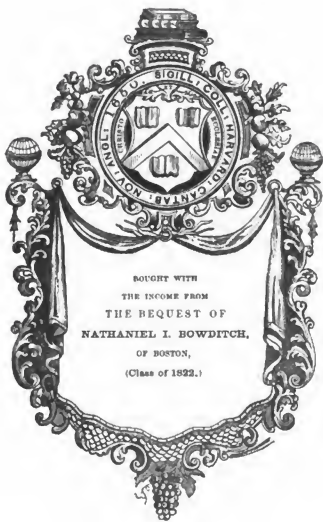




*Abhandlungen von Friedrich
Wilhelm Bessel: bd. I. ...*

Friedrich Wilhelm Bessel





BESSEL.

INDEX

TABLE OF CONTENTS

1917

1918

1919



o
ABHANDLUNGEN //

VON

FRIEDRICH WILHELM BESSEL /

HERAUSGEGEBEN

VON

RUDOLF ENGELMANN,

DR. PHIL., FORMALS OBSERVATOR DER LEIPZIGER STERNWART.

IN DREI BÄNDEN.

u | 9
ERSTER BAND:

I. BEWEGUNGEN DER KÖRPER IM SONNENSYSTEM. II. SPHÄRISCHE ASTRONOMIE.

MIT DEM BILDNISS BESEL'S UND ZWEI LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG,

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN.

1875.

524
17

2624
1-3

17

121
Ast. n. 176.2

1878, March 11.
Boudeten fund.
(Vrl. I-10.)

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

DEN

MANEN BESSEL'S.

Vorrede.

Mit dem Werke, dessen erster Band den Astronomen hier vorliegt, erfüllt sich ein seit längerer Zeit gehegter Wunsch und Plan des Herausgebers. Wie er selbst, so werden wohl Manche mit ihm es als Mangel empfunden haben, dass BESSEL's Arbeiten zum grössten Theil in einer Reihe von Zeitschriften und umfangreicheren Werken zerstreut sind, deren Kenntnissnahme und Studium oft mit Unbequemlichkeiten und Schwierigkeiten verbunden ist; hierdurch geschieht es leicht, dass besonders jüngere Astronomen die Originalarbeiten des Meisters entweder gar nicht, oder doch nicht zu richtiger Zeit und in dem richtigen Zusammenhange kennen lernen, um daraus sofort den grösstmöglichen Nutzen zu ziehen. Bei der Wichtigkeit, die fast alle, auch die kleineren Aufsätze und Abhandlungen des grossen Mannes für so viele Zweige der Himmelskunde besitzen, scheint darum eine systematisch geordnete Sammlung, wie sie der Herausgeber im Sinn hat, auch heute noch, fast 30 Jahre nach BESSEL's Tode, von Werth und Nutzen zu sein.

Eine durchaus vollständige Ausgabe sämmtlicher, auch der kleinsten Arbeiten BESSEL's zu veranstalten, konnte nicht die Absicht sein; dies würde die Kräfte des Einzelnen übersteigen und könnte nur unter Zuziehung und mit Unterstützung Mehrerer, sowie materieller Beihilfe wissenschaftlicher Körperschaften, bez. einer Regierung geschehen; auch würde die Kostspieligkeit einer solchen, viele Bände umfassenden Gesamtausgabe die Anschaffung und dauernde Benutzung nur sehr Wenigen ermöglichen. Ueberdies dürfte bei der besondern Natur der Besselschen Arbeiten immerhin die Frage aufgeworfen werden und ein Zweifel entstehen können, ob der durch eine solche absolut vollständige Ausgabe gestiftete Nutzen dem erforderlichen Aufwand an Zeit und Kräften entspräche. Solche Erwägungen und vor allem der Wunsch, die Original-Arbeiten des vielseitigsten und fruchtbarsten Astronomen des 19. Jahrhunderts möglichst Vielen zugänglich zu machen, bestimmten den Herausgeber zu einer ausgewählten Sammlung. Der Bedenken und Schwierigkeiten, denen eine solche Ausgabe, die unter dem Guten nur das Beste geben will, unterliegt, war sich derselbe von vornherein wohl bewusst. Durch die Auswahl der Arbeiten und die Anordnung des Gewählten in anderer als einfach zeitlicher Folge musste ein subjectives Element hineingetragen werden, welches nur bei einer vollständigen und chronologisch geordneten Ausgabe, hier aber nicht durchaus zu vermeiden war und das nur durch möglichste Sorgfalt auf ein geringstes Maass gebracht werden konnte. Wie weit dies gelungen, wie weit die Durchschnittswünsche und -Bedürfnisse befriedigt sein mögen, muss dem nachsichtigen Urtheil der Leser zu schätzen überlassen bleiben. Jedenfalls musste die Besorgniss, dem Einen vielleicht zu wenig, dem Andern zu viel zu geben, an einer Stelle etwas zu bringen, was ebensowohl oder vielleicht noch geeigneter an einer andern hätte Platz finden können, überwogen werden durch den Gedanken und die Ueberzeugung, dass überhaupt eine Ausgabe der Original-Abhandlungen BESSEL's erwünscht und nutzbringend wäre. Denn je weiter wir uns von der Quelle entfernen, desto weniger rein, wenngleich voller, da mit Andern vermischt, fliesst der Strom; desto umständlicher und schwerer wird es, zum Anfang und Ursprung zurückzukehren.

Im Besondern war nun der Plan und Zweck, den der Herausgeber bei vorliegender Ausgabe vor Augen gehabt und möglichst rein durchzuführen gesucht hat, der folgende: Es sollten von allen Aufsätzen und Abhandlungen diejenigen aufgenommen, aus allen grössern Werken dasjenige ausgewählt werden, was unbestritten bleibenden Werth besitzt. Dies sind zunächst alle Arbeiten aus dem Gebiete der reinen Mathematik, der physischen und sog. theoretischen Astronomie. Ferner als zweite Gruppe die Arbeiten, in denen sich die Eigenart BESSEL's vielleicht am besten zeigt, die auf dem Fundament der Beobachtung Untersuchungen und Betrachtungen

allgemeiner theoretischer Natur aufbauen; hierzu gehören vor allem die meisten der sphärischen Astronomie, der Theorie der Instrumente und der Stellarastronomie; ferner viele Arbeiten aus der Geodäsie und Physik. Endlich war als Drittes eine Reihe von Aufsätzen zu berücksichtigen, die theils reine Beobachtungsdata, deren Werth durch die Zeit kaum vermindert, sicher aber nicht vernichtet worden ist, enthalten, theils als nicht unwichtige Bindeglieder zwischen grösseren Arbeiten das Verständniß des Entstehens dieser erleichtern und darum schon aus geschichtlich-genetischem Grunde Aufmerksamkeits- und Erhaltung verdienen. Ausgeschlossen wurden sämtliche populäre Aufsätze und Schriften, von denen die meisten ja noch leicht zugänglich sind. Ferner alle die Resultate von Beobachtungen in der Form von Catalogen, Tafeln oder numerischer Rechnungen enthaltenden Zahlensammlungen, deren Werth für den Einzelnen entweder ein geringerer ist, oder welche durch neuere, aus schärferen Beobachtungen hervorgegangene ersetzt worden sind; in manchen solchen Fällen rühren die späteren Daten von BESSEL selbst her und es sind dann entweder diese letzteren nur allein berücksichtigt (z. B. im Fall der Tafeln für den Hugenischen Saturnsatelliten), oder doch aus den früheren nur ein kurzer Auszug gegeben (z. B. bei den Refractionstafeln). Bei einzelnen Abhandlungen, die reine Beobachtungsdaten in grosser Ausdehnung neben bez. als Grundlage von Untersuchungen allgemeinerer Art enthalten, schien es gerathen, lieber nur das Wesentliche und zum Verständniß des Ganzen Nöthige aufzuführen, als ganze Seiten und Bogen mit Zahlen zu füllen, die doch fast nie gebraucht werden; dies gilt z. B. für die Abhandlung über den Cary'schen Kreis, sowie für die Fortsetzungen der Untersuchungen über den Hugenischen Saturnsatelliten. Mussten in solchen immerhin höchst seltenen Fällen — es betrifft dies etwa nur 8 bis 10 Abhandlungen — die Originalzahlen weggelassen oder durch abkürzende Werthe ersetzt werden, so ist dies stets entweder im Text oder in einer Anmerkung durch [] kenntlich gemacht. Endlich gibt es eine Reihe von meist grösseren Werken, welche zwar an sich von hoher und bleibender Bedeutung, aber doch zu umfangreicher sind, um vollständig hier aufgenommen zu werden; aus ihnen wurden die Theile oder Kapitel ausgewählt, deren Studium das grösste Interesse bietet und welche unabhängig von dem Uebrigen und als mehr oder weniger selbständiges Ganzes auftreten. Es gilt dies namentlich für die *Fundamenta astron.* und die *Tabulae Regionum*, die Werke über Gradmessung und darauf Bezügliches. Ein besonderes und ausnahmsweises Verfahren fand gegenüber den in den „Astronomischen Untersuchungen“ niedergelegten Abhandlungen statt. Der Wunsch, Alles zu geben, was diese enthalten, musste milderdrückt werden, da die Sammlung um einen vollen Band stärker geworden und daher die Absicht eines praktischen und dem Einzelnen zugänglichen Werkes gestört worden wäre. Andererseits aber waren gerade diese Arbeiten zu wichtig, um gänzlich übergangen zu werden; bei ihrer noch ziemlich häufigen Verbreitung wäre zwar eine völlige Unterdrückung gestattet und von geringerem Nachtheil gewesen, indessen hätte doch die Einheit gewisser Richtungen, welche der Herausgeber möglichst in Wahl und Anordnung der Abhandlungen jeder Abtheilung zu wahren gesucht hat, gelitten und es schien darum geboten, eine dies thunlichst berücksichtigende Auswahl zu treffen. So wurden (zunächst) die folgenden Stücke weggelassen, die hinsichtlich des in andern Aufsätzen Gegebenen, und zum Theil auch mit Rücksicht auf die räumliche Ausdehnung die geeignetsten schienen: I. Theorie eines mit einem Heliometer versehenen Aequatorrealinstruments. II. Besondere Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte. III. Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen. X. Analyse der Finsternisse. XII. Merkurdurchgang vom 4.5. Mai 1832. XIII. Beobachtung der Sonnenfinsterniss am 15. Mai 1836. XIV. Neue Berechnungsart für die Methode der Entfernungen des Mondes von andern Himmelskörpern. — Das Finsterniss-Problem im engsten Sinn ist das einzige, welches in vorliegender Sammlung gänzlich unvertreten ist; doch wird dieser Mangel zufolge der Arbeiten Anderer auf diesem Gebiete, namentlich HANSEN's, vielleicht weniger empfunden.

Die Anordnung der einzelnen Aufsätze und Abhandlungen sollte zunächst eine sachliche, Gleichartiges zusammenfassende, in zweiter Linie eine genetisch-chronologische sein. Dementsprechend wurden überhaupt acht Abtheilungen unterschieden, deren Folge im Grossen und Ganzen zugleich angibt, in welcher Reihe die verschiedenen Zweige der Astronomie und verwandten Wissenschaften BESSEL anzogen und beschäftigten. Es sind dies: I. Bewegungen der Körper im Sonnensystem, II. Sphärische Astronomie (erster Band); III. Theorie der Instrumente, IV. Stellarastronomie, V. Mathematik (zweiter Band); VI. Geodäsie, VII. Physik, VIII. Verschiedenes (dritter Band). In jeder dieser Hauptgruppen wurden nun die Arbeiten so angeordnet, dass ihre Anfeinanderfolge das möglichst vollständige, durch BESSEL selbst zu erreichende Bild der Entwicklung und Vervollkommnung der betr. Gegenstände und Probleme darbietet. Es liegt in der Natur der Dinge, dass es

bei manchen Arbeiten zweifelhaft sein konnte, ob sie in dieser oder jener Gruppe, an der oder jener Stelle einer Gruppe ihren besten Platz fänden, und es mag hier noch mehr als bei der Auswahl der verschiedenen Stücke die Subjectivität des Herausgebers zum Vorschein kommen. Jedenfalls war es sein Bemühen, persönlich willkürlicher Auffassung möglichst wenig Spielraum zu lassen, und es wurde deshalb gegenüber dem innern Zusammenhang alles übrige, besonders auch räumliche Ausdehnung, nur in sehr untergeordnetem Maasse berücksichtigt, obschon auch die Absicht, den drei Bänden nahezu gleiche Stärke (etwa 45 Bogen) zu geben, immer festgehalten wurde. Das am Schluss des dritten Bandes zu gebende vollständige Inhaltsverzeichnis sämtlicher Drucksachen BESSEL's wird übrigens das Auffinden einer vielleicht an einer Stelle vermissten, aber doch vorhandenen Abhandlung erleichtern.

Dieses auf Grund des bekannten Busch'schen (Königsb. Beob. Abth. XXIV) zusammengestellte Verzeichniß enthält 389 Nummern. Hiervon sind kleinere Mittheilungen von Beobachtungen oder numerischen Rechnungen 113, Recensionen und Anzeigen 47, populäre Aufsätze und Schriften 17, welche 177 Nummern von vornherein auszuschliessen waren. Von den übrigbleibenden 212 wurden ungefähr 135 Werke, Abhandlungen, Mittheilungen, Briefe ganz oder im Auszug aufgenommen, die sich auf die acht Hauptabtheilungen in etwa 150 Stücken folgendermassen vertheilen: Bewegungen im Sonnensystem 23, Sphärische Astronomie 28, Theorie der Instrumente 22, Stellarastronomie 21, Mathematik 19, Geodäsie 10, Physik 12, Verschiedenes ca. 15 Stücke.

Auf correcte Herstellung des Textes wurde selbstverständlich die grösste Sorgfalt verwandt, da Werth und Brauchbarkeit der Ausgabe in erster Linie davon abhängen. Bei nahezu zwei Drittel konnten die gedruckten Originale (meist Eigenthum des Herausgebers) direct zum Satz verwandt werden; etwas mehr als ein Drittel musste abgeschrieben werden; die Abschrift wurde dann vom Herausgeber in den Fällen genau mit dem Original verglichen, wo letzteres nur auf kurze Zeit benutzt und die Correcturen nicht mit ihm gelesen werden konnten. Dies gilt indessen nur von den vier aus dem Königsberger Archiv f. Naturwiss. u. Mathemat. und den aus den Schriften der Berliner Akademie d. Wissensch. entnommenen Abhandlungen; bei allen andern wurden zwei Correcturen nach dem Original gelesen: die erste von dem Assistenten der Leipziger Sternwarte, Herrn Leppig, der auch die meisten Abschriften mit Sorgfalt ausführte, die zweite, ganz unabhängig von der ersten, vom Herausgeber. Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass die Druckfehler und Berichtigungen der Originale, soweit sie überhaupt zugänglich waren, berücksichtigt wurden; bei wesentlichen Fehlern, z. B. in Formeln, ist auch die Quelle, wonach sie verbessert wurden, angegeben. Auf diese Weise glaubt der Herausgeber wenn auch nicht absolute, so doch die unter den gegebenen Verhältnissen grösstmögliche Correctheit erreicht zu haben; sollten trotzdem noch in dem vorliegenden ersten, wie in dem zweiten Bande erwähnenswerthe Fehler vorkommen, vor allem in den Formeln der Originalabhandlungen, so wird er für deren rechtzeitige Mittheilung dankbar sein und Alles ihm in dieser Weise noch Bekanntgewordene am Schluss des dritten Bandes aufführen. — Da Drucksachen und Manuscripte im Wesentlichen vollständig und geordnet vorliegen, so wird der Fertigstellung des zweiten und dritten Bandes im Frühjahr bez. Sommer 1876 nichts entgegenstehen.

Es erübrigt noch das anzuführen, was der Herausgeber selbst geglaubt hat, den Originalen hinzuzufügen zu müssen, um die Ausgabe zu einer möglichst brauchbaren, wie in sich einheitlichen und auch nach formeller Seite würdigen und harmonischen zu gestalten. — Zunächst sind dies Literatur-Angaben. Der Wunsch, bei den betreffenden Abhandlungen solche vollständig zu geben, musste mit Rücksicht auf die für die Redaction des Werkes zu Gebote stehende verhältnissmässig geringe Zeit unterdrückt werden; neben den nothwendigsten, auf Werke und grössere Abhandlungen bezüglichen Verweisen ist deshalb nur die Literatur der Astron. Nachrichten (Bd. 1—85), als der für den Astronomen immerhin wichtigsten Zeitschrift, aufgeführt und irgend Erhebliches hierbei hoffentlich nicht übersehen worden. Ferner bietet der Briefwechsel zwischen OLBERS und BESSEL (herausgegeben von A. ERMAN, Leipzig 1852) so viele Anhaltspunkte und gestattet so lehrreiche Einblicke in das Werden und Wachsen vieler und wichtiger Arbeiten BESSEL's, ist überdies auch so verbreitet, dass Hinweise auf diesen in möglichstster Vollständigkeit nicht überflüssig erschienen; dieselben sind in den Noten kurz unter „Br. m. O.“ und das bezüglich eines bestimmten Gegenstandes von OLBERS Geschriebene mit (O.) hinter der Seitenzahl angegeben. Ausser diesen literarischen Notizen enthalten die Bemerkungen am Fusse jeder Abhandlung noch die derselben entsprechende Nummer des allgemeinen Verzeichnisses, welches wie erwähnt, den Schluss des dritten Bandes bilden soll; endlich auch event. Hinweise

auf vorangehende oder folgende hier gedruckte Abhandlungen, sowie auf andere denselben Gegenstand in gleicher oder analoger Weise behandelnder und darum nicht zum Abdruck gelangter Arbeiten BESSEL's selbst. Alles auf diese Weise in Anmerkungen oder Text vom Herausgeber Hinzugefügte ist, um sofort kenntlich zu sein, in [] gesetzt.

Die kurze, der bekannten Autobiographie folgende Fortsetzung des Lebensabrisses soll nur gewissermassen das historische Band zwischen den einzelnen Abhandlungen flechten, die stetige Entwicklung und Vervollkommnung gleichartiger Arbeiten, sowie das Entstehen anderer, scheinbar unvermittelt nebeneinander stehender dem mit BESSEL's Leben weniger Vertrauten leichter zum Verständniss bringen, und erhebt keineswegs den Anspruch, Neues oder das Bekannté nur in neuer Form zu geben; eine wirkliche und erschöpfende Lebensgeschichte BESSEL's ist mehr oder weniger eine Geschichte der modernen Astronomie und nicht in wenigen Zeilen abzuhandeln.

Das diesem ersten Band vorstehende Bildniss BESSEL's, nach MANDEL's bekanntem Stich photo-lithographirt, wird, wie auch das für den dritten Band beabsichtigte Facsimile eines Bessel'schen Briefes, vielleicht Manchem als nicht unwillkommene Zugabe erscheinen.

Schliesslich ist es Pflicht, allen Demen zu danken, die in irgend einer Weise das Werk gefördert und zu seiner Herstellung beigetragen haben; namentlich den Herren AUWERS, BRUINS, A. ERMAN, C. A. F. PETERS fühlt sich der Herausgeber in mehr als einer Beziehung zu Dank verpflichtet.

Erleichtert die Sammlung dem Einzelnen und besonders dem jüngern Astronomen die Kenntniss und das Studium der Arbeiten BESSEL's, so geschieht dem vorgestellten Zweck durchaus Genüge; betrachtet wohlwollendes Urtheil dieselbe zugleich als einen nicht werthlosen Stein zu dem Denkmal, welches die Astronomie dem grossen Manne schuldet, und wie ihn der Epigone im Stande ist beizutragen, so darf der Herausgeber wohl mehr als befriedigt sein.

Leipzig, im September 1875.

Der Herausgeber.

Inhalt des ersten Bandes.

Lebensabriß.

