Archiv der Mathematik und Physik

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN
VON

E. LAMPE
IN BERLIN.

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN.

ACHTER BAND.

MIT 58 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

Inhalt.

Rezensionen.

Vermischte Mitteilungen.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten.

Von F. Klein und K. Wieghardt in Göttingen.[1]

Disposition.

§ 1. Über Airysche Spannungsflächen ebener Kontinuen.

Das Folgende ist ein freies Referat über J. C. Maxwells Abhandlungen über Fachwerke, reziproke Figuren und Diagramme[2]) und zwar wesentlich über die unten an letzter Stelle genannte. Von der Darstellung bei Maxwell selbst wird sehr abgewichen, auch werden Resultate mitgeteilt, welche sich bei ihm noch nicht vorfinden und welche, soweit nichts Besonderes vermerkt ist, von F. Klein herrühren.

Die Veranlassung zu der vorliegenden Abhandlung bildet das Encyklopädiereferat von Herrn Henneberg: *Über die graphische Statik der starren Körper.*[3]) In diesem konnten die Maxwellschen Arbeiten naturgemäß nur kurze Erwähnung finden, während es doch wünschenswert schien, aus ihnen — die schwer lesbar sind — den wesentlichen

1) Nach einem von F. Klein in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft am 7. Juli 1903 gehaltenen Vortrage weiter ausgearbeitet von K. Wieghardt.

2) *The scientific papers of J. C. Maxwell:*

a) Bd. I, S. 514—525: On reciprocal figures and diagrams of forces. London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. Bd. 27 (4); S. 250 (1864).

b) Bd. I, S. 598—604: On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. Phil. Mag. Bd. 27 (4); S. 294 (1864).

c) Bd. II, S. 102—104: On reciprocal diagrams in space and their relation to Airys function of stress. Proc. London Math. Soc. Bd. 2.

d) Bd. II, S. 492—497: On Bow's method of drawing diagrams in graphical statics etc. Cambr. Phil. Soc. Proc. Bd. 2, S. 407 (1876).

e) Bd. II, S. 647—659: Diagrams. Encyclopaedia Britannica.

f) Bd. II, S. 161—207: *On reciprocal figures, frames and diagrams of forces.* Trans. Royal Soc. Edinb. Bd. 26, S. 1 (1872).

3) Encykl. d. math. Wiss. IV. 5.

Inhalt in etwas ausführlicherer Fassung herauszuziehen und zugleich ein wenig Ideen zu erörtern, die sich an die Maxwellschen organisch anschließen.

§ 1. Über Airysche Spannungsflächen ebener Kontinuen.

1. Wenn ein ebenes Kontinuum *Spannungen* mit den Komponenten P, Q, U (Fig. 1) überträgt, so verlangt bekanntlich das statische Gleichgewicht an der einzelnen Stelle das Bestehen der beiden Differentialgleichungen:

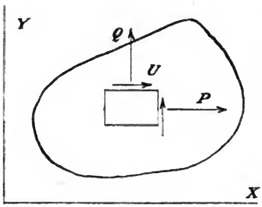


Fig. 1.

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

sofern äußere Kräfte nur am Rande des Kontinuums, nicht aber im Innern angreifen. Schon Airy[1]) hat bemerkt, daß diese Gleichungen nichts weiter aussagen, als daß P, Q, U sich in der durch die Gleichungen

$$(2)\qquad P = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad Q = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad U = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

gegebenen Weise durch die zweiten partiellen Differentialquotienten einer Funktion $F(xy)$ ausdrücken lassen; wir werden daher eine Funktion $F(xy)$ in diesem Zusammenhange eine *„Airysche Funktion“* oder *„Spannungsfunktion“* nennen. Es läßt sich von vornherein vermuten und wird sich auch zeigen, daß die Spannungsfunktion bei ebenen Spannungsproblemen eine zentrale Rolle spielt.

Um hierüber gleich ein wenig zu orientieren, wollen wir sofort mit Maxwell auch die längs eines Bogenstückes (ab) unseres Kontinuums *resultierenden Spannungen* mit der Spannungsfunktion in Verbindung bringen. Auf das Bogenelement ds (Fig. 2) kommt die Spannung mit den Komponenten:

$$(3)\qquad \begin{cases} X ds = \quad P dy - U dx = d\left[\dfrac{\partial F}{\partial y}\right], \\ Y ds = -Q dx + U dy = -d\left[\dfrac{\partial F}{d x}\right], \\ (yX - xY)\, ds = \quad d\left[x\dfrac{\partial F}{dx} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} - F\right], \end{cases}$$

1) Airy: On the strains in the interior of beams. Phil. Trans. 1863 (ersch. 1864) Bd. 153.

also auf das Bogenstück (ab) die resultierende Spannung:

$$(4)\qquad \begin{cases} X_r = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_b - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_a, \quad Y_r = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_b + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_a, \\ M_r = \left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{dy} - F\right)_b - \left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} - F\right)_a. \end{cases}$$

Dabei sind die *Vorzeichen* so gewählt, daß in dem von uns gewählten Koordinatensystem der Fig. 1 $X_r Y_r M_r$ die resultierende Spannung in ihrer Wirkung auf denjenigen Teil des Kontinuums darstellt, welcher an der *linken* Seite eines von a nach b auf dem Bogenstücke (ab) Fortschreitenden liegt.

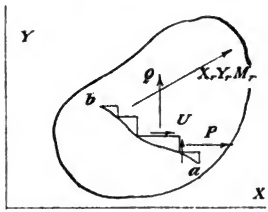


Fig. 2.

Ein weiteres Merkmal für die Wichtigkeit der Spannungsfunktion ist es, daß ihre Existenz unabhängig von den speziellen physikalischen Eigenschaften des Kontinuums ist, daß diese sich nun aber doch in der Art von F wiederspiegeln und zwar so, daß die physikalischen Eigenschaften des Kontinuums Eigenschaften der Spannungsfunktion bedingen und umgekehrt.

Es ist daher fast selbstverständlich, daß wir uns eine so wichtige Funktion durch Betrachtung der Fläche:

$$(5)\qquad z = F(xy)$$

geometrisch veranschaulichen; die Z-Achse stehe senkrecht auf der Ebene des Kontinuums. Wir nennen diese Fläche naturgemäß *„Airysche Fläche“* oder *„Spannungsfläche“*; daß sie vom Koordinatensystem unabhängig ist, ist leicht einzusehen, mag aber ausdrücklich erwähnt werden.

2. Betrachten wir nun einmal einige physikalisch verschiedenartige Kontinuen, bez. Spannungsflächen, welche verschiedenartige Eigenschaften haben!

Es handle sich erstens um eine *homogene, elastisch-isotrope Platte*, dann bestehen zwischen den Spannungskomponenten und den elastischen Deformationen („stress“ und „strain“) die bekannten Beziehungen:

$$(6)\qquad \begin{cases} P = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial v}{\partial y}, \\ Q = \lambda\frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v}{dy}, \\ U = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \end{cases}$$

wo λ, μ zwei dem Material des Kontinuums individuelle Konstante sind. Wenn man aus diesen Gleichungen durch Differentiation die Deformationsgrößen eliminiert und die Gleichungen (2) berücksichtigt, so bleibt für die Spannungsfunktion folgende Bedingung übrig:

$$\nabla\nabla F = 0, \tag{7}$$

wo in üblicher Weise:

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ist. *Soll also eine Fläche: $z = F(xy)$ Airysche Fläche einer homogenen elastisch-isotropen Platte sein, so muß sie jedenfalls die Differentialgleichung: $\nabla\nabla z = 0$ befriedigen.*[1])

Zweitens betrachten wir einen speziellen *elektrostatischen Spannungszustand* im Äther, indem wir in den Formeln auf Seite 147 in Maxwells „Electricity"[2]) die dort stehende Funktion Ψ dahin spezialisieren, daß sie nur von x und y, nicht von z abhängt. Wir haben dann in einer Ätherebene den Spannungszustand:

$$\left\{\begin{aligned} P &= \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2\right], \\ Q &= \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2\right], \\ U &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

wo Ψ eine der Bedingung $\nabla\Psi = 0$ genügende Funktion ist. Da $P + Q = 0$, so folgt mit Berücksichtigung der Gleichungen (2) sofort: *Soll eine Fläche $z = F(xy)$ als Spannungsfläche zu dem elektrostatischen Spannungszustand der Gleichungen (8) gehören, so muß sie jedenfalls die Differentialgleichung: $\nabla z = 0$ befriedigen;* (im übrigen hängen F und Ψ durch die Formel: $F = -\iint \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\,dx\,dy$ zusammen).

Endlich wollen wir untersuchen, welcher Art die Spannungsverteilung eines ebenen Kontinuums ist, wenn die zugehörige Spannungsfläche ein Stück einer *abwickelbaren Fläche* ist, von dem wir der Einfachheit halber voraussetzen, daß es einwertig und singularitätenfrei ist. Ist $z = F(xy)$ seine Gleichung und legen wir die XZ-Ebene durch eine seiner Erzeugenden, so sind natürlich längs dieser Erzeugenden $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$

1) Dieses Resultat scheint zuerst Herr Michell gefunden zu haben, J. H. Michell, *On the direct determination of stress in an elastic solid,* etc. Proc. Lond. Math. Soc. Bd. 31. (1900.)

2) J. C. Maxwell, A treatise of electricity and magnetism. 1. Bd. 2. Aufl. Oxford 1881.

konstant, also längs der X-Achse als der Projektion der Erzeugenden auf die XY-Ebene ist:

$$P = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \text{Funktion von } x,\ Q = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,\ U = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Sind also $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'$ die Werte der ersten Differentialquotienten für eine unendlich benachbarte Erzeugende, so kommt nach den Gleichungen (4) auf den durch beide Erzeugende definierten unendlich schmalen *erzeugenden Streifen* die konstante resultierende Längsspannung:

$$P dy = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)' - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right). \tag{9}$$

Einer abwickelbaren Fläche als Spannungsfläche entspricht also eine Spannungsverteilung in einer Art „Streifenfolge", nämlich in dem aus allen projizierten Streifen der Fläche bestehenden Kontinuum der XY-Ebene. Längs jeden Streifens herrscht eine bestimmte, im allgemeinen von Streifen zu Streifen veränderliche Längsspannung, während keinerlei Spannung von einem zum andern Streifen übertragen wird. Wir können uns das Spannungssystem dieser Streifenfolge mechanisch am besten durch nebeneinander liegende Fäden — eine *„Fadenfolge"* — realisiert denken, indem wir jeden Streifen durch einen mittleren Faden ersetzen, den wir so anspannen, daß seine Spannung gleich der Spannung des Streifens wird, den er ersetzt. (Fig. 3.)

3. Von besonderem Interesse ist nun die Betrachtung eines Kontinuums, welches aus einer Streifenfolge oder also einer entsprechenden Fadenfolge und einer homogenen elastisch-isotropen Platte in gewisser Weise zusammengesetzt ist, weil damit aufs engste die in den Anwendungen der Elastizitätslehre hervortretende Aufgabe zusammenhängt, die Spannungen zu finden, welche in einer solchen Platte unter dem Einflusse eines Gleichgewichtssystems von äußeren Kräften entstehen, die am Rande der Platte angreifen.

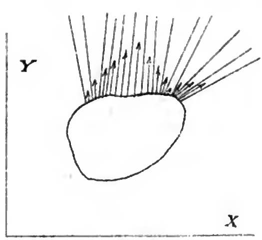


Fig. 3.

Den Rand der Platte, die wir, um Komplikationen zu vermeiden, vorab als *einfach-zusammenhängend* annehmen, denken wir uns dadurch gegeben, daß die Koordinaten seiner Punkte durch zwei Funktionen eines von

0 bis T laufenden Parameters t gegeben sind, und ganz analog geben wir die auf ein Element dt kommende äußere Kraft:

$$Xdt, \quad Ydt, \quad Mdt = (yX - xY)dt$$

durch drei Gleichungen:

$$X = \varphi(t), \quad Y = \psi(t), \quad M = \chi(t),$$

wo die Funktionen φ, ψ, χ der Einfachheit halber so beschaffen sein mögen, daß die Streifenfolge (11) den Teil der Ebene außerhalb der Platte nur einfach überdeckt. Da das Kräftesystem ein Gleichgewichtssystem sein soll, so gelten die Gleichungen:

$$(10) \qquad \int_0^T \varphi dt = 0, \quad \int_0^T \psi dt = 0, \quad \int_0^T \chi dt = 0.$$

Wenn wir nun unsere elastische Platte zu einem über die ganze Ebene erstreckten Kontinuum erweitern, indem wir nach außen hin die Streifenfolge (bez. Fadenfolge):

$$(11) \qquad -\psi(t) \cdot x + \varphi(t) \cdot y - \chi(t) = 0$$

daranheften, so wird die Lösung der oben näher bezeichneten Elastizitätsaufgabe wesentlich darauf hinauslaufen, solche Spannungsflächen dieses zusammengesetzten Kontinuums zu finden, bei denen die längs irgend eines Stückes t_0, t_1 des Plattenrandes sich ergebende Resultante von Streifenspannungen die Komponenten:

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} \psi dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} \chi dt$$

hat.

Zunächst konstruieren wir denjenigen Teil der gesuchten Spannungsfläche, welcher über der Streifenfolge steht. Er gehört einer abwickelbaren Fläche an, gestattet also die Parameterdarstellung:

$$(12) \quad z = \Phi(xyt) = A(t)x + B(t)y + C(t), \quad \Phi' = A'(t)x + B'(t)y + C'(t) = 0,$$

wo durch den oberen Strich Differentiation nach dem Parameter angedeutet ist und A, B, C drei noch unbekannte Funktionen desselben sind. Diese lassen sich sofort bestimmen. Es ist bei beliebigem Fortschreiten auf der Fläche:

$$dz = Adx + Bdy + \Phi' dt = Adx + Bdy,$$

also ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Wegen der Randbedingungen muß, wenn wir uns der Gleichungen (4) erinnern:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{t_0}^{t_1} = -\int_{t_0}^{t_1} \psi\, dt \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \varphi\, dt$$

sein. Also folgt:

$$A = -\int_0^t \psi\, dt + a, \quad B = \int_0^t \varphi\, dt + b,$$

wo a und b Integrationskonstante sind; da noch nach Gleichung (11)

$$A' : B' : C' = -\psi : \varphi : -\chi$$

sein muß, so ist analog:

$$C = -\int_0^t \chi\, dt + c,$$

wo c eine neue Integrationskonstante. *Die gesuchte abwickelbare Fläche ist also durch die Gleichungen:*

$$(13) \quad \begin{cases} z = -\int_0^t \psi\, dt \cdot x + \int_0^t \varphi\, dt \cdot y - \int_0^t \chi\, dt + ax + by + c, \\ -\psi \cdot x + \varphi \cdot y - \chi = 0 \end{cases}$$

gegeben. Der abwickelbare Teil der gesuchten Spannungsfläche ist also bis auf eine willkürlich hinzuzufügende Ebene — welche die Spannungen der Streifenfolge natürlich nicht beeinflußt — eindeutig festgelegt. Außerdem ist er in sich geschlossen. [Nach (10) verschwinden die drei von 0 bis T erstreckten Integrale in (13).]

Mit dem abwickelbaren Teil erfahren wir nun aber gleichzeitig schon etwas über den andern, noch fehlenden Teil der gesuchten Spannungsfläche, nämlich dessen Koordinaten und Tangentialebenen längs derjenigen Raumkurve, welche die abwickelbare Fläche mit dem über dem Plattenrande stehenden Vertikalzylinder gemein hat. Denn diese müssen gleich den entsprechenden Größen bei der abwickelbaren Fläche sein, falls wir hier die Singularität ausschließen wollen, daß im Rande der Platte selbst, also einem Elemente ohne Breitenausdehnung, *endliche* Spannungen auftreten. Besäße die gesamte Spannungsfläche an der erwähnten Raumkurve irgendwo einen Knick, so würde man für ein noch so kleines Bogenstückchen (ab), welches an der ent-

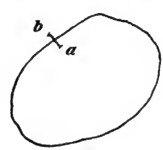


Fig. 4.

sprechenden Stelle den Plattenrand durchsetzt, nach den Gleichungen (4) eine endliche resultierende Spannung finden. Dies ist an sich nichts Absurdes, nur müßte dann die Platte von einem besonderen gespannten Faden umschlossen sein, was wir hier nicht annehmen wollen. Es bleibt uns also jetzt noch die Aufgabe zu lösen: *Eine Funktion $F(xy)$ zu finden, welche im Innern unserer Platte der Differentialgleichung: $\nabla\nabla F = 0$ genügt und auf ihrem Rande vorgeschriebene Werte F und Differentialquotienten nach der Normalen $\frac{\partial F}{\partial n}$ annimmt.* Die Lösung dieser Aufgabe kann nun nicht mehrdeutig sein, wie von Mathieu[1]) bewiesen worden ist. Damit sind wir nun zu dem Endresultate gelangt (F. Klein):

Um die Spannungsverteilung zu finden, welche in einer einfach-zusammenhängenden, homogenen, elastisch-isotropen Platte durch ein am Rande angreifendes Gleichgewichtssystem von Kräften erzeugt wird, konstruiere man zunächst diejenige — bis auf eine beliebig hinzuzufügende Ebene völlig bestimmte — abwickelbare Fläche, welche Spannungsfläche der durch das Kraftsystem definierten Streifenfolge ist, und sodann diejenige Fläche, welche sich über dem Plattenrande überall ohne Knick an diese abwickelbare Fläche anschließt und über dem Innern der Platte überall die Differentialgleichung: $\nabla\nabla z = 0$ befriedigt. Ist $z = F(xy)$ diese Fläche, so sind die gesuchten Spannungen selbst durch die Gleichungen:

$$P = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad Q = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad U = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

gegeben.

Ist die Platte *mehrfach-zusammenhängend* und sind an jedem ihrer Ränder die äußeren Kräfte im Gleichgewichte, so läßt sich die bezeichnete Elastizitätsaufgabe ganz analog durch eine Fläche: $\nabla\nabla z = 0$ lösen, welche an soviele in sich geschlossene abwickelbare Flächen ohne Knick anzuschließen ist, als die Platte Ränder besitzt. Da nun aber *jede* dieser abwickelbaren Flächen durch die äußeren Kräfte nur bis auf eine willkürliche Ebene bestimmt ist, so erhält man hier bei verschiedener Wahl dieser willkürlichen Ebenen im Allgemeinen *wesentlich verschiedene* Flächen: $\nabla\nabla z = 0$. Herr Michell, der übrigens, wie es scheint, als Erster den Zusammenhang der Differentialgleichung $\nabla\nabla F = 0$ mit der bezeichneten Elastizitätsaufgabe klar erkannt hat[2]), findet in der auf S. 4 zitierten Abhandlung die noch nötigen zusätzlichen Bedingungen für die Spannungsfläche, indem er den Umstand berücksichtigt, daß die durch die Spannungen verursachten Verrückungen der Punkte der Platte eindeutig sein müssen.

---

1) E. Mathieu: *Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\nabla\nabla u = 0$ etc.* in Liouvilles Journal 2 Ser., 14. Bd., Seite 378 (1869).

2) Michell, l. c.

Sind die äußeren Kräfte nicht an jedem einzelnen Rande, sondern nur für alle Ränder zusammengenommen im Gleichgewichte, so zeigt die Spannungsfläche noch eine andere, hinsichtlich der Spannungen unwesentliche Mehrdeutigkeit (affine Periodizität), auf deren Analogon bei diskontinuierlichen Spannungssystemen wir im § 2 ausführlicher eingehen.

4. Schöne und einfache Beispiele von Spannungsfunktionen $\nabla\nabla F = 0$ bieten die gewöhnlichen statischen *Balkenprobleme*.

Wir betrachten zuerst (Fig. 5.) einen einseitig eingemauerten, horizontalen, senkrecht zu unsrer Ebene unendlich schmalen Balken von endlicher Höhe h und der Länge l, welcher am freien Ende so belastet ist, daß die Resultante aller Kräfte eine vertikal nach unten gerichtete Kraft Π ist. Bei geeigneter Annahme über die Verteilung der Einzelkräfte über den Querschnitt hin ist:

$$F(xy) = \frac{\Pi}{2h^3}(l - x)(4y^3 - 3h^2 y)$$

die zugehörige Spannungsfunktion. Sie führt auf die in allen Lehrbüchern für dieses Problem angegebenen Spannungen. *Unter der Annahme also, daß der Balken als eine homogene, isotrope elastische Platte angesehen werden kann, ist die Angabe der Lehrbücher über die in seinem Innern eintretende Spannungsverteilung genau richtig.* (Nicht dasselbe gilt von der Berechnung der Deformation, welche der Balken unter dem Einflusse dieses Spannungssystemes erleidet; hier läßt die übliche Theorie Vernachlässigungen eintreten, die man übrigens im Anschluß an die Gleichungen (6) mit leichter Mühe auch vermeiden kann.

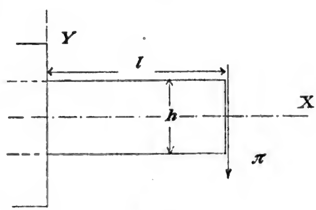


Fig. 5.

Wir können darauf hier natürlich nicht eingehen, wollen aber doch dafür plaidieren, daß man allgemein die Bestimmung der Spannungen und diejenige der Deformationen nach Möglichkeit trennen soll.) Von besonderem Interesse ist es, sich die zu unserm Beispiel gehörige Spannungsfläche zu konstruieren! Deren abwickelbarer Teil ist aber zu kompliziert, um ohne Modell gut geschildert werden zu können; um noch ein Beispiel zu haben, bei dem dies leicht möglich ist, betrachte man bei dem eingemauerten Balken der Fig. 5 den Fall der sog. „reinen Biegung“, welchem, zunächst über dem Innern des Balkens, die der Differentialgleichung $\nabla\nabla z = 0$ genügende Spannungsfläche:

$$z = \frac{2M}{h^3} \cdot y^3$$

entspricht, wo M das am freien Ende angreifende Biegungsmoment ist. Diese Fläche — ersichtlich ein Zylinder, dessen Erzeugende zur X-Achse parallel sind — bildet nun gleichzeitig auch den abwickelbaren Teil der Spannungsfläche des Balkens.

Ein weiteres Beispiel gibt Maxwell in der auf Seite 1 zuletzt zitierten Abhandlung. Der Balken erstrecke sich, mit der Höhe h, von $x = -l$ bis $x = +l$, er sei entlang seiner oberen Begrenzung mit der Last K pro Längeneinheit belastet, ferner habe er pro Längeneinheit selbst ein Gewicht k. Auf die Endflächen bei $x = \pm l$ wirkt im Mittel ein Druck Null; eine dementsprechende, möglichst einfache Verteilung positiver und negativer Drucke auf die einzelnen Elemente der Endflächen bleibt vorbehalten. Maxwell findet:

$$F(xy) = \frac{k+K}{2h^3}\left[(l^2 - x^2)(3hy^2 - 2y^3) + hy^4 - \frac{2y^5}{5} - h^3y^2\right]^{1)}$$

als Spannungsfunktion. Er gibt auch eine interessante Anordnung, um die hierdurch gegebene Spannungsverteilung in geschickter Weise experimentell zu realisieren.

Eben dieses Beispiel und eine ganze Anzahl weiterer Beispiele hat schon vorher Airy selbst in derjenigen Abhandlung behandelt und durch interessante Zeichnungen, nämlich der Spannungstrajektorien, erläutert, in welcher er, eben für diesen Zweck, die nach ihm benannte Spannungsfunktion einführt.[2]) Er setzt F immer als ein Polynom in x, y an und nimmt dabei so viele möglichst niedrige Glieder, daß er die Randbedingungen befriedigen kann. Hierbei hat er also merkwürdigerweise von dem Umstande ganz abgesehen, daß F im Balkeninnern eine von den elastischen Eigenschaften des Balkens abhängige partielle Differentialgleichung erfüllen muß (eben die Gleichung $\nabla\nabla F = 0$, wenn der Balken elastisch-isotrop ist). Dies moniert schon Maxwell in seiner Abhandlung, zeigt aber zugleich in dem eben besprochenen, von ihm näher untersuchten Falle, daß der solcherweise bei Airy vorliegende Fehler für die numerischen Werte der Spannungskomponenten nicht wesentlich in Betracht kommt.

1) Die Spannungskomponenten selbst sind hier, da die Schwere auf die Elemente des Balkeninnern als wirkend vorausgesetzt sind, von der Form anzunehmen:

$$P = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad Q = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - gy, \quad U = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}.$$

2) Zitat auf Seite 2.

(Fortsetzung folgt.)

Luigi Cremona.

Von Rudolf Sturm in Breslau.

Der großartigen Wirksamkeit Cremonas gerecht zu werden, ist nicht leicht; er ist nicht nur ein hochangesehener Mathematiker gewesen, sondern auch ein namhafter Staatsmann. Und seine politische Tätigkeit hat in den letzten 25 Jahren seines Lebens einen großen Raum eingenommen, sodaß sie auch in einem vorzugsweise dem Mathematiker gewidmeten Nachrufe nicht unbesprochen bleiben darf.

Es ist eigentlich wunderbar, daß die politische Tätigkeit für einen Mathematiker verlockend sein kann, wenn man vergleicht, wie der Mathematiker, uneingeengt durch andere, unvergängliche Wahrheiten schaffen kann, während die Gesetze, an denen der Politiker arbeitet, selbst wenn es mit dem größten Fleiße, eingehendem Studium der einschlägigen Verhältnisse und zweifellosem Sachverständnis geschieht, wie das bei Cremona der Fall war, der Ablehnung ausgesetzt, mindestens aber dem Wechsel unterworfen sind.

Wenn auch Cremonas schriftstellerische Tätigkeit in unserer Wissenschaft vor ungefähr 20 Jahren aufgehört hat, nachdem sie in jüngeren Jahren ungemein fruchtbar gewesen war; als Lehrer der Mathematik hat er noch lange gewirkt; und wenn heute Italien vor allen Ländern sich durch rege Arbeit auf dem Gebiete der Geometrie auszeichnet und sich aquilifera della geometria pura nennen darf, so ist dies Cremona und der durch ihn begründeten geometrischen Schule zu verdanken.

Mit Bedenken bin ich an den Versuch der Abfassung eines Nachrufs für Cremona gegangen; aber während der Arbeit wurde es mir mehr und mehr Bedürfnis, mich über ihn zu äußern, und schließlich schien es mir selbst, daß ich wohl einer der Berufensten dazu sei. Seit 1867 bin ich mit ihm befreundet, und das Band wurde noch enger, als in den siebziger Jahren Archer Hirst, der schon lange mit Cremona durch Freundschaft verbunden war, behufs gemeinsamer Arbeit mir näher trat und damals wiederholt bald hinter einander Cremona in Rom und mich in Darmstadt auf längere Zeit besuchte.

Als ich jetzt die Briefe Cremonas wiederum durchlas, fand ich auch die Klage über den Verlust dieses Freundes; vor allem aber trat mir aus ihnen entgegen, wie bescheiden Cremona von seinen eigenen Arbeiten sprach und wie anerkennend von denen anderer.

Ich habe das Erscheinen der Mehrzahl der Cremonaschen Schriften mit erlebt und erinnere mich der Wirkung, die sie hatten, und wie viel ich selbst aus ihnen gelernt habe; jetzt, wo ich sie von neuem und im Zusammenhange studiert habe, kam es mir deutlicher als bisher zum Bewußtsein, in wie umfangreicher Weise mein Denken Cremonasches Denken gewesen ist und ich mich seinen Schüler nennen kann.

Am 7. Dezember 1830 ist Cremona in Pavia als Sohn eines bescheidenen Kommunalbeamten geboren; er hatte einen jüngeren Bruder Tranquillo, der ein angesehener Maler wurde, aber schon mit 40 Jahren starb. Als 17jähriger Jüngling nahm er, tapfer und geschätzt von den Führern, an den Kämpfen gegen Österreich in Venetien teil; freilich gingen die bestandenen Strapazen über seine jugendlichen Kräfte und die Folge war ein schwerer Typhus. Und noch schmerzlicher war, daß ihm während dieser Zeit die Mutter entrissen wurde.

Nun kehrte er nach der Vaterstadt zurück, um an deren Universität unter Bordoni und Brioschi zu studieren. Unter diesem war er einige Zeit Repetitor für angewandte Mathematik. Dann wurde er Gymnasiallehrer in Pavia, Cremona und Mailand. Diese Tätigkeit veranlaßte ihn, Baltzers Elemente der Mathematik in italienischer Übersetzung herauszugeben.

Während der Kämpfe in Venetien hatte er sich mit Benedetto Cairoli und den Brüdern Ferrari befreundet; letztere sprachen oft mit Enthusiasmus von ihrer Schwester Elisa und lasen Cremona ihre Briefe vor. So lernte er sie lieben, aber erst später persönlich kennen. Er verheiratete sich jung, 1854, mit ihr, der schon erfahrenen Leiterin eines Kinderasyls in Genua. Die ersten Jahre der Ehe waren nicht leicht: Zeugnis sind die von seiner Witwe in der Bibliothek gefundenen Abschriften und Auszüge aus Büchern, die er nicht hatte kaufen können. Auch durch andere Mitteilungen der zweiten Frau habe ich von dieser Zeit erfahren, aber am meisten aus der kleinen Schrift: In memoriam, welche nach dem Tode der ersten Frau ihr von einer Freundin des Hauses gewidmet wurde, kennen gelernt, wie sehr Frau Elisa bemüht gewesen ist, diese Jahre der Knappheit ihrem Gatten ertragen zu helfen und ihm die Sorgen des Hauses und der Erziehung der Kinder (eines Sohnes und zweier Töchter) abzunehmen, damit er sich ungestört seiner Wissenschaft widmen könnte; denn sie ahnte seine Zukunft.

Es ist Cremona vergönnt gewesen, seine Frau aus engen Verhältnissen auf die Höhen des Lebens hinaufzuführen, als Lohn eines Lebens der Entsagung den Traum ihrer Jugend zu erfüllen: er, schon damals ein berühmter Mann, zog mit ihr in das befreite Rom. Nach mehrjähriger Krankheit ist sie dort, 1882, gestorben. Die treue Gefährtin von 28 Lebensjahren, die kluge und liebreiche Erzieherin meiner Kinder, so schrieb mir Cremona nach dem Tode.

Nach Porto Maurizio an der westlichen Riviera, woher sie stammte, ist er zur Erholung oft gegangen; in der letzten Zeit seines Lebens hatte er dort eine eigene Besitzung, ein hochgelegenes Haus mit schönem Blicke hinaus ins ligurische Meer: il palazzo Cremona, wie es mir bezeichnet wurde. In früheren Jahren ist er gern mit der Frau an die obere Adda gegangen.

Die wissenschaftlichen Arbeiten, welche er als Gymnasiallehrer verfaßte, verschafften ihm 1860 die Berufung auf einen der neuen Lehrstühle der höheren Geometrie, welche die Regierung des geeinigten Italiens geschaffen, die als eines ihrer ersten Geschäfte die Verbesserung der Universitäten vornahm: an der altberühmten Universität Bologna. Von da siedelte er 1866 an das durch Brioschi organisierte Istituto tecnico superiore in Mailand über, um dann 1873 die Direktion der Scuola d' applicazione per gli ingegneri in Rom zu übernehmen. Damit erwuchs ihm eine große administrative Arbeit, die Organisation dieser Schule und der Bau eines Gebäudes für sie.

Ihm war es eine Herzenssache, den technischen Unterricht nicht in Routine ausarten zu lassen, die angewandten Wissenschaften in Berührung mit den reinen Wissenschaften zu erhalten; und um der Ingenieurwissenschaft den wohltätigen Einfluß der Universität zu verschaffen und zu bewahren, drang er, als Senator, auf die Einverleibung der Scuole d'applicazione als polytechnische Fakultäten in die Universitäten. Er hat es aber nicht erreicht.

Als im Jahre 1898 der Ingenieurschule in Rom der Verlust ihres Direktors drohte, hat eine römische Zeitung diesen Direktor, den seine Schüler ungern verlieren, geschildert: ein Direktor, welcher nicht scherzt, der eine unbeugsame Disziplin und einen unausgesetzten Fleiß fordert, der aber sa farsi adorare.

Die Studenten sagten von ihm: Non si vede mai e si sente sempre e dapertutto. Sie hatten Ehrfurcht vor ihm; die ruhige Festigkeit, mit väterlicher Milde gepaart, imponierte ihnen und gewann sie; an seiner Schule wurden die Vorlesungen niemals durch Studentenunruhen unterbrochen; das war sein Stolz. Er hat aber auch nicht unterlassen, seine Schüler zu loben.

Seine Berufung in den Senat des Königreichs erfolgte 1879 unter dem Ministerium Depretis; schon vorher wurde er in den Consiglio superiore dell' Istruzione berufen. In welche Körperschaft er auch eintrat, immer gelangte er binnen kurzem in maßgebende Stellungen. Seine gewinnende Persönlichkeit, sein feiner Takt nahmen für ihn ein, man erkannte bald, daß man es mit einem geschäftsgewandten, stets sachlich urteilenden Manne zu tun habe. „Cremona, Sie haben keinen Feind in Italien“, so hat ihn König Humbert gekennzeichnet.

In den Akademien, denen er als wirkliches Mitglied angehörte, wurde er Sekretär; im Consiglio hat er oft die Geschäfte geleitet; im Senate gehörte er insbesondere bei Unterrichtsgesetzen der vorberatenden Kommission (aber auch der Finanzkommission) an und war Berichterstatter. Er sprach stets vor vollem Saale, und obwohl er kein brillanter Redner war, so wirkten seine Reden, die von ungewöhnlich klarem, scharfem Urteil zeugten, wenigstens im Senate, überzeugend. Er stieg in diesem zum Vizepräsidenten auf und hat von 1898 ab den erkrankten Präsidenten Farini über zwei Jahre in den Präsidialgeschäften vertreten. Mit Ruhe und Würde leitete er die Verhandlungen; der schöne Kopf mit den klugen Augen ist so dekorativ auf dem Präsidentenstuhle, sagte einer seiner Kollegen im Senate.

Er war auch Vorsitzender der Kommission für die Arbeiten zur Regulierung des Tiber und ist in verschiedene Vertrauensstellungen berufen worden. Man staunt über seine Vielseitigkeit.

Im Jahre 1898 war er Minister in einem rekonstruierten Ministerium Rudini. „Niemand wundert sich, schrieb jene Zeitung, daß er Minister ist; vielmehr muß man sich wundern, daß er, der so oft in Frage gekommen, es nicht schon längst gewesen ist. Nunmehr wird er seine bewundernswerte Organisationskraft in jenes etwas anarchische Institut tragen, welches man Unterrichtsministerium nennt, und seinem Lande, dem er schon in jeder Weise und immer mit Ehren gedient hat, einen großen Dienst leisten.“

Leider war es nur auf kurze Zeit; Rudini fiel bald von neuem. Für Cremona, dessen Gesundheit nicht mehr fest war, war es schon zu spät; es hätte früher sein sollen; er ist ja auch wiederholt aufgefordert worden, insbesondere von dem ihm befreundeten Sella schon im Jahre 1881; aber immer waren die Verhältnisse gegen die Annahme eines Portefeuilles.

In den achtziger Jahren hat die Neuordnung der Universitätsverhältnisse den Senat wiederholt beschäftigt, wenn auch vielfach ohne Erfolg; für die Session 1886/87 hat mir Cremona die Möglichkeit verschafft, mich etwas genauer über seine Tätigkeit zu orientieren. Er hat mir die Sammlung der Reden gesandt, die er bei Gelegenheit der Beratung eines solchen Gesetzes über den höheren Unterricht gehalten hat; am Schluß bringt diese Sammlung den Wortlaut des Gesetzes in der Form, welche der Senat gebilligt hat.

Cremona stand, als Berichterstatter des Ufficio centrale, in welchem in gemeinsamer Beratung mit dem Minister Coppino der Entwurf festgestellt worden war, im Mittelpunkte der ganzen Verhandlung; er hielt die große einleitende Rede in der Generaldebatte, hatte dann wiederum jeden einzelnen Artikel zu erläutern und zu verteidigen und die durch Annahme von Amendements notwendig gewordenen Änderungen vorzutragen.

Es handelte sich um die schon erwähnte Einverleibung der Scuole d'applicazione als polytechnische Fakultäten in die Universitäten, um die Regulierung der Gehälter der Professoren, um die Einführung der den Professoren zufließenden Kollegienhonorare, die Schaffung der mittleren Stufe der Professori aggiunti (fest angestellt wie unsere Extraordinarien, aber mit mehr Rechten als diese, während die italienischen außerordentlichen Professoren nicht fest angestellt sind), um die Aufnahme der Institution der Privatdozenten, deren Zuziehung zu den Prüfungen, im Interesse der Studienfreiheit, Cremona befürwortet.

Er trat sehr ein für die Einrichtung von Kommissionen, welche aus den Wahlen sämtlicher betreffenden Fakultäten der verschiedenen Universitäten hervorgehen und denen die Statutenberatung oder die Entscheidung über die Zulassung eines Privatdozenten oder die Vorschläge über die Besetzung einer Professur obliegen. Bei einer ordentlichen Professur sollen die betreffende Fakultät selbst und zwei solche Kommissionen beraten; dem Minister werden zwei Namen genannt, aus denen er, unter Anhörung des Consiglio, einen auszuwählen hat. Cremona erstrebte, sieht man, eine erhebliche Autonomie und Mitarbeit der Universitäten im Berufungsgeschäfte.

Vorbilder sind ihm vielfach die deutschen Verhältnisse, und Cremona erwähnt sie rühmend. Er war ein warmer Freund Deutschlands, wie mir manche Stellen seiner Briefe bewiesen haben.

Einige Monate vor seinem Tode wurde er von unserm Kaiser durch Verleihung des preußischen Ordens pour le mérite, der wenigen Gelehrten zu teil wird, ausgezeichnet. Wie hoch er diese ihm aus Deutschland zugekommene Ehrenbezeugung geschätzt hat, weiß ich aus seiner Antwort auf meinen Glückwunsch. Er besaß auch den entsprechenden italienischen Orden (Ordine civile di Savoia) und war der Vizepräsident des Ordenskapitels.

Unserem Volke ist er noch näher getreten, als er 1888 aus ihm seine zweite Frau (Anna Mahner-Müller aus Braunschweig) nahm und sich in der deutschen Botschaftskapelle trauen ließ. Ich gedenke dankbar der schönen Tage, wo ich im Frühjahr 1898 seine Gastfreundschaft in der Amtswohnung neben der Kirche San Pietro in Vincoli und mit der Aussicht auf die Gärten des Titus genoß, Frau

Cremona kennen lernte und durch sie, in bequemer Unterhaltung in deutscher Sprache, so manches aus dem Leben des verehrten Freundes erfuhr.[1]) Erst nach so langer Zeit bin ich dazu gekommen, ihm den Besuch zu erwidern, mit dem er mich 1876, von seiner ersten Reise nach England zurückkehrend, in Darmstadt erfreute. Die günstige Lage dieser Stadt machte es möglich, mehrere Mathematiker von den benachbarten Hochschulen, ihm zu Ehren, zusammenzurufen.

Frau Anna Cremona, die in glücklicher Ehe mit ihm lebte, wurde die treue Pflegerin seines Alters, das leider nicht frei von Krankheiten war. 1898 traf ich ihn, eben von längerem Kranksein genesen, und im März 1903 schrieb er: Ich bin seit vielen Monaten krank und oft genötigt, zu Bett zu liegen. Reye glaubte mir, vom historischen Kongreß in Rom her, günstigere Nachrichten zusenden zu können; aber es war Täuschung. Nicht lange darauf, am 10. Juni, ist Cremona entschlafen.

Mit ihm ist ein reichbegabter guter Mann dahin gegangen. Seine hohe Intelligenz wurde durch keinen entstellenden Charakterfehler verdunkelt, alles war an ihm harmonisch. Er war eine sanfte und doch willensstarke Natur; er setzte durch, was er erreichen wollte, durch seine Liebenswürdigkeit und Höflichkeit, durch sein vornehmes Wesen. Er schrieb mir 1870: Nationalen Haß verstehe ich nicht. Das entsprach seiner harmonischen Natur. Doppelt schwer hat er es deshalb einmal im Auslande empfunden, als er verunglimpfende Äußerungen über sein eigenes Land anhören mußte. Viele Ehrungen sind ihm erwiesen worden, zahlreiche Akademien haben ihn zu ihrem Mitgliede gewählt; er blieb der einfache bescheidene Mann.

Cremonas schriftstellerische Tätigkeit in der Mathematik beginnt 1855. Anknüpfend an eine Untersuchung seines Lehrers Bordoni, behandelt er eine Verallgemeinerung des Dupinschen Begriffs der konjugierten Tangenten in einem Punkte einer Fläche; er nimmt dann 1861 dasselbe Problem, noch mehr verallgemeinert, ein zweites Mal vor.[2])

Von 1858 ab drängt sich dann in einem Zeitraume von 15—20 Jahren eine Fülle von schöpferischen Arbeiten zusammen, durch welche er unser geometrisches Wissen erheblich bereichert hat. Es genügt schon, seine Untersuchungen über die kubischen Raumkurven und die Oberflächen 3. Ordnung, über die Regelflächen 3. und 4. Grades, seine

1) Diese Mitteilungen sind jetzt noch durch einen umfangreichen Brief vervollständigt worden.

2) Annali di Scienze matem. e fis. Bd. 6 S 382; Annali di Matematica (Serie) I Bd. 3 S. 325.

grundlegenden Arbeiten über die eindeutigen Transformationen aufzuzählen; am Ende der fünfziger Jahre waren das wenig oder gar nicht bekannte Gebiete der Geometrie; vorzugsweise durch ihn sind wir mit ihnen vertraut geworden. Zu einer glücklichen Zeit begann er seine Produktion; ein reifes Feld von neuen Wissensschätzen stand vor ihm, und reich war die Ernte, die er eingebracht hat.

1858, in demselben Jahre, in dem auch Schröter seine Abhandlung über die *kubische Raumkurve* als in sich duales Gebilde schrieb, wandte Cremona sich dieser interessanten Kurve zu. Viel wußte man damals noch nicht von ihr; Möbius, Chasles, Seydewitz hatten sich mit ihr beschäftigt; Cremona kannte zunächst nur Chasles' ohne Beweis mitgeteilte Sätze. Er begann, seiner mathematischen Erziehung entsprechend, mit einer analytischen Behandlung der Kurve[1]), die überaus einfache (gleichzeitig auch von Joachimsthal gefundene) parametrische Darstellung benutzend, bei welcher ein Schmiegungstetraeder der Kurve als Koordinatentetraeder zugrunde gelegt ist, und beweist zuerst die Chaslesschen Sätze (Ordnung und Klasse der Tangentenfläche, Doppelsekante aus einem Punkte, Nullsystem), tilgt jedoch nicht gleich den Chaslesschen Fehler über den Ort der Spitzen der Kegel 2. Grades durch 6 Punkte.

Er wendet sich dann den schon Möbius 1827 bekannten Kegelschnitten zu, in denen die abwickelbare Fläche der Tangenten von den Schmiegungsebenen geschnitten wird; vor allem gelangt er durch sie zu dem Begriffe der konjugierten Elemente — den gleichzeitig auch Staudt im 3. Hefte der Beiträge gewonnen hat — und zwar zuerst der konjugierten Ebenen. Er erkennt den Ort der Pole einer Ebene in bezug auf jene Kegelschnitte als Kegelschnitt und bezeichnet seine Ebene als jener Ebene konjugiert, wobei sich reziprokes Verhalten der beiden Ebenen herausstellt. Zwei konjugierte Ebenen schneiden sich in einer Schmiegungsachse, Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen, und sind harmonisch zu diesen Ebenen. Dies führt durch Dualisierung zu den konjugierten Punkten. Noch eingehender werden diese konjugierten Elemente in einem rein geometrischen Aufsatze[2]) von 1861 behandelt; die Sonne der reinen Geometrie war seinen Augen aufgegangen. „Ihnen gebührt meine Erkenntlichkeit; Ihren Aperçu und Ihren Traité de Géométrie supérieure werde ich immer segnen", schrieb er an Chasles. Bald lernte er aber auch die deutschen Geometer kennen.

In derselben Abhandlung wird dann auch der Begriff der assoziierten Geraden gewonnen, zweier Geraden, welche die Kurve treffen und je

1) Annali di Matem. I Bd. 1 S. 164, 278; Bd. 2 S. 19, 201.

2) Nouv. Annales de Mathém. II Bd. 1 S. 287, 366, 436.

in der zugehörigen Schmiegungsebene liegen (jetzt Schmiegungsstrahlen genannt), und in der Beziehung zu einander stehen, daß jede die Tangente des Stützpunktes der andern auf die Kurve schneidet. Alle Doppelsekanten, welche die eine treffen und eine Regelschar bilden, begegnen auch der anderen, und die Schnitte mit den beiden Geraden sind zu denen mit der Kurve harmonisch. Wird die eine der assoziierten Geraden unendlich fern, so wird die andere ein Durchmesser, welcher dann eine Regelschar von Sehnen halbiert.

Die unendlich vielen Durchmesser, die bei derjenigen kubischen Raumkurve, welche die unendlich ferne Ebene oskuliert, (windschiefe Parabel) möglich sind, findet er schon in einem älteren Aufsatze[1]), der auch dadurch bemerkenswert ist, daß Cremona, 1860, in ihm auf Graßmanns Ausdehnungslehre die Aufmerksamkeit lenkt und Graßmannsche Kurvenerzeugungen nach Graßmannschen Methoden behandelt.

Aus den Jahren 1860 und 1861 stammen zwei andere Abhandlungen über die kubische Raumkurve.[2]) In der ersteren werden projektive Erzeugungen der Kurve und durch sie hervorgerufene Projektivitäten behandelt, das Verhalten der beiden Regelscharen eines einfachen Hyperboloides, auf dem die Kurve verläuft, studiert, wobei freilich der Irrtum unterläuft, daß sie durch die Kurve projektiv gemacht werden. Es wird auf einer solchen Fläche durch 5 Punkte eine kubische Raumkurve konstruiert. Die Durchmesser kommen auch hier vor, und die 4 Arten der Kurve werden hinsichtlich ihrer ins Unendliche verlaufenden Äste beschrieben.

In der zweiten Abhandlung handelt es sich um die Ermittelung der kubischen Raumkurven, welche 6 (doppelte) Bedingungen erfüllen und zwar: durch 4, 3, 2, 1, 0 gegebene Punkte zu gehen und 2, 3, 4, 5, 6, gegebene Geraden zweimal zu treffen.

Abgesehen von kleineren Arbeiten[3]), ist er später noch dreimal auf die kubische Raumkurve zurückgekommen.

1863 untersucht er die Anzahl und die Realität der Rotationshyperboloide, welche durch eine kubische Raumkurve gehen.[4])

Der windschiefen Parabel ist eine besondere Abhandlung gewidmet.[5]) Er benutzt die Kollineation, welche in zwei Schmiegungsebenen der kubischen Raumkurve durch die Schmiegungsachsen entsteht, zur Her-

1) Ebenda I Bd. 19 S. 364.

2) Journal f. Mathem. Bd. 58 S. 138, Bd. 60 S. 188.

3) Giorn. d. Mat. Bd. 1 S. 278, Bd. 2 S. 112 (oder Annali di Mat. I Bd. 5 S. 227).

4) Journ. f. Math. Bd. 63 S. 141.

5) Memorie dell' Accad. di Bologna II Bd. 3. S. 387; Giornale di Matem. Bd. 2 S. 202.

stellung von Regelflächen 4. Grades, welche durch Schmiegungsachsen entstehen, und bestimmt für die windschiefe Parabel z. B. folgende Örter: die Regelfläche der Schmiegungsachsen, welche auf einer Schmiegungsebene senkrecht stehen, diejenige der Schnittlinien zweier zu einander normalen Schmiegungsebenen, die kubische Raumkurve der Brennpunkte der Parabeln in den Schmiegungsebenen. Die Doppelkurve der zweiten Regelfläche liegt auf der ersten, und durch jeden ihrer Punkte gehen die Leitlinien von zwei jener Parabeln. Die windschiefe Parabel besitzt im allgemeinen keinen Punkt, durch den drei zu einander rechtwinklige Schmiegungsebenen gehen (Orthogonalpunkt); besitzt sie aber einen, dann hat sie sofort unendlich viele, welche in gerader Linie liegen.

Daß die allgemeine kubische Raumkurve 2 Orthogonalpunkte besitzt, ist erst 1885 in einer Breslauer Dissertation (Krüger) erkannt worden.

Wesentlich später, 1879, fällt eine Abhandlung[1]) über die Kurven und Flächen, welche durch die Ecken von Polyedern gehen, die durch Schmiegungsebenen einer kubischen Raumkurve gebildet werden. Es werden, analytisch, mit Hilfe der erwähnten parametrischen Darstellung, folgende Sätze gewonnen. Jede Fläche n^{ter} Ordnung, die einem solchen $(n+2)$-Flache umgeschrieben ist, ist ∞^2 umgeschrieben; unter den F^n, die einem gegebenen $(n+2)$-Flache von Schmiegungsebenen umgeschrieben sind, gibt es ∞^n, die noch einem zweiten gegebenen umgeschrieben sind, und eine, welche auch noch einem dritten umgeschrieben ist. Die Ecken von zwei $(n+2)$-Flachen von Schmiegungsebenen liegen stets auf einer Raumkurve von der Ordnung $\frac{1}{2}n(n+1)$, durch welche alle den beiden Polyedern umgeschriebenen F^n gehen.

Daß die Ecken von zwei Tetraedern, deren Ebenen eine kubische Raumkurve oskulieren, auf einer zweiten kubischen Raumkurve liegen, war schon Staudt bekannt und ist dann nochmals von Hurwitz gefunden worden. —

Gleichzeitig mit den ersten Arbeiten über die kubischen Raumkurven erschien (1858) eine analytische Studie über *die Flächenschar 2. Klasse*[2]), eine ersichtliche Frucht des Studiums der „Geometrie des Raums" von Plücker. Unter der Voraussetzung, daß das gemeinsame Polartetraeder reell sei, wird untersucht, wie sich auf der Mittelpunktsgerade die Mittelpunkte der allgemeinen Flächen der Schar in die durch die Mittelpunkte der 4 Kegelschnitte und den unendlich fernen Punkt gebildeten Strecken verteilen.

1) Rendiconti dell' Istituto Lombardo II Bd. 12 S. 347.

2) Annali di Matem. I Bd. 2 S. 65.

An diesen Aufsatz schließen sich, angeregt durch Chasles' Sätze über konfokale ebene und sphärische Kurven und über konfokale Flächen 2. Grades im Aperçu und in den Comptes rendus von 1860, vier größtenteils analytische Abhandlungen an. In der ersten[1]) werden 4 Sätze von Chasles bewiesen von folgender Art: Wenn A, A' zwei konfokale Flächen 2. Grades sind und U eine beliebige Fläche dieses Grades, B und B' aber zwei weitere Flächen 2. Grades, die den abwickelbaren Flächen UA, UA' eingeschrieben sind, so ist der abwickelbaren Fläche BB' sowohl eine mit A und A', als eine mit U konfokale Fläche eingeschrieben.

Die zweite Abhandlung[2]) hat den Zweck, *die Theorie der konfokalen Kurven und Flächen 2. Grades dual umzugestalten*, und bringt eine Fülle von Sätzen, die meines Wissens wenig bekannt geworden sind. Es genüge, die räumliche Betrachtung zu skizzieren. Einer Fläche 2. Grades F^2 wird in bezug auf einen Punkt O ein Büschel „konjunkter" (congiunte) Flächen 2. Grades zugeordnet, indem als zweite Konstituente der Kegel aus O nach der absoluten Kurve (dem unendlich fernen Kugelkreis) genommen wird. Es werden zunächst jene vier Chaslesschen Sätze dualisiert und vielfach spezialisiert. Dann wird als Punkt O der Mittelpunkt der Fläche F^2 genommen. Die drei anderen Kegel des Büschels sind den (gemeinsamen) Achsen parallele Zylinder, die drei konjunkten Zylinder der Fläche. Die Sätze über die Krümmungslinien führen, dualisiert, zu neuen Begriffen. „Polonormale" ist der Schnitt der Tangentialebene M von F^2 im Punkte m mit der Ebene, welche auf der Gerade Om im Zentrum O senkrecht steht; diese Polonormale wird von zwei Polonormalen, die zu benachbarten Tangentialebenen M', M'' gehören, getroffen; die Tangenten MM', MM'' werden die Hauptcharakteristiken von M genannt. Diese 3 Geraden in M bilden das Polardreieck für den von M ausgeschnittenen Kegelschnitt-Büschel.

Jede Ebene berührt drei reelle Flächen des Büschels; die Berührungspunkte werden aus dem Mittelpunkte durch 3 rechtwinklige Strahlen projiziert, und ihre Verbindungslinien sind für jede der 3 Flächen die beiden Hauptcharakteristiken und die Polonormale. Cremona betrachtet — vor Plückers Liniengeometrie — den Komplex der Polonormalen des Büschels, indem er in jeder Ebene den umhüllten Kegelschnitt, aus jedem Punkte den Kegel 2. Grades konstruiert.

Für zwei konjunkte Flächen 2. Grades ist die Differenz der reziproken Halbmesser-Quadrate auf demselben Durchmesser konstant.

1) Ebenda Bd. 3 S. 241.

2) Ebenda Bd. 3 S. 257.

Auch die entsprechende Eigenschaft zu Ivorys korrespondierenden Punkten auf konfokalen Flächen wird untersucht.

In der dritten Abhandlung[1]) werden die zu Chasles' vier Sätzen analogen für konfokale oder vielmehr dual, für konzyklische sphärische Kegelschnitte bewiesen.

Und in der vierten Abhandlung[2]) über die Fläche gleichen Abfalls, die einem gegebenen Kegelschnitte umgeschrieben ist, hat er es mit einem Spezialfall der einer Flächenschar 2. Klasse umgeschriebenen abwickelbaren Fläche 4. Klasse zu tun: zwei Kegelschnitte der Schar sind der gegebene und ein die absolute Kurve doppelt berührender. —

Die Abhandlung über Kurven auf dem einmanteligen Hyperboloide[3]), in welcher die beiden Raumkurven $(2m+1)^{\text{ter}}$ und $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung besprochen werden, von denen jene den Geraden der einen Regelschar in $m+1$, denen der andern in m Punkten, diese bezw. in m und 1 Punkte begegnet, führt ihn zu *der Raumkurve 4. Ordnung 2. Art* (Species), welche 1850 bei Salmon auftritt und von neuem von Steiner gefunden wurde, während die duale abwickelbare Fläche 4. Klasse schon 1847 bei Cayley vorkommt.

Ihr wird ein eingehendes rein geometrisches Studium gewidmet.[4]) Erörtert werden: die Unicursalität der Kurve, ihre Entstehung als partieller Schnitt und durch projektive Gebilde, Regelflächen, zu denen sie führt, die Konstruktion durch 7 Punkte auf gegebenem Hyperboloid, oder so, daß eine Gerade durch einen der Punkte noch zweimal getroffen wird, die Zahl der Schnittpunkte zweier solcher Kurven auf dem nämlichen Hyperboloide, die Fläche 2., bezw. 3. Klasse der Ebenen, welche sie in vier äquianharmonischen oder in vier harmonischen Punkten schneiden. Die abwickelbare Fläche der Tangenten ist 6. Ordnung, 6. Klasse. Der ebene Schnitt derselben, der Projektionskegel der Kurve aus einem Punkt und die Gebilde, zu denen sie nach Cayleys fundamentalem Aufsatze führen und welche durchweg die Gradzahlen 4 oder 6 haben, werden untersucht, insbesondere das Verhalten der Doppelkurve 6. Ordnung auf der Tangentenfläche zur Kurve selbst. Durch jeden Punkt der Kurve gehen drei Schmiegungsebenen, welche sie in anderen Punkten oskulieren; deren Verbindungsebene, die einen Kegel 2. Grades umhüllt, geht durch den Punkt; so entsteht auf der Kurve eine Korrespondenz [1,3], welche zu einer Regelfläche 12. Grades der Verbindungslinien entsprechender Punkte führt.

1) Nouv. Annales de Mathém. I Bd. 19 S. 269 (1860).

2) Ebenda II Bd. 4 S. 271 (1865).

3) Comptes rendus 1861; Annali d. Matem. I Bd. 4 S. 22.

4) Annali di Matem. I Bd. 4 S. 71; Bologna Rendiconti 1861 S. 38.

Etwas später hat Cremona einen bemerkenswerten Spezialfall dieser Kurve behandelt.[1]) Er ist durch das Vorhandensein von zwei dreipunktig berührenden Tangenten charakterisiert; das diesen zugehörige Schmiegungstetraeder führt zu einer ähnlichen parametrischen Darstellung, wie sie von ihm bei der allgemeinen kubischen Raumkurve benutzt wurde. Auf dieser Kurve 4. Ordnung besteht eine Involution, derartig, daß von zwei gepaarten Punkten die Schmiegungsebene eines jeden durch den andern geht. Die Verbindungslinien gepaarter Punkte erzeugen eine kubische Regelfläche, auf welcher die Kurve Haupttangentenkurve ist; d. h. eine solche, deren Tangenten alle die Fläche dreipunktig berühren. Die Kurve ist nur 4. Klasse und in sich dual. Die vier Schmiegungsebenen aus einem Punkte des Raums oskulieren in vier Punkten, welche in einer Ebene liegen, die überdies durch den Punkt geht; so daß, wie bei der kubischen Raumkurve, ein Nullsystem entsteht.

Wir können hieran den Aufsatz über die abwickelbare Fläche 5. Ordnung[2]) anschließen. Dieselbe gehört zur Raumkurve 4. Ordnung (1. Art) mit einem Rückkehrpunkte und ist 4. Klasse; wir haben es auch mit einer in sich dualen Figur zu tun. Neben dem Rückkehrpunkte a ist der Punkt b mit einer vierpunktig tangierenden Schmiegungsebene ausgezeichnet; ihnen gehöre das Schmiegungstetraeder $abcd$ zu, wo c der Schnittpunkt der Schmiegungsebene von a mit der Tangente von b ist und d sich umgekehrt ergibt.

Jede Tangente der Kurve oder Erzeugende der Fläche trifft eine andere; wodurch eine involutorische Paarung der Punkte, Tangenten und Schmiegungsebenen entsteht. Die Verbindungsebenen gepaarter Tangenten umhüllen einen Kegel 2. Grades mit der Spitze c, ihre Schnittpunkte erzeugen einen Kegelschnitt in der Ebene abd, die Doppelkurve der abwickelbaren Fläche. Das führt zu einer involutorischen Homologie (c, abd), durch welche unsere Figur in sich selbst übergeht. Der Flächenbüschel 2. Ordnung durch die Raumkurve, die Flächenschar 2. Klasse, welche der abwickelbaren Fläche eingeschrieben ist, sind derartig projektiv, daß zwei entsprechende Flächen durch dieselben zwei gepaarten Tangenten gehen. Auch hier ergibt sich ein (höheres) Nullsystem, das sich jedoch nicht einfach beschreiben läßt. —

Aber schon in den Jahren 1860/61 wandte er sich, als der erste, der Untersuchung *der kubischen Regelfläche* zu. Die Hauptergebnisse der ersten grundlegenden synthetischen Abhandlung[3]) sind: Diese Regelfläche ist in sich dual; sie hat zwei Leitgeraden, die doppelte D, deren

1) Rendiconti dell' Istituto Lombardo II Bd. 1 S. 199 (1868).

2) Comptes rendus Bd. 54 S. 684 (1862).

3) Atti dell' Istituto Lombardo Bd. 2 (1861) S. 291.

Punkte sämtlich Doppelpunkte mit je zwei durch D gehenden Berührungsebenen sind, während die durchgehenden Ebenen einfache Berührungsebenen sind, die einfache E mit umgekehrtem Verhalten. Die Erzeugenden bewirken eine Korrespondenz [1,2] — Projektivität eines einfachen Gebildes und einer Involution — zwischen den Punktreihen auf D und E und eine Korrespondenz [2,1] zwischen den Ebenenbüscheln um D und E, mittelst deren sie dann erzeugt werden kann. Es werden weitere Erzeugungen besprochen, und die beiden Kuspidalpunkte auf D, deren beide Berührungsebenen sich vereinigt haben, und die zugehörigen Erzeugenden und (torsalen) Berührungsebenen eingeführt.

In jeder Berührungsebene liegt, außer einer Erzeugenden, ein Kegelschnitt, aus jedem Punkte der Fläche kommt, außer dem Ebenenbüschel um die durch ihn gehende Erzeugende, ein Tangentialkegel 2. Grades. Diese führen zu einer kovarianten Regelfläche 3. Grades mit den nämlichen Leitgeraden. Ist nämlich m ein Punkt der Fläche, M seine Berührungsebene, m' der Pol der zugehörigen Erzeugenden G in bezug auf den Kegelschnitt in M, M' die Polarebene von G in bezug auf den Kegel aus m, bewegt sich m auf G und M um G, so verhalten sich m' und M' ebenso zu einer zweiten Gerade G', welche die zweite Regelfläche erzeugt, wenn G die gegebene durchläuft.

Durch die beiden Leitgeraden D, E und 5 Erzeugende (oder α Punkte und $5-\alpha$ Berührungsebenen) ist die Fläche eindeutig bestimmt. Darauf werden die Polarflächen eines Punktes behandelt, die erste geht durch D und schneidet noch in einer Raumkurve 4. Ordnung 2. Art, welche D dreimal trifft, davon zweimal in den Kuspidalpunkten, in denen alle ersten Polarflächen die Regelfläche tangieren. Als Ort der Pole, deren erste Polarflächen Kegel sind, ergibt sich das Paar der Ebenen durch D, welche in den Kuspidalpunkten berühren.

Es folgt ein zweiter Aufsatz[1]), welcher mit Spezialisierungen der Erzeugungen beginnt, die zu dem Spezialfalle der kubischen Regelfläche mit vereinigten Leitgeraden führen, auf welchen Cremona durch Cayley aufmerksam gemacht worden war. Darauf wendet sich die Betrachtung wieder der allgemeinen Fläche zu; die Beziehung zwischen den beiden kovariant verbundenen Regelflächen wird noch eingehender untersucht. Nun wird festgestellt, daß es unter den Kegelschnitten in den Ebenen durch eine Erzeugende zwei Parabeln gibt, und drei Typen des allgemeinen Falles nachgewiesen, von denen z. B. der eine folgendermaßen charakterisiert ist: die beiden Kuspidalpunkte sind reell, nur von den beiden unendlichen Strecken außerhalb derselben gehen reelle Er-

---

1) Journal für Mathem. Bd. 60 S. 313.

zeugenden aus, und durch jede Erzeugende, welche die eine Strecke trifft, gehen zwei reelle Ebenen mit Parabeln, durch jede der andern Art imaginäre. Die Cayleysche Fläche hat nur einen Kuspidalpunkt auf $D \equiv E$; jeder Punkt dieser Gerade sendet nur eine Erzeugende aus; sie ist also nur einfache Leitgerade, aber auch einfache Erzeugende und dadurch doppelt auf der Fläche. —

Mittlerweile ist ein anderes Werk entstanden: die *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*[1]), bald nach seiner Übersiedlung nach Bologna. Uns Deutschen ist sie bekannter geworden durch die Curtzesche Übersetzung[2]), die jedoch nach einer teilweisen Umarbeitung von seiten des Verfassers gemacht worden ist.

Es ist schade, daß diese Übersetzung nicht in einer verbesserten neuen Auflage hat erscheinen können, denn sie ist nicht ohne Mängel; noch mehr schade ist, daß Cremona selbst nicht Neigung zu einer neuen Auflage gehabt zu haben scheint. Wir, die wir das Erscheinen erlebt und das Buch ordentlich studiert haben, wissen, was wir aus ihm gelernt haben, und erinnern uns, wie erwünscht es damals kam, wo freilich bei uns in Deutschland die Geometrie ganz anders gepflegt wurde als heute, und wie es hochgeschätzt wurde.

Leider sind Original und Übersetzung heute nur noch schwer zu haben, und es ist zu befürchten, daß dies Buch weniger bekannt und weniger studiert werde. Ich hoffe, daß die Herausgabe der gesammelten Schriften Cremonas zu den Ehrungen gehören wird, welche Italien seinem großen Geometer zu erweisen vorhat.

Veranlassung zur Introduzione hat Steiners Abhandlung: Allgemeine Eigenschaften algebraischer Kurven[3]) gegeben, die, wie es zuletzt bei Steiner üblich geworden war, ohne Beweise ist. Sie bringt die Fundamentalsätze der Polarentheorie der ebenen Kurven, führt die beiden konjugierten Kernkurven ein, die zu einer gegebenen Kurve n^{ter} Ordnung gehören, — von Cremona Hessesche und Steinersche Kurven genannt —; auch Plückers Formeln werden mitgeteilt, freilich ohne daß Plückers Name genannt wird; erst seit der Introduzione heißen sie so. Cremona hat jedem das Seine gegeben.

Das Buch zerfällt in drei Abschnitte: Grundprinzipien, Theorie der Polaren, Kurven 3. Ordnung. Insbesondere die beiden letzteren sind Cremonas Werk. Aus dem zweiten Abschnitte hebe ich hervor die ein-

1) Memorie dell' Accademia di Bologna I Bd. 12 S. 305—436.

2) Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven (Greifswald, 1865).

3) Monatsberichte der Berliner Akademie 1848, Journ. f. Mathem. Bd. 47; jetzt Gesammelte Werke Bd. 2 S. 493.

gehende Behandlung der beiden Kurven von Hesse und Steiner, die zu einer Grundkurve n^{ter} Ordnung gehören: jene, von der Ordnung $3(n-2)$, der Ort der Pole O von vorletzten oder konischen Polaren, welche einen Doppelpunkt O' haben, oder der Ort der Doppelpunkte O von ersten Polaren, zu diesen O' als Polen gehörig; diese von der Ordnung $3(n-2)^2$, der Ort jener Doppelpunkte oder dieser Pole O'. Cremona ermittelt für die Steinersche Kurve alle Singularitäten und bestätigt Steiners Angaben.[1])

Für drei Kurven von beliebigen Ordnungen wird dann die Jacobische Kurve untersucht, der Ort der Pole O, deren letzte oder geraden Polaren in bezug auf die drei Kurven in einen Punkt O' zusammenlaufen, und der Ort dieser Punkte O'. Sind jene Kurven gleicher Ordnung, so daß sie ein Netz bestimmen, so haben wir die Jacobische[2]) und die Steinersche Kurve des Netzes von der Ordnung $3(n-1)$ und $3(n-1)^2$, jene auch die Kurve der Doppelpunkte bei Kurven des Netzes.

Ist das Netz dasjenige der ersten Polaren einer Grundkurve, so handelt es sich um die obigen Kurven von Hesse und Steiner; und die jetzige Zuordnung der Punkte O und O' ist dieselbe wie oben.

Einen wichtigen Teil des zweiten Abschnitts bildet die Ableitung der Plückerschen Formeln.

In bezug auf ein Kegelschnitt-Netz werden, wie im dritten Abschnitte sich ergibt, Jacobis und Steiners Kurve identisch, und die Zuordnung der Punkte O, O', die nun auf derselben Kurve liegen, wird die involutorische Zuordnung der (in bezug auf das Netz) konjugierten Punkte. Die Verbindungslinien OO' liefern eine zweite dem Netze zugeordnete Kurve, welche 3. Klasse ist, die Cayleysche Kurve des Netzes.[3]) Ist das Netz dasjenige der ersten Polaren einer Grundkurve 3. Ordnung, so haben wir die Hessesche und Cayleysche Kurve derselben.

Reine Polokonik einer Gerade, in bezug auf eine Kurve 3. Ordnung, ist der Ort der Pole der Gerade in bezug auf die ersten Polaren ihrer Punkte: ein Kegelschnitt; und liegen zwei Geraden vor, so sind die beiden Kegelschnitte, welche durch die Pole jeder von ihnen in bezug auf die ersten Polaren der Punkte der andern gebildet werden, identisch, und man hat die gemischte Polokonik der beiden Geraden. Diese Kegelschnitte und ihr Verhalten zur Hesseschen Kurve werden ein-

1) Clebsch tut es bald darauf nochmals analytisch (Journal f. Math. Bd. 64).

2) So nennt Cremona sie später, in der Introduzione Hessesche Kurve des Netzes.

3) Die Klasse $3(n-1)(n-2)$ dieser Enveloppe im allgemeinen Falle, ebenfalls von Steiner angegeben, hat Clebsch auch bewiesen.

gehend erörtert. Sodann wird die Figur der 9 Wendepunkte und der Büschel von Kurven 3. Ordnung mit gemeinsamen Wendepunkten behandelt. Den Schluß bildet der Nachweis, daß jede Kurve 3. Ordnung für 3 andere Hessesche Kurve ist und für 3 Kegelschnitt-Netze Jacobische Kurve ist, so daß sie drei Systeme konjugierter Punkte trägt.

Im ersten Abschnitt muß die Ermittelung der Anzahlen der Punkte, welche eine Kurve n^{ter} Ordnung bestimmen, und der gemeinsamen Punkte zweier Kurven als nicht befriedigend bezeichnet werden: sie erfolgt, wie wir heute sagen, nach dem Prinzip der Erhaltung der Anzahl. Aber das sind Sachen, die auch jetzt noch der rein geometrischen Behandlung Schwierigkeit bereiten. Zwei andere nicht genügende Beweise im zweiten Abschnitte (Nr. 69 und 73) wurden bald verbessert, teils im Anhang der deutschen Übersetzung, teils in den Preliminari, wobei Cremona die Hilfe, die ihm Hirst dabei gewährt hat, erwähnt.[1])

Der genannte Anhang bringt ferner wertvolle Ergänzungen zu dem Satze über die Anzahl der Doppelpunkte eines Büschels und den Beweis des Satzes, daß jedes Kegelschnitt-Netz das Netz der ersten Polaren einer Kurve 3. Ordnung ist.[2])

Im Texte der Übersetzung hat Cremona, veranlaßt durch Jonquières selbst[3]), die Sätze von Jonquières über Kurvensysteme von beliebigem Index N (Zahl der durch einen Punkt gehenden Kurven des Systems) erheblich eingeschränkt.

Hinzugekommen ist, im zweiten Abschnitte, die Ermittelung der Anzahl der Kegelschnitte, welche fünf Bedingungen erfüllen, insbesondere 5 gegebene Kurven berühren[4]); es handelt sich da bekanntlich um Reduktionen, welche durch ausgeartete Kegelschnitte bewirkt werden. Chasles hatte die Anzahlen ohne Beweis gegeben. Die allgemeine Formel gibt nun die richtige Zahl 3264 der Kegelschnitte, welche 5 ge-

1) Cremona spricht, wohl im Hinblick auf diese Stellen, von moltissimi difetti (Annali di Matem. I Bd. 6 S. 154); aber das ist doch zu viel gesagt. Sollte er sich durch diese den Wert des Buches kaum beeinträchtigenden Mängel von der Veranstaltung einer Neuauflage haben abhalten lassen?

2) Der größere Teil dieses Anhangs war schon in den Annali di Matem. I Bd. 6 S. 193 veröffentlicht, wo sich noch ein Zusatz über die Kurven 3. Ordnung befindet, aus dem ich folgendes Theorem erwähnen möchte: „Die 4 Tangenten einer Kurve 3. Ordnung aus einem Punkte auf ihr sind die geraden Polaren irgend eines der Berührungspunkte in bezug auf die Kurve selbst und die drei, von denen sie die Hessesche Kurve ist.“ Weitere Zusätze über Kurven 3. Ordnung bringt das Giorn. di Matem. Bd. 1 S. 317, Bd. 2 S. 78.

3) Giornale di Matem. Bd. 1 S. 128.

4) Vorher Giorn. di Matem. Bd. 2 S. 17, 192. — Vergl. auch Bd. 1 S. 225 (oder Ann. di Mat. I Bd. 5 S. 330).

gebene Kegelschnitte berühren; Steiner[1]) und Bischoff hatten eine zu hohe Zahl angegeben.

Ich möchte nicht unerwähnt lassen, daß Cremona in der Introduzione und auch schon früher mit dem Korrespondenzprinzip arbeitet, also ehe dasselbe formell von Chasles (1864) ausgeprochen worden ist; die Cremonaschen Untersuchungen forderten es.

An eine Stelle im ersten Abschnitte der Introduzione will ich die Erwähnung einer Note Cremonas über das Problem der Homographie knüpfen.[2]) Für die Erkenntnis, daß bei zwei einander zugeordneten Gruppen von je 7 Punkten 3 Paare von Punkten vorhanden sind, aus denen nach ihnen projektive (homographische) Büschel gehen, ist es notwendig, die zu zwei Gruppen von je 5 Punkten gehörigen „linear abhängigen" sechsten Punkte zu ermitteln. Ich glaubte, sie zuerst gefunden zu haben[3]), aber sie werden in jener Note (analytisch) nachgewiesen und konstruiert.

Zur Theorie der Kegelschnitte erwähne ich noch kurz die Inhalts-Berechnung eines Kegelschnitt-Segments[4]), zwei Aufsätze über den Vierzehn-Punkt-Kegelschnitt und über Normalen an Kegelschnitte[5]), Beiträge zu Chasles' Charakteristiken- und Modul-Theorie.[6])

Zahlreiche Fragen und Lösungen hat Cremona in der ersten Zeit seiner Tätigkeit an die Nouv. Annales und das Giornale gesandt. —

Zwei unmittelbare Früchte der in der Introduzione niedergelegten Ergebnisse sind die Abhandlungen über *die Steinersche Fläche* und über *die Hypozykloide mit drei Rückkehrpunkten.*[7]) Die Steinersche Fläche 4. Ordnung hat die charakteristische Eigenschaft, von jeder Berührungsebene in zwei Kegelschnitten geschnitten zu werden. Weierstraß hatte 1863, bald nach Steiners Tode, kurze Mitteilungen über die Beschäftigung Steiners mit dieser Fläche gemacht; Schröter begann dann auf Grund derselben die Untersuchung.[8]) Für ihn und für Cremona, der sie fortsetzte, ist Ausgangspunkt der Satz, daß die Ebenen, welche die Schnittpunkte der Kanten der Polardreikante eines

1) In Steiners Gesammelten Werken werden bei der Verbesserung nicht Chasles und Cremona, sondern das viel spätere Buch von Clebsch-Lindemann genannt.

2) Nouv. Annales I Bd. 20 S. 432.

3) Math. Ann. Bd. 1.

4) Giorn. di Matem. Bd. 1 S. 360.

5) Messenger of Mathematics Bd. 3 S. 13, 88.

6) Annali di Matem. I Bd. 6 S. 179 und, damit zum größeren Teile identisch. der letzte Abschnitt im mehrfach erwähnten Anhang; Comptes rendus Bd. 59 S. 776.

7) Journal für Mathem. Bd. 63 S. 315, Bd. 64 S. 101 (1864).

8) Monatsberichte der Berliner Akademie 1863 und Journal f. Math. Bd. 64.

Polarbündels mit einer durch den Scheitel O gehenden Fläche 2. Grades verbinden, durch einen festen Punkt S gehen. Schröter benutzt ein Kegelschnitt-Netz und projiziert die Polarsysteme seiner Kurven aus O; jede von ihnen liefert dann einen Punkt S, und der Ort dieser Punkte ist die Steinersche Fläche; den Kegelschnitten eines Büschels im Netze korrespondieren die Punkte eines Kegelschnitts auf der Fläche.

Cremona faßt dies Netz auf als das der ersten Polaren einer Kurve 3. Ordnung C^3 und verwertet die Sätze des dritten Abschnitts der Introduzione über die reinen und gemischten Polokoniken der C^3 und ihre Beziehungen zur Hesseschen Kurve. Zu der Ordnung und der Klasse der Fläche und den drei in den dreifachen Punkt O zusammenlaufenden Doppelgeraden, welche schon Schröter nachgewiesen, treten noch hinzu bei jeder dieser Geraden die Involution der Berührungsebenen, die beiden Kuspidalpunkte und ein dritter ausgezeichneter Punkt, vor allem aber die 4 singulären längs Kegelschnitten berührenden Tangentialebenen.

Diese Fläche lieferte ihm später, als er sich den eindeutigen Flächenabbildungen zuwandte, das erste Beispiel.[1]) In der Tat, das Bild eines Punktes S der Fläche ist der Pol desjenigen Kegelschnitts des Polarennetzes, welcher zu S geführt hat, und den Kegelschnitten der Fläche entsprechen die Geraden der Bildebene.

Die Abhandlung über die Hypozykloide wurde auch durch eine Steinersche[2]) veranlaßt. Cremona geht aus von einer Kurve 3. Klasse, welche die unendlich ferne Gerade in den absoluten Punkten tangiert. Die Sätze der Introduzione sind zu dualisieren, und die Doppeltangente bewirkt, daß nur ein System konjugierter Tangenten vorhanden ist, und zwar sind die zu einander normalen Tangenten konjugiert. Die Cayleysche Kurve, hier Ort der Schnittpunkte konjugierter Tangenten und 3. Ordnung, zerfällt in die unendlich ferne Doppeltangente und einen Kreis C^2; woraus dann abgeleitet wird, daß die Kurve eine Hypozykloide mit drei Rückkehrpunkten ist, welche auf einem zu C^2 konzentrischen Kreise liegen.

Die drei Tangenten, welche zu den von einem Punkte kommenden senkrecht sind, bilden ein Dreieck, für welches C^2 der Feuerbachsche Kreis und die Kurve die Enveloppe der Simpsonschen Geraden ist. Die gleichseitigen Hyperbeln, welche rechtwinklige Tangenten der Kurve zu Asymptoten haben, bilden ein Netz, welches die Kurve zur Cayleyschen hat; die vier Geraden, welche die Kurve in den Schnitten einer

1) Rendiconti dell' Istituto Lombardo I Bd. 4 (1867) S. 15.

2) Journ. f. Math. Bd. 56 S. 271; Gesamm. Werke Bd. 2 S. 639.

Gerade berühren, bestimmen eine Parabel, und diese Parabeln bilden eine Scharschar (dual zum Netz), und deren Hessesche Kurve 3. Klasse ist die Evolute der gegebenen Kurve, ebenfalls eine Hypozykloide. Cremona bringt diese Kurven mit der kubischen Raumkurve in Verbindung. Zwei solche Hypozykloiden, in parallelen Ebenen gelegen, führen durch die gemeinsamen Berührungsebenen zu der abwickelbaren Fläche 3. Klasse einer windschiefen Hyperbel, und ihre gemeinsame Doppeltangente ist Schmiegungsachse der Raumkurve.

Von dem Kreise C^2 ausgehend, erhält man die Tangenten der Kurve folgendermaßen: die Sehne $s_1 s_2$ von C^2 sei Tangente, dann ist die Sehne $s_2 s_3$, welche auf dem Durchmesser nach s_1 normal ist, wiederum Tangente, und so weiter fort. Cremona untersucht zahlentheoretisch, ob man zu einem Punkte s_n kommen kann, der mit einem früheren s_m zusammenfällt. — (Fortsetzung folgt.)

Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelektrizität.

Von EDUARD RIECKE in Göttingen.

(Abdruck aus den Sitzungsberichten der Münchener Akademie 1903, S. 257.)

Im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts haben die Anschauungen, die man sich von der Natur der elektrischen Erscheinungen gebildet hat, eine sehr merkwürdige Entwickelung durchgemacht. Der Anfang des Jahrhunderts stand unter dem Einflusse der Arbeiten von Coulomb, Ampère und Gauß, in welchen die Vorstellungen von der Existenz elektrischer und magnetischer Fluida ihre exakte Begründung fanden. Einen gewissen Abschluß und eine einheitliche Zusammenfassung fand die ganze Gedankenreihe in der Mitte des Jahrhunderts durch Wilhelm Weber. Das ganze Gebiet der elektrischen und magnetischen Erscheinungen schien auf der Existenz der elektrischen Fluida zu beruhen; diese dachte sich Weber atomistisch konstituiert und mit Masse begabt, wie die ponderabeln Teilchen. Zwischen den elektrischen Atomen wirkten Fernkräfte, die außer von der Entfernung selber noch von ihrer zeitlichen Änderung abhängig gemacht wurden. Zur selben Zeit, als Weber mit dem Ausbau der atomistischen Fernwirkungstheorie beschäftigt war, ging von Faraday eine Anregung ganz anderer Art aus. Der eigentliche Erreger der elektromagnetischen Erscheinungen ist darnach der Äther. Jene Erscheinungen sind verbunden mit Druck und Spannung im Inneren des Äthers; die Folge davon sind die scheinbaren Fernwirkungen, die wir im elektromagnetischen Felde beobachten. An Stelle von atomistischer Konstitution und von Fernwirkung traten Kontinuum und durch Druck und Spannung vermittelte Wirkung. Einen glänzenden Erfolg errang die Faradaysche Anschauung mit der Begründung der elektromagnetischen Lichttheorie durch Maxwell und mit ihrer Bestätigung durch Hertz; aber es blieben doch Gebiete, die sich den Zauberformeln der Maxwell-Hertzschen Theorie nicht erschließen wollten, Erscheinungen, die nur durch die Wechselbeziehung zwischen ihren ponderabeln Trägern und zwischen dem Träger der elektrischen Wirkungen zu erklären waren. Wir erinnern an die Erscheinungen der Dispersion und Absorption des Lichtes, an die elektrische Leitung der Flüssigkeiten und der Gase. Von hier aus vollzog sich gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts eine Wandlung der Anschauungen, durch welche zwischen den Anschauungen von Weber und von Maxwell eine Brücke geschlagen wurde. Aus dem Äther scheiden sich Elementarquanta der positiven und der negativen Elektrizität aus, deren Ladungen entsprechend der atomistischen Auffassung alle dieselbe Größe haben. Negative Elementarquanta kennen wir im freien Zustande und bezeichnen sie dann als Elektronen; außerdem kennen wir Verbindungen negativer Elementarquanta mit ponderabeln Molekülen; wir bezeichnen sie als negative Ionen. Zwischen der negativen und der positiven Elektrizität besteht der wesentliche Unterschied, daß positive Elementarquanta im freien Zustande bisher nicht gefunden sind; wir kennen nur positive Ionen, untrennbare Verbindungen des darin angenommenen positiven Elementarquantums mit ponderabeln Molekülen. Auf der Existenz positiver und negativer Ionen beruhen die Erscheinungen der elektrischen Leitung von Flüssigkeiten und Gasen, im wesentlichen also auch die Erscheinungen der Luftelektrizität. In der Tat hat die Theorie der Ionen der luftelektrischen Forschung neue Anschauungen, neue Ziele und Methoden zugeführt; daher ist es vielleicht nicht überflüssig, wenn den spezielleren Berichten über verschiedene Gebiete der luftelektrischen Forschung, welche für die Jahresversammlung der kartellierten Akademien erstattet werden sollen, eine allgemeine Orientierung über jene Theorie vorangeschickt wird.

1. *Die elektrische Leitung der Flammen.* — Die Tatsache, daß Flammen Leiter der Elektrizität sind, ist eine altbekannte. Genauer wurden die Verhältnisse dieser Leitfähigkeit von Giese untersucht; er zeigte, daß die Flammen nicht nach der Art metallischer Konduktoren leiten, daß ihr Leitvermögen vielmehr auf ähnlichen Verhältnissen beruht wie das der elektrolytischen Leiter. Die Flammengase enthalten, wenn auch in geringer Menge, positive und negative elektrische Teilchen; man kann annehmen, daß sie sich ähnlich wie die elektrolytischen Ionen durch Dissoziation neutraler Gasmoleküle bilden. Man hat diese Teilchen gleichfalls Ionen genannt; sie sind aber im allgemeinen nicht identisch mit den Ionen der elektrolytischen Leiter. Giese hat die Richtigkeit seiner Anschauung durch eine Reihe von Experimenten bewiesen. Eine genaue quantitative Prüfung konnte aber erst ausgeführt werden, nachdem auf Grund der Gieseschen Vorstellung eine exakte Theorie der Flammenleitung ausgearbeitet war. Als das Ziel der Messungen erscheint dann eine Größe, die wir als die Beweglichkeit der Ionen bezeichnen und die bei all unseren Betrachtungen eine fundamentale Rolle spielt. Um von ihrer Bedeutung eine anschauliche Vorstellung zu gewinnen, halten wir uns an den folgenden Versuch. Die Flamme brenne in breiter Fläche aus einem schnittförmigen Metallbrenner. Der Brenner sei isoliert und positiv geladen. Die in der Flamme enthaltenen negativen Ionen werden dann von dem Metalle des Brenners angezogen und die Flamme erhält einen Überschuß positiver Ionen. Durch ihre wechselseitige Abstoßung werden die positiven Ionen aus der Flamme in den umgebenden Raum hineingetrieben. Stellt man parallel mit der Flamme eine zu der Erde abgeleitete Metallplatte auf, so entsteht in dem Zwischenraum ein Strom positiver Elektrizität, der von der Flamme zu der Platte und von dieser zur Erde geht. Dabei ist die Bewegung der Ionen in dem zwischen Flamme und Platte befindlichen elektrischen Felde keine beschleunigte. Denn die Ionen bewegen sich mit einer gewissen Reibung zwischen den Molekülen der Luft, und sie erlangen daher eine konstante Endgeschwindigkeit, bei der die beschleunigende elektrische Kraft durch die ihr entgegengesetzte Reibung gerade aufgehoben wird. Die Endgeschwindigkeit ist daher der auf die Ionen wirkenden elektrischen Kraft direkt proportional. Als Maß der elektrischen Kraft benützen wir die elektromagnetisch gemessene elektromotorische Kraft e, welche auf die Längeneinheit des von der Flamme bis zu der Platte sich erstreckenden elektrischen Feldes ausgeübt wird. Die konstante Endgeschwindigkeit der positiven Ionen $\mathfrak{g}$ ist dann gleich der elektromotorischen Kraft e multipliziert mit einem konstanten Faktor U; $\mathfrak{g} = Ue$. Den Faktor U bezeichnen wir als die absolute Beweglichkeit der positiven Ionen. Sie kann berechnet werden, wenn der von der Metallplatte zur Erde fließende Strom, das Potential der Flamme und die Distanz zwischen Flamme und Platte gemessen sind. Aus derartigen Messungen ergab sich $U = 2{,}2 \cdot 10^{-8}$ cm sec^{-1}. Die praktische Einheit von 1 Volt ist gleich 10^8 unserer elektromagnetischen Einheiten der elektromotorischen Kraft. Wenn also das Potential der Flamme so hoch gemacht wird, daß auf 1 cm des von der Flamme zu der Metallplatte reichenden elektrischen Feldes eine Spannungsabnahme von 1 Volt kommt, so erlangen die positiven Ionen in diesem Felde eine Geschwindigkeit von 2,2 cm sec^{-1}. Nach derselben Methode ergab sich für die absolute Beweglichkeit negativer Flammenionen der Wert $V = 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ cm sec^{-1}.[1])

2. *Ionisierung der Luft durch Röntgenstrahlen; die absoluten Beweglichkeiten der Luftionen.* — Schon Röntgen selbst hatte die Beobachtung gemacht, daß Luft, durch welche die von ihm entdeckten Strahlen hindurchgingen, geladene Konduktoren, positive so gut wie negative, ihrer Elektrisität zu berauben vermag. Es lag nahe, auch in diesem Falle die Leitfähigkeit der Luft durch die Gegenwart von positiven und von negativen Ionen zu erklären, welche durch Röntgenstrahlen aus den neutralen Molekülen der Luft erzeugt werden. Die ersteren bedingen die Zerstreuung der negativen, die letzteren die der positiven Elektrizität. In der Tat gelingt es auf Grund dieser Vorstellung von allen Einzelheiten der Beobachtungen Rechenschaft zu geben. Über diese selbst und über die zum Teil sehr eigentümlichen Erscheinungen, auf welche sie sich beziehen, möge folgendes berichtet werden.

Wir stellen zwei Metallplatten einander parallel gegenüber, so daß die eine mit dem positiven, die andere mit dem negativen Pol einer galvanischen Säule verbunden werden kann. Der Zwischenraum der Platten werde mit Röntgenstrahlen durchleuchtet. Unter ihrer Wirkung entstehen fortwährend Ionen in der zwischen den Platten befindlichen Luft. Sind die Metallplatten nicht geladen, so unterliegen die Ionen lediglich den anziehenden und abstoßenden Kräften, die sie wechselseitig aufeinander ausüben. Wir nehmen an, daß die Ionen in dem von Luft erfüllten Raum sich so bewegen, wie Moleküle eines fremden Gases, das in geringer Menge der Luft beigemischt ist. Die ungeordnete Bewegung der Ionen wird in jedem Augenblicke eine gewisse Zahl von positiven und negativen Ionen in unmittelbare Nachbarschaft bringen. Die anziehenden Kräfte, mit denen ungleichnamige Ionen aufeinander wirken, werden dann zu ihrer Vereinigung, zur Bildung neutraler Moleküle führen. Wir haben darnach in dem durchstrahlten Raume mit zwei verschiedenen, einander entgegenwirkenden Prozessen zu tun. Einerseits werden fortwährend Ionen erzeugt, vermutlich infolge von Dissoziation neutraler Gasmoleküle; andrerseits werden durch

1) Child, Beiblätter zu den Ann. d. Phys. 1901. S. 554.

die elektrische Anziehung entgegengesetzte Ionen immer wieder zu neutralen Molekülen vereinigt. Beide Prozesse müssen sich miteinander ins Gleichgewicht setzen, so daß die Zahl der in einer bestimmten Zeit, etwa in einer Sekunde, erzeugten Ionen gerade so groß ist wie die Zahl der in derselben Zeit verschwindenden.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn die Platten, die den Gasraum begrenzen, mit den Polen einer galvanischen Batterie verbunden werden, wenn also die Ionenbildung in einem elektrischen Felde vor sich geht. Nun kommt noch eine elektrische Kraft hinzu, welche alle positiven Ionen nach der Kathode, alle negativen nach der Anode treibt. Die durch Röntgenstrahlen erzeugten Ionen verschwinden also in diesem Falle aus zwei Gründen; einmal durch Wiedervereinigung entgegengesetzter Ionen, sodann durch Fortführung und Ausscheidung infolge der elektromotorischen Kraft im Zwischenraum der Platten. Die Zahl der Ionen, die in einer bestimmten Zeit, etwa in einer Sekunde, entstehen, ist gleich der Summe der wieder vereinigten und der an den Elektroden abgeschiedenen. Das Verhältnis dieser beiden Teile kann je nach den Umständen des Versuches ein sehr verschiedenes sein. Wir wollen zwei extreme Fälle betrachten.

Wir nehmen zuerst an, die elektromotorische Kraft sei von vornherein verhältnismäßig groß und werde im Verlaufe des Versuchs noch mehr gesteigert. Die Zahl der durch den Strom ausgeschiedenen Ionen wird dann in entsprechender Weise zunehmen; dagegen wird die Zahl der wieder vereinigten abnehmen, da die Summe der beiden Teile dieselbe bleiben muß. Durch Steigerung der elektromotorischen Kraft können wir es schließlich dahin bringen, daß alle Ionen, die in einer Sekunde entstehen, in derselben Zeit durch den Strom an den Elektroden ausgeschieden werden. Wenn einmal dieser Punkt erreicht ist, so kann eine weitere Steigerung der elektromotorischen Kraft keine Steigerung des Stromes mehr zur Folge haben; denn auch die stärkere Kraft kann nicht mehr bewirken, als daß alle in einer bestimmten Zeit erzeugten Ionen zur Unterhaltung des Stromes während dieser Zeit verbraucht werden. Man hat dann den eigentümlichen Fall eines von der elektromotorischen Kraft unabhängigen Stromes, den man als den Sättigungsstrom bezeichnet.

Die Zahl der positiven oder der negativen Ionen, welche in 1 sec in 1 ccm entstehen, die Ionisierungsstärke[1]), möge durch q bezeichnet werden; Ω sei das Volumen des durch die Elektrodenplatten begrenzten Luftraumes. Dann ist $q\Omega$ die Zahl der positiven Ionen, die in 1 sec

1) J. Stark, Die Elektrizität in Gasen. S. 43.

an der Kathode, die Zahl der negativen, die gleichzeitig an der Anode durch den Sättigungsstrom abgeschieden werden. Wir machen die schon in der Einleitung erwähnte, später ausführlicher zu begründende Annahme, daß die elektrostatische Ladung aller Ionen ihrem absoluten Betrag ε nach dieselbe sei; dann sind die Mengen von positiver und von negativer Elektrizität, die in einer Sekunde an der Kathode bezw. Anode abgeschieden werden, gleich $\varepsilon q \Omega$. Gerade so groß ist die Menge von positiver und von negativer Elektrizität, welche in einer Sekunde durch den Querschnitt der die Metallplatten mit den Polen der Säule verbindenden Drähte fließt, d. h. die Stärke des Sättigungsstromes in elektrostatischem Maße. Bezeichnen wir diese durch $\mathfrak{C}$, so ist $\mathfrak{C} = \varepsilon q \Omega$.

Den andern extremen Fall erhält man, wenn die elektromotorische Kraft klein ist, so daß die Zahl der im Strome fortgeführten Ionen der Zahl der überhaupt vorhandenen gegenüber verschwindet. In diesem Falle sind die Verhältnisse bei dem durchstrahlten Gase ganz analog denen eines elektrolytischen Leiters. Der Strom ist der elektromotorischen Kraft proportional; das Verhältnis beider Größen stellt das elektrische Leitvermögen dar, ganz wie bei einem Elektrolyten.

Wir müssen uns darauf beschränken, in diesem Falle die Resultate der theoretischen Untersuchung anzuführen. Das Leitvermögen der ionisierten Luft ist darnach, wie man übrigens von vornherein vermuten kann, proportional der Summe $U + V$ der absoluten Beweglichkeiten der positiven und der negativen Ionen, außerdem proportional der Zahl und der elektrischen Ladung der in der Volumeinheit enthaltenen positiven oder negativen Ionen. Die elektromotorische Kraft der Säule, deren Pole mit den beiden Metallplatten verbunden sind, kann leicht gemessen werden, ebenso die Stärke des durch sie erzeugten Stromes; das Verhältnis beider Größen gibt das Leitvermögen der ionisierten Luft. Bestimmt man außerdem direkt die Gesamtladung aller zwischen den Elektrodenplatten vorhandenen Ionen, so läßt sich aus dem Leitvermögen die Summe $U + V$ der Ionenbeweglichkeiten berechnen.

Das Verhältnis der Beweglichkeiten, der Wert von V/U, kann aus einer Beobachtung über den Sättigungsstrom abgeleitet werden. Bei diesem häufen sich die negativen Ionen gegen die Anode, die positiven gegen die Kathode hin an. Es gibt aber in dem Zwischenraum eine Stelle, an welcher die Dichte der beiden Ionenarten gleich ist, an der sich keine räumliche elektrische Ladung findet. Diese Stelle verschiebt sich um so weiter nach der Anode, je größer die Beweglichkeit der negativen Ionen im Vergleich mit der der positiven wird. Das Verhältnis der Abstände jener neutralen Stelle von den beiden Elektroden ist gleich dem Verhältnis der Beweglichkeiten. Außer auf dem hierdurch gegebenen Wege hat man das Verhältnis der Beweglichkeiten noch auf andere Weise bestimmt; doch es würde zu weit führen, darauf einzugehen.

Aus den Werten von $U + V$ und V/U kann man dann die Zahlen U und V selber berechnen, die wir als Beweglichkeit der Ionen bezeichnet haben. So ergab sich in trockener Luft für die absolute Beweglichkeit der positiven Ionen eine Zahl von $1{,}34 \cdot 10^{-8}$ cm in der Sekunde, für die der negativen, die etwa $1\frac{1}{2}$ mal größere Zahl von $1{,}93 \cdot 10^{-8}$ cm in der Sekunde. Diese Beweglichkeiten sind von derselben Ordnung wie die der Flammenionen; sie sind etwa 500 mal größer als die Beweglichkeit des Wasserstoffions in elektrolytischer Lösung. Der Grund des großen Unterschiedes liegt nicht in der Natur der Ionen selber, sondern in der Verschiedenheit der Reibungswiderstände, welche Luft und Wasser ihrer Bewegung entgegensetzen.[1])

In der Tat werden wir in den folgenden Abschnitten zeigen, daß zwischen den Ionen der Elektrolyte und den Ionen der Gase in einem Punkte vollkommene Übereinstimmung herrscht. Die Ladung elektrolytischer Ionen ist dieselbe wie die der Gasionen.

3. *Die Ladung elektrolytischer Ionen.* — Bei elektrolytischen Ionen läßt sich die Ladung leicht berechnen. Der Strom von 1 Ampère entwickelt in einer Sekunde 0,116 ccm Wasserstoff unter Atmosphärendruck und bei einer Temperatur von 0^0. Denken wir uns die Wasserstoffmoleküle in Wasserstoffionen zerlegt, so ergeben sich 0,232 ccm erfüllt von Wasserstoffionen. Der Strom von 1 Ampère führt aber in einer Sekunde 3 Milliarden elektrostatische Einheiten durch den Querschnitt des Leiters. Ebenso groß muß die Gesamtladung der Wasserstoffionen sein, die von dem Strome von 1 Ampère in einer Sekunde ausgeschieden werden. Daraus folgt für die Ladung eines ccm, das bei Atmosphärendruck und bei einer Temperatur von 0^0 mit Wasserstoffionen gefüllt ist, ein Betrag von 13 Milliarden elektrostatischer Einheiten. Um einen Anhaltspunkt für die Beurteilung dieser enormen Ladung zu geben, bemerke ich, daß man auf einer Siegellackschicht von 1 qm Inhalt durch starke Reibung eine Ladung von etwa 6 Einheiten erzeugen kann.

Bei den Ionen der Luft oder anderen Gasen kann die Bestimmung der Ladung nur auf einem schwierigen Umwege erreicht werden, der uns zuerst zu der Untersuchung einer neuen Eigenschaft der Ionen, ihrer Diffusion, führt.

---

1) Wegen ausführlicher Nachweise der zu diesem und zu den folgenden Abschnitten gehörenden Literatur sei verwiesen auf: Riecke, Lehrbuch der Physik. II. Aufl. 1902. II. Bd. S. 346. Stark, Elektrizität in Gasen. S. 248 ff.

(Fortsetzung folgt.)

Die 32 Lösungen des Malfattischen Problems.

Von A. Pampuch in Straßburg i. E.

1. *Aufgabe.* — Die Gleichungen 1) $A^2 = Y^2 + Z^2 + 2\mathfrak{a}YZ$, 2) $B^2 = Z^2 + X^2 + 2\mathfrak{b}ZX$, 3) $C^2 = X^2 + Y^2 + 2\mathfrak{c}XY$ sind zu lösen, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, σ 4 beliebige Zahlen sind und $A^2 = \sigma(1-\mathfrak{a}^2)$, $B^2 = \sigma(1-\mathfrak{b}^2)$, $C^2 = \sigma(1-\mathfrak{c}^2)$ ist.

Lösung. — Durch Elimination von X aus 2) und 3) ergibt sich die *symmetrische* Gleichung $4(\sigma\mathfrak{b}\mathfrak{c} - YZ)[(\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2)YZ - \mathfrak{b}\mathfrak{c}(Y^2+Z^2)] = [\sigma(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})^2 - (Y+Z)^2]\cdot[\sigma(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})^2 - (Y-Z)^2]$. Wegen dieser Symmetrie erhält man durch Beseitigung von T aus den 2 Gleichungen II) $B^2 = T^2 + Y^2 + 2\mathfrak{b}TY$ und III) $C^2 = T^2 + Z^2 + 2\mathfrak{c}TZ$ *dieselbe* Eliminationsgleichung. Demnach sind die 5 Gleichungen 1), 2), 3), II), III) voneinander abhängig und gelten somit gleichzeitig. Bilden die Zahlen X_0, Y_0, Z_0 eine Lösung der Gleichungen 1), 2), 3) und ist T_1 der diesen Wurzeln durch II) und III) (eindeutig) zugeordnete Wert von T, so liefern die Zahlen $X = T_1$, $Y = Z_0$, $Z = Y_0$ eine zweite Lösung von 1), 2), 3), weil diese 3 Gleichungen bezüglich aus 1), II), III) durch Vertauschung von T mit X und von Y mit Z hervorgehen. Hängt T_2 von Z_0 und X_0 und ferner T_3 von X_0 und Y_0 in derselben (eindeutigen) Weise wie T_1 von Y_0 und Z_0 ab, so sind, was in derselben Weise gezeigt werden kann, die Werte $X = Z_0$, $Y = T_2$, $Z = X_0$ und $X = Y_0$, $Y = X_0$, $Z = T_3$ zwei fernere Lösungen von 1), 2), 3). Aus *einer* Lösung der Gleichungen 1), 2), 3) ergeben sich demnach sofort (linear) die 7 übrigen Lösungen:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$X =$	X_0	T_1	Z_0	Y_0	$-X_0$	$-T_1$	$-Z_0$	$-Y_0$
$Y =$	Y_0	Z_0	T_2	X_0	$-Y_0$	$-Z_0$	$-T_2$	$-X_0$
$Z =$	Z_0	Y_0	X_0	T_3	$-Z_0$	$-Y_0$	$-X_0$	$-T_3$

Bildet man eine neunte Lösung Y_0, T_4, T_1 von 1), 2), 3) aus der Lösung 2) in derselben Weise, wie die Lösung 3) aus der Lösung 1) erhalten wurde, so muß sie, weil nicht mehr als 8 Lösungen hier vorhanden sind, mit einer der 8 bereits aufgestellten, also mit der vierten identisch sein. Es ist somit $T_4 = X_0$ und $T_1 = T_3$. Ebenso zeigt man, daß T_1 mit T_2 übereinstimmt. Es ist demnach $T_1 = T_2 = T_3$, und zwar etwa $= T_0$. Wie die 5 Gleichungen 1), 2), 3), II), III), so gelten auch die 5 Gleichungen 1), 2), 3), III) und I) $A^2 = T^2 + X^2 + 2\mathfrak{a}TX$

gleichzeitig, und liefern in analoger Weise für 1), 2), 3) acht Lösungen. Da diese mit den 8 oben angegebenen übereinstimmen müssen, so ist der neue Wert für T mit dem früheren T_0 identisch. Damit ist bewiesen, daß die Gleichungen:

$$\begin{aligned}(A^2 =)\,\sigma(1-\mathfrak{a}^2) &= Y^2+Z^2+2\mathfrak{a}YZ = T^2+X^2+2\mathfrak{a}TX,\\ (B^2 =)\,\sigma(1-\mathfrak{b}^2) &= Z^2+X^2+2\mathfrak{b}ZX = T^2+Y^2+2\mathfrak{b}TY,\\ (C^2 =)\,\sigma(1-\mathfrak{c}^2) &= X^2+Y^2+2\mathfrak{c}XY = T^2+Z^2+2\mathfrak{c}TZ\end{aligned}$$

gleichzeitig gelten, und daß sich bei ihnen aus *einer* beliebigen Lösung sofort die 7 übrigen auf die aus dem folgenden Schema zu ersehende Art ergeben:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$T=$	T_0	X_0	Y_0	Z_0	$-T_0$	$-X_0$	$-Y_0$	$-Z_0$
$X=$	X_0	T_0	Z_0	Y_0	$-X_0$	$-T_0$	$-Z_0$	$-Y_0$
$Y=$	Y_0	Z_0	T_0	X_0	$-Y_0$	$-Z_0$	$-T_0$	$-X_0$
$Z=$	Z_0	Y_0	X^0	T_0	$-Z_0$	$-Y_0$	$-X_0$	$-T_0$.

Aus 1), 2), 3), I), II), III) folgt ohne weiteres

$$\begin{array}{l|l}(T^2+X^2-Y^2-Z^2):(YZ-TX)=2\mathfrak{a} & (ZX-TY)(XY-TZ):(YZ-TX)=A^2\\ (T^2+Y^2-Z^2-X^2):(ZX-TY)=2\mathfrak{b} & (XY-TZ)(YZ-TX):(ZX-TY)=B^2\\ (T^2+Z^2-X^2-Y^2):(XY-TZ)=2\mathfrak{c} & (YZ-TX)(ZX-TY):(XY-TZ)=C^2\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l}YZ-TX=BC & T^2+X^2-Y^2-Z^2=2\mathfrak{a}BC & X^2=T^2-\mathfrak{b}CA-\mathfrak{c}AB\\ ZX-TY=CA & T^2+Y^2-Z^2-X^2=2\mathfrak{b}CA & Y^2=T^2-\mathfrak{c}AB-\mathfrak{a}BC\\ XY-TZ=AB & T^2+Z^2-X^2-Y^2=2\mathfrak{c}AB & Z^2=T^2-\mathfrak{a}BC-\mathfrak{b}CA\end{array}$$

$$Y^2Z^2-T^2X^2 = BC(\mathfrak{a}^2BC+\mathfrak{a}\mathfrak{b}CA+\mathfrak{c}\mathfrak{a}AB+\mathfrak{b}\mathfrak{c}A^2-2\mathfrak{a}T^2),$$

oder wegen $BC = YZ - TX$:

$$YZ+TX = \mathfrak{a}^2BC+\mathfrak{a}\mathfrak{b}CA+\mathfrak{c}\mathfrak{a}AB+\sigma\mathfrak{b}\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a}^2)-2\mathfrak{a}T^2,$$

und

$$2YZ = (1+\mathfrak{a}^2)BC+\mathfrak{a}\mathfrak{b}CA+\mathfrak{c}\mathfrak{a}AB+\sigma\mathfrak{b}\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a}^2)-2\mathfrak{a}T^2.$$

Hieraus, aus 1) $A^2=\sigma(1-\mathfrak{a}^2)=Y^2+Z^2+2\mathfrak{a}YZ$, aus $Y^2=T^2-\mathfrak{c}AB-\mathfrak{a}BC$ und aus $Z^2=T^2-\mathfrak{a}BC-\mathfrak{b}CA$ folgt:

$$\sigma(1-\mathfrak{a}^2) = 2T^2-2\mathfrak{a}BC-\mathfrak{b}CA-\mathfrak{c}AB+\mathfrak{a}(1+\mathfrak{a}^2)BC+\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}CA$$
$$+\mathfrak{c}\mathfrak{a}^2AB+\sigma\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a}^2)-2\mathfrak{a}^2T^2=(1-\mathfrak{a}^2)(2T^2-\mathfrak{a}BC-\mathfrak{b}CA-\mathfrak{c}AB+\sigma\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}).$$

Es ist demnach

$$
\begin{array}{l|l}
2T_0^2 = \sigma - \sigma\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}BC + \mathfrak{b}CA + \mathfrak{c}AB & \\
2X_0^2 = \sigma - \sigma\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}BC - \mathfrak{b}CA - \mathfrak{c}AB & 2Y_0Z_0 = \sigma(\mathfrak{b}\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) + BC \\
2Y_0^2 = \sigma - \sigma\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} - \mathfrak{a}BC + \mathfrak{b}CA - \mathfrak{c}AB & 2Z_0X_0 = \sigma(\mathfrak{c}\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + CA \\
2Z_0^2 = \sigma - \sigma\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} - \mathfrak{a}BC - \mathfrak{b}CA + \mathfrak{c}AB & 2X_0Y_0 = \sigma(\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) + AB
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & (T_0+X_0+Y_0+Z_0)^2 = 2\sigma(1-\mathfrak{a})(1-\mathfrak{b})(1-\mathfrak{c}) = \tau^2 \\
2T_0X_0 = \sigma(\mathfrak{b}\mathfrak{c}-\mathfrak{a}) - BC & (-T_0-X_0+Y_0+Z_0)^2 = 2\sigma(1-\mathfrak{a})(1+\mathfrak{b})(1+\mathfrak{c}) = \tau_1^2 \\
2T_0Y_0 = \sigma(\mathfrak{c}\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) - CA & (-T_0+X_0-Y_0+Z_0)^2 = 2\sigma(1+\mathfrak{a})(1-\mathfrak{b})(1+\mathfrak{c}) = \tau_2^2 \\
2T_0Z_0 = \sigma(\mathfrak{a}\mathfrak{b}-\mathfrak{c}) - AB & (-T_0+X_0+Y_0-Z_0)^2 = 2\sigma(1+\mathfrak{a})(1+\mathfrak{b})(1-\mathfrak{c}) = \tau_3^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
T_0 + X_0 + Y_0 + Z_0 = \tau & 4T_0 = \tau - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3 \\
-T_0 - X_0 + Y_0 + Z_0 = \tau_1 & 4X_0 = \tau - \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \\
-T_0 + X_0 - Y_0 + Z_0 = \tau_2 & 4Y_0 = \tau + \tau_1 - \tau_2 + \tau_3 \\
-T_0 + X_0 + Y_0 - Z_0 = \tau_3 & 4Z_0 = \tau + \tau_1 + \tau_2 - \tau_3.
\end{array}
$$

2. *Anmerkung.* — Man überzeugt sich leicht, daß in allen aufgestellten Gleichungen und in den Resultaten dann völlige Übereinstimmung herrscht, wenn man die Vorzeichen der Quadratwurzeln aus den 8 Zahlen 2, σ, $1+\mathfrak{a}$, $1-\mathfrak{a}$, $1+\mathfrak{b}$, $1-\mathfrak{b}$, $1+\mathfrak{c}$, $1-\mathfrak{c}$ zwar beliebig wählt, aber die einmal gewählten konsequent überall festhält. Dabei ist zu beachten, daß $A = \sqrt{\sigma}\cdot\sqrt{1+\mathfrak{a}}\cdot\sqrt{1-\mathfrak{a}}$, $B = \sqrt{\sigma}\cdot\sqrt{1+\mathfrak{b}}\cdot\sqrt{1-\mathfrak{b}}$,

$$C = \sqrt{\sigma}\cdot\sqrt{1+\mathfrak{c}}\cdot\sqrt{1-\mathfrak{c}},\quad \tau = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sigma}\cdot\sqrt{1-\mathfrak{a}}\cdot\sqrt{1-\mathfrak{b}}\cdot\sqrt{1-\mathfrak{c}},$$

$$\tau_1 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sigma}\cdot\sqrt{1-\mathfrak{a}}\cdot\sqrt{1+\mathfrak{b}}\cdot\sqrt{1+\mathfrak{c}},\quad \tau_2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sigma}\cdot\sqrt{1+\mathfrak{a}}\cdot\sqrt{1-\mathfrak{b}}\cdot\sqrt{1+\mathfrak{c}},$$

$$\tau_3 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sigma}\cdot\sqrt{1+\mathfrak{a}}\cdot\sqrt{1+\mathfrak{b}}\cdot\sqrt{1-\mathfrak{c}}$$

zu setzen ist.

3. *Aufgabe.* — Sämtliche 64 Lösungen des Gleichungssystems

$$a^2 = \mathfrak{A},\quad b^2 = \mathfrak{B},\quad c^2 = \mathfrak{C},\quad 2\sigma = a + b + c,\quad \sigma_1 = \sigma - a,\quad \sigma_2 = \sigma - b,$$
$$\sigma_3 = \sigma - c,\ \sigma(y+z-a)^2 = 4\sigma_1 yz,\ \sigma(z+x-b)^2 = 4\sigma_2 zx,\ \sigma(x+y-c)^2 = 4\sigma_3 xy,$$

bei dem $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gegebene, und a, b, c, σ, σ_1, σ_2, σ_3, x, y, z gesuchte Zahlen bedeuten, sind, systematisch gruppiert, aufzustellen.

Lösung. — Es ist

$$a = y + z + 2\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}}\sqrt{yz},$$

$$b = z + x + 2\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma}}\sqrt{zx},$$

$$c = x + y + 2\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma}}\sqrt{xy},$$

oder, wenn man setzt

$$\begin{array}{r|r|r|l}
a = A^2 & x = X^2 & \sigma_1 : \sigma = \mathfrak{a}^2 & A^2 = \sigma(1 - \mathfrak{a}^2) = Y^2 + Z^2 + 2\mathfrak{a}YZ \\
b = B^2 & y = Y^2 & \sigma_2 : \sigma = \mathfrak{b}^2 & B^2 = \sigma(1 - \mathfrak{b}^2) = Z^2 + X^2 + 2\mathfrak{b}ZX \\
c = C^2 & z = Z^2 & \sigma_3 : \sigma = \mathfrak{c}^2 & C^2 = \sigma(1 - \mathfrak{c}^2) = X^2 + Y^2 + 2\mathfrak{c}XY.
\end{array}$$

Damit ist Nr. 3 auf Nr. 1 zurückgeführt.

Es ist, wie bei Nr. 1, so auch hier zweckmäßig, jeder Lösung $x = X_0^2$, $y = Y_0^2$, $z = Z_0^2$ eine Größe t dadurch (eindeutig) zuzuordnen, daß man $t = T_0^2$ setzt.

Aus $2T_0^2 = \sigma - \sigma\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}BC + \mathfrak{b}CA + \mathfrak{c}AB$ von Nr. 1 wird hier (bei Nr. 3)

$$2t = \sigma - \sigma\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma}} + \sigma\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}} \cdot \sqrt{\frac{b}{\sigma}} \cdot \sqrt{\frac{c}{\sigma}} + \sigma\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma}} \cdot \sqrt{\frac{c}{\sigma}} \cdot \sqrt{\frac{a}{\sigma}}$$

$$+ \sigma\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma}} \cdot \sqrt{\frac{a}{\sigma}} \cdot \sqrt{\frac{b}{\sigma}} \cdot$$

Diese *eine* Formel liefert *alle* 64 Lösungen, und zwar auf die einfachste Art, durch Substitutionen. Die nachfolgende Tabelle enthält die Resultate. Daselbst sind einige Abkürzungen und Abänderungen in der Bezeichnungsweise angebracht. Bei der $n$ten Lösung ist an Stelle von a, b, c, σ, σ_1, σ_2, σ_3, x, y, z, t genauer $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $\sigma(n)$, $\sigma_1(n)$, $\sigma_2(n)$, $\sigma_3(n)$, $x(n)$, $y(n)$, $z(n)$, $t(n)$ gesetzt. Es bedeutet a_0, b_0, c_0 bezüglich $\sqrt{\mathfrak{A}}$, $\sqrt{\mathfrak{B}}$, $\sqrt{\mathfrak{C}}$, und zwar mit beliebig gewähltem und dann überall festgehaltenem Vorzeichen, und es ist $2s_0 = a_0 + b_0 + c_0$, $s_1 = s_0 - a_0$, $s_2 = s_0 - b_0$, $s_3 = s_0 - c_0$,

$$\varrho_0 = \sqrt{s_1} \cdot \sqrt{s_2} \cdot \sqrt{s_3} : \sqrt{s_0};\ \varrho_1 = \sqrt{s_2} \cdot \sqrt{s_3} \cdot \sqrt{s_0} : \sqrt{s_1};\ \varrho_2 = \sqrt{s_3} \cdot \sqrt{s_0} \cdot \sqrt{s_1} : \sqrt{s_2};\ \varrho_3 = \sqrt{s_0} \cdot \sqrt{s_1} \cdot \sqrt{s_2} : \sqrt{s_3}$$

$$\alpha_0 = \sqrt{s_1} \cdot \sqrt{b_0} \cdot \sqrt{c_0} : \sqrt{s_0};\ \alpha_1 = \sqrt{s_0} \cdot \sqrt{b_0} \cdot \sqrt{c_0} : \sqrt{s_1};\ \alpha_2 = \sqrt{s_3} \cdot \sqrt{b_0} \cdot \sqrt{c_0} : \sqrt{s_2};\ \alpha_3 = \sqrt{s_2} \cdot \sqrt{b_0} \cdot \sqrt{c_0} : \sqrt{s_3}$$

$$\beta_0 = \sqrt{s_2} \cdot \sqrt{c_0} \cdot \sqrt{a_0} : \sqrt{s_0};\ \beta_1 = \sqrt{s_3} \cdot \sqrt{c_0} \cdot \sqrt{a_0} : \sqrt{s_1};\ \beta_2 = \sqrt{s_0} \cdot \sqrt{c_0} \cdot \sqrt{a_0} : \sqrt{s_2};\ \beta_3 = \sqrt{s_1} \cdot \sqrt{c_0} \cdot \sqrt{a_0} : \sqrt{s_3}$$

$$\gamma_0 = \sqrt{s_3} \cdot \sqrt{a_0} \cdot \sqrt{b_0} : \sqrt{s_0};\ \gamma_1 = \sqrt{s_2} \cdot \sqrt{a_0} \cdot \sqrt{b_0} : \sqrt{s_1};\ \gamma_2 = \sqrt{s_1} \cdot \sqrt{a_0} \cdot \sqrt{b_0} : \sqrt{s_2};\ \gamma_3 = \sqrt{s_0} \cdot \sqrt{a_0} \cdot \sqrt{b_0} : \sqrt{s_3}$$

Auch hier sind bei den Quadratwurzeln aus a_0, b_0, c_0, s_0, s_1, s_2, s_3 die Vorzeichen zwar beliebig, jedoch mit der Beschränkung, daß die einmal gewählten in der Folge überall unverändert zu lassen sind.

			t
1	$a(1)= a(2)= a(3)= a(4)= a_0$	$t(1)= x(2)= y(3)= z(4)= (s_0-\varrho_0+\alpha_0+\beta_0+\gamma_0):2$	$+2268$
2	$b(1)= b(2)= b(3)= b(4)= b_0$	$t(2)= x(1)= y(4)= z(3)= (s_0-\varrho_0+\alpha_0-\beta_0-\gamma_0):2$	$+330$
3	$c(1)= c(2)= c(3)= c(4)= c_0$	$t(3)= x(4)= y(1)= z(2)= (s_0-\varrho_0-\alpha_0+\beta_0-\gamma_0):2$	$+528$
4	$\sigma(1)= \sigma(2)= \sigma(3)= \sigma(4)= s_0$	$t(4)= x(3)= y(2)= z(1)= (s_0-\varrho_0-\alpha_0-\beta_0+\gamma_0):2$	$+630$
5	$a(5)= a(6)= a(7)= a(8)=-a_0$	$t(5)= x(6)= y(7)= z(8)=(-s_0-\varrho_0+\alpha_0+\beta_0+\gamma_0):2$	-42
6	$b(5)= b(6)= b(7)= b(8)=-b_0$	$t(6)= x(5)= y(8)= z(7)=(-s_0-\varrho_0+\alpha_0-\beta_0-\gamma_0):2$	-1980
7	$c(5)= c(6)= c(7)= c(8)=-c_0$	$t(7)= x(8)= y(5)= z(6)=(-s_0-\varrho_0-\alpha_0+\beta_0-\gamma_0):2$	-1782
8	$\sigma(5)= \sigma(6)= \sigma(7)= \sigma(8)=-s_0$	$t(8)= x(7)= y(6)= z(5)=(-s_0-\varrho_0-\alpha_0-\beta_0+\gamma_0):2$	-1680
9	$a(9)=a(10)=a(11)=a(12)= a_0$	$t(9)=x(10)=y(11)=z(12)=(-s_1+\varrho_1+\alpha_1+\beta_1+\gamma_1):2$	$+3960$
10	$b(9)=b(10)=b(11)=b(12)=-b_0$	$t(10)= x(9)=y(12)=z(11)=(-s_1+\varrho_1+\alpha_1-\beta_1-\gamma_1):2$	$+84$
11	$c(9)=c(10)=c(11)=c(12)=-c_0$	$t(11)=x(12)= y(9)=z(10)=(-s_1+\varrho_1-\alpha_1+\beta_1-\gamma_1):2$	-840
12	$\sigma(9)=\sigma(10)=\sigma(11)=\sigma(12)=-s_1$	$t(12)=x(11)=y(10)= z(9)=(-s_1+\varrho_1-\alpha_1-\beta_1+\gamma_1):2$	-891
13	$a(13)=a(14)=a(15)=a(16)=-a_0$	$t(13)=x(14)=y(15)=z(16)=(s_1+\varrho_1+\alpha_1+\beta_1+\gamma_1):2$	$+4536$
14	$b(13)=b(14)=b(15)=b(16)= b_0$	$t(14)=x(13)=y(16)=z(15)=(s_1+\varrho_1+\alpha_1-\beta_1-\gamma_1):2$	$+660$
15	$c(13)=c(14)=c(15)=c(16)= c_0$	$t(15)=x(16)=y(13)=z(14)=(s_1+\varrho_1-\alpha_1+\beta_1-\gamma_1):2$	-264
16	$\sigma(13)=\sigma(14)=\sigma(15)=\sigma(16)= s_1$	$t(16)=x(15)=y(14)=z(13)=(s_1+\varrho_1-\alpha_1-\beta_1+\gamma_1):2$	-315

			t
17	$a(17)=a(18)=a(19)=a(20)=-a_0$	$t(17)=y(18)=z(19)=x(20)=(-s_2+\varrho_2+\beta_2+\gamma_2+\alpha_2):2$	$+2970$
18	$b(17)=b(18)=b(19)=b(20)=b_0$	$t(18)=y(17)=z(20)=x(19)=(-s_2+\varrho_2+\beta_2-\gamma_2-\alpha_2):2$	$+70$
19	$c(17)=c(18)=c(19)=c(20)=-c_0$	$t(19)=y(20)=z(17)=x(18)=(-s_2+\varrho_2-\beta_2+\gamma_2-\alpha_2):2$	-1188
20	$\sigma(17)=\sigma(18)=\sigma(19)=\sigma(20)=-s_2$	$t(20)=y(19)=z(16)=x(17)=(-s_2+\varrho_2-\beta_2-\gamma_2+\alpha_2):2$	-1008
21	$a(21)=a(22)=a(23)=a(24)=a_0$	$t(21)=y(22)=z(23)=x(24)=(s_2+\varrho_2+\beta_2+\gamma_2+\alpha_2):2$	$+3780$
22	$b(21)=b(22)=b(23)=b(24)=-b_0$	$t(22)=y(21)=z(24)=x(23)=(s_2+\varrho_2+\beta_2-\gamma_2-\alpha_2):2$	$+880$
23	$c(21)=c(22)=c(23)=c(24)=c_0$	$t(23)=y(24)=z(21)=x(22)=(s_2+\varrho_2-\beta_2+\gamma_2-\alpha_2):2$	-378
24	$\sigma(21)=\sigma(22)=\sigma(23)=\sigma(24)=s_2$	$t(24)=y(23)=z(22)=x(21)=(s_2+\varrho_2-\beta_2-\gamma_2+\alpha_2):2$	-198
25	$a(25)=a(26)=a(27)=a(28)=-a_0$	$t(25)=z(26)=x(27)=y(28)=(-s_3+\varrho_3+\gamma_3+\alpha_3+\beta_3):2$	$+2640$
26	$b(25)=b(26)=b(27)=b(28)=-b_0$	$t(26)=z(25)=x(28)=y(27)=(-s_3+\varrho_3+\gamma_3-\alpha_3-\beta_3):2$	$+66$
27	$c(25)=c(26)=c(27)=c(28)=c_0$	$t(27)=z(28)=x(25)=y(26)=(-s_3+\varrho_3-\gamma_3+\alpha_3-\beta_3):2$	-1134
28	$\sigma(25)=\sigma(26)=\sigma(27)=\sigma(28)=-s_3$	$t(28)=z(27)=x(26)=y(25)=(-s_3+\varrho_3-\gamma_3-\alpha_3+\beta_3):2$	-1260
29	$a(29)=a(30)=a(31)=a(32)=a_0$	$t(29)=z(30)=x(31)=y(32)=(s_3+\varrho_3+\gamma_3+\alpha_3+\beta_3):2$	$+3564$
30	$b(29)=b(30)=b(31)=b(32)=b_0$	$t(30)=z(29)=x(32)=y(31)=(s_3+\varrho_3+\gamma_3-\alpha_3-\beta_3):2$	$+990$
31	$c(29)=c(30)=c(31)=c(32)=-c_0$	$t(31)=z(32)=x(29)=y(30)=(s_3+\varrho_3-\gamma_3+\alpha_3-\beta_3):2$	-210
32	$\sigma(29)=\sigma(30)=\sigma(31)=\sigma(32)=s_3$	$t(32)=z(31)=x(30)=y(29)=(s_3+\varrho_3-\gamma_3-\alpha_3+\beta_3):2$	-336

Die noch fehlenden 32 Lösungen erhält man aus den aufgestellten, indem man sämtliche Wurzeln der letzteren mit entgegengesetzten Vorzeichen versieht. Die Vorzeichen der Quadratwurzeln aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\frac{\sigma_1}{\sigma}$, $\frac{\sigma_2}{\sigma}$, $\frac{\sigma_3}{\sigma}$, $\frac{a}{\sigma}$, $\frac{b}{\sigma}$, $\frac{c}{\sigma}$ (vergl. Nr. 2, Anm.) sind beliebig. Die $2^9 = 512$ daraus sich ergebenden Vorzeichenkombinationen liefern nur 64 Werte für t, da, wie der Anblick der Formel für t lehrt, je 8 Zeichenverbindungen nur zu je *einem* Werte von t gehören:

	$\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}}$	$\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma}}$	$\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma}}$	$\sqrt{\frac{a}{\sigma}}$	$\sqrt{\frac{b}{\sigma}}$	$\sqrt{\frac{c}{\sigma}}$
1	+	+	+	+	+	+
2	+	−	−	−	+	+
3	−	+	−	+	−	+
4	−	−	+	+	+	−
5	+	+	+	−	−	−
6	+	−	−	+	−	−
7	−	+	−	−	+	−
8	−	−	+	−	−	+

Es soll nun an 3 Beispielen erläutert werden, wie aus der Formel

$$2t = \sigma - \sigma\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}}\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma}}\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma}} + \sigma\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}}\sqrt{\frac{b}{\sigma}}\sqrt{\frac{c}{\sigma}} + \sigma\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma}}\sqrt{\frac{c}{\sigma}}\sqrt{\frac{a}{\sigma}}$$
$$+ \sigma\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma}}\sqrt{\frac{a}{\sigma}}\sqrt{\frac{b}{\sigma}}$$

die in der obigen Tabelle angegebenen Lösungen entstehen.

1. Beispiel. Hat man die Wahl getroffen $a = -a_0$, $b = -b_0$, $c = -c_0$, sodaß $\sigma = -s_0$, $\sigma_1 = -s_1$, $\sigma_2 = -s_2$, $\sigma_3 = -s_3$ wird, und ferner noch die Wahl

$$\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}} = +\sqrt{\frac{s_1}{s_0}},\quad \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma}} = -\sqrt{\frac{s_2}{s_0}},\quad \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma}} = +\sqrt{\frac{s_3}{s_0}},\quad \sqrt{\frac{a}{\sigma}} = +\sqrt{\frac{a_0}{s_0}},$$
$$\sqrt{\frac{b}{\sigma}} = +\sqrt{\frac{b_0}{\sigma_0}},\quad \sqrt{\frac{c}{\sigma}} = -\sqrt{\frac{c_0}{s_0}},$$

so ist

$$2t = -s_0 - s_0\sqrt{\frac{s_1}{s_0}}\sqrt{\frac{s_2}{s_0}}\sqrt{\frac{s_3}{s_0}} + s_0\sqrt{\frac{s_1}{s_0}}\sqrt{\frac{b_0}{s_0}}\sqrt{\frac{c_0}{s_0}} - s_0\sqrt{\frac{s_2}{s_0}}\sqrt{\frac{c_0}{s_0}}\sqrt{\frac{a_0}{s_0}}$$
$$- s_0\sqrt{\frac{s_3}{s_0}}\sqrt{\frac{a_0}{s_0}}\sqrt{\frac{b_0}{s_0}},$$

oder

$$2t = -s_0 - \sqrt{\frac{s_1 s_2 s_3}{s_0}} + \sqrt{\frac{s_1 b_0 c_0}{s_0}} - \sqrt{\frac{s_2 c_0 a_0}{s_0}} - \sqrt{\frac{s_3 a_0 b_0}{s_0}},$$

oder

$$2t = -s_0 - \varrho_0 + \alpha_0 - \beta_0 - \gamma_0.$$

Dies ist der Wert von $2t(6)$ der Tabelle. Die zu $t(6)$ gehörigen Wurzeln $x(6)$, $y(6)$, $z(6)$ erhält man nach den Formeln für T_0^2, X_0^2, Y_0^2, Z_0^2 in **1**, S. 38, indem man bei α_0, $-\beta_0$, $-\gamma_0$ je 2 Vorzeichen ändert. Demnach ist

$$2x(6) = -s_0 - \varrho_0 + \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0,$$
$$2y(6) = -s_0 - \varrho_0 - \alpha_0 - \beta_0 + \gamma_0, \quad 2z(6) = -s_0 - \varrho_0 - \alpha_0 + \beta_0 - \gamma_0,$$

was sich auch tatsächlich in der Tabelle unter 5, 8, 7 als sechste Lösung findet.

