Man kann die Gleichungen auch schreiben

$$(57_2)\quad (f'_{21}-f'_{34})^2+(f'_{13}-f'_{24})^2+(f'_{32}-f'_{14})^2=(f_{21}-f_{34})^2+(f_{13}-f_{24})^2+(f_{32}-f_{14})^2,$$

$$(58_2)\qquad f'_{21}f'_{34}+f'_{13}f'_{24}+f'_{32}f'_{14}=f_{21}f_{34}+f_{13}f_{24}+f_{32}f_{14}\,.$$

Die Größen links und rechts vom Gleichheitszeichen haben eine einfache Bedeutung. Bildet man die alternierende Determinante

$$(59_1)\qquad d=\begin{vmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} & f_{14}\\ f_{21} & 0 & f_{23} & f_{24}\\ f_{31} & f_{32} & 0 & f_{34}\\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 0\end{vmatrix},$$

so gibt die Ausrechnung

$$(60_1)\quad \begin{cases} d=+f_{12}f_{21}f_{34}f_{43}-f_{12}f_{23}f_{34}f_{41}-f_{12}f_{24}f_{31}f_{43}-f_{13}f_{21}f_{34}f_{42}+f_{13}f_{24}f_{31}f_{42}\\ \qquad -f_{13}f_{24}f_{32}f_{41}-f_{14}f_{21}f_{32}f_{43}-f_{14}f_{23}f_{31}f_{42}+f_{14}f_{23}f_{32}f_{41}\,.\end{cases}$$

Beachtet man aber die Beziehungen (51), so ziehen sich diese Glieder zusammen zu

$$(60_2)\qquad d=(f_{21}f_{34}+f_{13}f_{24}+f_{32}f_{14})^2\,.$$

Also bedeuten die Gleichungen (57), (58), daß die Determinante d invariant ist, wir haben

$$(61)\qquad \sqrt{d'}=\sqrt{d}\,.$$

Es gibt eine weitere Determinante, Minkowski nennt sie die zur Determinante d duale Determinante d^*, die den nämlichen Wert besitzt wie diese Determinante d, die also gleichfalls invariant sich zeigt. Es ist die folgende

$$(62)\qquad d^*=\begin{vmatrix} 0 & f_{34} & f_{42} & f_{23}\\ f_{43} & 0 & f_{14} & f_{31}\\ f_{24} & f_{41} & 0 & f_{12}\\ f_{32} & f_{13} & f_{21} & 0\end{vmatrix},$$

sie ist wie die Determinante d alternierend. Die unmittelbare Ausrechnung ergibt

$$d^*=+f_{34}f_{43}f_{12}f_{21}-f_{34}f_{14}f_{12}f_{32}-f_{34}f_{31}f_{24}f_{21}-f_{42}f_{43}f_{12}f_{13}+f_{42}f_{31}f_{24}f_{13}$$
$$-f_{42}f_{31}f_{41}f_{32}-f_{23}f_{43}f_{41}f_{21}-f_{23}f_{14}f_{24}f_{13}+f_{23}f_{14}f_{41}f_{32}\,,$$

und das fällt mit dem oben hingeschriebenen Wert von d zusammen, wenn man die Beziehungen unter (51) anwendet. Demnach wäre

$$(63_1)\qquad d^* = d\,,\qquad d^*\,d = d^2 = d^{*2}$$

und

$$(64)\qquad (d^*)' = d^*.$$

Setzen wir

$$f_{11}^*=f_{11},\quad f_{12}^*=f_{34},\quad f_{13}^*=f_{42},\quad f_{14}^*=f_{23},\quad f_{21}^*=f_{43},\quad f_{22}^*=f_{22},\quad f_{23}^*=f_{14},\quad f_{24}^*=f_{31},$$
$$f_{31}^*=f_{24},\quad f_{32}^*=f_{41},\quad f_{33}^*=f_{33},\quad f_{34}^*=f_{12},\quad f_{41}^*=f_{32},\quad f_{42}^*=f_{13},\quad f_{43}^*=f_{21},\quad f_{44}^*=f_{44},$$

so hat die duale Reihe f^* die gleiche Folge der Indizes wie die Ursprungsreihe f. Insbesondere ist dann

$$(63_2)\qquad d^* = \begin{vmatrix} f_{11}^* & f_{12}^* & f_{13}^* & f_{14}^* \\ f_{21}^* & f_{22}^* & f_{23}^* & f_{24}^* \\ f_{31}^* & f_{32}^* & f_{33}^* & f_{34}^* \\ f_{41}^* & f_{42}^* & f_{43}^* & f_{44}^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = d\,,$$

wenn

$$f_{11} = f_{22} = f_{33} = f_{44} = 0\,,\qquad f_{11}^* = f_{22}^* = f_{33}^* = f_{44}^* = 0\,,$$
$$f_{h\varkappa} = -f_{\varkappa h}\,,\qquad f_{h\varkappa}^* = -f_{\varkappa h}^*$$

angesetzt ist. Durch diese Beziehungen wird die symbolische Rechnung sehr erleichtert.

Unter der Annahme, daß Vt imaginär zu messen ist gegen x, y, z, sollten die Größen $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}; \alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}$ imaginär sein. Wie es sich mit den Funktionen f' verhält, wird davon abhängen, welche Annahmen über die f gelten sollen. Sind z. B. alle f reell, so ergeben die Gleichungen (42_1) alle φ imaginär oder komplex, mithin die Gleichungen (46_1) alle f' imaginär oder komplex, bis auf f'_{44}, welche reell würde, weil die Größen $\varphi_{14}, \varphi_{24}, \varphi_{34}, \varphi_{44}$ rein imaginär ausfielen. Nehmen wir aber $f_{14}, f_{24}, f_{34}, f_{41}, f_{42}, f_{43}$ imaginär, so zeigen sich, wenn $f_{44} = 0$ ist, entsprechend $\varphi_{14}, \varphi_{24}, \varphi_{34}, \varphi_{41}, \varphi_{42}, \varphi_{43}$ imaginär und also auch $f'_{14}, f'_{24}, f'_{34}, f'_{41}, f'_{42}, f'_{43}$. In diesem Falle entsprechen sich die f und f', und es ist leicht zu sehen, daß in keinem anderen Falle eine solche Korrespondenz auch in dieser Beziehung stattfindet. In diesem Falle bleibt also auch die Gleichung (58_1), ohne zu zerfallen, bestehen.

Hätten wir die Größe Vt überhaupt reell gemessen, so wären die f' alle reell, wenn die f reell angenommen sind. An der Form der Gleichungen aber ändert sich nichts, sie bleiben mit irgendwelchen Annahmen formell bestehen, wenn sie auch sachlich zerfallen können.

Von diesen Gleichungen und Erwägungen werden wir später Gebrauch zu machen haben. Daß man aber Rechnungen dieser Art beliebig fortzusetzen vermag, bedarf nicht des Nachweises.

Das Relativitätsprinzip drückt nun Minkowski in folgender Weise aus: „Man kann aus der Gesamtheit der Naturerscheinungen durch sukzessiv gesteigerte Approximationen immer genauer ein Bezugssystem x, y, z und t, Raum und Zeit, ableiten, mittels dessen diese Erscheinungen sich dann nach bestimmten Gesetzen darstellen. Dieses Bezugssystem ist dabei aber durch die Erscheinungen keineswegs eindeutig festgelegt. Man kann das Bezugssystem noch entsprechend den Transformationen der genannten Gruppe G_c beliebig verändern, ohne daß der Ausdruck der Naturgesetze dabei sich verändert.“

Die genannte Gruppe G_c ist dabei die vorstehend behandelte Transformation einschließlich beliebiger „Verschiebungen des Raum- und Zeit-Nullpunktes" verstanden. Der erste Satz des Relativitätsprinzips spricht von der Ermittelung von Naturgesetzen überhaupt. Erst der zweite und dritte Satz bilden das eigentliche Prinzip. Zu dem obigen Prinzip wird ein zweites hinzugefügt:

Keine Geschwindigkeit im Raume kann größer sein als die Geschwindigkeit V.

Da Minkowski dieses zweite Prinzip in die Ungleichung umsetzt

$$V^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \geqq 0,$$

wo t, x, y, z zusammengehörige Größen irgendeines Raum-Zeitsystems sind, so versteht er unter „Geschwindigkeit" die allein auf den Raum berechnete Größe dieser Art, nämlich

$$g = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{65}$$

Die allgemeine Geschwindigkeit, dem vierdimensionalen Gebiete entsprechend, ist der „Bewegungsvektor" S. 293

$$G = \frac{1}{V}\sqrt{V^2\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}. \tag{66}$$

Wenn man den Zeitvektor Vt im Verhältnis zu den Raumvektoren reell mißt, statt imaginär, entfällt das zweite Prinzip, das so seltsam anmutet. Aus dem zweiten Prinzip folgt, daß es unter allen Umständen hyperboloidische Schalengebilde

$$V^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \varkappa^2$$

gibt. Also wird für jeden Weltpunkt, jede Weltlinie ein von der Mitte O jener Schalengebilde an diese Gebilde gezogener Weltvektor OA' vorhanden sein, der der Richtung der Weltlinie an dem betreffenden Weltpunkt parallel läuft. Nimmt man diesen Vektor als neue Zeitachse, so liefe die Weltlinie in dem betreffenden Punkte parallel dieser Zeitachse, die Zeit ist dann θ. Das aber bedeutet (S. 343), daß der Punkt ruht. Demnach schließt Minkowski:

„Die in einem beliebigen Weltpunkte vorhandene Substanz kann stets bei geeigneter Festsetzung von Raum und Zeit als ruhend aufgefaßt werden."

F. Klein[1]) hat der Minkowskischen Theorie eine geometrische Fassung verliehen. Er geht von dem Satze aus: „Metrische Geometrie und projektive Geometrie kommen beide auf das Stadium einer Invariantentheorie heraus, und ihre gegenseitige Beziehung liegt darin, daß die Gruppe der metrischen Geometrie eine Untergruppe der zur projektiven Geometrie gehörigen Gruppe ist." Nun behandelt die projektive Geometrie alle diejenigen Eigenschaften der Raumgebilde, welche bei irgendeiner Projektion invariant bleiben. Nach einer Arbeit von Cayley aber kann die metrische Geometrie mit ihr zu einer Geometrie vereinigt werden, wenn man nämlich zu den geometrischen Gebilden gewisse andere Gebilde hinzufügt und die projektivischen Eigenschaften des Gesamten betrachtet. In der euklidischen Geometrie sind diese hinzuzufügenden Gebilde in der Ebene ein imaginäres Punktpaar, im Raume ein

[1]) Jahresberichte der Deutschen mathematischen Vereinigung **19**, 281 ff. (1910).

imaginärer Kugelkreis. Die Gleichungen sind in homogenen Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 $\left(\text{in der Ebene } x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3},\ \text{im Raume } x = \frac{x_1}{x_4},\ y = \frac{x_2}{x_4},\ z = \frac{x_3}{x_4}\right)$

für das Punktpaar: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $\quad x_3 = 0$, oder $u_1^2 + u_2^2 = 0$;

für den Kugelkreis: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, $\quad x_4 = 0$, oder $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$,

u_1, u_2, u_3, u_4 sind Linienkoordinaten mit $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ in der Ebene und $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ im Raum. Diese Zusammenfassung bildet die Cayleysche allgemeine Geometrie. Eine allgemeinere Geometrie, die auch die verschiedenen nichteuklidischen Geometrieen enthält, bekommt man, wenn das hinzuzufügende Gebilde allgemein durch $\Sigma\Sigma a_{ik} u_i u_k = 0$ festgestellt wird. Darauf beziehen sich die weiteren Entwickelungen F. Kleins. Vorauszuschicken ist noch, wie er die Transformationen auffaßt. Das Beispiel bildet die Transformation in der Ebene. Die allgemeinste ist hier

$$x' = \frac{\alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13}}{\alpha_{31} x + \alpha_{32} y + 1}, \qquad y' = \frac{\alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23}}{\alpha_{31} x + \alpha_{32} y + 1}.$$

Sie wird zur affinen Transformation, wenn man setzt

$$\alpha_{31} = 0, \quad \alpha_{32} = 0,$$

so daß $\alpha_{31} x + \alpha_{32} y + 1 =$ Konst. die unendlich ferne Gerade darstellt, die sich in sich selbst transformiert. Man hat dann

$$x' = \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13}, \quad y' = \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23}.$$

Fügt man die Bedingung hinzu, daß

$$dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2$$

sein soll, wodurch

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 = \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2, \quad \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21} = 0$$

wird, so wird die affine Transformation zur äquiformen Transformation. Verlangt man noch, daß

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = +1$$

ist, so haben wir die kongruente Transformation. Also auf solche kongruente Kollineationen bezieht sich der Kleinsche Satz.

Nun beschäftigt sich die Cayleysche allgemeine Geometrie, wie bemerkt, mit der Invarianz der Eigenschaften der Gebilde bei irgendwelcher Projektion, also bei einer Transformation mittels Kollineationen der obigen Art. F. Klein sagt darum, daß die Minkowskische Theorie (die die Lorentz-Einsteinsche Relativitätstheorie einschließt) die Invariantentheorie bedeutet der allgemeinen Geometrie des Raum-Zeit-Gebietes gegenüber einer bestimmten Gruppe von Kdllineation, allgemein aber der Minkowskischen Gruppe, zu der auch die Lorentz-Einsteinsche gehört. Es muß noch hinzugefügt werden, bei bestimmter Annahme über das hinzuzufügende Gebilde $\Sigma\Sigma a_{ik} u_i u_k = 0$. Diese Annahme wird dahin festgesetzt, daß

$$(64) \qquad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - \frac{u_4^2}{V^2} = 0$$

sein soll. In homogenen Punktkoordinaten $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_5$ hat man dann mit

$$x = \frac{\bar{x}_1}{x_5}, \quad y = \frac{\bar{x}_2}{x_5}, \quad z = \frac{\bar{x}_3}{x_5}, \quad t = \frac{\bar{x}_4}{x_5}$$

für die obige Beziehung

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + x_3^2 - V^2 \bar{x}_4^2 = 0, \quad x_5 = 0\,. \tag{67}$$

Klein rechnet also mit t selbst als einer Koordinate und bringt Minkowskis Festsetzung, daß $i\,Vt$ als Koordinate zu betrachten sei, in die Bedingungsgleichung. Als Transformation wird angesetzt

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \alpha_{11}\,x + \alpha_{12}\,y + \alpha_{13}\,z + \alpha_{14}\,t + \alpha_{15}\,, \\ y' &= \alpha_{21}\,x + \alpha_{22}\,y + \alpha_{23}\,z + \alpha_{24}\,t + \alpha_{25}\,, \\ z' &= \alpha_{31}\,x + \alpha_{32}\,y + \alpha_{33}\,z + \alpha_{34}\,t + \alpha_{35}\,, \\ t' &= \alpha_{41}\,x + \alpha_{42}\,y + \alpha_{43}\,z + \alpha_{44}\,t + \alpha_{45}\,. \end{aligned}\right. \tag{68}$$

Die kongruente Fassung dieser Transformation ergibt dann die Minkowskische Beziehung von der Invarianz der Abstände der Weltpunkte. Als notwendig wird aber noch bezeichnet, daß die Größe α_{44} positiv ist, Diese Festsetzung findet sich bei Minkowski in anderer Form ausgedrückt, die wir später kennen lernen werden. Nehmen wir $V = \infty$, so geht die Gleichung (64) in die für den Kugelkreis über und das ganze Schema verwandelt sich in das für den Raum allein geltende. Zu bemerken ist noch, daß die Linienkoordinaten mit den Punktkoordinaten verbunden sind durch die Beziehung

$$u_1\,\bar{x}_1 + u_2\,\bar{x}_2 + u_3\,\bar{x}_3 + u_4\,\bar{x}_4 + u_5\,\bar{x}_5 = 0\,.$$

und $\bar{x}_5 = 0$ wird das „unendlich Ferne" der Welt genannt, warum ist klar. Sodann enthalten die Kleinschen Transformationsformeln vier Konstanten mehr als die Minkowskischen, die α_{15}, α_{25}, α_{35}, α_{45}, die der Möglichkeit einer Verlegung des Anfangspunktes des Raum-Zeit-Systems Rechnung tragen, so daß insgesamt nunmehr zehn Konstanten willkürlich gewählt werden können. Auf die Grundbeziehungen hat das keinen Einfluß, weil eben die α_{15}, α_{25}, α_{35}, α_{45} lediglich als Konstanten behandelt werden, also für Bewegungen nicht in Frage kommen.

Abgesehen von der Frage, ob allen diesen Prinzipen auch wirklich allgemeine Bedeutung zukommt, die später besprochen wird, bieten Vorstellung und Erkenntnis die größten Schwierigkeiten bei ihrer Auffassung. Was soll man sich dabei denken, daß die Zeit im Verhältnis zu den Raumabmessungen imaginär gerechnet wird. Ja, da in den Gleichungen niemals die Zeit als solche, sondern stets in der Verbindung mit V zu $V\,t$ enthalten ist, bezieht sich das Imaginäre auf dieses $V\,t$. Diese Größe aber ist eine Strahlenlänge, und so träte eine solche Strahlenlänge als vierte Dimension auf und wäre trotz „Länge" nicht mit Raum„längen" vorstellbar zu messen. Welchen Sinn hat es dann überhaupt, Dinge in eins zusammenzufassen, die man doch nicht aufeinander soll beziehen können. Sonst werden komplexe Gleichungen in der Physik, als einer Wissenschaft des Wirklichen, sofort in zwei Gleichungen zerlegt. Hier sollen komplexe Gleichungen als solche der Wirklichkeit angehören. Das bedeutet sicher eine der größten Umwälzungen in unseren gewohnten Anschauungen[1]). Denn hier handelt es sich nicht etwa

[1]) In seinem Werke Molecular Dynamics hat Lord Kelvin in einer komplexen Gleichung den imaginären Teil fortgelassen, weil der Faktor dieses Teiles klein sei. Zu der deutschen Bearbeitung habe ich in einer Anmerkung meine Bedenken gegen dieses Verfahren zum Ausdruck gebracht, weil die Begriffe groß und klein auf Unvorstellbares mir

allein darum, daß Größen vereinigt sind, die inkommensurabel sein sollen, wobei sie noch jede für sich vorstellbar sein können, sondern Größen, von denen eine unter allen Umständen nach unseren jetzigen (oder früheren) Anschauungen unvorstellbar ist. Man kann sich nicht darauf berufen, daß schließlich in den praktisch anzuwendenden Formeln das Unvorstellbare nicht zum Vorschein kommt, wie in der Formel $-\sqrt{-1}\sqrt{-1} = +1$; es handelt sich um die Grundlagen für diese letzten Formeln, und eine Theorie, die zu neuen Erkenntnissen führen soll, kann und darf nur nach ihren Grundlagen beurteilt werden; diese bedeuten die Erkenntnis, nicht die aus der Theorie zuletzt gewonnenen besonderen Formeln, die ja noch von ganz anderen Umständen abhängen, und praktisch ebensogut ohne jede Begründung frei gestellt werden könnten, wie das ja gegenwärtig an so vielen Stellen der Physik mit so großem Eifer geschieht, daß sich schließlich das meiste in Symbole auflöst.

Eine zweite Schwierigkeit liegt auf metaphysischer Seite. Von unseren bedeutendsten Denkern wird der Raum aus äußeren, die Zeit aus inneren Stammbegriffen hervorgegangen angesehen, oder wie ich es bei mehreren Gelegenheiten erläutert habe, der Raum als Vergegenständlichung für unser Körpergefühl (freilich unter Einbeziehung des Ursächlichkeitsbegriffs), die Zeit als Vergegenständlichung für den Wechsel in unserem Bewußtsein. Nun sind wir freilich eine absolute Einheit. Allein wir wissen doch auch, daß unsere Seelentätigkeiten vielfach durchaus voneinander verschieden und getrennt sind, Zorn und Glaube, Hunger und Bewunderung usf. sind nicht nach Umfang (quantitativ, intensiv), sondern der Art nach verschieden, und so steht auch das Körpergefühl abseits vom Wechsel im Bewußtsein. Will man von zwei Vergegenständlichungen als von einem — nicht formal, sondern sachlich — sprechen, so muß man etwas nachweisen, das in uns gerade die beiden zugehörigen Seelentätigkeiten zu einer besonderen Einheit zusammentut. Das Bewußtsein darf hierfür nicht geltend gemacht werden, denn durch dieses werden alle Seelentätigkeiten „bewußt", soweit es sich um unser geistiges Leben handelt. Die nachzuweisende Seelentätigkeit müßte vergegenständlicht als unzerlegbare Einheit das Raum-Zeit-Gebiet ergeben, wie das Körpergefühl vergegenständlicht als unzerlegbare Einheit den ausgedehnten Körper ergibt. Haben wir eine solche Seelentätigkeit in uns, aus der die beiden genannten Seelentätigkeiten so fließen, daß eine nicht ohne die andere besteht, während alle anderen Seelentätigkeiten für sie entfallen könnten? Es ist schon schlimm, wenn nach einer solchen Seelentätigkeit erst gefragt werden muß, da sie sich doch von vornherein hätte aufzwingen müssen, in demselben Sinne, in dem die Seelentätigkeit die zur Auffassung des Raumes führt, zugleich die Dreidimensionalität aufzwingt und den Raum weder als ein-, noch als zwei-, vier- usf. -dimensional aufzufassen zuläßt. Wäre das Raum-Zeit-Gebiet eine sachliche

nicht anwendbar schienen. Ein Kritiker, der meine Anmerkung las, hat „seinen Augen nicht getraut". Er hätte besser getan, seinem Urteil nicht zu trauen. Wenn ein Ding in irgendeinem Teile unvorstellbar ist, so ist es überhaupt unvorstellbar und kann in keiner Weise dadurch vorstellbar gemacht werden, daß man den unvorstellbaren Teil fortläßt. Hat man $c = a + b\,i$ und läßt $b\,i$ fort, weil b klein ist, so hat man nicht ein vorstellbares c gewonnen, sondern hat nur das vorstellbare a, das schon vorher vorstellbar gewesen, an Stelle des unvorstellbar bleibenden c gesetzt, und das ist natürlich, wo es gerade auf das c ankommt, unzulässig. Für den Bereich des Wirklichen ist aber die Lösung nicht zu verwenden. Derselbe geistvolle Herr, der wegen dieser Anmerkung und noch einer, in der ich manches an der modernen Elektronentheorie als problematisch bezeichnete (es ist in meinem Buche „Die Grundgesetze der Natur" näher ausgeführt), dem Leser rät, meine Anmerkungen nicht zu beachten, obwohl sie zum allergrößten Teil nur Vergleichungen mit deutschen Arbeiten, Hinweise auf deutsche Arbeiten und auf Verfahren und Erläuterungen enthalten, hat es nicht für nötig erachtet, über die Arbeit selbst auch nur ein Wort zu verlieren.

Einheit, dann hätte man es von je, angesichts seines Ursprunges, gar nicht anders denn als eine solche Einheit auffassen können, wie man den Raum nie anders hat auffassen können, denn als etwas, darin Dinge gleich unserem Körper sich befinden. Es wird oft behauptet, daß man sich eine Existenz überhaupt weder räumlich ohne zeitlich, noch zeitlich ohne räumlich, sondern nur zugleich zeitlich und räumlich denken könne. Hier liegt aber wohl eine Verwechslung von Vorhandensein an sich und Vorhandensein in der äußeren Welt vor. Alle unsere Seelentätigkeiten haben für uns einen ganz anderen Ort als der Raum, wenn man ihnen einen solchen zuschreiben will, nämlich das Bewußtsein und selbst der Ort des Körpergefühls ist in diesem Bewußtsein und ebenso der Wechsel der Seelentätigkeiten nach Stärke oder Art. Das Bewutßsein, mit seinem ganzen Inhalt vergegenständlicht, ist das geistige Leben, nicht das Raum-Zeit-Gebiet; einzelne Seelentätigkeiten, wie Körpergefühl, Wechsel der Seelentätigkeiten, Ursächlichkeit, Gegenständlichkeit usf., vergegenständlicht, geben Raum, Zeit, Ursache, Gegenstand usf.

Allzu leicht hat man sich über solche Erkenntnisschwierigkeiten hinweggesetzt zugunsten eines fast gespensterhaften Universums. Und was oben gesagt ist, betrifft nicht bloß die Minkowskische Theorie, die als mathematische Theorie dauernden Wert hat, sondern alle Relativitätstheorien, die sogleich sich ins Unendliche dehnten und von unserer ganzen Anschauung Besitz nahmen, alles stürzten und nichts dafür gaben als Schatten und, was viel schlimmer ist, leere und leichte Behauptungen. Was Einstein und Minkowski mit der Relativitätstheorie geleistet haben, ist schon bedeutend genug ohne die fast verschroben-fanatischen Verallgemeinerungen von so vielen Seiten. Man dient diesen Theorien und der Wissenschaft viel besser, wenn man jene auf das beschränkt, was sie sein können. Keinem Naturforscher ist es früher eingefallen, in der Tatsache, daß die Lösung einer Differentialgleichung willkürliche Konstanten enthält, etwas anderes zu sehen, als ein mathematisches Ergebnis, das aus der Art folgen muß, wie wir eben die Differentialrechnung eingerichtet haben. Diese Einrichtung hat sich als brauchbar für zusammenfassende Beschreibungen von Naturerscheinungen erwiesen und die Möglichkeit ergeben, Probleme nach ihren besonderen Bedingungen, zu deren Berücksichtigung aber die willkürlichen Konstanten der Lösungen dienen, mathematisch zu entwickeln.

Was hat aber diese besondere mathematische Einrichtung mit Weltanschauungen zu tun? Es ist sehr wohl eine andere Mathematik denkbar, die es gestattet, Aufgaben sogleich mit ihren Bedingungen in Eins zu behandeln, nicht erst Differentialgleichungen zu lösen und dann die willkürlichen Konstanten den Bedingungen anzupassen. Die Differentialrechnung ist eine Erfindung der Menschheit und braucht keineswegs das einzige und von der Welt selbst vorgeschriebene Mittel, die Erscheinungen zu behandeln, zu sein. Wer das Gegenteil behauptet, betrachtet die Differentialrechnung als die abgezogene Welt und kann dann freilich hinter den willkürlichen Konstanten ihrer Lösungen allerhand Universelles sehen. Dem anderen ist das nur mystischer Symbolismus.

5. Mechanik und Thermodynamik in der Relativitätstheorie.

a) Einsteins Mechanik.

Wir haben es vor allem mit Einsteins Additionstheorem der Geschwindigkeiten[1]) zu tun. Die klassische Mechanik addiert einfach Geschwin-

[1]) Einstein, Annalen der Physik u. Chemie 17, 905 (1905).

digkeiten gemäß dem Parallelogrammsatz. Es seien $q'_{\xi'}$, $q'_{\eta'}$, $q'_{\zeta'}$ drei im System ξ', η', ζ', τ herrschende konstante Geschwindigkeiten. Einstein setzt

$$(1_1)\qquad \begin{cases} q'_{\xi'} = \dfrac{\xi'}{\tau}\,, \\[2ex] q'_{\eta'} = \dfrac{\eta'}{\tau}\,, \\[2ex] q'_{\zeta'} = \dfrac{\zeta'}{\tau}\,, \end{cases}$$

befolgt also die übliche Definition auch für das Relativsystem. Wir haben dann umgekehrt

$$(1_2)\qquad \xi' = q'_{\xi'}\tau\,, \quad \eta' = q'_{\eta'}\tau\,, \quad \zeta' = q'_{\zeta'}\tau\,.$$

Setzt man für ξ', η', ζ', τ die Werte S. 285 nach den Lorentz-Einsteinschen Formeln ein, so folgt [vgl. auch (φ), S. 129]

$$(2)\qquad \begin{cases} g_x = \dfrac{x}{t} = \dfrac{q'_{\xi'} + p}{1 + \dfrac{p q'_{\xi'}}{V^2}}\,, \\[4ex] g_y = \dfrac{y}{t} = \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{p^2}{V^2}}\, q'_{\eta'}}{1 + \dfrac{p q'_{\xi'}}{V^2}}\,, \\[4ex] g_z = \dfrac{z}{t} = \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{p^2}{V^2}}\, q'_{\zeta'}}{1 + \dfrac{p q'_{\xi'}}{V^2}}\,. \end{cases}$$

Das sind die Gleichungen des berühmten Einsteinschen Additionstheorems für Geschwindigkeiten. Allein diese Gleichungen haben nicht die Bedeutung, die man ihnen zuschreibt. In der Tat bedeuten g_x, g_y, g_z die ganzen Geschwindigkeitskomponenten im absoluten System x, y, z, t. Von den Größen auf der rechten Seite aber ist p zwar gleichfalls auf das absolute System bezogen, $q'_{\xi'}$, $q'_{\eta'}$, $q'_{\zeta'}$, aber beziehen sich auf das Relativsystem. Es kann also nicht wundernehmen, wenn g nicht einfach die Summe der Teilgeschwindigkeiten p, q' bildet. Das Gegenteil wäre wunderbar, wenn sie sich als diese Summe erwiesen, nachdem sie selbst und p nach absoluter Zeit, q' aber nach Relativzeit gemessen wird. Rechnet man q' aus Relativzeit in absolute Zeit um, daß nach (7) (S. 284), auch (φ') (S. 130)

$$(3)\qquad \left.\begin{cases} q'_{\xi'} = \dfrac{\xi'}{\tau} = \dfrac{\beta^2 \xi}{t - \beta^2 \dfrac{p}{V^2}\xi} = \dfrac{\beta^2 q_\xi}{1 - \beta^2 q_\xi \dfrac{p}{V^2}} \\[4ex] q'_{\eta'} = \dfrac{\beta \eta}{t - \beta^2 \dfrac{p}{V^2}\xi} = \dfrac{\beta q_\eta}{1 - \beta^2 q_\xi \dfrac{p}{V^2}} \\[4ex] q'_{\zeta'} = \dfrac{\beta \zeta}{t - \beta^2 \dfrac{p}{V^2}\xi} = \dfrac{\beta q_\zeta}{1 - \beta^2 q_\xi \dfrac{p}{V^2}} \end{cases}\right\}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{p^2}{V^2}}}$$

wird und setzt diese Werte in die obigen Gleichungen für g_x, g_y, g_z, so folgt

(4) $$g_x = q_\xi + p\,, \quad g_y = q_\eta\,, \quad g_z = q_\zeta\,,$$

wie es eben die klassische Mechanik lehrt. Also löst sich das Einsteinsche Additionstheorem in die gewöhnliche Regel auf, sobald man, wie ja notwendig, alle Größen in demselben Maße mißt, und nicht eine (p) in absoluter Zeit, die andere (q') in Relativzeit. Alle außerordentlichen Folgerungen, die man an dieses Theorem knüpfen zu dürfen geglaubt hat, sind demnach hinfällig. Hinfällig ist also auch die Behauptung, daß man die Lichtgeschwindigkeit V durch Zusammensetzung mit einer anderen Geschwindigkeit q' nicht zu vergrößern vermöge. Es soll das sich ergeben, wenn man in den Gleichungen (2) $p = V$ und $q'_{\eta'} = q'_{\zeta'} = 0$, $q'_{\xi'} = q'$ einführt. In der Tat würde dann

$$g = \frac{V + q'}{1 + \frac{q'}{V}} = V\,,$$

welchen Wert auch q' haben möge. Man darf aber diese Formel gar nicht anwenden, denn es ergibt sich bei der Berechnung von g aus p und $\frac{\xi'}{\tau}$ für diesen Fall

$$g = \frac{\beta}{\beta}\,\frac{V + q'}{1 + \frac{q'}{V}} = \frac{\beta}{\beta}\,V\,,$$

und $\frac{\beta}{\beta}$ jetzt $= 1$ zu setzen, ist unzulässig, weil für $p = V$ diese Größe $\frac{\infty}{\infty}$, also unbestimmt wird. Daß eine solche Unbestimmtheit herauskommt, ist aber Folge der Zusammensetzung einer Größe aus zwei mit verschiedenen Maßen gemessenen Größen, da bei der zweiten dieser Größen, q', das Zeitmaß wie das Wegmaß für $p = V$ unendlich, also das Geschwindigkeitsmaß unbestimmt wird. Gerade an diesem Beispiel erhellt das Unzulässige des ganzen Verfanrens.

Also kann man zwar das Einsteinsche Additionstheorem an sich stehen lassen, muß sich aber klar sein, daß die darin enthaltenen Größen nach verschiedenen Maßen gemessen sind, so daß ihre Zusammensetzung eine undeutbare Größe ergibt, solange eine Umrechnung auf gleiche Einheit nicht stattfindet. Ferner, daß dieses Theorem seine Anwendbarkeit bei Lichtgeschwindigkeit verliert, es nicht so angewendet werden darf, wie es ausgesprochen ist, weil für eine der Größen das Maß alsdann unbestimmt wird. Endlich, daß dieses Theorem, auf Benutzung gleichen Maßes zurückgeführt, durchaus nichts anderes lehrt als das entsprechende Theorem der klassischen Mechanik.

Eigenartig und, wie mir scheint, für die Relativitätslehre in der Einsteinschen Fassung von fataler Bedeutung ist, daß für die Größe p, die doch auch eine Geschwindigkeit sein soll, im Relativsystem keine Messungsmöglichkeit vorhanden ist. Wir haben $p = \frac{x_0}{t}$, wenn x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Ursprungs des Relativsystems ξ', η', ζ' im System x, y, z bedeuten. Wir hätten also, da für diesen Ursprung $\xi' = \eta' = \zeta' = 0$ ist, nach den Gleichungen unter (2), solange $p \gtrless V$ ist, $x_0 = pt$, was die Definition für p ergibt, und $\tau = \beta\left(t - \frac{p^2}{V^2}t\right) = \frac{1}{\beta}\,t$, somit $p = \frac{x_0}{\beta\tau}$. Die Größe $\frac{x_0}{\tau}$ ist aber trotz des τ im Nenner keine Geschwindigkeit im Relativsystem, auch nicht nach Division durch β, weil x_0 im Relativsystem keine Bedeutung besitzt, sondern nur im absoluten System. Genau so verhält es sich eigentlich auch mit der Größe V. Kann man nun auch von dieser Größe, weil sie nach Einstein eine universelle, für alle Systeme gleich große Zahl angeben soll, die mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum identifiziert wird, von Messungsmöglichkeiten in verschiedenen Systemen absehen, so geht das doch bei der Größe p nicht, die ja jede beliebige Geschwindigkeit bedeuten darf. Folgerichtig muß man verlangen, daß in jeder Formel alle Größen mit denselben Einheiten gemessen werden, und das zu erfüllen ist nicht möglich, wenn p mit Größen verbunden ist, die in Einheiten des Relativsystems gemessen sind, weil p in solchen Einheiten vollständig nicht ausdrückbar ist. Ließe sich p in solchen Einheiten zu p' ausdrücken, dann müßte auch für das Relativsystem das Einsteinsche Additionstheorem in das der klassischen Mechanik übergehen. Daß man durch Vergleichung der Formeln (8), (10) und (11) S. 285 ansetzt $p' = -p$, hat damit nichts zu tun, es ist nichts Prinzipielles, wie man ja daraus ersieht, daß $V' = +V$ gesetzt wird, obwohl p und V Größen derselben Art sind. Da p und V zur Verbindung des Relativsystems mit dem absoluten System dienen, ist es übrigens selbstverständlich, daß für sie ein Maß im Relativsystem nicht vorhanden sein kann.

Das weitere der Einsteinschen Mechanik betrifft die Bewegung eines Elektrons von dem Masse μ und der Ladung ε. Für einen ruhenden, nach der Zeit t rechnenden Beobachter im ruhenden Koordinatensystem x, y, z wird wie üblich gesetzt

$$(5)\qquad \begin{cases} \mu \dfrac{d^2 x}{d t^2} = \varepsilon \mathfrak{E}_x\,, \\[2ex] \mu \dfrac{d^2 y}{d t^2} = \varepsilon \mathfrak{E}_y\,, \\[2ex] \mu \dfrac{d^2 z}{d t^2} = \varepsilon \mathfrak{E}_z\,. \end{cases}$$

$\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$ sind die Komponenten der das Elektron treibenden elektrischen Kräfte im System x, y, z auf die Elektrizitätseinheit.

Für einen die Zeit nach τ rechnenden Beobachter im System ξ', η', ζ' wird dem Relativitätsprinzip entsprechend angenommen

$$(5')\qquad \begin{cases} \mu \dfrac{d^2 \xi'}{d \tau^2} = \varepsilon \mathfrak{E}'_{\xi'}\,, \\[2ex] \mu \dfrac{d^2 \eta'}{d \tau^2} = \varepsilon \mathfrak{E}'_{\eta'}\,, \\[2ex] \mu \dfrac{d^2 \zeta'}{d \tau^2} = \varepsilon \mathfrak{E}'_{\zeta'}\,, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{E}'_{\xi'}$, $\mathfrak{E}'_{\eta'}$, $\mathfrak{E}'_{\zeta'}$ die Komponenten der das Elektron treibenden elektrischen Kräfte im Relativsystem sind. Hier verquickt sich Einsteins Mechanik mit seiner Elektrodynamik, die später zu betrachten ist. Er findet, wenn für $t = x = y = z = 0$ auch $\tau = \xi' = \eta' = \zeta' = 0$ festgestellt wird (S. 285)

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}'_{\xi'} = \mathfrak{E}_x\,, \\[1ex] \mathfrak{E}'_{\eta'} = \beta\left(\mathfrak{E}_y - \dfrac{p}{V}\mathfrak{H}_z\right), \\[2ex] \mathfrak{E}'_{\zeta'} = \beta\left(\mathfrak{E}_z + \dfrac{p}{V}\mathfrak{H}_y\right). \end{cases}$$

Geht man nun von dem zweiten Bewegungsgleichungssystem (5′) aus und transformiert es auf das absolute System x, y, z, t, so hat man nach (8b) S. 285

(7) $d\xi' = \beta(dx - p\,dt)\,,\quad d\eta' = dy\,,\quad d\zeta' = dz\,;$ (8) $d\tau = \beta\left(dt - \frac{p}{V^2}dx\right);$

(9) $$d^2\xi' = \beta\, d^2x\,,\quad d^2\eta' = d^2y\,,\quad d^2\zeta' = d^2z\,;$$

somit wird

(10) $$\begin{cases} \dfrac{d\xi'}{d\tau} = \dfrac{\dfrac{dx}{dt} - p}{1 - \dfrac{p}{V^2}\dfrac{dx}{dt}}\,, \\[2ex] \dfrac{d\eta'}{d\tau} = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{1 - \dfrac{p}{V^2}\dfrac{dx}{dt}}\,, \\[2ex] \dfrac{d\zeta'}{d\tau} = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\dfrac{dz}{dt}}{1 - \dfrac{p}{V^2}\dfrac{dx}{dt}}\,; \end{cases}$$

und

(11) $$\begin{cases} \dfrac{d^2\xi'}{d\tau^2} = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{p}{V^2}\dfrac{dx}{dt}\right)^2}\dfrac{d^2x}{dt^2}\,, \\[2ex] \dfrac{d^2\eta'}{d\tau^2} = \dfrac{1}{\beta^2}\dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{p}{V^2}\dfrac{dx}{dt}\right)^2}\dfrac{d^2y}{dt^2}\,, \\[2ex] \dfrac{d^2\zeta'}{d\tau^2} = \dfrac{1}{\beta^2}\dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{p}{V^2}\dfrac{dx}{dt}\right)^2}\dfrac{d^2z}{dt^2}\,. \end{cases}$$

Man gelangt zu denselben Formeln durch folgende, anscheinend strengere Rechnung. Es ist z. B.

$$d\xi' = \frac{\dfrac{dx}{dt} - p}{1 - \dfrac{p}{V^2}\dfrac{dx}{dt}}\,d\tau\,,$$

also

$$d\,d\xi' = d^2\xi' = \frac{d\left(\dfrac{dx}{dt}\right)}{1 - \dfrac{p}{V^2}\dfrac{dx}{dt}}\,d\tau + \frac{p}{V^2}\frac{\dfrac{dx}{dt} - p}{\left(1 - \dfrac{p}{V^2}\dfrac{dx}{dt}\right)^2}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right)d\tau + \frac{\dfrac{dx}{dt} - p}{1 - \dfrac{p}{V^2}\dfrac{dx}{dt}}\,d^2\tau\,.$$

$d^2\tau$ ist zwar für jede Rechnung innerhalb des Relativsystems gleich Null, wie d^2t für jede Rechnung innerhalb des absoluten Systems, im absoluten System ist aber

(12) $$d^2\tau = -\beta\frac{p}{V^2}d^2x\,.$$

Führt man diesen Wert ein und beachtet, daß $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt}$ ist, so ergibt sich mit dem bekannten Betrag für β die obige Gleichung für $\frac{d^2\xi'}{d\tau^2}$. Und in gleicher Weise erhält man die anderen beiden Gleichungen.

Umgekehrt hat man, als wenn x, y, z, t, $+p$ vertauscht würden mit ξ', η', ζ', τ, $-p$:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\frac{d\xi'}{d\tau} + p}{1 + \frac{p}{V^2}\frac{d\xi'}{d\tau}}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1 + \frac{p}{V^2}\frac{d\xi'}{d\tau}}\,\frac{d\eta'}{d\tau}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1 + \frac{p}{V^2}\frac{d\xi'}{d\tau}}\,\frac{d\xi'}{d\tau}; \end{aligned}\right.$$

und

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{\left(1 + \frac{p}{V^2}\frac{d\xi'}{d\tau}\right)^2}\,\frac{d^2\xi'}{d\tau^2}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{1}{\beta^2}\,\frac{1}{\left(1 + \frac{p}{V^2}\frac{d\xi'}{d\tau}\right)^2}\,\frac{d^2\eta'}{d\tau^2}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{1}{\beta^2}\,\frac{1}{\left(1 + \frac{p}{V^2}\frac{d\xi'}{d\tau}\right)^2}\,\frac{d^2\xi'}{d\tau^2}. \end{aligned}\right.$$

Außerdem gelten die Beziehungen

$$(15)\quad \frac{d\tau}{dt} = \beta\left(1 - \frac{p}{V^2}\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1 + \frac{p}{V^2}\frac{d\xi'}{d\tau}},$$

$$(16)\quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\beta\left(1 - \frac{p}{V^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \beta\left(1 + \frac{p}{V^2}\frac{d\xi'}{d\tau}\right).$$

Mit Hilfe der Gleichungen (11) gehen die Bewegungsgleichungen (5′) über in

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \mu\frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon\beta\left(1 - \frac{p}{V^2}\frac{dx}{dt}\right)^2\mathfrak{E}'_{\xi'}, \\ \mu\frac{d^2y}{dt^2} &= \varepsilon\beta^2\left(1 - \frac{p}{V^2}\frac{dx}{dt}\right)^2\mathfrak{E}'_{\eta'}, \\ \mu\frac{d^2z}{dt^2} &= \varepsilon\beta^2\left(1 - \frac{p}{V^2}\frac{dx}{dt}\right)^2\mathfrak{E}'_{\zeta'}. \end{aligned}\right.$$

Wenn nun im absoluten System doch die Gleichungen (5) bestehen sollen, würde man

$$\beta\left(1-\frac{p}{V^2}\frac{dx}{dt}\right)^2 \mathfrak{E}'_{\xi'} = \mathfrak{E}_x\,, \quad \beta^2\left(1-\frac{p}{V^2}\frac{dx}{dt}\right)^2 \mathfrak{E}'_{\eta'} = \mathfrak{E}_y\,, \quad \beta^2\left(1-\frac{p}{V^2}\frac{dx}{dt}\right)^2 \mathfrak{E}'_{\zeta'} = \mathfrak{E}_z$$

zu setzen haben. Aber dann verwickelt man sich in die größten Widersprüche, aus denen ich keinen Ausweg sehe. Einstein hat sich darüber nicht ausgesprochen. Ohne Zwischenrechnung gibt er an Stelle der Gleichungen (17) die Beziehungen

$$(17')\qquad \begin{cases} \mu\beta^3 \dfrac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon\,\mathfrak{E}'_{\xi'} = \varepsilon\,\mathfrak{E}_x\,, \\[2ex] \mu\beta^2 \dfrac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon\,\mathfrak{E}'_{\eta'} = \varepsilon\beta\left(\mathfrak{E}_y - \dfrac{p}{V}\mathfrak{H}_z\right), \\[2ex] \mu\beta^2 \dfrac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon\,\mathfrak{E}'_{\zeta'} = \varepsilon\beta\left(\mathfrak{E}_z + \dfrac{p}{V}\mathfrak{H}_y\right). \end{cases}$$

Sie folgen aus den Gleichungen (17), wenn man $\frac{dx}{dt} = p$ setzt, d. h. Bewegungen betrachtet, die für die Berechnung der Korrektionsglieder als nur in Richtung der y-, z-Achse variabel angesehen werden. Und ihre Bedeutung ist zusammengesetzt. Denn da die Größen links nur eine mathematische Umrechnung gegen die Größen links in (5′) bedeuten, während die Größen rechts ganz ungeändert stehen, so würden diese Gleichungen für einen Beobachter gelten, der sich mit dem Elektron bewegt, gleichwohl aber alle auf die Bewegung sich beziehenden Messungen in absoluten Größen x, y, z, t ausführt. Einstein hebt selbst hervor, daß $\mathfrak{E}'$ „mit einer im bewegten System ruhenden Federwage gemessen werden könnten, während die Beschleunigungen im ruhenden System gemessen werden sollen". Es ist eine ähnliche Zweispältigkeit wie im Additionstheorem, und man hat Schwierigkeiten, zu einer Vorstellung zu gelangen, da der Beobachter nach zwei Seiten wirken soll: sich mitbewegend für die Messung der Kräfte, ruhend für die Messung der Bewegung. Aber zu einem befriedigenden Gleichungssystem für den ruhenden Beboachter überhaupt kommt man über das Gleichungssystem (5′) eben nicht. Hier hat erst Minkowskis Theorie alles geschaffen.

Nun setzt Einstein die Beziehung an

(18) „Massenzahl × Beschleunigungszahl = Kraftzahl".

Da er als Kraftzahlen die $\mathfrak{E}'_{\xi'}$, $\mathfrak{E}'_{\eta'}$, $\mathfrak{E}'_{\zeta'}$ ansieht, muß er in seinen Gleichungen (17′) $\mu\beta^3$, $\mu\beta^2$, $\mu\beta^2$ als Massen deuten, und so gewinnt er die Feststellungen

$$(19)\qquad \text{Longitudinale Masse} = \mu\beta^3 = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\right)^3}\,,$$

$$(20)\qquad \text{Transversale Masse} = \mu\beta^2 = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\right)^2}\,.$$

Die Unterscheidung zwischen diesen beiden Massen ist aus der Elektronentheorie bekannt, und auch die Feststellungen für sie stimmen mit denen für diese Theorie bis zu einem gewissen Grade. Ob man in der Elektronentheorie mit Recht diese Unterscheidung macht, ist eine Frage, deren Untersuchung nicht hierher gehört.

An dieser Stelle aber fragt man unwillkürlich, wie denn nun die Messung der Massen stattfinden soll, denn da in der aus (18) sich ergebenden Formel

$$\text{Massenzahl} = \frac{\text{Kraftzahl}}{\text{Beschleunigungszahl}} \tag{21}$$

der Zähler im bewegten, der Nenner im ruhenden System zu messen ist, so gewinnt dadurch die Masse eine Bedeutung, die sie weder auf das eine, noch auf das andere System zu beziehen gestattet, die die Masse wie zwischen beiden Systemen schwebend ansieht, und auch jede Messung überhaupt ausschließt, weil der Beobachter nicht zugleich beiden Systemen angehören kann, was für diese Messung durchaus erforderlich wäre. Nur die longitudinale Masse würde sich allenfalls bestimmen lassen, weil hier $\mathfrak{E}'_{\xi'} = \mathfrak{E}_x$ ist, der ruhende Beobachter also die gleiche Kraft mißt wie der bewegte. Damit wäre dann freilich ausgesprochen, daß die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik überhaupt unzutreffend sind, denn auch sie müßten deshalb für die longitudinale Bewegung $\mu\beta^3$ statt μ als Massenfaktor enthalten.

Die kinetische Energie des Elektrons wird für den Fall berechnet, daß die Bewegung des Elektrons längs der x-Achse erfolgt, von 0 beginnend, bis p ansteigend. Darum setzt Einstein den Energiesatz, indem von aller Zerstreuung durch Strahlung abgesehen wird, in der Form

$$K = \mu \int \beta^3 p\, dp\,. \tag{22_1}$$

β ist immer als Konstante behandelt worden, ebenso p, sonst würden die Transformationen ganz anders ausfallen, als angenommen. Hier jedoch betrachtet Einstein wohl die Formel für die longitudinale Masse als absolut, nimmt p als variabel und findet so

$$K = \mu \int_0^p \frac{p\, dp}{\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\right)^3} = \mu V^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}} - 1\right). \tag{22_2}$$

Diese Formel ist von Minkowski bestätigt (S. 352), aber auf ganz anderen Grundlagen. Sonst möchte man nach den Formeln (17) so rechnen. Man läßt das Elektron mit der relativen Geschwindigkeit $-p$ beginnen und mit der relativen Geschwindigkeit 0 enden, dann geht seine absolute Geschwindigkeit g von 0 bis p wie bei Einstein. Man hat aber zufolge der obigen Gleichungen für die erworbene kinetische Energie, die longitudinal wäre,

$$K = \mu \frac{1}{\beta} \int_0^p \frac{g\, dg}{\left(1 - \frac{p}{V^2} g\right)^2},$$

woraus folgt

$$K = \frac{\mu V^2}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}} \left\{1 + \frac{V^2}{p^2}\left(1 - \frac{p^2}{V^2}\right) \log\left(1 - \frac{p^2}{V^2}\right)\right\}. \tag{22'a}$$

ein Ausdruck, der von dem Einsteinschen, für andere Verhältnisse berechneten, durchaus abweicht. Hätten wir die relative Geschwindigkeit mit $-2p$ beginnen und mit $-p$ enden lassen, so daß die absolute Geschwindigkeit von $-p$ bis 0 ginge, so wäre

$$(22'b)\quad K' = \mu \frac{1}{\beta}\int_0^{-p} \frac{g\,dg}{\left(1 - \frac{pg}{V^2}\right)^2} = \mu \frac{V^2}{\sqrt{1+\frac{p^2}{V^2}}}\left\{-1 + \frac{V^2}{p^2}\left(1+\frac{p^2}{V^2}\right)\log\left(1+\frac{p^2}{V^2}\right)\right\}\sqrt{\frac{1-\frac{p^2}{V^2}}{1+\frac{p^2}{V^2}}}.$$

Bei gleichem Anfang und gleichem Ende wäre so die lebendige Kraft für Vorwärtsbewegung eine andere als für Rückwärtsbewegung. Für Vorwärtsbewegung wäre sie bei Lichtgeschwindigkeit unendlich, für Rückwärtsbewegung Null. Und was bedeutet das?

Geht man nicht von der absoluten Geschwindigkeit 0, sondern von der beliebigen p_0 aus, so wird die Einsteinsche Formel

$$(22_3)\qquad W = \mu V^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{p_0^2}{V^2}}}\right).$$

In einer späteren Abhandlung[1]) bestimmt Einstein die Energie durch

$$(22_4)\qquad K = \mu V^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}.$$

Dazu müßte an sich $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p_0^2}{V^2}}} = 0$ sein, was auf keine Weise zu erreichen ist.

Er braucht sie im Grunde, um den Körpern im Ruhezustand die Energie μV^2 zuschreiben zu können[2]). Die anderen Formeln ergeben als Zusatzglieder

$$\frac{\mu\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}{1-\frac{p\,p_0}{V^2}}\left\{+\frac{p_0}{p} + \frac{V^2}{p^2}\left(1-\frac{p\,p_0}{V^2}\right)\log\left(1-\frac{p\,p_0}{V^2}\right)\right\}V^2,$$

$$\frac{\mu\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}{1+\frac{p\,p_0}{V^2}}\left\{-\frac{p_0}{p} + \frac{V^2}{p^2}\left(1+\frac{p\,p_0}{V^2}\right)\log\left(1+\frac{p\,p_0}{V^2}\right)\right\}V^2.$$

---

1) Einstein, Annalen d. Physik u. Chemie **23**, 371 ff. (1907).

2) Da in der Formel (22_3) die Größe $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p_0^2}{V^2}}}$ niemals Null sein kann, muß Einstein sich zu dieser Konstante noch eine andere Konstante hinzugefügt denken, genommen von der potentiellen Energie. Alsdann freilich gewinnt die als kinetische Energie bezeichnete Größe $\mu V^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}$ eine komplizierte Bedeutung, und sie gilt also dann nicht für eine Geschwindigkeit, die, mit 0 beginnend, zu p ansteigt, sondern für eine

Diese Größen sind Null, außer für $p = 0$, $p_0 < 0$, wenn

$$p_0 = -\frac{V^2}{p}\left(1 - \frac{p\,p_0}{V^2}\right)\log\left(1 - \frac{p\,p_0}{V^2}\right),$$

$$p_0 = +\frac{V^2}{p}\left(1 + \frac{p\,p_0}{V^2}\right)\log\left(1 + \frac{p\,p_0}{V^2}\right)$$

ist. Die Gleichungen sind transzendent, es lohnt nicht, zu untersuchen, ob sie eine reelle Lösung haben

Trotz dieser vielen und schweren Bedenken muß Einsteins Theorie wegen des außerordentlichen Einflusses, den sie ausgeübt hat und noch ausübt, weiter verfolgt werden.

Er bemerkt in der späteren Arbeit selbst, daß seine bisher angegebenen Formeln nur gelten, wenn andere Kräfte als die aus der Bewegung des Elektrons selbst hervorgehenden nicht vorhanden sind, und daß insbesondere seine obige Formel für die kinetische Energie, schon wenn äußere Kräfte wirken, die sich das Gleichgewicht halten, nicht mehr gilt. Hat z. B. der sich bewegende Massenpunkt eine elektrostatische Energie (im Ruhezustande) vom Betrage E_s, so soll der Faktor μ um $\frac{E_s}{V^2}$ zu vermehren sein.

Bewegt sich der Massenpunkt nicht parallel der x-Achse, sondern in einer gegen diese um φ geneigten Richtung, und bedeutet dann q seine relative Geschwindigkeit in dieser Richtung, so soll sein

$$K = \mu V^2 \frac{1 + \frac{p\,q\cos\varphi}{V^2}}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}\sqrt{1 - \frac{q^2}{V^2}}}. \tag{23}$$

Für eine beliebige Zahl von Massenpunkten, die sich nach beliebigen Richtungen mit beliebigen relativen Geschwindigkeiten bewegen, erhält man hieraus (unter der Annahme, daß auch jetzt Energien addiert werden dürfen)

$$\sum K = \frac{V^2}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}}\left\{\sum \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{V^2}}} + \frac{1}{V^2}\sum \frac{\mu\,p\,q\cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{V^2}}}\right\}. \tag{24}$$

Einstein wendet die Formel auf einen solchen Bewegungszustand an, daß

$$\sum \frac{\mu\,q_{\xi'}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{V^2}}} = \sum \frac{\mu\,q_{\eta'}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{V^2}}} = \sum \frac{\mu\,q_{\zeta'}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{V^2}}} = 0. \tag{25}$$

Geschwindigkeit, die von einem Wert, der sich durch die Konstante K_0 der potentiellen Energie vermittels der Beziehung

$$K_0 = \frac{\mu V^2}{\sqrt{1 - \frac{p_0^2}{V^2}}}$$

bestimmt, anhebt und bis p steigt. Der „Ruhezustand", in dem die Energie μV^2 sein soll, hätte dann seine Bedeutung von der potentiellen Energie zu nehmen. Ich weiß nicht, ob das Einsteins Meinung ist.

ist. Entsprechend der klassischen Mechanik, wo der Nenner fehlen würde, hätte das zu bedeuten, daß das gesamte System kein relatives Bewegungsmoment besitzt. Dann bleibt

$$\sum K = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\sum\frac{\mu V^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{V^2}}} = \frac{\overline{E}}{V^2}\frac{V^2}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}, \tag{26}$$

wo $\overline{E}$ die relative Energie

$$\overline{E} = \sum\frac{\mu V^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{V^2}}} \tag{27}$$

angibt. Die Vergleichung mit Formel (22_4) ergibt für diesen Fall eine Energie des Gesamtsystems, die gleich ist der Energie eines einzelnen Massenpunktes von der Masse $\overline{E}/V^2$, wo nun $\overline{E}$ als innere Energie des Systems bezeichnet werden kann. Hiernach ist $\overline{E}/V^2$ Trägheitsfaktor, und da $\overline{E}$ eine Energie bedeutet, wird davon gesprochen, daß jede Energie eine Trägheit besitze, welche den $1/V^2$ Teil ihres Betrages als Energie ausmacht, die nicht bloß Bedeutung für den behandelten besonderen Fall besitzt, sondern allgemeine. So ist schon erwähnt, daß im Falle eines geladenen Massenpunktes dessen Trägheit sich um die Größe E_s/V^2 vermehrt, wo E_s die elektrostatische Energie der Ladung angibt, und Entsprechendes findet statt, wie erwiesen wird, im Falle der Strahlung. Hiernach kann man auch sagen, daß die Trägheit eines Körpers wächst mit Zunahme seines Energieinhalts, und zwar wie das Verhältnis dieser Zunahme zum Quadrat der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Aus ganz anderen Betrachtungen ist Max Planck zu ähnlichen Ergebnissen gelangt (S. 341).