- „Kurze Erinnerungen an Momente meines Lebens“ . . . XI
 Fortsetzung (vom Herausgeber) XXIV

I. Bewegungen der Körper im Sonnensystem . . . 1—204

1. Berechnung der Harriot'schen und Torporley'schen Beobachtungen des Cometen von 1607	1
2. Beiträge zur Berechnung der elliptischen Bahn eines Cometen	6
3. Ueber die Berechnung der wahren Anomalie in einer von der Parabel nicht sehr verschiedenen Bahn	9
4. Rechtfertigung des in der „Monatl. Corresp.“ Sept. 1805 vorgeschlagenen Verfahrens, die Excentricität einer Cometenbahn zu finden	12
5. Zur Bestimmung des Olbers'schen M	12
6. Beitrag zur Cometentheorie	13
7. Ueber die Berechnung der wahren parabolischen Anomalie aus der Zeit, für Fälle, in welchen sie sich 180° nähert	15
8. Analytische Auflösung der Kepler'schen Aufgabe	17
9. Entwicklung einer allgemeinen Methode, die Störungen der Cometen zu berechnen	20
10. Zusatz zur vorangehenden Abhandlung 9	28
11. Auszug aus einem Brief an LINDENAU	29
12. Beitrag zu den Methoden, die Störungen der Cometen zu berechnen	—
13. Beobachtungen über die physische Beschaffenheit des Halley'schen Cometen und dadurch veranlaßte Bemerkungen	54
14. Bemerkungen über mögliche Unzulänglichkeit der die Anziehungen allein berücksichtigenden Theorie der Cometen	80
Literatur der Astr. Nachr. über Cometen	83
15. Projectirte Störungstafeln. Aus einem Schreiben an LINDENAU	—
16. Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht	84
Literatur der Astr. Nachr. über Störungen	102
Tafel der Functionen l_k^0 und l_k^1 (zu Abb. 16)	103

pag.

17. Untersuchungen über den Planeten Saturn, seinen Ring und seinen vierten Trabanten	110
18. Bestimmung der Bahn des Hugenischen Saturns-Satelliten	127
19. Erste Fortsetzung der Untersuchungen über die Bewegung des Hugenischen Saturns-Satelliten	147
20. Zweite Fortsetzung der Untersuchungen über die Bewegung des Hugenischen Saturns-Satelliten	148
21. Bestimmung der Lage und Grösse des Saturnsringes und der Figur und Grösse des Saturns	150
22. Theorie des Saturnsystems	160
Literatur der Astr. Nachr. über Saturn und seine Trabanten	194
23. Ueber den gegenwärtigen Zustand unserer Kenntniß der Sonnenbewegung und die Mittel zu ihrer Verbesserung	—

II. Sphärische Astronomie 205—343

24. Berechnung der im Jahre 1807 bald nach dem Neumonde vorkommenden Sternbedeckungen	205
25. Anleitung und Tafeln, die stündliche Bewegung des Mondes zu finden	206
26. Ueber die Vorausberechnung der Sternbedeckungen	209
27. Ueber die Wirkung der Strahlenbrechung bei Mikrometerbeobachtungen	217
28. Einige Resultate aus BRADLEY'S Beobachtungen	222
29. Ueber die astronomische Strahlenbrechung	234
30. Ueber Refraction. Aus einem Brief an SCHUMACHER	235
31. Ueber den Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen	237
32. Disquisitiones de refractione institutae. (Fundam. astron.)	244
33. Refractio Astronomica. (Tabb. Regiomont.)	256
34. Sur la réfraction astronomique	258
Literatur der Astr. Nachr. über Refraction	260
35. Ueber Aberrations- und Nutationstafeln	261
36. Ueber neue Aberrations- und Nutationstafeln	—
37. Untersuchung der Grösse und des Einflusses des Vorrückens der Nachtgleichen (nebst Auszügen aus den Fundam. astron.)	262

	pag.		pag.
38. Ueber die Constante der Aberration (Brief an LINDENAU)	285	Literatur der Astr. Nachr. über Aberration, Nutation, Präcession	316
39. De nutatione et aberratione (Fundam. astron.) . .	286	47. Berechnung des Orts eines Gestirnes aus beobachteten Alignements mit 4 Sternen	—
40. Formeln zur genauen Berechnung der Nutation und Aberration	291	48. Ueber die Bestimmung der Polhöhe durch das Passageninstrument	317
41. De media Aequinoctiorum Praeessione (Tabb. Region.)	296	49. Ueber die Neigung der Ebene des Saturnsringes . .	319
42. De motu proprio Stellarum fixarum (Tabb. Region.)	300	50. Reductio observationum Lunae [in meridiano] . .	322
43. De Nutatione (Tabb. Region.)	302	51. Ueber die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe	327
44. De Aberratione (Tabb. Region.)	304	Berichtigungen	346
45. Ueber die Aberration der Planeten und Cometen . .	307		
46. Einfluss der Präcession, Nutation und Aberration auf die Resultate mikrometrischer Messungen . .	313		

Lebensabriss.

Kurze Erinnerungen an Momente meines Lebens.

Jugendzeit — erste 25 Jahre.*)

Geboren bin ich in Minden am 22. Juli 1784. Mein Vater war Regierungssecretär, Rendant verschiedener Kassen, Justitiar der damaligen Commende des Johanniter-Malteser-Ordens Wietersheim, von welcher letztern Function er den Titel Justizrath erhielt. Unter westphälischem Regimente wurde er erster Greffier des Tribunals. Nach zurückgekehrter glücklicherer Zeit wurde er nach Paderborn versetzt, wo ich ihn 1819 zum letzten Male gesehen habe. Meine Mutter war die Tochter eines Pastor SCHRADER in Rehme. Beide Aeltern sind mir immer Vorbilder von Redlichkeit geblieben, wurden auch als solche allgemein anerkannt. Der Vater war aber nicht allein ein redlicher, er war auch ein kluger Mann. Die Mutter gewährte das vollendetste Bild aufopfernder Liebe für die Ihrigen, welches mir je vorgekommen ist; bei reifern Jahren habe ich ihr Thun häufig in das Gedächtniss zurückgerufen, mich aber keines einzigen Wunsches von ihr erinnern können, welcher sich nicht auf die Letztern bezogen hätte. Indessen hatten meine Aeltern, bei einer aus drei Söhnen und sechs Töchtern bestehenden Familie und dem für diese nur bei der äussersten Sparsamkeit ausreichenden Einkommen, mit schweren Sorgen zu kämpfen, und es erforderte oft das reichliche Nachdenken des Vaters, so wie auch seine angestrengteste Thätigkeit, die zu dem Unterhalte und dem Unterrichte so vieler Kinder nöthigen Mittel herbeizuschaffen. Er war dennoch darin erfolgreich: hätte er länger gelebt, so würde es ihn, den Subalternbeamten eines Justizcollegiums, glücklich gemacht haben, seinen ältesten und seinen jüngsten Sohn zu der Würde von Präsidenten des Landgerichts, den erstern in Kleve, den letztern in Saarbrücken, gelangen zu sehen; während der mittlere Sohn zwar kein Rechtskundiger geworden ist, sich aber doch mancher Auszeichnungen zu erfreuen

gehabt hat. Von den Töchtern verheiratheten sich die Hälfte; von den unvermählt gebliebenen sind zwei gestorben. Sieben Glieder der Familie leben also noch (12. Febr. 1846.)

Das Bessel'sche Geschlecht ist ein adeliges. Einer meiner Vorfahren, ich glaube mein Urgrossvater, hat aber das gewöhnliche Unterscheidungszeichen solcher Geschlechter nicht angewandt (ich erinnere mich nicht gehört zu haben, aus welchem Grunde) und mein Grossvater und Vater sind ihm darin gefolgt. Der Letztere und meine Brüder haben mir gesagt, dass unser Anspruch an dieses Unterscheidungsword hierdurch nicht verloren gegangen ist, vielmehr wir berechtigt sind ihn wieder geltend zu machen, was jedoch keinem von uns wünschenswerth erschienen ist. Vettern von uns haben sich wieder in den Besitz dieses Wortes gesetzt. Auch besitzt das Bessel'sche Geschlecht beträchtliche Lehngüter, wovon ein Theil bei Petershagen und bei Minden, ein anderer Theil (glaube ich) in Pommern liegt.

An diese Güter hatten wir die Ansprüche von Lehnsvettern, welche noch in dem gegenwärtigen Jahrhundert bestanden, später aber, ich weiss nicht wodurch, verloren gegangen sind. Vermuthlich haben die Güter aufgehört Lehen zu sein, oder die Lehnsvettern haben in eine Abfindung gewilligt.

Von meiner Jugend weiss ich nichts Bemerkenswerthes mehr, am wenigsten erinnere ich mich irgend eines Hervortretens vor meinen Altersgenossen. Vielmehr wurde ich auf den untern Classen des Mindener Gymnasiums, die ich bis zu Unter-Tertia incl. besuchte, den Andern häufig nachgesetzt; was auch ganz recht war, indem die Anfangsgründe des Lateinischen mir immer zuwider waren. Um ihnen zu entgehen, erklärte ich meinem Vater, dass ich grosse Neigung zum Rechnen hätte, und daher den Kaufmannsstand zu wählen wünschte. Mit der Neigung zum Rechnen, sogar mit hervortretender Fertigkeit darin, hatte es zwar seine

*) S. Briefwechsel zwischen OLBERS und BESSEL, p. IX. ff.

Richtigkeit, allein auf den schwachen Grund der Vorstellung eines faulen Schulbuben wäre mein Vater wohl nicht eingegangen, wenn ich nicht die Unterstützung eines der Gymnasiallehrer, des Conrector THILO, gefunden hätte. Dieser war Enthusiast für Mathematik und Naturlehre, dabei aber, wie ich später leicht habe erkennen können, höchst unwissend, trotz des Besizes eines thätigen, speculirenden Verstandes. Ich hatte einmal ein rundes Stück Fensterglas, in einer Untertasse, mit Sand so lange gerieben, dass es die Sonnenstrahlen einigermaßen concentrirte, dann es THILO gezeigt, und ihn gebeten, mir zu sagen, wie ich es machen müsse, damit es sich in ein ordentliches Brennglas verwandele. Das Glas hatte, so wenig es sonst brannte, den Enthusiasten in Flamme versetzt, und dieser verdanke ich die Unterstützung, welche über meinen fernern Lebenslauf entschieden hat.

Der Vater willigte also ein, nahm mich aus der Schule, und liess mir dagegen mehr Unterricht im Schreiben und Rechnen, sowie auch im Französischen und der Geographie geben.

Aus dieser Periode meines Lebens (13—14 Jahr) ist mir eine Erinnerung geblieben, welche ich aufzeichnen will, da sie als Maassstab für die Schärfe meiner Augen dienen kann, eines Organs, welchem ich später viel habe zumuthen können, ohne dass seine Kraft dadurch erschöpft worden wäre. Ich verglich, um die Sternbilder kennen zu lernen, den Himmel mit einem alten Planiglobus, den ich in einem geographischen Atlas fand. Als ich zu der *Leyce* kam, fiel es mir auf, dass einer der beiden Sterne, welche mit Wega ein beinahe gleichseitiges Dreieck bilden, ans zwei Sternen zusammengesetzt war. Ich rief meinen ältern Bruder herbei, damit auch er sich an dieser astronomischen Entdeckung erfreuen möge; allein er sah nicht zwei Sterne, sondern nur mit Anstrengung einen verlängerten Stern. Vermuthlich waren seine Augen, durch grössern Fleiss in der Ausführung seiner Schularbeiten, schon geschwächt. Die beiden Sterne sind ϵ und δ Lyrae, bekanntlich nur viertelhalb Minuten voneinander entfernt. Ich habe sie später wieder oft angesehen, um dadurch den Fortgang der Schwächung der Augen zu erkennen; schon in Lillenthal konnte ich sie kaum voneinander getrennt erkennen; später nur noch als einen verlängerten Stern, jetzt selbst dies nur mit Anstrengung. — ARGELANDER hat neuerlich die Darstellung des Himmels, so wie er den blossen Augen erscheint, zum Gegenstand sehr fleissiger und ausgedehnter Bemühungen gemacht und diesen gemäss seine „Neue Uranometrie“ nebst dem Verzeichnisse der

auf den Karten dargestellten Sterne und ihrer neu und höchst sorgfältig bestimmten Grössen erscheinen lassen. Die Karten enthalten nur einen Stern statt ϵ und δ Lyrae, und auch das Verzeichniss zieht beide in einen Stern der 4. Grösse zusammen. Auch hierdurch wird ausgesprochen, dass Augen von gewöhnlicher Schärfe beide Sterne nur als vereinigt wahrnehmen. Ich habe Ursache, zu glauben, dass Augen, welche beide Sterne bei aufmerkamer Betrachtung als getrennt erscheinen lassen, schon ungewöhnlich scharfe sind, dass aber solche, welchen die Trennung ohne Hinlenkung der Aufmerksamkeit auf sie auffällt, zu den selten scharfen gehören.

Im Jahre 1798 erlangte ein Freund meines Vaters von dem angenehmen Handlungshause Andreas Gottlieb Kulenkamp und Söhne in Bremen das Versprechen, dass es mich als Lehrling aufnehmen wolle, gegen die Verpflichtung zu siebenjährigem unentgeltlichem Dienste. Mein Vater brachte mich selbst nach Bremen, wo wir am 1. Januar 1799 ankamen, und ich am 2. meinen Platz an einem Comptoirpulte erhielt. Ich kam in eine neue Welt, die mich lebhaft an sich riss. Was ich im Aelternhause erfahren hatte, waren höchst eingeschränkte, nur auf das Wohl, oder vielmehr die spärliche Erhaltung der Familie berechnete Verhandlungen. In Bremen traten dagegen bedeutende Handelsgeschäfte vor meine Augen, die ich nach und nach durch das Copiren der Handlungsbriefe kennen lernte. Die Grossartigkeit dieser Verhandlungen interessirte mich so lebhaft, dass ich, selbst wenn ich mich entfernen durfte, im Comptoir blieb und in allen Handlungsbüchern studirte, um eine Uebersicht über den Gang des Ganzen zu erlangen. Dieses gelang mir auch bald, und es fanden sich häufige Gelegenheiten, wenn die eine oder andere Einzelheit dem Gedächtnisse der andern im Comptoir Beschäftigten entfallen war, meine erlangte Einsicht geltend zu machen. Hierdurch erlangte ich einiges Ansehen und am Ende des Jahres eine Remuneration von 5 Frd'or, welche später immer gesteigert wurde und sich im Jahre 1805 auf 30 Frd'or erhöhte. Der Beifall, den mir meine Principale (der Vater und zwei Söhne) zeigten, und die vollkommene Hochachtung welche sie mir einflössen, stachelten meinen kleinen Ehrgeiz, so dass ich lieber jedes Opfer gebracht, als eines meiner Geschäfte ungenügend ausgeführt hätte. Im Jahre 1799 landeten die Engländer und Russen in Nordholland, und das Kulenkamp'sche Haus in Bremen erhielt den Auftrag, für die nöthigen Zufuhren von Getreide für Menschen und Pferde zu sorgen. Hierdurch erweiterte sich der Umfang der

Geschäfte bedeutend, und mit ihm vermehrte sich die Arbeit, welche ihre Durchführung forderte. Ich erinnere mich noch mit Vergnügen, dass meine Kräfte durch ihre Anstrengung zunahm, dass ich mit grösserer Leichtigkeit die Summe der frühern und der neu hinzugekommenen Arbeit besiegt, als früher die erstere allein. Ich lebte nun ganz für die Handelsgeschäfte; und als diese eine grosse Schwierigkeit erfuhren durch die in demselben Jahre eintretende Handelskrisis, welcher zahlreiche, grosse Häuser in Hamburg und Amsterdam ihre Existenz zum Opfer bringen mussten, welche die Abgabe von Wechseln erschwerte und oft hemmte und dadurch auch das Kulenkamp'sche Haus in Verlegenheit brachte, indem es fürchtete, seinen grossen Accepten für Getreidelieferungen aus der Ostsee und aus Ostfriesland auf die Dauer nicht genügen zu können (was jedoch durch eine Silbersendung aus England vermieden wurde) — da vermehrte sich noch meine Achtung vor diesen Geschäften, indem ich die Hilfsmittel kennen lernte, welche sie, bei einem soliden Betriebe, darbieten.

Als jedoch die Geschäfte, durch die Capitulation und die Wiedereinschiffung der gelandeten Armeen, in ihre frühern Grenzen zurückkehrten, fand ich bald, dass ich nicht mehr genügend beschäftigt war. Ich dachte nun an die Zukunft. Mittellos wie ich war, erschien mir als einzige gute Aussicht in die Ferne, der Versuch mich zu der Stellung des Cargadeurs einer der Expeditionen tüchtig zu machen, welche damals die Hansestädte nach französischen und spanischen Colonien und nach China auszurüsten pflegten.

Ich legte mich auf das Lesen von Werken, welche Anleitung zur Waarenkunde geben und die Naturgeschichte oder allgemeine Entstehungsgeschichte der gebräuchlichen Handelsgegenstände betrafen; von diesen ging ich zu andern über, welche aussereuropäische Länder beschreiben und die Natur des Handels dahin erläutern. Ich studirte die Berichte von Reisenden, RAYNAL'S „Histoire du commerce européen dans les deux Indes“ und andere ähnliche Werke und erlangte dadurch auch gute Kenntnisse der Geographie, welche ich in ein mit Papier durchschossenes Handbuch derselben eintrug. Zugleich erlernte ich die englische Sprache mit Anstrengung in zwei oder drei Monaten des mündlichen Unterrichts, indem ich die Kosten der langen Fortsetzung desselben zu sparen gezwungen war. Die spanische Sprache suchte ich durch Grammatik und Lesen, verbunden mit irgend einem in ihr geschriebenen Buche, einigermaßen kennen zu lernen. Auch fand ich einen Menschen auf, der früher in Spa-

nien gelebt hatte, damals aber als Geselle eines Bremer Büchschmieds arbeitete, und der meinen Fragen wegen der Aussprache zu antworten die Geduld hatte. — An diese Bemühungen knüpfte sich die Betrachtung, dass es einem Cargadeur, obgleich die Leitung des Schiffes nicht zu seinen Functionen gehört, nützlich sein könne, einige Kenntniss der Schifffahrtskunde zu besitzen. Ich dachte mir dass es wenigstens nichts schaden werde, wenn er sich in den Stand setze, so oft die Stellung der Sonne und des Mondes es erlauben würden, unabhängig von aller Schiffsrechnung, versehen mit einem Sextanten und einer Secundenuhr, den Ort des Schiffes auf dem Meere durch unmittelbare Beobachtung zu bestimmen. Die hanseatischen Seeapotheken waren damals noch ganz unwissend in dieser „modernen Kunst“. Ich sprach mit mehreren, mit welchen das Handelsgeschäft mich in Berührung brachte, darüber, hörte aber übereinstimmend, dass diese Kunst ganz überflüssig sei, dass die Verbindung der Schiffsrechnung mit der mütigen Breitenbeobachtung ausreiche und Aufmerksamkeit bei der Annäherung an die Küste die Hauptsache sei. Obgleich dies der Wahrheit gemäss ist, wenn es sich um kurze Reisen in den bekannten europäischen Meeren handelt, so reichte doch geringe Ueberlegung hin, zu zeigen, dass längere Reisen noch andere Hilfsmittel fordern; auch bewies mir der Eifer, womit die Engländer eine einigermaßen astronomische Ausbildung ihrer Seeleute betrieben, dass sie nicht so überflüssig sein könne, als unsere Capitäne sie sich in ihrer Unkenntniss dachten. In dieser Aussicht erschien mir die Erwerbung der modernen Kunst noch wichtiger. Ich dachte mir, dass wenn ich den Ort des Schiffes von Tag zu Tag auf eine Seekarte zeichnen könnte, ich dadurch auch das Mittel besitzen würde, dem Capitän des Schiffes Vertrauen auf die neue Kunst einzufössen; dass ich ihn veranlassen würde, in Füllen, in welchen die ihm gewohnte Praxis nicht hinreichende Sicherheit gewähren würde, zu meiner Karte seine Zuflucht zu nehmen, und die daraus zu ziehenden Vortheile zu benutzen. Ich beschloss also den astronomischen Theil der Nautik zu erlernen und griff deshalb zu einem damals gangbaren Buche: MOORE „Epitome of practical navigation“. Dieses Buch enthält nur Vorschriften, welche den Leser, falls er sie mit einer praktischen Anleitung zu ihrer Ausführung in Verbindung zu bringen Gelegenheit hat, wirklich in den Stand setzen können, den Ort des Schiffes durch Beobachtung der Himmelskörper zu bestimmen; die aber ohne jene Anleitung wohl in den meisten Fällen unfruchtbar bleiben werden, während sie in keinem