2. Beispiel. $a = a_0$, $b = -b_0$, $c = -c_0$, $\sigma = -s_1$, $\sigma_1 = -s_0$, $\sigma_2 = +s_3$, $\sigma_3 = +s_2$,

$$\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}} = +\sqrt{\frac{s_0}{s_1}}, \quad \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma}} = -i\sqrt{\frac{s_3}{s_1}}, \quad \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma}} = +i\sqrt{\frac{s_2}{s_1}},$$
$$\sqrt{\frac{a}{\sigma}} = -i\sqrt{\frac{a_0}{s_1}}, \quad \sqrt{\frac{b}{\sigma}} = -\sqrt{\frac{b_0}{s_1}}, \quad \sqrt{\frac{c}{\sigma}} = +\sqrt{\frac{c_0}{s_1}},$$
$$2t = -s_1 + \sqrt{\frac{s_0 s_3 s_2}{s_1}} + \sqrt{\frac{s_0 b_0 c_0}{s_1}} + \sqrt{\frac{s_3 c_0 a_0}{s_1}} + \sqrt{\frac{s_0 a_0 b_0}{s_1}},$$

oder $2t = -s_1 + \varrho_1 + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$, und nach **1**:

$$2x = -s_1 + \varrho_1 + \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1, \quad 2y = -s_1 + \varrho_1 - \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1,$$
$$2z = -s_1 + \varrho_1 - \alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1.$$

Das sind die zur neunten Lösung gehörigen, unter 9, 10, 11, 12 der Tabelle angegebenen Wurzeln $t(9)$, $x(9)$, $y(9)$, $z(9)$.

3. Beispiel. Ist, abgesehen von $\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma}} = -\sqrt{\frac{s_0}{s_1}}$, alles übrige wie beim 2. Beispiel gewählt, so ist

$$2t = -s_1 - \varrho_1 - \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \quad 2x = -s_1 - \varrho_1 - \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1,$$
$$2y = -s_1 - \varrho_1 + \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1, \quad 2z = -s_1 - \varrho_1 + \alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1.$$

Das sind die *negativen* Werte der Wurzeln $t(14)$, $x(14)$, $y(14)$, $z(14)$ (unter 14, 13, 16, 15 der Tabelle). Es liegt demnach die $14 + 32 = 46$ste Lösung vor.

4. *Anmerkung.* — Die Wurzeln des Gleichungssystems in Nr. **3** sind bei allen 64 Lösungen dann und nur dann durchweg reell, wenn die vier Zahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $2\mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{A} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 - \mathfrak{C}^2$ reell und positiv sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn a_0, b_0, c_0 als Maßzahlen der Seiten eines *reellen* Dreiecks dienen können. In diesem Falle, also dann, wenn a_0, b_0, c_0 drei positive, den Bedingungen

$$b_0 + c_0 > a_0, \quad c_0 + a_0 > b_0, \quad a_0 + b_0 > c_0,$$

unterworfene Zahlen sind, lassen sich die Vorzeichen der Wurzeln $t(n)$, $x(n)$, $y(n)$, $z(n)$ (für $n = 1, 2, 3, \ldots, 64$), ohne die besonderen Zahlenwerte zu kennen, im voraus angeben. Die fraglichen Vorzeichen finden sich in der mit der Kopfüberschrift t versehenen Spalte der Tabelle. (Die daneben stehenden Zahlen liefern die Wurzeln bei dem Beispiel $\mathfrak{A} = 1734^2$, $\mathfrak{B} = 1500^2$, $\mathfrak{C} = 1386^2$.) Die Vorzeichen ergeben sich aus den Formeln $t = T_0^2$ und $4T_0 = \tau - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3$ (Seite 38). Mittelst der letzten Formel läßt sich nämlich leicht feststellen, ob T_0 reell oder (rein) imaginär ist. Jene Vorzeichen sind demnach von $a_0 : b_0 : c_0$ (von der Gestalt des reellen Dreiecks) völlig unabhängig.

5. *Anmerkung.* — Die Verifikation, daß man es durchweg in allen 64 Fällen mit richtigen Wurzeln der Gleichungen in Nr. **2** zu tun hat, ist leicht durchzuführen und kann daher übergangen werden.

6. *Bemerkung.* — Liegen in der Ebene eines reellen Dreiecks ABC drei reelle Punkte U, V, W so, daß das Produkt der sechs von U auf CA und AB, von V auf AB und BC und von W auf BC und CA gefällten Lote positiv ist, so durchschneidet von den drei Geraden AU, BV, CW entweder nur eine oder jede einen Innenwinkel. Ist dagegen das Produkt aus jenen 6 Loten negativ, so ist die Anzahl der von AU, BV, CW durchsetzten Innenwinkel entweder 2 oder 0. Hierbei haben, wie es gebräuchlich ist, zwei Lote einer Geraden gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem sie auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen.

7. *Die Malfattische Aufgabe.* — In einer Ebene sind drei reelle Gerade BC, CA, AB gegeben. Drei reelle Kreise U, V, W sind so herzustellen, daß jeder die beiden übrigen und zwei der drei Geraden berührt. Dabei sollen unter diesen 6 Linien keine 3 einem Büschel angehören.

Analysis.[1]) — Dieselbe soll sich nicht auf eine einzelne, besonders gezeichnete Figur allein beziehen, sondern so allgemein gehalten sein, daß sie von *jeder* Figur gilt, welche Gestalt das Dreieck ABC auch haben und welcher der 32 Fälle auch vorliegen möge. Es möge U die Geraden CA und AB in A_3 und A_2, ferner V die Geraden AB und BC in B_3 und B_2 und W die Geraden BC und CA in C_3 und C_2 berühren. Die Kreise V und W haben BC stets zu einer *äußeren* Tangente, weil sie nach Voraussetzung mit ihr kein Büschel bilden.

---

1) Vergl. Derousseau, Mémoires de la Société Royale des sciences de Liége, (2) XVIII, 1895 und des Verfassers Abhandlung im Programm des Gymnasiums an St. Stephan zu Straßburg i. E. 1902.

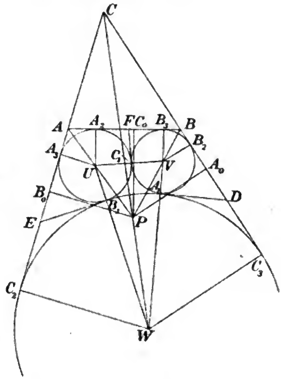
Die Radien VB_2 und WC_3 liegen somit auf derselben Seite von BC. Ihr Produkt und somit auch das der 6 Lote (Radien) UA_2, UA_3, VB_2, VB_3, WC_2, WC_3 ist demnach stets positiv. Von den 3 Geraden AU, BV, CW halbiert somit nach der Bemerkung 6 entweder jede oder nur eine einen Innenwinkel des Dreiecks ABC. Die 3 Geraden gehen also stets durch *einen* Punkt P, der das Zentrum entweder des In-

Zur Lösung Nr. 30:

$$BC = a_0 = 1734\,E$$
$$CA = b_0 = 1500\,E$$
$$AB = -c_0 = -1386\,E$$

$$B_0A = AC_0 = \sigma_1 = -s_2 = -810\,E$$
$$C_0B = BA_0 = \sigma_2 = -s_1 = -576\,E$$
$$A_0C = CB_0 = \sigma_3 = +s_0 = 2310\,E$$

$$A_3A = AA_2 = x = -336\,E$$
$$B_3B = BB_2 = y = -210\,E$$
$$C_3C = CC_2 = z = 3564\,E$$
$$61\,E = 1\text{ mm}$$



kreises oder eines der 3 Ankreise von ABC ist. Es seien A_0, B_0, C_0 und A_1, B_1, C_1, die Berührungspunkte dieses Kreises P mit den Dreiecksseiten und die der Kreispaare VW, WU, UV und D, E, F die Mitten der Strecken B_2C_3, C_2A_3, A_2B_3.

Bei Anwendung *absoluter* Größen ist es nicht möglich, *alle 32* Lösungen aus *einem* Gleichungssystem abzuleiten. Man gelangt aber zum Ziel, wenn man nach dem Vorgange von Carnot (De la corrélation des figures de géométrie, Paris 1801, Géométrie de position, Paris 1803) und Möbius (Barycentrischer Calcul 1827, Theorie der Kreisverwandtschaften in rein geometrischer Darstellung 1855) *relative* Strecken einführt. Wird irgend einer Strecke XY der Wert u zugewiesen, so ist demnach $YX = -u$ und $XY + YX = 0$ zu setzen. Die Werte aller entweder auf einer Dreiecksseite liegenden oder zu einer Dreieckshöhe parallelen Strecken sollen hier gleiche oder entgegengesetzte Korrelationsvorzeichen haben, jenachdem sie gleiche oder entgegengesetzte Richtungen haben.

Es sei

$$BC = a,\quad CA = b,\quad AB = c,\quad AC_0 = \sigma_1,\quad BA_0 = \sigma_2,\quad CB_0 = \sigma_3,$$
$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,\quad A_0P = \varrho,\quad AP = \alpha,\quad BP = \beta,\quad CP = \gamma,$$
$$AA_2 = x,\quad BB_2 = y,\quad CC_2 = z,\quad B_2D = d,\quad C_2E = e,\quad A_2F = f,$$
$$A_2U = u,\quad B_2V = v,\quad C_2W = w.$$

Die absoluten Werte von a, b, c seien a_0, b_0, c_0 (dabei $2s_0 = a_0 + b_0 + c_0$, $s_1 = s_0 - a_0$, $s_2 = s_0 - b_0$, $s_3 = s_0 - c_0$) und die von $\varrho, \alpha, \beta, \gamma$ entweder $\varrho_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ oder $\varrho_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ oder $\varrho_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ oder $\varrho_3, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, je nachdem P Inkreis oder einer der 3 Ankreise ist ($P = P_0$, P_1, P_2, P_3). Um auch gewisse *nicht parallele* Strecken in Korrelation zu bringen, wird willkürlich $C_0B = BA_0$, $A_0C = CB_0$, $A_0P = B_0P = C_0P$ gesetzt.

Dann ist $B_0A = \sigma_1$, $C_0B = \sigma_2$, $A_0C = \sigma_3$, und, wenn $a + b + c = \sigma$ gesetzt wird, $\sigma_1 = \sigma - a$, $\sigma_2 = \sigma - b$, $\sigma_3 = \sigma - c$. [Es nehmen dann ferner die Strecken $a, b, c, \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, je nachdem P In- oder Ankreis ist, folgende Werte an:

P	a	b	c	σ	σ_1	σ_2	σ_3
P_0	a_0	b_0	c_0	s_0	s_1	s_2	s_3
P_1	a_0	$-b_0$	$-c_0$	$-s_1$	$-s_0$	s_3	s_2
P_2	$-a_0$	b_0	$-c_0$	$-s_2$	s_3	$-s_0$	s_1
P_3	$-a_0$	$-b_0$	c_0	$-s_3$	s_2	s_1	$-s_0$

In jedem dieser 4 Fälle können auch *sämtliche* Vorzeichen gleichzeitig verändert werden.]

Da nämlich die Ecktransversalen AA_0, BB_0, CC_0 stets durch *einen* Punkt gehen, so ist auch den Vorzeichen nach $B_0A \cdot C_0B \cdot A_0C = AC_0 \cdot BA_0 \cdot CB_0$ (Ceva), oder (wegen $C_0B = BA_0$ und $A_0C = CB_0$) $B_0A = AC_0$. Somit ist $B_0A = \sigma_1$, $C_0B = \sigma_2$, $A_0C = \sigma_3$. Da $BC = BA_0 + A_0B$, so ist $a = \sigma_2 + \sigma_3$. Ebenso erhält man $b = \sigma_3 + \sigma_1$ und $c = \sigma_1 + \sigma_2$. Demnach ist $\sigma_1 = \sigma - a$, $\sigma_2 = \sigma - b$, $\sigma_3 = \sigma - c$. [Ist etwa $P = P_1$ (Ankreis) und setzt man $a = a_0$ (die ebenso berechtigte Annahme $a = -a_0$ führt überall zu entgegengesetzten Vorzeichen), so ist sowohl BA_0 als auch A_0C mit BC gleichgerichtet, also positiv. Somit ist $\sigma_2 = BA_0 = s_3$ und $\sigma_3 = A_0C = s_2$. Ferner ist $s_2 = CB_0$ zu CA invers und B_0A mit CA gleichgerichtet. Mithin ist $b = CA = -b_0$ und $\sigma_1 = B_0A = -s_0$. In gleicher Weise ergibt sich $c = -c_0$ und $\sigma = -s_1$.]
Ferner ist noch $A_3A = x$, $B_3B = y$, $C_3C = z$, $A_3U = u$, $B_3V = v$, $C_3W = w$, $DC_3 = d$, $EA_3 = e$, $FB_3 = f$, $B_2C_3 = 2d$, $C_2A_3 = 2e$, $A_2B_3 = 2f$.

Die Richtigkeit der 6 letzten Gleichungen ist ohne weiteres ersichtlich. Da die Punkte P und U auf derselben Winkelhalbierenden liegen, so haben die Lote $A_3 U$ und $A_2 U = u$ und die Strecken $A_3 A$ und $AA_2 = x$ bezüglich mit den Loten $B_0 P = \varrho$ und $C_0 P = \varrho$ und den Strecken $B_0 A = \sigma_1$ und $AC_0 = \sigma_1$ gleichzeitig gleiche oder gleichzeitig entgegengesetzte Vorzeichen. Somit stimmt stets $A_3 U$ mit $A_2 U = u$ und $A_3 A$ mit $AA_2 = x$ auch im Vorzeichen überein: $A_3 U = u$, $A_3 A = x$. Ebenso erhält man $B_3 B = y$, $C_3 C = z$, $B_3 V = v$, $C_3 W = w$. Da außerdem noch, wie schon oben bemerkt wurde, $B_2 V = v$ mit $C_3 W = w$ und $C_3 W = w$ mit $A_3 U = u$ gleichgerichtet ist, so haben die Radien u, v, w stets gleiche Vorzeichen, sodaß die Produkte vw, wu, uv durchweg positiv sind. Die 4 bekannten Dreiecksformeln $s_0 \varrho^2 = s_1 s_2 s_3$, $s_1 \varrho_1^2 = s_2 s_3 s_0$, $s_2 \varrho_2^2 = s_3 s_0 s_1$, $s_3 \varrho_3^2 = s_0 s_1 s_2$ gehen hier (vergl. das Tabellchen Seite 46) in die *eine* Formel $\sigma \varrho^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ über. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $BB_2 V$ und $BA_0 P$ und aus der von $CC_3 W$ und $CA_0 P$ folgt $B_2 V : BB_2 = B_0 P : BA_0$ und $C_3 W : C_3 C = A_0 P : A_0 C$, oder $v : y = \varrho : \sigma_2$ und $w : z = \varrho : \sigma_3$. Demnach ist $vw\sigma_2\sigma_3 = \varrho^2 yz$, oder $\sigma vw = \sigma_1 yz$. Da VD zu DW und DA_1 zu VW senkrecht ist, so ist das Dreieck $A_1 DV$ dem Dreiecke $A_1 WD$ ähnlich. Es ist also $A_1 D : A_1 V = A_1 W : A_1 D$, oder $\overline{A_1 D}^2 = A_1 V \cdot A_1 W = \overline{B_1 D}^2$, oder $d^2 = vw$, oder $\sigma d^2 = \sigma_1 yz$. $BC = BB_2 + B_2 C_3 + C_3 C$, oder $a = y + 2d + z$, oder $4d^2 = (y + z - a)^2$, oder $\sigma(y + z - a)^2 = 4\sigma_1 yz$. In ähnlicher Weise ergibt sich $\sigma(z + x - b)^2 = 4\sigma_2 zx$ und $\sigma(x + y - c)^2 = 4\sigma_3 xy$.

Resultat: Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ bei einem Dreiecke ABC die Seitenquadrate, so genügen die Größen $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $A_3 A = AA_2 = x$, $B_3 B = BB_2 = y$, $C_3 C = CC_2 = z$, $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ bei *jeder* Analysisfigur unter allen Umständen *einem und demselben* Gleichungssystem: $a^2 = \mathfrak{A}$, $b^2 = \mathfrak{B}$, $c^2 = \mathfrak{C}$, $2\sigma = a + b + c$, $\sigma_1 = \sigma - a$, $\sigma_2 = \sigma - b$, $\sigma_3 = \sigma - c$, $\sigma(y + z - a)^2 = 4\sigma_1 yz$, $\sigma(z + x - b)^2 = 4\sigma_2 zx$, $\sigma(x + y - c)^2 = 4\sigma_3 xy$.

Dieses System ist mit dem von Nr. 3 identisch. Jede reelle Lösung der Malfattischen Aufgabe muß demnach mit einer der 32 Lösungen der Tabelle Seite 40 u. 41 übereinstimmen. (Die noch übrigen 32 Lösungen von Nr. 3, die sich durch Umkehrung der Vorzeichen aus denen dieser Tabelle ergeben, liefern in geometrischer Hinsicht nichts Neues und kommen daher bei der Malfattischen Aufgabe nicht in Betracht.) — Die Malfattische Aufgabe (Nr. 7) hat also höchstens 32 reelle Lösungen.

Die Größen $\varrho_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \varrho_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \varrho_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \varrho_3, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ von Nr. 3 bedürfen hier (bei Nr. 7) noch der geometrischen Deutung. Läßt man bei Nr. 3 die Quadratwurzeln aus a_0, b_0, c_0, s_0, s_1, s_2, s_3

(Seite 39) durchweg als positiv gelten, so sind $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ wegen der Beziehungen $s_0\varrho_0^2 = s_1 s_2 s_3$, $s_1\varrho_1^2 = s_2 s_3 s_0$, $s_2\varrho_2^2 = s_3 s_0 s_1$, $s_3\varrho_3^2 = s_0 s_1 s_2$ die (positiv gedachten) Radien des Inkreises und der 3 Ankreise. Aus $\sigma \cdot \overline{AP}^2 = \sigma(\overline{AB_0}^2 + \overline{B_0P}^2) = \sigma(\sigma_1^2 + \varrho^2) = \sigma\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_1[\sigma(\sigma - a) + (\sigma - b)(\sigma - c)] = \sigma_1[2\sigma^2 - (a + b + c)\sigma + bc] = \sigma_1 bc$, aus $\sigma \cdot \overline{BP}^2 = \sigma_2 ca$, $\sigma \cdot \overline{CP}^2 = \sigma_3 ab$ und aus den Formeln Seite 39 folgt, daß für $P = P_0, P_1, P_2, P_3$ die Größen $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ der Reihe nach die (mit positiven Vorzeichen behafteten) Strecken $AP_0, BP_0, CP_0, AP_1, BP_1, CP_1, AP_2, BP_2, CP_2, AP_3, BP_3, CP_3$ bedeuten.

Konstruktion. Stecke (für $n = 1, 2, 3, \ldots, 32$, Tabelle Seite 40 u. 41) $BB_2 = y(n)$ und $C_3C = z(n)$ auf BC, ferner $CC_2 = z(n)$ und $A_3A = x(n)$ auf CA und $AA_2 = x(n)$ und $B_3B = y(n)$ auf AB ab, achte dabei, um beim Abstecken jegliche Zweideutigkeit zu vermeiden, streng darauf, daß alle auf einer Geraden gelegene Strecken (wie BC, BB_2 und C_3C) gleich oder entgegengesetzt gerichtet sein müssen, jenachdem ihre Werte [$a(n)$, $y(n)$ und $z(n)$, Tabelle Seite 40] gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, und stelle 3 Kreise U, V, W her, die bezüglich durch die Punktepaare A_2A_3, B_2B_3 und C_2C_3 gehen und daselbst die betreffenden Dreiecksseiten berühren. Diese Kreise sind die gesuchten.

Beweis. Nach dem Tabellchen Seite 46 ist sowohl $bc\sigma\sigma_1$ als auch $bc\sigma_2\sigma_3$ stets positiv. Nach der Formel $2\,Y_0Z_0 = \sigma(\mathfrak{bc} - \mathfrak{a}) + BC$ (Seite 38) und nach Seite 39 ist $2\,BC\,Y_0Z_0 = \sigma BC\mathfrak{bc} - \sigma\mathfrak{a}BC + B^2C^2 = \sqrt{bc\sigma_2\sigma_3} - \sqrt{bc\sigma\sigma_1} + bc$. Demnach ist $BC\,Y_0Z_0$ stets reell und $bcyz$ ($= B^2C^2\,Y_0^2Z_0^2$, Seite 39) und somit auch $\sigma_1 yz : \sigma$ stets positiv. Da also unter allen Umständen das Produkt cz mit by und somit auch $c(n)z(n)$ mit $b(n)y(n)$ oder $\overline{BA} \cdot \overline{BB_3}$ mit $\overline{CA} \cdot \overline{CC_2}$ im Vorzeichen übereinstimmt, so liegen die Punkte B_3 und C_2 und gleichzeitig auch die Kreise V und W stets auf *derselben* Seite von BC. Es ist also BC stets eine *äußere* gemeinschaftliche Tangente der Kreise V und W. Wie bei der Analysis (Seite 47), zeigt man auch hier, daß bei den konstruierten Kreisen V und W das Produkt der Radien $\overline{B_2V} \cdot \overline{C_2W} = \sigma_1(n)y(n)z(n) : \sigma(n)$ ist. Nach Nr. 5 und Nr. 3 ist $4\sigma_1(n)y(n)z(n) = \sigma(n)[y(n) + z(n) - a(n)]^2 = \sigma(n)[BB_2 + C_3C + CB]^2 = \sigma(n) \cdot \overline{C_3B_2}^2$. Hieraus und aus $B_2V \cdot C_3W = \sigma_1(n)y(n)z(n) : \sigma(n)$ folgt $\overline{B_2C_3}^2 = 4 \cdot B_2V \cdot C_3W$. Nun ist $\overline{VW}^2 = \overline{B_2C_3}^2 + (B_2V - C_3W)^2 = 4 \cdot B_2V \cdot C_3W + (B_2V - C_3W)^2 = (B_2V + C_3W)^2$. Bei den Kreisen V und W ist somit der absolute Wert der Zentrale VW gleich der Summe der absoluten Werte der Radien B_2V und C_3W; die Kreise berühren sich demnach von außen. Ebenso läßt sich zeigen, daß auch die Kreise W und U und die Kreise U und V einander von außen berühren und die Seite CA und AB bezüglich zu einer gemeinschaftlichen äußeren Tangente haben. Mithin sind U, V und W die 3 gesuchten Kreise.

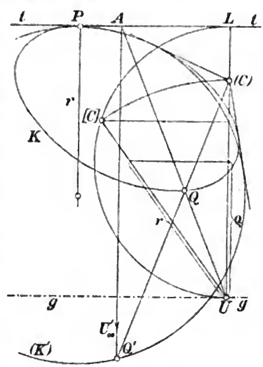
Determination. Die Malfattische Aufgabe (Nr. 7) hat genau 32 reelle Lösungen, da sie deren nach Analysis höchstens 32 und nach Konstruktion und Beweis mindestens 32 besitzt.[1])

Straßburg, den 31. Juli 1903.

Graphische Ermittlung des Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte einer Kegelschnittslinie.

Von A. Cappilleri in Reichenberg.

Es sei ein Kegelschnitt K und in ihm ein Punkt P gegeben, für welchen der Krümmungsradius ermittelt werden soll.



Man betrachtet den Kegelschnitt K als Basis eines Kegels, der von einer Ebene, die durch die Tangente t in P geht, nach einem Kreise K' geschnitten wird. Gelingt es, den Kegel so anzunehmen, daß jener Kreis zugleich ein Normalschnitt des Kegels ist, so läßt sich der Krümmungsradius des schiefen Schnittes K leicht aus jenem des Normalschnittes K' konstruieren, da er nach dem Satze von Meunier die Projektion des letzteren auf die Ebene des schiefen Schnittes ist.

Man zeichnet nun einen Kreis (K') mit beliebigem Radius, der t in P berührt und welcher die Umlegung des Kreisschnittes K' um t vorstellt. Die an K und (K') gelegten gemeinschaftlichen Tangenten schneiden sich in (C), dem Kollineationszentrum von K und (K'); das ist bekanntlich die Umlegung der Spitze C des Kegels um die Trace

1) Zur Erläuterung sind für das Beispiel $a_0 = 1734$, $b_0 = 1500$, $c_0 = 1386$ sämtliche Wurzeln für alle 32 Lösungen in der Tabelle S. 40 u. 41 angegeben. Die 32 Lösungsfiguren lassen sich darnach leicht zeichnen.

derjenigen Ebene, welche durch C parallel zur Kreisschnittebene E gelegt wird (Fluchttrace von E), während t die Kollineationsachse vorstellt. Diese Fluchttrace von E ist zugleich die Gegenachse, d. h. das Bild der unendlich fernen Punkte des Kreissystems im Kegelschnittsystem. Um sie zu finden, zieht man durch den beliebigen Punkt Q des Kegelschnittes K einen Kollineationsstrahl $(C)Q$ und bringt ihn mit dem Kreise (K') zum Schnitt. Dieser Punkt Q' ist nun Q kollinear zugeordnet. Durch Q' legt man eine beliebige Gerade, z. B. $Q'A \perp t$, zieht durch (C) einen Strahl $(C)L$ zu dem unendlich fernen Punkte U'_∞ dieser Geraden (also $(C)L \parallel Q'A$), so muß in diesem Strahle derjenige Punkt U des Kegelschnittsystems liegen, welcher dem unendlich fernen Punkte U'_∞ der Geraden $Q'A$ des Kreissystems entspricht. Ebenso ist die Gerade QA der Geraden $Q'A$ zugeordnet, weil A — als ein Punkt der Kollineationsachse — sich selbst entspricht. Der Schnittpunkt U von $(C)L$ und QA entspricht daher dem Schnittpunkte U'_∞ von $(C)L$ und $Q'A$; er ist also ein Punkt der gesuchten Gegenachse, und die Gerade g, die durch U parallel zu t gezogen wird, ist jene Gegenachse selbst.

Es handelt sich jetzt noch um die Bestimmung des Neigungswinkels der Kreisschnittebene, oder, was dasselbe ergibt, der Fluchtebene von E gegen die Zeichen- als Bildebene.

Denkt man sich durch LU eine projizierende Ebene gelegt, so ergeben die Schnitte mit der Bildebene, der Fluchtebene und der Tangentialebene Ct des Kegels ein Dreieck, das man in der Umlegung um LU zur Anschauung bringen kann. Dieses Dreieck muß rechtwinklig sein, da der Kreisschnitt ein Normalschnitt sein soll. Die seitlich um LU umgelegte Spitze $[C]$ muß daher in dem Halbkreise über LU liegen, aber auch in einem Kreise mit dem Radius $U(C)$ und dem Mittelpunkt U, da ja (C) die um die Fluchttrace g umgelegte Spitze C des Kegels ist.

Nachdem auf diese Weise der Neigungswinkel $(C)UL$ der Fluchtebene gegen die Bildebene bestimmt worden ist, trägt man auf $U[C]$ den Radius r des Kreises (K') auf und projiziert ihn auf UL, so ist nun ϱ nach dem eingangs zitierten Satze von Meunier der Krümmungsradius des Kegelschnittes K im Punkte P.

Die angegebene Methode hat mehrere Vorzüge: sie gilt für jeden Kegelschnitt, sie versagt nicht, wenn P im Scheitel der Ellipse liegt, ja sie ist auch dann ausführbar, wenn der Kegelschnitt bloß durch gewisse Elemente (z. B. 5 Punkte, oder 3 Punkte und 2 Tangenten gegeben ist.

Reichenberg, den 2. Juli 1903.

Bemerkung über das Kegelschnittbüschel.

Von OTTO STAUDE in Rostock.

Die Art eines Kegelschnittbüschels hängt analytisch von den Elementarteilern seiner Determinante $\Delta(\lambda)$ ab. Die Multiplizitätszahlen der Wurzeln von $\Delta(\lambda)$ können 1) 111 oder 2) 12 oder 3) 3 sein, die Exponenten der Elementarteiler ebenso I) 111 oder II) 12 oder III) 3. Von diesen beiden Unterscheidungsgründen sind 5 Kombinationen möglich, denen die folgende Lage der Schnittpunkte der beiden Grundkegelschnitte des Büschels entspricht:

I, 1. vier getrennte Schnittpunkte;
I, 2. zweimal zwei zusammenfallende Schnittpunkte;
II, 2. zwei getrennte und zwei zusammenfallende Schnittpunkte;
II, 3. vier zusammenfallende Schnittpunkte;
III, 3. ein getrennter und drei zusammenfallende Schnittpunkte.

Die vier letzten dieser Fälle sind bei Clebsch-Lindemann[1]) bezüglich mit 2., 1., 4. und 3. bezeichnet.

Hinsichtlich der Frage nach dem Vorkommen dieser vier Fälle bei zwei *konzentrischen* Grundkegelschnitten ist dort bemerkt, daß *„nur die Fälle 1. und 2. vorkommen können"*.[2]) Diese Bemerkung bedarf insofern einer Berichtigung, als zwar der dortige Fall 3. — hier III, 3. genannt — nicht vorkommen kann, *wohl aber der dortige Fall 4. — hier II, 3. genannt.*

Der Grund für die Unmöglichkeit des Falles III, 3 ist darin zu suchen, daß in diesem Falle nur *ein einziger* Punkt vorhanden ist, der inbezug auf beide Grundkegelschnitte $f = 0$ und $g = 0$ *dieselbe* Polare hat, und daß dieser Punkt, der Berührungspunkt B beider Kegelschnitte (vgl. Fig. 1), mit seiner Polare, der gemeinsamen Tangente b, *vereinigt* liegt. Dies *widerspricht* aber der Voraussetzung konzentrischer Kegelschnitte $f = 0$ und $g = 0$, da bei solchen der gemeinsame Mittelpunkt O inbezug auf beide Kegelschnitte *dieselbe* Polare, die unendlich ferne Gerade, hat und mit dieser *nicht vereinigt* liegt.

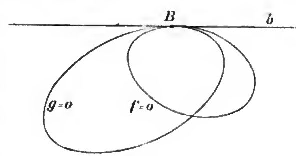


Fig. 1.

1) Vorlesungen über Geometrie (Ebene), 1876, S. 135.
2) Daselbst S. 144, Zeile 5 und 6 von oben.

Anders beim Falle II, 3. Hier hat *jeder Punkt* P der gemeinsamen Tangente b des Berührungspunktes B der beiden Kegelschnitte (vgl. Fig. 2) inbezug auf beide je *dieselbe* Polare p, die die Berührungspunkte S, B und T, B der von P an die Kegelschnitte gezogenen Tangenten verbindet. Diese Polare p liegt aber mit P im allgemeinen *nicht vereinigt*. Daher liegt hier der oben zu Fall III, 3 bemerkte Widerspruch bei zwei konzentrischen Kegelschnitten *nicht* vor.

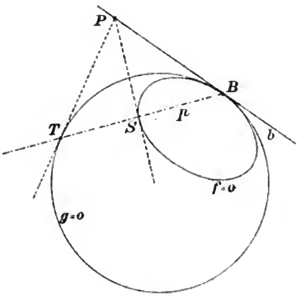


Fig. 2.

In der Tat entsprechen die beiden *konzentrischen*, etwa auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen *Hyperbeln*:

$$f = x^2 + 2xy - 1 = 0,$$
$$g = \qquad 2xy - 1 = 0$$

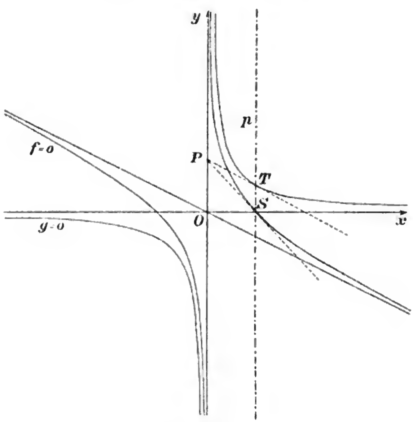


Fig. 3.

dem Falle II, 3. Denn die Determinante des Büschels $f - \lambda g = 0$:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3$$

hat die dreifache Wurzel $\lambda = 1$, und $(1-\lambda)$ ist größter gemeinsamer Faktor aller Unterdeterminanten 2. Grades.

Die beiden Hyperbeln (vgl. Fig. 3) berühren sich im unendlich fernen Punkte B der y-Achse in der 3. Ordnung, die y-Achse selbst ist die gemeinsame Tangente b im Berührungspunkt B. Die Berührungspunkte S und T der von einem beliebigen Punkte P der y-Achse an die Kurven gezogenen Tangenten liegen auf einer zur y-Achse parallelen Geraden, der gemeinsamen Polare p des Punktes P inbezug auf beide Kurven.

Rostock, den 8. November 1903.

Übersicht der Theorie der Gleichungen vom fünften Grade.

Von G. Vivanti in Messina.

1. Einer der hervorragendsten Züge der heutigen Mathematik ist der Zusammenhang, das Ineinanderdringen der verschiedenen Zweige derselben. Als ein glänzendes Beispiel dieser Tatsache kann man die Theorie der Gleichungen vom fünften Grade anführen, wie sie in dem klassischen Werke von F. Klein[1]) erscheint.

Seitdem die Untersuchungen von Ruffini und Abel es als unmöglich nachgewiesen haben, die Wurzeln einer allgemeinen Gleichung fünften Grades als explizite algebraische Funktionen von deren Koeffizienten auszudrücken, entstand der Wunsch, dieselben als einfachstmögliche transzendente Funktionen der Koeffizienten darzustellen. Die gleichzeitige Entwickelung der Theorie der elliptischen Funktionen bot die Mittel dazu, da man fand, daß die Wurzeln einer allgemeinen Gleichung 5. Grades durch ebensolche Funktionen darstellbar sind. Da aber die elliptischen Funktionen von einem einzigen Argumente abhängig sind, während die allgemeine Gleichung 5. Grades fünf willkürliche Koeffizienten enthält, so erwies es sich als nötig, diese Gleichung in eine andere, nur einen unbestimmten Koeffizienten enthaltende umzu-

1) *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Theorie der Gleichungen vom fünften Grade,* Leipzig, Teubner, 1884. — Siehe auch meine: *Lezioni sulla teoria della risoluzione delle equazioni di 5° grado,* Reggio Calabria, Massara, 1902 (lithogr.).

formen. Dazu gelangt man mit zwei Schritten. Erstens transformiert man die allgemeine Gleichung (Gl. A) in eine *Hauptgleichung* (Gl. B), d. i. in eine von den Gliedern 4. und 3. Grades befreite Gleichung; das geschieht einfach durch eine Quadratwurzelausziehung. Zweitens bewirkt man, daß die Wurzeln dieser Gleichung, welche drei unbestimmte Koeffizienten enthält, von den Wurzeln einer Gleichung mit einem einzigen willkürlichen Koeffizienten (Gl. C) und von zwei Parametern auf bekannte Weise abhängen; das läßt sich auf rein algebraischem Wege ausführen, und man kann, wenn die Gleichung (A) oder (B) vorgegeben ist, die entsprechenden Werte der zwei Parameter und der Koeffizienten der Gleichung (C) bestimmen.

Gleichung (C) ist selbstverständlich nicht algebraisch auflösbar; sie ist eine Gleichung vom 60. Grade, welche aus später zu erörternden Gründen als *Ikosaedergleichung* bezeichnet wird.

Wir nehmen uns vor, die Hauptbegriffe der Theorie der Gleichungen 5. Grades hervorzuheben, ohne auf die Einzelheiten der Rechnungen einzugehen.

2. Ist eine Klasse von Elementen irgend welcher Art vorgegeben, so bezeichnet man als *Operation* diejenige Wirkung, welche von einem Elemente zu einem andern führt. Das *Produkt* von zwei oder mehreren Operationen ist die der Aufeinanderfolge derselben entsprechende Wirkung. Ein Produkt von lauter gleichen Faktoren heißt, wie gewöhnlich, eine *Potenz*. — Das Produkt der zwei Operationen S, T wird durch ST bezeichnet, wobei zu beachten ist, daß ST und TS nicht notwendig identisch sind.

Hat eine Menge von Operationen die Eigenschaft, daß das Produkt von irgend zwei Operationen der Menge ebenfalls der Menge angehört, so heißt dieselbe eine *Gruppe*. Jede *endliche*, d. h. aus einer endlichen Anzahl (die *Ordnung* der Gruppe) von Operationen bestehende Gruppe hat die drei folgenden Grundeigenschaften:

a) Sie enthält die *identische Operation*, d. h. diejenige Operation, durch welche man von jedem Elemente zu demselben Elemente übergeht (diese Operation wird durch S^0 oder durch 1 bezeichnet).

b) Sie enthält die zu jeder ihrer Operationen *inverse Operation*, d. h. diejenige Operation, welcher die entgegengesetzte Wirkung entspricht.

c) Jede ihrer Operationen ist von endlicher Ordnung, wobei als *Ordnung* einer Operation S die kleinste Zahl n bezeichnet wird, für welche $S^n = S_0$.

Ist S eine Operation von der Ordnung n, so bilden die Operationen:

$$1, \quad S, \quad S^2, \ldots, S^{n-1}$$

eine Gruppe, welche als *zyklisch* bezeichnet wird.

Stellt T^{-1} die zu T inverse Operation dar, so heißt $T^{-1}ST$ die *aus S durch T transformierte Operation;* ist insbesondere $TS = ST$, in welchem Falle man sagt, S und T seien *vertauschbar*, so ist $T^{-1}ST = S$. Die Gesamtheit der aus den Operationen einer Gruppe durch ein und dieselbe Operation transformierten Operationen bildet ebenfalls eine Gruppe. Ist eine Gruppe G vorgegeben, und transformiert man sämtliche Operationen einer *Untergruppe I* derselben (d. h. einer in G enthaltenen Gruppe) durch ein und dieselbe Operation von G, so entsteht eine andere Untergruppe I' von G, die zu I *gleichberechtigt* ist, und in einzelnen Fällen mit I zusammenfallen kann. Findet das letztere für jede transformierende Operation von G statt, so heißt I eine *ausgezeichnete* oder *invariante* Untergruppe von G. Enthält eine Gruppe keine ausgezeichnete Untergruppe (außer sich selbst und der aus der identischen Operation einzig und allein bestehenden Gruppe), so heißt sie *einfach;* im entgegengesetzten Falle ist sie *zusammengesetzt.*

Kann man jeder Operation einer Gruppe G eine Operation einer anderen Gruppe G' derart zuordnen, daß, wenn S und S', T und T' entsprechende Operationen sind, ST und $S'T'$ sich entsprechen, so heißt G' zu G *isomorph*, und zwar *holoedrisch* oder *meriedrisch,* je nachdem die, verschiedenen Elementen von G entsprechenden, Elemente von G' durchaus verschieden sind oder nicht. In diesem zweiten Falle bilden diejenigen Elemente von G, denen die identische Operation in G' entspricht, eine invariante Untergruppe von G, deren Ordnung der Quotient der Ordnungen der beiden Gruppen ist. Der meriedrische Isomorphismus kann also nur dann stattfinden, wenn G zusammengesetzt ist.

3. Die bisher erörterten Begriffe, die eine beträchtliche Tragweite haben, finden eine für uns besonders wichtige Anwendung in der Theorie der linearen Substitutionen einer komplexen Veränderlichen.

Eine *lineare Substitution* ist diejenige Operation, durch welche man von einem beliebigen Werte z zu einem anderen z' übergeht, der mit z durch die Gleichung:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{1}$$

zusammenhängt; hier sind α, β, γ, δ reelle oder komplexe Konstanten, welche der Ungleichung:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

genügen. Die Substitution (1) wird manchmal durch:

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$$

bezeichnet; $\alpha\delta - \beta\gamma$ heißt die *Determinante* der Substitution. Die zu einer linearen Substitution (1) inverse Operation, d. i. diejenige Operation, welche z' in z überführt, ist ebenfalls eine lineare Substitution, nämlich:

$$z = \frac{\delta z' - \beta}{-\gamma z' + \alpha}.$$

Die identische Operation kann als eine lineare Substitution (1) angesehen werden, wo $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$. Das Produkt von zwei linearen Substitutionen ist eine lineare Substitution.

Aus dem Gesagten erhellt, daß die linearen Substitutionen eine (unendliche) Gruppe bilden, welche die Eigenschaften a) und b) besitzt.

Eine lineare Substitution läßt zwei verschiedene oder zusammenfallende Werte von z unverändert, welche die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0$$

sind und die *Pole* der Substitution genannt werden.[1])

Eine Substitution mit zwei verschiedenen Polen p, q kann auf die Form:

$$\frac{z' - p}{z' - q} = \theta \frac{z - p}{z - q} \tag{2}$$

gebracht werden, wo θ eine Konstante ist. Ist der absolute Betrag der Konstante θ gleich eins, so heißt die Substitution *elliptisch;* ist θ reell, so heißt sie *hyperbolisch;* in jedem anderen Falle wird sie *loxodromisch* genannt. Eine Substitution (2) ist dann und nur dann von endlicher Ordnung, wenn sie elliptisch und θ eine Einheitswurzel ist.

Eine Substitution mit einem einzigen Pole r heißt *parabolisch;* sie kann auf die Form:

$$\frac{1}{z' - r} = \eta + \frac{1}{z - r}$$

gebracht werden, wo η eine Konstante ist. Eine parabolische Substitution ist nie von endlicher Ordnung.

Es folgt hieraus, daß eine endliche Gruppe aus lauter elliptischen Substitutionen mit Einheitswurzeln als Konstanten θ bestehen muß.

Es kann sich ereignen, daß mehrere Substitutionen einer endlichen Gruppe einen Pol gemein haben; dann haben sie auch den zweiten Pol gemein, und bilden eine zyklische Untergruppe. Die aus dieser durch eine Substitution T der Gruppe transformierte Untergruppe ist ebenfalls zyklisch und hat als Pole diejenigen Werte, in welche die früheren

1) Ausgeschlossen bleibt die identische Substitution, in bezug auf welche alle Werte von z als Pole angesehen werden dürfen.

Pole durch die Substitution T übergehen. Die Pole der beiden gleichberechtigten Untergruppen heißen *äquivalent*.

Ist n die Ordnung einer Gruppe, p ein $\nu - 1$ Substitutionen derselben, außer der Identität, gemeinschaftlicher Pol, so ist ν ein Teiler von n, und p gehört einem Systeme von $\frac{n}{\nu}$ äquivalenten Polen. Zwischen n und den verschiedenen Werten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ von ν besteht die wichtige Relation:

$$\sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) = 2 - \frac{2}{n}.$$

Auf Grund dieser Relation kann man alle **möglichen** Gruppen von linearen Substitutionen ganz leicht bestimmen. Zunächst ergibt sich, daß r nur die Werte 2 oder 3 haben kann. Sodann erhält man als einzig mögliche Lösungen die folgenden, wo m und n beliebige ganze positive Zahlen bezeichnen:

(3)

	r	ν_1	ν_2	ν_3	n
I	2	n	n		n
II	3	2	2	m	$2m$
III	3	2	3	3	12
IV	3	2	3	4	24
V	3	2	3	5	60

4. Ordnet man dem komplexen Werte $z = x + iy$ den Punkt einer Ebene zu, dessen kartesische Koordinaten x, y sind, so stellt eine Substitution:

$$z' = f(z) \tag{4}$$

eine *Transformation der Ebene in sich* dar, d. h. eine Transformation, die jeden Punkt der Ebene in einen anderen, im allgemeinen verschiedenen Punkt derselben überführt. Welche besonderen Merkmale bietet diese Transformation dar, wenn die Substitution (4) die Form (1) hat?

Zunächst gibt es, von dem Falle der identischen Substitution abgesehen, nur einen oder zwei Punkte, die in sich selbst übergehen; es sind die Pole der Substitution. Beschränken wir uns nun auf den Fall einer elliptischen Substitution, deren Pole p, q sein mögen. Ist dann ein beliebiger Punkt gegeben, so läßt sich ein einziger durch z gehender Kreis bestimmen, dessen Mittelpunkt auf der Geraden pq liegt, und in bezug auf welchen p und q einander konjugiert sind; der transformierte Punkt z' liegt auf demselben Kreise, und die Kreisabschnitte pzq, $pz'q$ bilden einen konstanten Winkel (das Argument von θ).

Liegt insbesondere einer der Pole, z. B. q, im Unendlichen, so hat der durch z gehende Kreis p als Mittelpunkt, und die erwähnten Kreisabschnitte gehen in die Geraden pz, pz' über.

Man erlangt aber die höchste Ersichtlichkeit, wenn man von der Ebene zur Kugelfläche übergeht. Wählt man nämlich auf passende Weise die Kugel und das Projektionszentrum, so wird das System der Kreise der Ebene, deren Mittelpunkte auf pq liegen und in bezug auf welche p und q einander konjugiert sind, durch stereographische Projektion[1]) in ein System von Parallelkreisen umgeformt, deren Pole die Projektionen p', q' der Punkte p, q sind; und die lineare Substitution wird durch eine Drehung der Kugel dargestellt, deren Achse der Durchmesser $p'q'$ ist und deren Amplitude durch das Argument von θ gegeben wird.

Jeder Gruppe von linearen Substitutionen entspricht darnach eine Gruppe von Drehungen einer Kugel in sich. Es ist aber sehr wichtig zu bemerken, daß allen als **möglich** nachgewiesenen Substitutionsgruppen **wirklich existierende** Drehungsgruppen entsprechen.

Es liege ein reguläres Polyeder und die demselben umgeschriebene Kugel vor. Sind ab, cd irgend zwei Kanten des Polyeders, so läßt sich ab durch eine Drehung der Kugel in sich mit cd oder mit dc in Übereinstimmung bringen. Alle diese Drehungen, deren Anzahl — mit Einschluß der Drehung um einen Winkel Null, die alles unverändert läßt — doppelt so groß ist als die Anzahl der Kanten des Polyeders, führen das Polyeder in sich über, und keine andere Drehung hat dieselbe Eigenschaft; sie bilden offenbar eine Gruppe. Jedem regulären Polyeder entspricht also eine Drehungsgruppe. Diese Gruppen sind aber nicht sämtlich von einander verschieden; denn jede Drehung, welche ein Polyeder in sich überführt, führt auch das polare Polyeder, d. h. das Polyeder, dessen Ecken die sphärischen Mittelpunkte der Seitenflächen des ersteren sind, in sich über. Es gibt also, den regulären Polyedern entsprechend, nur drei verschiedene Gruppen, nämlich die *Tetraedergruppe*, die *Oktaeder-* oder *Hexaedergruppe* und die *Ikosaeder-* oder *Dodekaedergruppe*.

Weitere endliche Drehungsgruppen ergeben sich folgendermaßen.

Man kann ein einem größten Kreise der Kugel einbeschriebenes

1) Eine stereographische Projektion ist die Projektion einer Ebene auf eine Kugelfläche von dem einen Endpunkt des zur Ebene senkrechten Durchmessers der Kugel als Projektionszentrum aus. Sie hat die beiden folgenden Haupteigenschaften:

a) daß die Größe der Winkel sich bei der Projektion erhält;

b) daß die Kreise und die Geraden in Kreise übergehen.

reguläres Polygon als ein von zwei zusammenfallenden Seitenflächen eingeschlossenes reguläres Polyeder *(Dieder)* ansehen; die Drehungen, die diese Figur in sich überführen, bilden eine Gruppe, die *Diedergruppe*, deren Ordnung doppelt so groß wie die Anzahl der Seiten des Polygons ist. Reduziert sich insbesondere das Polygon auf einen zweifach gezählten Durchmesser des größten Kreises, so ist die entsprechende Diedergruppe von der Ordnung 4 und wird *Vierergruppe* genannt.

Endlich gibt es noch ganz einfache Drehungsgruppen, die *zyklischen Gruppen*, die je aus einer Drehung um einen Winkel, der ein Teiler von 2π ist, und aus deren Potenzen bestehen.

Man kann einsehen, daß die zyklischen Gruppen, die Diedergruppen und die Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaedergruppe das Abbild der Substitutionsgruppen I, II, III, IV, V der Tabelle (3) sind.

Erstens nämlich besteht eine zyklische Drehungsgruppe aus n Drehungen mit denselben zwei Polen, und jeder von diesen ist nur sich selbst äquivalent; also ist $r = 2$, $\frac{n}{\nu_1} = 1$, $\frac{n}{\nu_2} = 1$, folglich $\nu_1 = \nu_2 = n$ (vgl. Tab. (3), I).

Betrachten wir ferner, neben jedem regulären Polyeder, die durch Projektion seiner Kanten vom Mittelpunkt aus auf der umgeschriebenen Kugelfläche erzeugte Einteilung, und bezeichnen dieselbe als ein *sphärisches Polyeder*. So z. B. hat das *sphärische Dieder* als Seitenflächen zwei Halbkugeln, als Ecken m äquidistante Punkte des ihnen gemeinsamen größten Kreises, als Kanten die m Bogen, in welche dieser Kreis von den erwähnten Punkten geteilt wird. — Jede Drehung der betreffenden Gruppe führt auch das sphärische Polyeder in sich über.

Fangen wir mit dem Dieder an, so besteht die bezügliche Gruppe aus folgenden Drehungen:

Eine Drehung von $\frac{2\pi}{m}$ um den zur Ebene des Polygons senkrechten Durchmesser und ihre Potenzen;

m Drehungen von π um die Symmetrieachsen des Polygons.

Die Ordnung der Gruppe ist also $n = 2m$, und man hat drei Arten einander äquivalenter Pole:

die m Ecken $\left(\frac{n}{\nu_1} = m\right)$;

die m Halbierungspunkte der Kanten $\left(\frac{n}{\nu_2} = m\right)$;

die Mittelpunkte der zwei Seitenflächen $\left(\frac{n}{\nu_3} = 2\right)$.

Es ist folglich $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = m$ (vgl. Tab. (3), II).

Fassen wir jetzt das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder zugleich ins Auge, welche die gemeinsame Eigenschaft besitzen, gleichseitige Dreiecke als Seitenflächen zu haben. Teilen wir jede Seitenfläche des entsprechenden sphärischen Polyeders durch die Medianen in 6 rechtwinklige, abwechselnd gleiche und symmetrische Dreiecke; da 4 dieser Dreiecke um jede Kante stehen, so ist die Anzahl der Dreiecke viermal so groß wie die der Kanten, also $= 2n$. Die Anzahl der Seitenflächen ist folglich $\frac{n}{3}$; hieraus ergibt sich in den drei Fällen beziehentlich $n = 12, 24, 60$. Es folgt endlich aus dem Eulerschen Satze über die Polyeder[1]), daß die Anzahl der Ecken $= \frac{n+12}{6}$ ist, also, wie bekannt, 4, 6, 12.

Jedes der erwähnten Dreiecke hat zu Ecken den Halbierungspunkt einer Kante, den Mittelpunkt einer Seitenfläche und eine Ecke des sphärischen Polyeders; die bezüglichen Winkel sind $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{q}$, wo $q = \frac{6n}{n+12}$, also $= 3, 4, 5.$[2])

Die Drehungen, welche das Polyeder in sich überführen, sind dieselben, welche ein bestimmtes Dreieck mit allen gleichen Dreiecken in Übereinstimmung bringen, also:

---

1) Ist K, S, E die Anzahl der Kanten, der Seitenflächen und der Ecken eines Polyeders, so sagt der Eulersche Satz aus, daß:

$$S + E = K + 2.$$

In unserem Falle ist:

$$K = \frac{n}{2}, \quad S = \frac{n}{3},$$

also:

$$E = \frac{n}{2} - \frac{n}{3} + 2 = \frac{n+12}{6}.$$

2) Um jeden Halbierungspunkt einer Kante stehen 4, um jeden Mittelpunkt einer Seitenfläche 6 Dreiecke; also sind die bezüglichen Winkel $\frac{2\pi}{4}$ oder $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{2\pi}{6}$ oder $\frac{\pi}{3}$. Um den dritten Winkel zu bestimmen, wenden wir den Lhuilierschen Satz an, nach welchem die Fläche eines sphärischen Dreiecks der um π verminderten Winkelsumme gleich ist. Da unsere Kugelfläche in $2n$ gleiche Dreiecke zerfällt, so ist die Fläche eines jeden Dreiecks $\frac{4\pi}{2n}$ oder $\frac{2\pi}{n}$; bezeichnen wir also durch $\frac{\pi}{q}$ den zu bestimmenden Winkel, so ist:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{q} - \pi = \frac{2\pi}{n},$$

woraus folgt:

$$q = \frac{6n}{n+12}.$$

Demnach kann die Anzahl der Ecken des Polyeders durch $\frac{n}{q}$ ausgedrückt werden.

a) die Nulldrehung;

b) die Drehungen von der Amplitude π um die durch die Halbierungspunkte von je zwei entgegengesetzten Kanten gehenden Durchmesser (*Medianen);* ihre Anzahl ist $\frac{n}{4}$, und die Endpunkte der Drehungsachsen bilden $\frac{n}{2}$ äquivalente Pole;

c) die Drehungen von den Amplituden $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ um die durch die Mittelpunkte von je zwei entgegengesetzten Seitenflächen gehenden Durchmesser; ihre Anzahl ist $2\frac{n}{6}$ oder $\frac{n}{3}$, und die Endpunkte der Drehungsachsen bilden $\frac{n}{3}$ äquivalente Pole;

d) die Drehungen von den Amplituden $\frac{2\pi}{q}, \frac{4\pi}{q}, \ldots, \frac{2(q-1)\pi}{q}$ um die Diagonalen des Polyeders; ihre Anzahl ist $(q-1)\frac{n}{2q} = \frac{5n-12}{12}$, und die Endpunkte der Drehungsachsen bilden $\frac{n}{q}$ äquivalente Pole.

Daß die Gruppe keine weitere Drehung umfaßt, erhellt auch daraus, daß die Gesamtanzahl der Drehungen a), b), c), d) genau gleich n ist.

Es gibt also drei und nur drei Systeme von äquivalenten Polen ($r = 3$), und man hat:

$$\frac{n}{\nu_1} = \frac{n}{2}, \quad \frac{n}{\nu_2} = \frac{n}{3}, \quad \frac{n}{\nu_3} = \frac{n}{q},$$

woraus folgt (vgl. Tab. (3), III, IV, V):

$$\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 3, \quad \nu_3 = q = 3, 4, 5.$$

Wollen wir etwas tiefer in die Beschaffenheit der gefundenen Drehungsgruppen eindringen, so können wir uns fragen, ob dieselben einfach oder zusammengesetzt sind.

Eine zyklische Gruppe ist stets und nur dann einfach, wenn ihre Ordnung eine Primzahl ist.

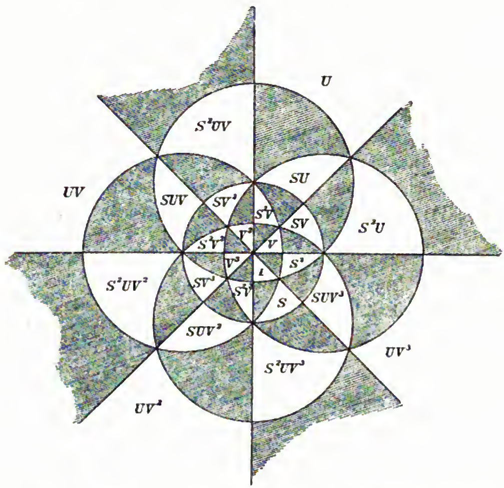
Eine Diedergruppe von der Ordnung $n = 2m$ enthält eine zyklische Gruppe, d. i. die Gruppe der Drehungen um den zur Ebene des Polygons senkrechten Durchmesser, als invariante Untergruppe.

Die Tetraedergruppe enthält als invariante Untergruppe die aus der Nulldrehung und den drei Drehungen b) bestehende Vierergruppe.

Die Oktaedergruppe enthält als invariante Untergruppe diejenige Tetraedergruppe, welche das von den Mittelpunkten von vier nicht benachbarten Seitenflächen des Oktaeders gebildete Tetraeder in sich überführt.

Dagegen ist die Ikosaedergruppe einfach.

Es mögen gewisse, selbstverständlich nicht ausgezeichnete Untergruppen der Ikosaedergruppe hier erwähnt werden. — Die 15 Medianen des Ikosaeders bilden 5 rechtwinklige Tripel, welche durch Drehungen um eine Diagonale ineinander übergehen. Von den 60 Ikosaederdrehungen führen folglich 12 ein bestimmtes Medianentripel in sich über; diese Drehungen bilden eine Tetraedergruppe. Es gibt also 5 gleichberechtigte tetraedrische Untergruppen, welche durch Drehungen um eine Diagonale ineinander transformiert werden.



5. Wie leicht auch die Behandlung der aufgefundenen Drehungsgruppen sein mag, es ist doch vorteilhafter mit ebenen, als mit sphärischen Figuren zu tun zu haben. Um dies zu erreichen, brauchen wir nur die sphärischen Figuren stereographisch auf die Ebene wiederum zu projizieren. Die folgende Bemerkung mag die Ausführung der Projektion für die drei betrachteten Polyeder (Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder) erleichtern: die Kanten und die Medianen der bezüglichen sphärischen Polyeder bilden zusammengenommen ganze größte Kreise, und zwar beziehentlich 6, 9 und 15. Da also bei der Projektion die Kreise in

Kreise oder Geraden übergehen, so wird die ebene Figur in den drei Fällen aus 6, 9 oder 15 Kreisen oder Geraden bestehen. Wir geben hier die Oktaederfigur als Beispiel.[1]) Dabei sind die Dreiecke des Netzes abwechselnd schraffiert und nicht schraffiert, so daß die schraffierten Dreiecke einander gleich und zu den weißen symmetrisch sind, wenn man die ebenen Abbildungen von zwei einander gleichen oder symmetrischen sphärischen Dreiecken als **gleich** oder **symmetrisch** bezeichnet. Das ganze Netz läßt sich also nach und nach durch Symmetrie aus einem einzigen Dreiecke desselben erzeugen. Solche Netze sind *regulär*, d. i. in jedem Knoten finden sich lauter gleiche Winkel vor. Jeder Drehung der Kugel in sich, welche der betrachteten Gruppe angehört, entspricht eine Transformation der Ebene in sich, welche die weißen Dreiecke unter sich vertauscht; alle diese Transformationen führen ein bestimmtes weißes Dreieck in alle weißen Dreiecke über. (Fortsetzung folgt.)

Über die älteste indische Mathematik.

Von Moritz Cantor in Heidelberg.

Als ich, durch Vertiefung in Thibauts Arbeiten von 1876 zu eigenen Forschungen angeregt, 1877 meine Gräkoindischen Studien, 1880 den ersten Band meiner Geschichte der Mathematik veröffentlichte und darin die indischen Çulvasutras als ältestes Zeugnis indischer Geometrie behandelte, war außer über dieses *relative* Alter der betreffenden Schriften Übereinstimmung über deren *wirkliches* Alter nicht vorhanden.

Thibaut hielt sie allerdings für sehr alt, Albrecht Weber dagegen für verhältnismäßig jung, jedenfalls für so jung, daß es gestattet war, eine Beeinflussung indischer Geometrie durch Eindringen Heronischer Wissenschaft anzunehmen. Ich traf damals auch nur auf allgemeine Zustimmung zu meiner, wie es schien einwandfreien Wiederherstellung der indischen Gedanken.

Nun kam 1884 die Schrift L. von Schroeders „Pythagoras und die Inder," welche ihr Verfasser mir zuzuschicken die Freundlichkeit hatte. Ich gestehe, daß mich die dort verfochtene Lehre: Pythagoras sei als Schüler der Inder und nicht der Ägypter zu betrachten, so wenig anmutete, daß ich 1894 in der 2. Auflage des I. Bandes meiner Geschichte der Mathematik das Schroedersche Buch ebensowenig berück-

1) Die der Figur beigelegten Symbole werden später erläutert.

sichtigte, als ich es mit den etwa ein halbes Jahrhundert älteren Schriften von Gladisch gemacht hatte, in welchen Pythagoras als Schüler der Chinesen dargestellt war. Was L. von Schroeder über die Seelenwanderungslehre, was er über das Verbot gewisser Speisen, z. B. der Bohnen sagte, konnte und kann ich nicht prüfen, was er über das Alter der indischen Seilspannungsvorschriften, die er bis in das X. vorchristliche Jahrhundert hinaufschob, vorbrachte, konnte mich nicht überzeugen, da ich wußte, daß ägyptische Seilspannung aus der Zeit der der 12. Dynastie angehörenden Könige Amenemhat gesichert ist, also aus einer Zeit, welche jedenfalls erheblich früher fällt als das Jahr 2000 vorchristlicher Zeitrechnung.

Eine wesentliche Verschiebung der Sachlage ergab sich seit 1901 durch die Arbeiten, welche Albert Bürk unter dem Titel „Das Āpastamba-Śulba-Sūtra“ im 55. und 56. Bande der Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft veröffentlicht hat. Wenn Apastamba, wie die Sanskritforscher zur Zeit übereinstimmend annehmen, dem IV. oder V. vorchristlichen Jahrhunderte angehörend, nicht eben gar zu lang nach Pythagoras, jedenfalls aber um Jahrhunderte vor Heron gelebt hat, wenn Apastambas Vorschriften überdies nur die Kodifizierung von Dingen darstellen, die ein halbes Jahrtausend früher, nämlich damals als die indische Opferlehre zuerst die Errichtung sonderbar gestalteter Altäre forderte, in handwerksmäßiger Übung waren, dann kann selbstredend die Geometrie Apastambas kein Ableger Alexandrinischen Wissens des I. vorchristlichen Jahrhunders sein.

Aber mit dieser Verneinung ist nicht alles getan. Neue Fragen der verschiedensten Art stellen sich ein, unter welchen ich nur zwei hervorheben möchte. *Erstens* wie verhält es sich mit dem tatsächlichen Ursprung des Wissens des Pythagoras von dem nachmals mit seinem Namen belegten Satze? *Zweitens* hat man die in den Çulvasutras benutzten geometrischen Kenntnisse, nachdem sie nun einmal nicht alexandrinisch sein können, für altindisch zu halten?

Es ist wahr, daß unter den zahlreichen Berichten, welche das Altertum uns über die Wanderungen des Pythagoras hinterlassen hat, auch einer sich befindet, Pythagoras habe von den Brahmanen gelernt, und daß diese Angabe einigemal wiederholt worden ist. Aber eben so wahr ist, daß ziemlich allgemeine Übereinstimmung der Berichterstatter darüber herrscht, Pythagoras habe aus Wissensdrang Ägypten besucht, das Land, aus welchem auch ältere griechische Weisen, wie Thales, Geometrie zurückgebracht hatten. Ägypten war das Land, in welchem nach griechischer Meinung die Geometrie zu Hause war, während für Rechnerisches eine vorderasiatische Heimat gesucht wurde. Solchen durch Jahrhunderte sich erhaltenden Meinungen ist immerhin einiges Gewicht beizulegen, wenn auch nicht geleugnet werden soll, daß mehr oder weniger sagenhaften Ursprungsberichten für sich allein keine volle Beweiskraft innewohnt. Sie fordern, um mich mathematisch auszudrücken, jedenfalls noch einen Existenzbeweis. Ich verstehe darunter, man müsse zeigen, daß in dem Lande, aus welchem eine Lehre stammen soll, diese Lehre auch wirklich und zwar in einer Zeit, welche der der vermuteten Übertragung vorausging, bekannt war.

Wir wissen von der Herstellung riesiger Pyramiden, welche, jenseits des Jahres 3500 vorchristlicher Zeit entstanden, einen Böschungswinkel von nahezu 52 Grad in regelmäßiger Wiederkehr aufweisen. Wir besitzen die Überreste großartiger Tempelbauten, die vor dem Jahre 2000 ausgeführt wurden. Wir kennen im Felsengrabe des im Jahre 1407 verstorbenen Königs Seti I. vollständige Netze geradliniger zueinander senkrechter Koordinaten, welche den Bildhauern bei der Ausschmückung des Grabes mit Wandskulpturen dienten. Alle diese Tatsachen zwingen uns, eine uralte Geometrie mindestens praktischer Natur in Ägypten anzunehmen. Aber wir wissen noch mehr. Schriftdenkmale aus der Zeit der Könige Amenemhat haben sich, wie ich oben schon sagte, erhalten. Es sind Lederrollen von gegenwärtig mehr als viertausendjährigem Alter. Sie handeln von Tempelbauten, und die *Seilspannung*, welche zur Festlegung der Ecken und Wandrichtungen der Tempel diente, ist in ihnen erwähnt. Tempelbilder zeigen uns den Vollzug dieser Handlung. Die Seilspanner, *Harpedonapten*, der Ägypter genießen bei Demokrit (um 420) verdienten Ruhm. Seilspannung hat sich bei Heron von Alexandria erhalten. Das ist eine lückenlos zweitausend Jahre hindurch in dem gleichen Lande sich vererbende Übung, und wenn damit kein Existenzbeweis altägyptischer Geometrie geliefert ist, dann weiß ich nicht, wie ein solcher aussehen soll.

Was Seilspannung war, kann ich als Lesern dieser Zeitschrift bekannt voraussetzen: das Anknüpfen eines an einer bestimmten Stelle mit einem Knoten versehenen Seiles mittels seiner Enden an zwei Pflöcke von bestimmt gewählter Entfernung und die Herstellung eines rechtwinkligen Dreiecks durch Spannung des Seiles an dem erwähnten Knoten. Man kannte also in Ägypten, und zwar seitdem die Seilspannung dort geübt wurde, den Satz vom rechtwinkligen Dreiecke mit bestimmten Seitenlängen.

Welche Seitenlängen benutzte man? Ich habe früher die Mutmaßung ausgesprochen, man habe sich des rechtwinkligen Dreiecks von den Seiten 3, 4, 5 bedient. Ich stützte mich darauf, daß grade dieses Dreieck als Eigentum des Pythagoras erwähnt wird. Ich freue mich gegenwärtig weitere Stützpunkte meiner Vermutung zur Verfügung zu haben. In Kahun aufgefundene Papyrusfragmente, welche der Zeit der 12. Dynastie entstammen, also wiederum gegenwärtig das ganz achtbare Alter von mindestens 4000 Jahren besitzen, haben zweierlei erkennen lassen. Erstlich kommen in ihnen Quadratwurzelausziehungen vor: Die Quadratwurzel aus 16 ist 4, die Quadratwurzel aus $1\frac{9}{16}$ ist $1\frac{1}{4}$, die Quadratwurzel aus $6\frac{1}{4}$ ist $2\frac{1}{2}$; das Zeichen für Quadratwurzel ist ein rechter Winkel mit der mutmaßlichen Aussprache *tm*, wozu natürlich irgend ein ergänzender Vokal trat. Zweitens treten Gleichungen auf, welche durch leichte Ergänzungen einiger fehlenden Papyrusstückchen

$$(1)^2 + (\tfrac{3}{4})^2 = (1\tfrac{1}{4})^2$$
$$(8)^2 + (6)^2 = (10)^2$$
$$(2)^2 + (1\tfrac{1}{2})^2 = (2\tfrac{1}{2})^2$$
$$(16)^2 + (12)^2 = (20)^2$$

heißen. Graf Schak-Schakkenburg, dem diese hochwichtige Entdeckung zu verdanken ist, hat sie im 38. und im 40. Bande der Zeitschrift für ägyptische Sprache veröffentlicht. Das Auftreten von Brüchen in zweien von diesen vier Gleichungen kann bei einem Volke, welches, wie man aus dem etwa 400 Jahre jüngeren, aber nach alten Mustern verfaßten Rechenbuche des Ahmes weiß, das Bruchrechnen in wunderbarer Weise beherrschte, nicht in Erstaunen setzen. Wohl aber ist darauf aufmerksam zu machen, daß alle vier Gleichungen augenscheinlich mit der einen Gleichung

$$(4)^2 + (3)^2 = (5)^2$$

zusammenhängen, indem die in dieser letzteren quadrierten Zahlen durch 4 und durch 2 dividiert, mit 2 und mit 4 multipliziert sind. Mir persönlich wenigstens genügt diese Tatsache, um auch die Kenntnisse der sich unmittelbar nicht vorfindenden Gleichung $4^2 + 3^2 = 5^2$ für die alten Ägypter in Anspruch zu nehmen. Daß sie selbst fehlt, ist möglicherweise damit zu erklären, daß sie das allgemein bekannte Hauptbeispiel darstellte, welchem der Verfasser der Rechnungen von Kahun nur ähnlich geartete Beispiele hinzuzugesellen beabsichtigte.

Dazu kommt ein weiteres. Das rechtwinklige Dreieck aus den Seiten 4, 3, 5 ist ein solches, in welchem der Unterschied der Länge der Hypotenuse und der größeren Kathete *eins* beträgt, und die von griechischen Schriftstellern dem Pythagoras zugeschriebene Formel zur Herstellung ganzzahlig rechtwinkliger Dreiecke mit ungerader Hypotenuse und gerader größerer Kathete lautet

$$\left(\frac{(2a+1)^2-1}{2}\right)^2 + (2a+1)^2 = \left(\frac{(2a+1)^2+1}{2}\right)^2$$

oder

$$(2a^2 + 2a)^2 + (2a + 1)^2 = (2a^2 + 2a + 1)^2$$

mit ebendemselben Unterschiede *eins* der genannten Strecken.

Dieses gesamte pythagoräische mathematische Wissen *kann* also, wie man sieht, aus ägyptischer Anregung entsprungen sein ebenso wie die dem Pythagoras zugeschriebene Kenntnis des Irrationalen, sobald er versuchte die Quadratwurzel aus einer Zahl wie 2 oder 3 usw. auszuziehen, ebenso wie der Versuch sich geometrisch darüber klar zu werden, ob denn die Seiten jedes rechtwinkligen Dreiecks Flächensätzen von der Art wie $4^2 + 3^2 = 5^2$ genügen müssen.

Jetzt zu den indischen Çulvasutras. *Çulva* bedeutet *Seil*, das Wort selbst kommt aber in den Seilvorschriften, wie man Çulvasutra übersetzen könnte, nicht vor. Dort ist vielmehr für das Seil ein anderes Wort in Gebrauch, welches Rajju transkribiert worden ist. Mir erscheint dieser Wechsel nicht ganz unwichtig. Er deutet mir darauf hin, daß zwischen dem ältesten Gebrauche des Seiles und der durch Apastamba usw. vollzogenen Niederschrift der Gebrauchsanweisung Veränderungen vorgegangen sein müssen, und ob diese sich nur auf ein Wort beziehen, wie wenn in älterer Zeit *Seil*, in jüngerer *Strick* gesagt worden wäre, dafür wird kaum ein Beweis zu erbringen sein. Jedenfalls handelt es sich in den Çulvasutras um Seilspannung in dem gleichen Sinne, den ich für die ägyptische Seilspannung in Anspruch nehmen mußte. Rechte Winkel werden durch Seilspannung erzeugt, wobei als Längen der Seiten des vornehmlich benutzten rechtwinkligen Dreiecks 36, 15, 39 erscheinen. Außerdem ist den Verfassern der Çulvasutras bekannt, daß das Quadrat der Diagonale eines Quadrates das Doppelte des ursprünglichen Quadrates, das Quadrat der Diagonale eines Rechtecks die Summe der Quadrate beider Rechtecksseiten ist. Sie kennen also unzweifelhaft den Satz vom rechtwinkligen Dreiecke nicht weniger unter der Voraussetzung irrationaler als rationaler Seiten. Unter den rationalen rechtwinkligen Dreiecken kennen sie neben dem Dreiecke 36, 15, 39 auch die Dreiecke

4,	3,	5
12,	5,	13
15,	8,	17
16,	12,	20
20,	15,	25
24,	7,	25
35,	12,	37

Apastamba gibt aber auch die Regel dafür, wie man ein Quadrat um ein zweites vermehrend unter Annahme von ausschließlich rationalen Quadratseiten zu einem dritten gelange. Herr Bürk hat das Verdienst darauf aufmerksam gemacht zu haben. Man soll an der östlichen und an der nördlichen Quadratseite je ein Rechteck von gleicher Breite anfügen und an der nordöstlichen Ecke ein Quadratchen, dessen Seite der Breite jener Rechtecke gleich ist, dann hat man ein neues Quadrat. In Zahlen heißt dieses, wenn a die ursprüngliche Quadratseite und b die Breite der anzufügenden Vierecke bedeutet, es sei

$$a^2 + ab + ab + b^2 = (a + b)^2$$

Ist alsdann $2ab + b^2$ selbst ein Quadrat, so hat man zwei Quadrate gefunden, deren Summe sich wieder als Quadrat zeigt.

Die um das ursprüngliche Quadrat herumgelegte Figur ist augenscheinlich diejenige, welche die Griechen *Gnomon* nannten, und von welcher Aristoteles sprach, wenn er sagte, die Pythagoräer hätten die Quadrate gebildet, indem sie die Gnomonen allmählich zur Einheit hinzufügten. Nimmt man in der Tat $a = 1$ und $b = 1$, so sieht man folgende neue Quadrate entstehen:

$$\begin{aligned} 1^2 + 3 &= 2^2 \\ 2^2 + 5 &= 3^2 \\ 3^2 + 7 &= 4^2 \\ 4^2 + 9 &= 5^2 \end{aligned}$$

Aber $9 = 3^2$ ist selbst ein Quadrat, und somit ist erkannt:

$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

Das gleiche Verfahren fortsetzend gelangt man zu

$$\begin{aligned} 5^2 + 11 &= 6^2 \\ 6^2 + 13 &= 7^2 \\ 7^2 + 15 &= 8^2 \\ 8^2 + 17 &= 9^2 \\ 9^2 + 19 &= 10^2 \\ 10^2 + 21 &= 11^2 \\ 11^2 + 23 &= 12^2 \\ 12^2 + 25 &= 12^2 + 5^2 = 13^2 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Man konnte aber auch $b = 2$ oder $b = 3$ usw. setzen. Dann ergab sich mittels $b = 2$ wieder von $a = 1$ ausgehend:

$$\begin{aligned} 1^2 + 8 &= 3^2 \\ 3^2 + 16 &= 3^2 + 4^2 = 5^2, \end{aligned}$$

welches so zum zweiten Male erkannt war. Ferner entstand:

$$\begin{aligned} 5^2 + 24 &= 7^2 \\ 7^2 + 32 &= 9^2 \\ 9^2 + 40 &= 11^2 \\ 11^2 + 48 &= 13^2 \\ 13^2 + 56 &= 15^2 \\ 15^2 + 64 &= 15^2 + 8^2 = 17^2 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Es ist gewiß richtig, wie Herr Bürk es getan hat, darauf aufmerksam zu machen, daß die Formel des *Pythagoras* $[(2a^2 + 2a)^2 + (2a + 1)^2 = (2a^2 + 2a + 1)^2]$ für zwei zu einem neuen Quadrate einander ergänzende Quadratzahlen unmöglich zu $15^2 + 8^2 = 17^2$ führen konnte, weil jene Formel den Unterschied 1 zwischen den beiden größten Quadratseiten voraussetzt. Nur hätte Herr Bürk hinzufügen sollen, daß wir von einer zweiten Formel Kenntnis haben, welche auf Plato zurückgeht, und welche jenen Unterschied als 2 voraussetzt. In Platos Formel

$$(a^2 - 1)^2 + (2a)^2 = (a^2 + 1)^2$$

sind jene Zahlen, mittels $a = 4$, enthalten.

Ich betone diese Abweichung aus einem ganz besonderen Grunde. Grade der Umstand, daß die Formel des Pythagoras *nicht* alle Zahlen liefert, welche die Inder besaßen, daß sie vielmehr eine Ergänzungsformel nötig machte, scheint mir zu bestätigen, daß Pythagoras sein Wissen von jenen Zahlen nicht aus Indien bezogen hat.

Aber der Gnomon? Von dieser pythagoräischen Figur ist, so weit ich wenigstens die Literatur kenne, in Ägypten nirgend die Rede. In Indien spielt sie, wie wir sahen, eine hervorragend wichtige Rolle. Hier liegt zweifellos eine große Schwierigkeit vor, die ich nicht zu heben imstande bin. Man könnte ja darauf hinweisen, daß die Figur des Gnomon grade das hieroglyphische Zeichen für Quadratwurzel ist, allein bisher ist noch keine Veranlassung begründet, die Ähnlichkeit nicht für eine zufällige zu halten. Man könnte ferner betonen wollen, daß der Gnomon zwar bei Apastamba, aber nicht in den anderen Çulvasutras vorkomme, allein *ein* Vorkommen genügt, um das Vorhandensein zu beweisen. Ich wiederhole es daher, hier liegt eine Schwierigkeit vor, welche den Ägyptologen vielleicht Anlaß zu weiteren Forschungen geben kann.

Ist denn nun, fahren wir in unserer nach allen Seiten parteilosen Untersuchung fort, für Indien alles klar? Daß die Zahlen 4, 3, 5; 12, 5, 13; 15, 8, 17 und wie sie alle heißen, Maßzahlen der Seiten rechtwinkliger Dreiecke sind, das mußte selbstredend, bevor man einen strengen geometrischen Beweis des Satzes vom rechtwinkligen Dreiecke besaß, Erfahrungstatsache sein. Für Ägypten genügte nach meiner Auffassung die eine Erfahrungstatsache, daß es ein rechtwinkliges Dreieck 4, 3, 5 gebe. Dann nahm Pythagoras die Sache geometrisch in die Hand und bewies den nach ihm benannten Lehrsatz, indem er in altgriechischer Weise von Einzelfall zu Einzelfall, zuletzt zum ganz allgemeinen Satze aufstieg. Wie war es in Indien? Herr Bürk hat versucht zu zeigen, wie man dort zu der genannten Erfahrung kam. Man habe ein Quadrat z. B. 12^2 unten an die rechte Seite, ein anderes also 5^2 rechts an die untere Seite des Quadrats 13^2 hingezeichnet; diese beiden Quadrate 12^2 und 5^2 hätten einen Winkelraum erkennen lassen, in welchen genau das Rechteck mit den Seiten 12 und 5 paßte; man habe die Diagonale dieses Rechtecks gemessen und die Länge 13 gefunden. Ähnlich sei das Verfahren bei allen anderen obenerwähnten Quadraten mit ganzzahligen Seiten gewesen, und dann habe man das gefundene Ergebnis verallgemeinert. Es ist ungemein schwierig über eine solche Hypothese, die sich auf keinerlei bekannte Tatsache stützt, ein Urteil zu fällen, mag man sie auch als sinnreich begrüßen. Vielleicht kann Zweifel erregen, daß die Figur, an welcher die Wahrheit, daß die Diagonale des Quadrates ein doppelt so großes Quadrat als die Seite hervorbringe, erkannt sein soll, ganz anderer Natur gewesen sein muß und in der Tat in einer Gestalt angenommen wird, welche wenigstens teilweise bei dem falkenförmigen Altare der Inder benutzt wurde, und welche mit der bekannten Figur in Platos Maeon übereinstimmt, einem großen Quadrate, das durch zwei die Mitten von je zwei Gegenseiten verbindende Gerade in vier kleinere Quadrate zerfällt, in deren jedem diejenige Diagonale gezeichnet ist, welche nicht auf eine Diagonale des großen Quadrates fällt. Und wie fand man die anderen Irrationalitäten $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ usw.? Durch Umwandlung von Rechtecken in Quadrate, welche in den Çulvasutras vorkommen? Das ist wieder eine andere Figur und damit auch eine Schwierigkeit, denn die Unterscheidung zahlreicher Einzelfälle ist, wie ich schon gesagt habe, nachweisbar altgriechisch, aber indisch?

Nun kommt weiteres hinzu. Wir kennen ganz genau die indische Astronomie des II. nachchristlichen Jahrhunderts, ebenso die späte indische Geometrie, die späte indische Arithmetik und Algebra. Die Astronomie wie die Geometrie sind voll von nachweisbar griechischen Spuren, die Arithmetik und Algebra lassen in ihrer Entwicklung fast alle solche Spuren vermissen. Hier hat der indische Geist die glänzendsten Entdeckungen gemacht, mit welchen er dem europäischen Abendlande um Jahrhunderte zuvorkam. Ist es wahrscheinlich, daß gewisse mathematische Richtungen in einem Volke mit größtem dauernden Erfolge beibehalten werden, während andere in frühester Zeit schon erfolgreich behandelte Dinge plötzlich allen Reiz zu verlieren scheinen und gegen fremde Einfuhrware zurücktreten? Ich will die Unmöglichkeit einer solchen einseitigen Atrophie, wenn mir der Ausdruck gestattet wird, nicht behaupten, aber eine Schwierigkeit bietet sie dem Verständnisse.

Was ich mit diesen Auseinandersetzungen bezwecke, ist folgendes: Ich will zeigen, daß, wenn einerseits die frühe Entstehung der Çulvasutras der Vermutung, als sei in ihnen ausschließlich Alexandrinisches Wissen durchgesickert, den Todesstoß versetzt, man doch damit nicht auskommt, schlankweg zu behaupten, eine altursprüngliche indische Anschauungsgeometrie habe den Anstoß zu der Geometrie des Pythagoras gegeben.

Als ich die vielfachen miteinander selbst nicht in Einklang stehenden Widersprüche erwog, kam mir der Gedanke, ob nicht in den Zeiten, welche wir als uralt zu bezeichnen pflegen, also rund ausgesprochen jetzt vor drei bis vier Jahrtausenden, schon ein dem ganzen damaligen Kulturgebiete, also Vorderasien und Ägypten gemeinsames nicht ganz unbedeutendes mathematisches Wissen vorhanden gewesen sein könnte, welches sich je nach der Begabung der einzelnen Völker bald nach der einen, bald nach der anderen Richtung weiter entwickelte? An dem uralten Verkehre, der zwischen Ägypten und Babylon herrschte, ist nicht zu zweifeln. Weiß man doch von Heiratsanträgen, welche von Fürstenhaus zu Fürstenhaus gingen! Man müßte nur, um meinen Gedanken zu prüfen, genauer, als es bisher der Fall ist, mit der Mathematik des asiatischen Zweistromlandes bekannt sein. Das Wenige, was wir darüber wissen, bietet schon einige Anhaltspunkte für meine Konjektur, die ich in Kürze aufzählen will.

Die Dauer des längsten Tages wird in den Vedakalendern zu $14^h\ 24^m$ angegeben, genau als eben so lang in chinesischen Quellen, für Babylon berechnete sie schon Ptolemäus zu $14^h\ 25^m$; von Babylon aus dürfte mithin die dort fast genaue Zahl nach Osten und Südosten abgewandert sein.

In Babylon kommt in der dort einheimischen Vorbedeutungsgeometrie das Wort *tim* vor, welches ebensowohl Linie als Seil bedeutet und vielleicht die Möglichkeit einer auch dort vorhandenen Übung der Seilspannung eröffnet.

In Babylon wird der Ursprung der biblischen Kreisberechnung, daß der Umfang des Kreises dreimal durch die Schnur von einem Rande zum anderen gemessen werde, also $\pi = 3$ sei, vermutet, und Apastamba gibt als genauen Flächeninhalt des Kreises das Quadrat über $\frac{13}{15}$ des

Durchmessers oder $\frac{26}{15}$ des Halbmessers. Dadurch erhält man $\pi = (\frac{26}{15})^2 = 3\frac{1}{225}$. Aber Baudhâyana, der Verfasser eines anderen Çulvasutra, gibt die gleiche Vorschrift als ungenaue Quadratur, und $3\frac{1}{225}$ ist dem Werte 3 nächstliegend von allen für π irgend in Übung gewesenen Werten.

In Babylon kannte man, wie die Tafeln von Senkereh beweisen, eine Positionsarithmetik, indem die Stellung eines Zahlzeichens weiter links seinen Wert auf das Sechzigfache erhöht. In Indien gelangte die Positionsarithmetik zur fruchtbarsten Entwicklung insbesondere unter Anwendung der Null, die in den Tafeln von Senkereh nicht vorkommt.

Alle diese Dinge sind längst bekannt, aber auf eines möchte ich noch hinweisen, was in den Rahmen hineinzupassen scheint. Die schon genannten Tafeln von Senkereh enthalten die Quadratzahlen von 1^2 bis zu 60^2 und die Kubikzahlen von 1^3 bis zu 60^3. Zu welchem praktischen Zwecke hat man diese Tabellen hergestellt? Diese Frage ist meines Wissens noch niemals gestellt, jedenfalls noch niemals beantwortet worden. Ich wage die Mutmaßung, die Tabellen seien benutzt worden, um aus gegebenen Zahlen die angenäherten Quadratwurzeln und Kubikwurzeln ausziehen zu können. Freilich ist das fürs erste eine haltlos in der Luft schwebende Vermutung. Möge sie gleich dem übrigen, welches ich hier ausgesprochen habe, den Assyriologen als Fingerzeig dienen, worauf sie zu achten haben werden, wenn künftig noch Keilschrifttexte mathematischen Inhaltes der Entzifferung zu Gebote gestellt werden sollten. Vielleicht wird alsdann der Schleier sich lüften lassen, der heute noch so manches in der ältesten Geschichte der Mathematik bedeckt.

Eine Schwierigkeit wird freilich, fürchte ich, noch vorhanden bleiben. In den Çulvasutras sind Näherungswerte als Summen von Stammbrüchen dargestellt. Das hat nichts Erstaunliches, wenn meiner früheren Meinung entsprechend Heronischer Einfluß sich geltend machte. Wie aber jetzt? Auf ägyptischem Boden zeigen die Stammbrüche ein lückenloses Dasein. In Babylon sind sie bis jetzt noch nicht bekannt. In der späteren indischen Literatur kommen sie meines Wissens auch nicht vor. Sollten sie auf indischem Boden just für die Verfasser der Çulvasutras vorhanden gewesen und dann spurlos verschwunden sein? Oder sollte es doch darauf hinauslaufen, daß einzelne Teile der Çulvasutras verhältnismäßig moderne Einschiebsel sind? Diese Schlußfragen richten sich an die Indologen.

Heidelberg, den 14. März 1904.

Rezensionen.

Beitrag zur Theorie und Untersuchung von mehrphasigen Asynchronmotoren. Von **O. S. Bragstad,** Karlsruhe, Elektrotechnisches Institut der Technischen Hochschule. Mit 35 Abbildungen. Sonderausgabe aus der Sammlung elektrotechnischer Vorträge. Herausgegeben von Ernst Voit. Band III. Stuttgart. Verlag von Ferdinand Enke. 1902. 104 S. Preis 2,40 Mk.

Dieses Buch ist eins von den wenigen elektrotechnischen Büchern, die auch bei dem Mathematiker einiges Interesse wecken können. Es ist ausgezeichnet durch einen einfachen, klaren Gedankengang, durch schlichte Sachlichkeit aller Mitteilungen, durch Selbständigkeit der Untersuchungen, durch Mannigfaltigkeit und Wucht der angewendeten Methoden, durch straffe Durchführung eines Grundgedankens bis zu praktisch unmittelbar verwertbaren Resultaten. Den Inhalt des Buches kann man vielleicht am treffendsten so angeben: es enthält die endgiltige Erledigung der Theorie der Induktionsmotoren, soweit dies möglich ist, ohne die *Abmessungen* der Konstruktion zu berücksichtigen.

Es wird vorausgesetzt, daß der Leser die elementare Theorie des Induktionsmotors kennt, und daß er sich über die physikalischen Vorgänge, die sich im wesentlichen in dem Motor abspielen, klar ist. Den Ausgangspunkt bildet folgende Überlegung: Wenn man durch den λten Zweig einer P-poligen p-Phasenwicklung 1 Amp Gleichstrom schickt, so entsteht in dem schmalen Luftspalt zwischen dem festen und dem rotierenden Teil des Motors ein magnetisches Feld, dessen Stärke in achsialer Richtung überall dieselbe, jedoch an verschiednen Stellen des Ankerumfanges verschieden ist. Die Feldstärke wird also nur von einer Koordinate x abhängen. Außerdem wird sie überall radial gerichtet sein, oder wenigstens wird es nur auf ihre Radialkomponente ankommen. Wenn die Länge des Ankerumfanges $\frac{1}{2}PX$ ist, so läßt sich die Feldstärke für den stillstehenden Motor nach Fourier ganz allgemein schreiben

$$G_{1,\lambda} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos 2\pi m \left(\frac{x - \chi_m}{X} - \frac{\lambda - 1}{p}\right).$$

(„Polkurve".) Von einem gewissen m ab kann natürlich C_m auch verschwinden. Schicken wir durch den λten Wicklungszweig statt 1 Amp Gleichstrom bei offner sekundärer Wicklung den beliebigen Wechselstrom

$$i_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} J_n \sin 2\pi n \left(\frac{t - \tau_n}{T} - \frac{\lambda - 1}{p}\right).$$

(„Stromkurve", t Zeit, T Periode der Grundschwingung), so ist die Stärke des magnetischen Wechselfeldes im Luftspalt

$$W_{t,\lambda} = i_\lambda G_{1,\lambda}.$$

Wenn wir endlich nicht nur durch *einen* Zweig Strom schicken, sondern durch sämtliche p Wicklungszweige p-Phasenstrom $i_1 \ldots i_\lambda \ldots i_p$, so ist die resultierende Feldstärke, die durch Überlagerung der p einzelnen Polkurven entsteht, bei offner sekundärer Wicklung

$$R_t = \sum_{\lambda=1}^{p} W_{t,\lambda} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{m,n},$$

wo

$$D_{m,n} = \tfrac{1}{2} C_m J_n \sum_{\lambda=1}^{p} \left\{ \sin 2\pi \left[n \frac{t-\tau_n}{T} + m \frac{x-\chi_m}{X} - (\lambda - 1) \frac{n+m}{p} \right] \right.$$
$$\left. + \sin 2\pi \left[n \frac{t-\tau_n}{T} - m \frac{x-\chi_m}{X} - (\lambda - 1) \frac{n-m}{p} \right] \right\}.$$

Es genügt, die einzelnen Ausdrücke $D_{m,n}$ zu betrachten und $\chi_m = 0$, $\tau_n = 0$ zu setzen. Die $D_{m,n}$ können verschwinden, rechtsläufige oder linksläufige sinusartige Drehfelder oder endlich sinusartige Wechselfelder darstellen.[1]) Das hängt davon ab, ob $(m+n)/p$ und $(m-n)/p$ ganze Zahlen sind oder nicht.

Es wird darauf untersucht, welchen Einfluß die Anordnung der Wicklung auf die *elektromotorische Gegenkraft* und auf die wattlose Komponente des *Magnetisierungsstromes* hat (wattlos nach der elektromotorischen Kraft). Wenn die Wicklung statt in Pp in Pps Nuten untergebracht ist, so ist die effektive elektromotorische Kraft geringer, da zwischen den sich addierenden elektromotorischen Kräften Phasenverschiebungen auftreten. Da nämlich zwei benachbarte Nuten den Abstand $\frac{1}{2} PX/Pps = X/2ps$ haben, so ist die Phasenverschiebung der entsprechenden elektromotorischen Kräfte $T/2ps$. Die Verkleinerung der elektromotorischen Kraft läßt sich durch einen Faktor $K < 1$ berücksichtigen („EMK-Faktor"). Es ergibt sich unabhängig von n für die $m$te Harmonische der Polkurve

$$K_m = \frac{\sin s\beta}{s \sin \beta}; \quad \beta = \frac{m\pi}{2ps}.$$

Bei einer Einlochwicklung ($s = 1$) ist die Polkurve als ein Rechteck zu betrachten, weil von dem Linienintegral der magnetischen Kraft („Zahl

---

1) Ein *reines* Drehfeld muß stets von der Form

$$D_r = f\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{X}\right)$$

sein, ein *reines* Wechselfeld von der Form

$$W_r = \varphi\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \psi\left(\frac{x}{X}\right),$$

wo f, φ, ψ *periodische* Funktionen sind und sich daher immer in Fouriersche Reihen entwickeln lassen müssen.

der Amperwindungen") nur ein kleiner Teil für das Eisen nötig ist und daher fast das ganze Linienintegral dem Luftspalt zu gut kommt. Wird dagegen jede Spulenseite gleichmäßig auf mehrere Nuten verteilt, so bekommt man eine Polkurve von geringerem Flächeninhalt (Kraftfluß), weil sich die magnetisierenden Kräfte zwischen je zwei benachbarten Nuten, die demselben Wicklungszweig angehören und daher von demselben Strome durchflossen werden, zum Teil aufheben. Es entsteht dadurch eine treppenartige Polkurve. Um von dieser auf die einzelnen Harmonischen der Kurve für das resultierende Drehfeld überzugehen, ist ein „Amperwindungsfaktor" f_m erforderlich. Es ergibt sich

$$f_m = \frac{8}{\pi^2} \frac{K_m}{m^2}$$

unabhängig von p, s und n. Durch die Faktoren K_m und f_m ist die Brücke geschlagen zwischen dem wattlosen Magnetisierungsstrome und der elektromotorischen Kraft, die von der $m$ten Harmonischen der Polkurve herrührt. Das Verhältnis beider, die „induktive Leitfähigkeit" des Stromkreises, nennen die Amerikaner Suszeptanz.

Die *sekundäre* Wicklung kann außerdem in einer eigentümlichen Schaltung ausgeführt werden, die unter dem Namen *Käfigwicklung* bekannt ist. Dabei wird in jede Nut des Sekundärankers ein Kupferstab gelegt, und sämtliche Stabenden werden durch zwei Kupferringe miteinander verbunden. Das Problem, den Widerstand dieser Anordnung zu finden, das zuerst von Rößler[1]) behandelt worden ist, wird hier in sehr eleganter Weise gelöst, indem die Steinmetzsche Methode der komplexen Größen benutzt wird. Diese besteht darin, daß für

$$a \sin 2\pi \frac{t}{T} + b \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

symbolisch geschrieben wird

$$a - jb,$$

wo j ein Richtungsfaktor ist, genau wie bei Hamiltons Quaternionen die i, j, k. Es erweist sich als zweckmäßig, $j = \sqrt{-1}$ zu setzen. Diese Methode ist demnach (ebenso wie die Polardiagramme) zunächst auf *Sinus*funktionen der Zeit von *derselben Periode* beschränkt.

Um zu untersuchen, wie sich die Maschine im Betriebe verhält, d. h. wenn die *sekundäre Wicklung geschlossen* ist und *auch* von Strömen durchflossen wird, verwendet der Verfasser die Methode der Ersatzschaltungen. Diese beruht auf folgender Überlegung: Wenn man einen Transformator hätte, bei dem sämtliche Kraftlinien sämtliche Windungen beider Stromkreise durchsetzten und bei dem die primäre Windungszahl gleich der sekundären wäre, so hätte man dieselbe Wirkung, als ob man einen einzigen Stromkreis hätte, also gar keinen Transformator. Denn die Selbstinduktion der primären Wicklung wird durch die gegenseitige Induktion vollständig aufgehoben. Nur der Widerstand des kombinierten Stromkreises würde um den Widerstand der beiden Wicklungen erhöht erscheinen. Es bleibt noch der Magnetisierungsstrom des Transformators zu „ersetzen", d. h. der Strom, der bei offner sekundärer Wicklung durch die primäre Wicklung fließt.

1) Elektrotechnische Zeitschrift 1898 S. 750.

Dazu denkt man sich zu dem Ersatzstromkreis noch eine entsprechende Drosselspule parallel geschaltet, also etwa den Transformator selbst mit offner sekundärer Wicklung (oder ganz ohne eine solche). Wenn die Übersetzung nicht 1 : 1 ist, so braucht man nur die sekundären Größen mit passenden Potenzen der Übersetzung zu multiplizieren, um wieder beide Stromkreise durch einen einzigen ersetzen zu können. Tritt außerdem noch magnetische Streuung auf, so erscheint dieser Rest der Selbstinduktion in dem neuen Stromkreise als „scheinbare Selbstinduktion". Nach diesem Prinzip wird also der Ersatzstromkreis des asynchronen (schlüpfenden) Mehrphasenmotors mit Berücksichtigung der höhern Harmonischen der Polkurve angegeben, jedoch unter der Beschränkung, daß der zugeführte Strom eine einfache harmonische Funktion der Zeit sei. Ein Polardiagramm hätte es hier dem Leser sehr erleichtert, sich zurecht zu finden. Auf diesem Wege ergibt sich das Kreisdiagramm des Motors, aus dem man für jede mögliche Amplitude des primären Stromes die beiden zugehörigen Phasen finden kann. (Die eine gilt, wenn die Maschine als Motor arbeitet, die andre, wenn sie als Generator arbeitet.) Wählt man im besondern die konstante Klemmenspannung = 1 Volt (d. i. die konstante Amplitude oder auch den konstanten Effektivwert), so wird der Strom numerisch gleich der „scheinbaren Leitfähigkeit" des primären Stromkreises, welche die Amerikaner Admittanz nennen. (Admittanzkreis.)

S. 39 hat sich ein Versehen im Vorzeichen eingeschlichen. Es muß heißen

$$\pm s_m = \pm 1 - m + m s_1 .$$

Denn die Maschine kann für die *m*te Harmonische als Generator wirken, nämlich dann, wenn $\omega_m < \omega_0$ ist. Für die ganz strenge Berücksichtigung der höhern Harmonischen wird darauf eine einfachere angegeben.

Auch für den asynchronen *Einphasen*motor wird ein Ersatzstromkreis entwickelt. Hierzu wird die Leblancsche Zerlegung des Gesamtfeldes in zwei gegeneinander rotierende Drehfelder benutzt. Darauf wird die Untersuchung auf *beliebigen* Wechselstrom erweitert.

Der Verfasser untersucht auch den zeitlichen Verlauf des *sekundären* Stromes und kommt zu dem Ergebnis, daß der sekundäre Strom überhaupt kein regelmäßig periodischer Wechselstrom ist, da er sich aus Schwingungen zusammensetzt, deren Frequenzen in keinem einfachen ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen. Es folgen einige Tabellen, die die charakteristischen Faktoren für die wichtigsten Wicklungsarten enthalten.

In den folgenden Abschnitten, die etwa die zweite Hälfte des Buches ausmachen, entwickelt der Verfasser das Ossannasche Kreisdiagramm in etwas modifizierter Form. Zur Ableitung benutzt er die symbolische Methode der komplexen Größen in Verbindung mit analytischer Geometrie, konforme Abbildungen und die Eigenschaften der Strahlenbüschel. So interessant diese neue Ableitung auch ist, so will mir doch die, welche J. K. Sumec in der Zeitschrift für Elektrotechnik[1]) gegeben hat, einfacher und kürzer scheinen. Zum Schluß gibt der Verfasser übrigens auch eine geometrische Ableitung des Diagrammes.

---

1) ZfE Wien 1903 Heft 1.

Die Praktiker werden es bedauern, daß nicht die Anlaufsverhältnisse behandelt werden, d. h. die Frage, wie die höhern Harmonischen die Abhängigkeit des Drehmomentes von der Schlüpfung beeinflussen, und welche Anordnungen Störungen beim Anlauf erwarten lassen. Diese Störungen bestehen darin, daß der Motor mit niedriger Geschwindigkeit im stabilen Gleichgewicht läuft und nicht auf seine normale (der synchronen benachbarte) Geschwindigkeit hinaufkommt. Für stabiles Gleichgewicht ist es aber erforderlich, daß die Zugkraft mit wachsender Geschwindigkeit abnimmt. Da die Zugkraft, als Funktion der Geschwindigkeit, sicher ein Maximum hat, so ist hier also die Frage zu studieren, wann auch Minima der Zugkraft auftreten.

Viele werden es wahrscheinlich auch bedauern, daß der Verfasser die Anordnungen, die die halbe synchrone Geschwindigkeit ohne nennenswerte Verlustvermehrung herbeiführen sollen (einachsige sekundäre Wicklung, Kaskadenschaltung), nicht in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen hat.

So rückhaltlos man nun auch den hohen Wert des sachlichen Inhaltes des Buches anerkennen muß, so wenig kann man sich mit der Form der Mitteilung einverstanden erklären. Damit soll nicht gesagt sein, daß die Darstellung unklar oder konfus wäre. Aber sie rechnet nicht mit den gegebenen Verhältnissen. Fast könnte es scheinen, als hätte es Herr Bragstad darauf angelegt, seinen Leserkreis auf ein Minimum zu beschränken. Von den Elektrotechnikern erwartet er mehr mathematische Übung, als sie heute in der Regel tatsächlich haben, und von den Mathematikern und Physikern — wenn er an sie gedacht hat — mehr elektrotechnische Kenntnisse, als billig ist. Die Behandlung der Wechselstromprobleme mit komplexen Größen soll den amerikanischen Elektrotechnikern geläufig sein; den deutschen ist sie es aber sicherlich nicht. Wenn Herr Bragstad dennoch diese Methode verwendet, wogegen natürlich an sich garnichts zu sagen ist, so müßte er sie doch wohl wenigstens kurz erläutern und sich nicht mit einem Hinweis auf das Steinmetzsche Buch begnügen. Die Rechnungen hätten durch Polardiagramme ergänzt und erläutert werden können, die ja den deutschen Wechselstromtechnikern sehr geläufig sind. Auch hätte angegeben werden müssen, welche „Reaktanz“ x („induktiver Widerstand“) der gegenseitigen, welche der Selbstinduktion und welche der Streuung entspricht. Aber auch sonst ließe sich das Buch wohl lesbarer machen. Hierfür einige Andeutungen. Stellenweise könnte die Übersichtlichkeit der Rechnungen erhöht werden, in dem Abschnitt I, 2 durch Einführung passender Abkürzungen, in II, 1 durch Unterteilung wenigstens in drei Hauptabschnitte. Ehe darauf losgerechnet wird, könnte der Rechnungsgang kurz in Worten skizziert werden. Ob viele Elektrotechniker so leicht über Seite 72 hinwegkommen werden?

Diese Bemerkungen sollen nicht den Wert des Buches herabsetzen, sie sollen nur der hoffentlich bald erscheinenden zweiten Auflage zu einem wohlverdienten größeren Erfolge verhelfen, als man für die erste erwarten kann.

Berlin. FRITZ EMDE.

Berliner, Lehrbuch der Experimentalphysik in elementarer Darstellung. Jena 1903, Gustav Fischer. XVI u. 857 S. Preis 14 Mk., geb. 16,50 Mk.

Wer unvorbereitet an ein so umfangreiches Werk herantritt, wird erwarten, die Tatsachen der Experimentalphysik in einer gewissen Vollständigkeit darin zu finden. Aber über so wichtige Dinge wie etwa das für die Praxis kaum noch entbehrliche Stephan-Boltzmannsche Strahlungsgesetz, die Lindesche Kältemaschine, das absolute Maßsystem sucht man hier vergebens Belehrung, und daß die radioaktiven Substanzen nicht erwähnt verden, wird auffallen. Wer freilich durch die Lektüre der Vorrede auf das, was der Verfasser will, sich genügend vorbereitet hat, der wird hierin vielleicht keinen Mangel des Buches finden. Der Umfang erklärt sich durch eine beabsichtigte „Ausführlichkeit in der Darstellung, die darauf angelegt ist, dem Leser die eigene Arbeit so leicht wie möglich zu machen“. Bei den Lesern aber ist „an den Physiker der ersten Semester, den Chemiker und den Mediziner“ gedacht — „überhaupt an jeden, der die Physik als Hilfswissenschaft benützt“. Damit hat sich der Verfasser den Kreis seiner Leser sehr reduziert und seine Aufgabe spezialisiert. Sehen wir zu, wie ihm die Lösung geglückt ist. Wir erkennen sehr gern an, daß viele Darstellungen als recht gelungen anzusehen sind. Als Stichproben wählten wir zwei heikle Materien, nämlich den 2. Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie und die Polarisation des Lichtes. An der Vortrefflichkeit der elementaren Darstellung ist hier nicht zu zweifeln. Ganz besondere Anerkennung verdient die Erleichterung für das Erfassen körperlicher Vorgänge, die der Verfasser durch die Figuren auf den angehefteten Blättern erreicht, indem er durch Aufklappen von Teilen derselben die 3. Dimension nutzbar macht. Damit könnte nun das Klarmachen auch erledigt sein, aber der Verfasser glaubt, indem er jetzt dieselbe Sache mit kaum geänderten Figuren und etwas andern Worten — „oder anders ausgedrückt“, wie oft kehrt diese Redewendung wohl in dem Buche wieder — wiederholt, die Vorstellung des Lesers noch mehr zu fördern, statt — wie wir fürchten — denselben zu ermüden. Hierin wie auch in den wortreichen Ein- und Überleitungen, die ohne Schaden für das Verständnis fortbleiben konnten, sowie schließlich darin, daß der Verfasser Begriffe wie die Sinusfunktion noch besonders herleitet, ist der Umfang des Buches begründet. Wir meinen, daß das Buch auch sonst dagegen geschützt ist, daß diejenigen, die die Bedeutung des Sinus nicht mehr kennen, dasselbe mit Vorteil benützen und daß diejenigen, die dieselbe noch nicht kennen, sie schwerlich aus dem Buche lernen werden. Man benutze solche Begriffe dreist, glaubt man sie aber seinem Lesepublikum nicht zumuten zu dürfen, so schreibe man ein Buch ohne Sinus und mache das Brechungsgesetz anders anschaulich, was auch sehr gut geht. Die Verständlichkeit des Buches hätte durch eine Umkehrung der Methode unserer Auffassung nach weit eher gefördert werden können. Diejenige des Verfassers ist die deduktive, vielleicht weil er (S. 734) der Ansicht ist, daß diese „an Allgemeinheit und Sicherheit des Schließens der Induktion überlegen ist“. Die Physik ist auf Induktionsschlüssen aufgebaut, und wir bestreiten die Unsicherheit dieser, wir meinen auch, daß die Anschaulichkeit der Darstellung diese Methode und den historischen Weg zur Voraussetzung hat. Der strenge logische Aufbau, den wir in der Gliederung des Stoffes insbesondere in der

Elektrokinetik mit Freuden anerkennen, ist für den Gelehrten ein Vergnügen, für den Lernenden kann er eine Plage sein. Ernst Mach hat sich darüber kurz dahin ausgesprochen, daß die psychologischen Definitionen den logischen für den Unterricht vorzuziehen seien. Gerade im Hinblick auf das voraussichtliche Lesepublikum mußte in der Wärmelehre, wie das auch dem historischen Gange entspricht, die mechanische Wärmetheorie ans Ende statt an den Anfang gestellt werden, da sie dort aus den vorhergehenden Tatsachen mit zwingender Notwendigkeit durch Induktion sich fast von selbst ergibt. Die Elektrokinetik mit dem galvanischen Elemente abschließen, nachdem die Nernstsche Theorie derselben mit Benutzung des osmotischen Druckes vorgetragen ist, statt mit Galvani und Volta anzufangen, das heißt dem Lernenden Balken in den Weg legen.

Wir bedauern, daß solcherweise das anerkennenswerte Bemühen des Verfassers nach anschaulicher Darstellung auch neuerer Methoden, die bisher in den elementaren Lehrbüchern leider noch wenig eingedrungen sind, wie z. B. die Behandlung der geometrischen Optik nach Abbeschen Methoden, Bemühungen, die auch der Verleger durch Beigeben mehrerer farbigen Skizzen unterstützt hat, nicht den wünschenswerten Erfolg zeitigen wird. Die Ausstattung ist — um diese gleich zu erwähnen — freilich keine gleichmäßige: die schärfsten Bilder sind diejenigen, die aus Katalogen von Carl Zeiß' Nachf. entnommen sind, ein Teil aber, wie z. B. Fig. 521 so unscharf, daß man daraus gar nichts entnehmen kann. Bei der Behandlung der Optik, welche mehr als ein Viertel des Buches füllt und bedeutend mehr Raum einnimmt als die Elektrizitätslehre, geht der Verfasser an vielen Stellen zu sehr ins Einzelne. Die verschiedensten Refraktometer, die Prismenfernröhre haben doch gerade für den Leserkreis, an den sich das Buch wendet, nicht die Bedeutung, wie die am Eingang erwähnten wichtigeren Tatsachen. Auch sonst hätte an Worten und Zeilen viel gespart werden können, wie z. B. S. 16, wo die Materie als das Bewegbare definiert wird, während ihr freilich S. 155 als wesentliche Eigenschaft noch Raumerfüllung zugeschrieben und endlich S. 437 erklärt wird, daß wir nicht wissen „was die Materie ihrem innersten Wesen nach ist". Materie ist einer von den Begriffen, die wir uns bilden, um gewisse Tatsachen und Tatsachenreihen in kurze Sätze fassen zu können, Da wir den Begriff gerade so weit oder so eng machen, als es zur Aussprache dieser Gesetze erforderlich ist, so müssen wir auch sagen, daß wir die Materie ganz genau kennen; es darf nur niemand von einem solchen Begriffe mehr erwarten, als man hineingelegt hat. Dasselbe gilt vom Begriffe der Elektrizität, von dem es S. 438 heißt: „was E. ist, wissen wir nicht." Wenn wir die Erscheinungen kennen, die wir als elektrische bezeichnen und als Wirkungen eines ad hoc gebildeten Begriffs „Elektrizität" auffassen, so ist gar nicht zu sehen, was uns an Kenntnissen noch fehlen sollte. Mach hat dies an verschiedenen Stellen, u. a. in der Analyse der Empfindungen ausgeführt. Im ganzen sind gerade solche Betrachtungen über allgemeine Begriffe und Eigenschaften unserer Auffassung nach recht überflüssig und dem Verständnis nicht förderlich.

Charlottenburg. H. Samter.

Donle, Lehrbuch der Experimentalphysik für Realschulen und Realgymnasien. 2. verm. und verb. Aufl. Stuttgart 1903, Fr. Grub. X u. 380 S. geb. 3,60 ℳ

Vorzüge dieses Buches, das in 2. Auflage vor uns liegt, sind klare und präzise Sprache, gute, scharfe, schematisierte Abbildungen, passende kleine Aufgaben zur Erfassung und Wiederholung des Gelernten. Hervorstechend ist ein Hang zum Technischen, der uns z. B. bei der Behandlung der Reibung, Torsion, Biegung und des Kräftepolygons, der Schaltungen von Dynamomaschinen, der Drehstrommotoren entgegentritt. Störend war uns die fast überall deduktive Methode, die mindestens beim ersten physikalischen Unterricht vermieden werden sollte. So wird aus den Abänderungen des Kraftlinienverlaufes beim Hineinbringen von weichem Eisen ins magnetische Feld geschlossen, daß dasselbe magnetisch wird. Dies ist doch aber die einfachere Beobachtung, die sich zuerst aufdrängt und später erst auch aus der Ablenkung den Kraftlinien gefolgert werden kann. Wir fürchten, daß die Voranstellung solcher Begriffe wie des Potentiales, das sofort als eine Arbeitsgröße eingeführt wird, und der Kapazität, die vor (!) dem Kondensator besprochen wird, den Schüler eher verwirren als fördern wird. Während von Influenzmaschinen, deren ausreichende Erklärung doch immer ein Eingehen auf die Faraday-Maxwellschen Konzeptionen zur Voraussetzung haben müßte, nicht bloß die Holtzsche sondern auch die selbsterregende ausführlich besprochen werden, vermissen wir andere in den Physikunterricht gehörende Belehrung. Hierher rechnen wir vor allem die Meteorologie. Diese kommt aber äußerst kurz weg, und doch hätte für sie und manches andere durch Weglassung der Einleitung und der sogenannten „allgemeinen“ Eigenschaften der Körper, Abschnitte, deren Wert für die Gewinnung physikalichen Wissens und Könnens uns stets sehr zweifelhaft erschienen ist, Raum geschaffen werden können. In solchen Betrachtungen gibt es kaum einen Satz, der einer Kritik Stand hielt; z. B. gleich der erste: „Alle sinnlich wahrnehmbaren, räumlich begrenzten Dinge der uns umgebenden Natur bezeichnet man als Naturkörper.“ Gibt es in der uns umgebenden Natur vielleicht noch andere als sinnlich wahrnehmbare und räumlich begrenzte Dinge? und da wir selbst nicht zu der uns umgebenden Natur gehören, so sind wir am Ende keine Naturkörper? Oder: „Die Verfolgung der Naturerscheinungen führt zur Erklärung derselben auf Grund einfacher Annahmen als dem Endziel physikalischer Forschung.“ Das Endziel ist vielmehr zusammenfassende möglichst vollständige Beschreibung der Naturerscheinungen nach Kirchhoff, Ökonomie des Denkens nach Mach. Referent ist weit davon entfernt, diese Definitionen für den Schulunterricht förderlich zu halten, er will nur zeigen, wie überflüssig solche einleitende Abschnitte überhaupt sind.

Charlottenburg. H. Samter.

Kollert, Katechismus der Physik. 6. verm. u. verb. Auflage. Leipzig 1903, J. J. Weber. XVI u. 593 S. Preis 7 ℳ

Ein ausgezeichnetes Buch, das hier bereits in 6. Auflage vor uns liegt. Es macht nicht den Anspruch ganz elementar zu sein, denn von Anfang an wird die Einführung des absoluten Maßsystems nicht gescheut, und die

Grundbegriffe der höheren Analysis werden fleißig zu den Ableitungen herangezogen. Es ist erstaunlich, welche Fülle von Material hier zusammengestellt wird, was einer geschickten Kürze, deren sich der Verfasser befleißigt, zu danken ist. Unter dieser hat aber die Klarheit keineswegs gelitten. Eine Reihe von Stichproben zeigen, daß das Buch allen modernen Fortschritten gerecht wird: Lindes Kältemaschine, das Stephan- Boltzmannsche Gesetz, die Lehre von den elektrischen Wellen, die Elektrizitätsleitung in den Gasen nach der Ionentheorie mit Anwendung auf die Röntgen- und Becquerelstrahlen, letztere beide Theorien in besonderen längeren Kapiteln, die Theorie der elektrostatischen Potentiale, Nernsts Theorie des osmotischen Druckes sind dem Umfange des Buches entsprechend dargestellt. Die mathematische Behandlung der Induktion ist durchaus zweckentsprechend. Für folgende Auflagen hätten wir den Wunsch, daß in der geometrischen Optik den durch Lummers Ausgabe der Optik im Müller-Pouillet etwas mehr, aber leider noch nicht hinreichend verbreiteten Abbeschen Methoden etwas Berücksichtigung zuteil würde und der Optik überhaupt etwas mehr Raum angewiesen würde, damit sie in den Rang unter den physikalischen Disziplinen einrücke, der ihr heute zukommt. Die Ausstattung durch meist schematisierte, klare Zeichnungen ist gut, das Register sehr vollständig.

Charlottenburg. H. Samter.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

104. — Liegen zwei Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ vierfach hyperboloid zu einander, wobei ich als entsprechende Ecken die vier Gruppen wähle

$$\begin{array}{cccc} A_1A_2A_3A_4 & A_1A_2A_3A_4 & A_1A_2A_3A_4 & A_1A_2A_3A_4 \\ B_1B_2B_3B_4, & B_2B_1B_4B_3, & B_3B_4B_1B_2, & B_4B_3B_2B_1, \end{array}$$

dann läßt das eine Tetraeder, bezogen auf das andere, folgende baryzentrische Darstellung zu:

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)}B_1 &= \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \alpha_3A_3 + \alpha_4A_4, \\ \alpha^{(2)}B_2 &= r_2\alpha_2A_1 + r_3\alpha_1A_2 + r_1'\alpha_4A_3 + \alpha_3A_4, \\ \alpha^{(3)}B_3 &= r_1\alpha_3A_1 + r_2'\alpha_4A_2 + r_3\alpha_1A_3 + \alpha_2A_4, \\ \alpha^{(4)}B_4 &= r_3'\alpha_4A_1 + r_1\alpha_3A_2 + r_2\alpha_2A_3 + \alpha_1A_4, \end{aligned}$$

wo

$$r_1' = r_2r_3, \quad r_2' = r_3r_1, \quad r_3' = r_1r_2.$$

Dabei bedeuten die Koeffizienten α_i und r_i beliebige Parameter, und die linker Hand stehenden Faktoren $\alpha^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ sind gleich den bezüglichen Summen der rechts befindlichen Koeffizienten.

Der spezielle Fall der desmischen Tetraeder geht aus obiger Darstellung hervor, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ und etwa $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = -1$ gesetzt wird.

Berlin. E. JAHNKE

105. — Betrachtet man eine Raumkurve als *Eingehüllte einer Ebenenschar:*

$$u(t)x + v(t)y + w(t)z = p(t),$$

worin

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

ist, so wird ihre *Krümmung* und *Torsion* durch folgende Formeln bestimmt:

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta^3}{D(u'^2 + v'^2 + w'^2)^{3/2}}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\Delta^2}{D}.$$

Darin bedeuten Δ und D die Determinanten

$$\Delta = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} p & p' & p'' & p''' \\ u & u' & u'' & u''' \\ v & v' & v'' & v''' \\ w & w' & w'' & w''' \end{vmatrix}.$$

Straßburg i. E. P. EPSTEIN.

106. — Diejenige Hyperbel, welche den Einheitskreis in den Scheitelprojektionen der drei Punkte

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \quad y = 0$$

schneidet, ist das Erzeugnis der projektiven Strahlenbüschel:

$$\frac{y+1}{y-1} = \lambda, \quad \frac{x}{y-1} = \frac{a_1\lambda - a_3}{a_0\lambda - a_2}.$$

Welchen Strahlen entsprechen die drei festen Strahlen:

$$\frac{x}{y-1} = \frac{a_3}{a_2}, \quad \frac{y+1}{y-1} = \frac{a_2}{a_0}, \quad \frac{x}{y-1} = \frac{a_1}{a_0}?$$

Wie hängen alle übrigen Strahlenpaare von denselben ab?

Holzminden. G. KOBER.

B. Lösungen.

Zu **93.** (Bd. VI, S. 339) (F. W. Meyer). — Es ist für $\lambda, \mu = 1, 2, 3$

$$\left|\frac{1}{c_{\lambda\mu}}\right| = \frac{1}{c_{11}}\left(\frac{1}{c_{22}c_{33}} - \frac{1}{c_{23}c_{32}}\right) + \frac{1}{c_{12}}\left(\frac{1}{c_{23}c_{31}} - \frac{1}{c_{21}c_{33}}\right) + \frac{1}{c_{13}}\left(\frac{1}{c_{21}c_{32}} - \frac{1}{c_{22}c_{31}}\right)$$

durch Multiplikation mit $\Pi c_{\lambda\mu} = c_{11}c_{12}c_{13}c_{21}c_{22}c_{23}c_{31}c_{32}c_{33}$ folgt hieraus, wenn die zu den $c_{\lambda\mu}$ adjungierten Größen durch $\gamma_{\lambda\mu}$ bezeichnet werden, so daß $\gamma_{11} = c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}$, $\gamma_{12} = c_{23}c_{31} - c_{21}c_{33}$, $\gamma_{13} = c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}$, $\gamma_{23} = c_{31}c_{12} - c_{32}c_{11}$, $\gamma_{22} = c_{33}c_{11} - c_{31}c_{13}$ usw. ist,

$$\left|\frac{1}{c_{\lambda\mu}}\right| \Pi c_{\lambda\mu} = -\gamma_{11}c_{12}c_{13}c_{21}c_{31} - \gamma_{12}c_{11}c_{13}c_{22}c_{32} - \gamma_{13}c_{11}c_{12}c_{23}c_{33}.$$

Infolge der Identität $\gamma_{11}c_{21} + \gamma_{12}c_{22} + \gamma_{13}c_{23} = 0$ nimmt diese Gleichung die Form:

$$\left|\frac{1}{c_{\lambda\mu}}\right| \Pi c_{\lambda\mu} = (\gamma_{12}c_{22} + \gamma_{13}c_{23})c_{12}c_{13}c_{31} - \gamma_{12}c_{11}c_{13}c_{22}c_{32} - \gamma_{13}c_{11}c_{12}c_{23}c_{33}$$
$$= \gamma_{12}c_{22}c_{13}(c_{12}c_{31} - c_{11}c_{32}) - \gamma_{13}c_{23}c_{12}(c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31})$$

an, oder

I. $$\left|\frac{1}{c_{\lambda\mu}}\right| \Pi c_{\lambda\mu} = \gamma_{12}\gamma_{23}\cdot c_{13}c_{22} - \gamma_{13}\gamma_{22}c_{12}c_{23}.$$

Ebenso ist

$$\left|\frac{1}{\gamma_{\lambda\mu}}\right| = \frac{1}{\gamma_{11}}\left(\frac{1}{\gamma_{22}\gamma_{33}} - \frac{1}{\gamma_{23}\gamma_{32}}\right) + \frac{1}{\gamma_{12}}\left(\frac{1}{\gamma_{23}\gamma_{31}} - \frac{1}{\gamma_{21}\gamma_{33}}\right) + \frac{1}{\gamma_{13}}\left(\frac{1}{\gamma_{21}\gamma_{32}} - \frac{1}{\gamma_{22}\gamma_{31}}\right),$$

oder, da nach bekannten Sätzen über die Minoren adjungierter Determinanten

$$\gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{23}\gamma_{32} = |c_{\lambda\mu}|c_{11},\ \gamma_{23}\gamma_{31} - \gamma_{21}\gamma_{33} = |c_{\lambda\mu}|c_{12},\ \gamma_{21}\gamma_{32} - \gamma_{22}\gamma_{31} = |c_{\lambda\mu}|c_{13},$$
$$\gamma_{31}\gamma_{12} - \gamma_{32}\gamma_{11} = |c_{\lambda\mu}|c_{23},\ \gamma_{33}\gamma_{11} - \gamma_{31}\gamma_{13} = |c_{\lambda\mu}|c_{22} \text{ usw. ist,}$$

$$\left|\frac{1}{\gamma_{\lambda\mu}}\right| \Pi\gamma_{\lambda\mu} = -|c_{\lambda\mu}|\{c_{11}\gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{21}\gamma_{31} + c_{12}\gamma_{11}\gamma_{13}\gamma_{22}\gamma_{32} + c_{13}\gamma_{11}\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{33}\}$$

und infolge der Identität $c_{11}\gamma_{21} + c_{12}\gamma_{22} + c_{13}\gamma_{23} = 0$

$$\left|\frac{1}{\gamma_{\lambda\mu}}\right| \Pi\gamma_{\lambda\mu} = |c_{\lambda\mu}|\{c_{12}\gamma_{22}\gamma_{13}(\gamma_{31}\gamma_{12} - \gamma_{32}\gamma_{11}) - c_{13}\gamma_{23}\gamma_{12}(\gamma_{11}\gamma_{33} - \gamma_{13}\gamma_{31})\},$$

oder

II. $$\left|\frac{1}{\gamma_{\lambda\mu}}\right| \Pi\gamma_{\lambda\mu} = |c_{\lambda\mu}|^2\cdot\{\gamma_{13}\gamma_{22}c_{12}c_{23} - \gamma_{12}\gamma_{23}c_{13}c_{22}\}.$$

Aus I und II ergibt sich die verlangte Formel:

III. $$\left|\frac{1}{\gamma_{\lambda\mu}}\right| \Pi_{\lambda\mu} = -|c_{\lambda\mu}|^2\cdot\left|\frac{1}{c_{\lambda\mu}}\right| \Pi c_{\lambda\mu}.$$

„Wird durch die lineare Substitution $x_\lambda = c_{\lambda 1}y_1 + c_{\lambda 2}y_2 + c_{\lambda 3}y_3 (\lambda = 1, 2, 3)$ ein System schiefwinkliger Achsen x_1, x_2, x_3 in ein anderes System schiefwinkliger Achsen transformiert, so liegen, wenn $|c_{\lambda\mu}| = 0$ ist, die 6 Achsen beider Systeme auf einem Kegel zweiter Ordnung, und es berühren die 6 Koordinatenebenen einen Kegel zweiter Ordnung." Bei der Ableitung dieses Satzes habe ich auch den von Herrn F. W. Meyer gewünschten Beweis der Formel III gegeben. (C. Weltzien, Zur Theorie der homogenen linearen Substitutionen. Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule zu Berlin. Ostern 1886. § 4). — Falls ein entsprechender Satz für Determinanten von n^2 Elementen besteht, so würde wohl $|c_{\lambda\mu}|^2$ durch $|c_{\lambda\mu}|^{(n-1)(n-2)}$ zu ersetzen sein.

Zehlendorf. C. Weltzien.

Zu **97.** (Bd. VI, S. 340) (E. Cesàro). I. Die Kurve

(1) $$\varrho = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} + 1},\quad r = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right)$$

gehört, wie behauptet wird, einem Kreiszylinder mit dem Radius a an. Es muß also möglich sein, von jedem Kurvenpunkt aus eine Strecke a senkrecht zur Tangente und zu einer festen Richtung (α, β, γ) derart zu konstruieren, daß alle Endpunkte (x, y, z) dieser Strecken auf einer festen Geraden mit der Richtung α, β, γ liegen. Nehmen wir die Kurve (1) als Grundkurve und bedienen wir uns der von Herrn Cesàro eingeführten Bezeichnungsweise, so erhalten wir obigen Angaben entsprechend folgende Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\gamma}{\varrho}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\gamma}{r}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = -\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\beta}{r}; \tag{2}$$

$$x = 0, \quad y = \frac{a\gamma}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad z = -\frac{a\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}}; \tag{3}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{z}{\varrho} - 1 + \alpha^2, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{z}{r} + \alpha\beta, \quad \frac{dz}{ds} = -\frac{x}{\varrho} - \frac{y}{r} + \alpha\gamma. \tag{4}$$

Es ist nun nachzuweisen, daß die Relationen (1) bis (4) gleichzeitig bestehen können.

Aus (3a) und (4a) folgt

$$z = \varrho(1-\alpha^2). \tag{5}$$

Zur Umgestaltung von (4c) entnehme man den Wert von $\frac{dz}{ds}$ aus (5), die Werte von x und y aus (3a, b), den von γ aus (2a). Dann ergibt sich

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{3\alpha\,d\alpha}{1-\alpha^2} - \frac{a}{r}\frac{d\alpha}{(\sqrt{1-\alpha^2})^3}. \tag{6}$$

Wir führen durch die Beziehung

$$e^{\frac{s}{a}}\sqrt{1-t^2} = t$$

die Veränderliche t ein. Dadurch wird aus (6) unter Berücksichtigung von (1):

$$\frac{t\,dt}{1-t^2} = \left(3\alpha - 2t\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\alpha^2}}\right)\frac{d\alpha}{1-\alpha^2}.$$

Bei geeigneter Wahl der Integrationskonstanten und des Vorzeichens der Quadratwurzel ist

$$\alpha = t = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}},$$

wenn $e^{\frac{s}{a}} = p$ gesetzt wird.

Aus (2a, c) und (3) erhalten wir der Reihe nach

$$\gamma = \frac{p}{p^2+1}, \quad \beta = -\frac{1}{p^2+1};$$

$$x = 0, \quad y = \frac{ap}{\sqrt{p^2+1}}, \quad z = \frac{a}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Da eine einfache Rechnung zeigt, daß (2b) und (4a, b, c) jetzt zu Identitäten werden, so ist der gewünschte Beweis erbracht.

II. Es soll der Gleichung

$$\varrho = \frac{1}{a}(s^2 + ab) \tag{1}$$

eine solche zweite, $r = r(s)$, zugeordnet werden, daß wiederum mit beiden gleichzeitig die oben unter (2), (3), (4) aufgestellten Gleichungen bestehen. Der in voriger Aufgabe mit a bezeichnete, jetzt seiner Größe nach unbestimmte Zylinderradius sei m. Wir ersetzen in (6) die Veränderliche s mittels der Relation

$$s\sqrt{1-t^2} = t\sqrt{ab}$$

durch t und erhalten

$$\frac{2t\,dt}{1-t^2} = \left(3\alpha - \frac{m}{r\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\frac{d\alpha}{1-\alpha^2}.$$

Als spezielle Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich

$$\alpha = t = \frac{s}{\sqrt{s^2+ab}},$$

falls

$$r = \frac{m}{t\sqrt{1-t^2}} = \frac{m}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{s^2+ab}{s} = m\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{\varrho}{s}$$

gewählt wird. Man erhält ferner aus (2a, c, b)

$$\gamma = \frac{b}{\sqrt{s^2+ab}}, \quad \beta = \frac{m(b-a)}{\sqrt{ab(s^2+ab)}}, \quad m = b\sqrt{\frac{a}{a-b}}.$$

Die Relationen (3) liefern für x, y, z die Werte

$$x = 0, \quad y = b\sqrt{\frac{b}{a-b}}, \quad z = b.$$

Drücken wir nun alle in (4a, b, c) vorkommenden Größen als Funktionen von s allein aus, so gelangen wir zu Identitäten.