Unabhängig vom Relativitätsprinzip benutzt Einstein[1]) die Lorentzsche Form der Maxwellschen Gleichungen im Vakuum, um die Frage der Abhängigkeit der Masse vom Energieinhalt und die der Geltung des Schwerpunktssatzes der Mechanik noch weiter zu klären. Eine beliebige Zahl von Körpern mögen sich bewegen und seien mit Ladungen versehen. Die Lorentzschen Gleichungen, die dann gelten sollen, schreibt Einstein in der Form

$$+C_0 \operatorname{curl}\mathfrak{H} = \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\varrho g, \quad -C_0\operatorname{curl}\mathfrak{E} = \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}.$$

Multipliziert man diese je drei Gleichungen mit $\frac{1}{4\pi}$ und mit $x\mathfrak{E}_x$, $x\mathfrak{E}_y$, $x\mathfrak{E}_z$, $x\mathfrak{H}_x$, $x\mathfrak{H}_y$, $x\mathfrak{H}_z$, addiert alles und integriert über einen Raum, der jedenfalls alle geladenen Körper umfaßt, so folgt

$$(28_1)\left\{\begin{aligned}&\iiint\varrho x(g_x\mathfrak{E}_x+g_y\mathfrak{E}_y+g_z\mathfrak{E}_z)\,d\tau+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iiint x(\mathfrak{E}_x^2+\mathfrak{E}_y^2+\mathfrak{E}_z^2+\mathfrak{H}_x^2+\mathfrak{H}_y^2+\mathfrak{H}_z^2)\,d\tau\\&=\frac{C_0}{4\pi}\iiint x\Big\{\mathfrak{E}_x\Big(\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial z}\Big)-\mathfrak{H}_x\Big(\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial z}\Big)+\mathfrak{E}_y\Big(\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial x}\Big)\\&\qquad-\mathfrak{H}_y\Big(\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}\Big)+\mathfrak{E}_z\Big(\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial y}\Big)-\mathfrak{H}_z\Big(\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}\Big)\Big\}\,d\tau\\&=\frac{C_0}{4\pi}\iiint x\Big(\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y-\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z)+\frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_z-\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_x)+\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_x-\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_y)\Big)\,d\tau.\end{aligned}\right.$$

[1]) Einstein, Annalen d. Physik u. Chemie 20, 627f. (1906).

Die partielle Integration gibt

$$\iiint x \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z)\,d\tau = \iint x(\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z)\cos(n,x)\,dS - \iiint(\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z)\,d\tau\,,$$

$$\iiint x \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_x)\,d\tau = \iint x(\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_x)\cos(n,y)\,dS\,,$$

$$\iiint x \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_y)\,d\tau = \iint x(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_y)\cos(n,z)\,dS\,,$$

wo S die Oberfläche des Raumes, über den integriert werden sollte, bezeichnet und n die Normale bedeutet. Der Integrationsraum umfaßt die Umgebung der geladenen Körper und den Raum dieser Körper selbst, da im Sinne der Lorentzschen Theorie auch der letztere Raum vom Äther erfüllt ist und alle Größen beim Durchgang von der Umgebung in das Innere der Körper sich stetig ändern sollen; selbst der Größe ϱ wird stetige Änderung zugeschrieben. Hiernach umschließt S auch die geladenen Körper. Wir haben aber nunmehr, vektoriell geschrieben,

$$\iiint x\,\mathrm{div}[\mathfrak{H}\,\mathfrak{E}]\,d\tau = \iint x[\mathfrak{H}\,\mathfrak{E}]_n\,dS - \iiint[\mathfrak{H}\,\mathfrak{E}]_x\,d\tau\,.$$

Das erste Flächenintegral hat Einstein fortgelassen, indem er über „den ganzen Raum" integrierte und so S in die Unendlichkeit rückte. Es sind dann an S freilich die $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ als gleich Null anzusehen, aber ob gleichwohl das Außenintegral Null ist, kann zweifelhaft erscheinen. Auf die folgenden Betrachtungen hat das keinen Einfluß, es entfallen nur Konstanten, deren Dasein oder Nichtdasein die zu ziehenden Schlüsse nicht berührt. Wir behalten also mit Einstein die Gleichung

$$(28_2') \quad \left\{ \begin{aligned} &\iiint x\,\varrho(g_x\mathfrak{E}_x + g_y\mathfrak{E}_y + g_z\mathfrak{E}_z)\,d\tau + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iiint x(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\,d\tau \\ &\qquad = -\frac{C_0}{4\pi}\iiint(\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z)\,d\tau\,. \end{aligned}\right.$$

Für das rechtsstehende Integral wird nun noch ein anderer Ausdruck ermittelt. Multipliziert man nämlich die zweite, dritte, fünfte und sechste der Maxwell-Lorentzschen Gleichungen mit $+\mathfrak{H}_z$, $-\mathfrak{H}_y$, $-\mathfrak{E}_z + \mathfrak{E}_y$, addiert alles und integriert, so folgt

$$\iiint 4\pi\varrho(g_y\mathfrak{H}_z - g_z\mathfrak{H}_y)\,d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\iiint(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y)\,d\tau$$

$$= C_0\iiint\left\{\mathfrak{H}_z\left(\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial x}\right) - \mathfrak{H}_y\left(\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial y}\right) + \mathfrak{E}_z\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}\right) - \mathfrak{E}_y\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}\right)\right\}d\tau\,,$$

Da unter den gleichen Bedingungen

$$\iiint\mathfrak{H}_z\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial z}\,d\tau = -\iiint\mathfrak{H}_x\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial z}\,d\tau \quad \text{usf.}$$

ist, so geht das Integral in der zweiten Zeile über in

$$-C_0\iiint\left\{\mathfrak{H}_x\left(\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial z} + \frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial y}\right) + \mathfrak{E}_x\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial z} + \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{H}_z^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2 + \mathfrak{E}_y^2)\right\}d\tau\,.$$

und wegen $\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0$, $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 4\pi\varrho$ in

$$+ C_0 \iiint \left\{ \mathfrak{H}_z \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} - 4\pi\varrho\mathfrak{E}_x - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{E}^2 - \mathfrak{E}_x^2) \right\} d\tau$$

$$= -C_0 \iiint \left(4\pi\varrho\mathfrak{E}_x + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{E}_x^2) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{E}^2) \right) d\tau = -4\pi\varrho C_0 \iiint \varrho \mathfrak{E}_x d\tau ,$$

letzteres, weil

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x}[2(\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{E}_x^2) + \mathfrak{H}^2 + \mathfrak{E}^2]\, d\tau = \iint [2(\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{E}_x^2) + \mathfrak{H}^2 + \mathfrak{E}^2]\, dS = 0$$

ist. So bekommt man

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint (\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y)\, d\tau = -4\pi \iiint \varrho (C_0 \mathfrak{E}_x + g_y \mathfrak{H}_z - g_z \mathfrak{H}_y)\, d\tau = -4\pi C_0 \mathfrak{F}_x ,$$

wo $\mathfrak{F}_x$ nach Maxwell die elektromotorische Kraftwirkung des ganzen elektromagnetischen Feldes in Richtung der x-Achse bedeutet, und

$$\iiint (\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y)\, d\tau = -4\pi C_0 \int \mathfrak{F}_x dt . \tag{29}$$

Hiernach haben wir, da dieselben Reduktionen auch für die anderen Koordinaten gelten

$$\iiint u\varrho(g_x\mathfrak{E}_x + g_y\mathfrak{E}_y + g_z\mathfrak{E}_z)\, d\tau + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iiint u(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\, d\tau = -C_0^2 \int \mathfrak{F}_u dt , \quad u = x, y, z. \tag{28_1}$$

In der klassischen Mechanik ist für das System der geladenen Körper (für Elektrizitätseinheit)

$$\mathfrak{F}_u = \sum \mathfrak{m}\frac{d^2 u}{dt^2} , \quad \int \mathfrak{F}_u dt = \sum \mathfrak{m}\frac{du}{dt} + \text{Konst.},$$

somit

$$\left\{ \begin{aligned} &\iiint u\varrho(g_x\mathfrak{E}_x + g_y\mathfrak{E}_y + g_z\mathfrak{E}_z) d\tau + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial \tau}\iiint u(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) d\tau \\ &\qquad + C_0^2 \sum \mathfrak{m}\frac{du}{dt} + C'_u = 0 , \end{aligned} \right. \tag{28_2}$$

wo C'_u eine Konstante bedeutet. Wir setzen

$$\varrho(g_x\mathfrak{E}_x + g_y\mathfrak{E}_y + g_z\mathfrak{E}_z) = V^2\varrho_K , \quad \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) = V^2\varrho_F ,$$

woselbst ϱ_K die an die Körper gebundene Energiedichte aus dem Konvektionsstrom, ϱ_F die Energiedichte des Feldes angibt. Machen wir noch $V = C_0$ und schreiben für $-\frac{C'_u}{V^2}$ einfacher C_u, so wird, da

$$\sum \mathfrak{m}\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\sum \mathfrak{m}u = M\frac{du_0}{dt}$$

ist, wo u_0 die Koordinaten des Schwerpunktes der Ladungsträger und M ihre Gesamtmasse darstellt,

$$M\frac{du_0}{dt} = C_u - \iiint u\varrho_K d\tau - \frac{\partial}{\partial t}\iiint u\varrho_F d\tau . \tag{28_3}$$

Hat man nun alle Kräfte insgesamt als innere Kräfte zu betrachten, so sollte nach dem Schwerpunktssatz $M\frac{du_0}{dt}$ eine Konstante sein. Der obigen Gleichung zufolge könnte das nur zutreffen, wenn $\iiint u\varrho_K d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\iiint u\varrho_F d\tau$ in bezug auf die Zeit konstant ist. Da das im allgemeinen nicht sein kann, widerspricht die obige Gleichung der klassischen Mechanik. Der Grund liegt darin, daß die Lorentzsche Theorie, wie Poincaré nachgewiesen hat, nicht dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung mit Gegenwirkung gehorcht. Man erkennt das schon daraus, daß nach Lorentz' Annahme zwar der Äther auf die Bewegung der geladenen Körper einwirken soll, diese aber den Äther nicht sollen in Bewegung setzen können (S. 234). Lorentz' Elektrodynamik ist eben mit der klassischen Mechanik, die mit auf dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung beruht, nicht vereinbar. Außerdem ergeben sich die angenommenen Grundformeln aus Lorentz' Theorie nur für sich bewegende Elektronen.

Einstein behandelt nun die Gleichungen nach seiner Anschauung von der Masse. Er bemerkt, daß, da $V^2\varrho_K d\tau$ die Energie bedeutet, welche das Volumenelement $d\tau$ erhält, weil es geladen sich bewegt, nach seiner Theorie sie gleich $V^2\frac{\partial\, d\mathfrak{m}}{\partial t}$ sein muß, wenn $d\mathfrak{m}$ die zu $d\tau$ gehörige ponderable Masse bedeutet. Hiernach würde sein

$$V^2\iiint u\,\varrho_K\,d\tau = V^2\sum u\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial t}, \tag{30}$$

wo die Summe sich über alle Massen erstreckt, die geladen sind und sich bewegen. Also folgt

$$\sum u\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint u\,\varrho_F\,d\tau + \int\mathfrak{F}_u\,dt = 0\,. \tag{31}$$

Hängen die Massen von der Veränderung der Energie ab, so hat man zwar nicht mehr

$$\int\mathfrak{F}_u\,dt = \int\frac{\partial}{\partial t}\sum\mathfrak{m}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt = \sum\mathfrak{m}\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Konst.};$$

aber es kann die Abweichung nur von der zweiten Ordnung der Geschwindigkeit sein, denn es ist

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathfrak{m}\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \mathfrak{m}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial t},$$

also nach der Definition von $\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial t}$

$$\Delta = \frac{1}{V^2}\frac{\partial u}{\partial t}(g_x\mathfrak{E}_x + g_y\mathfrak{E}_y + g_z\mathfrak{E}_z)\,\varrho\,.$$

Bei nicht zu erheblichen Geschwindigkeiten kann man so immer noch von der Formel Gebrauch machen und bekommt aus (31)

$$\sum\frac{\partial(\mathfrak{m}u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint u\,\varrho_F\,d\tau = \text{Konst.} \tag{32_1}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma\mathfrak{m}\,u + \iiint u\,\varrho_F\,d\tau\right) = \text{Konst.} \tag{32_2}$$

Wie in der klassischen Mechanik werden nun die Größen

$$
(33) \qquad \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\Sigma \mathfrak{m} x + \iiint x \varrho_F d\tau}{\Sigma \mathfrak{m} + \iiint \varrho_F d\tau}, \\[2ex] \bar{y} = \dfrac{\Sigma \mathfrak{m} y + \iiint y \varrho_F d\tau}{\Sigma \mathfrak{m} + \iiint \varrho_F d\tau}, \\[2ex] \bar{z} = \dfrac{\Sigma \mathfrak{m} z + \iiint z \varrho_F d\tau}{\Sigma \mathfrak{m} + \iiint \varrho_F d\tau} \end{cases}
$$

als Schwerpunktkoordinaten der Massen $\mathfrak{m}$ und der elektromagnetischen Energiemassen $\varrho_F d\tau$ bezeichnet.

Multipliziert man jetzt die Lorentzschen Gleichungen mit $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$; $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$, addiert alles und integriert über den ganzen Raum, so folgt

$$
\iiint \varrho (g_x \mathfrak{E}_x + g_y \mathfrak{E}_y + g_z \mathfrak{E}_z) d\tau + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \iiint (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) d\tau
$$

$$
= \frac{C_0}{4\pi} \iiint \left(\frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y) \right) d\tau
$$

$$
= \frac{C_0}{4\pi} \iint ((\mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z) \cos(n, x) + (\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_x) \cos(n, y)
$$

$$
+ (\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y) \cos(n, z)) dS .
$$

Also

$$
V^2 \frac{\partial \Sigma \mathfrak{m}}{\partial t} + V^2 \frac{\partial}{\partial t} \iiint \varrho_F d\tau = \frac{C_0}{4\pi} \iint [\mathfrak{H}\mathfrak{E}]_n dS
$$

oder

$$
V^2 \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma \mathfrak{m} + \iiint \varrho_F d\tau) = \frac{C_0}{4\pi} \iint [\mathfrak{H}\mathfrak{E}]_n dS ,
$$

d. h.

$$
(34) \qquad \sum \mathfrak{m} + \iiint \varrho_F d\tau = \text{Konst.} + \frac{C_0}{4\pi V^2} \int dt \iint [\mathfrak{H}\mathfrak{E}]_n dS .
$$

Läßt man mit Einstein das Flächenintegral wieder fort, was aber hier nicht bedeutungslos ist, so zeigt sich, daß $\Sigma \mathfrak{m} + \iiint \varrho_F d\tau$ jedenfalls von der Zeit unabhängig ist. Demnach haben wir nach (32_2) und (33)

$$
(35) \qquad \frac{d\bar{x}}{dt} = \text{Konst.}, \qquad \frac{d\bar{y}}{dt} = \text{Konst.}, \qquad \frac{d\bar{z}}{dt} = \text{Konst.},
$$

Gleichungen, die den Schwerpunktssatz für die Ladungen tragenden ponderablen Massen zusammen mit den Energiemassen aussprechen, wenn von Größen zweiter Ordnung abgesehen wird.

Aus solchen Betrachtungen aber zu schließen, daß man „entweder auf den Grundsatz der Mechanik, nach welchem ein ursprünglich ruhender, äußeren Kräften nicht unterworfener Körper keine Translationsbewegung ausführen kann, verzichten, oder annehmen muß, daß die Trägheit eines Körpers nach dem angegebenen Gesetze von dessen Energieinhalt abhänge", scheint mir doch zu weit zu gehen. Es handelt sich nur um einen Schluß aus der Lorentzschen Elektrodynamik. Und man wird nur dazu geführt, daß in dieser Theorie elektromagnetische Energie dividiert durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit als Masse behandelt werden kann, und daß diese Masse zusammen mit der gewöhnlichen

Masse im Lorentzschen Felde konstant sein muß, wenn der auf beide Massen bezogene Schwerpunktssatz in diesem Felde Geltung haben soll. Das hat mit der Mechanik nichts zu tun.

Zwei neueste Arbeiten Einsteins auf dem Gebiete der Relativitätsmechanik werden wir später kennen lernen, da Max Abraham für ihren Inhalt eine einfachere und sicherere Ableitung gefunden hat. Am meisten Anklang aus Einsteins Mechanik hat sein Satz vom Zusammenhang der Masse mit der Energie gefunden, trotz der so außerordentlich unsichern und angreifbaren Begründung, und sein Additionstheorem, dem jedoch m. E. überhaupt keine Bedeutung zukommt.

b) Plancks Mechanik und Thermodynamik stationärer Systeme.

Max Planck[1]) verleiht dem Relativitätsprinzip folgenden mehr mathematischen Ausdruck. Hat man eine Funktion F von transformierten und nicht transformierten Größen $r, s', t', u, v, w', \ldots$, unter denen die $s', t', w', \ldots$ aus den $s, t, w, \ldots$ mit der Lorentz-Einsteinschen Transformation gewonnen sind, so soll die Form der Funktion erhalten bleiben, wenn man die nicht transformierten Größen durch ihre transformierten, die transformierten durch ihre nicht transformierten ersetzt. Also es soll $F(r, s', t', u, v, w', \ldots)$ eine Funktion derselben Form sein wie $F(r', s, t, u', v', w, \ldots)$.

Der genannte Forscher hat keine allgemeine Relativitätsmechanik begründen wollen, sondern nur eine solche für ein Punktsystem in einem stationären Zustande.

Dafür hat er aber den Fall, daß Temperatur, Druck und Dichte mitwirken, einbezogen, also die Mechanik mit der üblichen Thermodynamik nach Helmholtz' Vorgang vereinigt. Die Behandlung der Strahlung ist sein Werk.

Er geht von den Lagrangeschen Gleichungen in der von Helmholtz[2]) gewählten Form aus. Zunächst ist

$$Q = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q}, \qquad (1)$$

woselbst Q die das Punktsystem angreifenden Kräfte, q die Koordinaten, $\dot q = \frac{dq}{dt}$ deren Veränderung in der Zeiteinheit, T die kinetische Energie bedeuten. Gibt Φ die potentielle Energie des Systems, und bedeuten F die das System von außen angreifenden Kräfte, so daß

$$Q = \mathfrak{F} - \frac{\partial \Phi}{\partial q} \qquad (2)$$

ist, so wird

$$\mathfrak{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial (T - \Phi)}{\partial q}. \qquad (3_1)$$

Für den Fall, daß die innere potentielle Energie Φ nur von den Koordinaten q, nicht von der Zeit und den Geschwindigkeiten abhängt, kann man also auch schreiben

$$\mathfrak{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot q}(T - \Phi)\right) - \frac{\partial (T - \Phi)}{\partial q}. \qquad (3_2)$$

---

[1]) Planck, Annalen d. Physik u. Chemie **26**, 1 ff. (1908). Diese Arbeit ist nicht immer leicht zu verstehen, ich habe darum die fortgelassenen Zwischenrechnungen meist nachgeholt, wodurch freilich die Plancksche Eleganz Einbuße erleiden mußte.

[2]) Helmholtz, Ges. Abh. **3**, 127 ff. Die Zeichen sind wie bei Planck gewählt.

Setzt man jetzt

(4) $$T - \Phi = H,$$

so wird, und das ist die Helmholtzsche Form,

(5) $$\mathfrak{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial H}{\partial q}.$$

H stellt das thermokinetische Potential des Systems dar. In dem von Max Planck behandelten Problem soll $\frac{\partial H}{\partial q}$ entfallen. Ferner soll H nicht von den einzelnen $\dot{q}$, sondern für jeden Punkt von der Summe der ihm zugehörigen Quadrate der $\dot{q}$ abhängen. Außerdem wird H als Funktion der Temperatur ϑ und des spezifischen Volumens $\mathfrak{v}$ betrachtet. Es werden die gewöhnlichen Koordinaten gewählt. Setzt man

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z},$$

wo also H eine Funktion der $g^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, $\mathfrak{v}$, ϑ ist, so hat man

(6) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = \mathfrak{F}_x, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{y}} = \mathfrak{F}_y, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{z}} = \mathfrak{F}_z.$$

Die Bewegungsmomente sind

(7) $$\mathfrak{G}_x = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}, \quad \mathfrak{G}_y = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}, \quad \mathfrak{G}_z = \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}.$$

Weiter sei

$$\theta = \tfrac{1}{2}(\dot{x}\,\mathfrak{G}_x + \dot{y}\,\mathfrak{G}_y + \dot{z}\,\mathfrak{G}_z),$$

so wird hiernach

(8) $$\theta = \frac{1}{2} g \frac{\partial H}{\partial g}.$$

Es entspricht θ der lebendigen Kraft, und $\frac{\partial H}{\partial g}$ ist die resultierende Bewegungsgröße $\mathfrak{G}$ [1]), also

(9) $$\mathfrak{G} = \frac{\partial H}{\partial g}.$$

Ferner hat man

(10) $$\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}} = P,$$

(11) $$\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = S,$$

[1]) Es ist

$$\mathfrak{G}_x = \mathfrak{G}\frac{\dot{x}}{g}, \quad \mathfrak{G}_y = \mathfrak{G}\frac{\dot{y}}{g}, \quad \mathfrak{G}_z = \mathfrak{G}\frac{\dot{z}}{g},$$

somit

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_x\dot{x} + \mathfrak{G}_y\dot{y} + \mathfrak{G}_z\dot{z})\frac{1}{g} = \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\frac{\dot{x}}{g} + \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\frac{\dot{y}}{g} + \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\frac{\dot{z}}{g}\right)$$
$$= \frac{\partial H}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\frac{\dot{x}}{g} + \frac{\partial g}{\partial \dot{y}}\frac{\dot{y}}{g} + \frac{\partial g}{\partial \dot{z}}\frac{\dot{z}}{g}\right) = \frac{\partial H}{\partial g}.$$

wo P den Druck, S die Entropie des Systems bezeichnet. Die gesamte Energie des Systems wird

$$(12_1)\qquad E = \dot{x}\,\mathfrak{G}_x + \dot{y}\,\mathfrak{G}_y + \dot{z}\,\mathfrak{G}_z + \vartheta S - H\,,$$

oder

$$(12_2)\qquad E = g\frac{\partial H}{\partial g} + \vartheta\frac{\partial H}{\partial \vartheta} - H$$

und nach dem Energieprinzip soll sein

$$(13)\qquad dE = \mathfrak{F}_x\,dx + \mathfrak{F}_y\,dy + \mathfrak{F}_z\,dz - P\,d\mathfrak{v} + \vartheta\,dS\,.$$

Aus den Gleichungen (10) (S. 313) ergibt sich

$$g'^2 = \frac{d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2}{d\tau^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{p}{V^2}\frac{dx}{dt}\right)^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt} - p\right)^2 + \left(1 - \frac{p^2}{V^2}\right)\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{p}{V^2}\frac{dx}{dt}\right)^2}\left\{g^2\left(1 - \frac{p^2}{V^2}\right) + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{p^2}{V^2} - 2p\frac{dx}{dt} + p^2\right\}$$

oder

$$g'^2 = V^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{p}{V^2}\frac{dx}{dt}\right)^2}\left\{g^2\left(1 - \frac{p^2}{V^2}\right) - V^2 + p^2\right\},$$

d. h.

$$(14)\qquad g'^2 - V^2 = \frac{1 - \frac{p^2}{V^2}}{\left(1 - \frac{p}{V^2}\frac{dx}{dt}\right)^2}(g^2 - V^2)\,.$$

So finden sich die Planckschen Formeln

$$(15)\qquad \sqrt{\frac{V^2 - g'^2}{V^2 - g^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}}{1 - \frac{p}{V^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{1 + \frac{p}{V^2}\frac{d\xi'}{d\tau}}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}} = \frac{dt}{d\tau}\,,$$

die letzten beiden Darstellungen nach den Gleichungen (13), (16) auf S. 315

Die Volumenänderung beim Übergang von der Geschwindigkeit g zu der g' wird der Einsteinschen Theorie entsprechend jedoch verallgemeinert, auf beliebige Bewegungsrichtungen, angesetzt

$$(16)\qquad \frac{\mathfrak{v}'}{\mathfrak{v}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{g'^2}{V^2}}}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}}{1 - \frac{p}{V^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{1 + \frac{p}{V^2}\frac{d\xi'}{d\tau}}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}} = \frac{dt}{d\tau}\,.$$

Fassen wir nämlich g', g als zwei beliebige, im betrachteten Moment gleichförmige Geschwindigkeiten auf, so zieht sich nach Einsteins Theorie das System in Richtung der Geschwindigkeit g' im Verhältnis von $\sqrt{1-\frac{g'^2}{V^2}}$ zu 1, in Richtung der Geschwindigkeit g im Verhältnis von $\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}$ zu 1 zusammen, während seine Abmessungen senkrecht zu diesen Geschwindigkeitsrichtungen unverändert bleiben. Da das System für beide Geschwindigkeiten vom gleichen Zustand ausgeht, so stehen also die beiden Zusammenziehungen, d. h. hier die Volumina selbst, im Verhältnis der genannten Größen, wie in der Formel ausgedrückt. Die Bedenken gegen die Einsteinsche Berechnungsweise überhaupt sind S. 286 f. geltend gemacht.

Namentlich die letzte Darstellung ist von Interesse, denn sie besagt allgemein

$$d\xi'\,d\eta'\,d\zeta'\,d\tau = dx\,dy\,dz\,dt\,. \tag{17}$$

Diese Beziehung folgt aber aus Minkowskis Theorie unmittelbar. Nach einem bekannten Satz der analytischen Geometrie hat man nämlich

$$dx_1'\,dx_2'\,dx_3'\,dx_4' = \Delta\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,,$$

wo Δ die Funktionaldeterminante der x' mit Bezug auf die x ist. Diese ist aber lediglich die Determinante der α, und da diese Determinante 1 beträgt, wird

$$dx_1'\,dx_2'\,dx_3'\,dx_4' = dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,, \tag{18}$$

was das gleiche ist wie die obige Beziehung (17). Im Minkowskischen Raum-Zeit-Gebiet bleiben also beim Übergang von einem Bezugsystem auf ein anderes nicht bloß Weltlängen, sondern auch Welträume unverändert. Das spricht mehr an als der Einsteinsche Ansatz und läßt mehr das Mathematische hervortreten.

Bezieht sich $\mathfrak{v}^{(0)}$ auf absolute Ruhe, so ist nach

$$\frac{\mathfrak{v}'}{\sqrt{1-\frac{g'^2}{V^2}}} = \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}} = \mathfrak{v}^{(0)}\,. \tag{19}$$

Also allgemein

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}^{(0)}\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}\,. \tag{20}$$

Ebenso haben wir

$$\sqrt{1-\frac{g'^2}{V^2}}\,d\tau = \sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}\,dt = dt^{(0)}\,, \tag{21}$$

wo $dt^{(0)}$ für den Zustand absoluter Ruhe gelten soll.

Von der Entropie beweist Planck, daß der Übergang zum Relativsystem hier nichts ändert. Das Punktsystem besitze ruhend im Ruhesystem die Entropie S_1, im Relativsystem die S_1'. Wir führen es umkehrbar und adiabatisch in einen neuen Zustand über, in dem es im Relativsystem ruht, im ersten System sei dann seine Entropie S_2, im zweiten S_2'. Wir haben dann nach den Lehren der Thermodynamik

$$S_1 = S_2\,, \qquad S_1' = S_2'\,.$$

Wäre nun $S_1' > S_1$, so müßte hiernach auch $S_2' > S_2$ sein. Aber die erste Ungleichung würde besagen, daß die Entropie bei Bewegung gegen Ruhe, die zweite, daß sie bei Ruhe gegen Bewegung größer sei, was sich widerspricht. Die gleiche Schlußfolge gilt für den Fall $S_1' < S_1$. Also müssen wir haben

$$S' = S, \tag{22}$$

eine geistvolle Beweisführung, bei der jedoch die Voraussetzung, daß, wenn der Prozeß in einem System umkehrbar ist, er auch im zweiten System als umkehrbar angesehen werden darf, Bedenken erregt, da die beiden Systeme nicht voneinander unabhängig sind, sondern durch die eigenartigen Lorentz-Einsteinschen Gleichungen in Verbindung stehen. Findet aber mit der Umkehrbarkeit im ersten System Umkehrbarkeit auch im zweiten System statt, dann wäre $S_1' = S_2'$ nach dem Relativitätsprinzip eine Folge von $S_1 = S_2$.

Um für die Temperatur die Transformation auszuführen, werden folgende Überlegungen angestellt. Das Punktsystem gehe von der Ruhe im Ruhesystem umkehrbar und adiabatisch in die Bewegung $\dot{x} = p$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$ über und sein Volumen ändere sich dabei nach (20) von $\mathfrak{v}_1$ auf

$$\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_1 \sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}.$$

Wie früher hat man $S_2 = S_1$. Im Relativsystem ist dann nach (10) (S. 313) für den Endzustand im ersten System $\dot{x}_2' = 0$, $\dot{y}_2' = 0$, $\dot{z}_2 = 0$. Folglich dem Obigen zufolge $S_2' = S_2 = S_1$. Weiter haben wir nach (16) und (17)

$$\mathfrak{v}_2' = \mathfrak{v}_2 \frac{1 + \frac{p}{V^2}\dot{x}_2'}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}} = \mathfrak{v}_2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}} = \mathfrak{v}_1 .$$

Also folgt, daß in allen drei Beziehungen, Bewegung, Volumen, Entropie, der Endzustand im zweiten System übereinstimmt mit dem Anfangszustand im ersten System. Da nun jene Beziehungen genügen, den Zustand überhaupt zu bestimmen, so ergibt sich die Identität der beiden verglichenen Zustände, des Endzustandes im einen mit dem Anfangszustand im anderen System. Hat man nun eine beliebige Zahl von Körpern, die alle im Ruhezustand im ersten System gleiche Temperatur und gleichen Druck besitzen, so werden sie nach jenem Prozeß also im Endzustand im zweiten System abermals alle gleiche Temperatur und gleichen Druck aufweisen. Nun wird festgestellt, daß, wenn zwei Körper in einem System im thermischen und mechanischen Gleichgewicht sind, sie es auch in jedem anderen äquivalenten System sein müssen. Daraus folgt dann, daß die Körper im Endzustand auch im ersten System alle diese Temperatur und diesen Druck haben. Es genügt hiernach für den genannten Prozeß nur in einem Falle, für einen Körper, die Änderung der Temperatur und des Druckes zu bestimmen, um sie für alle Körper zu erhalten. Dieser Fall wird der schwarzen Hohlraumstrahlung entnommen und führt zu der Beziehung

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}, \tag{23}$$

$$P_2 = P_1 . \tag{24}$$

Wir haben aber $\vartheta_2' = \vartheta_1$, $P_2' = P_1$. Also folgt

$$\vartheta_2' = \frac{\vartheta_2}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}}, \tag{25}$$

$$P_2' = P \tag{26}$$

und allgemein

$$\frac{\vartheta'}{\sqrt{1 - \frac{g'^2}{V^2}}} = \frac{\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}}, \tag{27$_1$}$$

$$\frac{\vartheta'}{\vartheta} = \frac{\mathfrak{v}'}{\mathfrak{v}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{g'^2}{V^2}}{1 - \frac{g^2}{V^2}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}}{1 - \frac{p}{V^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{1 + \frac{p}{V^2}\frac{d\xi'}{d\tau}}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}} = \frac{dt}{d\tau}, \tag{27$_2$}$$

$$\vartheta = \vartheta^{(0)}\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}, \tag{28}$$

$$P' = P, \tag{29}$$

wo $\vartheta^{(0)}$ sich auf den Zustand absoluter Ruhe bezieht. Die Gleichungen gelten zunächst für den besonderen Prozeß. Da sich aber $P_2 = P_1$ ergeben hat, so kann die Volumenbedingung durch diese Druckbedingung ersetzt werden, und die Beziehungen bestehen für jeden umkehrbaren, adiabatischen, isopiestischen Vorgang. Und wenn die Ausführbarkeit eines solchen zugestanden wird, so gelten die Beziehungen überhaupt von Moment zu Moment.

Für die Transformation der Kräfte werden allgemeine Ansätze zunächst nur bei den transversalen Komponenten gemacht, und zwar nach einem elektrodynamischen Fall unter Anerkennung der Einsteinschen Berechnungen für diesen Fall. Wenn ein starres, nicht strahlendes Elektron mit der Ladung ε sich in einem elektromagnetischen Felde bewegt, so sind im System x, y, z die auf es wirkenden äußeren Kräfte

$$\left\{\begin{aligned} F_x &= \varepsilon\,\mathfrak{E}_x + \frac{\varepsilon}{V}(\dot y\,\mathfrak{H}_z - \dot z\,\mathfrak{H}_y), \\ F_y &= \varepsilon\,\mathfrak{E}_y + \frac{\varepsilon}{V}(\dot z\,\mathfrak{H}_x - \dot x\,\mathfrak{H}_z), \\ F_z &= \varepsilon\,\mathfrak{E}_z + \frac{\varepsilon}{V}(\dot x\,\mathfrak{H}_y - \dot y\,\mathfrak{H}_x). \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Entsprechend soll sein

$$\left\{\begin{aligned} F'_{\xi'} &= \varepsilon\,\mathfrak{E}'_{\xi'} + \frac{\varepsilon}{V}(\dot\eta'\,\mathfrak{H}'_{\zeta'} - \dot\zeta'\,\mathfrak{H}'_{\eta'}), \\ F'_{\eta'} &= \varepsilon\,\mathfrak{E}'_{\eta'} + \frac{\varepsilon}{V}(\dot\zeta'\,\mathfrak{H}'_{\xi'} - \dot\xi'\,\mathfrak{H}'_{\zeta'}), \\ F'_{\zeta'} &= \varepsilon\,\mathfrak{E}'_{\zeta'} + \frac{\varepsilon}{V}(\dot\xi'\,\mathfrak{H}'_{\eta'} - \dot\eta'\,\mathfrak{H}'_{\xi'}). \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Im System ξ', η', ζ' gelten für die $\mathfrak{E}', \mathfrak{H}'$ die S. 312 unter (6) mitgeteilten Formeln von Einstein. Benutzt man noch die Gleichungen (10) (S. 313) für $\dot\xi', \dot\eta', \dot\zeta'$ und die Formeln (15) (S. 326), so ergibt die Umrechnung für diesen Fall

$$(32)\quad \begin{cases} F'_{\xi'} = F_x - \dfrac{p}{V^2}\dfrac{1}{1-\dfrac{p}{V^2}\dot x}(\dot y F_y + \dot z F_z) = F_x - \dfrac{p}{V^2}\beta\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{g'^2}{V^2}}{1-\dfrac{g^2}{V^2}}}(\dot y F_y + \dot z F_z), \\ F'_{\eta'} = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{1}{1-\dfrac{p}{V^2}\dot x}F_y = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{g'^2}{V^2}}{1-\dfrac{g^2}{V^2}}}F_y, \\ F'_{\zeta'} = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{1}{1-\dfrac{p}{V^2}\dot x}F_z = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{g'^2}{V^2}}{1-\dfrac{g^2}{V^2}}}F_z. \end{cases}$$

Die Ausdrücke für $F'_{\eta'}, F'_{\zeta'}$ betrachtet Planck als überhaupt allgemein gültig, nimmt also ihnen entsprechend $\mathfrak{F}'_{\eta'}, \mathfrak{F}'_{\zeta'}$ an. Der Ausdruck für $F'_{\xi'}$ würde dann gleichfalls allgemeine Bedeutung haben, wenn weder Druck noch Entropie zeitliche Veränderungen erfahren.

Nach dem Relativitätsprinzip haben wir nun

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\partial H'}{\partial \dot\xi'} = \mathfrak{F}'_{\xi'}, \\ \dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\partial H'}{\partial \dot\eta'} = \mathfrak{F}'_{\eta'}, \\ \dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\partial H'}{\partial \dot\zeta'} = \mathfrak{F}'_{\zeta'}. \end{cases}$$

H' hängt ab von $\dot\xi', \dot\eta', \dot\zeta', \mathfrak{v}', \vartheta'$. Denken wir uns diese Größen durch ihre Werte in $\dot x, \dot y, \dot z, \mathfrak{v}, \vartheta$ ersetzt, so haben wir

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H'}{\partial \dot\xi'} = \dfrac{\partial H'}{\partial \dot x}\dfrac{\partial \dot x}{\partial \dot\xi'} + \dfrac{\partial H'}{\partial \dot y}\dfrac{\partial \dot y}{\partial \dot\xi'} + \dfrac{\partial H'}{\partial \dot z}\dfrac{\partial \dot z}{\partial \dot\xi'} + \dfrac{\partial H'}{\partial \mathfrak{v}}\dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \dot\xi'} + \dfrac{\partial H'}{\partial \vartheta}\dfrac{\partial \vartheta}{\partial \dot\xi'}, \\ \dfrac{\partial H'}{\partial \dot\eta'} = \dfrac{\partial H'}{\partial \dot x}\dfrac{\partial \dot x}{\partial \dot\eta'} + \dfrac{\partial H'}{\partial \dot y}\dfrac{\partial \dot y}{\partial \dot\eta'} + \dfrac{\partial H'}{\partial \dot z}\dfrac{\partial \dot z}{\partial \dot\eta'} + \dfrac{\partial H'}{\partial \mathfrak{v}}\dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \dot\eta'} + \dfrac{\partial H'}{\partial \vartheta}\dfrac{\partial \vartheta}{\partial \dot\eta'}, \\ \dfrac{\partial H'}{\partial \dot\zeta'} = \dfrac{\partial H'}{\partial \dot x}\dfrac{\partial \dot x}{\partial \dot\zeta'} + \dfrac{\partial H'}{\partial \dot y}\dfrac{\partial \dot y}{\partial \dot\zeta'} + \dfrac{\partial H'}{\partial \dot z}\dfrac{\partial \dot z}{\partial \dot\zeta'} + \dfrac{\partial H'}{\partial \mathfrak{v}}\dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \dot\zeta'} + \dfrac{\partial H'}{\partial \vartheta}\dfrac{\partial \vartheta}{\partial \dot\zeta'}. \end{cases}$$

Hierin ist nach den Gleichungen (13) auf S. 314 und (16) auf S. 326 mit

$$\Gamma = \sqrt{\frac{1-\dfrac{g'^2}{V^2}}{1-\dfrac{g^2}{V^2}}};$$

$$
(35)\quad\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\xi}'} &= \frac{1}{1+\frac{p}{V^2}\dot{\xi}'} - \frac{\dot{\xi}'+p}{\left(1+\frac{p}{V^2}\dot{\xi}'\right)^2}\frac{p}{V^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{1}{\left(1+\frac{p}{V^2}\dot{\xi}'\right)^2} = \frac{1}{\Gamma^2} = \frac{\left(1-\frac{p}{V^2}\dot{x}\right)^2}{1-\frac{p^2}{V^2}}\,,\\
\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\xi}'} &= -\frac{1}{\beta}\frac{p}{V^2}\frac{1}{\left(1+\frac{p}{V^2}\dot{\xi}'\right)^2}\dot{\eta}' = -\frac{1}{\beta^2}\frac{p}{V^2}\frac{1}{\left(1+\frac{p}{V^2}\dot{\xi}'\right)^2}\frac{\dot{y}}{1-\frac{p}{V^2}\dot{x}}\\
&= -\beta\frac{p}{V^2}\frac{1}{\Gamma}\dot{y} = -\frac{p}{V^2}\frac{1-\frac{p}{V^2}\dot{x}}{1-\frac{p^2}{V^2}}\dot{y}\,,\\
\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{\xi}'} &= -\frac{1}{\beta}\frac{p}{V^2}\frac{1}{\left(1+\frac{p}{V^2}\dot{\xi}'\right)^2}\dot{\zeta}' = -\frac{1}{\beta^2}\frac{p}{V^2}\frac{1}{\left(1+\frac{p}{V^2}\dot{\xi}'\right)^2}\frac{\dot{z}}{1-\frac{p}{V^2}\dot{x}}\\
&= -\beta\frac{p}{V^2}\frac{1}{\Gamma}\dot{z} = -\frac{p}{V^2}\frac{1-\frac{p}{V^2}\dot{x}}{1-\frac{p}{V^2}}\dot{z}\,;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(36)\qquad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\eta}'} = 0\,,\quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\eta}'} = \frac{1}{\beta}\frac{1}{1+\frac{p}{V^2}\dot{\xi}'} = \frac{1}{\Gamma} = \frac{1-\frac{p}{V^2}\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\,,\quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{\eta}'} = 0\,;
$$

$$
(37)\qquad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\zeta}'} = 0\,,\quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\zeta}'} = 0\,,\quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{\zeta}'} = \frac{1}{\beta}\frac{1}{1+\frac{p}{V^2}\dot{\xi}'} = \frac{1}{\Gamma} = \frac{1-\frac{p}{V^2}\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\,.
$$

Diese Formeln stimmen mit den von Planck gegebenen oder angewendeten überein. Für die weiteren Differentialquotienten finden sich bei diesem Forscher die Ansätze

$$
(38)\qquad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \dot{\xi}'} = -\frac{p}{V^2}\frac{1-\frac{p}{V^2}\dot{x}}{1-\frac{p^2}{V^2}}\mathfrak{v} = -\beta\frac{p}{V^2}\frac{1}{\Gamma}\mathfrak{v} = -\beta^2\frac{p}{V^2}\left(1-\frac{p}{V^2}\dot{x}\right)\mathfrak{v}\,,
$$

$$
(39)\qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial \dot{\xi}'} = -\frac{p}{V^2}\frac{1-\frac{p}{V^2}\dot{x}}{1-\frac{p^2}{V^2}}\vartheta = -\beta\frac{p}{V^2}\frac{1}{\Gamma}\vartheta = -\beta^2\frac{p}{V^2}\left(1-\frac{p}{V^2}\dot{x}\right)\vartheta\,.
$$

während

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \dot\eta'} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \dot\zeta'} = 0\,, \tag{40}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \dot\eta'} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \dot\zeta'} = 0 \tag{41}$$

gesetzt sind[1]).

Hiernach haben wir zunächst für die Transversalbewegung

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial H'}{\partial \dot\eta'} &= \sqrt{\frac{1-\frac{g^2}{V^2}}{1-\frac{g'^2}{V^2}}}\,\frac{\partial H'}{\partial \dot y}\,, \\ \frac{\partial H'}{\partial \dot\zeta'} &= \sqrt{\frac{1-\frac{g^2}{V^2}}{1-\frac{g'^2}{V^2}}}\,\frac{\partial H'}{\partial \dot z}\,. \end{aligned}\right. \tag{42}$$

---

[1]) Die Formeln für $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \dot\xi'}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial \dot\xi'}$ habe ich nicht wieder finden können. Sind sie aus den Beziehungen (20), (28) abgeleitet, so bekommt man z. B.

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \dot\xi'} = -\frac{\mathfrak{v}^{(0)}}{V}\frac{1}{\sqrt{V^2-g^2}}\,g\,\frac{\partial g}{\partial \dot\xi'} = -\frac{\mathfrak{v}^{(0)}}{V}\frac{1}{\sqrt{V^2-g^2}}\left(\dot x\frac{\partial \dot x}{\partial \dot\xi'} + \dot y\frac{\partial \dot y}{\partial \dot\xi'} + \dot z\frac{\partial \dot z}{\partial \dot\xi'}\right),$$

d. h. nach den im Text angegebenen Formeln

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \dot\xi'} &= -\frac{\mathfrak{v}^{(0)}}{V}\frac{1}{\sqrt{V^2-g^2}}\,\frac{\dot x(V^2-p\dot x)^2 - \dot y^2 p(V^2-p\dot x) - \dot z^2 p(V^2-p\dot x)}{V^2(V^2-p^2)} \\ &= -\frac{\mathfrak{v}^{(0)}}{V\sqrt{V^2-g^2}}\,\frac{(V^2-p\dot x)(V^2\dot x-p g^2)}{V^2(V^2-p^2)} = -\beta^2\,\frac{\left(1-\frac{p}{V^2}\dot x\right)\left(\dot x-\frac{p g}{V^2}g\right)}{V^2\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,\mathfrak{v}^{(0)} \\ &= -\beta^2\,\frac{\left(1-\frac{p}{V^2}\dot x\right)\left(\dot x-\frac{p g}{V^2}g\right)}{V^2\left(1-\frac{g^2}{V^2}\right)}\,\mathfrak{v} \end{aligned}$$

und ebenso

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \dot\xi'} = -\beta^2\,\frac{\left(1-\frac{p}{V^2}\dot x\right)\left(\dot x-\frac{p g}{V^2}g\right)}{V^2\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,\vartheta^{(0)} = -\beta^2\,\frac{\left(1-\frac{p}{V^2}\dot x\right)\left(\dot x-\frac{p g}{V^2}g\right)}{V^2\left(1-\frac{g^2}{V^2}\right)}\,\vartheta\,.$$

In derselben Rechnungsweise würde man finden

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \dot\eta'} = -\frac{\mathfrak{v}^{(0)}}{V}\frac{1}{\sqrt{V^2-g^2}}\,\dot y\,\frac{\partial \dot y}{\partial \dot\eta'} = -\frac{\beta}{V^2}\,\frac{\mathfrak{v}^{(0)}}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,\dot y\left(1-\frac{p}{V^2}\dot x\right) = -\beta\,\frac{\left(1-\frac{p}{V^2}\dot x\right)\dot y}{V^2\left(1-\frac{g^2}{V^2}\right)}\,\mathfrak{v}\,,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \dot\zeta'} = -\frac{\mathfrak{v}^{(0)}}{V}\frac{1}{\sqrt{V^2-g^2}}\,\dot z\,\frac{\partial \dot z}{\partial \dot\zeta'} = -\frac{\beta}{V^2}\,\frac{\mathfrak{v}^{(0)}}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,\dot z\left(1-\frac{p}{V^2}\dot x\right) = -\beta\,\frac{\left(1-\frac{p}{V^2}\dot x\right)\dot z}{V^2\left(1-\frac{g^2}{V^2}\right)}\,\mathfrak{v}\,;$$

und $\frac{\partial \vartheta}{\partial \dot\eta'}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial \dot\zeta'}$ mit ϑ für $\mathfrak{v}$. Das stimmte mit (38), (39) für $\dot x = p$, $\dot y = \dot z = 0$.

also nach den angenommenen Werten für $\mathfrak{F}'_y$, $\mathfrak{F}'_z$, und weil nach (15) (S. 326)

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt} = \frac{1}{\beta\left(1 - \frac{p}{V^2}\dot{x}\right)}\frac{d}{dt} = \sqrt{\frac{1 - \frac{g'^2}{V^2}}{1 - \frac{g^2}{V^2}}}\frac{d}{dt} \tag{43}$$

ist, zufolge (32) (S. 330)

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{1 - \frac{g^2}{V^2}}{1 - \frac{g'^2}{V^2}}}\frac{\partial H'}{\partial \dot{y}}\right) = \mathfrak{F}_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\right), \\ &\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{1 - \frac{g^2}{V^2}}{1 - \frac{g'^2}{V^2}}}\frac{\partial H'}{\partial \dot{z}}\right) = \mathfrak{F}_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\right), \end{aligned}\right. \tag{44}$$

woraus durch Integration und weil für $g' = g$ sein muß $H' = H$, folgt

$$\sqrt{\frac{1 - \frac{g^2}{V^2}}{1 - \frac{g'^2}{V^2}}}\frac{\partial H'}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}, \quad \sqrt{\frac{1 - \frac{g^2}{V^2}}{1 - \frac{g'^2}{V^2}}}\frac{\partial H'}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}. \tag{45}$$

Weiter haben wir aus den Gleichungen (10), (11) (S. 325) nach dem Relativitätsprinzip

$$\frac{\partial H'}{\partial \mathfrak{v}'} = P', \tag{46}$$

$$\frac{\partial H'}{\partial \vartheta'} = S', \tag{47}$$

also wegen (22) und (29) (S. 328, 329)

$$\frac{\partial H'}{\partial \mathfrak{v}'} = \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}}, \tag{48$_1$}$$

$$\frac{\partial H'}{\partial \vartheta'} = \frac{\partial H}{\partial \vartheta}, \tag{49$_1$}$$

d. h. nach (26) und (27$_2$) (S. 329)

$$\frac{\partial H'}{\partial \mathfrak{v}'} = \frac{\partial H'}{\partial \mathfrak{v}}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{v}'} = \sqrt{\frac{1 - \frac{g^2}{V^2}}{1 - \frac{g'^2}{V^2}}}\frac{\partial H'}{\partial \mathfrak{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}}\left(\sqrt{\frac{1 - \frac{g^2}{V^2}}{1 - \frac{g'^2}{V^2}}}H'\right) = \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}}. \tag{48$_2$}$$

$$\frac{\partial H'}{\partial \vartheta'} = \frac{\partial H'}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta'} = \sqrt{\frac{1 - \frac{g^2}{V^2}}{1 - \frac{g'^2}{V^2}}}\frac{\partial H'}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sqrt{\frac{1 - \frac{g^2}{V^2}}{1 - \frac{g'^2}{V^2}}}H'\right) = \frac{\partial H}{\partial \vartheta}. \tag{49$_2$}$$

Die Integration ergibt

$$H' \sqrt{\frac{1-\frac{g^2}{V^2}}{1-\frac{g'^2}{V^2}}} = H + L$$

oder

$$\frac{H'}{\sqrt{1-\frac{g'^2}{V^2}}} - \frac{H}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}} L\,.$$

Da nach den Gleichungen (45) diese Beziehung nach $\dot{y}$, $\dot{z}$ differenziert $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0$ ergibt, so kann L nur noch von $\dot{x}$ abhängen, d. h. zufolge (15) nur noch von $\sqrt{\frac{1-\frac{g^2}{V^2}}{1-\frac{g'^2}{V^2}}}$. Nun hängt der Annahme nach H allein ab von $g, \mathfrak{v}, \vartheta$, also H' nur von g', $\mathfrak{v}'$, ϑ'. Darum stellt die Differenz linker Hand eine Differenz zweier Funktionen dar, deren eine nur durch g', $\mathfrak{v}'$, ϑ', deren andere nur durch g, $\mathfrak{v}$, ϑ bestimmt ist. Das gleiche muß somit der Fall sein bei der Größe rechter Hand, also bleibt nach obigem nur der Ansatz

$$L = A \sqrt{\frac{1-\frac{g^2}{V^2}}{1-\frac{g'^2}{V^2}}} + B\,,$$

wo A, B Konstanten bedeuten. So wird

$$\frac{H'-A}{\sqrt{1-\frac{g'^2}{V^2}}} - \frac{H-B}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}} = 0\,, \tag{50}$$

und da für $g = g'$, weil dann auch $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}$, $\vartheta' = \vartheta$ ist, wird $H' = H$, muß $A = B = 0$ sein, und so folgt

$$H' = \sqrt{\frac{1-\frac{g'^2}{V^2}}{1-\frac{g^2}{V^2}}}\, H\,, \tag{51}$$

$$\frac{H'}{\sqrt{1-\frac{g'^2}{V^2}}} = \frac{H}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}} = H^{(0)}\,, \tag{52}$$

woselbst $H^{(0)}$ für den absoluten Ruhezustand gelten würde. Dieses Plancksche Ergebnis ist höchst bemerkenswert. Ersetzt man nämlich in H' das $\mathfrak{v}'$, ϑ' durch ihre Werte nach (27) (S. 329), so geht es in eine Funktion von g', $\sqrt{\frac{1-\frac{g'^2}{V^2}}{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,\mathfrak{v}$,

$\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{g'^2}{V^2}}{1-\dfrac{g^2}{V^2}}}\,\vartheta$ über. Wenn nun $\dfrac{H'}{\sqrt{1-\dfrac{g'^2}{V^2}}}$ gar nicht von g' abhängen soll, so muß hiernach erstens die Abhängigkeit des H' von g' eine solche von $\sqrt{1-\dfrac{g'^2}{V^2}}$ sein, und zweitens kann nur homogene lineare Abhängigkeit von allen Variabeln in Frage kommen. Also wäre

$$(53_1)\qquad H' = A'\sqrt{1-\frac{g'^2}{V^2}} + B'\sqrt{\frac{1-\dfrac{g'^2}{V^2}}{1-\dfrac{g^2}{V^2}}}\,\mathfrak{v} + C'\sqrt{\frac{1-\dfrac{g'^2}{V^2}}{1-\dfrac{g^2}{V^2}}}\,\vartheta\,.$$

Genau so hätten wir

$$(53_2)\qquad H = A\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}} + B\,\mathfrak{v} + C\,\vartheta$$

und bekämen

$$(54)\qquad A' = A\,,\quad B' = B\,,\quad C' = C\,.$$

Die Größen A, B, C können nur noch Funktionen von $\mathfrak{v}$ und ϑ sein, nicht mehr solche von g oder g'. Weil aber $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$ ist, dürfen die A, B, C auch nur von $\mathfrak{v}^{(0)}$, $\vartheta^{(0)}$ abhängen, den Werten von $\mathfrak{v}$, ϑ im absoluten Ruhezustand. Diesen Satz leitet Planck in anderer Weise ab (S. 340).