Falle zur Einsicht in den Gegenstand führen; dies desto weniger, da die Principien der sphärischen Trigonometrie sich nicht unter den Materien finden, über welche das Buch handelt. Ich lernte also aus meinem MOORE zwar wohl Mancherlei, aber bei Weitem nicht genug, um dadurch befriedigt zu werden. Grossentheils schrieb ich diesen ungenügenden Erfolg meiner Unkenntniß der astronomischen Grundbegriffe zu, und suchte mir daher durch ein populäres astronomisches Buch, wenn ich nicht irre von VOIGT, zu helfen. Auch aus diesem Buche lernte ich Vieles, wenn ich es auch nur verstanden lesen konnte, indem ich den Spott meiner Comptoirkameraden über mein Hineinwagen in die Astronomie fürchtete. Das Beste, was ich daraus lernte, war die Kenntniß des Titels von „BOHNENBERGER'S Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung“ und dass dieses Buch vorzugsweise von der Anwendung des Spiegelsextanten handle. Das war genau die Materie, die ich von MOORE hatte lernen wollen. Das Buch wurde herbeigeschafft, und nun ging mir ein neues Licht auf: — Ich sah nun deutlich, dass es eine Mathematik gebe und dass sie von Nutzen sei bei der Auflösung nautischer Probleme! — Also wurde ein Lehrbuch der mathematischen Anfangsgründe vorgenommen, ich glaube von MÜNICH. Dieses wurde in wenigen Tagen verschlungen; auch die an seinem Ende vorkommende historische Darstellung wurde mit der grössten Aufmerksamkeit studirt und gab hinreichende Andeutung der Grenzen des Lehrbegriffs selbst weit überschreitenden Ausdehnung der Wissenschaft. Jetzt war das Studium des Bohnenberger'schen Buches ein leichtes Spiel. Seine nächste Frucht war der Versuch, mir ein Instrument zum Höhemessen der Gestirne zu verfertigen und eine schlechte, jedoch mit einem Secundenzeiger versehene Pendeluhr zu erwerben. Beides wurde ausgeführt: mit Hilfe eines Tischlers und eines Uhrmachers, dessen Ungeschicklichkeit ihn fast erwerblos gemacht hatte, der aber eben deshalb am besten für mich erschien, nämlich am willfährigsten, sich auch schwach belohnten Arbeiten zu unterziehen; mit dieser Hilfe brachte ich einen Sextanten von Mahagoniholz, mit eingelegetem Rande von Elfenbein und einem festen Fernrohre versehen, zu Stande; er wurde an einer im Fenster zu befestigenden Säule aufgestellt, und ein Lothfaden zeigte unmittelbar die Theilungen, die ich mit hinreichendem Fleiß auf den Elfenbeinrand auftrug.*) Die Uhr wurde von ihrem Schlagwerke

befreit. Den Ort, wo dieser Apparat aufgestellt wurde, fand ich in dem Hause eines Freundes, HELLE, der alle Classen des Bremer Gymnasiums besucht hatte,

„Wenn die Sache zu Stande kommt, woran ich nicht zweifle, so werde ich nächstens mit einem Quadranten [Sextanten] eigener Fabrik auftreten. Schon vor einem Jahre wandelte mich einmal die Sextantenlust an; ich verstand wenig von der Sache und liess auf gut Glück das hölzerne Gestell eines Sextanten von gutem Holze mit einem Limbus von Elfenbein für 3 Thlr. verfertigen, doch bald merkte ich die Unmöglichkeit der Selbstverfertigung und ärgerte mich über meine Voreiligkeit. Der Sextant sollte auf Müller'sche Art zugerichtet werden, als ich mich eines Bessern besann. Ich bin nun entschlossen, doch noch etwas Brauchbares davon zu machen. In das Centrum des Sextanten liess ich einen messingenen Kegel versenken, wodurch ich in Stand gesetzt wurde, den Mittelpunkt der zu ziehenden Kreise weit genauer wieder zu erkennen. Darauf schritt ich zur Eintheilung, welche mich seit vier Wochen auf beschäftigte und wozu ich denn fast allein die Frühen Morgenstunden benutzen konnte. Ich bin jetzt fertig damit und habe den Rand in Grade und 96 Theile von 15 zu 15 Minuten getheilt. Sichere Dienste leistete mir ein Uhrmacher- oder Federzirkel, welcher den sehr unvollkommenen Haazirkel sehr vorzuziehen ist; mit diesen ist eine gute Theilung gewiss unmöglich. Mein Sextant wird ohne Alhidade sein und nur mit einem Bleiöth versehen, sodass ich kleinere Theile durch das Mikrometer der Fernrohre messen muss. Schade dass ich nicht gleich anfangs diese Idee hatte, sonst hätte ich eben so leicht einen Quadranten verfertigen lassen können: Ich musste also entweder auf Höhen unter 30° oder über 60° Verzicht thun. Dass ich erstere lieber entbehrte, war wohl natürlich, denn so kann ich das Instrument leichter berichtigen und auch besser meine Zeit bei Nacht bestimmen. Uebrigens ist die Einrichtung mit einem Faden die einfachste, und, wie ich glaube, so sicher wie alle anderen, da man das Instrument doch mit einem Bleifaden vertical stellen muss, und man doch diesen so gut wie jenen genau auf den erforderlichen Punkt bringen kann. Es fehlen mir noch die erforderlichen Gläser zum Fernrohr, nämlich ein 13 Linien grosses Objectiv von 17 Pariser Zoll und ein Ocular von 10 oder 11 Linien Brennweite. Sie zu verfertigen reicht Bremens Geschicklichkeit nicht zu, also wieder ein Anlass, Ihre Güte in Anspruch zu nehmen. Sollten Sie mir wohl aufgeben können, wo man solche Gläser verfertigt bekommen könnte?“ — (Am 28. Juli 1803): „Jetzt ist mein Sextant völlig fertig; nur finden sich noch kleine Veränderungen dabei zu machen. Die erste Beobachtung wird hoffentlich e Arietis, den 9. August, sein, da wird sich denn zeigen, ob das Instrument brauchbar ist oder nicht. Finde ich es meiner Hoffnung entsprechend, so wird es mir grosses Vergnügen machen, wenn ich Ihnen dadurch zur Längenbestimmung von Minden dienlich werden könnte. Viele Sternhöhen an einer Secundens-Taschenuhr genommen, werden hoffentlich den Zweck einer guten Zeitbestimmung nicht verfehlen; freilich darf ich mir dann die etwas mühsame Rechnung nicht verdriessen lassen. Ich habe neulich einen Einfall gehabt, der wohl nicht ganz unausführbar wäre, nämlich — Längenbestimmungen durch ein Gewitter. Man hat die Länge durch Feuer-signale bestimmt, warum nicht auch durch den Blitz, der doch ohne Kosten und Mühe erhalten wird, und eine starke Verviel-

*) Ueber dieses erste Instrument schreibt B. unter d. 6. Mai 1803 an TILLO (vgl. WICHMANN'S Beiträge zur Biographie von B. in PETERS' Zeitschr. f. popul. Mittheil. 1. Bd. p. 168 ff.):

aber von dem Besuche der Universität durch den Tod seines Vaters abgehalten wurde, welcher ihn zwang, dessen Gewerbe vorläufig fortzusetzen, oder da er selbst wenig davon gelernt hatte, die darin angestellten Arbeiter zu beaufsichtigen. Später erwarb er selbst die Fertigkeit in den Metallarbeiten des Geschäfts und gab nun das Studiren ganz auf, um sich dem Gewerbe zu widmen. Dieser unterrichtete junge Mann war eine höchst wünschenswerthe Bekanntschaft für mich,

fältigung der Resultate zulässt. Orte, die nicht weiter aus einander liegen, wie 6 bis 8, vielleicht auch 10 Meilen, könnten gewiss so bestimmt werden. — (Am 26. August 1803): „Sie verlangen eine Beschreibung meines Instruments. Es ist, wie Sie wissen, ein Sextant, dessen Radius 18 Pariser Zoll; er hat keine Alhidade, sondern ist mit einem festen Fernrohre, in dessen Brennpunkte sich ein Schraubenmikrometer befindet. Ein Silberfaden, der vom Centro auf die Theilung herabhängt, wird vermöge einer Stellschraube genau auf einen Theilstrich gestellt und dann der zu beobachtende Stern durch die Schraube des Mikrometers an den beweglichen Faden des letztern gebracht. Das Fernrohr habe ich aus zwei Gläsern zusammengesetzt, von denen vorzüglich das Ocular schlecht ist (ich erhielt sie von einem hier durchreisenden Glaschleifer); dennoch leistet es weit mehr, als ich vermuthete und stellt die Gegenstände 15 Mal vergrößert und hell dar. Bei einer starken Erleuchtung der Fäden erkenne ich selbst kleinere Sterne, z. B. den doppelten in der Leier, Alcor und andre vollkommen gut und deutlich. Das Instrument ist zur Zeitbestimmung hinlänglich und verdient der geringen Kosten halber Empfehlung. Das Gerippe ist von Mahagoni mit einem Limbus von Elfenbein und kostet . 3 Thlr. Mikrometer, Vorrichtung am Mittelpunkt,

Axe, um welche der Sextant sich dreht . 2 Thlr. 36 Groten.
Gläser zum Fernrohr 1 „
Das Gestell 5 „

Sämmtliche Kosten 11 Thlr. 36 Groten.

Die Verfertigung ist nicht schwierig und die Theilung, wenn man mit einem guten Federzirkel versehen ist, nicht so langwierig, wie man denken sollte. Ein Beobachter, der ein Fenster gegen Süden hat, bedarf das Gestell nicht. Bei mir trat eine Haupt-schwierigkeit ein; in unserem ganzen Hause befindet sich kein südliches Fenster, mein eigenes geht gerade nach Norden; auch muss das Fenster hoch und die Fensterbank breit genug sein. Wie ich erst hierher kam, lernte ich einen jungen Hellen kennen, dessen Vater ein Büchenschäfer war. . . . In seinem Hause ist ein vortrefflich gelegenes Zimmer; es hat grosse und hohe Fenster, gegen Ost, Süd und West. Dort habe ich jetzt meinen Sextanten und beobachtete auch da die Sonnenfinsternis [vom 17. August]. In Ermangelung einer guten Pendeluhr ließ ich eine Secunden-Taschenuhr, an der ich 18 Sonnenhöhen nahm. Die Stellschraube war noch nicht am Sextanten angebracht, weshalb ich den Faden mittelst der Stativschrauben auf die Theilstriche bringen musste. Dadurch ging aber der so nöthige feste Stand verloren, welches gewiss dazu beigetragen hat, vier Beobachtungen völlig unbrauchbar zu machen. Ueberdem ist dieses meine erste Arbeit in der praktischen Astronomie, so dass sich wohl keine bessere Resultate erwarten liessen, wie die folgenden sind. Ich bemerke noch, dass die ausgemittelten Ab-

sowie auch ihm mein Eifer für die Astronomie willkommen war. Wir setzten nun den Apparat in den besten Zustand, dessen er fähig war, und wurden durch das Vergütigen belohnt, welches uns eine gelungene Zeitbestimmung gewährte. Die Methode, die ich dazu anwandte, war die einzige meinem Apparate angemessene, nämlich die Beobachtung gleicher Höhen zweier Sterne von nahe gleichen Declinationen, auf verschiedenen Seiten des Meridians.*] Indem

weichungen der Uhr wohl nicht ganz genau sind, indem der Collimationsfehler des Instruments noch nicht scharf bestimmt ist. Ich behalte mir also noch eine Correction vor. Ich fand nach Ausschluss der schlechten Beobachtungen:

Wahre Zeit.	Abweichung der Uhr.
Um 7 ^h 38 ^m 24 ^s 7	22 ^m 25 ^s 7
39 33,7	33,7
40 35,3	31,8
47 4,1	31,1
51 3,3	34,8
52 10,3	37,3
53 28,3	39,3
8 17 16,6	23 3,6
19 38,0	3,8
27 47,0	7,0
45 40,8	12,3
47 8,6	8,6
48 32,9	8,9
49 19,1	7,1

Sie sehen, dass die Uhr viel zu langsam ging und dass übrigens das Wachsen der Abweichungen der Uhr so regelmäßig ist, dass es größtentheils nur dem Gange der Uhr und nicht den Beobachtungen zugeschrieben werden kann. Jener war wirklich sehr schlecht, denn offenbar war er bei der ersten Reihe von Beobachtungen langsamer wie bei der zweiten.]]

*) [Ueber diese Methode schreibt B. an THULO unterm 10. Februar 1804 (WICHMANN a. a. O. p. 177): „Mit der gespanntesten Erwartung sehe ich dem morgenden Tage [der Sonnenfinsternis] entgegen und hoffe noch immer auf besseres Wetter — seit vorgestern regnet es hier fast beständig. Das hat mich doch nicht verhindert, früher eine sehr gute Zeitbestimmung zu machen, die ich durch Verschwinden einer Menge von Sternen völlig gesichert habe. Da die Sonne zu niedrig steht, um correspondirende Höhen zu nehmen, so habe ich ein andres Mittel angewandt, welches mir völlig sicher zu sein scheint. Ich beobachte nämlich gleiche Höhen verschiedener Sterne zu beiden Seiten des Meridians. Da haben sich die Fehler des Instruments ebenso gegen einander auf wie bei correspondirenden Höhen. Auf diese Art kann man in einer halben Stunde die Zeit so sicher bestimmen, wie durch correspondirende Höhen, zu welchen ein Zwischenraum von 4 bis 5 Stunden erfordert wird. Freilich ist die Rechnung beschwerlicher, allein auch die lässt sich, wenn man Alles bei einander hat, in einer Stunde abmachen. Wenn man z. B. 10 Höhen eines Sterns beobachtet hätte, so brauchte man doch nur drei zu berechnen, weil man mit den zweiten Differenzen die andern leicht hinzufügen kann

mehrere Sternenpaare kurz nacheinander angewandt wurden, erhielt ich eine Prüfung der Genauigkeit des Resultats durch die Vergleichung der aus jedem Paare hervorgehenden Correction der Uhr. Ich erstaunte über die erreichbare Schärfe, indem ich eine bei weitem geringere von meinem Apparate erwartet hatte;*) aber

Ebenso verfährt man mit den Höhen auf der andern Seite des Meridians und betrachtet den sich zwischen den so gefundenen Abweichungen der Uhr ergebenden Unterschied als vom Fehler des Instruments herrührend. Diese indirekte Berechnungsart ist weit bequemer als die direkte Auflösung der Aufgabe, aus unbekanntem aber gleichen Höhen zweier Sterne die Zeit zu berechnen.¹⁾

*) [Den Uebergang controlirte er durch die Olbers'sche Methode der Sternverschwindungen. In einem Briefe an THULO vom 29. Febr. 1804 heisst es darüber (WICHMANN, a. a. O. p. 180): „Ich bin jetzt beschäftigt, die Zeiten zu bestimmen, in welchen Sterne hinter dem Thurme verschwinden, und befolge dabei dieses Verfahren. Durch gleiche Höhen zweier Sterne bestimme ich die Zeit und beobachte dann eine Sternverschwindung. Den Augenblick der Verschwindung verwandle ich in Sternzeit und leite daraus den Stundenwinkel des Sterns ab. Nun wird dieser Stundenwinkel sich aber mit der Zeit ändern wegen der Veränderung der Abweichung des Sterns. Setzt man die

Polhöhe	=	φ
Abweichung des Sterns	=	δ
Stundenwinkel „ „	=	t
Höhe „ „	=	h
den parallaktischen Winkel	=	p

und $\frac{\cos t}{\operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg} \psi$
 so ist $\operatorname{tg} p = \frac{\cos \psi \sin t}{\operatorname{tg} \varphi \cos(\psi + \delta)}$
 oder $\sin p = \frac{\cos \varphi \sin t}{\cos h}$; $\cos p = \frac{\sin \varphi \cos(\psi + \delta)}{\cos h \cos \varphi}$
 und die Aenderung, welche die Zunahme von δ um $\Delta \delta$ im Stundenwinkel in Zeit erzeugt

$$\Delta t = - \frac{\Delta \delta \operatorname{tg}(p + i)}{15 \cos \delta}$$

Hier ist i die Neigung des Thurms gegen den Vertikalkreis. Ist die Stelle, wo der Stern verschwindet, vertikal, so ist natürlich

$$i = 0 \text{ und } \Delta t = - \frac{\Delta \delta \operatorname{tg} p}{15 \cos \delta}$$

Wenn ich nun eine Sternverschwindung beobachtet habe, so reducire ich sie mit dieser Formel auf den 1. Jan. 1800, schreibe die Zu- oder Abnahme, die δ jährlich verursacht, bei n und setze den Factor $-\frac{\operatorname{tg}(p+i)}{15 \cos \delta}$ dahinter, nm damit Aberration und Nutation, die die Metzger'schen Tafeln geben, zu multipliciren, z. B. bei Regulus, wie ich es den 7. Februar fand,

Stundenw. d. 1. Jan. 1800	Jährl. Aenderung weg. Decl. $\Delta \delta$	Factor
I. Station 5 ^h 5 ^m 26 ^s .10	+ 0,921	- 0,05341
II. „ 5 50,08		
III. „ 6 13,48]		

eine Frucht von grösserm Werthe als diese Schärfe, war die Fertigkeit in der Ausführung trigonometrischer Rechnungen, die ich dadurch erwarb. Als es einmal gelang, den Eintritt eines hellen Sterns am dunkeln Mondrande durch mein schwaches Fernrohr zu unterscheiden, erwartete ich mit Ungeduld die Kenntniss fremder Beobachtungen derselben Erscheinung, welche endlich auch die „Monatliche Correspondenz“ und das „Astronomische Jahrbuch“ brachten. Jetzt musste der Mittagsunterschied von Bremen meiner Beobachtung gemäss bestimmt werden; ich musste mich also den Rechnungen hingeben, zu welchen Bohnenberger eine so genügende und deutliche Vorschrift enthielt.*)

*) [Hierüber heisst es am 31. Dec. 1803 an THULO (WICHMANN S. a. O. p. 162): „Die Bohnenberger'schen Formeln zu den Längenberechnungen leiden gewiss keine Verkürzungen, doch bin ich auf ein Mittel verfallen, mir die Arbeit bequemer zu machen. Zu bequemerer Uebersicht setze ich die Bohnenberger'schen Formeln her.

Gegeben
 L = Länge, B = Breite, π = Parallaxe, d = Halbmesser des Mondes; l = Länge, b = Breite des Nonagesimms; ϱ = Radius für den Beobachtungsort; A, C = Hülfswinkel; N = Hülfszahl; B^* = Breite des Sterns.