Wenn man also der Kurve (1) die oben angegebene Torsion $\frac{1}{r}$ erteilt, so paßt sich die entstehende Raumkurve der Oberfläche eines Kreiszylinders vom Radius m an. —

Alle Punkte, deren Koordinaten den Gleichungen

$$\frac{dx}{ds} = \frac{z}{\varrho} - 1, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{z}{r}, \quad \frac{dz}{ds} = -\frac{x}{\varrho} - \frac{y}{r} \tag{7}$$

genügen, sind fest. Ist ein solcher Punkt Schnittpunkt aller rektifizierenden Ebenen, so muß $z_1 = 0$ sein, ferner auf Grund des vorstehenden Gleichungssystems

$$x_1 = k_1 - s, \quad y_1 = k_2, \quad \frac{x_1}{\varrho} + \frac{y_1}{r} = 0.$$

Wir setzen nun die für ϱ, r, x_1, y_1 gefundenen Ausdrücke in die letzte Gleichung ein und finden dadurch

$$k_1 = 0, \quad k_2 = a\sqrt{\frac{b}{a-b}}.$$

Es gehört somit zur Kurve (ϱ, r, s) ein rektifizierender Kegel mit der Spitze

$$x_1 = -s, \quad y_1 = a\sqrt{\frac{b}{a-b}}, \quad z_1 = 0$$

Durch die Annahme, daß a positiv sei, wird die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beeinträchtigt. Sollen die oben angestellten Betrachtungen auf dem Gebiete des Reellen bleiben, so ist die Wahl von b auf das Intervall

$$a > b > 0$$

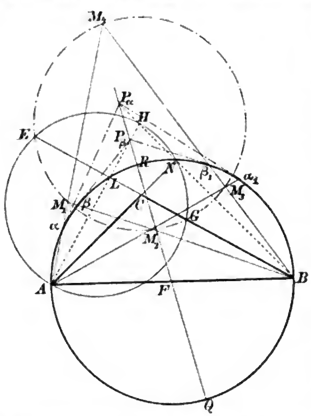
beschränkt.

Für den Fall der Kettenlinie $b = a$ erhält man die Torsion 0. Für den Grenzfall $b = 0$ versagt die angewandte Methode. Die Fälle $a = 0$ und $a = \infty$ bedürfen keiner besonderen Erörterung.

Breslau. M. Peche.

2. Anfragen und Antworten.

Zu **9** (Bd. 6, S. 174) (O. Gutsche). — *Neue Herleitung des Ortes für die Mittelpunkte aller einem Dreieck eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln.* — Bekanntlich gilt der Satz: Jeder durch zwei Punkte U und V laufende Kegelschnitt, der zwei sich in S schneidende Gerade t_1 und t_2 berührt, hat die Eigenschaft, daß der Schnittpunkt seiner Tangenten in U und V auf einem Doppelstrahl der Involution liegt, die durch die beiden Strahlenpaare SU, SV und t_1, t_2 bestimmt ist.



Eine dem Dreieck ABC eingeschriebene gleichseitige Hyperbel h möge die unendlich fernen Punkte U_∞ und V_∞ haben, dann schneiden sich AU_∞ und BV_∞ in einem Punkte R, der auf dem Kreise k liegt, dessen Durchmesser AB ist. Dasselbe gilt von dem Schnittpunkte Q der Geraden AV_∞ und BU_∞. Der Mittelpunkt von h muß daher auf den Doppelstrahlen zweier Involutionen liegen, von denen die erste durch die Strahlenpaare AB, AC und AR, AQ, die zweite durch BA, BC und BR, BQ bestimmt ist. Beide Involutionen sind hyperbolisch, wenn C innerhalb des Kreises über dem Durchmesser AB liegt, wenn also $\sphericalangle ABC > 90^0$ ist. In diesem Falle gibt es vier dem $\triangle\ ABC$ eingeschriebene gleichseitige Hyperbeln, die durch die Punkte U_∞ und V_∞ laufen.

Um die Doppelstrahlen der ersten Involution zu konstruieren, verlängert man die Seite AC, bis sie den Kreis k in N schneidet, und bringt QR und BN in P_α zum Schnitt. Die Polare von P_α in bezug auf k trifft dann diesen Kreis in zwei Punkten α und α', deren Verbindungslinien mit A die gewünschten Doppelstrahlen der ersten Involution sind. In entsprechender Weise ermittelt man die Doppelstrahlen $B\beta$ und $B\beta'$ der zweiten Involution. Alle vier Doppelstrahlen bilden ein Vierseit, in dem A und B zwei Gegenecken sind. Die anderen vier Ecken M_1, M_2, M_3, M_4 sind die Mittelpunkte der vier dem Dreieck ABC eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln, die durch die unendlich fernen Punkte U_∞ und V_∞ gehen.

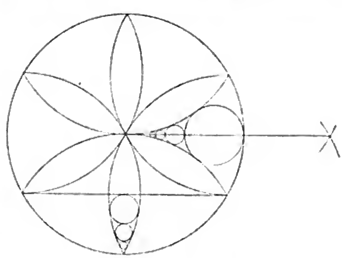
Da die Geraden $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$ auf RQ senkrecht stehen, so ist Bogen $\alpha\beta$ gleich $\alpha'\beta'$, mithin $\alpha B\beta = \alpha' A\beta'$; daher sind auch ihre Komplemente, die Winkel $\alpha M_1 B$ und $AM_3\beta'$, einander gleich, also liegen die vier Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 auf einem Kreise.

Nun sind aber nach Konstruktion einerseits die Strahlen AB, AC, AM_1, AM_2, anderseits BM_2, BM_4, BA, BC harmonisch, also ist ABC das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks $M_1M_2M_3M_4$. Folglich ist ABC ein Poldreieck für jeden durch M_1, M_2, M_3, M_4 laufenden Kegelschnitt, also auch für den Kreis, dem diese Punkte angehören. Der Mittelpunkt dieses Kreises muß daher auf den Loten liegen, die man von den Punkten A und B auf ihre Polaren BC und AC fällt; er ist somit ein fester Punkt, der Höhenschnitt H des Dreiecks ABC. Schneidet dieser Kreis die Seite BC in E und G, so sind AE und AG Tangenten, also sind AEH und AGH rechte Winkel. Mithin liegen E und G auf dem Kreise über dem Durchmesser AH, sie sind also feste Punkte, der Kreis um H ist daher ein fester Kreis, auf dem auch die Mittelpunkte aller übrigen dem $\triangle\, ABC$ eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln liegen müssen. Selbstverständlich ist dieser Kreis der einzige, für den ABC ein Poldreieck ist.

Breslau, im April 1904. O. Gutsche.

---

15. — Ein Kreis habe den Radius 1; um die Punkte der Sechsteilung seien mit dem Radius 1 die bekannten Bogen geschlagen, die sechs Doppelsegmente und sechs Bogendreiecke geben. In jede dieser Flächen lassen sich Reihen von Berührungskreisen eintragen, die ihre Mittelpunkte auf geraden Linien haben. Diese Kreisreihen sollen *einfach konstruiert* und ihre Durchmesser *berechnet* werden.



a) *Bogendreieck.* Die Durchmesser werden

$$(1)\quad \frac{1}{1.2},\ \frac{1}{2.3},\ \frac{1}{3.4},\ \frac{1}{4.5},\ \text{usw. oder}\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{20},\ \frac{1}{30},\ \ldots$$

b) *Doppelsegmente.* 1) Beginnt man auf der zweiten Symmetrieachse, so werden die Durchmesser nach rechts und links

$$(2)\qquad \frac{2\,.\,3^0}{(3^0+1)(3^1+1)},\quad \frac{2\,.\,3^1}{(3^1+1)(3^2+1)},\quad \frac{2\,.\,3^2}{(3^2+1)(3^3+1)},\quad \frac{2\,.\,3^3}{(3^3+1)(3^4+1)},\ \ldots$$

oder

$$\frac{1}{4},\quad \frac{3}{20},\quad \frac{9}{140},\quad \frac{27}{1148},\ \ldots \quad \text{usw.}$$

2) Beginnt man an beliebiger Stelle $\frac{1}{\alpha}$, was als $\frac{1}{a+1}$ geschrieben werden soll, so erhält man nach außen hin

$$(3)\qquad \frac{2a}{(1+a)(3+a)},\quad \frac{2\,.\,3a}{(3+a)(9+a)},\quad \frac{2\,.\,9a}{(9+a)(27+a)},\quad \frac{2\,.\,27a}{(27+a)(81+a)},\ \ldots$$

oder

$$\frac{2a\,.\,3^0}{(3^0+a)(3^1+a)},\quad \frac{2a\,.\,3^1}{(3^1+a)(3^2+a)},\quad \frac{2a\,.\,3^2}{(3^2+a)(3^3+a)},\quad \frac{3a\,.\,3^3}{(3^3+a)(3^4+a)},\ \ldots$$

nach innen dagegen

$$(4)\qquad \frac{2a\,.\,3^0}{(a\cdot 3^0+1)(a\cdot 3^1+1)},\quad \frac{2a\,.\,3^1}{(a\cdot 3^1+1)(a\cdot 3^2+1)},\quad \frac{2a\,.\,3^2}{(a\cdot 3^2+1)(a\cdot 3^3+1)},\ \ldots$$

usw.

Beginnt man z. B. bei $\frac{1}{3}$, so ist $a = 2$, und man erhält nach *innen*

$$\frac{4}{(2+1)\cdot(2\cdot 3+1)} = \frac{4}{3\cdot 7} = \frac{4}{21},\quad \frac{2\cdot 2\cdot 3}{(2\cdot 3+1)(2\cdot 9+1)} = \frac{12}{7\cdot 19},$$

$$\frac{2\cdot 2\cdot 3^2}{(2\cdot 3^2+1)(2\cdot 3^3+1)} = \frac{36}{19\cdot 55}\quad \text{usw.}$$

nach außen:

$$\frac{4}{(1+2)(3+2)} = \frac{4}{3\cdot 5},\quad \frac{2\cdot 2\cdot 3}{(3+2)(3^2+2)} = \frac{12}{5\cdot 11},\quad \frac{2\cdot 2\cdot 3^2}{(3^2+2)(3^3+2)} = \frac{26}{11\cdot 29}$$

usw. Die Summierung dieser Reihen ergibt sich aus der Zeichnung von selbst

Sind diese Resultate bekannt, bzw. wo sind sie veröffentlicht?

Hagen i. W. G. Holzmüller.

3. Kleinere Notizen.

Über das harmonische Mittel.

Von P. Zühlke.

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich mit der Frage, wie viel von einander verschiedene Paare positiver ganzer Zahlen (x, y) sich bestimmen lassen, zu denen eine gegebene positive ganze Zahl m das harmonische Mittel ist.

Bekanntlich bezeichnet man eine Zahl als das harmonische Mittel zu zwei anderen, wenn ihr reziproker Wert das arithmetische Mittel der reziproken Werte der beiden anderen ist.

Um also die gestellte Frage zu beantworten, hat man festzustellen, wie viel Systeme ganzzahliger Lösungen der Gleichung

$$(1)\qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{m}$$

zukommen. Die Zahl m möge bei der Zerlegung in ihre Primfaktoren (wobei mit dem kleinsten Faktor begonnen werde) die Form

$$m = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \cdots k^{\varkappa}$$

annehmen; man hat bei der Untersuchung zu unterscheiden, ob m gerade oder ungerade ist.

1. Ist m gerade, der mit a bezeichnete kleinste Primfaktor also gleich 2, mithin m von der Form

$$m = 2n = 2 \cdot 2^{\alpha-1} \cdot b^{\beta}\, c^{\gamma} \cdots k^{\varkappa},$$

so kann man statt der Gleichung (1) auch schreiben

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}.$$

Wie Herr Schilling[1]) gezeigt hat, ist die Anzahl der Lösungspaare dieser Gleichung nichts anderes als die Zahl, welche angibt, auf wieviel verschiedene Arten man

$$n^2 = 2^{2\alpha-2} \cdot b^{2\beta}\, c^{2\gamma} \cdots k^{2\varkappa}$$

als Produkt zweier Faktoren darstellen kann; jene Anzahl ist also gleich

$$\frac{(2\alpha - 1)(2\beta + 1)(2\gamma + 1)\cdots(2\varkappa + 1) + 1}{2}.$$

2. Ist m ungerade, so läßt sich die Gleichung (1) in die Form

$$(2x - m)(2y - m) = m^2$$

setzen, welche zeigt, daß

$$2x - m = p, \quad 2y - m = q$$

komplementäre positive Teiler von m^2 sein müssen; da die Teiler der ungeraden Zahl m^2 wieder ungerade sind, so sind

$$x = \frac{m+p}{2}, \quad y = \frac{m+q}{2} \tag{2}$$

wirklich, wie verlangt, ganzzahlig.

Umgekehrt, ist $pq = m^2$, so ist das Wertepaar (2) ein Lösungssystem von (1), denn die Gleichung

$$\frac{1}{\frac{m+p}{2}} + \frac{1}{\frac{m+q}{2}} = \frac{2}{m}$$

ist unter der Bedingung $pq = m^2$ eine Identität.

Da sich die Zahl m^2 bekanntlich auf

$$\frac{(2\alpha + 1)(2\beta + 1)(2\gamma + 1)\cdots(2\varkappa + 1) + 1}{2}$$

1) Fr. Schilling, Über die optische Formel $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ als diophantische Gleichung. Hoffmanns Zeitschrift, 26. Jahrgang, 1895, S. 491—493.

verschiedene Arten als Produkt zweier Faktoren darstellen läßt, so ist diese Zahl auch die Anzahl der verschiedenen Paare ganzzahliger Lösungen der Gleichung (1).

Damit ist gezeigt, daß die Gleichung (1)

$$\frac{(2\alpha \mp 1)(2\beta + 1)(2\gamma + 1)\cdots(2\varkappa + 1) + 1}{2}$$

verschiedene Systeme ganzzahliger Lösungen besitzt, wobei in der ersten Klammer das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem m gerade oder ungerade ist.

Da die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahl m^2 als Produkt zweier ganzzahliger Faktoren darzustellen, identisch ist mit der Anzahl der Paare ganzer Zahlen, zu denen m das geometrische Mittel ist, so kann man das Resultat auch so aussprechen:

Die Anzahl der Paare ganzer Zahlen, zu welchen eine gegebene Zahl m das harmonische Mittel bildet, ist ebenso groß wie die Anzahl der Paare ganzer Zahlen, zu welchen dieselbe Zahl m oder aber die Zahl $\frac{m}{2}$ das geometrische Mittel bildet, je nachdem die Zahl m ungerade oder gerade ist.

Charlottenburg, den 14. November 1903.

---

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

Zu Bd. I. S. 937.

Die Ungleichung, aus der nach Tschebyscheff der Satz von Lamé folgen soll: „*Die Anzahl m der Divisionen, die auszuführen ist, um den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a und b $(< a)$ zu finden, ist kleiner als die fünffache Anzahl der Ziffern der Zahl b*, lautet nicht $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m > b$, sondern $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m < b$. Aber aus dieser Ungleichung ist der Lamésche Satz nicht zu erhalten; auch dann nicht, wenn man von der aus

$$y_x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right) \quad \left(\text{nicht } \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right)\right)$$

folgenden *unverkürzten* Ungleichung ausgeht. Diese heißt übrigens nicht

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m\right) \leqq b,$$

sondern

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}\right) \leqq b.$$

Denn entwickelt man $\frac{b}{a}$ in den Kettenbruch $\cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_m}}}$, so ist $b = [q_2, q_3, \cdots, q_m]$ am kleinsten, wenn $q_2, q_3, \cdots, q_m$ ihre kleinsten Werte annehmen, also $b \leqq [1, 1, 1, \cdots, 2]$, d. h. $\leqq y_{m+1}$.

Aus

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1} \pm \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{m+1} \leqq b\sqrt{5}$$

folgt nun:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1} \leqq b\sqrt{5}\left\{\frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{5b^2}}}{2}\right\},$$

und, wenn $\log \frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{5b^2}}}{2} = \varepsilon \left(< \frac{1}{100}\right)$ gesetzt wird, folgt:

$$m+1 < \frac{\log b + 0{,}34949 + \varepsilon}{0{,}20898},$$

also

$$m < \frac{\log b + 0{,}14051 + \varepsilon}{0{,}20898}.$$

Soll dies kleiner als $5k$ sein, wo k die Stellenzahl von b ist, so muß $\log b < 1{,}04490\,k - 0{,}14051$ sein, was erst von $k = 4$ an stets der Fall ist. Demnach wäre der Satz für eine Anzahl Werte von b unter 1000 anderweitig zu beweisen.

Es gibt einige zum Laméschen Satz analoge Sätze, von denen der bemerkenswerteste der folgende ist: *Entwickelt man* $\frac{b}{a}$ *in einen „kürzesten" Kettenbruch* $\cfrac{1}{q_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{q_2 + \cdots + \cfrac{\varepsilon_m}{q_m}}}$, *derart, daß bei jeder Division der Rest absolut kleiner als* $\frac{1}{2}$ *ist, so ist die Gliederzahl* m *nicht größer als die dreifache Stellenzahl von* b. Es wird nämlich $b = [\pm q_2, \pm q_3, \cdots, \pm q_m] = q_2 q_3 \cdots q_m \pm \cdots$ $= q_m [\pm q_2, \pm q_3, \cdots, \pm q_{m-1}] + \varepsilon_m [\pm q_2, \pm q_3, \cdots, \pm q_{m-2}]$ bei variablem q_m am kleinsten für $q_m = 2$; dann kann man $\varepsilon_m = 1$ setzen, da man andernfalls $q_{m-1} - \frac{1}{2} = (q_{m-1} - 1) + \frac{1}{2}$ setzen darf. Nunmehr wird $b = 2[\pm q_2, \cdots, \pm q_{m-1}] + [\pm q_2, \cdots, \pm q_{m-2}]$ und dies bei variablem q_{m-1} am kleinsten für $q_{m-1} = 2$ usw.; demnach ist $b > [2, 2, \cdots, 2]$, d. h. $\geqq y_m$, wenn $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 5$, allgemein $y_m = 2y_{m-1} + y_{m-2}$ gesetzt wird. Diese Zahlenreihe:

$$1,\ 2,\ 5;\ 12,\ 29,\ 70;\ 169,\ 408,\ 985;\ \cdots$$

zerfällt in Gruppen, sodaß in jeder Gruppe 3 oder wenigstens 2 Zahlen von gleich viel Ziffern stehen, woraus $m \leqq$ dreifache Ziffernzahl von y_m, also auch von b folgt. Aus $y_{n+1} = 2y_n + y_{n-1}$ folgt nämlich

$$\begin{aligned} 3y_n &> y_{n+1} > y_n, \\ 7y_n &> y_{n+2} > 3y_n, \\ 17y_n &> y_{n+3} > 7y_n, \\ 41y_n &> y_{n+4} > 17y_n, \end{aligned}$$

so daß, wenn $y_n < 10^{k-1} \leqq y_{n+1}$ ist, auch y_{n+2}, und eventuell noch y_{n+3}, aber nicht mehr y_{n+4} k-zifferig ist.

Königsberg i. Pr. TH. VAHLEN.

Zu Band II, Heft 1.

S. 117, Anmerk. 301 wäre statt Borchardt besser zu zitieren: Tardy, Bullettino di bibliografia e di storia (Boncompagni) I, 1868, 177—186, da Borchardt nur den Inhalt dieses ausführlichen Aufsatzes von Tardy kurz mitteilt.

S. 120 ist zu bemerken, daß die sogenannte Simpsonsche Formel bereits 1668 von James Gregory gegeben wurde. Vgl. G. Heinrich in Bibliotheca math. (3) I, 1900, 90—92.

S. 121, Anm. 326 ist zu bemerken, daß die Lagrangesche Interpolationsformel schon 1776 von Waring gegeben wurde. Vgl. A. v. Braunmühl, Bibliotheca math. (3) II 1901, S. 95—96.

Zu Band II, Heft 2/3.

S. 213, Anm. 78 muß es heißen Par. Hist. 1772, S. 343—372 und 651—656.

S. 241, letzte Zeile sollte zitiert sein: Euler, Novi Comm. Acad. Petrop. VIII, 1760/61, Petropoli 1763, S. 32, Problema 9, wo der Satz für die allgemeine Riccatische Differentialgleichung bewiesen ist, und Novi Comm. IX, 1762/63, Petropoli 1761, S. 162—163, wo er für die spezielle Riccatische Gleichung vorkommt. Auch ist an beiden Orten angegeben, wie man mit 2 partikulären Lösungen die allgemeine findet.

Zu Band III, Teil 3, Heft 1.

S. 45 dürfte beim Trajektorienproblem bemerkt sein: Acta Eruditorum, Lipsiae 1693, 476, desgleichen, daß Perault der erste Erfinder der gewöhnlichen Traktrixkurve ist.

S. 34, Nr. 15 fehlt der Hinweis auf E. Wölffings Abhandlung über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten, wo die gesamte Literatur historisch entwickelt ist: Bibliotheca math. (3) I, 1900, 142 ff.

S. 146, Zeile 15 von unten fehlt die Angabe des Artikels „Über die reduzierte Länge eines geodätischen Bogens“ von A. v. Braunmühl. Münch. Abhandl. 2. Klasse XIV, 1883, 94—110.

S. 149, Nr. 18 fehlt die Angabe folgender Arbeiten A. Cayley: On the geodesic lines on an oblate spheroid, Philos. Magazine **40**, 1870, 329 bis 340; Collected Papers III, 15—25. — Note on geodesic lines on an ellipsoid, Philosoph. Magazine, **41**, 1871, 534—35, Coll. Pap. VII, 34—35. — On geodesic lines, in particular those of a quadric surface, Proceedings of the London Math. Soc. IV, 1871—73, 191—211 und

368—380; Coll. Pap. VIII 156 ff. und 188 ff. Ferner A. v. Braunmühl: Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen 2. Grades, Math. Annalen **20**, 1882, 557—586 und Notiz über geodätische Linien auf den dreiaxigen Flächen 2. Grades, welche sich durch elliptische Funktionen darstellen lassen: Math. Annalen **26**, 1886, 151—153.

S. 150, Anm. 119 ist zu bemerken, daß die daselbst mitgeteilte Gleichung der geodätischen Linien sich schon bei Liouville findet und zwar in Note II zu Monges Application de l'Analyse à la Géométrie. 2. Aufl. 1850, S. 580.

Zu Band III, Heft 2/3.

S. 289 fehlt die Anführung der beiden Abhandlungen von L. Raffy: Sur la déformation des surfaces spirales, Comptes R. **112**, 1891, 518 und 1421 und seines umfangreichen Artikels über die Bestimmung der harmonischen Spiralflächen: Sur les spirales harmoniques in Ann. de l'école norm. (3) XII, 1895, 145.

S. 298 in Nr. 13 und 14 ist noch eine Arbeit von Raffy zu bemerken, die sich auf die Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien bezieht: Sur les surfaces à lignes de courbure planes, dont les planes enveloppent un cylindre. Ann. de l'école norm. (3) **18**, 1901, 343.

S. 298, Anm. 129 ist zwischen Rudio und Opitz die Abhandlung über die reduzierte Länge eines geodätischen Bogens von A. v. Braunmühl, Münch. Abhandl. **14**, 1883, 94—110 anzuführen, da dieselbe nicht nur zuerst eine vereinfachte Darstellung der Gleichungen der von Opitz als Rudiosche Flächen bezeichneten gab, sondern in dem wesentlich allgemeinern Fall des Linienelementes der harmonischen Flächen die Gleichungen der Zentraflächen mitteilte.

S. 367, Anm. 34. Die Winkeltreue der stereographischen Projektion findet sich in dem zu seiner Zeit und lange hernach noch in hohem Ansehen stehenden Astrolabium von Clavius (1593). Vgl. Bibl. math. (2) **13**, (1899) S. 75, Artikel von S. Haller: „Beitrag zur Geschichte der konstruktiven Auflösung sphärischer Dreiecke durch stereographische Projektion".

München, März 1904. A. v. Braunmühl.

In meinem Artikel I. B. 3a. Über Separation und Approximation der Wurzeln ist S. 428 ein Fehler zu berichtigen, auf den mich Herr A. Loewy aufmerksam gemacht hat. Es handelt sich darum, daß die Anzahl der Paare komplexer Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe $D_1\ D_2 \ldots D_n$ ist, wo $D_k = \left|s_{\alpha+\beta}\right|_{\beta=0,1\ldots k-1}^{\alpha=0,1\ldots k-1}$ und s_λ die Summe der λten Potenzen der n Wurzeln bedeutet. Ich sage nun dort: „Dieser Satz gilt auch noch, wenn von den Größen $D_2 \ldots D_{n-1}$ einige verschwinden." Ich hätte hinzufügen müssen: „vorausgesetzt, daß nicht zwei aufeinanderfolgende gleichzeitig verschwinden." In dem Falle, wo mehrere aufeinanderfolgende unter den Größen verschwinden, kann das Kriterium versagen, z. B. bei der Gleichung $x^5 = 1$ [1]).

C. Runge.

1) Siehe A. Loewys Anmerkungen zu C. Sturm, Über die Auflösung der numerischen Gleichungen, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 143. S. 58.

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Besson, T., Le radium et la radioactivité. Propriétés générales. — Emplois médicaux. Avec une préface du D' A. d'Arsonval. Paris 1904, Gauthier-Villars. 170 S. Fr. 2.75.

Dingeldey, Über die Anwendung der Mathematik auf Astronomie, Physik und Technik. Antrittsrede als Rektor der Technischen Hochschule zu Darmstadt. 1903.

Duhem, P., Recherches sur l'hydrodynamique. 2e série: Les conditions aux limites. Le theorème de Lagrange et la viscosité. Les coefficients de viscosité et la viscosité au voisinage de l'état critique. Paris 1904, Gauthier-Villars. 153 S. Fr. 7.50

Enzyklopädie der Math. Wiss. Band III_3, Heft 2: O. Staude, Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven. S. 161—256. Leipzig 1904, B. G. Teubner.

— — Band V_2, Heft 1: R. Reiff und A. Sommerfeld, Standpunkt der Fernwirkung. Die Elementargesetze. S. 3—62. — H. A. Lorentz, Maxwells elektromagnetische Theorie. S. 63—144. — H. A. Lorentz, Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie. S. 145—280. Leipzig 1904, B. G. Teubner.

Fischer, V., Vektordifferentiation und Vektorintegration. 82 S. Leipzig 1904, Ambros. Barth.

Fitting, F., Das Rösselsprungproblem in neuer Behandlung. Progr. Gymn. M. Gladbach 1904. 55 S.

Gérard, E., Leçons sur l'Electricité. Tome premier. 7e édition. Paris 1904, Gauthier-Villars.

Grassmann, Hermann, Gesammelte Werke II_1: Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 451 S.

Hessenberg, G., Ebene und sphärische Trigonometrie. 2. Aufl. Sammlung Göschen Nr. 99. 167 S. Leipzig 1904, Göschen.

Hiber, Gravitation als Folge einer Umwandlung der Bewegungsform des Äthers im Innern der wägbaren Materie. München 1903, H. Lukaschik. 44 S.

Humbert, G., Cours d'analyse professé à l'Ecole Polytechnique. II. Paris 1904, Gauthier-Villars. 493 S. Fr. 16.

Janisch, W., Geometrische Aufgaben zur Lehre von der Proportionalität der Größen. Potsdam 1904, A. Stein. 100 S. ℳ 1.75.

Lemke, H., Über das Gleichgewicht der Atmosphären der Himmelskörper. Wiss. Beil. Reform-Realgymn. Dt. Wimersdorf. 20 S. 1904.

Malý, F., Grundriß der Mediations-Rechnung. 174 S. Graz 1904, Kommissionsverlag des Verlags „Styria".

Marchis, M. L., Physique industrielle. Thermodynamique I: Notions fondamentales. 176 S. Paris 1904, Gauthier-Villars. Fr. 5.

Netto, E., Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 200 S.

Opitz, P., Anwendung der elliptischen Funktionen auf ein Problem aus der Theorie der Rollkurven. Inaug.-Diss. Rostock 1904. 51 S.

Poincaré, H., Théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes. La télégraphie sans fil. Scientia No. 23. Paris 1904, L. Naud. 110 S.

Riehl, A., Hermann v. Helmholtz in seinem Verhältnis zu Kant. Berlin 1904, Reuther n. Reichard. 48 S. ℳ 0,80.

Rüefli, J., Lehrbuch der Stereometrie nebst einer Sammlung von Übungsaufgaben. Dritte Auflage. Bern 1904, A. Franke. 119 S.

Runge, C., Theorie und Praxis der Reihen. Sammlung Schubert XXX. Leipzig 1904, Göschen. 266 S. ℳ 7.

Schlesinger, L., Differentialgleichungen. 2. Aufl. Sammlung Schubert XIII. Leipzig 1903, Göschen. 320 S. ℳ 8.

Schmidt, G. C., Die Kathodenstrahlen. Heft 2 der Sammlung naturwiss. und math. Monographien: „Die Wissenschaft". Braunschweig 1904, Vieweg u. Sohn. VI u. 120 S. ℳ 3.

Schwalbe, B., Grundriß der Astronomie. Herausgegeben von H. Böttger. Braunschweig 1904, Vieweg u. Sohn. XIV u. 319 S.

Størmer, C. Ein Brief von Niels Henrik Abel an Edmund Jakob Külp. Christiania 1903, i. K. J. Dybwad.

Teixeira, Gomes, Obras sobre mathematica I. Coimbra 1904, 402 S.

Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten.

Von F. Klein und K. Wieghardt in Göttingen.[1])

(Fortsetzung und Schluß.)

Disposition.

---

§ 2. Über Spannungsflächen ebener Diskontinuen (Fachwerke).

1. Die Gleichungen (1), aus denen Airy die Existenz der Spannungsfunktion für ein Spannungen übertragendes ebenes Kontinuum erschloß, haben unmittelbar gar keinen Sinn mehr, wenn es sich um die Spannungsverteilung in einem ebenen Diskontinuum, etwa einem ebenen

1) Nach einem von F. Klein in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft am 7. Juli 1903 gehaltenen Vortrage weiter ausgearbeitet von K. Wieghardt.

Fachwerke handelt. Aber die Spannungsfunktion oder die Spannungsfläche ist etwas viel Allgemeineres als die Gleichungen, aus denen sie zuerst gewonnen wurde, sie existiert ebenso gut für ebene Diskontinua wie für Kontinua; man hat dann nur (mit Maxwell) die durch Integration gewonnenen Formeln (4) zu grunde zu legen, wie im folgenden noch zu erörtern sein wird. Es wird im folgenden unsere Aufgabe sein, die besonderen Umstände zu erörtern, welche hieraus für die Fachwerkstatik entspringen.

Um unnötige Komplikationen in der Darstellung zu vermeiden, werden wir ausführlicher nur von solchen ebenen Fachwerken handeln, welche das Bild eines Polygonnetzes darbieten, dessen Elemente sich nirgends kreuzen und überdecken, sondern alle glatt nebeneinanderliegen. (Fig. 6.) Zudem werden wir bis auf weiteres annehmen, daß äußere Kräfte nur an den Knotenpunkten des Umrißpolygons wirksam sind. Am Schluß des Paragraphen werden wir dann auch kurz einige Fachwerke behandeln, welche in dieses Schema nicht hineinpassen. Natürlich denken wir uns aber in den Knotenpunkten *reibungslose Gelenke*, so daß nur Spannungen in der Längsrichtung der Stäbe, sog. „Grundspannungen“ oder „Hauptspannungen“ auftreten können.

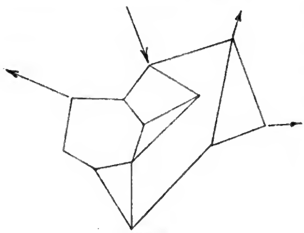


Fig. 6.

K. Wieghardt setzt sich im folgenden das Ziel, aus den Maxwellschen Ansätzen die völlige Analogie zu dem Zusammenhange her auszuarbeiten, welcher beim Kontinuum zwischen den Gleichgewichtsbedingungen des gespannten Kontinuums und der Airyschen Spannungsfläche besteht, *es soll gezeigt werden, daß das Bestehen der Gleichgewichtsbedingungen unseres Fachwerks völlig äquivalent mit der Existenz einer noch näher zu definierenden Spannungsfläche ist.*

Dieses Ziel erreichen wir in zwei Schritten. Erstens zeigen wir, daß man stets eine Spannungsfläche angeben kann, durch welche ein Spannungssystem definiert wird, welches bei einem gleichzeitig dadurch mitdefinierten Kraftangriff an unserm Fachwerke im Gleichgewichte ist, und zweitens das Umgekehrte, daß zu jeder Spannungsverteilung, die bei gegebenem Kraftangriff am Fachwerke im Gleichgewichte ist, eine solche Spannungsfläche konstruiert werden kann.

Wir konstruieren über unserm Fachwerke eine Fläche, welche aus lauter nebeneinanderliegenden, ebenflächigen Polygonen so zusammengesetzt ist, daß ihre Kanten, auf die Ebene des Fachwerks projiziert, gerade die Stäbe des Fachwerks ergeben. Die Konstruktion einer solchen Fläche, die wir „*Facettenfläche*" nennen wollen, ist stets möglich; im schlimmsten Falle ist sie durch ein einziges ebenflächiges Polygon dargestellt. An diese Facettenfläche heften wir nun eine „*Polyederzone*", wie folgt: Durch jede Kante des Umrißpolygons der Facettenfläche legen wir eine Ebene, aber nicht ganz willkürlich, sondern einmal so, daß sie mit der Ebene des Fachwerks einen von 90^0 verschiedenen Winkel einschließt und ferner so, daß die Kanten, in denen zwei aufeinanderfolgende dieser Ebenen sich schneiden, folgende Eigenschaften besitzen. a) Von den beiden Halbstrahlen, in welche jede solche Kante durch den auf ihr liegenden Eckpunkt des Facettenflächenumrisses zerlegt wird, soll immer der eine — auf die Fachwerkebene projiziert — das Fachwerkgebiet durchsetzen, der andere nicht. b) Alle die Halbstrahlen, welche — auf die Fachwerkebene projiziert — das Fachwerkgebiet nicht durchsetzen, sollen sich gegenseitig nirgends schneiden. Je zwei aufeinanderfolgende dieser zuletzt erwähnten Halbstrahlen schneiden dann mit der dazwischenliegenden Seite des Facettenflächenumrisses aus der ihnen allen dreien gemeinsamen Ebene einen Streifen aus und die aus allen diesen Streifen zusammengesetzte Fläche ist die gewünschte Polyederzone; sie ist das Analogon zu der abwickelbaren Fläche von § 1. Je dichter die Kanten der Polyederzone aneinandergrenzen, umsomehr werden sie den Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche vergleichbar, während gleichzeitig unsere Streifen sich immer mehr den erzeugenden Streifen einer abwickelbaren Fläche nähern.

Die gesamte so konstruierte, aus Facettenfläche und Polyederzone zusammengesetzte, stetige und die Ebene einfach überwölbende Fläche ist es nun, die wir näher zu betrachten haben; wir wollen sehen, zu welcher Spannungsverteilung in der Fachwerkebene sie Anlaß gibt, wenn wir sie als Spannungsfläche auffassen. Jedenfalls ist das Eine von vornherein klar, daß sie uns keinen Aufschluß über *spezifische* Spannungen, d. h. Spannungen pro Strecken- oder Flächeneinheit, zu liefern vermag, denn diese sind nach den Gleichungen (2) durch die *zweiten* Differentialquotienten der Spannungsfläche gegeben, die zweiten Differentialquotienten sind aber bei unserer Fläche entweder Null, nämlich im Innern der einzelnen Facetten und Streifen, oder unendlich groß, nämlich in den Kanten. Die *ersten* Differentialquotienten dagegen sind, wenn auch in den Kanten unstetig, doch überall endlich. Demgemäß definiert uns unsere Fläche vermöge der Maxwellschen

Gleichungen (4) *resultierende* Spannungen über irgend ein Bogenstück ab in der Ebene des Fachwerks. Wenn wir nun das eine Mal die Formeln (4) für ein Bogenstück ab ansetzen, welches ganz im Innern einer Facette oder eines Streifens verläuft, das andere Mal für ein beliebig kleines Bogenstück ab, welches eine (projizierte) Kante der Spannungsfläche durchsetzt, so finden wir, daß unsere Fläche, als Spannungsfläche aufgefaßt, ein im Gleichgewicht befindliches Spannungssystem vermittelt, welches in den projizierten Kanten wirksam ist. Ersetzen wir noch die Spannungen in den projizierten Kanten der Polyederzone durch Kräfte, die an den Eckpunkten des Fachwerkumrisses angreifen, so haben wir ein erstes Resultat gewonnen: *Irgend eine in der beschriebenen Weise hergestellte, aus Facettenfläche und Polyederzone zusammengesetzte Fläche definiert uns ein an dem entsprechenden Fachwerke angreifendes Gleichgewichtssystem von äußeren Kräften und eine an ihm unter dem Einflusse dieser Kräfte im Gleichgewicht befindliche Spannungsverteilung.*

Hiermit ist der erste Schritt zur Erreichung unseres Zieles gemacht, wir vollziehen nun den zweiten. Dabei unterwerfen wir die äußeren Kräfte folgenden zwei Einschränkungen. Jede Aktionslinie des Kraftsystems wird durch den auf ihr liegenden Eckpunkt des Fachwerkumrisses in zwei Halbstrahlen zerlegt; von diesen Halbstrahlen verlangen wir, daß sie genau die Bedingungen a) und b) erfüllen wie vorhin die entsprechenden Halbstrahlen im Raume. Wir greifen nun irgend einen Knotenpunkt des Fachwerks heraus und machen ihn der Einfachheit halber zum Anfangspunkt eines XYZ-Koordinatensystems, wie Fig. 7 zeigt. An diesem Knotenpunkte mögen die Kanten $1, 2, \ldots, n$ und die Winkelräume I, II, ..., N zusammenstoßen. Über einem der Winkelräume, etwa I, nehmen wir nun irgend eine Facette (bez. irgend einen Streifen) an, etwa:

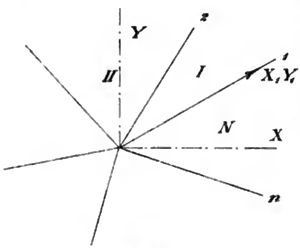


Fig. 7.

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

Daran reihen wir nun, indem wir zyklisch um unsern Knotenpunkt herumgehen, nacheinander die Facetten (bezw. Streifen) II, III, ..., N, wobei wir dafür Sorge tragen, daß bei Anwendung der Gleichungen (4) auf zwei aufeinanderfolgende der Ebenen I, II, ..., N immer die gegebene Spannung in der gemeinsamen Kante herauskommt. Sind X_i, Y_i die Komponenten der

Spannung in der Kante $J-1, J$ gemäß Fig. 7, so lauten die Gleichungen dieser Ebenen:

$$(14)\quad \begin{cases} (1) & z = \alpha x + \beta y + \gamma, \\ (2) & z = -Y_2 \cdot x + X_2 \cdot y + \alpha x + \beta y + \gamma, \\ (3) & z = -(Y_2 + Y_3)x + (X_2 + X_3)y + \alpha x + \beta y + \gamma, \\ & \vdots \\ (i) & z = -\left(\sum_2^i Y_i\right) \cdot x + \left(\sum_2^i X_i\right) \cdot y + \alpha x + \beta y + \gamma, \\ & \vdots \\ (n) & z = -\left(\sum_2^n Y_i\right) \cdot x + \left(\sum_2^n X_i\right) \cdot y + \alpha x + \beta y + \gamma.^{1)} \end{cases}$$

Da nun die n Spannungen am Knotenpunkte im Gleichgewichte sind, so ist die letzte Gleichung mit:

$$z = Y_1 x - X_1 y + \alpha x + \beta y + \gamma$$

identisch, und wenn wir hier den Punkt x, y auf der projizierten Kante 1 annehmen, wird $z = \alpha x + \beta y + \gamma$, d. h. die ganze zyklische Folge der n Facetten (bezw. Facetten und Streifen) ist in sich geschlossen. *Die Tatsache also, daß an einem Knotenpunkte unseres Fachwerks Gleichgewicht zwischen den Spannungen herrscht, bedeutet für den Knotenpunkt die Existenz eines Stückes Spannungsfläche um ihn herum, welches bis auf eine willkürliche Ebene völlig bestimmt ist.*

Wir werden versuchen, alle diese zu den verschiedenen Knotenpunkten des Fachwerks gehörigen Stücke durch geeignete Wahl der jeweils willkürlichen Ebene zu einer stetigen, *in sich geschlossenen* Fläche zusammenzuschließen. Mit irgend einem Knotenpunkte beginnend, schraffieren wir das um ihn herum (mit irgendeiner willkürlichen Ebene) konstruierte Stück Spannungsfläche (Fig. 8, s. f. S.). Die Eckpunkte des schraffierten Polygons (welches sich eventuell ins Unendliche erstreckt), numerieren wir zyklisch mit 1, 2, ..., m. Wir können nun die Ebene, welche an dem Stück Spannungsfläche um 1 herum willkürlich ist, mit einer der schraffierten Flächen, die an 1 zusammenstoßen, identifizieren (etwa mit I); dann gehört auch M diesem Stück Spannungsfläche an, da in einem solchen Flächenstücke die gegenseitige Lage zweier aufeinanderfolgender Ebenen völlig durch die Spannung in der ihnen gemeinsamen (projizierten) Kante bestimmt ist. Also

1) Die Formeln (14) und (15), mit denen hier und auf Seite 101 operiert wird, wurden von F. Klein aufgestellt; man vergl. das Hennebergsche Enzyklopädiereferat. Sie entsprechen den Formeln, die unter (13), § 1 für die dort betrachtete abwickelbare Fläche (die ein Grenzfall der nun betrachteten Polyederzone ist), aufgestellt wurden.

das Stück Spannungsfläche um 1 herum schließt sich glatt an das schraffierte Polygon an. So können wir, nach und nach die schraffierten Flächen II, III, ..., $M-1$ mit der jeweils willkürlichen Ebene identifizierend, die Stücke Spannungsfläche um 2, 3, ..., $m-1$ herum glatt an unser schraffiertes Polygon anschließen. Es fragt sich nur noch, ob das zuletzt konstruierte Flächenstück (Facette oder Streifen) Z sich glatt an das zuerst konstruierte Flächenstück A anschließt. Das muß

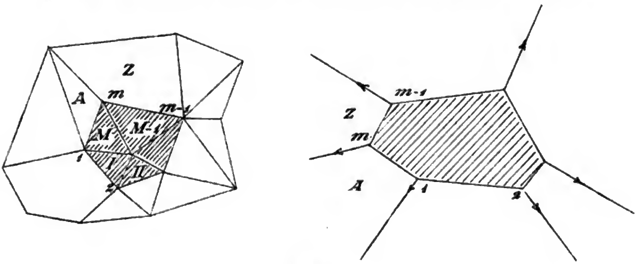


Fig. 8.

aber der Fall sein, denn wählen wir als die am Knotenpunkte m willkürliche Ebene die Ebene A und konstruieren das Stück Spannungsfläche um m herum, so können wir auf keine anderen Facetten (Streifen) kommen als $M, M-1, \ldots, Z$, da die gegenseitige Lage zweier benachbarter Ebenen dieser Folge völlig durch die Spannung in der gemeinsamen (projizierten) Kante bestimmt ist. Die Folge A bis Z ist also — als das Stück Spannungsfläche um m herum — ebenfalls in sich geschlossen. Schraffiert man nun alle bisher konstruierten Stücke Spannungsfläche und wiederholt an den Ecken des nun schraffierten größeren Polygons die soeben beschriebene Konstruktion u. s. f., so gelangt man schließlich tatsächlich zu einer stetigen, in sich geschlossenen, die ganze Ebene einfach überwölbenden, „*einwertigen*“ Spannungsfläche. Damit ist unser Ziel erreicht; zusammenfassend können wir sagen:

Für ein ebenes Fachwerk, welches aus lauter glatt nebeneinanderliegenden Polygonen zusammengesetzt ist, dessen Knotenpunkte reibungslos gelenkig sind und an welchem äußere Kräfte der beschriebenen Art und nur in den Knotenpunkten des Umrißpolygons wirken, ist das Bestehen der Gleichgewichtsbedingungen völlig äquivalent mit der Existenz einer stetigen und überall einwertigen Spannungsfläche der beschriebenen Art. Diese Spannungsfläche besteht aus einer Polyederzone, deren Kanten, projiziert, *die Aktionslinien des Kräftesystems ergeben, und aus einer Facettenfläche, deren Kanten, projiziert, die Stäbe des Fachwerks liefern.*

Wenn die äußeren Kräfte nicht den beiden von uns gemachten Einschränkungen unterliegen, so treten Komplikationen ein, welche zwar kaum das Verständnis, wohl aber die zweidimensionale Darstellung erschweren, insofern die Polyederzone sehr kompliziert werden kann (ähnlich wie die abwickelbare Fläche bei dem ersten Balkenbeispiel von § 1, S. 9); wir gehen daher nicht näher darauf ein.

2. Eine hübsche Anwendung des abgeleiteten Satzes ist folgende. Das Fachwerk sei aus lauter Dreiecken zusammengesetzt (Fig. 9); es stehe unter dem Einflusse irgend eines Gleichgewichtssystems von Kräften, die an den Knotenpunkten des Umrißpolygons wirken. Die Frage ist: Wieviel Spannungsflächen gibt es zu diesem gegebenen Kraftsystem, mit andern Worten: Wievielfach statisch unbestimmt ist das Fachwerk? Wir konstruieren, in direkter Nachbildung der Gleichung der abwickelbaren Fläche beim Kontinuum (Gleichung (13)), die Polyederzone, die durch unser Kraftsystem X_i, Y_i, M_i definiert wird, indem wir folgende Streifen aneinanderreihen:

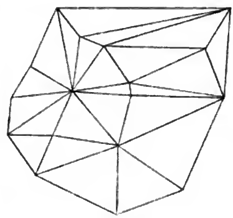


Fig. 9.

$$
(15)\begin{cases}
z = \alpha x + \beta y + \gamma, \\
z = - Y_2 x + X_2 y - M_2 + \alpha x + \beta y + \gamma, \\
z = -(Y_2 + Y_3)x + (X_2 + X_3)y - (M_2 + M_3) + \alpha x + \beta y + \gamma, \\
\vdots \\
z = -\left(\sum_2^i Y_i\right)\cdot x + \left(\sum_2^i X_i\right)\cdot y - \left(\sum_2^i M_i\right) + \alpha x + \beta y + \gamma, \\
\vdots \\
z = -\left(\sum_2^m Y_i\right)\cdot x + \left(\sum_2^m X_i\right)\cdot y - \left(\sum_2^m M_i\right) + \alpha x + \beta y + \gamma, \\
z = -\left(\sum_1^m Y_i\right)\cdot x + \left(\sum_1^m X_i\right)\cdot y - \left(\sum_1^m M_i\right) + \alpha x + \beta y + \gamma = \alpha x + \beta y + \gamma.^{1)}
\end{cases}
$$

Durch diese, bis auf die willkürliche Ebene $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ völlig bestimmte und in sich geschlossene Polyederzone ist zugleich der Umriß der über unserm Fachwerk stehenden Facettenfläche festgelegt. Aber die Koordinaten der Facettenfläche können über jedem Knotenpunkte im

1) Vergl. die Fußnote auf Seite 99.

Innern des Umrißpolygons ganz willkürlich angenommen werden, da sich ja eine Ebene durch drei ganz willkürliche Punkte legen läßt. *Also ist der Grad der statischen Unbestimmtheit unseres Dreieckfachwerkes einfach gleich der Anzahl seiner „inneren“ Knotenpunkte.*

Soll also das Problem, die Spannungsfläche eines ebenen Dreieckfachwerkes zu bestimmen, allgemein eine eindeutige Lösung besitzen, so wird man über die physikalische Natur der Fachwerkstäbe — analog den Verhältnissen beim Kontinuum — spezielle Voraussetzungen machen müssen. Wir gehen darauf hier nicht ein; den Fall, daß die Stäbe im Sinne des Hookeschen Gesetzes elastisch sind, wird K. Wieghardt in einer besonderen Abhandlung untersuchen. —

3. Die Spannungsflächen, die wir bisher erhielten, waren durchaus einwertige Flächen; einem Punkte x, y entsprach immer nur ein einziger Wert z. Man kann mit leichter Mühe Beispiele von mehrwertigen Spannungsflächen bilden, welche ebenfalls auf Spannungssysteme ebener Fachwerke führen. So gibt ein räumliches, aus ebenen Polygonen zusammengesetztes, in sich geschlossenes Polyeder, als Spannungsfläche aufgefaßt, ein *Selbstspannungssystem* in demjenigen Fachwerke, welches als seine orthogonale Projektion erscheint. Dies einzusehen, macht gar keine Schwierigkeit; die Formeln (4) gelten auch hier, nur muß man Acht darauf haben, daß die Fachwerkfläche jetzt die Fläche seines Umrißpolygons *zweimal* überdeckt und daß daher in einem Punkte x, y die Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ verschiedene Werte haben, jenachdem man sich im oberen oder unteren „Blatte“ befindet — und ferner ist zu beachten, daß im unteren Blatte in den Formeln (4) die Vorzeichen umzukehren sind. Die näheren Verhältnisse dieser Figuren sind sehr ausführlich von Maxwell selbst[1]) behandelt worden.

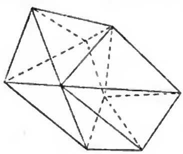


Fig. 10.

Übrigens kann ein solches, sich selbst überdeckendes Fachwerk auch Anlaß zur Entstehung einer *einwertigen* Spannungsfläche geben — wenn man nämlich das Spannungssystem kennt, so kann man rückwärts eine einwertige Spannungsfläche dazu konstruieren: man fasse einfach alle nur geometrischen Schnittpunkte der Stäbe als wirkliche Knotenpunkte auf und konstruiere nun die Spannungsfläche, die in dem so entstandenen, das Umrißpolygon einfach bedeckenden Fachwerke dem gegebenen Spannungssystem entspricht. Da aber nicht umgekehrt jede Spannungsfläche dieses Fachwerkes für unser sich selbst

1) Siehe das Zitat a) von Seite 1.

überdeckendes Fachwerk Bedeutung hat, ist dies nur von sekundärem Interesse. Eine interessante Frage ist: Wie steht es allgemein mit den ein- oder mehrwertigen Spannungsflächen solcher sich selbst überdeckender Fachwerke, welche, räumlich aufgefaßt, auf sog. „einseitige“ Flächen führen? (Fig. 11).

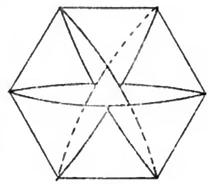


Fig. 11.

Umgekehrt gibt es nun aber auch bei unsern Fachwerken, die sich *nicht* überdecken, *mehrwertige* Spannungsflächen. Greifen z. B. keine äußeren Kräfte an, so liegen alle Streifen der Polyederzone in einer Ebene, und wir können als Polyederzone gerade denjenigen Teil dieser Ebene ansehen, der die Facettenfläche zu einem geschlossenen Raumpolyeder ergänzt. Betrachten wir beispielsweise das Fachwerk von Fig. 12. Wir fragen: Wieviel Selbstspannungen sind in ihm möglich? Das zugehörige Raumpolyeder ist ersichtlich aus 2 Sechsecken und 12 Dreiecken zusammengesetzt. Haben wir die beiden Sechseckebenen willkürlich festgelegt, so ist es völlig bestimmt. Da nun die gegenseitige Lage zweier Ebenen drei wesentlich willkürliche Parameter enthält, so folgt aus unserer Konstruktion beiläufig, daß es in unserem Fachwerke ∞^3 Selbstspannungen [von der Form: $S = aS_1 + bS_2 + cS_3$] gibt.

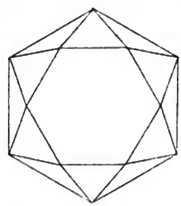


Fig. 12.

Ein weiteres, interessantes Beispiel mehr wertiger Spannungsflächen liefern die *„mehrfach-zusammenhängenden“* Fachwerke. Wir nennen ein Fachwerk, welches sich selbst nicht überdecken möge, mehrfach-zusammenhängend, wenn nicht alle inneren Knotenpunkte kräftefrei sind. So ist das Fachwerk von vorhin bei der Belastung von Fig. 13 mehrfach-zusammenhängend. Wir versuchen, hierfür eine Spannungsfläche zu konstruieren! Wir fassen das ganze Fachwerk als ein solches mit zwei Umrißpolygonen auf, einem äußeren und einem inneren Sechsecke, und beginnen nun, an den beiden Vertikalzylindern über diesen beiden Umrißpolygonen je eine Polyederzone für die entsprechenden äußeren Kräfte festzuheften. Die Kräfte am äußeren

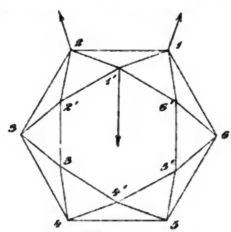


Fig. 13.

Sechseck seien $X_i\,Y_i\,M_i$, am inneren $X_i'\,Y_i'\,M_i'$. Damit alle im Gleichgewicht sind, ist nur nötig, daß

$$(16)\qquad \sum_1^6 (X_i + X_i') = 0, \quad \sum_1^6 (Y_i + Y_i') = 0, \quad \sum_1^6 (M_i + M_i') = 0$$

ist, während die einzelnen Summen $\sum\limits_1^6 X_i$, $\sum\limits_1^6 X_i'$ usw. sehr wohl von Null verschieden sein können. Wenn wir nun zunächst die äußere Polyederzone konstruieren, indem wir, ganz nach dem Rezept der Gleichungen (15), die Streifen:

$$(17)\qquad z = -\left(\sum_0^\nu Y_i\right)\cdot x + \left(\sum_0^\nu X_i\right)\cdot y - \left(\sum_0^\nu M_i\right), \quad \text{wo } \nu = 0, 1, 2, \ldots .$$

aneinanderreihen — wo durch die 3 Größen $X_0\,Y_0\,M_0$ die eine willkürliche Ebene berücksichtigt ist — so schließt sich diese Reihe nach einem ganzen Umlaufe nicht, vielmehr wächst das z der Polyederzone bei jedem Umlauf um die Periode:

$$(18)\qquad z_0 = -\left(\sum_1^6 Y_i\right)\cdot x + \left(\sum_1^6 X_i\right)\cdot y - \left(\sum_1^6 M_i\right),$$

wir haben nicht eine *geschlossene*, sondern *eine im Sinne dieser Formel „affin-periodische" Polyederzone.* Entsprechende Formeln bekommen wir für die innere Polyederzone, nur müssen wir bei Anwendung der Formeln (15) jetzt alle Vorzeichen umkehren, damit bei Anwendung der Gleichungen (4) auf zwei benachbarte Streifen die richtige Spannung in der gemeinsamen Kante herauskommt. Wir haben also die Reihenfolge der Ebenen:

$$(19)\qquad z' = \left(\sum_0^\nu Y_i'\right)\cdot x - \left(\sum_0^\nu X_i'\right)\cdot y + \left(\sum_0^\nu M_i'\right), \quad \text{wo } \nu = 0, 1', 2', \ldots .$$

wo wieder die drei Größen $X_0'\,Y_0'\,M_0'$ die Willkürlichkeit einer Ebene repräsentieren. (Durch die 3 Größen: $X_0 - X_0'$, $Y_0 - Y_0'$, $M_0 - M_0'$ kommen die ∞^3 Selbstspannungen des Fachwerkes zum Ausdruck!) Wir erhalten so die Periode:

$$(20)\qquad z_0' = \left(\sum_1^6 Y_i'\right)\cdot x - \left(\sum_1^6 X_i'\right)\cdot y + \left(\sum_1^6 M_i'\right)$$

und diese ist, wegen der Formeln (16), der obigen Periode z_0 gleich. Da nun mit den beiden Polyederzonen, wie unmittelbar ersichtlich, auch die Facettenfläche gegeben ist, so haben wir das Resultat: *Die ganze Spannungsfläche hat entsprechend einer zyklischen Durchlaufung* *unseres Fachwerkes die durch die Formel (18) oder (19) bestimmte Periode; sie setzt sich aus zwei ungeschlossenen Polyederzonen und einer ungeschlossenen Facettenfläche zusammen, die sich bei Durchlaufung des Fachwerkringes wendeltreppenartig in die Höhe windet.*

In der Projektion der Spannungsfläche auf die Ebene des Fachwerks ist von den unendlich vielen Windungen dieser Wendeltreppe natürlich nichts zu spüren; sie überdecken sich einfach in der Projektion und werden dadurch unkenntlich.

Die so besprochenen Verhältnisse haben für denjenigen, der, vielleicht von der Funktionentheorie her, mit der Integration exakter Differentiale erster Ordnung vertraut ist, nichts Überraschendes. Ist:

$$df = p\,dx + q\,dy$$

ein solches Differential, und man integriert f in einem ringförmig-zusammenhängenden Bereich, so erhält f bei Durchlaufung des Ringes eine additive Periode. Genau so ist es bei der Spannungsfunktion, die durch ihr zweites Differential definiert ist:

$$d^2F = Q \cdot dx^2 - 2\,U \cdot dx\,dy + P \cdot dy^2,$$

nur daß die additive Periode keine Konstante ist wie im obigen Falle, sondern eine lineare ganze rationale Funktion von x und y. — Es wird interessant sein, die hier nur in abstrakter analytischer Fassung besprochenen Verhältnisse bei zahlreichen Beispielen in concreto durchzukonstruieren. —

§ 3. Über reziproke Figuren und Diagramme.

1. a) Irgend eine geradlinige *Strecke* (einer Ebene) mit den Endpunkten $a\ (x_a, y_a)$ und $b\ (x_b, y_b)$ besitzt von Haus aus eine gewisse *Länge* und eine gewisse *Richtung*, aber keinen bestimmten *Sinn*. Eine Strecke definiert uns also in einfachster Weise sowohl zwei Vektoren, welche zu ihr parallel sind, nämlich die beiden Vektoren mit den Komponenten:

$$\begin{array}{lll} \Xi = x_b - x_a\,, & \mathrm{H} = y_b - y_a & \text{einerseits} \\ \text{und } \Xi = -(x_b - x_a), & \mathrm{H} = -(y_b - y_a) & \text{andererseits,} \end{array}$$

als auch zwei Vektoren, welche auf ihr senkrecht stehen:

$$\begin{array}{lll} \Xi = -(y_b - y_a), & \mathrm{H} = x_b - x_a & \text{einerseits} \\ \text{und } \Xi = y_b - y_a\,, & \mathrm{H} = -(x_b - x_a) & \text{andererseits.} \end{array}$$

Die ersten beiden wollen wir die zu unserer Strecke gehörigen *polaren Vektoren* und die letzten beiden die zu ihr gehörigen *transversalen*

Vektoren nennen. Indem wir jetzt unserer Strecke einen bestimmten *Durchlaufungssinn* zuordnen, nennen wir sie „die Strecke (ab)" oder „die Strecke (ba)", je nachdem wir sie uns von a nach b oder von b nach a durchlaufen denken. Zeichnerisch wird man den Durchlaufungssinn dadurch andeuten, daß man die Strecke mit einer entsprechenden Pfeilspitze versieht. Jeder der beiden „Strecken mit Pfeilspitze" können wir nun einen der beiden polaren Vektoren und ebenso einen der beiden transversalen Vektoren zuordnen, so daß, wenn über die dabei herrschende Willkürlichkeit ein für allemal fest verfügt ist, jeder der beiden Strecken mit Pfeilspitze sowohl ein ganz bestimmter polarer als auch ein ganz bestimmter transversaler Vektor zugeordnet ist. Wir verfügen nun über die Willkürlichkeit folgendermaßen:

Unter „dem zur Strecke (ab) gehörenden polaren Vektor" oder kurz unter dem *„polaren Vektor (ab)"* verstehen wir den Vektor mit den Komponenten:

$$\Xi = x_b - x_a, \qquad \mathrm{H} = y_b - y_a;$$

und unter „dem zur Strecke (ab) gehörenden transversalen Vektor" oder kurz unter dem *„transversalen Vektor (ab)"* verstehen wir den Vektor mit den Komponenten:

$$\Xi = y_b - y_a, \qquad \mathrm{H} = -(x_b - x_a).$$

Nach dieser Verabredung bekommt man in dem von uns immer benutzten Koordinatensystem den transversalen Vektor (ab), wenn man den polaren Vektor (ab) im Sinne des Uhrzeigers um 90^0 dreht.

b) Irgend ein einfach-zusammenhängendes *Ebenenstück* mit einer sich selbst nicht durchsetzenden geschlossenen Randkurve besitzt von Haus aus einen gewissen *Flächeninhalt* und eine gewisse *Normalenrichtung.* Ein Ebenenstück dieser Art definiert uns also in einfachster Weise zwei Vektoren, deren Länge gleich dem Flächeninhalt und deren Richtung gleich der Normalenrichtung ist. Indem wir nun unserem Ebenenstück den einen oder anderen *Umlaufungssinn* zuordnen und jedem dieser Umlaufungssinne wieder einen der beiden durch das Ebenenstück nach dem Vorigen definierten Vektoren, ist, nachdem wir über die dabei herrschende Willkürlichkeit ein für allemal fest verfügt haben, jedem „Ebenenstück mit Umlaufungssinn" oder kürzer jeder *„Plangröße"* ein ganz bestimmter Vektor zugeordnet.

Auch ein *gekrümmtes Flächenstück* mit Umlaufungssinn definiert einen ganz bestimmten Vektor, läßt sich, wie wir sagen können, „als Plangröße auffassen", nämlich so: Man zerlege es in unendlich viele, unendlich kleine Ebenenstückchen; jedem Ebenenstückchen ordne man einen Umlaufungssinn so zu, daß der Rand des Flächenstückes seinen ursprünglichen Umlaufungssinn beibehält und jeder Kante zwischen irgend zwei benachbarten Ebenenstückchen beide möglichen Durchlaufungssinne zugeordnet sind. Ordnet man dann jedem Ebenenstückchen den ihm als einer Plangröße nach dem Obigen zukommenden Vektor zu und summiert alle diese unendlich vielen, unendlich kleinen Vektoren, so bekommt man einen ganz bestimmten resultierenden Vektor, eben den, der durch das Flächenstück mit Umlaufungssinn definiert ist.

c) Alle diese von Graßmanns „Ausdehnungslehre“ her mehr oder weniger bekannten Ideen bekommen große praktische Bedeutung, wenn es sich um die zeichnerische Darstellung der Spannungen in einem kontinuierlichen oder diskontinuierlichen Medium (Fachwerk) handelt. Beispielsweise in einer Platte herrsche ein Gleichgewichtssystem von Spannungen. Schneiden wir die Platte längs irgend eines Bogenstückes auf, so zerstören wir damit das Gleichgewicht, insofern wir die längs des Bogenstückes herrschenden Spannungen vernichten. Wollen wir wieder Gleichgewicht herstellen, so müssen wir längs jedes Ufers unseres Querschnittes entsprechende Kräfte angreifen lassen. Je zwei dieser Kräfte, welche an verschiedenen Ufern, aber an derselben Trennungsstelle angreifen, sind dann entgegengesetzt gleich und messen vollständig die auf das Bogenelement der Trennungsstelle kommende Spannung. [Wir können auch längs jedes Ufers alle Einzelkräfte summieren und bekommen so zwei Resultanten, welche entgegengesetzt gleich sind und vollständig die auf das ganze Bogenstück kommende Spannung messen.]

Nach dem Vorigen ist nun klar, *daß eine Strecke $\alpha\beta$ — und zwar eine einfache Strecke ohne bestimmten Durchlaufungssinn — vorzüglich geeignet ist, die zu einem bestimmten Querschnitt ab gehörige Spannung graphisch darzustellen.* Denn durch ihre Länge und Richtung liefert sie zunächst ohne weiteres Länge und Richtung der Spannung (die Spannungsrichtung ist entweder der Streckenrichtung parallel oder steht auf ihr senkrecht). *Aber sie liefert bei geeigneter Verabredung auch den Sinn — das Vorzeichen — der Spannung.* Denn zu ihr gehören *zwei* Durchlaufungssinne; zu jedem dieser beiden Durchlaufungssinne gehört ein bestimmter (polarer oder transversaler) Vektor, andererseits können wir in einer ein für allemal fest zu verabredenden Weise jedem der beiden Durchlaufungssinne eines der beiden Ufer der Querschnittsstelle zuordnen, an welcher die Spannung wirkt. Also ist durch das Mittelglied unserer Strecke jedes Ufer der betreffenden Querschnittsstelle auf einen bestimmten Vektor bezogen und diese Zuordnung läßt sich natürlich so einrichten, daß dieser Vektor direkt die Kraft darstellt, welche an diesem Ufer angreift, womit dann der Sinn der Spannung festgelegt ist. Man kann z. B. so verfahren: Nachdem die Benennungen $\alpha\beta$ der Strecke und ab des Querschnitts eingeführt sind, denke man α dem a, β dem b entsprechend, also den Vektor $(\alpha\beta)$ dem Vektor (ab) entsprechend. Andererseits ordne man dem Vektor (ab) etwa dasjenige Querschnittsufer zu, welches links von einem in der Richtung von a nach b auf dem Querschnitte Fortschreitenden liegt. Dann repräsentiert gegebenenfalls der Vektor $(\alpha\beta)$ die an diesem linken, der Vektor $(\beta\alpha)$ die am rechten Ufer angreifende Kraft.

Ganz analog ist natürlich auch ein *Ebenenstück (bez. Flächenstück) ohne bestimmten Umlaufungssinn* ein sehr geeignetes Mittel zur geometrischen Repräsentation der auf ein zugehöriges Flächenelement wirkenden Spannung.

Beispiele zu diesen allgemeinen Entwicklungen werden wir gleich und im § 4 kennen lernen.

2. Könnte man im Raum mit derselben Leichtigkeit Ebenen „zeichnen" wie gerade Linien in der Ebene, so würde man bei der Ermittelung der Spannungen eines ebenen Fachwerks, wahrscheinlich das Hauptaugenmerk auf die Spannungsfläche richten, da sie ja die ganzen Spannungsverhältnisse einfach und übersichtlich darstellt. Diese Fähigkeit besitzen wir ja nun nicht; man hat sich daher frühzeitig bemüht, *ebene* Figuren zu finden, welche möglichst dasselbe leisten wie die Spannungsfläche. Diese Figuren nennt man *„Kräftepläne"*; wir werden sehen, daß sie zur Spannungsfläche in engem Zusammenhange stehen.

Die Kräftepläne der Fachwerke wollen wir, wie Maxwell selbst tut, als einen speziellen Fall von Maxwells *„reziproken ebenen Diagrammen"* auffassen, wir werden sie also am einfachsten von diesen aus erreichen. Maxwells Definition ist folgende: In einer xy-Ebene befinde sich irgend ein Kontinuum oder Diskontinuum mit der Spannungsfläche: $z = F(xy)$. Wir lassen ihm in einer $\xi\eta$-Ebene das durch die Gleichungen:

$$\xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial F}{\partial y} \tag{21}$$

definierte Kontinuum oder Diskontinuum mit der Spannungsfläche:

$$\zeta = \Phi(\xi, \eta) \tag{22}$$

entsprechen, wobei Φ durch die Gleichung:

$$F + \Phi = x\xi + y\eta \tag{23}$$

definiert ist. Die so in einem xyz-Raum und einem $\xi\eta\zeta$-Raum definierten Spannungsflächen stehen in einem reziproken Verhältnisse zueinander, welches man im Sinne der projektiven Geometrie dadurch ausdrücken kann, daß man sagt: Eine der beiden Spannungsflächen ist immer das *polare Abbild* der andern in bezug auf das Paraboloid:

$$2z = x^2 + y^2. \tag{24}$$

Insofern man von der Bedeutung der Flächen F und Φ als Spannungsflächen dabei auch absehen kann, da ihre Reziprozität ja offenbar nicht daran hängt, wollen wir von ihnen allgemeiner als von *„reziproken (räumlichen) Figuren“* reden. Auch die beiden ebenen Figuren, welche man durch Projektion der reziproken Figuren auf die xy- und die $\xi\eta$-Ebene erhält und die wir der Kürze halber „Diagramme“ nennen wollen, sind reziprok, denn neben den Gleichungen (21) gelten auch die reziproken:

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \tag{25}$$

wie man durch Differentation der Gleichung (23) sofort bestätigt. Wir reden daher von den Diagrammen als von *„reziproken (ebenen) Diagrammen“*.

Was leistet nun das $\xi\eta$-Diagramm, wenn wir uns über die in dem xy-Diagramm durch die Spannungsfunktion F hervorgerufenen Spannungen unterrichten wollen? In der xy-Ebene bezeichnen wir ein Bogenelement mit ds, in der $\xi\eta$-Ebene mit $d\sigma$ (mit den Komponenten $d\xi$, $d\eta$). Dann ist nach den Gleichungen (3):

$$X ds = d\eta, \quad Y ds = d\xi, \tag{26}$$

also für ein endliches Bogenstück ab, dem das Bogenstück $\alpha\beta$ entsprechen möge:

$$X_r = \eta_\beta - \eta_\alpha, \quad Y_r = -(\xi_\beta - \xi_\alpha), \tag{27}$$

Die Verbindungsstrecke der beiden Endpunkte α und β eines endlichen oder unendlich kleinen Bogenstückes der $\xi\eta$-Ebene liefert, als

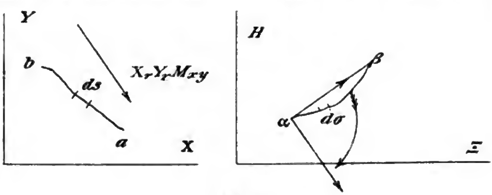


Fig. 14.

transversaler Vektor aufgefaßt, die auf das entsprechende Bogenstück ab der xy-Ebene kommende resultierende Spannung nach Größe, Richtung *und Sinn; und zwar liefert der transversale Vektor ($\alpha\beta$) die Wirkung der Spannung auf dasjenige Querschnittufer, welches an der linken Seite eines von a nach b Hinschreitenden liegt, der transversale Vektor ($\beta\alpha$) die Wirkung auf das rechte Ufer. Diese Regel gilt indessen nur solange als die xyz-Figur einwertig ist, im andern Falle, wo also das xy-Diagramm die Ebene doppelt bedeckt, hat man in obiger Regel für das untere Blatt links und rechts zu vertauschen.*

Den Fall *kontinuierlicher* Diagramme findet man bei Maxwell an Beispielen erörtert und illustriert[1]); es handelt sich dabei um eines der weiter oben erwähnten Beispiele zur Balkentheorie (Seite 10). Wir wollen hier, um auf die Verhältnisse bei den *Fachwerken* zu kommen, den Fall betrachten, wo die xyz-Figur ein aus ebenflächigen Polygonen zusammengesetztes, geschlossenes Raumpolyeder ist. Es ist dann wegen der Polarverwandtschaft zum Paraboloid auch die $\xi\eta\zeta$-Figur ein solches, und zwar entspricht wechselseitig jedem Polygon des einen Polyeders eine Ecke des andern, jeder Ecke ein Polygon, jeder Kante eine Kante. Entsprechendes gilt dann für die beiden reziproken Diagramme, außerdem gilt für sie, daß entsprechende Kanten aufeinander senkrecht stehen und daß die Kanten des einen Diagramms — in der schon geschilderten Weise als transversale Vektoren gedeutet — in den entsprechenden Kanten des andern Diagramms Spannungen ergeben, welche an diesem andern Diagramme im Gleichgewicht sind. Da geschlossene Raumpolyeder zweiwertige Flächen sind, überdeckt jedes Diagramm die Fläche seines Umrißpolygons doppelt. (Fig. 15).

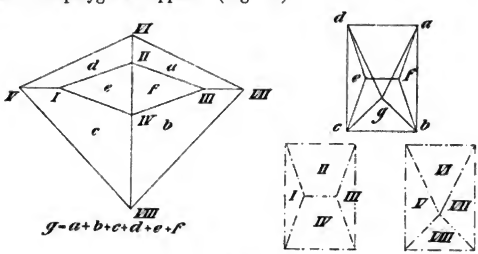


Fig. 15.

3. Dieser Ansatz hat für die Fachwerkstatik verschiedenartige Bedeutung. Wir können z. B. (vergl. § 2) irgend eines der beiden Diagramme unmittelbar als Fachwerk auffassen, dann liefert uns das

1) In der Abhandlung von Zitat f, Seite 1. (Tafel XIV).

andere Diagramm ein in diesem Fachwerke mögliches Selbstspannungssystem; wir können aber auch, wie folgt, verfahren. Wir zeichnen an dem einen der beiden Raumpolyeder irgend ein Polygon aus und sagen: Das Polyeder ist eine zu einem Fachwerke mit äußerem Kraftangriff gehörige Spannungsfläche, deren Polyederzone mit einer Ebene geschnitten ist — eben der Ebene des ausgezeichneten Polygons. In der Projektion — im Diagramm — haben wir dann die von den Ecken des ausgezeichneten Polygons auslaufenden Kanten als die Aktionslinien eines Gleichgewichtssystemes von Kräften aufzufassen, die Projektion des ausgezeichneten Polygons als ein sog. Seilpolygon dieses Kraftsystems und die übrigen Kanten als die Stäbe eines Fachwerkes, welches unter dem Einflusse dieses Kraftsystems steht. Wir bekommen dann einen *Kräfteplan* des so definierten Fachwerkes bei diesem Kraftangriff, wenn wir in dem reziproken Diagramme die überflüssigen Linien — das sind die dem Seilpolygon entsprechenden Kanten — fortlassen. So bekommen wir z. B., wenn wir in Fig. 15 links das Polygon g auszeichnen, folgende Anordnung:

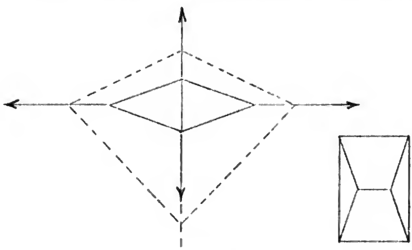


Fig. 16.

und die folgende, wenn wir in Fig. 15 rechts das Polygon I auszeichnen:

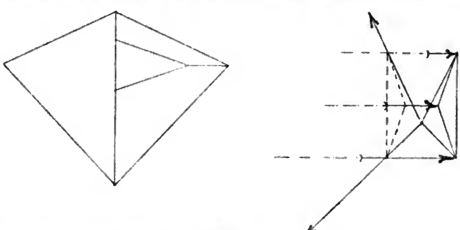


Fig. 17.

Der Kräfteplan eines Fachwerkes enthält natürlich genau ebensoviele wesentliche Unbestimmtheiten wie die Spannungsfläche des Fachwerkes. Diese Tatsache, daß es ebensoviel Kräftepläne zu einem Fachwerke gibt wie Lösungen der Spannungsaufgabe, wird in den Lehrbüchern der graphischen Statik meist nicht klar hervorgehoben, was daran liegen mag, daß man sich dort wesentlich mit statisch bestimmten Fachwerken beschäftigt, wo natürlich der Kräfteplan keine wesentlichen Willkürlichkeiten zuläßt.

Von besonderem Interesse sind die zu unserm mehrfach-zusammenhängenden Fachwerke von § 2 gehörigen Kräftepläne. Entsprechend dem Umstande, daß die Spannungsfläche dieses Fachwerkes affin-periodisch ist, ist auch der Kräfteplan keine geschlossene Figur mehr, sondern besteht aus den parallel gestellten, kongruenten Wiederholungen einer und derselben Grundfigur (Fig. 18). —

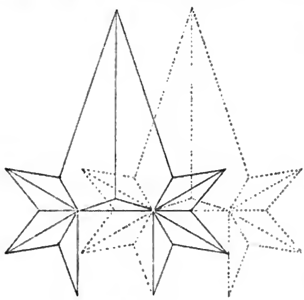


Fig. 18.

Eine merkwürdige Tatsache wäre hier noch zu erwähnen, nämlich die, daß man bekanntlich in der Praxis meist nicht mit dem *Maxwellschen Kräfteplan* operiert, sondern mit dem sog. *„Cremonaschen Kräfteplan"*. Dieser ist nichts anderes als der um einen rechten Winkel gedrehte Maxwellsche Kräfteplan und auch da, wo Cremona die selbständige Begründung seiner Theorie gibt, bezieht er sich ausdrücklich auf Maxwell.[1]) Er benutzt, wie bekannt, an Stelle der Maxwellschen Formeln (21) und (23) die folgenden zur Definition reziproker Figuren:

$$\xi = -\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \eta = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad z - \zeta = \eta x - \xi y.$$

Das heißt soviel wie: An die Stelle der Polarverwandtschaft zu dem Paraboloide der Gl. (24) tritt die durch die Cremonaschen Gleichungen

1) Siehe besonders: L. Cremona: Les figures réciproques en statique graphique (Übers. v. Bossut). Paris 1885, S. 7 und 8. Zuerst: L. Cremona, Le figure reciproche nella statica grafica, Mailand 1872; 3. Aufl. mit Einführung von G. Jung, Mailand 1879.

vermittelte Polarverwandtschaft eines *Möbiusschen Nullsystems.* Wenn Maxwell der Ebene:

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma$$

den Punkt:

$$\xi = \alpha, \quad \eta = \beta, \quad (\zeta = -\gamma)$$

zuordnet, so Cremona den Punkt:

$$\xi = -\beta, \quad \eta = \alpha, \quad (\zeta = \gamma);$$

bei Cremona laufen also die Kanten des Kräfteplans den entsprechenden Stäben des Fachwerkes parallel, statt daß sie, wie bei Maxwell, auf ihnen senkrecht stehen; die Spannungen werden also nicht mehr durch *transversale*, sondern durch *polare* Vektoren dargestellt. Wenn man nun geneigt ist, die Cremonasche Anordnung für praktischer zu halten, so liegt das zum Teil gewiß daran, daß einem die Auffassung einer Strecke als *polarer* Vektor von der allgemeinen Mechanik her geläufig ist, während die Auffassung einer Strecke als *transversaler* Vektor etwas Fremdes hat — zum Teil auch wohl daran, daß man es bequemer finden mag, zu gegebenen Geraden Parallele zu ziehen als Senkrechte auf ihnen zu errichten. *Theoretisch verdient jedenfalls die Maxwellsche Anordnung den Vorzug, weil sie allein eine Verallgemeinerung auf den Raum zuläßt* (die wir sogleich vornehmen werden).

Übrigens dürfte das ganze Kapitel „Reziproke Diagramme" bei Maxwell interessanter als bei Cremona zu lesen sein. Abgesehen davon, daß Cremona die Betrachtung auf Diskontinua (Fachwerke) beschränkt, erscheint bei ihm die Theorie dadurch verflacht, daß die Idee der Spannungsfläche nicht betont ist, welche doch die Quintessenz der ganzen Theorie ist.

4. Wir wollen nunmehr noch mit Maxwell die Formeln (21) bis (25) räumlich verallgemeinern und, zunächst rein geometrisch, *reziproke räumliche Diagramme* einführen. In einem xyz-Raum sei irgend eine Figur — ein „räumliches Diagramm" — gegeben, ferner eine Funktion $F(xyz)$, die wir aber erst später als eine zu diesem Diagramme gehörige „Spannungsfunktion" deuten werden. Mit Hilfe der Gleichungen:

$$\xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial F}{\partial z} \tag{28}$$

ordnen wir diesem Diagramm ein zweites Diagramm in einem $\xi\eta\zeta$-Raum zu. Die Beziehung beider Diagramme ist dann eine reziproke; wenn wir eine Funktion $\Phi(\xi\eta\zeta)$ durch die Gleichung:

$$F + \Phi = x\xi + y\eta + z\zeta \tag{29}$$

definieren, so ist:

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad z = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \tag{30}$$

was man durch Differentiation der Gl. (29) leicht bestätigt.

Insbesondere stellen wir uns nun, ebenfalls nach dem Vorgange Maxwells, *„reziproke Zellensysteme“* her und zwar als ein räumliches Analogon zu den Fachwerkdiagrammen der Figuren 10, 12, 15, welche die Fläche eines gewissen Umrißpolygons doppelt bedecken. Wir denken uns im xyz-Raum eine Anordnung aneinandergereihter Polyeder (Zellen), welche den Inhalt eines gewissen geschlossenen Umrißpolyeders zweimal ausfüllen. So erhalten wir ein erstes räumliches Zellensystem, von dessen Zellen, Wänden, Kanten und Ecken wir reden. (Fig. 19 links.) Wir bilden uns dann eine stetige Funktion $F(xyz)$ von der Art, daß sie innerhalb der einzelnen Zelle J immer mit einer linearen Funktion $a_i x + b_i y + c_i z + d_i$ übereinstimmt und daß, wenn J und K in der Wand JK zusammenstoßen, die Gleichung dieser Wand durch:

$$(a_i - a_k)x + (b_i - b_k)y + (c_i - c_k)z + d_i - d_k = 0$$

repräsentiert wird. Diesem Zellensystem entspricht dann vermöge der Formeln (28) im $\xi\eta\zeta$-Raum ein zweites Zellensystem. Beide Zellensysteme stehen in folgender reziproker Beziehung: *Jeder Zelle des einen*

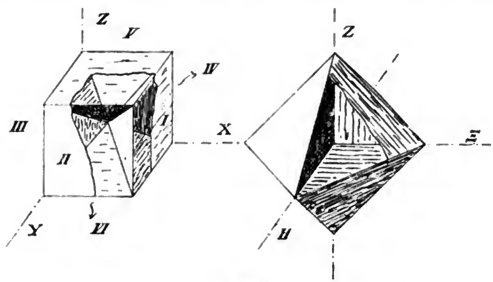


Fig. 19.

Diagramms entspricht eine Ecke des andern, jeder Ecke eine Zelle, jeder Wand eine Kante, jeder Kante eine Wand. Jede Kante des einen Systems steht auf der ihr entsprechenden Wand des andern Systems senkrecht.

Bei dem zur Belebung der Vorstellung von K. Wieghardt gebildeten Beispiel der Fig. 19 liegen die Verhältnisse so. Wir haben:

links:		rechts:	
7 Zellen	[die 6 Pyramiden und den Würfel].	7 Ecken	[die 6 Oktaederecken und seinen Mittelpunkt].
18 Wände		18 Kanten	[die 12 Oktaederkanten und die 6 von seinem Mittelpunkte aus nach den Oktaederecken gezogenen Strecken].
20 Kanten		20 Wände	[die 8 Oktaederflächen und die 12 gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke mit den 12 Oktaederkanten als Hypotenusen und dem Mittelpunkt als Scheitel].
9 Ecken	[die 8 Würfelecken und den Würfelmittelpunkt].	9 Zellen	[das Oktaeder selbst und die 8 Tetraeder, in die es zerfällt, wenn man es längs der 3 Ebenen zerschneidet, welche durch je 4 Oktaederecken gehen].

Die Funktion $F(xyz)$ hat in den einzelnen Zellen folgende Werte:

in der Würfelzelle:		Null
in der Pyramidenzelle	I:	$x - 1$
„ „ „	II:	$y - 1$
„ „ „	III:	$-x$
„ „ „	IV:	$-y$
„ „ „	V:	$z - 1$
„ „ „	VI:	$-z$.

Eine Benutzung dieser reziproken Zellensysteme für Zwecke der Mechanik geben wir im nächsten Paragraphen.

§ 4. Einiges über räumliche Spannungssysteme und zugehörige Spannungsfunktionen.

1. Der Gedanke liegt gewiß nahe, die Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungen eines *räumlichen* Kontinuums (Fig. 20):

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{\partial T}{\partial z}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial S}{\partial z}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial T}{\partial x}+\dfrac{\partial S}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0 \end{cases}$$

(falls nur Oberflächenkräfte wirken)

mit einer Funktion $F(xyz)$ in einen Zusammenhang zu bringen, welcher dem Airyschen Ansatze bei zwei Dimensionen analog wäre. Indessen findet Maxwell, daß man, wie man es auch machen möge, auf diese Weise nicht zu *allen möglichen* Spannungssytemen des Kontinuums gelangt, daß hierzu vielmehr die obigen Gleichungen zu drei verschiedenen Funktionen in Beziehung gesetzt werden müssen. Er führt dies auch näher aus.

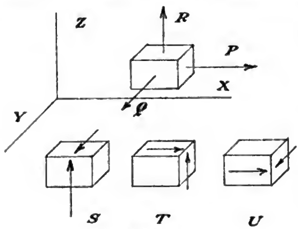


Fig. 20.

Es sind also spezielle, aber interessante räumliche Spannungsverteilungen, welche wir erhalten, wenn wir nun mit Maxwell zwei verschiedenartige räumliche Erweiterungen der Airyschen Formeln (2) vornehmen:

Der *erste Ansatz* ist:

$$(32)\qquad \begin{cases} P=\nabla F-\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}, & Q=\nabla F-\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}, & R=\nabla F-\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2},\\[2mm] S=-\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}, & T=-\dfrac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}, & U=-\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}. \end{cases}$$

Der *zweite Ansatz* geht davon aus, daß die P, Q, U des Airyschen Ansatzes durch folgende Formel definiert werden können — unter α, β beliebige Größen verstanden:

$$P\cdot\alpha^2+2U\cdot\alpha\beta+Q\cdot\beta^2=-\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \alpha\\[2mm] \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \beta\\[2mm] \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix},$$

woraus sich dann folgende räumliche Verallgemeinerung ergibt:

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} & P\cdot\alpha^2 + Q\cdot\beta^2 + R\cdot\gamma^2 \\ & + 2S\cdot\beta\gamma + 2T\cdot\gamma\alpha + 2U\cdot\alpha\beta = - \end{aligned}\right. \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} & \alpha \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} & \beta \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix},$$

wo α, β, γ beliebige Größen bedeuten.

Daß die Spannungskomponenten von (32) und (33) bei beliebigem F die Gleichungen (31) befriedigen, bestätigt man leicht.

2. Der Inhalt der Formeln (32) und (33) läßt sich besser schildern, wenn wir gleich an die Idee der reziproken Diagramme anknüpfen. Die Fragestellung ist dann so: Durch eine gegebene Funktion $F(xyz)$ ist einerseits eine reziproke Beziehung zwischen einem xyz-Diagramm und einem $\xi\eta\zeta$-Diagramm gemäß den Formeln (28) gegeben, andererseits eine Spannungsverteilung im xyz-Diagramm gemäß den Formeln (32) oder (33). Was nützt uns die Kenntnis des $\xi\eta\zeta$-Diagrammes, wenn wir uns über diese Spannungsverteilung unterrichten wollen?

Es sei do ein Flächenelement im xyz-Raum mit der Normalen n, $d\varpi$ das entsprechende Flächenelement im $\xi\eta\zeta$-Raume. *Wir finden dann, bei Verwendung des ersten Maxwellschen Ansatzes* (Gleichungen (32)), *auf do einmal eine Normalspannung vom Betrage ∇F pro Flächeneinheit, zweitens eine Spannung mit den Komponenten $\frac{\partial\xi}{\partial n}$, $\frac{\partial\eta}{\partial n}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial n}$ pro Flächeneinheit. Bei Verwendung des zweiten Ansatzes* (33) *hingegen liefert uns einfach das Flächenelement $d\varpi$, als Plangröße aufgefaßt, die auf do kommende Spannung nach Größe, Richtung und Sinn.* Was ferner die über ein *endliches* Flächenstück o resultierende Spannung angeht, so finden wir bei Verwendung des ersten Ansatzes deren Komponenten durch die Gleichungen:

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} & X_r = \iint\left(\nabla F\cdot\cos nx - \frac{\partial\xi}{\partial n}\right)do,\ Y_r = \cdots,\ Z_r = \cdots; \\ & M_{yz} = \cdots,\ M_{zx} = \cdots,\ M_{xy} = \iint\left\{x\left(\nabla F\cdot\cos ny - \frac{\partial\eta}{\partial n}\right) - y\left(\nabla F\cdot\cos nx - \frac{\partial\xi}{\partial n}\right)\right\}do, \end{aligned}\right.$$

bestimmt, oder, indem wir die Flächenintegrale in Integrale über die Randkurve der Fläche verwandeln, durch die Gleichungen:

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} & X_r = \int \eta\,dz - \zeta\,dy,\ Y_r = \cdots,\ Z_r = \cdots; \\ & M_{yz} = \cdots,\ M_{zx} = \cdots,\ M_{xy} = \int \zeta(x\,dx + y\,dy + z\,dz) - (x\xi + y\eta + z\zeta - F)\,dz. \end{aligned}\right.$$

Bei Verwendung des zweiten Ansatzes hingegen liefert uns das dem Flächenstücke o entsprechende Flächenstück ϖ, als Plangröße aufgefaßt, die über o resultierende Spannung nach Größe, Richtung und Sinn (um die drei Drehmomente kümmern wir uns nicht).

Die so gefundenen gegenseitigen Beziehungen zwischen einer Spannungsfunktion $F(xyz)$, dem zugehörigen Spannungssyteme und seinem reziproken Diagramme sind den entsprechenden Beziehungen bei zwei Dimensionen ganz analog. Besonders deutlich ist dies bei Verwendung des zweiten Maxwellschen Ansatzes; das als Plangröße aufzufassende Flächenelement $d\varpi$ ist die direkte räumliche Verallgemeinerung des als transversaler Vektor aufgefaßten Bogenelementes do der Ebene. Aber auch beim ersten Ansatze ist die Analogie leicht zu finden. Wir haben z. B. bei zwei Dimensionen für X_r zunächst die Formel (vergl. Gl. (3)):

$$X_r = \int P dy - U dx = \int (P \cos nx + U \cos ny) ds, \tag{36}$$

und das ist nichts anderes als

$$\int \left(\nabla F \cdot \cos nx - \frac{\partial \xi}{\partial n}\right) ds,$$

was der ersten räumlichen Gleichung (34) analog ist; ebenso hat die erste Gleichung (35) ihr ebenes Analogon, nämlich die den Gleichungen (27) von Seite 109 entnommene Gleichung:

$$X_r = \eta_\beta - \eta_\alpha,$$

denn bei zwei Dimensionen ist $\zeta = \frac{\partial F}{\partial z}$ Null, also bekommen wir für den auf dem Bogenstücke ab (Fig. 21) errichteten Vertikalzylinder von der Höhe Eins die Spannungskomponente:

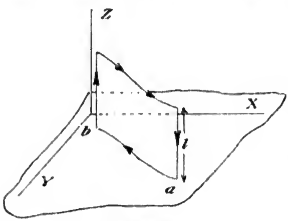


Fig. 21

$$\int \eta dz - \zeta dy = \eta_\beta - \eta_\alpha. \tag{37}$$

Noch konsequenter könnte man die Analogie durchführen, wenn man als Hilfsmittel einen *„vierdimensionalen Raum“* einführte und in ihm, der Formel:

$$t = F(xyz)$$

entsprechend, eine „*Airysche Mannigfaltigkeit*“ konstruierte. Mit den Formeln:

$$\xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad t + \vartheta = x\xi + y\eta + z\zeta$$

würde man diese Airysche Mannigfaltigkeit in bezug auf das „Paraboloid“:

$$2t = x^2 + y^2 + z^2$$

„polarisieren“, und die „senkrechte“ Projektion dieses Polargebildes auf den $\xi\eta\zeta$-Raum ergäbe in diesem das zu unserm Spannungssysteme reziproke Diagramm. Solche Überlegungen würden uns in vierdimensionale Beziehungen führen, die an sich sehr schön und überzeugend sind, der Mehrzahl der Leser aber doch unnötige Schwierigkeiten bereiten würden.

3. Nach den gegebenen Entwicklungen bedarf es jetzt nur noch geringer Mühe, um zu der im folgenden beschriebenen mechanischen Deutung unsrer früher betrachteten reziproken Zellensysteme zu gelangen.

Mit beiden Maxwellschen Ansätzen erhalten wir *Spannungssysteme, die an dem einen oder andern der beiden reziproken Zellensysteme im Gleichgewicht sind.*

Und zwar erhalten wir das eine Mal *Spannungen in den Wänden des Diagramms,* die der Größe nach durch die Länge der entsprechenden Kanten des andern Diagramms gegeben sind (homogene Spannungen, wie sie etwa in den Zellwänden eines Seifenschaums herrschen). Das andere Mal erhalten wir *Spannungen in den Kanten des Diagramms,* die der Größe nach durch die Flächeninhalte der entsprechenden Wände des andern Diagramms gegeben sind.

Also nur der zweite räumliche Ansatz führt dazu, Spannungssysteme in räumlichen *Fachwerken* kennen zu lernen. Deshalb ist in dem Hennebergschen Referat auch nur von diesem zweiten Ansatz die Rede (Nr. 41) und auch das nur mehr beiläufig, da die allgemeine Lehre von der Airyschen Spannungsfunktion dort nicht vorausgesetzt werden konnte. Die Statik der Spannungszustände irgendwelcher Träger gewinnt offenbar, indem man den Gesamtgedankengang Maxwells herannimmt, bedeutend an Interesse; überhaupt aber treten ihre verschiedenen Teile so in einen wunderbaren Zusammenhang, der bisher nur wenig bekannt gewesen sein möchte. Deshalb wurde in der vorstehenden Darstellung die Herausarbeitung dieses Zusammenhanges als eigentliches Ziel betrachtet, womit zugleich für neue Entwicklungen der Theorie die Grundlage gewonnen ist. —

Göttingen, den 10. Februar 1904.

Übersicht der Theorie der Gleichungen vom fünften Grade.

Von G. Vivanti in Messina.

(Fortsetzung und Schluß.)

6. Die zwischen den Drehungsgruppen und den Gruppen von linearen Substitutionen stattfindende Korrespondenz erlaubt es, aus den ersteren die letzteren ganz leicht abzuleiten. Nimmt man nämlich als Mittelpunkt der Kugel den Nullpunkt der Ebene der Veränderlichen z, als Äquatorebene diese Ebene, als Anfangsebene für die Längen die durch die reelle Achse gehende Meridianebene, und bezeichnet durch μ die Länge, durch λ die Breite des einen Poles, durch 2ψ die Amplitude der Drehung, so ist die bezügliche lineare Substitution:

$$\begin{pmatrix} d+ic, & -(b-ia) \\ b+ia, & d-ic \end{pmatrix},$$

wo:

$$a = -\cos\lambda \sin\psi \cos\mu, \quad b = -\cos\lambda \sin\psi \sin\mu, \quad c = \sin\lambda \sin\psi, \quad d = \cos\psi.$$

Durch diese Formeln lassen sich unsere Substitutionengruppen ohne Schwierigkeit herstellen. Es mögen hier die Oktaedersubstitutionen als Beispiel angegeben werden:

$$z' = i^k z, \quad z' = \frac{i^k}{z}, \quad z' = i^k \frac{z - i^h}{z + i^h},$$

wo h und k unabhängig von einander die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen.

Eine bessere Einsicht in die Beschaffenheit unserer Gruppen gewährt uns die Bemerkung, daß sämtliche Substitutionen einer Polyedergruppe als Produkte von nur drei derselben darstellbar sind. Die allgemeine Form der Substitutionen ist nämlich:

Für die Tetraedergruppe, $S^\alpha T^\beta U^\gamma$, wo:

$$\alpha = 0, 1, 2; \quad \beta = 0, 1; \quad \gamma = 0, 1;$$

$$S = \begin{pmatrix} 1, & i \\ 1, & -i \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix};$$

Für die Oktaedergruppe, $S^\alpha U^\beta V^\gamma$, wo:

$$\alpha = 0, 1, 2; \quad \beta = 0, 1; \quad \gamma = 0, 1, 2, 3;$$

$$S = \begin{pmatrix} 1, & i \\ 1, & -i \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix};$$

Für die Ikosaedergruppe, $S^\alpha U^\beta$ und $S^\alpha T S^\gamma U^\beta$, wo:

$$\alpha,\ \gamma = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4;\quad \beta = 0,\ 1;$$

$$S = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{5}}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},\quad T = \begin{pmatrix} -\sqrt{5}-1, & 2 \\ 2, & \sqrt{5}+1 \end{pmatrix},\quad U = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir die Figur des vorigen § wieder auf, so bietet uns dieselbe ein klares Abbild der bezüglichen Substitutionengruppe dar. Betrachten wir nämlich ein beliebiges weißes Dreieck als Ausgangsdreieck, und bezeichnen dasselbe mit 1, so werden wir jedem weißen Dreiecke das Symbol derjenigen Substitution beilegen, welche der das Ausgangsdreieck in das betrachtete Dreieck überführenden Drehung entspricht.

Das mit 1 bezeichnete weiße Dreieck und das demselben längs einer Seite des rechten Winkels benachbarte schraffierte Dreieck bilden zusammengenommen einen *Fundamentalbereich*, d. i. einen Bereich, der einen und nur einen zu jedem Punkte der Ebene homologen Punkt enthält, vorausgesetzt freilich, daß nur die Hälfte der Begrenzung als dem Bereiche angehörig angesehen wird; dabei gelten diejenigen Punkte als *homolog*, die in einander durch die Substitutionen der Gruppe übergehen. Jeder Punkt der Ebene gehört einem Systeme von n homologen Punkten an; es werden nur die Knoten des Dreiecksnetzes ausgenommen, die in drei Systeme von $\frac{n}{\nu_1}$, $\frac{n}{\nu_2}$ und $\frac{n}{\nu_3}$ homologen Punkten zerfallen.

7. Es erweist sich nunmehr als nützlich, homogene Veränderliche einzuführen.

Setzt man:

$$z = \frac{z_1}{z_2},\quad z' = \frac{z_1'}{z_2'},$$

so verwandelt sich die linear gebrochene Substitution einer Variabeln (1) in eine lineare ganze homogene Substitution von zwei Variabeln:

$$(5)\qquad z_1' = \alpha z_1 + \beta z_2,\quad z_2' = \gamma z_1 + \delta z_2.$$

Es ist aber zu beachten, daß einer und derselben Substitution (1) unendlich viele Substitutionen (5) entsprechen, alle Substitutionen nämlich von der Form:

$$z_1' = k(\alpha z_1 + \beta z_2),\quad z_2' = k(\gamma z_1 + \delta z_2),$$

wo k beliebig ist; stellt man jedoch fest, die Determinante der Substitution solle gleich Eins sein, so entsprechen jeder Substitution (1), wo $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ vorausgesetzt werden möge, nur zwei Substitutionen (5), d. i.:

$$z_1' = \pm(\alpha z_1 + \beta z_2),\quad z_2' = \pm(\gamma z_1 + \delta z_2).$$

Demnach entspricht einer nicht homogenen Substitutionengruppe von der Ordnung n eine homogene Substitutionengruppe von der Ordnung $2n$.

Es sei jetzt eine Form, d. i. eine homogene ganze Funktion der zwei Variabeln z_1, z_2 vorgegeben, die in n homologen Punkten verschwinden möge. Übt man auf dieselbe eine beliebige Substitution der betrachteten Gruppe aus, so werden ihre Nullpunkte nur unter sich vertauscht, und die Form geht daher, von einem konstanten Faktor abgesehen, in sich über. Eine solche Form heißt eine *invariante Fundamentalform*; und jede *invariante Form*, d. i. jede Form, welche durch alle Substitutionen der Gruppe in sich übergeht, läßt sich als ein Produkt von invarianten Fundamentalformen darstellen. Eine besondere Beachtung verdienen diejenigen Fundamentalformen Φ_1, Φ_2, Φ_3, welche die drei Systeme von homologen Knoten beziehentlich als Nullpunkte haben. Da diese Punkte als ν_1-, ν_2-, ν_3-fache Punkte gelten sollen, so ist Φ_i die ν_i-Potenz einer Form F_i von der $\frac{n}{\nu_i}$-ten Ordnung. Zwischen den drei Formen $F_i^{\nu_i}$ besteht in jedem Falle eine lineare homogene Relation:

$$\mu_1 F_1^{\nu_1} + \mu_2 F_2^{\nu_2} + \mu_3 F_3^{\nu_3} = 0; \tag{6}$$

und jede Fundamentalform ist als lineare homogene Funktion dieser drei Formen darstellbar.

Es mögen hier die Formen F_i, nebst der zwischen denselben bestehenden Identität (6), für die drei Polyedergruppen angegeben werden; dabei verschwindet F_1 in den Halbierungspunkten der Kanten, F_2 in den Mittelpunkten der Seitenflächen und F_3 in den Ecken des bezüglichen Polyeders:

Tetraedergruppe:

$$\begin{aligned}
F_1 &= z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4) = t,\\
F_2 &= z_1^4 + 2i\sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4 = \Phi,\\
F_3 &= z_1^4 - 2i\sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4 = \Psi,\\
&12 i\sqrt{3} t^2 - \Phi^3 + \Psi^3 = 0;
\end{aligned}$$

Oktaedergruppe:

$$\begin{aligned}
F_1 &= z_1^{12} - 33 z_1^8 z_2^4 - 33 z_1^4 z_2^8 + z_2^{12} = \chi,\\
F_2 &= z_1^8 + 14 z_1^4 z_2^4 + z_2^8 = \Phi\Psi = W,\\
F_3 &= z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4) = t,\\
&\chi^2 - W^3 + 108 t^4 = 0;
\end{aligned}$$

Ikosaedergruppe:

$$\begin{aligned}
F_1 &= z_1^{30} + 522 z_1^{25} z_2^5 - 10005 z_1^{20} z_2^{10} - 10005 z_1^{10} z_2^{20} - 522 z_1^5 z_2^{25} + z_2^{30} = T,\\
F_2 &= -z_1^{20} + 228 z_1^{15} z_2^5 - 494 z_1^{10} z_2^{10} - 228 z_1^5 z_2^{15} - z_2^{20} = H,\\
F_3 &= z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10}) = f,\\
T^2 &+ H^3 - 1728 f^5 = 0.
\end{aligned}$$

Setzt man:

$$(7) \qquad Z = -\frac{\mu_2}{\mu_3}\frac{F_2^{\nu_2}}{F_3^{\nu_3}},$$

also, wegen (6):

$$Z - 1 = \frac{\mu_1}{\mu_3}\frac{F_1^{\nu_1}}{F_3^{\nu_3}},$$

was sich schreiben läßt:

$$Z - 1 : Z : 1 = \mu_1 F_1^{\nu_1} : -\mu_2 F_2^{\nu_2} : \mu_3 F_3^{\nu_3},$$

so ist Z eine Funktion von z, welche immer und ausschließlich in homologen Punkten denselben Wert hat, und in den Halbierungspunkten der Kanten, in den Mittelpunkten der Seitenflächen und in den Ecken beziehungsweise die Werte 1, 0, ∞ annimmt. Ferner ist jede rationale Funktion von z, welche in homologen Punkten stets gleichen Wert hat, eine rationale Funktion von Z.

Die Gleichung (7) wird in den drei Fällen:

$$Z = \frac{\Phi^3}{\Psi^3}, \quad Z = \frac{W^3}{108 t^4}, \quad Z = \frac{H^3}{1728 f^5}.$$

8. Es mögen hier einige algebraische Begriffe eingeschaltet werden. Sei eine algebraische Gleichung von der m-ten Ordnung:

$$(8) \qquad f(x) = 0$$

vorhanden, deren Wurzeln durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ bezeichnet werden mögen. Die Koeffizienten der Gleichung sind bekanntlich symmetrische Funktionen der Wurzeln, und jede rationale symmetrische Funktion der Wurzeln ist eine rationale Funktion der Koeffizienten, oder, wie man sagt, ist *rational bekannt.* Es kann sich aber in einzelnen Fällen ereignen, daß auch andere rationale, nicht symmetrische Funktionen der Wurzeln rational bekannt seien, oder daß wir solche Funktionen als rational bekannt ansehen wollen. Die Gesamtheit der Vertauschungen der Wurzeln, welche diese Funktionen unverändert lassen, bildet offenbar eine Gruppe G, welche als *die Gruppe der Gleichung* (8) bezeichnet wird. Da G eine Untergruppe ist der von sämtlichen möglichen Vertauschungen der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ gebildeten Gruppe, deren Ordnung $m!$ ist, so ist die Ordnung n von G ein Teiler von $m!$

Betrachten wir jetzt eine nicht rational bekannte Funktion der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$y = \psi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m),$$

und bezeichnen durch $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ die verschiedenen Werte, die sie annimmt, wenn man $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ allen Vertauschungen der Gruppe G unterwirft. Ist:

$$(9) \qquad \varphi(y) = 0$$

die Gleichung, deren Wurzeln $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ sind, so sind die Koeffizienten von $\varphi(y)$ rational bekannt, und folglich die Bildung der Gleichung (9) durch lauter rationale Operationen ausführbar. Andererseits würde uns die Auflösung von (9) einen Schritt weiter in dem Problem der Auflösung von (8) führen, insofern als es uns dadurch erlaubt wäre, eine früher nicht rational bekannte Funktion der Wurzeln von (8) als bekannt anzusehen, und als Gruppe der Gleichung nicht mehr G, sondern diejenige Untergruppe G' von G zu betrachten, welche die Funktion y unverändert läßt. Darum wird (9) eine *Resolvente* von (8) genannt. Die Gruppe H von (9) ist der Gruppe G isomorph, und die Ordnung von G' ist der Quotient der Ordnungen von G und H. Ist also der Isomorphismus holoedrisch, so besteht G' nur aus der Identität, und wir können, wenn (9) als aufgelöst gedacht wird, jede Funktion von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, die keine Vertauschung außer der identischen zuläßt, also auch die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ selbst, als rational bekannt ansehen. Die Auflösung von (8) und diejenige von (9) sind dann äquivalente Probleme; (9) wird eine *äquivalente Resolvente* von (8) genannt, und (8) kann auch umgekehrt als eine Resolvente von (9) betrachtet werden. Ist dagegen der Isomorphismus meriedrisch, so bildet die Auflösung von (9) nur einen ersten Schritt zur Auflösung von (8). Dieser zweite Fall kann aber (siehe § 1) nur dann stattfinden, wenn die Gruppe G zusammengesetzt ist; ist G einfach, so kann man nicht hoffen, eine nicht äquivalente Resolvente zu erhalten.

Eine besondere Wichtigkeit bietet die *Galoissche Resolvente*, d. i. diejenige äquivalente Resolvente dar, die eine lineare Funktion der α_i mit durchaus verschiedenen Koeffizienten:

$$y = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_m\alpha_m$$

als Wurzel hat. Führt man auf die Wurzeln α_i alle Vertauschungen der Gruppe G aus, so sind offenbar die symmetrischen Funktionen der so entstehenden Werte von y rational bekannt; folglich ist n die Ordnung der Galoisschen Resolvente. Die Galoissche Resolvente ist irreduzibel, d. h. sie läßt sich auf keine Weise in Faktoren mit rational bekannten Koeffizienten zerlegen. Ihre Wurzeln sind rationale Funktionen von einer derselben; m. a. W., die Gleichung geht in sich selbst durch n Substitutionen:

$$y' = y, \quad y' = \theta_1(y), \quad y' = \theta_2(y), \quad \cdots, \quad y' = \theta_{n-1}(y)$$

über, wobei $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ rationale Funktionen bezeichnen. Diese Substitutionen bilden eine Gruppe, die der Gruppe der Resolvente holoedrisch isomorph ist, und daher auch ebensogut als ihre Gruppe betrachtet werden darf.

Geht umgekehrt eine irreduzible Gleichung n-ter Ordnung durch n rationale Substitutionen in sich über, so ist sie ihre eigene Resolvente, und die von diesen Substitutionen gebildete Gruppe kann als die Gruppe der Gleichung genommen werden.

9. Nach dieser Abschweifung kehren wir zu unserem Hauptgegenstande zurück.

Schreiben wir die Gleichung (7) so:

$$F(z) = Z. \tag{10}$$

Unterwirft man z einer beliebigen Substitution der bezüglichen Gruppe:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

so ist wiederum, da z und z' zu einander homolog sind:

$$F(z') = F\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = Z.$$

Also sind alle Wurzeln der Gleichung (10) rationale, ja lineare Funktionen von einer derselben, und die Gleichung selbst geht durch n lineare Substitutionen in sich über. Es läßt sich hieraus folgern, daß (10) als die Galoissche Resolvente von sich selbst angesehen werden darf, und daß die bezügliche Substitutionengruppe als Gruppe der Gleichung angenommen werden kann.

Da die Tetraeder- und die Oktaedergruppe zusammengesetzt sind, so läßt sich das Problem der Auflösung der entsprechenden Gleichungen durch Resolventenbildung vereinfachen. Dasselbe ist für die Ikosaedergleichung nicht möglich, weil die bezügliche Gruppe einfach ist. Dennoch ist die Untersuchung der notwendigerweise äquivalenten Resolventen der Ikosaedergleichung höchst interessant. Besonders wichtig ist eine Resolvente der 5. Ordnung, die aus der Betrachtung der 5 gleichberechtigten tetraedrischen Untergruppen der Ikosaedergruppe entspringt. Bildet man nämlich eine alle Substitutionen einer von diesen Untergruppen zulassende Funktion Y von z, so wird diese Funktion durch die 60 Substitutionen der Ikosaedergruppe nur fünf verschiedene Werte annehmen; die symmetrischen Funktionen dieser Werte sind rationale Funktionen von Z, folglich ist Y Wurzel einer Gleichung 5. Ordnung, deren Koeffizienten rationale Funktionen von Z sind. Das Medianentripel, welches von den Substitutionen der betrachteten Untergruppe in sich übergeführt wird, kann als das System der Diagonalen eines Oktaeders betrachtet werden; sind t, W die bereits durch eben diese Buchstaben bezeichneten, auf das erwähnte

Oktaeder bezüglichen Formen, m, n zwei unbestimmte Größen, und setzt man:

$$u = \frac{12 f^2 t}{T}, \quad v = \frac{12 f W}{H},$$

so daß u und v homogene Funktionen nullten Grades von z_1, z_2, also Funktionen von z sind, so genügt die Funktion:

$$Y = mv + nuv$$

der Gleichung 5. Ordnung:

$$(11)\left\{\begin{aligned} &Y^5 + \frac{5}{Z}\left[8m^3 + 12m^2 n + \frac{6}{1-Z} mn^2 + \frac{1}{1-Z} n^3\right] Y^2 \\ &\quad + \frac{15}{Z}\left[-4m^4 + \frac{6}{1-Z} m^2 n^2 + \frac{4}{1-Z} mn^3 + \frac{3}{4(1-Z)^2} n^4\right] Y \\ &\quad + \frac{3}{Z}\left[48 m^5 - \frac{40}{1-Z} m^3 n^2 + \frac{15}{(1-Z)^2} mn^4 + \frac{4}{(1-Z)^2} n^5\right] = 0, \end{aligned}\right.$$

wobei zu bemerken ist, daß diese Gleichung keine Glieder mit Y^4 oder Y^3 enthält. Solche Gleichungen werden *Hauptgleichungen* genannt; und (11) heißt die *Hauptresolvente* der Ikosaedergleichung. Die Quadratwurzel der Diskriminante von (11) läßt sich durch m, n, Z rational ausdrücken.

10. Da (11) eine äquivalente Resolvente der Ikosaedergleichung ist, so kann auch umgekehrt die Ikosaedergleichung als eine Resolvente von (11) betrachtet werden. Diese Beziehung läßt sich in eine elegante geometrische Einkleidung fassen.

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Koordinaten eines Punktes des Raumes, und setzt man:

$$x_5 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

so heißen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 die *Pentaederkoordinaten* des betrachteten Punktes. Zwischen den Pentaederkoordinaten eines beliebigen Punktes findet also die Identität:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 0$$

statt. Ist nun:

$$(12)\qquad x^5 + 5\alpha x^2 + 5\beta x + \gamma = 0$$

eine Hauptgleichung 5. Ordnung, und bezeichnen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 ihre Wurzeln, so ist, da die Glieder mit x^4 und x^3 fehlen:

$$\sum_{i=1}^{5} \xi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{5} \xi_i^2 = 0.$$

Hieraus folgt, erstens, daß die 5 Wurzeln von (12), in irgend einer Ordnung genommen, als die Pentaederkoordinaten eines Punktes angesehen werden können; zweitens, daß die 120 Punkte:

$$(13) \qquad x_1 = \xi_{h_1}, \quad x_2 = \xi_{h_2}, \quad x_3 = \xi_{h_3}, \quad x_4 = \xi_{h_4}, \quad x_5 = \xi_{h_5},$$

wobei $h_1 h_2 h_3 h_4 h_5$ eine beliebige Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 darstellt, auf der Fläche zweiter Ordnung:

$$(14) \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 0$$

liegen. Jede der 120 linearen Transformationen des Raumes in sich (*Kollineationen*):

$$(15) \qquad x_1 = x'_{h_1}, \quad x_2 = x'_{h_2}, \quad x_3 = x'_{h_3}, \quad x_4 = x'_{h_4}, \quad x_5 = x'_{h_5}$$

vertauscht die 120 Punkte (13) untereinander, und führt die Fläche (14) in sich über; und es ergibt sich, daß eine Kollineation (15) jedes der zwei geradlinigen Erzeugendensysteme der Fläche (14) unverändert läßt oder die beiden Systeme unter einander vertauscht, je nachdem die bezügliche Permutation $h_1 h_2 h_3 h_4 h_5$ gerade oder ungerade ist.

Bezeichnen wir durch λ den Parameter der durch den Punkt $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ der Fläche (14) gehenden Erzeugenden des einen Systemes, wobei λ eine linear gebrochene Funktion der Koordinaten x_i ist. Den 60 Kollineationen, welche jedes Erzeugendensystem in sich überführen, entsprechen 60 linear gebrochene Substitutionen, welche λ in die Parameter derjenigen Erzeugenden desselben Systemes transformieren, die durch 60 der 120 Punkte (13), den Ausgangspunkt selbst mitgerechnet, gehen; und man kann, durch passende Wahl des Parameters λ, bewirken, daß diese 60 linearen Substitutionen eine Ikosaedergruppe bilden, daß folglich die Gleichung, deren Wurzeln die 60 Werte von λ sind, eine Ikosaedergleichung sei.

11. Ist also eine Hauptgleichung 5. Ordnung (12) gegeben, so steht von vornherein die Möglichkeit fest, dieselbe als die Hauptresolvente einer Ikosaedergleichung anzusehen und folglich ihre Auflösung auf die dieser letzteren zurückzuführen. Um die Ikosaedergleichung wirklich aufzustellen, identifizieren wir (12) mit (11); das gibt:

$$\frac{1}{Z}\left(8m^3 + 12m^2n + \frac{6}{1-Z}mn^2 + \frac{1}{1-Z}n^3\right) = \alpha,$$

$$\frac{3}{Z}\left(-4m^4 + \frac{6}{1-Z}m^2n^2 + \frac{4}{1-Z}mn^3 + \frac{3}{4(1-Z)^2}n^4\right) = \beta,$$

$$\frac{3}{Z}\left(48m^5 - \frac{40}{1-Z}m^3n^2 + \frac{15}{(1-Z)^2}mn^4 + \frac{4}{(1-Z)^2}n^5\right) = \gamma.$$

Durch geschickte Behandlung dieser Gleichungen gelingt es, m, n und Z als rationale Funktionen von α, β, γ, $\bigtriangledown$ zu erhalten, wobei $\bigtriangledown^2$ die Diskriminante der Gleichung (12) bezeichnet.

Um die vorgelegte Gleichung (12) aufzulösen, verfahren wir also folgendermaßen:

a. Wir bestimmen m, n und Z als rationale Funktionen von $\alpha, \beta, \gamma, \bigtriangledown$;

b. Wir lösen die Ikosaedergleichung:

$$\frac{H^3(z)}{1728 f^5(z)} = Z \tag{16}$$

auf, wo für Z der eben gefundene Wert gesetzt worden ist;

c. Ist endlich z eine Wurzel von (16), so ist:

$$x = mu(z) + nu(z)v(z),$$

wo m, n die eben gefundenen Werte bezeichnen, eine Wurzel von (12).

Die Auflösung einer Hauptgleichung 5. Ordnung ist somit auf eine Quadratwurzelausziehung (zur Berechnung von $\bigtriangledown$) und auf die Auflösung einer Ikosaedergleichung zurückgeführt.

Hat man aber mit einer *allgemeinen* Gleichung 5. Ordnung zu tun, so ist noch eine Quadratwurzelausziehung nötig, um dieselbe auf eine Hauptgleichung zu reduzieren.

Dadurch wird der Übergang von den Gleichungen 2., 3. und 4. Ordnung zu denjenigen 5. Ordnung sehr deutlich charakterisiert. Während die Auflösung der ersteren auf lauter Wurzelausziehungen, d. i. auf die Auflösung von reinen Gleichungen reduzierbar ist, bedarf die Auflösung der letzteren noch der Auflösung einer Gleichung von verschiedenem Typus, einer Ikosaedergleichung.

Es drängt sich nun von selbst die Frage auf, ob es auch höhere allgemeine Gleichungen gibt, deren Auflösung sich auf diejenige von reinen Gleichungen und von Ikosaedergleichungen zurückführen läßt. Es zeigt sich aber, daß diese Frage zu verneinen ist.

12. Es mögen nur noch einige wenige Worte der Auflösung der Ikosaedergleichung gewidmet werden, wozu wir den algebraischen Bereich verlassen müssen.

Bezeichnet man durch z eine Funktion einer Variabeln Z, durch z', z'', z''' ihre erste, zweite, dritte Ableitung, so behält der Ausdruck:

$$\frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = [z],$$

als Funktion von Z betrachtet, seine *Form* bei, wenn z durch eine beliebige linear gebrochene Funktion von z ersetzt wird. Ist insbesondere z mit Z durch eine Polyedergleichung:

$$F(z) = Z$$

verbunden, so behält Z seinen *Wert* bei, wenn auf z eine der bezüglichen Gruppe angehörige lineare Substitution ausgeübt wird; folglich bleibt auch der *Wert* von $[z]$ bei jeder solchen Substitution unverändert. Beachtet man ferner, daß zwischen $[z]$ und Z eine algebraische Beziehung stattfindet, so kann man schließen, daß $[z]$ eine rationale Funktion von Z ist. Die Form dieser Funktion läßt sich durch analytische Betrachtungen bestimmen; es ergibt sich:

$$(17)\quad [z]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\nu_1^2}\right)\frac{1}{(Z-1)^2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\nu_2^2}\right)\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu_1^2}+\frac{1}{\nu_2^2}-\frac{1}{\nu_3^2}-1\right)\frac{1}{Z(Z-1)},$$

wo ν_1, ν_2, ν_3 die frühere Bedeutung haben.

Diese Differentialgleichung 3. Ordnung steht mit der homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$(18)\quad y''+\frac{1}{Z}y'+\frac{1}{4Z^2(Z-1)^2}\left[-\frac{1}{\nu_2^2}+\left(\frac{1}{\nu_2^2}+\frac{1}{\nu_3^2}-\frac{1}{\nu_1^2}+1\right)Z-\frac{1}{\nu_3^2}Z^2\right]y=0$$

in engem Zusammenhange; ein Integral von (17) ist nämlich der Quotient zweier unabhängigen Integrale von (18).

Gleichung (18) fällt unter einen bekannten Typus, denjenigen der *Riemannschen Differentialgleichung*, deren Integrale sich durch *hypergeometrische Reihen* ausdrücken lassen.

Um einer zweiten Auflösungsmethode zu erwähnen, müssen wir folgendes vorausschicken. Es entspricht, wie wir gefunden haben, jeder Polyedergleichung ein bestimmtes ebenes reguläres, aus einer endlichen Anzahl von Kreisdreiecken bestehendes Netz; und es gibt sonst kein solches endliches Netz. Läßt man aber die Endlichkeitsbedingung fortfallen, so kann man aus jedem Kreisdreiecke, deren Winkel Teiler von 2π (einschließlich der Null) sind, durch Symmetrie nach und nach ein Netz erzeugen. Jedem Netze entspricht eine (im Falle eines unendlichen Netzes transzendente) Gleichung:

$$F(z)=Z,$$

welche jedem Werte Z ein System von Werten z zuordnet, die sämtlich linear gebrochene Funktionen von einem derselben sind; die zugehörigen linearen Substitutionen bilden eine Gruppe, welche die Gleichung in sich überführt. Sind dann zwei solche Dreiecksnetze mit den Winkeln $\frac{2\pi}{\nu_i}$, $\frac{2\pi}{\nu_i'}$ $(i=1, 2, 3)$ vorhanden, und sind:

$$F(z)=Z,\quad G(z')=Z$$

die entsprechenden Gleichungen, ist ferner ν_1 ein Vielfaches von ν_1', ν_2 von ν_2', ν_3 von ν_3', so ist z' eine eindeutige Funktion von z.

Bezeichnen wir nunmehr durch J die absolute Invariante, durch ω das Periodenverhältnis eines elliptischen Integrales erster Gattung, so ist bekanntlich J eine eindeutige Funktion von ω:

$$J = J(\omega). \tag{19}$$

Die Gleichung (19) (*Modulgleichung*) geht durch jede lineare Substitution mit ganzzahligen Koeffizienten in sich über; solche Substitutionen bilden die sogenannte *Modulgruppe*, und es ist für das bezügliche Netz $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = \infty$. Beachtet man nun, daß für die Polyedergleichungen $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = 3$, 4 oder 5 ist, so läßt sich schließen, daß, wenn man durch $Z = F(z)$ eine Polyedergleichung, durch $Z = J(\omega)$ die Modulgleichung bezeichnet, z eine eindeutige Funktion von ω ist. Auf die wirkliche Bildung dieser Funktion müssen wir hier verzichten.

Messina, Januar 1904.

Einige Bemerkungen zu den Elementen der Differential- und Integralrechnung.

Von R. Sturm in Breslau.

1. Wenn als Integral von $f(x)$ die Funktion definiert wird, deren Differential*quotient* $f(x)$ ist, so sieht man zunächst nicht ein, warum $\int f(x)dx$ geschrieben werden muß und nicht $\int f(x)$ genügt. Der Grund für jene Schreibweise kann sofort angegeben werden; man braucht nicht auf die spätere Begründung beim bestimmten Integrale zu verweisen. Die Einführung einer neuen Veränderlichen liefert ihn.

Es sei $F(x)$ das Integral von $f(x)$, sodaß $F'(x) = f(x)$. Durch die Substitution $x = \varphi(y)$ gehe $F(x)$ in $\Psi(y)$, $f(x)$ in $\psi(y)$ über; dann ist keineswegs $\psi(y)$ Differentialquotient von $\Psi(y)$, vielmehr ist:

$$\Psi'(y) = F'(x) \cdot \varphi'(y) = f(x) \cdot \varphi'(y) = \psi(y) \cdot \varphi'(y).$$

Würde nun bloß $\int f(x)$ geschrieben, so würde die Substitution ergeben $\int \psi(y)$; das Integral von $\psi(y)$ ist aber nicht $\Psi(y)$, diejenige Funktion von y, welche durch die umgekehrte Substitution in die gewünschte Funktion $F(x)$ übergeht; denn deren Differentialquotient ist $\psi(y) \cdot \varphi'(y)$, und *diesen notwendigen* Faktor $\varphi'(y)$ liefert uns, wenn $\int f(x) \cdot d(x)$ geschrieben wird, die Anwendung der Substitution auf dx.

Bekannt ist das ja, aber mir scheint, daß es doch auch gut wäre, daraus die Notwendigkeit der Schreibweise $\int f(x)dx$ abzuleiten.

2. Es wird gewöhnlich gesagt: Damit die Kurve $f(x, y) = 0$ in dem Punkte (x, y) einen Doppelpunkt habe, muß sein:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Es muß hinzugefügt werden: *wofern diese beiden Ableitungen eindeutige Funktionen sind.* Im andern Falle ist ihr Verschwinden nicht notwendig.

Der Gleichung der Astroide:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

genügt der Punkt $x = ai$, $y = ai$; man hat aber einzusetzen die Werte:

$$x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot i^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot \tfrac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$$

oder umgekehrt. Sie geben für

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}\frac{y^{\frac{2}{3}}}{y}$$

die Werte $\frac{1}{3}a^{\frac{2}{3}}(1 \pm \sqrt{3}.\, i) : ai$, $\frac{1}{3}a^{\frac{2}{3}}(1 \mp \sqrt{3}.\, i) : ai$, und daher für

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

die *beiden* Werte $\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{3}.\, i)$. Der Punkt ist Doppelpunkt, aber die Ableitungen sind nicht 0.

Daß er Doppelpunkt ist, bestätigt die rational gemachte Gleichung:

$$(a^2 - x^2 - y^2)^3 - 27a^2x^2y^2 = 0.$$

3. Ich benutze die Maximums-Aufgabe des Serenus, die ich in meinem Aufsatze in dieser Zeitschrift (3) Bd. 5 S. 11 besprochen habe.[1]) Vergleichen wir, die gewöhnliche Methode der Differentialrechnung anwendend, die Ergebnisse für zwei verschiedene unabhängige Veränderlichen. Die Aufgabe verlangt, aus einem (begrenzten) geraden Kreiskegel durch eine Ebene aus der Spitze größte oder kleinste Dreiecke auszuschneiden. Die eine unabhängige Veränderliche sei die Hälfte x der Sehne des Grundkreises, welche Basis des Dreiecks ist, die andere die Entfernung y der Sehne vom Mittelpunkte. Das Inhaltsquadrat ist:

$$f(x) = x^2(r^2 + h^2 - x^2), \quad \varphi(y) = (r^2 - y^2)(y^2 + h^2).$$

1) Ich bitte, dort S. 14 Z. 19 $>$ in $<$ und Z. 22 $<$ in $>$ zu verbessern.

Nach jener Methode ist:

$$\text{I.}\quad x(r^2 + h^2 - 2x^2) = 0, \qquad \text{II.}\quad y(r^2 - h^2 - 2y^2) = 0.$$

Die Lösungen:

$$x^2 = \frac{r^2 + h^2}{2}, \qquad y^2 = \frac{r^2 - h^2}{2}$$

gehören zu einander und geben das Maximum von Serenus; jedoch zur Realität ist erforderlich:

$$h \leqq r.$$

Aber jede der beiden Gleichungen hat noch eine Lösung, welche die andere nicht hat; denn $x = 0$ von I sagt etwas anderes aus, als $y = 0$ von II. Jene Lösung gibt ein Dreieck vom Inhalte 0, ein ersichtliches Minimum. Diese Lösung gibt in dem Achsenschnitte ein Minimum, wenn $h < r$, ein Maximum, wenn $h \geqq r$. In dem Falle $h = r$ fällt es mit dem vorhinigen Maximum zusammen, das, wie schon bemerkt, bei $h > r$ nicht mehr vorhanden ist.

Aber warum liefert II nicht die $x = 0$ entsprechende Lösung und I nicht diejenige, welche $y = 0$ entspricht?

Die Methode der Differentialrechnung verlangt, wenn x_0 ein Argumentwert ist, für welchen $f(x)$ Maximum oder Minimum wird, das Hindurchgehen von x durch x_0 und Vergleichung der Funktionswerte $f(x_0 - h)$, $f(x_0)$, $f(x_0 + h)$.

Geht x durch 0, so geht unser $f(x)$ von positiven Werten durch 0 wieder zu positiven Werten; also liegt ein Minimum vor; dagegen $\varphi(y)$ geht, wenn y durch r geht, vom Positiven ins Negative über; wir haben, im Sinne der Differentialrechnung, keinen extremen Wert; wenn auch geometrisch ein solcher dadurch entsteht, daß wir bei $y = r$ Halt machen müssen.