Es wird auch noch die Umrechnung der Bewegungsmomente und der noch fehlenden Kraft $\mathfrak{F}'_{\xi'}$ ausgeführt. Für jene haben wir

$$(55)\qquad \mathfrak{G}'_{\xi'} = \frac{\partial H'}{\partial \dot\xi'}\,,\quad \mathfrak{G}'_{\eta'} = \frac{\partial H'}{\partial \dot\eta'}\,,\quad \mathfrak{G}'_{\zeta'} = \frac{\partial H'}{\partial \dot\zeta'}\,.$$

Die beiden Transversalgleichungen ergeben wegen (42) und (45) (S. 332, 333)

$$\mathfrak{G}'_{\eta'} = \sqrt{\frac{1-\dfrac{g^2}{V^2}}{1-\dfrac{g'^2}{V^2}}}\,\frac{\partial H'}{\partial \dot y} = \frac{\partial H}{\partial \dot y}\,,\qquad \mathfrak{G}'_{\zeta'} = \sqrt{\frac{1-\dfrac{g^2}{V^2}}{1-\dfrac{g'^2}{V^2}}}\,\frac{\partial H'}{\partial \dot z} = \frac{\partial H}{\partial \dot z}\,,$$

also da zufolge (15) (S. 326) der Faktor von $\dfrac{\partial H'}{\partial \dot y}$ und von $\dfrac{\partial H'}{\partial \dot z}$ von $\dot y$, $\dot z$ nicht abhängt,

$$(56)\qquad \mathfrak{G}'_{\eta'} = \mathfrak{G}_y\,,\quad \mathfrak{G}'_{\zeta'} = \mathfrak{G}_z\,.$$

Longitudinal haben wir

$$\mathfrak{G}'_{\xi'} = \frac{\partial H'}{\partial \dot x}\frac{\partial \dot x}{\partial \dot\xi'} + \frac{\partial H'}{\partial \dot y}\frac{\partial \dot y}{\partial \dot\xi'} + \frac{\partial H'}{\partial \dot z}\frac{\partial \dot z}{\partial \dot\xi'} + \frac{\partial H'}{\partial \mathfrak{v}}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \dot\xi'} + \frac{\partial H'}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial \dot\xi'}\,,$$

also den früheren Formeln unter (35) (S. 331, 332) und (38), (39) entsprechend

$$\mathfrak{G}'_{\xi'} = \beta^2\left(1-\frac{p}{V^2}\dot x\right)\left\{\left(1-\frac{p}{V^2}\dot x\right)\frac{\partial H'}{\partial \dot x} - \frac{p}{V^2}\dot y\,\frac{\partial H'}{\partial \dot y} - \frac{p}{V^2}\dot z\,\frac{\partial H'}{\partial \dot z} - \frac{p}{V^2}\frac{\partial H'}{\partial \mathfrak{v}}\,\mathfrak{v} - \frac{p}{V^2}\frac{\partial H'}{\partial \vartheta}\,\vartheta\right\}.$$

Darin ist nach (51) (S. 334) und (15) (S. 324)

$$
(57)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial H'}{\partial \dot x} &= \frac{\partial}{\partial \dot x}\left(\sqrt{\frac{1-\frac{g'^2}{V^2}}{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,H\right) = \frac{\partial}{\partial \dot x}\left(\frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot x}\,H\right) \\
&= \frac{p}{V^2}\,\frac{1}{\beta}\,\frac{1}{\left(1-\frac{p}{V^2}\dot x\right)^2}\,H + \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot x}\,\frac{\partial H}{\partial \dot x} \\
&= \frac{p}{V^2}\,\frac{1}{\beta}\,\frac{1}{\left(1-\frac{p}{V^2}\dot x\right)^2}\,H + \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot x}\,\mathfrak{G}_x\,, \\
\frac{\partial H'}{\partial \dot y} &= \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot x}\,\frac{\partial H}{\partial \dot y} = \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot x}\,\mathfrak{G}_y\,, \\
\frac{\partial H'}{\partial \dot z} &= \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot x}\,\frac{\partial H}{\partial \dot z} = \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot x}\,\mathfrak{G}_z\,,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(58)\qquad \frac{\partial H'}{\partial \mathfrak{v}} = \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot x}\,\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}} = \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot x}\,P\,.
$$

$$
(59)\qquad \frac{\partial H'}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot x}\,\frac{\partial H}{\partial \dot x} = \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot x}\,S\,.
$$

Wir erhalten also

$$
(60_1)\qquad \mathfrak{G}'_{\xi'} = \beta\left(\mathfrak{G}_x - \frac{p}{V^2}(\dot x\,\mathfrak{G}_x + \dot y\,\mathfrak{G}_y + \dot z\,\mathfrak{G}_z) + \frac{p}{V^2}(H - P\mathfrak{v} - \vartheta S)\right)
$$

und zufolge der Gleichung (12_1) (S. 326)

$$
(60_2)\qquad \mathfrak{G}'_{\xi'} = \beta\left(\mathfrak{G}_x - \frac{p}{V^2}(E + P\mathfrak{v})\right) = \beta\left(\mathfrak{G}_x - \frac{p}{V^2}\,\Phi\right).
$$

E ist die freie Energie,

$$
(61)\qquad \Phi = E + P\mathfrak{v}
$$

das Gibbssche thermodynamische Potential für konstanten Druck. Nunmehr kann auch $\mathfrak{F}'_{\xi'}$ ermittelt werden, denn wir haben

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}'_{\xi'} = \frac{d}{d\tau}\,\mathfrak{G}'_{\xi'} = \frac{d}{dt}\,\mathfrak{G}'_{\xi'}\,\frac{dt}{d\tau} &= \frac{1}{\beta\left(1-\frac{p}{V^2}\dot x\right)}\,\frac{d}{dt}\,\mathfrak{G}'_{\xi'} \\
&= \frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot x}\left\{\frac{d\mathfrak{G}_x}{dt} - \frac{p}{V^2}\left(\frac{dE}{dt} + P\frac{d\mathfrak{v}}{dt} + \mathfrak{v}\frac{dP}{dt}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Hierin ist

$$\frac{d\mathfrak{G}_x}{dt} = \mathfrak{F}_x\,,$$
$$\frac{dE}{dt} = \mathfrak{F}_x\dot{x} + \mathfrak{F}_y\dot{y} + \mathfrak{F}_z\dot{z} - P\frac{d\mathfrak{v}}{dt} + \vartheta\frac{dS}{dt}\,,$$

letzteres nach Gleichung (13) (S. 326), somit

$$(62_1)\qquad \mathfrak{F}'_{\xi'} = \frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot{x}}\left\{\mathfrak{F}_x - \frac{p}{V^2}\left(\mathfrak{F}_x\dot{x} + \mathfrak{F}_y\dot{y} + \mathfrak{F}_z\dot{z} + \mathfrak{v}\frac{dP}{dt} + \vartheta\frac{dS}{dt}\right)\right\}$$

oder

$$(62_2)\qquad \mathfrak{F}'_{\xi'} = \mathfrak{F}_x - \frac{p}{V^2}\frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot{x}}\left(\mathfrak{F}_y\dot{y} + \mathfrak{F}_z\dot{z} + \mathfrak{v}\frac{dP}{dt} + \vartheta\frac{dS}{dt}\right).$$

Für $\frac{dP}{dt} = \frac{dS}{dt} = 0$ fällt dieser Ausdruck mit dem aus den elektrodynamischen Betrachtungen abgeleiteten für $\mathfrak{F}'_{\xi'}$ unter (32) (S. 330) zusammen.

Endlich ergeben die obigen Formeln nach (12_1) (S. 326)

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned} E' &= \dot{\xi}'\mathfrak{G}'_{\xi'} + \dot{\eta}'\mathfrak{G}'_{\eta'} + \dot{\zeta}'\mathfrak{G}'_{\zeta'} + \vartheta' S' - H' \\ &= \beta\left(E - p\,\mathfrak{G}_x - \frac{p}{V^2}\frac{\dot{x}-p}{1-\frac{p}{V^2}\dot{x}}P\mathfrak{v}\right), \end{aligned}\right.$$

$$(64)\qquad \Phi' = \beta(\Phi - p\,\mathfrak{G}_x)\,,$$

$$(65)\qquad dA' = \beta\left\{dA - p\,dt\left(\mathfrak{F}_x + \frac{\dot{x}-p}{1-\frac{p}{V^2}\dot{x}}\frac{1}{V^2}\left(\mathfrak{v}\frac{dP}{dt} + \vartheta\frac{dS}{dt}\right)\right)\right\},$$

$$(66)\qquad dK' = \frac{1}{\beta}\frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot{x}}\left\{dK - \frac{p}{V^2}\frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot{x}}P\mathfrak{v}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\},$$

$$(67)\qquad dQ' = \vartheta' dS' = \vartheta' dS = \frac{\vartheta'}{\vartheta}dQ = \frac{1}{\beta}\frac{1}{1-\frac{p}{V^2}\dot{x}}dQ = \sqrt{\frac{1-\frac{g'^2}{V^2}}{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,dQ\,,$$

$$(68)\qquad \frac{dQ'}{\sqrt{1-\frac{g'^2}{V^2}}} = \frac{dQ}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}} = dQ^{(0)}\,,$$

$$(69)\qquad \frac{dQ'}{\vartheta'} = \frac{dQ}{\vartheta}\,.$$

Es bedeuten darin noch

$$(70)\qquad dA = \mathfrak{F}_x\,dx + \mathfrak{F}_y\,dy + \mathfrak{F}_z\,dz\,,\quad dA' = \mathfrak{F}'_{\xi'}\,d\xi' + \mathfrak{F}'_{\eta'}\,d\eta' + \mathfrak{F}'_{\zeta'}\,d\zeta'\,.$$

die von den äußeren Kräften bei der Bewegung allein geleistete Arbeit,

(71) $$dK = -P\,d\mathfrak{v}$$

die zugeführte Kompressionsarbeit,

(72) $$dQ = \vartheta\,dS$$

die zugeführte Wärme. dA', dK', dQ' sind die entsprechenden Größen im zweiten System.

Planck stellt noch die beim Übergang von einem System auf ein Lorentz-Einsteinsches entsprechendes anderes System unveränderlichen, invarianten Größen zusammen. Es sind das nach dem Vorstehenden

$$y\,,\ z\,,\ P,\ S,\ \mathfrak{G}_y,\ \mathfrak{G}_z\,,$$

$$\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,,\quad \frac{\vartheta}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,,\quad \frac{H}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,,\quad \frac{\mathfrak{F}_y}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,,\quad \frac{\mathfrak{F}_z}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,,$$

$$\mathfrak{G}\,\frac{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}{g}\ \text{[s. (75}_3\text{) später]},\qquad \Phi\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}\ \text{[s. (79}_3\text{) später]};$$

$$\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}\,dt\,,\qquad \frac{dQ}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,,\qquad \frac{dQ}{\vartheta}\,,$$

also auch

$$\mathfrak{v}\,dt\,,\quad \vartheta\,dt\,,\quad H\,dt\,,\quad \mathfrak{F}_y\,dt\,,\quad \mathfrak{F}_z\,dt\,;\quad dx\,dy\,dz\,dt$$

u. a., namentlich auch die Wirkungsgröße

$$\int_1^2 H\,dt\,.$$

Aus der Invarienz der betreffenden Größen folgt auch, daß sie überall durch die Werte im absoluten Ruhezustand ersetzt werden können. Die anderen lassen sich dann aus den Größen im Ruhezustand ermitteln.

Vor allem ist

$$P = P^{(0)}\,,\qquad S = S^{(0)}\,;\qquad H = \sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}\,H^{(0)}\,.$$

Nun haben wir nach (9) (S. 325)

$$\mathfrak{G} = \frac{\partial H}{\partial g} = -\frac{g}{V^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,H^{(0)} + \sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}\left(\frac{\partial H^{(0)}}{\partial \mathfrak{v}^{(0)}}\,\frac{\partial \mathfrak{v}^{(0)}}{\partial g} + \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \vartheta^{(0)}}\,\frac{\partial \vartheta^{(0)}}{\partial g}\right).$$

Es ist aber

(73) $$\mathfrak{v}^{(0)} = \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,,$$

(74) $$\vartheta^{(0)} = \frac{\vartheta}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,,$$

somit

$$\frac{\partial \mathfrak{v}^{(0)}}{\partial g} = \frac{g}{V^2} \frac{\mathfrak{v}}{\left(1 - \frac{g^2}{V^2}\right)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial \vartheta^{(0)}}{\partial g} = \frac{g}{V^2} \frac{\vartheta}{\left(1 - \frac{g^2}{V^2}\right)^{3/2}}$$

und wegen

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial \mathfrak{v}^{(0)}} = P^{(0)} = P, \qquad \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \vartheta^{(0)}} = S^{(0)} = S,$$

(75₁)
$$\mathfrak{G} = \frac{g}{V^2\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} \left(\frac{\mathfrak{v} P}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} + \frac{\vartheta S}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} - H^{(0)} \right),$$

oder

(75₂)
$$\mathfrak{G} = \frac{g}{V^2\left(1 - \frac{g^2}{V^2}\right)} (\mathfrak{v} P + \vartheta S - H),$$

oder

(75₃)
$$\mathfrak{G} = \frac{g}{V^2\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} (\mathfrak{v}^{(0)} P^{(0)} + \vartheta^{(0)} S^{(0)} - H^{(0)})$$

oder nach der folgenden Gleichung (77)

(75₄)
$$\mathfrak{G} = \frac{g}{V^2\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} (E^{(0)} + \mathfrak{v}^{(0)} P^{(0)}).$$

Die letztere Form ist wohl die bedeutsamste. Aus $\mathfrak{G}$ erhält man die Komponenten durch

(76)
$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{G}_x &= \frac{\dot{x}}{V^2\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} (\mathfrak{v}^{(0)} P^{(0)} + \vartheta^{(0)} S^{(0)} - H^{(0)}), \\ \mathfrak{G}_y &= \frac{\dot{y}}{V^2\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} (\mathfrak{v}^{(0)} P^{(0)} + \vartheta^{(0)} S^{(0)} - H^{(0)}), \\ \mathfrak{G}_z &= \frac{\dot{z}}{V^2\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} (\mathfrak{v}^{(0)} P^{(0)} + \vartheta^{(0)} S^{(0)} - H^{(0)}). \end{aligned} \right.$$

Ferner nach (12₁) (S. 326) die Energie

$$E = \frac{g^2}{V^2\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} \left\{ \mathfrak{v}^{(0)} P^{(0)} + \vartheta^{(0)} S^{(0)} - H^{(0)} + \frac{V^2}{g^2}\left(1 - \frac{g^2}{V^2}\right) (\vartheta^{(0)} S^{(0)} - H^{(0)}) \right\}$$

$$= \frac{g^2}{V^2\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} \left\{ \mathfrak{v}^{(0)} P^{(0)} + \frac{V^2}{g^2} (\vartheta^{(0)} S^{(0)} - H^{(0)}) \right\}$$

oder da

(77) $$E^{(0)} = \vartheta^{(0)} S^{(0)} - H^{(0)}$$

ist,

(78) $$E = \frac{E^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} + \frac{g^2}{V^2\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}}\, \mathfrak{v}^{(0)} P^{(0)} .$$

Für das thermodynamische Potential bekommen wir nach (61) (S. 336)

$$\Phi = \frac{E^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} + \frac{g^2}{V^2\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}}\, \mathfrak{v}^{(0)} P^{(0)} + \sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}\, \mathfrak{v}^{(0)} P^{(0)} ,$$

d. h.

(79$_1$) $$\Phi = \frac{E^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}}\, \mathfrak{v}^{(0)} P^{(0)} ,$$

also weil

(80) $$\Phi^{(0)} = E^{(0)} + \mathfrak{v}^{(0)} P^{(0)}$$

ist

(79$_2$) $$\Phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}}\, \Phi^{(0)} .$$

Planck[1]) fügt noch die aus (75$_4$) und (79$_2$) sofort abzuleitende Formel hinzu

(81) $$\mathfrak{G} = \frac{g}{V^2}\, \Phi = \frac{g}{V^2\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}}\, \Phi^{(0)} .$$

Hieraus folgt nach (9) (S. 325)

$$\frac{\partial H}{\partial g} = \frac{g}{V^2}(E + P\mathfrak{v})$$

und nach (12$_2$) (S. 326) und (10) (S. 325)

$$\frac{\partial H}{\partial g} = \frac{g}{V^2}\left(g\frac{\partial H}{\partial g} + \vartheta\frac{\partial H}{\partial \vartheta} - H + P\mathfrak{v}\right) = \frac{g}{V^2}\left(g\frac{\partial H}{\partial g} + \vartheta\frac{\partial H}{\partial \vartheta} + \mathfrak{v}\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}} - H\right)$$

oder

(82) $$\vartheta\frac{\partial H}{\partial \vartheta} + \mathfrak{v}\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}} - \frac{V^2}{g}\left(1 - \frac{g^2}{V^2}\right)\frac{\partial H}{\partial g} - H = 0 .$$

In dieser Differentialgleichung für H sieht Planck „den allgemeinen Ausdruck für die Anwendung des Relativitätsprinzipes auf das thermokinetische Potential". Und das Integral dieser Differentialgleichung ist eine lineare, homogene Funktion von $1 - \frac{g^2}{V^2}$, ϑ, $\mathfrak{v}$ wie früher (S. 325) auf anderem Wege gefunden ist.

Zuletzt sei noch hervorgehoben, daß Planck als „Masse" eines Körpers definiert die Bewegungsgröße $\mathfrak{G}$ dividiert durch die Geschwindigkeit g und

[1]) Er behält übrigens in allen Gleichungen $\mathfrak{v}$ und ϑ.

genommen für $g = 0$, entsprechend der gewöhnlichen Definition aus dem Galileischen Bewegungsmoment, wo die letztere Bestimmung nicht erforderlich ist. Da man dann zufolge (80), (81) (S. 340) hat

$$\frac{\mathfrak{G}}{g} = \frac{1}{V^2\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\Phi^{(0)} = \frac{1}{V^2\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}(E^{(0)} + P^{(0)}\mathfrak{v}^{(0)}),$$

so wird die „Masse"

(83)
$$M = \frac{\Phi^{(0)}}{V^2} = \frac{E^{(0)} + P^{(0)}\mathfrak{v}^{(0)}}{V^2}.$$

Die „transversale" Masse ist $\frac{\mathfrak{G}}{g}$ selbst,

(84)
$$M_T = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\frac{\Phi^{(0)}}{V^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\frac{E^{(0)} + P^{(0)}\mathfrak{v}^{(0)}}{V^2}$$

die „longitudinale Masse"

(85)
$$M_L = \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g},$$

wobei noch hinzugefügt werden muß, unter welchen Bedingungen die Differentiation auszuführen ist, so daß die longitudinale Masse sich nach der Art des Vorganges richtet[1]). Die Masse M können wir als „Ruhemasse" bezeichnen, sie hängt ab von jeder Temperatur- und Dichteänderung und ändert sich zufolge der Bedeutung von Φ wie das Verhältnis der isopiestischen Wärmeaufnahme zum Quadrat der Lichtgeschwindigkeit V im Vakuum. Planck berechnet hiernach die Massenabnahme von $1^1/_2$ Mol. Knallgas bei dem Übergang in 1 Mol. flüssiges Wasser unter Atmosphärendruck und Zimmertemperatur. Die Wärmeentwickelung in absolutem Maß ist dabei

$$68400 \cdot 419 \cdot 10^5 cm\, g\, s\,,$$

und diese Größe dividiert durch $V^2 = 9 \cdot 10^{20}$ gibt $3{,}2\ 10^{-6}$ mg „eine immer noch verschwindend kleine Größe". Leider vermögen wir $\Phi^{(0)}$ selbst nicht zu bestimmen. Und ich glaube überhaupt, daß es sich zunächst nur um Definitionen handelt, einem bestimmten Fall angepaßt.

Ich stelle nochmals die Annahmen zusammen, unter denen die vorstehenden Entwickelungen gelten

1. das Punktsystem befindet sich in stationärem Zustand,

2. das thermokinetische H Potential hängt dann nicht von den Lagen der einzelnen Teile des Systems ab, auch nicht von der Richtung der einzelnen Bewegungen, sondern nur von der lebendigen Kraft der Gesamtbewegung, von der Dichte und von der Temperatur.

3. Bei der Lorentz-Einstein-Transformation ändern sich die transversalen Kräfte nach den Formeln (32) (S. 330), die für elektrodynamische Verhältnisse der Einsteinschen Umrechnung gemäß den Maxwellschen Ruhegleichungen entsprechen, und für stationäre Systeme allgemein gelten sollen.

4. Ein Weltraumelement im Sinne Minkowskis soll für alle Transformationen nach Lorentz-Einstein invariant sein.

---

[1]) Hierüber habe ich in meinem Buche „Die Grundgesetze der Natur usf." eingehend gesprochen.

5. Vorgänge, die nach Zeit und Ort in einem Bezugssystem umkehrbar sind, sollen umkehrbar bleiben, wenn sie nach Zeit und Ort eines anderen, im Sinne der Lorentz-Einsteinschen Transformation abgeleiteten Bezugssystemes verlaufen.

Keine dieser Annahmen — mit Ausnahme der vierten, wenn man das Relativitätsprinzip im Sinne Minkowskis auffaßt — liegt im Relativitätsprinzip selbst. Was Einsteins Formeln nur lehren können, ist hervorgehoben. Bei der fünften Annahme könnte man glauben, daß sie unmittelbar aus dem Relativitätsprinzip fließe. Allein dieses bezieht sich auf die mathematische Form der Gesetze der Vorgänge, nicht auf die Vorgänge selbst. Das Gesetz der Umkehrbarkeit bleibt bei der Transformation erhalten, es ist wieder

$$dS' = \frac{dQ'}{\vartheta'}.$$

Aber ob die Umkehrbarkeit selbst erhalten bleibt, ist eine ganz andere Frage. Indessen wird das Relativitätsprinzip überhaupt weit über seinen Ausspruch hinaus angewendet. Der Anwendung entsprechend müßte ihm folgende Fassung gegeben werden.

Eine und dieselbe Erscheinung verläuft physikalich für zwei gegeneinander gleichförmig und parallel bewegte Beobachter in gleicher Weise, und die Gesetze dieses Verlaufes sind für beide Beobachter ebenfalls die gleichen, falls die Raum-Zeit-Systeme der beiden Beobachter zueinander nach den Lorentz-Einsteinschen oder, allgemeiner, Minkowskischen Formeln geregelt werden. Erscheinungen gleicher Art behalten für einen Beobachter physikalisch ihr Verhältnis zueinander, auch wenn sie ihre gegeneinander in gleichförmiger Bewegung befindlichen Raum-Zeit-Systeme vertauschen, falls diese Systeme für den Beobachter in den von Lorentz und Einstein, allgemein von Minkowski, aufgestellten Beziehungen stehen.

Ob das Relativitätsprinzip in diesem auch das rein Physikalische einbeziehenden Umfange gerechtfertigt wird, ist noch weit zweifelhafter, als ob es in der Beschränkung allein auf die mathematischen Gesetze einer Erscheinung als gültig angesehen werden darf, in der es nichts weiter aussagt, als daß diese Gesetze für alle zueinander in gleichförmiger Parallelbewegung befindlichen Systeme den gleichen Ausdruck durch die zugehörigen Koordinaten und die zugehörige Zeit haben, und daß man dabei die Gesetze von einem System zum anderen und von einer Zeit zur anderen mittels der Lorentz-Einsteinschen, allgemeiner mittels der Minkowskischen Gleichungen überträgt.

c) Minkowskis Galileische Mechanik.

Die Minkowskische Relativitätsmechanik [1]) ist gleich als das bezeichnet, als was dieser Forscher sie abgeleitet hat. Sie stellt eine Galileische Mechanik dar, nicht eine Lagrangesche. Das bedeutendste an ihr ist ihre konsequente Durchführung und sind die ganz neuen Gesichtspunkte, die sie für die Berechnung der Kräfte eröffnet, ebenso bedeutend ist, daß das Prinzip der Erhaltung der Energie als eine Folge des Relativitätsprinzips erscheint. Da für $V = \infty$ die

[1]) Ich habe den Faktor V, den Minkowski leider von vornherein gleich 1 setzt, hier und in der Elektrodynamik konsequent mitgeführt. Er ist für die Deutung von Minkowskis Theorie von höchster Entscheidung (S. 376).

Lorentz-Einsteinschen Transformationsgleichungen geben $\xi' = x - pt$, $\eta' = y$, $\zeta' = z$, $\tau = t$, so meint Minkowski, „die klassische Mechanik postuliert eine Kovarianz der physikalischen Gesetze für die Gruppe der homogenen, linearen Transformationen des Ausdrucks

$$-V^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

in sich mit der Bedingung $V = \infty$." Sein Bestreben ist also, eine Mechanik aufzubauen, an der die Kovarianz auch besteht, wenn V nicht ∞, sondern endlich ist, etwa gleich der Geschwindigkeit des Lichtes im Vakuum nach der Annahme von Lorentz und von Einstein. Und die Aufgabe ist, „es soll für jeden Raum-Zeit-Punkt die Richtung der daselbst durchlaufenden Raum-Zeit-Linie festgestellt werden". Nimmt man eine solche Lorentz-Transformation ξ', η', ζ', τ, daß die τ-Achse die Richtung erlangt, die im betreffenden Punkt P die dort durchlaufende Raum-Zeit-Linie des Punktes hat, so ist dieser Punkt „auf Ruhe transformiert" (S. 305). Der Raum ξ', η', ζ', τ mit $\tau =$ Konst. soll dann der in P auf der Raum-Zeit-Linie „normale" Raum heißen. Ist hiernach x, y, z, t ein Bezugssystem, so entspricht dem Zuwachs dt von t auf der Raum-Zeit-Linie von P aus der Zuwachs $d\tau$ von τ (S. 293 mit θ bezeichnet) im Betrage

$$(1_1) \quad d\tau = \frac{1}{V}\sqrt{V^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \frac{1}{V}\sqrt{-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2)}\,,$$

wo wie früher (S. 295) $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $Vit = x_4$ gesetzt ist. Nun sei

$$g_1 = \frac{dx}{dt} = g_x\,, \quad g_2 = \frac{dy}{dt} = g_y\,, \quad g_3 = \frac{dz}{dt} = g_z\,, \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = g^2dt^2\,,$$

so wird also auch, vergl. (43) (S. 333),

$$(1_2) \qquad d\tau = \frac{dt}{V}\sqrt{V^2 - g^2} = dt\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}\,.$$

Setzen wir hiernach

$$(2_1) \qquad \mathfrak{g}_4 = \frac{iV^2}{\sqrt{V^2 - g^2}} = \frac{iV}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}}\,,$$

so folgt

$$(1_3) \qquad d\tau = \frac{dx_4}{\mathfrak{g}_4}\,,$$

d. h.

$$(2_2) \qquad \mathfrak{g}_4 = \frac{dx_4}{d\tau}\,,$$

so daß $\mathfrak{g}_4$ als Bewegungsgröße in Richtung der τ-Achse für die Zeit τ erscheint. Die Größe

$$(3_1) \quad \tau = \int d\tau = \frac{1}{V}\int\sqrt{-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2)} = \frac{1}{V}\int\frac{dx_4}{\mathfrak{g}_4} = \int dt\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}$$

das Integral, genommen von irgendeinem Punkte P_0 der Raum-Zeit-Linie bis zum Punkte P, ist wieder die Eigenzeit des Punktes an der Stelle P [Gl. (26_2), S. 293].

Wenn wir in der Gleichung (15) (S. 326) $\frac{dx}{dt} = p$ setzen, so gibt sie

$$(3_2) \qquad d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}, \quad \text{also} \quad \tau = \int d\tau = \int dt\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}},$$

es entspricht also dann τ der Lorentz-Relativzeit bei gleichförmiger Bewegung.

Das weitere Verfahren Minkowskis schließt sich nun einem in der Hydrodynamik befolgten an. Dementsprechend werden zunächst folgende Definitionen angeführt.

Es sei ein räumlich ausgedehnter Körper R^0 zur Zeit t^0 gegeben, so bilden alle durch die Raum-Zeit-Punkte R^0, t^0 gehenden Raum-Zeit-Linien einen Raum-Zeit-Faden. Es sei $\theta(x, y, z, t) = 0$ die Gleichung eines Raum-Zeit-Gebildes innerhalb des Raum-Zeit-Fadens R^0, t^0, so wird die Gesamtheit aller Treffpunkte der sämtlichen Raum-Zeitlinien, die den Raum-Zeitfaden R^0, t^0 zusammensetzen, mit jenem Gebilde $\theta = 0$, ein Querschnitt des Raum-Zeit-Fadens genannt, wobei die Bedingung vorgeschrieben wird

$$(4a) \qquad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_4}\right)^2 < 0 .$$

Diese Bedingung ist der Raum-Zeit-Ausdruck der Raumbedingung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 < 0 ,$$

Und da man durch eine Lorentz-Transformation (Minkowski-Transformation) auch x_1', x_2', x_3', x_4' so wählen kann, daß

$$(5) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x_1'} = 0 , \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2'} = 0 , \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_3'} = 0$$

ist, so kommt zu (4a) als Zusatzbedingung

$$(4b) \qquad i\frac{\partial \theta}{\partial x_4'} > 0 , \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t'} > 0 .$$

Die Richtung der zur Transformation nach (5) gehörigen Zeitachse wird als obere Normale des Querschnitts bezeichnet, und die Größe

$$6) \qquad dJ = dx_1'\,dx_2'\,dx_3'$$

als Inhaltselement des Querschnitts an dem Punkte P.

Auch dieses steht in Einklang mit entsprechenden Festsetzungen im Raum, denn wählen wir ein System x, y, z so, daß an der Stelle x, y, z entsprechend (5) ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 ,$$

so bildet hier die z-Achse die Normale zu $F(x, y, z) = 0$.

Läßt man den Raum R^0 nach einem Punkte konvergieren, so wird der Raum-Zeit-Faden unendlich dünn. Die Achse dieses unendlich dünnen Fadens ist dann die Haupt-Raum-Zeit-Linie oder Hauptlinie. Auf sie bezieht sich dann dem Obigem zufolge die Eigenzeit τ des Fadens, indem die Achse τ sie an jeder Stelle berührt. Die Querschnitte des Fadens senkrecht zu dieser Hauptlinie sind die Normalquerschnitte des Fadens.

Zwei Querschnitte Q_0, Q_1 eines Fadens seien so gelegt, daß sie die Punkte auf der Oberfläche des Fadens und nur diese gemeinsam haben. Das zwischen ihnen eingeschlossene Raum-Zeit-Gebiet heißt dann eine Raum-Zeit-Sichel. Dabei sollen die Raum-Zeit-Linien auf Q_1 größere t haben als die auf Q_0.

Dem Beispiel der Hydrodynamik weiter folgend wird die Konstanz der Massen in folgender Weise ausgesprochen:

Für einen unendlich dünnen Raum-Zeit-Faden ist das Produkt $\nu \, dJ_t$ aus der Massendichte ν an der Stelle x, y, z, t der Hauptlinie des Fadens und dem Inhalt dJ_t des durch diese Stelle gehenden zur t-Achse normalen Querschnitts längs des ganzen Fadens konstant.

Dabei ist Massendichte der Quotient der Masse in x, y, z, t durch den Inhalt des Raum-Zeit-Gebietes um diese Stelle, wenn dieses Gebiet gegen den Raum-Zeit-Punkt x, y, z, t konvergiert.

Da die Hauptlinie an jeder Stelle in Richtung der τ-Zeitachse daselbst verläuft, so ist, wenn dJ_τ den Inhalt des normal zur τ-Zeitachse daselbst gelegten Querschnitts bedeutet, nach den Gleichungen (18) (S. 327)

$$(7) \qquad dJ_\tau = \frac{dt}{d\tau} dJ_t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} dJ_t = -i \frac{\mathfrak{g}_4}{V} dJ_t ,$$

letzteres nach (1_2), (2_1) (S. 343). Setzt man

$$(8) \qquad \frac{V\nu}{-i\mathfrak{g}_4} = \nu \sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}} = \nu \frac{d\tau}{dt} = \mu ,$$

so heißt μ die Ruh-Massendichte (gegen Minkowski μ, ν vertauscht), und es ist

$$(9) \qquad \nu = \mu \frac{dt}{d\tau} = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} = -\mu \frac{i\mathfrak{g}_4}{V} .$$

Hiernach wird

$$(10) \qquad \nu \, dJ_t = \mu \frac{dt}{d\tau} dJ_t = \mu \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} dJ_\tau = \mu \, dJ_\tau ,$$

und dJ_τ bedeutet den Inhalt des zum Faden normalen Querschnitts, während dJ_t der zur t-Achse normale Querschnitt war. Der Satz von der Konstanz der Masse lautet also auch:

Für einen unendlich dünnen Raum-Zeit-Faden ist das Produkt aus der Ruh-Massendichte und dem Inhalt des Normalquerschnitts des Fadens längs des ganzen Fadens konstant.

Es folgt nun dem Muster entsprechend die Feststellung der Kontinuitätsbedingung. Bildet man $\iiint \mu \, dJ_\tau$ über zwei Querschnitte einer Raum-Zeit-Sichel, so muß die Differenz gleich Null sein, weil $\mu \, dJ_\tau$ längs des ganzen unendlich dünnen Fadens gleichen Wert hat. Unter Anwendung eines bekannten Satzes aus der Integralrechnung schreibt darum Minkowski

$$(11) \qquad \iiiint \left(\frac{\partial(\mu \mathfrak{g}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mu \mathfrak{g}_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\mu \mathfrak{g}_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial(\mu \mathfrak{g}_4)}{\partial x_4} \right) dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, dx_4 = 0 ,$$

also wenn die Sichel sich zum Raum-Zeit-Punkt zusammenzieht, als Kontinuitätsgleichung

$$(12_1) \qquad \frac{\partial(\mu \mathfrak{g}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mu \mathfrak{g}_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\mu \mathfrak{g}_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial(\mu \mathfrak{g}_4)}{\partial x_4} = 0 .$$

Darin sind

$$(13_1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{g}_1 = \dfrac{dx_1}{d\tau} = g_x \dfrac{dt}{d\tau}, & \mathfrak{g}_2 = \dfrac{dx_2}{d\tau} = g_y \dfrac{dt}{d\tau}, \\[2ex] \mathfrak{g}_3 = \dfrac{dx_3}{d\tau} = g_z \dfrac{dt}{d\tau}, & \mathfrak{g}_4 = \dfrac{dx_4}{d\tau} = g_t \dfrac{dt}{d\tau}. \end{cases}$$

Da nach (1_2)

$$(1_4)\qquad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}}$$

ist, so haben wir

$$(13_2)\qquad \mathfrak{g}_1 = \frac{g_x}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}, \quad \mathfrak{g}_2 = \frac{g_y}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}, \quad \mathfrak{g}_3 = \frac{g_z}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}, \quad \mathfrak{g}_4 = \frac{g_t}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}$$

und es ist nach (2_1)

$$(13')\qquad g_t = iV.$$

Zufolge (9) kann die Kontinuitätsgleichung auch geschrieben werden

$$(12_2)\qquad \frac{\partial\left(\nu V \frac{\mathfrak{g}_1}{i\,\mathfrak{g}_4}\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(\nu V \frac{\mathfrak{g}_2}{i\,\mathfrak{g}_4}\right)}{\partial x_2} + \frac{\partial\left(\nu V \frac{\mathfrak{g}_3}{i\,\mathfrak{g}_4}\right)}{\partial x_3} + \frac{\partial\left(\nu V \frac{\mathfrak{g}_4}{i\,\mathfrak{g}_4}\right)}{\partial x_4} = 0,$$

also auch nach (13_2) und $(13')$

$$(14)\qquad \frac{\partial(\nu g_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\nu g_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\nu g_z)}{\partial z} + \frac{\partial \nu}{\partial t} = 0.$$

Die Größen $\mathfrak{g}$ sind Geschwindigkeiten im gemischten System x, y, z, τ, die Bewegungsvektoren nach S. 293, und erfüllen die Bedingung (29) (S. 293),

$$(15)\qquad \mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2 + \mathfrak{g}_3^2 + \mathfrak{g}_4^2 = -V^2.$$

Minkowski bemerkt noch, daß das Integral

$$(16_1)\qquad \begin{cases} \mathsf{N} = \iiiint \mu\, dx\, dy\, dz\, dt = \iiiint \mu\, dx\, dy\, dz \dfrac{dt}{d\tau}\, d\tau = \iiiint \mu\, dJ_\tau\, d\tau \\[2ex] \qquad = \iiint (\tau_1 - \tau_0)\, \mu\, dx\, dy\, dz \end{cases}$$

ist, die Integrale genommen über alle Punkte der Raum-Zeit-Sichel. Zerteilt man nämlich die Sichel in unendlich dünne Fäden und jeden Faden in unendlich kleine Stücke $d\tau$, so ist längs eines solchen Fadens $\mu\, dJ_\tau$ konstant, also das Integral nach τ gleich $\mu\, dJ_\tau(\tau_1 - \tau_0)$, wo τ_1 sich auf den oberen, τ_0 auf den unteren Querschnitt der Sichel bezieht.

Hält man die Enden der Fäden auf ihren Endquerschnitten der Sichel fest und läßt die Punkte jedes Fadens normal zum Faden sich verschieben, so daß die ganze Verschiebung sich analytisch durch einen Parameter ϑ darstellen läßt, der gleich Null ist für den wirklich stattfindenden Verlauf der Fäden, so spricht Minkowski von einer virtuellen Verrückung der Punkte, Fäden, in der Sichel.

Es seien x, y, z, t die Koordinaten eines Punktes für $\vartheta = 0$, nach der Verrückung für $\vartheta = \vartheta$ gehen sie über in $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, $t + \delta t$ und sind

Funktionen von $x, y, z, t; \vartheta$. Die Größe $\mu\, dJ_\tau$ wandelt sich in $(\mu + \delta\mu)(dJ_\tau + \delta(dJ_\tau))$ und die Änderung $\delta\mu$ der Ruh-Massendichte wird in der Weise festgesetzt, daß

$$(17)\qquad (\mu + \delta\mu)(\delta J_\tau + \delta(dJ_\tau)) = \mu\, dJ_\tau$$

bleibt. Das Integral N nimmt den Wert $\mathrm{N} + \delta\mathrm{N}$ an und ist nunmehr gleichfalls Funktion von $x, y, z, t; \vartheta$. Der Wert von $\delta\mathrm{N}$ wird als die Massenwirkung bei der virtuellen Verrückung bezeichnet. Nun ist nach (16_1)

$$(16_2)\qquad \mathrm{N} = \iiiint \mu\, dJ_\tau\, d\tau\,.$$

Durch die Verrückung soll nach (17) $\mu\, dJ_\tau$ nicht geändert werden. Dagegen geht $d\tau$ über in $d\tau + \delta(d\tau)$, also bekommen wir

$$(18_1)\qquad \mathrm{N} + \delta\mathrm{N} = \iiiint \mu\, dJ_\tau (d\tau + \delta(d\tau))$$

und nach Einsetzen des Wertes von

$$dJ_\tau = \frac{dx_1'\, dx_2'\, dx_3'\, dx_4'}{dx_4'} = \frac{dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4}{dx_4'} = \frac{dx_1\, dx_2\, dx_3}{d\tau}\, dt\,,$$

$$(18_2)\qquad \mathrm{N} + \delta\mathrm{N} = \iiiint \mu \frac{d\tau + \delta(d\tau)}{d\tau}\, dx\, dy\, dz\, dt\,,$$

und indem wie in der klassischen Mechanik $\delta d = d\delta$ genommen wird

$$(18_3)\qquad \mathrm{N} + \delta\mathrm{N} = \iiiint \mu \frac{d(\tau + \delta\tau)}{d\tau}\, dx\, dy\, dz\, dt\,.$$

Nach der Definition (1_1) (S. 343) haben wir nun

$$d\tau + d\,\delta\tau = \sqrt{-(dx_1 + d\,\delta x_1)^2 - (dx_2 + d\,\delta x_2)^2 - (dx_3 + d\,\delta x_3)^2 - (dx_4 + d\,\delta x_4)^2}\,.$$

Andererseits ist

$$dx_h + d\,\delta x_h =$$

$$dx_h + \frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_4} dx_4 + \frac{\partial\,\delta x_h}{\partial \vartheta} d\vartheta\,,\quad h = 1, 2, 3, 4.$$

Da nach (13_1) (S. 346)

$$dx_1 = \mathfrak{g}_1\, d\tau\,,\quad dx_2 = \mathfrak{g}_2\, d\tau\,,\quad dx_3 = \mathfrak{g}_3\, d\tau\,,\quad dx_4 = \mathfrak{g}_4\, d\tau$$

und ferner

$$d\vartheta = 0$$

ist, so wird

$$(19)\qquad \frac{d\tau + d\delta\tau}{d\tau} = \sqrt{-\sum_{h=1}^{h=4}\left(\mathfrak{g}_h + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4} \frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_\varkappa}\mathfrak{g}_\varkappa\right)^2}$$

und

$$(18_4)\qquad \mathrm{N} + \delta\mathrm{N} = \iiiint \mu \sqrt{-\sum_{h=1}^{h=4}\left(\mathfrak{g}_h + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4} \frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_\varkappa}\mathfrak{g}_\varkappa\right)^2}\, dx\, dy\, dz\, dt\,.$$

Also die Massenwirkung bei der virtuellen Verrückung

$$(20)\qquad \delta\mathrm{N} = \iiiint \mu \sqrt{-\sum_{h=1}^{h=4}\left(\mathfrak{g}_h + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4} \frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_\varkappa}\mathfrak{g}_\varkappa\right)^2}\, dx\, dy\, dz\, dt - \mathrm{N}\,.$$

Außer der Massenwirkung wird noch eine Spannungswirkung der virtuellen Verschiebungen eingeführt. In seiner Theorie der Elektrodynamik, die später dargelegt wird, hat Minkowski die Gesamtspannung im Raum-Zeit-Gebiet durch sechzehn Komponenten dargestellt

$$(21)\qquad \begin{cases} S_{11} = X_x\,, & S_{12} = Y_x\,, & S_{13} = Z_x\,, & S_{14} = -iT_x\,; \\ S_{21} = X_y\,, & S_{22} = Y_y\,, & S_{23} = Z_y\,, & S_{24} = -iT_y\,; \\ S_{31} = X_z\,, & S_{32} = Y_z\,, & S_{33} = Z_z\,, & S_{34} = -iT_z\,; \\ S_{41} = -iX_t\,, & S_{42} = -iY_t\,, & S_{43} = -iZ_t\,, & S_{44} = +T_t\,. \end{cases}$$

Man setzt auch hier wie in der klassischen Mechanik (nicht in der Elektrodynamik)

$$(22)\qquad \begin{cases} X_y = Y_x\,, & Y_z = Z_y\,, & Z_x = X_z\,; \\ X_t = T_x\,, & Y_t = T_y\,, & Z_t = T_z\,. \end{cases}$$

Darin entsprechen die $X_x, \ldots, Z_z$ den „Maxwellschen Spannungen", die VT_x, $V|T_y$, VT_z (also auch die VX_t, VY_t, VZ_t) dem „Poyntingschen Vektor" und stellt T_t eine der elektromagnetischen Energiedichte analoge Größe dar. Spannungen solcher Art werden auch in der Mechanik angenommen mit ihr angepaßter Bedeutung, und es wird

$$(23_1)\qquad \delta W = \frac{1}{V}\iiiint \sum_{h=1}^{h=4}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4} S_{\varkappa h}\frac{\partial(x_h+\delta x_h)}{\partial x_\varkappa}\,dx\,dy\,dz\,dt - W\,,$$

d. h.

$$(23_2)\qquad \delta W = \frac{1}{V}\iiiint \sum_{h=1}^{h=4}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4} S_{\varkappa h}\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_\varkappa}\,dx\,dy\,dz\,dt$$

als Spannungswirkung der virtuellen Verrückung bezeichnet.

Zuletzt stellt Minkowski zur Begründung der Mechanik ein Grenzprinzip auf, das dem Hamiltonschen Prinzip der klassischen Mechanik entsprechen soll (Erläuterung für Alles S. 362f.), nämlich

„Wird irgendeine Raum-Zeit-Sichel abgegrenzt, so soll bei jeder virtuellen Verrückung in der Sichel die Summe aus der Massenwirkung und der Spannungswirkung für den wirklich stattfindenden Verlauf der Raum-Zeit-Linien in der Sichel stets ein Extremum sein."

Da die Verrückung durch ϑ bestimmt ist und der wirkliche Verlauf der Raum-Zeit-Linien durch $\vartheta = 0$, so soll also sein

$$(24)\qquad \left(\frac{\partial(\delta\mathsf{N} + \delta W)}{\partial\vartheta}\right)_{\vartheta=0} = 0\,.$$

Die Größen N, $\mathfrak{g}$, $\mu\,dx\,dy\,dz\,dt$ hängen nicht von ϑ ab. Also haben wir nach (20)

$$(25)\qquad \frac{\partial(\delta\mathsf{N})}{\partial\vartheta} = -\iiiint \frac{\mu\displaystyle\sum_{h=1}^{h=4}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\mathfrak{g}_\varkappa\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_\varkappa}\right)\left(\mathfrak{g}_h + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_\varkappa}\mathfrak{g}_\varkappa\right)}{\sqrt{-\displaystyle\sum_{h=1}^{h=4}\left(\mathfrak{g}_h + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_\varkappa}\mathfrak{g}_\varkappa\right)^2}}\,dx\,dy\,dz\,dt\,.$$

Für $\vartheta = 0$ ist

$$\left(\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_\varkappa}\right)_{\vartheta=0} = 0\,.$$

Somit fällt im Zähler im Klammerfaktor das zweite Glied fort. Der Nenner wird aber $\sqrt{-\Sigma\mathfrak{g}_h^2}$, und zufolge (15) gleich $\sqrt{V^2} = V$. Da endlich die Differentiationen nach den x und ϑ vertauscht werden dürfen, so erhalten wir

$$(25_1)\qquad \left(\frac{\partial(\delta N)}{\partial\vartheta}\right)_{\vartheta=0} = -\frac{1}{V}\iiiint\mu\sum_{h=1}^{h=4}\mathfrak{g}_h\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\mathfrak{g}_\varkappa\frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\left(\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial\vartheta}\right)_{\vartheta=0}dx\,dy\,dz\,dt\,.$$

Indem man rechts nach den $x_\varkappa$ partiell integriert, bekommt man als erstes Glied Integrale, die sich auf die Endquerschnitte der Sichel beziehen. Dort sollten aber die Fäden festgehalten, also die $\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial\vartheta} = 0$ sein, somit wird

$$(25_2)\qquad \left(\frac{\partial(\delta N)}{\partial\vartheta}\right)_{\vartheta=0} = \frac{1}{V}\iiiint\sum_{h=1}^{h=4}\left\{\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial\vartheta}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial}{\partial x_\varkappa}(\mu\,\mathfrak{g}_h\,\mathfrak{g}_\varkappa)\right\}_{\vartheta=0}dx\,dy\,dz\,dt\,.$$

Nun ist

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial}{\partial x_\varkappa}(\mu\,\mathfrak{g}_h\,\mathfrak{g}_\varkappa) = \mathfrak{g}_h\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\mu\,\mathfrak{g}_\varkappa + \mu\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\mathfrak{g}_\varkappa\frac{\partial\,\mathfrak{g}_h}{\partial x_\varkappa} = \mu\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\mathfrak{g}_\varkappa\frac{\partial\,\mathfrak{g}_h}{\partial x_\varkappa},$$

letzteres wegen der Kontinuitätsbewegung (12_1). Weiter haben wir nach (13_1)

$$(26)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\mathfrak{g}_\varkappa\frac{\partial\,\mathfrak{g}_h}{\partial x_\varkappa} = \frac{\partial\,\mathfrak{g}_h}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial\,\mathfrak{g}_h}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\partial\,\mathfrak{g}_h}{\partial x_3}\frac{dx_3}{d\tau} + \frac{\partial\,\mathfrak{g}_h}{\partial x_4}\frac{dx_4}{d\tau} = \frac{d\,\mathfrak{g}_h}{d\tau}\,.$$

Somit folgt zuletzt

$$(25_3)\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial(\delta N)}{\partial\vartheta}\right)_{\vartheta=0} = \\ &\frac{1}{V}\iiiint\mu\left(\frac{\partial\,\delta x_1}{\partial\vartheta}\frac{d\,\mathfrak{g}_1}{d\tau} + \frac{\partial\,\delta x_2}{\partial\vartheta}\frac{d\,\mathfrak{g}_2}{d\tau} + \frac{\partial\,\delta x_3}{\partial\vartheta}\frac{d\,\mathfrak{g}_3}{d\tau} + \frac{\partial\,\delta x_4}{\partial\vartheta}\frac{d\,\mathfrak{g}_4}{d\tau}\right)_{\vartheta=0}dx\,dy\,dz\,dt\end{aligned}\right.$$

oder

$$(25_4)\qquad \left(\frac{\partial(\delta N)}{\partial\vartheta}\right)_{\vartheta=0} = \frac{1}{V}\iiiint\mu\sum_{h=1}^{h=4}\left(\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial\vartheta}\right)_{\vartheta=0}\frac{d\,\mathfrak{g}_h}{d\tau}\,dx\,dy\,dz\,dt\,.$$

Dazu kommt die Bedingung, daß die Verrückungen normal zu den Fäden erfolgen sollen, welche ergibt (25) (S. 293)

$$(27)\qquad \mathfrak{g}_1\frac{\partial\,\delta x_1}{\partial\vartheta} + \mathfrak{g}_2\frac{\partial\,\delta x_2}{\partial\vartheta} + \mathfrak{g}_3\frac{\partial\,\delta x_3}{\partial\vartheta} + \mathfrak{g}_4\frac{\partial\,\delta x_4}{\partial\vartheta} = 0\,.$$

Entsprechend haben wir aus (23_2)

$$(28)\left\{\begin{aligned} V\frac{\partial(\delta W)}{\partial\vartheta} &= \iiiint\sum_{h=1}^{h=4}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial S_{\varkappa h}}{\partial\vartheta}\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_\varkappa}\,dx\,dy\,dz\,dt \\ &+\iiiint\sum_{h=1}^{h=4}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}S_{\varkappa h}\frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\left(\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial\vartheta}\right)dx\,dy\,dz\,dt\,.\end{aligned}\right.$$

Da für $\vartheta = 0$ wieder $\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_\varkappa} = 0$ ist, so wird

$$(29_1)\qquad \left(\frac{\partial(\delta W)}{\partial\vartheta}\right)_{\vartheta=0} = \frac{1}{V}\iiiint\sum_{h=1}^{h=4}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}S_{\varkappa h}\frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\left(\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial\vartheta}\right)_{\vartheta=0}dx\,dy\,dz\,dt\,.$$

Integrieren wir partiell nach den $x_\varkappa$ und beachten, daß an den Endquerschnitten die δx Null sind, so bleibt

$$(29_2)\qquad \left(\frac{\partial(\delta W)}{\partial\vartheta}\right)_{\vartheta=0} = -\frac{1}{V}\iiiint\sum_{h=1}^{h=4}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial S_{\varkappa h}}{\partial x_\varkappa}\left(\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial\vartheta}\right)_{\vartheta=0} dx\,dy\,dz\,dt\,.$$

Das Minimumprinzip ergibt nunmehr nach den Gleichungen (25_4), (27), (29_2)

$$(30)\qquad \iiiint\sum_{h=1}^{h=4}\left(\mu\frac{d\mathfrak{g}_h}{d\tau} - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial S_{\varkappa h}}{\partial x_\varkappa} - \lambda\,\mathfrak{g}_h\right)\left(\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial\vartheta}\right)_{\vartheta=0} dx\,dy\,dz\,dt = 0\,,$$

wo λ ein willkürlicher Faktor ist. Also indem die Sichel zum Punkt konvergiert

$$(31)\qquad \mu\frac{d\mathfrak{g}_h}{d\tau} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial S_{\varkappa h}}{\partial x_\varkappa} + \lambda\,\mathfrak{g}_h\,,\qquad h = 1,2,3,4\,.$$

Multiplizieren wir diese vier Gleichungen mit $\mathfrak{g}_h$ und addieren, so wird

$$\frac{1}{2}\mu\frac{d}{d\tau}\Sigma\,\mathfrak{g}_h^2 = \sum_{h=1}^{h=4}\mathfrak{g}_h\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial S_{\varkappa h}}{\partial x_\varkappa} + \lambda\,\Sigma\,\mathfrak{g}_h^2\,,$$

also nach (15)

$$(32)\qquad \lambda = \frac{1}{V^2}\sum_{h=1}^{h=4}\mathfrak{g}_h\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial S_{\varkappa h}}{\partial x_\varkappa}\,.$$

Wir schreiben nunmehr

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned}
\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial S_{\varkappa 1}}{\partial x_\varkappa} + \frac{1}{V^2}\mathfrak{g}_1\sum_{h=1}^{h=4}\mathfrak{g}_h\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial S_{\varkappa h}}{\partial x_\varkappa} &= X\,,\\
\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial S_{\varkappa 2}}{\partial x_\varkappa} + \frac{1}{V^2}\mathfrak{g}_2\sum_{h=1}^{h=4}\mathfrak{g}_h\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial S_{\varkappa h}}{\partial x_\varkappa} &= Y\,,\\
\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial S_{\varkappa 3}}{\partial x_\varkappa} + \frac{1}{V^2}\mathfrak{g}_3\sum_{h=1}^{h=4}\mathfrak{g}_h\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial S_{\varkappa h}}{\partial x_\varkappa} &= Z\,,\\
\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial S_{\varkappa 4}}{\partial x_\varkappa} + \frac{1}{V^2}\mathfrak{g}_4\sum_{h=1}^{h=4}\mathfrak{g}_h\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}\frac{\partial S_{\varkappa h}}{\partial x_\varkappa} &= i\,V\,T
\end{aligned}\right.$$

und erhalten so nach (13_1), $(13')$ (S. 346) und (31)

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mu\frac{d^2x}{d\tau^2} &= X\,,\\
\mu\frac{d^2y}{d\tau^2} &= Y\,,\\
\mu\frac{d^2z}{d\tau^2} &= Z\,,\\
\mu\frac{d^2t}{d\tau^2} &= T\,,
\end{aligned}\right.$$

welche die Bewegungsgleichungen der Minkowskischen Mechanik darstellen. Zu ihnen kommen noch hinzu die Bedingungen

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 - V^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = -V^2 \tag{35}$$

und

$$X\frac{dx}{d\tau} + Y\frac{dy}{d\tau} + Z\frac{dz}{d\tau} - V^2 T\frac{dt}{d\tau} = 0\,. \tag{36}$$

Erstere Bedingung ist die Definitionsgleichung (1_1) (S. 343) für $d\tau$ und entspricht auch der Gleichung (15) (S. 346). Letztere erhält man durch Multiplikation der Definitionsgleichungen (33) mit $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$, Addition und Ersetzung der Werte der $\mathfrak{g}$ nach den Gleichungen (13_1) wegen (15) (S. 346).

Geometrisch sagt letztere Gleichung nach (30) (S. 293) aus, daß der Vektor, dessen Komponenten X, Y, Z, iT sind, normal gerichtet ist zu dem Vektor, der die Komponenten $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$ hat.

In den Gleichungen (34) ist noch μ variabel von Punkt zu Punkt. Multiplizieren wir aber die Gleichungen mit dJ_τ und integrieren über den Normalquerschnitt eines unendlich dünnen Fadens, so wird

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}\int \mu\, dJ_\tau = \int X\, dJ_\tau \quad \text{usf.}$$

Darin ist nun $\int \mu\, dJ_\tau$ längs des ganzen Fadens konstant (S. 345), setzen wir hiernach

$$\int \mu\, dJ_\tau = m \tag{37}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} \int X\, dJ_\tau &= R_{\tau x}\,, \\ \int Y\, dJ_\tau &= R_{\tau y}\,, \\ \int Z\, dJ_\tau &= R_{\tau z}\,, \\ \int T\, dJ_\tau &= R_{\tau t}\,, \end{aligned}\right. \tag{38}$$

die Integrale genommen über den ganzen Raum des Querschnitts, so wird

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{d\tau^2} &= R_{\tau x}\,, \\ m\frac{d^2y}{d\tau^2} &= R_{\tau y}\,, \\ m\frac{d^2z}{d\tau^2} &= R_{\tau z}\,, \\ m\frac{d^2t}{d\tau^2} &= R_{\tau t}\,, \end{aligned}\right. \tag{39}$$

worin m nunmehr eine Konstante den Faden τ entlang und in allen Gleichungen eine Longitudinalmasse bedeutet. Und das sind Minkowskis Gleichungen der Galileischen Mechanik. Die drei ersten Gleichungen stimmen formell mit den Galileischen Gleichungen, die vierte ihnen entsprechende ist die nach Minkowskis Relativitätslehre hinzutretende. Sie kann ersetzt werden durch die Gleichung (36), die nunmehr lautet

$$R_{\tau x}\frac{dx}{d\tau} + R_{\tau y}\frac{dy}{d\tau} + R_{\tau z}\frac{dz}{d\tau} - V^2 R_{\tau t}\frac{dt}{d\tau} = 0\,. \tag{40}$$

Diese Gleichung folgt auch aus den Gleichungen (39), wenn man sie mit $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{dz}{d\tau}$, $-V^2\frac{dt}{d\tau}$ multipliziert, addiert und die Gleichung (35) beachtet.