Gesucht

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A &= 45^\circ - \frac{1}{2} \varrho \pi \cos(L-l) \cos b \sec B \\ N &= (\operatorname{cosec} \frac{1}{2} A)^2 \sec B \\ \operatorname{tg} p &= \frac{1}{2} \varrho \pi \cos b \sin(L-l) \cdot N \\ \sin C &= \varrho \sin \pi \sin b \\ \operatorname{tg} B' &= \sin \left(\frac{B-C}{2} \right) \cos \left(\frac{B+C}{2} \right) \cos p \cdot N \\ \frac{1}{2} d'' &= \frac{1}{2} d \cos p \cdot N; \quad \frac{1}{2} d'' = \frac{1}{2} d' - \text{Irradiat.} \\ (\sin \frac{1}{2} A)^2 &= \frac{\sin \frac{1}{2} (d'' - B' + B^*) \sin \frac{1}{2} (d'' + B' - B^*)}{\cos B' \cos B^*} \end{aligned}$$

Hier bedeutet B' scheinbare Breite, p Längenparallaxe und α der Unterschied der Längen beider Himmelskörper. Es ist dann die Zeit der Zusammenkunft

$$= \text{Zeit der Beobachtung} \begin{cases} + (\alpha - p) m' \text{ für den Eintritt} \\ - (\alpha - p) m' \text{ „ „ Austritt} \end{cases}$$

$$m \text{ ist} = \frac{3600}{\text{stündl. Beweg. } D}$$

Die Berechnung von $(\operatorname{cosec} \frac{1}{2} A)^2$ ist mühsam; ich berechnete eine Tafel, deren Argument $90^\circ - A$ ist und die Werthe von $\log \frac{1}{2} (\operatorname{cosec} \frac{1}{2} A)^2$ von $10''$ zu $10''$ bis $3600''$ enthält. Mit ihrer Hülfe und den gleich beigezeichneten Proportionaltheilen finde ich $\frac{1}{2} (\operatorname{cosec} \frac{1}{2} A)^2$ ebenso leicht wie den log einer natürlichen Zahl. Ferner betrachtete ich p, C, α als gerade Linien, und berechnete Tafeln, die Correctionen für diese falsche Voraussetzung enthalten. Auch für B' berechnete ich eine ähnliche Tafel, die doch nicht mehr mit Vortheil zu gebrauchen ist, wenn $B' 3''$ übersteigt; dann ist nämlich das genaue Rechnen der Proportionaltheile beschwerlich und die direkte Formel vorzuziehen. Meine Rechnung steht dann so:

$$90^\circ - A = \varrho \pi \cos(L-l) \cos b \sec B$$

Glücklicherweise brachte ich den bekannten Mittagsunterschied von Bremen, bis auf eine oder ein paar Secunden genau, wieder heraus und frohlockte nun über das Gelingen meines ersten praktisch-astronomischen Versuchs! Man muss das Feuer der Jugend besitzen, um die Freude zu begreifen, welche dieses Gelingen mir gewährte! Ich irre gewiss nicht, wenn ich annehme, dass dadurch mein Loos für den übrigen Theil meines Lebens geworfen wurde. Ich habe der „Monatlichen Correspondenz“ von ZACH und des „Astronomischen Jahrbuchs“ von BODE erwähnt, und führe bei dieser Gelegenheit an, dass beide Zeitschriften meine Aufmerksamkeit in hohem Grade fesselten. Ich fand darin so viel Neues, meinen Kenntnissen Unzugängliches, dass es Anlass geben musste, diese zu vermehren. Vorläufig liess ich mich durch diese Unzugänglichkeit nicht stören, sondern benutzte sie, verbunden mit dem erwähnten populären Buche von BOHNENBERGER, zur Erlangung einer weitern Uebersicht über das Gebiet der Astronomie, welche aus Andeutungen zusammensetzen keine Schwierigkeit für mich hatte, da ich damals ein höchst glück-

liches Gedächtniss besass, dem nicht leicht ein gelesenes Wort entwand. Das Glück wollte, dass in einer Bücherverkaufung der „Lehrbegriff der Astronomie“ von LALANDE vorkam und dass ich in seinen Besitz gelangte.*) So wie ich nun zu einer der zahllosen

*) Ich kann mir nicht versagen, hier einigen das Lalande'sche Werk betreffenden Bemerkungen eine Stelle einzuräumen. Es ist jetzt zwar ein veraltetes, aber es besitzt Eigenschaften, welche keiner der vielen später erschienenen allgemeinen Tractate über Astronomie mit ihm theilt. Es hat einen Astronomen zum Verfasser, der in allen Theilen der Wissenschaft selbst gearbeitet hat; der nie versäumt, in jedem Theile die Arbeiten Anderer anzuführen und seine Leser dadurch sowohl mit dem zu seiner Zeit stattfindenden Kenntnissen der Materien, als auch mit ihrer geschichtlichen Entwicklung bekannt zu machen; sowie auch ihnen die Mittel zu weiterem Unterrichte darüber in den fleissig und gewissenhaft angeführten Quellen zu eröffnen. Diese schönen Eigenschaften scheinen sich im Fortgange der Zeit mehr und mehr zu verlieren. Ich kann dies nicht durch die, mit der Zeit fortschreitende Vergrößerung des Umfangs der Wissenschaft entschuldigen, denn diese sollte nicht das Aufgeben jener Eigenschaften, sondern nur einen grössern Umfang des Tractats zur Folge haben. Anerkennen muss ich zwar, dass es dieser Vergrößerung wegen immer schwieriger wird, als Verfasser eines Lehrbegriffs in dieselbe Stellung zu der Wissenschaft zu treten, in welcher der würdige LALANDE sich befand; aber ich theile auch keineswegs die Ansicht, aus welcher später, diesen Titel führende Werke gewöhnlich hervorgegangen sind, dass ein Anderer als ein in allen Theilen der Wissenschaft erfahrener Meister sie schreiben könne. Einem solchen wird es auch nicht so schwer werden, den Gang der astronomischen Kenntniss geschichtlich zu verfolgen, sowie auch bei dieser Gelegenheit Jedem, der wirklich zu ihrer Entwicklung beigetragen hat, durch vollständige Anführung des Titels sowohl, als auch des wesentlichen Inhalts seines Beitrags, die ihm gebührende Gerechtigkeit widerfahren zu lassen. Spätere sogenannte Lehrbegriffe der Astronomie beurkunden meistens die Einseitigkeit ihrer Verfasser: der eine könnte verleiten, das Wesen der Wissenschaft in einem Haufen von Entwicklungen trigonometrischer Formeln zu suchen; ein anderer in der Kenntniss von Abbildungen astronomischer Instrumente; ein dritter in einigen Anwendungen der Mechanik des Himmels. Ein vierter ist frei von Einseitigkeit, dagegen aber eine leblose Compilation und zwar so weit entfernt von der nothwendigen historischen Entwicklung, dass sein Verfasser in der Vorrede erklären kann, er habe gar keinen Namen angeführt, weil er sonst Namen, wie A, B, C . . . auf jeder Seite hätte anführen müssen. Ich habe oft gedacht, dass bei dem fortwährenden Wachsen des Umfangs der Wissenschaft Lernenden sowohl als Gelehrten ein Werk höchst nützlich sein müsste, welches die Astronomie sorgfältig und vollständig in ihre Theile sonderte, die für jeden derselben wesentliche Literatur namhaft machte, und den Inhalt jedes Beitrags dazu mit kurzen aber treffenden Zügen schilderte. Dass ein solches Werk, trotz seiner verhältnissmässigen Kürze, grosse Arbeit und Kenntniss fordern würde, kann einen zu seiner Hervorbringung Geeigneten eher reizen als abbrechen.

Ans der Tafel $\log \frac{1}{2}(\cos \frac{1}{2} A)^2$; dazu addirt $\log \sec B$ gibt $\frac{1}{2} N$

$$p = \frac{1}{2} N \pi \pi \cos b \sin(L - D) - \text{Correctio I}$$

$$C = \pi \pi \sin b - \text{Correctio II}$$

$$B' = \frac{1}{2} N \cos p \cos \left(\frac{B+C}{2} \right) (B-C) - \text{Correctio III}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2} d'' - B' + B'') (\frac{1}{2} d'' + B' - B'')}{\cos B' \cos B''}} - \text{Correctio IV.}$$

Bei Sternbedeckungen verschwindet Corr. IV ganz. Alle diese Tafeln sind bis auf 0⁰⁰¹ genau berechnet; der Vortheil, den sie gewähren, ist einleuchtend. Um mich auch praktisch davon zu überzeugen, wandte ich sie auf die von mir berechnete Sonnenfinsterniss vom 27. August 1802 an. Ich nahm noch sieben mir erst bekannt gewordene Beobachtungen in Rechnung, und beendigte meine Arbeit den dritten Weihnachtstag um 10 Uhr; nachdem ich fast ununterbrochen seit 1 Uhr daran gearbeitet hatte, also in 9 Stunden. Das gibt 1 $\frac{1}{3}$ Stunden für eine Beobachtung. Für Mond- und Sonnenorte u. s. w., die ich schon kannte, rechne ich $\frac{1}{2}$ Stunde für jede Beobachtung, so dass ich überzeugt bin, mit Hälfte der Tafeln in Allem nur 1 $\frac{1}{2}$ Stunden zur Berechnung einer Beobachtung zu gebrauchen. Einige Tage vorher hatte ich, um nichts unvollendet zu lassen, die schon berechneten Orte mit Trienscker'schen Elementen noch einmal ganz umgearbeitet. Meine Endresultate sind nun:

Berlin	Mittagsunterschied von Paris	44 ^m 16 ^s
Wien	" "	56 13,5
Mitau	" "	1 ^h 25 29,8
Kremsmünster	" "	47 19,7
Prag	" "	48 29,5
Lorenzberg bei Prag	" "	48 16,6.]

Bessert's Abhandlungen. I. Bd.

Lücken der Kenntniß der Gegenstände gelangte, welche undeutlich in meiner Uebersicht vorhanden waren, so schlug ich das betreffende Kapitel in LALANDE auf, und erlangte dadurch jedesmal die gewünschte Befriedigung. So setzte ich eine ziemlich vollständige Kenntniß der Astronomie aus einzelnen Stücken zusammen, welche ich jeden an seinen Ort in der Uebersicht einschaltete. Diese Methode des Lernens war übrigens die einzige mir angemessene. Ich lernte nur das, was ich anzuwenden beabsichtigte, es sei praktisch oder zum Verständniß von Gelesenem. Das Lernen selbst hatte ich nie gelernt, so dass meine heutigen astronomischen Kenntnisse auch weit mehr Lücken haben würden, als sie wirklich haben, wenn alle Theile dieser Wissenschaft nicht so innig miteinander verbunden wären, dass lange Beschäftigung mit ihr nothwendig auf alle einzelnen Theile führt. In einem Supplement-Bande des „Astronomischen Jahrbuchs“ fand ich die Beobachtungen HARRIOT's, welche den Cometen von 1607 (den Halley'schen) betreffen und von HERRN VON ZACH in einem Familien-Archiv in England aufgefunden waren. Diese zu berechnen und bis zur Bahnbestimmung des Cometen zu verfolgen, ward nun mein Wunsch. Die Anleitung von LALANDE, verbunden mit OLBERS' berühmter Abhandlung über die leichteste Methode die Bahnen der Cometen zu bestimmen, wurden meine Führer und als ich mich durch die Reduction der Beobachtungen selbst durchgearbeitet hatte, fand ich keine erheblichen Schwierigkeiten mehr an das beabsichtigte Ziel meiner Bemühungen zu gelangen. Ich muss bei dieser Gelegenheit bekennen, dass ich manche Vorschriften ausführte, ohne vorher die Zeit verwandt zu haben, in welcher ich sie durch LALANDE hätte begründen können. Aber das war die Folge meiner ganzen Ansicht der Wissenschaft: ich wollte sie nicht kennen lernen, sondern nur ihre Resultate erlangen. Ich studirte eifrig, aber nicht auf ein Examen zu, sondern auf die Früchte zu, die mich unwiderstehlich reizten! — Dass dereinst die Astronomie meine Profession werden würde, fiel mir nicht im Traume ein; ich folgte allein meinem Vergnügen und dieses bestand in der Einsammlung von Früchten.

Bremen zeichnete sich durch eine wissenschaftliche Richtung aus, die man in andern deutschen Handelsstädten (wenigstens damals) vergebens gesucht haben würde. Die erste Entstehung dieser Richtung muss, meiner Meinung nach, in dem Museum gesucht werden, welches zwei oder drei patriotische, den Werth solcher Richtung zu würdigen fähige Männer

gestiftet hatten. Dort wurden Sammlungen von naturgeschichtlichen Gegenständen und von Büchern angelegt, Abendzusammenkünfte gehalten und von Zeit zu Zeit Vorlesungen gegeben. OLBERS war einer der Ersten, welche thätig wurden in der Beförderung des Zweckes des Museums. Der Eifer wurde allgemein, man musste die Zahl der Mitglieder auf zweihundert beschränken, fand aber hinter dem Verzeichniß derselben stets eine lange Reihe von Expectanten. Die überseeischen Verbindungen einer bedeutenden Handelsstadt füllten rasch die Sammlungen; Geschenke von Büchern und die Geldbeiträge von 200 Mitgliedern füllten rasch die Bücherschränke. Die Anstalt wurde den Bremern der Gegenstand vaterländischen Stolzes; sie gelangte daher auch schnell zu der höchsten Blüthe, sodass sie sich am Anfange dieses Jahrhunderts ein grosses, stattliches Haus erbauen, darin ihre reich gewordenen Sammlungen aufnehmen und die Zahl ihrer Mitglieder dem vergrösserten Raume gemäss vermehren konnte. Auch wurden Zeitungen und wissenschaftliche Zeitschriften in grösster Ausdehnung gehalten und den Mitgliedern in den Lesezimmern offen gelegt. Die wöchentlichen wissenschaftlichen Vorlesungen (von deren Gegenständen Religion und Politik ausgeschlossen sind) zogen eine grosse Anzahl von Zuhörern aus allen Classen der Bürgerschaft herbei. In der That glänzten unter den Vorlesern Namen wie OLBERS, ALBERS, beide TREVIRANUS, MERTEUS u. s. w.; und es ist, nachdem die wissenschaftliche Richtung einmal eingeschlagen war, nicht zu verwundern, dass während der einzig noch lebende dieser Männer sich aus Bremen entfernt hat, um unsere Universitäten Breslau und Bonn zu zieren, ein jüngeres Geschlecht die Lücken gefüllt hat, welche der Tod unter den frühern Ernährern des wissenschaftlichen Geistes in Bremen erzeugte.

Diese wissenschaftliche Richtung des mir unvergänglich theuren Bremens erschien mir als der einzige Glanz der Stadt, als das, was sie vor dem grössern, in vielen Beziehungen wichtigeren Hamburg wenigstens damals hervorhob. Ihre Allgemeinheit wird beigetragen haben, mir den Schritt von dem Comptoirpulte zu einer wissenschaftlichen Beschäftigung weniger unerhört erscheinen zu lassen. In Beziehung auf mich war OLBERS der leuchtende Stern und ich brannte vor Begierde ihm persönlich bekannt zu werden. Als ich meine Arbeit über den Cometen von 1607 beendet und sauber geschrieben zu Papier gebracht hatte, fasste ich mir ein Herz, schnitt OLBERS, den ich eine Strasse langsam hinabgehen sah, durch Betretung einer Nebenstrasse und grössere Eile den Weg ab und bat ihn um

die Erlaubniß, ihm einen geringen astronomischen Versuch, den ich gewagt hätte, vorlegen zu dürfen. Ich erhielt diese Erlaubniß, und **OLBERS** erhielt dagegen eine Stunde später meine Abhandlung. Dies ereignete sich an einem Sonnabend, den 28. Juli 1804; am folgenden Tage, dem Sonntage, dessen Nachmittag von Comptoirarbeiten frei war, trieb mich die Unruhe über den Eindruck, den meine Sendung auf **OLBERS** gemacht haben möchte, zu einem weiten Spaziergange; und als ich gegen Abend von demselben heimkehrte, fand ich ein Schreiben von **OLBERS** und mehrere Bücher vor, die er mir sandte, weil sie mir unbekannt Nachrichten über den Cometen enthielten. Das Schreiben lege ich hier in einer Abschrift bei.

(Abschrift des Briefes von **OLBERS**.)

Bremen, 29. Juli 1804.

Mit dem grössten Vergnügen habe ich Ihre vorzügliche Abhandlung über den Cometen von 1607 gelesen. Sie gibt mir nicht nur die grössten Begriffe von Ihren ungemeynen mathematischen und astronomischen Kenntnissen, und Ihrer ausgezeichneten Geschicklichkeit in den schwersten Theilen des Calculs; sondern sie war mir auch an sich äusserst interessant. Sollte ich etwas daran tadeln, so wäre es blos dies, dass Sie weit mehr Zeit, Mühe und Schärfe auf die Berechnung der **Harriot'schen** und **Torporley'schen** Beobachtungen verwandt haben, als diese verdienen. Sie nehmen **Decimal-Seconden** mit, da es allenfalls hier auf eine halbe Minute nicht ankam.

Indessen wird die Arbeit, da sie einmal vollendet ist, dadurch um so schützbarer, und wir wissen nun durch Ihre Untersuchungen genau, was aus den **Harriot'schen** Beobachtungen zu ziehen war. Allein eben deswegen darf diese Abhandlung nicht ungedruckt bleiben, und ich bitte mir Ihre Erlaubniß aus, sie **Herrn VON ZACH** oder **Herrn BODE** mittheilen zu dürfen.

KEPLERS und **LONGOMONTANUS'** Beobachtungen dieses Cometen waren weit unvollkommener als **HARRIOT'S**. Wie der genievollere **HALLEY** diese Beobachtungen genutzt hat, finden Sie in beikommendem Buche (**HALLEYI tabulae astronomicae**), das Sie vielleicht nicht besitzen. Angenehm wird es Ihnen sein, zu bemerken, wie nahe **HALLEY'S** elliptische Elemente dieses Cometen mit den von ihnen berechneten übereinstimmen; näher, als man bei so groben Beobachtungen erwarten sollte, wenn nicht die schnelle scheinbare Bewegung des Cometen den Einfluss der Fehler vermindert hätte.

Ich füge auch **LONGOMONTANI Astronomia Danica** selbst bei, weil es vielleicht der Mühe werth wäre, Ihre Elemente mit **LONGOMONTANUS'** Beobachtungen vom 18. und 21. September zu vergleichen. Wünschen Sie auch **KEPLERS'** Original-Beobachtungen selbst zu lesen, so stehen seine *Libelli tres de Cometis* zu Befehl.

Ihr gütiges Anerbieten, mir zuweilen bei astronomischen Rechnungen beizustehen, nehme ich mit dem grössten Danke an, und werde bei der ersten vorkommenden Gelegenheit davon Gebrauch machen. Wegen der oben mir erbetenen Erlaubniß ersuche ich um eine beifällige Antwort, und empfehle mich unter Bezeugung der grössten Hochachtung

gehorsamst

W. **OLBERS**.

Ich darf nicht erst sagen, dass es mich nicht minder beglückte, als mich früher das Resultat meiner Zeitbestimmungen, Beobachtung der Sternbedeckung und Berechnung des Mittagsunterschiedes von Bremen beglückt hatte. Ich eilte zu **OLBERS**, danke ihm herzlich für seine Nachsicht, und kehrte nicht eher zurück, als bis ich von der Liebenswürdigkeit seines Charakters und seines Benehmens einen Eindruck empfangen hatte, welcher nicht geringer war als der, den sein astronomisches Gewicht schon weit früher auf mich gemacht hatte. Von nun an wurde **OLBERS** der Gegenstand meiner innigsten Verehrung; ich betrachtete ihn als meinen zweiten Vater, und so habe ich ihn bis zu seinem Ende verehrt. Oft hat diese Verehrung mich zu der weiten Reise von Königsberg nach Bremen veranlasst; zum letzten Male sieben Monate vor **OLBERS'** Tode, im August 1839. Sollte ich im Niederschreiben dieser Nachrichten von meinem Leben nicht ermüden, oder durch das Fortschreiten meiner Krankheit nicht darin gestört werden, so werden sie noch oft das Verhältniss zwischen **OLBERS** und mir berühren; um aber auf den Fall der Ermüdung oder der Störung noch etwas darüber hinzuzusetzen, lege ich ein Blatt der „**Astronomischen Nachrichten**“ bei, in welches mein Freund **SCHUMACHER** einen kurzen Aufsatz über **OLBERS** aufgenommen hat, den ich, bei Gelegenheit der Zusammenkunft deutscher Naturforscher und Aerzte in Bremen im Jahre 1844, auf den Wunsch des Senators **OLBERS**, des würdigen Sohnes meines verewigten väterlichen Freundes, geliefert habe.*) Indem **OLBERS**, wie aus seinem beigelegten

*) (s. Bl. III unter „Verschiedenes“.)

Schreiben hervorgeht, mir die *Astronomia Danica* von LONGOMONTANUS mitgetheilt hatte, und sich in diesem Werke eine zwar unvollständige, aber drei Tage vor der ersten Harriot'schen gemachte Beobachtung findet, durch welche der Umfang der beobachteten geocentrischen Bewegung des Cometen beträchtlich vergrößert wird, so nahm ich die Bahnbestimmung noch einmal vor, indem ich diese und eine spätere Beobachtung desselben Astronomen dabei berücksichtigte. Die hierdurch verbesserte Abhandlung über den Cometen von 1607 sandte OLBERS an ZACH, welcher sie im November-Heft 1804 der „Monatlichen Correspondenz“ drucken liess, versehen mit einer Anmerkung, welche den jungen Liebhaber der Astronomie den Astronomen freundlich zuführte, indem sie in das nachsichtige Urtheil einstimme, welches OLBERS über seine Arbeit gefällt hatte.*)

Gleich nach der Beendigung dieser Untersuchung der Bewegung des Cometen von 1607 wandte ich mich zu der des Cometen von 1618, zu dessen Beobachtungen HARRIOT gleichfalls einen erheblichen Beitrag geliefert hatte, der auch durch ZACH aus dem vorher erwähnten Familien-Archiv zur allgemeinen Kenntniss gelangt war. Diese neue Arbeit war weit umfangreicher als die frühere, indem eine weit grössere Zahl von Beobachtungen dabei zu berücksichtigen war. Indessen hatten auch Uebung und Fertigkeit in allen Theilen der Rechnungen zugenommen und brachten mich glücklich an das Ende der Arbeit, deren Resultate BODE in seinem „Astronomischen Jahrbuche“ für 1808 drucken liess.

Ich war also in die Astronomie gerathen, indem ich einige Kenntniss der Seefahrtskunde suchte, sie in einem diese behandelnden Buche nicht fand, und dadurch zu dem bessern, obgleich die Seefahrt nicht besonders berücksichtigenden Werke von BOHNENBERGER verwiesen wurde: welches seinerseits nicht verfehlte, zu der vorher kaum gealunten Mathematik**) zurückzuweisen, und dadurch wieder Aussichten in Theile der

*) [Vgl. Anmerkung zu Abhandlung 1 p. 1. — WICHMANN bespricht in seiner Biographie BESSEL's ausführlich diese erste Arbeit. Die Originalrechnungen füllen nicht weniger als 330 Seiten in Folio.]