Und ebenso hat $f(x)$ für $x = r$ keinen extremen Wert, sondern geht von kleineren zu größeren Werten über oder umgekehrt, je nachdem $h >$ oder $< r$ ist, und wir haben geometrisch nur deshalb ein Maximum, bezw. Minimum, weil x den Wert r nicht überschreiten darf; dagegen hat $\varphi(y)$ für $y = 0$ einen extremen Wert.

Wir sehen, daß die Methode der Differentialrechnung bisweilen versagt — sie liefert nicht extreme Werte, welche tatsächlich vorhanden sind — und daß es nicht gut ist, bloß mit einer unabhängigen Veränderlichen zu arbeiten.

Benutzen wir z. B., um noch ein anderes Beispiel anzuführen, bei der Aufgabe, größte und kleinste Entfernungen eines gegebenen Punktes von den Punkten eines Kreises aufzufinden, ein Koordinatensystem, dessen x-Achse durch den gegebenen Punkt geht, so führt uns y als unabhängige Veränderliche zum Ziele; dagegen x versagt, weil die Punkte der größten und kleinsten Entfernung auf der x-Achse liegen, und, wenn der bewegliche Punkt auf dem Kreise durch einen dieser Punkte, zu dem x_0 gehöre, geht, *x nicht durch x_0 hindurchgeht*, von kleineren Werten zu größeren.

Zur Bestimmung der extremen Werte einer Funktion, wenn die unabhängige Veränderliche auf ein begrenztes Gebiet beschränkt ist.

Von E. LAMPE in Berlin.

Auf den Wunsch von Herrn R. Sturm und im Einverständnis mit ihm füge ich zu der Nummer 3 der vorangehenden Note folgende Bemerkungen hinzu.

Die Kriterien für die extremen Werte einer Funktion $f(x)$ der unabhängigen Veränderlichen x werden in den Lehrbüchern zunächst immer unter der Voraussetzung entwickelt, daß x unbeschränkt variabel ist. Sobald jedoch das Gebiet, innerhalb dessen x sich nach der Stetigkeit ändert, begrenzt ist, muß die Funktion $f(x)$ außerdem noch an den Grenzen dieses Gebietes besonders untersucht werden.

So hat $f(x) = x + x^3$ keine extremen Werte. Ist aber $x = \cos y$, so kann x nur zwischen -1 und $+1$ variieren, $f(x)$ besitzt also das Maximum $+2$, das Minimum -2.

Das Quadrat der Normale n eines Kegelschnitts $y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2$ wird durch $n^2 = y^2\varepsilon^2 + p^2$ dargestellt. Dieser Ausdruck hat, analytisch betrachtet, nur ein Minimum p^2, nicht aber ein Maximum, was für die Hyperbel und die Parabel auch zutrifft. Für die Ellipse dagegen ist y an die Bedingung $y \lesseqgtr b$ gebunden; daher erhält man bei der Ellipse das Maximum von n^2 für $y = b$, nämlich $n^2 = b^2$.

Die Funktion $x\sqrt{a^2 - x^2}$ hat für $x = a/\sqrt{2}$ das Maximum $\frac{1}{2}a^2$, für $x = -a/\sqrt{2}$ das Minimum $-\frac{1}{2}a^2$. Bedeutet a den Durchmesser eines Kreises, x die eine Seite eines eingeschriebenen Rechteckes, $\sqrt{a^2 - x^2}$ die andere Seite, so sind negative Werte von x ausgeschlossen; x variiert zwischen 0 und a, und in beiden Grenzfällen erhält man *Null* als Minimum.

Eine meiner Aufgaben zur Differentialrechnung lautet: Der Ausdruck für den Krümmungsradius der Versiera $xy^2 + a^2x = a^3$ in x ist:

$$R = \frac{[a^4 + 4ax^3 - 4x^4]^{3/2}}{2x^2(3a - 4x)a^2}.$$

Aus $dR/dx = 0$ erhält man die Gleichung fünften Grades in x:

$$8x^5 - 12ax^4 + 5a^2x^3 + 2a^4x - a^5 = 0.$$

Man findet hieraus $x = 0{,}44516a$, $R = 2{,}7057a$ als Minimum von R. Das absolute Minimum $R = \frac{1}{2}a$ für $x = a$ wird aber nicht gefunden. Wie ist dies zu erklären? Die einfache Antwort ist diese: Weil $xy^2 = a^2(a - x)$, so ist x an die Bedingung gebunden $0 \leqq x \leqq a$. Für $x = 0$ wird $R = \infty$, für $x = a$ dagegen $R = \frac{1}{2}a$. Ohne Beachtung dieser Beschränkung würde man einen Krümmungsradius 0 erhalten aus $4x^4 - 4a^3x - a^4 = 0$, d. h. für $x = 1{,}160116a$.

Der Einfluß, den die Beschränkung der Veränderlichkeit der unabhängigen Variable auf die Bestimmung der extremen Werte hat, wird in einigen der verbreitetsten Lehrbücher der Differentialrechnung nicht erwähnt; allein obschon die Sache von selbst einleuchtet, sollte dieser Umstand der Vollständigkeit wegen nirgends übergangen werden.

Das von Herrn R. Sturm angeführte Beispiel der extremen Werte für die Entfernung eines Punktes von den Punkten einer Kreislinie wird bei Gelegenheit der bezüglichen Überlegungen von O. Stolz („Grundzüge der Differential- und Integralrechnung" **1**, 209. Leipzig, 1893) auf Liouville zurückgeführt (Journ. de Math. **7**, 163). Es wird dann das klassische Beispiel, das überall erörtert wird, wo die Sache überhaupt erwähnt ist. Ich nenne von den Lehrbüchern, die mir gerade zur Hand sind, die folgenden. Ch. Sturm, Cours d'analyse **1**, Leçon 14 (1857). — J. A. Serret, Cours de calcul différentiel et intégral **1**, 213 (1868). „Un tel maximum ou minimum est dit un maximum relatif ou un minimum relatif." — Hoüel, Cours de calcul infinitésimal **1**, 361 (1878). — H. Laurent, Traité d'analyse **1**, 364 (1885). — Goursat, Cours d'analyse mathématique **1**, 131 (1902): „Lorsque, d'après la nature de la question, la variable x ne peut prendre que des valeurs comprises entre deux limites a et b, il peut se faire que ces valeurs limites donnent les maxima ou les minima absolus de la fonction $f(x)$, sans que la dérivée $f'(x)$ soit nulle."

Als ich die Aufgabe der Versiera in den Educ. Times zur Beantwortung vorlegte, verwiesen in Bd. **62**, 58 (1895) die Herren H. Fortey und H. W. Curjel in ihren Lösungen auf Cambr. Math. Journ. **3**, 237 und auf den Differential Calculus von Todhunter. Unter den von mir verglichenen Aufgabensammlungen habe ich den Gegenstand ausführlich erörtert gefunden bei Galopin-Schaub, Questions de maxima et minima, théorie et exercices, S. 24 (Paris und Genève, 1890). Hier sind auch mehrere Beispiele angegeben.

Einige Aufgaben dieser Art, welche zur Diskussion besonders geeignet sind, habe ich in der Berliner Mathematischen Gesellschaft am 23. März 1904 vorgetragen.

Über die Höhen des Tetraeders.

Von W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, die aus den Höhen eines Tetraeders gebildete Figur in ihren Beziehungen zu gewissen ausgezeichneten Flächen 2. Ordnung resp. Klasse und Systemen solcher zu verfolgen. Wenn man will, erscheinen alle diese Eigenschaften als solche des *Kugelkreises*. Je nachdem man den Kugelkreis durch eine mehr oder weniger allgemeine Fläche 2. Klasse ersetzt, erweitern sich die mitgeteilten Sätze über die Höhen des Tetraeders zu solchen über jene Fläche 2. Klasse, bis man schließlich zu einem allgemeinen Satze über ein einer Fläche 2. Ordnung resp. Klasse einbeschriebenes Tetraeder gelangt (§ 3). Es ist bemerkenswert, welche Summe von interessanten Eigenschaften der bezeichneten Figur anhaftet; es dürfte nicht schwer sein, auf diesem Wege noch zahlreiche weitere Eigenschaften derselben aufzufinden.

Der Verfasser hofft, durch diese Abhandlung, wie schon durch einige in dieser Zeitschrift und an anderen Stellen (s. die betreffenden Zitate) voraufgegangene, den Leser zum Studium des Kugelkreises anzuregen.

1. *Hilfsformeln.* — Im folgenden werden Tetraederkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Raumpunktes $P(x)$ zugrunde gelegt, also die (mit geeigneten Vorzeichen zu nehmenden) Abstände des Punktes P von den Ebenen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, \mathsf{A}_4$ eines Koordinatentetraeders T. Die Ecken desselben seien mit A_1, A_2, A_3, A_4 bezeichnet, die inneren Flächenwinkel mit $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \dots \gamma_{34}$, deren Kosinus mit $c_{12}, c_{13}, \dots c_{34}$, eine Kante $x_i = 0$, $x_k = 0$ mit k_{lm} $(i, k, l, m = 1, 2, 3, 4)$. Endlich seien, wie üblich, u_1, u_2, u_3, u_4 die Koordinaten einer Ebene $\mathsf{E}(u)$, d. h. $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$ ihre Gleichung. Eine einfache Rechnung[1]) führt zur Bedingung des Senkrechtstehens zweier Ebenen (u), (v):

$$\text{(I)}\quad u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 - (u_1v_2 + u_2v_1)c_{12} - (u_1v_3 + u_3v_1)c_{13} - \cdots \\ - (u_3v_4 + u_4v_3)c_{34} = 0,$$

oder kürzer, wenn man noch die Zeichen c_{ii} $(i = 1, 2, 3, 4)$ für die negative Einheit einführt:

$$\text{(I')}\qquad \sum_i \sum_k u_i v_k c_{ik} = 0 \ (c_{ii} = -1).$$

1) Man vgl. für diesen § etwa die Vorlesungen von Clebsch-Lindemann über Raumgeometrie, Erste u. Zweite Abt.

Die Bedingung (I) läßt sich in der weiter tragenden Fassung formulieren, daß das Senkrechtstehen zweier Ebenen gleichbedeutend ist mit ihrem Konjugiertsein bezüglich des *„Kugelkreises“* K:

(II) $\mathsf{K} \equiv u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 - 2u_1u_2c_{12} - 2u_1u_3c_{13} - \cdots - 2u_3u_4c_{34} = 0$

oder

(II') $$\sum\sum c_{ik}u_iu_k = 0 \ (c_{ii} = -1).$$

Die Gleichung (II) stellt in Ebenenkoordinaten den imaginären, der unendlich fernen Ebene ω angehörenden Kreis dar, den alle Kugeln des Raumes gemein haben, und umgekehrt ist jede durch den Kugelkreis gelegte Fläche 2. Ordnung eine Kugel.

Da die durch (II) dargestellte Fläche 2. Klasse in einen Kegelschnitt ausartet, verschwindet die Determinante ihrer Koeffizienten

(III) $$|c_{ik}| = 0 \ (c_{ii} = -1, \ c_{ik} = c_{ki} = \cos\gamma_{ik}).$$

Die Gleichung (III) ergibt zugleich eine und zwar, wie geometrisch leicht zu erkennen, die einzige Relation zwischen den sechs Flächenwinkeln γ_{ik} eines Tetraeders T.

Man kann die Relation (III) auch leicht direkt erhalten. Fällt man die Höhe h_1 von A_1 auf A_1, und verbindet deren Fußpunkt H_1 mit den Ecken A_2, A_3, A_4, so wird das Dreieck $A_2A_3A_4$ hierdurch in drei Teildreiecke zerlegt. Das Teildreieck $H_1A_2A_3$ z. B. ist die Projektion des Tetraederdreiecks $A_1A_2A_3$ auf die Ebene A_1. Sei $\varDelta_4$ der Inhalt des Tetraederdreiecks $A_1A_2A_3$, so ist der Inhalt des Teildreiecks $H_1A_2A_3$ gleich $\pm c_{14}\varDelta_4$, jenachdem der Winkel γ_{14} ein spitzer oder stumpfer ist. Der Inhalt $\varDelta_1$ des Dreiecks $A_2A_3A_4$ ist aber gleich der algebraischen Summe der drei Teildreiecke. Somit gilt der *„Projektionssatz“* des Tetraeders:

(IV) $$\varDelta_i = \varDelta_k c_{ik} + \varDelta_l c_{il} + \varDelta_m c_{im}$$

oder auch

(IV') $$\varDelta_i c_{ii} + \varDelta_k c_{ik} + \varDelta_l c_{il} + \varDelta_m c_{im} = 0. \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4)$$

Die Elimination der $\varDelta$ aus (IV) liefert die Relation (III). Demnach ersetzt man in allen metrischen Sätzen über das Tetraeder, bei deren Beweis von der Relation zwischen den Flächenwinkeln γ_{ik} des Tetraeders *kein Gebrauch gemacht wird* (sodaß die c_{ik} nicht mehr die $\cos\gamma_{ik}$ zu sein brauchen), das Gebilde (II) stillschweigend durch eine gewisse (im allgemeinen) *nicht ausgeartete* Fläche 2. Klasse.

Bei einer umfassenderen Gruppe von Sätzen können die Koeffizienten c_{ik} in (II) überhaupt durch sechs ganz *beliebige* Größen ersetzt werden, oder aber mit der einzigen Einschränkung, daß die Fläche (II) in einen Kegelschnitt ausartet, d. h. die Bedingung (III) erfüllt ist.

Bei der umfassendsten Gruppe von Sätzen ist es sogar gestattet, die Gleichung (II) durch die einer ganz beliebigen Fläche 2. Klasse zu ersetzen, resp. mit der einzigen Einschränkung, daß die Fläche in einen beliebigen Kegelschnitt in einer beliebigen Ebene ausartet.

Es ist nützlich, die geometrische Bedeutung der Gleichheit der Koeffizienten von $u_1^2, u_2^2, u_3^2, u_4^2$ in der Gleichung einer im übrigen beliebigen Fläche 2. Klasse zu kennen.

Die Antwort gibt die Polarentheorie der Gebilde 2. Ordnung resp. Klasse. In der allgemeinen Gleichung einer Fläche 2. Klasse:

$$\text{(V)}\qquad \begin{aligned}\Phi_2 &\equiv \alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + \alpha_{33}u_3^2 + \alpha_{44}u_4^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + \cdots + 2\alpha_{34}u_3u_4 \\ &\equiv \sum\sum \alpha_{ik}u_iu_k = 0\end{aligned}$$

ist ersichtlich dann und nur dann:

$$\text{(1)}\qquad \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha_{44},$$

wenn jedes der sechs Ebenenpaare $x_i \pm x_k = 0$ oder auch:

$$\text{(VI)}\qquad x_i^2 - x_k^2 = 0$$

konjugiert ist inbezug auf die Fläche Φ.

Die Ebenenpaare (VI) sind die Paare der Halbierungsebenen der Flächenwinkel des Tetraeders. (Im speziellen Falle, wo Φ mit dem Kugelkreis K (II) übereinstimmt, liefert das den elementaren Satz, daß jene Halbierungsebenen je eines Paares aufeinander senkrecht stehen). Für die Fläche Φ (V) sagt demnach das Bedingungssystem (1) aus, daß die beiden von irgend einer Kante von T an die Fläche Φ gehenden Tangentialebenen gegen die zu der Kante gehörigen Halbierungsebenen gleich geneigt sind.

Die sechs Ebenenpaare (VI) besitzen als gemeinsame Schnittpunkte die acht „Einheitspunkte", deren Koordinaten die positive resp. negative Einheit sind, d. s. die Mittelpunkte der acht dem Tetraeder einbeschriebenen Kugeln. Diese acht Einheitspunkte sind also die Grundpunkte eines Netzes N von Flächen 2. Ordnung:

$$\text{(VII)}\qquad N \equiv \varkappa(x_1^2 - x_2^2) + \lambda(x_1^2 - x_3^2) + \mu(x_1^2 - x_4^2) = 0,$$

und das Bedingungssystem (1) sagt daher allgemeiner aus, daß die Fläche Φ (V) zum Netze N (VII) konjugiert ist.

Sei nunmehr im besondern die Ebene (v) in (I) eine Tetraederebene A_i $(x_i = 0)$, so reduziert sich (I) auf:

$$\text{(VIII)}\qquad \begin{cases} u_i = u_k c_{ik} + u_l c_{il} + u_m c_{im}, & \text{oder:} \\ u_i c_{ii} + u_k c_{ik} + u_l c_{il} + u_m c_{im} = 0 & (c_{ii} = -1). \end{cases}$$

Sollen weiter alle Ebenen (u), die (VIII) für einen festen Index i genügen, durch die Gegenecke A_i von T gehen, so ist $u_i = 0$ zu setzen, somit ist:

$$u_k c_{ik} + u_l c_{il} + u_m c_{im} = 0 \tag{IX}$$

die Gleichung des Fußpunktes H_i *der Höhe* h_i; mit andern Worten, die Koordinaten von H_i sind $x_i = 0$, $x_k = c_{ik}$, $x_l = c_{il}$, $x_m = c_{im}$.

Aus der Ableitung der Gleichungen (IX) geht hervor, daß die letzteren unverändert bleiben, auch wenn man in (II′) die c_{ii} durch vier ganz beliebige Größen ersetzt, also die Bedingungen (1) aufhebt. Mit andern Worten: „Die Höhen h_i des Tetraeders T sind zu den Ebenen A_i von T konjugiert nicht nur in bezug auf den Kugelkreis K (II), sondern auch in bezug auf die ganze ∞^4 Schar von Flächen 2. Klasse (und keine andern):

$$\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2 + \lambda_4 u_4^2 + \lambda \mathsf{K} = 0, \tag{2}$$

die sich also linear zusammensetzt aus dem Kugelkreise und sämtlichen Flächen 2. Klasse („*Polarflächen*“ des Tetraeders):

$$\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2 + \lambda_4 u_4^2 = 0, \tag{3}$$

die das Tetraeder T als *Poltetraeder* besitzen.“

Aus (IV) und (VIII) fließt auch die Gleichung der unendlich fernen Ebene ω. Denn da diese die einzige Ebene ist, die auf allen andern senkrecht steht, so folgt aus (VIII) für eine auf $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ senkrecht stehende Ebene ω:

$$\begin{cases} c_{11}\omega_1 + c_{12}\omega_2 + c_{13}\omega_3 + c_{14}\omega_4 = 0, \\ c_{21}\omega_1 + c_{22}\omega_2 + c_{23}\omega_3 + c_{24}\omega_4 = 0, \\ c_{31}\omega_1 + c_{32}\omega_2 + c_{33}\omega_3 + c_{34}\omega_4 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Die Determinanten der Koeffizientenmatrix von (4) sind aber auf Grund des Projektionssatzes (IV) bez. proportional den Inhalten $\varDelta_i$ der vier Tetraederdreiecke; somit ist die Gleichung der unendlich fernen Ebene ω:

$$\omega \equiv x_1 \varDelta_1 + x_2 \varDelta_2 + x_3 \varDelta_3 + x_4 \varDelta_4 = 0. \tag{X}$$

Der Mittelpunkt einer Kante $k_{ik} = \overline{A_i A_k}$ ist der zu ihrem unendlich fernen Punkte bez. des Paares A_i, A_k vierte harmonische Punkt, mithin bestimmen sich die Mittelpunkte der Kanten von T aus den Gleichungen:

$$x_i \varDelta_i = x_k \varDelta_k. \tag{5}$$

Hieraus entnimmt man sofort den bekannten Satz, daß sich die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte je zweier Gegenkanten von T in einem Punkte S treffen, dem *„Schwerpunkte"* von T, mit den Koordinaten $\frac{1}{\Delta_i}$.

Endlich sei noch daran erinnert, daß die aus einer beliebigen Fläche 2. Klasse Φ (V) und dem Kugelkreise K (II) gebildete Schar:

$$(6) \qquad \Phi + \lambda \mathsf{K} = 0$$

die durch Φ bestimmte Schar konfokaler Flächen 2. Ordnung darstellt. In dem besonderen Falle, wo Φ in ein Punktepaar P, Q ausartet, liefert (6) die Schar von (konfokalen) Rotationsflächen mit den festen Brennpunkten P, Q.

Ist noch spezieller das Punktepaar P, Q konjugiert in bezug auf das Netz N (VII) von Flächen 2. Ordnung, sind also die Koordinaten von P denen von Q umgekehrt proportional, so läßt sich in (6) der Parameter λ so bestimmen, daß die Quadrate der u_i herausfallen. Das ist der vom Verfasser in dieser Zeitschrift, Bd. 5 (1903), S. 168 aufgestellte Satz:

„Zwei bez. des Flächennetzes N (VII) konjugierte Punkte sind die Brennpunkte einer dem Tetraeder T einbeschriebenen Rotationsfläche 2. Ordnung, und umgekehrt."

Zwei solche Punkte — sie mögen in Analogie zu der entsprechenden Erscheinung beim Dreieck *„Gegenpunkte"* des Tetraeders heißen — sind u. a. der Schwerpunkt $S\left(\frac{1}{\Delta_i}\right)$ und der Punkt mit den Koordinaten Δ_i (s. § 2).

2. *Die in den Höhenfußpunkten die Tetraederebenen berührende Fläche 2. Klasse* H. — Aus den Gleichungen (IX) der Höhenfußpunkte H_i ergibt sich ohne weiteres der Satz:

(A) *„Es gibt eine (und nur eine) Fläche 2. Klasse* H, *die die Ebenen* A_i *des Tetraeders* T *in den Höhenfußpunkten* H_i *berührt:*

$$(\mathrm{XI}) \qquad \mathsf{H} \equiv u_1 u_2 c_{12} + u_1 u_3 c_{13} + u_1 u_4 c_{14} + \cdots + u_3 u_4 c_{34} = 0.\text{“}$$

In der Tat ist (XI) eine dem Tetraeder T einbeschriebene Fläche 2. Klasse, und ihr Berührungspunkt mit der Ebene $x_i = 0$ wird geliefert durch:

$$(7) \qquad \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial u_i} \equiv u_k c_{ik} + u_l c_{il} + u_m c_{im} = 0,$$

d. i. aber die Gleichung (IX).

Mit Hilfe der Flächengleichung (XI) $\mathsf{H} = 0$ nimmt die Gleichung (II des Kugelkreises K die Gestalt an:

$$(8) \qquad \mathsf{K} \equiv (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) + 2\mathsf{H} = 0.$$

Hier ist die (imaginäre) Fläche:

$$\Pi \equiv u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 0, \tag{9}$$

oder auch in Punktkoordinaten:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{9'}$$

gemäß § 1 gerade diejenige unter den Polarflächen des Tetraeders, für die die Bedingungen (1) erfüllt sind, die also zum Flächennetze N (VII) konjugiert ist. Diese (imaginäre) Fläche Π (9) heiße daher schlechtweg die *„Polarfläche"* des Tetraeders. Da auf Grund von (8) Π als lineare Kombination von K und H erscheint, so ist damit der Satz bewiesen:

(B) *„Die Polarfläche Π eines Tetraeders und die Fläche* H *gehören derselben konfokalen Schar von Flächen 2. Ordnung an."*

Wir suchen jetzt den Mittelpunkt (y) der Fläche H (XI). Für ihn, als den Pol der unendlich fernen Ebene ω (X), kommt:

$$\sigma y_i = \Delta_k c_{ik} + \Delta_l c_{il} + \Delta_m c_{im}. \tag{10}$$

Aber nach dem Projektionssatze (IV) besitzt die rechte Seite von (10) den Wert Δ_i, mithin hat der gesuchte Mittelpunkt von H die Koordinaten Δ_i, ist also der *Gegenpunkt* des Schwerpunktes S (§ 1, Ende). Der Punkt (Δ_i) ist als Analogon zum Lemoineschen Punkt des Dreiecks aufzufassen, dessen Koordinaten den Seiten des Dreiecks proportional sind. Unser Punkt (Δ_i) heiße daher der *„Lemoinesche Punkt des Tetraeders"* und werde mit L bezeichnet. Demnach gilt der Satz:

(C) *„Der Mittelpunkt der die Ebenen des Tetraeders in den Höhenfußpunkten berührenden Fläche 2. Ordnung* H *ist der Lemoinesche Punkt L (Δ_i), und der Gegenpunkt des Schwerpunktes S". „Jeder der beiden Punkte ist daher der zweite Brennpunkt einer dem Tetraeder einbeschriebenen Rotationsfläche 2. Ordnung, deren erster Brennpunkt der andere jener beiden Punkte ist."*

Es ist unschwer an den geführten Beweisen zu erkennen, wie die Sätze (A), (B), (C) im wesentlichen erhalten bleiben, wenn man den ihnen zugrunde liegenden Kugelkreis K (II) durch eine allgemeinere Fläche 2. Klasse ersetzt. Beim Satze (A) kann man für K eine *ganz beliebige* Fläche 2. Klasse Φ (V) substituieren. Dann geht durch jede Ecke A_i des Tetraeders eine ganz bestimmte Gerade t_i (Ecktransversale), die in bezug auf Φ zur Gegenebene A_i konjugiert ist. Bezeichnet T_i die Spur von t_i in A_i, dann nimmt der Satz (A) jetzt die allgemeinere Form an:

(A') „Es gibt eine (und nur eine) Fläche 2. Klasse Ψ, die die Ebenen A_i des Tetraeders T in den Spuren T_i der zu jenen

Ebenen bezüglich einer beliebigen Fläche 2. Klasse Φ (V) konjugierten Ecktransversalen t_i berührt:

$$(\mathrm{XI}')\qquad \Psi \equiv u_1 u_2 \alpha_{12} + u_1 u_3 \alpha_{13} + u_1 u_4 \alpha_{14} + \cdots + u_3 u_4 \alpha_{34} = 0,$$

und umgekehrt, liegt eine beliebige dem Tetraeder einbeschriebene Fläche 2. Klasse Ψ vor, so sind die Ecktransversalen, die durch die Berührungspunkte von Ψ in den Ebenen A_i des Tetraeders laufen, zu letzteren konjugiert in bezug auf die ∞^4 Schar von Flächen 2. Klasse:

$$(11)\qquad \alpha_{11} u_1^2 + \alpha_{22} u_2^2 + \alpha_{33} u_3^2 + \alpha_{44} u_4^2 + \Psi = 0,$$

wo die α_{ii} beliebige Parameter bedeuten."

Man kann diesen Satz (A') auch in der folgenden, für manche Anwendungen bequemeren, analytischen Fassung aussprechen:

„Sind

$$(\mathrm{A}'')\qquad u_k \beta_{ik} + u_l \beta_{il} + u_m \beta_{im} = \sigma_i \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4,\ \beta_{ik} \gtrless \beta_{ki})$$

vier beliebige Punkte T_i in den Ebenen eines Koordinatentetraeders T, so sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die vier Ecktransversalen $\overline{A_i T_i}$ zu den Gegenebenen A_i bezüglich einer Fläche 2. Klasse (und damit zugleich bezüglich einer ∞^4 Schar solcher) konjugiert sind, gegeben durch $\beta_{ik} = \beta_{ki}$."

In § 3 wird sich zeigen, daß die Gleichungen $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ zugleich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind, daß die vier Ecktransversalen $\overline{A_i T_i}$ *einer Regelschar zweiter Ordnung angehören.*

Der Satz (B) sagt bei Zugrundelegung der beliebigen Fläche 2. Klasse Φ (V) jetzt nur aus, daß die Berührungsfläche Ψ der Schar von Flächen 2. Klasse angehört, die sich aus Φ und der, T als Poltetraeder besitzenden, Fläche Π_α:

$$(12)\qquad \Pi_\alpha = u_1^2 \alpha_{11} + u_2^2 \alpha_{22} + u_3^2 \alpha_{33} + u_4^2 \alpha_{44} = 0$$

zusammensetzt."

Die Erweiterung des Satzes (C) ist dagegen offenbar an die *Beschränkung* gebunden, daß die Bezugsfläche Φ (V) in einen Kegelschnitt ausartet. Sei dieser C, seine Ebene E. Man suche dann einmal den Pol L' der Ebene E bezüglich der Fläche Ψ (XI'), andererseits den Punkt S', in dem sich die drei Geraden schneiden, die je zwei Gegenkanten des Tetraeders in den zu den Spuren mit E bezüglich der jeweiligen Ecken vierten harmonischen Punkten treffen. Dann lautet die Erweiterung des Satzes (C):

(C') *„Das Punktepaar (L', S') bildet mit der Fläche Φ eine Schar konfokaler Flächen 2. Ordnung, der eine dem Tetraeder einbeschriebene Fläche 2. Klasse angehört. Die beiden Punkte L', S' sind konjugiert in bezug auf das Netz N' von Flächen 2. Ordnung, dessen acht Grundpunkte die Pole von E bezüglich der acht dem Tetraeder einbeschriebenen Flächen 2. Ordnung sind, die durch den Kegelschnitt C gelegt werden können."*

3. *Die durch die Höhen eines Tetraeders bestimmte Regelschar. Die Nebenhöhen des Tetraeders.* — Bekannt ist der Satz, daß die Höhen h_i eines Tetraeders T einer (quadratischen) Regelschar angehören. Es wird hierfür im folgenden ein neuer Beweis gegeben, indem die Gleichung der die Regelschar enthaltenden Fläche 2. Ordnung aufgestellt wird; sodann sollen weitere Folgerungen daraus gezogen werden. Ein beliebiger Punkt der Höhe h_1 hat nach (IX) die Koordinaten $(l, c_{12}, c_{13}, c_{23})$, wo unter l ein Parameter zu verstehen ist. Ferner sei F eine dem Tetraeder umbeschriebene Fläche 2. Ordnung:

$$F \equiv a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + \cdots + a_{34}x_3x_4 = 0. \tag{13}$$

Soll die Höhe h_1 der Fläche F ganz angehören, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Gleichung

$$l(a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + a_{14}c_{14}) + (a_{23}c_{12}c_{13} + a_{24}c_{12}c_{14} + a_{34}c_{13}c_{14}) = 0$$

in l identisch verschwindet. Wiederholt man diese Überlegung für die drei anderen Höhen, so ergeben sich für eine gedachte Fläche $F(13)$, die alle vier Höhen enthalten soll, die beiden Systeme von Bedingungsgleichungen:

$$\left\{\begin{array}{llllll} B_1 \equiv & & a_{12}c_{12} & + a_{13}c_{13} & + a_{14}c_{14} & = 0 \\ B_2 \equiv & a_{21}c_{21} & & + a_{23}c_{23} & + a_{24}c_{24} & = 0 \\ B_3 \equiv & a_{31}c_{31} & + a_{32}c_{32} & & + a_{34}c_{34} & = 0 \\ B_4 \equiv & a_{41}c_{41} & + a_{42}c_{42} & + a_{43}c_{43} & & = 0, \end{array}\right. \tag{14}$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} B_1' \equiv & & \frac{a_{34}}{c_{12}} & + \frac{a_{24}}{c_{13}} & + \frac{a_{23}}{c_{14}} & = 0 \\ B_2' \equiv & \frac{a_{34}}{c_{21}} & & + \frac{a_{14}}{c_{23}} & + \frac{a_{13}}{c_{24}} & = 0 \\ B_3' \equiv & \frac{a_{24}}{c_{31}} & + \frac{a_{14}}{c_{32}} & & + \frac{a_{12}}{c_{34}} & = 0 \\ B_4' \equiv & \frac{a_{23}}{c_{41}} & + \frac{a_{13}}{c_{42}} & + \frac{a_{12}}{c_{43}} & & = 0. \end{array}\right. \tag{14'}$$

Bildet man aus (14) die Kombination $B_1 - B_2 + B_3 - B_4 = 0$, so kommt $a_{13}c_{13} = a_{24}c_{24}$, und analog $a_{14}c_{14} = a_{23}c_{23}$, $a_{12}c_{12} = a_{34}c_{34}$. Bezeichnet man die Werte dieser drei jeweils gleichen Produkte resp. mit λ_3, λ_4, λ_2 und setzt sie in irgend eine der Gleichungen (14) ein, so folgt $\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$. Demnach ist das Bedingungssystem (14) ersetzbar durch das einfachere:

$$(15)\quad \begin{cases} a_{12}c_{12} = a_{34}c_{34} = \lambda_2, \quad a_{13}c_{13} = a_{24}c_{24} = \lambda_3, \quad a_{14}c_{14} = a_{23}c_{23} = \lambda_4, \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Genau dieselben Operationen führen das Bedingungssystem (14′) über in:

$$(15')\quad \begin{cases} \frac{a_{12}}{c_{34}} = \frac{a_{34}}{c_{12}} = \mu_2, \quad \frac{a_{13}}{c_{24}} = \frac{a_{24}}{c_{13}} = \mu_3, \quad \frac{a_{14}}{c_{23}} = \frac{a_{23}}{c_{14}} = \mu_4, \\ \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 0, \end{cases}$$

wo die μ zur Abkürzung für die drei angegebenen, jeweils gleichen Produkte dienen.

Da die drei ersten Relationen (15) mit den drei ersten Relationen (15′) übereinstimmen, kommt das ganze System der acht Bedingungsgleichungen (14), (14′) zurück auf nur fünf, die gestatten, die Verhältnisse der a_{ik} in (13) zu bestimmen. Diese Bestimmung erledigt sich sofort, wenn man beachtet, daß vermöge (15′) das System (14′) auch der folgenden Gestalt fähig ist:

$$(16)\qquad \frac{a_{12}}{c_{34}} + \frac{a_{13}}{c_{24}} + \frac{a_{14}}{c_{23}} = 0, \text{ etc.}$$

Die Kombination der entsprechenden Gleichungen in (14) und (16) liefert, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(17)\qquad \pi_2 = c_{12}c_{34}, \quad \pi_3 = c_{13}c_{24}, \quad \pi_4 = c_{14}c_{23},$$

und die gefundene Fläche als *„Höhenfläche“* R bezeichnet wird:

(D) *„Die vier Höhen h_i eines Tetraeders* T *gehören der einen Regelschar einer Fläche 2. Ordnung, der Höhenfläche R an, deren Gleichung lautet:*

$$(\text{XII})\quad \begin{aligned} R \equiv (\pi_3 - \pi_4)(x_1x_2c_{34} + x_3x_4c_{12}) + (\pi_4 - \pi_2)(x_1x_3c_{24} + x_2x_4c_{13}) \\ + (\pi_2 - \pi_3)(x_1x_4c_{23} + x_2x_3c_{14}) = 0.\text{“} \end{aligned}$$

Man beobachtet, daß die Beziehung der beiden Systeme (14) und (16) eine gegenseitige ist; bezeichnet man für den Augenblick den Koeffizienten von a_{ik} in irgend einer Gleichung eines der beiden Systeme mit f_{ik}, so hat der Koeffizient von a_{ik} in der entsprechenden Gleichung des andern Systems den Wert $\frac{1}{f_{lm}}$. Dies deutet darauf hin, daß die Bedingungsgleichungen (14), (14′) für die a_{ik} bereits *beide* Scharen der Fläche R (XII) zugleich berücksichtigen. In der Tat, stellt man die Gleichung der

Tangentialebene der Fläche R ((XII) oder (13)) in einer Ecke von T, etwa A_1 auf, so ergibt sich:

$$(18) \qquad \frac{\partial R}{\partial x_1} \equiv x_2 a_{12} + x_3 a_{13} + x_4 a_{14} = 0;$$

diese Gleichung wird aber, auf Grund von (14), (16), für die x_2, x_3, x_4 sowohl durch die Werte c_{12}, c_{13}, c_{14} wie durch die Werte $\frac{1}{c_{34}}, \frac{1}{c_{24}}, \frac{1}{c_{18}}$ erfüllt.

Demnach geht durch jede Ecke A_i von T noch eine Erzeugende h_i' der anderen Regelschar der Fläche R, deren Spur in der Gegenebene $\mathsf{A}_i(x_i = 0)$ die Koordinaten $x_k : x_l : x_m = \frac{1}{c_{lm}} : \frac{1}{c_{km}} : \frac{1}{c_{kl}}$ besitzt. Diese vier neuen Geraden h_i' mögen die *„Nebenhöhen"* des Tetraeders genannt werden, ihre Spuren H_i' in den Gegenebenen A_i die *„Nebenhöhenfußpunkte"*; die Gleichung eines solchen, H_i', ist:

$$(\mathrm{IX}') \qquad \frac{u_k}{c_{lm}} + \frac{u_l}{c_{km}} + \frac{u_m}{c_{kl}} = 0. \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4)$$

Um zwischen den Höhen h_i und den Nebenhöhen h_i' weitere Beziehungen herzuleiten, betrachte man zwei der Höhenfußpunkte, etwa H_1, H_2, sowie ihre Nebenfußpunkte H_1', H_2'. Die Geraden h_1, h_2' liegen in einer Ebene T_{12}, und desgleichen die Geraden h_2, h_1' in einer Ebene T_{12}', und diese beiden Ebenen sind nichts anderes als die beiden durch die Kante $k_{12} = \overline{A_1 A_2}$ an die Fläche R (XII) gehenden Tangentialebenen; sie mögen die Gegenkante $k_{34} = A_3 A_4$ in den Punkten T_{12}, T_{12}' treffen. Stellt man das Schema der Koordinaten der Punkte H_1, H_2' resp. H_1', H_2 in der Anordnung auf:

$$(19) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} H_1)\ 0,\ c_{12},\ c_{13},\ c_{14}; & H_1')\ 0,\ \frac{1}{c_{34}},\ \frac{1}{c_{24}},\ \frac{1}{c_{23}}; \\ H_2')\ \frac{1}{c_{34}},\ 0,\ \frac{1}{c_{14}},\ \frac{1}{c_{13}}; & H_2)\ c_{21},\ 0,\ c_{23},\ c_{24}, \end{array} \right.$$

so ersieht man daraus, daß für die Treffpunkte T_{12}, T_{12}' (auf k_{34}) der Ebenen T_{12}, T_{12}' — die auch die Geraden $\overline{H_1 H_2'}$ resp. $\overline{H_1' H_2}$ enthalten müssen — das Koordinatenverhältnis $\frac{x_3}{x_4}$ den Wert $\frac{c_{13}}{c_{14}}$ resp. $\frac{c_{23}}{c_{24}}$ annimmt, in Zeichen:

$$(20) \qquad T_{12})\ \frac{x_3}{x_4} = \frac{c_{13}}{c_{14}}, \quad T_{12}')\ \frac{x_3'}{x_4'} = \frac{c_{23}}{c_{24}}.$$

Der Quotient beider Verhältnisse ist also $\frac{c_{13} c_{24}}{c_{14} c_{23}}$, oder gemäß (17) gleich $\frac{\pi_3}{\pi_4}$; dieser Quotient ist aber nichts anderes, als das Doppelverhältnis des Treffpunktepaares T_{12}, T_{12}' und des Eckenpaares A_3, A_4

auf der Kante k_{34}, das nur den reziproken Wert annimmt, wenn die Punkte eines der beiden Paare vertauscht werden. Somit gilt der Satz:

(E) „Die durch jede Kante des Tetraeders an die Höhenfläche R (XII) gehenden Tangentialebenen schneiden die jeweilige Gegenkante in einem Punktepaar, das mit den bezüglichen Ecken dieser letzten Kante dasselbe[1]) Doppelverhältnis bildet, wie die entsprechenden beiden Punktepaare auf der ersteren Kante. Diese drei Doppelverhältnisse, resp. ihre reziproken Werte, sind die sechs aus je zwei der Größen π_2, π_3, π_4 (17) zu bildenden Quotienten, stellen also die sechs verschiedenen Werte eines und desselben Doppelverhältnisses D dar."

Bildet man andererseits das Produkt p_{34} und die Summe s_{34} der beiden Koordinatenverhältnisse (20), so kommt:

$$(21)\qquad p_{34} = \frac{c_{13}c_{23}}{c_{14}c_{24}},\quad s_{34} = \frac{c_{13}}{c_{14}} + \frac{c_{23}}{c_{24}} = \frac{\pi_3 + \pi_4}{c_{14}c_{24}},$$

mithin lautet die Gleichung für das Treffpunktepaar T_{12}, T'_{12} auf der Kante k_{34} ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$):

$$(22)\qquad x_3^2 c_{14}c_{24} - x_3 x_4(\pi_3 + \pi_4) + x_4^2 c_{13}c_{23} = 0,$$

oder nach Multiplikation mit dem Faktor c_{12}:

$$(22')\qquad x_3^2 c_{12}c_{24}c_{41} - x_3 x_4 c_{12}(\pi_3 + \pi_4) + x_4^2 c_{13}c_{32}c_{21} = 0.$$

Bedient man sich noch der Abkürzung:

$$(23)\qquad c_{ik}c_{kl}c_{li} = \varrho_m \qquad (iklm = 1, 2, 3, 4),$$

so beweist die Gleichung (22') den Satz:

(F) „Die durch die Kanten des Tetraeders an die Höhenfläche R (XII) gehenden Tangentialebenen schneiden auf den Gegenkanten sechs Punktepaare T_{ik}, T'_{ik} aus, die auf einer Fläche 2. Ordnung G liegen:

$$\text{(XIII)}\quad G \equiv x_1^2\varrho_1 + x_2^2\varrho_2 + x_3^2\varrho_3 + x_4^2\varrho_4 - (\pi_3 + \pi_4)(c_{12}x_3x_4 + c_{34}x_1x_2)$$
$$- (\pi_2 + \pi_4)(c_{13}x_2x_4 + c_{24}x_1x_3) - (\pi_2 + \pi_3)(c_{14}x_2x_3 + c_{23}x_1x_4) = 0\text{“}.$$

Übrigens ergibt sich der geometrische Inhalt dieses Satzes auch unmittelbar aus dem andern, daß stets die Tangentialebenen, die von den Kanten eines Tetraeders an eine beliebige Fläche 2. Ordnung gehen, die Gegenkanten in sechs Punktepaaren einer zweiten Fläche 2. Ordnung

1) Somit liegen auch die vier Geraden, die die vermöge des gleichen Doppelverhältnisses einander zugeordneten Punkte irgend zweier Gegenkanten verbinden, auf einer Fläche 2. Ordnung. Man berechnet leicht mittels der Formeln (20), daß die Gleichungen dieser drei Flächen lauten: $x_i x_k c_{ik} = x_l x_m c_{lm}$.

schneiden (s. meine Note im Jahresbericht der deutschen Math.-Ver. Bd. IX_1, 1900, S. 98).

Wie es sein muß, ändert sich die Gleichung der Fläche G (XIII), ebenso wie die der Höhenfläche R (XII), nicht, wenn man jedes c_{ik} durch $\frac{1}{c_{lm}}$ ersetzt.

Aus der Gleichung (22) läßt sich noch eine andere Folgerung entnehmen. Ersetzt man in ihr $\frac{x_3}{x_4}$ durch $-\frac{u_4}{u_3}$, so stellt sie das nämliche, von den Tangentialebenen T_{12}, T'_{12} aus k_{34} ausgeschnittene Punktepaar T_{12}, T'_{12} in Ebenenkoordinaten dar. Multipliziert man die so entstehende Gleichung noch mit dem Faktor c_{34}, so lautet sie:

$$(24)\qquad u_3^2 c_{31} c_{32} c_{34} + u_3 u_4 c_{34}(\pi_3 + \pi_4) + u_4^2 c_{41} c_{42} c_{43} = 0.$$

Führt man noch die Abkürzung ein:

$$(25)\qquad c_{ik} c_{il} c_{im} = \sigma_i \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4),$$

so sagt die Gleichung (24) den Satz aus:

(G) „Die Gleichung der Höhenfläche R (XII), letztere als Fläche 2. Klasse P aufgefaßt, lautet:

$$(\mathrm{XII}')\quad P \equiv u_1^2\sigma_1 + u_2^2\sigma_2 + u_3^2\sigma_3 + u_4^2\sigma_4 + (\pi_3 + \pi_4)(c_{34}u_3u_4 + c_{12}u_1u_2) + (\pi_2 + \pi_4)(c_{24}u_2u_4 + c_{13}u_1u_3) + (\pi_2 + \pi_3)(c_{23}u_2u_3 + c_{14}u_1u_4) = 0.\text{“}$$

Die Vergleichung der Darstellungen (XII), (XII′), (XIII) lehrt noch folgendes.

Bezeichnet man die Polarfläche $x_1^2\varrho_1 + x_2^2\varrho_2 + x_3^2\varrho_3 + x_4^2\varrho_4 = 0$ mit P_ϱ, ferner die drei Flächen $c_{12}x_3x_4 + c_{34}x_1x_2 = 0$ etc. mit C_2, C_3, C_4, weiter die nämlichen Flächen, als Klassenflächen aufgefaßt:

$$\frac{x_1^2}{\varrho_1} + \cdots \equiv u_1^2\sigma_1 + \cdots = 0,\ u_1u_2c_{12} + u_3u_4c_{34} = 0 \text{ etc.}$$

mit Π_ϱ, Γ_2, Γ_3, Γ_4, so erscheint die Höhenfläche R einmal, als Ordnungsfläche, als ein Individuum des Netzes (C_2, C_3, C_4), als Klassenfläche P dagegen als Individuum des Gewebes (Π_ϱ, Γ_2, Γ_3, Γ_4), endlich die Fläche G, als Ordnungsfläche, als Individuum des Gebüsches (P_ϱ, C_2, C_3, C_4).

Nunmehr werde noch das Doppelverhältnis der vier Punkte betrachtet, in denen eine Höhe des Tetraeders von den vier Nebenhöhen, resp. eine Nebenhöhe von den vier Höhen getroffen wird.

Die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Nebenhöhe h'_1, sowie die eines solchen der Höhe h_2 sind, wenn λ, ν Parameter bedeuten:

$$(26)\qquad h'_1)\ 1,\ \frac{\lambda}{c_{34}},\ \frac{\lambda}{c_{24}},\ \frac{\lambda}{c_{23}};\ h_2)\ c_{21},\ \nu,\ c_{23},\ c_{24}.$$

Somit gehört ihrem Treffpunkt auf h_1' der Parameterwert $\lambda_2 = \frac{c_{23}c_{24}}{c_{12}}$ zu, also sind die vier den Treffpunkten von h_1' mit h_1, h_2, h_3, h_4 zugehörigen Parameterwerte λ_1, λ_2, λ_3, λ_4:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{c_{23}c_{24}}{c_{12}},\ \lambda_3 = \frac{c_{32}c_{34}}{c_{13}},\ \lambda_4 = \frac{c_{42}c_{43}}{c_{14}}. \tag{27}$$

Auf Grund von (27) berechnet sich das Doppelverhältnis $\varDelta_{1234}'$ der vier in Rede stehenden Treffpunkte, in der Reihenfolge 1, 2, 3, 4 genommen, zu

$$\varDelta_{1234}' = \frac{\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_4)}{\lambda_3(\lambda_2 - \lambda_4)} = \frac{\pi_4 - \pi_3}{\pi_4 - \pi_2}, \tag{28}$$

wo die π durch (17) erklärt sind.

Andererseits ergibt sich aus (28) das Doppelverhältnis $\varDelta_{1234}$ der vier Punkte, in denen h_1 von h_1', h_2', h_3', h_4' getroffen wird, gemäß (19) durch Vertauschung von c_{ik} mit $\frac{1}{c_{im}}$:

$$\varDelta_{1234} = \frac{\pi_4 - \pi_3}{\pi_4 - \pi_2} \times \frac{\pi_2}{\pi_3}. \tag{28'}$$

Die Doppelverhältnisse $\varDelta_{1234}'$, $\varDelta_{1234}$ bezeichnet man schlechtweg als die Doppelverhältnisse der vier Geraden h_1, h_2, h_3, h_4 resp. h_1', h_2', h_3', h_4' auf der Höhenfläche R (XII). Die Vergleichung der Ergebnisse (28), (28′) mit dem Satze (E) liefert demnach den Satz:

(H) „Das Doppelverhältnis D, das die durch irgend eine Tetraederkante an die Höhenfläche R (XII) gehenden Tangentialebenen auf der Gegenkante gemäß Satz (E) erzeugen, entsteht durch Multiplikation der beiden Doppelverhältnisse $\varDelta$, $\varDelta'$, die die Höhen resp. Nebenhöhen auf der Höhenfläche besitzen“.

Überblickt man die Sätze (D), (E), (F), (G), (H) dieses §, so erkennt man ohne weiteres, daß sie gültig bleiben, auch wenn der ihnen zugrunde gelegte Kugelkreis K (II) durch eine *ganz beliebige* Fläche 2. Klasse $\varPhi$ (V) ersetzt wird. Ehe wir den hieraus, in Verbindung mit § 2, hervorgehenden allgemeinen Satz für Flächen 2. Ordnung formulieren, erledigen wir noch die Frage, wie sich die gemeinte Fläche $\varPhi$ bestimmt, wenn *umgekehrt* von der Höhenfläche R (XII) als einer *ganz beliebig* vorgegebenen, dem Tetraeder T umbeschriebenen, Fläche 2. Ordnung resp. Klasse ausgegangen wird. Da die Höhenfläche R dieselbe war, ob man von dem Größensystem der c_{ik}, oder aber dem der $\frac{1}{c_{im}}$ ausging, so wird sich auch umgekehrt bei gegebener

Fläche R die Fläche Φ in entsprechend doppeldeutiger Weise bestimmen (abgesehen von den willkürlich bleibenden Koeffizienten der Quadrate der u).

Zu dem genannten Zwecke sind die Gleichungssysteme (14), (14'), oder was dasselbe ist, die Systeme (15), (16) umzukehren, d. h. die c_{ik} durch die a_{ik} (13), d. s. die (reell vorausgesetzten) Koeffizienten der Gleichung von R, darzustellen.

Zuvörderst liefern die Gleichungen (15):

$$(29)\qquad c_{12}=\frac{\lambda_2}{a_{12}},\ c_{34}=\frac{\lambda_2}{a_{34}};\ c_{13}=\frac{\lambda_3}{a_{13}},\ c_{24}=\frac{\lambda_3}{a_{24}};\ c_{14}=\frac{\lambda_4}{a_{14}},\ c_{23}=\frac{\lambda_4}{a_{23}},$$

wo die drei homogenen Unbekannten λ_2, λ_3, λ_4 gemäß (15), (16) an die beiden Relationen gebunden sind:

$$(30)\qquad \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0,\ \frac{a_{12}a_{34}}{\lambda_2}+\frac{a_{13}a_{24}}{\lambda_3}+\frac{a_{14}a_{23}}{\lambda_4}=0.$$

Für die folgende Rechnung sei die Abkürzung gestattet:

$$(31)\qquad a_{12}a_{34}=\gamma_2,\ a_{13}a_{24}=\gamma_3,\ a_{14}a_{23}=\gamma_4,\ \gamma_2+\gamma_3+\gamma_4=2\sigma.$$

Durch Elimination von λ_4 aus den beiden Relationen (30) ergibt sich

$$(32)\qquad \lambda_2^2\gamma_3+2\lambda_2\lambda_3(\sigma-\gamma_4)+\lambda_3^2\gamma_2=0,$$

und hieraus für die Unbekannte $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$ der doppelte Wert:

$$(33)\qquad \frac{\lambda_2}{\lambda_3}=\frac{-(\sigma-\gamma_4)\pm\sqrt{\mathsf{A}}}{\gamma_3},$$

wo die Diskriminante A von (32), abgesehen vom Zahlenfaktor $\frac{1}{4}$, übereinstimmt mit der Diskriminante der Fläche R (13), also:

$$(34)\qquad 4\mathsf{A}=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix}.$$

Stellt man die beiden, zu (32) analogen Gleichungen für die Quotienten $\frac{\lambda_3}{\lambda_4}$, $\frac{\lambda_4}{\lambda_2}$ auf und berücksichtigt die Relationen:

$$(35)\qquad (\sigma-\gamma_2)^2-\gamma_3\gamma_4=(\sigma-\gamma_3)^2-\gamma_2\gamma_4=(\sigma-\gamma_4)^2-\gamma_2\gamma_3=\mathsf{A},$$

so erhält man für die gesuchten λ_2, λ_3, λ_4 die drei gleichberechtigten Darstellungen:

$$(36)\qquad \begin{cases} k\lambda_2=\quad-\gamma_2, & k\lambda_3=\sigma-\gamma_4\pm\sqrt{\mathsf{A}}, & k\lambda_4=\sigma-\gamma_3\mp\sqrt{\mathsf{A}},\\ l\lambda_2=\sigma-\gamma_4\mp\sqrt{\mathsf{A}}, & l\lambda_3=\quad-\gamma_3, & l\lambda_4=\sigma-\gamma_2\pm\sqrt{\mathsf{A}},\\ m\lambda_2=\sigma-\gamma_3\pm\sqrt{\mathsf{A}}, & m\lambda_3=\sigma-\gamma_2\mp\sqrt{\mathsf{A}}, & m\lambda_4=\quad-\gamma_4, \end{cases}$$

wo k, l, m drei Proportionalfaktoren bedeuten, und die oberen resp. unteren Vorzeichen von $\sqrt{\mathsf{A}}$ der ersten resp. zweiten Lösung für die λ_2, λ_3, λ_4 entsprechen.

Um aus (36) eine *symmetrische* Darstellung der λ_2, λ_3, λ_4 zu gewinnen, multipliziere man je drei zusammengehörige Formeln, so gelangt man zu der Proportion:

$$(37)\quad \begin{cases} \lambda_2^3 : \lambda_3^3 : \lambda_4^3 = \gamma_2(\sigma - \gamma_3 \pm \sqrt{\mathsf{A}})(\sigma - \gamma_4 \mp \sqrt{\mathsf{A}}) \\ \qquad\qquad : \gamma_3(\sigma - \gamma_4 \pm \sqrt{\mathsf{A}})(\sigma - \gamma_2 \mp \sqrt{\mathsf{A}}) \\ \qquad\qquad : \gamma_4(\sigma - \gamma_2 \pm \sqrt{\mathsf{A}})(\sigma - \gamma_3 \mp \sqrt{\mathsf{A}}). \end{cases}$$

Durch Substitution dieser Werte von λ_2, λ_3, λ_4 in (29) resultiert die Lösung der in Rede stehenden Umkehrungsaufgabe; bedeutet wiederum $\varkappa$ einen Proportionalitätsfaktor: so wird:

$$(\mathrm{XIV})\quad \begin{cases} \varkappa c_{12} = \frac{1}{a_{12}} \sqrt[3]{\gamma_2(\sigma - \gamma_3 \pm \sqrt{\mathsf{A}})(\sigma - \gamma_4 \mp \sqrt{\mathsf{A}})}, \\ \varkappa c_{34} = \frac{1}{a_{34}} \sqrt[3]{\gamma_2(\sigma - \gamma_4 \pm \sqrt{\mathsf{A}})(\sigma - \gamma_4 \mp \sqrt{\mathsf{A}})}, \\ \varkappa c_{13} - \frac{1}{a_{13}} \sqrt[3]{\gamma_3(\sigma - \gamma_4 \pm \sqrt{\mathsf{A}})(\sigma - \gamma_2 \mp \sqrt{\mathsf{A}})}, \\ \varkappa c_{24} = \frac{1}{a_{24}} \sqrt[3]{\gamma_3(\sigma - \gamma_4 \pm \sqrt{\mathsf{A}})(\sigma - \gamma_2 \mp \sqrt{\mathsf{A}})}, \\ \varkappa c_{14} = \frac{1}{a_{14}} \sqrt[3]{\gamma_4(\sigma - \gamma_2 \pm \sqrt{\mathsf{A}})(\sigma - \gamma_3 \mp \sqrt{\mathsf{A}})}, \\ \varkappa c_{23} = \frac{1}{a_{23}} \sqrt[3]{\gamma_4(\sigma - \gamma_2 \pm \sqrt{\mathsf{A}})(\sigma - \gamma_3 \mp \sqrt{\mathsf{A}})}, \end{cases}$$

wo die oberen resp. unteren Vorzeichen von $\sqrt{\mathsf{A}}$ der ersten resp. zweiten Lösung entsprechen, und wo die dritten Wurzeln so zu wählen sind, daß die Verhältnisse der c_{ik}, wie (29) lehrt, *reell* ausfallen.

Bezeichnet man die zweite Lösung durch einen Akzent, so überzeugt man sich mit Hilfe der Relationen (35) sofort, daß in der Tat die c'_{ik} den $\frac{1}{c_{lm}}$ proportional sind.

Für den speziellen Fall des Kugelkreises K (II) erhält man die absoluten Werte der $c_{ik} = \cos \gamma_{ik}$, wenn man die Werte (XIV) in die Relation (III) einsetzt; hieraus bestimmt sich der Wert von $\varkappa$.

Durch Zusammenfassung der wesentlichsten der bisherigen Ergebnisse gelangt man zu folgendem allgemeinen Satze über Flächen 2. Ordnung resp. Klasse:

„Vorgelegt sei eine beliebige, nicht ausgeartete Fläche 2. Ordnung R (13) = Fläche 2. Klasse P, mit irgend einem ihr einbeschriebenen Tetraeder T (A_1, A_2, A_3, A_4). Die Seitenebenen von T seien A_1, A_2, A_3, A_4; durch jede Ecke A_i geht eine Erzeugende t_i der einen, und eine Erzeugende t_i' der andern Schar, mit den Spuren T_i, T_i' in der Gegenebene A_i. Die Geraden t_i, t_i' sind zu den Ebenen A_i konjugiert in bezug auf die ∞^4 Schar von Flächen 2. Klasse Φ resp. Φ':

$$\begin{cases} \Phi \equiv c_{11}u_1^2 + c_{22}u_2^2 + c_{33}u_3^2 + c_{44}u_4^2 + 2c_{12}u_1u_2 + \cdots + 2c_{34}u_3u_4 = 0, \\ \Phi' \equiv c_{11}'u_1^2 + c_{22}'u_2^2 + c_{33}'u_3^2 + c_{44}'u_4^2 + 2c_{12}'u_1u_2 + \cdots + 2c_{34}'u_3u_4 = 0, \end{cases}$$

wo die c_{ii}, c_{ii}' willkürlich, die c_{ik}, c_{ik}' $(i \neq k)$ durch (XIV) bestimmt, und die c_{ik} den $\frac{1}{c_{lm}}$ proportional sind. Umgekehrt ist durch irgend eine der Flächen Φ, resp. Φ' und das Tetaeder T die Figur eindeutig bestimmt. Ferner existiert eine bestimmte Fläche 2. Klasse Ψ resp. Ψ', mit den Koeffizienten c_{ik}, resp. $c_{ik}'(i \neq k)$, die dem Tetraeder T derart einbeschrieben ist, daß die Berührungspunkte auf den Seitenebenen A_i mit den Punkten T_i resp. T_i' übereinstimmen, und umgekehrt ist wiederum durch T und eine der beiden Flächen Ψ, Ψ' die Figur eindeutig bestimmt.

Auf jeder Kante von T schneiden die beiden durch die Gegenkante an die Fläche $R = P$ gehenden Tangentialebenen ein Punktepaar aus, das mit dem zugehörigen Eckenpaar dasselbe Doppelverhältnis bildet, wie die beiden entsprechenden Punktepaare auf der Gegenkante. Die sechs so entstehenden Doppelverhältnisse sind gerade die sechs verschiedenen Werte eines und desselben Doppelverhältnisses D, des Produktes der beiden Doppelverhältnisse, die die vier Geraden t_i, resp. t_i' auf der Fläche $R = P$ bilden. Artet insbesondere eine der beiden Flächen 2. Klasse Φ, Φ' in einen Kegelschnitt aus, so tritt noch der Satz (C') des § 2 in Kraft. Ist dieser Kegelschnitt der Kugelkreis, so resultieren die in § 2 und 3 mitgeteilten Sätze über die Höhen nnd Nebenhöhen eines Tetraeders."

Zum vorstehenden Satze gilt auch der dualistische.

Der auf die Doppelverhältnisse bezügliche Teil dieses Satzes ist vom Verfasser bereits im Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, 1903, S. 137 f., unter Zugrundelegung der Fläche $R = P$, aufgestellt und nach den verschiedensten Richtungen hin verfolgt worden.

Die Analyse der vorliegenden Abhandlung zeigt aber, wie gerade der Ausgang von einer der Flächen Φ, Φ' zu wesentlich einfacheren Formeln und damit zu einer erheblichen Vervollständigung der damaligen Ergebnisse führt.

Ostseebad Großkuhren, August 1903.

Eine Aufgabe aus der Kinematik.

Von W. v. Dücker in Berlin.

1. *Gleichung der Kurve.* — Das ebene kinematische System $PQMO$ (Fig. 1), drehbar im festen Punkt O, gelenkig in M, habe die Abmessungen

$$QM = MP = MO = \frac{l}{2};$$

dann bleibt für jede Lage der Winkel QOP ein Rechter, und die Fahrstrahlen r und ϱ beschreiben bei der Drehung um O gleiche Winkel in benachbarten Quadranten:

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}; \quad d\psi = d\varphi;$$
$$\cos\varphi = \sin\psi.$$

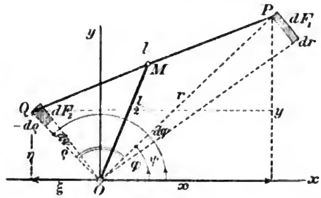


Fig. 1.

Deshalb ist $\varrho^2 = l^2 - r^2$. Beschreibt P die Kurven $r = f(\varphi)$, so beschreibt Q zwangläufig die Kurven:

$$\varrho = \pm\sqrt{l^2 - f(\varphi)^2} = \pm\sqrt{l^2 - f\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)^2}; \tag{1}$$

Diese mögen nach der Art ihrer Entstehung „*Kathetoiden*" genannt werden.

Die analytische Verwandtschaft beider Kurven ergibt sich beim Übergang zu kartesischen Koordinaten; es ist

$$l^2 = r^2 + \varrho^2 = x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2$$

und auch

$$l^2 = (y - \eta)^2 + (x + \xi)^2 = y^2 + x^2 + \xi^2 + \eta^2 - 2y\eta + 2x\xi,$$

woraus

$$y\eta = x\xi,$$

folglich

$$\eta^2 = l^2 - \xi^2 - y^2 - \frac{y^2\eta^2}{\xi^2}$$

oder

$$\left\{\begin{aligned} \eta &= \pm\sqrt{\frac{(l^2 - y^2)\xi^2 - \xi^4}{\xi^2 + y^2}}, \\ \xi &= \frac{y}{x}\eta. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

2. *Flächengleichheit der beiden Kurven.* — Beschreibt P eine geschlossene Figur I, so beschreibt Q die geschlossene Figur II, wobei O zunächst außerhalb der Umfänge liegen möge (Fig. 2). Dann ist in Polarkoordinaten

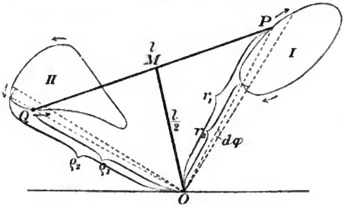


Fig. 2.

$$(3)\quad F_1 = \int \frac{r_1^2 - r_2^2}{2} d\varphi;$$

$$(4)\quad F_2 = \int \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{2} d\psi.$$

Da $\varrho^2 = l^2 - r^2$, so wächst ϱ, wenn r abnimmt, und es entspricht von je zwei Werten das größere r dem kleineren ϱ; für

$$r = \begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix}\Big\{ \text{ wird } \varrho = \Big\{\begin{matrix} 0 \\ l \end{matrix}; \text{ daher}$$

$$F_2 = \int \frac{(l^2 - r_1^2) - (l^2 - r_2^2)}{2} d\psi \text{ oder wegen } d\varphi = d\psi:$$

$$(5)\qquad F_2 = -\int \frac{r_1^2 - r_2^2}{2} d\varphi = -F_1.$$

P und Q umschreiben also gleiche Flächenstücke in entgegengesetztem Drehungssinne.

Dabei ist unter einer geschlossenen Figur eine solche zu verstehen, bei deren Umfahrung die Strahlen r_2 und ϱ_2 sich in entgegengesetztem Sinne drehen, wie r_1 und ϱ_1.

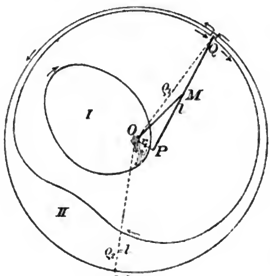


Fig. 3.

Für Figuren, welche O einschließen (Fig. 3), oder deren Umfang durch O geht, erhält man das richtige Ergebnis, wenn man berücksichtigt, daß hier $r_2 = 0$ werden muß, während $\varrho_2 = l$ sich in die Anfangsrichtung zurückdreht. Es ist dann:

$$F_1 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{r_1^2}{2} d\varphi = -F_2 = -\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{3}{2}\pi} \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{2} d\varphi = -\int \frac{\varrho_1^2 - l^2}{2} d\varphi;$$

$$(6)\quad +F_1 = -F_2 = l^2\pi - \int \frac{\varrho_1^2}{2} d\varphi,$$

also gleich der Differenz zwischen dem Kreise $l^2\pi$ und dem von ϱ_1 beschriebenen Flächenstück.

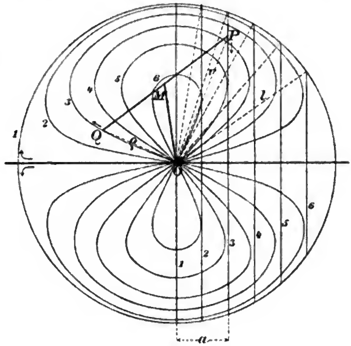


Fig. 4.

3. *Anwendung auf spezielle Kurven.* — I. Beschreibt P eine Gerade:

(7) $$r = \frac{a}{\cos\varphi},$$

so beschreibt Q die Kurve:

(8) $$\begin{aligned}\varrho &= \pm\sqrt{l^2 - \frac{a^2}{\cos^2\varphi}} \\ &= \pm\sqrt{l^2 - \frac{a^2}{\sin^2\psi}}.\end{aligned}$$

Setzt man für a verschiedene Werte ein, so stellt Gleichung (7) ein System von Parallelen dar, deren jeder in Gleichung (8) eine Kathetoide entspricht. (Fig. 4.)

Einige Eigenschaften dieser sind folgende: In Gleichung (8) erreicht ϱ:

für $\psi = \frac{\pi}{2}$, $\quad\varphi = 0\quad$ seinen größten Wert $\sqrt{l^2 - a^2}$,

„ $\psi = \arcsin\frac{a}{l}$, $\quad\varphi = \arccos\frac{a}{l}\quad$ „ kleinsten „ 0.

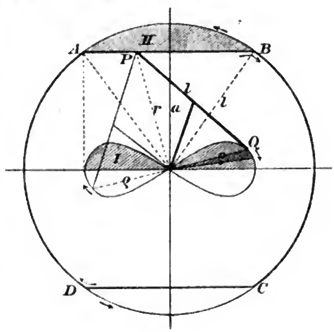


Fig. 5.

Die Kurven gehen daher sämtlich durch den Anfangspunkt; ihre große Achse $= 2\sqrt{l^2 - a^2}$ liegt parallel zu den erzeugenden Geraden, auf denen P ebenfalls die Strecke $2\sqrt{l^2 - a^2}$ durchläuft.

Für $a = 0$ fällt die Kathetoide zu 2 Halbkreisen mit gemeinsamem Durchmesser zusammen.

Für $a = l$ wird die Kurve zum Punkt O.

Für $a = \frac{l}{\sqrt{2}}$ wird:

(9) $$\varrho = \pm l\sqrt{1 - \frac{1}{2\sin^2\psi}} = \frac{l}{\sin\psi}\sqrt{\frac{-\cos 2\psi}{2}};$$

oder, wenn a eingeführt und φ zum Argument wird:

$$\varrho = \pm \frac{a}{\cos\varphi}\sqrt{\cos 2\varphi}, \tag{10}$$

welche Gleichung derjenigen der Lemniskate $\left(\varrho = a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)$ mit gleicher Achse nahekommt.

Bei Anwendung der zu Fig. 3 gegebenen Regel und bei Vertauschung von F_1 und F_2 wird die Fläche der Kurve (8) gleich sein

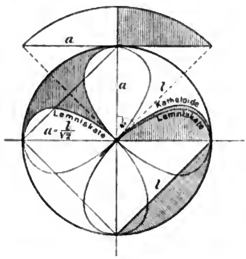


Fig. 6.

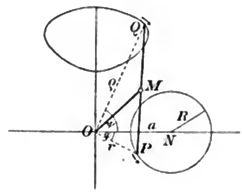


Fig. 7.

müssen dem Kreise $l^2\pi$ vermindert um das von P umfahrene Stück $ABCD$. Die Kathetoide ist also flächengleich den beiden Kreissegmenten, deren Sehne gleich der großen Achse, und deren Pfeil gleich $l - a$ ist; nämlich:

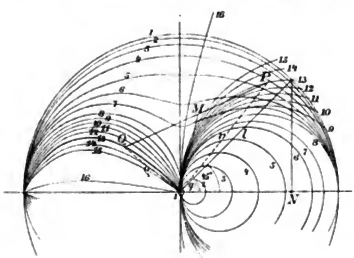


Fig. 8.

$$dF_1 = \frac{\varrho^2}{2}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\left(l^2 - \frac{a^2}{\cos^2\varphi}\right)d\varphi;$$

$$\frac{1}{4}F_1 = \frac{1}{2}\Big[l^2\varphi - a^2 \operatorname{tg}\varphi\Big]_{\varphi=0}^{\varphi = \operatorname{arc\,cos}\frac{a}{l}}; \tag{11}$$

und dies ist die Fläche eines halben Kreissegments mit dem Zentriwinkel $\varphi = \operatorname{arc\,cos}\frac{a}{l}$ und dem Radius l.

Z. B. für die Kurve (10), worin $a = \frac{l}{\sqrt{2}}$ ist („gleichseitige" Kathetoide), wird:

$$\frac{F}{4} = \frac{1}{2}\left[l^2\varphi - \frac{l^2}{2}\operatorname{tg}\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\frac{l^2\pi}{4} - l^2\right];$$

$$F = 2\left[\frac{l^2\pi}{4} - \frac{l^2}{2}\right];$$

das ist das doppelte Segment eines Kreisquadranten. Oder durch a ausgedrückt:

$$F = 2\left[\frac{a^2\pi}{2} - a^2\right] = a^2\pi - 2a^2 = a^2\pi - l^2;$$

(dagegen Lemniskate: $F = a^2$),

die gleichseitige Kathetoide ist also gleich dem Kreise über ihrer großen Achse als Durchmesser, vermindert um zwei einbeschriebene Lemniskaten, oder um das eingeschriebene Quadrat. (Fig. 6. Die schraffierten Flächen sind gleich.)

II. Beschreibt P einen Kreis

(12) $r = a\cos\varphi \pm \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\varphi}$ (Fig. 7).

dann beschreibt Q die Kathetoide

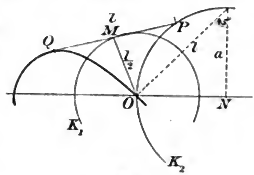


Fig. 9.

(13) $\varrho = \pm\sqrt{l^2 - r^2} = \pm\sqrt{l^2 - a^2\cos 2\varphi - 2a\cos\varphi\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\varphi} - R^2}.$

Setzt man für a verschiedene Werte ein und macht $R = a$, so durchläuft P Kreise, die durch O gehen, und deren Mittelpunkte auf der 0-Richtung liegen. Es wird (Fig. 8)

(14) $r = 2a\cos\varphi;$

(15) $\varrho = \pm\sqrt{l^2 - 4a^2\cos^2\varphi}.$

Für $a = 0$ wird $\varrho = l$, also ein Kreis um O.

Für $a = \frac{l}{2}$ wird

$$\varrho = \pm\, l\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = 2a\sin\varphi,$$

also ein Kreis wie (14).

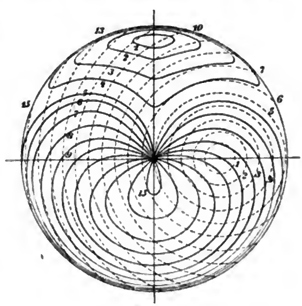


Fig. 10.

Für $a^2 = \frac{l^2}{2}$ wird

(16) $$\varrho = \pm\, l\sqrt{1 - 2\cos^2\varphi} = \pm\, l\sqrt{\cos 2\varphi};$$

also eine Lemniskate. Für diese ergibt sich demnach eine einfache geometrische Konstruktion (Fig. 9): Man schlägt mit $\frac{l}{2}$ um O den Kreis K_1,

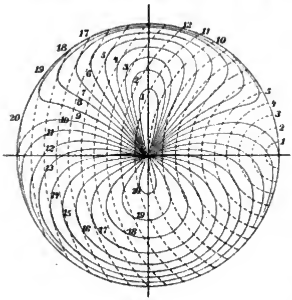


Fig. 11.

macht $ON = \frac{l}{\sqrt{2}}$ und schlägt damit um N den Kreisbogen K_2. Mit $\frac{l}{2}$ schlägt man von beliebigen Punkten M des Kreises K_1 Bogen, die K_2 in den Punkten P treffen, verlängert PM über M um sich selbst bis Q, so sind alle Q Punkte der Lemniskate.

Für andere Werte von a haben die Kurven (15) Ähnlichkeit mit den Cassinischen Kurven (wie sie optisch zweiachsige Kristalle im Polarisationsapparat zeigen).

Es ist nämlich in kartesischen Koordinaten:

Kathetoide (15): $(x^2 + y^2)^2 - l^2(x^2 - y^2) + (4a^2 - 2l^2)y^2 = 0;$

Cassinoide: $(x^2 + y^2)^2 - l^2(x^2 - y^2) - (4a^4 - l^4) = 0.$

Beide begegnen sich in der Lemniskate für $l = a\sqrt{2}$; nämlich

$$(x^2 + y^2)^2 - l^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Gleichung (13) stellt verschiedene Systeme von Kathetoiden dar, je nachdem man für die erzeugenden Kreise Bedingungen gibt. Als Beispiel diene Fig. 10, worin $a = \frac{l}{2}$ und Fig. 11, worin $a = l$ gesetzt ist, während für R eine arithmetische Wertreihe gewählt ist.

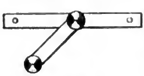


Fig. 12.

Die Figuren sind mit Hilfe zweier Kartonstreifchen von der Länge l und $\frac{l}{2}$ nebst 2 Reißzwecken leicht zu zeichnen (Fig. 12).

Berlin, im Februar 1904.

Synthetischer Beweis eines Satzes von K. Doehlemann.

Von L. Klug in Kolozsvár (Klausenburg).

Im XVII. Teile dieses „Archivs" (1899) in dem Aufsatze „Über hyperboloidische Gerade, die sich aus einem Tetraeder und einer Fläche 2. Ordnung ableiten lassen" auf Seite 161, beweist Herr Doehlemann auf analytischem Wege folgenden Satz:

„Gegeben sind ein Tetraeder $ABCD$ und eine Fläche 2. Klasse f. Greift man eine Tetraederfläche z. B. ABC heraus und legt durch jede ihrer Kanten je eine Ebene, welche mit den durch die Kanten an die Fläche gehenden Tangentialebenen und mit der Tetraederfläche ein bestimmtes, übrigens ganz beliebiges Doppelverhältnis bilden, so schneiden sich die drei Ebenen in einem Punkte D'. Auf gleiche Weise findet man unter Beibehaltung des für das Doppelverhältnis gewählten Wertes die Punkte A', B', C'. Dann haben die Verbindungslinien AA', BB', CC', DD' hyperboloidische Lage."

Der analoge Satz für Kegelschnitte lautet auf Seite 169:

„Gegeben ist eine Kurve 2. Klasse und ein Dreieck ABC. Zieht man durch B und C je Linien, welche mit den durch diese Punkte an die Kurve gehenden Tangenten und mit der Dreieckseite BC ein beliebiges Doppelverhältnis α bilden, so schneiden sich diese beiden Linien in einem Punkte A'. Ebenso erhält man einen Punkt B' unter Beibehaltung des gleichen Wertes α. Für die dritte Dreieckseite ist dann eine Zuordnung festgelegt, vermöge der sich ebenso ein Punkt C' bestimmt. Dann gehen die drei Verbindungslinien AA', BB', CC' durch *einen* Punkt X."

Wir wollen beide Sätze auf synthetischem Wege beweisen, und beginnen mit dem zweiten.

1. Bezeichnet man die Tangentenpaare, die sich von den Eckpunkten des Dreieckes ABC an den Kegelschnitt k ziehen lassen, mit a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, so treffen sich infolge der Brianchonschen Sechsseite

$$a_1\,b_2\,c_1\,a_2\,b_1\,c_2,\quad a_1\,a_2\,c_1\,c_2\,b_1\,b_2,\quad a_1\,c_2\,c_1\,b_2\,b_1\,a_2$$

die Geraden

$$\begin{array}{lll} (b_1c_2)(c_1b_2)\equiv \mathfrak{a}, & (c_1a_2)(a_1c_2)\equiv \mathfrak{b}, & (a_1b_2)(b_1a_2)\equiv \mathfrak{c}, \\ A(b_1c_2), & B(c_1a_2), & C(a_1b_2), \\ A(c_1b_2), & B(a_1c_2), & C(b_1a_2), \end{array}$$

in je einem Punkte P, E', E''.

Die Pole $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ liegen bezw. auf den Geraden BC, CA, AB und alle drei auf der Polare p des Punktes P inbezug auf k. Die Treffpunkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ der Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ mit den Geraden BC, CA, AB sind konjugierte Pole zu $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, und diese konjugierten Pole trennen die Eckpunktpaare des Dreieckes ABC harmonisch. Daraus folgt aber, daß sich auch die Geraden

$$A\mathfrak{A}', \quad B\mathfrak{B}', \quad C\mathfrak{C}'$$

in einem Punkte E treffen, welcher der harmonische Pol der Geraden p inbezug auf das Dreieck ABC ist.

Die Pole $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ der Seiten BC, CA, AB des Dreieckes ABC haben bekanntlich auch die Eigenschaft, daß sich die Geraden

$$A\mathfrak{A}_1, \quad B\mathfrak{B}_1, \quad C\mathfrak{C}_1$$

in einem Punkte E_1 treffen.

Nachdem die drei Strahlenquadrupel, welche die auf den Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ liegenden harmonischen Punktwürfe

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}'(b_1c_2)(c_1b_2), \quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}'(c_1a_2)(a_1c_2), \quad \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}'(a_1b_2)(b_1a_2)$$

bezw. aus den Punkten A, B, C projizieren, sich in den Punkten $E_1EE'E''$ treffen, so liegen diese vier Punkte mit den Eckpunkten ABC des Dreieckes auf einem Kegelschnitt $\varkappa$.

Wählt man jetzt auf $\mathfrak{a}$ einen beliebigen Punkt A' und bestimmt auf $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ die Punkte B' und C' in der Weise, daß

$$A'\mathfrak{A}'(b_1c_2)(c_1b_2) \barwedge B'\mathfrak{B}'(c_1a_2)(a_1c_2) \barwedge C'\mathfrak{C}'(a_1b_2)(b_1a_2),$$

so treffen sich auch die Geraden

$$AA', \quad BB', \quad CC'$$

in einem Punkte X von $\varkappa$; denn die drei projektiven Strahlenwürfe, welche jene drei projektiven Punktwürfe aus den Punkten A, B, C projizieren, treffen $\varkappa$ in drei projektiven Punktwürfen, welche in E, E', E'' drei entsprechende Punkte haben, — also koinzidieren auch die vierten entsprechenden Punkte in X.

Damit ist aber der Doehlemannsche Satz inbezug auf Kegelschnitte k bewiesen.

Projiziert man den Kegelschnitt k, das Dreieck ABC und die Punkte A', B', C' aus einem außerhalb ihrer Ebene liegenden Punkte D, so erhält man einen Satz über einen Kegel $D(k)$ und ein Dreikant $D(ABC)$, laut welchem sich die Ebenen DAA', DBB', DCC' in einer Geraden d schneiden. —

Wir beweisen nun den ersten Satz von der Fläche f II. Klasse und dem Tetraeder $ABCD$. Bezeichnet man die Berührungskegel

II. Ord. der Fläche f, deren Scheitel die Eckpunkte $ABCD$ des Tetraeders sind mit $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $C^{(2)}$, $D^{(2)}$, so werden sich

wegen des Kegels $A^{(2)}$ und des Dreikants $A(BCD)$ die Ebenen ABB', ACC', ADD' in einer Geraden a treffen,
" " " $B^{(2)}$ " des Dreikants $B(CDA)$ die Ebenen BCC', BDD', BAA' in einer Geraden b treffen,
" " " $C^{(2)}$ " des Dreikants $C(DAB)$ die Ebenen CDD', CAA', CBB' in einer Geraden c treffen,
" " " $D^{(2)}$ " des Dreikants $D(ABC)$ die Ebenen DAA', DBB', DCC' in einer Geraden d treffen.

Da nun die Geraden AA', BB', CC', DD' vier Sekanten a, b, c, d haben, so liegen sie hyperboloidisch, — und damit ist auch der erste Satz bewiesen.

2. Ist f der unendlich ferne imaginäre Kugelkreis, so erhält Herr Doehlemann aus dem ersten Satze den folgenden:

„Setzt man auf die Flächen eines beliebigen Tetraeders Pyramiden von beliebiger, aber gleicher Neigung δ, und zwar *alle* nach außen oder *alle* nach innen, so bilden die Verbindungslinien der Spitzen dieser Pyramiden mit den gegenüberliegenden Ecken des Tetraeders vier hyperboloidische Gerade."

Um diesen Satz direkt zu beweisen, gehen wir von einem Dreikant $D(abc)$ aus, auf dessen Flächen bc, ca, ab wir die gleichschenkligen Dreikante $D(a'bc)$, $D(ab'c)$, $D(abc')$ von gleicher Neigung δ aufsetzen, und beweisen, daß sich die Ebenen aa', bb', cc' in einer Geraden treffen.

Für $\delta = 0$, fallen a', b', c' in die Kantenwinkelhalbierenden a_s, b_s, c_s, und die Ebenen aa_s, bb_s, cc_s treffen sich in der Schwerlinie s des Dreikants; für $\delta = 90^0$ fallen a', b', c' in die auf die Flächen bc, ca, ab im Punkte D errichteten Senkrechten a_h, b_h, c_h, und die Ebenen aa_h, bb_h, cc_h treffen sich in der Höhenlinie h des Dreikants $D(abc)$.

Bei einem veränderlichen Winkel δ beschreiben die Geraden a', b', c' projektive Strahlenbüschel in den Ebenen $a_s a_h$, $b_s b_h$, $c_s c_h$, und die Erzeugnisse der Ebenenbüschel aa', bb'; bb', cc'; cc', aa' sind Kegel II. Ord., welche bezw. durch die Geraden $absh$, $bcsh$, $cash$ gehen. Diese drei Kegel fallen aber zusammen. Denn ist a' die Schnittlinie a_1 der Ebenen ac, $a_s a_h$, also b' die Schnittlinie b_1 der Ebenen bc, $b_s b_h$ (daher $\delta = \pi - \gamma$, wo γ den Flächenwinkel des Dreikantes bei c bedeutet), so treffen sich die Ebenen aa_1, bb_1 in c, und der erste Kegel geht durch diese Gerade. Ebenso läßt sich zeigen, daß der zweite und dritte Kegel durch a, bezw. b geht, d. h. daß das Erzeugnis der drei projektiven Ebenenbüschel aa', bb', cc' derselbe gleichseitige Kegel $D(abcsh)$ ist. Damit ist aber der Satz für das Dreikant $D(abc)$ bewiesen.

Geht man jetzt zum Tetraeder $ABCD$ über und sind A', B', C', D' die Spitzen der etwa nach außen aufgesetzten Pyramiden gleicher Neigung (δ), so werden sich wegen der Dreikante $A(BCD)$, $B(CDA)$, $C(DAB)$, $D(ABC)$ die Ebenentripel ABB', ACC', ADD'; BCC'; BDD' BAA'; CDD', CAA', CBB'; DAA', DBB', DCC' in je einer Geraden treffen. Diese vier Treffgeraden sind also Transversalen von AA', BB', CC', DD', daher haben beide Geradenquadrupel hyperboloidische Lage.

3. Betrachtet man beim früheren Dreikant $D(abc)$ auch die Nebenwinkelhalbierenden a'_s, b'_s, c'_s der Kantenwinkel bc, ca, ab, so treffen sich bekanntlich auch die Ebenen aa_s, bb'_s, cc'_s; aa'_s, bb_s, cc'_s; aa'_s, bb'_s, cc_s in je einer Geraden s_a, s_b, s_c. Man erhält daher drei neue gleichseitige Kegel $D(abchs_a)$, $D(abchs_b)$, $D(abchs_c)$. Diese entsprechen solchen auf den Flächen des Dreikants $D(abc)$ aufgesetzten drei Dreikanten, von denen eines zu den früheren gleichschenkligen Dreikanten mit dem Neigungswinkel δ gehört, bei den zwei übrigen aber neigen sich die neuen Flächen zu denen von $D(abc)$ unter den Winkeln δ und $\pi - \delta$.

Geht man wieder zum Tetraeder $ABCD$ über und legt durch die Seiten des Dreieckes BCD je zwei Ebenen, welche sich zur Ebene BCD unter dem Winkel δ neigen, so treffen sich diese sechs Ebenen zu dreien in acht Punkten A_i, von welchen vier die Spiegelbilder der übrigen vier sind inbezug auf die Ebene BCD. Auf gleiche Weise erhält man mittels der Flächen CDA, DAB, ABC unter Beibehaltung des nämlichen Winkels δ die acht Punkte B_i, C_i, D_i. Von den 32 Geraden $a_i = AA_i$, $b_i = BB_i$, $c_i = CC_i$, $d_i = DD_i$ kann man nun 64 mal solche Quadrupel herausgreifen, die hyperboloidische Lage haben. Es gehören nämlich zu zwei beliebigen Geraden $a_i b_i$ schon durch diese bestimmte c_i und d_i.

Ist $\delta = 0$, so fallen die Punkte A_i, B_i, C_i, D_i in die Mittelpunkte der den Flächen des Tetraeders $ABCD$ einbeschriebenen Kreise. Bezeichnen $A_0 B_0 C_0 D_0$ die Mittelpunkte der Inkreise; $A_2 B_1$, $A_3 C_1$, $A_4 D_1$, $C_4 D_3$, $B_3 D_2$, $B_3 C_2$ aber die Mittelpunkte der anderen Kreise, welche bezw. die Kanten CD, DB, BC, AB, AC, AD auf ihren endlichen Teilen berühren, so haben folgende Geradenquadrupel hyperboloidische Lage:

$a_0 b_0 c_0 d_0$	$a_2 b_0 c_1 d_1$	$a_3 b_0 c_1 d_0$	$a_4 b_0 c_0 d_1$
$a_0 b_0 c_4 d_3$	$a_2 b_0 c_2 d_2$	$a_3 b_0 c_2 d_3$	$a_4 b_0 c_0 d_2$
$a_0 b_1 c_1 d_1$	$a_2 b_1 c_0 d_0$	$a_3 b_1 c_0 d_1$	$a_4 b_1 c_1 d_0$
$a_0 b_1 c_2 d_2$	$a_2 b_1 c_4 d_3$	$a_3 b_1 c_4 d_2$	$a_4 b_1 c_2 d_3$
$a_0 b_3 c_2 d_0$	$a_2 b_3 c_0 d_2$	$a_3 b_3 c_0 d_3$	$a_4 b_3 c_1 d_2$
$a_0 b_3 c_1 d_3$	$a_2 b_3 c_4 d_1$	$a_3 b_3 c_4 d_0$	$a_4 b_3 c_2 d_1$
$a_0 b_4 c_0 d_2$	$a_2 b_4 c_2 d_0$	$a_3 b_4 c_0 d_2$	$a_4 b_4 c_0 d_3$
$a_0 b_4 c_4 d_4$	$a_2 b_4 c_1 d_3$	$a_3 b_4 c_2 d_1$	$a_4 b_4 c_4 d_0$.

Kolozsvár, 1902.

Rezensionen.

Niels Henrik Abel. Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. Kristiania, Jacob Dybwad. Paris, Gauthier-Villars. Londres, Williams u. Norgate. Leipzig, B. G. Teubner. XII u. 119 u. 135 u. 61 u. 64 u. 59 S. 4^0 nebst zwei Bildnissen und sechs faksimilierten Schriftstücken. *M.* 21.

Am 5. August 1802 wurde Abel zu Finnö bei Stavanger geboren. Die Hundertjahrfeier seiner Geburt wurde in den Tagen vom 4. bis 7. September 1902 durch wohlgelungene Feste in Kristiania begangen, und den zahlreichen Mathematikern, die als Delegierte von Hochschulen und gelehrten Gesellschaften aller zivilisierten Länder den Einladungen zur Feier gefolgt waren, wurde als wertvolles Geschenk der prachtvolle Quartband überreicht, den wir anzuzeigen haben.

Bei der Eröffnungsfeier sprach ein Nichtmathematiker, der Jurist Professor Dr. Brögger, weihevolle Worte, die sich den Hörern tief einprägten und sofort die rechte Stimmung erzeugten.

„Seine Lebensbahn wurde nur kurz. Er war ja, wie von ihm gesagt ist, nicht viel mehr als ein Kind, als er durch den Tod entrissen wurde, eben als er angefangen hatte, aus der Fülle seiner Gedankenwelt seinen Schöpfungen Form zu geben. Sein Lebenslos war Armut und stetiger Kampf mit bedrängten Verhältnissen, und sein Körper erlag schnell und früh diesem harten Kampfe. Sein klarer und starker Geist hat aber die Macht des Todes besiegt und hat sich ein unsterbliches Denkmal errichtet; seine Gedanken, die als die Wellen einer reichen Quelle aus seinem klaren Geiste hervorsprudelten, sind unvergänglich und unsterblich. Denn neue, große Gedanken können niemals sterben; sie sind wahrlich Kräfte, die niemals zu wirken aufhören; sie sind Wellen, die sich von ihrem Ausgangspunkte aus nach allen Seiten und ewiglich fortsetzen. Und der reinste und erhabenste Ausdruck des menschlichen Denkens ist in der streng logischen mathematischen Form ausgeprägt; auf das mathematische Denken gründet und baut sich alle Gesetzmäßigkeit auf; es hat die Bahnen der Sterne im unendlichen Raume, die Schwingungen der unsichtbaren Atome in der Materie umspannt. Denn alles ist nach der Zahl geordnet.

Er war, wie nach seinem Tode geschrieben wurde, eines der seltenen Wesen, deren die Natur im Laufe der Jahrhunderte kaum eines schafft. Das Andenken dieses wunderbaren Wesens von Feuer und Gedanken, welche das Licht seines Geistes jetzt über alle Völker hinausstrahlen, ja ihr Streiflicht noch über dunkle, ferne, verborgene Weiten der Zukunft auch nach diesem Tage werfen werden, sammelt jetzt Mathematiker aus der ganzen gebildeten Menschheit in Dankbarkeit für dieses kurze Leben, das uns so viel hinterließ. So strahlt denn auch aus den Gedanken der unsterblichen Geister ein weiterer großer Gedanke hervor: die Vereinigung der Menschheit im gemeinsamen Danke, in gemeinsamer Freude für das Große, was allen Völkern zum Segen wurde.

Warum sollte es ihm nicht vergönnt sein, auch nur ein Tausendteil dessen zu erfahren und zu erleben, was sein Volk, was die Menschheit jetzt mit Freude für ihn tun würde? Warum mußte er so früh sterben und mit seinem Tode das mächtige Gebäude seiner noch ungeborenen und unvollendeten Gedanken für ewig und immer schroff unterbrochen werden? Wir fragen und können niemals eine Antwort erhalten. Ein Trost ist uns vergönnt, — daß er selbst wenigstens eine große, ja die größte und edelste Freude im Leben erfahren hat, des Schöpfergeistes Freude an der Arbeit, Freude am Schaffen. Und noch ein weiterer Trost: daß selbst dasjenige, was ihm vergönnt wurde, uns aus seinem kurzen Leben zu hinterlassen, reichlich genügt hat, um seinen Namen der Unsterblichkeit zu übergeben. Und wir erinnern uns der erhabenen Worte von Tycho Brahe: Nec fasces nec opes, sola artis sceptra perennant. Weder Macht noch Reichtum, allein die Herrschaft der Wissenschaft wird überleben. Das hat auch er gefühlt, und das hat er für sich und sein Land erreicht“.

Durch Wiedergabe dieser Stellen aus der eindrucksvollen Rede hoffen wir, den Leser in die Stimmung gesetzt zu haben, daß die Mitteilungen über die Festschrift mit Interesse aufgenommen werden. Das eine beigegebene Vollbild ist die auf photographischem Wege erzeugte Wiedergabe des einzigen Porträts von Abel, gemalt vom Maler Görbitz, das sich im Besitze einer Nichte Abels befindet, Thekla Lange, der Witwe eines früheren Ministers. Die zweite Bildtafel gibt eine Ansicht des Pfarrdorfes Finnö, nach einer noch zu Lebzeiten Abels gemalten Landschaft des Malers Th. Fearnley.

Der Inhalt des Bandes besteht aus verschiedenen Teilen, die für sich paginiert sind.

An der Spitze befindet sich die französische Übersetzung der von Björnstjerne Björnson für die Hauptfeier gedichteten Kantate. Von Christian Sinding komponiert und in zwei Teile zerlegt, rahmte sie, unter Orchesterbegleitung von einem starken Chor geschulter Sänger vorgetragen, den feierlichen Akt wundervoll ein.

Als „historische Einleitung“ bezeichnet, folgt eine angenehm zu lesende Erzählung des äußeren Lebenslaufes Abels, verfaßt von Elling Horst, angenehm besonders deshalb, weil die Anschuldigungen, welche C. A. Bjerknes in seiner Biographie Abels gegen das Andenken Jacobis erhoben hatte, unberücksichtigt geblieben sind. Auf vielen selbständigen Forschungen beruhend, verdient diese neue Biographie des berühmten norwegischen Mathematikers eine weitere Verbreitung und eignet sich zu einer besonderen Ausgabe, falls sie durch die später zu erwähnende Würdigung der wissenschaftlichen Leistungen Abels durch Sylow ergänzt wird.

Die von dem gefeierten Heroen herrührenden Bestandteile der Festschrift sind seine Briefe, 38 an der Zahl, nebst einigen an Abel gerichteten oder ihn betreffenden Schreiben. Zuerst werden die Abelschen Briefe in französischer Übersetzung gegeben, wie überhaupt das Französische die Sprache ist, in der die vorangehende Biographie und nachher die Würdigung der mathematischen Leistungen Abels von Sylow abgefaßt sind. Ein sehr sorgfältiger Kommentar zu jedem einzelnen Briefe gibt dann über die erwähnten Personen und Dinge genaue Auskunft.

Als eine besondere Abteilung folgt danach der norwegische Text der Originale dieser Briefe, die damit zum ersten Male in der ursprünglichen Fassung erscheinen. Sehr bedauerlich ist es, daß von den an Crelle geschriebenen Briefen Abels die meisten verloren gegangen sind. Wenn man berücksichtigt, daß Weierstraß zufällig einen solchen Brief Abels an Legendre, der aus dem Crelleschen Nachlasse stammte, bei einem Berliner Antiquar gekauft hat, so scheint die Aussicht gering, von diesen Briefen, die für den Entwickelungsgang Abels von großer Bedeutung sind, noch etwas zu erlangen.

Die folgende Abteilung besteht aus einer Sammlung von 96 Dokumenten über Abel, die Karl Störmer in den verschiedensten Akten entdeckt hat, als es sich darum handelte, einem Manuskripte Abels nachzuspüren, „Über die Integration der Differentialformeln". Dasselbe wurde am 22. März 1823 durch Hansteen dem akademischen Rate übergeben. Hansteen und Rasmusen wurden mit der Prüfung der Arbeit betraut; aber der wünschenswerte Druck unterblieb aus Geldmangel. Dagegen empfahlen die beiden Berichterstatter als nützlicher, die Flüssigmachung einer Unterstützung zur weiteren Ausbildung des hoffnungsvollen jungen Mathematikers. Hier ist also der erste Anstoß zu finden für die Bewilligung von Staatsmitteln für die Auslandsreise Abels. — Obgleich nun das gesuchte Manuskript nicht gefunden worden ist, so ist die Ausbeute an Notizen, die bei dem Nachforschen sich zusammengefunden haben, für die Lebensgeschichte Abels von großem Werte.

Der letzte Abschnitt der Festschrift ist von L. Sylow verfaßt und betrifft die Studien Abels und seine Entdeckungen. Für die Zeit der Entstehung der einzelnen Arbeiten lagen außer den Manuskripten Abels sechs wissenschaftliche Tagebücher vor, in welche er fortlaufend die Entwürfe mit denen er sich beschäftigte, einzutragen pflegte, zum Teil mit kurzem begleitenden Texte, zum Teil aber auch nur in Gestalt von Formelrechnungen, die nicht immer einen Zusammenhang zeigen. Durch genaue Prüfung dieser Hefte konnte die Zeit festgestellt werden, wann jedes einzelne gefüllt ist, und damit ist für viele Arbeiten Abels die erste Spur nachgewiesen. In dem wichtigen Gebiete der elliptischen Funktionen bleibt aber trotzdem noch vieles ungewiß. Die 59 Seiten, welche Sylow dem Werdegange des wunderbaren Genius gewidmet hat, sind musterhaft in der scharfsinnigen Benutzung aller zugänglichen Hilfsmittel und in der Beherrschung der verschiedenen zur Sprache kommenden Gebiete, wie dies von dem Herausgeber der zweiten Auflage der Abelschen Werke zu erwarten war.

Von den sechs Schriftstücken, deren Facsimile am Schlusse auf ebenso vielen Tafeln gegeben ist, sind die Nummern I, II, VI die ersten Seiten dreier Briefe, III und IV zwei Seiten aus den Tagebüchern Nr. IV und V, endlich V die erste Seite des Fragmentes „Recherches sur les fonctions elliptiques. Second Mémoire".

Wir schließen mit den charakteristischen Sätzen, durch die Sylow in seiner Festrede die gewaltige Größe Abels der Versammlung begreiflich machte: „Alle diese grundlegenden Entdeckungen wurden von Abel der wissenschaftlichen Welt im Laufe dreier Jahre mitgeteilt, bevor er das siebenundzwanzigste Lebensjahr vollendet hatte. Eine ganze Reihe hervorragender Mathematiker hat zum großen Teile ihre Berühmtheit erlangt, indem sie vollendeten, was zu Ende zu führen Abel nicht die Zeit gehabt hatte, und indem sie auf den von Abel gelegten Fundamenten weiter bauten: Jacobi, Galois, Riemann, Weierstraß, Hermite, Kronecker".

Berlin, 6. Januar 1904. E. Lampe.

Giulio Vivanti. Complementi di matematica ad uso dei chimici e dei naturalisti. Milano: Ulrico Hoepli, 1903. X u. 381 S. 12^{mo}. Geb. 3 Lire.

Zu den bekannten Manuali Hoepli gehörig, verfolgt die vorliegende Schrift des geschätzten Verfassers, die einer 1900/1 an der Universität Messina gehaltenen Vorlesung ihre Entstehung verdankt, dieselben Ziele wie das bekannte deutsche Werk „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften" von Nernst und Schoenflies; sie soll den Studenten der Chemie und der Naturwissenschaften, sowie denen der sozialen und moralischen Wissenschaften die notwendigsten mathematischen Begriffe überliefern, damit die in diesen Zweigen des Wissens vorkommenden Anwendungen der Mathematik verstanden werden können. Die sechs Abschnitte des Buches sind: die Algebra, die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, die Infinitesimalrechnung, die Wahrscheinlichkeitsrechnung samt der Methode der kleinsten Quadrate, die Mechanik, die Thermodynamik und die chemische Mechanik.

Der Standpunkt des Vortrags entspricht ebenfalls ungefähr demjenigen des deutschen Werkes. Überall ist ein möglichst leichter Zugang zu den Sätzen und Formeln gesucht. Dem beschränkten Umfange der Manuali Hoepli entspricht der Verzicht auf die Breite, mit der im deutschen Buche vorgegangen wird. Dadurch ist es dem Verfasser sogar gelungen, seinen Lesern einen größeren Stoff vorzuführen als Nernst und Schoenflies. Für den deutschen Leser ist es zunächst interessant, zu sehen, daß etwa die Vorkenntnisse eines Gymnasialabiturienten unserer Heimat vorausgesetzt werden. Die Determinanten, welche mit einer gewissen Vorliebe eingeführt und benutzt sind, dienen zwar vielfach zur Erleichterung der Rechnungen; nach den Erfahrungen aber, die Referent in seinen Vorträgen und Übungen an einer deutschen Technischen Hochschule gemacht hat, gewöhnen sich unsere Studenten nur widerwillig an den Gebrauch dieses Hilfsmittels. In einem Kursus mit den Zwecken, die der Verfasser verfolgt, würde bei uns die Theorie und die Anwendung der Determinanten wohl wegbleiben müssen. Überhaupt lehnt sich jeder einzelne Teil des vorliegenden Buches mehr an einen systematischen Gang an, als die Darstellung des deutschen Werkes, in dem die pädagogischen Gesichtspunkte mehr berücksichtigt sind. Für das Selbststudium ist der italienische Leitfaden daher weniger geeignet als der deutsche. Das Geschick des Herrn Vivanti bei der Abfassung seiner Schrift zur leichten und klaren Darstellung tritt überall deutlich hervor.

Berlin, 6./1. 04. E. Lampe.

Ernesto Pascal. Lezioni di calcolo infinitesimale. Parte I. Calcolo differenziale. Parte II. Calcolo integrale. 2ª Edizione completamente riveduta. Milano: Ulrico Hoepli, 1902 u. 1903. XII u. 311, VIII u. 329 S. 12mo. Geb. je 3 Lire.

In der bekannten hübschen Ausstattung und zu dem billigen Preise der Manuali Hoepli erschienen, geben die beiden Bände, die in erster Auflage 1894 veröffentlicht worden sind, den Inhalt der Vorträge, welche der Verfasser für die Studenten hält, die sich nachher technischen Studien widmen wollen. Für diejenigen unter ihnen, die sich später dem Studium der Mathematik zuwenden, hat er als Ergänzung die Note critiche di calcolo infinitesimale (Milano, 1895) herausgegeben. Obgleich also der vorliegende erste Lehrgang dem Plane nach die schärferen Begriffsbestimmungen ausschließt, welche durch die exakte Betrachtung der neueren Schule in die Infinitesimalrechnung eingeführt sind, findet man doch in dem Werke des kenntnisreichen italienischen Mathematikers an vielen Stellen eine genauere Behandlungsweise, als man nach der eigenen Ankündigung in der Vorrede erwarten sollte und in den einführenden Werken gleicher Richtung sonst üblich ist. Gleich das einleitende Kapitel über reelle Funktionen reeller Variabeln ist dem Geiste der modernen Funktionentheorie gemäß geschrieben. Und in dem darauf folgenden Kapitel über die Ableitungen einer Funktion stößt man auf manche Bemerkungen, welche den Anfänger auf später zu erörternde Dinge hinweisen. So heben wir nur die Sätze über die Bildung der Ableitungen von unendlichen Reihen hervor, die häufig bei Seite gelassen werden, und deren Unkenntnis bei Anfängern so leicht zu Fehlschlüssen verleitet. Ebenso sind in dem zweiten Bande die beiden ersten Kapitel über die bestimmten und die unbestimmten Integrale und über die Integrabilität der Funktionen auf die Höhe der funktionentheoretischen Anschauungen gerückt. Recht vollständig sind auch die Anwendungen behandelt, besonders in der Differentialrechnung. Die Theorie der Differentialgleichungen, welche in dem zweiten Bande nahezu 100 Seiten einnimmt, enthält alles, was in einem Anhange zur Integralrechnung gegeben werden kann. Wie in seinen übrigen Lehrbüchern hat der geschickte Verfasser es auch in diesem Werke verstanden, einen umfangreichen Stoff in knapper Form, aber völlig verständlich für seine Leser darzustellen. Die Notwendigkeit einer zweiten Auflage zeigt, daß diese Gestalt der Veröffentlichung einem wirklichen Bedürfnisse entgegengekommen ist.

Berlin. E. Lampe.

A. Baule. Lehrbuch der Vermessungskunde. Zweite erweiterte und umgearbeitete Auflage. Mit 280 Figuren im Text. 8⁰. VIII + 471 S. Berlin und Leipzig, B. G. Teubner, 1901.

Die zweite Auflage dieses Lehrbuches der niederen Vermessungskunde umfaßt gegenüber der ersten, 1890 erschienenen 67 Seiten Text mehr, sie verfolgt den gleichen Zweck und behandelt den Stoff ebenfalls in drei Abteilungen, die die Lehren von den Meßinstrumenten (181 S.), von den Messungen (251 S.) und vom Planzeichnen (29 S.) enthalten, wozu noch eine kurze historische und orientierende Einleitung (10 S.) kommt. Das Buch, das den Studierenden in die niedere Vermessungskunde einführen soll, könnte auch Anfängern und solchen, für die die Lösung von Aufgaben aus der praktischen Geometrie nur Nebenbeschäftigung ist, und denen tiefer gehende mathematische Entwickelungen nicht bequem sind, wie z. B. Forstmännern, nützlich und wertvoll sein. Die Stellung des Verfassers als Professor an der Forstakademie in Hann. Münden scheint hierin zum Ausdruck zu kommen. Gegenüber der ersten Auflage sind als neu, wenn auch ohne mathematische Begründung, hinzugekommen zu erwähnen einige kleinere Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate, die früher ganz unberücksichtigt geblieben war, und die Umwandlung der geographischen Koordinaten in rechtwinklig-sphärische. Der Abschnitt über die Meßinstrumente ist auch diesmal wohl am besten gelungen. Es sind zumeist nur die typischen Formen der Instrumente ausgewählt und diese nach ihren wesentlichen Teilen besprochen.

Leider kann man aber, trotz mancher Vorzüge, diese zweite Auflage des Buches nur mit einer gewissen Einschränkung empfehlen, da sie im Vergleich mit der ersten sehr viele, zum Teil wohl auch durch mangelhaften sprachlichen Ausdruck verursachte Unrichtigkeiten und schiefe Auffassungen enthält, die der Geodät zwar meistens sofort erkennen wird, die aber bei Studierenden und Nichtfachleuten leicht falsche Vorstellungen zu erzeugen geeignet sind. Zum Beweise dieser Behauptung mögen einige Stellen angeführt werden, deren Anzahl leicht vervielfältigt werden könnte:

S. 1. „$1^{\mu} = 0{,}001$ mm heißt Mikromillimeter“, während die allgemein übliche Bezeichnung Mikron ist.

S. 2. Als Zeiteinheit wird die Sternzeitsekunde definiert, im Gegensatz zu späteren Angaben (z. B. S. 271), wo die mittlere Sonnenzeit eingeführt wird.

S. 61. Es wird erzählt, daß man „unter Anwendung von elektrischem Lichte auf 270 km mit dem Heliotrop signalisiert“ hat.

S. 131. „An jeder [Basismeß-]Stange wird die Temperatur zum Zweck der Längenreduktion vermittelst des Ausdehnungskoeffizienten beobachtet.“ Dabei ist aber von der Anwendung bimetallischer Maßstäbe gar nicht die Rede gewesen.

S. 269/271. Die Art und Weise, wie hier die obere und untere Kulmination der Sterne unter Zuhilfenahme eines Karussells, und der Unterschied zwischen Sonnen- und Sternzeit durch Benutzung von Westenknöpfen und von zwei Bäumen erklärt wird, ist mindestens merkwürdig. — Nachdem auf Seite 271 gesagt ist, daß sich die Angaben unserer Uhren auf mittlere Sonnenzeit beziehen, heißt es unmittelbar darauf wörtlich: „Es folgt ferner aus dem Gesagten, daß man den Gang seiner Uhr auf die Gleichmäßigkeit (?) nicht durch die Uhrzeichen der Post oder Bahn oder des Zeitballs prüfen kann. Die gute Uhr, sei es Pendel- oder Taschenuhr mit Kompensation, *muß* in kurzer Zeit von der Postuhr abweichen; ihr Gang läßt sich nur durch die Sternbeobachtung des Astronomen kontrollieren.“

S. 278. „In früheren Zeiten entzündete man [zur Bestimmung des geographischen Längenunterschiedes] nachts zwischen den beiden Stationen eine Tonne (!) Schießpulver und merkte sich die Ortszeit des Aufblitzens.“

Überhaupt ist der ganze Abschnitt über die „Bestimmung der Nordrichtung und der geographischen Lage“, soweit astronomische Gegenstände in Frage kommen, ganz verfehlt und unzureichend.

S. 346. „Während bei $\varphi = 5^0$ ein Breitengrad 1105739 m lang ist, hat derselbe bei $\varphi = 70^0$ eine Länge von 1115546 m." Diese Zahlen sind zehnmal zu groß! — Über die internationale Erdmessung wird, neben anderen schiefen Ausdrücken, gesagt: „Man hofft dadurch die Widersprüche zu heben, welche zwischen manchen astronomischen und geodätischen Ortsbestimmungen bestehen".

S. 331/340. In dem Kapitel über „Winkelverbesserungen in zusammenhängenden Figuren" wird die Ausgleichung von Dreiecksnetzen so behandelt, daß zuerst die Winkel-Bedingungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate berücksichtigt werden und erst nachträglich, in zum Teil willkürlicher Weise, die Seitengleichungen, und zwar derart, daß dabei die Winkelgleichungen erfüllt bleiben, und daß außerdem bei Zentralpunkten auch die Winkel um sie herum, deren Summe 360^0 ist, nicht mehr geändert werden. Nach der apodiktischen Darstellung des Verfassers muß man annehmen, daß dies die einzig mögliche Ausgleichungsart sei, und daß sie der Methode der kleinsten Quadrate entspreche.

Potsdam. A. Börsch.

E. A. Brauer. Springende Logarithmen. Abgekürzte fünfstellige Logarithmentafel mit zunehmenden Grundzahl-Stufen. Zum Gebrauch für technische Rechnungen. 4°. 8 S. und 2 S. Vorwort und Gebrauchsanweisung. Karlsruhe, C. Braun, 1901.

Die „springenden Logarithmen" bestehen aus einer abgekürzten 5-stelligen Logarithmentafel mit einfachem Eingange, bei der die Numeri von 1000 bis 2000 um eine Einheit, die von 2000 bis 3000 um zwei Einheiten usw., und endlich die von 9000 bis 9999 um neun Einheiten fortschreiten, wodurch fast $^2/_3$ aller Logarithmen fortgefallen sind. Bei den meisten Logarithmentafeln mit der Grundzahl-Stufe 1 ist der Fortschritt von einer Zahl zur nächstfolgenden für niedrigere Zahlen ein größerer Bruchteil der Zahl selbst als bei höheren. Diese Ungleichmäßigkeit sei aber durch das Genauigkeitsbedürfnis bei naturwissenschaftlichen Rechnungen nicht begründet, dem die vorliegende Anordnung dagegen entspreche. Neben den Logarithmen sind auch noch für die einzelnen Geltungsbereiche die logarithmischen Differenzen für die Grundzahl-Stufe 1 gegeben, die nach der Gebrauchsanweisung zur Interpolation benutzt werden sollen. Gegen diese springenden Logarithmen läßt sich aber mancherlei einwenden. In der Tafel findet sich z. B. folgende Stelle:

Num.	Log.	Diff.
7987	90238	
7994	90276	5
8000	90309	
8008	90352	

Hier schreiten die Numeri unregelmäßig um 7, 6, 8, die Logarithmen um 38, 33, 43 Einheiten fort, während die Differenz 5 dafür 35, 30, 40 gibt, so daß die Interpolation hier die Logarithmen um mehrere Einheiten falsch ergeben kann. Noch auffälliger ist folgendes Beispiel: Leitet man aus den untereinander stehenden Logarithmen von 9711 und 9720 mit der dazugehörigen Differenz 4 die Logarithmen von 9715 und 9716 ab, und zwar einmal durch Vorwärts-Interpolation von log 9711 ausgehend und sodann durch Rückwärts-Interpolation von log 9720 aus, so findet man:

Num.	Interpolierter Log.		Richtiger Log.
	Vorwärts	Rückwärts	
9 715	98 742	98 747	98 744
9 716	98 746	98 751	98 749

Man erhält hier also um 5 Einheiten voneinander abweichende Logarithmen, die um 2 bis 3 Einheiten falsch sind. Was sollen unter solchen Umständen überhaupt 5-stellige Logarithmen? Da überdies nach dem Vorwort die relativen Fehler, mit denen die grundlegenden Zahlen für technische Rechnungen behaftet sind, meist größer als $^1/_{2000}$ sind, so ist für sie eine gewöhnliche 4-stellige Logarithmentafel, zumal in Verbindung mit einer entsprechenden Tafel der Antilogarithmen, die sich beide bequem auf zwei nebeneinander liegenden Quartseiten anordnen lassen, vollkommen ausreichend, da bei ihr einer Einheit der vierten Stelle des Logarithmus erst $^1/_{4343}$ des Numerus entspricht. Die oben angeführte Ungleichmäßigkeit bei den Grundzahlen wird sich dann wohl nur selten störend bemerkbar machen, während auch die Interpolation nicht mehr Mühe verursacht.

Potsdam. A. Börsch.

Hermann Schubert. Elementare Berechnung der Logarithmen, eine Ergänzung der Arithmetik-Bücher. Leipzig, Göschen. 1903. 87 S. 8° brosch. 1.60 *M.*

Nicht bloß in Deutschland, nach Sophus Lie auch in Norwegen, und auch anderswo, werden die Logarithmen im Unterricht derartig behandelt, daß die Schüler sie praktisch anwenden lernen, ohne zu erfahren, wie eine Tafel berechnet werden könnte. Sie erscheint ihnen zeitlebens als ein Wunderwerk. Das widerspricht dem Wesen des mathematischen Unterrichts, der nicht berufen ist, auf Treu und Glauben eine Summe positiver Kenntnisse zu überliefern, sondern alles auf gründlicher Einsicht aufbauen soll. Bisher ist wenig bekannt, wie das besser zu machen sei, obwohl sich der Weg dazu aus der Geschichte der Mathematik deutlich ergibt. Der Verfasser hat einen „elementaren" Weg ersonnen, der wenigstens bei den „Primanern" nachholt, was unseres Erachtens schon bei den Sekundanern erforderlich wäre. Er verwendet den binomischen Satz „nur für positive ganze Exponenten", geht aber ohne Überleitung sofort zur Anwendung auf $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ über, welche Zahl nicht genau berechnet, sondern in die Grenzwerte 2 und 3 eingeschlossen wird, verwendet ferner $\log e = \frac{1}{2}\cdots\frac{1}{3}$, vermeidet aber die *Reihe* für den natürlichen Logarithmus, die der elementaren Arithmetik fern liege. Angenäherte Werte schließt er behufs Erzielung strenger Genauigkeit immer in Grenzen ein, so daß jede Gleichung in zwei Ungleichheiten sich spaltet. Hätte er z. B. aus angenäherten Werten von $\log\frac{4}{3}$ und $\log\frac{8}{9}$ zwei lineare Gleichungen mit den Unbekannten $u = \log 2$, $v = \log 3$ erhalten: $2u - v = \alpha$, $3u - 2v = \beta$, in denen α und β durch die Zahl ihrer Dezimalstellen den Grad ihrer Genauigkeit andeuten, so würde er sie ersetzen durch $\alpha_1 < 2u - v < \alpha_2$, $\beta_1 < 3u - 2v < \beta_2$ oder $-\beta_2 < -3u + 2v < -\beta_1$. Solche Ungleichheiten lassen sich addieren, mit positiven Zahlen multiplizieren, aber nur nach Umschwenkung der äußeren Seiten subtrahieren. Durch passende Kombinationen erhält man für u zwei Grenzwerte u_1 und u_2, die beide aufbewahrt werden, um in weiteren Ungleichungen log 2 zu vertreten. Dieses altertümliche Verfahren zeigt sich besonders schwerfällig, wenn es wie hier sogar auf 6 Gleichungen mit 6 Unbekannten angewandt wird. Der Verfasser schreibt ihm didaktischen Nutzen zu.

Die Grundlage bietet ein Satz, der sich aus Vergleichung der Binomial-Formel für $\left(1 + \frac{2}{w}\right)^{w+1}$ mit ihrem Grenzwert für $w = \infty$ ergibt. Er besagt, daß $\log(w+2) - \log w = \frac{2\varepsilon}{w+1} + \delta$ ist, wo $\varepsilon = \log e$ ist und δ in dem Intervall liegt: $0 \cdots \frac{4\varepsilon}{7w(w+1)}$. Dies entspricht dem Anfang der Reihe $ln\frac{z+1}{z-1} = \frac{2}{z} + \frac{2}{3z^3} + \cdots$ für $z = w + 1$. Die obere Grenze ist reichlich bemessen. Hieraus wird gefolgert

$$-\log(x+1) + 2\log x - \log(x-1)\left[\text{d. i. } \log\frac{2x^2}{2x^2-2}\right] = \frac{2\varepsilon}{2x^2-1} + \delta,$$
$$\delta = 0 \cdots \frac{1}{7(x^2-1)(2x^2-1)}.$$

Sind etwa die Logarithmen zu den Primzahlen bis 19 schon berechnet, so kann man hier $x = 23$ setzen, man erhält dann, da $(x+1)$ und $(x-1)$ in kleinere Primzahlen zerlegbar sind, den Wert von log 23. Dieses Tripel-Verfahren findet man schon bei Briggs zugleich mit einer Auswahl der passendsten Tripel.

Um nun aber die Logarithmen der kleinsten Primzahlen zu finden, wird $x = 3$, dann $= 4$ und $= 9$ gesetzt. Im ersten Fall ist die obere Grenze für δ nahe an 10^{-3}, für die beiden andern, vom Verfasser *allein* angeführten, Fälle noch kleiner. Zerlegt man links die Zahlen in Primfaktoren und setzt $\log 2 = u$, $\log 3 = v$, also $\log 5 = \log\frac{10}{2} = 1 - u$, so ergibt sich

$$5u - v - \frac{2\varepsilon}{31} = 1{,}000; \quad -5u - v - \frac{2\varepsilon}{49} = -2{,}000;$$
$$-3u + 4v - \frac{2\varepsilon}{161} = 1{,}000.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit 23, 17, 10 und addiert, so wird $2\varepsilon = 0{,}87$, alsdann durch Addition und Subtraktion der beiden ersten $u = 0{,}3010$; $v = 0{,}477$.

Auch der Verfasser vernachlässigt — vorläufig — gleich uns die Fehlergrößen δ, erklärt sich jedoch außer stande, dann die Genauigkeit der erhaltenen Werte zu schätzen. Deshalb berechnet er, als ob rechts die genauen Zahlen 1, — 2, 1 stünden, auf beliebig viel Stellen $u = 0{,}301\,030$, $v = 0{,}477\,121$, und stellt aus den anderweitig bekannten Werten fest, daß er tatsächlich 6 genaue Stellen gefunden habe. Obwohl er selbst mehrmals davor warnt, *diese* Genauigkeitsermittelung als legitim anzusehen, empfiehlt er doch dieses Verfahren in der Vorrede. Der Grund für die Erreichung der übermäßigen Genauigkeit liegt darin, daß die Fehlergrenzen viel niedriger liegen, als die Formel des Verfassers angibt. Sie sind nicht von der Ordnung x^{-4}, sondern x^{-6}.

Zur Erreichung größerer Genauigkeit werden sodann in die Tripel-Formel größere Zahlen eingesetzt, 25, 26, —, 49, 64, 81, die durch Probieren so gewählt sind, daß sie auf die Logarithmen der kleineren Primzahlen schließen lassen. Hier gibt das *vorläufige* Verfahren, welches die Fehlergrenzen δ als Null ansieht, für log 2 und log 3 sogar 11 Stellen des Thesaurus von Vega, das definitive dagegen, welches jede Gleichung in 2 Ungleichheiten spaltet, liefert für log 2 Grenzwerte vom Unterschied $5 \cdot 10^{-8}$, für log 3 den Unterschied $16 \cdot 10^{-8}$.

Nachdem hieraus die Herstellbarkeit einer 5-stelligen Tafel, gerade noch mit einer Genauigkeit von 10^{-5} (nicht 10^{-6}, wie nach der Vorrede scheint) nachgewiesen ist, wird eine *neue viel einfachere* Methode dargelegt, die für Primzahlen, die größer als 19 sind, vorzuziehen ist. Es ist bekannt, daß höhere Differenzen tabulierter Funktionswerte auf eine gewisse Zahl von Stellen in Null übergehen, und daß sie sich mittelst der Binomial-Koeffizienten aus den Gliedern der Urreihe bilden lassen. Es ist also angenähert

$$\Delta^n \log x = y_n = -\log x + n_1 \log(x+1) - n_2 \log(x+2) + \cdots \pm \log(x+n) = 0,$$

wo die Summe aller Koeffizienten $= 0$ ist, so daß auch:

$$-\log\left(1+\frac{0}{x}\right) + n_1 \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - n_2 \log\left(1+\frac{2}{x}\right) + \cdots \pm \log\left(1+\frac{n}{x}\right) = 0$$

ist. Entwickelt man die linke Seite, unter Annahme natürlicher Logarithmen, mittelst der Formel $ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \cdots$, so werden die Koeffizienten von $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \cdots, \frac{1}{x^{n-1}}$ gleich $\Delta^n h, \frac{\Delta^n h^2}{2}, \cdots, \frac{\Delta^n h^{n-1}}{n-1}$, also gleich Null, der von $\frac{1}{x^n}$ wird $\frac{\Delta^n h^n}{n} = (n-1)!$; mithin wird das Anfangsglied $= \frac{(n-1)!}{x^n}$, der Ausdruck ist also positiv und nimmt zu 0 ab.

Der Verfasser schlägt einen anderen Weg ein, er findet, indem er jenen Ausdruck y_n für briggische Logarithmen, nach x differenziert, als Wert der Ableitung:

$$-\frac{\varepsilon}{x} + \frac{n_1 \varepsilon}{x+1} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{\varepsilon}{x+n} = -\frac{\varepsilon n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Sie ist also beständig negativ, auch wenn x kleine Werte hat, der Ausdruck y_n selbst nimmt also beständig ab und zwar zu 0, ist also immer positiv.

Ergibt sich aus den Logarithmen der natürlichen Zahlen $(x-1)$, $x, \cdots$, $(x+n-1)$, daß $\Delta^n = 0$ ist, so kann man die letzte Differenzenreihe durch Nullen fortsetzen, dadurch die vorhergehende, dann die drittletzte immer weiter ausdehnen und schließlich auch in der ersten Reihe auf $\log(x+n)$, $\log(x+n+1), \cdots$ kommen. Derselbe Wert für $\log(x+n)$ ergäbe sich — viel beschwerlicher — aus der obigen Gleichung $y_n = 0$ als lineares Aggregat von $\log x$, $\log(x+1), \cdots, \log(x+n-1)$. Insofern benutzen die automatischen Maschinen, welche Logarithmen nach der Differenzenmethode berechnen und drucken, die obige Formel $y_n = 0$. Der Verfasser ersetzt in der Ungleichheit

$$-\log x + n_1 \log(x+1) - \cdots \pm \log(x+n) > 0$$

die positiven Logarithmen durch ihre oberen, die negativen durch ihre unteren Grenzen und bestimmt so den Logarithmus eines mittleren Gliedes als lineares Aggregat der übrigen. Um den log 23 zu finden, wird die Formel einmal auf die Zahlbereiche 18, 19, $\cdots$, 28, $(n = 10)$ dann auf 17, 18, $\cdots$, 28 $(n = 11)$ angewandt, es ergibt sich $1{,}36\,172\,730 < \log 23 < 1{,}36\,172\,845$, also 5 sichere Stellen.

Die *vorläufige* Ableitung von $y_n = 0$ in § 11 bleibt mir unverständlich; die verlangte Elimination, die dort von (10) auf (11) führt, scheint unmöglich. Die „elegante und nahezu richtige“ Gleichung (11)

$$\begin{aligned}(2z+1)\log(z-2) - 2(4z+1)\log(z-1) + 12z\log z \\ - 2(4z-1)\log(z+1) + (2z-1)\log(z+2) = 0\end{aligned}$$

ist besser durch die folgende, nicht weniger elegante, aber richtigere zu ersetzen:

$$\begin{aligned}(2z-3)\log(z-2) - 2(4z-3)\log(z-1) + 12z\log z \\ - 2(4z+3)\log(z+1) + (2z+3)\log(z+2) = 0.\end{aligned}$$

Dort ist die linke Seite von der Ordnung z^{-3}, hier z^{-5}.

Mir scheint der beschriebene Weg nicht sachgemäß, das Ziel ist viel leichter zu erreichen. Zeuthen (Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert) weist darauf hin, daß Stevins Tafel zur Zinseszins-Rechnung (1585), welche die Potenzen von 0,99 enthielt, recht gut hätte als Logarithmen-Tafel gebraucht werden können. Sie ist elementar zu berechnen, erfordert keine Übergriffe auf limes $(n = \infty)$, gestattet auch den Übergang auf Briggische Logarithmen. Ihre Berechnung erfordert nicht ein Buch, sondern ein paar Seiten. Vgl. die Schlußbemerkung meines Programms von 1893: Zur Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht.

Einer Besprechung des vorliegenden Buches in der Naturwiss. Wochenschrift (Neue Folge, III) fügt A. Schmidt eine Methode elementarer Berechnung bei. Handelt es sich z. B. um log 7, so sucht er Potenzen von 7, die solchen von 10 möglichst nahe liegen. Um nicht lange planlos zu suchen, gestattet er sich, als „Leitfaden“ die heute bekannten Näherungswerte des Kettenbruchs für $\log 7 = 0{,}845$ zu benutzen, nämlich $\frac{1}{1}, \frac{5}{6}, \frac{11}{13}$. Er geht also davon aus, daß sich 7^6 nahe $= 10^5$, 7^{13} nahe $= 10^{11}$ ergeben muß. Es gelingt ihm aber *nicht,* das Gesetz zu entdecken, nach dem man von hier aus zu den genaueren Werten selbständig aufsteigen kann. Die Gleichung $7^6 = 10^5 \cdot \alpha$ zu potenzieren, wenn man schon weiß, daß $7^{13} = 10^{11} \cdot \beta$ ist, führt *nicht* zum Ziel. Das richtige Verfahren — ohne Leitfaden — hat schon 1717 der durch seine Reihe bekannte Brook Taylor entwickelt, es beruht auf der Wallisschen Methode zur Bestimmung von Näherungsbrüchen. M. Koppe.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

a. Aufgaben und Lehrsätze.

107. Wenn man durch alle Punkte P einer logarithmischen Spirale unter konstanter Neigung gegen diese Kurve gerade Linien zieht und auf jeder von P aus bis Q eine Strecke abträgt, die dem Bogen vom Spiralenpol bis P proportional ist, so liegen die Punkte Q auch auf einer logarithmischen Spirale. Sie ist der andern kongruent, hat denselben Pol wie jene und schneidet die Geraden in den Punkten Q auch unter konstantem Winkel.

Breslau. Peche.

108. Auf Grund des Eulerschen Kriteriums für quadratische Reste ist, wenn p, q zwei verschiedene (ungerade) Primzahlen bedeuten, $q^{\frac{p-1}{2}} - \left(\frac{q}{p}\right)$ durch p teilbar, ebenso $p^{\frac{q-1}{2}} - \left(\frac{p}{q}\right)$ durch q, mithin:

$$q^{\frac{p-1}{2}} - \left(\frac{q}{p}\right) = ap, \quad p^{\frac{q-1}{2}} - \left(\frac{p}{q}\right) = bq.$$

Man soll die Symbole $\left(\frac{a}{q}\right)$ und $\left(\frac{b}{p}\right)$ durch $\left(\frac{p}{q}\right)$ ausdrücken.

109. Die Wurzeln der als lösbar vorausgesetzten quadratischen Kongruenz $x^2 \equiv D \bmod \cdot p$, wo p eine Primzahl, und D nicht durch p teilbar, sind bekanntlich leicht angebbar, wenn $\frac{p-1}{2}$ ungerade, also p von einer der beiden Formen $8n+3$, $8n+7$ ist. Für ein gerades $\frac{p-1}{2}$ war bisher eine explizite Lösung meines Wissens nicht bekannt. Ist aber p von der Form $8n+5$, so läßt sich eine explizite Lösung gleichfalls angeben.