Wenn man die Gleichung (36) nicht mit dJ_τ multipliziert und über den Querschnitt normal zu τ integriert, sondern mit dJ_t multipliziert und über den Querschnitt normal zu t integriert, so wird

$$\frac{dx}{d\tau}\int X\,dJ_t + \frac{dy}{d\tau}\int Y\,dJ_t + \frac{dz}{d\tau}\int Z\,dJ_t - V^2\frac{dt}{d\tau}\int T\,dJ_t = 0\,,$$

also zufolge (7) (S. 345)

$$\frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\int X\,dJ_\tau + \frac{dy}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\int Y\,dJ_\tau + \frac{dz}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\int Z\,dJ_\tau - V^2\frac{dt}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\int T\,dJ_\tau = 0\,,$$

d. h. nach (13_1) und (38)

$$g_x R_{\tau x} + g_y R_{\tau y} + g_z R_{\tau z} - V^2 R_{\tau t} = 0\,, \tag{41}$$

somit zufolge der letzten Gleichung unter (39)

$$g_x R_{\tau x} + g_y R_{\tau y} + g_z R_{\tau z} = V^2 m \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dt}{d\tau}\right) \tag{42_1}$$

und durch Multiplikation mit $\frac{d\tau}{dt}$

$$g_x R_{\tau x}\frac{d\tau}{dt} + g_y R_{\tau y}\frac{d\tau}{dt} + g_z R_{\tau z}\frac{d\tau}{dt} = V^2 m \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right). \tag{42_2}$$

Diese Gleichung stellt den Energiesatz für die Bewegung des materiellen Punktes dar, indem die linke Seite die Arbeitsleistung am materiellen Punkte angibt, die rechte Seite den Zuwachs an kinetischer Energie, beides für die Zeiteinheit gerechnet. Multipliziert man mit dt und integriert, so wird

$$\int(g_x R_{\tau x} + g_y R_{\tau y} + g_z R_{\tau z})\,d\tau = V^2 m\left\{\frac{dt}{d\tau} - \left(\frac{dt}{d\tau}\right)_0\right\}. \tag{43}$$

Nimmt man die Grenzen so, daß die Konstante 1 wird, so bezeichnet Minkowski die rechts stehende Größe als kinetische Energie des sich bewegenden Punktes, also

$$K = V^2 m\left(\frac{dt}{d\tau} - 1\right) = V^2 m\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}} - 1\right), \tag{44_1}$$

letzteres nach (1_2) (S. 343), so daß die räumliche Geschwindigkeit g von 0 aus gerechnet ist. Für $g = p$ stimmt diese Formel überein mit der Einsteinschen Formel (22_2) (S. 316), und sie gibt wie diese

$$K = \frac{m}{2}g^2\left(1 + \frac{3}{4}\frac{g^2}{V^2} + \cdots\right). \tag{44_2}$$

Da weder $dt = 0$, noch $d\tau = \infty$ sein kann, so vermag man aus Minkowskis Theorie zu der Einsteinschen zweiten Darstellung der lebendigen Kraft unter

(22_4) (S. 317), nur unter Mitwirkung der potentiellen Energie zu gelangen, demnach wäre der Anfangswert g_0 von g so zu bestimmen, das

$$\int^{g_0}(g_x R_{\tau x} + g_y R_{\tau y} + g_z R_{\tau z}) = V^2 m \left(\frac{dt}{d\tau}\right)_0 = V^2 m \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g_0^2}{V^2}}}$$

wird. Das entspricht dem S. 317 in der Anmerkung bereits hervorgehobenen, wodurch sich die Bezeichnung von K als kinetische Energie rechtfertigt. Jedenfalls dürfen wir behaupten, daß die vierte Gleichung der Bewegungsgleichungen zum Energieprinzip führt. Minkowski weist noch auf eine besondere Definition der kinetischen Energie hin. Da wir aus (44_1) auch haben

$$(44_3) \qquad K = V^2 m \frac{dt - d\tau}{d\tau},$$

so wäre diese kinetische Energie das Produkt aus $V^2 m$ in das Vorgehen der Zeit t gegen die Eigenzeit τ des sich bewegenden Punktes innerhalb einer Einheit dieser Eigenzeit. Wir könnten auch sagen: gleich dem Bewegungsmoment des Punktes für die Geschwindigkeit V multipliziert mit der Strahlenlänge, die diesem Vorgehen entspricht.

Ich stelle nunmehr alle Annahmen Minkowskis zusammen:

1. Zeitliche Konstanz der Masse in Richtung der Eigenzeit τ und auch senkrecht zur Zeitachse t des Raum-Zeit-Fadens (Satz von der zeitlich-räumlichen Konstanz der Massen).

2. Konstanz der Masse bei irgendwelcher virtuellen Normal-Deformation des Raum-Zeit-Fadens (Satz von der Erhaltung der Massen).

3. Festsetzung der Spannungswirkung auf elektrodynamischer Grundlage (Gesetz der Spannungen).

4. Minimumprinzip der Massen- und Spannungswirkung.

Zu 1 und 2 ist zu bemerken, daß eine besondere Definition der Masse selbst sich nicht gegeben findet; die Masse bestimmt sich wie in der Galileischen Mechanik und zeigt sich also wie in dieser zeitlich (längs der Fäden) und räumlich (normal zu den Fäden) konstant. Mit der Masse der Galileischen Mechanik braucht sie gleichwohl nicht übereinzustimmen, da die Bewegungsgleichungen sachlich von denen dieser Mechanik abweichen. Weiteres folgt später (S. 361 f.). Die dritte Annahme entspricht den Annahmen von Einstein und Planck, die die Mechanik, wie schon früher geschehen, in den Bereich der Elektrodynamik verweisen, da sich die mechanischen Kräfte wie Feldspannungen elektrodynamischer Art berechnen. Auf diese Spannungen kommen wir später zurück. Hier ist folgendes hervorzuheben. Nach den Definitionsgleichungen (33) bestehen die mechanischen Kräfte aus zwei Teilen, einem Teile, der von der Bewegung unabhängig ist, und einem, der durch diese Bewegung mit bestimmt wird. Bezeichnen wir die Komponenten des ersten Teiles mit X_1, Y_1, Z_1, $i V T_1$, so haben wir

$$(45)\left\{\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{31}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{41}}{\partial x_4} = + \frac{\partial X_x}{\partial x_1} + \frac{\partial X_y}{\partial x_2} + \frac{\partial X_z}{\partial x_3} - i \frac{\partial X_t}{\partial x_4},\\
Y_1 &= \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{32}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{42}}{\partial x_4} = + \frac{\partial Y_x}{\partial x_1} + \frac{\partial Y_y}{\partial x_2} + \frac{\partial Y_z}{\partial x_3} - i \frac{\partial Y_t}{\partial x_4},\\
Z_1 &= \frac{\partial S_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{43}}{\partial x_4} = + \frac{\partial Z_x}{\partial x_1} + \frac{\partial Z_y}{\partial x_2} + \frac{\partial Z_z}{\partial x_3} - i \frac{\partial Z_t}{\partial x_4},\\
i V T_1 &= \frac{\partial S_{14}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{24}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{34}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{44}}{\partial x_4} = - i \frac{\partial T_x}{\partial x_1} - i \frac{\partial T_y}{\partial x_2} - i \frac{\partial T_z}{\partial x_3} + \frac{\partial T_t}{\partial x_t}.
\end{aligned}\right.$$

letzteres nach den Gleichungen (21) (S. 348). Oder

$$(46_1)\qquad \begin{cases} X_1 = + \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} - \dfrac{1}{V}\dfrac{\partial X_t}{\partial t}\,, \\ Y_1 = + \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} - \dfrac{1}{V}\dfrac{\partial Y_t}{\partial t}\,, \\ Z_1 = + \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} - \dfrac{1}{V}\dfrac{\partial Z_t}{\partial t}\,, \\ i V T_1 = - i\left(\dfrac{\partial T_x}{\partial x} + \dfrac{\partial T_y}{\partial y} + \dfrac{\partial T_z}{\partial z} + \dfrac{1}{V}\dfrac{\partial T_t}{\partial t}\right) \end{cases}$$

in Verallgemeinerung der formalen Gleichungen der klassischen Hydrodynamik und Elastizitätslehre, die auch mit den Beziehungen unter (2_2) (S. 247) zu vergleichen sind. Der andere Teil der Komponenten X, Y, Z, T, den wir X_2, Y_2, Z_2, $i V T_2$ nennen, ist nach (33) und (46)

$$(47_1)\qquad \begin{cases} X_2 = \dfrac{1}{V^2}\mathfrak{g}_1(\mathfrak{g}_1 X_1 + \mathfrak{g}_2 Y_1 + \mathfrak{g}_3 Z_1 + \mathfrak{g}_4 i V T_1)\,, \\ Y_2 = \dfrac{1}{V^2}\mathfrak{g}_2(\mathfrak{g}_1 X_1 + \mathfrak{g}_2 Y_1 + \mathfrak{g}_3 Z_1 + \mathfrak{g}_4 i V T_1)\,, \\ Z_2 = \dfrac{1}{V^2}\mathfrak{g}_3(\mathfrak{g}_1 X_1 + \mathfrak{g}_2 Y_1 + \mathfrak{g}_3 Z_1 + \mathfrak{g}_4 i V T_1)\,, \\ i V T_2 = \dfrac{1}{V^2}\mathfrak{g}_4(\mathfrak{g}_1 X_1 + \mathfrak{g}_2 Y_1 + \mathfrak{g}_3 Z_1 + \mathfrak{g}_4 i V T_1)\,. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{g}$ eine Raum-Zeit-Kraft und eine Raum-Zeit-Geschwindigkeit, deren Komponenten im Raum-Zeit-Gebiet sind X_1, Y_1, Z_1, $i V T_1$ und $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$, so können wir

$$(48_1)\qquad \mathfrak{g}_1 X_1 + \mathfrak{g}_2 Y_1 + \mathfrak{g}_3 Z_1 + \mathfrak{g}_4 i V T_1 = (\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{R}_1})$$

schreiben und haben dann

$$(47_2)\qquad \begin{cases} X_2 = \dfrac{1}{V^2}\mathfrak{g}_1(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{R}_1})\,, \quad Y_2 = \dfrac{1}{V^2}\mathfrak{g}_2(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{R}_1})\,, \quad Z_2 = \dfrac{1}{V^2}\mathfrak{g}_3(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{R}_1})\,, \\ i V T_2 = \dfrac{1}{V^2}\mathfrak{g}_4(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{R}_1})\,. \end{cases}$$

Die gesamte Kraft besitzt hiernach die Komponenten

$$(49_1)\qquad \begin{cases} X = X_1 + \dfrac{1}{V^2}\mathfrak{g}_1(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{R}_1})\,, \\ Y = Y_1 + \dfrac{1}{V^2}\mathfrak{g}_2(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{R}_1})\,, \\ Z = Z_1 + \dfrac{1}{V^2}\mathfrak{g}_3(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{R}_1})\,, \\ i V T = i V T_1 + \dfrac{1}{V^2}\mathfrak{g}_4(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{R}_1})\,. \end{cases}$$

Ihre Resultante wird

$$\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R}_1^2 + \frac{2}{V^2}\left(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{R}_1}\right)^2 + \frac{1}{V^4}(\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2 + \mathfrak{g}_3^2 + \mathfrak{g}_4^2)\left(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{R}_1}\right)^2,$$

also zufolge (15) (S. 346)

$$\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R}_1^2 + \frac{1}{V^2}\left(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{R}_1}\right)^2, \qquad \mathfrak{R} = \sqrt{\mathfrak{R}_1^2 + \frac{1}{V^2}\left(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{R}_1}\right)^2}. \tag{50}$$

Wir setzen noch für die $\mathfrak{g}$ ihre Werte nach (13_2) (S. 346) ein und erhalten

$$\left(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{R}_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}(g_x X_1 + g_y Y_1 + g_z Z_1 - V^2 T_1), \tag{48_2}$$

somit

$$\left\{\begin{aligned} X &= X_1 + \frac{g_x}{V^2 - g^2}(g_x X_1 + g_y Y_1 + g_z Z_1 - V^2 T_1), \\ Y &= Y_1 + \frac{g_y}{V^2 - g^2}(g_x X_1 + g_y Y_1 + g_z Z_1 - V^2 T_1), \\ Z &= Z_1 + \frac{g_z}{V^2 - g^2}(g_x X_1 + g_y Y_1 + g_z Z_1 - V^2 T_1), \\ iVT &= iVT_1 + \frac{iV}{V^2 - g^2}(g_x X_1 + g_y Y_1 + g_z Z_1 - V^2 T_1). \end{aligned}\right. \tag{49_2}$$

Des Späteren wegen sei noch auf eines hingewiesen. Handelt es sich um Bewegungen, deren Geschwindigkeit im Raum gering ist gegen die Geschwindigkeit des Lichtes, so kann man unter Fortlassung von Gliedern von der Ordnung $\frac{g^2}{V^2}$ setzen

$$\left\{\begin{aligned} X &= X_1 - g_x T_1 = X_1 + i\frac{g_x}{V}(iVT_1), \\ Y &= Y_1 - g_y T_1 = Y_1 + i\frac{g_y}{V}(iVT_1), \\ Z &= Z_1 - g_z T_1 = Z_1 + i\frac{g_z}{V}(iVT_1), \\ iVT &= i\left(\frac{g_x}{V}X_1 + \frac{g_y}{V}Y_1 + \frac{g_z}{V}Z_1\right). \end{aligned}\right. \tag{51}$$

Wir werden bald sehen, daß die letzte Gleichung, wenn die X, Y, Z so angenommen werden, wie angegeben, unvollständig ist. Nun kann wohl mit Recht vermutet werden, daß VT_1 eine Größe von derselben Ordnung ist wie X_1, Y_1, Z_1. Läßt man Glieder von der Ordnung $\frac{g}{V}$ fort, so bliebe dann

$$\left\{\begin{aligned} X &= X_1, \\ Y &= Y_1, \\ Z &= Z_1, \\ iVT &= i\left(\frac{g_x}{V}X_1 + \frac{g_y}{V}Y_1 + \frac{g_z}{V}Z_1'\right), \end{aligned}\right. \tag{52}$$

und wir hätten

$$
(53)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mu \frac{d^2 x}{d\tau^2} &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{1}{V}\frac{\partial X_t}{\partial t}\,,\\
\mu \frac{d^2 y}{d\tau^2} &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{1}{V}\frac{\partial Y_t}{\partial t}\,,\\
\mu \frac{d^2 z}{d\tau^2} &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{1}{V}\frac{\partial Z_t}{\partial t}\,,\\
\mu \frac{d^2 t}{d\tau^2} &= \frac{g_x}{V}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{1}{V}\frac{\partial X_t}{\partial t}\right)\\
&\quad + \frac{g_y}{V}\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{1}{V}\frac{\partial Y_t}{\partial t}\right)\\
&\quad + \frac{g_z}{V}\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{1}{V}\frac{\partial Z_t}{\partial t}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Davon also werden wir später Gebrauch machen.

Bilden wir noch für den allgemeinen Fall die Gleichung der Energie, so wird nach (36) (S. 351)

$$
g_x X_1 + g_y Y_1 + g_z Z_1 - V^2 T_1 + (g_x X_1 + g_y Y_1 + g_z Z_1 - V^2 T_1)\left(\frac{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2 - V^2}{V^2 - g^2}\right) = 0\,.
$$

Diese Gleichung ist identisch erfüllt, bei den gemachten Ansätzen kann sie also entfallen. Das gilt auch, wenn die angegebenen Näherungsformeln (52) angesetzt werden, nicht aber bei Benutzung der Näherungsformeln (51). Daraus folgt, daß wenn man in X, Y, Z Glieder von der Ordnung $\frac{g}{V}$ beibehält, man in iVT Glieder von der Ordnung $\left(\frac{g}{V}\right)^2$ berücksichtigen muß. Die letzte Gleichung in (51) wäre also, wie bemerkt, in der Tat unvollständig; konsequent wäre jedoch das System (52)

Wir untersuchen noch, wie sich die einzelnen Größen gegenüber Minkowski-Lorentz-Transformationen verhalten.

Führen wir statt der Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 ein x_1', x_2', x_3', x_4', so haben wir z. B.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1'} + \frac{\partial x_2'}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2'} + \frac{\partial x_3'}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_3'} + \frac{\partial x_4'}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_4'}\\
&= \alpha_{11}\frac{\partial}{\partial x_1'} + \alpha_{21}\frac{\partial}{\partial x_2'} + \alpha_{31}\frac{\partial}{\partial x_3'} + \alpha_{41}\frac{\partial}{\partial x_4'}\,,
\end{aligned}
$$

letzteres nach den Transformationsgleichungen (36_1) (S. 296). Hiernach wird z. B.

$$
\begin{aligned}
X_1 = &+ \frac{\partial}{\partial x_1'}(\alpha_{11} X_x + \alpha_{12} X_y + \alpha_{13} X_z - i\alpha_{14} X_t) + \frac{\partial}{\partial x_2'}(\alpha_{21} X_x + \alpha_{22} X_y + \alpha_{23} X_z - i\alpha_{24} X_t)\\
&+ \frac{\partial}{\partial x_3'}(\alpha_{31} X_x + \alpha_{32} X_y + \alpha_{33} X_z - i\alpha_{34} X_t) + \frac{\partial}{\partial x_4'}(\alpha_{41} X_x + \alpha_{42} X_y + \alpha_{43} X_z - i\alpha_{44} X_t)\,.
\end{aligned}
$$

Setzen wir jetzt

$$
(54)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\bar X_x = \alpha_{11} X_x + \alpha_{12} X_y + \alpha_{13} X_z - \alpha_{14}\, i X_t\,, & \bar Y_x = \alpha_{11}\; Y_x + \alpha_{12}\; Y_y + \alpha_{13}\; Y_z - \alpha_{14}\, i Y_t\,,\\
\bar X_y = \alpha_{21} X_x + \alpha_{22} X_y + \alpha_{23} X_z - \alpha_{24}\, i X_t\,, & \bar Y_y = \alpha_{21}\; Y_x + \alpha_{22}\; Y_y + \alpha_{23}\; Y_z - \alpha_{24}\, i Y_t\,,\\
\bar X_z = \alpha_{31} X_x + \alpha_{32} X_y + \alpha_{33} X_z - \alpha_{34}\, i X_t\,, & \bar Y_z = \alpha_{31}\; Y_x + \alpha_{32}\; Y_y + \alpha_{33}\; Y_z - \alpha_{34}\, i Y_t\,,\\
-i \bar X_t = \alpha_{41} X_x + \alpha_{42} X_y + \alpha_{43} X_z - \alpha_{44}\, i X_t\,, & -i \bar Y_t = \alpha_{41}\; Y_x + \alpha_{42}\; Y_y + \alpha_{43}\; Y_z - \alpha_{44}\, i Y_t\,,\\[1ex]
\bar Z_x = \alpha_{11} Z_x + \alpha_{12} Z_y + \alpha_{13} Z_z - \alpha_{14}\, i Z_t\,, & -i \bar T_x = -\alpha_{11}\, i T_x - \alpha_{12}\, i T_y - \alpha_{13}\, i T_z + \alpha_{14}\; T_t\,,\\
\bar Z_y = \alpha_{21} Z_x + \alpha_{22} Z_y + \alpha_{23} Z_z - \alpha_{24}\, i Z_t\,, & -i \bar T_y = -\alpha_{21}\, i T_x - \alpha_{22}\, i T_y - \alpha_{23}\, i T_z + \alpha_{24}\; T_t\,,\\
\bar Z_z = \alpha_{31} Z_x + \alpha_{32} Z_y + \alpha_{33} Z_z - \alpha_{34}\, i Z_t\,, & -i \bar T_z = -\alpha_{31}\, i T_x - \alpha_{32}\, i T_y - \alpha_{33}\, i T_z + \alpha_{34}\; T_t\,,\\
-i \bar Z_t = \alpha_{41} Z_x + \alpha_{42} Z_y + \alpha_{43} Z_z - \alpha_{44}\, i Z_t\,, & \bar T_t = -\alpha_{41}\, i T_x - \alpha_{42}\, i T_y - \alpha_{43}\, i T_z + \alpha_{44}\; T_t\,,
\end{array}\right.
$$

so folgt

$$
(46_2)\quad \left\{\begin{aligned}
X_1 &= +\frac{\partial \bar X_x}{\partial x_1'} + \frac{\partial \bar X_y}{\partial x_2'} + \frac{\partial \bar X_z}{\partial x_3'} - i\frac{\partial \bar X_t}{\partial x_4'}\,,\\
Y_1 &= +\frac{\partial \bar Y_x}{\partial x_1'} + \frac{\partial \bar Y_y}{\partial x_2'} + \frac{\partial \bar Y_z}{\partial x_3'} - i\frac{\partial \bar Y_t}{\partial x_4'}\,,\\
Z_1 &= +\frac{\partial \bar Z_x}{\partial x_1'} + \frac{\partial \bar Z_y}{\partial x_2'} + \frac{\partial \bar Z_z}{\partial x_3'} - i\frac{\partial \bar Z_t}{\partial x_4'}\,,\\
i V T_1 &= -i\frac{\partial \bar T_x}{\partial x_1'} - i\frac{\partial \bar T_y}{\partial x_2'} - i\frac{\partial \bar T_z}{\partial x_3'} + \frac{\partial \bar T_t}{\partial x_4'}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Wir multiplizieren die Gleichungen erst mit α_{11}, α_{12}, α_{13}, α_{14}, dann mit α_{21}, α_{22}, α_{23}, α_{24}, mit α_{31}, α_{32}, α_{33}, α_{34}, zuletzt mit α_{41}, α_{42}, α_{43}, α_{44} und addieren jedesmal. Da X_1, Y_1, Z_1, $-iVT_1$ Komponenten eines Vektors sind, so transformieren sie sich wie Koordinaten, so daß im Koordinatensystem x_1', x_2', x_3', x_4' wird

$$
(55_1)\quad \left\{\begin{aligned}
X_1' &= \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} Y_1 + \alpha_{13} Z_1 + \alpha_{14}\, i V T_1\,,\\
Y_1' &= \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} Y_1 + \alpha_{23} Z_1 + \alpha_{24}\, i V T_1\,,\\
Z_1' &= \alpha_{31} X_1 + \alpha_{32} Y_1 + \alpha_{33} Z_1 + \alpha_{34}\, i V T_1\,,\\
i V T_1' &= \alpha_{41} X_1 + \alpha_{42} Y_1 + \alpha_{43} Z_1 + \alpha_{44}\, i V T_1\,.
\end{aligned}\right.
$$

Bedeuten aber $X_{x'}'$, ..., $T_{t'}'$ die Komponenten der Spannungen im System x_1', x_2', x_3', x_4', so soll auch gelten

$$
(55_2)\quad \left\{\begin{aligned}
X_1' &= +\frac{\partial X_{x'}'}{\partial x_1'} + \frac{\partial X_{y'}'}{\partial x_2'} + \frac{\partial X_{z'}'}{\partial x_3'} - i\frac{\partial X_{t'}'}{\partial x_4'}\,,\\
Y_1' &= +\frac{\partial Y_{x'}'}{\partial x_1'} + \frac{\partial Y_{y'}'}{\partial x_2'} + \frac{\partial Y_{z'}'}{\partial x_3'} - i\frac{\partial Y_{t'}'}{\partial x_4'}\,,\\
Z' &= +\frac{\partial Z_{x'}'}{\partial x_1'} + \frac{\partial Z_{y'}'}{\partial x_2'} + \frac{\partial Z_{z'}'}{\partial x_3'} - i\frac{\partial Z_{t'}'}{\partial x_4'}\,,\\
i V T_1' &= -i\frac{\partial T_{x'}'}{\partial x_1'} - i\frac{\partial T_{y'}'}{\partial x_2'} - i\frac{\partial T_{z'}'}{\partial x_3'} + \frac{\partial T_{t'}'}{\partial x_4'}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Hieraus folgt

$$
(55_3)\left\{\begin{array}{ll}
X'_{x'}=+\alpha_{11}\,\bar{X}_x+\alpha_{12}\,\bar{Y}_x+\alpha_{13}\,\bar{Z}_x-\alpha_{14}\,i\,\bar{T}_x\,, & Y'_{x'}=+\alpha_{21}\,\bar{X}_x+\alpha_{22}\,\bar{Y}_x+\alpha_{23}\,\bar{Z}_x-\alpha_{24}\,i\,\bar{T}_x\,,\\
X'_{y'}=+\alpha_{11}\,\bar{X}_y+\alpha_{12}\,\bar{Y}_y+\alpha_{13}\,\bar{Z}_y-\alpha_{14}\,i\,\bar{T}_y\,, & Y'_{y'}=+\alpha_{21}\,\bar{X}_y+\alpha_{22}\,\bar{Y}_y+\alpha_{23}\,\bar{Z}_y-\alpha_{24}\,i\,\bar{T}_y\,,\\
X'_{z'}=+\alpha_{11}\,\bar{X}_z+\alpha_{12}\,\bar{Y}_z+\alpha_{13}\,\bar{Z}_z-\alpha_{14}\,i\,\bar{T}_z\,, & Y'_{z'}=+\alpha_{21}\,\bar{X}_z+\alpha_{22}\,\bar{Y}_z+\alpha_{23}\,\bar{Z}_z-\alpha_{24}\,i\,\bar{T}_z\,,\\
-i\,X'_{t'}=-\alpha_{11}\,i\,\bar{X}_t-\alpha_{12}\,i\,\bar{Y}_t-\alpha_{13}\,i\,\bar{Z}_t+\alpha_{14}\,\bar{T}_t\,, & -i\,Y'_{t'}=-\alpha_{21}\,i\,\bar{X}_t-\alpha_{22}\,i\,\bar{Y}_t-\alpha_{23}\,i\,\bar{Z}_t+\alpha_{24}\,\bar{T}_t\,,\\[1ex]
Z'_{x'}=+\alpha_{31}\,\bar{X}_x+\alpha_{32}\,\bar{Y}_x+\alpha_{33}\,\bar{Z}_x-\alpha_{34}\,i\,\bar{T}_x\,, & -i\,T'_{x'}=+\alpha_{41}\,\bar{X}_x+\alpha_{42}\,\bar{Y}_x+\alpha_{43}\,\bar{Z}_x-\alpha_{44}\,i\,\bar{T}_x\,,\\
Z'_{y'}=+\alpha_{31}\,\bar{X}_y+\alpha_{32}\,\bar{Y}_y+\alpha_{33}\,\bar{Z}_y-\alpha_{34}\,i\,\bar{T}_y\,, & -i\,T'_{y'}=+\alpha_{41}\,\bar{X}_y+\alpha_{42}\,\bar{Y}_y+\alpha_{43}\,\bar{Z}_y-\alpha_{44}\,i\,\bar{T}_y\,,\\
Z'_{z'}=+\alpha_{31}\,\bar{X}_z+\alpha_{32}\,\bar{Y}_z+\alpha_{33}\,\bar{Z}_z-\alpha_{34}\,i\,\bar{T}_z\,, & -i\,T'_{z'}=+\alpha_{41}\,\bar{X}_z+\alpha_{42}\,\bar{Y}_z+\alpha_{43}\,\bar{Z}_z-\alpha_{44}\,i\,\bar{T}_z\,,\\
-i\,Z'_{t'}=-\alpha_{31}\,i\,\bar{X}_t-\alpha_{32}\,i\,\bar{Y}_t-\alpha_{33}\,i\,\bar{Z}_t+\alpha_{34}\,\bar{T}_t\,, & T'_{t'}=-\alpha_{41}\,i\,\bar{X}_t-\alpha_{42}\,i\,\bar{Y}_t-\alpha_{43}\,i\,\bar{Z}_t+\alpha_{44}\,\bar{T}_t\,.
\end{array}\right.
$$

Führt man hierin die Werte der $\bar{X}_x\ldots$ nach (54) ein, so bekommt man beispielsweise

$$
\begin{aligned}
X'_{x'} = \alpha_{11}^2 X_x &+ \alpha_{11}\alpha_{12} X_y + \alpha_{11}\alpha_{13} X_z - \alpha_{11}\alpha_{14}\, i X_t \\
&+ \alpha_{12}\alpha_{11} Y_x + \alpha_{12}^2 Y_y + \alpha_{12}\alpha_{13} Y_z - \alpha_{12}\alpha_{14}\, i Y_t \\
&+ \alpha_{13}\alpha_{11} Z_x + \alpha_{13}\alpha_{12} Z_y + \alpha_{13}^2 Z_z - \alpha_{13}\alpha_{14}\, i Z_t \\
&- \alpha_{14}\alpha_{11}\, i T_x - \alpha_{14}\alpha_{12}\, i T_y - \alpha_{14}\alpha_{13}\, i T_z + \alpha_{14}^2 T_t
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
X'_{x'} = \alpha_{11}^2 X_x + \alpha_{12}^2 Y_y + \alpha_{13}^2 Z_z + \alpha_{14}^2 T_t \\
+ 2\alpha_{11}\alpha_{12}\left(\frac{X_y+Y_x}{2}\right) + 2\alpha_{11}\alpha_{13}\left(\frac{X_z+Z_x}{2}\right) + 2\alpha_{12}\alpha_{13}\left(\frac{Y_z+Z_y}{2}\right) \\
+ 2\alpha_{11}\alpha_{14}\left(\frac{X_t+T_x}{2i}\right) + 2\alpha_{12}\alpha_{14}\left(\frac{Y_t+T_y}{2i}\right) + 2\alpha_{13}\alpha_{14}\left(\frac{Z_t+T_z}{2i}\right).
\end{aligned}
$$

Beachtet man die Gleichungen (36_1) (S. 296), so folgt, daß die Faktoren der $X_x\ldots$ dieselben sind wie in $x_1'^2 = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4)^2$. Entsprechend findet man, daß in $X'_{y'}$ usf. die Faktoren dieselben sind wie in $x'y',\ldots$ Es transformieren sich also die $X_x,\ldots, T_t$ nach demselben Gesetz wie die Quadrate und Produkte der Koordinaten (S. 119), wobei statt x^2, y^2, z^2, t^2 zu setzen ist X_x, Y_y, Z_z, T_t und für xy, zt usf. zu setzen ist $\dfrac{X_y+Y_x}{2}$, $\dfrac{Z_t+T_z}{2i}$ usf. Die $X_x,\ldots, T_t$ sind Tensoren. Daraus ergibt sich weiter: Da wir haben

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2\,,$$

so folgt

$$(56)\qquad X_x + Y_y + Z_z + T_t = X'_{x'} + Y'_{y'} + Z'_{z'} + T'_{t'}\,,$$

so daß die Summe der Diagonalspannungen eine invariante Größe darstellt. Weil ferner $x_1'x_2' = x_2'x_1'$ ist, so folgt weiter, daß die Gleichungen (22) (S. 348) auch für die transformierten Größen gelten. Also ist auch

$$
(57)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
X'_{y'} = Y'_{x'}\,, & Y'_{z'} = Z'_{y'}\,, & Z'_{x'} = X'_{z'}\,,\\
X'_{t'} = T'_{x'}\,, & Y'_{t'} = T'_{y'}\,, & Z'_{t'} = T'_{z'}\,.
\end{array}\right.
$$

Wir führen die Rechnung durch für die eigentliche Lorentz-Einstein-Transformation, setzen also $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$, $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{24} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{41} = \alpha_{42} = 0$ und bekommen nach der angegebenenen Regel, indem wie S. 295 geschrieben wird

$$\alpha_{33} = \alpha_{44} = \delta\,, \qquad \alpha_{34} = -\alpha_{43} = \sqrt{1-\delta^2}\,.$$

nach obiger Regel

$$(58)\quad \left\{\begin{array}{ll}
X'_{x'} = X_x\,, & Y'_{x'} = Y_x\,,\\
X'_{y'} = X_y\,, & Y'_{y'} = Y_y\,,\\
X'_{z'} = \delta X_z - i\sqrt{1-\delta^2}X_t\,, & Y'_{z'} = \delta Y_z - i\sqrt{1-\delta^2}Y_t\,,\\
-iX'_{t'} = -\sqrt{1-\delta^2}X_z - i\delta X_t\,, & -iY'_{t'} = -\sqrt{1-\delta^2}Y_z - i\delta Y_t\,,\\
Z'_{x'} = \delta Z_x - i\sqrt{1-\delta^2}T_x\,, & -iT'_{x'} = -\sqrt{1-\delta^2}Z_x - i\delta T_x\,,\\
Z'_{y'} = \delta Z_y - i\sqrt{1-\delta^2}T_y\,, & -iT'_{y'} = -\sqrt{1-\delta^2}Z_y - i\delta T_y\,,\\
Z'_{z'} = \delta^2 Z_z - 2i\delta\sqrt{1-\delta^2}Z_t + (1-\delta^2)T_t\,, & -iT'_{z'} = -\delta\sqrt{1-\delta^2}Z_z + i(1-2\delta^2)T_z + \delta\sqrt{1-\delta^2}T_t\,,\\
-iZ'_{t'} = -\delta\sqrt{1-\delta^2}Z_z + i(1-2\delta^2)Z_t + \delta\sqrt{1-\delta^2}T_t\,, & T'_{t'} = (1-\delta^2)Z_z + 2i\delta\sqrt{1-\delta^2}T_z + \delta^2 T_t\,.
\end{array}\right.$$

Rechnet man mit dem Lorentz-Einsteinschen Wert

$$(59)\qquad \delta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\,, \qquad \sqrt{1-\delta^2} = i\,\frac{p}{V}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\,,$$

so wird also

$$(60)\quad \left\{\begin{array}{ll}
X'_{x'} = X_x\,, & Y'_{x'} = Y_x\,,\\
X'_{y'} = X_y\,, & Y'_{y'} = Y_y\,,\\
X'_{z'} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left(X_z + \dfrac{p}{V}X_t\right), & Y'_{z'} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left(Y_z + \dfrac{p}{V}Y_t\right),\\
X'_{t'} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left(X_t + \dfrac{p}{V}X_z\right), & Y'_{t'} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left(Y_t + \dfrac{p}{V}Y_z\right),\\
Z'_{x'} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left(Z_x + \dfrac{p}{V}T_x\right), & T'_{x'} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left(T_x + \dfrac{p}{V}Z_x\right),\\
Z'_{y'} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left(Z_y + \dfrac{p}{V}T_y\right), & T'_{y'} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\left(T_y + \dfrac{p}{V}Z_y\right),\\
Z'_{z'} = \dfrac{1}{1-\frac{p^2}{V^2}}\left\{Z_z + \dfrac{p}{V}\left(2Z_t - \dfrac{p}{V}T_t\right)\right\}, & T'_{z'} = \dfrac{1}{1-\frac{p^2}{V^2}}\left\{\left(1+\dfrac{p^2}{V^2}\right)T_z + \dfrac{p}{V}\left(Z_z - T_t\right)\right\},\\
Z'_{t'} = \dfrac{1}{1-\frac{p^2}{V^2}}\left\{\left(1+\dfrac{p^2}{V^2}\right)Z_t + \dfrac{p}{V}\left(Z_z - T_t\right)\right\}, & T'_{t'} = \dfrac{1}{1-\frac{p^2}{V^2}}\left\{T_t - \dfrac{p}{V}\left(2T_z + \dfrac{p}{V}Z_z\right)\right\}.
\end{array}\right.$$

Zu den Größen, die sich wie Vektoren transformieren, gehören auch die $g\,dt$. Also haben wir

$$(g_x X_1 + g_y Y_1 + g_z Z_1 + g_t i V T_1)\,dt$$
$$= (\alpha_{11} g'_{x'} + \alpha_{21} g'_{y'} + \alpha_{31} g'_{z'} + \alpha_{41} g'_{t'})(\alpha_{11} X'_1 + \alpha_{21} Y'_1 + \alpha_{31} Z'_1 + \alpha_{41} i V T'_1)\,dt'$$
$$+ (\alpha_{12} g'_{x'} + \alpha_{22} g'_{y'} + \alpha_{32} g'_{z'} + \alpha_{42} g'_{t'})(\alpha_{12} X'_1 + \alpha_{22} Y'_1 + \alpha_{32} Z'_1 + \alpha_{42} i V T'_1)\,dt'$$
$$+ (\alpha_{13} g'_{x'} + \alpha_{23} g'_{y'} + \alpha_{33} g'_{z'} + \alpha_{43} g'_{t'})(\alpha_{13} X'_1 + \alpha_{23} Y'_1 + \alpha_{33} Z'_1 + \alpha_{43} i V T'_1)\,dt'$$
$$+ (\alpha_{14} g'_{x'} + \alpha_{24} g'_{y'} + \alpha_{34} g'_{z'} + \alpha_{44} g'_{t'})(\alpha_{14} X'_1 + \alpha_{24} Y'_1 + \alpha_{34} Z'_1 + \alpha_{44} i V T'_1)\,dt'$$

und das gibt wegen der Gleichungen (5) und (6) (S. 281)

$$(61)\quad (g_x X_1 + g_y Y_1 + g_z Z_1 + g_t i V T_1)\,dt = (g'_{x'} X'_1 + g'_{y'} Y'_1 + g'_{z'} Z'_1 + g'_{t'} i V T'_1)\,dt'.$$

Die links stehende Größe ist also invariant, sie stellt ja auch eine Arbeit dar. Setzen wir

$$(62')\qquad G^2 = g_x^2 + g_y^2 + g_z^2 + g_t^2\, G^2 - V^2,$$

so ist auch $G^2 dt^2$ invariant, indem man hat

$$(62)\qquad G^2\, dt^2 = G'^2\, dt'^2.$$

Aus allem folgt nach (47_1) (S. 354), daß auch X_2, Y_2, Z_2, T_2 sich wie Koordinaten transformieren. Somit transformieren sich die X, Y, Z, T trotz ihres Ausdruckes durch Tensorgrößen überhaupt wie Koordinaten, sie sind ja auch Vektoren, und das gleiche gilt von den $R_{\tau x}$, $R_{\tau y}$, $R_{\tau z}$, $R_{\tau t}$. Endlich wird bemerkt, daß zufolge (3) (S. 343) auch $d\tau$ invariant ist, wenn, was übrigens immer vorausgesetzt worden ist, V im Sinne Einsteins für alle Bezugssysteme den gleichen Wert hat. Demnach wäre

$$(63)\qquad d\tau' = d\tau\,.$$

Und so bekommt man zuletzt das Ergebnis, daß die Bewegungsgleichungen in der Tat ein kovariantes System darstellen, und man hat auch

$$(64)\qquad \left|\begin{aligned} m\frac{d^2 x'}{d\tau'^2} &= R'_{\tau' x'}\,,\\ m\frac{d^2 y'}{d\tau'^2} &= R'_{\tau' y'}\,,\\ m\frac{d^2 z'}{d\tau'^2} &= R'_{\tau' z'}\,,\\ m\frac{d^2 t'}{d\tau'^2} &= R'_{\tau' t'}\,.\end{aligned}\right.$$

Da zum Bezugssystem x, y, z als Zeit nicht eigentlich τ, sondern t gehört, so scheint in den Minkowskischen Gleichungen eine Art Inkonsequenz zu liegen und richtiger zu sein, sie nach (1_2) (S. 343) und (62′) in der Form

$$(65)\qquad \left|\begin{aligned} m\frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{-G^2}{V^2} R_{\tau x}\,,\\ m\frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{-G^2}{V^2} R_{\tau y}\,,\\ m\frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{-G^2}{V^2} R_{\tau z}\,,\\ m\frac{d^2 t}{dt^2} &= \frac{-G^2}{V^2} R_{\tau t}\end{aligned}\right.$$

zu schreiben. Hier ist zwar dt^2 nicht invariant, wohl aber nach (62) $G^2\,dt^2$. Das Relativitätsprinzip bleibt also auch jetzt anwendbar. Setzt man

$$(66)\qquad \begin{cases} \int \nu\, d J_t = n\,, \\ \int X\, d J_t = R_{tx}\,, \\ \int Y\, d J_t = R_{ty}\,, \\ \int Z\, d J_t = R_{tz}\,, \end{cases}$$

so wird noch konsequenter

$$(67)\qquad \begin{cases} n\dfrac{d^2 x}{dt^2} = \dfrac{-G^2}{V^2} R_{tx}\,, \\ n\dfrac{d^2 y}{dt^2} = \dfrac{-G^2}{V^2} R_{ty}\,, \\ n\dfrac{d^2 z}{dt^2} = \dfrac{-G^2}{V^2} R_{tz}\,, \\ n\dfrac{d^2 t}{dt^2} = \dfrac{-G^2}{V^2} R_{tt}\,. \end{cases}$$

n ist die Masse entlang der t-Achse und diese Achse entlang konstant (S. 345), die R_{tx} usf. sind Kräfte in Querschnitten normal zur t-Achse. Da nach Gleichung (10) (S. 345)

$$(68)\qquad n = m$$

ist, so folgt

$$(69)\qquad R_{tx} = R_{\tau x}\,,\quad R_{ty} = R_{\tau y}\,,\quad R_{tz} = R_{\tau z}\,,\quad R_{tt} = R_{\tau t}\,,$$

Beziehungen, die seltsam genug anmuten; für Massen und Kräfte ist es gleich, ob wir sie auf normale Querschnitte der Zeitachse oder der Raum-Zeit-Fäden beziehen.

Man wird noch fragen, wie sich die „Masse“ gegenüber einem Übergang von einem Bezugsystem zu einem anderen Bezugsystem verhält. Da man z. B. hat

$$(70)\qquad m = \int \mu\, d J_t = \int \frac{\mu}{dt}\, d J_t\, dt = \iiint_{\tau} \frac{\mu}{dt}\, dx\, dy\, dz\, dt$$

und $dx\,dy\,dz\,dt$ invariant ist, so müßte, wenn m invariant sein soll, $\dfrac{\mu}{dt}$ invariant sich zeigen, d. h. es müßte sein

$$(71)\qquad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{dt'}{dt}\,,$$

das entspricht der Planckschen Beziehung (16) (S. 326) für $\dfrac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}'}$.

Nach Gleichung (9) (S. 345) hätten wir dann, da $d\tau$ invariant ist [Gleichung (63)],

$$(72)\qquad \frac{\nu'}{\nu} = \frac{\mu'}{\mu}\,\frac{dt'}{dt} = \left(\frac{dt'}{dt}\right)^2 .$$

Minkowski hat die „Massen“ für invariant gehalten, sonst beständen ja seine Gleichungen nicht vor dem Relativitätsprinzip. Die beiden Massendichten würden sich hiernach den obigen Gleichungen entsprechend transformieren, es wären $\frac{\mu}{dt}$ und $\frac{\nu}{dt^2}$ invariant. Das ist eine Folge der von Minkowski gewählten „hydrodynamischen" Behandlung der Aufgabe, die auch die „Massen" hydrodynamisch definiert.

Zu der vierten Annahme ist zunächst wegen der Spannungswirkung etwas zu bemerken. Die Spannungsfunktion selbst ist

$$(73_1)\qquad W = \frac{1}{V}\iiiint \sum_{h=1}^{h=4}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4} S_{\varkappa h}\frac{\partial x_h}{\partial x_\varkappa}\,dx\,dy\,dz\,dt\,.$$

Da

$$\frac{\partial x_h}{\partial x_\varkappa} = 0\,,\quad h \gtrless \varkappa\,;\qquad \text{und}\qquad \frac{\partial x_h}{\partial x_\varkappa} = 1\,,\quad h = \varkappa$$

ist, so wird

$$(73_2)\qquad W = \frac{1}{V}\iiiint \sum_{h=1}^{h=4} S_{hh}\,dx\,dy\,dz\,dt\,,$$

d. h. nach (21) (S. 348)

$$(73_3)\qquad W = \frac{1}{V}\iiiint (X_x + Y_y + Z_z + T_t)\,dx\,dy\,dz\,dt\,,$$

also gleich der Summe der Achsenspannungen im betreffenden Weltgebiet. W ist hiernach zufolge Gleichung (56) (S. 358), und weil $dx\,dy\,dz\,dt$ invariant sich verhält, invariant.

Für die Spannungswirkung haben wir nach (23_2) (S. 348)

$$(74_1)\qquad \delta W = \frac{1}{i\,V^2}\iiiint \sum_{h=1}^{h=4}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4} S_{\varkappa h}\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_\varkappa}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,.$$

Da die δx an den Enden Null sind, wird auch

$$(74_2)\qquad \delta W = -\frac{1}{i\,V^2}\iiiint \sum_{h=1}^{h=4}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4} \delta x_h\frac{\partial S_{\varkappa h}}{\partial x_\varkappa}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$$

oder nach (45) (S. 353)

$$(74_3)\quad \delta W = -\frac{1}{i\,V^2}\iiiint (X_1\,\delta x_1 + Y_1\,\delta x_2 + Z_1\,\delta x_3 + i\,V\,T_1\,\delta x_4)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,.$$

Der Klammerausdruck zeigt sich in demselben Sinne invariant, wie sich $(X_1 g_x + Y_1 g_y + Z_1 g_z + i\,V\,T_1 g_t)\,dt$ invariant erwiesen hat. Da auch $dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$ invariant ist, so folgt, daß auch δW die Eigenschaft der Invarianz besitzt, und wir haben

$$(74_3')\ \delta W' = -\frac{1}{i\,V^2}\iiiint (X_1'\,\delta x_1' + Y_1'\,\delta x_2' + Z_1'\,\delta x_3' + i\,V\,T_1'\,\delta x_4')\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3'\,dx_4'\,,$$

also

$$(75)\qquad \delta W' = \delta W\,.$$

Geht man auf (74_1) zurück, so folgt übrigens nach den Gleichungen (21) (S. 348) in anderer Form

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned} \delta W = \frac{1}{i V^2}\iiiint \Big\{ &+ X_x \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1} + X_y \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_2} + X_z \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_3} - i X_t \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_4} \\ &+ Y_x \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_1} + Y_y \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2} + Y_z \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_3} - i Y_t \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_4} \\ &+ Z_x \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_1} + Z_y \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_2} + Z_z \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_3} - i Z_t \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_4} \\ &- i T_x \frac{\partial \delta x_4}{\partial x_1} - i T_y \frac{\partial \delta x_4}{\partial x_2} - i T_z \frac{\partial \delta x_4}{\partial x_3} + T_t \frac{\partial \delta x_4}{\partial x_4} \Big\} dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 \,. \end{aligned}\right.$$

Diese Größe δW ist also nach Analogie der elastischen oder hydrodynamischen virtuellen Arbeit gebildet unter Erweiterung auf die hinzugenommene Zeitdimension.

Wir gehen auch auf die Berechnung der Massenwirkung ein. Nach (16_2) (S. 347) ist

$$(77)\qquad \mathsf{N} = \iiiint \mu\, d J_r\, d\tau \,.$$

Also bedeutet N die Masse eines Raum-Zeit-Fadens zwischen zwei Querschnitten und sie ist unvariant. Weiter haben wir

$$(78_1)\qquad \delta\mathsf{N} = \iiiint \delta(\mu\, d J_r\, d\tau) \,.$$

$\delta(\mu d J_r)$ gibt die Änderung dieser Masse bei der virtuellen Deformierung des Fadens zwischen den zwei festen Enden. Diese Änderung wird nun durch (17) (S. 347) an die Bedingung geknüpft, daß für jeden Querschnitt die Masse während der ganzen Verrückung sich unverändert erhält, so daß jedes $\mu\, d J_r$ in bezug auf die Verrückung konstant bleibt (vgl. S. 368). Alsdann haben wir

$$(78_2)\qquad \delta\mathsf{N} = \iiiint \mu\, d J_r\, \delta(d\tau)$$

und $\delta\mathsf{N}$ gäbe hiernach die longitudinale Änderung der longitudinalen Masse des Fadens durch die normale Deformation. Nach Analogie der Hydrodynamik wird diese Größe als Arbeit aufgefaßt, und so bezieht sich Minkowskis Minimumsatz auf die virtuelle Arbeit der Massenänderung und der Lagenänderung, letztere unter dem Einfluß der Spannungen. So erläutern sich Minkowskis Ansätze nacheinander.

Eigenartig aber wiederum ganz hydrodynamisch gedacht ist die Bedingung, an die das Minimum gebunden wird, daß nämlich nur solche virtuelle Verrückungen in Frage kommen sollen, bei denen der Faden normal zu seiner Erstreckung sich verschiebt. Sie ist notwendig, um von dem Satz von der Erhaltung der Querschnittmassen Gebrauch machen zu können. Diese Bedingung aber ist es, durch die die von den Geschwindigkeiten abhängigen Teile X_2, Y_2, Z_2, T_2 der Kräfte eingeführt werden, ohne sie würden diese Kräfte in den Bewegungsgleichungen nicht enthalten sein.

Wir kehren zu den Minkowskischen Gleichungen (34), (35), (36), an Zahl sechs, von denen aber nur fünf als voneinander unabhängig angesehen werden können (S. 350, 351), zurück.

Die Hauptkräfte sind X_1, Y_1, Z_1, T_1. Multiplizieren wir ihre Ausdrücke unter (46) (S. 354) mit $dx\,dy\,dz$ und integrieren, so wird

$$
(79)\quad \begin{cases}
\iiint X_1\,dx\,dy\,dz + \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t}\iiint X_t\,dx\,dy\,dz \\
\quad = \iint (X_x\cos(n,x) + X_y\cos(n,y) + X_z\cos(n,z))\,dS = \iint X_n\,dS\,, \\
\iiint Y_1\,dx\,dy\,dz + \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t}\iiint Y_t\,dx\,dy\,dz \\
\quad = \iint (Y_x\cos(n,x) + Y_y\cos(n,y) + Y_z\cos(n,z))\,dS = \iint Y_n\,dS\,, \\
\iiint Z_1\,dx\,dy\,dz + \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t}\iiint Z_t\,dx\,dy\,dz \\
\quad = \iint (Z_x\cos(n,x) + Z_y\cos(n,y) + Z_z\cos(n,z))\,dS = \iint Z_n\,dS\,,
\end{cases}
$$

wo S die Oberfläche des Integrationsraumes bedeutet und n die Normale an dS.

Nach Analogie der klassischen Mechanik schließen wir hieraus, daß $\frac{1}{V}X_t$, $\frac{1}{V}Y_t$, $\frac{1}{V}Z_t$, von der Art der Komponenten eines Bewegungsmomentes sind, und die Gleichungen besagen, daß die bewegenden Kräfte einschließlich gewisser bewegender Impulse innerhalb eines Raumes gleich sind den Spannungen an der Oberfläche dieses Raumes.

Nennen wir noch die Resultierende der Komponenten $\frac{1}{V}X_t$, $\frac{1}{V}Y_t$, $\frac{1}{V}Z_t$, die also eine Größe von der Art eines Bewegungsmoments darstellt, Γ_t,

$$
(80)\qquad \Gamma_t = \frac{1}{V}\sqrt{X_t^2 + Y_t^2 + Z_t^2}
$$

und eine Größe von der Art der Poyntingschen Energieströmung $\mathfrak{P}$, so wäre (S. 348)

$$
(81)\qquad \Gamma_t = \frac{\mathfrak{P}}{V^2}\,.
$$

Es entspricht so Γ_t der S. 242 mit $\mathfrak{g}$ bezeichneten Größe. Die Gleichung (81) wird oft als Satz von der Trägheit der Energie bezeichnet.

Wir haben noch als vierte Beziehung

$$
(82)\quad \begin{cases}
\iiint T_1\,dx\,dy\,dz + \frac{1}{V^2}\frac{\partial}{\partial t}\iiint T_t\,dx\,dy\,dz \\
= -\frac{1}{V}\iiint (T_x\cos(n,x) + T_y\cos(n,y) + T_z\cos(n,z))\,dS = -\frac{1}{V}\iint T_n\,dS\,.
\end{cases}
$$

Da dem Obigen zufolge, abgesehen von einem Massenfaktor, T_n von der Art einer Geschwindigkeit ist, so gibt T_1 eine Größe von der Art des Reziproken einer Zeit, und $\frac{1}{V^2}T_t$ eine solche wie ein Logarithmus der Zeit. Es ist also T_t mit Bezug auf die Zeit eine skalare Größe; sie soll ja auch einer Energiedichte entsprechen. Auch T_1 muß nach der Zeit als skalare Größe bezeichnet werden. Außerdem kommt die Masse als Faktor hinzu.

Die Feststellungen über X_1, Y_1, Z_1, T_1 gelten in gleicher Weise für die X_2, Y_2, Z_2, T_2, also auch für die X, Y, Z, T und nicht minder für $R_{\tau x}$, $R_{\tau y}$, $R_{\tau z}$, $R_{\tau t}$ bis auf die Massenfaktoren.

Am meisten Aufsehen hat die vierte Bewegungsgleichung erregt.

Minkowski meint, daß dieser vierten Bewegungsgleichung „gleichsam eine höhere physikalische Evidenz zuzuschreiben ist". Wird diese Gleichung zugegeben, so, behauptet Minkowski, folgen die drei anderen sofort nach der Forderung der Symmetrie im Raum-Zeit-System. Und da die vierte Gleichung auch gleichsam dem Satze der Energie entspräche, so wäre die zweite Behauptung gerechtfertigt: „Wird das Relativitätspostulat an die Spitze der Mechanik gestellt, so folgen die vollständigen Bewegungsgesetze allein aus dem Satze von der Energie." Ich muß gestehen, daß mir diese Behauptung doch zu weit zu gehen scheint; die vierte Bewegungsgleichung als solche spricht nicht den Satz von der Energie aus, dieser Satz kann nur an ihre Stelle treten und ist an sich in der Gleichung (40) enthalten. Ich weiß aber nicht, wie aus dieser Gleichung selbst in der Form

$$R_{\tau x}\frac{dx}{d\tau} + R_{\tau y}\frac{dy}{d\tau} + R_{\tau z}\frac{dz}{d\tau} - R_{\tau t}\frac{dL}{d\tau} = 0 \tag{83}$$

zusammen mit dem Relativitätsprinzip, das doch nichts weiter aussagt, als daß eine Transformation im Sinne Minkowskis diese Gleichung (40) in der Form unverändert läßt, die vierte Bewegungsgleichung herausgelesen, geschweige entnommen werden soll. Die obige Behauptung Minkowskis wird oft wiederholt. Aber selbst die einleuchtende erste Behauptung führt nur formal, nicht sachlich zum Ziele, da die Berechnung der Kräfte auf alle Fälle unbekannt bleibt. Diese Berechnung ist nicht eine Folge des Relativitätspostulats, sondern der formalen Übertragung der Mechanik in das Gebiet der Elektrodynamik. Allein mit der vierten Bewegungsgleichung und dem Postulat der Symmetrie der vier Raum-Zeit-Abmessungen erhält man nur die Form der drei andern Bewegungsgleichungen, und bleibt die so eigenartige Darstellung der Kräfte, die wohl das Wertvollste dieser Mechanik bildet, da sie bleiben kann, auch wenn das Relativitätspostulat und das Symmetriepostulat fallen sollten, unbekannt. Gerade Minkowskis geniale Mechanik ist eine physikalische, nicht mathematisch-symbolische, wie zum Schaden der Wissenschaft und der Klarheit der Ideen so unsäglich viele Arbeiten auf dem Gebiete des Relativitätsprinzips.