**) In Untertertia des Mindener Gymnasiums wurde zwar Unterricht in den ersten Anfangsgründen der Geometrie ertheilt, allein ich glaube, dass dieser Anfang, wenn er ohne Fortsetzung bleibt, nicht geeignet ist, einen Begriff von dem eigentlichen Wesen der Mathematik zu erzeugen. Die Anfangsgründe der allgemeinen Rechenkunst und Algebra würden dies schon eher leisten.

Astronomie zu eröffnen, welche gänzlich ausser dem Kreise lagen, dessen nähere Kenntniss ich anfangs zu erwerben beabsichtigte. — Ich dachte nun wirklich nicht mehr an meine Beschränkung auf diesen Kreis. Zufrieden seine Kenntniss erlangt zu haben, und sicher, auf den gewünschten Seereisen des Cargadeurs den Ort des Schiffes, jederzeit, wenn die Stellung der Gestirne es erlauben würde, bestimmen zu können*) würde ich mit der Nautik zugleich jetzt auch die Astronomie verlassen haben, wenn das, was ich davon kennen gelernt hatte, nicht gereizt hätte, tieferes Eindringen in ihr Gebiet zu versuchen.

Ich muss hier Einiges zu dem hinzusetzen, was ich über die Art gesagt habe, wie ich zu der Astronomie gelangt bin. Es ist sehr schwer, den wahren ersten Beweggrund einer Handlung überzeugend auszumitteln. In dem gegenwärtigen Falle ist zwar kein Zweifel vorhanden, dass die Nautik mich zu der Astronomie geführt hat; aber ob sie ausschliessliche Bedingung hierzu war, ist eine Frage, die ich nicht mit gleicher Ueberzeugung zu bejahen wage. Ich hatte schon in früher Jugend einen Begriff von den Bewegungen der Erde und der Planeten, und wusste, dass sie nicht auf unbekannte Art vor sich gehen, vielmehr, dass die Astronomen die Mittel besaßen, sie zu berechnen. Nun hatte ich zwar einige Fähigkeit im Rechnen erworben, aber zwischen dieser und dem Rechnen der Astronomen konnte ich keinen Zusammenhang entdecken. Diesen Zusammenhang zu erkennen erschien mir als höchst wünschenswerth, aber mein kindisches Nachdenken darüber musste so lange fruchtlos bleiben, als ich die Hilfsmittel der Mathematik nicht zu ahnen vermochte. Wesentlich um mich zu der Astronomie zu führen, war ohne Zweifel eine Veranlassung, etwas vom Wesen der Mathematik kennen zu lernen. Diese gab die Seefahrtskunde, indem sie mich zu dem Bohnenberger'schen Buche brachte; ob nicht später irgend eine andere Veranlassung zu gleichem Ziele geführt haben würde, vermag ich nicht zu sagen. Ich würde auch dieser Erörterung hier keinen Raum gegeben haben, wenn es mir nicht oft so vorgekommen wäre, als ob man zu bereitwillig Zufälligkeiten den

*) Seit meiner Bekanntschaft mit OLBERS hatte ich hinreichende Gelegenheit gehabt, mich im Gebrauch des Seefahrer-Instrumente, des Spiegelsextanten, zu üben. Da seine Geschäfte als praktischer Arzt ihm unmöglich machten, die zuweilen erforderliche unmittelbare Bestimmung der Zeit selbst zu besorgen, so suchte ich ihm darin so weit nützlich zu sein, als mit meinen Geschäften auf dem Comptoir und in den Waaren-lägern vereinbar war.

Platz wesentlicher Bedingungen gäbe. Dass ich bei der Nautik stehen geblieben sein würde, wenn der Wunsch die Rechnungen der Astronomen zu begreifen nicht vorangegangen wäre, glaube ich nicht bezweifeln zu können.

Indessen blieb ich bei der Astronomie; durch das Beispiel des Cometen-Astronomen **OLBERS** angeregt bei der Cometen-Astronomie. Auf seinen Wunsch untersuchte ich aufs neue die Bahnen einiger ältern Cometen, welche ihm nicht so befriedigend bestimmt erschienen, dass sie die Kraft der von ihnen vorhandenen, meistens sehr mangelhaften Beobachtungen erschöpften. Bei den meisten wurde nichts dadurch gewonnen ausser der Ueberzeugung, dass die Beobachtungen wirklich unzureichend sind; einen etwas bessern Erfolg erhielt ich für den zweiten Cometen von 1748, so dass ich die kleine ihm betreffende Untersuchung auch im „Astronomischen Jahrbuche“ für 1809 bekannt machte. Obgleich ich keineswegs die Absicht habe, diese mich betreffenden Nachrichten durch eine Aufzählung der vielfältigen kleinern Arbeiten zu füllen, welche neue Entdeckungen, Beobachtungen oder andere zu einigem Interesse gelangte Ereignisse der Astronomie veranlassen, so muss ich doch mit den beiden Cometen, welche im letzten Viertel des Jahres 1805 entdeckt wurden, eine Ausnahme machen. Beide sind später ausserordentlich merkwürdig geworden, indem der erste derselben der sogenannte Encke'sche, der zweite der Biela'sche war. Ich berechnete vorläufige Elemente der Bahnen beider Cometen in der Nacht nach dem 1. November 1805, indem mir **OLBERS** am Abend dieses Tages die drei dazu erforderlichen Beobachtungen mittheilte.*) Allein als später mehrere Beobachtungen derselben bekannt wurden, fanden sich Schwierigkeiten, welche mir viele Arbeit, aber geringen Erfolg brachten. Der erste dieser Cometen, dessen Untersuchung ich im Juli-Hefte 1806 der „Monatlichen Correspondenz“ mitgetheilt habe, konnte durchaus nicht mit der parabolischen Bewegung vereinigt werden. Aber die Abweichungen von ihr, die er zeigte, hatten einen so unregelmässigen Gang, dass die Mangelhaftigkeit seiner Beobachtungen nicht bezweifelt werden konnte. Vorzüglich veranlassen mich zwei Beobachtungen von **OLBERS** vom 12. und 13. November, welche in gerader Aufsteigung fast drei Minuten von einander abwichen,

und deren nahe Richtigkeit er, trotz des dagegen geäußerten Verdachts, behauptete, zu glauben, dass im Ansehen des Cometen eine Eigenthümlichkeit gewesen sein müsse, welche sich der Genauigkeit seiner Beobachtung widersetzt habe; aber abgesehen von diesen beiden zeigten auch die Beobachtungen von **THULIS** in Marseille Unregelmässigkeiten, welche in keiner Art der regelmässigen Bewegung ihre Erklärung finden konnten und mich daher von dem Versuche abschreckten, die parabolische Hypothese aufzugeben und elliptische Elemente aus den Beobachtungen allein abzuleiten; wobei ich übrigens noch bemerken will, dass damals die Idee eines Cometen, welcher in wenigen Jahren seinen Umlauf um die Sonne vollendet, noch eine ganz fremde war; dass selbst der Halley'sche drei Viertel eines Jahrhunderts zu seinem Umlaufe verwendende Comet als einzige Ausnahme von der Regel angesehen wurde, welche den Cometen wenn nicht unbegrenzte, doch wenigstens noch weit längere Umlaufzeiten anwies. Indessen erkannte **ENCKE** später, dass dieser Comet eine frühere Erscheinung des 1819 erschienenen, seinen Umlauf in 1207 Tagen vollendender war, und dass man auch seine Beobachtungen von 1805 mit einer solchen Bahn in hinreichende Uebereinstimmung bringen könnte, wenn man die **Olbers'sche** Beobachtung vom 12. November um zehn Zeitsecunden verbesserte, welchen Fehler sie durch einen Druckfehler der „Histoire céleste“ erhalten hatte, und ferner wenn man sieben der vorhandenen achtzehn Beobachtungen von **THULIS**, als aus unbekannt gebliebenen Ursachen gänzlich verfehlt, unbeachtet liess. Auf diese Art erlangte also die Beobachtung des ersten Cometen von 1805, aus welcher ich damals kein zuverlässiges Resultat zu ziehen vermochte, später beträchtlichen Werth für die Bestimmung der Bewegung dieses merkwürdigen Himmelskörpers.

Die Beobachtungen des zweiten Cometen von 1805 konnte man dagegen mit der Annahme seiner parabolischen Bewegung in so weit vereinigen, dass sich kein gegen diese Annahme entscheidender Zweifel ergab, obgleich **GAUSS** fand, dass eine noch genüendere Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtungen hervorgebracht werden könnte, wenn man die parabolische Hypothese aufgab und die den Beobachtungen allein am meisten anpassende elliptische Bewegung dagegen aufsuchte. Diese Untersuchung führte auf eine Ellipse von 1732 Tagen Umlaufszeit. — Im Jahre 1772 war ein kleiner Comet erschienen, von welchem wir nur wenige und mangelhafte Beobachtungen besitzen, die aber doch hinreichend sind, eine nähere Be-

*) „Monatliche Correspondenz“ von **ZACH**, Januar 1806, wo **OLBERS** dieser in wenigen Stunden beendigten Rechnungen als eines Beweises meiner Fertigkeit im Rechnen erwähnt. Mehr noch bewies aber diese Leichtigkeit, das Resultat zu erhalten, die Geschwindigkeit der von **OLBERS** gegebenen Methode.

stimmung der Elemente seiner Bewegung möglich zu machen. Diese Elemente, welche LALANDE zuerst aufgesucht hatte, und deren nahe Bestätigung sich aus meiner späteren, auf neue Reduction der Beobachtungen gegründeten Rechnung ergab, zeigten so grosse Aehnlichkeit mit denen des zweiten Cometen von 1805, dass sie die Vermuthung der Identität beider Cometen erzeugte. Ich wurde dadurch veranlasst, die Beobachtungen beider Cometen in der Voraussetzung neu zu untersuchen, dass der zweite eine Wiederkehr des ersten, in einer Ellipse von 33 Jahren Umlaufzeit sei; aber der Erfolg dieser Untersuchung zeigte, dass man die Unterschiede zwischen den Elementen der Cometen von 1772 und 1805 durch diese Voraussetzung nicht so klein machen konnte, dass man sie durch die Einflüsse der Planeten auf die Bewegung in den Zwischenzeiten hätte erklären können. Ich glaubte daher nicht an die Identität beider Cometen, wogegen GAUSS mit Recht bemerkte, dass in der Zwischenzeit mehrere Wiederkehren des Cometen, die unbemerkt geblieben seien, stattgefunden haben könnten, und dass er bei dieser Art der Bewegung einem der Planeten so nahe gekommen sein könnte, dass der Einfluss dieser Nähe die vorhandenen Unterschiede zwischen den Elementen von 1772 und 1805 zu rechtfertigen vermöge. Später als BELLA den Cometen wieder entdeckte, fand sich, dass auch er wirklich eine kurze Umlaufzeit von (2465) Tagen besitzt und dass ihm beide Erscheinungen von 1772 und 1805 angehören. — Ich glaube dass grössere Umsicht als ich im Jahre 1805 besass, und grössere Freiheit von der damals noch herrschenden Voraussetzung Jahrhunderte oder Jahrtausende betragender Umlaufzeiten der Cometen schon im Jahre 1805 auf die richtige Spur hinsichtlich ihrer Bewegungen hätten führen können, und habe ebendeshalb die Ursachen darzustellen versucht, deren Folge das Verfehlen dieser Spur war. Aehnliches Verfehlen in grössern oder geringern Grade erscheint mir, wenn ich auf frühe, jugendliche Versuche zurückblicke, diesen so allgemein zur Last zu fallen, dass ich längst müde geworden bin, sie der schärfern Kritik zu unterwerfen, welche aus den stets auf ein Ziel gerichteten Bemühungen eines ganzen Lebens und den zahllosen Erfahrungen, welche dieses herbeigeführt hat, hervorgehen musste.

Meine Beschäftigungen mit den Cometen hatten mich jeden Augenblick auf die Anwendung der Sonnentafeln zurückgewiesen, welche wirklich gleich wenig Schwierigkeit besitzt für Den, der die ihnen zum Grunde liegende Theorie vollständig versteht, für Den, der sie theilweise versteht, sogar für Den, dem sie ganz

fremd ist. Ich war in dem zweiten Falle: ich kannte die Natur der elliptischen Bewegung und konnte auch der analytischen Entwicklung der daraus hervorgehenden Mittelpunktsgleichung und des Ausdrucks des Radiusvector folgen; von den Störungen, welche die Anziehungen der Planeten und des Mondes in den elliptischen Werthen beider hervorbringen, hatte ich nicht allein einen allgemeinen Begriff, sondern verstand auch einigermassen, was darüber in LALANDE'S Astronomie vorkommt. Indessen konnte mich die ungenügende Einsicht nicht befriedigen, welche ich mir von der Mechanik des Himmels, aus hier oder dort gesammelten Andeutungen und dem unvollkommenen Verständnisse des XXII. Buches der Astronomie von LALANDE, zusammengetragen hatte, und ich beschloss daher den Versuch zu wagen, durch die „Mécanique céleste“ von LAPLACE selbst zu besserer Einsicht zu gelangen. Von diesem kühnen Versuche würde mich wahrscheinlich die Geringfügigkeit meiner Einsicht in die mathematische Analyse abgeschreckt haben, wenn ich sie selbst gehörig erkannt hätte. Allein das Gelingen einer Arbeit, welche einige mathematische Kenntnisse voraussetzt, hatte mich darüber getäuscht. Meine Rechnungen über die Erscheinung des Halley'schen Cometen im Jahre 1607 hatten mir gezeigt, dass die wahre Anomalie in seiner von der Parabel abweichenden Bahn nicht mehr mit hinreichender Genauigkeit durch die Verbesserungstafel gefunden werden konnte, welche SIMPSON gegeben hatte, und deren Abdruck sich in verschiedenen spätern, von den Cometen handelnden Werken fand. Ich war daher gezwungen, die mühsamere indirecte Auflösung der Aufgabe „die wahre Anomalie in einer sich der Parabel nähernden Bahn für eine gegebene Zeit zu finden“ anzuwenden: was jedoch den Wunsch nicht zum Schweigen brachte, die leichtere Simpson'sche Verbesserungsmethode so vervollständigen zu können, dass sie auch in Fällen wie der mir vorgekommene anwendbar werden möchte. Als ich auch die den Cometen von 1618 betreffenden Rechnungen beendigt hatte (was am Ende von 1804 der Fall war) trieb mich der angeführte Wunsch zu dem Aufsuchen der Vervollständigung der Simpson'schen Methode. Hierzu fanden sich meine mathematischen Kenntnisse hinreichend, wie die Abhandlung zeigt, welche ich über diesen Gegenstand in der „Monatlichen Correspondenz“ September 1805 [Abb. 3], erscheinen liess. Dieses Gelingen flösste mir den Muth ein, mich an das unsterbliche Werk von LAPLACE zu wagen; aber bald erkannte ich meine Täuschung, die mir übrigens verziehen werden mag, da ich noch keine Gelegenheit gehabt hatte, die grosse Entwicklung zu

ahnen, welche die mathematische Analyse ausserhalb des Kreises erlangt hatte, dessen Inneres mir zugänglich geworden war. Ich suchte nun mein mathematisches Wissen zu vermehren. Die Lehrbücher, durch welche ich dieses Ziel zu erreichen hoffte, waren die von KÄSTNER; die von LACROIX, die mir weit förderlicher gewesen sein würden, lernte ich erst viel später kennen.

Die Art der Anwendung, welche ich von jenen Lehrbüchern machte, war wieder dieselbe, welche ich von den Mitteln gemacht hatte, die zur Erreichung eines erstrebten Ziels erforderlich waren. Ich wollte stets nur an das Ziel gelangen; die Mittel dazu erschienen mir nur insofern werthvoll, als sie seine Erreichung möglich machten. Ich lief also mit möglichster Eile durch KÄSTNER'S Anfangsgründe der Analyse endlicher Grössen, der Differential- und Integral-Rechnung und der höhern Mechanik, nicht sowohl um ihren Inhalt gründlich kennen zu lernen, als um mich darin zu orientiren und das mir später Erforderliche darin auffinden zu können, welche Studienmethode von Lehrbüchern übrigens in diesem Falle nicht völlig so tadelnswerth erscheint als in andern Fällen, da ich mich schon im Besitze der ersten, die verschiedenen Abtheilungen dieser Bücher miteinander verbindenden Begriffe befand.

Indessen ist der Schritt von der Vortragsart Kästner'scher Lehrbücher zu der umfassenden Analyse der „Mécanique céleste“ ein so grosser, dass er mir nur sehr schwer werden konnte. Ich fand anfangs nur Schwierigkeiten und ward oft gezwungen, wenn meine Anstrengungen nicht vermochten, mich in die Idee des Verfassers zu versetzen, den Versuch des Eindringens in dieselbe vorläufig aufzugeben, um durch das einer schwierigen Stelle Folgende vielleicht das Ziel zu entdecken, welchem sich LAPLACE durch sie hatte nähern wollen. Meine Fortschritte waren also anfangs äusserst langsam; allein der Muth wurde mir aufrecht erhalten durch die Bemerkung, die ich zu meiner unaussprechlichen Freude machte, dass das Verstehen späterer Capitel mir fortschreitend leichter wurde. So arbeitete ich mich durch die beiden ersten Bände der „Mécanique céleste“, wobei ich jedoch die Verfolgung der Einzelheiten der Theorie der Fluth und Ebbe einer spätern Zeit überlassen konnte und überliess. Der grösste Theil des Jahres 1805 und der Anfang von 1806 war zu diesem Studium verwandt worden; ich glaube meine Zeit nie wieder in demselben Maasse nützlich und erfolgreich für mich angewandt zu haben. Mit dieser Nachricht von dem Studium der

„Mécanique céleste“ schliesst sich das, was ich über meine wissenschaftlichen Beschäftigungen in Bremen zu sagen habe, welche zweite Vaterstadt ich bald darauf verliess, um bei SCHROTTER in Lilienthal einige Jahre zuzubringen.*)

Ich darf indessen die Nachrichten von meinem Leben in Bremen hiermit noch nicht schliessen, denn Jeder, der an ihnen Antheil nimmt, wird noch Aufklärungen über einige Gegenstände verlangen, welche ich bisher gar nicht erwähnt habe. Einer derselben ist die Vereinbarkeit meiner astronomischen Beschäftigungen mit denen, welche Verpflichtung, Neigung und die erst in der letzten Zeit sich verlierende Ansicht von ihrer Nothwendigkeit für mein ferneres Leben forderten. Diese Beschäftigungen sollten zwar in der Regel die Zeit von 8 Uhr Morgens bis 8 Uhr Abends ausfüllen, jedoch bliessen gewöhnlich zwei oder drei dieser zwölf Stunden geschäftsfrei. Die Sonntagnachmittage, an welchen alle Arbeiten am Comptoir und in den Waarenlägern ruhten, wurden Spaziergängen oder dem Verkehr mit Freunden gewidmet und gelangten daher den astronomischen Beschäftigungen nicht zum Nutzen; Ausnahmen hiervon, wenn diese besonders drängten, waren selten. — Die Nichte mussten also zur Hülfe gerufen werden, und ich hatte desto weniger Bedenken dagegen, als sie gewöhnlich für die eigentliche Arbeitszeit der Astronomen gehalten werden. Ich machte also zur Regel, gleich nach dem Abendessen (8½ oder 9 Uhr) mich auf mein Zimmer zurückzuziehen und 6 Stunden, bis 2½ oder 3 Uhr Morgens, meinen Rechnungen und Büchern zu widmen. Diese Regel, welche vom Anfange 1804 bis zum . . . 1806**), da ich Bremen verliess, unabänderlich befolgt wurde, löste die Aufgabe, meine beiden verschiedenartigen Geschäfte miteinander vereinbar zu machen, nicht nur vollständig, sondern auch ohne irgend eine Unbequemlichkeit für mich. Die ungestörte Ruhe der Nacht erwies sich die Aufmerksamkeit begünstigend, und

*) [In Bezug hierauf schreibt der Jüngling BESSEL den 12. October 1805 an TILO (WICHMANN a. a. O. p. 149): „Ich schreibe heute . . . Ihnen eine mir wichtige, Ihnen interessante Nachricht zu bringen — die Nachricht, dass ich an HARDING'S Stelle nach Lilienthal gehe. Nach dem Abschluss unserer Bücher im Februar oder März werde ich also der göttlichen Sternkunde meine ganze Zeit widmen können — dann werde ich Arbeiten unternehmen können, deren Unermesslichkeit ich bisher nur mit heiligem Schauer betrachtete . . .]