Nach dem Eulerschen Kriterium muß entweder $D^{\frac{p-1}{4}} \equiv +1 \bmod \cdot p$ sein, oder aber $D^{\frac{p-1}{4}} \equiv -1 \bmod \cdot p$. Im ersten Falle sind $\pm D^{\frac{p+3}{8}}$ die beiden Wurzeln der vorgelegten Kongruenz $x^2 \equiv D \bmod \cdot p$, im zweiten Falle sind es die Werte $\pm D^{\frac{p+3}{8}}\, 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{p-1}{2}$. Dies ist zu beweisen.

Königsberg i. P., Juli 1904. W. Fr. Meyer.

110. Die durch die Gleichung

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

gegebenen vier festen Lagen des veränderlichen Punktes

$$x_1 : x_2 = x_2 : x_3 = \lambda$$

sind die Ecken eines Kreisviereckes. Durch welche Gleichungen sind die Gegenseiten desselben bestimmt?

Holzminden. G. Kober.

B. Lösungen.

Zu **21** (Bd. I, 371) (W. F. Meyer). — Die zuletzt aufgestellte allgemeine Relation der s_i, welche übrigens im letzten Glied offenbar einen Druckfehler enthält, indem dies $(2l-1)n^{2l}s_1$, statt $(2l+1)n^{2l}s_1$, heißen muß, ist leicht abzuleiten. Es ist

$$(x-a_i)^m = x^m - \binom{m}{1}x^{m-1}a_i^1 + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{1}x^1a_i^{m-1} + (-1)^m a_i^m$$

Summiert man hier beide Seiten für $i = 1, 2, \ldots, \varphi(n)$, so erhält man:

$$(x-a_1)^m + (x-a_2)^m + \cdots + (x-a_{\varphi(n)})^m$$
$$= x^m\varphi(n) - \binom{m}{1}x^{m-1}s_1 + - \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{1}x^1s_{m-1} + (-1)^m s_m.$$

Setzt man hier $m = 2l+1$ und $x = n$, so folgt, wenn alles auf die linke Seite transportiert wird:

$$2s_{2l+1} - \binom{2l+1}{1}n^1s_{2l} + \binom{2l+1}{2}n^2s_{2l-1} - + \cdots$$
$$- \binom{2l+1}{2}n^{2l-1}s_2 + \binom{2l+1}{1}n^{2l}s_1 - n^{2l+1}\varphi(n) = 0.$$

Da nun $\varphi(n) = \frac{2s_1}{n}$, so wird aus den beiden letzten Gliedern

$$\binom{2l+1}{1}n^{2l}s_1 - n^{2l+1}\varphi(n) = (2l-1)s_1.$$

Damit ist die allgemeine Relation bewiesen. Es ist zu bemerken, daß dieselbe Relation für die Potenzsumme s_i auch andrer Zahlen zwischen 1 und n gilt, vorausgesetzt, daß diese Zahlen zwischen 1 und n symmetrisch gelegen und in bekannter Anzahl vorhanden sind, z. B. gilt die gleiche Relation für die Potenzsummen der natürlichen Zahlen von 1 bis n.

Erweiteruugen der Formel über n hinaus sind leicht.

Die Formel

$$6s_2 = n\Pi'\left(\frac{2n^2}{\Pi} + (-1)^k\right)$$

erhält man, wenn man aus den Quadraten von 1 bis n^2 alle diejenigen ausschaltet, die mit n einen Faktor gemeinsam haben. Daher wird, wie leicht zu sehen:

$$6s_2 = n(n+1)(2n+1) - \sum_{i=1}^{k} \frac{n(n+p_i)(2n+p_i)}{p_i} + \sum_{i_1<i_2=1}^{k} \frac{n(n+p_{i_1}p_{i_2})(2n+p_{i_1}p_{i_2})}{p_{i_1}p_{i_2}}$$

$$- + \cdots + (-1)^k \frac{n(n+p_1p_2\ldots p_k)(2n+p_1p_2\ldots p_k)}{p_1p_2\ldots p_k}$$

$$= 2n^3\Big(1 - \sum \frac{1}{p_i} + \sum \frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}} - + \cdots + (-1)^k \frac{1}{p_1p_2\ldots p_k}\Big)$$

$$+ 3n^2\Big(1 - \sum_1^k 1 + \sum_1^{\frac{k(k-1)}{2}} 1 - + \cdots + (-1)^k\Big)$$

$$+ n\big(1 - \sum p_i + \sum p_{i_1}p_{i_2} - + \cdots + (-1)^k p_1p_2\ldots p_k\big)$$

$$= 2n^3\frac{\Pi'}{\Pi} + (-1)^k n\Pi' = n\Pi'\Big(\frac{2n^2}{\Pi} + (-1)^k\Big).$$

s_3 läßt sich ebenso leicht ableiten, folgt aber aus der allgemeinen Formel für $l = 1$, aus welcher dann wird:

$$2s_3 - 3ns_2 + n^2 s_1 = 0.$$

In der vorliegenden Gestalt leistet aber die allgemeine Reduktionsformel wenig, da, um s_{2i+1} kennen zu lernen, stets alle s mit niedrigerem Index bekannt sein müssen, insbesondere auch die mit geradem Index, für welche aber die Formel keine Werte gibt.

Doch läßt sich leicht eine Formel zur *independenten* Berechnung aufstellen.

Bezeichnen wir mit $s_m(n)$ die Summe aller $m$ten Potenzen von 1^m bis n^m, so ist:

$$s_m = s_m(n) - \sum_i p_i^m s_m\Big(\frac{n}{p_i}\Big) + \sum_{i_1, i_2} p_{i_1}^m p_{i_2}^m s_m\Big(\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}}\Big) - + \cdots$$

Hier lassen sich aber die $s_m(k)$ independent durch die bekannten Ausdrücke

$$s_m^{(n)} = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \tfrac{1}{2}n^m + \tfrac{1}{2}B_1 m n^{m-1} - \tfrac{1}{4}B_3\binom{m}{3}n^{m-3} + \tfrac{1}{6}B_5\binom{m}{5}n^{m-5} - + \cdots$$

ersetzen, die

bei geradem m mit $(-1)^{\frac{m-2}{2}} n \frac{B_{m-1}}{m}\binom{m}{m-1} = (-1)^{\frac{m-2}{2}} B_{m-1} n$,

bei ungeradem m mit $(-1)^{\frac{m-3}{2}} n^2 \frac{B_{m-2}}{m-1}\binom{m}{m-2} = (-1)^{\frac{m-3}{2}} \frac{m}{2} B_{m-2} n^2$

endigen.

Dies ergibt

$$s_m = \frac{n^{m+1}}{m+1}\Big(1 - \sum_i \frac{1}{p_i} + \sum_{i_1, i_2} \frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}} - + \cdots\Big)$$

$$+ \tfrac{1}{2}n^m\Big(1 - \sum_i 1 + \sum_{i_1, i_2} 1 - + \cdots\Big)$$

$$+ \tfrac{1}{2}B_1 m n^{m-1}\Big(1 - \sum_i p_i + \sum_{i_1, i_2} p_{i_1}p_{i_2} - + \cdots\Big)$$

$$- \tfrac{1}{4}B_3\binom{m}{3}n^{m-3}\Big(1 - \sum_i p_i^3 + \sum_{i_1, i_2} p_{i_1}^3 p_{i_2}^3 - + \cdots\Big) + \cdots$$

Bezeichnen wir nun:

$$\Pi'_\lambda = \prod_1^k (p_i^\lambda - 1) \quad \text{und} \quad \Pi_\lambda = \prod_1^k p_i^\lambda$$

so daß also Π'_1 und Π_1 mit Π' und Π der Aufgabe identisch ist, so folgt

$$s_m = \frac{n^{m+1}}{m+1}\frac{\Pi'_1}{\Pi} + (-1)^k\Big\{\tfrac{1}{2}B_1 m n^{m-1}\Pi'_1 - \tfrac{1}{4}B_3\binom{m}{3}n^{m-3}\Pi'_3$$
$$+ \tfrac{1}{6}B_5\binom{m}{5}n^{m-5}\Pi'_5 - \tfrac{1}{8}B_7\binom{m}{7}n^{m-7}\Pi'_7 + - \cdots\Big\}$$

Hier sind die B die Bernoullischen Zahlen, also $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_3 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{1}{42}, \cdots$ Daraus folgt:

$$s_1 = \frac{n^2}{2}\frac{\Pi'}{\Pi} = \frac{n\varphi(n)}{2},$$
$$s_2 = \frac{n^3}{3}\frac{\Pi'}{\Pi} + (-1)^k\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}n\Pi' = \frac{n\Pi'}{6}\left(\frac{2n^2}{\Pi} + (-1)^k\right),$$
$$s_3 = \frac{n^4}{4}\frac{\Pi'}{\Pi} + (-1)^k\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot 3n^2\Pi' = \frac{n^2}{4}\Pi'\left(\frac{n^2}{\Pi} + (-1)^k\right),$$
$$s_4 = \frac{n^5}{5}\frac{\Pi'_1}{\Pi_1} + (-1)^k\{\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot 4n^3\Pi'_1 - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{30}\cdot 4\cdot n^1\Pi'_3\},$$
$$= \frac{n}{30}\left\{\frac{6n^4\Pi'_1}{\Pi_1} + (-1)^k 10n^2\Pi'_1 + (-1)^{k-1}\Pi'_3\right\} \text{ etc.}$$

Berlin. A. Fleck.

Zu 88 (Bd. VI, 174) (G. Kober). — Es gilt der leicht zu beweisende Satz: „In einem Sehnenviereck stehen die Halbierungslinien der Gegenseitenpaare auf einander senkrecht und sind den Halbierungslinien der Diagonalenwinkel parallel". Es sei nun $ABCD$ ein Sehnenviereck; AB und CD schneiden sich in E, BC und DA in F, AC und BD in G. Nach obigem Satze sind die Halbierungslinien der Winkel BEC und BGC parallel; der durch A zu diesen Halbierungslinien parallel gelegte Strahl sei s_a. Desgleichen sind die Halbierungslinien der Winkel AFB und AGB parallel; der durch A zu ihnen parallel gelegte Strahl sei s'_a. Dann ist $\sphericalangle(s_a, s'_a) = 90^0$. Durch die Punkte B, C, D lege man die Strahlen $s_b, s_c, s_d \parallel s_a$ und $s'_b, s'_c, s'_d \parallel s'_a$. Sodann nehme man die Punkte A und C als Mittelpunkte zweier kongruenter gegenläufiger Strahlenbüschel, in denen s_a und s_c das eine Paar entsprechender paralleler Strahlen sind; s'_a und s'_c sind dann das andere Paar. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen dieser beiden Büschel liegen bekanntlich auf derjenigen gleichseitigen Hyperbel, die durch A und C geht, deren Mittelpunkt die Mitte von AC ist und deren Asymptoten parallel zu s_a und s'_a sind. Diese Hyperbel geht auch durch E und F; denn es ist $\sphericalangle(s_a, AE) = -(s_c, CE)$ und $\sphericalangle(s'_a, AF) = -(s'_c, CF)$, worin das negative Vorzeichen die Gegenläufigkeit der Strahlen anzeigt. Bezeichnet man den zu BD senkrechten Durchmesser des Kreises $ABCD$ mit HJ, so ist Bogen $BH = HD$ und Bogen $BJ = JD$; mithin $\sphericalangle(AF, AH) = -(CF, CH)$ und $\sphericalangle(AF, AJ) = -(CF, CJ)$. Damit ist bewiesen, daß die gleichseitige Hyperbel $ACEF$ den Kreis $ABCD$ in den Punkten H und J schneidet.

Nimmt man B und D als Büschelpunkte, s_b und s_d als entsprechende Strahlen, so ergibt sich auf gleiche Weise, daß die Punkte B, D, E, F auf derjenigen gleichseitigen Hyperbel liegen, in der BE ein Durchmesser ist und deren Asymptoten zu s_b und s_d parallel sind, und daß diese Hyperbel den Kreis $ABCD$ in den Endpunkten K, L desjenigen Durchmessers schneidet, der zu AC senkrecht ist. Die beiden gleichseitigen Hyperbeln $ACEF$ und $BDEF$ schneiden einander in E und F, außerdem, weil die Asymptoten paarweise parallel sind, in ihren unendlich entfernten Punkten, die mit den unendlich entfernten Punkten der Halbierungslinien der Diagonalenwinkel identisch sind.

Die Punkte A, B, C, D bestimmen noch zwei andere Sehnenvierecke $ACBD$ und $ABDC$. Auf diese lassen sich die vorigen Entwicklungen ebenfalls anwenden; man hat nur das eine Mal B mit C zu vertauschen und G statt E zu setzen, das andere Mal C mit D zu vertauschen und G statt F zu setzen. Die beiden Kreisdurchmesser HJ und KL stehen das eine Mal auf CD und AB, das andere Mal auf BC und AD senkrecht.

Hieraus folgt: Durch jedes Sehnenviereck $ABCD$ sind sechs gleichseitige Hyperbeln bestimmt, die sämtlich die unendlich entfernten Punkte gemeinsam haben, weil ihre Asymptoten den Halbierungslinien der Diagonalenwinkel und der Winkel der Gegenseitenpaare parallel sind. Jede dieser Hyperbeln schneidet den durch die Punkte A, B, C, D gehenden Kreis außer in zweien dieser Punkte noch in den Endpunkten eines Durchmessers, der zu einer Diagonale oder Seite senkrecht ist. Die sechs Hyperbeln sind: $ACEF$, $BDEF$, $BCEG$, $ADEG$, $ABFG$, $CDFG$.

Prenzlau. STEGEMANN.

Zu **97.** (Bd. VI, S. 340) (E. Cesàro) III. — Zunächst werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, daß die Kurve $\varrho = \varrho(s)$, $r = r(s)$ einer Fläche angehört, die durch Drehung einer Kardioide um ihre Achse entstanden ist. Die vorkommenden Richtungskosinus und Koordinaten sind auf das ausgezeichnete Achsentrieder im beweglichen Punkte M der Kurve (ϱ, r, s) bezogen. Die Größe s ist unabhängige Veränderliche, nach der alle auftretenden Ableitungen genommen sind.

Man fälle von M auf eine feste Gerade g mit den Richtungskosinus α, β, γ das Lot MA. Bezeichnet man die Koordinaten von A mit x, y, z, so hat ein von A um die Strecke t entfernter Punkt O der Geraden g die Koordinaten $x - \alpha t$, $y - \beta t$, $z - \gamma t$. Die Lage der Geraden sei nun bestimmt durch die Kosinus der *festen* Richtung α, β, γ und die Koordinaten des *festen* Punktes O. Dann muß sein

$$(1)\qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\gamma}{\varrho}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\gamma}{r}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = -\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\beta}{r};$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

ferner

$$(2)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d(x-\alpha t)}{ds} = \dfrac{z-\gamma t}{\varrho} - 1, \quad \dfrac{d(y-\beta t)}{ds} = \dfrac{z-\gamma t}{r}, \\ \dfrac{d(z-\gamma t)}{ds} = -\dfrac{x-\alpha t}{\varrho} - \dfrac{y-\beta t}{r}. \end{cases}$$

Durch Drehung der Kurve (ϱ, r, s) um die Gerade g soll eine Rotationsfläche entstehen, deren Meridiane Kardioiden mit der Achse g und der Spitze O sind. Deshalb hat man noch, falls $MO = p$ gesetzt wird, die folgenden beiden Gleichungen zu befriedigen

$$(4)\qquad 2at = p(p-2a),$$

$$(5)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = p^2 - t^2.$$

Das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen (1) bis (5) ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Kurve (ϱ, r, s) auf einer Fläche der bezeichneten Art liegt.

Aus (3) ergibt sich unter Berücksichtigung von (1)

$$x' = \frac{z}{\varrho} - 1 + \alpha t', \quad y' = \frac{z}{r} + \beta t', \quad z' = -\frac{x}{\varrho} - \frac{y}{r} + \gamma t',$$

dann mit Hilfe dieser Relationen und der Beziehungen (1) und (4) durch Differentiation von (2)

$$\alpha = t', \quad \alpha a = p'(p-a)$$

und darauf aus der ersten Gleichung von (1)

$$\gamma a = \varrho[p'^2 + p''(p-a)].$$

Die Ableitungen beider Seiten von (5) sind gleich. Darum erhält man, wenn die bisherigen Ergebnisse benutzt werden,

$$2xa^2 = p^2p'(p-3a),$$

und durch Anwendung der Differentiation auf diese Gleichung findet man

$$2za^2 = \varrho[2a^2 + p'^2(p^2 - 2ap - 2a^2) + p^2p''(p-3a)].$$

Es seien nun die Größen ξ, η und ε in folgender Weise erklärt:

$$\xi = \gamma y - \beta z, \quad \eta = \alpha z - \gamma x,$$
$$\varepsilon = 1 - p'^2.$$

Dann ist

$$\eta a = -\varrho p(a\varepsilon - p).$$

Die Identitäten

$$\xi^2 = (1-\alpha^2)q^2 - x^2, \quad \xi^2 + \eta^2 = z^2 + \gamma^2 q^2$$

führen zu den Relationen

$$4\xi^2 a^2 = p^3(4a\varepsilon - p),$$

$$(\mathrm{I})\qquad 4\varrho^2[a^2\varepsilon^3 + p^2p''(p - 3a\varepsilon + app'')] = p^3(4a\varepsilon - p).$$

Für den behandelten Fall ist

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{z}{\gamma}\right) = \frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{\eta}{\varrho} - \frac{\xi}{r}\right) + \alpha.$$

Man bilde die Ableitung von

$$\frac{z}{\gamma} = \frac{a(1 - ap'')}{p'^2 + p''(p - a)} + \frac{p^2}{2a} - p - a$$

nach s und setze den erhaltenen Ausdruck, ebenso die für α, γ, ξ, η gefundenen in die vorher aufgestellte Gleichung ein. Das Resultat dieser Umformungen wird

$$\text{(II)} \qquad 2r[\varrho^2 \cdot \varkappa - p'(a\varepsilon - p)] = \pm\sqrt{p^3(4a\varepsilon - p)},$$

wenn

$$\varkappa = 3p'p''(1 - ap'') - p'''(a\varepsilon - p)$$

ist.

Wir wählen jetzt

$$c(1 - p'^2) = p.$$

Bei geeigneter Verfügung über die Lage des Punktes $s = 0$ erhalten wir hiernach

$$p = c - \frac{s^2}{4c}.$$

Die Gleichungen (I) und (II) gehen dann über in

$$\text{(Ia)} \qquad s^2 + \varrho^2 \cdot \frac{4(a + 2c)}{c} = 4c^2,$$

$$\text{(IIa)} \qquad rs = \pm \varrho^2 \cdot \frac{4(a + 2c)}{\sqrt{c(4a - c)}}.$$

Es ist nachzuweisen, daß die Kurve (Ia, IIa) einer Rotationsfläche der oben bezeichneten Art angehört. Die Größen ϱ, r, α, γ, x, z, t sind für diese Kurve als Funktionen von s bestimmt, y und β können aus (5) und (2) erhalten werden. Alle Gleichungen (1) bis (5) werden befriedigt, wenn man für ϱ, r, α, β, γ, x, y, z, t die entsprechenden Funktionen von s einsetzt. Der gewünschte Beweis kann also erbracht werden. Er gilt auch, wenn

$$\text{(Ib)} \qquad s^2 + \frac{9\varrho^2}{\cos^2\lambda} = \text{const.},$$

$$\text{(IIb)} \qquad rs = \pm \frac{6\varrho^2}{\sin 2\lambda}$$

ist, da der Übergang von (Ia, IIa) zu (Ib, IIb) durch die Substitution

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{a + 2c}} = \cos\lambda$$

vermittelt wird.

Die Meridiane sind die Kurven, deren Tangenten, die Asymptotenlinien die Kurven, deren Binormalen von der Rotationsachse den Abstand Null haben.

Die analytische Bestimmung der Meridiane erfolgt demnach mittels einer der Relationen

$$\xi = 0, \quad 4a(1 - p'^2) = p,$$
$$c = 4a, \quad \lambda = 0.$$

In entsprechender Weise liefert jede der Gleichungen

$$\eta = 0, \quad a(1 - p'^2) = p,$$
$$c = a, \quad \lambda = 30^0$$

die Asymptotenlinien der Fläche.

Ich weise noch zum Schluß hin auf E. Cesàro: Per l'analisi intrinseca delle superficie rotonde, Rend. della R. Accad. delle Scienze Fis. e Matem. di Napoli, Aprile 1903.

Breslau. M. PECHE.

Zu **101** (Bd. VII, 262) (Louis Saalschütz). — Der Satz lautet genauer: *Ist $p = 4n + 1$ eine Primzahl und z quadratischer Rest (Nichtrest) von p, so ist auch $p - z$ quadratischer Rest (Nichtrest) von p. Ist $p = 4n + 3$ eine Primzahl und z quadratischer Rest von p, so ist $p - z$ quadrischer Nichtrest, ist z Nichtrest, so ist $p - z$ Rest.*

1. Für jede Primzahl $p > 2$ gibt es $\frac{p-1}{2}$ quadratische Reste, $\frac{p-1}{2}$ quadratische Nichtreste. Die durch p teilbaren Zahlen kommen hierbei nicht in Rechnung.

2. Das Produkt zweier Reste ist ein Rest, das Produkt aus Rest und Nichtrest ist ein Nichtrest.

Zum Beweise des Satzes ist also nur zu zeigen: Für eine Primzahl der Form $4n + 1$ ist -1 Rest, für eine Primzahl der Form $4n + 3$ ist -1 Nichtrest.

3. Es ist $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ (Wilsonscher Satz).

4. Die Kongruenz $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ *hat* eine Lösung oder keine. Hat sie *eine* Lösung $x = \xi$, so hat sie auch die *zweite* Lösung $x = -\xi$ und weiter keine. Die andern $p - 1$ Zahlen $1, 2, \cdots, \xi - 1, \xi + 1, \cdots, p - \xi - 1, p - \xi + 1, \cdots, p - 1$ lassen sich dann so paaren, daß jedes Paar die Kongruenz $xy \equiv -1 \; (\mathrm{mod} \cdot p)$ befriedigt und $\xi(p - \xi) \equiv -\xi^2 \equiv +1 \pmod{p}$. In diesem Falle ist also

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-3}{2}}.$$

Dies muß nach § 3 $\equiv -1$ sein, also p von der Form $4n + 1$. Hat aber die Kongruenz $x^2 \equiv -1$ *keine* Lösung, so lassen sich *alle* $p - 1$ Zahlen $1, 2, \cdots, p - 1$ so zu Paaren x, y vereinigen, daß $xy \equiv -1 \; (\mathrm{mod} \cdot p)$ ist. Dann wird

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}};$$

also muß in diesem Falle nach Wilson p die Form $4n + 3$ haben.

5. -1 ist also quadratischer Rest aller Primzahlen der Form $4n + 1$, Nichtrest aller Primzahlen der Form $4n + 3$. Ist also z ein Rest, so ist für $p = 4n + 1 - z$, folglich auch $p - z$ quadratischer Rest, im Falle $p = 4n + 3$ ist dann aber $-z$, sowie $p - z$ quadratischer Nichtrest.

6. Ordnet man also im Falle $p = 4n + 1$ die quadratischen Reste der Größe nach und bezeichnet den ν-ten Rest mit R_ν, setzt $\frac{p-1}{2} = \pi$, so ist stets

$R_\nu + R_{\pi-\nu} = p$ und für die Nichtreste N_ν gilt gleichfalls $N_\nu + N_{\pi-\nu} = p$. Setzt man noch $R_{\nu+1} - R_\nu = d_\nu$, $N_{\nu+1} - N_\nu = \delta_\nu$, so ergibt sich ferner sofort: $d_\nu = d_{\pi-\nu-1}$, $\delta_\nu = \delta_{\pi-\nu-1}$; die Differenzen bilden also je eine zur Mitte symmetrische Reihe.

Im Falle $p = 4n + 3$ bildet man die Reihe $R_1, R_2, \cdots, R_\pi, N_1, N_2, \cdots, N_\pi$, wo $R_{\nu+1} > R_\nu$, $N_{\nu+1} > N_\nu$. Dann ist $R_\nu + N_{\pi-\nu} = p$, und die Differenzreihe ist auch zur Mitte symmetrisch.

Potsdam, am 9. Juni 1904. Otto Meissner.

2. Anfragen und Antworten.

(Vacat.)

3. Kleinere Notizen.

Bemerkung über eine zahlentheoretische Funktion.

Ist die positive ganze Zahl z in ihre Primfaktoren zerlegt:

$$z = 2^m p_1^{m_1} \ldots p_n^{m_n} \tag{1}$$

und setzt man:

$$P_2 = \tfrac{1}{2}\left\{\prod_{\nu=1}^{n}(2m_\nu + 1) - 1\right\}, \tag{2}$$

$$P = P_2 + \frac{m-1}{\left[1 + \frac{1}{m}\right]}(2P_2 + 1), \tag{3}$$

wo $[a]$ die größte ganze Zahl $\leq a$ bedeutet, so ist

P die Anzahl der modulo $2\pi i$ inkongruenten Argumente φ, für die $z\cosh\varphi$ und $z\sinh\varphi$ zugleich positive ganze Zahlen sind,

$4P + 2$ die Anzahl der Punkte mit ganzzahligen (nicht ∞ großen) Koordinaten, die auf der gleichseitigen Hyperbel $\left(\frac{x}{z}\right)^2 - \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$ liegen,

P die Anzahl der ganze Zahlen zu Seiten habenden *Pythagoreischen* Dreiecke, in denen z eine Kathete ist,

$P + 1$ die Anzahl der positiven ganzzahligen Lösungen der *Diophantischen* Gleichung $x^2 - y^2 = z^2$, worin z bestimmt ist, x und y unbestimmt sind,

P_2 die Zahl der Arten, auf die sich z in die Faktoren $(r + s)(r - s)t$ zerlegen läßt, $P - P_2$ die Zahl der Arten, auf die sich z in der Form $2rst$ darstellen läßt, wenn r und s teilerfremd, $r + s \equiv 1 \pmod{2}$ ist.

Der Beweis kann erbracht werden, indem man sich die Zerlegungen vorgenommen denkt und ihre Anzahl bestimmt.

Potsdam, den 17. März 1904. Otto Meissner.

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

(Vacat.)

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. 18. Heft. J. L. Heiberg: Mathematisches zu Aristoteles. — C. H. Müller: Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. — R. Lindt: Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, seine Beweise und die Unmöglichkeit seiner Umkehrung bei Verwendung des Begriffes „Gleichgewicht eines Massensystems". Leipzig 1904, B. G. Teubner.

Ahrens, W., Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 522 S.

Bardey-Seyffarth, Sammlung von Aufgaben aus der Elementar-Arithmetik für Lehrerseminare. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 300 S.

Block, C., Lehr- und Übungsbuch für den planimetrischen Unterricht an höheren Schulen. Erster Teil: Quarta. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 70 S.

Burkhardt, H., Entwicklungen nach oscillierenden Functionen. 4. Heft. Leipzig 1904, B. G. Teubner. S. 469—1072.

Cesàro, Ernesto, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript des Verfassers deutsch herausgegeben von Gerhard Kowalewski. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 894 S.

Fouët, E., Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. II. Théorèmes d'existence. — Etude des fonctions analytiques au point de vue de Cauchy, de Weierstrass, de Riemann. 299 S. Paris 1904. Gauthier-Villars.

Frick, J., Physikalische Technik oder Anleitung zu Experimentalvorträgen sowie zur Selbstherstellung einfacher Demonstrationsapparate. Siebente vollkommen umgearbeitete und stark vermehrte Auflage von Otto Lehmann. In zwei Bänden. Erster Band, erste Abteilung. Braunschweig 1904, F. Vieweg u. Sohn. 630 S. ℳ 16.

Hauber, W., Statik II. Angewandte (techn.) Statik. Sammlung Göschen Nr. 179. 148 S. ℳ 0,80.

Holzmüller, G., Vorbereitende Einführung in die Raumlehre. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 123 S.

Kleiber-Scheffler, Elementarphysik mit Chemie für die Unterstufe. München 1904, R. Oldenbourg. 223 S. ℳ 2,50.

Klein, F., Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 82 S.

Kübler, J., Woher kommen die Weltgesetze? 30 S. Leipzig 1904, B. G. Teubner.

Lorenz H., Lehrbuch der technischen Physik. Zweiter Band: Technische Wärmelehre. München 1904, R. Oldenbourg. 544 S. ℳ 13.

Perry, J., Drehkreisel. Deutsch von A. Walzel. Volkstümlicher Vortrag gehalten in einer Versammlung der „British Association" in Leeds. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 125 S.

Rohrbach, C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Vierte Auflage. Gotha 1904, Thienemann. 36 S. ℳ 0,80.

Scheiner, J., Der Bau des Weltalls. Zweite Auflage. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 24. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 144 S.

Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Zweite Auflage von G. Bohlmann und E. Zermelo. Dritter Band. Zweite (Schluß-) Lieferung. Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Leipzig 1904, B. G. Teubner.

Stolz, Otto und Gmeiner, J. Anton, Einleitung in die Functionentheorie. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. In 2 Abteilungen. I. Abteilung. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 242 S.

Sylvester, J. J. Mathematical papers. Vol. I (1837—1853). London 1904, C. J. Clay and Sons.

Vivanti, G., Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations professées à l'université de Messine. Traduites par A. Boulanger. Paris 1904, Gauthier-Villars. 296 S.

Weber, L., Wind und Wetter. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 55. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 130 S.

Über die Lehrsätze Castiglianos.

Von J. Weingarten in Freiburg i. B.

Es ist das bleibende Verdienst des italienischen Ingenieurs Castigliano, zuerst der Deformationsarbeit in der Theorie der Elastizität fester Körper eine ähnliche Stellung angewiesen zu haben, wie die, welche das Potential in anderen physikalischen Theorien seit lange einnahm. Dieses Verdienst seines Werkes „Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques" wird dadurch nicht geschmälert, daß die von ihm seiner Theorie vorangestellten *Lehrsätze* inkorrekt sind und eines präzisen Sinnes entbehren. Es ist vielmehr zu bewundern, daß Castigliano mit diesen defekten und unzulänglichen Mitteln eine Reihe schöner und in der Anwendung verwertbarer Resultate zu Tage gefördert hat. Aber in weniger geschickten Händen, als in denen des genialen italienischen Ingenieurs, erweist sich der Gebrauch dieser Mittel eher als gefährlich, denn als nützlich. Es scheint uns daher nicht unangemessen, diejenigen Lehrsätze, die Castigliano als Ausgangspunkte seiner Entwicklungen hinstellt, in Beziehung auf ihren Inhalt und Sinn eingehender zu besprechen. Wir werden uns bei dieser Besprechung den Ausführungen anschließen, die wir in der III. Reihe dieses Archivs (2, 234 u. f.) gegeben haben.

Bezeichnen, wie dort, X, Y, Z die Komponenten der in einem Punkt (x, y, z) eines elastischen festen Körpers angreifenden äußeren Kraft, und ist das System aller äußeren Kräfte am Körper im Gleichgewicht, so wird die zur Herbeiführung des Gleichgewichts (aus neutralem Zustand) erforderliche Deformationsarbeit D durch die Gleichung

$$(1) \qquad D = \tfrac{1}{2}\sum(Xu + Yv + Zw)$$

gegeben, in welcher u, v, w die Komponenten der elastischen Verschiebung des Punktes (x, y, z) angeben, während die Summe über sämtliche durch äußere Kräfte angegriffenen Punkte zu erstrecken ist.

Denkt man den nämlichen Körper gleichzeitig einem zweiten System Gleichgewicht haltender äußerer Kräfte von den Komponenten X', Y', Z' unterworfen, und bezeichnen u', v', w' die diesem System entsprechenden Verschiebungskomponenten eines Punktes (x, y, z), so gibt die Gleichung

$$D' = \tfrac{1}{2}\sum(X'u' + Y'v' + Z'w')$$

die Deformationsarbeit, welche der Herbeiführung des diesem System entsprechenden Gleichgewichtszustands entspricht.

Diejenige Deformationsarbeit D'' aber, welche zur Herstellung des Gleichgewichts vermöge des *gemeinsamen* Angriffs beider Kräftesysteme erfordert wird, ergibt sich durch die Gleichung

$$D'' = D + C + D', \tag{2}$$

in welcher die Größe C einer der gleichwertigen Bestimmungen

$$C = \sum(Xu' + Yv' + Zw')$$

oder

$$C = \sum(X'u + Y'v + Z'w)$$

entnommen werden kann. Wir wollen in der Folge die *letztere* Bestimmung wählen.

Alsdann besteht die Gleichung:

$$D'' - D = \sum(X'u + Y'v + Z'w) + D'. \tag{3}$$

Wir haben bisher von den Größen u, v, w als von den Verschiebungskomponenten des Körperpunktes (x, y, z) gesprochen, die bei der Herstellung des Gleichgewichts durch das Kräftesystem X, Y, Z erfordert werden. Diese Sprachweise könnte zu der Auffassung Veranlassung geben, daß ein und *nur* ein System solcher Verschiebungen möglich sei. Um diese Auffassung zu vermeiden, fügen wir besonders hinzu, daß, wenn *ein* bestimmtes System solcher Komponenten zum Gleichgewicht des Kräftesystems X, Y, Z führt, auch das andere Verschiebungssystem mit den Komponenten:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{u} &= u + a + qz - ry, \\ \mathfrak{v} &= v + b + rz - pz, \\ \mathfrak{w} &= w + c + py - qx, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

in welchem a, b, c, p, q und r sechs *willkürliche* Konstanten (von der Kleinheit elastischer Verschiebungen) angeben, Gleichgewicht herbeiführen würde.

Denn die den Komponenten u, v, w hinzugefügten Zusatzkomponenten entsprechen einer unendlich kleinen Gesamtverschiebung des elastischen Körpers als starr bleibenden, die keine elastischen Kräfte hervorruft, also das Gleichgewicht der elastischen Kräfte mit den äußeren nicht stört.

Man ist daher berechtigt, in allen oben gegebenen Formeln anstatt der Größen u, v, w die Größen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ zu benutzen, ohne daß dieselben ihre Gültigkeit verlieren. Wir ersetzen daher die Gleichungen (1) und (2) durch die nachstehenden

$$D = \tfrac{1}{2}\sum(X\mathfrak{u} + Y\mathfrak{v} + Z\mathfrak{w}), \tag{1*}$$

$$D'' - D = \sum(X'\mathfrak{u} + Y'\mathfrak{v} + Z'w) + D'. \tag{2*}$$

Man überzeugt sich (nebenbei bemerkt) von ihrem Bestehen leicht, wenn man nach Einsetzen der durch (4) gegebenen Werte der $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ nach den Konstanten a, b, c, p, q, r ordnet und bemerkt, daß die Koeffizienten dieser Konstanten in Folge des vorausgesetzten Gleichgewichts der gesamten Kräfte XYZ, $X'Y'Z'$ identisch verschwinden. Wir wollen für das Weitere annehmen, daß für die Kräftesysteme XYZ und $X'Y'Z'$ nicht diese Komponenten selbst, sondern in jedem Punkte des Körpers die äußere Kraft P und ihre Richtungswinkel α, β, γ gegeben seien. Man hat alsdann die Bestimmungen:

$$X = P\cos\alpha, \quad Y = P\cos\beta, \quad Z = P\cos\gamma.$$

In Beziehung auf das zweite System $X'Y'Z'$ wollen wir festsetzen, daß die Richtungswinkel der Kraft P' dieselben seien wie diejenigen der Kraft P, also mit α, β, γ übereinstimmen. Die Kraft P' selbst soll unendlich klein angenommen werden und durch δP bezeichnet werden, derart, daß die Bestimmungen

$$X' = \delta P\cos\alpha, \quad Y' = \delta P\cos\beta, \quad Z' = \delta P\cos\gamma$$

zur Geltung gelangen. Alsdann verwandeln sich die Gleichungen (1*), (2*), in die nachstehenden:

$$D = \tfrac{1}{2}\sum P(\mathfrak{u}\cos\alpha + \mathfrak{v}\cos\beta + \mathfrak{w}\cos\gamma),$$

$$D'' - D = \sum\delta P(\mathfrak{u}\cos\alpha + \mathfrak{v}\cos\beta + \mathfrak{w}\cos\gamma) + D'.$$

Bezeichnet man noch die den Komponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ entsprechende Gesamtverschiebung des Punktes (x, y, z) durch $\mathfrak{s}$, den Winkel dieser Verschiebung mit der Richtung der Kraft P durch $\mathfrak{t}$, so entstehen die Gleichungen:

$$D = \tfrac{1}{2}\sum P\mathfrak{s}\cos\mathfrak{t},$$

$$D'' - D = \sum\mathfrak{s}\cos\mathfrak{t}\cdot\delta P + D'.$$

Führt man endlich mit Castigliano für das Produkt $\mathfrak{s}\cos\mathfrak{t}$ die Bezeichnung „relative Verschiebung des Angriffspunkts der Kraft P“ ein, und bezeichnet dasselbe durch $\mathfrak{r}$, so ergeben sich schließlich:

$$D = \tfrac{1}{2}\sum P\mathfrak{r},$$

$$D'' - D = \sum\mathfrak{r}\delta P + D'.$$

Die Größe D' als Deformationsarbeit für die Herbeiführung des Gleichgewichts des Systems unendlich kleiner Kräfte δP ist unendlich klein von der zweiten Ordnung. Die Differenz der Deformationsarbeiten D'' und D oder derjenigen, welche einerseits für das Gleichgewicht der Kräfte $P + \delta P$, andererseits für das Gleichgewicht der Kräfte P erforderlich werden, welche Differenz wir als Differential der Deformationsarbeit D bei einer Änderung jeder einzelnen Kraft P um δP bezeichnen wollen, ergibt sich als:

$$\delta D = \sum \mathfrak{r}\, \delta P. \tag{A}$$

Die Formel stimmt überein mit der von Castigliano zum Ausgangspunkte der Entwickelung seiner Lehrsätze von den Differentialquotienten der Deformationsarbeit, bis auf den Umstand, daß er die einzelnen Körperpunkte durch Indices von einander unterscheidet. Indem wir uns dieser Unterscheidung anschließen, geben wir der Gleichung (A) die Form

$$\delta D = \sum \mathfrak{r}_i\, \delta P_i, \tag{A}$$

in welcher der Index i alle Werte von 1 bis n zu durchlaufen hat, wenn n die Anzahl der durch äußere Kräfte P_i angegriffenen Körperpunkte bezeichnet.

Castigliano setzt nunmehr voraus, daß die Deformationsarbeit D, die mit dem gegebenen Kräftesystem bestimmt sein muß, als eine Funktion der äußeren Kräfte P_i dargestellt wäre. Alsdann würde das Differential von D sich auch ausdrücken lassen durch die Formel:

$$\delta D = \sum \frac{\partial D}{\partial P_i} \delta P_i. \tag{B}$$

Castigliano zieht aber aus dieser zweifachen Darstellung des Differentials δD den *falschen* Schluß, daß die Koeffizienten der Differentiale δP_i in beiden Darstellungen dieselben sein müßten, daß also aus den Gleichungen (A) und (B) folgen müßte

$$\mathfrak{r}_i = \sum \frac{\partial D}{\partial P_i}. \tag{C}$$

Dieser Schluß wäre *nur* erlaubt, wenn die sämtlichen Differentiale δP_i von einander *unabhängig* wären, so daß einem jeden jeder beliebige Wert erteilt werden könnte. Allein diese Differentiale haben den sechs Bedingungen des Gleichgewichts der Kräfte, die an einem festen Körper angreifen, zu genügen, sind also nicht beliebig willkürlich. Weiter übersieht Castigliano, daß die Darstellung von D als Funktion der äußeren Kräfte P_i in den verschiedensten Formen möglich ist (durch

Benutzung der erwähnten sechs Gleichgewichtsbedingungen für die P_i) und daher jede besondere Funktionsform für D auch besondere Differentialquotienten ergeben würde.

Aus der Voraussetzung, daß die Gleichungen (A) und (B) die Gleichung (C) für alle Indices i nach sich ziehen, die unrichtig ist, bildet nunmehr Castigliano seinen Lehrsatz von den Differentialquotienten der Deformationsarbeit, den wir nach der Übersetzung des Castiglianoschen Originals: „Theorie des Gleichgewichts elastischer Systeme, übersetzt von Emil Hauff. Wien 1886“ zitieren. Er lautet (S. 42.):

Lehrsatz von den Differentialquotienten der Deformationsarbeit. Zweiter Teil.

Wenn man die Deformationsarbeit eines elastischen Körpers oder Systems in einer Funktion der äußeren Kräfte ausdrückt, so gibt der Differentialquotient dieses Ausdrucks mit Bezug auf eine dieser Kräfte die relative Verschiebung ihres Angriffspunkts.

Der Lehrsatz, in dieser Form ausgesprochen, ermangelt offenbar jedes präzisen Sinnes. Es liegt auf der Hand, daß nicht, wie es die Gleichung (C) erfordern würde, durch die Differentialquotienten einer Funktion D der P_i Größen $\mathfrak{r}_i$ erlangt werden können, die von sechs *willkürlichen* Konstanten abhängen, von denen die Funktion D selbst unabhängig ist.

Man kann aber den Lehrsatz durch eine einfache Betrachtung in einen korrekten Lehrsatz präziser Bedeutung umformen, und es ist zu bemerken, daß Castigliano selbst in den späteren Entwicklungen seines Werkes ihn stillschweigend in dieser Bedeutung verwendet hat.

Es ist offenbar stets möglich, die sechs willkürlich zu wählenden Konstanten derart zu bestimmen, daß in sechs verschiedenen Angriffspunkten (x_i, y_i, z_i) die betreffenden Werte von $\mathfrak{r}_i$ verschwinden. Wenn man für $\mathfrak{r}_i$ den Wert $\mathfrak{u}_i \cos\alpha + \mathfrak{v}_i \cos\beta + \mathfrak{w}_i \cos\gamma$ setzt, und die Größen $\mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i, \mathfrak{w}_i$ vermöge der Gleichungen (4) bestimmt, schließlich der Kürze wegen die Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ durch $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ bezeichnet, so erhält man die sechs Gleichungen für diejenigen a, b, c, p, q, r, welche in sechs Angriffspunkten die betreffenden $\mathfrak{r}_i$ zum Verschwinden bringen, aus der Gleichung

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} \mathfrak{r}_i = 0 = u_i\bar{\alpha}_i + v_i\bar{\beta}_i + w_i\bar{\gamma}_i + a\bar{\alpha}_i + b\bar{\beta}_i + c\bar{\gamma}_i + p(y_i\bar{\gamma}_i - z_i\bar{\beta}_i) \\ \qquad + q(z_i\bar{\alpha}_i - x_i\bar{\gamma}_i) + r(x_i\bar{\beta}_i - y_i\bar{\alpha}_i) \end{cases}$$

durch Einsetzen der Koordinaten x_i, y_i, z_i und der Richtungskosinus $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i$ für die gewählten sechs Punkte. Falls die Determinante dieser Gleichungen sich nicht auf Null reduziert, ergeben sich für a, b, c, p, q, r sechs bestimmte Werte. Dieser Fall tritt sicher nicht ein, wenn die sechs Angriffskräfte P_i in den sechs gewählten Punkten sich aus den Gleichgewichtsbedingungen durch die übrig bleibenden P_i bestimmen lassen. Denn die Determinante der Gleichungen für die letztere Bestimmung ist mit derjenigen identisch, auf welche das System der Gleichungen (D) führt. Wählt man für die Werte a, b, c, p, q, r diejenigen, welche alsdann durch die Gleichungen (D) gegeben werden, so geht die Gleichung (A) in die folgende über:

$$\delta D = \sum{}' \mathfrak{r}_i \cdot \delta P_i,$$

in welcher der Akzent andeuten soll, daß die Summe sich nur auf diejenigen Punkte beziehen soll, für welche $\mathfrak{r}_i$ nicht zu Null wird. Denkt man ferner in der Funktion D die in den Punkten, deren $\mathfrak{r}_i$ verschwindet, angreifenden Kräfte P_i durch die übrig bleibenden Kräfte ausgedrückt, so wird D *nur* von den unabhängig bleibenden Kräften P_i abhängig, deren δP_i willkürlich gewählt werden können. Nunmehr aber erlaubt die vorstehende Gleichung den Schluß, daß die Koeffizienten der δP_i beider Seiten derselben übereinstimmen müssen, und ergibt die Gültigkeit der Gleichungen:

$$\mathfrak{r}_i = \frac{\partial D}{\partial P_i}.$$

Diese ergeben den Lehrsatz von den Differentialquotienten der Deformationsarbeit (zweiter Teil) in korrekter Form folgendermaßen: *Stellt man die Deformationsarbeit eines elastischen Körpers vermittels der Gleichgewichtsbedingungen für einen festen Körper als Funktion von einander unabhängiger äußerer Kräfte dar, so gibt der Differentialquotient dieser Funktion in bezug auf eine dieser Kräfte die relative Verrückung ihres Angriffspunkts in demjenigen Verrückungssystem, welches eintritt, wenn diejenigen Körperpunkte, deren Angriffskräfte eliminiert werden, verhindert werden, relative Verrückungen anzunehmen.*

Eine solche Verhinderung kann man, wenn man will, durch feste reibungslose Widerlagerflächen vermittelt denken.

Was den anderen Lehrsatz Castiglianos von den Differentialquotienten der Deformationsarbeit, erster Teil, anbetrifft, der sich auf die Darstellung der Deformationsarbeit als Funktion der relativen Verrückungen bezieht, so erledigt er sich ohne weiteres durch die vorstehenden Bemerkungen. Die Gleichung

$$D = \tfrac{1}{2} \sum{}' P_i \mathfrak{r}_i = \tfrac{1}{2} \sum{}' P_i \frac{\partial D}{\partial P_i}$$

erweist D als eine homogene (offenbar definite) Funktion zweiten Grades der unabhängigen P_i, deren Differentialquotienten $\mathfrak{r}_i$ wiederum als unabhängige Variable eingeführt werden können. Sie ergibt sofort

$$\delta D = \sum' P_i d\mathfrak{r}_i$$

und also

$$P_i = \frac{\partial D}{\partial \mathfrak{r}_i},$$

welche Gleichungen den anderen Lehrsatz Castiglianos ergeben.

In dem ihm von Castigliano an der angeführten Stelle gegebenen Wortlaut besitzt er ebensowenig irgend einen faßbaren Sinn als der zuvor besprochene Lehrsatz. Die Bedingungen für das Zutreffen der Sätze sind für beide dieselben.

Es verdient aber hervorgehoben zu werden, daß Castigliano selbst, bei den späteren, ins einzelne gehenden Ausführungen seines Werkes diese Bedingungen stillschweigend fast durchgängig als bestehend vorausgesetzt hat.

Auch in der oben entwickelten präziseren Form gebühren diese Sätze zweifellos Castigliano.

Wenn es für diese beiden Sätze möglich war, ihren Sinn in präziser Form darzulegen, so scheint diese Möglichkeit in Beziehung auf den dritten Lehrsatz Castiglianos, dem Lehrsatze von der kleinsten Arbeit, nicht vorzuliegen, und es scheint, daß Castigliano durch den Gebrauch unzutreffender Worte in eine Täuschung versetzt worden ist.

Zum Ausgangspunkte seines Satzes von der kleinsten Arbeit wählt Castigliano die Betrachtung der Deformation eines Stabsystems mit überzähligen Stäben, eines sogenannten statisch unbestimmten Fachwerks. Man bezeichne durch l_i die Länge, durch q_i den Querschnitt, durch E_i den Elastizitätsmodul des i-ten homogen gedachten Stabes des Systems, durch T_i die Spannung desselben, oder genauer ausgedrückt eine *solche* Spannung, daß, die Gesamtheit aller Spannungen T_i in den Stäben auftretend gedacht, durch dieselben an *jedem* Knotenpunkt des Systems der dort angreifenden *äußeren* Kraft das Gleichgewicht gehalten wird. Es seien schließlich durch T_i' diejenigen Stabspannungen bezeichnet, die in den einzelnen Stäben nach Eintritt des Gleichgewichts und vollendeter Deformation tatsächlich eingetreten sind. Alsdann beweist Castigliano durchaus einwandfrei das nachstehende Theorem:

Die Werte T_i' sind diejenigen Werte der T_i, welche der Größe:

$$W = \frac{1}{2} \sum \frac{T_i^2 l}{E_i q_i}$$

den kleinstmöglichen Wert erteilen, unter der Voraussetzung, daß die T_i den Gleichgewichtsbedingungen genügen, die für das Gleichgewicht jedes

Knotenpunkts des Systems bestehen. Dieser kleinstmögliche Wert von W selbst stellt gleichzeitig die für die Deformation erforderliche Deformationsarbeit dar.

Man ersieht, daß es sich in diesem Theorem durchaus nicht um ein Minimum der Deformationsarbeit handelt, sondern um den kleinsten Wert einer gegebenen Funktion der Variablen T_i, nämlich der Summe W.

Castigliano spricht aber (S. 23. l. c.) dieses Theorem in der nachstehenden, nicht berechtigten, Fassung aus:

„Sucht man das Minimum der Funktion

$$\frac{1}{2}\sum \frac{T_i^2 l_i}{E_i q_i},$$

welche die Deformationsarbeit eines gegliederten Systems ausdrückt, indem man die $3n-6$ *Gleichungen* (12) *zwischen den Spannungen aller Stäbe des Systems in Rechnung zieht, so erhält man für diese Spannungen jene Werte, welche in dem System nach der Deformation herrschen.“*

Die in dieser Fassung auftretenden Worte, „welche die Deformationsarbeit eines gegliederten Systems ausdrückt“, sagen etwas *Unrichtiges* aus. *Nur* für die Werte T' selbst, die das Minimum herbeiführen, drückt diese Funktion die Deformationsarbeit aus. Streicht man die angeführten Worte, so fehlt jede Beziehung zu einer *kleinsten Deformationsarbeit.*

Selbst wenn man, für den Fall eines materiellen Stabsystems, die Summe:

$$\frac{1}{2}\sum \frac{T_i^2 l}{E_i q_i}$$

als diejenige Arbeit aufzufassen geneigt wäre, welche aufgewandt werden müßte, um die einzelnen aus dem Zusammenhange des Systems herausgenommenen Stäbe von der Länge l_i in die betreffenden Spannungen T_i zu versetzen, so könnte diese Summe doch nie und nimmer als eine Deformationsarbeit des Systems als solchen aufgefaßt werden (Arbeit bei der Deformation des Systems). Denn diejenigen Längen der Stäbe, welche in Folge der Spannungen T_i eintreten müßten, machen die Existenz eines Systems *unmöglich;* nur die Spannungen T_i' erlauben die Existenz.

Außerdem sagt Castigliano (S. 46. l. c.) ausdrücklich, daß die gegebene Entwicklung des Lehrsatzes von der kleinsten Arbeit bestehen bleibe, wenn man das elastische System nicht aus materiell verbundenen Knotenpunkten, sondern aus Molekülen zusammengesetzt denkt, die sich gegenseitig anziehen oder abstoßen.

Er spricht infolgedessen den Satz aus:

Die elastischen Kräfte, welche nach der Deformation des Körpers *oder Systems zwischen den Molekülenpaaren auftreten, sind jene, welche die Deformationsarbeit zu einem Minimum machen, insofern man jene Bedingungsgleichungen berücksichtigt, welche ausdrücken, daß zwischen diesen Kräften um jedes Molekül Gleichgewicht besteht.*

Aber diese Kräfte T würden, seiner Entwicklung gemäß, nicht die *Deformationsarbeit*, sondern eine Quadratsumme von der Form $\sum \varepsilon T^2$ zu einem Minimum machen. Durch eine Auslösung der zerstückelten Teile, wie im vorigen Fall des Fachwerks ließe sich nur mit großer Verworrenheit jedes Glied der Summe als eine für sich bestehende Deformationsarbeit hinstellen, die Summe selbst aber niemals als Deformationsarbeit des Körpers.

Zum Schlusse des betreffenden Abschnitts seines Werkes fügt Castigliano noch hinzu (S. 47 l. c.):

Man kann nun den Lehrsatz von der kleinsten Arbeit noch in einer viel allgemeineren Weise ausdrücken, indem man sagt, daß, welches auch die unbekannten Größen sind, in deren Funktionen man die Deformationsarbeit ausgedrückt hat, die Werte, welche dieselben nach der Deformation haben, derartige sind, daß sie unter Berücksichtigung der zwischen ihnen stattfindenden Bedingungsgleichungen diese Arbeit zu einem Minimum machen.

Auch wenn man den so ausgesprochenen Satz nicht als eine Folge der vom Autor vorangestellten Deduktionen anerkennen will, sondern direkt seine Bedeutung zu verstehen sucht, wird man finden, daß ihm ein präziser Sinn nicht innewohnt.

Wenn man sagt, daß die Deformationsarbeit eines Systems als Funktion gewisser unbekannter Größen ausgedrückt sei, so hat diese Aussage nur den Sinn, daß *die* Funktionalwerte der ausdrückenden Funktion, welche durch die Substitution *bestimmter* Werte für die unbekannten Größen hervorgehen, diejenigen Werte der Deformationsarbeit angeben, welche eintreten, wenn die Unbekannten die substituierten Werte annehmen. Der gesamten Mannigfaltigkeit der möglichen Substitutionen entspricht eine Mannigfaltigkeit von Werten der Deformationsarbeiten des Systems, aber auch die Mannigfaltigkeit der betreffenden *Deformationen* des Systems selbst. Wenigstens *eine* der möglichen Substitutionen wird zu einem Minimalwert der betrachteten Funktion führen, da dieselbe für alle Substitutionen stetig, endlich, positiv und von Null verschieden bleiben muß. Dieser *besonderen* Substitution entspricht auch eine *besondere* Deformation.

Wenn nun Castigliano in seinem zitierten Lehrsatz mit den Worten: „nach der Deformation" ausdrücken will, daß nach *dieser besonderen* Deformation die Deformationsarbeit zu einem Minimum wird, so wäre sein Satz offenbar eine leere Tautologie. Wollte er aber einen

Lehrsatz über das Eintreten des Minimums aufstellen, so fehlt dem Satz dasjenige, was ausgesagt werden soll, nämlich eine Kennzeichnung derjenigen Deformation, für welche das Minimum eintreten soll. Daß es Werte der Unbekannten gibt, welche die Funktion zu einem Minimum machen, ist bei den Eigenschaften derselben selbstverständlich; daß dieses Minimum nach der zugehörigen Deformation eintritt, ebenfalls. Das Fragliche ist nur, welches sind die Kriterien *dieser* Deformation. Von ihnen spricht Castigliano nicht, obgleich er solche in seinen Anwendungen stillschweigend voraussetzt.

Wir möchten daher wünschen, daß diejenigen Autoren, welche von einem Castiglianoschen „Prinzip der kleinsten Arbeit" sprechen, sich bei dem Ausdruck desselben auch der leichten Mühe unterzögen, die Kennzeichnung der Deformationen, welche zu einem Minimum führen, in den Wortlaut aufzunehmen. Nicht *jede* Deformation führt zu einem Minimum der Deformationsarbeit. Ohne diese Kennzeichnung bleibt der Satz sinnlos. Es bliebe die Mannigfaltigkeit der Deformationsarbeiten unbestimmt, in der die gemeinte ein Minimum darstellt.

Schließlich möchten wir nochmals hervorheben, daß wir in die Besprechung der Sätze Castiglianos nicht aus dem Grunde eingetreten sind, um einem hervorragenden Autor, der unbekümmert um die Sicherheit seiner Grundlagen zur Lösung komplizierter Probleme fortgeschritten ist, einen Makel anzuheften, sondern in der Absicht, den gesicherten Kern seiner Entwickelungen frei zu legen und dieselben fruchtbarer zu machen.

Freiburg i. B., im Mai 1904.

On Reciprocal Equations.

By T. Hayashi in Tokyo.

The interesting contribution "Beitrag zur Lehre von den reziproken Gleichungen" by Prof. F. J. Studnička published in this Archiv d. Math. u. Phys., III, 3, p. 16, induces me to write the following note.

That a reciprocal equation of the standard form, namely a reciprocal equation of an even degree, $2s$ say, in which the coefficients of the corresponding terms taken from the beginning and end are equal in magnitude and have the same sign, can always be depressed to another of degree s, is usually proved by using the well known recurrence formula relative to $x^m + \frac{1}{x^m}$. In the following simple process, which is, I think, available for didactic purpose, we do not make use of this recurrence formula.

Let the original equation be

$$(1) \qquad A_0 x^{2s} + A_1 x^{2s-1} + A_2 x^{2s-2} + \cdots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0.$$

This may evidently be transformed into the form

$$(2) \qquad a_0 (x+1)^{2s} + a_1 x (x+1)^{2s-2} + a_2 x^2 (x+1)^{2s-4} + \cdots$$
$$+ a_{s-1} x^{s-1} (x+1) + a_s x^s = 0,$$

in which

$$A_0 = a_0,$$
$$A_1 = \binom{2s}{1} a_0 + a_1,$$
$$A_2 = \binom{2s}{2} a_0 + \binom{2s-2}{1} a_1 + a_2,$$
$$A_3 = \binom{2s}{3} a_0 + \binom{2s-2}{2} a_1 + \binom{2s-4}{1} a_2 + a_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

or in general

$$A_\varkappa = \binom{2s}{\varkappa} a_0 + \binom{2s-2}{\varkappa-1} a_1 + \binom{2s-4}{\varkappa-2} a_2 + \cdots + \binom{2s-2\varkappa+2}{1} a_{\varkappa-1} + a_\varkappa.$$

Divide this equation (2) by x^s; then we get

$$a_0 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2s} + a_1 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2s-2} + a_2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2s-4} + \cdots$$
$$+ a_{s-1} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + a_s = 0$$

which is obviously an equation of degree s, if we take $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ as a new variable.

The equation

$$(3) \qquad a_0 (x+q)^{2s} + a_1 x (x+q)^{2s-2} + a_2 x^2 (x+q)^{2s-4} + \cdots$$
$$+ a_{s-1} x^{s-1} (x+q)^2 + a_s x^s = 0$$

can be transformed into the form (2) by making $x = qy$. Rearranging the left hand side of this equation in descending powers of x, we get an equation of the form:

$$B_0x^{2s}+B_1x^{2s-1}+B_2x^{2s-2}+\cdots$$
$$+q^{2s-4}B_2x^2+q^{2s-2}B_1x+q^{2s}B_0=0,$$

which reduces to that treated by Prof. **Studnička**, when k is put instead of q^2.[1]) More generally the equation having the form

$$(4)\quad a_0(px+q)^{2s}+a_1(\alpha x+\beta)(px+q)^{2s-2}+a_2(\alpha x+\beta)^2(px+q)^{2s-4}+\cdots$$
$$+a_{s-1}(\alpha x+\beta)^{s-1}(px+q)^2+a_s(\alpha x+\beta)^s=0$$

can be transformed into the form (2) and consequently be depressed to another of degree s.

Again equation (1) can be transformed into the form

$$(5)\quad a_0(x^2+qx+1)^s+a_1x(x^2+qx+1)^{s-1}+a_2x^2(x^2+qx+1)^{s-2}+\cdots$$
$$+a_{s-1}x^{s-1}(x^2+qx+1)+a_sx^s=0,$$

where q may be any number whatever. Divided by x^s, this becomes the equation of degree s:

$$(6)\qquad a_0y^s+a_1y^{s-1}+a_2y^{s-2}+\cdots+a_{s-1}y+a_s=0,$$

where y stands for $x+q+\frac{1}{x}\cdot$ When q is made equal to $-\frac{A_1}{sA_0}$, the second coefficient a_1 vanishes, which is often desirable in order to solve (6). More generally, the equation having the form

$$(7)\quad \begin{cases} a_0(px^2+qx+r)^s+a_1(\alpha x+\beta)(px^2+qx+r)^{s-1} \\ \qquad +a_2(\alpha x+\beta)^2(px^2+qx+r)^{s-2}+\cdots \\ \qquad +a_{s-1}(\alpha x+\beta)^{s-1}(px^2+qx+r)+a_s(\alpha x+\beta)^s=0 \end{cases}$$

can be transformed into the form (5).

Equations (4) and (7) are fruitful sources of problems for exercises by giving several values to α, β, p, q, r, which may be reduced to the standard form of reciprocal equations.

---

1) I will take this opportunity to remark that the solution of such equations is one of the questions, no 2461, appeared in "L'Intermédiaire des Mathématiciens", November 1902 p. 292.

Luigi Cremona.

Von RUDOLF STURM in Breslau.

(Fortsetzung und Schluß.)

Unterdessen ist 1863 der erste Teil der Abhandlung über *die geometrischen Transformationen der ebenen Figuren* erschienen, dem 1865 der zweite umfangreichere folgte.[1]) Dies sind die grundlegenden Arbeiten zur Theorie der eindeutigen Verwandtschaften, zunächst zwischen zweistufigen Gebilden, die sofort mit Cremonas Namen bezeichnet wurden und vor allem seinen Ruhm verkünden. Die Kollineation und die Korrelation sind auch eindeutige Verwandtschaften, mit der besondern Eigenschaft, daß entsprechende Elemente sich gleichzeitig linear bewegen. Wird diese Linearität aufgegeben, so hat man eine Cremonasche Verwandtschaft. Der einfachste Fall derselben, die quadratische Verwandtschaft, bei welcher, wenn die Punkte zweier Felder auf einander bezogen sind, jeder Gerade des einen oder andern Feldes ein Kegelschnitt korrespondiert, war schon bekannt: durch Plücker, Magnus, Steiner, Seydewitz, Schiaparelli. Diese den Geraden entsprechenden Kegelschnitte müssen durch drei feste Punkte gehen; denn nur dadurch wird erzielt, was für die Eindeutigkeit notwendig ist, daß erstens jeder von ihnen durch zwei weitere Punkte bestimmt ist, ebenso wie die korrespondierende Gerade durch die entsprechenden Punkte, und daß zweitens zwei von ihnen nur einen (veränderlichen) Schnittpunkt haben, welcher dann der korrespondierende Punkt zum Schnittpunkt der beiden entsprechenden Geraden wird. Man hatte eine Zeit lang geglaubt, die quadratischen Transformationen seien die allgemeinsten nicht linearen eindeutigen; aber Cremona erkannte, daß man durch Wiederholung quadratischer Transformationen zu höheren gelange.

---

1) Memorie dell' Accademia di Bologna II. Bd. 2 S. 621, Bd. 5 S. 3; Giornale di Matematica Bd. 1 S. 305, Bd. 3 S. 269, 363.

Solche speziellen Netze von Kurven n ter Ordnung — homaloidische Netze von Cremona genannt nach einem Worte Sylvesters — aufzufinden, handelt es sich auch bei höheren Werten von n; unter den gemeinsamen Punkten müssen sich dann auch vielfache befinden. Cremona gibt für die Anzahlen und Vielfachheiten dieser „Hauptpunkte" die Formeln; er ermittelt ihre Auflösung für die Grade $n = 2$ bis $n = 10$ und betrachtet dann noch eine Reihe allgemeiner Fälle, von denen ich mich begnüge, den älteren Jonquièresschen bei jedem Grade möglichen Fall — mit einem $(n-1)$-fachen und $2(n-1)$ einfachen Hauptpunkten — zu erwähnen.

Den Geraden des zweiten Feldes entspricht ein Netz im ersten, von derselben Ordnung n; aber es kann in bezug auf die Hauptpunkte von dem des zweiten Feldes verschieden sein. Die Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit der beiden Netze wird mit Hilfe der Jacobischen Kurve des einen und des andern festgestellt, d. i. der Kurve der Doppelpunkte. Bei den Hauptpunkten hört nämlich die Eindeutigkeit auf: einem r-fachen Hauptpunkte des einen Feldes entspricht im andern eine ganze Kurve und zwar r ter Ordnung; und aus diesen Hauptkurven setzt sich die Jacobische Kurve des betreffenden Netzes zusammen. An zahlreichen Beispielen wird gelehrt, wie diese Zusammensetzung vorzunehmen und wie dann auf gleichartige und ungleichartige Netze zu schließen ist; der 6. Grad liefert das erste Beispiel ungleichartiger Netze.

Cremona gewinnt das interessante Resultat, daß in beiden Feldern, auch wenn die Netze ungleichartig sind, die Anzahl der Hauptpunkte die nämliche ist, konstruiert dann bei in einander liegenden Feldern die Kurven der entsprechenden Punkte, die mit einem festen Punkte in gerader Linie liegen, was ihn dann zur Anzahl $n + 2$ der sich selbst entsprechenden Punkte führt. Den Schluß bildet die Betrachtung von Raumkurven, welche durch Strahlenbündel erzeugt werden, die sich in einer eindeutigen Verwandtschaft befinden. —

Kaum ist dies erledigt, so tritt Cremona an eine neue Aufgabe heran, welche aus äußeren Gründen in zwei Arbeiten zerlegt wird. Er hat den Wunsch, seiner Introduzione die notwendige Fortsetzung im dreidimensionalen Gebiete zu geben. Resultat dieser Bestrebung sind die *Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie.*[1]) Andererseits hat die Berliner Akademie 1864 zum erstenmal *die Steinersche Preisaufgabe* für synthetische Geometrie gestellt und, veranlaßt durch Steiners

1) Memorie dell' Accademia di Bologna II. Bd. 6 (1866), S. 91—136, Bd. 7 (1867), S. 29—78.

Abhandlung über *die Flächen 3. Ordnung*[1]) — oder Steiner-Schläflische Abhandlung, wie man seit dem Erscheinen des Briefwechsels zwischen Steiner und Schläfli geneigt sein möchte, sie zu nennen —, als Thema diese Flächen gewählt. Cremona beteiligte sich an der Preisbewerbung und erhielt 1866 die eine Hälfte des Preises, dessen andere mir zu teil wurde.[2])

Beide große Arbeiten greifen in einander; die drei ersten Kapitel der Preisarbeit befinden sich auch in den Preliminari, so daß, als beide in der deutschen Übersetzung (durch Curtze) vereinigt wurden[3]), jene mit ihrem vierten Kapitel angeschlossen werden konnte; aber auch dies und das folgende sind wohl für die Preliminari beabsichtigt gewesen. Ich bekam die Preliminari als eines der ersten Geschenke meines verehrten Konkurrenten und habe viel aus ihnen gelernt; wie er sie in seiner bescheidenen Weise im Begleitbriefe bezeichnet hat: un lavoro affatto elementare, das sind sie nicht.

Der erste Teil der Preliminari beginnt mit den Kegeln, abwickelbaren Flächen und Raumkurven, insbesondere der Übertragung der Plückerschen Formeln auf sie nach Cayley. Darauf wird die Fläche *n*ter Ordnung, bezw. *n*ter Klasse mit ihren etwaigen Singularitäten besprochen, und dann insbesondere die der 2. Ordnung, bezw. Klasse. Es folgt der Aufbau linearer Systeme *n* ter Stufe von Flächen derselben Ordnung und der Nachweis, daß zwei solche Systeme projektiv (kollinear) bezogen werden können. Den Schluß dieses Teils bilden die Enveloppen eines einfach unendlichen Systems von Flächen und die Regelflächen. In dem Abschnitte über letztere wird der — in den eben besprochenen geometrischen Transformationen schon kurz erwähnte — Begriff des Geschlechts, welchen Clebsch eben aus der Funktionentheorie in die Geometrie übertragen hatte[4]), eingehender erörtert. Cremona hebt die große Bedeutung dieses Begriffs hervor: nicht die Ordnung oder Klasse gibt, sagt er, den Maßstab für die Schwierigkeiten, welche die Untersuchung einer Kurve darbieten kann, sondern das Geschlecht. Er bringt den ersten geometrischen Beweis für den fundamentalen Satz, daß Kurven, welche eindeutig auf einander bezogen werden können, dasselbe Geschlecht

1) Monatsber. der Berliner Akademie 1856; Journ. f. Mathem. Bd. 53, S. 133; Gesamm. Werke, Bd. 2, S. 651.

2) Berliner Monatsber. 1866 S. 468, 1867 S. 418. — Cremonas Preisarbeit ist veröffentlicht im Journal für Mathematik, Bd. 68 S. 1—133. — Er erhielt 1874 (ohne Bewerbung) den Preis nochmals.

3) Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung (Berlin, 1870).

4) Journal f. Mathem. Bd. 64.

haben müssen, und zwar, indem er die durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte erzeugte Regelfläche benutzt.

Im zweiten Teil der Preliminari werden zunächst, ähnlich wie für die Kurve n ter Ordnung in der Introduzione, die Polaren von der $(n-1)$ten bis zur 1. Ordnung in bezug auf eine Fläche n ter Ordnung eingeführt, die durch sie entstehenden Örter untersucht und die Plückerschen Formeln nunmehr auch auf die Oberflächen übertragen. In dem Abschnitte: Anwendung auf die abwickelbaren Flächen enthält die Übersetzung eine wertvolle Bereicherung.

Darauf folgt, in mehreren Abschnitten, die eingehende Besprechung projektiv bezogener linearer Systeme von Flächen, und zwar nach einander: 1. Stufe (Büschel), 2. Stufe (Netze), 3. Stufe (von Cremona Linearsysteme schlechthin, jetzt meistens Gebüsche genannt), schließlich m ter Stufe[1]), und die Gradbestimmung der zahlreichen Erzeugnisse, zu denen sie führen; um ein schwierigeres Beispiel zur Charakterisierung der behandelten Probleme vorzuführen, wähle ich den Fall von $m+2$ projektiven linearen Systemen m ter Stufe von Flächen, bezw. von den Ordnungen $n_1, n_2, \ldots$; ermittelt wird die Ordnung und der Rang der Raumkurve, durch deren Punkte entsprechende Flächen aus allen diesen Systemen gehen.

Die ersten Polaren ($(n-1)$ ter Ordnung) einer Grundfläche bilden ein lineares System 3. Stufe, in dem Büschel und Netze enthalten sind. Dies führt zur Anwendung der erhaltenen Ergebnisse auf die Polarentheorie und auf Berührungsprobleme. Hervorgehoben mögen noch die verschiedenen nach Jacobi benannten Örter werden, insbesondere die später bei den eindeutigen Transformationen im Raume wichtig werdende Jacobische Fläche, von der Ordnung $4(n-1)$, eines Gebüsches von Flächen n ter Ordnung, der Ort der Doppelpunkte. Der letzte Abschnitt der Preliminari behandelt, in beliebiger Stufe, einen Spezialfall, der gerade bei den linearen Systemen 3. Stufe auftritt, welche durch Polaren einer Grundfläche n ter Ordnung gebildet werden, und zwar infolge des Satzes von der gemischten zweiten Polare zweier Punkte.

Mit den darin erhaltenen Sätzen werden, in der Preisarbeit, die beiden einer gegebenen Fläche n ter Ordnung zugeordneten konjugierten Kernflächen in Angriff genommen: die Hessesche Fläche, von der Ordnung $4(n-2)$, der Ort der Doppelpunkte von ersten Polarflächen, und die Steinersche Fläche, von der Ordnung $4(n-2)^3$, der Ort der Pole, zu denen diese Polarflächen gehören. Insbesondere interessant ist, wie er die $10(n-2)^3$ Doppelpunkte p der Hesseschen Fläche gewinnt

1) genere bedeutet sowohl Stufe, wie Geschlecht.

und die ihnen entsprechenden Geraden π auf der Steinerschen Fläche, die Doppellinien der Ebenenpaare, in welche die Polaren 2. Ordnung jener Punkte p zerfallen. Die Hessesche Fläche ist weiter der Ort der Pole, deren Polaren 2. Ordnung Kegel sind, und die Spitzen dieser Kegel erfüllen die Steinersche Fläche. Die reinen und gemischten Polarflächen von einer oder zwei Geraden, von einer oder zwei Ebenen werden konstruiert und ihre Beziehungen zu den beiden Kernflächen studiert, und eine Fülle von Örtern untersucht, z. B. der Ort der Pole, deren quadratische Polarflächen einem Polartetraeder einer gegebenen Fläche 2. Grades um- oder eingeschrieben sind.

Nun erst beginnt die Untersuchung der Fläche 3. Ordnung. Bei ihr fallen die beiden Kernflächen in eine zusammen, und diese Fläche, 4. Ordnung, ist mit eindeutig einander zugeordneten Punkten O, O' erfüllt, jeder von ihnen ein Pol, dessen erste Polare (2. Ordnung) ein Kegel ist, der andere die Spitze desselben, beide konjugiert zu einander in bezug auf alle ersten Polaren.

Während die Polarebenen der Punkte einer Gerade, im allgemeinen, einen Kegel 2. Grades umhüllen, die reine zweite Polare der Gerade, bilden sie bei einer Verbindungslinie OO' einen Büschel, dessen Achse die Kernfläche doppelt berührt. Solcher Geraden OO' gibt es doppelt unendlich viele[1]) und ebenso der zugeordneten. Die Klassen dieser Kongruenzen bestimmt Cremona: 3 und 28.

Die 10 Doppelpunkte p der Kernfläche und die ihnen zugehörigen Geraden π, auf ihr gelegen, sind Ecken und Gegenkanten des Sylvesterschen Pentaeders, welches eingehend untersucht wird. Ich erwähne noch, als weniger bekannt, die Bestimmung der Klassen 4 und 6 der Enveloppen der Ebenen, welche die kubische Fläche in einer äquianharmonischen, bezw. harmonischen Kurve 3. Ordnung schneiden.

Die Betrachtung geht über zu den 27 Geraden und ihrer gegenseitigen Lage; die Anzahl wird daraus abgeleitet, daß durch jeden Punkt 27 doppelte Berührungsebenen gehen.

Nun wird — als Vorläufer der späteren Untersuchungen über eindeutige Transformationen im Raume und eindeutige Flächenabbildungen — eine solche Transformation erörtert. Drei Korrelationen zwischen denselben zwei Räumen ordnen jedem Punkte des einen Raums den Schnittpunkt der drei entsprechenden Ebenen im andern zu; einer Ebene

1) Hinsichtlich dieser Geraden befand sich Steiner im Irrtum; er ist von Salmon, Cremona und mir verbessert worden; aber in den Gesammelten Werken hat keine Korrektur des letzten Absatzes der Steinerschen Abhandlung stattgefunden.

entspricht eine Fläche 3. Ordnung, und alle diese Flächen gehen durch eine Raumkurve 6. Ordnung, von welcher jeder Punkt alle Punkte einer Gerade zu korrespondierenden hat. Jede von diesen Flächen ist eindeutig auf die entsprechende Ebene abgebildet. Um nun zu erkennen, daß jede kubische Fläche so abbildbar ist, wird der Versuch gemacht, zu beweisen, daß jede durch drei kollineare Bündel erzeugt werden kann, welche Erzeugung, wie Clebsch gezeigt hat[1]), zu einer eindeutigen Abbildung führt. Aber dieser Beweis (Nr. 118) muß als nicht gelungen angesehen werden. Die Fläche wird zunächst durch duploprojektive (oder trilineare) Ebenenbüschel (nach August) erzeugt, aber die Umwandlung dieser Erzeugung in diejenige durch kollineare Ebenenbündel ist nicht richtig.[2]) Diese Erzeugung ist nicht immer möglich.

Die eindeutige Abbildung einer kubischen Fläche auf eine Ebene, wie sie sich bei der obigen eindeutigen Raumtransformation ergeben hat, hat in der Ebene 6 Fundamentalpunkte, die Schnitte jener Kurve 6. Ordnung, denen Geraden auf der Fläche entsprechen. Die übrigen 21 Geraden derselben werden aus der Abbildung ermittelt, und mit der dabei sich ergebenden bequemen Bezeichnungsweise werden die 45 dreifachen Berührungsebenen (Ebenen mit 3 Geraden) und die 36 Schläflischen Doppelsechsen tabelliert. Vor allem aber dient die Abbildung dazu, die auf der Fläche befindlichen Raumkurven aus den Bildern in der Ebene abzuleiten und ihr Verhalten zu den Geraden festzustellen; wichtig ist der Satz von der Erhaltung des Geschlechtes.

Es folgt die Untersuchung von Flächen 2. Grades, die durch drei Kegelschnitte der Fläche gehen, insbesondere der Kegel, die das tun. Jede Ebene mit 3 Geraden führt zu einem solchen Flächensysteme; dabei ergibt sich wiederum eine Berührung mit der Liniengeometrie; es werden drei Kongruenzen 2. Ordnung mit gemeinsamer Brennfläche, dem Orte 4. Ordnung der Spitzen jener Kegel, behandelt.

Nach einigen Sätzen über die Geraden wendet sich Cremona zur Einteilung der kubischen Flächen in Gattungen nach der Realität der Geraden. Er untersucht, wie zwei Trieder in bezug auf die Realität ihrer Ebenen beschaffen sein müssen, damit durch die 9 Schnittlinien ein reeller Büschel von kubischen Flächen geht, gewinnt 3 Fälle und leitet aus ihnen die schon durch Schläfli bekannten 5 Gattungen

1) Journal f. Math. Bd. 65.

2) Reye hat auf meine Bitte diese Stelle auch durchgesehen und schließt sich meinem Urteile an. Wenn ich auf einige Versehen aufmerksam mache, so geschieht es, weil ich die Erfahrung gemacht habe, daß solche Fehler leider sich fortpflanzen. Cremonas Bedeutung, denke ich, wird das nicht verkleinern; und gerade eines bedeutenden Mannes Versehen dürfen nicht stehen bleiben.

der F^3 ab. Cremona findet selbst, daß eine dieser Gattungen durch kollineare Bündel nicht herzustellen ist, wenn reell operiert werden soll. Dagegen die Erzeugung der Fläche durch einen Flächenbüschel 2. Ordnung und einen zu ihm projektiven Ebenenbüschel führt zu allen fünf; dazu untersucht Cremona eingehend die Raumkurve 4. Ordnung 1. Art, die Grundkurve eines F^2-Büschels, und stellt 4 Gattungen derselben fest: eine reelle einzügige Kurve, zwei reelle zweizügige (mit verschiedenen durchgehenden Kegeln) und die imaginäre Kurve.

An diese große Abhandlung über die Fläche 3. Ordnung schließen sich einige kleinere an. In einem Aufsatze von 1870 über die 27 Geraden der Fläche[1]) untersucht er die Neunflache, welche durch 9 solche Ebenen mit je 3 Geraden gebildet werden, die alle 27 Geraden umfassen; ihre Anzahl ist 200, und sie zerfallen in zwei Gruppen von 40 und 160.

In einer weiteren Note[2]) benutzt Cremona das Verfahren Geisers[3]), Eigenschaften der Kurve 4. Ordnung aus solchen der kubischen Fläche zu gewinnen, indem man jene als scheinbaren Umriß dieser auffaßt, d. h. als Schnitt des Tangentialkegels derselben aus einem Punkte auf ihr, und spezialisiert es in geeigneter Weise, um Sätze, welche Brioschi in der vorangehenden Abhandlung vermittels invariantentheoretischer Überlegungen für eine gewisse Kurve 4. Ordnung erhalten hat, mehr geometrisch zu beweisen.

Ferner veröffentlichte er 1877 eine Abhandlung[4]), in der er Eigenschaften der Fläche 3. Ordnung mit einem Knotenpunkte zusammenstellte, welche, wenn aus diesem Punkte projiziert wird, zu der Figur des Pascalschen Sechsecks mit den zugehörigen Geraden und Punkten: Pascalsche Geraden, Steinersche Punkte usw. führen. Durch den Knotenpunkt gehen 6 Geraden der Fläche, die auf dem Kegel 2. Grades liegen, welcher im Knotenpunkte der Fläche sich anschmiegt; sie vertreten je zwei Geraden der allgemeinen Fläche, so daß noch 15 andere vorhanden sind, gelegen in den Verbindungsebenen jener. Die Spuren der 6 Geraden in der Projektionsebene geben das Pascalsche Sechseck; aus den 15 Geraden, welche für sich allein 15 Ebenen mit je 3 Geraden bilden, werden die stereometrischen Figuren konstruiert, die dann projiziert werden.

In demselben Jahre war er auf der Münchener Naturforscher-Versammlung und hielt uns einen (analytischen) Vortrag über die Polsechsflache der kubischen Fläche.[5]) Auch auf der allgemeinen Fläche 3. Ord-

1) Rendiconti dell' Istituto Lombardo II Bd. 3 S. 209.
2) Mathem. Annalen Bd. 4 S. 99. 3) Math. Annalen Bd. 1.
4) Memorie dell' Accademia dei Lincei III Bd. 1 S. 854.
5) Math. Annalen Bd. 13 S. 301.

nung wird, nach Abscheidung einer Doppelsechs, eine Gruppe von 15 Geraden der Fläche erhalten. Sie bilden für sich allein 10 Paare konjugierter Trieder; das sind je zwei Trieder, die sich in 9 Geraden der Fläche durchschneiden. Die Scheitel dieser 10 Triederpaare weist Cremona als die Gegenecken eines Sechsflachs nach; weil aber die Scheitel zweier konjugierten Trieder entsprechende Punkte O, O' auf der Kernfläche, also konjugiert sind in bezug auf alle ersten Polarflächen, so gehören diese 36 Sechsflache, nach Reyes Terminologie[1]), zu den unendlich vielen gemeinsamen Polsechsflachen des Gebüsches der ersten Polaren und sind unter ihnen ausgezeichnet. —

Wir müssen jedoch zu den Jahren 1867 und 1868 zurückkehren. In jenem erschien noch die kurze Note über nicht homogene quadratische Formen zwischen zwei Veränderlichen.[2]) In ihr handelt es sich um die Verwandtschaftsgleichung zwischen zwei einstufigen Gebilden, die sich in einer zwei-zweideutigen Verwandtschaft befinden, und um den Nachweis der Gleichheit der Invarianten der beiden Formen 4. Grades, welche die einen und die andern Verzweigungselemente liefern.

1868 aber gab Cremona seinen Abhandlungen über die kubischen Regelflächen eine Fortsetzung in der Untersuchung *der Regelflächen 4. Grades*[3]), von denen er schon wiederholt Beispiele gefunden hatte. Der Geschlechtsbegriff war hier sehr förderlich. Alle ebenen Schnitte einer Regelfläche sind, weil durch die Erzeugenden eindeutig bezogen, vom nämlichen Geschlechte, welches so das der Fläche selbst wird. Die Kurven 3. Ordnung in den Ebenen durch die Erzeugenden lehren, daß Regelflächen 4. Grades nur vom Geschlechte 1 oder 0 sein können, oder daß sie eine Doppelkurve 2. oder 3. Ordnung haben müssen. Dies führt zunächst zu drei Hauptarten: Regelflächen 4. Grades mit zwei gegen einander windschiefen doppelten Geraden, mit einer doppelten kubischen Raumkurve oder einer dreifachen Gerade. Durch die Vereinigung jener beiden Geraden (ähnlich wie bei der Cayleyschen Regelfläche 3. Grades), durch das Zerfallen der kubischen Raumkurve und dadurch, daß eine Gerade in drei Weisen doppelt auf einer Regelfläche sein kann, nämlich: doppelte Leitgerade, einfache Leitgerade und zugleich einfache Erzeugende, doppelte Erzeugende, daß Ähnliches auch für eine dreifache Gerade gilt, und endlich daß zu einer dreifachen Leitgerade noch eine einfache treten kann, ergeben sich Cremona insgesamt 12 Arten der Regelfläche 4. Grades, 2 mehr, als Cayley ge-

1) Journal f. Mathem. Bd. 78.

2) Rendiconti dell' Istituto Lombardo I Bd. 4 S. 199.

3) Memorie dell' Accademia di Bologna II Bd. 8 S. 235.

funden hatte.[1]) Die wesentlichen Eigenschaften dieser Arten, die Zahl der Kuspidalpunkte, Erzeugungsweisen werden studiert.

Die Möglichkeit, daß eine doppelte Erzeugende auch Rückkehr-Erzeugende werden kann, fordert, meines Erachtens, daß noch zwei weitere Arten abgesondert werden. Unter den singulären Flächen der speziellen Komplexe 2. Grades finden sich solche Regelflächen, und bei der Einteilung der Komplexe 2. Grades hat man die entsprechenden als besondere Arten unterschieden.[2]) Unerwähnt hat jedoch Cremona diese Fälle nicht gelassen.

An die Regelflächen mit vereinigten Leitgeraden schließt sich eine Note, ebenfalls aus 1868, an.[3]) Darin werden, auch von Cayley zuerst erwähnte, Regelflächen $(m+n)$ten Grades besprochen mit einer Leitgerade L, in welcher eine m-fache und eine n-fache $(m \geq n)$ sich vereinigt haben; weil die n Erzeugenden, in denen eine Ebene durch L die Fläche schneidet, sämtlich durch denselben Punkt von L gehen, wird es möglich, eigentümliche Polarflächen zu konstruieren: in jeder Ebene durch L konstruiert man die harmonischen Strahlen $r$ten Grades der L in bezug auf die n mit ihr zu demselben Büschel gehörigen Erzeugenden; diese Strahlen erzeugen eine neue Regelfläche derselben Art, nur daß $m-r$, $n-r$ an Stelle von m, n getreten sind. —

Mit dem Jahre 1867 beginnt die umfangreiche Reihe der Abhandlungen, in denen Cremona sich mit *den eindeutigen Transformationen im Raume und den eindeutigen Abbildungen von Flächen auf eine Ebene, bezw. auf eine andere Fläche* beschäftigte. Bei der Preisarbeit erwähnten wir einen Vorläufer dieser Untersuchungen, und ebenso bei der Arbeit über die Steinersche Fläche wurde die aus der Erzeugung unmittelbar sich ergebende eindeutige Abbildung erwähnt. In dem diese behandelnden Aufsatze werden auch die Spezialfälle der Steinerschen Fläche, in denen zwei oder alle drei Doppelgeraden sich vereinigen, in bezug auf die Abbildung untersucht, und am Schluß auch die Abbildung der kubischen Regelfläche und ihres Spezialfalls, der Cayleyschen Fläche besprochen. Als interessantes Resultat wird gefunden, daß die Haupttangenten-Kurven bei der Steinerschen und bei der kubischen Regelfläche sich in Kegelschnitte abbilden und daher algebraisch sind: Raumkurven 4. Ordnung 2. Art. Im allgemeinen sind diese Kurven, wie die Krümmungslinien, transzendent. Clebsch hatte

1) Philos. Transactions Bd 154.

2) Liniengeometrie Bd. 3 Nr. 805 und 825.

3) Rendiconti dell' Istituto Lombardo II Bd. 1 S. 109.

für die Steinersche Fläche dies Ergebnis „durch Integration“ gefunden, das Cremona nun in einfacher Weise geometrisch bewies.

Er nahm darauf die windschiefen Regelflächen überhaupt hinsichtlich ihrer eindeutigen Abbildbarkeit vor.[1]) Aus dem Geschlechte 0 der Erzeugenden folgert er die Möglichkeit, sie in die Strahlen eines Büschels abzubilden, wenn die Fläche überhaupt eindeutig abbildbar ist. Das Bild eines ebenen Schnitts kann dann jedem Strahle des Büschels, außer im Scheitel, nur einmal begegnen, ist also vom Geschlechte 0. Daher sind nur Regelflächen von diesem Geschlechte eindeutig abbildbar.

Nun behandelt er, analytisch, eine Regelfläche mit einer m-fachen und einer n-fachen Leitgerade ($m > n$) vom Geschlechte 0 und ihre eindeutige Abbildung und weist nach, daß die Haupttangenten-Kurven auf ihr algebraisch sind: von der Ordnung $2(m+n-1)$ und den Leitgeraden in den Kuspidalpunkten begegnen. Er unterläßt nicht, den Fall der Vereinigung der Leitgeraden zu erörtern.

Um eine eindeutige Verwandtschaft zwischen den Punkten zweier Räume herzustellen, sind homaloidische lineare Systeme 3. Stufe (Gebüsche) von Flächen zu konstruieren, die, etwa zum ersten Raume gehörig, den Ebenen im zweiten zugeordnet werden. Sie müssen erstens die Eigenschaft haben, daß 3 Punkte eindeutig eine Fläche eines solchen Systems bestimmen, ebenso wie die entsprechende Ebene durch 3 Punkte bestimmt ist, zweitens, daß 3 Flächen des Gebüsches, außer den allen Flächen desselben gemeinsamen Kurven und Punkten nur noch einen Punkt gemeinsam haben, der dem Schnittpunkte der drei korrespondierenden Ebenen entspricht. Zwei Flächen des Gebüsches und ihrem Büschel entsprechen zwei Ebenen und ihr Büschel, der Achse dieses Büschels der veränderliche Teil der Grundkurve jenes, zu welcher die festen Kurven gehören. Die drei Ebenen von vorhin erweitern sich zu dem Bündel um ihren Schnittpunkt; seinen Ebenen entsprechen die Flächen des Gebüsches durch dessen korrespondierenden Punkt, die ein Netz bilden.

Ebenso aber entsprechen den Ebenen des ersten Raumes Flächen eines ähnlich beschaffenen Gebüsches im zweiten, nicht notwendig von derselben Ordnung; vielmehr hat man im allgemeinen zwei Gradzahlen, die Ordnung der Flächen des ersten Raumes, die den Ebenen des zweiten Raumes entsprechen, zugleich diejenige der Kurven des zweiten Raumes, die den Geraden des ersten korrespondieren, und die beiden andern wiederum gleichen Ordnungen, die durch Vertauschung der Räume sich ergeben.

1) Annali di Matematica II Bd. 1 S. 248.

Die gemeinsamen Kurven und Punkte des einen Raumes, etwa des ersten, sind wiederum Hauptelemente desselben; jedem Punkte einer Hauptkurve[1]) entspricht im zweiten eine Kurve, und die den verschiedenen Punkten jener Kurve korrespondierenden Kurven erzeugen eine Fläche; ebenso hat jeder Hauptpunkt sofort ∞^2 entsprechende Punkte, die eine Fläche bilden. Jene und diese Flächen, letztere mehrfach gerechnet, setzen die Jacobische Fläche des Gebüsches im zweiten Raume zusammen, $4(m-1)$ter Ordnung, wenn m dessen Ordnung ist.

Es kann aber auch einander zugeordnete Hauptkurven geben, von denen jedem Punkte der einen jeder der anderen entspricht.

Diese allgemeine Theorie wird in einem zusammenfassenden Aufsatze[2]) niedergelegt, dessen Grundlage analytisch ist. Weil von zwei entsprechenden Punkten jede der beiden Koordinatengruppen rational durch die andere dargestellt wird, nennt Cremona diese Transformationen rational.

Aber dieser Abhandlung hat er verschiedene Spezialfälle vorausgeschickt. So behandelt er in einer der Göttinger Gesellschaft übersandten Abhandlung[3]) die schon in der Preisarbeit vorkommende Transformation, die gleichzeitig auch von Nöther untersucht wurde, aber sich schon bei Magnus und Hesse findet. Sie ist in beiderlei Sinne vom 3. Grade; die Flächengebüsche 3. Ordnung haben, wie schon erwähnt, eine gemeinsame Raumkurve 6. Ordnung (16. Ranges), und schneiden sich je zwei Flächen noch in einer kubischen Raumkurve, welche dieser Hauptkurve 8mal begegnet. Diese Kurven korrespondieren den Geraden des andern Raumes. Jedem Punkte einer der Hauptkurven entspricht eine Gerade, welche die andere Hauptkurve dreimal trifft, und durch diese dreifachen Sekanten entsteht eine Regelfläche 8. Grades, die Jacobische Fläche des Gebüsches im andern Raume.

Cremonas Zweck aber ist, nicht den allgemeinen Fall, sondern Spezialfälle zu betrachten; er läßt die eine Hauptkurve auf verschiedene Weisen zerfallen, wobei nicht notwendig ist, daß die andere in derselben Weise zerfällt. Und ihm sind die dabei sich ergebenden eindeutigen Flächenabbildungen wichtig; einander entsprechende Flächen sind ja eindeutig auf einander abgebildet. Um mit niedrigeren Ordnungen zu tun zu haben, legt er die abgebildete Fläche durch Teile der Hauptkurve, wodurch Absonderungen erzielt werden. So erhält er z. B. Abbildungen der Fläche 4. Ordnung mit einer doppelten Gerade

1) In anderer Bedeutung dieses Worts als bei der eindeutigen Transformation zwischen zwei Ebenen.

2) Annali di Matem. II Bd. 5 S. 131.

3) Göttinger Nachrichten 1871 S. 129; Math. Annalen Bd. 4 S. 213.

auf eine Fläche 2. oder 3. Ordnung, der Fläche 4. Ordnung mit einem doppelten Kegelschnitte oder derjenigen 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve auf eine kubische Fläche usw., also jener Flächen 4. und 5. Ordnung mit vielfachen Kurven, mit denen sich damals die Geometer eingehend beschäftigten. Es ergibt sich aber schon hier auch eine Fläche ohne vielfache Kurve, die eindeutig abbildbar wird und auf die wir gleich genauer eingehen werden.

In einem weiteren Aufsatze[1]) wird eine eindeutige Transformation behandelt, deren Gradzahlen 2 und 4 sind. Die Flächen des Gebüsches 2. Ordnung gehen durch 4 feste Punkte O, O_1, O_2, O_3 und berühren in O eine feste Ebene ω. Bilden die Punkte O das Koordinatentetraeder der x_i in diesem Raume, so sind die rationalen Beziehungen:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2 : x_4 (x_1 + x_2 + x_3);$$

aus ihnen folgen:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = Y y_2 y_3 : Y y_3 y_1 : Y y_1 y_2 : y_1 y_2 y_3 y_4,$$

wo

$$Y = y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2.$$

Das Gebüsche im y-Raume besteht aus lauter Steinerschen Flächen, welche die drei Doppelgeraden und einen Kegelschnitt gemeinsam haben; die Kegelschnitte, in denen sich je zwei noch durchschneiden, korrespondieren den Geraden des x-Raumes, während denen des y-Raumes Raumkurven 4. Ordnung mit dem Doppelpunkte O entsprechen.

Einer beliebigen Fläche 2. Grades im y-Raume korrespondiert eine Fläche 4. Ordnung, für welche O_1, O_2, O_3 konische Doppelpunkte sind, O aber ein uniplanarer Punkt von besonderer Art, nämlich so beschaffen, daß alle Strahlen des Büschels (O, ω) in ihm die Fläche vierpunktig berühren. Diese Fläche (diejenige, auf die oben hingewiesen wurde) ist auf die Fläche 2. Grades und daher auf eine Ebene eindeutig abbildbar. Cremona hebt hervor, daß damit eine eindeutig abbildbare Fläche, von höherer als 3. Ordnung, ohne vielfache Kurve gefunden sei.

Aber gleichzeitig war eine allgemeinere von konischen Knotenpunkten freie Fläche 4. Ordnung, mit ebenso beschaffenem Punkte und auch noch eindeutig abbildbar, von Nöther[2]) gefunden worden, der sich damals ebenso wie Cayley und Clebsch auch mit diesen Problemen beschäftigte.

In der Einleitung der eben besprochenen Abhandlung werden zwei andere schon bekannte Transformationen, deren Gradzahlen 2 und 2,

1) Memorie dell' Accademia di Bologna III. Bd. 1 S. 365.

2) Göttinger Nachrichten Mai 1871.

bezw. 2 und 3 sind, kurz behandelt; letztere wurde von Cayley[1]) als erstes Beispiel einer Transformation mit ungleichen Gradzahlen gefunden.

Die erstere Transformation hat in jedem Raume einen Hauptkegelschnitt $\mathfrak{K}$, bezw. $\mathfrak{K}'$ und einen Hauptpunkt O, bezw. O'; und den Punkten z. B. von $\mathfrak{K}$ entsprechen die Kanten des Kegels von O nach $\mathfrak{K}'$. Diese Transformation, etwas spezialisiert, benutzte Cremona[2]) zu einer Untersuchung der Fläche 4. Ordnung mit doppeltem Kegelschnitte, indem er durch sie eine kubische Fläche überführt. Er leitet ihre 16 Geraden und 10 Reihen von Kegelschnitten aus Geraden und Kegelschnitten der kubischen Fläche ab. Das hat gleichzeitig auch Geiser durch eine noch speziellere Form der Transformation, die quadratische Inversion, getan.[3]) Im zweiten Teile erhält Cremona einen speziellen Fall der Fläche, indem sie unendlich nahe am doppelten Kegelschnitte einen konischen Doppelpunkt besitzt, durch dieselbe Transformation, angewandt auf eine Fläche 2. Grades.

Durch eine solche Verwandtschaft (2, 2) sucht Cremona zu Flächen mit kuspidalen Kurven zu gelangen.[4]) In dem zweiten, leichter zu beschreibenden der beiden Beispiele konstruiert er eine Fläche 3. Ordnung, welche dem Kegel $(O', \mathfrak{K}')$ längs eines Kegelschnitts eingeschrieben ist; ihr korrespondiert eine Fläche 4. Ordnung, auf welcher $\mathfrak{K}$ kuspidal ist.

Wenn aus dem einen homaloidischen Flächengebüsche einer räumlichen eindeutigen Transformation eine Fläche φ herausgenommen wird und α ihre entsprechende Ebene ist, so ist ja φ auf α eindeutig abgebildet. Bildet man φ noch auf eine andere Ebene Π eindeutig ab, so entsteht eine eindeutige Verwandtschaft zwischen Π und α; die Spuren der Hauptkurven des zweiten Raumes in α werden Hauptpunkte und die jenen entsprechenden Kurven im ersten Raume, auf φ gelegen, gehen durch die Abbildung von φ in Π in die jenen Hauptpunkten entsprechenden Hauptkurven über; aber nicht alle Hauptpunkte in α und Hauptkurven in Π ergeben sich so. Durch die eindeutige Abbildung von φ in Π können Hauptpunkte hinzukommen oder auch wegfallen. Cremona versucht nun[5]) vermittelst einer eindeutigen Verwandtschaft zwischen zwei Ebenen Π und α und einer Fläcke φ, welche in Π eindeutig abgebildet ist, eine räumliche eindeutige Verwandtschaft herzustellen, in welcher φ und α entsprechend sind. Einige unklare

1) Proceed. of the London Math. Soc. Bd. 3.

2) Rendiconti dell' Istituto Lombardo II Bd. 4, S. 140, 159.

3) Journ. f. Math. Bd. 70.

4) Memorie dell' Accademia di Bologna III Bd. 2 S. 117.

5) Rendiconti dell' Istituto Lombardo II Bd. 4 S. 269, 315.

Stellen sind in der größeren Abhandlung Annali II Bd. 5 verbessert. Mir schien zuerst die Methode etwas bedenklich, aber ich habe mich überzeugt, daß der Grundgedanke richtig und fruchtbar ist, indem ich, das Verfahren Cremonas etwas ändernd, alle Transformationen ermittelt habe, bei denen das eine Gebüsche aus allgemeinen kubischen Flächen besteht.

Dieser abschließende Aufsatz, Annali II Bd. 5, verspricht eine Fortsetzung, welche aber nicht erschienen ist. Er zerfällt in zwei Teile, die allgemeine Theorie, die oben dargelegt wurde, und eine Reihe von Beispielen, welche zum Teil schon anderweitig veröffentlicht waren. Die Fortsetzung sollte wohl den allgemeinen Teil vervollständigen und vermutlich Sätze über die Anzahl der Hauptpunkte, die Anzahl und Ordnungen der Hauptkurven, ihre Vielfachheiten und ihr gegenseitiges Verhalten bringen, entsprechend den Formeln über die Anzahlen und Vielfachheiten der Hauptpunkte der Transformation zwischen zwei Ebenen.

Cremona hat nur noch einige interessante Beispiele gebracht. So bespricht er in Abhandlungen, die er gelegentlich seines zweiten Besuches in England 1884 in dortigen Zeitschriften veröffentlicht hat, zwei Transformationen, deren Gradzahlen 4 und 6, bezw. 5 und 6 sind[1]), und eine Methode, aus einer ebenen Figur eine Fläche abzuleiten.[2]) In dieser Arbeit geht er von einem dreifach unendlichen System von Kurven 6. Ordnung mit 6 gemeinsamen Doppelpunkten aus und sieht sie als die Bilder der ebenen Schnitte einer Fläche an. Er zeigt, daß diese 12. Ordnung 3. Klasse sein muß, also dual zur allgemeinen kubischen Fläche. —

In dem Sammelwerke, welches 1881 in memoriam Chelini veröffentlicht wurde, nimmt Cremona die oben besprochene *Nöthersche Fläche 4. Ordnung* vor. Er erzeugt sie durch projektive Büschel von Flächen 2. Grades, welche alle in einem festen Punkte O eine feste Ebene ω berühren. Die erzeugenden Schnittkurven sind Raumkurven 4. Ordnung mit O als Doppelpunkt, also rational, und die Existenz dieses Systems rationaler Kurven auf der Fläche, eingeschnitten durch einen Büschel, bewirkt, nach einem Satze von Nöther[3]), die eindeutige Abbildbarkeit der Fläche auf eine Ebene. In dem Punkte O berühren sich zwei Schalen der Fläche, und 4 Strahlen des Büschels (O, ω) gehören ihr ganz an, die einzigen Geraden auf ihr. Sechsmal zerfällt die erzeugende Kurve in 2 Kegelschnitte, und jeder dieser 12 Kegelschnitte wird durch einen weitern zum vollen Schnitt ergänzt. Aber die Fläche

1) Transactions of the Irish Academy Bd. 13 S. 279. — Proceedings of the London Mathematical Society Bd. 15 S. 242.

2) Transactions of the Royal Society of Edinburgh 1884 S. 411. — Die Edinburgher Universität hatte ihn zum L. L. D. gemacht; auch von Dublin war er Ehrendoktor. 3) Math. Annalen Bd. 3.

hat mehr als diese 24 Kegelschnitte. Cremona zieht wiederum die in beiderlei Sinne quadratische Verwandtschaft heran, folgendermaßen spezialisiert: in jedem der beiden Gebüsche 2. Ordnung haben die Flächen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, bezw. $\mathfrak{K}'$ gemein und berühren in einem Punkte O von $\mathfrak{K}$, bezw. O' von $\mathfrak{K}'$ eine feste Ebene ω, ω'. Aus einer Fläche 3. Ordnung, welche ω' auch in O' tangiert, ergibt sich unsere Fläche; sie geht durch $\mathfrak{K}$ und enthält noch 55 Kegelschnitte, nämlich die Ergänzung von $\mathfrak{K}$ und die 2. 27 Kegelschnitte, die aus den Geraden und den durch O' gehenden Kegelschnitten der kubischen Fläche hervorgehen. Vermittels der mehrfach erwähnten in beiderlei Sinne kubischen Transformation erhält er eine eindeutige Abbildung der Fläche auf eine Ebene, bei der aus ihren ebenen Schnitten Kurven 6. Ordnung mit 7 festen doppelten und 4 festen einfachen Punkten werden. Auf 63 Weisen läßt sich die Fläche so erzeugen, wie oben beschrieben wurde. —

Mit den *Krümmungslinien*, insbesondere auf den Flächen 2. Grades, beschäftigt sich ein die analytischen Methoden der Differentialgeometrie benutzender Aufsatz aus 1871.[1]) In jedem Punkt einer Fläche gibt es zwei Tangenten, welche die absolute Kurve treffen; die zu ihnen konjugierten Tangenten und die von solchen Tangenten eingehüllten Kurven auf der Fläche werden betrachtet; zur Enveloppe haben sie eine imaginäre Krümmungslinie, längs welcher die abwickelbare Fläche tangiert, welche der Fläche und der absoluten Kurve umgeschrieben ist. Für eine algebraische Fläche ist dieselbe algebraisch, sowie auch der unendlich ferne Schnitt eine algebraische Krümmungslinie ist. Dazu treten bei den Flächen 2. Grades F^2 die 3 Hauptschnitte als Krümmungslinien. Cremona zeigt, daß das System der Krümmungslinien der F^2 durch Projektion aus einem ihrer Punkte in ein quadratisches System von Kurven 4. Ordnung projiziert wird, das also einem Netze angehört und deshalb (wie ein Kegelschnitt durch 5 Punkte) durch die Projektionen jener 5 Kurven bestimmt ist. Alle diese Kurven haben 2 Doppelpunkte und die 2.4 Tangenten aus ihnen gemeinsam. Das sind die Projektionen der 8 Geraden der F^2, welche die absolute Kurve treffen und je drei Nabelpunkte enthalten. —

Schon aus der ersten Zeit der Produktion stammt eine der *Analysis* angehörige Abhandlung[2]), in der ein Satz von Abel[3]) bewiesen wird. Aber auch in der Zeit reicher geometrischer Produktion hat Cremona Zeit gehabt, sich mit der Theorie der Abelschen Funktionen vertraut zu machen und selbst mitzuarbeiten.

1) Memorie dell' Accademia di Bologna III Bd. 1 S. 49.

2) Annali di Scienze matem. e. fis. Bd. 7 (1856) S. 99.

3) Journal f. Math. Bd. 6 S. 73; Oeuvres complètes Bd. 2 S. 271.

Hinsichtlich der Anzahl der Moduln der algebraischen Gleichungen oder Kurven, welche zu einem gegebenen Geschlechte $p > 1$ gehören, d. h. ihrer Konstanten, welche nicht durch eindeutige Transformationen entfernt werden können, hatten Riemann und Cayley verschiedene Angaben gemacht, jener $3p - 3$, dieser $4p - 6$. In einer Arbeit, deren beide Teile von Casorati und Cremona herrühren[1]), bestätigt Cremona durch geometrische Überlegungen die Angabe von Riemann. Und eine umfangreichere Abhandlung[2]) über Integrale mit algebraischem Differential hat den Zweck, unter einer mehr geometrischen Form den Inhalt einiger Paragraphen der „Theorie der Abelschen Funktionen" von Clebsch und Gordan darzustellen, nämlich die Reduktion der genannten Integrale auf die drei typischen Gattungen und das Abelsche Theorem über die Integrale der 3. Gattung.

Durch dasselbe Buch wurde auch angeregt die Ermittelung der rationalen Transformation, durch welche eine hyperelliptische Kurve vom Geschlechte p übergeführt wird in die einfachere Form einer Kurve $(p + 2)$ter Ordnung mit einem p-fachen Punkte[3]); für $p = 1, 2$ war sie durch Clebsch und Gordan a. a. O. ausgeführt worden. —

In das Jahr 1875 fällt eine größere Abhandlung, mit welcher er sich der *Liniengeometrie* zuwendet: über *die Korrespondenz zwischen der Theorie der Systeme von Geraden und der Theorie der Oberflächen.*[4]) Er beschäftigt sich dort mit der eindeutigen Abbildung des linearen Strahlenkomplexes (oder Gewindes, wie ich vorgeschlagen habe, dies Strahlengebilde zu nennen) C in den Punktraum S'; Nöther und Lie haben diese Abbildung gefunden.[5]) Dieselbe hat in C eine Hauptgerade r und in S' einen Hauptkegelschnitt K'. Den Geraden und Ebenen von S' korrespondieren die durch r gehenden Regelscharen und Strahlennetze (linearen Kongruenzen) von C, den Geraden aber, welche K' treffen, die Strahlenbüschel von C; hingegen einer beliebigen Regelschar, einem beliebigen Strahlennetze von C korrespondiert in S' ein Kegelschnitt, welcher K' zweimal trifft, eine Fläche 2. Grades, die durch K' geht. Einer Fläche F' in S' entspricht in C eine Kongruenz, und es ist besonders interessant, wie Cremona aus den Kurven auf F', deren Tangenten die K' treffen, die Brennfläche der Kongruenz herleitet. Wenn F' eine durch K' gehende kubische Fläche ist, so ergibt sich eine Kongruenz 2. Ordnung 2. Klasse; die 16 Geraden von

1) Rendiconti dell' Istituto Lombardo II Bd. 2 (1869) S. 620.
2) Memorie dell' Accademia di Bologna II Bd. 10 (1869) S. 3.
3) Rendiconti dell' Istituto Lombardo II Bd. 2 (1869) S. 566.
4) Atti dell' Accademia dei Lincei II Bd. 3.
5) Göttinger Nachr. 1869; Math. Annalen Bd. 5.

F', welche K' treffen, führen zu den 16 Strahlenbüscheln der Kongruenz und den Doppelelementen der Brennfläche, der bekannten Kummerschen Fläche 4. Ordnung 4. Klasse; und auch die fünf Kongruenzen gleicher Art, welche dieselbe Brennfläche haben, werden leicht erhalten.

Im zweiten Teil der Abhandlung wird — analytisch — aus dieser Abbildung die Liesche zwei-eindeutige Verwandtschaft abgeleitet: zwischen der vierfach unendlichen Mannigfaltigkeit der Geraden des Raumes und der der Flächen 2. Grades durch K' oder, indem nach Lies Vorgange die absolute Kurve als K' genommen wird, der Kugeln. Jeder Kugel, der in der früheren Abbildung ein Strahlennetz von C entspricht, werden jetzt die beiden Leitgeraden desselben zugeordnet. Cremona führt 5 homogene Koordinaten der Kugel ein und gibt die Formeln zwischen ihnen und den tetraedrischen Koordinaten der einen oder andern entsprechenden Gerade. Der Ausdruck, in den Kugelkoordinaten, für den Cosinus des Schnittwinkels zweier Kugeln — ihre „Entfernung" nach Cayleys verallgemeinerter Maßbestimmung — wird ermittelt; den Kugeln, welche eine feste Kugel unter gegebenem Winkel schneiden, korrespondieren Strahlenpaare, welche zwei Gewinde erzeugen, die in bezug auf C polar sind; ist der Winkel ein rechter, so vereinigen sie sich in ein Gewinde, das zu C in Involution ist[1]); dies führt auch zu der bekannten Figur von 6 Gewinden, die zu je zweien in Involution sind, und zu den zugehörigen Kleinschen Strahlenkoordinaten.

In Zusammenhang hiermit steht vermutlich eine Mitteilung: Systèmes de sphères et systèmes de droites, welche er 1876 der British Association gemacht hat.[2]) —

Es ist noch über einige Schriften zu berichten, welche aus Cremonas Lehrtätigkeit erwachsen sind.

In Mailand an der technischen Hochschule hatte er, neben der höheren Geometrie, auch *die graphische Statik* zu vertreten, oder vielmehr einzuführen. Diese durch den Ingenieur Culmann in Zürich in den sechziger Jahren geschaffene neue Disziplin hat den Zweck, die statischen Probleme der Ingenieure nicht rechnerisch, sondern graphisch zu behandeln. Diese neue Methode übertraf in der Tat die ältere in bezug auf Eleganz, Genauigkeit und Übersichtlichkeit; Cremona, der übrigens beim Abgange von der Universität Pavia das Diplom als Ingenieur-Architekt erworben, bemächtigte sich schnell derselben. Seine Mailänder Vorträge gab er lithographiert als Corso di Statica grafica heraus. Ich habe vor 30 Jahren, als ich in Darmstadt ebenfalls die

1) Vergl. meine Liniengeometrie Bd. 1 Nr. 202ff., Bd. 2 Nr. 376 und Bd. 1 Nr. 209 ff.

2) Report of the British Association 1876 S. 12.

Vorträge über graphische Statik zu übernehmen hatte, dies Buch mit großem Nutzen studiert. Zur Zeit steht es mir nicht zur Verfügung, und ich berichte nach freundlicher Mitteilung von Reye. Culmann setzte in erheblicher Weise die Geometrie der Lage voraus, und das erste Erscheinen des bekannten Buches von Reye selbst, der damals in Zürich dozierte, hängt damit zusammen. Der erste Teil des Corso ist daher Geometria di posizione, secondo Zech e Reye; sie geht bis zu der Kollineation und Korrelation und dem Polarsystem der Flächen 2. Grades. Der zweite Teil bringt zunächst den sogenannten graphischen Kalkül, über welchen Cremona noch ein besonderes Buch geschrieben hat, und dann die eigentliche graphische Statik. Darin werden Kräfte- und Seilpolygon, Schwerpunkt, die Trägheitsmomente, das Zentralellipsoid und die Trägheitsellipsoide eines Körpers, die Zentralellipsen und der Kern einer ebenen Figur behandelt, die Konstruktion der innern Kräfte in Quer- und Längsschnitten eines Balkens gelehrt, „secondo Culmann"; aber ich erinnere mich wohl, daß insbesondere in den Abschnitten über Trägheitsmomente usw. manches sich befand, was Cremonaschen Ursprungs war.

1872 erschien die Schrift über die reziproken Figuren in der graphischen Statik. Die wichtigsten Figuren derselben, das Kräftepolygon im Gleichgewichte befindlicher Kräfte in der Ebene und ein zugehöriges Seilpolygon haben die bemerkenswerte Eigenschaft, daß zu jeder Gerade, die in der einen auftritt, eine parallele in der andern vorhanden ist. Cremona nennt sie (nach Maxwell, der in jener Zeit auch auf diesem Gebiete arbeitete) reziproke Figuren und fragt sich, wie erhält man solche Figuren? Er erkennt das räumliche Nullsystem[1]) als ein Mittel zu ihrer Herstellung. Werden nämlich zu den Ecken, Kanten, Flächen eines Polyeders die polaren Elemente im Nullsysteme, die Flächen, Kanten, Ecken eines zweiten Polyeders, konstruiert und beide Polyeder orthogonal auf eine Ebene projiziert, welche zu der Achse des Nullsystems normal ist, so entstehen reziproke Figuren. Ob es wohl bei jeder technischen Zeichnung, welche reziproke Figuren enthält, möglich ist, die Polyeder und das Nullsystem herzustellen?

Die Elementi di Calcolo grafico erschienen 1874 und sind zunächst für die vorbereitenden technischen Schulen Italiens bestimmt, sie hängen mit der graphischen Statik zusammen, haben aber für jeden Geometer unabhängiges Interesse. Der Inhalt ist: Prinzip der Vorzeichen, graphische Addition, Multiplikation, Potenzierung, Radizierung (wobei die logarithmische Spirale wertvoll wird), Auflösung numerischer Gleichungen,

1) Als dessen ersten Entdecker er hier seinen Landsmann Giorgini reklamiert.

Reduktion ebener Flächen auf eine Basis, Schwerpunkts-Eigenschaften und -Konstruktionen. Der große Geometer hat es nicht unter seiner Würde gehalten, sich mit diesen elementaren Dingen zu beschäftigen; er stellt sie mit gewohnter Eleganz dar; als vorzüglichste Quellen nennt er: Möbius, Chelini, Graßmann, Culmann.

Ein Jahr vorher hatte er seine *Elementi di Geometria projettiva* (auch für die technischen Schulen) veröffentlicht.

Die ersten Paragraphen sind: Definitionen („Projizieren und Schneiden sind die fundamentalen Operationen der projektiven Geometrie"), Zentralprojektion (unendlich ferne und Fluchtelemente, perspektive Dreiecke), Homologie in der Ebene und im Raum, geometrische Gebilde der drei Stufen, Prinzip der Dualität, projektive Gebilde („zwei Gebilde derselben Stufe heißen projektiv, wenn eins aus dem andern durch eine endliche Anzahl von Projektionen und Schnitten sich ableiten läßt"), harmonische Gebilde, nach Staudt definiert, nun erst Doppelverhältnis. Darauf geht das Buch in eine Theorie der Kegelschnitte über, woraus ich noch hervorheben möchte die an Pascals und Brianchons Satz geknüpften Folgerungen und Konstruktionen, die projektiven Gebilde auf einem Kegelschnitte, Aufgaben 2. Grades. Die Brennpunkts-Eigenschaften und die Systeme von Kegelschnitten waren einem zweiten Teile vorbehalten, der nicht erschienen ist. Wertvoll sind zahlreiche geschichtliche Notizen in der Vorrede und in den Anmerkungen.

Die beiden Elemente sind ins Deutsche übersetzt worden, die Geometria projettiva auch ins Französische und Englische.

Interessant sind noch einige Besprechungen von Büchern, so der Beiträge zur Geometrie der Lage von Staudt, gegen dessen prinzipiellen Standpunkt er sich damals (Annali I Bd. 1) etwas ablehnend verhält, während er später ihn höher schätzt, eine sehr anerkennende von Hesses Oberflächen 2. Ordnung (Annali I Bd. 5) und eine die große Bedeutung Desargues' hervorhebende der von Poudra herausgegebenen Oeuvres desselben (im nämlichen Bande der Annali und im Giornale di Matem. Bd. 2), sowie von Casoratis Teorica delle funzioni di variabili complesse (Rendiconti dell' Istituto Lombardo II Bd. 1).

Schließlich ist noch die Teilnahme Cremonas an der Redaktion der Annali di Matematica seit der zweiten Serie zu erwähnen.[1])

1) Während der Abfassung dieses Nachrufs erhielt ich von Herrn Veronese die von ihm in der Akademie der Lincei in der Sitzung vom 20. Dezember 1903 gehaltene Commemorazione auf Cremona (Rendiconti dell' Accademia dei Lincei V Bd. 12 2. Sem. S. 664), sowie während des Drucks die Commemorazione des Herrn Loria (Atti della Società Ligustica delle Scienze nat. e geogr. Bd. 15). Beiden Kollegen verdanke ich auch einige briefliche Mitteilungen.

Étude sur l'interpolation et la décomposition des fonctions rationnelles en fractions partielles;

Par GYŐZŐ ZEMPLÉN à Budapest.

Le problème de l'interpolation des fonctions entières rationnelles peut être formulé sous la forme la plus générale de la manière suivante:

A. *Quelle est la fonction entière rationnelle du degré*

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n - 1 = N$$

au maximum, qui satisfait aux conditions suivantes:

$$\left(\frac{d^j f(x)}{dx^j}\right)_{x=x_r} = u_{rj} \qquad \binom{j = 0, 1, 2, \ldots, k_r - 1}{r = 1, 2, \ldots, n} \tag{1}$$

où $f(x)$ *désigne la fonction à déterminer et* $\frac{d^0 f(x)}{dx^0} = f(x)$.

C'est ainsi que Markoff formule le problème de l'interpolation dans son œuvre parue en allemand sous le titre *Differenzenrechnung* (Leipzig 1896, Teubner, p. 1) et traduite de l'original russe par Friesendorff et Prümm; mais il ne donne qu'une méthode récursive pour la détermination des coefficients de la fonction $f(x)$ (p. 2) et détermine la forme explicite de $f(x)$ seulement dans quelques cas spéciaux. La formule de Markoff est la suivante (l. c. p. 2):

$$\begin{aligned}
f(x) = Q_0 &+ Q_{k_1}(x - x_1)^{k_1} + \cdots \\
&+ Q_{N-k_n}(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_{r-1})^{k_{r-1}} \\
&+ Q_1(x - x_1) + Q_{k_1+1}(x - x_1)^{k_1}(x - x_2) + \cdots \\
&+ Q_{N-k_n+1}(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_{r-1}^{k_{r-1}}(x - x_r) \\
&+ Q_2(x - x_1)^2 + Q_{k_1+2}(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^2 + \cdots \\
&+ Q_{N-k_n+2}(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_{r-1})^{k_{r-1}}(x - x_r)^2 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&+ Q_{k_1-1}(x - x_1)^{k_1-1} + Q_{k_1+k_2-1}(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2-1} + \cdots \\
&+ Q_{N-1}(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_r)^{k_r-1}
\end{aligned}$$

où les coefficients $Q_0, Q_1, \cdots, Q_{N-1}$ peuvent être déterminés *successivement* à l'aide des conditions (1). Quoique les formules récursives donnent la solution complète du problème et satisfassent tout à fait aussi aux exigences des calculs pratiques: c'est toujours un progrès en Mathématique de résoudre un problème par des formules explicites, dont on peut tirer beaucoup de fois des conséquences qui ne peuvent être déduites des formules récursives; il suffit de mentionner la formule d'interpolation de Lagrange qui est la solution explicite de notre problème dans le cas spécial

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1.$$

Je crois que la solution explicite du problème A n'est pas encore connue[1]); c'est pourquoi je me propose de déterminer la forme explicite de la fonction $f(x)$ satisfaisant aux conditions (1). Je vais en outre appliquer ces formules à la solution complète et plus détaillée que la solution connue jusqu'ici du problème de la décomposition des fonctions rationnelles en fractions partielles.

Ces études sur lesquelles mon attention a été attirée par M. Rados, professeur à l'école polytechnique de Budapest, qui m'a fourni aussi beaucoup de conseils dans la solution du problème, ont paru d'abord en hongrois dans le Mathematikai és Physikai Lapok (décembre 1900).

Je vais d'abord démontrer que le problème A a toujours une solution bien déterminée, car il y a toujours une seule fonction $f(x)$ satisfaisant à toutes les conditions du problème.

I.

Soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-1},$$

alors les conditions (1) donnent pour la détermination des coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}$ le système d'équations linéaires suivant:

$$(1^*)\left\{\begin{array}{l}
a_0 + a_1 x_r + a_2 x_r^2 + \cdots + a_j x_r^j + a_{j+1} x_r^{j+1} + \cdots + a_{N-1} x_r^{N-1} = u_{r0} \\
a_1 + 2 a_2 x_r + \cdots + j\, a_j x_r^{j-1} + (j+1) a_{j+1} x_r^j + \cdots + (N-1) a_{N-2} x_r^{N-2} = u_{r1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ j! a_j + j! \binom{j+1}{j} a_{j+1} x_r + \cdots + j! \binom{N-1}{j} a_{N-1} x_r^{N-j-1} = u_{rj} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(k_r - 1)! a_{k_r - 1} + \cdots + (k_r - 1)! \binom{N-1}{k_r - 1} a_{N-1} x_{N-k_r} = u_{r k_r - 1}
\end{array}\right.$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n)$$

1) Même dans le fasc. 6 du vol. I de l'Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, paru le 30 mai 1901, le problème A est seulement proposé, mais non résolu (p. 806).

dont le déterminant est

$$D = \left|\begin{array}{llllll} & & \cdots\cdots\cdots & & & \\ 1\ x_r\ \ x_r^2 \ldots\ x_r^j & & x_r^{j+1} & x_r^{j+2} \ldots & & x_r^{N-1} \\ 0\ 1\ \ 2x_r \ldots jx_r^{j-1} & & (j+1)x_r^j & (j+2)x_r^{j+1} \ldots & & (N-1)x_r^{N-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\ 0 \ldots 0 & j! & j!\binom{j+1}{j}x_r & j!\binom{j+1}{j}x_r^2 & \ldots & j!\binom{N-1}{j}x_r^{N-1-j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots\ldots & 0 & (k_r-1)! \ldots & & (k_r-1)!\binom{N-1}{k_r-1}x_r^{N-k_r} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & & \\ & & (r=1,2,\ldots,n) & & & \end{array}\right|$$

Le déterminant D a été calculé par M. Beke[1]) avec une méthode très simple employée pour la première fois dans le cas spécial

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 2$$

par M. Bauer.[2]) Comme je vais employer la même méthode pour le calcul d'autres déterminants, je vais montrer comment cette détermination de D est possible.

Entre D et

$$D' = \left|\begin{array}{llll} & & \cdots\cdots\cdots & \\ 1 & x_r & x_r^2 & \ldots x_r^{N-1} \\ 1 & (x_r+h) & (x_r+h)^2 & \ldots (x_r+h)^{N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_r+(k_r-1)h & (x_r+(k_r-1)h)^2 & \ldots (x_r+(k_r-1)h)^{N-1} \\ & & \cdots\cdots\cdots & \\ & & (r=1,2,\ldots,n) & \end{array}\right|$$

le déterminant Vandermondien des quantités:

$$\begin{array}{l} x_1,\ x_1+h,\ x_1+2h,\ \ldots.\ x_1+(k_1-1)h \\ x_2,\ x_2+h,\ x_2+2h,\ \ldots.\ x_2+(k_2-1)h, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n,\ x_n+h,\ x_n+2h,\ \ldots,\ x_n+(k_n-1)h \end{array}$$

il y a la relation suivante

$$D = \left(\frac{D'}{h^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{k_i(k_i-1)}{2}}}\right)_{h=0},$$

---

1) Mathematikai és Physikai Lapok vol. VII, p. 115.

2) Math. és Phys. L. vol. II, p. 171; on trouve la valeur du déterminant D aussi chez Markoff l. c. p. 168.

parce que le terme général du complexe de D' contenant x_r peut être mis sous la forme:

$$D'^{(r)}_{jm} = (x_r + jh)^m - \binom{j}{1}(x_r + (j-1)h)^m + \binom{j}{2}(x_r + (j-2)h)^m - \cdots + (-1)^j x_r^m$$

avec une transformation identique de D', et

$$\left(\frac{D^{(r)}_{jm}}{h^j}\right)_{h=0} = \frac{d^j(x_r^m)}{dx^j} = j!\binom{m}{j} x_r^{m-j}$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots, k_r - 1;\ m = 0, 1, 2, \ldots, N-1;\ r = 1, 2, \ldots, n).$$

D' peut être aisément calculé, et nous aurons ainsi:

$$(2) \qquad D = \prod_{w=1}^{n} (k_w - 1)!\,(k_w - 2)!\,\ldots\,3!\;2! \prod_{t>s} (x_t - x_s)^{k_t k_s}$$
$$(t, s = 1, 2, \ldots, n)$$

On voit ainsi, que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont *distincts* (comme nous devons le supposer dans la formulation de notre problème), D est toujours différent de zéro, les coefficients de $f(x)$ peuvent donc être calculés d'une seule manière.

Pour la détermination de $f(x)$ nous allons employer une méthode appliquée souvent pour la déduction de la formule de Lagrange.

Vu que le système (1^*) permet une seule solution pour $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, joignant à ce système l'équation

$$-f(x) + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-1} = 0,$$

nous aurons un système d'équations homogènes et linéaires pour $-1, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}$ dont voici le déterminant

$$(3) \quad A = \begin{vmatrix}
f(x) & 1 & x & x^2 \ldots & x^j & x^{j+1} \ldots & x^{N-1} \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
u_{r0} & 1 & x_r & x_r^2 \ldots & x_r^j & x_r^{j+1} \ldots & x_r^{N-1} \\
u_{r1} & 0 & 1 & 2x_r \ldots & j\, x_r^{j-1} & (j+1)\,x_r^j \ldots & (N-1)\,x_r^{N-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
u_{rj} & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & j! & j!\binom{j+1}{j} x_r \ldots & j!\binom{N-1}{j} x_r^{N-j-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
u_{r\,k_r-1} & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots & (k_r-1)! \ldots & (k_r-1)!\binom{N-1}{k_r-1} x_r^{N-k_r} \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix} = 0.$$
$$(r = 1, 2, \ldots, n)$$

En développant ce déterminant selon les termes de la première colonne, nous aurons

$$(4) \qquad D f(x) = -\sum_{j=0}^{k_r - 1} \sum_{r=1}^{n} A_{rj} u_{rj}.$$

A_{rj} est ici le sous-déterminant de u_{rj} dans A; le sous-déterminant de $f(x)$ est D.