Wie aber die Kräfte in den einzelnen Fällen zu berechnen sind, dafür haben wir von Minkowski leider nur das Beispiel der Elektrodynamik selbst. Für die Mechanik hat er zwar den Fall der Schwerkraft einer Betrachtung unterzogen, jedoch die Kräfte nicht aus den für sie angegebenen Gleichungen ermittelt, sondern entsprechend dem Newtonschen Attraktionsgesetz. Die Betrachtung[1]) gipfelt in folgendem:

Punktsysteme x, y, z, t; x^*, y^*, z^*, t^*, die den Beziehungen

$$(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 + (z - z^*)^2 = V^2 (t - t^*)^2; \qquad t - t^* \geqq 0 \tag{84}$$

entsprechen, werden als Lichtpunkte voneinander bezeichnet, so, wenn x^*, y^*, z^*, t^* festgehalten wird, ist es Lichtpunkt aller der obigen Bedingung entsprechenden Punkte x, y, z, t, die dann das Strahlengebilde des festen Punktes bilden sollen. Zu jedem Punkte des Gebildes gehört nun eine Raum-Zeit-Linie, die den Lichtpunkt trifft. Wir nehmen zwei Raum-Zeit-Punkte F und F^* mit den Massen m und m^* und die zugehörigen Raum-Zeit-Fäden mit ihren Hauptlinien. BC sei ein Element der Hauptlinie von F, und $B^* C^*$ möge das aus den

[1]) Soweit ich ihr habe folgen können. Minkowskis Arbeiten sind mitunter unsäglich schwer zu verstehen.

Lichtpunkten von B, C auf der Hauptlinie von F^* gebildete entsprechende Element darstellen. Die Richtung von $B^* C^*$ schneide den zu ihr normalen Raumquerschnitt durch B in D^*, und $O A'$ sei der zu dieser Richtung parallele Radiusvektor der hyperboloidischen Schale

$$-x^2 - y^2 - z^2 + V^2 t^2 = k^2, \quad t > 0.$$

Dann wird die bewegende Kraft des Massenpunktes F im Raum-Zeit-Punkt B festgestellt als „derjenige zu $B C$ normale Raum-Zeit-Vektor I. Art, der sich additiv zusammensetzt aus dem Vektor

$$m\, m^* \left(\frac{O A'}{B^* D^*}\right)^3 B D^*$$

in Richtung $B D^*$ und dazu einem geeigneten Vektor in Richtung $B^* C^*$". Ist nun die Hauptlinie von F^* eine Gerade, so kann man sie zur t-Achse wählen und den Raum-Zeit-Nullpunkt O in sie verlegen. Bedeuten alsdann $x, y, z, i V t$ die Koordinaten von B und τ, τ^* die Eigenzeiten von B und B^*, gerechnet von O aus, so soll die obige Festsetzung der bewegenden Kraft zu den Gleichungen führen

$$(85)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{d\tau^2} = -\dfrac{m^* x}{(t-\tau^*)^3}, \quad \dfrac{d^2 y}{d\tau^2} = -\dfrac{m^* y}{(t-\tau^*)^3}, \quad \dfrac{d^2 z}{d\tau^2} = -\dfrac{m^* z}{(t-\tau^*)^3}, \\ \dfrac{d^2 t}{d\tau^2} = -\dfrac{m^*}{(t-\tau^*)^2}\dfrac{d(t-\tau^*)}{dt}, \end{cases}$$

wozu noch kommt

$$(86)\quad x^2 + y^2 + z^2 = V^2 (t-\tau^*)^2,$$

$$(87)\quad \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = V^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - V^2.$$

Die drei ersten Gleichungen geben zufolge der fünften Gleichung die Newtonschen Bewegungsgleichungen. Multipliziert man sie mit $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}$ und addiert, so folgt

$$(88)\quad \frac{d}{d\tau}\left\{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2\right\} = -\frac{m^*}{(t-\tau^*)^3}\frac{d}{d\tau}(x^2 + y^2 + z^2),$$

oder wegen der fünften und sechsten Gleichung

$$(89)\quad \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = -\frac{m^*}{(t-\tau^*)^2}\frac{d}{d\tau}(t-\tau^*),$$

welches die vierte Gleichung darstellt. Diese ist hiernach wie die sechste eine Definitionsgleichung für den Zusammenhang der Zeiten t, τ. Mit Hilfe der Keplerschen Gleichung, die Minkowski

$$(90)\quad n\tau = E - e \sin E$$

schreibt, worin e die Exzentrizität, E die exzentrische Anomalie bedeutet und $n = \frac{\mathsf{T}}{2\pi}$ ist, falls T den Zuwachs an Eigenzeit bedeutet für einen vollen Umlauf in der elliptischen Bahn, findet Minkowski aus der sechsten Gleichung nach bekannten Berechnungen für elliptische Bahnen

$$(91)\quad \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1 = \frac{g^2}{V^2} = \frac{m^*}{a V^2}\frac{1 + e\cos E}{1 - e\cos E},$$

also angenähert

$$(92)\quad n\, dt = n\, d\tau\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m^*}{a V^2}\frac{1 + e\cos E}{1 - e\cos E}\right).$$

a ist die große Halbachse der Bahn. Wird für m^* die Masse der Sonne, für die Bahn die Erdbahn gesetzt, so beträgt $\frac{m^*}{a V^2}$ nur 10^{-8}, so daß τ sich nur sehr wenig von t unterscheidet.

Es ist zu bedauern, daß der Forscher dieses Beispiel in seiner Grundlage so kurz behandelt hat, daß man ihm kaum folgen kann. Das ist aber klar, daß die Kräfte nicht aus ihren Definitionen gewonnen sind. Aus diesen Definitionen nun ist es zwar leicht, die Kräfte im elektromagnetischen Felde zu bestimmen. Man hat, wenn man Maxwell-Poyntings Theorie folgt, für die $X_x, \ldots, Z_z$ die Größen $X_x, \ldots, Z_z$ nach (XII) (S. 140), für T_t die Größe R nach Gleichung (VI) (S. 140), für X_t, Y_t, Z_t die $\frac{\mathfrak{P}_x}{V}, \frac{\mathfrak{P}_y}{V}, \frac{\mathfrak{P}_z}{V}$ nach Gleichung (X_2) (S. 141) anzusetzen. Für alle anderen Fälle könnte man hiernach für $X_x, \ldots, Z_z, T_t$ Werte konstruieren, die nur den elektrischen oder nur den magnetischen Teilen der $X_x, \ldots, Z_z, R$ entsprechen. Aber bei den X_t, Y_t, Z_t versagt diese Auskunft, weil die $\mathfrak{P}$ als Vektorprodukte der elektrischen und magnetischen Kräfte auftreten, eine Scheidung also nicht möglich ist. Kann man ein Bezugssystem x_0, y_0, z_0, t_0 angeben, für welches die $X_t^{(0)}, Y_t^{(0)}, Z_t^{(0)}$ gleich Null sind, so wäre nach (60) (S. 359) für die eigentliche Lorentz-Einstein-Transformation

$$(93)\quad \begin{cases} X_t = T_x = \dfrac{p}{V}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}} Z_x^{(0)}, \\[2ex] Y_t = T_y = \dfrac{p}{V}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}} Z_y^{(0)}, \\[2ex] Z_t = T_z = \dfrac{p}{V}\dfrac{1}{1-\dfrac{p^2}{V^2}} (Z_z^{(0)} - T_t^{(0)}). \end{cases}$$

Zugleich wäre zu setzen

$$(94)\quad \begin{cases} X_x = X_x^{(0)}, \\ X_y = Y_x = X_y^{(0)} = Y_x^{(0)}, \\ X_z = Z_x = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}} X_z^{(0)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}} Z_x^{(0)}, \\[2ex] Y_z = Z_y = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}} Y_z^{(0)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}} Z_y^{(0)}, \\[2ex] Y_y = Y_y^{(0)}, \\ Z_z = \dfrac{1}{1-\dfrac{p^2}{V^2}}\left(Z_z^{(0)} - \dfrac{p^2}{V^2} T_t^{(0)}\right), \\[2ex] T_t = \dfrac{1}{1-\dfrac{p^2}{V^2}}\left(T_t^{(0)} - \dfrac{p^2}{V^2} Z_z^{(0)}\right). \end{cases}$$

Dieses System ist ein solches mit Bezug auf das die Substanz ruht, also dessen Zeit achse der Raum-Zeit-Linie der Substanz überhaupt parallel ist. Daher nutzt diese Einsicht nur bei gerader Bahn, bei gekrümmter Raum-Zeit-Linie würden die $X^{(0)}$ usf. ständig ihre Werte ändern¹). Die gesonderte Kenntnis von T_t kann übrigens immer entbehrt werden, denn da diese Größe nur in $R_{\tau t}$ enthalten ist, und letztere Größe, wenn die $R_{\tau x}$, $R_{\tau y}$, $R_{\tau z}$ ermittelt sind, sich aus der Energiegleichung ergibt, so hat man

$$R_{\tau t} = \frac{1}{V^2}(R_{\tau x} g_x + R_{\tau y} g_y + R_{\tau z} g_z)\,, \tag{95}$$

woraus sich dann auch T_t ergibt.

Max Abraham²) hat der Theorie Minkowskis eine besondere Fassung gegeben. Vor allem sieht er von den Kräften X_2, Y_2, Z_2, T_2 ganz ab. Man könnte meinen, daß dieses bedeute, er wende die Gleichungen auf Geschwindigkeiten an, die im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit nicht erheblich seien. Allein dadurch würde sich nur die Fortlassung der Kräfte X_2, Y_2, Z_2 rechtfertigen, nicht die der Kraft T_2, denn in dem Ausdruck (47_2) für diese Kraft ist das letzte Glied $\frac{i g_t V T_1}{V^2 - g^2}$ wegen $g_t = iV$ von der Ordnung $-\frac{V^2}{V^2 - g^2}T_1$, also mindestens von der Ordnung $-T_1$, dürfte also nicht fortgelassen werden. Man hat vielmehr, wenn g gegen V vernachlässigt wird, $T = T_1 + T_2 = T_1 - T_1 = 0$, und die vierte Bewegungsgleichung Minkowskis würde lauten $m\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$ und nicht $m\frac{d^2 t}{d\tau^2} = T_1$. Hiernach kommt Max Abrahams Vereinfachung überhaupt auf eine Fortlassung der Kräfte X_2, Y_2, Z_2, T_2 hinaus, und das bedeutet, daß die „Masse" eines Querschnittes des Raum-Zeit-Fadens nicht bloß bei Verschiebung des Querschnitts an sich, sondern überhaupt bei jeder Verschiebung unverändert bleiben soll (S. **353**). Das würde eine totale Umbildung der Minkowskischen Theorie bedingen, und ich weiß nicht recht, wie man dann noch von einer „Massenwirkung" soll sprechen können, die longitudinal auftritt, da diese Wirkung sonst nach allen Richtungen Null sein würde. Man kann freilich mit Max Abraham³) die Sache auch so auffassen, daß nur der Grundsatz Minkowskis von der Konstanz der „Ruh-Masse" aufgegeben wird. Allein dann gelangt man nicht etwa zu Minkowskis Gleichungen mit X_1, Y_1, Z_1, T_1 für X, Y, Z, T, sondern zu bei weitem komplizierteren, denn man ist unter diesen Umständen gezwungen, bei Anwendung des Minimumprinzips auch die von $\delta\nu\, dJ_r$, $\nu\delta(dJ_r)$, $\delta\nu\delta(dJ)_r$ bestimmten Glieder zu berücksichtigen, was bei den Gliedern mit $\delta\nu$ ohne Annahmen, für die es schwer sein dürfte, irgendeinen Hinweis zu finden, unmöglich ist. Mit diesem Vorbehalt, von dem bald noch meht zu sagen ist, will ich den Darlegungen Max Abrahams weiter folgen.

Setzt man

$$i V t = x_4 = u\,, \tag{96}$$

wo

$$\left\{\begin{array}{lll} -iX_t = X_u\,, & -iY_t = Y_u\,, & -iZ_t = Z_u\,, \\ -iT_x = U_x\,, & -iT_y = U_y\,, & -iT_z = U_z\,, \\ & T_t = U_u\,, & \\ X_u = U_x\,, & Y_u = U_y\,, & Z_u = U_z \end{array}\right. \tag{97}$$

¹) Aus diesem Grunde kann ich Laues Theorie, Annalen d. Physik u. Chemie, **35**, **524** (1911) keine allgemeinere Bedeutung beimessen.

²) Physik. Zeitschr. (1912), 1ff., 310ff., 793ff.

³) Physik. Zeitschr. (1909), 737.

ist, so ordnet er zufolge (45) (S. 355) völlig symmetrisch an

$$(98)\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} + \dfrac{\partial X_u}{\partial u}, \\[2ex] Y_1 = \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} + \dfrac{\partial Y_u}{\partial u}, \\[2ex] Z_1 = \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} + \dfrac{\partial Z_u}{\partial u}, \\[2ex] i\,T_1\,V = \dfrac{\partial U_x}{\partial x} + \dfrac{\partial U_y}{\partial y} + \dfrac{\partial U_z}{\partial z} + \dfrac{\partial U_u}{\partial u}, \end{cases}$$

und wir hätten ohne die Kräfte X_2, Y_2, Z_2, T_2

$$(99_1)\quad \begin{cases} \mu \dfrac{d^2 x}{d\tau^2} = \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} + \dfrac{\partial X_u}{\partial u}, \\[2ex] \mu \dfrac{d^2 y}{d\tau^2} = \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} + \dfrac{\partial Y_u}{\partial u}, \\[2ex] \mu \dfrac{d^2 z}{d\tau^2} = \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} + \dfrac{\partial Z_u}{\partial u}, \\[2ex] \mu \dfrac{d^2 u}{d\tau^2} = \dfrac{\partial U_x}{\partial x} + \dfrac{\partial U_y}{\partial y} + \dfrac{\partial U_z}{\partial z} + \dfrac{\partial U_u}{\partial u}. \end{cases}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen werden auf die Eulersche Form gebracht. Es ist z. B.

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 x}{d\tau^2} &= \mu \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx}{d\tau}\right) = \mu\left(\dot x \frac{\partial \dot x}{\partial x} + \dot y \frac{\partial \dot x}{\partial y} + \dot z \frac{\partial \dot x}{\partial z} + \dot u \frac{\partial \dot x}{\partial u}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\mu \dot x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \dot x \dot y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu \dot x \dot z) + \frac{\partial}{\partial u}(\mu \dot x \dot u) \\ &\quad - \left(\frac{\partial(\mu \dot x)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu \dot y)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu \dot z)}{\partial z} + \frac{\partial(\mu \dot u)}{\partial u}\right)\dot x. \end{aligned}$$

Das abzuziehende Glied ist aber nach Minkowskis Kontinuitätsbedingung (12_1) (S. 345) Null, somit bleibt

$$(100_1)\quad \begin{cases} \mu \dfrac{d^2 x}{d\tau^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu \dot x \dot x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\mu \dot x \dot y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\mu \dot x \dot z) + \dfrac{\partial}{\partial u}(\mu \dot x \dot u), \\[2ex] \mu \dfrac{d^2 y}{d\tau^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu \dot y \dot x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\mu \dot y \dot y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\mu \dot y \dot z) + \dfrac{\partial}{\partial u}(\mu \dot y \dot u), \\[2ex] \mu \dfrac{d^2 z}{d\tau^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu \dot z \dot x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\mu \dot z \dot y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\mu \dot z \dot z) + \dfrac{\partial}{\partial u}(\mu \dot z \dot u), \\[2ex] \mu \dfrac{d^2 u}{d\tau^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu \dot u \dot x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\mu \dot u \dot y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\mu \dot u \dot z) + \dfrac{\partial}{\partial u}(\mu \dot u \dot u). \end{cases}$$

Entsprechend dem Krafttensor mit den sechzehn Komponenten $X_x, \ldots, U_t$ wird ein Bewegungstensor mit den sechzehn Komponenten

$$(101_1) \begin{cases} \xi_x = -\mu\dot{x}\dot{x}, & \xi_y = -\mu\dot{x}\dot{y}, & \xi_z = -\mu\dot{x}\dot{z}, & \xi_u = -\mu\dot{x}\dot{u}, \\ \eta_x = -\mu\dot{y}\dot{x}, & \eta_y = -\mu\dot{y}\dot{y}, & \eta_z = -\mu\dot{y}\dot{z}, & \eta_u = -\mu\dot{y}\dot{u}, \\ \zeta_x = -\mu\dot{z}\dot{x}, & \zeta_y = -\mu\dot{z}\dot{y}, & \zeta_z = -\mu\dot{z}\dot{z}, & \zeta_u = -\mu\dot{z}\dot{u}, \\ v_x = -\mu\dot{u}\dot{x}, & v_y = -\mu\dot{u}\dot{y}, & v_z = -\mu\dot{u}\dot{z}, & v_u = -\mu\dot{u}\dot{u} \end{cases}$$

gesetzt, wobei wir haben

$$(102) \qquad \xi_y = \eta_x, \quad \xi_z = \zeta_x, \quad \eta_z = \zeta_y, \quad v_x = \xi_u, \quad v_y = \eta_u, \quad v_z = \zeta_u.$$

Die Größen $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \eta_x, \eta_y, \eta_z, \zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$, werden als Komponenten der Bewegungsspannung, die $\xi_u, \eta_u, \zeta_u = v_x, v_y, v_z$ als solche der Bewegungsströmung bezeichnet und v_u heißt die materielle Energiedichte, Bewegungsenergiedichte analog den entsprechenden Komponenten des Krafttensors. μ ist dabei die Ruhedichte der Materie (S. 345). Die Dichte selbst ist nach (9) (S. 345)

$$(103) \qquad \nu = \mu \frac{dt}{d\tau} = \mu \dot{t}.$$

Da man hat $\dot{x} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = g_x \dot{t}$ usf., so gehen die Definitionsgleichungen der $\xi_x, \ldots$ auch über in

$$(101_2) \begin{cases} \xi_x = -\nu g_x \mathfrak{g}_x, & \xi_y = -\nu g_x \mathfrak{g}_y, & \xi_z = -\nu g_x \mathfrak{g}_z, & \xi_u = -\nu g_x \mathfrak{g}_u, \\ \eta_x = -\nu g_y \mathfrak{g}_x, & \eta_y = -\nu g_y \mathfrak{g}_y, & \eta_z = -\nu g_y \mathfrak{g}_z, & \eta_u = -\nu g_y \mathfrak{g}_u, \\ \zeta_x = -\nu g_z \mathfrak{g}_x, & \zeta_y = -\nu g_z \mathfrak{g}_y, & \zeta_z = -\nu g_z \mathfrak{g}_z, & \zeta_u = -\nu g_z \mathfrak{g}_u, \\ v_x = -\nu g_u \mathfrak{g}_x, & v_y = -\nu g_u \mathfrak{g}_y, & v_z = -\nu g_u \mathfrak{g}_z, & v_u = -\nu g_u \mathfrak{g}_u, \end{cases}$$

Für die g und $\mathfrak{g}$ gelten die Definitionen unter (13_1), $(13')$ und (13_2) (S. 346). Hiernach bekommen wir

$$(100_2) \begin{cases} \mu \frac{d^2 x}{d\tau^2} = -\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} + \frac{\partial \xi_u}{\partial u}\right), \\ \mu \frac{d^2 y}{d\tau^2} = -\left(\frac{\partial \eta_x}{\partial x} + \frac{\partial \eta_y}{\partial y} + \frac{\partial \eta_z}{\partial z} + \frac{\partial \eta_u}{\partial u}\right), \\ \mu \frac{d^2 z}{d\tau^2} = -\left(\frac{\partial \zeta_x}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_u}{\partial u}\right), \\ \mu \frac{d^2 u}{d\tau^2} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_u}{\partial u}\right), \end{cases}$$

und die Bewegungsgleichungen werden

$$(104) \begin{cases} \frac{\partial (X_x + \xi_x)}{\partial x} + \frac{\partial (X_y + \xi_y)}{\partial y} + \frac{\partial (X_z + \xi_z)}{\partial z} + \frac{\partial (X_u + \xi_u)}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial (Y_x + \eta_x)}{\partial x} + \frac{\partial (Y_y + \eta_y)}{\partial y} + \frac{\partial (Y_z + \eta_z)}{\partial z} + \frac{\partial (Y_u + \eta_u)}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial (Z_x + \zeta_x)}{\partial x} + \frac{\partial (Z_y + \zeta_y)}{\partial y} + \frac{\partial (Z_z + \zeta_z)}{\partial z} + \frac{\partial (Z_u + \zeta_u)}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial (U_x + v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (U_y + v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (U_z + v_z)}{\partial z} + \frac{\partial (U_u + v_u)}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Die ersten drei Gleichungen werden als Impulsgleichungen bezeichnet, die letzte Gleichung wird dem Energiesatz gleichgestellt. Ihr Verhältnis zum eigentlichen Energiesatz ist früher angegeben (S. 365). Bezeichnet man einen Poyntingschen Kraftvektor mit $\mathfrak{P}$, einen entsprechenden Bewegungsvektor mit π, so sind nach früherem die Komponenten

$$(105) \qquad X_u = U_x = \frac{\mathfrak{P}_x}{i V}, \qquad Y_u = U_y = \frac{\mathfrak{P}_y}{i V}, \qquad Z_u = U_z = \frac{\mathfrak{P}_z}{i V},$$

$$(106) \qquad \xi_u = v_x = \frac{\pi_x}{i V}, \qquad \eta_u = v_y = \frac{\pi_y}{i V}, \qquad \zeta_u = v_z = \frac{\pi_z}{i V}.$$

Zugleich ist nach den Ansätzen (97) und (102_1)

$$(107) \quad \pi^2 = (\xi_u^2 + \eta_u^2 + \zeta_u^2)(i V)^2 = -\mu^2 V^2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\dot{u}^2 = -\mu^2 V^2 g^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \dot{u}^2,$$

also nach (97)

$$(108_1) \qquad \pi = \mu g V^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \nu g V^2 \frac{dt}{d\tau}.$$

Außerdem hat man

$$v_u = -\mu \dot{u}^2 = \mu V^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \nu V^2 \frac{dt}{d\tau} = \mu V^2 \frac{1}{1 - \frac{g^2}{V^2}},$$

also auch

$$(108_2) \qquad \pi = g\, v_u.$$

Setzen wir

$$(109) \qquad \mu g \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \mathfrak{G} = \mu g \frac{1}{1 - \frac{g^2}{V^2}},$$

letzteres nach (1_2) (S. 343), so wird

$$(110) \qquad \mathfrak{G} = \frac{\pi}{V^2}$$

entsprechend dem Satz von der Trägheit der Energie (S. 364). Zugleich ist

$$(111) \qquad \mathfrak{G}_x = \frac{\pi_x}{V^2}, \qquad \mathfrak{G}_y = \frac{\pi_y}{V^2}, \qquad \mathfrak{G}_z = \frac{\pi_z}{V^2}$$

und

$$(112) \quad \begin{cases} \xi_u = v_x = \dfrac{V \mathfrak{G}_x}{i} = -i V \mathfrak{G}_x, \quad \eta_u = v_y = \dfrac{V \mathfrak{G}_y}{i} = -i V \mathfrak{G}_y, \\ \zeta_u = v_z = \dfrac{V \mathfrak{G}_z}{i} = -i V \mathfrak{G}_z. \end{cases}$$

Da nach (81) (S. 343)

$$\mathfrak{P} = V^2 \Gamma$$

ist, so haben wir entsprechend

$$(113) \quad \begin{cases} X_u = U_x = \dfrac{V \Gamma_x}{i} = -i V \Gamma_x, \quad Y_u = U_y = \dfrac{V \Gamma_y}{i} = -i V \Gamma_y, \\ Z_u = U_z = \dfrac{V \Gamma_z}{i} = -i V \Gamma_z. \end{cases}$$

Schreiben wir endlich

$$(114) \qquad U_u = -i V E, \qquad v_u = \frac{\pi}{g} = -i V e$$

und beschränken das Zeichen div auf die Raumkoordinaten, so gehen die Bewegungsgleichungen auch über in

$$
(115)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial(\Gamma_x + \mathfrak{G}_x)}{\partial\tau} &= \operatorname{div}(X + \xi)\,,\\
\frac{\partial(\Gamma_y + \mathfrak{G}_y)}{\partial\tau} &= \operatorname{div}(Y + \eta)\,,\\
\frac{\partial(\Gamma_z + \mathfrak{G}_z)}{\partial\tau} &= \operatorname{div}(Z + \zeta)\,,\\
\frac{\partial(E + \varepsilon)}{\partial\tau} &= \operatorname{div}(\Gamma + \mathfrak{G})\,.
\end{aligned}\right.
$$

Hat man sich einmal dazu entschlossen, die Kräfte X_2, Y_2, Z_2, T_2 fortzulassen, so läßt sich gegen die obigen Entwickelungen an sich nichts einwenden, es sind nur mathematische Umformungen. Nun sagt aber Max Abraham in der letzten hierhergehörigen Arbeit, daß er sich davon überzeugt habe, daß seine „Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes sich nicht mit den Prinzipien der analytischen Mechanik vereinbaren lassen". Da Max Abrahams Gleichungen zuletzt Minkowskis Theorie entstammen, so würde das bedeuten, daß diese Theorie aufzugeben sei. Ich glaube, daß das nicht nötig ist, wenn man eben diese Theorie so nimmt, wie Minkowski sie gegeben hat, also, bei Vernachlässigung von Gliedern von der Ordnung $\frac{g}{V}$, in der Form, die hier unter **(53) (S. 356)** abgeleitet ist. Die vierte Bewegungsgleichung sieht dann ganz anders aus als bei Max Abraham, und sie darf gar nicht anders angesetzt werden, weil sonst die Gleichung der Energie nicht erfüllt wird. Es ist ja für Minkowskis Theorie kennzeichnend, daß durch die vier Bewegungsgleichungen die Energiegleichung identisch erfüllt ist, nicht erst auf Grund von Bedingungen, und deshalb konnte auch Max Abraham seine Gleichungen gar nicht mit den Prinzipien der Mechanik vereinbar finden.

Noch eins würde auf diese Weise sich klären. Max Abraham hat noch folgende Rechnung angestellt: Wir sahen, daß bei der Anwendung von Minkowskis Theorie es Schwierigkeiten bereitet, in anderen Feldern als elektromagnetischen für die X_t, Y_t, Z_t Ansätze zu machen. Max Abraham hat eine anscheinend glückliche Wendung gefunden. Er faßt nämlich den Poyntingschen Vektor und die Energiedichte schematisch nicht anders auf wie die Maxwellschen Spannungen. Haben wir hiernach ein Raum-Zeit-Feld mit einer Zahl von Raum-Zeit-Kräften $\mathfrak{F}^{(1)}, \mathfrak{F}^{(2)}$ usf., deren Komponenten sind $\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z, \mathfrak{F}_t$, so setzt er

$$
(116)\qquad \left\{\begin{aligned}
4\pi X_x &= \Sigma(\mathfrak{F}_x^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{F}^2)\,,\\
4\pi Y_y &= \Sigma(\mathfrak{F}_y^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{F}^2)\,,\\
4\pi Z_z &= \Sigma(\mathfrak{F}_z^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{F}^2)\,,\\
4\pi U_u &= \Sigma(\mathfrak{F}_t^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{F}^2)\,,\\
4\pi X_y &= Y_x = \Sigma(\mathfrak{F}_x\mathfrak{F}_y)\,,\\
4\pi Y_z &= Z_y = \Sigma(\mathfrak{F}_y\mathfrak{F}_z)\,,\\
4\pi Z_x &= X_z = \Sigma(\mathfrak{F}_z\mathfrak{F}_x)\,,\\
4\pi X_u &= U_x = \Sigma(\mathfrak{F}_x\mathfrak{F}_u)\,,\\
4\pi Y_u &= U_y = \Sigma(\mathfrak{F}_y\mathfrak{F}_u)\,,\\
4\pi Z_u &= U_z = \Sigma(\mathfrak{F}_z\mathfrak{F}_u)\,,
\end{aligned}\right.
$$

wobei

(117) $$\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}_x^2 + \mathfrak{F}_y^2 + \mathfrak{F}_z^2 + \mathfrak{F}_u^2,$$

ist. Die Größen $\Sigma(\mathfrak{F}_x\mathfrak{F}_u)$, $\Sigma(\mathfrak{F}_y\mathfrak{F}_u)$, $\Sigma(\mathfrak{F}_z\mathfrak{F}_u)$ sollten einem Poyntingschen Vektor entsprechen wie $U_u = \Sigma(\mathfrak{F}_u^2 - \frac{1}{2}\mathfrak{F}^2)$ nach einer Energiedichte geartet sein soll.

Max Abraham hat nun von diesen Gleichungen eine Anwendung auf das von Minkowski behandelte Beispiel eines Schwerkraftfeldes gemacht. Die Betrachtungen gelten jedoch zunächst auch allgemein für ein Raum-Zeit-Kraftfeld, das ein Raum-Zeit-Potential besitzt. Ist dieses Potential Φ, also

$$\mathfrak{F}_x = -\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{F}_y = -\mu\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{F}_z = -\mu\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad \mathfrak{F}_u = -\mu\frac{\partial\Phi}{\partial u},$$

so geben die obigen Gleichungen, da nur die eine Kraft vorhanden sein soll,

$$X_x = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\mathfrak{F}^2 \quad \text{usf.}$$

Demnach wird z. B.

$$\begin{aligned}4\pi X_1 = 2\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial u}\\ + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}\\ + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial u}.\end{aligned}$$

Wir schreiben

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2}$$

und bekommen so

$$4\pi X_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Delta\Phi, \quad 4\pi Y_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial y}\Delta\Phi, \quad 4\pi Z_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Delta\Phi,$$
$$4\pi i V T_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial u}\Delta\Phi.$$

Dem Raum-Zeit-Potential wird die gleiche Eigenschaft zugeschrieben wie dem Raumpotential. Also es wird

(118) $$\Delta\Phi = -4\pi\mu$$

gesetzt. Damit wird

(119) $$X_1 = -\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad Y_1 = -\mu\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad Z_1 = -\mu\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad iVT_1 = -\mu\frac{\partial\Phi}{\partial u}.$$

Beschränkt man sich nun, wie Max Abraham es tut, auf diese Kräfte, so folgt hieraus, daß die Annahme des Potentials zulässig ist. Nun benutzt er die Minkowskische Energiegleichung, der er eine etwas allgemeinere Form gibt. Diese Gleichung kann auch ersetzt werden durch die Definitionsgleichung für $d\tau$. Nach dieser ist

(120) $$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 = -V^2.$$

Differenziert man nach τ und betrachtet auch V noch als Variabel, so folgt

$$(121_1)\qquad \frac{dx}{d\tau}\frac{d^2x}{d\tau^2}+\frac{dy}{d\tau}\frac{d^2y}{d\tau^2}+\frac{dz}{d\tau}\frac{d^2z}{d\tau^2}+\frac{du}{d\tau}\frac{d^2u}{d\tau^2}=-\frac{1}{2}\frac{dV^2}{d\tau}$$

oder

$$(121_2)\qquad \frac{1}{\mu}\left(\frac{dx}{d\tau}\mathfrak{F}_x+\frac{dy}{d\tau}\mathfrak{F}_y+\frac{dz}{d\tau}\mathfrak{F}_z+\frac{du}{d\tau}\mathfrak{F}_u\right)=-\frac{1}{2}\frac{dV^2}{d\tau}.$$

Also wäre nach (119)

$$(121_3)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{d\tau}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{d\tau}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{d\tau}+\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{du}{d\tau}=\frac{1}{2}\frac{dV^2}{d\tau},$$

d. h.

$$(121_4)\qquad \frac{d\Phi}{d\tau}=\frac{1}{2}\frac{dV^2}{d\tau}$$

oder

$$(122)\qquad \Phi-\Phi_0=\tfrac{1}{2}(V^2-V_0^2),$$

wo Φ_0, V_0 die Werte im Koordinatenursprung bedeuten. Diese Gleichung würde, wenn **Einsteins** und auch **Minkowskis** Grundannahme, daß V überall im Raum und in allen Bezugssystemen den gleichen Wert hat, zutreffen sollte,

$$\Phi=\Phi_0$$

geben, d. h. im Raum-Zeit-Gebiet wäre die potentielle Energie überall die gleiche. Es gäbe also dort keine Kraftwirkungen, und alle Bewegung könnte dort nur gerade sein und gleichförmig. Nun ist in demselben Falle $t=a\tau+b$, also $\tau=a't+b'$, d. h. auch im Raum allein wäre nur gleichförmige Bewegung möglich. Und da das aller Erfahrung widerspricht, so zieht **Max Abraham** den Schluß, daß Φ nicht konstant, also auch V nicht konstant sein darf, **Einsteins** und auch **Minkowskis** Annahme über V also nicht zutreffen könne.

Indessen bleibt doch noch die andere Alternative, daß nämlich im Raum-Zeit-Gebiet ein Potential nicht vorhanden ist, auch wenn ein solches im Raumgebiet bestehen sollte. Denn dann würde die Beziehung

$$(123)\qquad \mathfrak{F}_x\frac{dx}{d\tau}+\mathfrak{F}_y\frac{dy}{d\tau}+\mathfrak{F}_z\frac{dz}{d\tau}+\mathfrak{F}_u\frac{du}{d\tau}=0$$

nichts weiter besagen, als daß die Raum-Zeit-potentielle Energie im Raum-Zeit-Gebiet gleich Null ist, was nur ein anderer Ausspruch für das Raum-Zeit-Gebiet-Energiegesetz wäre. Und in der Tat, benutzt man diejenigen Gleichungen, welche **Minkowskis** Theorie selbst entsprechen, so sieht man sofort, daß $\mathfrak{F}_u$ kein Potential besitzt, auch wenn man $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ mit einem Potential versieht.

Nehmen wir zunächst die vollständigen **Minkowskischen** Gleichungen, und es mögen also wie oben

$$X_1=-\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x},\qquad Y_1=-\mu\frac{\partial\Phi}{dy},\qquad Z_1=-\mu\frac{\partial\Phi}{\partial z},\qquad iVT_1=-\mu\frac{\partial\Phi}{\partial u}$$

sein, dann wird gemäß (48_1) (S. 354)

$$(124)\qquad (\mathfrak{g}\mathfrak{R}_1)=-\mu\frac{d\Phi}{d\tau},$$

somit nach (49_2) (S. 355)

$$
(125)\qquad \left\{
\begin{aligned}
X &= -\mu\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{g_x}{V^2 - g^2}\frac{d\Phi}{d\tau}\right),\\
Y &= -\mu\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{g_y}{V^2 - g^2}\frac{d\Phi}{d\tau}\right),\\
Z &= -\mu\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{g_z}{V^2 - g^2}\frac{d\Phi}{d\tau}\right),\\
iVT &= -\mu\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{iV}{V^2 - g^2}\frac{d\Phi}{d\tau}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

so daß also die vollständigen Kräfte jedenfalls kein Potential haben. Nehmen wir die Näherungsgleichungen (52) (S. 355), so besitzen dann zwar X, Y, Z ein Potential, T aber hat ein solches nicht. Wir bekommen vielmehr

$$
(126)\qquad VT = -\mu\left(\frac{g_x}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{g_y}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{g_z}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = -\mu\frac{1}{V}\left(\frac{d\Phi}{dt} - \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -\mu i\left(\frac{d\Phi}{du} - \frac{\partial\Phi}{\partial u}\right),
$$

also

$$
(127)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{F}_x = X = -\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{F}_y = Y = -\mu\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{F}_z = Z = -\mu\frac{\partial\Phi}{\partial z},\\
&\mathfrak{F}_u = iVT = -\mu\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{d\Phi}{du}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Führen wir diese Werte in die Gleichung (123) (S. 374) ein, so folgt

$$
\frac{dx}{d\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{dy}{d\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{dz}{d\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{du}{d\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{du}{d\tau}\frac{d\Phi}{du} = \frac{1}{2}\frac{dV^2}{d\tau}.
$$

Da

$$
\frac{du}{d\tau}\frac{d\Phi}{du} = \frac{d\Phi}{d\tau}
$$

ist, so findet sich die obige Gleichung identisch erfüllt, gerade wenn

$$
(128)\qquad \frac{dV^2}{d\tau} = 0,
$$

d. h. V konstant ist, wie mit Einstein auch Minkowski vorausgesetzt hat. Der Widerspruch liegt also jedenfalls nicht in Minkowskis Theorie, vielmehr kann für die Kraft $\mathfrak{R}_1$ ein Raum-Zeit-Potential vorhanden sein, ohne daß ein solches für die Kraft $\mathfrak{R}$ besteht, da es für die Teilkraft T nicht vorhanden ist. Man darf eben in Minkowskis Theorie die Kräfte X_2, Y_2, Z_2, T_2 nicht fortlassen.

Nun hat freilich Einstein[1]) selbst abgeleitet, daß im Schwerkraftsfelde die Größe V variabel sein soll, und seine Formel

$$
(122')\qquad V = V_0\left(1 + \frac{\Phi - \Phi_0}{V_0^2}\right)
$$

---

[1]) Einstein, Annalen d. Physik u. Chemie **35**, 898 (1911); **38**, 443 (1912).

stimmt mit der Max Abrahamschen, wenn man aus letzterer V näherungsweise berechnet. Seinen Entwickelungen kann ich hier nicht folgen, sie liegen nicht auf dem uns beschäftigenden Gebiete. Ergibt sich das im Widerspruch zu seiner Theorie, so berührt es gleichwohl Minkowskis Theorie nicht.

Dazu kommt noch ein Umstand. Die Größe V ist in allen Theorien, mit Ausnahme der Minkowskischen, zunächst ganz willkürlich definiert. Nichts liegt vor, das, z. B. in der Lorentzschen Theorie oder in der Einsteinschen, dazu zwingt, diese Größe gerade als Lichtgeschwindigkeit aufzufassen. Erst die Anpassung an die optischen Erscheinungen führt zu der Annahme von $V = C_0$. Im Grunde aber ist V in diesen Theorien, soweit es sich einfach um Transformation handelt, eine durchaus willkürliche Geschwindigkeit, und nichts ändert sich an den Transformationen, wenn man V auch anders denn als Lichtgeschwindigkeit erklärt. Es kommt also darauf an, ob in den Lorentz-Einsteinschen Transformationsgleichungen man diese Größe V als konstant ansehen darf, oder ob die weitere Benutzung dieser Gleichungen z. B. im Gravitationsfelde zu Unzuträglichkeiten führt, wenn man sie als Konstante verwendet. Findet letzteres statt, wie es nach Einsteins Arbeiten nunmehr der Fall zu sein scheint, so muß die Einsteinsche Relativitätstheorie aufgegeben werden, und Max Abraham hat auch durchaus recht, wenn er meint, die von Einstein[1]) neuerdings vorgeschlagene Auskunft, das Relativitätsprinzip auf isolierte Systeme zu beschränken, habe gar keinen Wert, weil schon die Allgegenwart der Schwerkraft isolierte Systeme in der Natur ausschließe. Die Lorentz-Einsteinschen Formeln aber mit variabelem V anzuwenden, hat keinen Sinn, es kann dabei nichts herauskommen, weil die Variabilität sich dann ganz nach den Umständen richtet und eine Komplikation bewirkt, die jeder gesunden Entwickelung der Physik — von der geträumten neuen Weltanschauung ganz zu schweigen, in der ja kein ruhig denkender Mensch etwas anderes als undurchdachte Behauptungen sehen konnte — unterbinden würde.

Ganz anders verhält es sich in Minkowskis Theorie, hier ist die Größe V in der Theorie selbst bestimmt definiert, nämlich durch jede Geschwindigkeit nach der Zeitrichtung im Raum-Zeit-Gebiet, und Minkowskis Theorie setzt voraus, daß, welche Geschwindigkeiten auch nach den Raumrichtungen vorhanden sein mögen, nach der Zeitrichtung immer nur die gleiche Geschwindigkeit besteht, nämlich iV, und keine andere. Also selbst wenn nach den Raumrichtungen gar keine Geschwindigkeit vorhanden sein sollte, herrscht nach der Zeitrichtung gleichwohl dieselbe Geschwindigkeit iV. So wäre V allerdings eine Weltkonstante. Und wir haben eben gesehen, daß, wenn man Minkowskis Gleichungen so nimmt, wie dieser Forscher sie aufgestellt hat, von einem Widerspruch gegen diese Konstanz keine Rede sein kann. So mag die Lorentz-Einsteinsche Theorie fallen, die davon im Wesen ganz verschiedene Minkowskische Theorie bleibt, in ihr sind Widersprüche nicht vorhanden. Es darf aber natürlich von dieser Theorie nicht abgewichen werden, auch nicht zugunsten einer scheinbaren Vereinfachung. Und man muß endlich die Definition von V als Lichtgeschwindigkeit fallen lassen und diese Größe so definieren, wie es Minkowskis Theorie fordert und wie oben angegeben ist, die besagen würde, daß in Richtung der Zeitachse die Raum-Zeit-Welt sich in immer und überall in gleicher Geschwindigkeit befindet, die durch keine sonstige Bewegung irgend beeinflußt ist. Wird diese Geschwindigkeit nicht nach der Zeitrichtung gerechnet, sondern an jeder Stelle nach der infolge sonstiger Bewegung stattfindenden Eigenzeit, d. h.

---

[1]) Einstein, Annalen d. Physik u. Chemie **38**, 1059 (1910).

nach einer Zeit, innerhalb deren die sonstige Bewegung überhaupt nicht in Erscheinung tritt, so variiert sie wie $\frac{iV}{\sqrt{1+\frac{g^2}{(iV)^2}}}$, ist also stets größer als iV und abhängig von der sonstigen Bewegung g, sie geht durch unendlich zu reellen Werten über, wenn g ihren dann universellen Wert iV übersteigt. Die gesamte Bewegung im Raum-Zeitgebiet ist dann, unabhängig von der Bewegung im Raume, immer und und überall gleich iV. Daß sich V aus den optischen Vorgängen so groß als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ergibt, ist ein besonderer Gewinn der Wissenschaft.

Alle Theorien, die sich von der Minkowskischen Theorie entfernen, besser von ihr nur einen Teil verwenden, müssen dem Widerspruch verfallen, der sich jetzt gegen die Einsteinsche Theorie eingestellt hat. Ich darf sie darum, da ohnedies mein Buch speziellen Betrachtungen nicht gewidmet sein kann, hier übergehen. Eines nur möchte ich erwähnen. Wenn man die Kräfte X_2, Y_2, Z_2, fortläßt, so entspricht dem $\nu\frac{d^2u}{d\tau^2}$ nur eine Kraft von der Ordnung $\frac{g}{V}$. Glaubt man, daß hier Größen von dieser Ordnung unberücksichtigt bleiben dürfen, so wird

$$\nu\frac{d^2u}{d\tau^2} = 0,$$

also $t = a\tau + b$, $\tau = a't + b'$, wo $a, b;\ a', b'$ Konstanten bedeuten. Da für $g = 0$ $\tau = t$ werden muß, haben wir einfach $\tau = t, t = \tau$. So kann man es deuten, wenn von vielen Seiten die vierte Minkowskische Bewegungsgleichung ganz über Bord geworfen wird und nur die drei ersten Bewegungsgleichungen beibehalten werden, wo es dann gleichgültig ist, ob man die Zeit nach t oder nach τ rechnet. Der Energiesatz ist dann natürlich nicht genau, sondern nur bis auf Größen zweiter Ordnung erfüllt. Das wird nicht berücksichtigt, und indem man den Energiesatz streng zu erfüllen sucht, werden die Minkowskischen Größen einem gewissen Zwang unterworfen. Ich darf das an einer Arbeit wiederum von Max Abraham[1]) erläutern, die auch wegen ihrer Ansätze für die Kräfte von Wichtigkeit ist. Er nimmt nur die Raumkräfte und schreibt sie entsprechend der Minkowskischen Darstellung für X_1, Y_1, Z_1 in der aus seiner Elektrodynamik entnommenen Form (2_2) (S. 247)

$$(129)\qquad \begin{cases} \mathfrak{R}_x = \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma_x}{\partial t}, \\[2ex] \mathfrak{R}_y = \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma_y}{\partial t}, \\[2ex] \mathfrak{R}_z = \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma_z}{\partial t}. \end{cases}$$

Die Größen $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ stehen für $\frac{1}{V}X_t$, $\frac{1}{V}Y_t$, $\frac{1}{V}Z_t$; es sind die von Max Abraham Impulsdichte benannten Größen. Nun sei w eine noch zu bestim-

---

[1]) Max Abraham, Physik. Zeitschr. (1912), 793ff.

mende Funktion der Koordinaten und der Zeit, und α eine absolute, universelle Konstante, so wird gesetzt

$$(130)\quad \begin{cases} \alpha X_x = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{2V^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \\ \quad = -\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\} + \frac{1}{2}W^2, \\ \alpha Y_y = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2V^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \\ \quad = -\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\} + \frac{1}{2}W^2, \\ \alpha Z_z = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{2V^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \\ \quad = -\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\} + \frac{1}{2}W^2, \\ \alpha X_y = \alpha Y_x = -\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}, \\ \alpha Y_z = \alpha Z_y = -\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}, \\ \alpha Z_x = \alpha X_z = -\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}. \end{cases}$$

wo

$$(131)\qquad W^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2.$$

ist. Man sieht, daß die Ausdrücke formell (bis auf das gewechselte Zeichen), zwar mit den früheren Ausdrücken übereinstimmen, daß jedoch bei den X_x, Y_y, Z_z zu $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$, $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$ immer das Glied $-\frac{1}{2V^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2$ hinzugefügt ist. Der Energiestrom wird definiert durch

$$(132)\qquad \alpha\,\mathfrak{P} = \alpha V^2 \gamma = -\frac{\partial w}{\partial t}\,\mathrm{grad}\,w\,.$$

was im ersten Teil (81) (S. 364) und (106) (S. 371) entspricht, und die Energiedichte durch

$$(133)\qquad \alpha E = \frac{1}{2}\,((\nabla)\,w)^2 + \frac{1}{2V^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2.$$

Wie diese Ansätze für $\mathfrak{P}$ und E mit der Erweiterung der Ansätze für die $X_x, \ldots, Z_z$ zusammenhängen, ist klar.

Aus (132) folgt noch

$$(130')\quad \begin{cases} \alpha X_t = -\frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \alpha Y_t = -\frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial y}, \\ \alpha Z_t = -\frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial z}, \end{cases}$$

was innerhalb des Schemas von (130) liegt, während T_t als Energiedichte wird

$$\alpha T_t = \alpha E = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2V^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2. \tag{130''}$$

Nun wird noch ein besonderer Energiesatz aufgestellt in der Form

$$\mathsf{E} + \operatorname{div}\mathfrak{P} + \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \tag{134$_1$}$$

woselbst E die dem sich bewegenden Körper vom Kraftfelde zugeführte Energie bedeutet, also die Größe

$$\mathsf{E} = g_x \mathfrak{K}_x + g_y \mathfrak{K}_y + g_z \mathfrak{K}_z. \tag{135}$$

Es hätte somit der Energiesatz die Form

$$\mathfrak{K}_x \frac{dx}{dt} + \mathfrak{K}_y \frac{dy}{dt} + \mathfrak{K}_z \frac{dz}{dt} + \operatorname{div}\mathfrak{P} + \frac{\partial E}{\partial t} = 0.$$

Beachtet man, daß $\mathfrak{K}_x = X_1$, $\mathfrak{K}_y = Y_1$, $\mathfrak{K}_z = Z_1$, daß ferner die Komponenten von $\mathfrak{P}$ sind

$$\mathfrak{P}_x = \gamma_x V^2 = V X_t, \quad \mathfrak{P}_y = \gamma_y V^2 = V Y_t, \quad \mathfrak{P}_z = \gamma_z V^2 = V Z_t$$

so daß

$$\operatorname{div}\mathfrak{P} = V\left(\frac{\partial X_t}{\partial x} + \frac{\partial Y_t}{\partial y} + \frac{\partial Z_t}{\partial t}\right)$$

wird, zuletzt daß $E = T_t$ ist, so gäbe dieser Energiesatz, weil man nach (22) (S. 348) und (46) (S. 354)

$$V\left(\frac{\partial X_t}{\partial x} + \frac{\partial Y_t}{\partial y} + \frac{\partial Z_t}{\partial z}\right) + \frac{\partial T_t}{\partial t} = -T_1 V^2$$

hat,

$$X_1 \frac{dx}{dt} + Y_1 \frac{dy}{dt} + Z_1 \frac{dz}{dt} - T_1 V^2 = 0. \tag{134$_2$}$$

Das wäre aber die Minkowskische Energiegleichung unter Fortlassung der Kräfte X_2, Y_2, Z_2, T_2, also jedenfalls nicht in Minkowskis Sinn, sondern als neue Gleichung, da sie auch die vierte Bewegungsgleichung nicht ersetzt. Da die drei Bewegungsgleichungen ergeben

$$m \frac{1}{2}\frac{dg^2}{dt} = X_1 \frac{dx}{dt} + Y_1 \frac{dy}{dt} + Z_1 \frac{dz}{dt},$$

so wäre

$$V^2 T_1 = \frac{m}{2}\frac{dg^2}{dt}$$

und

$$\frac{m}{2}\frac{dg^2}{dt} = -\operatorname{div}\mathfrak{P} - \frac{\partial T_t}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathfrak{P} - \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Wir führen in Max Abrahams Energiegleichung die Werte für $\mathfrak{P}$ und E nach (132) und (133) ein und erhalten so

$$0 = \alpha\mathsf{E} - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\Delta w\right)$$
$$+ \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} + \frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial t}\right),$$

also

(135₁) $$0 = \alpha\,\mathsf{E} - \frac{\partial w}{\partial t}\left\{\Delta w - \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right\}.$$

Setzt man

(136) $$\Delta w - \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \Box w\,,$$

so folgt hiernach

(135₂) $$\mathsf{E} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial t}\Box w\,.$$

Aus den Werten für die $X_x, \ldots, Z_z$ nach (130) bekommt man weiter für die Kräfte

(137) $$\begin{cases} \alpha\,\mathfrak{K}_x = -\dfrac{\partial w}{\partial x}\Box w + \dfrac{1}{V}\dfrac{\partial w}{\partial t}\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)\right\}, \\ \alpha\,\mathfrak{K}_y = -\dfrac{\partial w}{\partial y}\Box w + \dfrac{1}{V}\dfrac{\partial w}{\partial t}\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)\right\}, \\ \alpha\,\mathfrak{K}_z = -\dfrac{\partial w}{\partial z}\Box w + \dfrac{1}{V}\dfrac{\partial w}{\partial t}\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)\right\}. \end{cases}$$

Für ein Schwerkraftfeld nimmt Max Abraham an, daß die Funktion w nur insofern durch x, y, z, t bestimmt ist, als sie von V abhängt, das seinerseits mit x, y, z, t variiert. Alsdann haben wir mit $p = x, y, z$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial t}\right) &= \frac{\partial\frac{1}{V}}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial p} - \frac{\partial\frac{1}{V}}{\partial p}\frac{\partial w}{\partial t} \\ &= \frac{\partial\frac{1}{V}}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\partial\frac{1}{V}}{\partial p}\frac{\partial w}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad p = x, y, z\,,\end{aligned}$$

und die Ausdrücke für die Kräfte gehen über in

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial x}\Box w\,, \qquad \mathfrak{K}_y = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial y}\Box w\,, \qquad \mathfrak{K}_z = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial z}\Box w\,.$$

Das also wären die Komponenten der Schwerkraft und die Gesamtschwere der Substanz in der Raumeinheit betrüge

(138) $$\mathfrak{K} = -\frac{1}{\alpha}\Box w\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2}.$$

Die weiteren sehr interessanten Rechnungen, die sich auf besondere Annahmen über die Funktion w und über die Natur der Schwerkraft stützen, muß ich als unserer Aufgabe fremd übergehen. Nur der für E ermittelte Wert hat für uns Bedeutung.

Zunächst muß für den von Materie freien Raum, wo Bewegung nicht stattfindet, nach (135₁), $\mathsf{E} = 0$, also nach (135₂)

(139) $$\Box w = 0$$

sein, was eine verallgemeinerte Laplacesche Gleichung darstellt. Für den mit Materie erfüllten Raum setzt Max Abraham (wegen der Begründung sei auf die Abhandlung verwiesen)

$$w \Box w = 2 \alpha \eta \,, \tag{140}$$

wo η die Energiedichte der Materie bedeutet, als verallgemeinerte Poissonsche Gleichung. So bekommt er in der Materie

$$\mathsf{E} = \frac{2\eta}{w} \frac{\partial w}{\partial t} \,. \tag{141$_1$}$$

Nun wird $w = \sqrt{V}$ angenommen, es folgt dann

$$\mathsf{E} = \frac{\eta}{V} \frac{\partial V}{\partial t} \,. \tag{141$_2$}$$

Wenn, wie bei Minkowski, V schon nur nach Zeit konstant wäre, würde $\mathsf{E} = 0$ auch für die Materie sein, das Schwerkraftfeld würde ihr keine Energie zuführen. Man hätte dann auch $\mathfrak{P} = 0$ und $\gamma = 0$, und die Verhältnisse würden sich wie in einem Felde nur mit den Maxwellschen Spannungen gestalten. Das liegt weitab von Minkowskis Theorie und ist eben eine Folge des mit Minkowskis Theorie nicht zusammenstimmenden Energiesatzes ($134_{1,2}$).

Minkowskis Mechanik bezieht sich wie die Galileische auf die Bewegung von Substanzpunkten. Man hat sie so zu gestalten versucht, daß sie auf die stationäre Mechanik Max Plancks Anwendung finden kann. Am erfolgreichsten hat das Schaposchnikow bewirkt[1]). Er setzt zunächst

$$\mu = \frac{m}{\varphi} \,, \tag{142}$$

wo φ das Ruh-Volumen ist, und schreibt dann, weil m nach Minkowski konstant ist, die bewegenden Beschleunigungen in der Form $\frac{1}{\varphi} \frac{d}{d\tau} m \frac{d}{d\tau}$. Darauf ersetzt er $d\tau$ nach (1_2) (S. 343) durch den Wert $dt\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}$ und erhält so

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}} \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}} \frac{dx}{dt}\right) &= X \,, \\
\frac{1}{\varphi\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}} \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}} \frac{dy}{dt}\right) &= Y \,, \\
\frac{1}{\varphi\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}} \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}} \frac{dz}{dt}\right) &= Z \,, \\
\frac{i}{V\varphi\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}} \frac{d}{dt}\left(\frac{m V^2}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\right) &= T \,.
\end{aligned}\right. \tag{143}$$

[1]) Schaposchnikow, Annalen d. Physik u. Chemie **38**, 239 (1912).

Nun bedeutet $\varphi\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}$ das Volumen $\mathfrak{v}$ während der Bewegung (20) (S. 327). Ferner kann man in der letzten Gleichung, da m und V^2 konstant sind, für $\frac{m V^2}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}$ auch $m V^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}-1\right)$ setzen. Letztere Größe ist nach Minkowski die lebendige Kraft der Bewegung. Bezeichnet man sie mit E, so würden die Gleichungen

$$(144)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\dfrac{dx}{dt}\right)=\mathfrak{v}X=K_x\,, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\dfrac{dy}{dt}\right)=\mathfrak{v}Y=K_y\,, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\dfrac{dz}{dt}\right)=\mathfrak{v}Z=K_z\,, \\ \dfrac{dE}{dt}=\dfrac{\mathfrak{v}VT}{i}=-\mathfrak{v}iVT\,. \end{cases}$$

als neue Formen für Minkowskis Gleichungen. Schaposchnikows Erweiterung kommt nun darauf hinaus, daß er nunmehr unter E die Gesamtenergie versteht und nach Max Planck, (13) (S. 326) setzt

$$\frac{dE}{dt}=g_x K_x+g_y K_y+g_z K_z-P\frac{d\mathfrak{v}}{dt}+\vartheta\frac{dS}{dt}\,.$$

Er weist dann nach, daß man alsdann die Planckschen Formeln für die Ruhmasse m', das Bewegungsmoment $\mathfrak{G}$ und die Gesamtenergie E (S. 336 ff.) erhält und auch die Größen als invariant findet, die Max Planck als solche bezeichnethat (S. 338).