**) Das Datum ist hier in BESSEL'S Manuscript nicht angegeben und lässt sich auch durch die nachfolgenden Briefe Nr. 27 bis 30 (des Briefwechsels mit OLBRICH) nur in so weit ergänzen, dass es zwischen Januar und April 15 liegen muss. ERMAN.

mein Körper forderte, dem Zeugnisse ununterbrochenen Wohlbedingens zufolge, nicht mehr als fünf Stunden Schlaf.

Ein Anderes dessen ich erwähnen zu müssen glaube, ist die Quelle, aus welcher ich die Mittel zog, sowohl die Kosten meiner Kleidung als meiner wissenschaftlichen Bücher zu bestreiten; Wohnung und Nahrung hatten alle am Comptoir Beschäftigten im Kulenkampfschen Hause. Ich wünschte lebhaft, die Last für jene Bedürfnisse meinem Vater so früh als möglich abzunehmen, und als sich, nach dreijährigem Aufenthalte in Bremen, mein Jahresgeschenk auf 12 Frd'or. gesteigert hatte, glaubte ich mir diesen Wunsch befriedigen zu können.

Auf OLBERS' Wunsch und Vorschlag nahm BESSEL Anfang 1806 die Inspectorstelle auf der Privatsternwarte des Oberamtmanns SCHRÖTER in Lilienthal an und wurde hiermit ganz und für immer Astronom von Beruf. Zum ersten Mal und zu rechter Zeit, da theoretisch genug vorgebildet, erhielt er jetzt grössere astronomische Instrumente in die Hände; reichlich waren dies nur Spiegelteleskope, zu mikrometrischen Messungen im Ganzen wenig geeignet, aber sie gehörten immerhin zu den bessern ihrer Art, und gerade die Einfachheit der Messungsvorrichtungen reizte BESSEL und weckte den ihm in so einzigem Grade eigenen Beobachtungsehrfurcht. Neben Beobachtungen am Kreis- und Mikrometer von Cometen und Planeten war es besonders der Planet Saturn, dem BESSEL seine Aufmerksamkeit zuwandte. Die Sorgfalt, mit der er das nach heutigen Begriffen nur rohe Schröter'sche Mikrometer (künstliche Bilder in veränderlicher Entfernung vom Auge) untersuchte und anwandte, gab den unternommenen Messungen der Abstände des Hugenischen Saturnsatelliten und dem daraus gefolgerten Resultat der Saturnsmasse schon beträchtliche Sicherheit, welche durch die gründliche Genauigkeit, mit der er frühere Beobachtungen prüfend benutzte, alle störenden Einflüsse durch Rechnung untersuchte, nur vermehrt wurde. Dieser ersten Arbeit über den Saturn, die 1812 im Königsberger Archiv für Mathematik erschien, folgten später, als mit dem grossen Heliometer ein Messapparat ersten Ranges in seine Hände kam, noch verschiedene andere, die theils die Ermittlung der Saturnsconstanten, theils die Untersuchung der Bewegungen des 6. (4. älteren) Trabanten, wie des Saturnsystems überhaupt zum Ziel hatten. Von dem tiefen Eindringen in die mathematische Analyse schon zur Zeit des Lilienthaler Auf-

enthalts gibt die Arbeit über die Figur des Saturn mit Rücksicht auf die Attraction seiner Ringe volles Zeugnis. Eifrig und im Anschluss an seine ersten Studien in Bremen beschäftigte er sich auch mit Rechnungen und Bahnuntersuchungen von Cometen, die er überhaupt unter den Körpern des Sonnensystems, neben dem Saturn, noch Jahrzehnte mit entschiedener Vorliebe behandelt hat. Die Theorie der Bewegung förderte er neben einer seiner allerersten Arbeiten, über die wahre Anomalie bei nahe parabolischen Bahnen, besonders durch die wichtigen Beiträge zu den Störungsmethoden, die in der mustergültigen Abhandlung über den Cometen von 1807, wie, drei Jahrzehnte später, in den Astronomischen Nachrichten niedergelegt sind.

In trauriger, verworrner Zeit, beraubt eines besten Theils des Landes und seiner Kräfte, hatte Friedrich Wilhelm III. von Preussen den schönen Muth, im engen Anschluss an die Stiftung der Berliner Universität, in Königsberg ein Institut zu begründen und reich auszustatten, welches fern von allem Getriebe irdischer Leidenschaft gleichsam den Weg nach dem Unvergänglichen dauernd zeigen, in seiner Thätigkeit nur die idealen Güter der Menschheit pflegen und zu vermehren trachten sollte. Kein Würdigerer wohl als BESSEL war zu finden, der im Sinne des erhabenen Stifters die Leitung der neu zu errichtenden Sternwarte hätte führen können. Dem an ihn ergehenden Rufe folgte der junge Lilienthaler Astronom, trotz mancher anderer und lockender Aussichten und Anträge, mit Freuden und siedelte im Mai 1810 nach Königsberg als Professor der Astronomie und Director der Sternwarte über. — Die unfreiwillige Musse, die der durch drückende Zeitverhältnisse sich verzögernde Bau ihm bereitete, liess vielleicht weniger bedauern, dass die eigentlich beobachtende Thätigkeit zunächst noch wenig zur Geltung kommen konnte; denn sie erlaubte Untersuchungen weiterzuführen, die, zu voller Reife gelangt, eine Reihe der köstlichsten Früchte brachte, welche BESSEL'S Hand überhaupt dem Baum astronomischer Erkenntnis entnommen hat.

Schon im Mai 1807 hatte ihm OLBERS den Vorschlag gemacht, aus den Greenwieher Beobachtungen des grossen BRADLEY ein Sternverzeichnis für 1750 abzuleiten. BESSEL ergriff diese Idee mit Freuden, und mit Eifer begann er eine Arbeit, die ihm unter den Händen zwar in ungehörter Weise wuchs, aber auch in mehr als einer Richtung Arbeiten veranlassen und zu Resultaten führen sollte, welche im Wesentlichen auch heute noch die Grundlage unseres astronomischen Wissens bilden. — Nach Berechnung der nöthigen

Hilfstafeln und Reduction der Beobachtungen für die Bestimmung der Lage des Bradley'schen Passageninstruments von 1750—1765, sowie nach Ermittlung der aus dem alten und neuen Quadranten folgenden vorläufigen Greenwicher Polhöhen, wandte er sich (bereits im Juni 1807) zur Ableitung der absoluten A α ren der 14 Hauptsterne. Gewisse Unterschiede, die BÜRG bei der Untersuchung der A α von α Aquilae zwischen den beiden Nachtgleichen fand, waren Veranlassung, auf die Refraction genauer einzugehen. BESSEL bestimmte zunächst die Constante für 45°, die Horizontalrefraction und den Thermometer-Coefficienten aus den Bradley'schen Beobachtungen und zwar mit Zugrundelegung der Laplace'schen Theorie. Eine Vergleichung dieser, wie der von KRAMP gegebenen und der beiden zu Grunde liegenden Hypothesen über die Dichtigkeitsänderung der Luft zeigte aber, dass dieselben nicht durchaus mit den Beobachtungen zu vereinigen waren und er entwickelte nun selbst die Theorie auf Grund einer Voraussetzung über die Abnahme der Dichtigkeit der Luft und berechnete damit eine Refractionstafel, welche die Bradley'schen Beobachtungen bis zu 85° Zenithdistanz fast vollkommen darstellt. Diese Refractionstafel ist als das erste und eins der wichtigsten Resultate aus der Discussion der Bradley'schen Beobachtungen hervorgegangen; sie bildet die Grundlage der in den Fundamentis, und späterhin in den Tabulis Regiomont. ausführlicher mitgetheilten Tafeln, welche letztern bekanntlich auch jetzt noch von den meisten Astronomen in fast unveränderter Gestalt benutzt werden. — Mit gleicher Sorgfalt und Genauigkeit wurden die A α ren und Declinationen der 14 Bradley'schen Hauptsterne, die Polhöhe von Greenwich und die Schiefe der Ekliptik bestimmt, und die Prüfung dieser Constanten auf verschiedenem Wege beweisen ebensowohl die Vortrefflichkeit der Bradley'schen Beobachtungen wie der Bessel'schen Rechnungen. Diese schon 1808 abgeschlossenen Untersuchungen veröffentlichte BESSEL 1812 im Königsberger Archiv; sie bilden indess einen verhältnissmässig nur geringen Theil der Arbeiten, die noch ausgeführt werden mussten bis zur Vollendung des ganzen Catalogs der Bradley'schen Sterne. — Die Bestimmung der sphärischen Constanten, die zur Reduction der beobachteten Sternörter auf mittlere nöthig sind, der Präcession, Nutation, Aberration, waren zwar schon früher zu verschiedenen Zeiten Gegenstand der Untersuchung von Astronomen und Geometern gewesen, doch konnte und durfte sich BESSEL nicht mit schon vorhandenen, möglicherweise weniger sicheren Daten begnügen; er musste dieselben aus den Bradley'schen Beobachtungen selbst,

unter Zuziehung der sichersten neueren Bestimmungen ableiten. Die Untersuchungen über Präcession beschäftigten ihn hauptsächlich 1811—1813 und die Resultate finden sich in der classischen, von der Berliner Akademie preisgekrönten Abhandlung über die Grösse und den Einfluss des Vorrückens der Nachtgleichen. Hier wie bei den späteren Untersuchungen über Nutation und Aberration bildete er, abgesehen von der numerischen Begründung, auch die Theorie in mannichfacher Weise, durch neue originelle Entwicklungen wie durch Berücksichtigung bisher vernachlässigter höherer Glieder, weiter aus. Gedenkt man noch der Betrachtungen über Eigenbewegungen, wie der Ableitung des Polarsternorts, so wären damit wenigstens im Allgemeinen die Grundlagen bezeichnet, auf denen nun der grosse, 3222 Sterne enthaltende Catalog selbst beruhte und der endlich in Königsberg 1818 unter dem Titel „Fundamenta astronomiae p. a. 1755 ex observationibus incomparabilis J. BRADLEY deducta“ erschien. Für alle Zeit werden die Fundamenta ein glänzender Beweis dafür sein, was Eifer, Fleiss, Geduld, Scharfsinn, ordnende und verbindende geistige Kraft, kurz eine Summe von Eigenschaften vermag, wenn sie ein gütiges Geschick einem einzelnen Menschen anvertraut hat. Arbeiten solcher Art bilden Denksteine im Reiche der Wissenschaften, um so werthvoller und kostbarer, je seltener sie sind. — Als Fortsetzung gewissermassen zu den Fundamentis müssen die 1830 erschienenen „Tabulae Regiomontanae“ angesehen werden. BESSEL's Absicht war es hier, unter Verwerthung aller von ihm selbst wie von Andern erhaltenen sicheren Bestimmungen der verschiedenen sphärischen Constanten wie der Fundamentalstern-Positionen, in bequemer tabellarischer Form sämtliche Reductions-Elemente dem Beobachter wie dem Rechner zu überliefern, die zur Ableitung mittlerer Positionen aus den beobachteten nöthig sind. Die zum Theil von ihm, zum Theil von GAUSS aufgestellten Rechnungsformen sind seit jener Zeit, wenigstens in Deutschland, allgemein angenommen, und die Tabulae Regiomont., wie die 1850 von WOLFFERS herausgegebenen „Tabulae Reductionum“ finden sich als unentbehrliches Hilfsbuch in der Hand jedes Astronomen.

Die Bestimmung der Sonnenörter, wie der 36 (Maskelyne'schen) Hauptsterne und der beiden Polarsterne mit allen ihm zu Gebote stehenden Mitteln hat BESSEL seit Ende 1813, dem Beginn seiner beobachtenden Königsberger Thätigkeit, durch Jahrzehnte hindurch zu einer Hauptaufgabe seiner selbst wie der Sternwarte gemacht und es ist anziehend und lehrreich zu sehen,

wie mit der wachsenden Güte der Instrumente und der immer feineren Ausbildung ihrer Theorie auch die daraus gezogenen Resultate immer vollkommener werden. Für den praktischen Astronomen wird gerade diese Seite der Bessel'schen Leistungen, diese Richtung seiner natürlichen Fähigkeiten stets die fesselndste und die die grösste Bewunderung erregende sein; denn hier zeigt sich BESSEL durchaus als Schöpfer. Vor ihm gibt es im Wesentlichen keine Theorie der Instrumente, keine Kunst und keine Kritik der Beobachtung; auch die gründlichsten und scharfsinnigsten früheren Astronomen nahmen die Instrumente, wie sie aus der Hand des Künstlers hervorgingen, als richtig an; sie waren ihnen nur Mittel zum Zweck, eine Untersuchung des Mittels, wodurch der Zweck erreicht werden sollte, erschien überflüssig. Erst BESSEL behauptete und bewies durch die That, dass eine astronomische Beobachtung erst dann einen Werth erhält, wenn der Astronom denkend beobachtet, wenn er weiss, was beobachtet werden soll und welches die Beobachtungsmittel sind; wenn er seine Instrumente so zu sagen geistig für eine Grösse gleicher Ordnung wie das zu beobachtende Object hält; es als ein Individuum betrachtet, dessen Eigenthümlichkeiten, Vorzüge und Mängel untersucht und erst erkannt und geprüft sein müssen, che die Beobachtung eine wahrhaft zuverlässige und brauchbare wird. So steht BESSEL auf diesem Gebiet astronomischer Thätigkeit unerreicht da und auch die Grössten, ein GAUSS und HANSEN, überragen ihn in rein mathematischer Hinsicht weniger, als umgekehrt er dieselben in Allem, was Beobachtung heisst.

Der Instrumentenvorrath der Königsberger Sternwarte bei ihrer Eröffnung (im November 1813) war ein sehr geringer; die Beschaffenheit der beiden Hauptinstrumente, des Cary'schen Vollkreises und des Dollond'schen vierflüssigen Passageninstrumentes eine nach heutigen Vorstellungen kaum mittelmässige zu nennen. Für BESSEL, der bisher fast nur das einfachste Messinstrument, das Kreismikrometer, gekannt, aber freilich auch dieses in sorgfältigster Weise studirt und angewandt hatte, erschien dies anfangs anders und besonders der Cary'sche Kreis als ein sehr schönes Instrument. Die Untersuchung desselben, die er sofort begann, zeigte indessen bald, dass dem nicht so sei, und dass zufolge der Theilungsfehler und Excentricität, der Ellipticität der Zapfen, der Veränderlichkeit des Collimationsfehlers unvollständige oder überhaupt unreducirte Beobachtungen beträchtlich fehlerhaft wären. Durch neue und sinnreiche Methoden gelang es ihm aber besonders die Theilungsfehler so genau zu ermitteln bez. zu eli-

miniren, dass die noch übrig bleibenden, und kaum $\frac{1}{10}$ der erst vorhandenen betragenden fast allein durch die unvermeidlichen zufälligen Beobachtungsfehler ihre Erklärung fanden. In entsprechender Weise untersuchte er das Dollond'sche Passageninstrument. Als erste Resultate am Kreis ergaben sich die Polhöhe aus Polaris (16. Novbr. 1813 bis 22. Juni 1814) und Schiefe der Ekliptik (Sommersolstiz 1814); eine gute Controlle der erstern erhielt er bald durch eine grössere Reihe Circumpolarsterne. Verschiedene Astronomen, besonders PIAZZI, hatten zwischen Winter- und Sommer-Schiefe Unterschiede gefunden, die bis zu 8" gingen und zu manchen gewagten Vermuthungen und Erklärungen Veranlassung gegeben hatten. Schon die erste Winterschiefe (1814/15) ergab BESSEL das Gleiche (nur 0',67 weniger) als die vorangegangene Sommerschiefe, ein neuer Beweis, wie scheinbar reelle Erscheinungen bez. deren Unterschiede oft verschwinden bei sorgfältiger kritischer Beobachtung am untersuchten Instrumente. Der gründlichen und fortdauernden Untersuchung der Sonnenbewegung an den Meridianinstrumenten war überhaupt und zumeist die Thätigkeit BESSEL's Jahre lang gewidmet. Die Carlini'schen Tafeln, die allgemein damals in Gebrauch waren, zeigten so bedeutende Fehler, dass BESSEL ihre Verbesserung auf Grund fortgesetzter, möglichst ununterbrochener Sonnenbeobachtungen beschloss. Die dazu nöthigen Constanten, deren Sicherheit wesentlich auf genauester Kenntniss des Instruments beruht, besonders Polhöhe und Schiefe, wurden in den fünf ersten Jahren am Cary'schen Kreis ermittelt und controlirt, während die Beobachtungen der AREN der Hauptsterne wie der beiden Polsterne an diesem wie am Dollond'schen Mittagsrohre ausgeführt wurden. Die Resultate dieser fünfjährigen Beobachtungen wurden in einem Catalog der AREN der 36 Fundamentalsterne für die Epoche 1815 zusammengefasst. — Im Jahr 1820 erhielt die Sternwarte einen nach BESSEL's Plänen von REICHENBACH und ERTEL gebauten Meridiankreis, mit welchem dann die Beobachtungen der Sonne wie der Hauptsterne durch weitere acht Jahre fortgeführt wurden. Zur Fehlerbestimmung, besonders zur Bestimmung der Biegung des Fernrohrs, die bei dem Cary'schen Kreis hatte ausser Acht gelassen werden können, wandte BESSEL wieder neue Methoden an. Die Refractionen wurden aus Beobachtungen am Instrument selbst neu abgeleitet. Zwei Cataloge der Fundamentalsterne, der eine die Declinationen für 1820, der andere die AREN für 1825 enthaltend, gingen als Frucht der fortgesetzten und verfeinerten Beobachtungen an dem neueren Instrument

hervor. — Die Ueberzeugung von der Wichtigkeit der Fundamentalsternörter für die Kenntniss der Bewegungen im Sonnensystem liess BESSEL auch an diesen Resultaten noch nicht genügen; zweimal noch wurden die Bestimmungen wiederholt: das erste Mal 1836—40 von BUSCH und gleichfalls am Reichenbach'schen Meridiankreis, das zweite Mal mit dem neuen Repsold'schen Meridiankreis, welchen die Königsberger Sternwarte 1841 erhielt und welches vorzügliche Instrument von BESSEL auf das Gründlichste und Genaueste in allen Theilen untersucht wurde. Die von ihm selbst noch, in den letzten Lebensjahren, angestellten Fundamentalbestimmungen gehören zu den sichersten, die Beobachtungen an diesem Instrument überhaupt zu den besten, welche die Astronomie kennt; sie sind auch heute noch in vieler Hinsicht unübertroffen.

Als BESSEL 1819 den Reichenbach'schen Meridiankreis erhielt, setzte er sich zu einer Hauptaufgabe die Bestimmung sämtlicher Sterne bis zur 9^m zwischen -15° und $+45^{\circ}$ Declination. Nach Ausarbeitung des genauen Plans für Beobachtung und Reduction, sowie Anbringung der nöthigen Hilfsapparate am Fernrohr und Kreis wurden die Beobachtungen am 19. Aug. 1821 begonnen, in ununterbrochener Folge mehr als ein Jahrzehnt fortgesetzt und am 21. Jan. 1833 mit der 536. Zone geschlossen. Aehnlich wie die Lalande'schen, in Zonen von 2^o Breite angestellt, wurden sie zum grössten Theil von BESSEL selbst, nur unterstützt von einem Gehülften (anfangs ARGELANDER, zuletzt BUSCH), der den Kreis ablas, ausgeführt und berechnet. Die Riesenarbeit — sie umfasst volle 75011 Einzelbeobachtungen — beweist in höchstem Maasse die Ausdauer, Energie und selbst körperlichen Kräfte, die BESSEL zu Gebote standen. Diese Zonen, die später nach Norden und Süden von ARGELANDER mit gleicher Sorgfalt und Unermülichkeit fortgesetzt wurden, bilden, abgesehen von ihrem unmittelbaren Nutzen für die Kenntniss der Körper des Sonnensystems und deren Bewegungen, für lange Zeit eine Basis für die Erforschung der Zustände und Veränderungen in der Fixsternwelt. — In unmittelbarem Zusammenhang damit stehen die Sternkarten, welche nach BESSEL's Vorschlägen von verschiedenen Astronomen entworfen und von der Berliner Akademie in den Jahren 1828 bis 1859 herausgegeben wurden; sie umfassen indeed nur die Zonen zwischen -15° und $+15^{\circ}$ Declination.