La détermination de la fonction $f(x)$ est ainsi réduite à la détermination des A_{rj}

$$A_{rj}(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+j+1} =$$

$$\left|\begin{array}{llllll}
1\;\; x\;\; x^2\ldots x^j & x^{j+1} & \ldots & & & x^{N-1} \\
1\;\; x_i\;\; x_i^2\ldots x_i^{j_i} & x_i^{j_i+1} & \ldots & & & x_r^{N-1} \\
\ldots & & & & & \\
0\;\; 0\ldots 0\;\; j_i! & j_i!\binom{j_i+1}{j_i}x_i & \ldots & & & j_i\binom{N-1}{j_i}x_i^{N-j_i-1} \\
\ldots & & & & & \\
0\;\; 0\;\ldots\; 0\;\ldots\; 0 & (k_i-1)! & \ldots & & & (k_i-1)!\binom{N-1}{k_i-1}x_i^{N-k_i} \\
\ldots & & & & & \\
1\;\; x_r\;\; x_r^2\ldots x_r^{j-1} & x_r^j & x_r^{j+1} & x_r^{j+2} & \ldots & x_r^{N-1} \\
\ldots & & & & & \\
0\;\; 0\ldots 0\;\; (j-1)! & (j-1)!\binom{j}{j-1}x_r & (j-1)!\binom{j+1}{j-1}x_j^2 & (j-1)!\binom{j+2}{j-1}x_r^3 & \ldots & (j-1)!\binom{N-1}{j-1}x_r^{N-j} \\
0\;\; 0\ldots 0\;\; 0 & 0 & (j+1) & (j+1)!\binom{j+2}{j+1}x_r & \ldots & (j+1)!\binom{N-1}{j+1}x^{N-j-2} \\
\ldots & & & & & \\
0\;\; 0\ldots 0\;\; 0 & 0 & 0\ldots(k_r-1)! & \ldots & & (k_r-1)!\binom{N-1}{k_r-1}x_r^{N-k_r-1} \\
\ldots & & & & & \\
1\;\; x_l\;\; x_l^2\ldots x_l^{j_l} & x_l^{j_l+1} & \ldots & & & x_l^{N-1} \\
\ldots & & & & & \\
0\;\; 0\ldots 0\;\; j_l! & j_l!\binom{j_l+1}{j_l}x_l & \ldots & & & j_l\binom{N-1}{j_l}x_l^{N-j_l-1} \\
\ldots & & & & & \\
0\;\; 0\ldots 0\;\; 0\;\ldots & 0\;(k_l-1)! & \ldots & & & (k_l-1)!\binom{N-1}{k_l-1}x_l^{N-l_l-1} \\
\ldots & & & & &
\end{array}\right|$$

$$(i=1,2,\ldots,r-1;\; l=r+1,r+2,\ldots,n)$$

A_{rj} peut être calculé en partie avec les mêmes méthodes que D. Soit A'_{rj} le déterminant que nous tirons de A_{rj} en remplaçant les lignes contenant x_r par les lignes suivantes:

$$\begin{array}{lllll}
1, & y_0, & y_0^2, & \ldots, & y_0^{N-1} \\
1, & y_1, & y_1^2, & \ldots, & y_1^{N-1} \\
\ldots & & & & \\
1, & y_{j-1}, & y_{j-1}^2, & \ldots, & y_{j-1}^{N-1} \\
1, & y_{j+1}, & y_{j+1}^2, & \ldots, & y_{j+1}^{N-1} \\
\ldots & & & & \\
1, & y_m, & y_m^2, & \ldots, & y_m^{N-1}
\end{array}$$

où $m = k_r - 1$.

Alors

$$(5)\qquad \begin{gathered}(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+j+1}A_{rj}=\\ =\left(\frac{d^{1+2+\cdots+j-1+j+1+j+2+\cdots+k_r-1}}{dy_1\,dy_2^2\ldots dy_{j-1}^{j-1}dy_{j+1}^{j+1}dy_{j+2}^{j+2}\ldots dy_m^m}A'_{rj}\right)_{y_0=y_1=\cdots=y_{j-1}=y_{j+1}=\cdots=y_m=x_r}\end{gathered}$$

A'_{rj} peut être calculé de la même façon que D et on a

$$\begin{gathered}A'_{rj}(-1)^{(k_r-1)(k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+1)}=\\ \prod_{w=1}^{n}{}^{(r)}(k_w-1)!\,(k_w-2)!\ldots 3!\,2!\,(x_w-x)^{k_w}.\\ \prod_{\substack{t>s\\ t,s=1,2,\ldots,n}}^{(r)}(x_t-x_s)^{k_t k_s}\Delta(y_0,\,y_1,\,y_2,\,\ldots,\,y_{j-1},\,y_{j+1},\,\ldots,\,y_m).\\ \prod_{u=0}^{n}{}^{(j)}(x-y_u)(x_1-y_u)^{k_1}(x_2-y_u)^{k_2}\ldots\\ \ldots(x_{r-1}-y_u)^{k_{r-1}}(x_{r+1}-y_u)^{k_{r+1}}\ldots(x_n-y_u)^{k_n},\end{gathered}$$

où $\prod\limits_{w=1}^{n}{}^{(r)}=\prod\limits_{w=1,2,\ldots,r-1,r+1,\ldots,n}$, $\prod^{(j)}$ ont une signification analogue, tandis que $\Delta(y_0,\,y_1,\,\ldots,\,y_{j-1},\,y_{j+1},\,\ldots,\,y_m)$ est le Vandermondien des y.

Soit maintenant

$$(x-y)(x_1-y)^{k_1}(x_2-y)^{k_2}\ldots(x_{r-1}-y)^{k_{r-1}}(x_{r+1}-y)^{k_{r+1}}\ldots(x_n-y)^{k_n}=\varphi_r(y),$$

alors

$$(6)\left\{\begin{gathered}(-1)^{(k_r-1)(k_1+k_2+\cdots+k_r+1)}A'_{rj}=\\ =\prod_{w=1}^{n}{}^{(r)}(k_w-1)!(k_w-2)!\ldots3!\,2!\left(\frac{\varphi_r(y)}{x-y}\right)_{y=x}\Delta(y_0,y_1,\ldots,y_{j-1},y_{j+1},\ldots,y_m)\\ \prod_{\substack{t,s=1,2,\ldots,n\\ t>s}}^{(r)}(x_t-x_s)^{k_t k_s}\varphi_r(y_0)\,\varphi_r(y_1)\ldots\varphi_r(y_{j-1})\,\varphi_r(y_{j+1})\ldots\varphi_r(y_m)\end{gathered}\right.$$

ou en abrégé

$$(6^*)\qquad A'_{rj}=M\Delta\psi_0\psi_1\psi_2\ldots\psi_{j-1}\psi_{j+1}\ldots\psi_m,$$

où

$$\begin{gathered}\Delta=\Delta(y_0,\,y_1,\,\ldots,\,y_{j-1},\,y_{j+1},\,\ldots,\,y_m),\\ \psi_u=\varphi_r(y_u)\qquad\qquad (u=0,1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,m)\end{gathered}$$

et M est un facteur indépendant des y.

Pour tirer A_{rj} de A'_{rj} nous devons calculer la dérivée de

$$C_{rj}=\Delta\psi_1\psi_2\ldots\psi_{j-1}\psi_{j+1}\ldots\psi_m,$$

indiquée sous (5) notant que ψ_u dépend exclusivement de y_u et pas des autres y.

Soit en abrégé:

$$\psi_u^{(\mu)} = \frac{d^\mu \psi_u}{d y^\mu}$$

et

$$\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_m} = \frac{d^{i_1+i_2+\dots+i_{j-1}+i_{j+1}+\dots+i_m}}{d y_1^{i_1}\, d y_2^{i_2} \dots d y_{j-1}^{i_{j-1}}\, d y_{j+1}^{i_{j+1}} \dots d y_m^{i_m}} \Delta.$$

Nous allons différentier C_{rj}

	une	fois	selon	$y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_m$	(1)
	„	„	„	$y_2, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_m$	(2) etc.
	„	„	„	$y_{j-1}, y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_m$	$(j-1)$
	„	„	„	$y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_m$	$(j+1)$
encore	„	„	„	$y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_m$	$(j+1)^*$
	„	„	„	$y_{j+2}, \dots, y_m$	$(j+2)$ etc.
	„	„	„	y_m	(m)

Les opérations (1), (2), ... (m), peuvent être toutes exécutées selon la même formule

$$C_{rj}^{(1)} = \frac{d^{m-1} C_{rj}}{d y_1\, d y_2 \dots d y_{j-1}\, d y_{j+1} \dots d y_m}$$

$$= \Delta \psi_1' \psi_2' \dots \psi_{j-1}' \psi_{j+1}' \dots \psi_m' + \frac{\partial \Delta}{\partial y_1} \psi_1 \psi_2' \dots \psi_{j-1}' \psi_{j+1}' \dots \psi_m' +$$

$$+ \frac{\partial \Delta}{d y_2} \psi_1' \psi_2 \psi_3' \dots \psi_m' + \dots + \frac{\partial^2 \Delta}{d y_1\, d y_2} \psi_1 \psi_2 \psi_3' \dots \psi_{j-1}' \psi_{j+1}' \dots y_m' +$$

$$+ \frac{\partial^2 \Delta}{d y_1\, d y_3} \psi_1 \psi_2' \psi_3 \psi_4' \dots \psi_m' + \dots +$$

$$+ \frac{\partial^u}{d y_1\, d y_2 \dots d y_u} \psi_1 \psi_2 \dots \psi_u \psi_{u+1}' \dots \psi_{j-1}' \psi_{j+1}' \dots \psi_m' + \dots +$$

$$+ \frac{\partial^{m-1} \Delta}{d y_1\, d y_2 \dots d y_{j-1}\, d y_{j-2} \dots d y_m} \psi_1 \psi_2 \dots \psi_{j-1} \psi_{j+1} \dots \psi_m$$

ou, employant le signe $\sum$,

$$C_{rj}^{(1)} = \sum_{(i_{11}, i_{12}, \dots, i_{1j-1}, i_{1j+1}, i_{1m} = 0,1)} \Delta_{i_{11} i_{12} \dots i_{1j-1} i_{1j+1} \dots i_{1m}}$$

$$\psi_1^{(1-i_{11})} \psi_2^{(1-i_{12})} \dots \psi_{j-1}^{(1-i_{j-1})} \psi_{j+1}^{(1-i_{j+1})} \dots \psi_m^{(1-i_{1m})}.$$

Les opérations (2), (3), ... sont à exécuter sur chaque terme de $C_{rj}^{(1)}$, et nous aurons ainsi

$$C_{rj}^{(m)} = \sum$$

$$\left\{\begin{array}{llllll}
i_{11}, i_{12}, \ldots, i_{1\,j-1}, & i_{1\,j+1}, & i_{1\,j+2}, & \ldots, i_{1\,m}, & & \\
\quad i_{22}, \ldots, i_{2\,j-1}, & i_{2\,j+1}, & i_{2\,j+2}, & \ldots, i_{2\,m}, & & \\
\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\quad\quad i_{j-1\,j-1}, & i_{j-1\,j+1}, & i_{j-1\,j+2}, & \ldots, i_{j-1\,m} & & \\
 & i_{j+1\,j+1}, & i_{j+1\,j+2}, & \ldots, i_{j+1\,m} & & \\
 & i'_{j+1\,j+1}, & i'_{j+1\,j+2}, & \ldots, i'_{j+1\,m} & & \\
 & & i_{j+2\,j+2}, & \ldots, i_{j+2\,m} & & \\
 & & \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots} & & \\
 & & & i_{mm} = 0, 1 & &
\end{array}\right\}$$

$$\Delta_{i_{11},\, i_{12}+i_{22}, \ldots, i_{1\,j-1}+i_{2\,j-1}+\cdots+i_{j-1\,j-1},\, i_{1\,j+1}+i_{2\,j+1}+\cdots+}$$
$$_{+i_{j-1\,j+1}+i_{j+1\,j+1}+i'_{j+1\,j+1},\, i_{1\,j+2}+\cdots+i_{j-1\,j+2}+i'_{j+1\,j+2}+i_{j+2\,j+2}, \ldots,}$$
$$_{i_{1m}+i_{2m}+\cdots+i_{j-1\,m}+i_{j+1\,m}+i'_{j+1\,m}+\cdots+i_{mm}}$$
$$\psi_1^{(1-i_{11})}\,\psi_2^{(2-(i_{11}+i_{12}))}\ldots$$
$$\ldots\psi_{j-1}^{(j-1-(i_{1\,j-1}+\cdots+i_{j-1\,j-1}))}\,\psi_{j+1}^{(j+1-(i_{1\,j+1}+\cdots+i_{j-1\,j+1}+i_{j+1\,j+1}+i'_{j+1\,j+1}))}$$
$$\psi_{j+2}^{(j+2-(i_{1\,j+2}+\cdots+i_{j-1\,j+2}+i_{j+1\,j+2}+i'_{j+1\,j+2}+i_{j+2\,j+2}))}$$
$$\ldots\psi^{(m-(i_{1m}+\cdots+i_{j-1\,m}+i'_{j+1\,m}+i_{j+2\,m}+\cdots+i_{mm}))}$$

En sommant les termes égaux nous aurons

$$C_{rj}^{(m)} = \sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{2}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{j-1}\;\sum_{i_{j+1}=0}^{j+1}\;\sum_{i_{j+2}=0}^{j+2}\cdots$$

$$\tag{7} \cdots\sum_{i_m=0}^{m}\binom{1}{i_1}\binom{2}{i_2}\cdots\binom{j-1}{i_{j-1}}\binom{j+1}{i_{j+1}}\binom{j+2}{i_{j+2}}\cdots\binom{m}{i_m}$$

$$\Delta_{i_1\, i_2 \ldots i_{j-1}\, i_{j+1}\, i_{j+2} \ldots i_m}\,\psi_1^{(1-i_1)}\,\psi_2^{(2-i_2)}\ldots$$

$$\ldots\psi_{j-1}^{(j-1-i_{j-1})}\,\psi_{j+1}^{(j+1-i_{j+1})}\,\psi_{j+2}^{(j+2-i_{j+2})}\ldots\psi_m^{(m-i_m)}.$$

Plaçons maintenant x_r au lieu de tous les y pour tirer de $C_{rj}^{(m)}$ A_{rj} avec les formules (5), (6) et (7).

Après les substitutions

$$\tag{8} y_0 = y_1 = y_2 = \cdots = y_{j-1} = y_{j+1} = \cdots = y_m = x_r$$

un seul des termes de $C_{rj}^{(m)}$ restera différent de zéro; car si dans Δ deux i sont égaux ou quelque $i = 0$

$$(\Delta_{i_1\, i_2 \ldots i_{j-1}\, i_{j+1} \ldots i_m})_{y_0 = y_1 = \cdots = y_{j-1} = y_{j+1} = \cdots = y_m = x_r} = 0.$$

On voit cela aisément si on fait les différentiations sous la forme de déterminant de Δ, où chaque ligne dépend d'un seul y.

Le terme différent de zéro sera le suivant:

$$\overline{\Delta} = \Delta_{1,2,3,\ldots,j-1,j,j+1,\ldots,m-1} =$$

$$\begin{vmatrix}
1 & y_0 & y_0^2 \cdots & y_0^{j-1} & y_0^j & y_0^{j+1} \cdots & y_0^{m-1} \\
0 & 1! & 2y_1 \cdots & (j-1)\,y_1^{j-2} & j\;\; x_1^{j-1} & (j+1)\,y_1^j \;\;\cdots & (m-1)\,y_1^{m-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0\;0 & \ldots & 0 & (j-1)! & (j-1)!\binom{j}{j-1}y_{j-1} & (j-1)!\binom{j+1}{j-1}y_{j-1}^2 \ldots & (j-1)!\binom{m-1}{j-1}y_{j-1}^{m-j} \\
0\;0 & \ldots & 0 & 0 & j! & j!\binom{j+1}{j}y_{j+1} \ldots & j!\binom{m-1}{j}y_{j+1}^{m-j-1} \\
0\;0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & (j+1)! \ldots & (j+1)!\binom{m-1}{j+1}y_{j+2}^{m-j-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0\;0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \;\ldots\ldots & (m-1)!
\end{vmatrix}$$

$$= 1!\,2!\,3!\ldots(j-1)!\,(j+1)!\ldots(m-1)!$$

aussi après les substitutions (8), parce que $\overline{\Delta}$ est déjà indépendant des y et ainsi, toutes les dérivées de Δ, où tous les i sont différents d'entre eux et de zéro — qui sont toutes des dérivées de cette $\overline{\Delta}$, seront 0.

Ainsi

$$C_{rj}^{(m)} = 2!\,3!\ldots(m-1)!\binom{1}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{3}\cdots\binom{j-1}{j-1}\binom{j+1}{j}\binom{j+2}{j+1}\cdots$$

$$\cdots\binom{m}{m-1}\left[\psi_1\,\psi_2\ldots\psi_{j-1}\,\psi'_{j+1}\,\psi'_{j+2}\ldots\psi'_m\right]_{y_u=x_r} =$$

$$= 2!\,3!\ldots(m-1)!\,m!\,\frac{1}{j!}(\varphi_r(x_r))^{j-1}\left(\frac{d\varphi_r(x_r)}{dx_r}\right)^{m-j}.$$

Avec (5) et (6) on aura, parce que $m = k_r - 1$:

$$A_{rj} = (-1)^{k_r(k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+1)+j}$$

$$\prod_{w=1}^{n}(k_w-1)!\,(k_w-2)!\ldots3!\,2!\prod_{\substack{t>s\\(t,s=1,2,\ldots,n)}}^{(r)}(x_t-x_s)^{k_t k_s}$$

$$\frac{1}{j!}\left(\frac{\varphi_r(y)}{x-y}\right)_{y=x}(\varphi_r(x_r))^j(\varphi'_r(x_r))^{k_r-1-j}.$$

Pour faire la division avec D, nous écrirons D sous la forme suivante (voir la formule (2))

$$D = \prod_{w=1}^{n}(k_w-1)!\,(k_w-2)!\ldots3!\,2!\prod_{\substack{t>s\\(t,s=1,2,\ldots,n)}}(x_t-x_s)^{k_t k_s} =$$

$$= (-1)^{k_r^2(k_1+k_2+\cdots+k_{r-1})}\prod_{w=1}^{n}(k_w-1)!\,(k_w-2)!\ldots3!\,2!$$

$$\prod_{\substack{t>s\\(t,s=1,2,\ldots,n)}}^{(r)}(x_t-x_s)^{k_t k_s}\cdot\left(\frac{\varphi_r(x_r)}{x-x_r}\right)^{k_r},$$

donc

$$\frac{A_{rj}}{D} = (-1)^{k_r - j}\left(\frac{\varphi_r(y)}{x-y}\right)_{y=x} \frac{(x-x_r)^j}{j!}\left(\frac{\varphi_r(x_r)}{x-x_r}\right)^{j-k_r}(\varphi_r'(x_r))^{k_r-j-1}$$

ou si

$$\frac{\varphi_r(y)}{x-y} = \Phi_r(y) = (x_1-y)^{k_1}(x_2-y)^{k_2}\dots(x_{r-1}-y)^{k_{r-1}}(x_{r+1}-y)^{k_{r+1}}\dots(x_n-y)^{k_n}$$

d'où

$$\varphi_r'(x_r) = -\Phi_r(x_r) + (x-x_r)\Phi'(x_r),$$

et enfin si

$$-\frac{A_{rj}}{D} = a_{rj}$$

nous aurons (4)

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} f(x) = \sum\limits_{\substack{r=1,2,\dots,n\\ j=0,1,2,\dots,k_r-1}} a_{rj}\,u_{rj} \\ \text{où} \\ a_{rj} = \dfrac{(x-x_r)^j}{j!}\dfrac{\{\Phi_r(x_r)-(x-x_r)\Phi_r'(x_r)\}^{k_r-j-1}}{\{(\Phi_r(x_r))\}^{k_r-j}}\,\Phi_r(x). \end{cases}$$

C'est une généralisation de la formule de **Lagrange**, dont on peut déduire aisément toutes le formules spéciales de l'interpolation des fonctions entières connues jusqu'ici, donc aussi toutes les formules explicites de **Markoff** données dans son œuvre citée plus haut.

Considérons par exemple le cas spécial suivant

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = k.$$

Soit

$$F(x) = \prod_{i=1}^{n}(x_i - x)$$

et

$$F_r(x) = \prod_{i=1}^{n}{}^{(r)}(x_i - x).$$

Alors dans ce cas spécial

$$\Phi_r(x) = (F_r(x))^k$$

et

$$\Phi_r'(x) = k(F_r(x))^{k-1}F_r'(x),$$

donc

$$(\mathrm{I}^*)\qquad a_{rj} = \frac{(x-x_r)^j}{j!}\frac{(F_r(x_r)-k(x-x_r)F_r'(x_r))^{k-j-1}}{(F_r(x_r))^{2k-j-1}}(F_r(x))^k.$$

Si $n=1$ on en tire la série finie de **Taylor** et si $k=1$ et n quelconque, la formule de **Lagrange**.

Si $k=2$, $n=2$ nous aurons la formule de **Markoff**, déduite dans son œuvre avec une méthode utilisable avec profit seulement dans le cas où

$$k_1 = k_2 = \dots = k_s = 1,\quad k_{s+1} = k_{s+2} = \dots = k_n = 2.\text{[1]}$$

1) l. c. pag. 5, 6.

Dans le cas $k = 2$, $n = 2$ nous aurons de (1*)

$$a_{1j} = \frac{(x - x_1)^j}{j!}((x_2 - x_1) + 2(x - x_1))^{1-j} \frac{(x_2 - x)^2}{(x_2 - x_1)^{3-j}},$$
$$a_{2j} = \frac{(x - x_2)^j}{j!}((x_1 - x_2) + 2(x - x_2))^{1-j} \frac{(x_1 - x)^2}{(x_1 - x_2)^{3-j}}, \qquad (j = 0, 1)$$

d'où

$$f(x) = \frac{(x - x_2)^2}{(x_1 - x_2)^3}(3x_1 - x_2 - 2x) f(x_1) + \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right)^2 (x - x_1) f'(x_1) +$$
$$+ \frac{(x - x_1)^2}{(x_2 - x_1)^3}(3x_2 - x_1 - 2x) f(x_2) + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^2 (x - x_2) f'(x_2),$$

c'est-à-dire la formule de Markoff.

II.

Les formules (I) donnent aussi la solution complète du problème de la décomposition des fonctions rationnelles en fractions partielles, dans le cas le plus général où les dénominateurs des fractions ont des facteurs multiples. *Vice-versa* on peut déduire des formules connues pour la décomposition des fonctions rationnelles en fractions partielles des formules d'interpolation. C'est ainsi qu'on peut déduire la formule de Markoff (page 6) pour le cas $n = 2$ et k_1, k_2 quelconques. Mais tandis que les formules connues jusqu'ici pour les fractions partielles contiennent les dérivées de haut degré (en général $(k_r - 1)$-ième) de fonctions rationnelles *fractionnaires*, les formules (I) ne contiennent que les dérivées *premières* de fonctions *entières*, et c'est pourquoi la formule déduite de (I) pour le cas $n = 2$ a une forme mieux adaptée aux calculs. — On peut dire la même chose des formules que je vais déduire pour les fractions partielles.

Soit

$$R(x) = \frac{f(x)}{\Phi(x)}$$

une fonction rationnelle quelconque, où

$$\Phi(x) = (x_1 - x)^{k_1} (x_2 - x)^{k_2} \ldots (x_n - x)^{k_n}.$$

On sait que $R(x)$ peut être écrit d'une seule façon sous la forme suivante:

$$R(x) = \frac{K_{11}}{x_1 - x} + \frac{K_{12}}{(x_1 - x)^2} + \cdots + \frac{K_{1l}}{(x_1 - x)^l} + \cdots + \frac{K_{1k_1}}{(x_1 - x)^{k_1}} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{K_{r1}}{x_r - x} + \frac{K_{r2}}{(x_r - x)^2} + \cdots + \frac{K_{rl}}{(x_r - x)^l} + \cdots + \frac{K_{rk_r}}{(x_r - x)^{k_r}} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{K_{n1}}{(x_n - x)} + \frac{K_{n2}}{(x_n - x)^2} + \cdots + \frac{K_{nl}}{(x_n - x)^l} + \cdots + \frac{K_{nk_n}}{(x_n - x)^{k_n}}.$$

Ordinairement on calcule les K selon la formule:

$$\text{(II)} \qquad (-1)^{N-k_r+l} K_{rl} = \frac{1}{l!}\left(\frac{d^l}{dx^l}\frac{f(x)}{\Phi_r^\bullet(x)}\right)_{x=x_r},$$

où $\Phi_r(x)$ a la même signification que plus haut.

Je vais déduire de (I) pour les K une expression où les opérations indiquées dans (II) sont déjà faites, et il ne reste que des sommes et une différentiation de fonctions entières à faire.

Pour déterminer les K à l'aide des formules (I) il suffit de placer dans la formule

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k_r-1}\sum_{r=1}^{n} a_{rj}\, u_{rj}$$

les valeurs des a indiquées sous (I), élever aux puissances indiquées, diviser par $\Phi(x)$ chaque côté de l'identité et ordonner $\frac{f(x)}{\Phi(x)}$ selon les puissances de $x_r - x$.

On aura, parce que

$$a_{rj} = \frac{(x-x_r)^j}{j!}\frac{\Phi_r(x)}{(\Phi_r(x_r))^{k_r-j}}\Big(\{\Phi_r(x_r)\}^{k_r-j-1} -$$

$$-\binom{k_r-j-1}{1}(x-x_r)\{\Phi_r(x_r)\}^{k_r-j-2}\Phi_r'(x_r) + \cdots +$$

$$+(-1)^i\binom{k_r-j-1}{i}(x-x_r)^i\{\Phi_r(x_r)\}^{k_r-j-1-i}\{\Phi_r'(x_r)\}^i + \cdots +$$

$$+(-1)^{k_r-j-1}(x-x_r)^{k_r-j-1}\{\Phi_r'(x_r)\}^{k_r-j-1}\Big) = \frac{(x-x_r)^j}{j!}\Phi_r(x).$$

$$\left(\frac{1}{\Phi_r(x_r)} - \binom{k_r-j-1}{1}(x-x_r)\frac{\Phi_r'(x_r)}{\{\Phi_r(x_r)\}^2} + \cdots +\right.$$

$$+(-1)^i\binom{k_r-j-1}{i}(x-x_r)^i\frac{\{\Phi_r'(x_r)\}^i}{\{\Phi_r(x_r)\}^{i+1}} + \cdots +$$

$$\left.+(-1)^{k_r-j-1}(x-x_r)^{k_r-j-1}\frac{\{\Phi_r'(x_r)\}^{k_r-j-1}}{\{\Phi_r(x_r)\}^{k_r-j}}\right),$$

$$\frac{f(x)}{\Phi(x)} = \sum_{\substack{r=1,2,\ldots,n\\ j=0,1,2,\ldots,k_r-1}}\frac{a_{rj}}{\Phi_r(x)(x_r-x)^{k_r}}\,u_{rj} =$$

$$= \sum_{r,j}\frac{(-1)^j}{j!}\left(\frac{1}{\Phi_r(x_r)(x_r-x)^{k_r-j}} + \frac{\binom{k_r-j-1}{1}\Phi_r'(x_r)}{\{\Phi_r(x_r)\}^2(x_r-x)^{k_r-j-1}} + \cdots +\right.$$

$$\left.\frac{\binom{k_r-j-1}{i}\{\Phi_r'(x_r)\}^i}{\{\Phi_r(x_r)\}^{i+1}(x_r-x)^{k_r-j-i}} + \cdots + \frac{\{\Phi_r'(x_r)\}^{k_r-j-1}}{\{\Phi_r(x_r)\}^{k_r-j}(x_r-x)}\right)u_{rj}.$$

Le coefficient de $(x_r - x)^{-l}$ est K_{rl}, il suffit donc, pour avoir K_{rl}, de faire la somme des termes où

$$k_r - j - i = l$$

et de la multiplier par $(x_r - x)^l$. Nous devons donc remplacer dans le terme général de la dernière somme j par $k_r - l - i$ et faire la somme selon i de 0 jusqu'à $k_r - l$; multipliant la somme ainsi obtenue par $(x_r - x)^l$, on aura

$$\text{(II*)} \qquad K_{rl} = \sum_{i=0}^{k_r - l} \frac{(-1)^{k_r - l - i}}{(k_r - l - i)!} \binom{i+l-1}{l-1} \frac{(\Phi_r'(x_r))^i}{(\Phi_r(x_r))^{i+1}} u_{r\, k_r - l - i},$$

parce que

$$k_r - j - 1 = i + l - 1$$

et

$$\binom{i+l-1}{i} = \binom{i+l-1}{l-1}.$$

De là on tire aussi toutes les formules spéciales connues pour les fractions partielles. Par exemple si

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1,$$

on aura la formule de décomposition des fractions, où le dénominateur possède exclusivement des facteurs linéaires, déduisible aisément aussi de la formule de Lagrange.

Si dans (II*)

$$l = 1, \quad i = 0,$$

on a en effet

$$K_{r1} = \frac{u_{r0}}{F_r(x_r)}$$

et

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum_{r=1}^{n} \frac{f(x)}{F'(x)} \frac{1}{x - x_r}.$$

Enfin si $n = 1$ et k quelconque, on a une formule, qui vient de la série de Taylor; dans ce cas

$$\Phi_r(x) = 1, \quad \Phi_r'(x) = 0$$

et ainsi tous les termes à droite dans (II*) seront 0 à l'exception d'un, où $i = 0$; en posant $0^0 = 1$, on aura

$$K_{1l} = \frac{(-1)^{k-l}}{(k-l)!} u_{1\,k-l}$$

et

$$\frac{f(x)}{(x_1 - x)^k} = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l} \frac{f^{(k-l)}}{(k-l)!\,(x_1 - x)^l}.$$

Budapest, 1er Juillet 1901.

Die Gesetze der schwarzen Strahlung und ihre Verwendung.

Von O. LUMMER in Charlottenburg.

(Schluß.)

(Abdruck aus dem in der „Zeitschrift für Beleuchtungswesen“ 1904 erschienenen Aufsatz: „Wissenschaftliche Grundlagen zur ökonomischen Lichterzeugung“.)

7. *Mechanik des Leuchtens auf Grund der Elektronentheorie.*

a) Wechselbeziehung zwischen Materie und Äther.

Bei den bisherigen Betrachtungen haben wir uns mit den Tatsachen genügen lassen, daß bei gewissen Prozessen und Vorgängen das Äthermeer in eine wellenartige Erschütterung versetzt wird, und die Gesetzmäßigkeiten besprochen, welche der Energieausbreitung in Gestalt von Strahlen eigen sind. Im speziellen haben wir die Gesetze der Temperaturstrahler verfolgt, bei denen die Strahlungsenergie eine Folge hoher Erhitzung ist, während wir die Leuchterscheinungen infolge Lumineszenz nur beiläufig erwähnten, insofern deren Gesetze noch keineswegs erkannt und aufgeklärt sind. Dabei ließen wir stets außer acht, auf welche Art bei all diesen existierenden Lichtern die Erregung des Äthermeeres bewirkt wird, und bedienten uns bei der Einteilung aller Lichter in jene beiden großen Gruppen der Temperaturstrahler und der Lumineszenzlichter mehr äußerlicher als innerlicher Unterschiede. Denn wenn wir aussprechen, daß das Leuchten der Temperaturstrahler eine Folge hoher Erhitzung ist, so ist das lediglich der Ausdruck für die beobachtete Tatsache, ohne irgend welche Erklärung für die Lichtentstehung zu geben. Und bloße Begriffe stellen sich dort ein, wo das Leuchten auch ohne Temperaturerhöhung eintreten kann. Denn durch das Wort „Lumineszenz“ soll lediglich ausgedrückt werden, daß bei diesem Leuchten die Temperatur eine nebensächliche Rolle spielt und wir nicht wissen, auf welche Weise hier die Erregung des Äthermeeres zustande kommt.

Alle jene Fragen nach der Wechselwirkung zwischen Materie und Äther konnten bei der Lichterregung bisher schlechterdings so gut wie nicht beantwortet werden. Sind es die körperlichen Atome der leuchtenden Substanzen selbst, welche den Äther in Mitschwingung versetzen? Wie kommt es dann, daß nicht mehr teilbare einatomige Gase wie Helium oder Quecksilberdampf noch eine so große Menge von einzelnen Wellen (Spektrallinien) auszusenden vermögen? Wie vermag die Materie den Äther in Mitschwingung zu versetzen?

b) Die Elektrizität als Substanz aufgefaßt.

Erst die neueren Errungenschaften auf dem Gebiete der elektrooptischen Erscheinungen haben, wenn auch nicht Klarheit, so doch einen gewissen Aufschluß über die Ursache der Lichterregung und den Unterschied derselben für die beiden Gruppen von Leuchtquellen gebracht. Zum Verständnis dieser neuesten Anschauungen müssen wir kurz auf die Hypothese eingehen, gemäß welcher die Elektrizität eine Substanz ist, die wie die gewöhnliche Materie in kleinste Teilchen zerfällt, von denen jedes unteilbar ist und für sich allein existieren kann. Also hiernach setzt sich auch die Elektrizitätsmenge, mit der sich ein Körper laden kann, aus Elektrizitätsatomen zusammen. Gerade so, wie es für jeden Stoff eine kleinste Menge gibt, nämlich das Atom, so gibt es auch eine kleinste Menge Elektrizität. Man nennt die kleinste noch existenzfähige und unteilbare Elektrizitätsmenge das „*Elementarquantum*“ der Elektrizität und unterscheidet entsprechend den anziehenden und abstoßenden Eigenschaften elektrisch geladener Körper „positive“ und „negative“ Elektrizitätsteilchen. Diese atomistische Auffassung der Elektrizität als einer Substanz, wenn auch von anderen Eigenschaften als denen der gewöhnlichen Materie, war schon von W. Weber u. a. in der Mitte des vorigen Jahrhunderts ausgesprochen worden. Aber erst die neueste Zeit hat dieser Hypothese zum Siege verholfen, nachdem es gelungen ist, *diesen hypothetischen Elektrizitätsteilchen experimentell beizukommen*, die Größe ihrer elektrischen Ladung zu bestimmen und aus ihrer Trägheit auch ihre „Masse“ festzustellen. In den von der negativen Zuführungsstelle (Kathode) einer Röntgenröhre ausgehenden *Kathodenstrahlen* haben wir die *negativen* Elementarquanta leibhaftig vor uns, da diese Strahlen nichts weiter sind als eine ununterbrochene Reihe von kleinsten existenzfähigen Elektrizitätsmengen, welche mit ungeheurer Geschwindigkeit von der Kathode aus in gerader Linie fortgeschleudert werden. Diese negativen Elementarquanta oder „*Elektronen*“ existieren also als selbständige Individuen in den Kathodenstrahlen und bewegen sich mit einer Geschwindigkeit, welche fast den fünften Teil der Lichtfortpflanzung, also nahe 60 000 km per Sekunde, erreichen.

c) Das Elektron oder das Uratom.

Denkt man sich die elektrische Ladung des Elementarquantums gebunden an gewöhnliche Masse, so würde diese bei den negativen Elektronen etwa den 2000. Teil der Masse eines Wasserstoffatoms betragen. Vom Wasserstoffgas gehen aber etwa eine Quadrillion Teilchen auf 1 g. Ein Bild von der winzigen Größe eines solchen Elektrizitätsteilchens erhält man durch den Vergleich, welchen Kaufmann zog, daß sich die Masse des Elektrons zur Masse eines Bazillus verhält wie diese zur Masse der Erde! Neueste Untersuchungen haben gelehrt, daß die aus der Trägheit der Elektronen herausgerechnete Masse aber keine Masse im gewöhnlichen Sinne sein kann, sondern *scheinbar* ist, insofern ihre Trägheit nur durch die Reaktion entsteht, welche die im Äther erregten elektromagnetischen Vorgänge ihrerseits wieder auf das geschleuderte Elektron ausüben. Ob die Elektronen nur eine Modifikation des die elektrischen und optischen Erscheinungen vermittelnden Äthers sind? Ob sie vielleicht die aus dem neutralen Äther abgespaltenen und als solche mit elektrischer Ladung versehenen Teilchen sind? Wer wollte solche Fragen entscheiden? Wohl aber deutet alles darauf hin, daß wir es beim Elektron mit dem *Uratom der materiellen Welt* zu tun haben, aus welchem sich die Atome aller Elemente aufbauen und die ganze Körperwelt zusammensetzt. Gleichwie die Pflanze und alle tierischen Organismen sich aus dem einen Baustein, der *Zelle*, zusammensetzen, würden sich in diesem Falle die Atome verschiedener Elemente nur in bezug auf die Anzahl und die Anordnung der *Elektronen* voneinander unterscheiden. Dann aber wären wir auch berechtigt, gleich den vielverspotteten Alchymisten, das hohe Ziel zu verfolgen, die unedlen Metalle in edle zu verwandeln, bezw. alle Elemente ineinander überzuführen. Wie dem aber auch sei, eins scheint schon heute sicher zu stehen, daß jedes Atom eines chemischen Elementes außer der gewöhnlichen Materie *elektrische Ladungen* enthält, auch wenn es nach außen vollkommen neutral und unelektrisch erscheint.

d) Die Abspaltung und Emission von Elektronen bei radioaktiven Substanzen usw.

Schon die Elektrolyse hatte gelehrt, daß die elektrolytischen Substanzen in Lösung dissoziiert und die an den Zuleitungen (Kathode und Anode) zum Vorschein kommenden Spaltungsprodukte vor dem Abscheiden *elektrisch geladen* sein müssen, damit sie vom elektrischen Strom transportiert werden können. Die Größe dieser Ladung ist genau die gleiche, welche das negative Elektron im Kathodenstrahl mit sich führt.

Die elektrische Leitung der Flammen und besonders die durch Radium- oder Becquerel-Bestrahlung bewirkte Leitung der Luft und einatomiger Gase, wie Argon, Helium etc., machte es höchst wahrscheinlich, daß jedes Atom eines ungeladenen Körpers ein *negatives* Elektron (Elementarquantum) abspalten und sich in ein positiv geladenes „Ion“ umwandeln kann. Selbst die Metalle erfahren eine solche Spaltung, insofern sie bei Belichtung mittels ultravioletten Lichtes ebenfalls negativ geladene Teilchen abstoßen und sich dadurch positiv aufladen, sodaß von einer so belichteten Metallplatte Strahlen ausgehen, die in ihrer Wirkung ganz den Kathodenstrahlen gleichen.

Neuerdings ist es auch gelungen, durch bloße Erhitzung der Substanzen negative Elektronen aus denselben auszutreiben, und in den radioaktiven Substanzen besitzen wir Stoffe, bei denen die Elektronen freiwillig und ohne jeden äußeren Zwang den Atomverband verlassen. Denn die von diesen radioaktiven Substanzen ausgehende Strahlung (Radium- bezw. Becquerelstrahlung) ist nichts anderes als Kathodenstrahlung, d. h. auch die Radiumstrahlen werden gebildet von den mit ungeheurer Geschwindigkeit fortgeschleuderten negativen Elektrizitätsteilchen oder Elektronen. Ihre Geschwindigkeit erreicht hier noch größere Werte als bei den Kathodenstrahlen und kommt nahezu der Lichtgeschwindigkeit gleich.

e) Die Lichtemission als Folge von elektrischen Vorgängen im leuchtenden Körper.

So lehren denn die neuesten Versuche über die elektrischen Vorgänge, daß das Atom jedes Körpers elektrische Ladungen aufgespeichert enthält, auch wenn der Körper nach außen unelektrisch und ungeladen erscheint, also im umgebenden Äther keine Spannungen zu erregen vermag. Ja, die in jedem Atom vorhandenen Ladungen stellen jedenfalls die Verbindung zwischen der Materie und dem Äther her, und sie sind es, durch deren Vermittlung ein Körper den Äther in wellenartige Spannungszustände versetzt, d. h. Ätherwellen erregt. Damit sich die Wirkungen der elektrischen Ladungen nach außen aufheben, müssen in einem unelektrischen Körper sich die positiven und negativen Ladungen jedes Atoms das Gleichgewicht halten.

Positiv elektrische Körper sind dann solche, denen positiv geladene Elektronen im Überschuß zugeführt, bezw. negative Elektronen entzogen sind, während umgekehrt negativ elektrische Körper negativ geladene Elektronen im Überschuß besitzen.

Was also in der Chemie als einatomig und unteilbar sich darstellt, erscheint uns im Sinne der neueren Elektronentheorie als zusammengesetzt aus vielen kleinsten Individuen, den Atomen der Elektrizität oder den Elektronen. Wo die Chemie aufhört, fängt also die Elektronentheorie und die von ihr abhängige Erscheinungswelt an. Das unteilbare chemische Atom müssen wir auffassen als ein „vielelektroniges“ Wesen, eine kleine Welt für sich!

Wie die elektrischen Ätherwellen bei der Entladung der Leidener

Flasche, des Ruhmkorffschen Induktoriums und des Blitzes durch die Oszillation elektrischer Ladungen entstehen, so ist die von einem Strahlungskörper bezw. einer Lichtquelle ausgehende Wellenbewegung im Äther zurückzuführen auf elektrische Vorgänge im Atom. Sowohl die Lichtwellen wie die Wärmewellen sind elektromagnetische Wellen, welche durch die Bewegung und Oszillation der elektrischen Ladungen (Elektronen) des Atoms hervorgerufen werden. Betragen die Oszillationen der elektrischen Kraft bei der Erzeugung der langen elektrischen Wellen nur Millionen in der Sekunde, so finden im leuchtenden Atom deren viele Billionen in der Sekunde statt. Unser Auge ist demnach ein elektrisches Organ, ein auf sehr kurze elektrische Wellen reagierender Resonator. Nicht das Atom als solches also erregt die Lichtwellen, sondern die in ihm vorhandenen Elektronen. Nur wo diese in genügende Erregung oder Oszillation geraten, nur da allein kann der Äther in Mitleidenschaft gezogen und in einen Spannungszustand versetzt werden, der sich bei periodisch wechselnder elektrischer Kraft (Wechselfeld hoher Schwingungszahl) periodisch ändert, wie der Druck in der Luft bei Erzeugung eines Tons.

Nur so wird es uns einigermaßen verständlich, daß ein *ein*atomiges, chemisch unteilbares Atom einer Substanz wie Quecksilberdampf oder Helium doch der Ausgangspunkt einer großen Anzahl von Lichtwellen sein kann, von denen jede ihre ganz bestimmte Wellenlänge hat, und deren Anzahl und Größe von Element zu Element variiert. Die Annahme, daß die Elektronen der Ausgangspunkt der Ätherwellen sind, die wir als Licht und Wärme empfinden, wird gestützt durch das von Zeeman entdeckte Phänomen der Einwirkung des Magnetismus auf die Lichtemission.

f) Das Zeemansche Phänomen.

Wohl hatte schon Faraday versucht, einen Einfluß des Magnetismus auf leuchtende Gase zu entdecken. Aber erst die neueren empfindlichen Methoden zur Feststellung sehr geringer Wellenlängenunterschiede im Verein mit der Herstellung starker Magnetfelder ermöglichen den längst ersehnten experimentellen Nachweis, daß der Magnetismus die Lichtemission der glühenden Dämpfe ändert. Tatsächlich spalten sich die von einem leuchtenden Gas ausgesandten Wellen in mehrere neue Wellen, wenn man das Gas in einem kräftigen Magnetfeld strahlen läßt. Aus der Wellenlängenänderung und der Stärke des dazu notwendigen Magnetfeldes aber ergibt sich, daß die lichterregenden Elektronen eine *negative* Ladung mit sich führen, und daß die Größe dieser Ladung dieselbe ist wie die der Ionen bei der Elektrolyse und die der Kathodenstrahlteilchen.

g) Wie setzt sich das Atom aus den Elektronen zusammen?

So scheint es also, als ob nur die negativen Elektronen beweglich und imstande sind, im Äther Wellen zu erregen. Ob freilich einer jeden Welle ein besonderes Elektron als Quelle zukommt, und wie der Bau eines materiellen Atoms aus den Elektronen sich zusammensetzt, darüber wissen wir heute noch gar nichts. Besteht das chemische Atom aus einer materiellen Hülle, innerhalb deren die Elektronen sich frei bewegen können, wie die Bienen in einem Bienenkorb? Oder ist das Atom einem materiellen Gerüst zu vergleichen, an dem die Elektronen sich bewegen können wie die Glocken in einem Glockenturm? Auch einem Planetensystem hat man das Atom verglichen, bei dem die schwerer beweglichen, mit Masse behafteten positiven Ionen das Zentralgestirn, die Sonne, bilden, um welche die kleineren und leichter beweglichen negativen Elektronen ihre Bahnen ziehen. Alles dies sind aber nur Bilder, welche uns die beobachteten Tatsachen verständlich machen sollen, ohne den Anspruch zu erheben, als ob sie der Wirklichkeit entsprächen. Wie dem aber auch sei, jedenfalls müssen wir die Elektronen beeinflussen, damit von einem Atom elektromagnetische Wellen ausgehen, und um speziell Lichtwellen zu erregen, müssen die Elektronen in eine Oszillation von 400 bis 800 Billionen Schwingungen in der Sekunde versetzt werden. Fassen wir die Elektronen als Resonatoren auf, oder denken wir uns sie zu Leidener Flaschen im Atom geordnet, stets muß die lichterregende äußere Kraft imstande sein, sie zum Mitschwingen oder zur Entladung zu bringen.

h) Die verschiedene Erregungsart der Elektronen bei der Temperaturstrahlung und der Lumineszenz.

Es entsteht demnach nur noch die Frage, wie diese Elektronen oder kleinsten in jedem Atome eines Körpers enthaltenen Elektrizitätsteilchen in Bewegung versetzt werden können. Und in bezug auf diese Erregung der Elektronen bis zur Lichtemission unterscheiden sich die verschiedenen Lichtarten hauptsächlich. Bei den Temperaturstrahlern ist zur Erregung der Elektronen eine lebhafte Bewegung der Moleküle des Körpers erforderlich, denn eine Erhöhung der Temperatur ist nach den Anschauungen der mechanischen Wärmetheorie identisch mit einer Vermehrung der lebendigen Kraft, mit welcher die Moleküle sich bewegen. Erst beim absoluten Nullpunkt (— 273° C.) hört diese Bewegung auf, und beharren die Moleküle aller Körper in Ruhe. Infolge der Molekularbewegung werden auch die Ladungen der Moleküle verändert, vielleicht sogar Elektronen aus ihrem Verbande herausgerissen, in andere Moleküle hineingeschleudert, kurz, es ist die Möglichkeit zur Wellenerregung im Äther geschaffen. Deutlicher übersieht man den Vorgang bei der Fluoreszenz infolge der Kathodenstrahlung. Bekanntlich fluoresziert die Glaswand der Geißlerschen Röhre da, wo sie von den Kathodenstrahlen getroffen wird. Die geschossenen Elektronen, aus denen die Kathodenstrahlen bestehen, werden also jedenfalls bei ihrem Auftreffen auf die fluoreszierende Glaswand die Ladungen der Glasmoleküle ändern, womöglich die Molekülverbände zersprengen, Elektronen zum Austritt zwingen oder mindestens in einen Erregungszustand versetzen, welcher die Quelle von Ätherwellen wird. Diejenigen von der Länge der Lichtwellen empfinden wir mit dem Auge, die Glaswand leuchtet, und wir nennen dieses Leuchten im kalten Zustande „Fluoreszenz"; die Wellen im Äther aber, welche von der Glaswand außerdem ausgehen und wegen ihrer winzigen Größe die Eigenschaft haben, Papier, Knochen etc. zu durchsetzen, bilden die Röntgenstrahlen.

Und wie hier die Glaswand zum Leuchten kommt, so werden auch die in der Geißlerschen Röhre eingeschlossenen Gase und Dämpfe zur Lichtemission angeregt, indem die Kathodenstrahlteilchen auf die Gas- und Dampfteilchen aufschlagen, in sie eindringen, andere Elektronen austreiben etc. Aber wie auch diese intramolekularen Vorgänge vor sich gehen mögen, und obgleich schon die elektrische *Leitung* des Gases einen Zerfall oder eine Dissoziation der Gasmoleküle erheischt, im großen und ganzen bleibt bei alledem auch im Leuchtzustand einer Substanz der *Charakter des Stoffes* erhalten, insofern das Wasserstoffspektrum zwar Veränderungen erleidet, aber doch keineswegs in das Sauerstoffspektrum übergeht. Da jedem Gas oder Dampf ein besonderes, *individuelles* Spektrum zukommt, wenn dieses auch außerordentlichen Wandlungen bei verändertem Druck etc. unterliegt, so muß der Molekularverband mehr oder weniger erhalten bleiben, auch wenn die Bewegungen der Elektronen noch so heftig werden. Die Spektralanalyse baut ja allein auf dem Satze auf, daß ceteris paribus den verschiedenen Gasen und Dämpfen ein verschiedenes Spektrum zukommt. Freilich werden diese Spektren alle einander um so ähnlicher, je mehr die leuchtende Substanz in den *festen* Zustand übergeht, und im festen Aggregatzustande sind die Spektren aller Substanzen einander ziemlich ähnlich, sodaß es sehr genauer quantitativer photometrischer und bolometrischer Untersuchungsmethoden bedarf, um Unterschiede zwischen den Spektren verschiedener Stoffe festzustellen. Es scheint also, als ob im festen Verbande die Elektronen des einen Atoms durch diejenigen des anderen in ihrem Schwingungszustande gehemmt und andererseits zu Schwingungen gezwungen werden, welche nicht ihren Eigenschwingungen entsprechen, sodaß sie mehr oder weniger alle Wellen aussenden müssen. Dann aber ist es auch verständlich, warum gerade die Wärmebewegung in der Regel mit den Lichtwellen zugleich auch Wärmewellen erzeugt, und daß nur bei der Belichtung oder bei Kathodenbestrahlung Licht ohne Wärme, d. h. Fluoreszenz erregt werden kann. Beim Auffallen von Lichtstrahlen oder beim Bombardement mittels der im Kathodenstrahl ankommenden Elektronen werden eben nicht so sehr die Moleküle des fluoreszierenden Körpers, als vielmehr nur die elektrischen Ladungen beeinflußt. Es werden also nicht die ganzen Glockentürme oder die Bienenkörbe in Bewegung versetzt und dadurch die Elektronen zur Mitschwingung gezwungen, sondern es werden vielmehr die einzelnen Glocken zum Tönen, die einzelnen Bienen zum Schwirren erregt. Und so scheint sich die Lumineszenz vor allem dadurch von der Temperaturstrahlung zu unterscheiden, daß die Elektronen in direkterer Weise zum Klingen und Tönen gebracht werden. Damit aber die Eigenschwingungen der Elektronen, soweit sie der Atomverband zuläßt, sich ausbilden können, ist es notwendig, daß jedes Atom möglichst unbelästigt durch die anderen Atome bleibt, daß die leuchtende Substanz im gasförmigen, verdünnten Zustand sich befindet.

Bemerkung zur Theorie der elliptischen Funktionen.

Von A. Schoenflies in Königsberg i. Pr.

Werden für die Entwickelung der Theorie der elliptischen Funktionen die Funktionen $\wp(u)$ und $\sigma(u)$ zugrunde gelegt, die sich an der Hand der allgemeinen Sätze über doppeltperiodische Funktionen fast unmittelbar ergeben, so ist nichts so wenig erfreulich — zumal für eine Vorlesung — wie die Überführung von $\sigma(u)$ in ein einfach unendliches Produkt. Alle Darstellungen, die ich kenne, gehen hier im wesentlichen den gleichen Weg, der bei ausführlicher Durchrechnung aller Formeln ziemlich langwierig ist. Man kann ihn aber durch einen *einfachen Kunstgriff* erheblich abkürzen. Dies teile ich hier mit, da ich vermute, daß mein Urteil über die bisherige Darstellung der Produktverwandlung nicht alleinstehen wird.

Ich beginne mit den Formeln für die trigonometrischen Funktionen. Es ist:

$$(1) \qquad \sin \pi z = \pi z \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}},$$

wo der Strich am Produktzeichen die bekannte Bedeutung hat, daß der Wert $n = 0$ auszuschließen ist. Der oben erwähnte Kunstgriff besteht nun darin, daß man in dieser Formel, ebenso wie in den folgenden, *n in $-n$ verwandeln darf.* Dadurch erhält man

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \tag{1a}$$

und gewinnt hier, wie später, zwei verschiedene Formeln für dieselbe Größe, deren gleichzeitige Benutzung die Rechnungen erheblich abkürzt. Zunächst erhält man durch zweimalige logarithmische Differentiation in bekannter Weise

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}. \tag{2}$$

Der Vollständigkeit halber setze ich auch die später nötigen Formeln die aus (1a) unmittelbar folgen, hierher, nämlich

$$\begin{cases} \dfrac{\sin \pi (a+b)}{\sin \pi a} = \left(1 + \dfrac{b}{a}\right) \prod\limits_{-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \dfrac{b}{n+a}\right) e^{-\frac{b}{n}}, \\[2ex] \dfrac{\sin \pi (a-b)}{\sin \pi a} = \left(1 - \dfrac{b}{a}\right) \prod\limits_{-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \dfrac{b}{n+a}\right) e^{\frac{b}{n}}. \end{cases} \tag{3}$$

Hieraus ergibt sich durch Multiplikation, wenn man noch beachtet, daß

$$\sin \pi (a+b) \sin \pi) a - b) = \sin^2 \pi a - \sin^2 \pi b$$

ist, sofort die schließliche Endformel:

$$1 - \frac{\sin^2 \pi b}{\sin^2 \pi a} = \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \left\{ \left(1 + \frac{b}{n+a}\right) \left(1 - \frac{b}{n+a}\right) \right\}. \tag{4}$$

Ich gehe nun zur Funktion $\sigma(u)$ über. Werden die sämtlichen Perioden durch

$$w = 2mw + 2m'w'$$

dargestellt, so hat $\sigma(u)$ den Wert

$$\sigma(u) = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}} \tag{5}$$

oder, da man auch in dieser Formel w in $-w$ verwandeln darf,

$$\sigma(u) = u \prod{}' \left(1 + \frac{u}{w}\right) e^{-\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}. \tag{5a}$$

Man zerlegt nun, wie üblich, $\sigma(u)$ in die Teilprodukte, indem man m' der Reihe nach alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ gibt; bezeichnet man mit P_ν das Teilprodukt der Faktoren, in denen $m' = \nu$ ist, so hat man

$$\sigma(u) = P_0 P_1 P_{-1} \ldots P_\nu P_{-\nu} \ldots,$$

wo dieses Produkt immer noch unbedingt konvergiert. Setzt man jetzt

$$\frac{u}{2w} = v, \qquad \frac{w'}{w} = \tau,$$

so erhält man

$$(6) \quad \begin{cases} P_\nu = \prod\limits_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{v}{m + \nu\tau}\right) e^{\frac{v}{m+\nu\tau} + \frac{v^2}{2} \cdot \frac{1}{(m+\nu\tau)^2}}, \\ P_{-\nu} = \prod\limits_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{v}{m - \nu\tau}\right) e^{\frac{v}{m-\nu\tau} + \frac{v^2}{2} \cdot \frac{1}{(m-\nu\tau)^2}}. \end{cases}$$

Ändern wir hier wieder m in $-m$, so folgt

$$(6a) \qquad P_{-\nu} = \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{v}{m + \nu\tau}\right) e^{\frac{-v}{m+\nu\tau} + \frac{v^2}{2} \cdot \frac{1}{(m+\nu\tau)^2}},$$

und hieraus erhält man unmittelbar

$$P_\nu \cdot P_{-\nu} = \prod_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{v}{m + \nu\tau}\right) \left(1 + \frac{v}{m + \nu\tau}\right) e^{\frac{v^2}{(m+\nu\tau)^2}} \right\}.$$

Nunmehr geht die Rechnung ihren gewöhnlichen Gang. Das Produkt der rechten Seite läßt sich, da die bezüglichen Konvergenzbedingungen erfüllt sind, in zwei Teilprodukte zerlegen, und wenn wir für diese Teilprodukte gemäß (2) und (4) ihre Werte setzen, so folgt

$$(7) \qquad P_\nu \cdot P_{-\nu} = \left(1 - \frac{\sin^2 \pi v}{\sin^2 \pi \nu \tau}\right) e^{v^2 \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \nu \tau}}.$$

Endlich erhält man für P_0 den Wert

$$P_0 = v \cdot \frac{2w}{\pi} \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{v}{m}\right) e^{\frac{v}{m} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{m^2}}$$

oder aber, mittels der Relation $\Sigma \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$,

$$(8) \qquad P_0 = \frac{2w}{\pi} \sin v\pi \cdot e^{\frac{v^2 \pi^2}{6}}.$$

Zusammenfassend erhält man also

$$(9) \qquad \sigma(u) = \frac{2w}{\pi} \sin \pi v e^{\frac{v^2\pi^2}{6}} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2 \pi v}{\sin^2 \pi \nu \tau}\right) \cdot e^{\frac{v^2 \pi^2}{\sin^2 \pi \nu \tau}}.$$

Damit ist die erstrebte Formel gewonnen. In einem Punkte ist sie freilich nicht so allgemein, wie diejenige, die man gewöhnlich abzuleiten pflegt. Denn in der Formel (9) ist die Vereinigung der zu ν und $-\nu$ gehörigen Produkte bereits durchgeführt, während dies sonst erst beim Übergang zu den ϑ-Funktionen geschieht. Ein wirklicher Nachteil ist damit aber nicht verbunden, denn die ganze Rechnung dient ja nur der Überführung von $\sigma(u)$ in die Produkte der ϑ-Funktionen.

Reelle periodische Lösungen einer Differentialgleichung.

Von J. Horn in Clausthal.

1. In seinen Untersuchungen über die durch Differentialgleichungen definierten Kurven[1]) widmet Herr Poincaré ein Kapitel[2]) dem interessanten speziellen Falle, daß eine Differentialgleichung

$$\frac{dx}{y + A(x, y)} = \frac{dy}{-x + B(x, y)},$$

worin A, B Potenzreihen von x, y mit Gliedern mindestens zweiten Grades sind, ein Integral

$$\Phi(x, y) = \text{Const.}$$

besitzt, wo Φ eine Potenzreihe von x, y darstellt.[3]) In diesem Falle wird der singuläre Punkt $x = 0$, $y = 0$, welcher von unendlich vielen geschlossenen Integralkurven umgeben wird, Mittelpunkt (centre) genannt.[4])

---

1) Sur les courbes définies par les équations différentielles. Liouv. Journ. 1881, 1882, 1885, 1886.

2) Kap. 11; Liouv. Journ. 1885. — Vgl. auch Picard, Traité d'Analyse, Bd. III, S. 207—227.

3) Herr Bendixson hat diese Theorie vervollständigt und verallgemeinert (Sur les points singuliers d'une équation différentielle, Öfversigt Stockholm 52, 1895). Er behandelt die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{ax - X} = \frac{dy}{-by - Y},$$

worin X, Y Potenzeihen von x, y mit Gliedern von mindestens zweiter Dimension sind, unter der Voraussetzung, daß $\frac{a}{b}$ reell positiv ist. Herr Bendixson läßt komplexe Größen zu, während wir hier das reelle Gebiet nicht verlassen.

4) Das Vorhandensein eines Mittelpunktes erfordert unendlich viele Bedingungen und ist im allgemeinen schwer nachzuweisen (vgl. Wigert, Sur les points singuliers d'une équation différentielle; Öfv. Stockh. 56, 57). Aber gerade bei dynamischen Problemen, wo eine derartige Singularität bei allgemeineren Differentialgleichungssystemen von großer Wichtigkeit ist, ergibt sie sich von selbst aus den von vornherein bekannten Integralen.

Unter Einführung der Veränderlichen t (der Zeit) ersetzen wir die obige Differentialgleichung durch das System

$$\frac{dx}{dt} = y + A(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + B(x, y),$$

welches, wenn man an Stelle von y die neue Veränderliche

$$x' = y + A(x, y)$$

einführt, in

$$\frac{dx}{dt} = x',$$
$$\frac{dx'}{dt} = -x + F(x, x')$$

übergeht, wo $F(x, x')$ eine Potenzreihe von x, x' ohne Glieder geringeren als zweiten Grades darstellt. Wir haben somit die Differentialgleichung zweiter Ordnung[1])

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

welche wir im folgenden nur in dem speziellen Fall behandeln, daß sie ein Integral

$$\Phi(x, x') = \text{Const.}$$

besitzt, wo Φ eine Potenzreihe von x, x' bedeutet.[2])

Auf Grund der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\Phi\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \text{Const.}$$

entwickeln wir unter der Voraussetzung, daß die zu $t = 0$ gehörigen Anfangswerte von x und x' hinreichend klein sind, x als periodische Funktion von t in eine Fouriersche Reihe nach einer Methode[3]), welche im zweiten Aufsatz des Verf.: Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen usw. (Zeitschr. Math. Phys. **49**, 257 ff.)[4]) auf einfachere Fälle angewandt wurde.

---

1) Diese kommt im dritten Abschnitt des Aufsatzes des Verf.: Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad (Zeitschr. Math. Phys. **47**) vor.

2) Ein solches Integral wird bei manchen Aufgaben der Dynamik durch das Prinzip der lebendigen Kraft geliefert.

3) Vgl. Weierstraß, Über eine Gattung reell periodischer Funktionen (Werke Bd. II, S. 1 ff.).

4) Vgl. auch: Bewegungen in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage (Journ. f. Math. **126**).

2. Die durch Differentiation der Gleichung $\Phi(x, x') = \text{Const.}$ erhaltene Differentialgleichung

$$x'' = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x'}} x'$$

kann nur dann mit

$$x'' = -x + F(x, x')$$

übereinstimmen, wenn $\frac{\partial \Phi}{\partial x'}$ durch x' teilbar ist, wenn Φ kein lineares Glied und bis auf einen konstanten Faktor die quadratischen Glieder $x^2 + x'^2$ enthält. Wir setzen demgemäß

$$\begin{aligned}
\Phi &= \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \cdots;\\
\Phi_2 &= x^2 + x'^2,\\
\Phi_3 &= \lambda x^3 + \mu x x'^2 + \nu x'^3,\\
\Phi_4 &= \lambda_1 x^4 + \mu_1 x^2 x'^2 + \nu_1 x x'^3 + \pi_1 x'^4
\end{aligned}$$

usw.[1]) Da hiernach $\Phi = x^2 + x'^2 + \cdots$ für hinreichend kleine Werte von x und x' positiv ist, so schreiben wir unsere Integralgleichung

$$\Phi(x, x') = k^2,$$

wo die Integrationskonstante k positiv angenommen werden kann.

Nach einem Satze von Weierstraß[2]) über die Faktorenzerlegung einer Potenzreihe von mehreren Veränderlichen kann man setzen:

$$\Phi(x, x') - k^2 = (x'^2 + g_1 x' + g_2)(H_0 + H_1 x' + H_2 x'^2 + \cdots),$$

wo

$$\begin{aligned}
g_1 &= -\nu x^2 + \nu k^2 + (2\mu\nu - \lambda\nu - \nu_1)x^3 + (\nu_1 - 2\mu\nu)x k^2 + \cdots,\\
g_2 &= x^2 - k^2 + (\lambda - \mu)x^3 + \mu x k^2 + (\lambda_1 - \mu_1 + \pi_1 - \lambda\mu + \mu^2 - \nu^2)x^4\\
&\quad + (\mu_1 - 2\pi_1 - \mu^2 + 2\nu^2)x^2 k^2 + (\pi_1 - \nu^2)k^4 + \cdots
\end{aligned}$$

und

$$H_0 = 1 + \mu x + \cdots, \quad H_1 = \nu + \nu_1 x + \cdots,$$

Potenzreihen von x und k^2 sind, welche nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten berechnet werden. Die Vergleichung der Koeffizienten von x' ergibt

$$g_1 H_0 + g_2 H_1 = 0,$$

also

$$g_1 = -g_2 \frac{H_1}{H_0} = -g_2 \cdot [\nu + (\nu_1 - \mu\nu)x + \cdots].$$

1) An die Stelle von Φ könnte eine Potenzreihe von Φ treten.

2) Werke Bd. II, S. 135ff.

Nach demselben Weierstraßschen Satze hat man die Zerlegung

$$g_2 = (x-c)(x-\bar{c})\mathfrak{g}_2,$$

worin

$$\mathfrak{g}_2 = 1 + (\lambda-\mu)x + (\lambda_1 - \mu_1 + \pi_1 - \lambda\mu + \mu^2 - \nu^2)x^2 + (\lambda_1 - \pi_1 + \nu^2 - \lambda^2)k^2 + \cdots$$

eine Potenzreihe von x und k^2,

$$c = k - \tfrac{1}{2}\lambda k^2 + (\tfrac{5}{8}\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\lambda_1)k^3 + \cdots,$$
$$\bar{c} = -k - \tfrac{1}{2}\lambda k^2 - (\tfrac{5}{8}\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\lambda_1)k^3 + \cdots$$

Potenzreihen von k sind;

$$\frac{c+\bar{c}}{2} = -\tfrac{1}{2}\lambda k^2 + \cdots$$

enthält nur gerade,

$$\frac{c-\bar{c}}{2} = k + (\tfrac{5}{8}\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\lambda_1)k^3 + \cdots$$

nur ungerade Potenzen von k. Ferner ist

$$g_1 = -(x-c)(x-\bar{c})\mathfrak{g}_2 \cdot [\nu + (\nu_1 - \mu\nu)x + \cdots]$$
$$= (x-c)(x-\bar{c})\mathfrak{g}_1,$$

wo

$$-\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_2} = \nu + (\nu_1 - \mu\nu)x + \cdots$$

eine Potenzreihe von x und k^2 ist.

Soweit es sich um kleine Werte von x und x' handelt, können wir die Gleichung

$$\Phi(x, x') - k^2 = 0$$

ersetzen durch

$$x'^2 + g_1 x' + g_2 = 0,$$

so daß

$$x' = \frac{dx}{dt} = -\tfrac{1}{2}g_1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}g_1^2 - g_2}$$

ist.

3. Nimmt man k positiv und hinreichend klein an, so ist $c > 0$, $\bar{c} < 0$. Für $x = c$ und $x = \bar{c}$ ist $x' = 0$. Für $\bar{c} < x < c$ ist x' positiv oder negativ, je nachdem man die Quadratwurzel positiv oder negativ nimmt. In der Formel für x' gilt das obere oder das untere Vorzeichen, je nachdem x von $\bar{c}$ nach c oder von c nach $\bar{c}$ geht.

Es ist

$$dt = \frac{dx}{-\frac{1}{2}g_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}g_1^2 - g_2}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}g_1 \mp \sqrt{\frac{1}{4}g_1^2 - g_2}\right)dx}{g_2}$$

$$= -\frac{g_1}{2g_2}\,dx \pm \sqrt{\left(\frac{g_1}{2g_2}\right)^2 - \frac{1}{g_2}}\,dx\,^{1)}$$

$$= -\frac{\mathfrak{g}_1}{2\mathfrak{g}_2}\,dx \pm \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}}\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{g}_1}{2\mathfrak{g}_2}\right)^2 (x-\bar{c})(c-x) + \frac{1}{\mathfrak{g}_2}}$$

$$= \mathfrak{A}\,dx \pm \frac{\mathfrak{B}\,dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}},$$

wo

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\nu + (\tfrac{1}{2}\nu_1 - \tfrac{1}{2}\mu\nu)x + \cdots,$$
$$\mathfrak{B} = 1 + (\tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\lambda)x + \mathfrak{a}x^2 + \mathfrak{b}k^2 + \cdots\,^{2)}$$

Potenzreihen von x und k^2 sind.

Für $t = 0$ sei $x = c$, $x' = 0$. Die zum Übergang von $x = c$ nach $x = \bar{c}$ erforderliche Zeit t sei ω, die Zeit für den Übergang von $x = \bar{c}$ nach $x = c$ sei $\bar{\omega}$, so daß nach Ablauf der Zeit $T = \omega + \bar{\omega}$ wieder $x = c$, $x' = 0$ wird.

Wir führen an Stelle von x eine neue Veränderliche v ein, indem wir

$$x = \frac{c + \bar{c}}{2} + \frac{c - \bar{c}}{2}\cos v$$

setzen; dann entsprechen den Werten 0, π, 2π von v bezw. die Werte c, $\bar{c}$, c von x. Weiter ist

$$\pm\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})} = \frac{c-\bar{c}}{2}\sin v,$$

wenn für $v = 0 \cdots \pi$ der positive, für $v = \pi \cdots 2\pi$ der negative Wurzelwert genommen wird. Wegen

$$dx = -\frac{c-\bar{c}}{2}\sin v\,dv$$

hat man

$$\pm\frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}} = dv,$$

wo wie in der Formel für dt das obere Vorzeichen gilt, wenn x von $\bar{c}$ nach c ($v = \pi \cdots 2\pi$), das untere, wenn x von c nach $\bar{c}$ ($v = 0 \cdots \pi$) geht.

1) Hier erfolgt Vorzeichenumkehr, weil für kleine k und $\bar{c} < x < c$ $g_2 < 0$ und also

$$\frac{1}{g_2} = -\sqrt{\frac{1}{g_2^2}}$$

ist.

2) Es ist

$$\mathfrak{a} = \tfrac{1}{2}\mu_1 - \tfrac{1}{2}\lambda_1 - \tfrac{1}{2}\pi_1 + \tfrac{3}{8}\lambda^2 - \tfrac{1}{4}\lambda\mu - \tfrac{1}{8}\mu^2 + \tfrac{3}{8}\nu^2,$$
$$\mathfrak{b} = \tfrac{1}{2}\pi_1 - \tfrac{1}{2}\lambda_1 + \tfrac{1}{2}\lambda^2 - \tfrac{3}{8}\nu^2.$$

Nun ist

$$dt = (\mathfrak{P}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{P}_n k^n \cos nv + \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Q}_n k^n \sin nv)dv,$$

wo die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ Potenzreihen von k^2 sind; insbesondere ist

$$\mathfrak{P}_0 = 1 + (\tfrac{1}{4}\mu_1 + \tfrac{1}{4}\pi_1 - \tfrac{3}{4}\lambda_1 + \tfrac{15}{16}\lambda^2 - \tfrac{3}{8}\lambda\mu - \tfrac{1}{16}\mu^2 - \tfrac{3}{16}\nu^2)k^2 + \cdots,$$
$$\mathfrak{P}_1 = \tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\lambda + \cdots, \quad \mathfrak{P}_2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{a} + \cdots,$$
$$\mathfrak{Q}_1 = -\tfrac{1}{2}\nu + \cdots, \qquad \mathfrak{Q}_2 = \tfrac{1}{4}\mu\nu - \tfrac{1}{4}\nu_1 + \cdots$$

usw. Die Integration ergibt, wenn $v = 0$ und demgemäß $x = c$ für $t = 0$ sein soll,

$$t = \mathfrak{P}_0 v + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\mathfrak{P}_n k^n \sin nv - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\mathfrak{Q}_n k^n \cos nv + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\mathfrak{Q}_n k^n.$$

Setzt man $v = \pi$ und $v = 2\pi$, so erhält man hieraus

$$\omega = \pi\mathfrak{P}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\mathfrak{Q}_n k^n (1 - \cos n\pi)$$
$$= \pi\mathfrak{P}_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{2m+1}\mathfrak{Q}_{2m+1} k^{2m+1},$$
$$T = 2\pi\mathfrak{P}_0.$$

Hiernach ist die Periode T eine Potenzreihe von k^2:

$$T = 2\pi[1 + (\tfrac{1}{4}\mu_1 + \tfrac{1}{4}\pi_1 - \tfrac{3}{4}\lambda_1 + \tfrac{15}{16}\lambda^2 - \tfrac{3}{8}\lambda\mu - \tfrac{1}{16}\mu^2 - \tfrac{1}{16}\nu^2)k^2 + \cdots],$$

während

$$\omega - \frac{T}{2} = -\nu k + \cdots, \quad \bar{\omega} - \frac{T}{2} = \frac{T}{2} - \omega = \nu k + \cdots$$

nur ungerade Potenzen von k enthalten.

Indem wir

$$l = -\frac{1}{\mathfrak{P}_0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\mathfrak{Q}_n k^n = \tfrac{1}{2}\nu k + (\tfrac{1}{8}\nu_1 - \tfrac{1}{8}\mu\nu)k^2 + \cdots$$

setzen, haben wir

$$u = \frac{2\pi t}{T} + l = v + \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n k^n \sin nv + \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n k^n \cos nv,$$

wo

$$\mathfrak{R}_n = \frac{2\pi}{nT}\mathfrak{P}_n, \quad \mathfrak{S}_n = -\frac{2\pi}{nT}\mathfrak{Q}_n$$

Potenzreihen von k^2 sind; insbesondere ist

$$\mathfrak{R}_1 = \tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\lambda + \cdots, \quad \mathfrak{R}_2 = \tfrac{1}{4}\mathfrak{a} + \cdots,$$
$$\mathfrak{S}_1 = \tfrac{1}{2}\nu + \cdots, \qquad \mathfrak{S}_2 = \tfrac{1}{8}\nu_1 - \tfrac{1}{8}\mu\nu + \cdots$$

usw.

Wenn v beständig wachsend das Intervall $0 \cdots 2\pi$ durchläuft, so durchläuft t beständig wachsend das Intervall $0 \cdots T$ und demnach u das Intervall $l \cdots l + 2\pi$. Wird v durch $v + 2p\pi$ (p ganze Zahl) ersetzt, so tritt $u + 2p\pi$ an die Stelle von u. Es geht also u beständig wachsend von $-\infty$ nach $+\infty$, wenn v beständig wachsend von $-\infty$ nach $+\infty$ geht. Demnach ist v eine eindeutige Funktion von u. Dasselbe gilt für die Funktion $\cos v$, welche überdies ungeändert bleibt, wenn u durch $u + 2p\pi$ ersetzt wird.

4. Als periodische Funktion von u mit der Periode 2π läßt sich $\cos v$ in eine Fouriersche Reihe entwickeln:

$$\cos v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nu + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nu.$$

Zunächst ist

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos v\, du = \frac{1}{2\pi}\int_l^{l+2\pi} \cos v\, du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos v \frac{du}{dv}\, dv;$$

$\cos v \frac{du}{dv}$ läßt sich in eine nach sin und cos der Vielfachen von v fortschreitende Reihe mit dem konstanten Glied $\frac{1}{2}\mathfrak{S}_1 k$ entwickeln; also ist

$$A_0 = (\tfrac{1}{4}\mu - \tfrac{1}{4}\lambda)k + \cdots$$

eine nach ungeraden Potenzen von k fortschreitende Reihe.

Weiter ist

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos v \cos nu\, du = \frac{1}{\pi}\int_l^{l+2\pi} \cos v \cos nu\, du \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} \sin nu \sin v\, dv, \\ B_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos v \sin nu\, du = \frac{1}{\pi}\int_l^{l+2\pi} \cos v \sin nu\, du \\ &= -\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} \cos nu \sin v\, dv \end{aligned}$$

Setzt man $u - v = \eta$, so ist sowohl $\cos n\eta$ als auch $\sin n\eta$ in eine nach $k^m \sin mv$, $k^m \cos mv$ $(m = 1, 2, \cdots)$ fortschreitende Reihe entwickelbar, deren Koeffizienten Potenzreihen von k^2 sind. Aus

$$\begin{aligned} \sin nu &= \sin nv \cos n\eta + \cos nv \sin n\eta, \\ \cos nu &= \cos nv \cos n\eta - \sin nv \sin n\eta \end{aligned}$$

ergeben sich Entwicklungen von der Form

$$\sin nu = k^n \mathfrak{p}_{n0} + k^{n-1}\mathfrak{p}_{n1}\cos v + k^{n-1}\mathfrak{q}_{n1}\sin v + \cdots,$$
$$\cos nu = k^n \bar{\mathfrak{p}}_{n0} + k^{n-1}\bar{\mathfrak{p}}_{n1}\cos v + k^{n-1}\bar{\mathfrak{q}}_{n1}\sin v + \cdots,$$

wo die $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ Potenzreihen von k^2 sind. Daraus folgt

$$\sin nu \sin v = \tfrac{1}{2} k^n \mathfrak{q}_{n1} + \cdots,$$
$$\cos nu \sin v = \tfrac{1}{2} k^n \bar{\mathfrak{q}}_{n1} + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder $\cos mv$, $\sin mv$ $(m = 1, 2, \cdots)$ enthalten. Dann ist

$$A_n = \frac{1}{n} k^{n-1}\mathfrak{q}_{n1}, \quad B_n = -\frac{1}{n} k^{n-1}\bar{\mathfrak{q}}_{n1}$$

und insbesondere

$$A_1 = 1 + (\tfrac{5}{32}\lambda\mu - \tfrac{3}{64}\lambda^2 - \tfrac{7}{64}\mu^2 + \tfrac{1}{64}\nu^2 + \tfrac{1}{16}\mu_1 - \tfrac{1}{16}\lambda_1 - \tfrac{1}{16}\pi_1)k^2 + \cdots,$$
$$B_1 = (-\tfrac{1}{16}\lambda\nu + \tfrac{1}{8}\mu\nu - \tfrac{1}{16}\nu_1)k^2 + \cdots,$$
$$A_2 = (\tfrac{1}{4}\lambda - \tfrac{1}{4}\mu)k \cdots,$$
$$B_2 = \tfrac{1}{4}\nu k + \cdots,$$
$$A_3 = (\tfrac{1}{16}\lambda_1 - \tfrac{1}{16}\mu_1 + \tfrac{1}{16}\pi_1 + \tfrac{3}{64}\lambda^2 + \tfrac{7}{64}\mu^2 - \tfrac{5}{32}\lambda\mu - \tfrac{9}{64}\nu^2)k^2 + \cdots,$$
$$B_3 = (\tfrac{3}{16}\lambda\nu - \tfrac{1}{4}\mu\nu + \tfrac{1}{16}\nu_1)k^2 + \cdots$$

usw.

Vermittels der Gleichung

$$x = -\tfrac{1}{2}\lambda k^2 + \cdots + [1 + (\tfrac{5}{8}\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\lambda_1)k^2 + \cdots]k\cos v$$

berechnet man x als trigonometrische Reihe von

$$u = \frac{2\pi t}{T} + l,$$

deren Koeffizienten Potenzreihen von k sind:

$$x = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nu + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nu\text{[1]};$$
$$A_0 = (\tfrac{1}{4}\mu - \tfrac{3}{4}\lambda)k^2 + \cdots,$$
$$A_1 = k + (\tfrac{37}{64}\lambda^2 + \tfrac{5}{32}\lambda\mu - \tfrac{7}{64}\mu^2 + \tfrac{1}{64}\nu^2 - \tfrac{9}{16}\lambda_1 + \tfrac{1}{16}\mu_1 - \tfrac{1}{16}\pi_1)k^2 + \cdots,$$
$$B_1 = (\tfrac{1}{8}\mu\nu - \tfrac{1}{16}\lambda\nu - \tfrac{1}{16}\nu_1)k^2 + \cdots,$$
$$B_2 = \tfrac{1}{4}\nu k^2 + \cdots,$$
$$A_3 = (\tfrac{1}{16}\lambda_1 - \tfrac{1}{16}\mu_1 + \tfrac{1}{16}\pi_1 + \tfrac{3}{64}\lambda^2 + \tfrac{7}{64}\mu^2 - \tfrac{5}{32}\lambda\mu - \tfrac{9}{64}\nu^2)k^3 + \cdots,$$
$$B_3 = (\tfrac{3}{16}\lambda\nu - \tfrac{1}{4}\mu\nu + \tfrac{1}{16}\nu_1)k^3 + \cdots$$

1) Diese Reihe ist für alle u und für $k < \mathfrak{r}$ ($\mathfrak{r}$ ist eine hinreichend kleine positive Größe) unbedingt und gleichmäßig konvergent. Vgl. Zeitschr. Math. Phys. **49**, 262—263.

usw. Allgemein sind A_n und B_n mit k^n multiplizierte Potenzreihen von k^2.

Durch Umstellung der Glieder erscheint x als Potenzreihe von k, deren Koeffizienten trigonometrische Funktionen von u sind:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} k^n \xi(u) \text{ [1]};$$

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \cos u, \\
\xi_2 &= (\tfrac{1}{4}\mu - \tfrac{3}{4}\lambda) + (\tfrac{1}{4}\lambda - \tfrac{1}{4}\mu)\cos 2u + \tfrac{1}{4}\nu \sin 2u, \\
\xi_3 &= (\tfrac{37}{64}\lambda^2 + \tfrac{5}{32}\lambda\mu - \tfrac{7}{64}\mu^2 + \tfrac{1}{64}\nu^2 - \tfrac{9}{16}\lambda_1 + \tfrac{1}{16}\mu_1 - \tfrac{1}{16}\pi_1)\cos u \\
&\quad + (\tfrac{1}{8}\mu\nu - \tfrac{1}{16}\lambda\nu - \tfrac{1}{16}\nu_1)\sin u \\
&\quad + (\tfrac{1}{16}\lambda_1 - \tfrac{1}{16}\mu_1 + \tfrac{1}{16}\pi_1 + \tfrac{3}{64}\lambda^2 - \tfrac{5}{32}\lambda\mu - \tfrac{9}{64}\nu^2)\cos 3u \\
&\quad + (\tfrac{3}{16}\lambda\nu - \tfrac{1}{4}\mu\nu + \tfrac{1}{16}\nu_1)\sin 3u
\end{aligned}$$

usw. Allgemein ist ξ_n eine lineare homogene Funktion von $\cos mu$, $\sin mu$ $(m = n, n-2, n-4, \cdots)$.

Über ein in der Optik auftretendes bestimmtes Integral.

Von PAUL STÄCKEL in Kiel.

Bei gewissen optischen Untersuchungen über Interferenzen wird man, wie mir Herr E. Gehrcke brieflich mitgeteilt hat, auf das bestimmte Integral

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\beta\xi^2}\, d\xi}{(1-\tau)^2 + 4\tau \sin^2\left(\pi\gamma \dfrac{1+\frac{\xi}{C}}{\lambda_0}\right)}$$

geführt. Dabei bedeuten γ, C, λ_0, β Konstanten, die man unbeschadet der Allgemeinheit als positiv voraussetzen darf, und τ ist ein positiver echter Bruch.

Setzt man zur Vereinfachung

$$\frac{2\pi\gamma}{\lambda_0} = a, \quad \beta\frac{C^2\lambda_0^2}{4\pi^2\gamma^2} = k, \quad \frac{2\pi\gamma}{\lambda_0}\xi = \eta,$$

so erhält man mittels der Formel

$$2\sin^2\frac{\eta + a}{2} = 1 - \cos(\eta + a)$$

1) Die Reihe ist für $k < \tau$ und für alle u gleichmäßig konvergent. Vgl. a. a. O. S. 263.

die Gleichung:

$$J = \frac{C\lambda_0}{2\pi\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-k\eta^2}\,d\eta}{1+\tau^2-2\tau\cos(\eta+\alpha)}.$$

Es gilt aber die im wesentlichen schon bei Euler auftretende Identität:

$$\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2-2\tau\cos\zeta} = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\tau^\nu\cos\nu\zeta,$$

die man leicht beweist, indem man

$$2\cos\nu\zeta = e^{i\nu\zeta} + e^{-i\nu\zeta}$$

setzt und die so entstehenden beiden geometrischen Reihen summiert. Folglich wird

$$J = \frac{1}{1-\tau^2}\,\frac{C\lambda_0}{2\pi\gamma}\left\{\int_{+\infty}^{-\infty}e^{-k\eta^2}d\eta + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\tau^\nu\int_{+\infty}^{-\infty}e^{-k\eta^2}\cos(\nu\eta+\nu\alpha)\,d\eta\right\}.$$

Nun ist aber augenscheinlich

$$\int_{+\infty}^{-\infty}e^{-k\eta^2}\sin\nu\eta\,d\eta = 0, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

während nach Riemann (*Partielle Differentialgleichungen*, 3. Auflage, Braunschweig 1882, S. 38)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-k\eta^2}\cos\nu\eta\,d\eta = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\,e^{-\frac{\nu^2}{4k}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist; die Quadratwurzel ist positiv zu nehmen. Mithin ergibt sich

$$J = \frac{1}{1-\tau^2}\,\frac{C\lambda_0}{2\pi\gamma}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\left\{1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\tau^\nu\cos\nu\alpha\cdot e^{-\frac{\nu^2}{4k}}\right\}$$

oder, indem man für α und k die Werte einsetzt:

$$J = \frac{1}{1-\tau^2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\left\{1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos\nu\frac{2\pi\gamma}{\lambda_0}\cdot\tau^\nu\cdot e^{-\nu^2\frac{\pi^2\gamma^2}{\beta C^2\lambda_0^2}}\right\},$$

ein Ausdruck, der für numerische Berechnung wohlgeeignet ist.

Kiel, im August 1904.

Rezensionen.

Boltzmann, L., Über die Prinzipien der Mechanik. Zwei akademische Antrittsreden. Leipzig 1903, Hirzel. 48 S.

Es handelt sich um die beiden Vorlesungen, welche der Verfasser beim Antritt seiner Lehrtätigkeit an der Universität Leipzig und beim Wiederantritt seiner alten Professur in Wien gehalten hat. Gegenstand der Ausführungen ist zu zeigen, daß die Gesetze der Mechanik nicht auf die unbelebte Natur beschränkt sind, daß sich vielmehr die Anwendbarkeit der Mechanik in das Gebiet des Geistigen erstreckt und weiter erstreckt, als eine flüchtige Betrachtung vermuten läßt. Zum Beweise für seine Behauptung weist der Verfasser auf den Mechanismus des Gedächtnisses, auf das von Darwin aufgestellte mechanische Prinzip der Vererbung, auf die Entstehung der Denkgesetze und unsers philosophischen Denkens überhaupt hin, um nicht nur unsere körperlichen Organe, sondern auch unser Seelenleben, ja Kunst und Wissenschaft, Gefühlseindrücke und Begeisterung, zur Domäne der Mechanik zu machen. Zum Schluß betont der Verfasser, um Mißverständnissen vorzubeugen, daß es sich bei dieser Darstellung durch rein mechanische Bilder natürlich nur um die eine Seite aller Vorgänge der unbelebten und belebten Natur handeln kann, daß alle höheren Bestrebungen und Ideale dabei keine Einbuße erleiden.

Berlin. E. Jahnke.

Bork, H., Mathematische Hauptsätze. Ausgabe für Realgymnasien und Oberrealschulen. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Dr. Max Nath. I. Teil. Leipzig. 1903. Dürr. 8°. 242 S. geb. 2,50 Mk.

Koppe-Diekmann, Geometrie zum Gebrauch an höheren Unterrichtsanstalten. Ausgabe für Reallehranstalten. Essen 1903. Baedeker. I. Teil 21. Aufl. 248 S. VIII Tafeln. geb. 2,40 Mk.; II. Teil 18. Aufl. 268 S. geb. 2,40 Mk.

Die Lehrpläne von 1901 bringen beim mathematischen Pensum der unteren und mittleren Klassen der Realanstalten neue Forderungen für U II in der Planimetrie und Stereometrie. Nath wurde diesen Forderungen 1902 in einem Anhang zu Borks Hauptsätzen gerecht, jetzt hat er eine besondere Ausgabe für Realanstalten eingerichtet, die die Erweiterungen in § 31 S. 107—110 und § 63 S. 229—236 bringt. Bei Koppe-Diekmann findet sich das Entsprechende in der neuen Auflage des I. Teiles S. 147—165 und S. 166—171. In bezug auf den planimetrischen Abschnitt beschränkt sich Nath auf Aufgaben, die in algebraischer Form vorliegen. Es dürfte sich empfehlen, daß er, wie Diekmann es getan hat, einige Aufgaben hinzufügt, bei denen von einem geometrischen Problem ausgegangen wird. Bei Diekmann ist der planimetrische Abschnitt anfangs zu allgemein und abstrakt gehalten. Die Anleitung zum perspektivischen Zeichnen ist in beiden Büchern ganz kurz gefaßt, was der im Unterricht zur Verfügung stehenden Zeit entspricht. Außer einigen Definitionen werden nur die Grundlagen der schiefen Parallelprojektion gegeben, so daß die Schüler in den Stand gesetzt werden, die stereometrischen Figuren der Lehrbücher zu verstehen und ganz einfache Körper selbst in schiefer Parallelprojektion zu zeichnen. Bei Bork-Nath wird mit Recht noch im besonderen auf die gerade Parallelprojektion hingewiesen.

Die sonstigen Änderungen in beiden als tüchtig und brauchbar anerkannten Lehrbüchern (früher rezensiert Archiv 1896 S. 70 und 1897 S. 33) sind nicht zu groß.

Diekmann hat noch im I. Teil S. 143—146 hübsche Anwendungen der Kreisrechnung hinzugefügt, die mit ihren trefflichen Figuren ausgezeichnet zur Hebung der Lust am sorgfältigen Zeichnen benutzt werden können; im II. Teil hat er den Stoff aufs neue gesichtet. Hier hätten Zylinder und Kegel allgemein gefaßt werden sollen, die S. 75 gegebene erste Einführung der Kegelschnitte wäre, da sie zu falschen Vorstellungen führen kann, besser fortgeblieben.

Nath hat in der Schreibweise, in der Anordnung und im Ausdruck an vielen Stellen geändert, sachlich hat er im Anschluß an den Anhang von 1902 den zweckentsprechend angelegten Abschnitt über Konstruktionsaufgaben § 27—30 aufgenommen.

Verschiedene Figuren sind in beiden Büchern noch verbesserungsbedürftig, besonders im II. Teil von Koppe-Diekmann.

Schöneberg. E. Kullrich.

H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Raphael Meyer. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. (Begründet von Moritz Cantor.) 17. Heft mit 32 Figuren im Text. Leipzig 1903, B. G. Teubner. VIII u. 434 S.

Das neue Buch, mit welchem H. Zeuthen uns beschenkt hat, gehört, um ein allgemeines Urteil vorauszuschicken, zu dem Schönsten, was für meinen Geschmack die geschichtlich mathematische Literatur der letzten Jahrzehnte hervorgebracht hat. Das schließt Meinungsverschiedenheiten über Einzelnes nicht aus, und ich werde im Verlaufe dieser Besprechung solche zu betonen haben, aber einzelner Widerspruch bei allgemeiner Zustimmung kann die letztere gewiß nicht beeinträchtigen, das möchte ich dem geehrten Verfasser von vorn herein sagen, das möchte ich auch die Leser dieses Berichtes zu beherzigen bitten. Es ist ja naturgemäß, daß man nicht alles aus einem Buche von 27 Druckbogen, was einem gefiel, hervorheben kann, daß man weitläufiger und breiter Nein als Ja sagt, aber gegen Mißdeutung dieses räumlichen Übergewichtes des Nein wünsche ich mit dieser Vorbemerkung das Zeuthensche Buch ebenso wie mich selbst zu schützen.

H. Zeuthen bezeichnet in der Vorrede die Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert als Fortsetzung seiner Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter (1896) und verweist vielfach auf dieselbe. Natürlich sind derartige Berufungen nur für solche Leser beweiskräftig, welchen H. Zeuthens Auffassung der antiken Geometrie der Wahrheit entsprechend scheint. Daß ich dem entgegengesetzten Lager angehöre, weiß H. Zeuthen, wissen alle, die mit Geschichte der Mathematik sich beschäftigen; ich brauche nicht erneut dem entgegenzutreten, was für mich niemals Wahrheit gewesen ist. Auch dieses soll eine allgemeine Bemerkung sein, die mich der Mühe enthebt, sie für einzelnes zu wiederholen.

Wenden wir uns dem Buche näher zu. Es besteht aus drei Abschnitten: I. Historischer und biographischer Überblick (S. 4—80). II. Die Analyse des Endlichen (S. 81—233). III. Entstehung und erste Entwicklung der Infinitesimalrechnung (S. 234—426). Dann folgt noch (S. 427—434) ein nach den Vorschriften des Herrn Verfassers durch Herrn Dr. Björnbo angefertigtes Namen- und Sachregister. Herrn Zeuthens Absicht war, wenn ich ihn recht verstanden habe, vornehmlich zu zeigen, wie die Mathematik sich in den beiden Jahrhunderten, welche als Überschrift dienen, entwickelt hat, wie ein Gedanke aus dem anderen folgte. Durch wen im einzelnen dieser oder jener Fortschritt sich vollzog, ist ihm zwar nicht gleichgültig, tritt aber doch etwas zurück. Das war jedenfalls der Grund, warum für Leser, welche auch die Personen, von deren geistigen Großtaten sie zu hören bekommen, zu kennen wünschen, der erste Abschnitt geschrieben wurde, ein unter allen Umständen interessanter Überblick über Zeit und Menschen. Freilich tritt gleich hier ein Übelstand hervor, der dem ganzen Buche anhaftet, der Mangel an Belegen. H. Zeuthen bedauert selbst diesen Mangel. Weder der Platz noch die Darstellungsform, so sagt er in der Vorrede, hätten ihm gestattet, die Belege beizufügen. In seinen kleineren Abhandlungen in den Veröffentlichungen der Kopenhagner Akademie sei ausführlicher begründet, warum seine Auffassung da und dort von der anderer Schriftsteller abweiche, und er sei auch zu näherer Begründung bereit, wenn in anderen Fällen seine Auffassung jemandem zweifelhaft vorkommen sollte. Das ist gewiß ganz schön, aber woher soll der Leser, der kein Historiker von Fach ist, wissen, wo Abweichungen vorkommen, mit anderen Worten, über welche Punkte die Fachmänner nicht einig sind? Das hätte nach meiner Ansicht da und dort kurz gesagt werden können und gesagt werden sollen. Dazu hätte, da es sich doch nur um verhältnismäßig seltene, wenn auch nicht unwichtige Dinge handelt, ein sehr geringer Raum ausgereicht, und die Darstellungsform hätte darunter nicht zu leiden brauchen.

Wenn z. B. S. 5 von Tartaglia gesagt ist, er habe 8 Tage vor dem Wettkampf mit Fiore selbst, wie früher Ferro, die Regel für die Lösung von Gleichungen von der Form $x^3 + ax = b$ gefunden, warum setzte H. Zeuthen nicht hinzu, so laute die Behauptung Tartaglias, der aber nicht von jedem Glaube geschenkt werde? Im II. Abschnitte (S. 84) kommt H. Zeuthen auf die gleiche Sache zurück. Er macht hier eine sehr feine Bemerkung. Für die Herleitung der Auflösung von $x^3 + ax = b$ gebe es, sagt er, mancherlei Wege, aber die Gleichungswurzel selbst bestehe immer aus der algebraischen Summe zweier Kubikwurzeln. Ob Tartaglia also selbständig arbeitete oder Ferros Auflösung irgend woher kennen lernte, ist aus der Gleichheit der gewonnenen Wurzelform nicht zu entscheiden. Das ist vollkommen richtig, so richtig, daß ich die vorher von niemand beachtete Tatsache als Randbemerkung meinem 2. Bande beifüge, um bei einer Neubearbeitung benutzt zu werden, aber ob die beiden Kubikwurzeln u und v notwendig nur mittelst $u + v$ und uv gefunden werden können, wie es in Tartaglias Terzinen heißt, ist damit noch nicht gesagt. Das kann Tartaglia sehr gut von Ferro entlehnt haben. Tartaglia hat eigentlich immer gelogen, wo es sich um wissenschaftlich Bedeutendes handelte, gelogen in bezug auf die Archimedischen Schriften, die er griechisch besessen haben will, gelogen in bezug auf die Binomialkoeffizienten, deren Erfindung er beansprucht, gelogen durch die Veröffentlichung frei erfundener Gespräche, welche alsdann als Beweismittel für in jenen Gesprächen vorkommende Dinge benutzt werden, gelogen durch die Behauptung, er besitze noch zahlreiche Entdeckungen auf dem Gebiete der Gleichungslehre. Das Sprichwort „Wer einmal lügt, dem glaubt man nicht, und wenn er auch die Wahrheit spricht" würde zu Schanden, wollte man auf Tartaglias Wort hin glauben, er habe am 12. Februar 1535 die Auflösung von $x^3 + ax = b$, am 13. Februar die von $x^3 = ax + b$ gefunden! Unmöglich wäre die Tatsache allerdings nicht, aber unwahrscheinlich ist und bleibt sie.

Eine andere Stelle, mit welcher ich mich nicht einverstanden erklären kann, findet sich S. 56. In Newtons Brief vom 24. Oktober 1676 stehen bekanntlich zwei Anagramme, welche Newton selbst später übersetzt hat, und seine Übersetzung stimmt Buchstabe für Buchstabe mit den Anagrammen überein. Newton sagt auch nicht, daß in der anagrammatischen Schreibweise ein e zu wenig angesetzt sei, aber H. Zeuthen behauptet solches und ändert dadurch Newtons Satz in der Weise, daß er wesentlich deutlicher wird, während grade darauf Gewicht zu legen ist, daß die Anagramme, selbst wenn man ihre Buchstaben in Worte umzusetzen wußte, so gut wie nichts sagten. Übrigens sei nicht verschwiegen, daß H. Zeuthen die von ihm vorgenommene Änderung in einer Fußnote ausdrücklich betont.

Daß die Zeichen + und — und ihre Aussprache plus und minus erst nach Widmann als gewöhnliche Ausdrücke für Addition und Subtraktion angewendet werden (S. 94) ist irrig. In der zweiten Auflage meiner Geschichte II, 230 ist eine das Gegenteil beweisende Belegstelle abgedruckt.

Durch einen Druckfehler dürfte S. 101 und S. 206 das von Descartes benutzte Gleichheitszeichen genau so wie das Unendlichkeitszeichen aussehen. Es war aber bekanntlich links offen. Sinnentstellende Druckfehler sind auch S. 309 Z. 4 v. u. und S. 313 Z. 1 zu verbessern. An ersterer Stelle muß es heißen $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots$, und an letzterer ist $\frac{1}{2 \cdot 3}$ einmal zu streichen. Daß S. 409 Z. 27 dz durch dx zu ersetzen ist, sieht jeder Leser sofort.

Der Beweis durch vollständige Induktion (S. 168) findet sich allerdings bei Pascal, aber nicht bei ihm zuerst, wie ich früher annahm.

H. Vacca hat nachgewiesen, das Maurolico in seiner Arithmetik von 1575 auf S. 7, 17, 30 sich dieser Methode bedient hat, beispielsweise um den Satz $2\,\frac{a(a+1)}{2} - a = a^2$ zu beweisen, daß aber Pascal (III, 376 Z. 4 v. u.) sich für eben diesen Satz auf Maurolico beruft, mithin zweifellos die Beweismethode von ihm entlehnte.

Die älteste Schrift De la Hire's von 1673 ist nicht verloren (S. 191). In der 2. Auflage meines II. Bandes S. 125—126 konnte ich über sie berichten.

Als Newton seine Prinzipien herausgab, hatte Leibniz (S. 231) Stellenzeiger noch nicht veröffentlicht, allein etwas später hielt er mit dieser Erfindung, welche sich bald als unentbehrlicher Fortschritt erwiesen hat, nicht zurück. Einfache Stellenzeiger hat Leibniz in den Acta Eruditorum von 1691, doppelte Stellenzeiger in denen von 1710 gebraucht.

Newtons Methodus fluxionum war gegen 1671 druckfertig, wurde aber erst 1736, nachdem Newton schon 10 Jahre tot war, in englischer Übersetzung veröffentlicht. H. Zeuthen benutzt sie fortwährend als Zeugnis für das, was Newton 1671 wußte. Dem Plane der Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhunderte gegenüber ist das allerdings ziemlich gleichgültig. Ob Newton, ob ein anderer diesen oder jenen Gedanken zuerst hatte, verändert die Geschichte des Gedankens selbst so gut wie gar nicht. Sollte aber die Größe dessen, was Newton selbständig in so früher Zeit wie 1671 wußte, besonders betont werden, dann mußte auch angegeben werden, daß es doch nicht fest steht, die Methodus fluxionum habe druckfertig von 1671 an in Newtons Pulte gelegen, ohne die geringste Veränderung zu erfahren. Ich wenigstens bin der entgegengesetzten Meinung, welche ich in der 2. Auflage meines III. Bandes S. 178, 190, 194, 401 näher erörtert habe.

Der Buchstabe π für das Verhältnis der Kreisperipherie zum Durchmesser ist allerdings durch Euler Gemeingut geworden, aber eingeführt hat Euler (S. 283) diese Bezeichnung nicht. Oughtred und nach ihm Barrow nannten δ den Kreisdurchmesser, π den entsprechenden Kreisumfang, Jones bezeichnete dann 1706 durch π das Verhältnis der beiden genannten Längen.

Wenn S. 151 und S. 302 für Bombelli und Cataldi in Anspruch genommen wird, sie hätten sich um die Konvergenz ihrer endlosen Kettenbruchentwicklung für Quadratwurzeln gekümmert, so ist das doch wohl zu viel. Bei der Auswertung bei irgend einem Kettengliede stehen bleibend, brachten sie in dem zuletzt benutzten Teilnenner eine Korrektur an, aber diese Rechenvorschrift ist doch noch weit entfernt von dem Konvergenzbewußtsein.

Diesen zum Teil sehr geringfügigen Ausstellungen, deren Berechtigung H. Zeuthen vielleicht nicht allgemein anerkennen wird, möchte ich auch ein Verzeichnis von Stellen nachfolgen lassen, die mir besonders gut gefallen haben. Dazu rechne ich S. 142 die Bemerkung, das Auftreten vernachlässigbarer Größen bei der Berechnung der Logarithmen müsse zum Begriff des Unendlichkleinen geführt haben, dazu S. 163—164 die Ergänzung eines Fermatschen Beweises, dazu S. 237 flgg. die Erörterung der Schwerpunktsbestimmungen bei Luca Valerio, bei De la Faille, bei Guldin, dazu S. 381—394 die Darstellung von Newtons Prinzipien. Gewiß werden andere Leser auch an sonstigen hier unerwähnt gelassenen Stellen mit Vergnügen verweilen. Alle aber dürften mit mir in dem Gesamturteile übereinstimmen, man müsse H. Zeuthen für sein geistvolles auf ernsten Studien beruhendes Buch innigen Dank sagen.

Heidelberg. MORITZ CANTOR.

Kurt Geißler. Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. Leipzig 1902, B. G. Teubner. 8⁰. VII u. 417 S. 39 Fig.

Wir haben das Werk eines selbständigen Denkers vor uns; redliches Wollen und, wie der große Umfang des Buches zeigt, ein rastloser Fleiß zeichnen dasselbe aus, aber das Können hält keineswegs damit Schritt. Einige Goldkörner liegen begraben unter einem Schutthaufen von leeren Worten. Eben glaubt man, daß der Verfasser einen ihm eigentümlichen Gedanken ausspinnen wird, da weicht er ab und verliert sich in irgend einem andern. Er selbst scheint zu empfinden, daß es seinen Darlegungen an der nötigen Klarheit mangelt, denn auf S. 57 ruft er dem, der nach der Existenz eines gewissen Punktes Y fragt, zu: „Wer das sagt, der hat noch nicht verstanden, was in den ersten Abschnitten dieses Buches behandelt wurde." Es ist bitter, wenn der Käufer, nachdem er 14 ℳ für das Buch erlegt hat, sich das für seinen Unverstand noch sagen lassen muß. Es ist vor allem zu bedauern, daß der Verf., bevor er sein Buch zu veröffentlichen beschloß, versäumte, einen festen Entschluß zu fassen, für welchen Leserkreis er dasselbe zu schreiben gedachte. Aus gelegentlichen Polemiken gegen die Mathematiker scheint hervorzugehen, daß es für diese nicht geschrieben ist. Werden doch mit einer Breite und einem Wortschwall Dinge behandelt, an denen sich jedes mathematische Füchslein im ersten Semester längst die Schuhsohlen abgelaufen hat. Bald wird analytische Geometrie und etwas Differentialrechnung als bekannt vorausgesetzt, bald wieder heißt es, wie auf S. 217, „z. B. $-x+y=1$ oder $\frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1$, so liest jeder, der etwas analytische Geometrie gelernt hat, heraus, daß diese Gerade ...." Wird der Verf. bei mathematisch gebildeten Philosophen sein Glück machen? Wir wollen es ihm wünschen!

Nun zur Sache. Auf den ersten 257 Seiten setzt der Verf. seine Gedanken über das Unendlichkleine und das Unendlichgroße auseinander. Es folgt auf weiteren 38 Seiten eine sehr unvollständige Darstellung des Geschichtlichen über die Auffassung des Unendlichen. Wer erwartet, daß nun die Ansichten des Verf. etwa mit denen G. Cantors (S. 325—332) in Vergleich gestellt werden würden, oder daß eine Auseinandersetzung mit denselben erfolgt, täuscht sich. Die letzten 80 Seiten gelten philosophischen Betrachtungen über den dem Verf. eigentümlichen Begriff der „Behaftung".

Der Referent glaubt nach sorgfältigem Studium des Buches es aussprechen zu dürfen, daß die Ansichten Geißlers nahe verwandt sind denen von G. Veronese: Fondamenti di geometria. Padova 1891 (deutsch von Schepp, Leipzig 1894); doch ist Geißler ganz unbeeinflußt von Veronese. „Nimmt man an, daß die Punkte der x-Achse und die natürlichen Zahlen einander entsprechen, so ist der Punkt die Grenze eines unbegrenzt kleiner werdenden Segments." Dies bestreitet Veronese. Für ihn bleibt ein stets kleiner werdendes Segment stets noch ein Segment, und in einem „aktual" unendlich kleinen Segment lassen sich ihm zufolge noch viele, sogar unendlich viele Punkte unterscheiden. Wo wir also bisher nur einen Punkt haben, hat Veronese deren noch unendlich viele (vergl. F. Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie; eine Revision ihrer Prinzipien. Vorlesung gehalten im Sommer 1901. Autographiert. Leipzig 1902, B. G. Teubner. S. 323—325). Was Veronese scharf mathematisch zu fassen unternahm, glaubt Geißler, ganz unabhängig von diesem, in seinen verschiedenen „Weitenbehaftungen des Unendlichen" in Worte fassen zu können.

Berlin, im Mai 1903. E. Haentzschel.

K. Doehlemann. Geometrische Transformationen. I. Teil. **Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen.** Leipzig 1902. G. J. Göschensche Verlagshandlung (Samml. Schubert XXVII) 7 u. 322 S. 8^0. Preis geb. 10 *M.*

Der Verfasser beabsichtigt, die *„geometrischen Transformationen"* in zwei Bänden der obenerwähnten Sammlung zu behandeln. Er bezeichnet damit solche Verwandtschaften, die, abgesehen von der analytischen Festlegung, auch durch übersichtliche geometrische Konstruktionen vermittelt werden können. Von den Einwänden gegen diese vom Verfasser selbst als „nicht streng" bezeichneten Begriffsbestimmung abgesehen, sollte man jedoch meinen, daß auf die Herstellung der in dem ersten Teile behandelten projektiven Verwandtschaften auf der Geraden, in der Ebene und im Raume durch geometrische Konstruktionen das Hauptgewicht gelegt wäre. Dies ist nicht Fall. Wahrscheinlich mit Rücksicht auf andere Bände der Sammlung bevorzugte der Verfasser die analytisch geometrische Behandlung. Unter Benutzung der im ersten Abschnitt (S. 1—64) ausführlich besprochenen projektiven Koordinaten in den drei Gebieten definiert er in den übrigen drei Abschnitten die Transformationen analytisch, leitet daraus ihre Eigenschaften ab und zeigt hinterher, wie sie geometrisch hergestellt werden können. Insbesondere geht der Verfasser näher auf die Möbiusschen Netz-Konstruktionen ein. Außer den verschiedenen Arten von projektiven, kollinearen und reziproken Beziehungen auf demselben oder auf verschiedenen Trägern kommen auch jene projektiven Transformationen in der Ebene und im Raume zur Besprechung, die eine Kurve bzw. Fläche 2. Gr. in sich überführen. Eigenartiges fiel mir hierbei nicht auf. Die Behandlung ist elementar gehalten, so daß das Buch auch Studierenden in den ersten Semestern nicht allein zur Einführung in den im Titel bemerkten Gegenstand, sondern zugleich auch zur Bekanntmachung mit den projektiven Koordinaten dienen kann.

Nicht einverstanden erklären kann ich mich mit den Ausdrücken „binäre Maßbestimmung" und „Maßbestimmung in der Ebene und im Raume" für die Einführung projektiver Koordinaten in diesen Gebieten; denn unter „Maßbestimmung" versteht man sonst doch eine Festsetzung darüber, was als Länge einer Strecke oder Größe eines Winkels verstanden werden soll, und eine solche Festsetzung ist von den zugrunde gelegten Koordinaten unabhängig.

Ferner möchte ich auf die mangelhafte, weil nur auf Winkel bezügliche Begründung des wichtigen Satzes (S. 18) hinweisen, daß die metrischen Eigenschaften der geometrischen Gebilde als projektive inbezug auf den absoluten Kreis erscheinen, da dieser Mangel sich auch in anderen Werken findet und den Anfänger irre führt. In der Euklidischen Geometrie kann die Länge einer Strecke *nicht* wie der Winkel zweier Geraden als Logarithmus eines Doppelverhältnisses dargestellt werden; es muß daher noch gezeigt werden, wie man die Streckenmessung im Sinne der projektiven Geometrie auf den absoluten Kreis gründen kann.

Eigenartig und besonders hervorzuheben an dem Buche ist jedoch die Erörterung der Anwendungen, welche die behandelten Transformationen, in der darstellenden Geometrie, Kinematik, Kristallographie und Optik finden, sowie die Beschreibungen von Apparaten, welche solche Transformationen auf mechanischem Wege herstellen. Besonders reichhaltig sind die Beispiele aus der darstellenden Geometrie, wozu ich auch die Anwendungen der Zentralkollineation zur Konstruktion von Kegelschnitten aus gegebenen Bestimmungsstücken rechne. Vielleicht hätten auch noch einige von den zahlreichen Anwendungen der projektiven Transformationen in der graphischen Statik ein Plätzchen finden können.

Wien, im Juli 1903. E. Müller.

Heinrich Weishaupt. **Das Ganze des Linearzeichnens für Gewerbe- und Realschulen, sowie zum Selbstunterricht.** 4 Abteilungen in 149 Tafeln nebst erläuterndem Text. 4. Aufl., neu bearbeitet von Max Richter. I. Geometrische Zeichenlehre ℳ 9. II. Geometrische Projektionslehre ℳ 15. III. Geometrische Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde ℳ 6. IV. Axonometrie und Perspektive ℳ 10. Leipzig, H. Zieger.

In einer Zeit, wo das durch die neuen preußischen Lehrpläne geschaffene Bedürfnis eine Fülle von neuen Lehrbüchern über den Unterricht in der darstellenden Geometrie hervorgerufen hat, wollen wir nicht verfehlen, den Bibliotheken unsrer höheren Schulen dieses seit alters bekannte und bewährte umfangreiche Werk zur Anschaffung zu empfehlen. Je mehr Kollegen sich dieses in dem früheren Universitäts-Studium vernachlässigten Zweiges angewandter Mathematik bemächtigen, mit desto größerem Nachdruck und Erfolge werden wir es erstreben können, daß wenigstens an den realistischen Anstalten das künstlerische Zeichnen fakultativ, das Linearzeichnen obligatorisch werde, und daß alsdann letzteres (wenigstens in den oberen Klassen) ganz in die Hand des mathematischen Lehrers komme. Kollegen, welchen diese Fragen noch fremd sind, seien auf die vom Ministerium veröffentlichten „Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts", Berlin 6.—8. Juni 1900 aufmerksam gemacht, insbesondere auf die daselbst abgedruckten Gutachten der Herren E. Lampe und G. Hauck (S. 387—392).

In den früheren Auflagen des vorliegenden Werkes hatte sich der Verf. wohl hauptsächlich an die Künstlerwelt gewendet; so erklärt sich der seltsame Titel, und auch der Umstand, daß die Abschnitte über Axonometrie und Perspektive mit Widmungen an Julius Schnorr von Carolsfeld bezw. an Carl von Piloty versehen sind; der Bearbeiter der neuen Auflage hat das Verdienst, die textlichen Erläuterungen der Sprache der Mathematiker angepaßt zu haben, freilich hätte er sie für diese Leser noch erheblich kürzen können.

Berlin. RICHARD MÜLLER.

A. Gleichen. Lehrbuch der geometrischen Optik. Leipzig u. Berlin 1902, Verlag von B. G. Teubner. XIV u. 511 S. gr. 8°.

Von den beiden Gesichtspunkten, die bei der Abfassung dieses Werkes nach dem Vorwort maßgebend gewesen sind, dürfte der erste „durch eine methodische Darstellung dem Leser das Eindringen in die Disziplin der geometrischen Optik zu erleichtern“ in sehr schöner Weise erfüllt sein, während der zweite „eine gewisse Vollständigkeit auf diesem Gebiete zu erreichen“ vielleicht besser durch eine richtige Auswahl und Beschränkung zu ersetzen gewesen wäre, wodurch zugleich Raum gewonnen wäre, das Ausgewählte mehr kritisch einander gegenüberzustellen, wie man es von einem Lehrbuch zu beanspruchen pflegt.

Die ersten beiden Kapitel behandeln die Grundeigenschaften des Lichtes, es folgt dann eine sehr schöne und durchsichtige Darstellung der Eigenschaften des astigmatischen Büschels, dann die Brechung an Ebenen und Prismen, die Spiegelung an Kugelflächen, die Brechung an Kugelflächen, paraxiale Strahlen in zentrierten Systemen, Linsen. Bei diesen Kapiteln hätte nach Ansicht des Referenten ein stärkeres Hervortretenlassen der allgemeinen Abbildungsgesetze nach Abbe die Übersichtlichkeit noch erhöht, denn diese Gesetze enthalten ganz allgemeine Beziehungen, unabhängig von jedem optischen Gesetz und sollten daher als besonderer Abschnitt herausgehoben und am besten vorangestellt werden; jetzt stehen die Gesetze der Spiegelung voran, und man sieht nicht gleich, daß die kollinearen Beziehungen, die später so wichtig sind, auch schon hier gelten. Doch das ist eine methodische Frage, die den Wert dieser Kapitel nicht wesentlich beinträchtigt. In den folgenden 6 Kapiteln werden die Abbildungsfehler behandelt, sphärische Aberration, Astigmatismus, Koma, Orthoskopie, chromatische Aberration, Bildkrümmung. In diesen Kapiteln bedauert man, daß die allgemeine Theorie der 5 Abbildungsfehler erster Ordnung, wie sie zuerst von Seidel gegeben und später von Thiesen auf ganz anderem Wege abgeleitet ist, auch nicht einmal erwähnt ist, obwohl doch gerade wenigstens eine Übersicht über den Gang der Seidelschen Betrachtung sehr gut hierher gepaßt hätte. Entprechend der Schwierigkeit nimmt aber auch die Korrektheit in diesen Kapiteln etwas ab. Bei einem noch gerade recht einfachen Abschnitt über die Begrenzung der Strahlenbündel ist es Ref. aufgefallen, daß zwar die Pupillen behandelt werden, nicht aber die Gesichtsfeldblende, und beide sind doch genau gleich wichtig, was sich darin zeigt, daß beide unter gewissen Umständen ohne weiteres ihre Rollen vertauschen. Hierauf beruht es auch, daß später bei Besprechung des Galileischen Fernrohres die Ableitung der Größe des Gesichtsfeldes wenig durchsichtig ist, denn es wird dort immer noch Eintrittspupille genannt, was in der Tat Gesichtsfeldblende ist; in diesem Falle ist die Augenpupille zugleich Pupille des Fernrohrs. Das 14te Kapitel über die Bildkrümmung ist leider nicht recht geglückt, obwohl gerade auf diesem Gebiete eine gründliche Sichtung besonders erwünscht gewesen wäre. Es wird hier zunächst eine elementare

Ableitung des Petzvalschen Satzes über die Beziehung zwischen Objekt- und Bildkrümmung bei einem zentrierten System gegeben. Bei der Besprechung des Gültigkeitsbereiches dieser Formel im § 180 wird dann allerdings gesagt, daß die Ableitung voraussetzt, daß das von jeder Fläche erzeugte Bild mit der Spitze der kaustischen Fläche zusammenfällt und hier eine Strahlenvereinigung höherer Ordnung herbeigeführt ist. Nun weiß aber der Leser aus den früheren Abschnitten bereits, daß dies durchaus nicht der Fall ist, und damit werden die Schlüsse über die Gültigkeit der Petzvalschen Formel illusorisch. Im § 180 wird dann auch noch bedauerlicher Weise der durch den Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche gehende Strahl mit Hauptstrahl bezeichnet, während doch allgemein hiermit ein ganz anderer Strahl bezeichnet zu werden pflegt, und hierdurch wird eine ziemliche Verwirrung angerichtet. In den §§ 181 bis 185 werden dann die Bildkrümmungen berechnet für den Fall, daß die Hauptstrahlen durch die Mitte einer dünnen Linse gehen, daß sie durch den Scheitel einer Fläche gehen und daß sie durch eine Blende gezwungen werden, durch einen beliebigen Punkt der Achse zu gehen. Leider wird gerade für diesen letzten, man kann sagen für die optischen Instrumente allein wichtigen Fall die Ableitung nicht gegeben, sondern nur das Resultat.

Es folgen dann die Kapitel über die Helligkeit der Bilder und über das menschliche Auge, und dann kommt die Beschreibung und Theorie der Fernrohre, des Mikroskops und der photographischen Objektive. Leider sind diese drei Kapitel nicht sehr gleichmäßig behandelt. Die Bearbeitung des Fernrohres ist entschieden die beste, und es wird manchem Leser willkommen sein, die verschiedenen Methoden der Berechnung von Fernrohrobjektiven nach Euler, Herschel, Littrow, Steinheil, Moser, Harting, v. Hoegh hier übersichtlich bei einander zu haben. Wenn der Verf. bei der Besprechung der Fernrohre mit Porroschem Prismensystem auf den Grund, weshalb diese meist in der Lichtstärke gegen die holländischen Fernrohe etwas zurückstehen, etwas näher eingegangen wäre, so hätte er leicht noch hinzufügen können, daß dies nicht im Prinzip der Fernrohre selbst liegt, sondern daß in Spezialtypen größerer Form auch derartige Fernrohre mit der vollen Lichtstärke gebaut werden. Die Bemerkung, daß die von Zeiß angewandte Stellung der Objektive in diesen Fernrohren theoretisch eine erhöhte Plastik der Bilder folgern läßt, „die jedoch in der Praxis wenig merkbar sein wird", wäre besser unterblieben, da in der Tat diese Plastik besonders in den kleinen Typen der Zeißschen Fernrohre sehr auffallend ist. Die Behandlung des Mikroskops ist entschieden weit weniger eingehend und vollständig, als die des Fernrohres, die in den andern Kapiteln so reich vorhandene Menge von Beispielen und Konstruktionsarten fehlt hier fast ganz. Es mag ja sein, daß, wie Verf. im Vorwort sagt, das Material hier nicht in gleicher Weise zur Verfügung gestanden hat, aber es berührt doch eigentümlich, wenn als Literatur nur Dippel und Czapski genannt werden. Beim Mikroskop wird auch ganz kurz auf die Grenzen der Leistungsfähigkeit infolge der Beugung des Lichtes eingegangen; in ähnlicher Weise hätte auch sehr gut die Grenze des Auflösungsvermögens der Fernrohre in ihrer Abhängigkeit vom Objektivdurchmesser erläutert werden können. Am wenigsten befriedigt die Behandlung der photographischen Objektive. Anstatt hier in ähnlicher Weise wie bei den Fernrohrobjektiven, dem Ideengang der Konstrukteure nachzugehen, werden hier nach einer Reihe allgemeiner Paragraphen erst die Resultate der Durchrechnung eines Euryskops und eines Kollineares mitgeteilt, und dann werden fast 40 Seiten mit der Durchrechnung des Goerzschen Doppelanastigmates bedeckt. Hiernach folgt eine Mitteilung von Construktionsarten einer sehr großen Zahl anderer Objektive, da aber hier eine kritische Besprechung fast völlig fehlt und, wo sie versucht wird, sehr mangelhaft ist, weil sie unter Bezugnahme auf das nicht geglückte Kapitel über die Bildkrümmung erfolgt, so ist dieser Abschnitt eigentlich nur eine Sammlung von Zahlenbeispielen ohne Angabe der Resultate.

Den Schluß des Buches bildet noch ein ganz kurzes Kapitel von 10 Seiten, in dem die Besprechung des Spektroskops mit derjenigen der Photometer vereinigt ist, das ebensogut fehlen könnte. Die Besprechung des Auflösungsvermögens des Spektroskops ist, weil die Beugung nicht berücksichtigt ist, unvollständig und falsch.

So sehr also die allgemeinen Kapitel des ganzen Werkes eine sehr gute Einführung in die geometrische Optik bilden und als solche zu empfehlen sind, wird doch die Ausnützung des reichhaltigen Inhalts der letzten Kapitel mit Vorsicht geschehen müssen.

Hamburg. CLASSEN.

M. Schuster. Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie. Ausgabe A: Für Vollanstalten. Zweiter Teil: Trigonometrie. Leipzig und Berlin 1903, B. G. Teubner. VIII u. 112 S. 8^0. geb. *M.* 1,60.

Das Buch bringt den Abschluß des geometrischen Unterrichtswerkes von Schuster, von dem 1901 zunächst die „Stereometrischen Aufgaben"[1]) herausgegeben waren. Es werden die ebene und die sphärische Trigonometrie behandelt und zwar wiederum so, daß an der Hand von zweckentsprechend ausgewählten Aufgaben die „Erklärungen, Sätze und Formeln" erarbeitet werden, deren Formulierung dann am Schluß der Abschnitte die „Zusammenfassung" bringt. Man kann verschiedener Ansicht darüber sein, ob es sich empfiehlt, in dem den Schülern in die Hand zu gebenden Lehrbuch das Methodische so ins einzelne zu gliedern, aber wenn man eine solche Behandlung wünscht, so ist die von Schuster gegebene als eine sehr geschickte zu rühmen ebenso wie dies früher bezüglich der Stereometrie (Archiv Bd. II. 1902 S. 353) und der Geometrie (Bd. V. 1903 S. 153) geschehen ist. Außer diesen Lehrbuchabschnitten werden noch zahlreiche Übungsaufgaben gegeben. Sie sind, tunlichst alle Möglichkeiten der Fragestellung erschöpfend, gruppenweise praktisch zusammengestellt und reichhaltig nach Zahl und Inhalt. In den Kreis der Berechnungen werden interessante angewandte Aufgaben aus den verschiedensten Gebieten gezogen. Eine Reihe von Aufgaben der ebenen Trigonometrie, die bei der ersten Behandlung zu übergehen sind, bieten Übungsstoff auch für die Prima. Die in Abschnitt X folgenden Tafeln und das Sachverzeichnis sind dankenswerte Zugaben. Im einzelnen sollte hier die zu beanstandende Angabe auf S. 105: 1^h Sonnenzeit $= 15^0$, 1^h Sternenzeit $= 15{,}04^0$, in der nächsten Auflage fortfallen. —

1) Diese sollen jetzt als Teil III der Ausgabe A in zweiter Auflage neu erscheinen.

Die früher für Teile des Unterrichtswerkes geäußerten Wünsche und Empfehlungen können auch auf den jetzt vorliegenden Teil ausgedehnt werden. —

Schöneberg. E. KULLRICH.

Harris Hancock, Lectures on the theory of maxima and minima of functions of several variables (Weierstrass' Theory). Publications of the University of Cincinnati, Series II, Vol. 2, Cincinnati 1903.

Mehr als zwanzig Jahre sind vergangen, seitdem Weierstraß die Veröffentlichung seiner *Vorlesungen über Variationsrechnung* ernstlich ins Auge faßte, aber noch immer ist sein Wunsch nicht in Erfüllung gegangen, und dunkel ist auch, wie jeder Kundige weiß, die Aussicht für die Zukunft. Glücklicher Weise sind die originalen und fruchtbaren Gedanken, mit denen Weierstraß die Variationsrechnung bereichert hat, nicht in der Verborgenheit geblieben. Die von dem Mathematischen Verein der Universität Berlin besorgte Ausarbeitung der Vorlesung vom Sommersemester 1879 hat weite Verbreitung gefunden, und in einigen Dissertationen und Abhandlungen sind wichtige Ergebnisse der Weierstraßschen Untersuchungen allen Mathematikern zugänglich gemacht worden. Sie haben den Ausgangspunkt für weitere Forschungen gebildet, durch die neuerdings so erhebliche Fortschritte erzielt wurden, daß die Vorlesungen von Weierstraß bald wohl vorwiegend historisches Interesse haben werden[1]). Wohl lediglich historisches, ja man könnte fast sagen biographisches Interesse hat aber gegenwärtig das Kapitel über die Theorie der Maxima und Minima der Funktionen von mehreren Veränderlichen, das Weierstraß der eigentlichen Variationsrechnung vorauszuschicken pflegte. Dieses Kapitel als „Weierstraßsche Theorie" zu bezeichnen, wie es Herr Hancock tut, scheint mir nicht angebracht, denn Weierstraß hat ausdrücklich hervorgehoben, daß er darin im wesentlichen nur die Ergebnisse älterer Autoren[2]) ableiten wolle, allerdings mittels der ihm eigentümlichen Methoden. Wenn aber Herr Hancock damit ausdrücken will, daß er sich darauf beschränkt hat, die Weierstraßsche Vorlesung zu reproduzieren, so ist das erst recht zu beanstanden. Wie Peano (1884) und Scheeffer (1885) gezeigt haben, liefern jene von Weierstraß übernommenen älteren Ergebnisse keineswegs eine befriedigende Lösung des Problems der Maxima und Minima. Wer heute, wo die richtige Lösung bereits in die Lehrbücher übergegangen ist (vergl. C. Jordan, *Cours d'analyse*, 2^{me} éd. t. I, Paris 1893, S. 381—384 und Kiepert-Stegemann, *Differential-Rechnung*, 9. Aufl. Hannover 1901, § 156) und wo die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften (Artikel Differential- und

1) Anders steht es wohl mit *Aufzeichnungen* von Weierstraß, die noch immer nicht veröffentlicht sind, weil sie sich im „*Privatbesitz*" befinden. Als ob nicht auf alles, was Weierstraß geschrieben hat, die mathematische Welt ein Anrecht hätte!

2) Zu diesen älteren Autoren gehört auch Richelot, dessen fundamentale Abhandlung: *Bemerkungen zur Theorie der Maxima und Minima*, Astr. Nachr. Bd. 48 (1858) S. 274—288 Weierstraß gewiß benutzt hat. Heute ist sie in Vergessenheit geraten und wird sogar in der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften nicht erwähnt.

Integralrechnung von A. Voß[1])) in so bequemer Weise Auskunft gibt, eine *Vorlesung* über die Theorie der Maxima und Minima hält, und wer noch dazu, wie Herr Hancock in seiner Einleitung, seinen Zuhörern verspricht, sie auf die Höhe der modernen Wissenschaft zu führen, der darf die Untersuchungen von Peano und Scheeffer, Stolz und v. Dantscher nicht unberücksichtigt lassen. So gern ich daher den Fleiß und die Sorgfalt anerkenne, mit der Herr Hancock die „Weierstraßsche Theorie" bearbeitet hat, so wenig bin ich damit einverstanden, daß er blindlings auf die Worte des Meisters schwört; nicht der ist ein treuer Schüler von Weierstraß, wer kritiklos hinnimmt, was dieser gelehrt hat, sondern wer bemüht ist, nach seinen Kräften die Teile der mathematischen Wissenschaft zu fördern, die dem Meister am Herzen lagen.

In diesem Sinne sei es mir gestattet, auf eine Stelle der Weierstraßschen Vorlesung einzugehen, die der Berichtigung bedarf. Der Einfachheit halber werde ich mich dabei auf zwei unabhängige Veränderliche beschränken und annehmen, die Funktion $z = f(x, y)$ sei nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen p, q, r, s, t für die betrachteten Wertsysteme x, y eindeutig, endlich und stetig. Daß unter diesen Voraussetzungen an der Stelle eines Extremums die beiden ersten Ableitungen p und q verschwinden müssen, hatte bereits Euler erkannt (Inst. calc. diff., 1755). Bald darauf hat Lagrange (Misc. Taur. I. 1759) ein Kriterium für die Existenz eines Maximums oder Minimums gegeben, das bis fast ans Ende des 19. Jahrhunderts als *endgültige* Erledigung der Frage gegolten hat. Er verfährt so.