Einen anderen Weg hat Laue[1]) vorgeschlagen, nämlich zu der Energiedichte T_t alle Energien zu rechnen, welche im „Ruhsystem keine Störung zeigen, daher auch keinen Impuls ergeben", also Wärmeinhalt, chemische, elastische Energie, innere Energie der Atome „und vielleicht noch neue unbekannte Energiearten". Elektromagnetische Energie wird im allgemeinen ausgeschlossen, weil sie auch im Ruhezustand strömen kann, wo in besonderen Fällen Strömung nicht stattfindet, wird sie einbezogen. Kurz, es handelt sich um Energien, die den Körper als Träger benutzen.

Dieses alles ist Minkowskis Theorie durchaus fremd. Es gehört in die Lagrange-Helmholtzsche Mechanik, welche Minkowski auch nicht für den von Max Planck behandelten Fall bearbeitet hat. Und es scheint mir nicht zweckmäßig, eine in sich so geschlossene Theorie wie die Minkowskis mit Theorien zu verquicken, die, weil sie auf Einsteins Relativitätslehre beruhen, aller Voraussicht nach das Schicksal dieser Lehre teilen werden. Eher sollte das Umgekehrte stattfinden und versucht werden, die schönen Ergebnisse

[1]) Laue, Annalen d. Physik u. Chemie 35, 524 (1911).

Plancks in das Bereich der Minkowskischen Raum-Zeit-Lehre zu retten. Das kann auf dem Wege geschehen, auf dem Lagrange seine Gleichungen ermittelt hat. Da die Minkowskischen Gleichungen in der Form sich von den Galileischen gar nicht unterscheiden, so wäre man zunächst geneigt, sie zusammenfassend und auf ein Punktsystem beziehend, mit $Vt = L$, in der Form zu schreiben

$$\int m\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}\delta x + \frac{d^2y}{d\tau^2}\delta y + \frac{d^2z}{d\tau^2}\delta z + \frac{d^2L}{d\tau^2}\delta L\right) = \int m\left(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + U\delta L\right).$$

Alsdann hat man lediglich Lagranges Kalkül für drei Vektoren auf vier Vektoren zu übertragen. Man bekommt dann Gleichungen von der Form der Lagrangeschen Gleichungen und hat nur zu beachten, daß zu den Variabeln auch $L = Vt$ gehört, zu den Geschwindigkeiten auch $\frac{dL}{d\tau}$ und zu den Kräften auch U. Indessen sind diese Gleichungen dann allgemein nicht mehr kovariant. Eine kovariante Lagrangesche Mechanik läßt sich überhaupt nicht begründen, wenn man den Fall stationärer Bewegung ausnimmt. Daran muß jede Relativitätstheorie als allgemeine Lehre scheitern.

Bestehen schon Schwierigkeiten in der Vereinigung von Minkowskis Theorie mit der von Max Planck, so ist eine Vereinigung jener Theorie mit der Einsteinschen ganz ausgeschlossen. Nicht einmal im Satz von der lebendigen Kraft, den Einstein und Minkowski gleichlautend geben, besteht innere Übereinstimmung, denn tatsächlich folgt, wie ich glaube, aus Einsteins Mechanik allgemein ein ganz anderer Satz, der nur im besonderen Fall gleichförmiger Bewegung dem Minkowskischen entspricht.

7. Elektrodynamik und Optik in der Relativitätstheorie.

Von der Maxwell-Hertzschen, Cohnschen und Lorentzschen Theorie brauchen wir nach dem Früheren nicht mehr zu sprechen, sie genügen dem Relativitätsprinzip nicht genau. Am besten paßt sich ihm noch Cohns Theorie an (S. 201 f.)

a) Einsteins Elektrodynamik und Optik der Elektronen.

Von Einsteins[1]) Elektrodynamik haben wir die Formeln für die Kräfte schon kennen gelernt. Ihre Ableitung ist in folgender Weise bewirkt. Wenn Elektronen allein sich bewegen, insgesamt mit den Geschwindigkeiten g_x, g_y, g_z in bezug auf das Ruhsystem, so werden als elektrodynamische Gleichungen für freien Äther im Sinne von Maxwell und H. A. Lorentz geschrieben

$$\text{(a)} \quad + C_0 \operatorname{curl}\mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi g \varrho, \qquad \text{(b)} \quad - C_0 \operatorname{curl}\mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}.$$

Nach dem Relativitätsprinzip müssen die Gleichungen im System $\xi', \eta', \zeta', \tau$ dieselbe Form haben, nämlich

$$\text{(a')} \quad + C_0 (\operatorname{curl}\mathfrak{H}')' = \frac{\partial \mathfrak{E}'}{\partial \tau} + 4\pi g' \varrho', \qquad \text{(b')} \quad - C_0 (\operatorname{curl}\mathfrak{E}') = \frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial \tau}.$$

---

[1]) Einstein, Annalen d. Physik u. Chemie 17, 907 (1905).

Zur Umrechnung der Gleichungen auf das System $\xi', \eta', \zeta', \tau$ haben wir nach den Formeln (8) usf. (S. 284 f.) allgemein

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \xi'}\frac{\partial \xi'}{\partial t} = \beta\left(\frac{\partial A}{\partial \tau} - p\frac{\partial A}{\partial \xi'}\right);$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial \xi'}\frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} = \beta\left(\frac{\partial A}{\partial \xi'} - \frac{p}{V^2}\frac{\partial A}{\partial \tau}\right), \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial \eta'}, \qquad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial \zeta'}.$$

Somit wird die erste Gleichung des ersten Systems, da $V = C_0$ gesetzt ist,

$$V\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial \eta'} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial \zeta'}\right) + p\beta\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \xi'} = \beta\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \tau} + 4\pi g_x \varrho .$$

Es ist aber $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 4\pi\varrho$. Damit wird

$$\beta\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \xi'} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial \eta'} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \zeta'} - \beta\frac{p}{V^2}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \tau} = 4\pi\varrho ,$$

$$\beta\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \xi'} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial \eta'} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \zeta'} + \beta\frac{p}{V^2}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \tau} + 4\pi\varrho$$

und wir bekommen

$$V\left\{\frac{\partial}{\partial \eta'}\left(\mathfrak{H}_z - \frac{p}{V}\mathfrak{E}_y\right) - \frac{\partial}{\partial \zeta'}\left(\mathfrak{H}_y + \frac{p}{V}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \zeta'}\right)\right\} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\beta\mathfrak{E}_x - \beta\frac{p^2}{V^2}\mathfrak{E}_x\right) - 4\pi p\varrho + 4\pi g_x\varrho$$
$$= \frac{1}{\beta}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \tau} - 4\pi p\varrho + 4\pi g_x\varrho .$$

Entsprechend sind alle anderen Gleichungen umzurechnen. So folgt zuletzt

$$V\left\{\frac{\partial}{\partial \eta'}\beta\left(\mathfrak{H}_z - \frac{p}{V}\mathfrak{E}_y\right) - \frac{\partial}{\partial \zeta'}\beta\left(\mathfrak{H}_y + \frac{p}{V}\mathfrak{E}_z\right)\right\} = +\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \tau} - 4\pi\beta p\varrho + 4\pi\beta g_x\varrho ,$$

$$V\left\{\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial \zeta'} - \frac{\partial}{\partial \xi'}\beta\left(\mathfrak{H}_z - \frac{p}{V}\mathfrak{E}_y\right)\right\} = +\frac{\partial}{\partial \tau}\beta\left(\mathfrak{E}_y - \frac{p}{V}\mathfrak{H}_z\right) + 4\pi g_y\varrho ,$$

$$V\left\{\frac{\partial}{\partial \xi'}\beta\left(\mathfrak{H}_y + \frac{p}{V}\mathfrak{E}_z\right) - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial \eta'}\right\} = +\frac{\partial}{\partial \tau}\beta\left(\mathfrak{E}_z + \frac{p}{V}\mathfrak{H}_y\right) + 4\pi g_z\varrho .$$

$$V\left\{\frac{\partial}{\partial \eta'}\beta\left(\mathfrak{E}_z + \frac{p}{V}\mathfrak{H}_y\right) - \frac{\partial}{\partial \zeta'}\beta\left(\mathfrak{E}_y - \frac{p}{V}\mathfrak{H}_z\right)\right\} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial \tau} ,$$

$$V\left\{\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \zeta'} - \frac{\partial}{\partial \xi'}\beta\left(\mathfrak{E}_z + \frac{p}{V}\mathfrak{H}_y\right)\right\} = -\frac{\partial}{\partial \tau}\beta\left(\mathfrak{H}_y + \frac{p}{V}\mathfrak{E}_z\right) ,$$

$$V\left\{\frac{\partial}{\partial \xi'}\beta\left(\mathfrak{E}_y - \frac{p}{V}\mathfrak{H}_z\right) - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \eta'}\right\} = -\frac{\partial}{\partial \tau}\beta\left(\mathfrak{H}_z - \frac{p}{V}\mathfrak{E}_y\right) .$$

Und wir erhalten die schon benutzten (S. 312) Einsteinschen Beziehungen

$$\text{(c}') \quad \begin{cases} \mathfrak{E}'_{\xi'} = \mathfrak{E}_x , \\ \mathfrak{E}'_{\eta'} = \beta\left(\mathfrak{E}_y - \frac{p}{V}\mathfrak{H}_z\right) , \\ \mathfrak{E}'_{\zeta'} = \beta\left(\mathfrak{E}_z + \frac{p}{V}\mathfrak{H}_y\right) . \end{cases} \qquad \text{(d}') \quad \begin{cases} \mathfrak{H}'_{\xi'} = \mathfrak{H}_x , \\ \mathfrak{H}'_{\eta'} = \beta\left(\mathfrak{H}_y + \frac{p}{V}\mathfrak{E}_z\right) , \\ \mathfrak{H}'_{\zeta'} = \beta\left(\mathfrak{H}_z - \frac{p}{V}\mathfrak{E}_y\right) . \end{cases}$$

Durch Umkehrung hat man

$$
\text{(c)} \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}'_{\xi'}, \\ \mathfrak{E}_y = \beta\left(\mathfrak{E}'_{\eta'} + \frac{p}{V}\mathfrak{H}'_{\zeta'}\right), \\ \mathfrak{E}_z = \beta\left(\mathfrak{E}'_{\zeta'} - \frac{p}{V}\mathfrak{H}'_{\eta'}\right), \end{cases} \qquad \text{(d)} \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}'_{\xi'}, \\ \mathfrak{H}_y = \beta\left(\mathfrak{H}'_{\eta'} - \frac{p}{V}\mathfrak{E}'_{\zeta'}\right), \\ \mathfrak{H}_z = \beta\left(\mathfrak{H}'_{\zeta'} + \frac{p}{V}\mathfrak{E}'_{\eta'}\right). \end{cases}
$$

als wenn x, y, z in ξ', η', ζ' und p in $-p$ umgesetzt wird, wie das Relativitätsprinzip es verlangt. Interessant ist nun die Deutung, die Einstein den obigen Gleichungen gibt. Die Gleichungen (a), (b) gelten, wenn die Träger der Ladungen sich nicht bewegen, sondern allein die Ladungen, die Elektronen [vergl. (M), (B_2a), (B_3b) S. 209, 210]. Also sind $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ die Kräfte auf Einheitsladungen von Elektrizität und Magnetismus, wenn deren Träger im Verhältnis zum ruhenden Achsensystem x, y, z ruhen. $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$ dagegen bedeuten die Kräfte auf diese Ladungen in einem mit den Trägern verbundenen bewegten System ξ', η', ζ'. In der alten Auffassung wird nun gesagt, daß durch die Bewegung der Ladungen neue Kräfte auf sie wachgerufen werden, welche zu den früheren im Ruhezustande wirkenden hinzutreten. In der neueren relativistischen Deutung dagegen heißt es, es wirkten auf die Ladungen Kräfte wie in der Ruhe, jedoch in dem Betrage, den man durch Transformation des Feldes auf ein im Verhältnis zu den Ladungen ruhendes (d. h. mit den Ladungen verbundenes) Koordinatensystem mittels der Lorentz-Einsteinschen Übergangsformeln erhält. Diese neue Deutung begegnet aber der großen Schwierigkeit, daß man nicht weiß, was eigentlich zu transformieren ist, wenn ein elektromagnetisches Feld von vornherein nicht besteht, d. h. wenn dieses Feld allein in der Bewegung der Ladungen, wenn auch nur scheinbar, begründet sein soll, indem es ohne diese Bewegung überhaupt nicht vorhanden ist. Was soll da transformiert werden? Man sieht, daß die relativistische Deutung auf keine Weise die Entstehung des Feldes für die Beobachtung, selbst wenn man dem Feld eine Realität für sich nicht zuspricht, zu erklären vermag. Will man etwas zu transformieren haben, so muß man es schon voraussetzen, und das besagt nichts weiter, als das wieder zulassen, was man durch die Deutung hat entfernen wollen. Die Armut dieser relativistischen Symbolik tritt hier recht zutage.

Wir haben noch die vom Konvektivstrom herrührenden Glieder zu beachten. Sie geben

$$4\pi\beta(g_x - p)\varrho\,, \quad 4\pi g_y \varrho\,, \quad 4\pi g_z \varrho\,.$$

Setzt man

$$\text{(e)} \qquad \varrho' = \beta\left(1 - \frac{p\,g_x}{V^2}\right)\varrho\,,$$

so folgt nach (10) (S. 313) für die Komponenten des transformierten Konvektivstroms

$$\text{(f)} \qquad 4\pi g'_{\xi'}\varrho'\,, \quad 4\pi g'_{\eta'}\varrho'\,, \quad 4\pi g'_{\zeta'}\varrho'\,,$$

so daß insgesamt die Gleichungen (a′) sich ergeben, entsprechend dem Relativitätsprinzip.

Die transformierte Dichte ϱ' sollte nach dem Relativitätsprinzip der Gleichung genügen

$$\text{(g)} \qquad (\operatorname{div}\mathfrak{E}')' = \frac{\partial \mathfrak{E}'_x}{\partial \xi'} + \frac{\partial \mathfrak{E}'_y}{\partial \eta'} + \frac{\partial \mathfrak{E}'_z}{\partial \zeta'} = 4\pi\varrho'\,.$$

Wir haben aber

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = \beta\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial\xi'} + \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial\eta'} + \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial\zeta'} - \beta\frac{p}{V^2}\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial\tau}$$

und zufolge der Werte für $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = \beta\left(\frac{\partial\mathfrak{E}'_{\xi'}}{\partial\xi'} + \frac{\partial\mathfrak{E}'_{\eta'}}{\partial\eta'} + \frac{\partial\mathfrak{E}'_{\zeta'}}{\partial\zeta'}\right) + \beta\frac{p}{V}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}'_{\zeta'}}{\partial\eta'} - \frac{\partial\mathfrak{H}'_{\eta'}}{\partial\zeta'}\right) - \beta\frac{p}{V^2}\frac{\partial\mathfrak{E}'_{\xi'}}{\partial\tau},$$

d. h. nach (a′)

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = \beta(\operatorname{div}\mathfrak{E}')' + \beta\frac{p}{V^2}4\pi\varrho' g'_{\xi'},$$

also

$$\varrho = \beta\left(1 + \frac{p g'_{\xi'}}{V^2}\right)\varrho'.$$

Setzen wir für ϱ' seinen Wert unter (e) ein, so müßte sein

$$\beta^2\left(1 + \frac{p g'_{\xi'}}{V^2}\right)\left(1 - \frac{p g_x}{V^2}\right) = 1,$$

und diese Gleichung ist identisch erfüllt durch die Beziehungen unter (10) oder (13) (S. 313) zwischen $g'_{\xi'}$ und g_x. Die Maxwell-Lorentzschen Gleichungen für freien Äther genügen also in jeder Hinsicht dem Relativitätsprinzip.

Sehr elegant ist Einsteins Ableitung der Aberration und der Dopplerschen Gleichung im freien Äther aus seinem Prinzip. Von einer ruhenden, den Nullpunkt des Achsensystems x, y, z bildenden Lichtquelle mögen elektromagnetische Wellen ausgehen von der Form

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_{0x}\sin\varphi, \quad \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_{0x}\sin\varphi,$$
$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_{0y}\sin\varphi, \quad \mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}_{0y}\sin\varphi,$$
$$\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_{0z}\sin\varphi, \quad \mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_{0z}\sin\varphi,$$

wo

$$\varphi = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{C_0}\right)$$

ist. Bewegt sich der in x, y, z befindliche Beobachter mit der gleichförmigen Geschwindigkeit p parallel der x-Achse, so muß für ihn entsprechend sein

$$\varphi' = \frac{2\pi}{T'}\left(\tau - \frac{\lambda'\xi' + \mu'\eta' + \nu'\zeta'}{C_0}\right).$$

Da nun nach (10) und (11a) (S. 313) ist

$$\varphi = \frac{2\pi}{T}\left(\beta\tau + \beta\frac{p}{V^2}\xi' - \frac{\lambda(\beta\xi' + \beta p\tau) + \mu\eta' + \nu\zeta'}{C_0}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{T}\left(\beta\left(1 - \frac{\lambda p}{C_0}\right)\tau - \frac{\beta\left(\lambda - \frac{p}{V^2}C_0\right)\xi' + \mu\eta' + \nu\zeta'}{C_0}\right)$$

$$= \frac{2\pi\beta}{T}\left(1 - \frac{\lambda p}{C_0}\right)\left(\tau - \frac{\beta\left(\lambda - \frac{p}{V^2}C_0\right)\xi' + \mu\eta' + \nu\zeta'}{C_0\beta\left(1 - \frac{\lambda p}{C_0}\right)}\right)$$

so hat man, wenn $V = C_0$ gesetzt wird,

$$\text{(h)} \qquad \lambda' = \frac{\lambda - \frac{p}{C_0}}{\beta\left(1 - \frac{\lambda p}{C_0}\right)}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\beta\left(1 - \frac{\lambda p}{C_0}\right)}, \quad \nu' = \frac{\nu}{\beta\left(1 - \frac{\lambda p}{C_0}\right)},$$

als Aberrationsgleichungen im freien Äther, und im Sinne von H. A. Lorentz (S. 37 ff.)

$$\text{(i)} \qquad \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{T}\beta\left(1 - \frac{\lambda p}{C_0}\right)$$

für das Dopplersche Prinzip, wobei $\lambda = \cos$ (Strahl, Bewegungsrichtung) zu setzen ist. Die Diskussion dieser Gleichungen, die zu den schon bekannten Beziehungen führt, entspricht früheren Erwägungen (S. 163 ff. u. a. a. O.).

Ferner haben wir als Amplituden, gemessen im bewegten System nach (c'),

$$\text{(k)} \quad \begin{cases} \mathfrak{E}'_{0\xi'} = \mathfrak{E}_{0x}, \\ \mathfrak{E}'_{0\eta'} = \beta\left(\mathfrak{E}_{0y} - \frac{p}{V}\mathfrak{H}_{0z}\right), \\ \mathfrak{E}'_{0\zeta'} = \beta\left(\mathfrak{E}_{0z} + \frac{p}{V}\mathfrak{H}_{0y}\right), \end{cases} \qquad \text{(l)} \quad \begin{cases} \mathfrak{H}'_{0\xi'} = \mathfrak{H}_{0x}, \\ \mathfrak{H}'_{0\eta'} = \beta\left(\mathfrak{H}_{0y} + \frac{p}{V}\mathfrak{E}_{0z}\right), \\ \mathfrak{H}'_{0\zeta'} = \beta\left(\mathfrak{H}_{0z} - \frac{p}{V}\mathfrak{E}_{0y}\right). \end{cases}$$

Stehen die beiden Wellen im Ruhesystem aufeinander senkrecht, so ist

$$\mathfrak{E}_{0x}\mathfrak{H}_{0x} + \mathfrak{E}_{0y}\mathfrak{H}_{0y} + \mathfrak{E}_{0z}\mathfrak{H}_{0z} = 0 .$$

Dementsprechend wird

$$\begin{aligned} &\mathfrak{E}'_{0\xi'}\mathfrak{H}'_{0\xi'} + \mathfrak{E}'_{0\eta'}\mathfrak{H}'_{0\eta'} + \mathfrak{E}'_{0\zeta'}\mathfrak{H}'_{0\zeta'} \\ &\qquad = \mathfrak{E}_{0x}\mathfrak{H}_{0x} + \beta^2\left(\mathfrak{E}_{0y}\mathfrak{H}_{0y} + \mathfrak{E}_{0z}\mathfrak{H}_{0z} - \frac{p^2}{V^2}\mathfrak{E}_{0z}\mathfrak{H}_{0z} - \frac{p^2}{V^2}\mathfrak{E}_{0y}\mathfrak{H}_{0y}\right) \\ &\qquad = \mathfrak{E}_{0x}\mathfrak{H}_{0x} + \mathfrak{E}_{0y}\mathfrak{H}_{0y} + \mathfrak{E}_{0z}\mathfrak{H}_{0z} = 0 ; \end{aligned}$$

die Wellen erscheinen auch dem bewegten Beobachter senkrecht zueinander.

Neu an der Einsteinschen Theorie ist, daß auch die Polarisation für den bewegten Beobachter sich anders erweist als für den ruhenden. Die Kosinus der Schwingungsrichtung sind für den bewegten Beobachter

$$\text{(m)} \quad l'_e = \frac{\mathfrak{E}'_{0x}}{\mathfrak{E}'_0}, \quad m'_e = \frac{\mathfrak{E}'_{0y}}{\mathfrak{E}'_0}, \quad n'_e = \frac{\mathfrak{E}'_{0z}}{\mathfrak{E}'_0}; \quad l'_m = \frac{\mathfrak{H}'_{0x}}{\mathfrak{H}'_0}, \quad m'_m = \frac{\mathfrak{H}'_{0y}}{\mathfrak{H}'_0}, \quad n'_m = \frac{\mathfrak{H}'_{0z}}{\mathfrak{H}'_0}.$$

Ebenso fallen die Intensitäten anders aus[1]).

---

[1]) Die hierauf sich beziehenden Angaben Einsteins weiß ich nicht zu verifizieren. Die Amplitudenquadrate für den bewegten Beobachter sind

$$\text{(n)} \qquad \mathfrak{E}_0'^2 = \beta^2\left(\mathfrak{E}_0^2 + \frac{p^2}{V^2}\mathfrak{H}_0^2 - \frac{p^2}{V^2}(\mathfrak{E}_{0x}^2 + \mathfrak{H}_{0x}^2) - 2\frac{p}{V}(\mathfrak{E}_{0y}\mathfrak{H}_{0z} - \mathfrak{E}_{0z}\mathfrak{H}_{0y})\right),$$

$$\text{(o)} \qquad \mathfrak{H}_0'^2 = \beta^2\left(\mathfrak{H}_0^2 + \frac{p^2}{V^2}\mathfrak{E}_0^2 - \frac{p^2}{V^2}(\mathfrak{H}_{0x}^2 + \mathfrak{E}_{0x}^2) + 2\frac{p}{V}(\mathfrak{H}_{0y}\mathfrak{E}_{0z} - \mathfrak{H}_{0z}\mathfrak{E}_{0y})\right),$$

so daß

$$\text{(p)} \qquad \mathfrak{E}_0'^2 - \mathfrak{H}_0'^2 = \mathfrak{E}_0^2 - \mathfrak{H}_0^2$$

b) Minkowskis Elektrodynamik.

Minkowski verleiht den Grundgleichungen, von denen er nach (1), (2) (S. 235) ausgeht, eine ihm eigene Gestalt[1]). Wir setzen wieder x_1, x_2, x_3, x_4 für $x, y, z, i C_0 t$, ferner[2])

$$(1) \qquad \mathfrak{H}_x = f_{23}, \qquad \mathfrak{H}_y = f_{31}, \qquad \mathfrak{H}_z = f_{12};$$

$$(2) \qquad 4\pi \mathfrak{D}_x = -\frac{1}{i} f_{14}, \quad 4\pi \mathfrak{D}_y = -\frac{1}{i} f_{24}, \quad 4\pi \mathfrak{D}_z = -\frac{1}{i} f_{34};$$

$$(3) \qquad 4\pi \mathfrak{B}_x = F_{23}, \qquad 4\pi \mathfrak{B}_y = F_{31}, \qquad 4\pi \mathfrak{B}_z = F_{12};$$

$$(4) \qquad \mathfrak{E}_x = -\frac{1}{i} F_{14}, \qquad \mathfrak{E}_y = -\frac{1}{i} F_{24}, \qquad \mathfrak{E}_z = -\frac{1}{i} F_{34};$$

$$(5) \qquad \frac{4\pi}{C_0} J_x = s_1, \quad \frac{4\pi}{C_0} J_y = s_2, \quad \frac{4\pi}{C_0} J_z = s_3, \quad 4\pi i \varrho = s_4.$$

Zu den sechs Größen f und den sechs Größen F fügen wir hier je zehn weitere hinzu, nämlich

$$(6_1) \qquad f_{11} = 0, \quad f_{22} = 0, \quad f_{33} = 0, \quad f_{44} = 0,$$

$$(6_2) \quad f_{21} = -f_{12}, \; f_{32} = -f_{23}, \; f_{43} = -f_{34}, \; f_{41} = -f_{14}, \; f_{42} = -f_{24}, \; f_{13} = -f_{31},$$

$$(7_1) \qquad F_{11} = 0, \quad F_{22} = 0, \quad F_{33} = 0, \quad F_{44} = 0,$$

$$(7_2) \quad \begin{cases} F_{21} = -F_{12}, \quad F_{32} = -F_{23}, \quad F_{43} = -F_{34}, \quad F_{41} = -F_{14}, \\ F_{42} = -F_{24}, \quad F_{13} = -F_{31}. \end{cases}$$

---

wird. Statt dessen gibt Einstein an

$$(q) \qquad \mathfrak{E}_0'^2 = \mathfrak{E}_0^2 \frac{\left(1 - \frac{\lambda p}{V}\right)^2}{1 - \frac{p^2}{V^2}} = \mathfrak{E}_0^2 \left(\frac{T}{T'}\right)^2,$$

$$(r) \qquad \mathfrak{H}_0'^2 = \mathfrak{H}_0^2 \frac{\left(1 - \frac{\lambda p}{V}\right)^2}{1 - \frac{p^2}{V^2}} = \mathfrak{H}_0^2 \left(\frac{T}{T'}\right)^2,$$

$$(s) \qquad \mathfrak{E}_0'^2 - \mathfrak{H}_0'^2 = (\mathfrak{E}_0^2 - \mathfrak{H}_0^2) \left(\frac{T}{T'}\right)^2,$$

was mit den obigen Gleichungen nicht zu vereinigen ist; er muß also etwas gemeint haben, was ich nicht zu ersehen vermag. Definiert man die Intensität als Quadrat der lebendigen Kraft, so müßte stehen

$$(t) \qquad J_e' = \mathfrak{E}_0'^2 \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2,$$

$$(u) \qquad J_m' = \mathfrak{H}_0'^2 \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2.$$

Also auch auf diese können sich Einsteins Angaben nicht beziehen. Das ist der Grund, warum im Text die weiteren auf die Intensität sich beziehenden Rechnungen Einsteins, die übrigens für unsere Aufgabe auch mindere Bedeutung haben, fortgelassen sind.

[1]) Es ist auch hier der von Minkowski gleich 1 gesetzte Faktor C_0 oder V überall wieder hergestellt.

[2]) Im Vergleich zu unseren Bezeichnungen entsprechen den $\mathfrak{H}, \mathfrak{D}, \mathfrak{B}, \mathfrak{E}$ bei Minkowski $\mathfrak{m}, \mathfrak{e}, \mathfrak{M}, \mathfrak{E}$. Die f, F haben die gleiche Bedeutung wie bei Minkowski. Für K schreibt Minkowski $\varkappa$.

Alsdann lauten die Maxwellschen Grundgleichungen im Ruhezustand

$$
(\mathrm{A}_1) \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial f_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f_{14}}{\partial x_4} = s_1 \,, \\[2ex]
\dfrac{\partial f_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f_{24}}{\partial x_4} = s_2 \,, \\[2ex]
\dfrac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_{33}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f_{34}}{\partial x_4} = s_3 \,, \\[2ex]
\dfrac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_{43}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f_{44}}{\partial x_4} = s_4 \,,
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{B}_1) \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{42}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{23}}{\partial x_4} = \dfrac{\partial F^*_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F^*_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F^*_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F^*_{14}}{\partial x_4} = 0 \,, \\[2ex]
\dfrac{\partial F_{43}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{14}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{31}}{\partial x_4} = \dfrac{\partial F^*_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F^*_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F^*_{23}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F^*_{24}}{\partial x_4} = 0 \,, \\[2ex]
\dfrac{\partial F_{24}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{33}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_4} = \dfrac{\partial F^*_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F^*_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F^*_{33}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F^*_{34}}{\partial x_4} = 0 \,, \\[2ex]
\dfrac{\partial F_{32}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{21}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{44}}{\partial x_4} = \dfrac{\partial F^*_{41}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F^*_{42}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F^*_{43}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F^*_{44}}{\partial x_4} = 0 \,,
\end{cases}
$$

wo die F^* dual sind zu den F (S. 303 f.), in voller Symmetrie der einzelnen Größen. Die Diagonalglieder sind in beiden Systemen Null. Zu diesen Gleichungen kommen die nach Maxwell-Hertz gebildeten Gleichungen

$$(\mathrm{C}) \qquad 4\pi\mathfrak{D} = K\mathfrak{E} \,, \quad 4\pi\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H} \,,$$

$$(\mathrm{D}) \qquad 4\pi J = C_0\sigma\mathfrak{E} \,.$$

Es werden nun drei „Axiome“ aufgestellt.

1. Wenn ein Substanzpunkt ruht, so daß für ihn $g = 0$ ist —, in welcher Bewegung auch die Umgebung sich befinden mag — so sollen alle obigen Gleichungen für ihn so gelten, als wenn die ganze Substanz ruhte.

2. Jede Substanzgeschwindigkeit soll kleiner als C_0 sein, kleiner als die Verbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im Äther.

3. Die Größen s_1, s_2, s_3, s_4 sollen sich transformieren wie Komponenten eines Raum-Zeit-Vektors, Raum-Zeit-Vektors I. Art, die Größen f, F wie Komponenten eines Raum-Zeit-Tensors, Raum-Zeit-Vektors II. Art.

Dieses letzte Axiom ist für Minkowski das Prinzip der Relativität und er nennt es auch so. Also die s transformieren sich wie Koordinaten, die f und F wie Quadrate und Produkte von Koordinaten (S. 119).

Die Gleichungen (A_1), (B_1) gelten also zunächst für den Ruhezustand. Findet Bewegung statt, so denken wir uns alles auf ein System x_1, x_2, x_3, x_4 bezogen, in dem die t-Achse an der betreffenden Stelle parallel ist der dort durchgehenden Raum-Zeit-Linie. Alsdann ist dort alles „auf Ruhe gebracht“ (S. 305). Nach dem ersten Axiom gelten also an dieser Stelle die Gleichungen mit f, F, s, x_1, x_2, x_3, x_4. Nun transformieren wir diese Gleichungen um in x_1', x_2', x_3', x_4', so müssen wir die Gleichungen für den Bewegungszustand erhalten. Diese Gleichungen aber haben nach dem dritten Axiom dieselbe Form wie im Ruhezustand, die in ihnen vertretenen Größen f', F', s' sind jedoch in besonderer, durch die Transformation gegebener, Weise bestimmt.

Bei der Durchführung bedienen wir uns der Rechnungen und Ergebnisse in Abschnitt 3 (S. 299 ff.), denn die dort behandelten Größen f genügen denselben Bedingungen, denen hier die f und die F unterworfen wurden. Nach (52) (S. 301) bestehen hiernach für die f', F' dieselben Beziehungen wie hier unter (6), (7) für die f, F angenommen sind. Versehen wir also in den Gleichungen (1) bis (4) die $f, F, \mathfrak{H}, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \mathfrak{B}$ mit Akzenten, so bleiben sie unverändert bestehen, ebenso die Gleichungen (A_1), (B_1) und die (C), (D).

Die Berechnung der f' aus den f und der F' aus den F geschieht nach den Formeln (53) (S. 301). Für die der s' aus den s gelten dieselben Formeln wie für die der x' aus den x. Hiernach haben wir zufolge (53) (S. 301)

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{H}'_{x'_1}, 4\pi\mathfrak{B}'_{x'_1} = {} & (\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32})(\mathfrak{H}_{x_1}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_1}) + (\alpha_{23}\alpha_{31}-\alpha_{21}\alpha_{33})(\mathfrak{H}_{x_2}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_2}) \\
& + (\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{31})(\mathfrak{H}_{x_3}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_3}) \\
& + i\{(\alpha_{24}\alpha_{31}-\alpha_{21}\alpha_{34})(4\pi\mathfrak{D}_{x_1}, \mathfrak{E}_{x_1}) + (\alpha_{24}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{34})(4\pi\mathfrak{D}_{x_2}, \mathfrak{E}_{x_2}) \\
& + (\alpha_{24}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{34})(4\pi\mathfrak{D}_{x_3}, \mathfrak{E}_{x_3})\}\,, \\
\mathfrak{H}'_{x'_2}, 4\pi\mathfrak{B}'_{x'_2} = {} & (\alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{33})(\mathfrak{H}_{x_1}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_1}) + (\alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{31})(\mathfrak{H}_{x_2}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_2}) \\
& + (\alpha_{12}\alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{32})(\mathfrak{H}_{x_3}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_3}) \\
& + i\{(\alpha_{11}\alpha_{34}-\alpha_{14}\alpha_{31})(4\pi\mathfrak{D}_{x_1}, \mathfrak{E}_{x_1}) + (\alpha_{12}\alpha_{34}-\alpha_{14}\alpha_{32})(4\pi\mathfrak{D}_{x_2}, \mathfrak{E}_{x_2}) \\
& + (\alpha_{13}\alpha_{34}-\alpha_{14}\alpha_{33})(4\pi\mathfrak{D}_{x_3}, \mathfrak{E}_{x_3})\}\,, \\
\mathfrak{H}'_{x'_3}, 4\pi\mathfrak{B}'_{x'_3} = {} & (\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{22})(\mathfrak{H}_{x_1}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_1}) + (\alpha_{13}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{23})(\mathfrak{H}_{x_2}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_2}) \\
& + (\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})(\mathfrak{H}_{x_3}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_3}) \\
& + i\{(\alpha_{14}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{24})(4\pi\mathfrak{D}_{x_1}, \mathfrak{E}_{x_1}) + (\alpha_{14}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{24})(4\pi\mathfrak{D}_{x_2}, \mathfrak{E}_{x_2}) \\
& + (\alpha_{14}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{24})(4\pi\mathfrak{D}_{x_3}, \mathfrak{E}_{x_3})\}\,.
\end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
4\pi i\mathfrak{D}'_{x'_1}, i\mathfrak{E}'_{x'_1} = {} & (\alpha_{13}\alpha_{42}-\alpha_{12}\alpha_{43})(\mathfrak{H}_{x_1}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_1}) + (\alpha_{11}\alpha_{43}-\alpha_{13}\alpha_{41})(\mathfrak{H}_{x_2}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_2}) \\
& + (\alpha_{12}\alpha_{41}-\alpha_{11}\alpha_{42})(\mathfrak{H}_{x_3}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_3}) \\
& + i\{(\alpha_{11}\alpha_{44}-\alpha_{14}\alpha_{41})(4\pi\mathfrak{D}_{x_1}, \mathfrak{E}_{x_1}) + (\alpha_{12}\alpha_{44}-\alpha_{14}\alpha_{42})(4\pi\mathfrak{D}_{x_2}, \mathfrak{E}_{x_2}) \\
& + (\alpha_{13}\alpha_{44}-\alpha_{14}\alpha_{43})(4\pi\mathfrak{D}_{x_3}, \mathfrak{E}_{x_3})\}\,, \\
4\pi i\mathfrak{D}'_{x'_2}, i\mathfrak{E}'_{x'_2} = {} & (\alpha_{23}\alpha_{42}-\alpha_{22}\alpha_{43})(\mathfrak{H}_{x_1}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_1}) + (\alpha_{21}\alpha_{43}-\alpha_{23}\alpha_{41})(\mathfrak{H}_{x_2}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_2}) \\
& + (\alpha_{22}\alpha_{41}-\alpha_{21}\alpha_{42})(\mathfrak{H}_{x_3}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_3}) \\
& + i\{(\alpha_{21}\alpha_{44}-\alpha_{24}\alpha_{41})(4\pi\mathfrak{D}_{x_1}, \mathfrak{E}_{x_1}) + (\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}\alpha_{42})(4\pi\mathfrak{D}_{x_2}, \mathfrak{E}_{x_2}) \\
& + (\alpha_{23}\alpha_{44}-\alpha_{24}\alpha_{43})(4\pi\mathfrak{D}_{x_3}, \mathfrak{E}_{x_3})\}\,, \\
4\pi i\mathfrak{D}'_{x'_3}, i\mathfrak{E}'_{x'_3} = {} & (\alpha_{33}\alpha_{42}-\alpha_{32}\alpha_{34})(\mathfrak{H}_{x_1}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_1}) + (\alpha_{31}\alpha_{43}-\alpha_{33}\alpha_{41})(\mathfrak{H}_{x_2}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_2}) \\
& + (\alpha_{32}\alpha_{41}-\alpha_{31}\alpha_{42})(\mathfrak{H}_{x_3}, 4\pi\mathfrak{B}_{x_3}) \\
& + i\{(\alpha_{31}\alpha_{44}-\alpha_{34}\alpha_{41})(4\pi\mathfrak{D}_{x_1}, \mathfrak{E}_{x_1}) + (\alpha_{32}\alpha_{44}-\alpha_{34}\alpha_{42})(4\pi\mathfrak{D}_{x_2}, \mathfrak{E}_{x_2}) \\
& + (\alpha_{33}\alpha_{44}-\alpha_{34}\alpha_{43})(4\pi\mathfrak{D}_{x_3}, \mathfrak{E}_{x_3})\}\,.
\end{aligned}\right.$$

Die Formeln umfassen beide Systeme von Größen in leicht verständlicher Andeutung, da immer zu der links zuerst geschriebenen auch die rechts zuerst geschriebene Größe gehört.

Für die s' haben wir

$$(10)\qquad \begin{cases} s_1' = \alpha_{11}s_1 + \alpha_{12}s_2 + \alpha_{13}\alpha_3 + \alpha_{14}s_4\,, \\ s_2' = \alpha_{21}s_1 + \alpha_{22}s_2 + \alpha_{23}s_3 + \alpha_{24}s_4\,, \\ s_3' = \alpha_{31}s_1 + \alpha_{32}s_2 + \alpha_{33}s_3 + \alpha_{34}s_4\,, \\ s_4' = \alpha_{41}s_1 + \alpha_{42}s_2 + \alpha_{43}s_3 + \alpha_{44}s_4\,. \end{cases}$$

Aus (55) (S. 301) folgt weiter

$$(11_1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H}'^2_{x_1'} + \mathfrak{H}'^2_{x_2'} + \mathfrak{H}'^2_{x_3'} - (4\pi)^2\left(\mathfrak{D}'^2_{x_1'} + \mathfrak{D}'^2_{x_2'} + \mathfrak{D}'^2_{x_3'}\right) \\ \qquad = \mathfrak{H}^2_{x_1} + \mathfrak{H}^2_{x_2} + \mathfrak{H}^2_{x_3} - (4\pi)^2\left(\mathfrak{D}^2_{x_1} + \mathfrak{D}^2_{x_2} + \mathfrak{D}^2_{x_3}\right). \end{cases}$$

$$(12_1)\qquad \begin{cases} (4\pi)^2\left(\mathfrak{B}'^2_{x_1'} + \mathfrak{B}'^2_{x_2'} + \mathfrak{B}'^2_{x_3'}\right) - \left(\mathfrak{E}'^2_{x_1'} + \mathfrak{E}'^2_{x_2'} + \mathfrak{E}'^2_{x_3'}\right) \\ \qquad = (4\pi)^2\left(\mathfrak{B}^2_{x_1} + \mathfrak{B}^2_{x_2} + \mathfrak{B}^2_{x_3}\right) - \left(\mathfrak{E}^2_{x_1} + \mathfrak{E}^2_{x_2} + \mathfrak{E}^2_{x_3}\right), \end{cases}$$

oder

$$(11_2)\qquad \mathfrak{H}'^2 - (4\pi)^2\mathfrak{D}'^2 = \mathfrak{H}^2 - (4\pi)^2\mathfrak{D}^2\,,$$

$$(12_2)\qquad \mathfrak{E}'^2 - (4\pi)^2\mathfrak{B}'^2 = \mathfrak{E}^2 - (4\pi)^2\mathfrak{B}^2\,.$$

Sodann aus (57_2) (S. 303) z. B.

$$(13)\qquad \begin{cases} \left(\mathfrak{H}'_{x_1'} - 4\pi i\,\mathfrak{D}'_{x_1'}\right)^2 + \left(\mathfrak{H}'_{x_2'} - 4\pi i\,\mathfrak{D}'_{x_2'}\right)^2 + \left(\mathfrak{H}'_{x_3'} - 4\pi i\,\mathfrak{D}'_{x_3'}\right)^2 \\ = (\mathfrak{H}_{x_1} - 4\pi i\,\mathfrak{D}_{x_1})^2 + (\mathfrak{H}_{x_2} - 4\pi i\,\mathfrak{D}_{x_2})^2 + (\mathfrak{H}_{x_3} - 4\pi i\,\mathfrak{D}_{x_3})^2 \end{cases}$$

und aus (58_2) (S. 303)

$$(14\text{a})\qquad \mathfrak{H}'_{x_1'}\mathfrak{D}'_{x_1'} + \mathfrak{H}'_{x_2'}\mathfrak{D}'_{x_2'} + \mathfrak{H}'_{x_3'}\mathfrak{D}'_{x_3'} = \mathfrak{H}_{x_1}\mathfrak{D}_{x_1} + \mathfrak{H}_{x_2}\mathfrak{D}_{x_2} + \mathfrak{H}_{x_3}\mathfrak{D}_{x_3}\,.$$

$$(14\text{b})\qquad \mathfrak{E}'_{x_1'}\mathfrak{B}'_{x_1'} + \mathfrak{E}'_{x_2'}\mathfrak{B}'_{x_2'} + \mathfrak{E}'_{x_3'}\mathfrak{B}'_{x_3'} = \mathfrak{E}_{x_1}\mathfrak{B}_{x_1} + \mathfrak{E}_{x_2}\mathfrak{B}_{x_2} + \mathfrak{E}_{x_3}\mathfrak{B}_{x_3}\,.$$

Wir nehmen nunmehr den Fall der eigentlichen Lorentz-Einstein-Transformation, also $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$, $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{24} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{41} = \alpha_{42} = 0$ und erhalten

$$(15)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H}'_{x_1'} = \alpha_{33}\mathfrak{H}_{x_1} - \alpha_{34}\,i\,4\pi\,\mathfrak{D}_{x_2}\,, \\ \mathfrak{H}'_{x_2'} = \alpha_{33}\mathfrak{H}_{x_2} + \alpha_{34}\,i\,4\pi\,\mathfrak{D}_{x_1}\,, \\ \mathfrak{H}'_{x_3'} = \mathfrak{H}_{x_3}\,, \\ 4\pi\,\mathfrak{B}'_{x_1'} = \alpha_{33}\,4\pi\,\mathfrak{B}_{x_1} - \alpha_{34}\,i\mathfrak{E}_{x_2}\,, \\ 4\pi\,\mathfrak{B}'_{x_2'} = \alpha_{33}\,4\pi\,\mathfrak{B}_{x_2} + \alpha_{34}\,i\mathfrak{E}_{x_1}\,, \\ 4\pi\,\mathfrak{B}'_{x_3'} = 4\pi\,\mathfrak{B}_{x_3}\,, \end{cases}
\qquad (16)\qquad \begin{cases} 4\pi i\,\mathfrak{D}'_{x_1'} = \alpha_{43}\mathfrak{H}_{x_2} + 4\pi i\,\alpha_{44}\mathfrak{D}_{x_1}\,, \\ 4\pi i\,\mathfrak{D}'_{x_2'} = -\alpha_{43}\mathfrak{H}_{x_1} + 4\pi i\,\alpha_{44}\mathfrak{D}_{x_2}\,, \\ 4\pi i\,\mathfrak{D}'_{x_3'} = (\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}\alpha_{43})\,4\pi i\,\mathfrak{D}_{x_3}\,, \\ i\mathfrak{E}'_{x_1'} = \alpha_{43}\,4\pi\,\mathfrak{B}_{x_2} + \alpha_{44}\,i\mathfrak{E}_{x_1}\,, \\ i\mathfrak{E}'_{x_2'} = -\alpha_{43}\,4\pi\,\mathfrak{B}_{x_1} + \alpha_{44}\,i\mathfrak{E}_{x_2}\,, \\ i\mathfrak{E}'_{x_3'} = (\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}\alpha_{43})\,i\mathfrak{E}_{x_3}\,, \end{cases}$$

$$(17)\qquad s_1' = s_1\,,\quad s_2' = s_2\,,\quad s_3' = \alpha_{33}s_3 + \alpha_{34}s_4\,,\quad s_4' = \alpha_{43}s_3 + \alpha_{44}s_4\,.$$

Setzen wir jetzt die Lorentz-Einsteinschen Werte ein (32), (33) (S. 295)

$$\alpha_{33} = \alpha_{44} = \delta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}}\,,\qquad \alpha_{34} = -\alpha_{43} = \sqrt{1 - \delta^2} = i\,\frac{p}{V}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}}\,,$$

so wird

$$
(18)\quad \begin{cases}
\mathfrak{H}'_{x'_1} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}}\left(\mathfrak{H}_{x_1} + 4\pi \dfrac{p}{V}\mathfrak{D}_{x_2}\right), \\
\mathfrak{H}'_{x'_2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}}\left(\mathfrak{H}_{x_2} - 4\pi \dfrac{p}{V}\mathfrak{D}_{x_1}\right), \\
\mathfrak{H}'_{x'_3} = \mathfrak{H}_{x_3}\,; \\
4\pi\,\mathfrak{B}'_{x'_1} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}}\left(4\pi\,\mathfrak{B}_{x_1} + \dfrac{p}{V}\mathfrak{E}_{x_2}\right), \\
4\pi\,\mathfrak{B}'_{x'_2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}}\left(4\pi\,\mathfrak{B}_{x_2} - \dfrac{p}{V}\mathfrak{E}_{x_1}\right), \\
4\pi\,\mathfrak{B}'_{x'_3} = 4\pi\,\mathfrak{B}_{x_3}\,,
\end{cases}
$$

$$
(19)\quad \begin{cases}
4\pi\,\mathfrak{D}'_{x'_1} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}}\left(4\pi\,\mathfrak{D}_{x_1} - \dfrac{p}{V}\mathfrak{H}_{x_2}\right), \\
4\pi\,\mathfrak{D}'_{x'_2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}}\left(4\pi\,\mathfrak{D}_{x_2} + \dfrac{p}{V}\mathfrak{H}_{x_1}\right), \\
4\pi\,\mathfrak{D}'_{x'_3} = 4\pi\,\mathfrak{D}_{x_3}\,; \\
\mathfrak{E}'_{x'_1} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}}\left(\mathfrak{E}_{x_1} - \dfrac{p}{V}\,4\pi\,\mathfrak{B}_{x_2}\right), \\
\mathfrak{E}'_{x'_2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}}\left(\mathfrak{E}_{x_2} + \dfrac{p}{V}\,4\pi\,\mathfrak{B}_{x_1}\right), \\
\mathfrak{E}'_{x'_3} = \mathfrak{E}_{x_3}\,.
\end{cases}
$$

$$
(20)\quad \begin{cases}
s'_1 = s_1\,, \quad s'_2 = s_2\,, \\
s'_3 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}}\left(s_3 + \dfrac{p}{V}\,i\,s_4\right), \\
s'_4 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{V^2}}}\left(s_4 - \dfrac{p}{V}\,i\,s_3\right).
\end{cases}
$$

Man sieht, wie die Beziehungen für $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{E}'$ den Einsteinschen für reinen Äther (S. 384) entsprechen, da jetzt die Bewegung parallel der z-Achse genommen ist. Nun kann man die Gleichungen vektoriell in eine Form vereinigen.

Schreibt man g für p und g_x, g_y, g_z als Komponenten, wobei zunächst $g_x = g_y = 0$, $g_z = p$ sein würde, so hat man beispielsweise

$$p\,\mathfrak{D}_{x_2} = -[g\,\mathfrak{D}]_{x_1}, \quad p\,\mathfrak{D}_{x_1} = +[g\,\mathfrak{D}]_{x_2}, \quad 0\,\mathfrak{D}_{x_3} = [g\,\mathfrak{D}]_{x_3} \quad .$$

usf. Also ist vektoriell für jede zu g senkrechte Richtung

$$(21)\quad \begin{cases} \mathfrak{H}' = \beta\left(\mathfrak{H} - \dfrac{4\pi}{V}[g\,\mathfrak{D}]\right), \\ 4\pi\,\mathfrak{B}' = \beta\left(4\pi\,\mathfrak{B} - \dfrac{1}{V}[g\,\mathfrak{E}]\right), \end{cases} \qquad (22)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}' = \beta\left(\mathfrak{E} + \dfrac{4\pi}{V}[g\,\mathfrak{B}]\right), \\ 4\pi\,\mathfrak{D}' = \beta\left(4\pi\,\mathfrak{D} + \dfrac{1}{V}[g\,\mathfrak{H}]\right) \end{cases}$$

und für jede zu g parallele

$$(23)\quad \begin{cases} \mathfrak{H}' = \mathfrak{H}, \\ 4\pi\,\mathfrak{B}' = 4\pi\,\mathfrak{B}, \end{cases} \qquad (24)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}' = \mathfrak{E}, \\ 4\pi\,\mathfrak{D}' = 4\pi\,\mathfrak{D}. \end{cases}$$

Diese Ansätze läßt Minkowski nunmehr allgemein gelten, welche Geschwindigkeit g auch darstelle und nach welcher Richtung sie gehen mag, wenn nur $g < V$ ist.

Da nun $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{D}'$ sich in ganz gleicher Weise verwandeln und ebenso $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{B}'$, so folgt, daß das Gleichungssystem (C) übergeht in

$$(\mathrm{C}')\qquad 4\pi\,\mathfrak{D}' = K\,\mathfrak{E}', \quad 4\pi\,\mathfrak{B}' = \mu\,\mathfrak{H}'$$

oder in

$$(\mathrm{E}_1)\qquad 4\pi\,\mathfrak{D} + \frac{1}{V}[g\,\mathfrak{H}] = K\left(\mathfrak{E} + \frac{4\pi}{V}[g\,\mathfrak{B}]\right),$$

$$(\mathrm{E}_2)\qquad 4\pi\,\mathfrak{B} - \frac{1}{V}[g\,\mathfrak{E}] = \mu\left(\mathfrak{H} - \frac{4\pi}{V}[g\,\mathfrak{D}]\right);$$

und diese Gleichungen bestehen für jede beliebige Richtung mit beliebigen Werten für g.

Weiter bekommen wir auch die Gleichung für die s', wenn wir für s_4 wieder setzen $i\,\varrho$ und entsprechend $i\,\varrho'$ für s_4'

$$(\mathrm{F}_1\mathrm{a})\quad \begin{cases} \varrho' = \dfrac{\varrho - \dfrac{1}{V}\,g\,\underline{s}}{\sqrt{1 - \dfrac{g^2}{V^2}}}, & \underline{\varrho}', g\,s = \varrho', g\,s \quad \text{in Richtung der Bewegung } g, \\ \underline{\varrho}' = 0, & \underline{\varrho}' = \varrho' \quad \text{senkrecht zur Richtung der Bewegung}, \end{cases}$$

$$(\mathrm{F}_1\mathrm{b})\quad \begin{cases} \underline{s}' = \dfrac{\underline{s} - \dfrac{g}{V}\,\varrho}{\sqrt{1 - \dfrac{g^2}{V^2}}}, & \underline{s}', \underline{s} = s', s \quad \text{in Richtung der Bewegung}, \\ \underline{s}' = \underline{s}, & s' = s \quad \text{senkrecht zur Richtung der Bewegung}, \end{cases}$$

so daß (D), welche jetzt ergibt

$$(\mathrm{D}')\qquad 4\pi\,J' = C_0\,\sigma\,\mathfrak{E}'.$$

übergeht in

$$(\mathrm{F_2 b})\begin{cases} \dfrac{s - \dfrac{g}{V}\varrho}{1-\dfrac{g^2}{V^2}} = \sigma C_0 \dfrac{\left(\mathfrak{E} + \dfrac{4\pi}{V}[g\mathfrak{B}]\right)_{\parallel g}}{\sqrt{1-\dfrac{g^2}{V^2}}} & \text{für Richtungen parallel zu } g\,, \\ \bar{s} = \dfrac{\sigma C_0}{\sqrt{1-\dfrac{g^2}{V^2}}}\left(\mathfrak{E} + \dfrac{4\pi}{V}[g\mathfrak{B}]\right)_{\perp g} & \text{für Richtungen senkrecht zu } g\,, \end{cases}$$

und überall wird $V = C_0$ gesetzt. Die so definierten Größen ϱ, s heißen die Ruhdichte und Ruhstrom.

Jetzt können wir sagen: Unter allen Umständen, ob Bewegung der Materie stattfindet oder nicht, bestehen die Gleichungssysteme (A), (B) mit den Bestimmungen (1) bis (7) und den Verbindungsbeziehungen (E) und (F). Diese Systeme von Formeln geben also die Minkowskische Elektrodynamik für unbewegte und bewegte Stoffe. Die Berücksichtigung der Bewegung ist auf die Verbindungsbeziehungen übertragen, die Grundgleichungen selbst enthalten nichts durch die Bewegung Bestimmtes. Darin unterscheidet sich diese Theorie von allen anderen Theorien. Und man beachte, daß alle Rechnungen für die Gleichungen (8) bis (25) nur dazu dienen, nachzuweisen, daß die linken Seiten der Gleichungen (A), (B) für jedes beliebige Bezugssystem immer die gleiche Form haben, und um die Verbindungsbeziehungen (E), (F) abzuleiten.

Wie die in den Gleichungen und Beziehungen vertretenen Größen sich zu den zu beobachtenden verhalten, ist S. 235 angegeben, wobei $(\mathrm{E_1})$, $(\mathrm{E_2})$ zu vergleichen sind mit $(6_3\mathrm{a, b})$ daselbst.