Eine neue Epoche für die Beobachtungskunst begann mit dem grossen Fraunhofer'schen Heliometer, welches die Königsberger Sternwarte 1829 erhielt. Den Mangel geeigneter Vorrichtungen für sehr genaue Mikrometer-Messungen hatte BESSEL tief empfunden;

die unleugbaren Vorzüge, die das Heliometer in Folge grösserer Verwendbarkeit vor andern Messapparaten besitzt, vielleicht auch eine gewisse Vorliebe für complicirte Instrumente, die den Scharfsinn des Beobachters in besonderem Grade reizen und auf die Probe stellen, bestimmten ihn abweichend von Andern, z. B. STRUVE, zu einem Fernrohr mittlerer optischer Stärke, aber als Heliometer geeignet grössere Entfernungen mit gleicher Schärfe wie kleine, dem Fadenmikrometer allein zugängliche zu messen. Die Untersuchung des Instruments, eines Meisterwerks von FRAUNHOFER, im Allgemeinen als Aequatorial, wie in allen mikrometrischen Einzelheiten, sowie die Resultate, die BESSEL mit ihm an der Sonne, dem Saturn und dessen 6. (4. ältern) Trabanten, dem Halley'schen Cometen u. a. erhielt, sind bekannt und zum Theil schon früher kurz erwähnt. Von besonderem Werth erschien ihm die Vergleichung mit einem Instrument verschiedenen Prinzips. Er stellte daher zugleich mit STRUVE in Dorpat, für seinen neuen Fraunhofer'schen Refractor mit Fadenmikrometer benutzte, eine Reihe vorzüglich genauer Messungen an Doppelsternen an. Die Positionswinkel ergaben sich beiden nahezu gleich; dagegen fand BESSEL alle Distanzen mit einer einzigen Ausnahme grösser als STRUVE. Diese auffallende Differenz war Veranlassung zu einer neuen ausgedehnten Beobachtungsreihe des Doppelsterns ρ Ophiuchi, als deren schliessliches Resultat für BESSEL die Ueberzeugung hervorging, dass seine Messungen als frei von constanten Fehlern zu betrachten seien.

Die wichtigsten, aber auch mühsamsten und schwierigsten Untersuchungen am Heliometer galten indes der Erforschung der Parallaxe von 61 Cygni. Schon 1806 und 1808 in Lilienthal hatte BESSEL sich mit Parallaxen-Untersuchungen heller Sterne vorübergehend und, wie zu erwarten, erfolglos beschäftigt; auch später, 1814 und 1815 durch Ermittlung der AR-Differenzen gegen Parallel-Sterne Versuche nach dieser Richtung bei 61 Cygni wie andern hellern Sternen angestellt, die freilich wieder ein negatives Resultat ergaben, indem sie nur zeigten, dass die Parallaxe derselben unter $1''$ sei. Jetzt im Besitz eines Messapparates ersten Ranges musste die Frage zur Entscheidung gebracht werden. Nachdem Messungen von α Bootis, der neben 61 Cygni geprüft werden sollte, aufgegeben worden, concentrirte BESSEL seit August 1837 seine Beobachtungsthätigkeit in dieser Richtung ganz auf 61 Cygni und überzeugte sich schon im Frühjahr 1838 von der Reellität einer Parallaxe von nahe $\frac{1}{4}''$. Die strenge Berechnung sämtlicher bis 1840 fortgesetzter, feinsten

Beobachtungen (Vergleichungen mit zwei benachbarten Sternen) ergaben schliesslich die Parallaxe $0,348$ mit einem mittlern Fehler von $\pm 0,014$; zum ersten Mal eine Zahl, welche durch die Art, wie sie erreicht wurde, volles Vertrauen verdient und fand.

Eine der letzten, umfassendsten und scharfsinnigsten, wie in ihren Folgen weittragendsten Arbeiten auf dem Gebiete der Stellarastronomie bilden die Untersuchungen über die Veränderlichkeit der Eigenbewegung des Sirius und Procyon. Die eigenthümlichen Abweichungen, welche die besten Beobachtungen und besonders seine neuesten am Repsold'schen Meridiankreis erhaltenen, bei schärfster Reduction, in der Annahme einer gleichförmigen Eigenbewegung, besonders bei Sirius, zeigten, brachten BESSEL zu der Ueberzeugung, dass dieselben einen objectiven, physischen Grund haben müssten; er bewies durch eine theoretische Untersuchung, dass jene Ungleichheiten der Bewegung erklärt würden bei Annahme beträchtlicher (dunkler) Massen, welche in unmittelbarer Nähe jener hellen Körper ständen, dass also Sirius und Procyon in der That physische Doppelsterne seien. Es ist bekannt, wie spätere Rechnungen (von PETERS und AUWERS), sowie die directe Beobachtung die vorausassenden und -schauenden Forschungen BESSEL's bestätigt haben.

Vieler anderer Arbeiten aus der sphärischen und Stellarastronomie wie der Theorie der Instrumente kann hier nur ganz flüchtig Erwähnung geschehen. Eine Reihe der wichtigsten und umfangreichsten davon hat BESSEL selbst unter dem Titel „Astronomische Untersuchungen“ 1841/42 veröffentlicht; ausser den schon oben genannten Untersuchungen über das Königsberger Heliometer, den Doppelstern ρ Ophiuchi und den Messungen der 37 Vergleichs-Doppelsterne enthalten dieselben noch Abhandlungen über den Einfluss der Refraction, sowie der Präcession, Nutation und Aberration auf die Resultate mikrometrischer Messungen; über die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe; die Positionen von 53 Plejadensternen; die Bestimmung der Jupitersmasse; die Analyse der Finsternisse u. a. Die meisten von ihnen, zum Theil auch Meisterstücke gründlicher analytischer Behandlung der coelestischen Probleme, gingen wohl aus dem Bedürfniss hervor, allen Elementen zur Reduction der genauesten (Heliometer-) Messungen eine diesen Messungen selbst vollkommen adäquate Schärfe zu geben und BESSEL hat vielleicht gerade in dieser Hinsicht am meisten Praxis und Theorie zu gleicher Zeit verfeinert und ausgebildet. Wie sehr ihm dies gleichzeitige Vervollkommen der reinen Beobachtung und

der Theorie noch in den letzten Jahren am Herzen lag, beweisen seine Studien über den Repsold'schen Meridiankreis und die durch sie veranlasste letzte Arbeit über die aus der Schwere hervorgehenden Aenderungen eines Kreises in lothrechtlicher Lage. — Ein schon von früher (1824) datirendes, aber nicht zu unterschätzendes Verdienst liegt auch in der durch ihn wieder zur Geltung gebrachten Anwendung des Passageninstruments im ersten Vertical zur Bestimmung von Polhöhen bez. Declinationen.

Der reinen Mathematik ist BESSEL zufolge seiner ganzen Naturanlage zwar ferner geblieben und die meisten mathematisch behandelten Probleme waren astronomische, aus der Beobachtung erst abgeleitet; wurde er indessen bei dem Drang, einen ergriffenen Gegenstand auch zu erschöpfen, in mathematische Betrachtungen geführt, so verliess er zeitweise die speciellere astronomische Seite und widmete sich ganz der allgemeinen und zwar vorwiegend analytischen Behandlung. So sind z. B. seine Untersuchungen über Zahlenfacultäten, über Anziehung, gewisse Reihenentwickelungen u. a. erst aus rein astronomischen Problemen erwachsen, und die Arbeiten über Integral-Logarithmen, (Bessel'sche Functionen), vielleicht die einzigen, die nicht aus der Behandlung einer speciell astronomischen Aufgabe hervorgingen.

Umfassender und in ihren Wirkungen weittragender und fruchtbringender als die mathematischen waren unbedingt seine Forschungen und Leistungen in der Geodäsie und Physik der Erde. Speciell sind es da die Arbeiten über Gradmessung, die Untersuchungen über die Länge des Sekundenpendels und das preussische Längenmaass, die durch Methode wie Ausführung in mehr als einer Hinsicht zu dem Vorzüglichsten gehören, was wir von BESSEL's Meisterhand und was die Wissenschaft überhaupt besitzt. — Schon 1817 hatte er einige Punkte um Königsberg trigonometrisch bestimmt und Winkel der ältern Textor'schen Vermessung geprüft; 1824 liess er im Anschluss daran eine Basis messen und gründete Dreiecksnetze darauf, die die enorme Fehlerhaftigkeit der älteren Bestimmungen und die Nothwendigkeit neuer und schärferer deutlich bewiesen. Fast zu gleicher Zeit übernahm er die von TRALLES begonnene Bestimmung der Länge des Sekundenpendels. Der zu diesem Zweck von REPSOLD ausgeführte vorzügliche Pendelapparat ergab, bei Anwendung neuer origineller Beobachtungs- und Rechnungsmethoden und unter Berücksichtigung des bisher gänzlich vernachlässigten Luftwiderstandes, zum ersten Mal eine Genauigkeit, die erforderlich war, um weitere sichere

Schlüsse besonders auf die Abplattung der Erde aus Pendelbeobachtungen ziehen zu können. In den Jahren 1825 und 1826 bestimmte BESSEL die Länge des Sekundenpendels für Königsberg; später, 1835, dieselbe für Berlin; beide gehören auch heute noch zu den genauesten und feinsten Maassbestimmungen; die Schwierigkeiten aber, die BESSEL auf diesem ihm zunächst neuen Felde zu überwinden hatte, zu den grössten. Die hierher gehörigen Untersuchungen sind in verschiedenen Abhandlungen der Berliner Akademie niedergelegt (Länge des einfachen Sekundenpendels, 1826; Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht, 1830; Länge des Sekundenpendels für Berlin, 1835). Die geodätischen Operationen und Messungen, die durch die eben erwähnten sowie die rein astronomischen Arbeiten zeitweise in den Hintergrund gedrängt wurden, beschäftigten ihn und seinen Geführten BAEYER seit 1832 mehre Sommer. Auch hier waren es wieder die vorzüglichsten Instrumente (besonders der Repsold'sche Basisapparat), deren genaueste, kritischste Untersuchung, wie die Methoden der Beobachtung und Rechnung, die eine bis dahin unbekannte Genauigkeit erreichen liessen und die verhältnissmässig nur kleine Gradmessung in Ostpreussen zu einer der wichtigsten in der grossen zur Bestimmung der Figur und Dimensionen der Erde ausgeführten Kette von Gradmessungen machen. Die Ergebnisse, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann, finden sich in dem Werk: „Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit preussischen und russischen Dreiecksketten, ausgeführt von BESSEL und BAEYER“ (Berlin 1838). Die numerischen Werthe, die BESSEL aus der Verbindung seiner eigenen mit den zuverlässigsten fremden Gradmessungen für die Dimensionen des Erdsphäroids abgeleitet hat, sind bis in die neueste Zeit als die sichersten angesehen worden und erfahren erst jetzt, vornemlich durch Arbeiten, als deren Urheber er selbst anzusehen ist, unvermeidliche und im Ganzen unwesentliche Aenderungen und Verbesserungen. — Endlich ist noch der mit den vorangegangenen in engster Verbindung stehenden Untersuchungen über das preussische Längenmaass und dessen Verhältniss zur Toise du Pérou zu gedenken, welche BESSEL in seiner Schrift: „Darstellung der Untersuchungen und Massregeln, welche 1835—1838 durch die Einheit des Preussischen Längenmasses veranlasst worden sind“ (Berlin 1839), mitgetheilt hat. Das werthvollste praktische Ergebnis in dieser Richtung war die Herstellung eines Original-Normalmasses (3 preuss. Fuss), welches im Berliner Handelsministerium nieder-

gelegt ist und die Grundlage für das preussische Maasssystem bisher gebildet hat.

Der Behandlung rein physikalischer Probleme und Aufgaben wurde BESSEL öfters bei astronomischen Untersuchungen (besonders über Refraction) zugeführt; auch ihnen gewann er neue eigenthümliche Seiten ab und Methoden, wie die der Calibrirung der Thermometer, werden auch heute noch allgemein angewandt.

Ist im Voranstehenden ein wenngleich flüchtiges und ungenügendes Bild der Arbeiten des Beobachters und Forschers BESSEL gegeben, so gebührt ein Wort noch dem Lehrer, wie dem Menschen nach seinem Lebensgang und Wesen.

Den Pflichten, welche ihm sein Amt als Professor der Königsberger Universität auferlegte, hat BESSEL stets mit Gewissenhaftigkeit und Freude genügt, und im Verein mit seinen grossen Universitätsgenossen JACOBI und NEUMANN die mathematisch-physikalischen Disciplinen zu höchster Blüthe gebracht; die Königsberger mathematische Schule gilt seit BESSEL'S Tagen als eine der ersten Deutschlands. Den Werth einer edlen Popularisirung seiner Wissenschaft, den er schon in Bremen an sich selbst erfahren, wusste BESSEL in hohem Grade zu schätzen und er hat besonders in spätern Jahren durch eine Reihe populärer Vorträge (nach seinem Tode von SCHUMACHER herausgegeben) die Kenntniss und das Verständniss astronomischer Erscheinungen und Vorgänge in weite Kreise zu tragen gewusst. Man kann seinen Stil nicht eigentlich leicht und flüssig nennen, aber er ist klar und gediegen und zeugt in jedem Wort von der vollkommenen Beherrschung und Durchdringung des Gegenstands; seine Vorträge werden stets ein Muster gemeinverständlicher Darstellung streng wissenschaftlicher, zum Theil verwickelter Fragen und Probleme sein.

Das Geschick hat BESSEL die reinen Freuden, wie sie hohe Begeisterung für die Wissenschaft, ein schönes Familienleben, warme Freundschaft dem Guten stets gewährt, in reichem Maasse geboten, doch auch die Schläge und Schmerzen nicht erspart, von denen nun einmal kein menschliches Dasein verschont bleibt, und die letzte Zeit seines Lebens wurde durch tiefes unheilbares Leiden selbst körperlich eine qualvolle. Bald nach seiner Uebersiedelung von Lilienthal (1812) fand er in JOHANNA HAGEN, aus geachteter Königsberger Familie, die treue Gefährtin, die ihn noch heute betrauert. Im Laufe der glücklichsten Ehe schenkte sie ihm zwei Söhne und drei Töchter, die er selbst

aber zum Theil überlebte; der Tod besonders des einzig erwachsenen Sohnes, des hoffnungreichen WILHELM (1840) war für den Vater der schwerste Schlag. Seine eigene Gesundheit, die trotz reizbarer Constitution, lange Jahre eine feste gewesen, fiug unter den übermässigen Anstrengungen, der aufreibenden Thätigkeit des unermüdeten Geistes an zu leiden, und allmählig, von 1844 an merkbar, bildete sich in einer Unterleibsgeschwulst das tödtliche Uebel aus, welches am 17. März 1846 den grossen Mann aus der Reihe der Lebenden rief.

Ueber BESSEL's Wesen und Persönlichkeit, welche der Nachgeborene aus seinen Briefen und den Berichten Anderer ja nur unvollkommen zu erkennen und zu schätzen vermag, schreibt sein langjähriger Hausarzt Dr. KOSCH unter dem frischesten Eindruck der Ereignisse*): „BESSEL, der grosse Astronom unseres Jahrhunderts, hat nur das 62. Lebensjahr erreicht. Klein von Statur, schwächlich und mager, mit auffallend bleichem, stark gefurchtem Gesicht, den Kopf bedeckt mit silbergrauen Haaren, die in reicher Fülle strotzend bis zu den buschigen Augenbrauen herabhängen, den Oberkörper leicht nach vorn gebeugt, gewährte er dem flüchtigen Beschauer bereits seit vielen Jahren den Anblick eines Greises. Aber kaum angedet, belebten sich seine ruhigen, etwas starren Züge, Freundlichkeit und Milde strahlten aus ihnen hervor, und der klare, eigenthümliche Blick des glänzenden Augenpaares, die Agilität der Bewegungen, der schnelle Fluss und der Wohlklang der Rede bezeugten schon zur Genüge, dass ein mächtiger Geist in noch jugendlich frischer Kraft die gebrechliche Hülle beherrschte und in seinem Dienst sie frühzeitig abgenutzt habe. — Die geistige Spannkraft ersetzte den Mangel physischer Kräfte und verlied dem schwachen Körper eine Zähigkeit und Ausdauer, vermöge welcher er ganz ungewöhnlichen Anstrengungen gewachsen war. BESSEL arbeitete nicht nur den grössten Theil des Tages mit geringen Unterbrechungen an den Geisteswerken, die seinen uesterblichen Ruhm in der Wissenschaft gründeten, sondern beobachtete bis zu den letzten Jahren einen grossen Theil der Nächte den Himmeln; versagte sich, selbst noch im Beginne seiner letzten Krankheit, nicht das Vergnügen der Jagd, auf der er nicht selten viele Stunden, die Flinte im Arm, umherschweifte; machte fast täglich raschen Schrittes weite Spaziergänge, ohne dadurch besonders ermüdet zu werden. Ein mehrstündiger erquickender Schlaf restaurirte die aufgewendete Kraft und frisch und heiter fand der frühe Morgen ihn

*) BESSEL's letzte Krankheit, beschrieben und erläutert von Dr. KOSCH (Königsberg, 1846).

mit dampfender Pfeife, meist stehend, wieder an seinem Arbeitspulte. Einfach und mässig in seiner gewöhnlichen Lebensweise, aber auch weit entfernt von ängstlicher Pedanterie, verschmähte er nicht die Freuden der Geselligkeit an wohlbesetzter Tafel, und stets die Seele der Gesellschaft, in der er sich befand und die er durch seine geistvolle Unterhaltung belebte, nahm er unbelästigt noch am Abend seine unterbrochene Arbeit wieder auf und observirte bis in die späte Nacht hinein. Die Lebendigkeit seines Geistes liess ihn eine Abspannung kaum fühlen oder sie nicht beachten und in ungestörter Ordnung und Regelmässigkeit widmete er sich immer mit neuem Eifer der Lösung der schwierigsten Probleme, welche die Wissenschaft ihren auserwählt Berufenen unablässig zu stellen pflegt. Gross und für lange vielleicht unerreichbar in seiner wissenschaftlichen Sphäre, war er zugleich die liebenswürdigste Persönlichkeit im Umgange, die im richtigen Gefühl ihres Werthes weder in stolzer Zurückhaltung sich isolirte, noch durch vornehme Herablassung beglücken zu wollen sich den Anschein gab. Wer sich ihm nahte, war entzückt von dem wohlwollenden freundlichen Wesen und beim schneidendsten Widerspruch der Ansicht, selbst in der Hitze des entbrannten Meinungskampfes, bezauberte die Milde und Feinheit, mit der er, zuweilen nicht ohne Hartnäckigkeit, auf die Ueberzeugung des Gegners einzuwirken versuchte. Mit diesen Eigenschaften verband er Energie und Festigkeit des Charakters und eine seltene Tiefe des Gemüths. Aus jener entsprang das rastlose unablässige Streben nach einem hohen edlen Ziele, wie das consequente Festhalten an der gewonnenen Ueberzeugung; in dieser wurzelte die Pietät und das Vertrauen, das er unerschütterlich denen bewahrte, welchen er seine Zuneigung einnal zugewendet hatte.“

Dieser Schilderung entspricht durchaus das Bild, welches aus dem langjährigen, lehrreichen Briefwechsel mit seinem väterlichen Freund OLBERS hervorgeht; Eifer und Leidenschaft, Energie und Stärke des Willens, die ihn in der Wissenschaft das Unternommene bis zum Grund durchführen und erschöpfen lassen, sie halten ihn auch im Leben an dem Errungenen und Erprobten fest; warmes Empfinden lässt ihn treu zu Freunden wie OLBERS, SCHUMACHER, GAUSS stehen, und Wahrheitsliebe und Gerechtigkeitsgefühl besondere Anlagen oder Vorzüge eines Andern in der oder jener Richtung willig anerkennen. Neidlos und mit Bewunderung sieht er auf GAUSS' Grösse*), mit Verehrung

*) Am 26. Oct. 1818 schreibt er an OLBERS (Briefwechsel II. p. 100): „Welch eine herrliche Ansicht hat GAUSS wieder dem

hängt er an **OLBERS**, innere Verwandtschaft verbindet ihn dem lebenswürdigen, geistvollen **SCHUMACHER**; und mit wahrhaft schwärmerischer Liebe und patriotischer Begeisterung blickt der Preusse auf zu seinem König, der die Hochachtung, welche die Grossen der Erde gern dem Genius zollen, mehr als einmal und noch am Sterbebett in sinnvollster, persönlich ehrender Weise dem grossen Astronomen bewies.