Verschwinden p und q an der Stelle a, b, so ist in der Nähe:

$$(1)\quad \begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a,b) = \tfrac{1}{2} r(a+\vartheta h, b+\vartheta k)h^2 + s(a+\vartheta h, b+\vartheta k)\,hk \\ + \tfrac{1}{2} s(a+\vartheta h, b+\vartheta k)k^2, \end{aligned}$$

wo ϑ einen positiven echten Bruch bedeutet, dessen Wert im allgemeinen von h und k abhängt. Soll z an der Stelle a, b ein Maximum oder Minimum haben, so muß der Ausdruck auf der rechten Seite für alle Wertsysteme h, k, bei denen h und k absolut genommen kleiner sind als eine hinreichend kleine positive Größe ϱ, ausgenommen $h = 0$, $k = 0$, entweder stets positiv oder stets negativ ausfallen. Bedingungen hierfür zu finden, sagt Lagrange in der Darstellung, die er später in der *Théorie des fonctions analytiques* gegeben hat, scheine sehr schwierig zu sein, da r, s, t Funktionen von h und k sind. „Aber ich bemerke, daß, wenn man $\vartheta = 0$ setzt, diese Funktionen unabhängig von h und k werden und bestimmte Werte erhalten. Man findet dann, wie sich sogleich herausstellen wird, zwischen diesen Größen Bedingungen und zwar lediglich Ungleichheiten für Ausdrücke, die aus ihnen gebildet sind. Bestehen aber diese Ungleichheiten, so bleiben sie auch gültig für jene Funktionen, solange ϑh und ϑk gewisse Grenzen nicht überschreiten, diese Größen kann man jedoch beliebig klein machen." Um das Verhalten des Ausdruckes

$$(2)\qquad V = \tfrac{1}{2} r(a, b)\; h^2 + s(a, b)hk + \tfrac{1}{2} t(a, b)k^2$$

1) *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Band II, Heft 1, Leipzig 1899, S. 82—87. Bei dieser Gelegenheit möchte ich einige Druckfehler berichtigen, die sich auf diesen Seiten finden. S. 82, Anm. 125 muß es heißen Calc. diff. p. 645 statt 648, Anm. 126: Th. des fonct. p. 283 statt 268, S. 83, Anm. 128: Th. des fonct. p. 286 statt 266 und Math. Ann. 35 statt Math. Ann. 37.

zu untersuchen, transformiert ihn Lagrange in die Summe von zwei Quadraten und findet so als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß V beständig negativ sein soll:

$$r < 0, \quad t < 0, \quad rt - s^2 > 0,$$

und dafür, daß V beständig positiv sein soll:

$$r > 0, \quad t > 0, \quad rt - s^2 < 0.$$

Sind diese Ungleichheiten erfüllt, ist also, um den modernen Ausdruck zu gebrauchen, V eine *definite quadratische Form* von h und k, so hat, wie Lagrange mit Recht schließt, z an der Stelle a, b ein Maximum oder Minimum. Ebenso richtig ist auch sein Schluß, daß, wenn rt negativ oder gleich Null und $rt - s^2$ negativ ist, wenn also die Form V *indefinit* ausfällt, z an der Stelle a, b kein Extremum aufweisen kann. Wenn er aber weiter behauptet, daß

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r < 0, \quad t < 0, \quad rt - s^2 > 0$$

die Bedingungen des Maximums,

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r > 0, \quad t > 0, \quad rt - s^2 > 0$$

die Bedingungen des Minimums seien, so übersieht er die Möglichkeit, daß die Determinante $rt - s^2$ verschwinden, also die Form V *semidefinit* sein kann. In diesem Falle versagt die vorhergehende Deduktion, denn es ist alsdann unmöglich, etwas über das Vorzeichen der Determinante der Form auszusagen, die gleich $f(a + h, b + k) - f(a, b)$ ist. Ist V semidefinit, so bleibt es daher unentschieden, ob ein Extremum stattfindet oder nicht. Die einfachen Beispiele:

$$z = x^2 + y^4 \quad \text{und} \quad z = x^2 - y^4$$

zeigen, daß die Entscheidung nur gefällt werden kann, wenn man auch die Glieder höherer Ordnung hinzunimmt.

Lagrange hat also richtig erkannt und bewiesen, daß ein Extremum stattfindet, wenn V eine definite quadratische Form ist, und daß kein Extremum stattfindet, wenn V eine indefinite quadratische Form ist. Insofern er übersehen hat, daß noch eine dritte Möglichkeit vorhanden ist, indem nämlich V auch semidefinit sein kann, haben seine Darlegungen eine *Lücke*, und die von ihm angegebenen Bedingungen sind zwar hinreichend, aber nicht notwendig.

Sehen wir nun zu, was Weierstraß lehrt. Nachdem er die Gleichung (1) in aller Strenge hergeleitet hat, sagt er (Hancock, S. 39): „On account of their presupposed continuity, the quantities

$$r(a + \vartheta h, b + \vartheta k), \quad s(a + \vartheta h, b + \vartheta k), \quad t(a + \vartheta h, b + \vartheta k)$$

and

$$r(a, b), \quad s(a, b), \quad t(a, b)$$

with values of h and k taken sufficiently small, differ from each other as little as we wish and are of the same sign; hence, with small values of h and k the functions

$$\tfrac{1}{2} r(a + \vartheta h, b + \vartheta k)h^2 + s(a + \vartheta h, b + \vartheta k)hk + \tfrac{1}{2} t(a + \vartheta h, b + \vartheta k)k^2$$

and

$$\tfrac{1}{2}\, r(a, b)h^2 + s(a, b)hk + \tfrac{1}{2}\, t(a, b)k^2$$

have always the same sign, and we therefore may confine ourselves to the investigation of the latter function."

Die Deduktion von Weierstraß beruht auf zwei *Hilfssätzen*, die sich so aussprechen lassen. Erstens. *Ist $F(h, k)$ eine in der Nähe der Stelle $0, 0$ stetige Funktion, so hat in der Nähe von $0, 0$ $F(h, k)$ dasselbe Vorzeichen, wie $F(0, 0)$.* Dieser Hilfssatz ist augenscheinlich nur richtig, wenn $F(0, 0)$ ein Vorzeichen hat, das heißt, wenn es von Null verschieden ist. Ist aber $F(0, 0) = 0$, so läßt sich über das Vorzeichen von $F(h, k)$ in der Nähe der Stelle $0, 0$ nichts aussagen. Mithin setzt Weierstraß stillschweigend voraus, daß die Größen

$$r(a, b), \quad s(a, b), \quad t(a, b)$$

alle von Null verschieden seien. Falls auch nur eine von ihnen verschwindet, versagt seine ganze Deduktion. Zweitens. *Ist*

$$W = A(h, k)h^2 + 2\, B(h, k)hk + C(h, k)k^2,$$

wo $A(h, k), B(h, k)$ und $C(h, k)$ in der Nähe der Stelle $0, 0$ stetig sind und sich für sie auf die von Null verschiedenen Werte A_0, B_0 und C_0 reduzieren, so haben W und die quadratische Form

$$W_0 = A_0 h^2 + 2\, B_0 hk + C_0 k^2$$

für hinreichend kleine Werte von h und k dasselbe Vorzeichen. Daß dieser Hilfssatz *falsch* ist, zeigt das einfache Beispiel:

$$W = h^2 + 2\, hk + (1 - k)k^2,$$

wo also

$$W_0 = h^2 + 2\, hk + k^2$$

wird, denn hier ist W_0 niemals negativ, während W für $h = -u^2, k = +u^2$ den negativen Wert $-u^6$ erhält; dabei darf u beliebig klein sein. Der zweite Hilfssatz ist allerdings richtig, wenn W eine definite quadratische Form ist, das bedarf aber eines Beweises, von dem sich bei Weierstraß keine Spur findet. Daß dieser geglaubt hat, der zweite Hilfssatz sei allgemein richtig, zeigen die Worte (Hancock, S. 51): „In order that a maximum and a minimum of the function $f(x, y)$ may in reality enter on the position a, b, which is determined through the equations $p = 0$, $q = 0$, it is *necessary*, if the second derivatives of the function do not vanish at this position, that the aggregate of the terms of second degree be a *definite* quadratic form", denn diese Bedingung ist in Wahrheit nicht notwendig, sondern nur hinreichend.

Es ist auffallend, daß der kritische Scharfsinn von Weierstraß hier versagt hat; quandoque bonus dormitat Homerus.

Kiel. Paul Stäckel.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

111. Es ist zu beweisen, daß die Komplexe eines Büschels linearer Komplexe eine Regelschar II. Ordnung in den Strahlenpaaren einer Involution schneiden. SANISLAUS JOLLES.

112. Auf der einen Asymptote einer Hyperbel h, deren Mittelpunkt O ist, errichtet man in einem beliebigen Punkte A die Senkrechte g und wählt auf ihr irgend einen Punkt P. Dann ist durch P und die Fußpunkte der vier durch P laufenden Normalen von h eine neue Hyperbel h' bestimmt, die zwei zu OA senkrechte Tangenten hat. Ihre Berührungspunkte liegen auf dem Kreise, der OA als Durchmesser hat. Dieser Kreis ist der geometrische Ort für die Berührungspunkte aller zu g parallelen Tangenten der Hyperbelschar, die man erhält, wenn Punkt P die Gerade g durchläuft. Hierfür ist ein rein geometrischer Beweis zu liefern.

Breslau. O. GUTSCHE.

113. Zieht man in einem einfachen Viereck von jeder Ecke aus zwei Höhen, so erhält man vier Paar Höhen. Das Produkt von vier dieser Höhen, aus jedem Paar je eine genommen, ist gleich dem Produkt der vier übrigen, bei gehöriger zyklischer Anordnung.

Zürich. K. CWOJDZIŃSKI.

114. Es sind zwei ganze, ganzzahlige Funktionen von x, die eine $f_1(x)$ vom ersten, die andere $f_2(x)$ vom zweiten Grade vorgelegt; man soll angeben, wie sich erkennen läßt, ob es ganzzahlige (positive oder negative) Werte von x gibt, für welche $f_1(x)$ in $f_2(x)$ aufgeht, und an einem passend gewählten Beispiel die gefundene Methode veranschaulichen.

Königsberg. L. SAALSCHÜTZ.

115. Die charakteristische Gleichung eines Systems von n^2 Größen a_{ik}

$$\chi(z) = \begin{vmatrix} a_{11} - z & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - z & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - z \end{vmatrix} = 0$$

habe die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, die nicht alle verschieden zu sein brauchen; die ersten Unterdeterminanten von $\chi(z)$ mögen mit $\chi_{ik}(z)$ bezeichnet werden. Es soll bewiesen werden, daß die charakteristische Gleichung der Größen $\chi_{ik}(z)$ die Wurzeln

$$\zeta_\varrho = \frac{\chi(z)}{z - \alpha_\varrho} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots n)$$

besitzt.

Straßburg i./E. P. Epstein.

116. Sind $s_{\mu\nu}$ die Elemente eines orthogonalen Systems von n^2 Größen, bedeutet ω eine n^{te} Einheitswurzel und bildet man für irgend ein ganzzahliges k die Größen

$$q_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n} s_{\alpha\mu} s_{\alpha+k,\nu},$$

wobei für $\alpha + k$, sobald es größer als n wird, der kleinste Rest mod. n zu setzen ist, so bilden die Größen $q_{\mu\nu}$ ein zyklisches orthogonales System, dessen charakteristische Gleichung die Wurzeln

$$\omega^k, \quad \omega^{2k}, \quad \omega^{3k}, \ldots \omega^{nk}$$

besitzt.

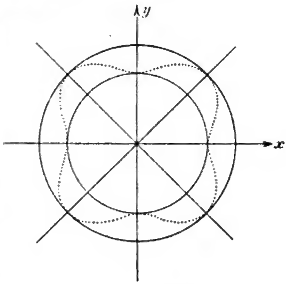
So oft also k relativ prim zu n ist, besitzt die charakteristische Gleichung des Systems der $q_{\mu\nu}$ alle n^{ten} Einheitswurzeln.

Straßburg i./E. P. Epstein.

B. Lösungen.

Zu **90** (Bd. VI, 338) (E. Lampe). — Die Kurvengleichung $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ lautet in Polarkoordinaten:

$$r = \frac{2a}{\sqrt{3 + \cos 4\omega}}.$$



Die Kurve, deren Gestalt aus beigezeichneter Figur zu ersehen ist, liegt ganz zwischen den um O mit den Radien a und $a\sqrt{2}$ beschriebenen Kreisen. Sie hat 4 Symmetrieachsen: $x = 0$, $y = 0$, $x = y$, $x = -y$.

Bezeichnet man ihren Flächeninhalt mit F, so hat man

$$\frac{F}{8} = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\omega}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\omega} = \frac{a^2}{4}\sqrt{2}\, \operatorname{arc\,tan}\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, \tan 2\omega\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \tfrac{1}{8} a^2 \pi \sqrt{2},$$

d. h.: *Der Flächeninhalt der Kurve ist das geometrische Mittel zwischen den Inhalten der beiden Kreise, die sie in je 4 Punkten berühren.*

Wird zur Abkürzung $\varphi = \sqrt{3 + \cos 4\omega}$ gesetzt, so ist:

$$r' = \frac{dr}{d\omega} = \frac{4a \sin 4\omega}{\varphi^3}, \quad r'' = \frac{d^2 r}{d\omega^2} = -8a \frac{3 \sin^2 4\omega + 2\varphi^2 \cos 4\omega}{\varphi^5},$$

und, wenn man r' und r'' durch r ausdrückt:

$$r' = \frac{1}{a^2} \sqrt{2}\, r \sqrt{r^2 - a^2} \sqrt{2a^2 - r^2},$$

$$r'' = \frac{2}{a^4} r (3r^4 - 6a^2 r^2 + 2a^4).$$

Nun gilt für den Krümmungsradius $\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 - rr'' + 2r'^2}$, also ist hier:

$$\varrho = \frac{r}{a^2} \frac{[3a^2(2r^2 - a^2) - 2r^4]^{\frac{3}{2}}}{3a^4 - 2r^4}.$$

Dasselbe Resultat erhält man nach einigen Umrechnungen unter Beibehaltung der Kartesischen Koordinaten aus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 - a^2 x}{a^2 y - 2y^3}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 r^2 \frac{2r^4 - 3a^4}{(a^2 y - 2y^3)^3}.$$

Für einen der 8 Wendepunkte der Kurve ist $\varrho = \infty$, daher $r = \sqrt[4]{\tfrac{3}{2}}\, a = 1{,}10668\, a$, $\cos 4\omega = 4\sqrt{\tfrac{2}{3}} - 3$, woraus für den ersten Wendepunkt sich ergibt: $\omega = 18^0\, 42'$.

Um die Kartesischen Koordinaten der Wendepunkte zu erhalten, berücksichtigt man, daß aus der Kurvengleichung folgt: $2x^2 y^2 = r^2(r^2 - a^2)$, für die Wendepunkte ist also $2xy = a^2 \sqrt{3 - \sqrt{6}}$, $x^2 + y^2 = a^2 \sqrt{\tfrac{3}{2}}$, somit sind die Koordinaten der 8 Wendepunkte durch Vorzeichenkombinationen aus den Gleichungen:

$$x + y = a\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{6} \pm \sqrt{3 - \sqrt{6}}}, \quad x - y = a\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{6} \mp \sqrt{3 - \sqrt{6}}}$$

zu erhalten.

Potsdam, den 12. Oktober 1904. Otto Meissner.

Zu **99** (Bd. VII, S. 171) (Paul Stäckel). *Man nehme einen Punkt einer Plankurve, mache die Tangente zur X-, die Normale zur Y-Achse und entwickle x und y nach Potenzen eines Parameters $t : x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Fangen beide Entwicklungen mit Potenzen mit geraden Exponenten an, so ist der Punkt ein Schnabel. Aus $t = \tau^2$ folgt nun scheinbar, daß jeder Punkt ein Schnabel ist. Wo steckt der Fehler des Schlusses?*

1. Das Wesen der Darstellung einer Kurve in Parameterform liegt darin, daß in einer gewissen Umgebung des betrachteten Kurvenpunktes jedem reellen Werte von t ein reeller Kurvenpunkt (und *nur* einer), jedem reellen Kurvenpunkte ein und *nur* ein reeller Wert des Parameters entspricht. Diese Bedingung ist *nicht* mehr erfüllt, wenn man $t = \tau^2$ setzt. Man erhält dann für reelle Werte von τ *einen* Kurvenzweig *doppelt* (rechts oder links von dem betrachteten Kurvenpunkte): für *diesen*, der im gegebenen Punkte abbricht, ist dieser allerdings ein Schnabel (wenigstens kann man es so auffassen).

Die Methode bedarf also der Einschränkung: *Läßt man den Parameter kontinuierlich eine Reihe von Werten von* $-a\,(<0)$ *bis* $+b\,(>0)$ *durchlaufen, so muß man Punkte beider Kurvenzweige erhalten*, oder: *zwischen* x *und* y *einerseits,* t *andererseits muß — in gewissen Grenzen — eine gegenseitig eindeutige (ein-eindeutige) Beziehung bestehen.*

2. Ist eine parametrische Darstellung schon *gegeben*, so hat man also zu untersuchen, ob etwa auch gewissen *komplexen* Werten von t reelle Kurvenpunkte entsprechen, und in diesem Falle eine angemessene Substitution vorzunehmen. Man kann auch die Reihe $x = \varphi(t)$ *umkehren*, $t = \varphi_1(x)$ berechnen (φ_1 wird i. a. keine Potenzreihe sein) und dies in $y = \psi(t)$ einsetzen, um dann die Kurvengleichung in der Form $y = f(x)$ zu diskutieren. Das will man ja aber gerade vermeiden. Will man diesen Weg nicht einschlagen, so bleibt nichts übrig, als die Eindeutigkeit der Darstellung zu untersuchen. Liefern zwei verschiedene Werte des Parameters *denselben* Kurvenpunkt, so muß man eine geeignete Substitution machen.

3. Ist die Kurve *rational (unikursal, vom Geschlechte* 0*)*, so führt ein Satz von Lüroth[1]) zu einer brauchbaren Darstellung der Kurvengleichung in Parameterform. Denn nach diesem gibt es stets eine Funktion $\tau = \tau(x, y) = \tau(t)$ von der Beschaffenheit, daß x und y rationale Funktionen von τ sind und τ selbst eine rationale Funktion von x und y. Ob für Kurven höheren Geschlechts ein Analogon dieses Satzes existiert, ist mir unbekannt.

Potsdam, den 2. September 1904. Otto Meissner.

Zusatz der Redaktion: Da die vorstehenden interessanten Ausführungen die vorgelegte Frage nicht vollständig erschöpfen, sieht die Redaktion weiteren Antworten gern entgegen.

Was übrigens die am Schluß von No. **3** aufgeworfene Frage des Herrn cand. math. Meißner angeht, so wird dieselbe, wie Herr Stäckel in einem Schreiben an die Redaktion bemerkt, in gewissem Sinne durch die automorphen Funktionen erledigt.

Zu **103** (Bd. 7 S. 314) (O. Gutsche). Es soll mit den Hilfsmitteln der elementaren Geometrie der Ort für den Schwerpunkt eines veränderlichen Vierecks ermittelt werden, von dem die Eckpunkte A, B, C fest bleiben, während der vierte X sich auf einer Geraden g bewegt.

Die Reihenfolge der Eckpunkte sei A, B, C, X; die Flächeninhalte des Vierecks sowie der Dreiecke ABC und ACX seien der Reihe nach V, Δ_1, Δ_2, die Schwerpunkte S, S_1, S_2. Die Gerade g treffe die Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC in A', B', C'. Die Mitte von AC sei O; die Strecke OB' sei im Punkte B'' so geteilt, daß $OB'' = \frac{1}{3} OB'$ ist, und durch B'' lege man die zu g parallele Gerade g', die der Ort des Punktes S_2 ist. Ferner lege man durch die Mitte der Strecke BS_1 die zu AC

1) Lüroth, Math. Annalen 9; Weber, Algebra II, S. 472 der 2. Aufl.

parallele Gerade g''. Die Schwerpunkte der Dreiecke BAA' und BCC' seien S_a und S_c.

Für die ausgezeichneten Lagen des Punktes X, d. h. wenn X in A', B' oder C' liegt, ist die Fläche des Vierecks identisch mit den Flächen der Dreiecke BAA', ABC, BCC'; mithin fällt S mit den Punkten S_a, S_1 oder S_c zusammen. Die letzteren drei Punkte gehören also dem gesuchten Orte von S an.

Liegen die Punkte B und X auf verschiedenen Seiten der Geraden AC (Fig. 1), so ist das Viereck $ABCX$ entweder ein gewöhnliches, oder es hat bei A oder C einen einspringenden Winkel. Dann ist $V = \Delta_1 + \Delta_2$; daher liegt S auf der Geraden S_1S_2 so, daß $S_1S \cdot \Delta_1 = SS_2 \cdot \Delta_2$ oder $\frac{S_1S}{SS_2} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$ ist. Hierbei wird die Richtung von S_1 nach S_2 als positiv, die von S_2

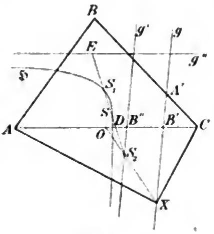


Fig. 1.

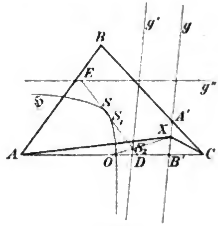


Fig. 2.

nach S_1 als negativ vorausgesetzt, und durch die Bezeichnung der in Betracht kommenden Strecken soll zugleich ihre Richtung angegeben werden. Trifft nun S_1S_2 AC in D, so ist

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{DS_2}{S_1D}, \text{ also auch } \frac{S_1S}{SS_2} = \frac{DS_2}{S_1D}.$$

Aus dieser Gleichung folgt der Satz:

Der Schwerpunkt S des Vierecks $ABCX$ liegt auf der Geraden S_1S_2 symmetrisch zu D in bezug auf die Punkte S_1 und S_2.

Dieser Satz gilt auch für andere Lagen von X. Liegt nämlich X innerhalb des Dreiecks ABC (Fig. 2) oder in dem zur Ecke B gehörigen Scheitelwinkelraum, so hat das Viereck $ABCX$ entweder bei X oder bei B einen einspringenden Winkel. In beiden Fällen ist $V = \Delta_1 - \Delta_2 = \Delta_1 + (-\Delta_2)$. Die obigen Entwickelungen gelten also auch jetzt, wenn man Δ_2 als negativ ansieht. Das Verhältnis $\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$ ist dann negativ; zugleich aber wechselt die Strecke DS_2 ihre Richtung; also bestehen auch jetzt noch die Gleichungen $\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{DS_2}{S_1D}$ und $\frac{S_1S}{SS_2} = \frac{DS_2}{S_1D}$. Liegt endlich X in einem der an die Seiten AB oder BC anstoßenden Außenräume, so ist das Viereck $ABCX$ ein verschränktes. Man gelangt auch in diesem Falle zu demselben Resultate, wenn man zur Definition des Flächeninhaltes eines solchen Vierecks die Gleichung $V = \Delta_1 - \Delta_2$ beibehält. Damit ist bewiesen, daß der oben entwickelte Satz für alle Fälle gilt.

Aus ihm folgt $SS_2 = S_1 D$. Trifft nun $S_1 S_2$ die Gerade g'' in E, so ist auch $ES_1 = S_1 D$, mithin $SS_2 = ES_1$. Da S_1 dem Orte von S angehört und die Geraden g' und g'' feste Gerade sind, so ist der gesuchte Ort diejenige Hyperbel H, die durch ihre Asymptoten g' und g'' und den Kurvenpunkt S_1 bestimmt ist. Bezeichnet man die beiden unendlich entfernten Punkte dieser Hyperbel mit ∞' und ∞'', so liegen auf dem Hyperbelbogen $S_1\infty'$ die Schwerpunkte aller derjenigen Vierecke $ABCX$, die entweder gewöhnliche Vierecke sind, oder die bei A oder C einen einspringenden Winkel haben; der übrige Teil der Hyperbel enthält die Schwerpunkte derjenigen Vierecke, die entweder verschränkte Vierecke sind, oder die bei X oder B einen einspringenden Winkel haben.

Die Lage der Hyperbelpunkte S_a und S_c ist verschieden je nach der Lage der Geraden g oder, was dasselbe ist, nach der Lage der Punkte A', B', C'. Liegt z. B. A' auf BC, B' auf AC, C' auf der Verlängerung von AB über B hinaus, und durchläuft nun X die Gerade g in der Richtung $\infty' B' A' C' \infty'$, so durchläuft S gleichzeitig die Hyperbel H in der Richtung $\infty' S_1 S_a S_c \infty'$. Jetzt enthält der Hyperbelbogen $\infty' S_1$ die Schwerpunkte der gewöhnlichen Vierecke $ABCX$, der Bogen $S_1 S_a$ die Schwerpunkte der Vierecke mit einspringendem Winkel bei X, der Bogen $S_a S_c$, der aus den beiden Teilen $S_a\infty''$ und $\infty'' S_c$ besteht, die Schwerpunkte der verschränkten Vierecke und endlich der Bogen $S_c\infty'$ die Schwerpunkte der Vierecke mit einspringendem Winkel bei B.

Um noch einen zweiten Sonderfall hervorzuheben, werde vorausgesetzt, daß A' auf der Verlängerung von CB über B hinaus, B' auf der Verlängerung von AC über C hinaus, C' auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege. Durchläuft jetzt Punkt X die Gerade g in der Richtung $\infty' B' C' A' \infty'$, so durchläuft S die Hyperbel H in der Richtung $\infty' S_1 S_c S_a \infty'$. Die Schar der Vierecke $ABCX$ enthält in diesem Falle überhaupt keine gewöhnlichen Vierecke. Auf dem Hyperbelbogen $\infty' S_1$ liegen die Schwerpunkte der Vierecke mit einspringendem Winkel bei C, auf dem Bogen $S_1 S_c$, der aus den Teilen $S_1\infty''$ und $\infty'' S_c$ besteht, die Schwerpunkte verschränkter Vierecke, auf dem Bogen $S_c S_a$ die Schwerpunkte der Vierecke mit einspringendem Winkel bei B und auf dem Bogen $S_a\infty'$ abermals die Schwerpunkte verschränkter Vierecke. Andere Sonderfälle lassen sich in ebenso einfacher Weise erledigen.

Prenzlau. W. Stegemann.

2. Anfragen und Antworten.

16. Das Verfahren, aus $f(x)$ durch die Substitution $x = f(\xi)$ eine neue Funktion $f[f(\xi)]$ zu bilden, ist als *Iteration* oder Funktionswiederholung lange bekannt. Man kann nun aber umgekehrt fragen, wenn $f(x)$ gegeben ist: Gibt es eine Funktion $\varphi(x)$ von der Beschaffenheit, daß $\varphi[\varphi(x)] = f(x)$

ist? Ist über die Möglichkeit, Ausführbarkeit und Eindeutigkeit dieser Umkehrung der Iteration etwas bekannt?[1])

Für $f(x) = a x^b$ ist $\varphi(x) = a^{\frac{1}{\sqrt{b}+1}} x^{\sqrt{b}}$.

Potsdam, den 4. September 1904. Otto Meissner.

---

17. Die Aufgabe, *eine n-ziffrige Zahl zu ermitteln, die ihrem Quadrate in bezug auf den Modul 10^n kongruent ist* (oder was dasselbe sagt, eine n-ziffrige Zahl so zu bestimmen, daß die letzten n Ziffern ihres Quadrates wieder die ursprüngliche Zahl bilden), besitzt eine *eindeutige* Lösung, sobald die letzte Ziffer (0, 1, 5 oder 6) vorgeschrieben ist.

Wenn die letzte Ziffer 0 oder 1 ist, so ergeben sich die trivialen Lösungen ... 0000 und ... 0001; ist dagegen die letzte Ziffer 5 oder 6, so ergeben sich beispielsweise für $n = 7$ die Zahlen 2890625 und 7109376. Daß in diesen beiden Zahlen mit Ausnahme der Einer je zwei Ziffern gleichen Stellenwertes sich zu 9 ergänzen, ist nicht zufällig, vielmehr kann man allgemein beweisen, daß zwei n-ziffrige, auf 5 bezw. 6 endigende Zahlen, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, als Summe $10^n + 1$ haben müssen. Ferner läßt sich zeigen, daß, wenn das Problem für n Ziffern gelöst ist, die $(n + 1)$te Ziffer durch Rekursion gefunden werden kann.

Ist über irgend einen der erwähnten Punkte bereits etwas veröffentlicht?

Westend b. Berlin. P. Zühlke.

---

18. Collignon hat 1891 folgenden Satz bewiesen: Wenn man über den Seiten eines Vierecks, dessen Diagonalen gleich lang sind und auf einander senkrecht stehen, nach außen Quadrate konstruiert, so bilden ihre Mitten die Ecken eines Vierecks derselben Art; die *Ecken* beider Vierecke haben denselben Schwerpunkt.

Ich habe durch einfache elementar-geometrische Betrachtungen gefunden, daß auch die *Flächen* beider Vierecke denselben Schwerpunkt haben. Ist diese Erweiterung des Collignonschen Satzes und ein rein geometrischer, von Rechnung freier Beweis dafür schon bekannt?

Breslau. O. Gutsche.

---

19. Bis vor kurzem war mir eine einfache, auf eine elegante Konstruktion führende, rein geometrische Lösung der Aufgabe: *Ein Dreieck aus dem Inkreisradius ϱ, der Differenz d zweier Seiten und der Mitteltransversale t_c nach der dritten Seite herzustellen* nicht bekannt. Ich habe diese Aufgabe in einigen Aufgabensammlungen vergeblich gesucht. Kennt einer der Leser des Archivs eine auf einfachen Sätzen beruhende rein geometrische Lösung?

Breslau. O. Gutsche.

---

1) Vgl. auch meine im Dezemberhefte der Math.-naturw. Blätter (1904) erscheinende Notiz über einige Funktionalgleichungen.

Antwort auf Anfrage 15.

Aus der Proportion $a : b = u : c$ folgt $a : u = a + b : c$. Sind N und O_c die Mittelpunkte des Inkreises und des zu AB gehörigen Ankreises, so ist, wenn CE Winkelhalbierende ist,

$$CN : NE = CO_c : EO_c = a : u = s : c.$$

Die Punkte N und O_c teilen also die Winkelhalbierende innen und außen im Verhältnis $s : c$. Zieht man nun durch C zu AB die Parallele, die die auf AB errichtete Mittelsenkrechte in R trifft, ferner durch N und O_c zu AB die Parallelen, die FR in N' und O_c' schneiden, so teilen die Punkte N' und O_c' die Strecke $RF = h_c$ im Verhältnis $s : c$. Hieraus ergibt sich das Weitere leicht.

Breslau. O. Gutsche.

3. Kleinere Notizen.

Lunulae Hippocratis.

Gewöhnlich wird dem H. der Satz zugeschrieben: Die beiden Halbmonde, begrenzt von den Halbkreisen über den Katheten (nach außen) und dem über der Hypotenuse (nach innen), sind gleich dem rechtwinkligen Dreieck. Der Irrtum fand sich selbst in der 6. Auflage der sonst so zuverlässigen Elemente der Mathematik von R. Baltzer. Auch bei Rouché (1900) kann man dies lesen. Hippokrates hat nur einen Mond (Meniskus, lunula) quadriert, und zwar zuerst den, dessen äußerer Bogen der Halbkreis, dessen innerer der Quadrant ist. Der Plural ist nur insofern berechtigt, als Hippokrates dem Simplikius zufolge die Fälle, in denen die Quadrate der Sehnen der ähnlichen Segmente sich wie 1 : 2 : 3 verhalten, erledigt hat. Die Zusätze bei Paucker (1823, ebene G.) und Spieker rühren von Vieta, Tschirnhaus (Acta erud. 1687) und John Perks (Transact. philos. 1699) bzw. Graf von Wallis (Acta erud. 1700 p. 306) her. Unsern Satz fand ich weder bei Heron oder Pappus, noch bei Cardano, Vieta, Clavius, Gregorius a St. Vincentio, Sturm, wohl aber in der Ausgabe des Jaquet (den Cantor unterschätzt) von Whiston, und zwar schräg gedruckt, also nicht von P. herrührend, und noch früher fand ich ihn bei Pardies, in der 4. Ausgabe der Elem. de G. von 1683. Die Straßb. Bibliothek ist sehr arm an alten Werken, insbesondere über Elementarmath. Das Exemplar, das mir vorlag, gehörte dem grand séminaire, das früher ein Jesuitenkolleg war, und eine große Anzahl Werke der gerade auf diesem Gebiet so bedeutenden Patres ex soc. Jesu von der Mitte des 16. Jahrh. bis zum Ende des 18. besaß. Diese wurden zur Zeit der franz. Revolution gewaltsam der Stadtbibliothek einverleibt und sind 1870 bis auf wenige zurückgegebene Doubletten (darunter Sterni und Gregorius) beim Brande der Bibl. mit den übrigen Kostbarkeiten infolge der pflichtvergessenen Fahrlässigkeit der Bibliothekare vernichtet worden. Da ich auch in der Bibliotheca Mathematica nichts über das erstmalige Vorkommen der Erweiterung gefunden, so lenke ich die Aufmerksamkeit hierauf. Die Hypothese von Ulmann, 1889 p. 97 über den Gedankengang des H. hat, gerade weil die Erweiterung fehlt, manches für sich, sie würde die Auffassung Rudios von H. als tüchtigem Mathematiker durchaus bestätigen.

Straßburg i. E. Max Simon.

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

(Vacat.)

---

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Amodeo, F., Elementi di algebra. Parte prima del volume secondo degli elementi di matematica. Napoli 1903, L. Pierro. 160 S.

Beltrami, Eugenio, Opere matematiche. t. II. Milano 1904, U. Hoepli. 465 S.

Blondlot, R., Rayons „N". Recueil des communications faites à l'Académie des Sciences. Avec des notes complémentaires et une instruction pour la construction des écrans phosphorescents. Paris 1904, Gauthier-Villars. 78 S. Fr. 2.

Brioschi, Francesco, Opere matematiche. t. III. Milano 1904, U. Hoepli. 435 S.

Bucherer, A. H., Mathematische Einführung in die Elektronentheorie. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 148 S. M. 3,20.

Burali-Forti, C., Lezioni di geometria metrico-proiettiva. Turin 1904, Fratelli Bocca. 308 S.

Davenport, C. B., Statistical methods with special reference to biological variation. New York 1904, J. Wiley and sons. VIII u. 223 S. $ 1,50.

Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées. Edidion française red. par J. Molk. Tome I. 1er vol. Fasc. I. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 160 S. M. 4,00.

Fisher, Irving, Kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung („Infinitesimalrechnung"). Aus der durch mehrere Verbesserungen des Verfassers vervollständigten dritten englischen Ausgabe übersetzt von N. Pinkus. Mit 11 Fig. im Text. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 72 S. M. 1,80.

G. Lejeune Dirichlets Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen. Herausgegeben von G. Arendt. Braunschweig 1904, F. Vieweg u. Sohn. 476 S. M. 13,00.

Herberich, G., Eine neue Klasse von reellen algebraischen Raumkurven konstanter Torsion. Progr. der Luitpold-Kreisrealschule. München 1904. 23 S.

Holzmüller, G., Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Erster Teil. Vierte Auflage. Leipzig 1904, B. G. Teubner. M. 2,40.

Köhler, A., Mathematische Aufgaben für die Prima der höheren Lehranstalten. Teil II. Berlin 1904, L. Simion. 73 S. M. 1,70.

—— Auflösungen zum II. Teil. Mathematische Aufgaben. Berlin 1904, L. Simion. 55 S. M. 1,00.

Königsberger, Leo, Carl Gustav Jacob Jacobi. Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 554 S.

N. J. Lobatschefskijs imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Aus dem Russischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von H. Liebmann. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 187 S.

Ludwig, W., Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie. Habilitationsvorles. Karlsruhe i. B. 1904. 54 S.

Marcolongo, R., Le moderne teorie di fisica matematica. Discorso inaugurale letto nella R. università di Messina. Messina 1903, Tipografia d'Angelo. 43 S.

Roozeboom, H. W. B., Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre. Zweites Heft: Systeme aus zwei Komponenten, erster Teil. Braunschweig 1904, F. Vieweg u. Sohn. 467 S.

Stolz, O., und Gmeiner, J. A., Einleitung in die Funktionentheorie. In 2 Abteilungen. I. Abteilung. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 242 S.

Wallentin, I., Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. Mit 81 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 444 S. M. 12,00.

Webster, Arthur Gordon, The Dynamics of Particles and of Rigid, Elastic, and Fluid Bodies being Lectures on Mathematical Physics. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 588 S. M. 14.00.

Über das sogenannte Prinzip der Erhaltung der Anzahl.

Von E. Study in Bonn.

Im folgenden wird, in etwas weiterer Ausführung, der Inhalt eines Vortrages wiedergegeben, den der Verfasser in der geometrischen Sektion des Mathematikerkongresses zu Heidelberg gehalten hat. Diese Bemerkungen waren veranlaßt worden durch eine Diskussion, die sich an einen Vortrag des einführenden Vorsitzenden der Sektion, des Herrn A. v. Brill, angeknüpft hatte. —

Die Anforderungen, die Mathematiker an die Schärfe ihrer Begriffe und an die Strenge ihrer Beweise zu stellen pflegen, sind zu verschiedenen Zeiten sehr verschieden gewesen. Sie werden wohl häufiger als durch individuelle Veranlagung bestimmt durch den Zustand der Wissenschaft, den der einzelne vorfindet. Hat doch selbst ein Mathematiker wie E. Kummer, da er das Gebiet der Geometrie betrat, in seiner wegen ihres Gedankeninhaltes mit Recht geschätzten Arbeit über die algebraischen Strahlensysteme, gänzlich die Grundsätze verleugnet, die an seinen arithmetischen Arbeiten gerühmt werden. Die Geometrie ist großenteils heute noch weit entfernt von der Präzision, die bei rein-analytischen Untersuchungen, dank besonders dem Einfluß von Weierstraß, nunmehr allgemein als unerläßlich betrachtet wird, und, was schlimmer ist, es scheint in weiten Kreisen auch gar kein Gefühl für das Unhaltbare des gegenwärtigen Zustandes vorhanden zu sein. In unzähligen Fällen werden die Objekte geometrischer Untersuchungen so undeutlich erklärt, daß man den Sinn der einzelnen Begriffe aus den darüber aufgestellten Behauptungen zu erraten suchen muß, wobei natürlich Meinungsverschiedenheiten entstehen können.[1]) Ein-

1) Eine nun schon etwas zurückliegende Erörterung der Art war die über das sogenannte Charakteristikenproblem der Kegelschnitte. Sie war veranlaßt worden dadurch, daß Chasles Behauptungen über „Kegelschnitte" aufgestellt hatte, ohne diesen Begriff gehörig zu erklären. Neueren Datums sind gewisse Erörterungen über „die Grundlagen der Geometrie". Daß diese an sich nicht erfreulichen Diskussionen nicht geradezu an der Tagesordnung sind, zeigt, wie gleichgültig man solchen Fragen gegenübersteht.

schränkungen der wesentlichsten Art werden „stillschweigend" eingeführt, und bereits erklärte Begriffe werden, dem flüchtigen Leser wie jedenfalls meistens auch dem Autor selbst unmerklich, verengert, erweitert oder sonstwie verschoben. Und nicht einmal dann pflegt die (öffentlich geübte) Kritik irgendwelche Einwendungen zu machen, wenn der herkömmliche Mangel an Sorgfalt bei Formulierung geometrischer Theoreme in nichtssagenden Zusätzen („im allgemeinen") schon äußerlich hervortritt. Bei aller Milde des Urteils, die im einzelnen Falle und namentlich wo Schwierigkeiten vorliegen, gewiß am Platze sein wird, muß es doch gesagt werden, daß durch eine weitgehende Duldung solcher Vorkommnisse das Ansehen der Geometrie geschädigt und deren wissenschaftlicher Charakter beeinträchtigt wird. Es darf nun einmal nichts von der Forderung abgelassen werden, daß jeder einzelne Begriff scharf bezeichnet werden soll, und daß die Ausnahmen von irgend einem Satze entweder einzeln aufgezählt oder womöglich durch zweckmäßige Umbildung der Begriffe selbst beseitigt werden müssen.[1]) Auch die evidentesten und trivialsten Ausnahmefälle dürfen natürlich nicht mit Stillschweigen übergangen werden, wenn die Behauptung Anspruch machen soll auf das Epitheton richtig, bei dem es kein Nahezu, kein Mehr oder Minder geben darf.

In der Nichtbeachtung so selbstverständlicher Forderungen hat man unseres Erachtens den Schlüssel für das Verständnis, wie so mancher anderen auffallenden Erscheinung, so auch der Rolle, die der Satz von der „Erhaltung der Anzahl" in der gegenwärtigen Literatur spielt. Hat man einmal auf präzisen Ausdruck dort verzichtet, wo er

1) Die Schwierigkeiten, die in den geometrischen Begriffen liegen, sind gewiß nicht gering, und es ist auch nur gerecht zu bemerken, daß die Sprache dem Geometer ganz andere Hindernisse entgegenstellt als dem Analytiker mit seiner, gegenwärtig noch wenigstens, viel kleineren Zahl von Begriffen. Von einem geometrischen Begriff — z. B. Punkt, Kreis, Kegelschnitt, um nur einige der elementarsten zu nennen — steht meistens nur der Kern wirklich fest — reeller eigentlicher Punkt, reeller irreduzibeler Kreis oder Kegelschnitt — während Grenzfälle und andere Erweiterungen daran in mannigfacher Weise angeschlossen werden können und oft auch müssen. Da man sich zu der dann eigentlich erforderlichen Vervielfältigung der Terminologie nicht entschließen wollte, so hat man zu der Auskunft gegriffen, mit einem und demselben Wortzeichen bald diesen bald jenen Begriff zu verbinden, nach Art der Buchstabenzeichen, die ja auch alles Mögliche bedeuten. Ein solcher Notbehelf kann aber natürlich nur dann als einigermaßen annehmbar erachtet werden, wenn jeder einzelne Autor die Verpflichtung fühlt, zu sagen, *was* er denn mit solchen im Sprachgebrauch schwankenden Worten meint, und dann auch bei seiner Erklärung bleibt. Aus der entgegengesetzten Gepflogenheit ist die herrschende Verwirrung entstanden, die wohl schon manchen fähigen Kopf in unserer Zeit von der Geometrie fern gehalten hat.

nicht schwer zu finden gewesen wäre, und zwar sozusagen grundsätzlich, so ist es nicht zu verwundern, wenn bei Problemen, die Schwierigkeiten bieten, ebenfalls nicht unterschieden wird zwischen dem, was man etwa als Embryonalzustand einer mathematischen Wahrheit bezeichnen kann, und einem ausgewachsenen wohlgebildeten Theorem. Und ebensowenig kann es überraschen, wenn das Gefühl für Stringenz der Beweise verloren geht, wenn die Grenze verwischt wird zwischen bloßer Vermutung oder Hypothese und gesichertem Besitz der Wissenschaft. Solche Überschreitungen sind sicher höchst gefährlich, wenn sie systematisch und ohne Einspruch der berufenen Kritik verübt werden. Schreiben wir doch vor allem für die Generation, der die Zukunft gehört, und deren kritische Fähigkeiten erst entwickelt werden sollen. Ist hier irgend etwas anderes angemessen als ein *rückhaltloses* Eingeständnis des wirklichen Sachverhaltes, d. h. natürlich dessen, was wir, Irrtum vorbehalten, bei gewissenhafter Prüfung für den Sachverhalt ansehen?

Das „Prinzip der Erhaltung der Anzahl“ oder „Prinzip der speziellen Lage“ oder „der Kontinuität“ oder wie immer man es nennen mag, ist formuliert worden von Herrn H. Schubert, insbesondere in seinem Werke „Kalkül der abzählenden Geometrie“ (Leipzig, 1879). Danach soll eine beliebige „geometrische Anzahl“ — die Zahl der Lösungen eines algebraisch-geometrischen Problems, das „im allgemeinen“ eine endliche Zahl von Lösungen hat — entweder erhalten bleiben, oder unendlich werden, wenn man die Konstanten der Figuren, von denen sie abhängt, *irgendwie* abändert. Zur Begründung verwies Herr Schubert darauf, daß es sich im Grunde nur um eine besondere Auslegung des Fundamentalsatzes der Algebra handele.[1]) Benutzt wird sodann dieses sogenannte Prinzip von Herrn Schubert selbst und anderen zur Bestimmung der Anzahl der Lösungen von Aufgaben, die größtenteils weit jenseits der Grenzen liegen, innerhalb deren zur Zeit eine direkte algebraische Analyse ausführbar ist.[2])

Obwohl nun das genannte „Prinzip“ seit etwa drei Dezennien ohne öffentlich geäußerten Widerspruch in der mathematischen Literatur figuriert zu haben scheint, und obwohl fortwährend neue Anwendungen davon gemacht werden, so kann es doch unseres Erachtens gar nicht zweifelhaft sein, daß ihm die Rolle nicht zukommt, die man ihm, stillschweigend oder sogar ausdrücklich, eingeräumt hat.

1) Wegen der genaueren Formulierung vgl. § 4 des genannten Werkes.

2) Ähnliche Anwendungen finden sich übrigens schon lange vor der allgemeinen Formulierung. Z. B. ist Steiner zu mehreren (nicht immer richtigen) Zahlen sicher durch Kontinuitätsbetrachtungen gekommen.

Zunächst hat der Begriff der geometrischen Figur, wie er von Herrn Schubert gefaßt und durch Beispiele erläutert wird, einen so befremdlichen Umfang, daß es eigentlich von vorn herein höchst unwahrscheinlich ist, daß sich darüber etwas Allgemeingültiges aussagen ließe. Man sieht sich auch sogleich zu einer Interpretation genötigt: „Gemeint" sein können nur solche Figuren, deren Mannigfaltigkeit ein im Sinne von G. Cantor abgeschlossenes algebraisches Kontinuum bildet, d. h. eindeutig umkehrbar abgebildet werden kann auf eine algebraische Punktmannigfaltigkeit, die in dem projektiven Punktkontinuum irgend eines höheren Raumes verläuft. (Andernfalls hätte man schon in der Zahl der Mittelpunkte oder Symmetrieachsen eines Kegelschnittes Beispiele, in denen die Behauptung von der Erhaltung der Anzahl nicht zutrifft.) Unter stetigen Änderungen einer Figur werden dann solche zu verstehen sein, bei denen der Bildpunkt seine Lage stetig ändert. Sobald man aber die Sache so ausdrückt, sieht man, wie bedenklich auch der weitere Begriff der „geometrischen Anzahl" ist. Es seien z. B. vorgelegt eine (nach der üblichen Ausdrucksweise) r-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit M_r und auf dieser zwei andere M_s und M_{r-s}. Wir wollen annehmen, daß diese sich in einer gewissen endlichen Anzahl verschiedener Punkte schneiden, die durch Auflösung einer algebraischen Gleichung zu ermitteln sind. M_s möge nun von gewissen Parametern abhängen. Ändert man diese, so werden die Schnittpunkte sich zum Teil überlagern können, und dies wird z. B. so eintreten können, daß sie alle oder zum Teil in Doppelpunkte, mehrfach zählende Kurven usw. von M_r hineinrücken. Um also von einer Erhaltung der Anzahl reden zu können, müßte es möglich sein, die „Multiplizität" der Schnittpunkte irgendwie zu beurteilen. Das kann aber im Falle singulärer Stellen sicher nicht ausgeführt werden, ohne daß man *besondere und zweckmäßige Bestimmungen* trifft. Andernfalls kann der Schluß: „Wenn M_s zerfällt, $M_s = M_s' \cdot M_s''$, so verteilen sich die Schnittpunkte auf M_s' und M_s''", zu falschen Zahlen führen, da ja die Schnittpunkte von M_s' mit M_{r-s} zum Teil identisch sein können mit den Schnittpunkten von M_s'' mit M_{r-s}. Es ist aber weder bewiesen, noch richtig, daß solche Bestimmungen immer möglich sind.[1]) Aber auch schon unter weniger speziellen Voraussetzungen kann man die „richtige" (d. h. mit dem Prinzip verträgliche) Multiplizität eines Schnittpunktes nicht beurteilen. Denn dort höchstens kann man ein legitimes Anwendungsgebiet des fraglichen Prinzips suchen, wo die Algebra sich zur Zeit als unzureichend erweist, übergroße Schwierigkeiten bietet. Gerade

---

1) Wir geben weiterhin ein Beispiel.

in den Fällen also, um die es sich handelt, fehlt der nötige Ansatz[1]): Es wird eine Aussage über gewisse Zahlen gemacht, die man gar nicht ermitteln kann, es fehlt dem Satze das klar definierte Objekt. Aus dem gleichen Grunde kann man auch nicht wohl sagen, „Grenzfälle der bezeichneten Art sind auszuschließen"; um sie auszuschließen, müßte man sie eben schon kennen, auf Grund einer eingehenden Untersuchung von M_r, die fast überall fehlt. Dabei hat die skizzierte Gattung von Beispielen noch einen relativ sehr einfachen Charakter.

Aber auch wenn wir das nicht unbedenkliche Zugeständnis machen wollen, daß in jedem einzelnen Falle der Anwendung das Objekt der Aussage substituiert werden kann, so kann immer noch nicht der auch neuerdings noch versuchte Hinweis auf den Fundamentalsatz der Algebra zugegeben werden.[2]) Die Annahme ist schlechthin ungerechtfertigt, daß ein algebraisches Problem, dem „im allgemeinen" eine endliche Zahl von Lösungen zukommt, seinen erschöpfenden und allgemeingültigen Ausdruck in einer algebraischen Gleichung finden müßte, derart, daß unter allen Umständen jeder Wurzel der Gleichung eine Lösung entspräche und umgekehrt. Das Problem könnte z. B. äquivalent sein mit der Aufgabe, die gemeinsamen Schnittpunkte von mehr als drei Flächen im Raume zu finden. Ob aber ein solches Verhalten vorliegt, das zu entscheiden fehlen wiederum die Hilfsmittel gerade in den Fällen, auf die es ankommt. Man kann sich über die Schwierigkeiten, die im Ansatz der in Worte gekleideten Probleme liegen — die größten Schwierigkeiten in der Geometrie — nicht einfach hinwegsetzen.

In der Tat kann die Zahl der Lösungen einer Aufgabe in besonderen Fällen sowohl eine Erhöhung als auch eine Erniedrigung erfahren, natürlich ohne jeden Widerspruch mit dem Fundamentalsatz der Algebra. Ein elementares Beispiel für den ersten Fall ist die Zahl der Projektivitäten, die die Figur von vier getrennten Punkten auf einer Geraden oder das zugehörige Polarsystem 4. Ordnung in Ruhe lassen. Eine gewisse Aufgabe der Kinematik führt im allgemeinen zu Geraden einer Linienkongruenz 1. Ordnung 0. Klasse, im besonderen Falle zu solchen einer Kongruenz 0. Ordnung 1. Klasse.[3]) Fügt man also die Forderung hinzu, daß eine solche Gerade einen passend gewählten Punkt enthalten soll, so hat man ein Beispiel für die Erniedrigung der Lösungszahl.

1) Die Widerspruchslosigkeit einer Aufgabe pflegt von den abzählenden Geometern beurteilt zu werden mit Hilfe der Methode der Konstantenzählung.

2) Wie es scheint, betrachtet Herr Schubert selbst diese Argumentation jetzt nicht mehr als genügend.

3) Math. Ann. Bd. 39. 1891. S. 458.

Das Prinzip der Erhaltung der Anzahl muß also aufgegeben werden, und zwar, wie uns scheint, für immer: Bei der unübersehbaren Mannigfaltigkeit von Ausnahmen, die sich mit leichter Mühe finden lassen, wird es nicht möglich sein, durch eine etwanige sorgfältigere Formulierung das „zu retten", was als das Wesentliche daran erscheint, und seiner Zeit auch neu war, nämlich seine (vermeintliche) Einfachheit, seine ungeheure Allgemeinheit und die in diesen Eigenschaften begründete — wiederum vermeintliche — Sicherheit des Vordringens in dunkle Gebiete.

Mit diesem Urteil wollen wir gewiß nicht endgültig den Stab brechen über alle einzelnen Anwendungen, die man von dem fraglichen Prinzip gemacht hat. Wenn auch gesagt werden muß, daß diese Anwendungen zumeist nicht genügend gesichert sein werden, so kann doch wohl jener dunkle „mathematische Takt" oder „Instinkt" die Geometer vor fehlerhaften Resultaten im einzelnen geschützt haben, so etwa wie er Riemann bewahrt hat vor materiell-unrichtigen Folgerungen aus dem bezeichnenderweise ebenfalls „Prinzip" genannten Schlußverfahren, das Dirichlets Namen trägt. Wir glauben, daß es sich auch wirklich zum Teil so verhält, meinen aber, daß zum mindesten bei der gegenwärtigen Sachlage zu viel Skeptizismus ein kleineres Übel ist als zu wenig.

Typisch für eine besonders wichtige, vielleicht die wichtigste, Kategorie von Anwendungen ist folgender Schluß: Von jeder algebraischen Kurve aus, die auf einer *singularitätenfreien* Fläche 2. Ordnung verläuft, kann man kontinuierlich zu einer reduzibelen Kurve übergehen, die aus lauter Erzeugenden der Fläche besteht. „Folglich" liefert die Zahl der Schnittpunkte zweier solcher ausgearteter Kurven die Zahl der Schnittpunkte in jedem beliebigen Falle, so lange die beiden Kurven keinen gemeinsamen Bestandteil enthalten. Man kommt so zu der bekannten Formel $\mu\nu' + \nu\mu'$, die leicht rein-algebraisch begründet werden kann. Aber auch die Schlußweise selbst läßt sich hier noch rechtfertigen. Streichen wir dagegen in Obigem das Wort „singularitätenfrei", und ersetzen wir die betrachtete Fläche durch einen irreduzibelen Kegel, so bleibt der Vordersatz richtig, die Folgerung aber fällt: Man darf jetzt nicht mehr, wie zuvor, jeden Bestandteil der einen Kurve mit jedem der anderen zum Schnitt bringen und die gefundenen Schnittpunktzahlen addieren. Bemerkt man, daß unter viel verwickelteren Umständen die aus solchen Vorkommnissen sich ergebenden Schwierigkeiten nirgends erörtert sind, so wird man den Resultaten dieser Untersuchungen (soweit sie überhaupt als verständlich erscheinen) kein allzugroßes Vertrauen entgegenbringen können.

Aber das Beispiel von den Kurven auf dem Kegel 2. Ordnung lehrt noch etwas mehr. Es seien vorgelegt zwei solche Kurven der Ordnungen $2m + \mu$ und $2m' + \mu'$, deren erste z. B. mit einer veränderlichen Erzeugenden des Kegels m bewegliche Schnittpunkte bilden möge. Dann ist die Anzahl der nicht notwendig in den Scheitel fallenden Schnittpunkte beider Kurven, sachgemäße Zählung vorausgesetzt, gleich

$$2mm' + \mu m' + m\mu'.$$

Diese Zahl bleibt in Grenzfällen nicht erhalten. Schreibt man aber, wie es angemessen ist, den beiden Kurven noch $\mu\mu'$ weitere im Doppelpunkt des Kegels überlagerte Schnittpunkte zu, und vereinigt man *die Hälfte* dieser Zahl mit der obigen zu einer neuen Summe, so entsteht das halbe Produkt der Ordnungen beider Kurven; die neue Summe bleibt also bei jeder Art des Zerfallens erhalten, so lange sie einen Sinn hat, so lange nämlich, als beide Kurven keinen gemeinsamen Bestandteil haben. Das Beispiel ist ziemlich trivial, es zeigt aber doch, daß in gewissen Fällen Sätze *ähnlich* dem von der „Erhaltung der Anzahl“ existieren können, in denen *gebrochene* Multiplizitäten auftreten, an Stelle der ganzen der Schubertschen Formulierung.[1])

Als vertrauenswürdig, nämlich strenger Ableitung fähig, können, wie uns scheint, unter den Anwendungen des fraglichen Prinzips betrachtet werden gewisse Zahlen analog den Bézoutschen, die sich auf *singularitätenfreie* Mannigfaltigkeiten beziehen.[2]) Nicht selten wird an Stelle des „Prinzips“ eine rein algebraische Begründung substituiert werden können, und manchmal auch ziemlich mühelos; wo dann freilich zu sagen sein wird, daß das „Prinzip“ besser aus dem Spiele geblieben wäre. Solche Anwendungen aber, wie sie z. B. Herr Castelnuovo gemacht hat, werden bis auf weiteres noch nicht als gesichert betrachtet werden dürfen. Bei vielen muß, wie uns scheint, zur Zeit überhaupt jedes Urteil über ihre materielle Richtigkeit als verfrüht betrachtet werden. Wo aber hypothetische Vorstellungen sich einmischen, da sollte es möglich sein, das auch zu erkennen; die Schwierigkeiten werden hervortreten, wenn nur auf die Umgrenzung der Begriffe gehörige Sorgfalt verwendet wird. Dann wird natürlich zu fordern sein, daß das Hypothetische *mit aller Deutlichkeit* als solches bezeichnet werde.

Schließlich wollen wir nochmals hervorheben, daß nach unserer Meinung die allgemeine Verbreitung einer nachlässigen Ausdrucksweise die Hauptwurzel wie vieler anderer Übel, so auch im letzten Grunde

1) Einige Beispiele der Art werden in des Verfassers „Geometrie der Dynamen“ behandelt. (Leipzig, 1903, S. 377, 378).

2) Z. B. die Schubertschen Inzidenzformeln, Math. Ann. Bd. 57 (1903)

des hier besprochenen ist. Es scheint uns eine Notwendigkeit zu sein, daß die unablässige Verwischung des Unterschiedes solcher Begriffe wie „zwei Punkte“ und „zwei verschiedene Punkte“ schließlich zu Mißständen der geschilderten Art führen muß. Soll eine gründliche Besserung erzielt werden, so wird man also sein Augenmerk unter anderem auch auf die der Sprache noch anhaftenden Ungenauigkeiten zu lenken haben. Die Mitwirkung Vieler aber wird zum Reinigungswerk erforderlich sein. Vor allem wird die Kritik sich gegenwärtig halten müssen, *daß Präzision in geometricis nicht in perpetuum wie eine Nebensache behandelt werden darf.*[1])

1) Der Umstand, daß es sich um eine Lebensfrage der Geometrie handelt, mag es rechtfertigen, daß wir bei anderen Gelegenheiten schon Gesagtes hier wiederholt haben. Denn die früheren Darlegungen des Verfassers haben fast keine Beachtung gefunden.

Öffentlich angeschlossen hat sich den vorgetragenen Ansichten (soweit es sich um die „Erhaltung der Anzahl“ handelt) bis jetzt in der Tat nur Herr G. Kohn: Archiv für Mathematik, Bd. IV. 1903. S. 312—316. Wir verweisen wegen weiterer Ausführungen und Beispiele auf diese Arbeit.

Über lineare homogene Differenzengleichungen.

Von ALF GULDBERG in Christiania.

Die Theorie der linearen Differentialgleichungen und die Theorie der linearen Differenzengleichungen besitzen bekanntlich viele Berührungspunkte.[1]) In den folgenden Zeilen möchte ich auf eine meines Wissens neue Analogie dieser Theorien aufmerksam machen.

Es sei gegeben die lineare homogene Differenzengleichung:

$$(1) \qquad y_{x+n} + a_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + a_x^{(n)} y_x = 0,$$

wo die a_x rationale Funktionen der x sind. Es seien $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots y_x^{(n)}$ n partikuläre Lösungen dieser Gleichung, die linear unabhängig sind. Wir betrachten die Determinante dieser Lösungen

$$D\left(y_x^{(1)} \cdots y_x^{(n)}\right) = \begin{vmatrix} y_x^{(1)} & y_x^{(2)} & \cdots & y_x^{(n)} \\ y_{x+1}^{(1)} & y_{x+1}^{(2)} & \cdots & y_{x+1}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{x+n-1}^{(1)} & y_{x+n-1}^{(2)} & \cdots & y_{x+n-1}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

1) Cfr. Enzyklopädie d. mathematischen Wissenschaften Bd. I, p. 932.

Wir denken uns dann die sämtlichen Subdeterminanten m^{ter} Ordnung dieser Determinante gebildet, wo $m < n$; die Anzahl dieser Subdeterminanten ist gleich

$$\nu^2 = \left\{\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m}\right\}^2 = (n_m)^2.$$

Diejenigen dieser Subdeterminanten, die aus den Elementen des Systems

$$\begin{pmatrix} y_x^{(1)} & y_x^{(2)} & \cdots y_x^{(m)} \\ y_{x+1}^{(1)} & y_{x+1}^{(2)} & \cdots y_{x+1}^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{x+n-1}^{(1)} & y_{x+n-1}^{(2)} & \cdots y_{x+n-1}^{(m)} \end{pmatrix}$$

gebildet sind, wollen wir durch

$$u_x^{11},\ u_x^{21}, \ldots, u_x^{\nu 1}$$

bezeichnen und insbesondere

$$u_x^{11} = D\left(y_x^{(1)} y_x^{(2)} \ldots y_x^{(m)}\right)$$

nehmen. Ferner bezeichnen wir jene Determinanten, die aus u_x^{k1} dadurch entstehen, daß man die $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ und deren sukzessive Werte durch die Werte gleich hoher Ordnung irgend einer anderen Kombination von m verschiedenen der Lösungen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ ersetzt, durch

$$u_x^{k2},\ u_x^{k3}, \ldots, u_x^{k\nu},$$

so daß also

$$u_x^{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots, \nu)$$

jene ν^2 Subdeterminanten m^{ter} Ordnung darstellen. Diejenigen Determinanten, welche aus

$$u_x^{11},\ u_x^{21}, \ldots, u_x^{\nu 1}$$

hervorgehen, wenn wir in denselben an die Stelle von $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ irgend ein System von m linear unabhängigen Lösungen $\bar{y}_x^{(1)}, \bar{y}_x^{(2)}, \ldots, \bar{y}_x^{(m)}$ der Gleichung (1) setzen, mögen endlich bezeichnet werden durch

$$u_x^1,\ u_x^2, \ldots, u_x^\nu.$$

Bilden wir die sukzessiven Werte von u_x^i und schaffen die eventuell auftretenden sukzessiven Werte höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der

$y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, \bar{y}_x^{(m)}$ mit Hilfe der Differenzengleichung (1) weg, so ist offenbar:

$$u^i_{x+1} = \varphi_1^{i1} u^1_x + \varphi_1^{i2} u^2_x + \cdots + \varphi_1^{i\nu} u^\nu_x$$

und ebenso allgemein

$$u^i_{x+\lambda} = \varphi_\lambda^{i1} u^1_x + \varphi_\lambda^{i2} u^2_x + \cdots + \varphi_\lambda^{i\nu} u^\nu_x, \tag{2}$$

wo die φ_λ^{ik} rationale Funktionen bedeuten, die sich aus den Koeffizienten von (1) durch sukzessive Werte und rationale Operationen zusammensetzen lassen.

Die Gleichungen (2) bleiben, wie aus ihrer Bildungsweise sofort zu übersehen ist, bestehen, wenn man in denselben die $u^1_x, u^2_x, \ldots, u^\nu_x$ durch irgend eines der Systeme ersetzt

$$u^{1k}_x, u^{2k}_x, \ldots, u^{\nu k}_x \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Nehmen wir die Gleichungen (2) für $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, und denken wir uns aus den so entstehenden ν Gleichungen die $\nu - 1$ Größen u^k_x, $k \neq i$ eliminiert, so ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$P_i^\nu u^i_{x+\nu} + P_i^{\nu-1} u^i_{x+\nu-1} + \cdots + P_i^0 u^i_x = 0, \tag{3}$$

der die Funktionen $u^{i1}_x, u^{i2}_x, \ldots, u^{i\nu}_x$ Genüge leisten und deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind.

Wenn P_i^ν von Null verschieden ist, so ist also die Differenzengleichung (3) auch wirklich von der Ordnung ν. Wenn wir für $i = 1$ den Index 1 in der Gleichung (3) weglassen, so genügt also u^1_x für jede Wahl der $\bar{y}_x^{(1)}, \bar{y}_x^{(2)}, \ldots, \bar{y}_x^{(m)}$ der Differenzengleichung

$$P^\nu u_{x+\nu} + P^{\nu-1} u_{x+\nu-1} + \cdots + P^0 u_x = 0, \tag{4}$$

die demnach auch durch $u^{11}_x, u^{12}_x, \ldots, u^{1\nu}_x$ befriedigt wird.

Die Differenzengleichung ν^{ter} Ordnung (4), $P^\nu \neq 0$, nennen wir, analog wie in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, die $(n-m)^{\text{te}}$ *der gegebenen Differenzengleichung* (1) *assoziierte Differenzengleichung.*

Durch die vollständige Analogie[1]) zwischen der einer linearen homogenen Differentialgleichung zugeordneten assoziierten Differentialgleichung und der einer linearen homogenen Differenzengleichung

1) Vgl. L. Schlesinger, Handbuch d. Theorie d. lin. Differentialgleichungen. Bd. 2, I. S. 125.

assoziierten Differenzengleichung lassen sich die meisten formalen Sätze über assoziierte Differentialgleichungen ohne weiteres auf assoziierte Differenzengleichungen überführen. Wir begnügen uns daher damit, den folgenden Satz hervorzuheben:

Die Lösungen eines Fundamentalsystems der 2^{ten}, $3^{\text{ten}}, \ldots, (n-2)^{\text{ten}}$ assoziierten Differenzengleichung befriedigen nicht lineare homogene algebraische Gleichungen.

Die assoziierten Differenzengleichungen spielen, wie man leicht sieht, wie die assoziierten Differentialgleichungen, eine Rolle bei Untersuchung der Reduktibilität der linearen Differenzengleichungen.

Christiania, den 26. Oktober 1903.

Kurven von konstanter Steilheit auf der Kugelfläche.[1])

Von H. J. Jonas in Stettin.

In den seminaristischen Übungen zur Integration von Differentialgleichungen, welche an der Universität Göttingen im letzten Sommersemester von den Herren Abraham und Zermelo abgehalten wurden, gelangte folgendes Problem zur Behandlung:

Auf den Gipfel eines halbkugelförmigen Berges mit horizontalem Grundkreise soll ein möglichst kurzer Weg geführt werden, dessen Steilheit $\frac{dz}{ds}$ *eine vorgegebene Grenze* λ *nicht überschreitet.*

In denjenigen Teilen einer Fläche, wo die absolut kürzesten (geodätischen) Linien zu steil sind, stellen die Kurven von *konstanter Steilheit* λ die kürzesten zulässigen Verbindungslinien je zweier ihrer Punkte dar. Das Problem der kürzesten Linien von *begrenzter Steilheit* auf einer gegebenen Fläche wird demnach durch Kurvenzüge gelöst, die sich abschnittweise aus geodätischen Linien und aus Kurven von konstanter Steilheit zusammensetzen. Näheres hierüber findet man in dem Artikel *Zur Theorie der kürzesten Linien* von E. Zermelo, Bd. XI, S. 184 des Jahresber. der Deutschen Math.-Vereinigung. Im speziellen Falle der *Kugelfläche* besteht die kürzeste zulässige Verbindungslinie zwischen einem Punkte des Äquators und dem Pole aus *zwei* Teilen: aus der Kurve von konstanter Steilheit, die bis zu einer gewissen Grenze emporsteigt, bei der die Kugel beginnt *zu flach* zu werden,

1) In den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts wurde in Educational Times die Aufgabe gestellt und behandelt: Ein Berg habe die Gestalt einer Halbkugel; einen Weg von konstanter Steigung vom Fuße aus in die Höhe zu führen. Red.

um die Steilheit λ zu besitzen, und aus dem Meridianbogen, der sie bis zum Pole hin fortsetzt.

Es sei a der Radius der Kugel, φ die geographische Länge, ϑ die Poldistanz des variablen Punktes M der gesuchten Kurve von konstanter Steilheit und z seine Höhe über der Ebene des Äquators.

Für das Bogenelement gilt die Formel:

$$ds^2 = a^2 \, (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \cdot d\varphi^2).$$

Es wird verlangt:

$$\frac{dz}{ds} = \lambda = \sin\alpha$$

oder:

$$(1) \qquad \frac{ds^2 - dz^2}{dz^2} = \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Nun ist:

$$z = a\cos\vartheta, \quad dz = -a\sin\vartheta \cdot d\vartheta.$$

Ersetzen wir in (1) ds^2 und dz^2 durch ihre Werte, so ergibt sich:

$$d\varphi^2 = (\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\vartheta)\, d\vartheta^2, \quad \varphi = \pm\int\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\vartheta} \cdot d\vartheta.$$

Die erhaltene Lösung stellt eine einparametrige Schar von kongruenten bezw. symmetrischen Kurven dar, welche die Kugelzone, die sich zwischen den beiden im Polabstande α und $\pi - \alpha$ gezogenen Parallelkreisen k und k' befindet, überall dicht und zwar zwiefach, nach Art eines Netzes, überdecken. Auf den durch $\vartheta < \alpha$ und $\vartheta > \pi - \alpha$ definierten Kalotten wird die Wurzel imaginär: die Steilheit λ existiert hier nicht mehr; deshalb werden die gefundenen Kurven in ihrer Eigenschaft als kürzeste Linien von begrenzter Steilheit durch Meridianbogen von den Parallelkreisen k und k' an bis zu den Polen fortgesetzt. Da $\frac{d\varphi}{d\vartheta}$ für $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = \pi - \alpha$ verschwindet, erreicht jede der Kurven von konstanter Steilheit λ die Parallelkreise unter rechtem Winkel, so daß an der Übergangsstelle *keine* plötzliche Richtungsänderung eintritt.

Wir greifen, um die untere Grenze des Integrales zu fixieren, diejenige Kurve der einparametrigen Schar heraus, deren höchster (auf dem Parallelkreise k gelegener) Punkt M_0 in den Nullmeridian fällt, und bestimmen das Vorzeichen so, daß dem wachsenden ϑ auch ein wachsendes φ entspricht, d. i. daß sich die Kurve in positivem Drehungssinne *herab*windet.

$$\varphi = \int_\alpha^\vartheta \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\vartheta} \cdot d\vartheta.$$

Die Integration wird mit Hilfe der folgenden Substitution ausgeführt:

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{ctg} \vartheta = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \psi; \quad d\vartheta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \psi}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \psi} \cdot d\psi.$$

Der unteren Grenze $\vartheta = \alpha$ entspricht $\psi = 0$.

$$\varphi = \int_0^{\psi} \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \psi}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \psi} d\psi.$$

Man zerlegt dieses Integral in die beiden folgenden:

$$\varphi = \int_0^{\psi} \frac{\frac{d\psi}{\cos^2 \psi}}{1 + \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \psi} - \int_0^{\psi} d\psi.$$

Wertet man die Integrale aus, so wird:

$$\varphi = \frac{1}{\sin \alpha} \operatorname{arc\,tg} (\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \psi) - \psi.$$

Setzen wir

$$\text{(3)} \qquad \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} t,$$

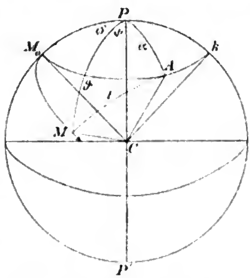
so bestehen zwischen ϑ, ψ, t die Gleichungen:

$$\text{(2)} \qquad \cos \psi = \operatorname{ctg} \vartheta \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\text{(3)} \qquad \sin \alpha = \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} \psi,$$

$$\text{(4)} \qquad (\varphi + \psi) \sin \alpha = t.$$

Die Gleichungen (2) und (3) weisen auf die Existenz eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks hin, in dem α und t Katheten sind, ϑ Hypotenuse und ψ der von α und ϑ eingeschlossene Winkel ist.



Wir legen (Fig.) durch den Kurvenpunkt M einen größten Kugelkreis von der Art, daß er den Parallelkreis k in einem Punkte A *tangiert*, mit anderen Worten: wir konstruieren die durch M gehende Tangentialebene an den Kegel K, welcher den Parallelkreis k vom Zentrum C der Kugel aus projiziert. Verbinden wir den Pol P mit M und A durch Meridianbögen, so ist PMA das gesuchte rechtwinklige sphärische Dreieck, A sein rechter Winkel. Insbesondere ergibt sich, daß der Winkel $MPA = \psi$ und die Kathete $MA = t$ ist. Wählt man von den beiden möglichen symmetrischen Dreiecken dasjenige, dessen Ecke A auf die Seite der wachsenden φ fällt, so entnimmt man aus Gleichung (4) folgende Beziehung:

Der Parallelkreisbogen $M_0 A$ ist gleich dem Großkreisbogen MA.

Berücksichtigt man, daß der Bogen MA im Punkte A den Parallelkreis k berührt, so ergibt sich:

Die Kurven von konstanter Steilheit $\lambda = \sin\alpha$ entstehen durch Abwicklung eines unausdehnbaren Fadens von dem im Polabstande α konstruierten Parallelkreise k. Rollt man den Faden einmal in diesem und einmal in jenem Drehungssinne ab, so werden durch seine Punkte sämtliche Kurven der einparametrigen Schar beschrieben.

In ihrer Entstehung entspricht die Kurve von konstanter Steilheit auf der Kugelfläche der *Kreisevolvente* in der Ebene, in die sie durch geeignete Grenzbetrachtung übergeführt werden kann.

Will man die gefundene Erzeugungsweise unserer Kurve durch ein *Modell* illustrieren, so hat man den Parallelkreis k durch einen hervorspringenden Rand darzustellen, gegen dessen Außenseite sich der infolge der Spannung nach dem Pole hin drängende Faden schmiegt.

Einen noch tieferen Einblick in die Entstehung unserer Kurve erhalten wir, wenn wir mit dem Parallelkreise k zugleich den *Mantel des Kegels* K abwickeln, dessen Grundkreis k ist. Das abgerollte Mantelstück stellt, wenn es gespannt ist, die auf Grund der Formeln (2) und (3) an den Kegel gelegte Tangentialebene MAC und seine kreisförmige Begrenzung den Bogen MA dar. Die Abwicklung des Kegelmantels kann als eine stetige Folge infinitesimaler Drehungen der Tangentialebene um die Erzeugenden des Kegels aufgefaßt werden. Dreht sich aber eine Ebene um eine in ihr liegende Achse, so ist sie Normalebene der Trajektorie eines jeden ihrer Punkte. Demnach ist MAC *Normalebene* unserer Kurve im Punkte M. Da nun sämtliche Normalebenen die Neigung α gegen die Vertikale besitzen, so haben die Kurventangenten die konstante Neigung α gegen die Horizontalebene.

Und umgekehrt: soll eine Kurve die konstante Steilheit $\sin\alpha$, d. i. die konstante Neigung α gegen die Horizontalebene besitzen, so müssen ihre Normalebenen den Winkel α mit der Vertikalen einschließen. Im vorliegenden Falle Normalschnitte der Kugelfläche, enthalten dieselben den Mittelpunkt C und hüllen demzufolge den Kreiskegel K ein, dessen Erzeugende mit der Vertikalen den Winkel α bildet. Die Tatsache, daß jede Kurve durch Rollen einer Ebene auf der einhüllenden Fläche ihrer Normalebenen erhalten werden kann, führt uns dann zu der auf Grund der Formeln (2), (3), (4) gefundenen kinematischen Erzeugung unserer Kurve.

Hiermit ist es uns gelungen, die Auswertung des auftretenden Integrales zu umgehen und die Aufgabe auf *geometrischem* Wege zu lösen.

Anwendung der komplexen Zahlen zum Beweise eines elementargeometrischen Satzes.

Von JOSEF KÜRSCHÁK in Budapest.

Entsprechen den komplexen Zahlen u_1, u_2, v_1, v_2 in der Gaußschen Ebene die Punkte U_1, U_2, V_1, V_2, so hat man

$$\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} = \frac{r}{r'} e^{i(\varphi - \varphi')},$$

wo r und r' die Längen der Strecken $U_1 U_2$ und $V_1 V_2$ bedeuten und $\varphi - \varphi'$ ihr Neigungswinkel zueinander ist.

Der Quotient $\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}$ *hat demnach dann und nur dann einen reellen Wert, wenn* $U_1 U_2$ *und* $V_1 V_2$ *zueinander parallel sind.*

Es scheint mir nicht überflüssig, die Brauchbarkeit dieses bekannten Kriteriums an dem folgenden, besonders in der graphischen Statik verwendeten Satze zu zeigen.

Sind in den Vierecken $A_1 A_2 A_3 A_4$ *und* $B_1 B_2 B_3 B_4$

$$A_1 A_4, \quad A_2 A_4, \quad A_3 A_4, \quad A_2 A_3, \quad A_3 A_1$$

parallel zu

$$B_2 B_3, \quad B_3 B_1, \quad B_1 B_2, \quad B_1 B_4, \quad B_2 B_4,$$

so ist auch $A_1 A_2 \parallel B_3 B_4$.

Dieser Satz besagt einfach: *Sind* a_1, a_2, a_3, a_4 *vier voneinander verschiedene Zahlen und auch* b_1, b_2, b_3, b_4 *voneinander verschieden, so können die Quotienten*

$$\frac{a_1 - a_4}{b_2 - b_3} = \lambda_1, \quad \frac{a_2 - a_4}{b_3 - b_1} = \lambda_2, \quad \frac{a_3 - a_4}{b_1 - b_2} = \lambda_3, \quad \frac{a_2 - a_3}{b_1 - b_4} = \mu_1, \quad \frac{a_3 - a_1}{b_2 - b_4} = \mu_2$$

nur so sämtlich reell sein, wenn auch

$$\frac{a_1 - a_2}{b_3 - b_4} = \mu_3$$

einen reellen Wert hat.

Dies ist aber in folgender Weise ersichtlich. Wir haben

$$\mu_1 (b_1 - b_4) + \lambda_3 (b_1 - b_2) + \lambda_2 (b_1 - b_3) = 0,$$

also

$$(\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(b_1 - b_4) - \lambda_3 (b_2 - b_4) - \lambda_2 (b_3 - b_4) = 0.$$

Ebenso ist

$$-\lambda_3 (b_1 - b_4) + (\mu_2 + \lambda_1 + \lambda_3)(b_2 - b_4) - \lambda_1 (b_3 - b_4) = 0$$

und

$$-\lambda_2(b_1-b_4)-\lambda_1(b_2-b_4)+(\mu_3+\lambda_1+\lambda_2)(b_3-b_4)=0.$$

Hieraus folgt aber durch die Elimination von b_1-b_4, b_2-b_4 und b_3-b_4

$$D=\begin{vmatrix}\mu_1+\lambda_2+\lambda_3 & -\lambda_3 & -\lambda_2\\ -\lambda_3 & \mu_2+\lambda_1+\lambda_3 & -\lambda_1\\ -\lambda_2 & -\lambda_1 & \mu_3+\lambda_1+\lambda_2\end{vmatrix}=0.$$

Diese in μ_3 lineare Gleichung ergibt für μ_3 einen reellen Wert, wenn in ihr die übrigen Größen reelle Werte haben.

Nur wenn der Koeffizient

$$D_{33}=\begin{vmatrix}\mu_1+\lambda_2+\lambda_3 & -\lambda_3\\ -\lambda_3 & \mu_2+\lambda_1+\lambda_3\end{vmatrix}$$

von μ_3 verschwindet, wird dieser Beweis hinfällig. Es folgt aber dann nach einem bekannten Satze über symmetrische Determinanten aus $D=0$ und $D_{33}=0$ auch

$$\begin{vmatrix}-\lambda_3 & -\lambda_2\\ \mu_2+\lambda_1+\lambda_3 & -\lambda_1\end{vmatrix}=\lambda_2\mu_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_2=0$$

und

$$\begin{vmatrix}-\lambda_2 & \mu_1+\lambda_2+\lambda_3\\ -\lambda_1 & -\lambda_3\end{vmatrix}=\lambda_1\mu_1+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_2=0,$$

also ist in diesem Falle $\lambda_1\mu_1=\lambda_2\mu_2$. Wenn wir hier die expliziten Werte von λ_1, μ_1, λ_2 und μ_2 einsetzen, so besagt diese Gleichung, daß die Doppelverhältnisse

$$(a_1a_2a_3a_4),\quad (b_1b_2b_3b_4)$$

einander gleich sind. Dann ist aber nach einer zyklischen Permutation von 1, 2, 3 auch

$$(a_2a_3a_1a_4)=(b_2b_3b_1b_4)$$

und folglich

$$\lambda_2\mu_2=\lambda_3\mu_3.$$

Hieraus ergibt sich aus reellen λ_2, μ_2 und λ_3 wieder ein reelles μ_3.

Budapest, den 25. Januar 1904.

Kant und das Wesen des Neuen in der Mathematik.[1])

Ein Beitrag zur Lehre von den synthetischen Urteilen

von W. Franz Meyer in Königsberg i./Pr.

Das Folgende soll nichts weniger als eine Studie zur Kantphilologie sein. Der Verfasser will nur einige Anregungen geben, von denen er hofft, daß sie andere, denen mehr Muße und Geschick zu Gebote steht, weiter verfolgen mögen; irgend eine Erschöpfung des Themas erscheint an sich ausgeschlossen. In kurzer Zeit wird der erste Band der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“[2]) abgeschlossen vorliegen. Er schildert in historisch-kritischer Entwicklung die Fortschritte, die das 19. Jahrhundert in der Arithmetik, Algebra, Zahlentheorie, sowie auf einigen angrenzenden Gebieten gezeitigt hat. Der Herausgeber sagt daselbst in seiner Vorrede (S. XXII): „Möge die Enzyklopädie, die die mathematischen Erfindungen eines Jahrhunderts in historischer Entwicklung vorführt, auch das erkenntnistheoretische Studium der grundlegenden Frage, was in der Mathematik denn eigentlich als „neu“ zu gelten habe, beleben! Besteht das Neue in einer durch innere Anschauung gewonnenen Vermehrung und Vertiefung eines Besitzstandes aprioristischer Erkenntnisse oder kommt es nur zurück auf eine andere Gruppierung vorhandener Erfahrungstatsachen?“ In der Tat, wenn man bedenkt, daß daselbst auf einem Raume von wenig über 1100 Seiten in knapper Form von neuen fruchtbaren Ideen, Methoden und Sätzen berichtet wird, so wird man von selbst zu der Frage gedrängt, wie denn die unterscheidenden begrifflichen und anschaulichen Merkmale des „Neuen“ gegenüber dem „Alten“ festzulegen seien. Kants Lehre über die erkenntnistheoretische Stellung der mathematischen Wahrheiten, daß es „reine Erkenntnisse a priori“ seien, darf als bekannt vorausgesetzt werden; auf die vielfachen Versuche, diese Lehre zu stützen oder aber sie zu verwerfen, sei hier nur hingewiesen.

Wenn wir im folgenden die Kantische Apriorität als Grundlage adoptieren, und unsere Entwicklungen sich danach zwanglos in das

1) Aus dem Werke: Zur Erinnerung an Immanuel Kant. Herausgegeben von der Universität Königsberg i/Pr. Halle a/S. 1904.

2) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. I, herausg. von W. Fr. Meyer. Leipzig, bei B. G. Teubner, 1904. [Dieser Band ist inzwischen, im August 1904, erschienen.]

Kantische System einfügen lassen, so werden diese Entwicklungen doch nicht unbedingt daran gebunden sein, sie würden auch bestehen bleiben können, wenn man von mehr oder weniger empirischen Erkenntnisquellen ausginge.

Kant nimmt die grundlegenden mathematischen Begriffe und Operationen als ein unabhängig von der Erfahrung gegebenes geistiges Besitztum an — es ist in diesem Sinne beachtenswert, daß die von ihm angezogenen Beispiele elementarsten Charakters sind —, und denkt sich alle weiteren Sätze, soweit es sich nur um den Beweis ihrer *Existenz* handelt, als durch rein logische Schlüsse daraus abgeleitet, und so jenes ursprüngliche Besitztum immer mehr vertieft und abgerundet. Wie und in welcher Reihenfolge derartige Schlüsse zu ziehen sind, um zu *vorgesteckten* Zielen zu gelangen, wie der Forscher dabei *schöpferisch*, *konstruktiv* zu verfahren hat, liegt für Kant auf einem gänzlich anderen Gebiete; er postuliert zu dem Behuf einen Akt der „*Synthese*“, einer Art innerer Anschauung, auf Grund deren erst beispielsweise die Inhalte der beiden Begriffe $7 + 5$ und 12 als gleichwertig erkannt werden. Im übrigen aber erscheint Kant die in Rede stehende Frage vom Standpunkt seines vielumfassenden Systems aus als eine akzessorische; es ist ihm weniger eine allgemeine philosophische Frage, denn eine spezifisch-mathematische *Fachfrage*. Es sei gestattet, in dieser Richtung eine Bemerkung allgemeiner Natur über das Verhältnis der Philosophie zu den Einzelwissenschaften einzuschalten. Die Philosophie sieht es als ihre Aufgabe an, allgemein verbindliche Normen des Denkens überhaupt aufzustellen und diese auf die obersten, allgemeinsten Erscheinungen des geistigen Lebens anzuwenden; jene Normen sollen dann jeder einzelwissenschaftlichen Untersuchung zugrunde liegen, jene allgemeinsten Erscheinungen mögen sich in jeder Wissenschaft, je nach deren Charakter und deren Bedürfnissen einerseits spezifizieren, andererseits weiter ausgestalten.

Nun ist es aber eine wohlbekannte Tatsache, daß innerhalb des Rahmens jeder fortschreitenden Einzelwissenschft „allgemeine“ Begriffe und Untersuchungsmethoden einer fortlaufenden Verschiebung, einer bald stetigen bald unstetigen Kompression und Dilatation unterworfen sind, daß sie sich selbst mit immer reicherem Inhalte erfüllen, unfruchtbare Keime abstoßen, andere in sich aufnehmen. Dieses selbstkorrigierende Verfahren geschieht in solchem Umfange, daß oft ein ursprünglich festgelegter Begriff später kaum noch wiederzuerkennen ist, so sehr hat er sich den veränderten Daseinsbedingungen anpassen müssen.

Eines der instruktivsten Beispiele dieser Art ist der Begriff der

Zahl. Zu dem ursprünglichen Begriff der natürlichen Zahl trat der der negativen, der gebrochenen, der algebraischen, der irrationalen Zahl. Diesen Zahlen als reellen traten weiterhin als die umfassenderen die gewöhnlichen und höheren komplexen Zahlen gegenüber, und über alle diese erhebt sich die Schöpfung der transfiniten Zahlen (s. u. S. 298). Die Berechtigung, diese sämtlichen Gedankengebilde, so verschieden sie zunächst erscheinen, dem Zahlbegriff unterzuordnen, geht daraus hervor, daß sie im wesentlichen den nämlichen logischen Verknüpfungsgesetzen gehorchen. So weichen der Gang der allgemeinen Philosophie und der Gang innerhalb der einzelnen „Fachphilosophie“ nicht unwesentlich voneinander ab. Der Philosoph wird stets wieder zu denselben grundlegenden Fragen der als Ganzes aufgefaßten Erscheinungswelt zurückgeführt; in der Einzelwissenschaft sieht der Forscher aus der glücklichen Lösung eines besonderen Problems eine Reihe neuer, ungelöster entspringen. Wenn das Bild gestattet ist: so oft der Philosoph glaubt, seiner Hydra einen Kopf abgehauen zu haben, derselbe Kopf wächst sofort wieder; dem Einzelforscher dagegen erwachsen an Stelle des einen abgetrennten Kopfes zehn solche von anderer Beschaffenheit.

Und doch wäre eine gegenseitige Unterstützung sehr heilsam; je mehr im einzelnen durchgebildete Fachphilosophien entwickelt würden, um so mehr würde auch der Philosoph κατ' ἐξοχήν genötigt werden, seinen zu allgemein gestellten Aufgaben eine gewisse Beschränkung aufzuerlegen, in dieser Beschränkung würde er dafür zu präziseren Lösungen gelangen.

Um nunmehr unsere eigentliche Aufgabe in Angriff zu nehmen, denken wir uns für den Augenblick einen gewissen Besitzstand grundlegender mathematischer Begriffe, Sätze und Methoden als vorhanden, gleichgültig woher er stamme, und fragen, wie sich dieser Besitzstand vermehren läßt. Wir wünschen, ganz im Sinne Kants, zu zeigen, daß die gedachte Vermehrung, entgegen dem äußeren Anscheine, keine materielle, sondern nur eine *formale* ist, daß die Erweiterung mathematischer Erkenntnisse nur in einer anderen Anordnung, Gruppierung, Zusammenstellung, Trennung und Verbindung bereits vorhandener besteht.

Um diese Auffassung zunächst an einem einfachen Bilde aus dem gewöhnlichen Leben zu erläutern: Jedermann weiß, daß ein und dasselbe Zimmer mit ein und demselben Mobiliar je nach der Aufstellung und Verteilung des letzteren dem Beschauer einen ganz andern, einen „neuen“ Eindruck bietet, daß man sogar auch leicht einen *gewollten* Eindruck, einen bestimmten „Stil“ durch passende Anordnung hervorrufen kann. Nicht anders ist es in der Mathematik; durch bloße Umordnung von Teilen wird der Eindruck von Neuem, von Fortschritten erzeugt. Einer der inneren Gründe dieser befremdenden Erscheinung liegt in dem eigentümlichen Verhältnis zwischen *Anschauungs-* und *Schließungsvermögen*. Dieses Verhältnis ist ein zwiefaches. Auf der einen Seite erklimmt der Verstand mühsam Stufe um Stufe, bis er zum letzten, den Beweis eines Satzes krönenden Schlusse gelangt; ist dieser Anstieg aber einmal vollendet, so vermag die innere Anschauung [1]), wie vom Gipfel einer Höhe, den ganzen zurückgelegten Weg mit *einem* Blick zu umspannen.

Auf der andern Seite ist unser Anschauungsvermögen, namentlich in der Geometrie, ein überaus beschränktes, ja geradezu dürftiges [2]), sobald ihm eine größere Anzahl verschiedenartig verknüpfter Elemente unvermittelt gegenübertritt, während das Schließungsvermögen, trotz seiner Langsamkeit, geradezu als ein unbegrenztes fungiert. Dazu tritt ein in der Mathematik spezifisch ausgebildetes Moment, das Verfahren der *vollständigen Induktion* (des Schlusses von n auf $n+1$). So unzweifelhaft dies Verfahren wegen seiner Sicherheit der Mathematik unschätzbare Dienste geleistet hat und noch leisten wird [3]), es leidet doch wieder an einem erheblichen Mangel, statt das innere Gewebe der leitenden Gedankenfäden aufzudecken, umhüllt es dasselbe vielmehr wie mit einem Schleier; oder um lieber das oben gebrauchte Bild weiter auszuführen: man läßt sich von einem Führer einen steilen Berg hinaufziehen, und behält sich nur vor, den letzten obersten kleinen Gipfel selbst zu ersteigen. Gerade die vollständige Induktion ist es, die oft zu einem neuen, unerwarteten Ergebnis führt, wie man erkennt, wenn es gelingt, einen direkten, allmählich zum Ziele führenden Beweis zu finden; dann entpuppt sich das scheinbar Neue als eine Aneinanderreihung selbstverständlicher Tatsachen.

Da eine systematische Ausführung unseres Hauptgedankens über die Entstehung des Neuen in Anbetracht der grenzenlosen Ausdehnung des Gebietes unmöglich erscheint, müssen wir uns bescheiden, eine Reihe mathematischer *Typen* vorzuführen, und diese wiederum durch

1) Wenn anders der Beweis gewissen Anforderungen genügt, s. u. S. 301.

2) Das ist einer der Hauptgründe, weshalb bei der modernen Festlegung der Grundlagen der Geometrie von einem System durch gewisse Axiome verknüpfter *Begriffe* ausgegangen wird, mit denen dann nach festen Vorschriften geradezu wie mit Größen gerechnet wird. Vgl. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals, Leipzig, 2. Aufl., 1903; K. Th. Vahlen, Abstrakte Geometrie. Leipzig 1904. (Wird demnächst erscheinen.)

3) Vgl. H. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese. Deutsch von F. und L. Lindemann, Leipzig 1904.

geeignete Beispiele zu kennzeichnen, deren Verständnis keinen zu großen[1] Aufwand mathematischer Vorkenntnisse erfordert.

Am deutlichsten, weil am unmittelbarsten, ist die fragliche Erscheinung in der elementaren *Kombinatorik* ausgeprägt. Wer zuerst den Satz aufstellte und bewies, daß die Anzahl der Vertauschungen von n Dingen gleich $1 \times 2 \times 3 \ldots n$ ist — eine Zahl, die bei größeren Werten von n eine solche Höhe erreicht, daß sie bei dem Laien ein ungekünsteltes, verwirrendes Erstaunen erwecken muß — glaubte gewiß, einen großen, wahrhaft neuen Satz entdeckt zu haben. Und doch ist das Ergebnis nur eine Aneinanderreihung einiger Trivialitäten. Daß zwei Dinge zwei Anordnungen zulassen, sieht ein Kind ein, desgleichen, daß von drei Dingen jedes einmal an eine bestimmte (erste) Stelle gebracht werden kann; dies, mit dem vorigen verbunden, lehrt, daß die Anordnungen von drei Dingen sich in drei Gruppen zu je zwei verteilen, daß also ihre Anzahl 2×3 ist. Von vier Dingen kann wiederum jedes einmal eine erste Stelle einnehmen, während die drei übrigen jeweils ihren 2×3 Anordnungen unterworfen werden können; mithin gruppieren sich die Anordnungen von 4 Dingen in vier Klassen von je 2×3, ihre Gesamtzahl ist also $2 \times 3 \times 4$. So ist klar, daß bei jedem neu hinzutretenden Element bei der Anzahl der vorher möglichen Anordnungen die das Element angebende Kardinalzahl als weiterer Faktor figurieren muß. Die vollständige Induktion ist hier nicht einmal erforderlich und dient nur zur bündigen Zusammenfassung der skizzierten Tätigkeiten. Wer wäre aber imstande, etwa von den 3628800 Arten, wie 10 Personen an einem Tische ihre Plätze wechseln können, eine deutliche Vorstellung zu besitzen.

Ganz ähnlich verhält es sich mit einem zweiten grundlegenden Satze der Kombinatorik, daß man, wenn n_1 Dinge einer ersten Gruppe gegeben sind, n_2 Dinge einer zweiten, . . ., n_i Dinge einer i^{ten} Gruppe, genau auf $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_i$ Arten je ein Ding der ersten Gruppe mit je einem der zweiten, . . ., mit je einem der i^{ten} Gruppe zusammenstellen kann, wenn auf die Anordnung dieser Zusammenstellungen keine Rücksicht genommen wird. Usf. Als zweiter Typus der in Rede stehenden Erscheinungen diene der berühmte *Pythagoreische Satz* des rechtwinkligen Dreiecks. Die meisten Leser werden sich mit einem gewissen Unbehagen der künstlichen Figur erinnern, mittels derer im Schulunterricht der fragliche Satz herausdemonstriert wurde, und würden

1) Die meisten Leser werden freilich umgekehrt der Meinung sein, daß dieser Aufwand ein viel zu großer sei. Indessen läßt sich etwa aus bloßen elementaren Sätzen über das Dreieck die Tiefe der neueren mathematischen Begriffe nicht entnehmen.

wohl schwerlich imstande sein, trotz aller Anstrengungen jene Figur sich wieder herzustellen. An die richtige systematische Stelle gebracht, hat der Satz nur das eine Eigentümliche an sich, daß er zwei Tatsachen von großer Einfachheit so miteinander vereinigt, daß ein *unwesentliches* Moment *entfernt* wird.

Der grundlegende Satz, daß bei zwei *ähnlichen* Dreiecken (i. e. solchen mit bezw. gleichen Winkeln) die Seitenlängen des einen sich verhalten, wie die des andern, kann und soll gleich im Anfange der Lehre vom Dreieck abgeleitet werden und mag hier als vorhanden angesehen werden. Liegt nun ein beliebiges Dreieck ABC vor, so ist mit ihm implizite auch *jede* Strecke AD mitgegeben, die eine Ecke A mit *irgend* einem Punkte D der Gegenseite BC verbindet. Unter diesen unbegrenzt vielen Möglichkeiten gibt es offenbar sicher eine, so daß das Teildreieck ABD mit dem ganzen Dreieck ABC ähnlich wird. Verlangt man aber, um ein *gleichmäßigeres*, ein *symmetrisches* Ergebnis zu erzielen, daß auch das zweite Teildreieck ACD dem ganzen Dreieck ähnlich wird, oder, was dasselbe ist, daß *alle drei* Dreiecke ABC, ABD, ACD einander ähnlich werden, so ist das wiederum nur so möglich, daß AD eine *Höhe* des Dreiecks ABC, und überdies der Winkel desselben bei A ein *Rechter* ist.

Bezeichnet man dann, wie üblich, die Längen der Seiten des nunmehr als *rechtwinklig* vorausgesetzten Dreiecks ABC mit a, b, c, die Abschnitte, in die die Hypothenuse a durch die Höhe $AD = h$ zerlegt wird, mit p, q, so ist die Ähnlichkeit je eines Teildreiecks mit dem ganzen Dreieck *gleichwertig* mit den Aussagen $b^2 = ap$, $c^2 = aq$, die zusammen wiederum für das rechtwinklige Dreieck *charakteristisch* sind. Um die unwesentlichen, weil erst in zweiter Linie auftretenden Stücke p, q zu entfernen, hat man nur jene beiden Relationen zu addieren; das Resultat $b^2 + c^2 = a(p + q) = a^2$ ist der Pythagoreische Satz, der also wiederum für das rechtwinklige Dreieck *charakteristisch* ist.

Würde man nur auf die Ähnlichkeit der beiden Teildreiecke achten, so ergäbe sich die andere fundamentale Aussage $h^2 = pq$, die abermals für das rechtwinklige Dreieck charakteristisch ist, mit dem Pythagoreischen Satze *inhaltlich* völlig gleichwertig erscheint, und *formal* nur dadurch von ihm abweicht, daß sie „neue“ Elemente, die Höhe h und die Abschnitte p, q der Hypotenuse enthält.

Vom Pythagoreischen Satze zum Aufbau der elementaren *Trigonometrie* sind nur wenige Schritte erforderlich.

Um den Pythagoreischen Satz in eine Form zu kleiden, die von dem zufällig gewählten Längenmaßstab unabhängig ist, führt man die Verhältnisse der Seiten a, b, c als *selbständige* Bildungen ein; man nennt sie die (sechs) trigonometrischen Funktionen eines der beiden spitzen Winkel des Dreiecks. Der Pythagoreische Satz zeigt unmittelbar, wie diese sechs Funktionen durch die einfachste Rechnung auf irgend *eine* von ihnen zurückgeführt werden können. Um indessen dem Auge eine *wohlgefällige* Form [1]) darzubieten, führt man jene Reduktion nur selten durch, sondern behält drei (oder vier) jener Funktionen (sinus, cosinus, tangens resp. cotangens) gleichzeitig bei. Hierdurch erklärt sich der Reichtum der trigonometrischen Beziehungen; *man opfert der schönen Form die Einfachheit, die Einheit des Inhalts.* Wir kommen auf dieses bedeutsame Moment noch weiterhin zurück.

Ein beliebiges Dreieck wird durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt; sobald man daher auf diese die trigonometrischen Beziehungen anwendet und diese wiederum so vereinigt, daß *unwesentliche*, d. h. für eine jeweilige „Auflösung" des Dreiecks, nicht in Betracht kommende Stücke entfernt („eliminiert") werden, gruppiert sich der Stoff zu immer anderen Gestalten. Trotzdem ist dieser Reichtum nur ein *scheinbarer*, wesentlich durch die vielfachen eigenartigen Benennungen hervorgerufener; es ist stets nur die Variation des einen Themas, daß man von einem Punkte auf eine Gerade nur ein einziges Lot fällen kann. So oft es sich hierbei darum handelt, aus drei unabhängigen Stücken (Seiten und Winkeln) des Dreiecks ein viertes zu bestimmen, ist die Anzahl der Gruppierungsmöglichkeiten eine eng begrenzte und leicht übersehbare [2]); sobald man dagegen versucht, eine Relation zwischen *fünf*, oder gar sechs Stücken des Dreiecks zu konstruieren, ist die Anzahl der Möglichkeiten naturgemäß eine *unbegrenzte*, und es ist dem subjektiven *Geschmacke* des Forschers der weiteste Spielraum gelassen. Er wird z. B. Wert darauf legen, daß gewisse Elemente nur linear in den Formeln auftreten, usw.

Für die Erkenntnis des *Wertes* der Trigonometrie des Dreiecks erscheint es aber durchaus notwendig, festzustellen (wie das der Verfasser in einer früheren Arbeit [3]) entwickelt hat), wie sich allein aus *drei* unabhängigen Grundformeln durch reine Rechenprozesse, sozusagen

1) Hierbei ist freilich auch noch das *praktische Bedürfnis*, das den Logarithmentafeln für Zahlen und trigonometrische Funktionen Rechnung tragen muß, maßgebend; wir beschränken uns aber im Texte auf die „reine" Mathematik. Auf einer höheren Stufe ist es gerade wesentlich, die verschiedenen trigonometrischen Funktionen voneinander getrennt zu halten.

2) Von der selbständigen Einführung weiterer Dreieckselemente, wie Höhen, seiten- und winkelhalbierende Transversalen, ein- und umbeschriebene Kreise usw., soll hier ganz abgesehen werden.

3) Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 7_1 (1899), S. 147—154.

mittels einer Rechenmaschine, *alle* etwaigen übrigen herleiten lassen. Das Entsprechende gilt für den Aufbau der sphärischen Trigonometrie, der Polygonometrie usw.

Wir gehen zu anderen Typen über. Hier wird ein weiteres, ebenfalls der Mathematik spezifisch angehöriges Hilfsmoment in den Vordergrund treten, das ist die merkwürdigr Rolle, die *Identitäten* bei der Entstehung „neuer" Sätze spielen.

Ein instruktives Beispiel aus der elementaren Planimetrie wird durch den *Ptolemäischen Satz* geliefert, der vielleicht manchem Leser als ein besonderes Kuriosum im Gedächtnis geblieben ist. Der Satz sagt aus, daß in einem Kreisviereck die Summe der Produkte je zweier Gegenseiten gleich dem Produkte der Diagonalen ist. Führt man die Winkel φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 ein, die die nach den Ecken des Vierecks laufenden Radien mit irgend einer festen Anfangsrichtung bilden, und setzt $\operatorname{tg}\frac{\varphi_i}{2} = \lambda_i\ (i = 1, 2, 3, 4)$, so lehrt eine Rechnung von wenigen Zeilen, daß der in Rede stehende Satz nur ein geometrischer Ausdruck[1]) für die Existenz der evidenten Identität ist;

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4) + (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3) = 0.$$

Die Bedeutung des Satzes für die Kreislehre erhellt dann hinterher wieder daraus, daß er für den Kreis *charakteristisch* ist; vier Punkte der Ebene liegen dann und nur dann auf einem Kreise, wenn für sie die Ptolemäische Eigenschaft zutrifft.

Die *Umkehrung* dieser Erscheinung führt sofort zu einem umfassenderen Standpunkt. So oft man vier Größen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 durch vier gleichberechtigte geometrische Objekte (Bilder) deutet, die nur noch der Bedingung zu genügen haben, daß auch den (sechs) Differenzen $\lambda_i - \lambda_k$ eine selbständige geometrische Bedeutung zukommt, gelangt man zu einem „neuen" geometrischen Satze; alle diese Sätze sind jedoch nur verschiedene Anschauungsmanifestationen einer *einzigen* Erkenntnisquelle. So gewinnt man u. a. die die Theorie des Doppelverhältnisses beherrschende Fundamentalrelation, ferner die die Theorie der Geraden im Raume beherrschende „Linienkoordinatenidentität", usw.

Der Gehalt derartiger Identitäten für die Erkenntnis und Herleitung geometrischer Wahrheiten wird ein ungleich fruchtbarer, wenn in ihnen noch ein willkürlicher Parameter zur Verfügung steht.

Zur Erläuterung möge ein Typus von Sätzen dienen, deren be-

1) Näheres siehe in der Abhandlung des Verfassers im Archiv der Mathematik und Physik (3) 7 (1904), S. 1—15.

kanntester Repräsentant der *Pascal*sche *Satz* für Kegelschnitte ist. Anstatt von vornherein sechs Punkte auf einem Kegelschnitte ins Auge zu fassen, gehe man zunächst von sechs *beliebigen* Punkten $A_1, A_2, \ldots A_6$ einer Ebene aus, die man in irgend einer Reihenfolge durch Strecken verbinde. Die drei Paare von Gegenseiten des Sechsecks liefern drei Schnittpunkte S_1, S_2, S_3. Mittels geeigneter Koordinaten läßt sich dann auf ganz einfachem Wege eine Identität $A \equiv B$ aufstellen. Hier bedeuten A und B gewisse rechnerische Ausdrücke, mit der besonderen Eigenschaft, daß wenn A den speziellen Wert der *Einheit* annimmt, die sechs Punkte $A_1, A_2, \ldots A_6$ auf einem *Kegelschnitt* liegen, andrerseits, wenn B gleich der Einheit wird, die drei Punkte S_1, S_2, S_3 ein und derselben *Geraden* angehören. *Damit erscheint der Pascalsche Satz nebst seiner Umkehrung als der unmittelbare geometrische Ausdruck der Identität* $A \equiv B$.

Mit demselben Rechte hätte man aber dem Ausdrucke A irgendeinen Zahlwert c beilegen können, womit ihn gleichzeitig der Ausdruck B erhält; *je nach dem betreffenden Werte des „Parameters“* c *gruppiert sich das Sechseck nach andrer Vorschrift.* Das Prinzip ist also offenbar dies, daß man den Pascalschen Satz als eine *Spezialerscheinung* innerhalb einer unbegrenzten Klasse in gewisser Hinsicht gleichartiger Erscheinungen auffast, die alle in der Identität $A \equiv B$ wurzeln. Der Grund aber, weshalb man gerade dem Pascalschen Satze eine so hervorragende Bedeutung beimißt, ist ein doppelter. Einmal beanspruchen die Kegelschnitte, ganz abgesehen von deren vielseitiger Verwendung in Mechanik, Technik usw., in der Systematik der geometrischen Gebilde der Ebene ihren Platz mit an erster Stelle, da sich ihre Theorie unmittelbar über der der Geraden erhebt. Sodann kommt dem Pascalschen Satze innerhalb der Kegelschnittslehre eine zentrale Stellung zu, da sich aus ihm allein alle anderen Eigenschaften der Kegelschnitte ableiten lassen. Das oben entwickelte Prinzip ist indessen einer weitgehenden Verallgemeinerung fähig. Gerade so, wie man ein Sechseck in drei Punktepaare gruppieren kann, die auf den Seiten eines Dreiecks liegen, kann man auf den letzteren drei Gruppen von n Punkten ($n = 2, 3, \ldots$) annehmen, entsprechend im Raume auf den sechs Kanten eines Tetraeders, resp. auf den vier Kanten eines windschiefen Vierecks, sechs resp. vier Gruppen von je n Punkten, usf.; stets existiert eine der obigen Identität $A \equiv B$ analoge mit analogen Schlüssen (für Kurven, Flächen n^{ter} Ordnung, usf.), und die unbegrenzte Reihe dieser Identitäten läßt sich wiederum einem einzigen Typus unterordnen, der sie alle umfaßt.

Von diesem *Gruppierungsstandpunkt* aus erfährt der Pascalsche

Satz eine ganz andere Beleuchtung, als bei der gewöhnlichen Auffassung; *er bildet nur die erste Stufe einer nach vielfacher Richtung hin beliebig ausdehnbaren „Pascalschen Geometrie."*[1])

Derartiger tiefgreifender Typen lassen sich in der Geometrie noch manche aufbauen; es sei etwa an die Theorie der orthogonalen Substitutionen erinnert, ferner an die, eine ungeahnte Fülle von geometrischen Eigenschaften einschließende Figur des einer Fläche zweiter Ordnung ein- resp. umbeschriebenen Tetraeders, weiter an die Lehre von den Ausartungen eines Gebildes zweiter Ordnung, u. a. m.

Leider steht zurzeit eine in dieser Richtung systematisch fortschreitende Behandlung der Geometrie noch aus; danach wäre jeder Satz einer gewissen Identität *unterzuordnen*, woraus sein erkenntnistheoretischer *Inhalt* als einzelnes Glied einer unendlichen Kette gleichberechtigter Sätze unmittelbar entspränge.

Es gibt manche Mathematiker, die eine derartige Entwicklung der Geometrie mit einer gewissen Herablassung als eine „*formale*" kennzeichnen; ohne es zu wollen, sprechen sie damit eine nicht geringe Anerkennung aus, da sich gerade auf diesem Wege eine ungekünstelte Einordnung der geometrischen Wahrheiten in das System der Kantschen Erkenntnislehre vollziehen läßt.

Gehen wir nunmehr zu einem grundlegenden Typus aus der Arithmetik und Analysis über, zu der Theorie der *Irrationalzahlen* (allgemeiner, von Grenzwerten überhaupt). Die bekanntesten Beispiele sind ja jedem geläufig; es sind die in kleineren oder größeren Tafeln vereinigten Logarithmen der natürlichen Zahlen; diese Logarithmen brechen aber, wie wohl kaum zu bemerken nötig ist, nicht etwa an der betreffenden Stelle ab, sondern sind unbegrenzt fortsetzbare Dezimalbrüche. Eine für die Theorie der irrationalen Größen bessere Darstellung wird allerdings durch die Kettenbrüche geliefert; jeder unbegrenzte (regelmäßige) Kettenbruch besitzt als Wert eine bestimmte irrationale Zahl und umgekehrt; oder mit anderen Worten, jede Irrationalzahl ist äquivalent einer bestimmten unbegrenzt fortsetzbaren Reihe natürlicher Zahlen, aber auch umgekehrt repräsentiert jede, noch so willkürliche, unbegrenzt fortsetzbar gedachte *Anordnung* natürlicher Zahlen (wobei beliebige Wiederholungen gestattet sind) eine bestimmte Irrationalität. Man kann sich aber auch eine andere, besonders für Anwendungen geeignetere Auffassung bilden. Danach drückt jeder Satz über Irrationalzahlen eine gewisse endliche Relation zwischen ge-

1) Siehe die Abhandlung des Verfassers, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 9_1 (1901), S. 91—99.

wöhnlichen Brüchen aus, nur daß diese Relation nicht genau, sondern bloß *angenähert* gilt. Man ist aber imstande, diese Beziehung zwischen Brüchen in unbegrenzt viele Formen zu kleiden, für jede Form den *Fehler*, d. i. die Abweichung von der Genauigkeit, in gewisse Grenzen einzuschließen. Unsere Anschauung ist indessen nicht fähig, mit einer derartigen Menge im wesentlichen gleichwertiger Sätze gleichzeitig zu operieren. Man begnügt sich daher mit einem *Repräsentanten*, den man so wählt, daß man sich den Fehler bereits unter eine Genauigkeitsgrenze von genügender Kleinheit herabgedrückt denkt. Wenn man daher von der *Gleichheit* zwischen Irrationalitäten spricht, so ist das nur als eine sprachliche *Abkürzung*, eine Art *Stenographie* zu verstehen, indem man auf die Angabe des Fehlers, als etwas Unwesentliches, verzichtet. Man nimmt gewisse Teile für das Ganze und gibt doch diesen Teilen Benennungen, die den Eindruck des Ganzen und damit von etwas *Neuem*, hervorrufen. Ein Planet bewegt sich in einer Ellipse, wenn man von den verhältnismäßig geringfügigen Störungen durch andere Himmelskörper absieht.

Wenn man nun aber den Begriff der *Gleichheit*, auf dem doch das Rechnen mit Irrationalitäten in letzter Linie beruht, schärfer ins Auge faßt, so erkennt man wieder die Unterordnung unter unser allgemeines Gruppierungsprinzip. Nach der üblichen Auffassung definiert man zwei Größen als *gleich*, wenn ihre *Differenz* den Wert (genauer Grenzwert) *Null* besitzt. In vielen Gebieten der Analysis ist es aber zweckmäßiger, unter zwei gleichen Größen solche zu verstehen, deren *Quotient* den Wert *Eins* hat. Offenbar kommt diese zweite Definition auf die erste zurück, wenn man statt mit den Größen selbst, mit ihren *Logarithmen* operiert. Dieser Gedanke läßt sich verallgemeinern. Es sei $f(x)$ eine, wenn auch an gewisse Beschränkungen gebundene, willkürliche Funktion einer variabeln Größe x, so erhält man den allgemeineren Begriff der *Gleichheit* zweier Größen a, b durch die Festsetzung $f(a) = f(b)$. Der Analysis stehen die Hilfsmittel zu Gebote, wenn es erforderlich erscheint, den allgemeineren Begriff auf den ursprünglichen speziellsten $(a = b)$ zurückzuführen, d. h. die Differenz $f(a) - f(b)$ mit der Differenz $a - b$ zu vergleichen. Aber gerade durch die Beibehaltung einer solchen Funktion $f(x)$ *gruppieren* sich die Sätze über Irrationalitäten, vom Standpunkt der Erkenntnistheorie aus, nach dem spezielleren oder allgemeineren Charakter der Funktion $f(x)$. Oder anders ausgedrückt, je nach Auswahl der Funktion $f(x)$ nimmt ein und derselbe Satz eine unbegrenzte Reihe von stets *neu* erscheinenden Einkleidungen an.

Auf einen letzten Typus von Erscheinungen, der einer der neuesten Schöpfungen der Mathematik angehört, können wir seiner subtilen

Natur halber nur kurz hindeuten, trotzdem gerade er eine der schönsten Betätigungen unserer Gesamtanschauung ergibt. Es sind das die G. Cantorschen *transfiniten* Zahlen.[1]) Nach der einfachsten Erklärung sind die transfiniten (oder überendlichen) Zahlen nichts anderes, als die verschiedenen denkbaren *Anordnungen* der natürlichen Zahlenreihe. Die Berechtigung, diese Anordnungen als wirkliche, wenn auch völlig andere „Zahlen" anzusprechen, entspringt der Möglichkeit, einmal bestimmte, logisch unanfechtbare *Erzeugungsprinzipien* für sie zu bilden, andrerseits sie logischen Verknüpfungsgesetzen zu unterwerfen, die in den wesentlichsten Punkten mit den elementaren arithmetischen Verknüpfungen (Addition, Multiplikation, Potenzierung usw.) übereinstimmen.

Wer davor zurückschrickt, Anordnungen von unbegrenzt vielen Elementen vorzunehmen, braucht nur daran erinnert zu werden, daß schon ein *einziges* Ding zu einer Reihe unbegrenzt vieler Veranlassung geben kann; der Umstand, daß ich dieses Ding denke, kann bereits als ein zweites Ding angesehen werden, das Denken dieses Umstandes als ein drittes Ding, usf.[2])

G. Cantor[3]) zieht es vor, von zwei verschiedenen Dingen auszugehen; ihre gedankliche Zusammenfassung repräsentiert ein drittes, die Zusammenfassung des letzteren mit einem der beiden ersteren ein viertes, fünftes usf. Stets erscheinen *neue* Dinge, die doch in den alten schon vorhanden waren.

Aber die neuere Mathematik ist in der glücklichen Lage, die Schwierigkeiten, die durch die in Rede stehenden Gruppierungen unbegrenzt vieler Elemente entstehen, in vielen Fällen auf andere Weise zu überwinden. Ein derartiges System von Objekten (Zahlen, Größen, Funktionen, geometrischen Gebilden, überhaupt Operationen) wird nach Maßgabe bestimmter Forderungen auf eine *endliche* Anzahl von *„Klassen"* zurückgeführt, und diese Klassen, die geradezu das ursprüngliche System zu ersetzen imstande sind, werden ihrerseits analogen Gruppierungen unterworfen.

Indem wir den Zyklus dieser Erwägungen hiermit abbrechen, wollen wir nunmehr einem Einwande begegnen, den ein kritischer Leser bei sich schon erhoben haben wird. Danach erscheint unsere

---

1) Siehe etwa den Artikel „Mengenlehre" von A. Schoenflies, in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, Heft 2 (1899), S. 184 f.

2) Vgl. R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1887, 2. Aufl. 1893.

3) Nach einem vor der mathematischen Sektion der Naturforscherversammlung in Kassel (September 1903) gehaltenen Vortrage.

Auffassung im kleinen, d. h. im Gebiete der Mathematik, als das, was man im großen unter einer *rein mechanischen* Weltanschauung zu verstehen pflegt. Wenn wirklich alles darauf hinausläuft, daß sich nur gewisse Elemente nach gewissen Vorschriften gruppieren, wo bleibt da die persönliche Schöpfungskraft des Forschers? Wird nicht die Mathematik dadurch eine Wissenschaft des Selbstverständlichen, was um so merkwürdiger wäre, als sie allgemein als eine Wissenschaft des Schwerverständlichen gilt? [1])

Um gleich die Hauptantwort zu geben: allerdings ist die Mathematik auf der einen Seite in ihren deduktiven Beweisen eine logische *Wissenschaft;* andrerseits aber ist sie im induktiven Aufbau der Beweise, im Herausgreifen der wesentlichen Momente, in der Gestaltungsfähigkeit der Formen ebenso sehr eine ästhetische *Kunst*.

Wollte man aber fragen, was denn in einer einzelnen Kunstschöpfung, sei sie ein Gemälde oder eine Statue oder ein Bauwerk, als *„neu“* zu erklären wäre, so würde sich schwerlich eine befriedigende Antwort erteilen lassen; der subjektive künstlerische Geschmack, die gestaltende Phantasie wird immer ein Imponderabile bleiben.

Glücklicherweise erlaubt die analoge Frage in dem begrenzteren Gebiet der Mathematik eher eine Lösung, da sich hier, wenigstens in vielen Fällen, der Geschmack, wenn man so sagen darf, durch Zahlen, oder doch durch *quantitative* Momente fixieren läßt.

Wenn wir der Frage näher treten, nach welchen hervorstechenderen Prinzipien die *Auswahl* bei den verschiedenerlei Gruppierungsmodalitäten vor sich geht, so müssen wir uns wiederum auf einzelne Erscheinungstypen beschränken.

Ein Haupttypus ist sicher der, daß man von vornherein die Probleme so stellt, daß ein *Minimum* von Lösungen eintritt, oder daß ein gewisser Ausdruck einen *minimalen* (resp. *maximalen*) Wert erhält; jedes Ergebnis dieser Art gewährt dem Geiste einen ästhetischen Genuß. Auf die das ganze Gebiet der Mathematik durchziehenden Aufgaben über Minima (resp. Maxima) von Funktionen kann hier nur hingewiesen werden. [2])

---

1) Siehe A. Pringsheim, „Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik“. Rede, gehalten in der Münchener Akademie der Wissenschaften, 14. März 1904.

2) Ein lehrreiches Beispiel dieser Art bietet die sogenannte „neuere Dreiecksgeometrie“. Das Chaos der Sätze dieses Gebietes läßt sich dadurch ordnen, daß man die Sätze klassifiziert je nach der Natur der *Funktion*, die bei dem betreffenden Satze ein Minimum (resp. Maximum) wird. Es ist aber wohl zu beachten, daß diese erkenntnistheoretisch einfache Einteilung keineswegs auch die

Im besonderen gibt es große Klassen mathematischer Aufgaben, die ihren Ausdruck in algebraischen oder transzendenten Gleichungssystemen finden, denen eine aber auch nur *eine* Lösung zukommt, und hier zerlegt sich die Schwierigkeit von selbst in zwei solche: einmal ist überhaupt zu zeigen, daß eine einzige Lösung der gemeinten Art wirklich *existiert* (logisches Moment), sodann aber ist die Lösung auch zu *konstruieren* (künstlerisches Moment). Dies Doppelprinzip wird sogar auf die Aufstellung von *Definitionen* übertragen; nach Kronecker[1]) soll eine Definition nicht nur logisch einwurfsfrei sein, sondern man soll auch imstande sein, eine begrenzte Reihe von *Operationen* anzugeben, mit deren Hilfe die in der Definition auftretenden neuen Merkmale erst als wirkliche Gebilde mit Leib und Seele geschaffen werden.

In der Funktionentheorie und mathematischen Physik ist oft der Angelpunkt einer ganzen Entwicklung die Frage nach der *Existenz* und *Eindeutigkeit* einer gewissen Lösung, zumeist eines Systems partieller Differentalgleichungen, wobei aus einer zuvörderst unbegrenzten Anzahl von Lösungen diejenige herauszuschälen ist, die noch einer oder mehreren Nebenbedingungen genügt.

Aber auch schon in der elementaren Geometrie und Algebra übt das in Rede stehende Prinzip einen maßgebenden Einfluß aus. Der hervorragendste Satz dieser Art, der auf die verschiedensten Gebiete der Algebra, Zahlentheorie und Funktionenlehre ausdehnbahr ist, ist der Euklidische Fundamentalsatz der eindeutigen *Zerlegbarkeit* einer natürlichen Zahl in Primfaktoren. Ferner besitzt zwar eine Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln, man ist aber imstande, jede einzelne derselben von den anderen abzusondern und sie selbständig zu charakterisieren; das Entsprechende gilt von den mn Schnittpunkten zweier ebener algebraischer Kurven m^{ter} resp. n^{ter} Ordnung usf.

Gerade in der Algebra und Geometrie wird das genannte Prinzip der Eindeutigkeit einer besonders fruchtbaren Spezifikation unterworfen: man fragt nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein System von Gleichungen, dem im allgemeinen *keine* gemeinsame Lösung zukommt, im besondern eine (aber auch nur eine)

---

für eine mathematische Durchführung zweckmäßigste ist. Denn die im Laufe der Entwicklung ausgebildeten Rechnungsalgorithmen und geometrischen Konstruktionsmethoden sind unter dem Einfluß ganz anders gearteter Momente entstanden.

1) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Festschrift, Berlin 1882, § 4. Dedekind, in der S. 298 zitierten Schrift (S. 2) läßt auch eine unbegrenzte Anzahl von Operationen zu.

solche besitzt, oder in geometrischem Gewande, wann sich eine gewisse Reihe gleichartiger Gebilde im besondern eines gemeinsamen „Schnittgebildes“ erfreut.

So gibt es ausgedehnte Gebiete der Geometrie, in denen stets als ein neuer Satz proklamiert wird, wenn drei oder mehr Punkte in einer Ebene auf *einer* Geraden liegen, drei oder mehr Geraden sich in *einem* Punkte schneiden, vier oder mehr Punkte auf einem Kreise liegen, sechs oder mehr Punkte auf einem Kegelschnitte usf., und entsprechend bei räumlichen Gebilden. Alle derartigen Sätze finden dann wiederum ihr analytisches Äquivalent in gewissen Identitäten, wie schon oben hervorgehoben wurde, und werden dadurch zu größeren oder kleineren wohl abgegrenzten Gruppen zusammengefaßt.

Kehren wir nochmals einen Augenblick zu dem allgemeineren Begriffe eines *Minimums* zurück, so möchten wir noch betonen, wie dieser Begriff auch auf die Vereinfachung der *Beweise* einzuwirken geeignet ist. Die meisten, tiefer gelegenen Sätze der Mathematik sind ursprünglich auf mühsamem, eine lange Kette von Schlußreihen durchlaufenden Wege abgeleitet worden. Die fortschreitende Entwicklung der Wissenschaft drängt aber dazu, diese Schlußreihen durch solche von zunehmender Kürze und Bündigkeit zu ersetzen, man ist erst befriedigt, wenn ein gewisses *Minimum* von Schlüssen erreicht ist, das der geistigen Anschauung gestattet, den Beweis als ein Ganzes zu umfassen, bis in der Tat das Ergebnis *das Ideal der Selbstverständlichkeit* gewonnen hat. Wie wäre es sonst möglich, sich bei der überwuchernden Fülle von Einzelheiten noch ein Verständnis für den Zusammenhang des Ganzen zu bewahren?

So wird das Prinzip des Minimums zugleich einer der wirksamsten Hebel in der mathematischen Pädagogik.

Ein anderer ästhetischer Typus ist der der *Symmetrie* mathematischer Gebilde. Es sei z. B. an die regulären Polygone und Polyeder erinnert; halbreguläre Gebilde und ähnliche entstehen durch geeignete „Kombination“ rein regulärer. Die an sich so einfache Theorie der regulären Polygone nimmt, wenn man wiederum die Frage nach der wirklichen Ausführbarkeit mit den einfachsten Mitteln — Konstruktion mit Lineal und Zirkel, d. i. Auflösung von Gleichungen ersten und zweiten Grades — erhebt, einen ungeahnten Umfang an, sie hat u. a. der Zahlentheorie ganz neue Bahnen gewiesen. Das *symmetrischste* krummlinige Gebilde der Ebene ist der Kreis; die analoge Frage nach der Konstruktion des Kreisumfanges (oder auch des Kreisinhaltes) mit Lineal und Zirkel hat die Geometer jahrtausendelang beschäftigt, bis sie in der neuesten Zeit ihre Erledigung gefunden hat. Wenn diese

Erledigung auch eine negative ist, d. h. nur die *Unmöglichkeit* der gewünschten Konstruktion dartut, so hat sie dafür die Analysis wesentlich vertieft und erweitert.

Im Raume hat die Frage nach den *Drehungen*, die die regulären Körper mit sich zur Deckung bringen — also im Grunde wiederum nur eine rein kombinatorische Frage — einen tiefen Zusammenhang jener Körper mit scheinbar ganz abseits liegenden Gebieten aus der Algebra und der Theorie der linearen Differentialgleichungen enthüllt.

Noch mehr wirkt das Prinzip der Symmetrie an seiner eigentlichen Stelle; die Theorie der symmetrischen ganzen Funktionen ist der Schlüssel der ganzen Algebra geworden. Hier tritt abermals ein neues Moment hinzu, das sich spezifisch mathematisch ausbauen läßt, die Methode der *Symbolik*. Man geht von gewisssn einfachsten Elementen aus, die aber an sich nur *Zeichen* sind und erst in gewissen arithmetischen Verbindungen zu realen Größen führen. Das ist die „*symbolische Formentheorie*". Aber diese Verbindungen sind selbst an das Gesetz der Symmetrie gebunden und führen wiederum zu identischen Umformungen, die nur jeweils der geeigneten Deutung und Verwertung harren.

Die Rolle der *Identitäten* überhaupt läßt sich jetzt von allgemeinerem Gesichtspunkt aus erfassen und verstehen, wenn man das Prinzip des Minimums mit dem der Symmetrie verknüpft. Eine Identität läßt sich immer auf die Form eines, in einer Reihe von Elementen symmetrischen Ausdrucks bringen, dessen absoluter Wert zum kleinstmöglichen Minimum, nämlich zur Null geworden ist. Andrerseits läßt sich aber auch jede Identität, und zwar in mannigfaltiger Art, auf die Form der identischen Gleichheit *zweier* Ausdrücke bringen; so oft es nun gelingt, beide Ausdrücke *unabhängig* voneinander in irgendeinem Gebiete zu deuten, hat man einen „*neuen*" Satz gefunden. Offenbar läßt sich das darinliegende Evolutionsprinzip leicht dahin verallgemeinern, daß es auch in andern Wissenschaften mit Erfolg verwendet werden kann (wie es denn in der Tat oft so verwendet wird); so oft man zu einer und derselben Erscheinung auf zwei verschiedenen Wegen gelangen kann, hat man sein Erkenntnisgebiet erweitert.

Ein dem Prinzip der Symmetrie verwandtes Prinzip ist das eines „*geschlossenen Systems*", oder, wie man in der Mathematik sagt, einer „*Gruppe*".

Unter einer Gruppe versteht man allgemein ein System, einen Komplex von irgendwelchen gleichartigen (mathematischen) *Operationen* von der ausgezeichneten Besonderheit, daß die hintereinander erfolgte Ausführung irgend zweier der Operationen mit einer dritten Operation des Komplexes gleichwertig ist, oder genauer gesagt, durch eine solche ersetzt werden kann. Das einfachste Beispiel aus der Geometrie ist das System der Drehungen einer Geraden in einer Ebene um einen festen Punkt; es ist einleuchtend, daß die sukzessive Drehung um zwei Winkel α, β zu demselben Ergebnis führt, wie die einzige Drehung um dem Winkel $\alpha + \beta$.[1])

Man kann mit einigem Recht behaupten, daß der Inhalt der hervorragendsten Sätze der Mathematik dem Gruppenbegriff untergeordnet werden kann. Nicht wenig trägt dazu bei, daß man einen systematischen *Algorithmus* für die Handhabung des Gruppenbegriffes entwickelt hat, der zu symbolischen Identitäten führt, deren Realisierung nur der geeigneten konkreten *Bilder* bedarf.