Minkowski gibt nun seinen Gleichungen und Beziehungen eine neue Form. Wir nehmen erst die Beziehung unter $(\mathrm{E_1})$. Ersetzen wir in ihr die $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{B}$ durch die f und F, so gibt sie für die x_1-Richtung nach (1) bis (7)

$$-\frac{1}{i} f_{14} + \frac{1}{V}(g_y f_{12} + g_z f_{13}) = K\left(-\frac{1}{i}F_{14} + \frac{1}{V}(g_y F_{12} + g_z F_{13})\right),$$

oder symmetrisch geschrieben

$$g_x f_{11} + g_y f_{12} + g_z f_{13} + iV f_{14} = K(g_x F_{11} + g_y F_{12} + g_z F_{13} + iV F_{14})\,,$$

also unter Einführung der Geschwindigkeiten $\mathfrak{g}$ nach (13_2) (S. 346), und weil für die anderen Richtungen dieselben Rechnungen gelten,

$$(\mathrm{E_1'})\begin{cases} \mathfrak{g}_1 f_{11} + \mathfrak{g}_2 f_{12} + \mathfrak{g}_3 f_{13} + \mathfrak{g}_4 f_{14} = K(\mathfrak{g}_1 F_{11} + \mathfrak{g}_2 F_{12} + \mathfrak{g}_3 F_{13} + \mathfrak{g}_4 F_{14})\,, \\ \mathfrak{g}_1 f_{21} + \mathfrak{g}_2 f_{22} + \mathfrak{g}_3 f_{23} + \mathfrak{g}_4 f_{24} = K(\mathfrak{g}_1 F_{21} + \mathfrak{g}_2 F_{22} + \mathfrak{g}_3 F_{23} + \mathfrak{g}_4 F_{24})\,, \\ \mathfrak{g}_1 f_{31} + \mathfrak{g}_2 f_{32} + \mathfrak{g}_3 f_{33} + \mathfrak{g}_4 f_{34} = K(\mathfrak{g}_1 F_{31} + \mathfrak{g}_2 F_{32} + \mathfrak{g}_3 F_{33} + \mathfrak{g}_4 F_{34})\,, \\ \mathfrak{g}_1 f_{41} + \mathfrak{g}_2 f_{42} + \mathfrak{g}_3 f_{43} + \mathfrak{g}_4 f_{44} = K(\mathfrak{g}_1 F_{41} + \mathfrak{g}_2 F_{42} + \mathfrak{g}_3 F_{43} + \mathfrak{g}_4 F_{44})\,. \end{cases}$$

Multipliziert man die vier Gleichungen mit $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4$ und addiert sie, so folgt wegen (6_2), (7_2) (S. 388)

$$\mathfrak{g}_1^2 f_{11} + \mathfrak{g}_2^2 f_{22} + \mathfrak{g}_3^2 f_{33} + \mathfrak{g}_4^2 f_{44} = K(\mathfrak{g}_1^2 F_{11} + \mathfrak{g}_2^2 F_{22} + \mathfrak{g}_3^2 F_{33} + \mathfrak{g}_4^2 F_{44})\,,$$

d. h. $0 = 0$ wegen (6_1), (7_1) (S. 388). Es ist also von den vier Gleichungen eine durch die drei anderen mitbestimmt, und es bleiben nur drei als unabhängige bestehen. Wir können, alle Gleichungen zusammenfassend, schreiben

$$(\mathrm{E}_1'') \qquad \overline{(\mathfrak{g}\, f)} = K\overline{(\mathfrak{g}\, F)}\,.$$

Entsprechend wandeln wir die Gleichungen (E_2) um. Wir erhalten so

$$(\mathrm{E}_2') \quad \begin{cases} \mathfrak{g}_1 F_{11} + \mathfrak{g}_2 F_{34} + \mathfrak{g}_3 F_{42} + \mathfrak{g}_4 F_{23} = \mu(\mathfrak{g}_1 f_{11} + \mathfrak{g}_2 f_{34} + \mathfrak{g}_3 f_{42} + \mathfrak{g}_4 f_{23})\,, \\ \mathfrak{g}_1 F_{43} + \mathfrak{g}_2 F_{22} + \mathfrak{g}_3 F_{14} + \mathfrak{g}_4 F_{31} = \mu(\mathfrak{g}_1 f_{43} + \mathfrak{g}_2 f_{22} + \mathfrak{g}_3 f_{14} + \mathfrak{g}_4 f_{31})\,, \\ \mathfrak{g}_1 F_{24} + \mathfrak{g}_2 F_{41} + \mathfrak{g}_3 F_{33} + \mathfrak{g}_4 F_{12} = \mu(\mathfrak{g}_1 f_{24} + \mathfrak{g}_2 f_{41} + \mathfrak{g}_3 f_{33} + \mathfrak{g}_4 f_{12})\,, \\ \mathfrak{g}_1 F_{32} + \mathfrak{g}_2 F_{13} + \mathfrak{g}_3 F_{21} + \mathfrak{g}_4 F_{44} = \mu(\mathfrak{g}_1 f_{32} + \mathfrak{g}_2 f_{13} + \mathfrak{g}_3 f_{21} + \mathfrak{g}_4 f_{44})\,. \end{cases}$$

Das Gesetz, nach dem jetzt die F und f angeordnet sind, ist nicht leicht zu erkennen, sie stehen aber in beiden Anordnungen alternierend, und man gelangt von der einen Anordnung zu der andern durch einen, freilich in jeder Zeile einmal erweiterten Rösselsprung, wie sich aus den Matrixformen z. B. für die f

$$(25) \quad \| d \| = \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{Vmatrix}, \qquad (26) \quad \| d^* \| = \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{34} & f_{42} & f_{23} \\ f_{43} & f_{22} & f_{14} & f_{31} \\ f_{24} & f_{41} & f_{33} & f_{12} \\ f_{32} & f_{13} & f_{21} & f_{44} \end{Vmatrix}$$

ergibt. Es sind die zueinander dualen Formen, die wir schon kennen (S. 303f.) und von denen bewiesen ist, daß sie als Determinanten invariant sich verhalten und gleichen Wert besitzen, nämlich

$$(27) \qquad d = d^* = (f_{32} f_{14} + f_{13} f_{24} + f_{21} f_{34})^2$$

und entsprechend

$$(28) \qquad D = D^* = (F_{32} F_{14} + F_{13} F_{24} + F_{21} F_{34})^2\,.$$

Für das Weitere werden wir für die zu den f, F dualen Größen wieder schreiben f^*, F^* in der Folge der Indizes der f, F also (S. 304)

$$(29) \quad \begin{cases} f_{11}^* = f_{11},\ f_{12}^* = f_{34},\ f_{13}^* = f_{42},\ f_{14}^* = f_{23},\ f_{21}^* = f_{43},\ f_{22}^* = f_{22},\ f_{23}^* = f_{14},\ f_{24}^* = f_{31}, \\ f_{31}^* = f_{24},\ f_{32}^* = f_{41},\ f_{33}^* = f_{33},\ f_{34}^* = f_{12},\ f_{41}^* = f_{32},\ f_{42}^* = f_{13},\ f_{43}^* = f_{21},\ f_{44}^* = f_{44}, \end{cases}$$

$$(30) \begin{cases} F_{11}^* = F_{11},\ F_{12}^* = F_{34},\ F_{13}^* = F_{42},\ F_{14}^* = F_{23},\ F_{21}^* = F_{43},\ F_{22}^* = F_{22},\ F_{23}^* = F_{14},\ F_{24}^* = F_{31}, \\ F_{31}^* = F_{24},\ F_{32}^* = F_{41},\ F_{33}^* = F_{33},\ F_{34}^* = F_{12},\ F_{41}^* = F_{32},\ F_{42}^* = F_{13},\ F_{43}^* = F_{21},\ F_{44}^* = F_{44}. \end{cases}$$

Es sind dann die Gleichungen (E_2') in den F^*, f^* genau von derselben Form wie die (E_1') in den f, F, und wir haben als Gegengleichung zu (E_1'') symbolisch

$$(\mathrm{E}_2'') \qquad \overline{(\mathfrak{g}\, F^*)} = \mu\overline{(\mathfrak{g}\, f^*)}\,.$$

Zugleich wird, wie oben erwiesen,

$$(31) \qquad \overline{\left(\mathfrak{g}\overline{(\mathfrak{g}\, f)}\right)} = \overline{\left(\mathfrak{g}\overline{(\mathfrak{g}\, F)}\right)} = 0\,,$$

$$(32) \qquad \overline{\left(\mathfrak{g}\overline{(\mathfrak{g}\, F^*)}\right)} = \overline{\left(\mathfrak{g}\overline{(\mathfrak{g}\, f^*)}\right)} = 0\,,$$

d. h. nach (25) (S. 293), daß die Raum-Zeit-Vektoren $\overline{(\mathfrak{g}\, f)}$, $\overline{(\mathfrak{g}\, F)}$, $\overline{(\mathfrak{g}\, F^*)}$, $\overline{(\mathfrak{g}\, f^*)}$ senkrecht stehen zu dem Raum-Zeit-Vektor $\mathfrak{g}$, zu der Raum-Zeit-Bewegungsgröße.

Wir setzen nun ausgeschrieben[1])

$$(33_1)\begin{cases} \mathfrak{g}_1 f_{11} + \mathfrak{g}_2 f_{12} + \mathfrak{g}_3 f_{13} + \mathfrak{g}_4 f_{14} = \varphi_1, \\ \mathfrak{g}_1 f_{21} + \mathfrak{g}_2 f_{22} + \mathfrak{g}_3 f_{23} + \mathfrak{g}_4 f_{24} = \varphi_2, \\ \mathfrak{g}_1 f_{31} + \mathfrak{g}_2 f_{32} + \mathfrak{g}_3 f_{33} + \mathfrak{g}_4 f_{34} = \varphi_3, \\ \mathfrak{g}_1 f_{41} + \mathfrak{g}_2 f_{42} + \mathfrak{g}_3 f_{43} + \mathfrak{g}_4 f_{44} = \varphi_4; \end{cases} \qquad (34_1)\begin{cases} \mathfrak{g}_1 F_{11} + \mathfrak{g}_2 F_{12} + \mathfrak{g}_3 F_{13} + \mathfrak{g}_4 F_{14} = \Phi_1, \\ \mathfrak{g}_1 F_{21} + \mathfrak{g}_2 F_{22} + \mathfrak{g}_3 F_{23} + \mathfrak{g}_4 F_{24} = \Phi_2, \\ \mathfrak{g}_1 F_{31} + \mathfrak{g}_2 F_{32} + \mathfrak{g}_3 F_{33} + \mathfrak{g}_4 F_{34} = \Phi_3, \\ \mathfrak{g}_1 F_{41} + \mathfrak{g}_2 F_{42} + \mathfrak{g}_3 F_{43} + \mathfrak{g}_4 F_{44} = \Phi_4; \end{cases}$$

$$(35_1)\begin{cases} \mathfrak{g}_1 f^*_{11} + \mathfrak{g}_2 f^*_{12} + \mathfrak{g}_3 f^*_{13} + \mathfrak{g}_4 f^*_{14} = \varphi^*_1, \\ \mathfrak{g}_1 f^*_{21} + \mathfrak{g}_2 f^*_{22} + \mathfrak{g}_3 f^*_{23} + \mathfrak{g}_4 f^*_{24} = \varphi^*_2, \\ \mathfrak{g}_1 f^*_{31} + \mathfrak{g}_2 f^*_{32} + \mathfrak{g}_3 f^*_{33} + \mathfrak{g}_4 f^*_{34} = \varphi^*_3, \\ \mathfrak{g}_1 f^*_{41} + \mathfrak{g}_2 f^*_{42} + \mathfrak{g}_3 f^*_{43} + \mathfrak{g}_4 f^*_{44} = \varphi^*_4; \end{cases} \qquad (36_1)\begin{cases} \mathfrak{g}_1 F^*_{11} + \mathfrak{g}_2 F^*_{12} + \mathfrak{g}_3 F^*_{13} + \mathfrak{g}_4 F^*_{14} = \Phi^*_1, \\ \mathfrak{g}_1 F^*_{21} + \mathfrak{g}_2 F^*_{22} + \mathfrak{g}_3 F^*_{23} + \mathfrak{g}_4 F^*_{24} = \Phi^*_2, \\ \mathfrak{g}_1 F^*_{31} + \mathfrak{g}_2 F^*_{32} + \mathfrak{g}_3 F^*_{33} + \mathfrak{g}_4 F^*_{34} = \Phi^*_3, \\ \mathfrak{g}_1 F^*_{41} + \mathfrak{g}_2 F^*_{42} + \mathfrak{g}_3 F^*_{43} + \mathfrak{g}_4 F^*_{44} = \Phi^*_4. \end{cases}$$

Alsdann gehen (E_1''), (E_2'') über in

$$\begin{matrix} (E_1''') \\ (E_2''') \end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} \varphi_\varkappa = K\,\Phi_\varkappa \\ \Phi^*_\varkappa = \mu\,\varphi^*_\varkappa \end{matrix}\right\}\varkappa = 1, 2, 3, 4,$$

und es ist

$$(33') \qquad \left(\overline{\mathfrak{g}\,\varphi}\right) = \left(\overline{\mathfrak{g}\,\Phi}\right) = \left(\overline{\mathfrak{g}\,\varphi^*}\right) = \left(\overline{\mathfrak{g}\,\Phi^*}\right) = 0\,.$$

Ferner haben wir z. B.

$$\begin{aligned}\left(\overline{\mathfrak{g}_h[\Phi\,\varphi]_{1h}}\right) &= \mathfrak{g}_1(\Phi_1\varphi_1 - \Phi_1\varphi_1) + \mathfrak{g}_2(\Phi_1\varphi_2 - \Phi_2\varphi_1) + \mathfrak{g}_3(\Phi_1\varphi_3 - \Phi_3\varphi_1) \\ &\qquad + \mathfrak{g}_4(\Phi_1\varphi_4 - \Phi_4\varphi_1) \\ &= \Phi_1(\mathfrak{g}_1\varphi_1 + \mathfrak{g}_2\varphi_2 + \mathfrak{g}_3\varphi_3 + \mathfrak{g}_4\varphi_4) - \varphi_1(\mathfrak{g}_1\Phi_1 + \mathfrak{g}_2\Phi_2 + \mathfrak{g}_3\Phi_3 + \mathfrak{g}_4\Phi_4)\,,\end{aligned}$$

also nach (33′) gleich Null. Hiernach wird allgemein

$$\begin{aligned}(33'') \qquad \left(\overline{\mathfrak{g}_h[\Phi\,\varphi]_{\varkappa h}}\right) &= \left(\overline{\mathfrak{g}_h[\Phi\,\varphi^*]_{\varkappa h}}\right) = \left(\overline{\mathfrak{g}_h[\Phi^*\,\varphi]_{\varkappa h}}\right) = \left(\overline{\mathfrak{g}_h[\Phi^*\,\varphi^*]_{\varkappa h}}\right) \\ &= \left(\overline{\mathfrak{g}_h[\Phi\,\Phi^*]_{\varkappa h}}\right) = \left(\overline{\mathfrak{g}_h[\varphi\,\varphi^*]_{\varkappa h}}\right) = 0\,.\end{aligned}$$

$\frac{1}{V}\Phi$ nennt Minkowski die elektrische Ruhkraft, $-\frac{i\varphi^*}{V}$ die magnetische Ruhkraft. Der Grund erhellt aus der Festsetzung für die Achse τ, als parallel der Weltlinie, wodurch alles wie im Ruhezustand behandelt wird. Ersetzen wir in den Gleichungen für die φ die $\mathfrak{g}$ durch ihre Werte nach (13_2) (S. 346), so folgt z. B.

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}}(g_y f_{12} + g_z f_{13} + i\,V f_{14})\,,$$

also nach (1) usf. (S. 388)

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}}(g_y \mathfrak{H}_z - g_z \mathfrak{H}_y + 4\pi\,\mathfrak{D}_x V) = V\frac{4\pi\,\mathfrak{D}_x + \frac{1}{V}[g\,\mathfrak{H}]_x}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}}\,.$$

---

[1]) φ^* ist bei Minkowski gleich $i\Psi$, Φ das gleiche wie hier, φ und Φ^* sind nicht bezeichnet.

Somit allgemein, und da entsprechende Rechnungen für die anderen Größen gelten,

$$
\left.
\begin{aligned}
&(37) \qquad \varphi_\varkappa = V \frac{4\pi \mathfrak{D}_{x_\varkappa} + \frac{1}{V}[\mathfrak{g}\,\mathfrak{H}]_{x_\varkappa}}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,,\\
&(38) \qquad \Phi_\varkappa = V \frac{\mathfrak{E}_{x_\varkappa} + \frac{4\pi}{V}[\mathfrak{g}\,\mathfrak{B}]_{x_\varkappa}}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,,\\
&(39) \qquad \varphi_\varkappa^* = i\,V \frac{\mathfrak{H}_{x_\varkappa} - \frac{4\pi}{V}[\mathfrak{g}\,\mathfrak{D}]_{x_\varkappa}}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,,\\
&(40) \qquad \Phi_\varkappa^* = i\,V \frac{4\pi \mathfrak{B}_{x_\varkappa} - \frac{1}{V}[\mathfrak{g}\,\mathfrak{E}]_{x_\varkappa}}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V_2}}}
\end{aligned}
\right\}\ \varkappa = 1, 2, 3\,.
$$

Für den Index 4 ist besonders

$$(41) \qquad \varphi_4 = i\,\frac{4\pi\left(\overline{\mathfrak{g}\,\mathfrak{D}}\right)}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,,$$

$$(42) \qquad \Phi_4 = i\,\frac{\left(\overline{\mathfrak{g}\,\mathfrak{E}}\right)}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,,$$

$$(43) \qquad \varphi_4^* = -\frac{\left(\overline{\mathfrak{g}\,\mathfrak{H}}\right)}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,,$$

$$(44) \qquad \Phi_4^* = -\frac{4\pi\left(\overline{\mathfrak{g}\,\mathfrak{B}}\right)}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\,.$$

Die f und F können durch Φ und φ^* ausgedrückt werden, wie wir noch sehen werden.

Zur Verwandlung der Gleichungen unter (F) bemerken wir, daß, weil $i\varrho = s_4$ ist, wir nach (F_1) auch haben

$$\varrho' = \frac{V\frac{s_4}{i} - \overline{\mathfrak{g}\,\mathfrak{s}}}{V\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}} = -\frac{1}{V}\left(\mathfrak{g}_4 s_4 + \frac{\overline{\mathfrak{g}\,\mathfrak{s}}}{\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\right).$$

Und da $\underline{g s}$ den Wert dieser Größe parallel g darstellt, können wir auch schreiben

(F₁′) $$\varrho' = -\frac{1}{V}(\mathfrak{g}_1 s_1 + \mathfrak{g}_2 s_2 + \mathfrak{g}_3 s_3 + \mathfrak{g}_4 s_4) = -\frac{1}{V}(\underline{\mathfrak{g} s}) .$$

Die Größe $-(\underline{\mathfrak{g} s})$ heißt **Ruhdichte** der Elektrizität. Setzen wir nunmehr

(45) $$\begin{cases} -\mathfrak{g}_1 \varrho' = \frac{\mathfrak{g}_1}{V}(\underline{\mathfrak{g} s}) = c_1 , \\ -\mathfrak{g}_2 \varrho' = \frac{\mathfrak{g}_2}{V}(\underline{\mathfrak{g} s}) = c_2 , \\ -\mathfrak{g}_3 \varrho' = \frac{\mathfrak{g}_3}{V}(\underline{\mathfrak{g} s}) = c_3 , \\ -\mathfrak{g}_4 \varrho' = \frac{\mathfrak{g}_4}{V}(\underline{\mathfrak{g} s}) = c_4 , \end{cases}$$

so stellen die c Komponenten eines Konvektivstromes im Raum-Zeit-Gebiet dar, und der ganze Strom, er wird als **Ruhstrom** bezeichnet, ist

$$J = s + c .$$

Nun ist im Raumgebiet senkrecht zu g der Strom c gleich Null, folglich können wir hier statt s auch $s + c$ schreiben, so daß wir überhaupt haben

$$\bar{J} = \bar{s} = s + c .$$

Andererseits ist parallel zu g der ganze Strom im Raumgebiet

$$\underline{J} = \underline{s} + \underline{c} = \underline{s} - \frac{g\,\varrho'}{V\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} = \frac{s - \frac{g}{V}\varrho}{1 - \frac{g^2}{V^2}} ,$$

letzteres zufolge (F_1b). Somit haben wir für (F_2b) im Raumgebiet nur die eine Beziehung

(F′) $$s + c = \sigma V \frac{\mathfrak{E} + \frac{4\pi}{V}[\mathfrak{g}\,\mathfrak{B}]}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} .$$

Diese aber gibt im Raumgebiet zufolge (38)

(F″) $$s + c = \sigma\,\Phi .$$

Nachdem die neuen Funktionen $\Phi, \varphi, \Phi^*, \varphi^*$ so in alle Verbindungsbeziehungen Eingang gefunden haben, werden sie auch zur Berechnung der Größen f und F benutzt.

Dazu bedient sich **Minkowski** folgender Betrachtung: Sind $\mathfrak{g}$ und γ zwei Raum-Zeit-Vektoren, so besitzt ihr Vektorprodukt $[\mathfrak{g}\,\gamma]$ nach der Kombination der Indizes zu je zwei sechzehn Komponenten und verhält sich wie ein Raum-Zeit-Tensor. Wir bezeichnen diese Komponenten mit $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \ldots, \Gamma_{44}$. Von diesen sind

(46) $$\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \Gamma_{33} = \Gamma_{44} = 0 ,$$

und ferner haben wir

(47) $$\Gamma_{h\varkappa} = -\Gamma_{\varkappa h} .$$

Die Γ verhalten sich also wie die f, F. Insbesondere wird aber

$$(48)\quad \begin{cases} \Gamma_{12} = -\Gamma_{21} = \mathfrak{g}_1\gamma_2 - \mathfrak{g}_2\gamma_1, & \Gamma_{13} = -\Gamma_{31} = \mathfrak{g}_1\gamma_3 - \mathfrak{g}_3\gamma_1, \quad \Gamma_{14} = -\Gamma_{41} = \mathfrak{g}_1\gamma_4 - \mathfrak{g}_4\gamma_1, \\ \Gamma_{23} = -\Gamma_{32} = \mathfrak{g}_2\gamma_3 - \mathfrak{g}_3\gamma_2, & \Gamma_{24} = -\Gamma_{42} = \mathfrak{g}_2\gamma_4 - \mathfrak{g}_4\gamma_2, \quad \Gamma_{34} = -\Gamma_{43} = \mathfrak{g}_3\gamma_4 - \mathfrak{g}_4\gamma_3. \end{cases}$$

Zu diesem Tensor $[\mathfrak{g}\gamma]$ bilden wir den dualen Tensor $[\mathfrak{g}\gamma]^*$. Es ist dann wieder

$$(46^*)\qquad \Gamma^*_{11} = \Gamma^*_{22} = \Gamma^*_{33} = \Gamma^*_{44} = 0.$$

$$(47^*)\qquad \Gamma^*_{h\varkappa} = -\Gamma^*_{\varkappa h}$$

und nach dem Schema (29), (30) der f^* und f oder der F^* und F (S. 395)

$$(48^*)\quad \begin{cases} \Gamma^*_{12} = -\Gamma^*_{21} = \Gamma_{34}, & \Gamma^*_{13} = -\Gamma^*_{31} = \Gamma_{42}, \quad \Gamma^*_{14} = -\Gamma^*_{41} = \Gamma_{23}, \\ \Gamma^*_{23} = -\Gamma^*_{32} = \Gamma_{14}, & \Gamma^*_{24} = -\Gamma^*_{42} = \Gamma_{31}, \quad \Gamma^*_{34} = -\Gamma^*_{43} = \Gamma_{12}. \end{cases}$$

Die Determinanten Δ, Δ^* der Γ und der Γ^* sind wieder gleich, und zwar gleich Null. Man hat nämlich entsprechend d oder D nach (27), (28), S. 395 z. B.

$$\Delta = (\Gamma_{32}\Gamma_{14} + \Gamma_{13}\Gamma_{24} + \Gamma_{21}\Gamma_{34})^2 .$$

Setzt man für die Γ die obigen Werte ein, so heben sich die Glieder gegenseitig auf, also ist

$$(49)\qquad \Delta = 0, \qquad\qquad (49^*)\qquad \Delta^* = 0.$$

Wir machen nun $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ gleich den vier Komponenten $(\overline{\mathfrak{g}f})$ und den vier Komponenten $(\overline{\mathfrak{g}F})$. Dann bestehen zufolge der Gleichungen (6), (7) (S. 383) und (15) (S. 346) die Identitäten

$$(50)\qquad [\mathfrak{g}(\overline{\mathfrak{g}f})]_{h\varkappa} + [\mathfrak{g}(\overline{\mathfrak{g}f^*})]^*_{h\varkappa} = -(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{g}})f_{h\varkappa} = V^2 f_{h\varkappa},$$

$$(51)\qquad [\mathfrak{g}(\overline{\mathfrak{g}F})]_{h\varkappa} + [\mathfrak{g}(\overline{\mathfrak{g}F^*})]^*_{h\varkappa} = -(\overline{\mathfrak{g}\mathfrak{g}})F_{h\varkappa} = V^2 F_{h\varkappa},$$

jede enthält sechzehn Gleichungen nach den sechzehn Vektorprodukten und zugleich je sechzehn Werten der f, F. Dabei ist z. B.

$$\begin{aligned}[\mathfrak{g}(\overline{\mathfrak{g}f})]_{h\varkappa} &= \mathfrak{g}_h(\overline{\mathfrak{g}f})_\varkappa - \mathfrak{g}_\varkappa(\overline{\mathfrak{g}f})_h \\ &= \mathfrak{g}_h(\mathfrak{g}_1 f_{\varkappa 1} + \mathfrak{g}_2 f_{\varkappa 2} + \mathfrak{g}_3 f_{\varkappa 3} + \mathfrak{g}_4 f_{\varkappa 4}) - \mathfrak{g}_\varkappa(\mathfrak{g}_1 f_{h1} + \mathfrak{g}_2 f_{h2} + \mathfrak{g}_3 f_{h3} + \mathfrak{g}_4 f_{h4}).\end{aligned}$$

Diese Identitäten (50), (91) werden für den besonderen Fall $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_3 = 0$, $\mathfrak{g}_4 = iV$ verifiziert. In der Tat sind dann die Komponenten-Systeme

$$(\overline{\mathfrak{g}f}) = iVf_{14}, \quad iVf_{24}, \quad iVf_{34}, \quad 0,$$

$$(\overline{\mathfrak{g}f^*}) = iVf^*_{14} = iVf_{23}, \quad iVf^*_{24} = iVf_{31}, \quad iVf^*_{34} = iVf_{12}, \quad 0,$$

$$(\overline{\mathfrak{g}F}) = iVF_{14}, \quad iVF_{24}, \quad iVF_{34}, \quad 0,$$

$$(\overline{\mathfrak{g}F^*}) = iVF^*_{14} = iVF_{23}, \quad iVF^*_{24} = iVF_{31}, \quad iVF^*_{34} = iVF_{12}, \quad 0.$$

Hiernach bekommen wir zur Berechnung der ersten Identität nach dem Schema der Gleichungen für die Γ und die Γ^* (was auch das duale Rechnen erläutert)

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f)]_{12} &= -[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f)]_{21} = 0\,,\\
[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f)]_{13} &= -[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f)]_{31} = 0\,,\\
[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f)]_{14} &= -[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f)]_{41} = V^2 f_{14}\,,\\
[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f)]_{23} &= -[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f)]_{32} = 0\,,\\
[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f)]_{24} &= -[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f)]_{42} = V^2 f_{24}\,,\\
[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f)]_{34} &= -[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f)]_{43} = V^2 f_{34}\,,\\
[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]^*_{12} &= -[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]^*_{21} = [\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]_{34} = V^2 f^*_{34} = V^2 f_{12}\,,\\
[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]^*_{13} &= -[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]^*_{31} = [\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]_{42} = V^2 f^*_{42} = V^2 f_{13}\,,\\
[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]^*_{14} &= -[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]^*_{41} = [\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]_{23} = 0\,,\\
[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]^*_{23} &= -[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]^*_{32} = [\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]_{14} = V^2 f^*_{14} = V^2 f_{23}\,,\\
[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]^*_{24} &= -[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]^*_{42} = [\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]_{31} = 0\,,\\
[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]^*_{34} &= -[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]^*_{43} = [\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]_{12} = 0\,.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen z. B. in die erste Identität

$$[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f)]_{12} + [\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]^*_{12} = V^2 f_{12}\,,$$

folgt so identisch $V^2 f_{12} = V^2 f_{12}$. Ebenso findet sich $V^2 f_{13} = V^2 f_{13}$ usf. Ganz so wird die zweite Identität für diesen Fall verifiziert. Allgemein die Identitäten zu beweisen ist einfach[1]).

Nun ist nach (33) bis (36) (S. 396)

(33_2) $\quad (\mathfrak{g}f) = \varphi\,,$ $\qquad$ (34_2) $\quad (\mathfrak{g}F) = \Phi\,,$

(35_2) $\quad (\mathfrak{g}f^*) = \varphi^*\,,$ $\qquad$ (36_2) $\quad (\mathfrak{g}F^*) = \Phi^*\,,$

somit geben die Identitäten (50), (51)

(52_1) $$[\mathfrak{g}\varphi] + [\mathfrak{g}\varphi^*]^* = V^2 f\,,$$

(53_1) $$[\mathfrak{g}\Phi] + [\mathfrak{g}\Phi^*]^* = V^2 F\,.$$

[1]) Man hat z. B.

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f)]_{12} &= \mathfrak{g}_1(\mathfrak{g}_1 f_{21} + \mathfrak{g}_2 f_{22} + \mathfrak{g}_3 f_{23} + \mathfrak{g}_4 f_{24}) - \mathfrak{g}_2(\mathfrak{g}_1 f_{11} + \mathfrak{g}_2 f_{12} + \mathfrak{g}_3 f_{13} + \mathfrak{g}_4 f_{14})\,,\\
[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]^*_{12} = [\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]_{34} &= \mathfrak{g}_3(\mathfrak{g}_1 f^*_{41} + \mathfrak{g}_2 f^*_{42} + \mathfrak{g}_3 f^*_{43} + \mathfrak{g}_4 f^*_{44}) - \mathfrak{g}_4(\mathfrak{g}_1 f^*_{31} + \mathfrak{g}_2 f^*_{32} + \mathfrak{g}_3 f^*_{33} + \mathfrak{g}_4 f^*_{34})\\
&= \mathfrak{g}_3(\mathfrak{g}_1 f_{32} + \mathfrak{g}_2 f_{13} + \mathfrak{g}_3 f_{21} + \mathfrak{g}_4 f_{44}) - \mathfrak{g}_4(\mathfrak{g}_1 f_{24} + \mathfrak{g}_2 f_{41} + \mathfrak{g}_3 f_{23} + \mathfrak{g}_4 f_{12})\,,
\end{aligned}$$

letzteres zufolge der Gleichungen (29) (S. 395). Beachtet man die Beziehungen $f_{h\varkappa} = -f_{\varkappa h}$, $f_{hh} = 0$, so bekommt man nach (15) (S. 346)

$$[\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f)]_{12} + [\mathfrak{g}(\mathfrak{g}f^*)]^*_{12} = (\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2 + \mathfrak{g}_3^2 + \mathfrak{g}_4^2) f_{21} = -V^2 f_{21} = V^2 f_{12}\,.$$

Setzt man noch für φ und Φ^* ihre Werte aus (E_1''') und (E_2''') (S. 396), so gehen diese Gleichungen über in

$$K[\mathfrak{g}\,\Phi] + [\mathfrak{g}\,\varphi^*]^* = V^2 f\,, \tag{52_2}$$

$$[\mathfrak{g}\,\Phi] + \mu[\mathfrak{g}\,\varphi^*]^* = V^2 F\,. \tag{53_2}$$

Tut man das gleiche für die Funktionen Φ, φ^*, so wird

$$[\mathfrak{g}\,\varphi] + \frac{1}{\mu}[\mathfrak{g}\,\Phi^*]^* = V^2 f\,, \tag{52_3}$$

$$\frac{1}{K}[\mathfrak{g}\,\varphi] + [\mathfrak{g}\,\Phi^*]^* = V^2 F\,. \tag{53_3}$$

Hiernach finde ich mit (52_2), (53_2)

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned}
V^2 f_{12} &= -V^2 f_{21} = K[\mathfrak{g}\,\Phi]_{12} + [\mathfrak{g}\,\varphi^*]^*_{12} = K[\mathfrak{g}\,\Phi]_{12} + [\mathfrak{g}\,\varphi^*]_{34}\\
&= K(\mathfrak{g}_1\Phi_2 - \mathfrak{g}_2\Phi_1) + (\mathfrak{g}_3\varphi_4^* - \mathfrak{g}_4\varphi_3^*)\,,\\
V^2 f_{13} &= -V^2 f_{31} = K[\mathfrak{g}\,\Phi]_{13} + [\mathfrak{g}\,\varphi^*]^*_{13} = K[\mathfrak{g}\,\Phi]_{13} + [\mathfrak{g}\,\varphi^*]_{42}\\
&= K(\mathfrak{g}_1\Phi_3 - \mathfrak{g}_3\Phi_1) + (\mathfrak{g}_4\varphi_2^* - \mathfrak{g}_2\varphi_4^*)\,,\\
V^2 f_{14} &= -V^2 f_{41} = K[\mathfrak{g}\,\Phi]_{14} + [\mathfrak{g}\,\varphi^*]^*_{14} = K[\mathfrak{g}\,\Phi]_{14} + [\mathfrak{g}\,\varphi^*]_{23}\\
&= K(\mathfrak{g}_1\Phi_4 - \mathfrak{g}_4\Phi_1) + (\mathfrak{g}_2\varphi_3^* - \mathfrak{g}_3\varphi_2^*)\,,\\
V^2 f_{23} &= -V^2 f_{32} = K[\mathfrak{g}\,\Phi]_{23} + [\mathfrak{g}\,\varphi^*]^*_{23} = K[\mathfrak{g}\,\Phi]_{23} + [\mathfrak{g}\,\varphi^*]_{14}\\
&= K(\mathfrak{g}_2\Phi_3 - \mathfrak{g}_3\Phi_2) + (\mathfrak{g}_1\varphi_4^* - \mathfrak{g}_4\varphi_1^*)\,,\\
V^2 f_{24} &= -V^2 f_{42} = K[\mathfrak{g}\,\Phi]_{24} + [\mathfrak{g}\,\varphi^*]^*_{24} = K[\mathfrak{g}\,\Phi]_{24} + [\mathfrak{g}\,\varphi^*]_{31}\\
&= K(\mathfrak{g}_2\Phi_4 - \mathfrak{g}_4\Phi_2) + (\mathfrak{g}_3\varphi_1^* - \mathfrak{g}_1\varphi_3^*)\,,\\
V^2 f_{34} &= -V^2 f_{43} = K[\mathfrak{g}\,\Phi]_{34} + [\mathfrak{g}\,\varphi^*]^*_{34} = K[\mathfrak{g}\,\Phi]_{34} + [\mathfrak{g}\,\varphi^*]_{12}\\
&= K(\mathfrak{g}_3\Phi_4 - \mathfrak{g}_4\Phi_3) + (\mathfrak{g}_1\varphi_2^* - \mathfrak{g}_2\varphi_1^*)\,.
\end{aligned}\right.$$

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned}
V^2 F_{12} &= -V^2 F_{21} = [\mathfrak{g}\,\Phi]_{12} + \mu[\mathfrak{g}\,\varphi^*]^*_{12} = [\mathfrak{g}\,\Phi]_{12} + \mu[\mathfrak{g}\,\varphi^*]_{34}\\
&= \mathfrak{g}_1\Phi_2 - \mathfrak{g}_2\Phi_1 + \mu(\mathfrak{g}_3\varphi_4^* - \mathfrak{g}_4\varphi_3^*)\,,\\
V^2 F_{13} &= -V^2 F_{31} = [\mathfrak{g}\,\Phi]_{13} + \mu[\mathfrak{g}\,\varphi^*]^*_{13} = [\mathfrak{g}\,\Phi]_{13} + \mu[\mathfrak{g}\,\varphi^*]_{42}\\
&= \mathfrak{g}_1\Phi_3 - \mathfrak{g}_3\Phi_1 + \mu(\mathfrak{g}_4\varphi_2^* - \mathfrak{g}_2\varphi_4^*)\,,\\
V^2 F_{14} &= -V^2 F_{41} = [\mathfrak{g}\,\Phi]_{14} + \mu[\mathfrak{g}\,\varphi^*]^*_{14} = [\mathfrak{g}\,\Phi]_{14} + \mu[\mathfrak{g}\,\varphi^*]_{23}\\
&= \mathfrak{g}_1\Phi_4 - \mathfrak{g}_4\Phi_1 + \mu(\mathfrak{g}_2\varphi_3^* - \mathfrak{g}_3\varphi_2^*)\,,\\
V^2 F_{23} &= -V^2 F_{32} = [\mathfrak{g}\,\Phi]_{23} + \mu[\mathfrak{g}\,\varphi^*]^*_{23} = [\mathfrak{g}\,\Phi]_{23} + \mu[\mathfrak{g}\,\varphi^*]_{14}\\
&= \mathfrak{g}_2\Phi_3 - \mathfrak{g}_3\Phi_2 + \mu(\mathfrak{g}_1\varphi_4^* - \mathfrak{g}_4\varphi_1^*)\,,\\
V^2 F_{24} &= -V^2 F_{42} = [\mathfrak{g}\,\Phi]_{24} + \mu[\mathfrak{g}\,\varphi^*]^*_{24} = [\mathfrak{g}\,\Phi]_{24} + \mu[\mathfrak{g}\,\varphi^*]_{31}\\
&= \mathfrak{g}_2\Phi_4 - \mathfrak{g}_4\Phi_2 + \mu(\mathfrak{g}_3\varphi_1^* - \mathfrak{g}_1\varphi_3^*)\,,\\
V^2 F_{34} &= -V^2 F_{43} = [\mathfrak{g}\,\Phi]_{34} + \mu[\mathfrak{g}\,\varphi^*]^*_{34} = [\mathfrak{g}\,\Phi]_{34} + \mu[\mathfrak{g}\,\varphi^*]_{12}\\
&= \mathfrak{g}_3\Phi_4 - \mathfrak{g}_4\Phi_3 + \mu(\mathfrak{g}_1\varphi_2^* - \mathfrak{g}_2\varphi_1^*)\,.
\end{aligned}\right.$$

Leicht kann man auch diese Formeln an der Hand der Gleichungen für die Φ, φ^* und der unter (E_1''), (E_2'') verifizieren. Entsprechende Ausdrücke hätten wir durch Φ^*, φ nach den Beziehungen (52_3), (53_3) gewinnen können.

Wir haben noch die beiden Gleichungssysteme (A) und (B) umzugestalten. Wir können sie umwandeln, indem wir die obigen Werte der f und F einführen. Minkowski verfährt noch anders. Eine einzeilige Matrix von der Form

$$\begin{vmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{vmatrix}$$

mit der Bedingung

$$(56)\qquad \begin{cases} K_1 = \dfrac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial S_{21}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial S_{31}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial S_{41}}{\partial x_4}, \\ K_2 = \dfrac{\partial S_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial S_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial S_{32}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial S_{42}}{\partial x_4}, \\ K_3 = \dfrac{\partial S_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial S_{23}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial S_{33}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial S_{43}}{\partial x_4}, \\ K_4 = \dfrac{\partial S_{14}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial S_{24}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial S_{34}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial S_{44}}{\partial x_4}, \end{cases}$$

wo die $S_{h\varkappa}$ Komponenten sind eines Raum-Zeit-Tensors S, bezeichnet Minkowski mit lor$S$. Da alle diese wundervollen Untersuchungen ganz Minkowskis Eigen sind, werde ich die obige Matrix HM, nach den Anfangsbuchstaben des Namens dieses Mannes nennen, also setzen

$$(57)\qquad HMS = \begin{vmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{vmatrix},$$

Identifizieren wir jetzt die S mit den f und den F^*, so können wir also die Gleichungssysteme (A), (B) schreiben

$$(\mathrm{A}_2)\qquad HMf = -s\,,$$

$$(\mathrm{B}_2)\qquad HMF^* = 0\,.$$

Da die K Raum-Zeit-Vektoren (I. Art) sind (S. 357), so stellt auch die Matrix HM einen Raum-Zeit-Vektor dar.

Wir bezeichnen jetzt mit $\overline{HM}$ die einzeilige Operationsmatrix

$$(58)\qquad \overline{HM} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \end{vmatrix}$$

und haben hiernach

$$(59)\qquad \overline{HM}(HMS) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial K_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial K_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial K_3}{\partial x_3} & \dfrac{\partial K_4}{\partial x_4} \end{vmatrix}.$$

Da in unserem Falle die S alternierende Größen sind wie die f, F^*, so bekommen wir nach (A_2), (B_2) oben

$$(\mathrm{G})\qquad \overline{HM}(HMf) = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} + \frac{\partial s_4}{\partial x_4} = \overline{HM}s = 0\,,$$

$$(\mathrm{H})\qquad \overline{HM}(HMF^*) = 0\,.$$

Weiter ist zu beachten, daß die K als Raum-Zeit-Vektoren sich wie die Koordinaten transformieren. Also geht HMS bei der Minkowski-Transformation über in $(HMS)'$, und wir haben symbolisch

$$(\mathrm{A}')\qquad (HMf)' = -s'\,,$$

$$(\mathrm{B}')\qquad (HMF^*)' = 0\,.$$

Dabei ist mit

$$(56') \qquad K'_\varkappa = \frac{\partial S'_{1\varkappa}}{\partial x'_1} + \frac{\partial S'_{2\varkappa}}{\partial x'_2} + \frac{\partial S'_{3\varkappa}}{\partial x'_3} + \frac{\partial S'_{4\varkappa}}{\partial x'_4}, \quad S' = f' . F'^*,$$

$$(57') \qquad (HMS)' = \| K'_1 \quad K'_2 \quad K'_3 \quad K'_4 \|$$

und zugleich

$$(G') \qquad \overline{(HMs)}' = \overline{HMs} = 0 .$$

Die Zahl aller bis jetzt abgeleiteten Hauptgleichungen beträgt nunmehr aus den Gleichungssystemen (A), (B), (E''_1), (E''_2), (F), (G) insgesamt $4 + 4 + 3 + 3 + 4 + 2 = 20$, die Zahl der zu bestimmenden Größen $6\,(f) + 6\,(F) + 4\,(s) + 4\,(c) = 20$. Daß die je vier Gleichungen darstellenden Formeln (E''_1), (E''_2) nur je drei unabhängige geben, ist am betreffenden Orte (S. 394) vermerkt. Das Problem ist also bestimmt, sofern die Bewegung bekannt ist. Zu deren Feststellung bedarf es aber der Kenntnis der ponderomotorischen Kräfte im Felde, sind diese ermittelt, so treten die Bewegungsgleichungen (S. 350 ff.) hinzu, so daß insgesamt 24 Gleichungen zu behandeln sind. Minkowski stellt erst Ausdrücke für die Spannungen im elektromagnetischen Felde auf. Dabei geht er von dem für die Feldenergie entscheidenden Aggregat der Produkte der f mit den F aus. Er verfährt allgemein, indem er durch Multiplikation der Matrizes der f und der F eine neue Matrix herstellt. Die beiden Matrizes sind

$$\begin{Vmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & 0 & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & 0 & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Bezeichnen wir ihr Produkt mit $f\,F$, so wird diese Matrix zu Elementen, Summen von Verbindungen der f mit den F zu zweien enthalten. Es ist diese Matrix nach den Regeln der Multiplikation von Determinanten

$$(60_1) \qquad fF = \begin{Vmatrix} \Sigma f_{\varkappa 1} F_{1\varkappa} & \Sigma f_{\varkappa 1} F_{2\varkappa} & \Sigma f_{\varkappa 1} F_{3\varkappa} & \Sigma f_{\varkappa 1} F_{4\varkappa} \\ \Sigma f_{\varkappa 2} F_{1\varkappa} & \Sigma f_{\varkappa 2} F_{2\varkappa} & \Sigma f_{\varkappa 2} F_{3\varkappa} & \Sigma f_{\varkappa 2} F_{4\varkappa} \\ \Sigma f_{\varkappa 3} F_{1\varkappa} & \Sigma f_{\varkappa 3} F_{2\varkappa} & \Sigma f_{\varkappa 3} F_{3\varkappa} & \Sigma f_{\varkappa 3} F_{4\varkappa} \\ \Sigma f_{\varkappa 4} F_{1\varkappa} & \Sigma f_{\varkappa 4} F_{2\varkappa} & \Sigma f_{\varkappa 4} F_{3\varkappa} & \Sigma f_{\varkappa 4} F_{4\varkappa} \end{Vmatrix}.$$

Die Σ gehen von 1 bis 4. Wir berechnen zunächst die Diagonalglieder. Sie geben

$$\begin{aligned} \Sigma f_{\varkappa 1} F_{1\varkappa} &= f_{11} F_{11} + f_{21} F_{12} + f_{31} F_{13} + f_{41} F_{14}, \\ \Sigma f_{\varkappa 2} F_{2\varkappa} &= f_{12} F_{21} + f_{22} F_{22} + f_{32} F_{23} + f_{42} F_{24}, \\ \Sigma f_{\varkappa 3} F_{3\varkappa} &= f_{13} F_{31} + f_{23} F_{32} + f_{33} F_{33} + f_{43} F_{34}, \\ \Sigma f_{\varkappa 4} F_{4\varkappa} &= f_{14} F_{41} + f_{24} F_{42} + f_{34} F_{43} + f_{44} F_{44}. \end{aligned}$$

Nennen wir die Summe dieser vier Werte $-4L$, so wird zufolge der Beziehungen

$$f_{11} = f_{22} = f_{33} = f_{44} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0, \quad f_{h\varkappa} = -f_{\varkappa h}, \quad F_{h\varkappa} = -F_{\varkappa h}$$

dieses L

$$(61_1) \qquad L = \tfrac{1}{2}(f_{23} F_{23} + f_{31} F_{31} + f_{12} F_{12} + f_{14} F_{14} + f_{24} F_{24} + f_{34} F_{34})$$

und man bekommt für die Diagonalglieder

$$\tfrac{1}{2}(f_{23}F_{23} + f_{34}F_{34} + f_{42}F_{42} - f_{12}F_{12} - f_{13}F_{13} - f_{14}F_{14}) - L\,,$$
$$\tfrac{1}{2}(f_{31}F_{31} + f_{14}F_{14} + f_{34}F_{34} - f_{12}F_{12} - f_{23}F_{23} - f_{24}F_{24}) - L\,,$$
$$\tfrac{1}{2}(f_{12}F_{12} + f_{14}F_{14} + f_{24}F_{24} - f_{23}F_{23} - f_{13}F_{13} - f_{34}F_{34}) - L\,,$$
$$\tfrac{1}{2}(f_{23}F_{23} + f_{13}F_{13} + f_{12}F_{12} - f_{14}F_{14} - f_{24}F_{24} - f_{34}F_{34}) - L\,.$$

Entsprechend berechnet man die anderen Glieder der Matrix. **Minkowski** schreibt nun die zusammengesetzte Matrix in der Form

$$(60_2)\qquad f\,F = \left\| \begin{matrix} X_x - L & Y_x & Z_x & -i\,T_x \\ X_y & Y_y - L & Z_y & -i\,T_y \\ X_z & Y_z & Z_z - L & -i\,T_z \\ -i\,X_t & -i\,Y_t & -i\,Z_t & T_t - L \end{matrix} \right\|.$$

Dann haben wir also

$$(62_1)\qquad \left\{ \begin{aligned} X_x &= \tfrac{1}{2}(f_{23}F_{23} + f_{34}F_{34} + f_{42}F_{42} - f_{12}F_{12} - f_{13}F_{13} - f_{14}F_{14})\,, \\ Y_y &= \tfrac{1}{2}(f_{34}F_{34} + f_{41}F_{41} + f_{13}F_{13} - f_{23}F_{23} - f_{24}F_{24} - f_{21}F_{21})\,, \\ Z_z &= \tfrac{1}{2}(f_{41}F_{41} + f_{12}F_{12} + f_{24}F_{24} - f_{34}F_{34} - f_{31}F_{31} - f_{32}F_{32})\,, \\ T_t &= \tfrac{1}{2}(f_{12}F_{12} + f_{23}F_{23} + f_{31}F_{31} - f_{41}F_{41} - f_{42}F_{42} - f_{43}F_{43})\,, \\ Y_x &= f_{31}F_{23} + f_{41}F_{24}\,, \\ Z_x &= f_{21}F_{32} + f_{41}F_{34}\,, \\ -i\,T_x &= f_{21}F_{42} + f_{31}F_{43}\,, \\ X_y &= f_{32}F_{13} + f_{42}F_{14}\,, \\ Z_y &= f_{12}F_{31} + f_{42}F_{34}\,, \\ -i\,T_y &= f_{12}F_{41} + f_{32}F_{43}\,, \\ X_z &= f_{23}F_{12} + f_{43}F_{14}\,, \\ Y_z &= f_{13}F_{21} + f_{43}F_{24}\,, \\ -i\,T_z &= f_{13}F_{41} + f_{23}F_{42}\,, \\ -i\,X_t &= f_{24}F_{12} + f_{34}F_{13}\,, \\ -i\,Y_t &= f_{14}F_{21} + f_{34}F_{23}\,, \\ -i\,Z_t &= f_{14}F_{31} + f_{24}F_{32}\,. \end{aligned} \right.$$

Zugleich besteht die Beziehung

$$(63)\qquad X_x + Y_y + Z_z + T_t = 0\,,$$

wie sich aus der Addition der betreffenden Ausdrücke ergibt. Diese sechzehn Größen werden als die Raum-Zeit-Spannungen im elektromagnetischen Felde angesehen, sie sind die Komponenten eines Raum-Zeit-Tensors. Nach Einsetzung der Werte für die f, F gemäß den Gleichungen (1) bis (4) (S. 388) erhält man

$$
(62_2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
X_x &= \frac{4\pi}{2}(\mathfrak{B}_x\mathfrak{H}_x - \mathfrak{B}_y\mathfrak{H}_y - \mathfrak{B}_z\mathfrak{H}_z + \mathfrak{D}_x\mathfrak{E}_x - \mathfrak{D}_y\mathfrak{E}_y - \mathfrak{D}_z\mathfrak{E}_z)\\
&= 4\pi\left\{(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x) - \tfrac{1}{2}\left((\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right)\right\},\\
Y_y &= \frac{4\pi}{2}(\mathfrak{B}_y\mathfrak{H}_y - \mathfrak{B}_z\mathfrak{H}_z - \mathfrak{B}_x\mathfrak{H}_x + \mathfrak{D}_y\mathfrak{E}_y - \mathfrak{D}_z\mathfrak{E}_z - \mathfrak{D}_x\mathfrak{E}_x)\\
&= 4\pi\left\{(\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y) - \tfrac{1}{2}\left((\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right)\right\},\\
Z_z &= \frac{4\pi}{2}(\mathfrak{B}_z\mathfrak{H}_z - \mathfrak{B}_x\mathfrak{H}_x - \mathfrak{B}_y\mathfrak{H}_y + \mathfrak{D}_z\mathfrak{E}_z - \mathfrak{D}_x\mathfrak{E}_x - \mathfrak{D}_y\mathfrak{E}_y)\\
&= 4\pi\left\{(\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z) - \tfrac{1}{2}\left((\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right)\right\},\\
T_t &= \frac{4\pi}{2}(\mathfrak{B}_x\mathfrak{H}_x + \mathfrak{B}_y\mathfrak{H}_y + \mathfrak{B}_z\mathfrak{H}_z + \mathfrak{D}_x\mathfrak{E}_x + \mathfrak{D}_y\mathfrak{E}_y + \mathfrak{D}_z\mathfrak{E}_z)\\
&= \frac{4\pi}{2}\left((\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right),\\
Y_x &= 4\pi(\mathfrak{B}_x\mathfrak{H}_y + \mathfrak{D}_x\mathfrak{E}_y),\\
Z_x &= 4\pi(\mathfrak{B}_x\mathfrak{H}_z + \mathfrak{D}_x\mathfrak{E}_z),\\
T_x &= \qquad \mathfrak{H}_z\mathfrak{E}_y - \mathfrak{H}_y\mathfrak{E}_z = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x,\\
X_y &= 4\pi(\mathfrak{B}_y\mathfrak{H}_x + \mathfrak{D}_y\mathfrak{E}_x),\\
Z_y &= 4\pi(\mathfrak{B}_y\mathfrak{H}_z + \mathfrak{D}_y\mathfrak{E}_z),\\
T_y &= \qquad \mathfrak{H}_z\mathfrak{E}_x - \mathfrak{H}_x\mathfrak{E}_z = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_y,\\
X_z &= 4\pi(\mathfrak{B}_z\mathfrak{H}_x + \mathfrak{D}_z\mathfrak{E}_x),\\
Y_z &= 4\pi(\mathfrak{B}_z\mathfrak{H}_y + \mathfrak{D}_z\mathfrak{E}_y),\\
T_z &= \qquad \mathfrak{H}_y\mathfrak{E}_x - \mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_x = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_z,\\
X_t &= (4\pi)^2(\mathfrak{B}_z\mathfrak{D}_y - \mathfrak{D}_z\mathfrak{B}_y) = (4\pi)^2[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_x,\\
Y_t &= (4\pi)^2(\mathfrak{B}_x\mathfrak{D}_z - \mathfrak{D}_x\mathfrak{B}_z) = (4\pi)^2[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_y,\\
Z_t &= (4\pi)^2(\mathfrak{B}_y\mathfrak{D}_x - \mathfrak{D}_y\mathfrak{B}_x) = (4\pi)^2[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_z.
\end{aligned}
\right.
$$

Hiernach entsprechen die räumlichen Spannungen $X_x, \ldots, Z_z$ den „Maxwellschen Spannungen" (S. 140 u. 243), von den raum-zeitlichen Spannungen die T_x, T_x, T_z dem „Poyntingschen Vektor", die X_t, Y_t, Z_t dem gleichen Vektor, jedoch mit $4\pi\mathfrak{D}$ und $4\pi\mathfrak{B}$ an Stelle von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, und T_t ist gleich der „Energiedichte". Im Ruhezustand $g = 0$ haben wir noch

$$X_y = Y_x\,, \quad Y_z = Z_y\,, \quad Z_x = X_z\,.$$

Handelt es sich zugleich um freien Äther, so wäre auch noch

$$X_t = T_x\,, \quad Y_t = T_y\,, \quad Z_t = T_z\,.$$

Sonst hätten wir auch im Ruhezustand

$$X_t = K\mu T_x\,, \qquad Y_t = K\mu T_y\,, \qquad Z_t = K\mu T_z\,.$$

Die Größe L, die „Lagrangesche Funktion", ist

$$(61_2)\quad L = \frac{4\pi}{2}\left(\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z - \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z\right) = \frac{4\pi}{2}\left(\left(\overline{\mathfrak{H}}\,\overline{\mathfrak{B}}\right) - \left(\overline{\mathfrak{E}}\,\overline{\mathfrak{D}}\right)\right).$$

Minkowski hat für diese Spannungen auch Ausdrücke in den Ruhekräften Φ, φ^* und einer Größe Ω angegeben, die er, mit $\frac{1}{V^2}$ multipliziert, als Ruhestrahl bezeichnet. Dieser Ruhestrahl ist ein Raum-Zeit-Vektor und bestimmt durch die Komponenten

$$(64')\qquad \Omega_\varkappa = \left(\overline{\mathfrak{g}}_h[\overline{\Phi\,\varphi^*}]^*_{h\varkappa}\right), \quad \varkappa = 1, 2, 3, 4,$$

also

$$(64)\quad \begin{cases} \Omega_1 = -\begin{vmatrix} \mathfrak{g}_2 & \mathfrak{g}_3 & \mathfrak{g}_4 \\ \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \\ \varphi_2^* & \varphi_3^* & \varphi_4^* \end{vmatrix}, & \Omega_2 = +\begin{vmatrix} \mathfrak{g}_3 & \mathfrak{g}_4 & \mathfrak{g}_1 \\ \Phi_3 & \Phi_4 & \Phi_1 \\ \varphi_3^* & \varphi_4^* & \varphi_1^* \end{vmatrix}, \\[2ex] \Omega_3 = -\begin{vmatrix} \mathfrak{g}_4 & \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 \\ \Phi_4 & \Phi_1 & \Phi_2 \\ \varphi_4^* & \varphi_1^* & \varphi_2^* \end{vmatrix}, & \Omega_4 = +\begin{vmatrix} \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 & \mathfrak{g}_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ \varphi_1^* & \varphi_2^* & \varphi_3^* \end{vmatrix}, \end{cases}$$

welche

$$(65)\qquad \mathfrak{g}_1\Omega_1 + \mathfrak{g}_2\Omega_2 + \mathfrak{g}_3\Omega_3 + \mathfrak{g}_4\Omega_4 = \left(\overline{\mathfrak{g}}\,\overline{\Omega}\right) = 0$$

und

$$(66)\qquad [\mathfrak{g}\,\Omega]^* = -V^2[\Phi\,\varphi^*] = +V^2[\varphi^*\,\Phi]$$

ergeben[1]), so daß der Raum-Zeit-Ruhstrahl auf der Raum-Zeit-Bewegung normal gerichtet ist. Hiernach hätte man, wenn

$$\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 + \Phi_4^2 = \Phi^2, \quad \varphi_1^{*2} + \varphi_2^{*2} + \varphi_3^{*2} + \varphi_4^{*2} = \overline{\varphi}^{*2}$$

gesetzt wird,

---

[1]) Man hat nach (50) (S. 399).

$$\left[\mathfrak{g}\left(\overline{\mathfrak{g}}[\overline{\Phi\,\varphi^*}]\right)\right] + \left[\mathfrak{g}\left(\overline{\mathfrak{g}}[\overline{\Phi\,\varphi^*}]^*\right)\right]^* = V^2[\Phi\,\varphi^*].$$

Das erste Glied aber ist nach (33″) (S. 396) gleich Null, und das zweite Glied gibt nach (64′), weil hier in $\left(\overline{\mathfrak{g}}[\overline{\Phi\,\varphi^*}]\right)$ die Indizes in der Folge $\varkappa h$ zu nehmen sind, nicht wie in Ω in der $h\varkappa$, die Größe $-[\mathfrak{g}\,\Omega]^*$. Zum gleichen Ergebnis gelangt man durch unmittelbare Ausrechnung. Es ist z. B.

$$\begin{aligned}[\mathfrak{g}\,\Omega]^*_{12} = [\mathfrak{g}\,\Omega]_{34} = \mathfrak{g}_3\big(\mathfrak{g}_1(\Phi_2\varphi_3^* - \Phi_3\varphi_2^*) + \mathfrak{g}_2(\Phi_3\varphi_1^* - \Phi_1\varphi_3^*) + \mathfrak{g}_3(\Phi_1\varphi_2^* - \Phi_2\varphi_1^*)\big) \\ + \mathfrak{g}_4\big(\mathfrak{g}_1(\Phi_2\varphi_4^* - \Phi_4\varphi_2^*) + \mathfrak{g}_2(\Phi_4\varphi_1^* - \Phi_1\varphi_4^*) + \mathfrak{g}_4(\Phi_1\varphi_2^* - \Phi\,\varphi_2^*)\big),\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}[\mathfrak{g}\,\Omega]^*_{12} &= (\mathfrak{g}_3\varphi_3^* + \mathfrak{g}_4\varphi_4^*)(\mathfrak{g}_1\Phi_2 - \mathfrak{g}_2\Phi_1) - (\mathfrak{g}_3\Phi_3 + \mathfrak{g}_4\Phi_4)(\mathfrak{g}_1\varphi_2^* - \mathfrak{g}_2\varphi_1^*) \\ &\qquad + (\mathfrak{g}_3^2 + \mathfrak{g}_4^2)(\Phi_1\varphi_2^* - \Phi_2\varphi_1^*) \\ &= -(\mathfrak{g}_1\varphi_1^* + \mathfrak{g}_2\varphi_2^*)(\mathfrak{g}_1\Phi_2 - \mathfrak{g}_2\Phi_1) + (\mathfrak{g}_1\Phi_1 + \mathfrak{g}_2\Phi_2)(\mathfrak{g}_1\varphi_2^* - \mathfrak{g}_2\varphi_1^*) \\ &\qquad - (V^2 + \mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2)(\Phi_1\varphi_2^* - \Phi_2\varphi_1^*),\end{aligned}$$

letzteres nach (33′) (S. 396) und (15) (S. 346). Die Ausrechnung gibt dann

$$-V^2(\Phi_1\varphi_2^* - \Phi_2\varphi_1^*) = -V^2[\Phi\,\varphi^*]_{12}.$$

Damit ist eine weitere Kontrolle auch für die Identitäten (50) (S. 399) gewonnen.

$$(62_3)\quad\left\{\begin{aligned}
V^4 X_x &= -\tfrac{1}{2} K V^2 \Phi^2 + \tfrac{1}{2}\mu V^2 \varphi^{*2} + K(V^2\Phi_1^2 - \mathfrak{g}_1^2 \Phi^2)\\
&\qquad - \mu(V^2\varphi_1^{*2} - \mathfrak{g}_1^2 \varphi^{*2}) - (1 + K\mu)\,\mathfrak{g}_1 \Omega_1\,,\\
V^4 Y_y &= -\tfrac{1}{2} K V^2 \Phi^2 + \tfrac{1}{2}\mu V^2 \varphi^{*2} + K(V^2\Phi_2^2 - \mathfrak{g}_2^2 \Phi^2)\\
&\qquad - \mu(V^2\varphi_2^{*2} - \mathfrak{g}_2^2 \varphi^{*2}) - (1 + K\mu)\,\mathfrak{g}_2 \Omega_2\,,\\
V^4 Z_z &= -\tfrac{1}{2} K V^2 \Phi^2 + \tfrac{1}{2}\mu V^2 \varphi^{*2} + K(V^2\Phi_3^2 - \mathfrak{g}_3^2 \Phi^2)\\
&\qquad - \mu(V^2\varphi_3^{*2} - \mathfrak{g}_3^2 \varphi^{*2}) - (1 + K\mu)\,\mathfrak{g}_3 \Omega_3\,,\\
V^4 T_t &= -\tfrac{1}{2} K V^2 \Phi^2 + \tfrac{1}{2}\mu V^2 \varphi^{*2} + K(V^2\Phi_4^2 - \mathfrak{g}_4^2 \Phi^2)\\
&\qquad - \mu(V^2\varphi_4^{*2} - \mathfrak{g}_4^2 \varphi^{*2}) - (1 + K\mu)\,\mathfrak{g}_4 \Omega_4\,,\\
V^4 Y_x &= K(V^2\Phi_1\Phi_2 - \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\Phi^2) - \mu(V^2\varphi_1^*\varphi_2^* - \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\varphi^{*2}) - \mathfrak{g}_2\Omega_1 - K\mu\,\mathfrak{g}_1\Omega_2\,,\\
V^4 Z_x &= K(V^2\Phi_1\Phi_3 - \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_3\Phi^2) - \mu(V^2\varphi_1^*\varphi_3^* - \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_3\varphi^{*2}) - \mathfrak{g}_3\Omega_1 - K\mu\,\mathfrak{g}_1\Omega_3\,,\\
-iV^4 T_x &= K(V^2\Phi_1\Phi_4 - \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_4\Phi^2) - \mu(V^2\varphi_1^*\varphi_4^* - \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_4\varphi^{*2}) - \mathfrak{g}_4\Omega_1 - K\mu\,\mathfrak{g}_1\Omega_4\,,\\
V^4 X_y &= K(V^2\Phi_2\Phi_1 - \mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_1\Phi^2) - \mu(V^2\varphi_2^*\varphi_1^* - \mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_1\varphi^{*2}) - \mathfrak{g}_1\Omega_2 - K\mu\,\mathfrak{g}_2\Omega_1\,,\\
V^4 Z_y &= K(V^2\Phi_2\Phi_3 - \mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3\Phi^2) - \mu(V^2\varphi_2^*\varphi_3^* - \mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3\varphi^{*2}) - \mathfrak{g}_3\Omega_2 - K\mu\,\mathfrak{g}_2\Omega_3\,,\\
-iV^4 T_y &= K(V^2\Phi_2\Phi_4 - \mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_4\Phi^2) - \mu(V^2\varphi_2^*\varphi_4^* - \mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_4\varphi^{*2}) - \mathfrak{g}_4\Omega_2 - K\mu\,\mathfrak{g}_2\Omega_4\,,\\
V^4 X_z &= K(V^2\Phi_3\Phi_1 - \mathfrak{g}_3\mathfrak{g}_1\Phi^2) - \mu(V^2\varphi_3^*\varphi_1^* - \mathfrak{g}_3\mathfrak{g}_1\varphi^{*2}) - \mathfrak{g}_1\Omega_3 - K\mu\,\mathfrak{g}_3\Omega_1\,,\\
V^4 Y_z &= K(V^2\Phi_3\Phi_2 - \mathfrak{g}_3\mathfrak{g}_2\Phi^2) - \mu(V^2\varphi_3^*\varphi_2^* - \mathfrak{g}_3\mathfrak{g}_2\varphi^{*2}) - \mathfrak{g}_2\Omega_3 - K\mu\,\mathfrak{g}_3\Omega_2\,,\\
-iV^4 T_z &= K(V^2\Phi_3\Phi_4 - \mathfrak{g}_3\mathfrak{g}_4\Phi^2) - \mu(V^2\varphi_3^*\varphi_4^* - \mathfrak{g}_3\mathfrak{g}_4\varphi^{*2}) - \mathfrak{g}_4\Omega_3 - K\mu\,\mathfrak{g}_3\Omega_4\,,\\
-iV^4 X_t &= K(V^2\Phi_4\Phi_1 - \mathfrak{g}_4\mathfrak{g}_1\Phi^2) - \mu(V^2\varphi_4^*\varphi_1^* - \mathfrak{g}_4\mathfrak{g}_1\varphi^{*2}) - \mathfrak{g}_1\Omega_4 - K\mu\,\mathfrak{g}_4\Omega_1\,,\\
-iV^4 Y_t &= K(V^2\Phi_4\Phi_2 - \mathfrak{g}_4\mathfrak{g}_2\Phi^2) - \mu(V^2\varphi_4^*\varphi_2^* - \mathfrak{g}_4\mathfrak{g}_2\varphi^{*2}) - \mathfrak{g}_2\Omega_4 - K\mu\,\mathfrak{g}_4\Omega_2\,,\\
-iV^4 Z_t &= K(V^2\Phi_4\Phi_3 - \mathfrak{g}_4\mathfrak{g}_3\Phi^2) - \mu(V^2\varphi_4^*\varphi_3^* - \mathfrak{g}_4\mathfrak{g}_3\varphi^{*2}) - \mathfrak{g}_3\Omega_4 - K\mu\,\mathfrak{g}_4\Omega_3\,.
\end{aligned}\right.$$

$$V^2 L = -\tfrac{1}{2} K\Phi^2 - \tfrac{1}{2}\mu\varphi^{*2}\,.$$

Zur Verifizierung nehmen wir den Fall $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_3 = 0$, woraus $\mathfrak{g}_4 = iV$ folgt. Dann gibt die erste Gleichung

$$V^4 X_x = -\tfrac{1}{2} K V^2\Phi^2 + \tfrac{1}{2}\mu V^2\varphi^{*2} + K V^2\Phi_1^2 - \mu V^2\varphi_1^{*2}\,.$$

also nach (34_1), (35_1) (S. 396) z. B.

$$\begin{aligned}
X_x &= \tfrac{1}{2} K(F_{14}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2) - \tfrac{1}{2}\mu(f_{14}^{*2} + f_{24}^{*2} + f_{34}^{*2}) - K F_{14}^2 + \mu f_{14}^{*2}\\
&= -\tfrac{1}{2} K(\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2) - \tfrac{1}{2}\mu(\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2) + K\mathfrak{E}_x^2 + \mu\mathfrak{H}_x^2\,.
\end{aligned}$$

Das stimmt mit dem unter (62_2) angegebenen Wert, weil für $g = 0$ die Beziehungen (C) (S. 389) gelten, also $4\pi\mathfrak{D} = K\mathfrak{E}$, $4\pi\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ ist. Aus Symmetrierücksichten sind damit auch die Gleichungen für Y_y, Z_z verifiziert. Für T_t haben wir entsprechend

$$V^4 T_t = -\tfrac{1}{2} K V^4\mathfrak{E}^2 - \tfrac{1}{2}\mu V^4\mathfrak{H}^2 + K V^4\mathfrak{E}^2 + \mu V^4\mathfrak{H}^2 + i(1 + K\mu)\,V\Omega_4\,.$$

Darin ist nach (64) $\Omega_4 = 0$, somit

$$T_t = \tfrac{1}{2} K\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{H}^2\,,$$

was wieder dem Ansatz unter (62_2) entspricht.

Ferner wäre

$$V^2 Y_x = K \Phi_1 \Phi_2 - \mu \varphi_1^* \varphi_2^* = -K V^2 F_{14} F_{24} + \mu V^2 f_{14}^* f_{24}^*$$
$$= K V^2 \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \mu V^2 \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y \,,$$

also wie (62_2) und entsprechend die Z_y usf. Sodann ist

$$-i V^4 T_x = K V^2 \Phi_1 \Phi_4 - \mu V^2 \varphi_1^* \varphi_4^* - \mathfrak{g}_4 \Omega_1 = -\mathfrak{g}_4 \Omega_1 \,.$$

Nun haben wir nach (64) und (34_1), (36_1), (1) usf.

$$\Omega_1 = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mathfrak{g}_4 \\ \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \\ \varphi_2^* & \varphi_3^* & \varphi_4^* \end{vmatrix} \begin{aligned} &= -\mathfrak{g}_4 (\Phi_2 \varphi_3^* - \Phi_3 \varphi_2^*) = -\mathfrak{g}_4^3 (F_{24} f_{34}^* - F_{34} f_{24}^*) \\ &= (i V)^3 (+ i \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - i \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y) \,, \end{aligned}$$

also folgt wie früher

$$T_x = \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y \,.$$

Endlich wird

$$-i V^4 X_t = K V^2 \Phi_4 \Phi_1 - \mu V^2 \varphi_4^* \varphi_1^* - K \mu \mathfrak{g}_4 \Omega_1 = -K \mu \mathfrak{g}_4 \Omega_1$$
$$= + K \mu (-i \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z + i \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y) \mathfrak{g}_4^4 \,,$$

also

$$X_t = K \mu (\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y)$$

gleichfalls wie früher. Für den besonderen Fall sind also alle Formeln verifiziert. Allgemein ist ferner, wegen $(\mathfrak{g} \Omega) = 0$ und (15) (S. 346).

$$V^4 (X_x + Y_y + Z_z + T_t)$$
$$= -2 K V^2 \Phi^2 + 2 \mu V^2 \varphi^{*2} + K V^2 \Phi^2 - \mu V^2 \bar{\varphi}^{*2} + K V^2 \Phi^2 - \mu V^2 \bar{\varphi}^{*2} = 0$$

eine weitere Verifizierung[1]). Übrigens folgt

$$-i V^4 (T_x - X_t) = -\mathfrak{g}_4 \Omega_1 + \mathfrak{g}_1 \Omega_4 - K \mu \mathfrak{g}_1 \Omega_4 + K \mu \mathfrak{g}_4 \Omega_1 \,,$$

also allgemein

$$(67) \qquad \left\{ \begin{aligned} -i V^4 (T_x - X_t) &= (K \mu - 1)(\mathfrak{g}_4 \Omega_1 - \mathfrak{g}_1 \Omega_4) \,, \\ -i V^4 (T_y - Y_t) &= (K \mu - 1)(\mathfrak{g}_4 \Omega_2 - \mathfrak{g}_2 \Omega_4) \,, \\ -i V^4 (T_z - Z_t) &= (K \mu - 1)(\mathfrak{g}_4 \Omega_3 - \mathfrak{g}_3 \Omega_4) \,. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen lehren, daß

$$T_x = X_t \,, \quad T_y = Y_t \,, \quad T_z = Z_t$$

ist für

$$K \mu = 1 \,,$$

---

[1]) Allgemein hat man nach (62_1) (S. 404) und (54), (55) (S. 401) z. B.

$$V^4 X_x = K \{ [\mathfrak{g} \Phi]_{23}^2 + [\mathfrak{g} \Phi]_{34}^2 + [\mathfrak{g} \Phi]_{24}^2 - [\mathfrak{g} \Phi]_{12}^2 - [\mathfrak{g} \Phi]_{13}^2 - [\mathfrak{g} \Phi]_{14}^2 \}$$
$$+ \mu \{ [\mathfrak{g} \varphi^*]_{14}^2 + [\mathfrak{g} \varphi^*]_{12}^2 + [\mathfrak{g} \varphi^*]_{31}^2 - [\mathfrak{g} \varphi^*]_{34}^2 - [\mathfrak{g} \varphi^*]_{42}^2 - [\mathfrak{g} \varphi^*]_{23}^2 \}$$
$$+ (1 + K \mu) \{ [\mathfrak{g} \Phi]_{23} [\mathfrak{g} \varphi^*]_{14} + [\mathfrak{g} \Phi]_{34} [\mathfrak{g} \varphi^*]_{12} + [\mathfrak{g} \Phi]_{24} [\mathfrak{g} \varphi^*]_{31}$$
$$- [\mathfrak{g} \Phi]_{12} [\mathfrak{g} \varphi^*]_{34} - [\mathfrak{g} \Phi]_{13} [\mathfrak{g} \varphi^*]_{42} - [\mathfrak{g} \Phi]_{14} [\mathfrak{g} \varphi^*]_{23} \} \,.$$

Mit Hilfe der Sätze (33′) (S. 396) und (15) (S. 346) ziehen sich im Faktor von K die positiven Glieder zusammen zu $-V^2 \Phi^2 + V^2 \Phi_1^2 - \mathfrak{g}_1^2 \bar{\Phi}^2$, die negativen zu $-\mathfrak{g}_1^2 \Phi^2 + V^2 \Phi_1^2$, so daß sie alle addiert geben $-V^2 \Phi^2 + 2 V^2 \Phi_1^2 - 2 \mathfrak{g}_1^2 \Phi^2$. Entsprechend geben die mit μ multiplizierten Glieder $-V^2 \varphi^{*2} + 2 V^2 \varphi_1^{*2} - 2 \mathfrak{g}_1^2 \bar{\varphi}^{*2}$. Für die mit $(1 + K\mu)$ multiplizierten findet man ebenso $+2(\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 [\Phi \varphi^*]_{34} - \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_3 [\Phi \varphi^*]_{24} + \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_4 [\Phi \varphi^*]_{23})$, indem alle anderen entsprechenden 6 Glieder sich paarweise aufheben. Der Rest ist aber nach (64) gleich $-2 \mathfrak{g}_1 \Omega_1$. Ganz so werden alle anderen Gleichungen abgeleitet. Minkowski muß eine abgekürzte Methode für solche lange Rechnungen gehabt haben.

was wir schon wissen, und für

$$\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_4} = \frac{\Omega_1}{\Omega_4}, \qquad \frac{\mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_4} = \frac{\Omega_2}{\Omega_4}, \qquad \frac{\mathfrak{g}_3}{\mathfrak{g}_4} = \frac{\Omega_3}{\Omega_4},$$

d. h.

$$\Omega_1 : \Omega_2 : \Omega_3 : \Omega_4 = \mathfrak{g}_1 : \mathfrak{g}_2 : \mathfrak{g}_3 : \mathfrak{g}_4 .$$

Diese Beziehung kann aber nicht erfüllt sein, weil sie zufolge (65) $\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2 + \mathfrak{g}_3^2 + \mathfrak{g}_4^2 = 0$ ergeben würde, oder $\Omega_4 = 0$, was beides nicht zulässig. Es bleibt also nur die erste Möglichkeit.

Aus den Spannungen berechnet Minkowski die ponderomotorischen Kräfte in derselben Weise, wie es in seiner Mechanik geschieht. Setzen wir also wieder

$$(\mathrm{J}_1)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= +\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{1}{V}\frac{\partial X_t}{\partial t} = K_1 , \\ Y_1 &= +\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{1}{V}\frac{\partial Y_t}{\partial t} = K_2 , \\ Z_1 &= +\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{1}{V}\frac{\partial Z_t}{\partial t} = K_3 , \\ T_1 &= -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z} + \frac{1}{V}\frac{\partial T_t}{\partial t}\right) = K_4 , \end{aligned}\right.$$

so sagt Minkowski: „Es ist nun meine Meinung, daß bei den elektromagnetischen Vorgängen die ponderomotorische Kraft, die an der Materie in einem Raum-Zeit-Punkte x, y, z, t angreift, berechnet für die Volumeneinheit als x, y, z-Komponenten die drei ersten Komponenten des zum Raum-Zeit-Vektor $\mathfrak{g}$ normalen Raum-Zeit-Vektors

$$K + \frac{1}{V^2}\left(\overline{\mathfrak{g}\,K}\right)\mathfrak{g}$$

hat, und daß ferner der Energiesatz seinen Ausdruck in der obigen vierten Relation findet."

Hiernach wären die vollständigen räumlichen ponderomotorischen Kräfte auf Volumeneinheit bezogen [vgl. (49_1) S. 354]

$$(\mathrm{K})\quad \left\{\begin{aligned} X &= X_1 + \frac{1}{V^2}\mathfrak{g}_1(\mathfrak{g}_1 X_1 + \mathfrak{g}_2 Y_1 + \mathfrak{g}_3 Z_1 + \mathfrak{g}_4 i V T_1) , \\ Y &= Y_1 + \frac{1}{V^2}\mathfrak{g}_2(\mathfrak{g}_1 X_1 + \mathfrak{g}_2 Y_1 + \mathfrak{g}_3 Z_1 + \mathfrak{g}_4 i V T_1) , \\ Z &= Z_1 + \frac{1}{V^2}\mathfrak{g}_1(\mathfrak{g}_1 X_1 + \mathfrak{g}_2 Y_1 + \mathfrak{g}_3 Z_1 + \mathfrak{g}_4 i V T_1) . \end{aligned}\right.$$

Die Zusatzkraft $\frac{1}{V^2}\mathfrak{g}\left(\overline{\mathfrak{g}\,K}\right)$ ist Minkowski wie in seiner Mechanik, so auch in seiner Elektrodynamik eigen; sie darf hier so wenig fortgelassen werden wie dort, ohne seine Theorie der wichtigsten Ergebnisse zu berauben und ihre in sich geschlossene Eigenart zu zerstören. Seine Theorie unterscheidet sich hierin grundsätzlich von allen bis jetzt aufgestellten Theorien.

Für die räumlich-zeitliche Kraft hätten wir

$$(L)\qquad i V T = i V T_1 + \frac{1}{V^2}\mathfrak{g}_4(\mathfrak{g}_1 X_1 + \mathfrak{g}_2 Y_1 + \mathfrak{g}_3 Z_1 + \mathfrak{g}_4 i V T_1) .$$

Minkowski hat für die X_1, Y_1, Z_1 sehr eigenartige Ausdrücke aufgestellt.

Wir bezeichnen die Spannungsmatrix

$$\begin{Vmatrix} X_x & Y_x & Z_x & -i T_x \\ X_y & Y_y & Z_y & -i T_y \\ X_z & Y_z & Z_z & -i T_z \\ -i X_t & -i Y_t & -i Z_t & T_t \end{Vmatrix}$$

durch

$$(68)\qquad S = \begin{Vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{Vmatrix} .$$

Dann ist die Gleichung der ponderomotorischen Kräfte K, indem x_1, x_2, x_3, x_4 für $x, y, z, i V t$ geschrieben wird, symbolisch (S. 402)

$$(J_2)\qquad K = H M S .$$

Demgemäß ist weiter entsprechend (60_2) (S. 404) symbolisch

$$(60_3)\qquad f F = \begin{Vmatrix} S_{11} - L & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} - L & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - L & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} - L \end{Vmatrix}$$

oder

$$(60_4)\qquad f F = S - L ,$$

wo L für die Matrix

$$L = \begin{Vmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{Vmatrix}$$

steht. Also wird

$$(J_3)\qquad K = H M f F + H M L .$$

Bilden wir zu den S die dualen Werte in der umgekehrten Reihe F, f, so ist zufolge der Gleichungen für die f^*, F^* (S. 395) und für L (S. 403) zunächst

$$(69_1)\qquad L^* = \tfrac{1}{2}(F^*_{23} f^*_{23} + F^*_{31} f^*_{31} + F^*_{12} f^*_{12} + F^*_{14} f^*_{14} + F^*_{24} f^*_{24} + F^*_{34} f^*_{34}) .$$

also nach (29), (30) (S. 395)

$(69_2)\qquad \underline{L}^* = \frac{1}{2}(F_{14}f_{14} + F_{24}f_{24} + F_{34}f_{34} + F_{23}f_{23} + F_{31}f_{31} + F_{12}f_{12})\,,$

d. h. nach (61_1) (S. 403)

$$(70)\qquad L^* = L\,.$$

Weiter haben wir entsprechend (62_1) (S. 404)

$$\underline{S}^*_{11} = \tfrac{1}{2}(F^*_{23}f^*_{23} + F^*_{34}f^*_{34} + F^*_{42}f^*_{42} - F^*_{12}f^*_{12} - F^*_{13}f^*_{13} - F^*_{14}f^*_{14})\,,$$

also abermals nach (29), (30) (S. 395)

$$\underline{S}^*_{11} = \tfrac{1}{2}(F_{14}f_{14} + F_{12}f_{12} + F_{13}f_{13} - F_{34}f_{34} - F_{42}f_{42} - F_{23}f_{23})\,,$$

d. h. (62_1) (S. 404)

$$\underline{S}^*_{11} = -S_{11}\,.$$

Zusammen wird

$$(71)\qquad \underline{S}^*_{11} = -S_{11}\,,\quad \underline{S}^*_{22} = -S_{22}\,,\quad \underline{S}^*_{33} = -S_{33}\,,\quad \underline{S}^*_{44} = -S_{44}\,.$$

Sodann ist

$$(72)\quad S^*_{21} = \Sigma F^*_{\varkappa 2}f^*_{1\varkappa} = F^*_{32}f^*_{13} + F^*_{42}f^*_{14} = F_{41}f_{42} + F_{13}f_{23} = -f_{32}F_{13} - f_{42}F_{14} = -S_{21}\,.$$

In derselben Weise folgt, daß alle anderen $\underline{S}^*$ entgegengesetzt gleich sind den entsprechenden S. Also haben wir überhaupt

$$(73)\qquad F^*f^* = \begin{vmatrix} -S_{11}-L\,, & -S_{12}\,, & -S_{13}\,, & -S_{14} \\ -S_{21}\,, & -S_{22}-L\,, & -S_{23}\,, & -S_{24} \\ -S_{31}\,, & -S_{32}\,, & -S_{33}-L\,, & -S_{34} \\ -S_{41}\,, & -S_{42}\,, & -S_{43}\,, & -S_{44}-L \end{vmatrix}$$

oder

$$(60^*_4)\qquad F^*f^* = -S - L = -S + L - 2L = -fF - 2L\,,$$

letzteres wegen (60_4) (S. 410), wo L wieder für die frühere Diagonalmatrix steht.

Durch Umkehrung folgt

$$(60_5)\qquad fF = -F^*f^* - 2L\,.$$

Nun ist weiter $HMfF = (HMf)F + (HMF)f$, weil HM Größen zusammensetzt, deren jede Differentialquotienten von fF bedeutet, (56), (57) (S. 402), und da die F^* nur den F entsprechen, so wird $fHMF$ nach Gleichung (60_5) gleich sein $-f^*HMF^* - 2(HML)_f$, wobei der Index f im zweiten Gliede bedeutet, daß bei den Differentiationen, der die Glieder in L zur Bildung von HML zu unterziehen sind, die f als Konstanten zählen, also nur die F zu berücksichtigen sind. So bekommen wir

$$HMfF = (HMf)F - (HMF^*)f^* - 2(HML)_f\,,$$

also nach (69_4) und (J_2)

$$(J_4)\qquad K = (HMf)F - (HMF^*)f^* + HML - 2(HML)_f$$

und zufolge (A_2), (B_2) (S. 402)

$$(J_5)\quad \begin{cases} K = -sF + HML - 2(HML)_f = -sF + \dfrac{\partial L}{\partial x} - 2\left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)_f \\ \quad = -sF + \left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)_F - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)_f, \end{cases}$$

d. h. ausgeschrieben

$$(J_6)\begin{cases} X_1 = K_1 \; = -(s_1 F_{11} + s_2 F_{21} + s_3 F_{31} + s_4 F_{41}) + \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right)_F - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right)_f, \\ Y_1 = K_2 \; = -(s_1 F_{12} + s_2 F_{22} + s_3 F_{32} + s_4 F_{42}) + \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right)_F - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right)_f, \\ Z_1 = K_3 \; = -(s_1 F_{13} + s_2 F_{23} + s_3 F_{33} + s_4 F_{43}) + \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_3}\right)_F - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_3}\right)_f, \\ iVT_1 = iVK_4 = -(s_1 F_{14} + s_2 F_{24} + s_3 F_{34} + s_4 F_{44}) + \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_4}\right)_F - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_4}\right)_f, \end{cases}$$

und nach Einsetzung der Werte der s und F gemäß (1) bis (5) (S. 388)

$$(J_7)\quad \begin{cases} X_1 = K_1 = \dfrac{4\pi}{V}(J_y 4\pi \mathfrak{B}_z - J_z 4\pi \mathfrak{B}_y + \varrho V \mathfrak{E}_x) + \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right)_F - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right)_f, \\ Y_1 = K_2 = \dfrac{4\pi}{V}(J_z 4\pi \mathfrak{B}_x - J_x 4\pi \mathfrak{B}_z + \varrho V \mathfrak{E}_y) + \left(\dfrac{\partial L}{\partial y}\right)_F - \left(\dfrac{\partial L}{\partial y}\right)_f, \\ Z_1 = K_3 = \dfrac{4\pi}{V}(J_x 4\pi \mathfrak{B}_y - J_y 4\pi \mathfrak{B}_x + \varrho V \mathfrak{E}_z) + \left(\dfrac{\partial L}{\partial z}\right)_F - \left(\dfrac{\partial L}{\partial z}\right)_f, \\ T_1 = K_4 = \dfrac{4\pi}{V}(J_x \mathfrak{E}_x + J_y \mathfrak{E}_y + J_z \mathfrak{E}_z) - \dfrac{1}{V^2}\left\{\left(\dfrac{\partial L}{\partial t}\right)_F - \left(\dfrac{\partial L}{\partial t}\right)_f\right\}. \end{cases}$$

Für die von L abhängigen Glieder, haben wir nach (61_1) (S. 403)

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_h}\right)_F - \left(\frac{\partial L}{\partial x_h}\right)_f = \frac{1}{2}\Big(F_{23}\frac{\partial f_{23}}{\partial x_h} + F_{31}\frac{\partial f_{31}}{\partial x_h} + F_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_h} + F_{14}\frac{\partial f_{14}}{\partial x_h} + F_{24}\frac{\partial f_{24}}{\partial x_h} + F_{34}\frac{\partial f_{34}}{\partial x_h}$$
$$- f_{23}\frac{\partial F_{23}}{\partial x_h} - f_{31}\frac{\partial F_{31}}{\partial x_h} - f_{12}\frac{\partial F_{12}}{\partial x_h} - f_{14}\frac{\partial F_{14}}{\partial x_h} - f_{24}\frac{\partial F_{24}}{\partial x_h} - f_{34}\frac{\partial F_{34}}{\partial x_h}\Big),$$

d. h. nach Einsetzung der Werte für die f, F und in anderer Ordnung,

$$(74_1)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_h}\right)_F - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)_f = \dfrac{4\pi}{2}\Big(\mathfrak{B}_x\dfrac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x_h} + \mathfrak{B}_y\dfrac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x_h} + \mathfrak{B}_z\dfrac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x_h} - \mathfrak{H}_x\dfrac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x_h} - \mathfrak{H}_y\dfrac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x_h} - \mathfrak{H}_z\dfrac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x_h} \\ \qquad + \mathfrak{D}_x\dfrac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x_h} + \mathfrak{D}_y\dfrac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x_h} + \mathfrak{D}_z\dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x_h} - \mathfrak{E}_x\dfrac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x_h} - \mathfrak{E}_y\dfrac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial x_h} - \mathfrak{E}_z\dfrac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial x_h}\Big). \\ \qquad h = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Im Ruhezustande und im freien Äther, wo $4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, $4\pi\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ ist, fallen diese Glieder als zusammen identisch Null fort. Sonst kann man auch schreiben

$$(74_2)\quad \left(\frac{\partial L}{\partial x_h}\right)_F - \left(\frac{\partial L}{\partial x_h}\right)_f = \frac{4\pi}{2}\left\{\left(\overline{\mathfrak{B}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x_h}}\right) + \left(\overline{\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x_h}}\right) - \left(\overline{\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x_h}}\right) - \left(\overline{\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x_h}}\right)\right\},\; h = 1, 2, 3, 4.$$

Nach Minkowski hätte man auch die Form

$$(74_3)\quad\left\{\begin{aligned}
\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_F-\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_f &= +\frac{K\mu-1}{V^4\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\left(\Omega_1\frac{\partial g_x}{\partial x}+\Omega_2\frac{\partial g_y}{\partial x}+\Omega_3\frac{\partial g_z}{\partial x}\right)\\
&\quad -\frac{1}{2V^2}\left(\Phi^2\frac{\partial K}{\partial x}-\varphi^{*2}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right),\\
\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)_F-\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)_f &= +\frac{K\mu-1}{V^4\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\left(\Omega_1\frac{\partial g_x}{\partial y}+\Omega_2\frac{\partial g_y}{\partial y}+\Omega_3\frac{\partial g_z}{\partial y}\right)\\
&\quad -\frac{1}{2V^2}\left(\Phi^2\frac{\partial K}{\partial y}-\varphi^{*2}\frac{\partial\mu}{\partial y}\right),\\
\left(\frac{\partial L}{\partial x_3}\right)_F-\left(\frac{\partial L}{\partial x_3}\right)_f &= +\frac{K\mu-1}{V^4\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\left(\Omega_1\frac{\partial g_x}{\partial z}+\Omega_2\frac{\partial g_y}{\partial z}+\Omega_3\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)\\
&\quad -\frac{1}{2V^2}\left(\Phi^2\frac{\partial K}{\partial z}-\overline{\varphi}^{*2}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right),\\
\left(\frac{\partial L}{\partial x_4}\right)_F-\left(\frac{\partial L}{\partial x_4}\right)_f &= +\frac{K\mu-1}{V^4 iV\sqrt{1-\frac{g^2}{V^2}}}\left(\Omega_1\frac{\partial g_x}{\partial t}+\Omega_2\frac{\partial g_y}{\partial t}+\Omega_3\frac{\partial g_z}{\partial t}\right)\\
&\quad -\frac{1}{2V^2 iV}\left(\Phi^2\frac{\partial K}{\partial t}-\overline{\varphi}^{*2}\frac{\partial\mu}{\partial t}\right).
\end{aligned}\right.$$

7. Schlußbemerkung.

Es ist das große Verdienst Einsteins, die Relativitätslehre entdeckt und in die Wissenschaft eingeführt zu haben. Man hat die Wandlung, die in die Naturbetrachtung durch die Einsteinsche Relativitätslehre gekommen ist, mit der, die sie durch Newtons Gravitationstheorie erfahren hat, verglichen; und diese Vergleichung ist zutreffend nach der Größe des Gedankens und der Neuheit der Gesichtspunkte. Auch die näheren Schlüsse, die Einstein aus seiner Relativitätslehre gezogen hat, konnte die Folgezeit im wesentlichen bestätigen. Es bedeutet selbstverständlich keinen Vorwurf, wenn nunmehr gesagt werden muß, daß seine Lehre nicht in sich widerspruchsfrei ist, daß die Grundlagen, auf denen sie sich aufgebaut findet, allzu unsicher und schattenhaft sind und daß die Lehre die allgemeine weltumfassende Bedeutung nicht besitzt, die man ihr zugeschrieben hat und noch zuschreibt, daß sie im Grunde so wie sie von Einstein gegeben ist, sogar nicht mehr aufrechterhalten bleiben kann, wenn auch ihre Einzelergebnisse bestehen bleiben.

Minkowskis Relativitätslehre ist in ihrem Wesen von der Einsteinschen durchaus verschieden, sie ist auch in sich festgefügt und — so genommen wie ihr Urheber sie gegeben hat — in sich widerspruchsfrei und in ihren Ergebnissen kaum angreifbar. Die Schwierigkeiten, die sie der Auffassung bietet, sind hervorgehoben. Sieht man über diese hinweg, so hat man ein auf einem höchst einfachen Grundgedanken aufgebautes grandioses Gebäude vor sich.

Daß die Minkowskische Lehre die Einsteinsche einbegreift, möchte man als eine glückliche Fügung betrachten, die, mathematisch ausgesprochen, sich darin zeigt, daß drei Gleichungen (S. 290) sich durch zwei Größen erfüllen lassen. Aber die Deutung, die Einstein seinen Ansätzen verliehen hat, ist aus Minkowskis Theorie nicht zu entnehmen. Diese Theorie geht auch in der Anschauung durchaus eigene Wege, und die Weltkonstante, von der sie wie die Einsteinsche Theorie Gebrauch macht, hat eine aus ihr selbst fließende Bedeutung, die an sich weitab von der Bedeutung der Einsteinschen Weltkonstante liegt (S. 376), wenn auch zahlenmäßig beide Weltkonstanten übereinkommen.

Beiden Theorien haftet etwas Mathematisches an, der Einsteinschen Theorie noch mehr als der Minkowskischen. Soviel ich sehen kann, ist das Mathematische der Grundzug auch aller sonstigen mehr oder weniger selbständig aufgestellten Theorien. So spricht v. Ignatowski[1]), der eine sehr durchgearbeitete Relativitätstheorie veröffentlicht hat, den Relativitätssatz selbst in der mathematischen Form Max Plancks (S. 324) aus, denn die vier Gleichungen, die er zu diesem Ausspruch benutzt, geben zusammengefaßt die eine Gleichung Plancks wieder. Er schließt dann, um zu den Lorentz-Einsteinschen Formeln zu gelangen, wie folgt. Findet die Bewegung in Richtung der x-Achse statt, so werden die Relativkoordinaten x', y', z', t' nicht sowohl von y, z als von $\varrho = \sqrt{y^2 + z^2}$ abhängen, und man wird setzen

$$x' = f_1(x, \varrho, t; p), \quad \varrho' = f_2(x, \varrho, t; p), \quad t' = f_3(x, \varrho, t; p)$$

und nach dem Relativitätsprinzip umgekehrt

$$x = f_1(x', \varrho', t'; p), \quad \varrho = f_2(x', \varrho', t'; p), \quad t = f_3(x', \varrho', t'; p).$$

Er nimmt dann an

$$(1'a)\begin{cases} dx' = F_1\,dx + F_2\,dt + F_3\,d\varrho, \\ dt' = G_1\,dx + G_2\,dt + G_3\,d\varrho, \\ d\varrho' = H_1\,dx + H_2\,dt + H_3\,d\varrho; \end{cases} \qquad (1'b)\begin{cases} dx = F_1'\,dx' + F_2'\,dt' + F_3'\,d\varrho', \\ dt = G_1'\,dx' + G_2'\,dt' + G_3'\,d\varrho', \\ d\varrho = H_1'\,dx' + H_2'\,dt' + H_3'\,d\varrho'. \end{cases}$$

Das Relativitätsprinzip wird nun so aufgefaßt, daß diese Umrechnungsbeziehungen der beiden Systeme aufeinander nur von der relativen Bewegung dieser Systeme gegeneinander, nicht aber von irgendwelchen Vorgängen innerhalb der Systeme, also namentlich auch nicht von besonderen Bewegungen der Punkte abhängen, so daß die $F, G, H; F', G', H'$ Funktionen lediglich von p, nicht von einer etwaigen Geschwindigkeit v der Punkte sein können. Bewegt sich nun der Punkt parallel der x-Achse, so daß $x = v\,dt$ ist, so folgt $d\varrho = 0$. Wir hätten demnach für diesen Fall $d\varrho' = (H_1 v + H_2)\,dt$. v. Ignatowski aber meint, es müßte dann $d\varrho' = 0$, also $H_1 = H_2 = 0$ angesetzt werden. Das kann ich nur für eine Annahme, nicht für einen Schluß aus dem Relativitätsprinzip halten, denn die Abhängigkeit des $d\varrho'$ von v ist nur eine scheinbare, da ja an sich $d\varrho' = H_1\,dx + H_2\,dt$ sich ergibt, sonst fände man ebenso $G_1 = G_2 = 0$, $F_1 = F_2 = 0$, und es resultierte aus der ganzen Betrachtung überhaupt nichts. Nimmt man jedoch für $d\varrho = 0$ auch $d\varrho' = 0$ an, so folgt dann freilich weiter auch $\varrho' = \varrho$ als allgemeine Beziehung, und daß die dritte Gleichung in beiden Systemen überhaupt entfallen kann, da aus $d\varrho = 0$, wenn $d\varrho' = 0$ ist, ferner folgt $H_1' = H_2' = 0$. In den ersten Gleichungen soll deshalb das Glied mit $d\varrho$ ebenfalls zu entfernen sein. Der angegebene

[1]) Archiv der Mathem. u. Phys. **17**, 1 ff. (1911).

Grund, daß nach dem Relativitätsprinzip die Beziehung der beiden Systeme zueinander nicht von Änderungen innerhalb der Systeme abhängen kann, scheint mir wieder nicht zutreffend, er kann genau so für dx und dt geltend gemacht werden, wenn, wie es von v. Ignatowski geschieht, die obigen Gleichungssysteme auf Lagenänderungen desselben Punkts bezogen werden. Faßt man aber die Gleichungen auf als Beziehungen beim Übergang von einem Punkt zu einem anderen, dann ist aus ihnen überhaupt nichts aus Sonderfällen zu schließen, da dann auch nicht $dx = v\,dt$ ist.

Die Gleichungen, die v. Ignatowski zuletzt ansetzt

$$(1_1\text{a})\quad \begin{cases} dx' = F_1\,dx + F_2\,dt, \\ dt' = G_1\,dx + G_2\,dt, \end{cases} \qquad (1_1\text{b})\quad \begin{cases} dx = F_1'\,dx' + F_2'\,dt', \\ dt = G_1'\,dx' + G_2'\,dt', \end{cases}$$

beruhen also schon auf mindestens zwei Nebenhypothesen. Diese Beziehungen werden jetzt als solche für den Übergang von einem Raumpunkt zu einem anderen Raumpunkt aufgefaßt, im Gegensatz zu der früheren Auffassung, als Beziehungen zwischen den geänderten Lagen desselben Punktes. Es werden in beiden Systemen Strecken dx, dx' genommen, die für $p = 0$, einander gleich sind. Vom ungestrichenen System, bei $dt = 0$, gemessen ist $dx' = F_1\,dx$, vom gestrichenen System, bei $dt' = 0$ gemessen, entsprechend $dx = F_1'\,dx'$ und da beide Systeme auf die gleiche Größe die gleiche Wirkung haben sollen, so folgt

$$(2)\qquad F_1 = F_1'.$$

Das schließt die neue Annahme ein, daß Vorwärtsbewegung dieselbe Wirkung haben soll wie Rückwärtsbewegung.

Aus den obigen Gleichungen (1_1a, b) folgen die acht Beziehungen

$$(3)\quad \begin{cases} F_1F_1'+F_2G_1'=1, \quad G_1F_2'+G_2G_2'=1, \quad F_1F_1'+F_2'G_1=1, \quad G_1'F_2+G_2G_2'=1; \\ F_1F_2'+F_2G_2'=0, \quad G_1F_1'+G_2G_1'=0, \quad F_1'F_2+F_2'G_2=0, \quad F_1G_1'+G_1G_2'=0, \end{cases}$$

die nur vier unabhängige Gleichungen darstellen. Insbesondere ergibt sich aus ihnen

$$(4)\qquad F_2'G_1 = F_2G_1', \quad G_2G_2' = F_1F_1' = F_1^2 = F_1'^2.$$

Es seien $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ die von den Ausgangspunkten 0, $0'$ der beiden Bezugssystemen zu den korrespondierenden Punkten P, P' führenden Radien, $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_1'$ die Vektoren von P, P' auf die parallelen sich in einander fortsetzenden x-, x'-Achen. Es ist dann, entsprechend $\varrho = \varrho'$, zu setzen $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1'$ und folglich, mit $\mathfrak{c}'$ als Einheitsvektor,

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{c}\,x, \quad \mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{c}\,x'; \quad d\mathfrak{r} = d\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{c}\,dx, \quad d\mathfrak{r}' = d\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{c}\,dx',$$

d. h.

$$d\mathfrak{r}' = d\mathfrak{r} + \mathfrak{c}\,(dx' - dx) = d\mathfrak{r} + \mathfrak{c}\,(F_1\,dx + F_2\,dt - dx)$$

oder mit

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}, \qquad \mathfrak{v}' = \frac{d\mathfrak{r}'}{dt'},$$

$$\mathfrak{v}' = \left(\mathfrak{v} + \mathfrak{c}\,(F_1 - 1)\frac{dx}{dt} + F_2\,\mathfrak{c}\right)\frac{dt}{dt'} = \frac{\mathfrak{v} + \mathfrak{c}\,(F_1 - 1)\dfrac{dx}{dt} + F_2\,\mathfrak{c}}{G_1\dfrac{dx}{dt} + G_2},$$

oder wegen

$$\frac{dx}{dt} = \mathfrak{c}\mathfrak{v}, \quad \frac{dx'}{dt'} = \mathfrak{c}\mathfrak{v}', \tag{5}$$

$$\mathfrak{v}' = \frac{\mathfrak{v} + \mathfrak{c}(F_1 - 1)\mathfrak{c}\mathfrak{v} + F_2\mathfrak{c}}{G_1\mathfrak{c}\mathfrak{v} + G_2}. \tag{6a}$$

Entsprechend ist

$$\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{v}' + \mathfrak{c}(F_1' - 1)\mathfrak{c}\mathfrak{v}' + F_2'}{G_1'\mathfrak{c}\mathfrak{v}' + G_2'}. \tag{6b}$$

Haben wir $\mathfrak{v}' = 0$, so wird

$$\mathfrak{v} = \frac{F_2'}{G_2'} = -\mathfrak{c}\,\frac{F_2}{1 + (F_1 - 1)\mathfrak{c}}$$

eine Identität nach den Gleichungen unter (3). Ferner gibt die Gleichung (6a)

$$F_2 = -\mathfrak{c}\mathfrak{v}F_1 = -p\,F_1. \tag{7}$$

Entsprechend wäre aus (6b)

$$F_2' = -\mathfrak{c}\mathfrak{v}'F_1' = +\mathfrak{c}\mathfrak{v}F_1 = +p\,F_1, \tag{8}$$

letzteres nach dem Relativitätsprinzip und wegen (2), somit

$$F_2 = -F_2'.$$

Also nach den Gleichungen (3)

$$G_2 = G_2' = F_1 = F_1'. \tag{9}$$

Diese Gleichungen gibt v. Ignatowski selbst alle an. Es besteht noch eine weitere Doppelbeziehung, indem nach den Gleichungen unter (3) aus den Gleichungen (7), (8), (9) auch folgt

$$G_1 = -G_1' = \frac{1 - F_1^2}{p\,F_1}. \tag{10}$$

Lassen wir noch G_1, G_1' als unbekannt gelten und schreiben für sie Q, $\bar{Q}$, und P für F_1, F_1', G_2, G_2', so wäre also nunmehr

$$(1_2\text{a}) \quad \begin{cases} dx' = P\,dx - p\,P\,dt, \\ dt' = Q\,dx + P\,dt. \end{cases} \qquad (1_2\text{b}) \quad \begin{cases} dx = P\,dx' + p\,P\,dt', \\ dt = Q\,dx' + P\,dt'. \end{cases}$$

Nun wird ein drittes Bezugssystem x'', t'' eingeführt, daß sich in gleicher Richtung bewegt, wie die beiden anderen Bezugssysteme, und zwar gegen das erste System mit der Geschwindigkeit p_2, gegen das zweite mit der $-p_1$, so haben wir entsprechend zu dx, dt; dx', dt'

$$dx' = P'\,dx'' - p_1\,P'\,dt'', \qquad dx'' = P''\,dx - p_2\,P''\,dt,$$
$$dt' = \bar{Q}'\,dx'' + P'\,dt''; \qquad dt'' = Q''\,dx + P''\,dt.$$

Daraus folgt

$$dx' = (P'P'' - P'\,p_1\,Q'')\,dx - P'P''(p_1 + p_2)\,dt,$$
$$dt' = (\bar{Q}'P'' + P'Q'')\,dx - (\bar{Q}'P''\,p_2 - P'P'')\,dt,$$

so daß die Vergleichung mit (1_2a, b) ergibt

$$\begin{cases} P = P'(P'' - p_1 Q''), & P\,p = P'P''(p_1 + p_2), \\ Q = Q'P'' + P'Q'', & P = P''(P' - p_2\bar{Q}'). \end{cases} \tag{11}$$

Die erste und vierte Gleichung führen zur Beziehung

$$P' Q'' p_1 = P'' \bar{Q}' p_2, \tag{12}$$

so daß aus der dritten folgt

$$Q = P'' \bar{Q}' \left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{P'' \bar{Q}'}{p_1} (p_1 + p_2) \tag{13}$$

und aus der zweiten

$$Q = \frac{P p}{p_1} \frac{Q'}{P'}, \tag{14}$$

Hiernach haben wir unter Einbeziehung von (12)

$$\frac{Q}{P p} = \frac{\bar{Q}'}{P' p_1} = \frac{Q''}{P'' p_2}, \tag{15}$$

und da die p willkürlich sind, so wird gefolgert, daß $\frac{Q}{Pp}$ eine universelle Konstante sein muß. Wird sie mit $-n$ bezeichnet, so ergibt sich

$$Q = -P p n.$$

Aus (10) folgt dann

$$-P p n = \frac{1 - P^2}{p P},$$

d. h.

$$P = \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 n}}.$$

So werden die Transformationsgleichungen

$$dx' = \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 n}} (dx - p\,dt), \qquad dx = \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 n}} (dx' + p\,dt'),$$

$$dt' = \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 n}} (dt - p\,n\,dx); \qquad dt = \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 n}} (dt' + p\,n\,dx')$$

und sie stimmen in der Tat mit den Lorentz-Einsteinschen Gleichungen formell überein. Daß $n = 1/V^2$ zu setzen ist, schließt v. Ignatowski aus dem Heavisideschen Ellipsoid, er hätte auch wie Einstein die Erscheinung der Aberration benutzen können. Ich habe dieses hübsche Beispiel absichtlich genauer dargelegt, um zu zeigen wie viele Annahmen versteckt in diesen Berechnungen liegen und wie mathematisch-formalistisch die Ableitungen sind. Auf die weiteren ansehnlichen Auseinandersetzungen v. Ignatowskis kann ich aber nicht eingehen.

Eine sehr eigenartige Auffassung hat Hermann Friedmann[1]) von dem Relativitätsprinzip geäußert. Er stellt an die Spitze folgendes Prinzip: „Der bewegte Beobachter benutzt bei der Herstellung der Maßgrößen das — dem arithmetischen Mittel des ruhenden Beobachters völlig gleichberechtigte — geometrische Mittel." Darin also soll die Verschiedenheit der Beurteilung zwischen dem bewegten und dem ruhenden Beobachter bestehen; jeder von ihnen verfährt für sich streng richtig, ihre Beurteilungen unterscheiden sich aber wie das geometrische Mittel vom arithmetischen. Seien $a_1, a_2, a_3, \ldots$

[1]) Översigt af Finska Vetenskaps Förhandlingar 15 (1912/13).

beobachtete Längen einer Strecke l, so würde ein mit l ruhender (oder mit ihm gleich bewegter) Beobachter ansetzen

$$l = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n},$$

dagegen ein gegen l bewegter Beobachter

$$l' = (a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Nun seien die Abweichungen, die der mit der Strecke ruhende (oder mit ihr gleich bewegte) Beobachter zwischen den beobachteten Werten $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ und dem aus ihnen durch arithmetische Mittelbildung abgeleiteten Wert l gefunden hat, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$, so wäre

$$a_1 = l + \varepsilon_1, \quad a_2 = l + \varepsilon_2, \quad a_3 = l + \varepsilon_3, \ldots, a_n = l + \varepsilon_n.$$

Indem der gegen die Strecke bewegte Beobachter die gleichen Werte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ erhalten hat, folgt

$$l' = ((l + \varepsilon_1)(l + \varepsilon_2)(l + \varepsilon_3) \ldots (l + \varepsilon_n))^{\frac{1}{n}},$$

oder

$$l' = (l^n + l^{n-1} \Sigma \varepsilon + l^{n-2} \Sigma \varepsilon_i \varepsilon_\varkappa + \ldots)^{\frac{1}{n}},$$

und da $\Sigma \varepsilon = 0$, also $\Sigma \varepsilon_i \varepsilon_\varkappa = -\frac{1}{2} \Sigma \varepsilon^2$ ist, so ergibt sich

$$l' = \left\{ l^n \left(1 - \frac{1}{2 l^2} \Sigma \varepsilon^2 + \ldots \right) \right\}^{\frac{1}{n}} = l \left(1 - \frac{1}{2 n l^2} \Sigma \varepsilon^2 + \ldots \right).$$

Nimmt man einen Mittelwert λ^2 aller $\frac{\varepsilon^2}{l^2}$, so wäre

$$\frac{l'}{l} = 1 - \frac{\lambda^2}{2}.$$

Diese Beziehung entspricht formell der Lorentz-Einsteinschen, welche ergibt

$$\frac{l'}{l} = 1 - \frac{1}{2} \frac{p^2}{V^2} + \ldots$$

Aber es ist schwer zu verstehen, wie λ^2 mit $\frac{p^2}{V^2}$ dem Sinne nach soll verglichen werden können.

Später hat Friedmann die Relativitätslehre auf das Gebiet der optischen Abbildung verlegt. Er findet, daß es im allgemeinen nicht möglich ist „die Funktion, die ein optisches Gesetz (das Gesetz der optischen Weglängen) ausdrückt, invariant zu erhalten, wenn eine Addition der Dioptern stattfindet, und zugleich eine punktähnliche Abbildung zu vollziehen; sondern die Invarianz des Naturgesetzes verlangt in diesem der Bewegung äquivalenten Falle eine Transformation des Bildes, die der Lorentz-Transformation analog ist und im Grenzfalle in den der Galilei-Transformation entsprechenden Ausdruck übergeht." Diese interessante Betrachtung ist für eine Diskussion noch zu neu.

Überhaupt hat sich neuerdings das Bestreben geltend gemacht, die Relativitätstheorie mehr und mehr in das Gebiet der Wirklichkeit einzuführen. Gibt es doch Lehren, denen zufolge die Relativität sogar in die Dinge selbst verlegt wird, so daß diese Dinge aus sich sich dem Einen so, dem Andern anders nach Gestalt, Temperatur usf. zeigen, je nach der Bewegung, die sie gegen den Betreffenden haben. Das wäre ein übertranszendentaler Idealismus, der weit über Kants transzendentalen Idealismus hinausginge; die Welt böte aus sich jedem eine besondere Welt, stellte sich aus sich selbst der Welt in unzähligen Welten dar.

Allein es darf nicht vergessen werden, daß selbst Minkowskis Relativitätsprinzip schon in der Mechanik allgemeine Bedeutung nur haben kann, sofern wir die Welt in ein Aggregat einzelner unabhängiger Individuen, also rein atomistisch-kinetisch auflösen dürfen, so daß in ihr nur Vektoren und Tensoren als wirkend angesehen werden können. Welchen Schwierigkeiten man schon in der Auflösung der elastischen Stoffe mittels der elastischen Spannungen begegnet, habe ich im I. Bande meiner Thermodynamik nachgewiesen, woselbst gezeigt ist, daß die üblichen Ausdrücke für die elastischen Spannungen kaum noch aufrechterhalten bleiben können, daß man vielmehr von einer simultanen Behandlung der Bewegungsgleichungen und der Gleichungen zur Ableitung der Ausdrücke für die Spannungen auf die Dauer nicht wird absehen dürfen. Dann aber verliert sich das Relativitätsprinzip ganz aus diesem Gebiete der zusammenhängenden Welt. Einstweilen tut man am besten diesem Prinzip noch da die Grenzen zu setzen, wo Minkowskis Theorie sie gefunden hat, d. h. wo noch mit Sicherheit Kräfte und Tensoren angegeben werden können, die die Vorgänge leiten, wie das im Grunde Minkowski auch ausgesprochen hat (S. 389 Axiom 3). Die Überspannung des Prinzips hat schon viel Verwirrung hervorgebracht.

Namen- und Sachregister.