Als einen letzten Typus in der Aufzählung von Auswahlmotiven führen wir die *Methode der Übertragungsprinzipien* an. Diese Methode bringt die uns schon wiederholt entgegengetretene Erscheinung in ein wissenschaftliches System, daß der Fortschritt der Wissenschaft wesentlich dadurch bedingt ist, daß man eine möglichst große Anzahl äußerlich ganz verschiedenartiger, innerlich aber verwandter Sätze auf eine *einzige* Erkenntnisquelle zurückzuführen vermag. Umgekehrt erwächst daraus eine subjektive, unbegrenzt ausdehnbare *Erzeugungsfähigkeit*, einen logisch fixierten und in seiner grundlegenden Bedeutung erkannten Satz auf immer andere und andere Gebiete zu „übertragen" („abzubilden"), oder was auf dasselbe hinauskommt, immer andere Anschauungsbilder für ein Substrat herbeizuholen. Beispiele dafür sind bereits oben angeführt worden.[2])

Um ein Bild aus dem Leben zu gebrauchen, verfährt ein Romanschriftsteller, ein Dramatiker nicht anders, wenn er die vielen, in ihrer Mannigfaltigkeit verwirrenden Einzelzüge und Einzelhandlungen einer Person aus deren einheitlich geschlossenem „Charakter" herzuleiten versucht. Es sei dabei an die Schopenhauersche Fortbildung der Kantschen Lehre erinnert, wonach der Charakter das allein Unzerstörbare im Menschen ist, dem alles übrige nur als Bild, als Folie, als Rahmen dient.

Speziell in der Mathematik wird das konsequent gehandhabte „Übertragungsprinzip" immer mehr dazu führen, daß sich die Wissen-

1) Auch dieser Begriff der Gruppe läßt sich auf das Schlußverfahren anwenden, insofern das System der für das Eintreten einer Erscheinung notwendigen Bedingungen die Eigenschaften der Gruppe besitzt.

2) Ein schönes Beispiel aus der Geometrie ist u. a. die stereographische Projektion einer Kugel auf eine Ebene, wobei Kreise in Kreise übergehen und die Winkel erhalten bleiben. Alle Sätze über Kreise und Gerade in der Ebene lassen sich so unmittelbar auf die Kugel übertragen; umgekehrt wird z. B. die Konstruktion von Kristallnetzen auf eine solche in der Ebene zurückgeführt.

schaft auf eine möglichst geringe Anzahl von Fundamentalsätzen konzentriert, die dann an den verschiedenen Einzelgebieten ihre Spiegelung erfahren. Diese Fundamentalsätze stellen dann in gewissem Sinne den zu Anfang nur hypothetisch angenommenen *ursprünglichen* Besitz *apriorischer* Erkenntnisse der Mathematik dar, während die übrigen als — nach den dargelegten Regeln — daraus *abgeleitete* erscheinen.

Es muß eingestanden werden, daß bei dieser Auffassung der Begriff eines ursprünglichen a priori kein fester, sondern vielmehr ein *elastischer*, je nach den Fortschritten der Wissenschaft ausdehnbarer oder aber zusammenziehbarer wird. Es hat indessen den Anschein, als ob gerade hierdurch der Anwendbarkeit der Kantschen Erkenntnisprinzipien auf die einzelnen Wissenschaften ein weiterer Spielraum zugewiesen wird.

Ist bisher von einer wissenschaftlichen und künstlerischen Gruppierungsauswahl des Forschers die Rede gewesen, so soll doch auch eines andersartigen Momentes gedacht werden, das als ein rein menschliches bezeichnet werden muß. Das ist das nicht zu unterschätzende Moment des *Sportes* und der *Mode*. Was Gauß[1]) von der höheren Arithmetik, der Königin aller Wissenschaften, hervorhebt, daß sie ihre Jünger, je eifriger sie sich ihr hingeben, um so mehr bestrickt, gilt analog, je nach der Geschmacksrichtung des einzelnen, von *allen* Einzelgebieten der Mathematik. Hat sich jemand erst in „seinem“ Gebiete eine gewisse Fertigkeit in der Handhabung der spezifischen, gedanklichen und anschaulichen Wendungen angeeignet, so findet er eine naturgemäße Befriedigung darin, diese Fertigkeit zur Virtuosität auszubilden. Der Erfolg wird oft der sein, daß bei diesem steten Graben und Bohren in *einer* Richtung sehr verborgene Wahrheiten ans Licht gefördert werden. Aber auch die Schattenseiten dieses persönlichen Verfahrens liegen auf der Hand; Einseitigkeit und Vernachlässigung des Ganzen erwachsen daraus, sehr zum Schaden der Wissenschaft. Trifft es nun im besondern zu, daß die überwiegende Kultivierung einzelner Disziplinen in den Händen von Autoritäten liegt, so wirkt bei der Mehrzahl der anderen Forscher jener unwiderstehliche Nachahmungstrieb, den man eben als Mode bezeichnet, deren tyrannische Wirkung auf das Kulturleben der Völker zur Genüge erwiesen ist. So kennt die Geschichte der Mathematik Perioden, in denen ausschließlich die Geometrie gefördert ward, andere wieder, in denen das gleiche von der Algebra, von der Analysis galt. Aber auch ganz beschränkte Ge-

1) Disquisitiones arithmeticae, Lipsiae 1801, Praefatio: „illecebris harum quaestionum ita fui implicatus, ut eas deserere non potuerim.“

biete, wie die Kombinatorik im engsten Sinne des Wortes, haben zeitweilig die Mathematik völlig beherrscht. In solchen Zeiten gehen, wie die Erfahrung lehrt, leicht die Früchte früherer Entwicklungsperioden verloren und müssen später mühsam wieder von neuem gewonnen werden.

Wenn wir im obigen den Versuch gemacht haben, die Lehre Kants von den synthetischen Urteilen der Mathematik weiter auszuführen — indem wir die Tätigkeiten der Gruppierung und der Auswahl bei der Gruppierung zugrunde legten —, demnach die Mathematik in ihrem Streben nach neuen Erkenntnissen als eine Art erweiterter Kombinatorik hinzustellen, die sich nicht mehr auf farblose Elemente beschränkt, sondern sich auf lebendige Begriffe, Methoden und Sätze erstreckt, so liegt es nahe, einige Vergleiche mit andern Wissenschaften zu ziehen, wo analoge Strömungen herrschen. Man denke an die *Farbenlehre;* die Physiologie hat nachgewiesen, wie die unbegrenzte Mannigfaltigkeit der verschiedenen Farbennuancen durch geeignete Mischung einiger weniger Grundfarben entsteht.

Ferner sei auf die *Chemie* hingewiesen. Es fehlt zwar bisher der völlige Nachweis, daß die Anzahl der Elemente notwendig eine *begrenzte* sein müsse, da ja selbst bei Annahme des periodischen Systems eine zunehmende Erweiterung nach oben nicht ausgeschlossen wäre; jedenfalls ist man zurzeit imstande, die weitaus größte Anzahl bekannter Verbindungen durch „Gruppierung" einer verhältnismäßig geringen Anzahl von Elementaratomen in befriedigender Weise zu erzeugen. Gewisse physikalische Erscheinungen machen es sogar wahrscheinlich, daß es in Wirklichkeit nur Elementaratome einer *einzigen* Art gibt. Würde die Chemie jemals dahin gelangen, alle Stoffe in Atome eines einzigen Urelementes aufzulösen, so würde sie auch das Ideal einer geometrischen „Kombinatorik" erreicht haben, ja geradezu sich mit einer solchen decken. Endlich sei es auch noch gestattet, auf manche Ähnlichkeiten der Mathematik mit der Darwinschen *Entwicklungstheorie* aufmerksam zu machen. Hier wie dort eine unbegrenzte Anzahl von Erzeugungsmöglichkeiten, deren maßlose Wirkung durch geeignete Gruppierungsauswahl beschränkt wird. Der Kampf ums Dasein läßt sich in der Mathematik gerade wegen der schärferen Umgrenzung der Einzelgebilde besonders deutlich verfolgen. Bei weitem die größte Mehrzahl „neuer" Begriffe und Sätze erweist sich als nicht lebensfähig, weil sie entweder zu eng oder aber zu kompliziert gefaßt sind, zugunsten weniger bleibender, die nicht ihr Wesen von fremden zu erborgen brauchen, sondern selbst die Kraft besitzen, sich eine eigene Welt zu schaffen, die sie als Zentralsonnen mit Licht, Wärme und Leben erfüllen.

Der einphasige Induktionsmotor.

Von J. K. Sumec in Brünn.

Die Induktions- oder Asynchron-Wechselstrommotoren gehören zu den einfachsten und zugleich interessantesten elektrischen Maschinen.[1]) Ihr wesentliches Merkmal besteht darin, daß nur einem der beiden Systeme (gewöhnlich dem festen, dem Stator) die elektrische Energie durch Leitung von außen zugeführt wird, während das andere (meistens das bewegliche, der Rotor) dieselbe ohne materielle Leitungen oder Kontakte, nur durch elektromagnetische Induktion erhält. In dieser Beziehung sind also die Induktionsmotoren dem gewöhnlichen ruhenden Transformator ähnlich, und wird daher im folgenden das von außen gespeiste System *primär,* das induzierte dagegen *sekundär* genannt.

Die Bauart der Induktionsmotoren hat erstens die Forderung zu erfüllen, daß der *magnetische Zusammenhang* beider Systeme möglichst vollkommen ist; daher muß der Luftraum zwischen dem festen und dem beweglichen Systeme möglichst klein und die Wicklungen überdies in Nuten oder Löchern gebettet sein, damit die Eisenflächen selbst einander möglichst nahe kommen. Zweitens muß das *sekundäre* System, da es seine Lage dem primären gegenüber fortwährend ändert, auf seinem ganzen Umfange gleichförmig sein, und zwar sowohl magnetisch bezüglich des Eisenkörpers, als auch elektrisch bezüglich der Wicklung; diese muß nämlich über dem ganzen Umfange gleichmäßig verteilt sein und — damit keine Richtung magnetisch bevorzugt sei — mehrere (gewöhnlich drei) symmetrisch angeordnete in sich geschlossene Gruppen besitzen. Drittens ist bei mehrphasigen Motoren, bei denen ja alle Phasen in gleichem Grade mitwirken, auch das *primäre* System magnetisch und elektrisch gleichförmig ausgebildet; bei einphasigen Motoren bedeckt dagegen die Primärwicklung gewöhnlich nur einen Teil (meist zwei Drittel) des Umfanges, während der übrige Raum für die Anlaß- oder Hilfswicklung (s. weiter) verwendet wird; der primäre Eisenkörper ist aber auch hier gleichförmig ausgebildet.

---

1) Anmerkung der Redaktion. — Ein deutlicher Einblick in die Vorgänge im einphasigen Induktionsmotor ist gerade in den letzten Jahren durch die Arbeiten der Herren Potier, Görges und Sumec geschaffen worden, ohne daß die Ergebnisse dieser Arbeiten schon in die physikalische Literatur übergegangen wären. Wir haben deshalb Herrn Prof. Sumec um eine zusammenfassende Darstellung gebeten. Es dürfte auch jeden Physiklehrer interessieren, an einem instruktiven Beispiel die Anschauungen und Methoden kennen zu lernen, die sich als Handwerkszeug für den Wechselstromtechniker tauglich erwiesen haben.

Der Unterschied zwischen Ein- und Mehrphasenmotor besteht eigentlich nicht etwa in der Konstruktion, sondern in der Betriebsweise; ein gewöhnlicher Drehstrommotor z. B. wird zum Einphasenmotor, sobald man eine der drei Zuleitungen abschaltet.

1. *Vorgänge im sekundären System.* — Ich nehme einen *zwei*poligen Motor an; die magnetische Achse des festen primären Systemes habe die Richtung X, der sekundäre Teil drehe sich im Sinne des Uhrzeigers von X nach Y (Fig. 1).

Sobald der primären Wicklung eine Wechselspannung zugeführt wird, existiert ein wechselnder magnetischer Kraftfluß längs der primären Achse X von solcher Größe und Phase, wie es zur Erzeugung einer der zugeführten Spannung gleichen und entgegengesetzten *EM*-Kraft erforderlich ist. Durch diesen Kraftfluß werden im Rotor zweierlei *Ströme* induziert: durch das Wechseln desselben — ein der Primärwicklung *koaxiales* Stromsystem, durch die Drehung der Rotorwicklung *in* demselben — ein dazu *senkrechtes* im Sinne der Drehung verschobenes Stromsystem. Die magnetisierende Wirkung des ersteren Stromsystemes (längs der Achse X) wird ausgeglichen durch entsprechende Zunahme des Primärstromes, denn der Kraftfluß längs der primären Achse muß — bei beliebiger Belastung — der Klemmenspannung proportional bleiben; das zweite Stromsystem ist dagegen von einem entsprechenden Kraftflusse längs der Achse Y begleitet.

Beim Lauf existieren also zwei *Felder* im Motor: das sogenannte *Hauptfeld* in der Richtung der primären Achse und das *Querfeld* senkrecht dazu. Jedes von ihnen beeinflußt die Rotorwicklung einerseits infolge seines Wechselns („statische Induktion"), andererseits infolge der Rotordrehung („dynamische Induktion"). —

Das eben Gesagte gilt für jede beliebige *räumliche* Verteilung der Felder längs des Umfanges sowie für jeden beliebigen *zeitlichen* Verlauf der zugeführten Spannung. Um jedoch die Vorgänge einfach darstellen zu können, wird im folgenden sowohl die räumliche Verteilung der Felder als auch der zeitliche Verlauf der Primärspannung — und folglich auch der Felder — als *sinusförmig* angenommen. Die räumliche Verteilung der Felder ist abhängig von der räumlichen Anordnung der Primärwicklung; wäre dieselbe sinusförmig (vergl. Fig. 1), so wären auch die Felder tatsächlich sinusförmig. Indessen liegt die in der Praxis gebrauchte über $^2/_3$ des Umfanges gleichmäßig verteilte Wicklung

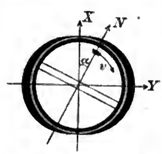


Fig. 1: Ideale Verteilung des Kupfers.

in ihren Wirkungen der sinusförmigen so nahe[1]), daß die folgende Theorie durch die Erfahrung vollkommen bestätigt wird.

Es sei $\omega = 2\pi \times$ Frequenz der zugeführten Spannung = die synchrone Winkelgeschwindigkeit und η der Phasenunterschied zwischen dem Hauptfelde und dem Querfelde; die beiden Felder lassen sich dann ausdrücken, das Hauptfeld zum Ausgangspunkt wählend, durch:

$$(1) \qquad \varphi_x = \Phi_x \sin \omega t, \qquad \varphi_y = \Phi_y \sin(\omega t - \eta).$$

Eine Rotorwindung, deren Normale mit der X-Achse den Winkel α einschließt, enthält bei der angenommenen sinusförmigen Feldverteilung das Gesamtfeld

$$(2) \quad \varphi_\alpha = \varphi_x \cos\alpha + \varphi_y \sin\alpha = \Phi_x \cos\alpha \sin\omega t + \Phi_y \sin\alpha \sin(\omega t - \eta).$$

Die in derselben induzierte EM-Kraft ist, wenn man die jeweilige Winkelgeschwindigkeit des Rotors in Bruchteilen der synchronen Geschwindigkeit ω, nämlich durch $v\omega$ bezeichnet ($v = 1$ beim Synchronismus, $v = 0$ beim Stillstand) und nach $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ ordnet:

$$(3) \qquad \begin{cases} e_\alpha = [-\omega\Phi_x \cos\omega t - v\omega\Phi_y \sin(\omega t - \eta)]\cos\alpha + \\ \quad + [v\omega\Phi_x \sin\omega t - \omega\Phi_y \cos(\omega t - \eta)]\sin\alpha; \end{cases}$$

oder auch:

$$(3\text{a}) \qquad e_\alpha = e_x \cos\alpha + e_y \sin\alpha,$$

wenn man nämlich schreibt:

$$(4) \qquad \begin{cases} e_x = -\omega\Phi_x \cos\omega t - v\omega\Phi_y \sin(\omega t - \eta), \\ e_y = v\omega\Phi_x \sin\omega t - \omega\Phi_y \cos(\omega t - \eta). \end{cases}$$

Die in einer beliebigen Rotorwindung induzierte EM-Kraft läßt sich also in eine dem $\cos\alpha$ und eine dem $\sin\alpha$ proportionale Komponente zerlegen. Ist diese Windung in sich kurzgeschlossen („Kurzschlußanker") und ihr Widerstand gleich r_2, so ist in beliebigem Momente $r_2 i_\alpha = e_\alpha$, d. h. der Strom läßt sich ebenfalls in eine $\cos\alpha$- und eine $\sin\alpha$-Komponente zerlegen:

$$(3\text{b}) \qquad i_\alpha = i_x \cos\alpha + i_y \sin\alpha;$$

mit anderen Worten: *das ganze Strombild des Rotors läßt sich in beliebigem Momente in zwei sinusförmige Strombilder nach den Achsen X und Y zerlegen.*

Die Gleichungen (4) sind dargestellt im Vektordiagramme Fig. 2.[2])

1) Siehe Zeitschrift für Elektrotechnik, Wien 1904, Tabelle S. 204.

2) Görges, Elektrotechnische Zeitschrift, Berlin 1903.

Wählt man die Richtung des Vektors Φ_x nach rechts und die Zeitfolge (= Drehrichtung der Zeitlinie) im Sinne des Uhrzeigers, so resultiert zunächst für die zweite Gleichung $\overline{Ab} = \overline{Ac} + \overline{cb}$ und sodann für die erste $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$.

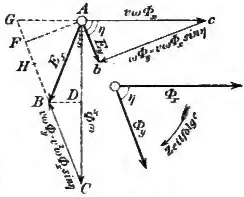


Fig. 2: Diagramm des Rotors.

Dieses Diagramm gewährt eine sehr gute Übersicht über die Vorgänge bei wechselnder Geschwindigkeit: Beim Stillstand ist $Acb = 0$ und $CB = 0$, d. h. $E_y = 0$, $E_x = AC = \omega \Phi_x$; bei zunehmender Geschwindigkeit bewegt sich b auf der Geraden Ab und B auf der Geraden CB, E_y wächst und E_x nimmt ab und bleibt immer mehr zurück; beim Synchronismus wird $Ac = AC$ und B kommt in F, d. h. es wird $Ab \perp AB$ oder $E_y \perp E_x$; über dem Synchronismus bewegen sich b und B auf ihren Geraden immer weiter. —

Zur Bestimmung des *Querfeldes* hat man nach demselben Diagramm:

$$\Phi_y = v \sin\eta\, \Phi_x, \qquad \operatorname{tg}\eta = \frac{\omega \Phi_y}{E_y} = \frac{\omega \Phi_y}{r_2 J_y} = \frac{\omega c_2}{r_2}, \tag{5}$$

wenn man nämlich das Verhältnis des selbsterzeugten Feldes zum erzeugenden Strome allgemein mit c bezeichnet; hier speziell für den Rotor $c_y = c_x = c_2$:

$$c_2 = \frac{\varphi_y}{i_y}. \tag{6}$$

Dieser Koeffizient c_2 ist bei dem angenommenen Kurzschlußanker (jede einzelne Windung in sich geschlossen) identisch mit dem Induktionskoeffizienten des ganzen Rotorstrombildes auf eine Rotorwindung; sonst aber ist c = Induktionskoeffizient : Windungszahl des magnetisierten (induzierten) Systemes.

Die dem Physiker und Mathematiker so geläufigen *Induktionskoeffizienten* sind für den praktischen Konstrukteur wenig geeignet und werden daher von ihm nur selten gebraucht. Zur Bestimmung der Dimensionen der Maschine (der Querschnitte des Eisens und des Wickelraumes) muß er nämlich die *Kraftlinienzahlen* und die *Amperedrahtzahlen* (Amperewindungen) kennen. Nun liefern ihm die Induktionskoeffizienten, wenn er sie anwenden will, Ausdrücke von der Form (z. B. für den primären Stromkreis)

$$L_1 i_1 \simeq z_1^2 i_1 \quad \text{und} \quad M i_2 \simeq z_1 z_2 i_2;$$

wie zu sehen, muß er beide durch z_1 dividieren, um die für ihn passenden, Ausdrücke

$$\frac{L_1}{z_1} i_1 \simeq z_1 i_1 \quad \text{und} \quad \frac{M}{z_1} i_2 \simeq z_2 i_2,$$

zu erhalten; erst *diese* Ausdrücke geben ihm ja die nötigen primären und sekundären *Amperedrahtzahlen* und, mit Rücksicht auf die magnetische Leitungsfähigkeit, auch die *Kraftlinienzahlen.* —

Um über die Größenordnung von η eine Vorstellung zu gewinnen, ist es am besten ein praktisches Beispiel durchzurechnen. — Man habe einen kleinen 4poligen Motor für 50 Perioden, mit 150 mm Rotordurchmesser und 100 mm Länge. Der Rotor besitze am Umfange 50 geschlitzte Löcher mit je einem Kupferstabe von 5 mm Durchmesser $= 19{\cdot}6$ mm². Der einseitige Luftraum zwischen Rotor und Stator sei 0·4 mm.

Die Rechnung ist dann folgende: Eine Rotorwindung umfaßt $^1/_4$ der Rotoroberfläche, also 118 cm²; da aber die Schlitze der Rotor- und Statornuten die Eisenoberfläche beispielsweise um 33 % verkleinern, so bleibt als wirksame (kraftlinienführende) Polfläche

$$S' = 79 \text{ cm}^2.$$

Der auf einen magnetischen Kreislauf (ein Polpaar) fallende Luftweg ist 0·08 cm; der magnetische Widerstand der Eisenteile betrage etwa $^1/_4$ des Luftwiderstandes: der gesamte Widerstand eines magnetischen Kreises ist also gleich demjenigen einer „äquivalenten" Luftstrecke

$$2\delta' = 0{\cdot}1 \text{ cm}.$$

Auf ein Polpaar fallen 25 Rotorstäbe oder $z_2 = 12{\cdot}5$ Rotorwindungen. Bei diesen z_2 Windungen pro Polpaar und $i_y \sin\alpha$ Ampere pro Windung ist die Luftinduktion in Y

$$h_y = \frac{4\pi}{10}\frac{1}{2\delta'}\frac{2}{\pi} z_2 i_y$$

und der gesamte Kraftfluß längs Y, ausgedrückt *in 10^8 Maxwell*:

$$\frac{4\pi}{10}\frac{S'}{2\delta'}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 z_2 i_y \cdot 10^{-8}.$$

Der so berechnete Kraftfluß besteht nur aus Kraftlinien, die vom Rotorstrome erregt in den Stator übergehen. Neben diesen gibt es aber auch Kraftlinien, die sich rund um die Rotorleiter (besonders längs des im Eisen gebetteten Teiles derselben) schließen, ohne die Statorwicklung zu schneiden; ihr Verhältnis zur obigen Kraftlinienzahl sei τ_2. Das gesamte Querfeld des Rotors beträgt also:

$$\varphi_y = (1 + \tau_2)\frac{4\pi}{10}\frac{S'}{2\delta'}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 z_2 i_y \cdot 10^{-8}$$

und demnach der Magnetisierungskoeffizient desselben:

$$c_2 = \frac{\varphi_y}{i_y} = (1 + \tau_2)\frac{4\pi}{10}\frac{S'}{2\delta'}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 z_2 \cdot 10^{-8}. \tag{6a}$$

Nimmt man $\tau_2 = 3\,\%$ an, so folgt hieraus:

$$\omega c_2 = 2\pi \cdot 50 \cdot 1{\cdot}03 \cdot \frac{4\pi}{10}\frac{79}{0{\cdot}1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 12{\cdot}5 \cdot 10^{-8} = 0{\cdot}0163.$$

Die Länge einer Rotorwindung ist mit Rücksicht auf die Seitenverbindungen beiläufig 0·5 m, also ihr Widerstand in warmem Zustande:

$$r_2 = 0{\cdot}02\,\frac{0{\cdot}5}{19{\cdot}6} = 0{\cdot}00051.$$

Daraus resultiert:

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{\omega c_2}{r_2} = 32. \qquad \eta = 88{\cdot}2^0.$$

2. *Mechanische Größen.* — Der durch Bewegung bewirkte Energieumsatz vom Elektrischen ins Mechanische oder umgekehrt, wird in jedem Augenblick gemessen durch das Produkt der durch die Bewegung induzierten EM-Kraft und des Stromes. Die in einer Rotorwindung durch Bewegung induzierte EM-Kraft ist nach Gl. (2):

$$e_{\alpha v} = -\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} = (\varphi_x \sin\alpha - \varphi_y \cos\alpha)v\omega,$$

während dort der Strom fließt:

$$i_\alpha = i_x \cos\alpha + i_y \sin\alpha;$$

folglich ist die momentane mechanische Arbeit jener Rotorwindung:

$$-e_{\alpha v} i_\alpha dt = (\varphi_y \cos\alpha - \varphi_x \sin\alpha)(i_x \cos\alpha + i_y \sin\alpha)v\omega \cdot dt.$$

Führt man die Multiplikation aus und summiert über den Rotorumfang (z_2 Windungen), so fallen Glieder mit $\cos\alpha \sin\alpha$ aus, und es bleibt als die ganze momentane mechanische Arbeit

$$dA = \Sigma(\varphi_y i_x \cos^2\alpha - \varphi_x i_y \sin^2\alpha)v\omega dt = \tfrac{1}{2} z_2(\varphi_y i_x - \varphi_x i_y)v\omega dt,$$

und das *momentane Drehmoment*, gleich Arbeit durch Winkel:

$$D_{\text{mom}} = \frac{dA}{v\omega dt} = \tfrac{1}{2} z_2(\varphi_y i_x - \varphi_x i_y). \tag{7}$$

D. h. das Drehmoment resultiert aus der Zusammenwirkung des Querfeldes mit den X-Strömen und des Hauptfeldes mit den Y-Strömen; die X-Ströme werden vom Querfelde *im Sinne* der Drehung angezogen, ergeben also ein *positives* Drehmoment: die Y-Ströme werden dagegen vom Hauptfelde *entgegen* der Drehrichtung angezogen, ergeben also ein *negatives* Drehmoment. —

Für den angenommenen *sinusförmigen* Wechselstrom kann man schreiben, indem man die Phasenverspätung der X-Ströme gegenüber dem Hauptfelde (Fig. 2) mit ξ bezeichnet:

$$D_{\text{mom}} = \tfrac{1}{2} z_2[\Phi_y J_x \sin(\omega t - \eta)\cdot\sin(\omega t - \xi) - \Phi_x J_y \sin\omega t \cdot \sin(\omega t - \eta)], \tag{7a}$$

oder nach Umformung laut $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$:

$$\left\{\begin{aligned} D_{\text{mom}} = \tfrac{1}{4} z_2[\Phi_y J_x \{\cos(\xi - \eta) - \cos(2\omega t - \xi - \eta)\} - \\ - \Phi_x J_y \{\cos\eta - \cos(2\omega t - \eta)\}]. \end{aligned}\right. \tag{7b}$$

D. h. beide Komponenten des Drehmomentes pulsieren mit doppelter Frequenz des Feldes um bestimmte Mittelwerte. Das *mittlere Drehmoment* selbst ist aber die Summe dieser Mittelwerte:

$$D = \tfrac{1}{4} z_2 [\Phi_y J_x \cos(\xi - \eta) - \Phi_x J_y \cos \eta]. \tag{8}$$

Nach Fig. 2 ist nun:

$$\Phi_y = v \Phi_x \sin \eta , \quad J_y = \frac{v\,\omega}{r_2} \Phi_x \cos \eta ,$$

$$J_x \cos(\xi - \eta) = \frac{CF - CB}{r_2} = \frac{\omega}{r_2} \Phi_x \sin \eta (1 - v^2);$$

durch Einsetzung dieser Werte in Gl. (8) erhält man:

$$\left\{\begin{aligned} D &= \frac{1}{4} \frac{z_2}{r_2} \omega \Phi_x^2 v [(1 - v^2) \sin^2 \eta - \cos^2 \eta] = \\ &= \frac{1}{4} \frac{z_2}{r_2} \omega \Phi_x^2 v [(2 - v^2) \sin^2 \eta - 1]. \end{aligned}\right. \tag{8a}$$

Aus dieser Gleichung folgt:

1) Das Drehmoment wird Null beim Stillstande ($v = 0$) und bei der Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{1 - 1/\mathrm{tg}^2 \eta} = \sqrt{2 - 1/\sin^2 \eta}$. Der Einphasenmotor kann daher als solcher nicht anlaufen (siehe weiter). Die Leerlaufsgeschwindigkeit v_0 liegt etwas unter dem Synchronismus; beim früher gerechneten Motor ist z. B. $v_0 = \sqrt{1 - 1/32^2} = 1 - 0{\cdot}0005$, derselbe würde also um $0{\cdot}0005 \times 1500 = 0{\cdot}75$ Touren pro Minute hinter dem Synchronismus zurückbleiben, auch wenn keine Reibung (d. h. ein vollkommener *Leer*lauf) vorhanden wäre.

2) Wäre das Hauptfeld Φ_x konstant, so würde das Drehmoment bei einer Geschwindigkeit, welche der Bedingung genügt

$$\frac{d}{dv} v [(1 - v^2) \sin^2 \eta - \cos^2 \eta] = 0 ,$$

d. h. bei

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - 1/\mathrm{tg}^2 \eta} = 0{\cdot}577 \cdot v_0$$

ein Maximum erreichen. Setzt man v_m in Gleichung (8a) ein, so erhält man für dieses Maximum

$$D_{\max} = \tfrac{1}{4} z_2 \omega \Phi_x^2 \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{(2 \sin^2 \eta - 1)^{1{\cdot}5}}{r_2 \sin \eta} .$$

Das Hauptfeld Φ_x nimmt jedoch infolge der magnetischen Streuung, wie im weiteren gezeigt werden soll, bei abnehmender Geschwindigkeit ebenfalls ab; daraus folgt aber, daß ein Maximum des Drehmomentes bei einer *höheren* Geschwindigkeit, als hier berechnet, auftritt.

3) Bei einer Vergrößerung des Rotorwiderstandes wird $\mathrm{tg}\, \eta$ und $\sin \eta$ kleiner, *das $D_{\max}$ nimmt schnell ab* und die Leerlaufsgeschwindig-

keit wird immer geringer; wird $r_2 = \omega c_2$ d. h. $\operatorname{tg}\eta = 1$ und $\sin\eta = \sqrt{1/2}$, so wird $v_0 = v_m = 0$ und $D_{\max} = 0$, d. h. der Leerlauf fällt mit dem Stillstande zusammen, der Motor kann überhaupt kein Drehmoment mehr entwickeln (vergl. weiter Fig. 7). —

Mechanische Leistung. — Für dieselbe folgt aus Gleichung (8a):

(10) $$P_{\text{mech}} = v\omega D = \frac{1}{4}\frac{z^2}{r_2}(\omega\Phi_x)^2[v^2(1-v^2)\sin^2\eta - v^2\cos^2\eta].$$

In der Fig. 2 läßt sich die mechanische Leistung wie folgt ablesen: Die mechanische Leistung der X-Ströme ist proportional

$$AB \cdot BC \cdot \cos(ABC) = FB \cdot BC;$$

der Arbeitsverbrauch der Y-Ströme (gleich der Stromwärme derselben) ist proportional

$$Ab \cdot Ac \cdot \cos(bAc) = \overline{Ab}^2;$$

weil aber $Ab = v \cdot AF$, $v^2 = BC : FC$ und $\overline{AF}^2 = FG \cdot FC$ ist, so ist $\overline{Ab}^2 = FG \cdot BC$ und somit die resultierende mechanische Leistung

(10a) $$P_{\text{mech}} \simeq (FB - FG)BC \simeq HB \cdot BC.$$

Stromwärme im Rotor. — Dieselbe ist pro Windung und Zeitelement:

$$r_2 i_a^2 dt = r_2(i_x \cos\alpha + i_y \sin\alpha)^2 dt.$$

Bei der Summierung über den Ankerumfang fallen Glieder mit $\cos\alpha\sin\alpha$ weg, und es bleibt als momentane Rotorwärme:

$$r_2\sum(i_x^2\cos^2\alpha + i_y^2\sin^2\alpha)\cdot dt \doteq \tfrac{1}{2}z_2 r_2(i_x^2 + i_y^2)dt.$$

Sind i_x und i_y Sinusfunktionen der Zeit, so ist die mittlere Stromwärme pro Sekunde

(11) $$W = \tfrac{1}{4}z_2 r_2(J_x^2 + J_y^2).$$

Nach Fig. 2 ist nun

$$(r_2 J_x)^2 = BF^2 + AF^2 = (\omega\Phi_x)^2[(1-v^2)^2\sin^2\eta + \cos^2\eta)],$$
$$(r_2 J_y)^2 = (\omega\Phi_x)^2 v^2\cos^2\eta;$$

folglich die Stromwärme:

(11a) $$W = \frac{1}{4}\frac{z_2}{r_2}(\omega\Phi_x)^2[(1-v^2)^2\sin^2\eta + (1+v^2)\cos^2\eta].$$

Wattverbrauch des Rotors. — Derselbe ergibt sich aus Gleichung (10) und (11a):

(12) $$P_{\text{elektr}} = P_{\text{mech}} + W = \frac{1}{4}\frac{z_2}{r_2}(\omega\Phi_x)^2(1 - v^2\sin^2\eta).$$

Dieser Ausdruck resultiert auch direkt aus folgender Erwägung: Die Zuführung der Energie seitens des Stators geschieht durch die „statische“ Induktion des Hauptfeldes. Die EM-Kraft jener Induktion ist in einer Rotorwindung

$$-\,\omega\,\Phi_x \cos\omega t\cdot\cos\alpha\,,$$

und der gleichzeitige Strom darin

$$i_\alpha = i_x \cos\alpha + i_y \sin\alpha.$$

Bildet man das Produkt und summiert über den Ankerumfang, so erhält man, da die Glieder mit $\cos\alpha \sin\alpha$ wieder wegfallen, als momentane Arbeitsaufnahme des Rotors:

$$\sum\omega\,\Phi_x \cos\omega t\cdot J_x \sin(\omega t-\xi)\cdot\cos^2\alpha\cdot dt \doteq \tfrac{1}{2} z_2\,\omega\,\Phi_x J_x \cos\omega t\cdot\sin(\omega t-\xi)\,dt,$$

oder umgeformt laut $\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$:

$$\tfrac{1}{4} z_2\,\omega\,\Phi_x J_x[\sin\xi + \sin(2\omega t-\xi)]\,dt.$$

Daher die mittlere Wattaufnahme:

$$P_{\text{elektr}} = \tfrac{1}{4} z_2\,\omega\,\Phi_x J_x \sin\xi. \tag{12a}$$

Nun ist nach Fig. 2:

$$r_2 J_x \sin\xi = AD = \omega\,\Phi_x(1 - v^2 \sin^2\eta)\,,$$

und daher P_{elektr} identisch wie oben.

Vergleich mit einem Mehrphasenmotor. — Beim Mehrphasenmotor wird auch das Querfeld von außen erregt; es hat hier dieselbe Größe wie das Hauptfeld und ist um $\eta = \pi/2$ in der Phase zurück; infolgedessen ist hier nach (4):

$$\begin{aligned} e_x &= -\,\omega\,\Phi \cos\omega t + v\,\omega\,\Phi\cos\omega t = -(1-v)\,\omega\,\Phi\cos\omega t\,,\\ e_y &= v\,\omega\,\Phi\sin\omega t \;\;-\omega\,\Phi\sin\omega t \;\;= -(1-v)\,\omega\,\Phi\sin\omega t. \end{aligned}$$

Das momentane Drehmoment ist nach (7):

$$D_{\text{mom}} = \tfrac{1}{2} z_2(\varphi_y i_x - \varphi_x i_y)\,;$$

wenn man aber die Werte für φ und i einsetzt, so resultiert:

$$D_{\text{mom}} = \frac{1}{2}\frac{z_2}{r_2}(1-v)\,\omega\,\Phi^2 = D\,;$$

d. h. beim Mehrphasenmotor ist das Drehmoment nicht wie beim Einphasenmotor pulsierend, sondern konstant. Es ist Null beim Synchronismus, und nimmt bei abnehmender Geschwindigkeit zu.

Die mechanische Leistung ist

$$P_{\text{mech}} = v\,\omega\cdot D = \frac{1}{2}\frac{z_2}{r_2}(1-v)\,v(\omega\,\Phi)^2,$$

die Rotorstromwärme nach Gleichung (11):

$$W = \frac{1}{4} z_2 R_2 (J_x^2 + J_y^2) = \frac{1}{2} \frac{z_2}{r_2} (1 - v)^2 (\omega \Phi)^2$$

und der gesamte Wattverbrauch des Rotors:

$$P_{\text{elektr}} = P_{\text{mech}} + W = \frac{1}{2} \frac{z_2}{r_2} (1 - v)(\omega \Phi)^2.$$

In nachstehender Tabelle sind die Werte für beide Motorarten einander gegenübergestellt. Für den Einphasenmotor ist zur Vereinfachung $\sin \eta \doteq 1$ und $\cos \eta \doteq 0$ gesetzt; da ferner der Motor im praktischen Betriebe unter normaler Belastung nur wenige Prozente von seiner vollen Geschwindigkeit verliert, so ist auch noch $1 + v \doteq 2$ gesetzt worden. Gewohnheitshalber sind dieselben Werte auch mittels der *Schlüpfung* $s = 1 - v$ ausgedrückt. — Die Tabellenwerte sind, um die betreffende Größe zu erhalten, mit $\frac{1}{2} \frac{z_2}{r_2} (\omega \Phi_x)^2$ zu multiplizieren.

	Mehrphasenmotor	Einphasenmotor	Einphasenmotor nahe synchron $(1 + v \doteq 2)$
Drehmoment $\times\, \omega$	$1-v=s$	$\frac{1}{2}(1-v^2)v = \frac{1+v}{2}(1-v)v$	$(1-v)v=s(1-s)$
Rotorwärme . . .	$(1-v)^2=s^2$	$\frac{1}{2}(1-v^2)^2 = \left(\frac{1+v}{2}\right)^2 2(1-v)^2$	$2(1-v)^2=2s^2$
Mech. Leistung .	$(1-v)v=s(1-s)$	$\frac{1}{2}(1-v^2)v^2 = \frac{1+v}{2}(1-v)v^2$	$(1-v)v^2=s(1-s)^2$
Wattverbrauch . .	$1-v=s$	$\frac{1}{2}(1-v^2) = \frac{1+v}{2}(1-v)$	$1-v=s$

Wenn man also z. B. bei einem zweiphasigen Motor eine Phase abschaltet, so läuft der Motor — falls dabei die Belastung (das zu entwickelnde Drehmoment) nicht geändert wird — mit fast unveränderter Schlüpfung weiter; die Stromwärme im Rotor wird aber dabei doppelt so groß.

Anmerkung. Ein endgültiger Vergleich der Leistungen desselben Modells als Mehr- und Einphasenmotor kann erst nach Untersuchung der Vorgänge im Primärsysteme angestellt werden.

Anlassen des Einphasenmotors. — Beim Stillstande besitzt der Einphasenmotor kein Querfeld (5) und folglich auch kein Drehmoment (8a); um ihn nicht mechanisch antreiben zu müssen, ist man genötigt, ihm künstlich ein Querfeld zu schaffen. — Man versieht zu dem Zwecke den Stator mit einer sogenannten Hilfswicklung (Hilfsphase), deren magnetische Achse zu derjenigen der Hauptwicklung senkrecht steht, und bringt dann durch geeignete Schaltung eine zeitliche Differenz zwischen den Strömen der beiden Wicklungen hervor. Es können z. B. (Fig. 3a) die beiden Wicklungen parallel und in Reihe mit der einen (a) ein Widerstand, mit der anderen (b) eine Drosselspule geschaltet werden; die Ströme in b sind dann verspätet, und es entsteht ein Drehmoment in der Richtung $a - b$. Oder aber können (Fig. 3b) beide Wicklungen hintereinander, und parallel zu der einen (a) eine Drosselspule, zu der anderen ein Widerstand geschaltet werden; auch in diesem Falle sind die Ströme in b verspätet und somit ein Drehmoment von a nach b vorhanden.

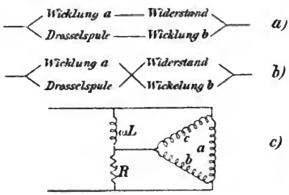


Fig. 3: Anlaßschaltungen.

Eine andere Anlaßmethode (**Steinmetz** nennt sie monozyklisch) besteht darin, daß man die eine Phase (a) eines dreiphasig gewickelten Stators direkt von der Leitung speist (Fig. 3c), während die beiden anderen hintereinander, und parallel zu der einen (b) ein Widerstand, zu der anderen (c) eine Drosselspule geschaltet werden; gegenüber dem Strome in a ist der Strom in b verspätet, derjenige in c voraus, sodaß hier ein Drehmoment in der Richtung $c - a - b$ entsteht.

3. *Vorgänge im primären System.* — Die X-Ströme des Rotors und der Statorstrom erzeugen gemeinschaftlich im Rotor das Hauptfeld Φ_x und im Stator das Feld Φ_1. Der Zusammenhang dieser Felder ist folgender:

Beim Vorhandensein des Primärstromes allein würde (bei ungeänderter Permeabilität der Eisenteile) im Stator ein Feld $OA = c_1 J_1$ (Fig. 4) und im Rotor ein kleineres Feld $O'A = u_1 c_1 J_1$ existieren, während der Teil $OO' = (1 - u_1) c_1 J_1$ sich um die Primärleiter schließt, ohne die Rotorwicklung zu erreichen. Wären umgekehrt nur die X-Ströme des Rotors vorhanden, so würden sie im Rotor ein Feld $AB' = c_2 J_x$ und im Stator ein kleineres Feld $AB = u_2 c_2 J_x$ erzeugen, während $BB' = (1 - u_2) c_2 J_x$ zwischen beiden Wicklungen sich schließt, ohne mit der Statorwicklung verkettet zu sein.

Bei gleichzeitiger Existenz beider Ströme hat man im Stator das Feld
$$\Phi_1 = c_1 J_1 + u_2 c_2 J_x = OB,$$
und im Rotor das Feld
$$\Phi_x = u_1 c_1 J_1 + c_2 J_x = O'B';$$

die Streufelder OO' und BB' werden durch das Vorhandensein des anderen Stromes nicht beeinflußt, da sie mit dem anderen Stromkreise nicht verkettet sind.

c_1 und c_2 bedeuten — entsprechend der Gleichung (6) — das Verhältnis des selbsterzeugten Feldes zum Strome; u_1 und u_2 die „Übergangsfaktoren" im Sinne Kapps und Behrends, d. h. das Verhältnis der in den anderen Stromkreis übergehenden zu der gesamten erzeugten Kraftlinienzahl.[1]

Das Primärfeld Φ_1 bleibt beim praktischen Betriebe beinahe konstant. Der Motor wird nämlich mit konstanter Klemmenspannung

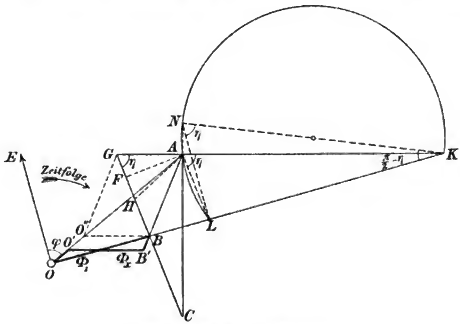


Fig. 4: Kreisdiagramm des Stators.

gespeist, und muß daher, da der Ohmsche Spannungsverlust im Stator verhältnismäßig klein ist, eine beinahe konstante Gegen-EMK entwickeln; die Ströme im Stator und Rotor werden also bei beliebiger Belastung solche Werte und Phasen annehmen, daß das zur Erzeugung jener EM-Kraft nötige Feld tatsächlich resultiert.

Es ist nun die Aufgabe, zunächst den Verlauf des Primärstromes nach Größe und Phase bei sich ändernder Belastung zu verfolgen, um dann hieraus das Rotorhauptfeld Φ_x, das Drehmoment und die Geschwindigkeit bestimmen zu können. Die Lösung soll im folgenden *graphisch* gegeben werden.

1) Auf S. 310 wurde das Verhältnis des Streufeldes und des gesamten Feldes zum übergehenden durch τ und $1 + \tau$ ausgedrückt; τ ist Heylandsche, $1 + \tau$ der Hopkinsonsche Streuungsfaktor. Es ist offenbar: $u = \frac{1}{1 + \tau}$.

Nimmt man das Primärfeld $\Phi_1 = OB$ (Fig. 4) zur festliegenden Basis des Diagrammes, so reduziert sich die gestellte Aufgabe darauf, den geometrischen Ort des Endpunktes A des Vektors $OA = c_1 J_1$ bei veränderlicher Belastung zu bestimmen. Dies geschieht folgendermaßen:

Man verlängere OB über B hinaus und ziehe die zu $O'B'$ Parallelen AK und BO''; es ist:

$$\frac{O''A}{OA} = \frac{O''A}{O'A}\frac{O'A}{OA} = u_2 u_1,$$

$$\frac{OK}{OB} = \frac{OA}{OO''} = \frac{1}{1 - u_1 u_2} = \text{Konstant}; \tag{13}$$

der Punkt K liegt also fest. Man zeichne dann über $AB = u_2 c_2 J_x$ ein dem entsprechenden Dreiecke der Fig. 2 ähnliches Dreieck ACB und verlängere KA und CB bis zum Schnittpunkte G; es ist $\sphericalangle AGB = \eta =$ konstant. Der geometrische Ort des Punktes G ist folglich (bei gegebenem Rotorwiderstande) ein Kreisbogen über BK.

Das lineare Verhältnis zwischen Fig. 4 und Fig. 2 ist $(AB)_4 : (AB)_2 = u_2 c_2 : r_2$. Folglich ist in Fig. 4:

$$AC = \frac{u_2 c_2}{r_2}\omega \Phi_x = u_2 \Phi_x \operatorname{tg}\eta,$$

$$AG = AC : \operatorname{tg}\eta = u_2 \Phi_x = BO''.$$

Andererseits ist

$$AK = O''B \frac{1}{1 - u_1 u_2}$$

und folglich

$$AG : AK = O''B : AK = 1 - u_1 u_2;$$

es beschreibt also auch der Punkt A einen Kreisbogen, und zwar über LK, wenn $AL \parallel GB$ gezogen wird. Der Durchmesser des Kreises KN wird dadurch bestimmt, daß man AC über A hinaus verlängert und $\sphericalangle LKN = \pi/2 - \eta$ macht.

Die gegenseitige Lage der festen Punkte O, B, L und K bestimmt sich wie folgt:

$$\frac{BL}{LK} = \frac{GA}{AK} = \frac{OB}{OK} = 1 - u_1 u_2, \tag{14}$$

$$BL = BK \frac{1 - u_1 u_2}{2 - u_1 u_2} = OK \cdot u_1 u_2 \frac{1 - u_1 u_2}{2 - u_1 u_2} = OB \frac{u_1 u_2}{2 - u_1 u_2},$$

$$OL = OB + BL = OB \frac{2}{2 - u_1 u_2};$$

folglich, alles auf OB als Einheit bezogen:

$$OK : OL : OB = \frac{1}{1 - u_1 u_2} : \frac{2}{2 - u_1 u_2} : 1. \tag{15}$$

Einfluß des Rotorwiderstandes. — Die Höhe des Kreismittelpunktes über der Achse OK ist proportional $\operatorname{tg}(\pi/2 - \eta) = r_2 : \omega c_2$, d. h. proportional dem Rotorwiderstande. Für verschiedene Werte des letzteren bekommt man eine Schar von Kreisen über der gemeinschaftlichen Sehne LK — dies im Gegensatze zum Mehrphasenmotor, bei welchem bekanntlich der Rotorwiderstand das Kreisdiagramm selbst nicht beeinflußt.

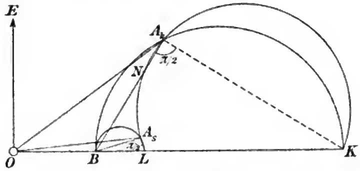


Fig. 5: Kreise für Kurzschluß und Synchronismus.

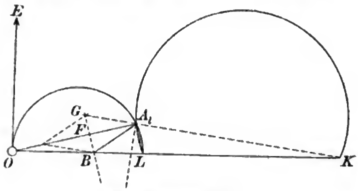


Fig. 6: Leerlaufkreis.

Kurzschluß, Leerlauf, Synchronismus. — Beim Stillstand oder Kurzschluß ($v = 0$) wird $CB = 0$ und kommt A (Fig. 5) in die Lage A_k, wo $\sphericalangle BA_kK = \sphericalangle CAK = \pi/2$ ist; der geometrische Ort des Kurzschlußpunktes bei Änderung des Rotorwiderstandes ist also ein Halbkreis über BK. Beim Leerlauf wird nach Gleichung (10a) $HB = 0$, A kommt (Fig. 6) in die Lage A_l, sodaß F auf OA_l fällt und $\sphericalangle OA_lL = \sphericalangle FAL = \pi/2$ wird; der geometrische Ort des Leerlaufspunktes ist also ein Halbkreis über OL. Beim Synchronismus ($v = 1$) wird $CB = CF$, F fällt in B und A in A_s, wo $\sphericalangle BA_sL = \sphericalangle FAL = \pi/2$ ist; der geometrische Ort des Synchronpunktes ist also ein Halbkreis über BL. Bei der übersynchronen Geschwindigkeit $v = 1/\sin\eta$ wird schließlich $CB = CG$, und A kommt in die Lage L.

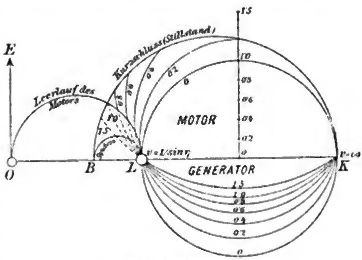


Fig. 7: Einfluß des Rotorwiderstandes.

Das Diagramm Fig. 7 stellt das Verhalten des Motors in Abhängigkeit vom Rotorwiderstande sehr anschaulich dar. Außer den drei eben entwickelten Hilfskreisen enthält es eine Anzahl Kreise (bzw. Kreissegmente) für die Werte $r_2 : \omega c_2 = 0$, 0·2, 0·4, 0·6, 0·8, 1, 1·5. Zwischen dem Kurzschluß- und dem Leerlaufskreise, wo die Segmente voll ausgezogen sind, existiert ein positives Drehmoment, die Maschine wirkt als Motor; zwischen dem Leerlaufskreise und dem Punkte L (Kreissegmente gestrichelt) wird die aufgenommene elektrische Energie nur in Wärme umgesetzt. Zwischen L und K, d. h. von $v = 1/\sin\eta$ an bis zu $v = \infty$ würde die Maschine als Generator wirken.

Magnetisierungsstrom, ideeller Leerlaufstrom, ideeller Kurzschlußstrom. — Der Magnetisierungsstrom ist proportional dem Primärfelde $\Phi_1 = OB$; er tritt nur bei unterbrochener Rotorwicklung auf. Der ideelle Leerlaufstrom, proportional zu OL, würde bei $r_2 = 0$ beim Synchronismus, sonst aber bei $v = 1/\sin\eta$ auftreten. Der ideelle Kurzschlußstrom, proportional zu OK, wäre nur beim Stillstande bei $r_2 = 0$ möglich.

Bezeichnet man diese Ströme mit J_μ, J_l und J_k und das Verhältnis „Kurzschlußstrom zu Magnetisierungsstrom“ mit K, so ist:

$$(15a) \quad J_k : J_\mu = \frac{1}{1 - u_1 u_2} = K, \qquad J_l : J_\mu = \frac{2}{2 - u_1 u_2} = 2\,\frac{K}{K+1}.$$

In der Praxis beträgt $u_1 u_2$ von etwa 0·95 bei guten bis 0·90 bei den schlechtesten Motoren; das gibt:

$$J_k : J_\mu = K = 20 \text{ bis } 10,$$
$$J_l : J_\mu = 1{\cdot}9 \text{ bis } 1{\cdot}82.$$

4. *Vergleich zwischen Ein- und Mehrphasenmotor: Maximaler Leistungsfaktor, normale Leistung, maximale Leistung.* — Die Arbeitsaufnahme, und daher beiläufig auch die Leistung bezw. das Drehmoment eines m-phasigen Motors ist im allgemeinen gegeben durch

$$P = m\,\frac{EJ}{2}\cos\varphi,$$

wenn E und J die Maximalwerte der Spannung und der Stromstärke pro Phase und φ ihre Phasendifferenz bedeutet. Bei einer gewissen Belastung erreicht (die Spannung E als konstant vorausgesetzt) der Strom einen solchen Wert J_n, daß die Erwärmung des Motors bis zu der eben noch zulässigen Höhe ansteigt. Hat dabei der Leistungsfaktor den Wert $\cos\varphi_n$, so ist die *normale* Arbeitsaufnahme des Motors:

$$P_n = m\,\frac{EJ_n}{2}\cos\varphi_n.$$

Ein guter Motor muß derart konstruiert sein, daß der bei J_n auftretende $\cos\varphi_n$ möglichst groß sei, daher im besten Falle:

$$\cos\varphi_n = \max\cos\varphi.$$

Dieser Grenzfall liegt den folgenden Betrachtungen zugrunde. —

Bezeichnet man mit J_0 den *Leerlaufstrom im allgemeinen*, sodaß nämlich beim Einphasenmotor $J_0 = J_l$ und beim Mehrphasenmotor $J_0 = J_\mu$ zu setzen ist, so gelten folgende Formeln gemeinschaftlich für beide Motorarten:

$$J_n = \sqrt{J_k J_0}, \tag{16}$$

$$\max\cos\varphi = \frac{J_k - J_0}{J_k + J_0}, \tag{17}$$

$$\max(J\cos\varphi) = \tfrac{1}{2}(J_k - J_0). \tag{18}$$

Diese Formeln sind an der Fig. 8 leicht abzulesen: Der maximale $\cos\varphi$ tritt ein, wenn OA den Kreis tangiert; dabei ist $\overline{OA}^2 = OL \cdot OK$ und $\max\cos\varphi = \frac{AM}{OM} = \frac{OK - OL}{OK + OL}$. Ferner ist die maximale Wattkomponente des Stromes proportional dem (vertikalen) Kreishalbmesser, d. h. proportional $\frac{1}{2}(OK - OL)$.

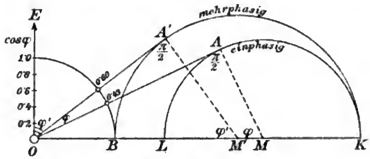


Fig. 8: Kreisdiagramm des ein- und des mehrphasigen Motors. Maximaler $\cos\varphi$.

Setzt man in obige Formeln

$$J_0 = J_\mu \qquad \text{für Mehrphasenmotoren,}$$
$$J_0 = J_\mu \cdot 2\frac{K}{K+1} \qquad \text{für Einphasenmotoren}$$

ein, so erhält man folgende Tabelle:

	mehrphasig	einphasig
$\max\cos\varphi$	$\frac{K-1}{K+1}$	$\frac{K-1}{K+3}$
norm $J : J_\mu$	$\sqrt{K}$	$\sqrt{K}\cdot\sqrt{2\frac{K}{K+1}}$
$\max(J\cos\varphi) : J_\mu$	$\frac{K-1}{2}$	$\frac{K-1}{2}\cdot\frac{K}{K+1}$

Demnach für $u_1 u_2 = 0{\cdot}95$ bis $0{\cdot}90$ oder $K = 20$ bis 10:

	mehrphasig			einphasig		
$\max \cos \varphi$	0·905	bis	0·818	0·825	bis	0·692
norm $J : J_\mu$	4·47	bis	3·16	6·17	bis	4·26
$\max (J \cos \varphi) : J_\mu$	9·5	bis	4·5	9·05	bis	4·09

Zwei- und Dreiphasenmotoren im Einphasenbetriebe. — Schaltet man bei einem *Zweiphasenmotor* eine Statorphase aus, so bleibt das Drehfeld und folglich auch die Eisenverluste fast ungeändert; der Strom der übrigbleibenden Phase darf dagegen, um dieselbe Gesamtwärme im Stator zu erzeugen, $\sqrt{2}$ mal größer werden. Bei diesem Strome ist man, wie ein Blick in die Tabelle lehrt, etwas *über* dem $\max \cos \varphi$ des einphasigen Motors; der $\max \cos \varphi$ tritt nämlich schon bei einem $\sqrt{2}\sqrt{\frac{K}{K+1}}$ mal größeren Strom ein. Indessen ist die Differenz nur unbedeutend (für $K = 20$ ist $\sqrt{K/(K+1)} = 0{\cdot}975$), und da überdies der $\cos \varphi$ in der Nähe des Maximums nur sehr langsam abnimmt, kann man auch noch bei dem etwas stärkeren Strome den $\max \cos \varphi$ selbst in den Ausdruck der Wattaufnahme einsetzen. Es ist demnach die einphasige Wattaufnahme bei derselben totalen Statorwärme:

$$P^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2} E \sqrt{2}\, J \max \cos \varphi^{\mathrm{I}},$$

oder, da für den zweiphasigen Betrieb $P^{\mathrm{II}} = EJ \max \cos \varphi^{\mathrm{II}}$ ist:

$$P^{\mathrm{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\max \cos \varphi^{\mathrm{I}}}{\max \cos \varphi^{\mathrm{II}}} \cdot P^{\mathrm{II}}.$$

Für $u_1 u_2 = 0.95$ oder $K = 20$ gibt dies:

$$P^{\mathrm{I}} = 0{\cdot}707 \frac{0{\cdot}825}{0{\cdot}905} P^{\mathrm{II}} = 0{\cdot}645 \cdot P^{\mathrm{II}}.$$

In einem *Dreiphasenmotor* ändert sich bei Ausschaltung der Phase c (Fig. 9) das die Phasen $a + b$ durchsetzende Feld und somit auch die Eisenverluste zwar nicht, der Magnetisierungsstrom nimmt dagegen im Verhältnisse

$$J_\mu^{\mathrm{I}} : J_\mu^{\mathrm{III}} = \sqrt{3} : 2$$

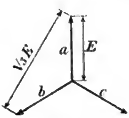


Fig. 9: Dreiphasenspannungen.

ab. Beim dreiphasigen Betriebe haben nämlich die Ströme in a und b verschiedene Phasen, so zwar daß für $a + b$ zusammen das Maximum der magnetisierenden Kraft eintritt, wenn die einzelnen Ströme $\sqrt{3}/2$ ihrer Höchstwerte besitzen; oder anders, diese Höchstwerte (J_μ^{III}) selbst sind $2/\sqrt{3}$ mal größer, als bei ihrer Phasengleichheit nötig wäre.

Der Belastungsstrom der beiden übrig bleibenden Phasen darf zur Erreichung derselben Statorwärme auf das $\sqrt{3/2}$ fache anwachsen; d. h.:

$$J^{\mathrm{I}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, J^{\mathrm{III}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\sqrt{K}\, J_{\mu}^{\mathrm{III}} = \sqrt{K}\,\sqrt{2}\, J_{\mu}^{\mathrm{I}}.$$

Man ist also wieder nur ganz unbedeutend über dem $\max \cos \varphi$, und kann den letzteren unbedenklich zum Ausdrucke der Wattaufnahme benutzen. Da die Spannung zwischen a und b gleich $\sqrt{3} \cdot E$ ist, so hat man für die einphasige Wattaufnahme bei derselben Statorwärme:

$$P^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, E \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, J^{\mathrm{III}} \max \cos \varphi^{\mathrm{I}},$$

oder da $P^{\mathrm{III}} = \frac{3}{2} E J^{\mathrm{III}} \max \cos \varphi^{\mathrm{III}}$ ist:

$$P^{\mathrm{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\max \cos \varphi^{\mathrm{I}}}{\max \cos \varphi^{\mathrm{III}}} P^{\mathrm{III}};$$

also dasselbe Verhältnis wie beim zweiphasigen Motor.

Nun bleibt aber noch die Rotorwärme zu betrachten. Dieselbe ist nach früherem bei mehrphasigem Betriebe proportional s^2, bei einphasigem dagegen $2s^2$; die Schlüpfung s selbst ist aber — beim Einphasenbetriebe wenigstens nahe am Synchronismus — proportional dem Drehmomente, und dieses beiläufig der Wattaufnahme. Man hat also:

$$W^{\mathrm{II,\,III}} \cong (P^{\mathrm{II,\,III}})^2,$$

$$W^{\mathrm{I}} \cong 2 \cdot (P^{\mathrm{I}})^2 \cong 2 \cdot 0{\cdot}645^2 (P^{\mathrm{II,\,III}})^2;$$

daraus folgt:

$$W^{\mathrm{I}} = 2 \cdot 0{\cdot}645^2 (W^{\mathrm{II,\,III}}) = 0{\cdot}83 \cdot W^{\mathrm{II,\,III}}.$$

Man könnte also, um eine gleiche *totale* Wärme im Stator *und* Rotor zu erreichen, den Einphasenmotor noch etwas mehr belasten, etwa bis

$$P^{\mathrm{I}} = 0{\cdot}68 \cdot P^{\mathrm{II,\,III}}.$$

Brünn, den 20. November 1904.

Rezensionen.

A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 509 S.

Referent kann das in der Überschrift genannte Werk einem jeden, der sich mit dem heutigen Stande von der Theorie der Thetafunktionen vertraut machen will, angelegentlich empfehlen. Es zeugt von einer Beherrschung des Stoffes und der Literatur, wie sie im allgemeinen nur derjenige besitzen kann, der gleich Herrn Krazer lange Jahre auf diesem Gebiete erfolgreich produktiv und reproduktiv tätig gewesen ist. Naturgemäß treten die Arbeiten von Herrn Krazer und von seinem Lehrer Herrn Prym in den Vordergrund, indessen muß hervorgehoben werden, daß sich überall das Bestreben zeigt, den Leistungen anderer Mathematiker gerecht zu werden.

Der Schwerpunkt des Werkes liegt in der reinen und allgemeinen Theorie der Thetafunktionen. Dieselbe zerfällt in zwei große Teile, in eine Theorie der Thetafunktionen mit beliebiger Charakteristik und in eine solche der Funktionen mit rationaler Charakteristik. Der erste Teil gipfelt in der Ableitung einiger ebenso allgemeiner wie fundamentaler Sätze für die allgemeinen Thetafunktionen und zwar auf Grund der Umformung unendlicher Reihen, sodann in der Entwicklung der Transformation, insbesondere der linearen Transformation derselben. Es werden rationale Transformationszahlen mit in den Kreis der Betrachtungen gezogen.

In dem zweiten Teil werden zunächst die Thetafunktionen besprochen, deren Charakteristiken aus halben Zahlen gebildet sind. Aus den hierauf bezüglichen Untersuchungen möchte Referent besonders diejenigen über die Charakteristiken als besonders wertvoll hervorheben, wobei zu bemerken ist, daß Herr Krazer im Anschluß an die Herren Prym, Noether u. a. eine Perioden- und Thetacharakteristik unterscheidet. Im übrigen baut sich die Theorie auf Grund der Riemannschen Thetaformel auf, die ihrerseits sich durch Spezialisierung aus einem der vorhin angedeuteten Theoreme ergibt. Die Frage von der algebraischen Abhängigkeit der Thetarelationen beschließt dieses wichtige Kapitel.

Wesentlich kürzer ist die folgende Theorie der Thetafunktionen ausgefallen, deren Charakteristiken aus r^{tel} Zahlen gebildet sind. Es liegt das zum Teil daran, daß die Charakteristikentheorie hier nicht so ausgebildet ist, wie im Falle $r = 2$. Der sonstige analytische Teil beruht wesentlich auf Formeln, die auch als spezielle Fälle der allgemeinen Formeln des ersten Teiles angesehen werden können. Es schließen sich hieran einige mehr geometrisch gehaltene Untersuchungen.

Wie aus dem Obigen ersichtlich, ist der Ausgangspunkt von Herrn Krazer ein sehr allgemeiner, da sofort diejenigen Sätze aufgestellt werden, aus denen sich die folgenden Formeln im großen und ganzen als spezielle Fälle ergeben. Es hat dieser Weg unstreitig viele Vorzüge für die konsequente Entwicklung der Theorie für sich, ob er aber für ein Lehrbuch der pädagogisch beste ist, bleibt diskutierbar, da ein Eindringen in jene ersten Sätze doch ein recht schwieriges ist und für den Anfang leicht ermüden kann.

Neben der reinen und allgemeinen Theorie der Thetafunktionen enthält das Werk noch einige mehr angewandte und spezielle Theorien derselben. Bei den ungemein nahen Beziehungen, in welchen die Thetafunktionen zu einer ganzen Anzahl weiterer Gebiete stehen, ist die Hinzunahme derartiger Betrachtungen sehr naheliegend. Die Schwierigkeit liegt hier in einer richtigen Abgrenzung, da die Anwendungsgebiete für sich sehr umfangreich und inhaltreich sind.

Zu diesen Anwendungen gehört in erster Linie das große Gebiet der Abelschen, insbesondere der hyperelliptischen Integrale. Das Umkehrungsproblem derselben führt naturgemäß zu den Thetafunktionen, freilich nicht den allgemeinen, sondern zu gewissen speziellen, die wohl auch mit dem Namen der Abelschen, insbesondere der hyperelliptischen Thetafunktionen bezeichnet werden. Zweitens führt die Quotientenbildung von Thetafunktionen zu $2p$-fach periodischen Funktionen, und es entsteht die Frage, ob eine jede $2p$-fach periodische Funktion auf diese Weise gebildet werden kann. Diese schon von Riemann bejahte Frage hat vor kurzem durch Arbeiten der Herren Picard und Poincaré ihre Erledigung gefunden. Zu gleicher Zeit ergab sich aus den hierauf bezüglichen Betrachtungen die Möglichkeit, auch die allgemeinen Thetafunktionen mit der Integraltheorie in Verbindung zu setzen. Diese Betrachtungen gipfeln bei dem heutigen Stande der Theorie in dem Satze von Herrn Wirtinger, daß es Abelsche Thetafunktionen vom Geschlechte q gibt, welche nach einer Transformation höheren Grades in Produkte je einer Thetafunktion von p und einer von $q-p$ Variablen zerfallen, so zwar, daß die ersteren allgemeine Thetafunktionen sind. Das Zerfallen der Thetafunktionen seinerseits steht im engsten Zusammenhang mit der Reduktion der Abelschen Integrale auf niedere. Auch eine andere Theorie ist hiermit nahe verknüpft — die zu reduzierbaren Integralen gehörenden Thetafunktionen besitzen komplexe Multiplikation.

Alle diese Dinge werden von Herrn Krazer zum Teil in kurzer, mehr enzyklopädischer Weise besprochen und mit einer größeren Reihe von Zitaten versehen, um dem Leser ein vertieftes Eindringen zu ermöglichen.

Ungern hat Referent eine Betrachtung der Thetafunktionen für spezielle Argumente vermißt.

Es fehlen im wesentlichen die Beziehungen, welche zwischen den gewöhnlichen Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente bestehen, ebenso wie die mannigfachen Differentialgleichungen, denen sie Genüge leisten, und endlich sind die reichen und weitgehendeu Zusammenhänge, die zwischen weiteren Konstanten, wie den Teilwerten und den transformierten Thetafunktionen bestehen, nicht mit in den Kreis der Betrachtungen gezogen worden. Sicherlich gehört eine ausführliche Theorie derselben in andere Gebiete, aber andrerseits sind die Verbindungen mit den behandelten Theorien so enge und organische, daß eine etwas schärfere Skizzierung derselben in einem Lehrbuche über Thetafunktionen als wünschenswert bezeichnet werden muß.

Dresden. M. Krause.

Blochmann, Rudolf. Die drahtlose Telegraphie in ihrer Verwendung für nautische Zwecke. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 24 S.

In einem Vortrage vor der 34. Jahresversammlung des deutschen nautischen Vereins behandelte Herr Dr. Rudolf Blochmann das Thema: Die drahtlose Telegraphie in ihrer Verwendung für nautische Zwecke.

Wenn auch dieser Vortrag hauptsächlich dem Zwecke dient, für ein neues System der gerichteten Telegraphie Propaganda zu machen, so hätten doch die übrigen Systeme, wenn ihre Besprechung überhaupt notwendig war, etwas weniger stiefmütterlich behandelt werden können. Zumal hätten die Verdienste Marconis, die doch trotz aller patriotischen Begeisterung einmal nicht abzustreiten sind, in gebührender Weise hervorgehoben werden müssen, und es macht einen recht peinlichen Eindruck, wenn der Patriotismus auf die doch international sein sollende Wissenschaft übertragen und die deutsche elektrotechnische Industrie zum Kampfe gegen das Ausland angefeuert wird in einer Sache, die zweckmäßigerweise vorläufig noch allein der Wissenschaft überlassen würde und deren praktische Inangriffnahme doch zuerst vom Auslande ausging, gerade als ob die Wissenschaft nur dazu da wäre, der Industrie Frohndienste zu leisten. Und was hat die deutsche elektrotechnische Industrie in diesem Fache bisher viel anderes getan, als mit Marconi zu wetteifern, um seine Entfernungserfolge zu übertrumpfen, was ihr indes auch nicht annähernd geglückt ist?

Was nun das System der gerichteten Telegraphie des Herrn Blochmann betrifft, so beruht dasselbe im Prinzip auf der bereits von Hertz nachgewiesenen Brechbarkeit der elektrischen Strahlen. Herr Blochmann will die im Brennpunkt einer Linse erzeugten elektrischen Strahlen in einem parallelen Bündel in den Raum hinaussenden und am Empfangsorte wieder in dem Brennpunkt einer Linse konzentriren. Daß dies ausführbar ist, wird wohl niemand bezweifeln, und Versuche auf eine Entfernung von 1,5 km sind auch befriedigend ausgefallen. Aber von diesem Versuch bis zur praktischen Anwendung ist noch ein weiter Weg, und die Schwierigkeiten, die sich auf diesem Wege einstellen dürften, werden begreiflich, wenn man erwägt, daß bei diesem System die Hauptachsen der beiden verwendeten Linsen zusammenfallen müssen, eine Forderung, die bei einer maximalen Länge dieser Achsen von etwa 10 km schwerlich zu erfüllen sein dürfte, zumal wenn die Linsen, auf Schiffen montiert, ihre Lage beständig ändern, was auch die genaueste Kursinnehaltung und die vollkommenste Cardanische Aufhängung in dem zu fordernden Maße nicht zu verhindern imstande wäre.

Hierzu kommt, daß die Energie nur in recht mäßigem Grade gesteigert werden kann, nur auf Kosten der Dimensionen der Linsen, da nämlich letztere im Verhältnis zur Wellenlänge klein sein müssen, so würde eine Steigerung der Energie, welche ceteris paribus eine Vergrößerung der Wellenlänge involviert, auch eine solche der Linsendimensionen bedingen. Wenn nun auch der Verf. seine Hoffnung in bezug auf Verständigungsweite nicht sehr hoch spannt, so dürften doch selbst diese nicht unbedeutenden Schwierigkeiten begegnen, und ein nennenswerter Erfolg könnte höchstens für die Ortsbestimmung eines Schiffes bei Nebel in der vom Verf. angedeuteten Weise erwartet werden, wo es nur darauf ankommt, gewisse sich stets wiederholende Signale abzufangen, um hieraus die Richtung zu bestimmen, aus welcher die Signale kommen, nicht aber ein vollständiges Telegramm, welches bei der geringsten Kurs- oder Neigungsänderung des Schiffes der Gefahr der Verstümmelung unterworfen wäre.

Auf diesem Verwendungsgebiet könnte das angeführte System vielleicht mit den bisher üblichen in Wettbewerb treten; ich sage in Wettbewerb, weil es nicht ausgeschlossen ist, daß auch bei den mit Antennen arbeitenden Systemen durch Benutzung der Interferenz zweier Antennen sich eine gerichtete Telegraphie ermöglichen ließe, die dem System des Verfassers an Präzision kaum nachstehen dürfte, ohne an die vom Verfasser selbst bezeichneten engen Grenzen gebunden zu sein, und es muß verwunderlich erscheinen, daß angesichts der auch vom Verf. dargelegten Resonanzschwierigkeiten dieser Weg bisher noch nicht ernstlich beschritten worden ist, da auf diese Weise selbst mehrere mit gleicher Wellenlänge arbeitende Stationen so eingerichtet werden könnten, daß sie sich gegenseitig nicht stören, selbst wenn sie in gleicher Richtung arbeiten. Kämen nun noch verschiedene Wellenlänge und verschiedene Richtung hinzu, so müßte sich eine Unabhängigkeit erzielen lassen, die derjenigen des in Rede stehenden Systems mindestens ebenbürtig wäre.

Der vom Verfasser gepredigte Kampf gegen das Ausland dürfte indessen kaum das geeignete Remedium sein, um alle die doch tatsächlich bestehenden Kalamitäten in der drahtlosen Telegraphie zu beseitigen; er würde höchstens dazu führen, daß sich das Ausland noch hermetischer gegen uns verschließt, als dies leider ja jetzt schon nicht gerade zu unserem Nutzen der Fall ist, und ein friedliches Zusammenarbeiten auf diesem Gebiete unter aufrichtigem, gegenseitigem Austausch der Erfahrungen dürfte der Menschheit mehr Nutzen bringen, als der Kampf der deutschen elektrotechnischen Industrie ihr je bringen kann, zumal letztere bei Verfolgung dieses Prinzips höchstens den Kürzeren ziehen könnte. Die Hauptsache bleibt: Beseitigung der bestehenden Schwierigkeiten, wer sie beseitigt, ist für die Sache an sich belanglos.

Berlin. A. Koepsel.

W. Dudensing. Über die durch eine allgemeine dreigliedrige algebraische Gleichung definierte Funktion und ihre Bedeutung für die Auflösung der algebraischen Gleichungen von höherem als viertem Grade. Leipzig 1900, B. G. Teubner. VIII u. 58 S.

Der sachliche Inhalt der vorliegenden Schrift ist kurz dieser: jede dreigliedrige algebraische Gleichung läßt sich auf die Form bringen

$$x^p + x^{-qp} = y,$$

wo p und q positive ganze Zahlen, y eine gegebene komplexe Zahl ist. Die hierdurch definierte $(p+q)$-deutige Funktion x von y läßt sich auf zwei Arten in unendliche Reihen entwickeln, deren eine konvergiert, wenn mod $y \leqq$, deren andere, wenn mod $y \geqq$ einer gewissen Grenze ist. Gleiches gilt von $\frac{1}{x}$. Diese vier Ausdrücke von x werden in einem einzigen Algorithmus zusammengefaßt, dessen Parameter entsprechend spezialisiert werden müssen, damit jene vier Darstellungsformen von x erscheinen. Freilich ist die Zusammenfassung wenigstens teilweise eine rein äußerliche.

Wie der Verfasser selbst anführt, sind diese Resultate, abgesehen von älteren Abhandlungen, in der Hauptsache schon durch die Dissertation von H. von Mangoldt (Berlin 1878), die ihm zu spät vorgelegen hat, erledigt.

Außer diesem sachlichen Teil (S. 8—34) enthält die Broschüre aber auch noch teils im Vorwort, teils in der Einleitung des zweiten, teils namentlich im ganzen dritten und vierten Abschnitt eine lebhafte Apologie für die „neue Funktion“ x von y, ihre „theoretische und praktische Bedeutung“, ihre „Einführung in die Analysis“, ihre Bezeichnung usw., verbunden mit Bemerkungen allgemeinerer Art über „Auflösung“ algebraischer Gleichungen etc. Die Quintessenz davon ist, daß bei algebraischen Gleichungen, die nicht mehr algebraisch auflösbar, also nicht auf binomische Gleichungen reduzierbar sind, zunächst versucht werden soll, sie auf trinomische zurückzuführen, d. h. sie mittelst der hier behandelten Funktion x von y zu lösen, dann erst zu quadrinomischen Gleichungen überzugehen usw.

Dieser Teil scheint dem Herrn Verfasser sogar am meisten am Herzen zu liegen. Als Beweis hierfür und zur Charakterisierung dieser ganzen Betrachtungen mögen folgende zwei Zitate dienen. Wir lesen S. 47:

„Dieses merkwürdige und eigenartige Ergebnis fassen wir in folgendem Theorem zusammen, in dem wir den Höhepunkt unserer Untersuchungen erblicken zu müssen glauben:

Theorem. „Soweit unsere gegenwärtige Kenntnis über die Auflösbarkeit bez. die Lösungsfunktionen algebraischer Gleichungen von beliebig hohem Grade reicht, hängt der Grund der Schwierigkeit für die Auflösbarkeit derselben bez. die Kompliziertheit der Lösungsfunktion nicht, wie bisher stillschweigend angenommen,“ [von wem? Ref.] „von dem Grade der aufzulösenden Gleichung, sondern von der Anzahl der Glieder derselben ab, also davon, ob ihre Auflösung auf höchstens binomische, höchstens trinomische, höchstens quadrinomische Gleichungen zurückgeführt werden kann.“

Und S. 53 lesen wir:

„Und damit bin ich zu dem zweiten wichtigen Resultat meiner Abhandlung gelangt, dem Resultat, das zwar längst bekannt, aber mir nicht immer scharf genug ausgesprochen worden zu sein scheint, daß nämlich die sogenannte „geschlossene Lösung“ eines Problems lediglich davon abhängt, was für Funktionen man zu seiner Lösung heranzieht, und welche Funktionen man für eine geschlossene Lösung als zulässig erachtet.“

Von manchen zu beanstandenden Aussprüchen soll nur auf einen immer wiederkehrenden hingewiesen werden, der für jüngere Leser verderblich werden könnte: der Verfasser identifiziert irrtümlicher Weise beständig den Begriff einer Funktion, welche Wurzel einer algebraisch auflösbaren algebraischen Gleichung ist, mit dem einer algebraischen Funktion überhaupt! Er nennt infolgedessen seine Funktion x von y, die der oben angeführten Gleichung genügt, ausdrücklich eine transzendente Funktion, sobald $p + q > 4$ ist!

Umfangreiche Streichungen und energische Kondensation des Restes wäre im Interesse des Verfassers und seiner Leser gewesen!

Bonn, Juli 1901. L. Heffter.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

117. Eine Zahl A enthalte m verschiedene Primzahlen; dann ist die *Anzahl $\theta_{m,k}$ der Zerlegungen von A in k relativ prime Faktoren* durch den Ausdruck

$$\theta_{m,k} = \frac{1}{k!}\left[k^m - \binom{k}{1}(k-1)^m + \binom{k}{2}(k-2)^m - \binom{k}{3}(k-3)^m + \cdots\right]$$

gegeben. (Vgl. Netto, Kombinatorik S. 170.)

Ist jetzt Θ_m die Anzahl *sämtlicher* Zerlegungen von A in relativ prime Faktoren, so ist

$$\Theta_m = \sum_{k=1}^{m} \theta_{m,k},$$

und man erhält leicht $\Theta_m =$

$$\frac{m^{m-1}}{(m-1)!} + \alpha_1 \frac{(m-1)^{m-1}}{1!\,(m-2)!} + \alpha_2 \frac{(m-2)^{m-1}}{2!\,(m-3)!} + \alpha_3 \frac{(m-3)^{m-1}}{3!\,(m-4)!} + \cdots + \alpha_{m-1}\frac{1}{(m-1)!},$$

worin

$$\alpha_1 = 0,\ \ \alpha_2 = 1,\ \ \alpha_3 = 2,\ \ \alpha_4 = 9,\ \ \alpha_5 = 44,\ \ \alpha_6 = 265,\ \ \alpha_7 = 1854, \cdots$$

$$\alpha_n = n\,\alpha_{n-1} + (-1)^n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Die Zahl α_n stimmt überein mit der von Euler[1]) ermittelten Anzahl der Permutationen von n Elementen, bei denen keines der Elemente seinen natürlichen Platz behält.

Die ersten Zahlen Θ_m haben die Werte

$$\Theta_1 = 1,\ \ \Theta_2 = 2,\ \ \Theta_3 = 5,\ \ \Theta_4 = 15,\ \ \Theta_5 = 52,\ \ \Theta_6 = 203,$$
$$\Theta_7 = 877,\ \ \Theta_8 = 4140.$$

Es sollen folgende Eigenschaften dieser Zahlen nachgewiesen werden:

1) Es ist

$$\Theta_m = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(m-2)!} \\ -(m-2) & 2 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & & \frac{1}{(m-3)!} \\ 0 & -(m-3) & 2 & \frac{1}{1!} & & \\ 0 & 0 & -(m-4) & 2 & & \\ \vdots & & & & & \frac{1}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1) auch von Montmort (1708) und De Moivre (1718). Vgl. Czuber, Ber. üb. Wahrscheinlichkeitstheorie im VII. Jahresber. D. M.-Ver., S. 44 (1899). Red.

2) Bildet man die erzeugende Funktion

$$\Theta(x) = \Theta_1 + \Theta_2 x + \Theta_3 \frac{x^2}{2!} + \Theta_4 \frac{x^3}{3!} + \Theta_5 \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

so ist

$$\Theta(x) = e^{e^x + x - 1}$$

Straßburg i. E. P. Epstein.

---

118. Zu beweisen: Ein Tetraeder, in dem der Mongesche Punkt (d. h. der Schnittpunkt der durch die Mitten der Kanten senkrecht zu den Gegenkanten gelegten Ebenen) mit dem Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel zusammenfällt, ist gleichseitig (d. h. es ist in ihm jede Kante gleich ihrer Gegenkante).[1])

Potsdam. Ad. Schmidt.

---

119. Gegeben sind 4 beliebig in einer Ebene liegende Geraden a, b, c und d. Man bestimme alle diejenigen Geraden $g_1, g_2, \ldots g_n$, die von den gegebenen Geraden so geschnitten werden, daß die Abschnitte auf g_1 resp. $g_2, \ldots g_n$ bezüglich einander gleich sind.

(Die Lösung soll „rein" geometrisch sein. Man findet im allgemeinen 12 Geraden von der verlangten Eigenschaft).

Berlin. L. Blatter.

---

120. Gegeben sind m beliebig in einer Ebene liegende Geraden. Man bestimme die Anzahl aller der n-Ecke, deren Ecken auf irgend n dieser Geraden liegen und deren Seiten irgend n anderen dieser m Geraden parallel sind ($m \geqq n$). Wie gestaltet sich die Lösung, wenn die Seiten der n-Ecke sämtlich — oder teilweise — den Geraden parallel sein können, auf denen die Ecken des zugehörigen n-Ecks liegen?

Berlin. L. Blatter.

B. Lösungen.

Zu **88** (Bd. VI, 174) (G. Kober). — Meine in Bd. VIII, S. 176 abgedruckte Lösung der Koberschen Aufgabe enthält hinsichtlich der Fassung des benutzten Hilfssatzes ein Versehen, das mir bei der Korrektur entgangen ist. Der Satz muß lauten: „In einem Sehnenviereck stehen die *Halbierungslinien der von den Gegenseitenpaaren gebildeten Winkel* auf einander senkrecht und sind den Halbierungslinien der Diagonalenwinkel parallel".

Prenzlau. W. Stegemann.

Zu **101** (Bd. VII, 262) (L. Saalschütz). — Der Satz findet sich bereits in dem Buch von G. Wertheim: Anfangsgründe der Zahlenlehre,

1) Der Satz ist von mir 1885 ohne Angabe des Beweises in „Schlömilchs Zeitschrift" veröffentlicht und bald darauf im Aufgaben-Repertorium von „Hoffmanns Zeitschrift" (Bd. XVI, Nr. 476) zum Beweise vorgelegt worden. Die Aufgabe hat aber dort (abgesehen von einem verfehlten Versuche, der eine petitio principii enthielt) keine Bearbeitung erfahren.

Braunschweig 1902, S. 350 und ist dort in derselben Weise, wie von Herrn Meißner (Bd. VIII, 180) ohne Benutzung des Eulerschen Kriteriums bewiesen.

Straßburg i. E. P. Epstein.

2. Anfragen und Antworten.

21. Nach einem Satze von Hilbert[1]) läßt sich jede total-positive algebraische Zahl in 4 Quadrate zerlegen, deren Basen Zahlen desselben Körpers sind. Ist eine Verallgemeinerung dieses Satzes, betreffend die Darstellung von Zahlen durch n-te Potenzen, bekannt? Für den Fall des absoluten Rationalitätsbereichs vermutet man seit Jacobi[2]), daß sich jede Zahl durch höchstens 9, oberhalb einer gewissen Grenze sogar durch höchstens 7 Kuben darstellen läßt. Ein Beweis dafür existiert meines Wissens nicht. Kann etwa ein solcher mit Hilfe der Theorie der kubischen Formen gegeben werden? Kann jede positive Rationalzahl in 19 Biquadrate zerlegt werden? Kann gezeigt werden, daß bei bestimmtem n *jede* positive rationale Zahl z in höchstens $\nu(n)$ $n$te Potenzen zerlegbar ist, oder wächst von einem gewissen n ab, bezw. bei einem gewissen n, $\nu(n)$ mit z ins Unendliche?[3]) Gelten entsprechende Sätze auch für andere Zahlkörper?

Gibt es Sätze über Zerlegung definiter ganzer Funktionen in Summen von $n$ten Potenzen?[4])

Potsdam, am 19. Oktober 1904. Otto Meissner.

---

22. Ein bisher unbewiesener Satz von Goldbach lautet: *Jede grade Zahl läßt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.* Man kann diesen Satz auch so formulieren: *Jede Zahl läßt sich als Summe dreier Primzahlen darstellen, von denen mindestens eine gleich* 0 *oder* 1 *ist.* Ist dieser Satz beweisbar? Ist er einer Verallgemeinerung fähig?

Die Anzahl der verschiedenen Arten dieser Zerlegung einer Zahl $2n$, $\zeta(2n)$ scheint mit n zu wachsen, wiewohl nicht gleichmäßig. Wird

$$\lim_{n=\infty} \zeta(2n) = \infty$$

oder wenigstens

$$\limsup_{n=\infty} \zeta(2n) = \infty$$

werden? (Der obige Satz behauptet offenbar, $\zeta(2n) \geqq 1$).

Gibt es endlich etwa Analoga dieses Satzes für beliebige oder gewisse Zahlkörper, bezw. hat man Grund, es zu vermuten?

Potsdam, am 22. Oktober 1904. Otto Meissner.

---

23. Ist einem der verehrlichen Leser des Archivs der folgende Satz bekannt? — „Teilt man die Seiten eines Dreiecks im umlaufenden Sinne nach demselben Verhältnisse und verbindet die Teilungspunkte mit den

1) Grundlagen der Geometrie S. 83 der 1. Aufl., S. 78 der 2. Aufl.

2) Koenigsberger, Carl Gustav Jacob Jacobi (Teubner 1904) S. 440—441.

3) sodaß ν für diesen Wert von n außer von n noch von z abhängig ist.

4) Der Fall $n = 2$ ist bekanntlich von Herrn E. Landau erledigt.

gegenüberliegenden Eckpunkten, so erhält man ein von diesen Verbindungslinien begrenztes Dreieck, bei welchem die Summe der Seitenquadrate zum Flächeninhalt in demselben Verhältnisse steht, wie bei dem ursprünglichen Dreiecke".

Reichenberg i. Böhm. — A. CAPPILLERI.

24. Wo findet man wohl folgenden Satz, der mit Hilfe elliptischer Koordinaten sehr leicht zu beweisen ist, aber, wie es scheint, wenig bekannt ist?

In die Fläche zweiten Grades

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

wird die Kurve, in deren Punkten die Krümmung den konstanten Wert K hat, durch die Flächen eingeschnitten:

$$(b + c)\, x^2 + (c + a)\, y^2 + (a + b)\, z^2 - (bc + ca + ab) + m = 0,$$

wo $K m^2 = abc$.

Breslau. — R. STURM.

Zu **16** (Bd. VIII, S. 87) (G. Holzmüller). — Die mit den betreffenden Reihen von Berührungskreisen zusammenhängenden unendlichen Reihen ergeben sich sofort als richtig, wenn man den äußeren Kreis als Inversionskreis, z. B. als solchen vom Radius Eins betrachtet. Die Reihen sind stets konvergent. Die Summierung ergibt sich geometrisch von selbst aus der Zeichnung.

Hagen. — G. HOLZMÜLLER.

Zu **18** (Bd. VIII, 268) (P. Zühlke). — Martin, Educ. Times **26**, 28 (1877) und H. W. L. Tanner, Messenger (2) **7**, 63—64 (1877); Ed. Lucas, Théorie des nombres I (Paris, Gauthier-Villars, 1891) p. 38, exemple 3 (vgl. auch ex. 4), 45, exemple 2 et 3 (Verallgemeinerung für 6-er und 12-er System; A. Palmström, Einige zahlentheoretische Probleme (Videnskabsselskabets Skrifter I mat.-nat. Klasse 1900, 3); in diesem Aufsatze ist das Problem für die Basis 10 und beliebige Basis gelöst, erweitert und auch die Erweiterung gelöst (Fortschr. d. Math. **31**, 191, 1900). A. Hauke hat im Archiv der Math. und Phys. (2) **17**, 156—159 einen Aufsatz: „Potenzschließer" veröffentlicht, betreffend Zahlen, die der Gleichung $x^m = k\, s^r + x$ genügen, wenn x im s-adischen Ziffernsysteme r Ziffern hat. Die Anfrage betrifft also den Spezialfall $s = 10$, $m = 2$. Auch dieser ist dortbehandelt. Die Aufgabe hat für $m = 2$, s beliebig, r beliebig: 2^ν Lösungen, falls s, die Basis des Systems, ν verschiedene Primzahlen enthält.

Potsdam, am 12. Dezember 1904. OTTO MEISSNER.

Nachträglich noch bekannt geworden: G. Valentin, Brief an A. Palmström, Forhandlinger i Videnskabsselskabet i Christiania, Aar 1901, Oversigt S. 3—9.

Westend, 6. Februar 1905. P. ZÜHLKE.

3. Kleinere Notizen.

Bemerkung über Dupinsche Zykliden und logarithmische Spiralröhrenflächen und ihre quadratischen Einteilungen.

In mehreren meiner Lehrbücher, z. B. in Band I meiner Elemente der Stereometrie (Leipzig bei Göschen) findet man quadratische Einteilungen der Drehungszyklide, die mittels eines einfachen Inversionsverfahrens konstruktiv durchgeführt sind. Sowohl die kreisförmigen Krümmungslinien als auch orthogonale Scharen von „Loxodromen" ermöglichen solche Einteilungen. Jede Dupinsche Zyklide ohne Knotenpunkte hat unter den Loxodromen noch zwei schräge Kreisscharen, die eine Einteilung in rhombische Flächenteile geben. Im Falle der „quadratischen" Zyklide sind diese Rhomben kleine Quadrate.

In Figur 1 ist die Einteilung einer quadratischen Dupinschen Zyklide mit Hilfe desselben Inversionsverfahrens im Grund- und Aufriß dargestellt. Die beiden Scharen von Krümmungslinien geben die eine quadratische Einteilung, die beiden Scharen schräger Kreisschnitte die andere. Im Grundriß erscheint die eine Schar von Krümmungslinien als ein Büschel von Geraden durch den inneren Ähnlichkeitspunkt des äußeren und inneren Äquators, wobei die Gerade JJ_1 zugleich Potenzlinie für den größten und kleinsten Hauptschnittkreis des Aufrisses ist. Im Aufriß erscheint die andere Schar von Krümmungslinien als ein Büschel von Geraden durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt A der beiden letzten Kreise, wobei AA_1 die Potenzlinie der beiden Äquatoren im Grundriß ist. Die beiden Scharen schräger Kreisschnitte erscheinen im Auf- und Grundriß als Ellipsen.

Auf JJ_1 bezw. PQ liegen für den Aufriß die Mittelpunkte des einen Büschels von Kugeln, welche die Fläche orthogonal in der einen Schar von Krümmungslinien schneiden. Gegen jede dieser Kugeln ist die Zyklide zu sich selbst invers, und zwar geht jeder „Meridiankreis" in sich selbst über, jeder der Orthogonalkreise in einen andern. Diese Kugeln bilden ein leicht vorzustellendes Kugelbüschel, welches im Aufriß als Kreisbüschel erscheint, im Grundriß als konzentrische Kreisschar mit J_1 als Mittelpunkt. Jede „Loxodrome" der Fläche geht bei der Inversion in eine Loxodrome des entgegengesetzten Schnittwinkels über, jede kreisförmige in eine kreisförmige der anderen Schar.

Auf AA_1 liegen für den Grundriß die Mittelpunkte des zweiten Büschels von Kugeln, welches die Zyklide orthogonal schneidet, und zwar in je zwei Krümmungslinien der anderen Art. Auch gegen jede dieser Kugeln ist die Zyklide zu sich selbst invers. Jede Krümmungslinie der einen Art geht bei solcher Inversion in sich selbst über, jede der anderen Schar in eine andere. Jede Loxodrome geht in eine vom entgegengesetzten Schnittwinkel über, jede der schrägen Kreisschnittloxodromen in eine Kreisschnittloxodrome der anderen Art. Das neue Kugelbüschel erscheint im Grundriß als Kreisbüschel, im Aufriß als eine Schar konzentrischer Kugeln mit A als Mittelpunkt.

Die beiden Kugelbüschel sind orthogonal zu einander und zu einer leicht vorzustellenden Schar solcher Dupinscher Zykliden, die im Aufriß Hauptschnitte zeigt, die zu dem dortigen Kreisbüschel orthogonal sind.

Dies alles ist bekannt, nur vermißt man in der Literatur Zeichnungen entsprechender Art, obwohl diese ein vortreffliches Übungsbeispiel für die darstellende Geometrie bilden und bei der Kenntnis des obigen Inversionsverfahrens leicht herzustellen sind.

Legt man im Grundriß von A_1 aus an die beiden Äquatorkreise Tan-

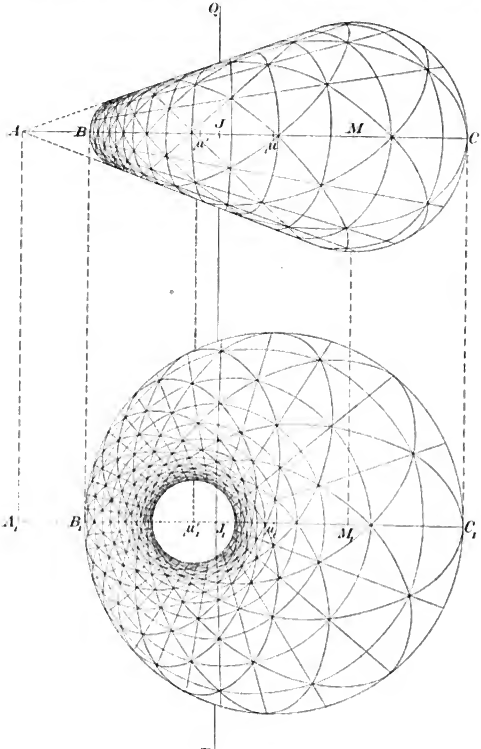


Fig. 1.

genten, so ergeben diese den Radius einer um A_1 zu legenden Kugel, welche im Grund- und Aufriß zwei Schnittpunkte auf der Horizontalen gibt. Benutzt man einen dieser Schnitte als Inversionszentrum, so geht das betreffende

Kugelbüschel in ein Ebenenbüschel über, die Zyklide in eine Drehungszyklide, das andere Kugelbüschel in ein orthogonales Kugelbüschel zur letzteren, welches seine Mittelpunkte auf der Drehungsachse hat. Die vom Mittelpunkte der letzteren an sie gelegte Tangente hat gegen die Äquatorebene eine Neigung γ. *Dieser Winkel γ entspricht erstens den Schnittwinkeln der schrägen Kreisscharen der Drehungszyklide, zweitens ist er der halbe Diagonalenwinkel für das Rechteck, auf welches sich die Zyklide bequem abbilden läßt.* Ist $\tan\gamma = m/n$ rational, so hat das Rechteck z. B. n Quadrate in jeder Horizontalreihe, m in jeder Vertikalreihe. Ist $\tan\gamma$ irrational, so sind m und n nicht gleichzeitig rationale Zahlen, mindestens eine davon ist ein unendlicher Dezimalbruch ohne Periode. Dann müssen die Quadrate unendlich klein genommen werden.

Das Rechteck ist dasselbe für alle Zykliden, die mit der gegebenen Drehungszyklide durch Inversion zusammenhängen. Wählt man jedoch das Inversionszentrum innerhalb statt außerhalb der Fläche, so vertauschen m und n ihre Rollen, und $\gamma_1 = \pi/2 - \gamma$ tritt an Stelle von γ. Daraus erklärt sich ein bekannter, von Steiner gegebener Satz über die Anzahl der äußerlichen bezw. der innerlichen Reihe von Berührungskugeln für den Fall der Schließung nach einer Reihe von Umgängen. Für die quadratischen Zykliden ist $\tan\gamma = m/n = 1$, also $\gamma = 45^0$.

Bei der allgemeineren Dupinschen Zyklide ohne Knotenpunkt findet man γ als halben Schnittwinkel der beiden innerlichen ungleichartig berührenden Kreise in der Aufrißzeichnung, die durch die obigen Inversionszentra gehen.

(Über J lassen sich ähnliche Betrachtungen anstellen wie über A_1.)

Soll eine solche Zyklide, bei der der Winkel γ einen allgemeinen Wert hat, auf ein Rechteck von der Basis 2π und der Höhe $2\pi\tan\gamma$ konform übertragen werden, so entstehen folgende einfache Beziehungen:

Rechtecksebene.	*Dupinsche Zyklide.*
X	$u = (\tau - \omega)$
Y	$v = (\varphi - \chi)\tan\gamma$
$X + Yi$	$u + vi = (\tau - \omega) + i(\varphi - \chi)\tan\gamma$
$f(X, Y) = 0.$	$f(u, v) = 0.$

Die Zyklidenkoordinaten haben dabei folgende Bedeutung. Die zum besprochenen Kreisbüschel des Grundrisses gehörigen Radii vectores, die von den Inversionspunkten (Büschelpunkten) P_1' und Q_1' ausgehen, haben Neigungen τ und ω. Setzt man der Reihe nach

$$u = (\tau - \omega) = 0, \pm\frac{2\pi}{n}, \pm\frac{4\pi}{n}, \pm\frac{6\pi}{n}, \cdots,$$

so erhält man durch die Kreise die isothermisch einteilenden „Meridianschnitte" der Figur, die durch J_1 gehen.

Im Aufriß mögen die Büschelpunkte des anderen Kreisbüschels P und Q sein. Die Neigungen der von ihnen ausgehenden Radii vectores mögen φ und χ sein. Setzt man der Reihe nach

$$(\varphi - \chi) = 0, \pm\frac{2\pi}{m}, \pm\frac{4\pi}{m}, \pm\frac{6\pi}{m}, \cdots,$$

also

$$v = (\varphi - \chi)\tan\gamma = 0\,,\ \pm\frac{2\pi}{n}\,,\ \pm\frac{4\pi}{n}\,,\ \pm\frac{6\pi}{n}\,,\ \cdots,$$

wo $m = n\tan\gamma$ sein soll, so erhält man durch die Schnittpunkte der Kreise des Büschels mit der Zyklide die dort geradlinig erscheinenden Kreisschnitte, die durch A gehen und die quadratische Einteilung vollenden.

Die gesamte Geometrie der Ebene ist dadurch auf die mit ∞^2 Riemannschen Blättern bedeckte Zyklide konform abgebildet.

Die schrägen Geraden der Ebene $Y = (X - c)\tan\varkappa$ gehen über in die Loxodromen

$$(\varphi - \chi)\tan\gamma = [(\tau - \omega) - c]\tan\varkappa.$$

Für die beiden schrägen Kreisschnittscharen ist $\varkappa = \pm\gamma$, die Gleichungen werden dann

$$(\varphi - \chi) = (\tau - \omega) - c.$$

Ist die Zyklide quadratisch, also $\gamma = 45^0$, so ist $\tan\gamma$ überall gleich 1 zu setzen.

Natürlich kann man das Rechteck auf die ganze Ebene konform abbilden, wobei die bekannten elliptischen Funktionen auftreten. Abgesehen davon ist aber alles, was bisher gesagt wurde, ganz elementar zu beweisen.

Hat die Zyklide Knotenpunkte, so werden die Beziehungen

$$X,\qquad u = (\tau - \omega)$$

$$Y,\qquad v = \frac{1}{\sin\alpha}\lg\frac{p}{q} = \frac{1}{\sin\alpha}\lg\frac{\frac{1}{2}(\psi - \alpha)}{\frac{1}{2}(\psi + \alpha)}.$$

Hier tritt an Stelle der Tangente die halbe kürzeste Sehne, der im entsprechenden Dreieck ein $\sphericalangle\,\alpha$ gegenüberliegt. Im Aufriß tritt an Stelle des Kreisbüschels eine Kreisschar, deren Bizirkularkoordinaten durch p/q gegeben sind. Legt man durch einen beliebigen Punkt E des größten Hauptschnittkreises (im Aufriß) einen durch die obigen Inversionszentra gehenden Kreis, so schneidet dieser die Horizontale unter einem Winkel ψ, der gewissermaßen eine Breitenkoordinate ist, während $u = (\tau - \omega)$ als Längenkoordinate dient. Die Zyklide wird dabei auf einen unbegrenzten Parallelstreif von der Breite 2π abgebildet, der jedoch doppelschichtig zu denken ist.

Der Zwischenfall der sich selbst berührenden Dupinschen Zyklide führt zu einer Abbildung auf den einschichtigen Parallelstreif. Dabei werden die Koordinatenbeziehungen zu folgenden:

$$X,\qquad u = (\tau - \omega)$$

$$Y,\qquad v = 2\sqrt{\varrho_1\varrho_2}\cdot\frac{z}{x^2 + z^2}.$$

Dabei sind x und z die Koordinaten der Aufrißebene, ϱ_1 und ϱ_2 sind die Radien des größten und kleinsten Hauptschnittkreises im Aufriß. Alles andere ist im wesentlichen wie vorher.

Eine interessante Anwendung finden diese Zykliden als Krümmungszykliden bei den *logarithmischen Spiralröhrenflächen.* Diese entstehen durch Wanderung einer veränderlichen Kugel, deren Mittelpunkt eine logarithmische

Spirale zurücklegt, während der Radius proportional dem Abstande vom Pole der Spirale ist. Die eine Schar von Krümmungslinien sind natürlich die Berührungskreise der Kugeln, die orthogonale Kurvenschar bildet die anderen Krümmungslinien, die sich als Loxodromen von Kreiskegeln mit dem Spiralpol als Spitze herausstellen und auch als Loxodromen eines Zylinders betrachtet werden können, dessen Grundlinie eine logarithmische

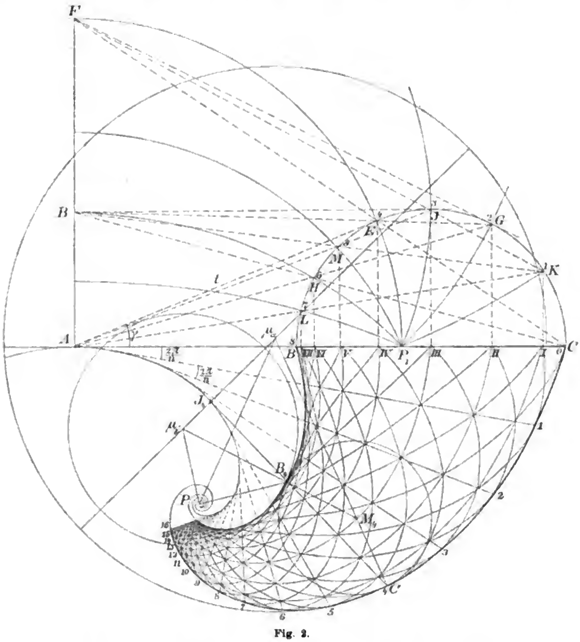


Fig. 2.

Spirale derselben Schar ist. Sämtliche Krümmungslinien zweiter Art erscheinen in der Projektion auf die Symmetrielinie als logarithmische Spiralen derselben Schar. Die beiden Scharen von Krümmungslinien sind zugleich Isothermen.

In der Figur 2 ist die quadratische Einteilung der Fläche folgendermaßen konstruiert worden, wobei der sichtbare und der unsichtbare Teil der Einteilung einander decken.

Gegeben seien die beiden Äquatoren der Fläche nebst einer der einbeschriebenen Kugeln, deren Kreisschnitt B_4C_4 als Gerade erscheint. Diese Meridianschnitte schattieren eine Spirale derselben Schar aus, die Hilfsspirale PJ_4A der Figur. Folgen diese Geraden unter dem konstanten Winkel $2\pi/n$ aufeinander, so geben diese Kreisschnitte aus Ähnlichkeitsgründen eine isothermische Einteilung. Der letzte sei die Gerade BC, welche die Hilfsspirale in A berührt. Den Kreisschnitt BC denke man sich (als Halbkreis) in die Äquatorebene geklappt und an diesen die Tangente AE gelegt, was den konstanten Winkel γ ergibt, für den $\tan\gamma = m/n$ ist. CE schneidet verlängert das in A auf AC errichtete Lot in einem Punkte F, der eine Tangente FG gibt. GA gibt einen weiteren Teilpunkt H, CH einen Punkt B des Lotes, den auch GE bestimmt. Die Tangente BJ bestimmt einen weiteren Teilpunkt J, FJ gibt K, KA und KB geben Teilpunkte L und M. Die Teilpunkte 0 bis 8 werden auf BC projiziert und geben dort Teilpunkte 0 bis VIII, durch welche nun die kongruenten logarithmischen Spiralen zu legen sind. In der Figur ist also jeder Meridianstreif in $m = 16$ Teile zerlegt. Bestimmt man nun n aus $\tan\gamma = m/n$ so gibt $2\pi/n$ den Winkel, unter dem die Meridiane aufeinander folgen müssen, damit die Einteilung eine quadratische werde. In der Figur sind 16 Meridianstreifen gebildet. *Dieser Sektor der Fläche ist durch diese Einteilung auf ein Quadrat konform abgebildet.*

Bei der konformen Abbildung der gesamten Fläche auf den unbegrenzten Parallelstreif ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{array}{ll}
X, & u = \vartheta \\
Y, & v = 2\tan\gamma \arctan\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)\tan\frac{\psi}{2}\right] \\
 & \quad = 2\tan\gamma\arctan\left[\sqrt{\frac{1-\sin\gamma}{1+\sin\gamma}}\tan\frac{\psi}{2}\right] \\
 & \quad = (\varphi - \chi)\tan\gamma \\
X + Yi, & u + vi \\
f(X, Y) = 0 & f(u, v) = 0.
\end{array}$$

ϑ ist der von einem beliebigen Meridianschnitte $\vartheta_0 = 0$ aus gemessene Neigungswinkel und entspricht der „Länge", ψ ist die an einem beliebigen Schnittkreise gemessene „Breite". Zweckmäßiger ist jedoch die Bizirkularkoordinate $(\varphi - \chi)$, die man erhält, wenn man um A mit $AE = t$ einen Kreis legt, der AC in den Punkten P_1 und Q_1 schneidet. Diese geben ein orthogonales Kreisbüschel zum Kreisschnitte, dessen Radii vectores Neigungen φ und χ haben. So entsteht der Ausdruck $(\varphi - \chi)\tan\gamma$, der der Reihe nach gleich

$$= 0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots$$

zu setzen ist, so daß

$$(\varphi - \chi) = 0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \frac{6\pi}{m}, \ldots$$

wird, wenn die Teilung quadratisch sein soll.

Die Beweise dafür ergeben sich mit Hilfe der Krümmungszyklide. Ist nämlich M_4 eine einbeschriebene Kugel, so gibt C_4M_4 den Krümmungsmittelpunkt μ_a für den äußeren Äquator der Spiralfläche, $M_4 B_4$ den für den inneren Äquator, μ_i. Legt man um μ_a und μ_i die Krümmungskreise, so hat man die Äquatoren einer Dupinschen Zyklide, bei der J_4 der obengenannte Punkt der Zyklide ist (innerer Ähnlichkeitspunkt J_1). Nach diesem Punkte geht die Gerade $C_4 B_4$, die senkrecht auf $\mu_a \mu_i$ ist. Die entsprechende Meridianebene schneidet also die Hilfszyklide in gleich großen Kreisen, was die Richtigkeit der obigen Einteilung bestätigt. Die „Krümmungszyklide" hat mit der Spiralfläche drei unendlich benachbarte einbeschriebene Kugeln gemein, ebenso drei benachbarte Meridianschnitte $C_n B_n$, ihre Krümmungskreise zweiter Art sind zugleich Krümmungskreise für die auf der Röhrenfläche liegenden Kegelloxodromen usw. Ein voller Umgang der Röhrenfläche ist auf die Krümmungszyklide konform abgebildet.

Unterwirft man die Röhrenfläche von einem Punkte ihrer Äquatorebene aus der Inversion, *so entsteht eine Röhrenfläche, deren „Äquatoren" logarithmische Doppelspiralen sind.* Diese Fläche hat ebenfalls als Krümmungslinien erster Art Kreisschnitte, die zugleich Isothermen sind, und gewisse Zyklidenloxodromen (die aus den Kegelloxodromen entstehen) als Orthogonalschar, nämlich die Krümmungslinien zweiter Art der Fläche haben. Die drei Typen der so entstehenden Flächen sind in Band III meiner Elemente der Stereometrie, Seite 305—307 gezeichnet.

Die allgemeinste Inversion verwandelt die Spiralröhrenfläche in eine Fläche, die gegen eine Kugel, das Bild der Symmetrieebene, zu sich selbst invers ist und von zwei wirklichen oder verallgemeinerten Kugelloxodromen begrenzt wird. Wiederum sind Kreisschnitte als Krümmungslinien erster Art vorhanden, die zugleich mit ihren Orthogonalen Isothermen sind. Von den Eigenschaften dieser Flächen sei die genannt, *daß ihre Krümmungszykliden kreisverwandt sind, und daß die „Polarpunkte" jedes Poles in bezug auf die einbeschriebenen (bezw. umbeschriebenen) Kugeln auf einer Loxodrome der tragenden Kugel liegen. Die Loxodromenschar dieser Fläche, die einen der Kreisschnitte unter den obigen Winkeln $\pm\gamma$ schneidet, hat dort Krümmungskreise, die die vollständige Krümmungszyklide umhüllen.*

Näheres über diese Flächen, die ich schon in Crelles Journal Band 94 behandelte, findet man in dem obigen Elementarwerke. Dort war bezüglich der Krümmungslinien zweiter Art ein Zweifel entstanden, den ich zu korrigieren bitte, da er sich als unbegründet herausgestellt hat. Herr Enneper hat, wie ich der „Encyklopädie" entnehme, die einfachste dieser Flächen im 14. Bande der Schlömilchschen Zeitschrift und in den Göttinger Mitteilungen behandelt und nach der Mitteilung des Herrn von Lilienthal behauptet, eine Röhrenfläche müsse ebenen Mittelpunktsweg haben, wenn ihre Krümmungslinien Isothermen sein sollen. Bei den Inversionsverwandten ist aber der Mittelpunktsweg nicht eben, und doch ist das Gesagte der Fall. Für diese Inversionsverwandten ist der Mittelpunktsweg, falls er eben ist, keine logarithmische Doppelspirale, sondern das Bild der Kurve, auf der das gewählte Inversionszentrum in der Reihe der einbeschriebenen Kugeln der ursprünglichen Spiralröhrenfläche seine „Polarpunkte" hatte. Wohl aber liegen die Punkte, in denen die einbeschriebenen Kugeln einander paarweise berühren, bei allen Inversionsverwandten der Spiralröhrenfläche auf der logarithmischen Doppelspirale bezw. auf einer verallgemeinerten Kugelloxodrome. Diese transzendente Flächengruppe hat demnach zahlreiche leicht zu übersehende und dabei interessante Eigenschaften. Ihre Krümmungsverhältnisse sind überall identisch mit denen ihrer Krümmungszykliden. Auch dreifach orthogonale Flächensysteme lassen sich mit ihrer Hilfe bilden, jedoch nicht mit Hilfe der Ebenen der kreisförmigen Krümmungslinien.

Konforme Abbildung der Minimalschraubenregelfläche auf der Ebene.

Alle Flächen dieser Art sind einander ähnlich, man kann also die Ganghöhe $h = 2\pi$ setzen, so daß für großes n der Ausdruck $\frac{2\pi}{n} - \frac{h}{n} = dz$ ist. Eine beliebige Schraubenlinie der Fläche habe von der Achse (z-Achse) die konstante Entfernung r. Zwei benachbarte r geben dann einen Horizontalstreifen der Fläche, der z. B. links von dz, rechts von dem Schraubenlinienelemente $ds = \sqrt{dz^2 + r^2 d\vartheta^2}$ begrenzt ist. Die letztere Gleichung kann man in der Form

$$\frac{ds^2}{dz^2} - \frac{r^2}{\left(\frac{dz}{d\vartheta}\right)^2} = 1$$

oder, da $dz = d\vartheta = \frac{2\pi}{n}$ ist, in der Form einer Hyperbelgleichung

$$\frac{ds^2}{dz^2} - \frac{r^2}{1^2} = 1 \tag{1}$$

schreiben. Denkt man sich also längs r jedes ds senkrecht herabhängend, so liegen alle Endpunkte in der betreffenden Hyperbel. Diese hat die Halbachse $dz = a$ und $1 = b$. Der Asymptotenwinkel ist also zu bestimmen aus $\tan\gamma = \frac{1}{dz} = \frac{n}{2\pi}$, sein kleiner Komplementwinkel γ_1 aus $\tan\gamma_1 = \frac{2\pi}{n}$, so daß für sehr großes n auch $\gamma_1 = \frac{2\pi}{n}$ ist. Die Exzentrizität dieser Hyperbel ist $e_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 + 1}$, also für die Grenze $(n = \infty)$ gleich 1, wodurch die Lage des Brennpunktes einfach bestimmt ist. Denkt man sich nun den schmalen Horizontalstreif der Schraubenfläche quadratisch eingeteilt, so ist für unendlich kleines dz auch der ebene Streif zwischen dem Radius r und der Hyperbel quadratisch eingeteilt, für die Grenze sind die Einteilungen sogar kongruent, also auch konform. Denkt man sich durch die Teilpunkte der Geraden r, die nun bis ins Unendliche verlängert werden kann, in der Ebene des Hyperbelstreifs konfokale Ellipsen gelegt, und läßt man konfokale Hyperbeln so aufeinander folgen, daß je zwei benachbarte Asymptoten den Winkel $2\pi/n$ einschließen, so ist die ganze Ebene in kleine Quadrate eingeteilt. Denkt man sich einen vollen Umgang der Schraubenfläche, deren aufeinanderfolgende Streifen kongruent sind, durch Fortsetzung der Schraubenlinienelemente quadratisch eingeteilt, *so ist die Fläche auf der ganzen Ebene konform abgebildet.*

Dabei folgen aber die großen Halbachsen der Ellipsen der Reihe

$$a = \frac{e^0 + e^{-0}}{2}, \quad \frac{e^{\frac{2\pi}{n}} + e^{-\frac{2\pi}{n}}}{2}, \quad \frac{e^{\frac{4\pi}{n}} + e^{-\frac{4\pi}{n}}}{2}, \quad \ldots,$$

die kleinen der Reihe

$$b = \frac{e^0 - e^{-0}}{2}, \quad \frac{e^{\frac{2\pi}{n}} - e^{-\frac{2\pi}{n}}}{2}, \quad \frac{e^{\frac{4\pi}{n}} - e^{-\frac{4\pi}{n}}}{2}, \quad \ldots,$$

so daß

$$\lg(a+b) = \lg\left[a + \sqrt{a^2-1}\right] = 0,\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \frac{6\pi}{n},\ \cdots,$$

$$\lg(b+a) = \lg\left[b + \sqrt{b^2+1}\right] = 0,\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \frac{6\pi}{n},\ \cdots$$

ist. Die letztere Reihe gibt zugleich die Einteilung der Linie r, so daß die Teilpunkte der geradlinigen Hyperbel durch

$$\lg\left[r + \sqrt{r^2+1}\right] = 0,\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \frac{6\pi}{n},\ \cdots \tag{2}$$

gegeben sind.

Dadurch ergeben sich, wenn man in der Ebene die Brennpunkte in den Lagen ± 1 beläßt, zwischen der Ebene und der Minimalschraubenfläche folgende Koordinatenbeziehungen, wobei es sich in der Ebene um elliptische Koordinaten handelt:

Ebene der konfokalen Ellipsen. *Minimalschraubenregelfläche.*

$$(1)\begin{cases} \lg\left[\frac{p+q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - 1}\right] \\ \arccos\frac{p-q}{2} \\ \lg[\ ] + i \arccos\frac{p-q}{2} \end{cases} \qquad (\mathrm{I})\begin{cases} \lg\left(r + \sqrt{r^2+1}\right) \\ z = \vartheta \\ \lg\left(r + \sqrt{r^2+1}\right) + iz \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} X \\ Y \\ X + Yi \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} \sqrt{r^2+1}\cdot\cos z \\ r\sin z \\ \sqrt{r^2+1}\cos z + ir\sin z \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} \left[\frac{p+q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - 1}\right]\cdot\frac{p-q}{2} \\ \left[\frac{p+q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - 1}\right]\sqrt{1 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2} \\ \left[\ \right]\frac{p-q}{2} + i\left[\ \right]\sqrt{1-\left(\frac{p-q}{2}\right)^2} \end{cases} \qquad (\mathrm{III})\begin{cases} \left[\sqrt{r^2+1} + r\right]\cos z \\ \left[\sqrt{r^2+1} + r\right]\sin z \\ [\ ]\cos z + i[\ ]\sin z. \end{cases}$$

Bildet man aber die Ebene der Ellipsen und Hyperbeln auf die der konzentrischen Kreise und Radien konform ab, so hat man die links stehenden Ausdrücke durch folgende zu ersetzen:

Ebene der konzentrischen Kreise.

$$(1^*)\begin{cases} \lg\varrho \\ \varphi \\ \lg\varrho + \varphi i \end{cases} \qquad (2^*)\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)\cos\varphi + i\,\frac{1}{2}\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)\sin\varphi \end{cases}$$

$$(3^*)\begin{cases} \xi = \varrho\cos\varphi \\ \eta = \varrho\sin\varphi \\ \xi + \eta i = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \end{cases}$$

Damit ist die quadratische Einteilung der Minimalschraubenregelfläche, die jetzt über die Achse hinaus erweitert zu denken ist, zur einen Hälfte auf das Äußere, zur anderen auf das Innere des Einheitskreises konform abgebildet. Nun sind aber die dabei links stehenden Formeln dieselben wie bei dem Katenoid mit Parameter (1). So bestätigt sich wiederum die Abwickelbarkeit dieser Schraubenfläche auf das Katenoid.

Die isogonalen Trajektorien (Loxodromen im weiteren Sinne) der Geraden und der Schraubenlinien der Schraubenfläche haben z. B. die Gleichung

$$\frac{z}{\lg\left(r+\sqrt{r^2+1}\right)-c}=\tan\varkappa,$$

die Orthogonalen eines Loxodromenbüschels („Kreise" im weiteren Sinne) die Gleichung

$$[\lg\left(r+\sqrt{r^2+1}\right)-a]^2+[z-b]^2=c_1^2.$$

Je zwei der oben dargestellten Ausdrücke sind gleich $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \cdots$ zu setzen, wenn sie eine quadratische Einteilung geben sollen. Sie sind also Isothermen in isothermischer Schreibweise. Die gesamte analytische Geometrie beider Ebenen ist auf die Minimalschraubenfläche übertragen. Die erste Kolonne läßt sich mit Hilfe hyperbolischer Funktionen einfacher schreiben.

Damit ist wieder eine interessante Abbildung mit elementaren Hilfsmitteln durchgeführt. Einer ähnlichen Behandlung ist auch die Binormalenfläche der gewöhnlichen Schraubenlinie fähig.

Hagen i. W. G. Holzmüller.

Während meines Sommeraufenthaltes im Riesengebirge 1903 lernte ich ein Distichon kennen, welches Joh. Bernoulli in ein Stammbuch eingetragen hat, das gegenwärtig im Besitze von Fräulein Hentschel in Jannowitz im Riesengebirge ist. Das Stammbuch gehörte einem Kandidaten der evangelischen Theologie Hentschel, der später Pastor in Lissa in Posen war. Ich besitze eine Photographie von dem Stammbuchblatt, also von der Handschrift Bernoullis. Das Distichon lautet:

Illa mihi Patria est ubi pascor, non ubi nascor;
Illa ubi sum notus, non ubi natus eram.

Owen.

Groninga, a. d. X. Kal. Jul.
CIƆDCCII.

Ornatiss. Possessori me humanissime compellanti hisce sui memoriam commendatam volo.

Joh. Bernoulli P. P.

Breslau. R. Sturm.

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

(Vacat.)

---

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Abraham, H. Recueil d'expériences élémentaires de physique. Seconde partie: acoustique, optique, électricité, magnétisme, Paris 1904, Gauthier-Villars. 454 S. Fr. 6,25

Abraham, M., und Föppl, A. Theorie der Elektrizität. Erster Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Zweite Auflage. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 443 S.

Bremer, F., Leitfaden der Physik, für die oberen Klassen der Realanstalten. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 294 S.

Bucherer, A. H. Mathematische Einführung in die Elektronentheorie. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 148 S.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Band IV 1_2 Heft 1: Ph. Furtwängler, Die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen — O. Fischer, Physiologische Mechanik (Bewegungsphysiologie). — O. T. Walker, Spiel und Sport. Leipzig 1904, B. G. Teubner.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de J. Molk. Tome I. Arithmétique. Fascicule 1. Paris 1904, Gauthier-Villars. Leipzig 1904, B. G. Teubner.

Fisher, I. Kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Übers. v. N. Pinkus. Leipzig 1904, B. G. Teubner., 72 S.

Fuchs, L., Gesammelte math. Werke. Herausgegeben von R. Fuchs und L. Schlesinger. Erster Band: Abhandlungen (1858—1875). Berlin 1904, Mayer und Müller. 475 S.

Fuhrmann, A., Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Erster Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper. Dritte Auflage. Leipzig 1904, B. G. Teubner.

Herz, N., Geodäsie. Eine Darstellung der Methoden für die Terrainaufnahme, Landesvermessung und Erdmessung. Mit einem Anhange: Anleitung zu astronomischen, geodätischen und kartographischen Arbeiten auf Forschungsreisen. Leipzig 1905, F. Deuticke. 417 S. ℳ 14.

Holzmüller, G., Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Erster Teil: Vierte Auflage. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 319 S.

Junker, F., Physikalische Aufgaben aus dem Gebiet des Magnetismus und der Elektrizität für die Oberklassen höherer Lehranstalten. Ulm 1904; Kommision B. G. Teubner, Leipzig. 48 S. ℳ 0,80.

Kippels, K., Involutorische Regelscharen zweiter und Raumkurven dritter und vierter Ordnung im geschart involutorischen Raum. Inaug. Dis. Strassb. 1904. 24 S.

Lechalas, G., Introduction à la géométrie générale. Paris 1904, Gauthier-Villors, 58 S. Fr. 1,75.

Mayer, H., Blondlot's N-Strahlen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet und im Zusammenhange dargestellt. Mähr. Ostrau 1904, R. Papauschek. 37. S. ℳ 0,75,

Mayer, Hans, Die neueren Strahlungen. 2. Auflage. Mähr. Ostrau 1904, Papauschek. 65 S.

Martus, H., Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den oberen Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Reifeprüfungen gestellten Aufgaben ansgewählt. Dritter Teil: Zweite Doppelausgabe mit vermehrten Aufgaben. Dresden 1904, C. A. Koch. 180 S. ℳ 4,20.

Marx, A., L'éther. Principe universel des forces. Mémoires résumés par C. Benoit. 217 S. Fr. 6,50.

Mie, G., Moleküle, Atome, Weltäther. Aus Natur und Geisteswelt 58. Leipzig 1904, B. G. Teubner, 137 S.

Moors, B. P., Le système des poids, mesures et monnaies des israélites d'après la bible. Paris 1904, A. Hermann. 62 S. Fr. 4.

Moore, H., Subgroups of the generalized finite modular group. The decennial publications. University of Chicago Press. 52 S. 1903. $ 75.

Müller, H., und Kutnewsky, M., Aufgabensammlung. Ausgabe A II, für Gymnasien. Zweite verbesserte und stark gekürzte Auflage. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 273 S.

Musil, A., Bau der Dampfturbinen. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 233 S.

Noack, V., Aufgaben für physikalische Schülerübungen. Berlin 1905, J. Springer. 170 S. ℳ 3,00.

Reusch, J., Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung. Leipzig 1904, B. G. Teubner, 84 S.

Riecke, E., Beiträge zur Frage des Unterrichts in Physik und Astronomie an den höheren Schulen. Vorträge gehalten von O. Behrendsen, E. Bose, E. Riecke, J. Stark und K. Schwarzschild. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 190 S.

Schlömilch, O., Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Erster Teil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. Bearbeitet von E. Naetsch. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 372 S.

Schwering, K., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Dritter Lehrgang. 2. Auflage. Freiburg i. B. 1904, Herder, 246 S. ℳ 1,50.

— Analytische Geometrie für höhere Lehranstalten. 2. Auflage. Freiburg i. B. 1904, Herder 25 S. ℳ 0,50.

Séguier, J. A. de, Théorie des groupes finis. Eléments de la théorie des groupes abstraits. Paris 1904, Gauthier-Villars. 176 S.

Starke, H. Experimentelle Elektrizitätslehre mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 422 S.

Stolz, O., und Gmeiner, J. A. Einleitung in die Funktionentheorie. I. Abteilung. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 242 S. (B. G. Teubners Lehrbücher der mathematischen Wissenschaften XIV.)

Sturm, A., Geschichte der Mathematik. Leipzig 1904, Göschen. Sammlung Göschen Nr. 226. ℳ 0,80.

Suppantschitsch, R., Über Oberflächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt. Progr. der 3. deutschen Staatsrealschule. Prag 1904. 40 S.

Tannery, J., Introduction à la théorie des fonctions d'une variable I: Nombres irrationnels, ensembles, limites, séries, produits infinis, fonctions élémentaires, dérivées. Paris 1904, A. Hermann. 422 S.

Thomson, J. J., Elektrizität und Materie. Übers. v. G. Siebert. Braunschweig 1904, Vieweg u. Sohn. 100 S. ℳ 3,60.

Vailati, G., Sur une classe remarquable de raisonnements par réduction à l'absurde. S. A. Revue de métaphysique et de Morale. Paris 1904, A. Colin.

Vries, H. de., Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume. Leipzig 1905, Göschen. 78 S. ℳ 3.

Waeber, R., Lehrbuch der Physik. 14. Auflage. Leipzig 1904, F. Hirt u. Sohn. 343 S. ℳ 3,75.

Wallentin, I., Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. Leipzig 1904, B. G. Teubner. (B. G. Teubners Lehrbücher der mathematischen Wissenschaften XV.) 444 S.

Webster, A. G., The dynamics of particles and of rigid, elastic, and of fluid bodies, being Lectures on mathematical physics. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 588 S.

Wüllenweber, F. W., Diagramme der elektrischen und magnetischen Zustände und Bewegungen. Leipzig 1904, A. Barth. 64 S.

Berichtigung zu Heft 1 und 3.

S. 87 ist die Nummer **15** der Anfrage in **16**, S. 267, 268 sind die Nummern **16—19** der Anfragen in **17—20** umzuändern.

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE
IN BERLIN

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN

8. BAND. 4. HEFT.

MIT [illegible] TEXTFIGUREN.

AUSGEGEBEN AM [illegible] FEBRUAR 1905.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Ludwigskirchstraße 6[1]

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 82, und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mittelträgheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 14 Mark; jährlich sollen nicht mehr als 6 Einzel-Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

[Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.]

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft:

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:
K. Cwojdziński, Fr. Daniëls, E. Eckhardt, J. Edalji, P. Epstein, A. Fleck, E. Gehrcke, W. Godt, H. Graf, R. Güntsche, J. Horn, Ed. Janisch, W. Kapteyn, G. Kober, P. Kokott, J. Kraus, R. Krause, J. Kürschák, Ph. Maennchen, L. Matthiessen, O. Meissner, E. Meyer, W. F. Meyer, P. Milan, G. A. Miller, E. Rath, J. Reusch, L. Saalschütz, E. Schultz, R. Schüssler, M. Simon, O. Spieß, H. Stahl, G. Teixeira, H. Thieme, W. Velten, A. Visnya, J. de Vries, A. Wendler.

Hierzu zwei Beilagen von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig und B. G. Teubner in Leipzig, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.