Was **BESSEL** gross macht, ist nicht bloss eine Eigenschaft seines Geistes, eine Seite seiner natürlichen Begabung, sondern muss in der harmonischen Vereinigung und Verschmelzung der verschiedensten Anlagen und Fähigkeiten des Geistes, Charakters und Körpers gefunden werden. An Tiefe und Reichthum mathematischer Speculation, Vollendung und Eleganz analytischer Entwicklung haben ihn **LAPLACE**, **GAUSS**, **HANSEN** sicher übertroffen; in Beobachtungs-Talent und -Scharfsinn sind ihm die beiden **HERSCHEL** und **STRUVE** nahe gekommen; an Rechnungsfertigkeit hat ihn **ENCKE**, an Fleiss, Ausdauer und natürlichen, den astronomischen Beobachter bedingenden Anlagen **ARGELANDER** vielleicht erreicht: in Keinem unter allen diesen finden sich aber die genannten Einzelfähigkeiten so wie in **BESSEL** zum Ganzen vereinigt, und dadurch geeignet, erschöpfend in grösster Vielseitigkeit zu sein. — Es erscheint fraglich, ob ein bestimmtes Ziel, also etwa die allgemeinste Prüfung des Newton'schen Attractionsgesetzes, **BESSEL**

Probleme von den Säcularveränderungen abgewonnen! Alles gestaltet sich neu unter seinen Händen; allein wenn man seine Schriften liest, begreift man bei vielen Dingen nicht, warum nicht Andere dieselben Ideen gehabt haben.* Das soll aber gerade das Kennzeichen des wahren Genies sein, die natürlichsten Ansichten nicht zu übersehen! Dass **GAUSS** wenigstens ein göttliches Genie besitzt, ist mir klar genug.“

bewusst und unverfälscht vorgeschwebt habe, wie Manche gewollt, und wie es ja verschiedene Arbeiten auf dem Gebiete der Anziehung als besondere Aufgabe behandeln; im Ganzen wird man vielmehr gut thun, bei Beurtheilung seiner Ziele und der zu Grunde liegenden Ideen sich der eigenen Worte des Meisters zu erinnern, die hier am Schluss ihre Stelle finden mögen*): „Als die Astronomie, anfang mich an sich zu ziehen, äusserte sie ihren Reiz nicht durch die eine oder die andere Art der Arbeiten, welche sie ihren Verehrern auferlegt, sondern durch die Resultate, welche dadurch erlangt werden können. Auch später hat sich keine Vorliebe für eine besondere astronomische Beschäftigung eingefunden, und wenn ich zuweilen bereit gewesen bin, längere Zeit auf Rechnungen oder auf die Vermehrung des Vorraths der astronomischen Beobachtungen zu verwenden, so ist diese Bereitwilligkeit immer aus dem Bestreben hervorgegangen, entweder einen bestimmten Gegenstand vollständiger als er bekannt war kennen zu lernen, oder ein deutlich hervorgetretenes Hinderniss wegzuräumen, welches die Vervollständigung der Kenntniss mehrerer Gegenstände zugleich hemmte. Abgesehen von der mir mangelnden Neigung, Material zu sammeln ohne seine Benutzung zu beabsichtigen, bin ich auch früh zu der Ansicht gelangt und habe sie nicht wieder verloren, dass eigenes Fortschreiten bis zu den Resultaten astronomischer Arbeiten, wenn auch wohl nicht geradezu Bedingung ihres Gelingens ist, doch diesem die sicherste Bürgschaft, welche erlangt werden kann, gewährt, indem es ihre Mängel verräth und die Veranlassung herbeiführt, zur Beseitigung derselben geeignete Mittel zu ergreifen.“

*) Astronomische Untersuchungen, Vorwort.

I. Bewegungen der Körper im Sonnensystem.

1. Berechnung der Harriot'schen und Torporley'schen Beobachtungen des Cometen von 1607.*

(Mon. Corresp. X. p. 425.)

Die Harriot'schen und Torporley'schen Beobachtungen des Cometen von 1607, die der Oberhofmeister VON ZACH in dem ersten Supplement-Band zu den Berliner astronomischen Jahrbüchern bekannt machte, hat, so viel ich weiss, noch kein Astronom benutzt, um darauf eine weniger schwankende Theorie dieses Cometen zu gründen. Aufgemuntert durch den Wunsch, den der

*) Gegenwärtigen vortrefflichen Aufsatz erhielt ich durch meinen verehrungswürdigen Freund Dr. OLBERS aus Bremen; er schrieb mir dazu folgendes: „Die Beilage, welche ich Ihnen hier schicke, gewährt mir die grosse Freude, Ihnen einen jungen Astronomen von ganz ausgezeichneten Anlagen bekannt zu machen; es ist FRIEDRICH WILHELM BESSEL, ein noch sehr junger Mann, der sich hier in einem der ersten Handlungs-Häuser der Kaufmannschaft widmet. Schade, dass solche Talente nicht ganz für die Sternkunde benutzt werden sollen! Die Abhandlung wird Ihnen, wie mir, einen sehr grossen Begriff von den Fähigkeiten, den Kenntnissen und der Rechnerfertigkeit des Verf. geben. Könnte man etwas daran tadeln, so wäre es die Verschwendung von Zeit und Mühe, die weit grösser ist, als es die Harriot'schen sonst schätzbaren Beobachtungen ihrer Natur nach verdienen könnten. Indess da BESSEL nun einmal diese Arbeit übernommen hat, so muss sie nicht verloren gehen, sondern gedruckt werden; vielleicht entschliessen Sie sich, diesen Aufsatz bald mit einem Platze in Ihrer M. C. zu beehren. Ich möchte meinem jungen Freunde gern diese Aufmunterung wünschen; wir wissen nun auf's genaueste, was sich aus HARRIOT'S Beobachtungen für die Theorie dieses Cometen ziehen lässt.“

Mit wahren Vergnügen lasse ich diesen so trefflich als mühsam ausgearbeiteten Aufsatz hier abdrucken. Hier thut ein junger Deutscher Mann zu seinem Vergnügen, mit einer Sachkenntnis und mit einer Fähigkeit, die manchen besoldeten und berufenen Astronomen ehren würde, was ein Engländer Professor längst aus Amtspflicht hätte thun sollen, es aber lieber für unedelmüthig und unnützig hielt, als sich einer solchen beschwerlichen Arbeit zu unterziehen (vergl. M. C. VIII B. S. 58, 59, 60). Der berühmte Französische Astronom MÉCHAIN erhielt vor 15 Jahren für eine vollkommen ähnliche Schrift über den eben so berühmt gewordenen Cometen von 1661 einen academischen Preis (Mém. prés. Tom. X. pag. 333). BESSEL erhält keinen Preis, verdient ihn aber; sollte ihm das schöne und schmeichelhafte Zeugnis eines OLBERS nicht eben so viel gelten? Wir irren nicht; BESSEL'S Arbeit beweist, dass er OLBERS'S Lob gewiss anzuschlagen versteht!“ v. ZACH. (Novbr. 1804).

[1 des allgem. Verzeichnisses. — Halley'scher Comet, vergl. Br. m. O. I. 4.5. OLBERS'S Abhandlg. über Cometenbahnen (Ausg. v. ESCKE, 1847) 160, 207.]

BESSEL'S Abhandlungen. I. Bd.

Freiherr VON ZACH äusserte, unternahm ich die Berechnung dieser Beobachtungen, und wage es, die Resultate meines ersten Versuches hier vorzulegen.

Die Reduction der Längen und Breiten der Fixsterne, mit welchen der Comet verglichen wurde, liess sich nicht ohne Mühe und besondere Vorsicht bewerkstelligen. Die Auseinandersetzung meines ganzen Verfahrens wird am besten zeigen, ob ich dabei die gehörige Genauigkeit erreichte.

Ich fing damit an, aus dem Sternverzeichnisse der M. C. Sept. 1803, der *Connaissance des Temps* XII, und der von ZACH'Schen Sonnentafeln die Längen und Breiten der Sterne für 1800 zu berechnen. Zu den geraden Aufsteigungen des Freiherrn v. ZACH addirte ich die constante Correction = + 4"0; die Schiefe der Ekliptik nahm ich = 23° 27' 58".0. Folgende Tafel enthält die Resultate.

	Gerade Aufsteigung.	Abweichung.	Länge.	Nördliche Breite.
α Ursae maj.	162° 49' 17,6	62° 49' 40,0	132° 23' 27,7	49° 40' 15,0
γ Ursae maj.	175 48 37,3	54 48 25,0	147 39 7,1	47 7 36,4
ζ Ursae maj.	198 57 28,3	55 58 26,0	162 51 15,0	56 22 10,9
η Ursae maj.	204 54 46,8	50 19 2,0	174 6 43,1	54 23 42,7
Arcturus	211 38 7,0	20 13 48,8	201 26 31,0	30 52 31,5
ε Bootis	215 42 2,0	31 15 25,0	199 58 38,5	42 27 40,9
δ Bootis	219 3 48,8	27 55 32,0	205 17 53,6	40 38 26,2
α Coronae	231 33 20,4	27 23 49,2	219 28 25,1	44 20 47,6
α Serpentis	233 36 22,5	7 3 54,2	289 16 4,6	25 31 35,7
μ Serpentis	234 47 38,6	2 48 17,0	233 8 30,8	16 15 57,0
δ Ophiuchi	240 48 16,0	3 9 57,0	239 30 32,1	17 16 37,3
ε Ophiuchi	241 56 20,3	4 11 29,0	240 42 40,3	16 27 50,4
λ Ophiuchi	245 12 39,0	2 26 5,0	242 47 50,4	23 35 14,8
ζ Ophiuchi	246 32 27,2	10 8 51,0	246 26 8,2	11 25 5,1
η Ophiuchi	254 43 47,3	15 27 54,0	255 10 30,0	7 13 13,2
Wega	277 32 28,7	38 36 22,2	282 30 42,9	61 44 41,2

Um diese Oerter der Sterne auf 1607 zu reduciren, nahm ich die jährliche Praecession = 50"11, die von der Verrückung der Ekliptik herrührende Aenderung der Länge

= - 0,5064 cos (Long. + 9° 7') tang lat.
der Breite = + 0,5064 sin (Long. + 9° 7'), die eigene Bewegung bei

ζ Ursae maj. in AR	— + 0,770	in Abw.	— + 0,068
η Ursae maj.	— — 0,160		— — 0,020
Arcturus	— — 1,340		— — 2,270
α Coronae	— + 0,370		— — 0,128
α Serpentis	— + 0,030		— + 0,183
Wega	— + 0,278		— + 0,370

Dieses gab mir für den 1. Jan. neuen Styls 1607 folgende Längen und Breiten:

	Länge.	Nördliche Breite.
α Ursae majoris	129° 40' 23,2	49° 39' 12,2
γ — —	144 56 20,2	47 6 55,8
ζ — —	160 6 33,6	56 21 8,5
η — —	171 23 38,0	54 24 31,1
Arcturus	198 45 26,9	31 1 38,5
φ Bootis	197 16 8,1	42 28 25,5
ε Bootis	202 36 32,1	40 39 19,5
α Coronae	216 44 56,3	44 22 6,5
α Serpentis	226 34 32,1	25 32 22,0
μ Serpentis	230 27 6,7	16 17 22,4
δ Ophiuchi	236 49 9,2	17 18 7,5
σ Ophiuchi	238 1 18,6	16 29 21,3
ζ Ophiuchi	240 6 25,0	23 36 47,0
η Ophiuchi	243 44 51,6	11 26 39,1
η Ophiuchi	252 29 17,3	7 14 50,4
Wega	279 49 51,8	61 44 57,2

Um der Unsicherheit zu entgehen, die durch die eigene Bewegung der Sterne entstehen kann, schlug ich noch einen andern Weg ein. Man kann mit Sicherheit voraussetzen, dass BRADLEY die grössern Sterne mit vorzüglicher Genauigkeit bestimmte: ich verwandelte die Bradley'schen geraden Aufsteigungen und Abweichungen für 1760 (Wiener Ephemeriden 1803) mit der Schiefe der Ekliptik = 23° 28' 18,8" in Längen und Breiten, und fand durch Interpolation aus diesen und den neuen Bestimmungen für den 1. Jan. 1607:

	Länge.	Breite.
η Ursae majoris	171° 23' 45,7	54° 23' 51,9
Arcturus	198 45 25,1	31 0 40,6
α Coronae	216 45 49,4	44 22 7,7
α Serpentis	226 34 4,6	25 32 38,9
Wega	279 48 28,0	61 45 8,2

Bei Arctur, Wega und η Ursae majoris scheint die Interpolation das richtigere Resultat zu geben; bei Arctur und Wega, weil diese beiden Sterne zu denen gehören, auf welche BRADLEY seinen ganzen Catalog gründete, bei Beutenasch, weil BRADLEY diesen Stern durch seine oftmaligen Beobachtungen bei Entdeckung der Aberration gewiss genau bestimmt hat. α Coronae und α Serpentis gehören nicht zu den Bradley'schen Fundamental-Sternen und stimmen auch nicht völlig mit LA CAILLE; überdies scheinen die eigenen Bewegungen dieser Sterne von MASKELYNE und PIAZZI so gut bestimmt zu sein, dass man ziemlich sicher darauf fassen kann. Ich nahm also bei Arctur, Wega und Beutenasch das Resultat der Interpolation, bei allen übrigen aber gab ich den durch Rechnung gefundenen Oertern den Vorzug. Dass ich diese mittleren Stellungen in scheinbare, zu den Tagen der Beobachtungen gehörende, verwandelte, bedarf kaum einer Erwähnung.

Die Zeiten der Beobachtungen verwandelte ich in mittlere Pariser Zeiten, indem ich den Beobachtungsort Torporley's 26° 20" und Harriot's 9° 45" in Zeit westlich vom Pariser Meridian annahm.

Nachdem ich die gemessenen Distanzen vom Einflusse der Refraction befreiet und die Harriot'schen Beobachtungen vom $\frac{29}{9}$ Sept. bis $\frac{13}{23}$ October aus den beigezeichneten Tangenten selbst schärfer hergeleitet hatte, schritt ich zu der Berechnung der Längen und Breiten. Folgende Tafel enthält die Resultate; ich bemerke noch, dass die mit einem Sternchen bezeichneten Zahlen Längen und Breiten sind, die nach der Lage der Beobachtungen, aus welchen sie geschlossen wurden, nicht genau sein können, und auf welche ein kleiner Fehler der Distanz sehr grossen Einfluss hat. Auf solche bezeichnete Längen oder Breiten nahm ich beim Mittel keine Rücksicht. Wenn mehr als zwei Distanzen gemessen wurden, combinirte ich sie so oft als möglich: so dass n Distanzen immer $\frac{1}{2} n^2$ — $\frac{1}{2} n$ Längen und Breiten gaben.

Harriot's Beobachtungen.

Tag alten Styls.	Mittlere Pariser Zeit.	Verglichene Sterne.	Länge	Mittel oder Auswahl.	Breite	Mittel oder Auswahl.
Sept. 21	82° 29' 22"	α, ε Bootis	198° 6' 50,5*	197° 43' 49,7	36° 41' 6,2*	36° 57' 43,9
		φ, α Bootis	198 4 18,7*		36 49 57,4*	
		φ, ε Bootis	197 43 49,7		36 57 43,9	
— 22	7 59 4	α, ε Bootis	205 42 56,6	205 57 10,1	34 27 8,4	34 31 59,9
		Arct. Gemma	204 46 58,2*		35 33 50,9*	
		ε Boot. Gemma	206 11 23,6		34 36 51,3	

Tag alten Styl.	Mittlere Pariser Zeit.	Verglichene Sterne.	Länge	Mittel oder Auswahl.	Breite	Mittel oder Auswahl.
Sept. 23	6 ^h 58 ^m 46 ^s	α , ϵ Bootis	212° 29' 32",6	32° 19' 37",8
— 24	6 29 28	α , ϵ Bootis	218 0 0,9	29 28 38,1
— 24	7 58 27	α , ϵ Bootis	218° 10' 16",3	218 15 23,4	29° 20' 18",0	29 20 18,0
		Arct. α Serp.	217 50 21,9*		27 56 25,3*	
		ϵ Boot. α Serp.	218 48 53,6*		29 54 13,1*	
		α , ϵ Boot. α Serp.	218 20 30,5		
— 28	7 27 20	α , μ Serpent.	230 47 30,1*	231 14 5,5	21 19 8,7	21 20 44,5
		α Serp. δ Oph.	231 34 48,2*		21 42 45,3*	
		α Serp. 1 Oph.	231 8 21,0		21 37 50,4	
		μ Serp. δ Oph.	231 12 48,4		21 16 41,4	
		μ Serp. 1 Oph.	231 15 9,2		21 16 19,5	
		δ , 1 Ophiuchi	231 16 3,5		21 13 42,3	
— 29	6 57 4	α Serp. δ Oph.	233 12 50,4*		20 22 48,7*	
Octbr. 3	6 56 6	μ Serp. δ Oph.	238 0 7,6	238 8 11,1	15 30 25,4	15 35 54,4
		μ Serp. ϵ Oph.	238 0 34,4		15 34 4,4	
		μ Serp. 1 Oph.	238 1 13,0		15 39 33,2	
		μ Serp. ζ Oph.	237 53 2,7		14 50 54,4*	
		δ , ϵ Ophiuchi	238 7 57,4		15 34 24,9	
		δ , 1 Ophiuchi	238 10 38,9		15 37 27,0	
		δ , ζ Ophiuchi	238 32 4,5*		15 51 10,0*	
		ϵ , 1 Ophiuchi	238 17 3,4*		15 36 7,2	
		ϵ , ζ Ophiuchi	238 28 15,3		15 40 24,1	
		1, ζ Ophiuchi	238 23 39,7		15 34 49,0	
— 5	5 55 40	μ Serp. 1 Oph.	240 16 0,1	13 20 38,6
		μ Scorpi. ζ Oph.	240 7 33,1*		12 52 0,5*	
		1, ζ Ophiuchi	240 24 5,7		13 20 57,5	
— 13	5 54 20	δ , 1 Ophiuchi	241 0 29,5*	242 18 35,3	9 2 1,2*	9 39 40,0
		δ , ζ Ophiuchi	242 6 40,6		9 38 6,0	
		δ , η Ophiuchi	242 27 45,4		9 53 26,3	
		1, ζ Ophiuchi	242 46 33,1*		9 13 57,1*	
		1, η Ophiuchi	242 18 11,9		9 9 11,9*	
		ζ , η Ophiuchi	242 21 42,2		9 27 27,7	

Torporley's Beobachtungen.

Tag alten Styl.	Mittlere Pariser Zeit.	Verglichene Sterne.	Länge	Mittel oder Auswahl.	Breite	Mittel oder Auswahl.
Sept. 22	7 ^h 15 ^m 18 ^s	Arct. Wega	206° 4' 47",8	205° 43' 11",8	33° 42' 18",0	33° 57' 2",0
		Benet. Wega	205 4 56,7		34 16 19,5	
		Benet. Arct.	205 59 50,8		33 52 28,6	
— 23	7 15 21	Arct. Wega	211 29 3,2	211 45 25,3	32 1 14,1	31 30 20,9
		Benet. Wega	212 19 12,8		31 32 41,8	
		Benet. Arct.	211 27 59,8		30 57 6,7	
— 24	7 16 3	Arct. Wega	218 9 3,0	218 4 5,2	28 28 45,5	28 45 44,1
		Benet. Wega	217 44 41,9		28 42 8,6	
		Benet. Arct.	218 18 30,8		29 6 19,0	
— 26	7 14 28	Arct. Wega	225 59 24,6	226 4 43,2	25 30 49,2	24 39 49,2
		Benet. Wega	227 6 28,8		24 56 49,9	
		Benet. Arct.	225 8 16,0		23 31 48,4	
— 27	7 14 11	Arct. Wega	229 8 48,1	229 9 22,4	22 41 10,0	22 29 8,7
		Benet. Wega	229 23 56,8		22 33 50,7	
		Benet. Arct.	228 55 31,3		22 13 25,3	
— 29	7 13 39	Arct. Wega	233 25 24,2	233 26 42,5	18 53 51,7	19 3 47,2
		Benet. Wega	233 12 52,5		18 59 27,3	
		Benet. Arct.	233 38 50,9		19 18 2,7	

Tag alten Styls	Mittlere Pariser Zeit.	Verglichene Sterne	Länge.	Mittel.	Breite	Mittel.
Octbr. 4	7 ^h 12 ^m 27 ^s	Arct. Wega	239° 25' 56",9	239° 22' 54",1	14° 10' 15",6	13° 38' 51",6
		Benet. Wega	240 10 16,0			
		Benet. Arct.	238 32 29,4			
— 5	7 12 14	Arct. Wega	239 46 41,5	239 44 35,0	13 8 30,3	12 55 50,1
		Benet. Wega	240 4 47,3			
		Benet. Arct.	239 22 16,2			
— 6	7 12 2	Arct. Wega	239 51 5,5	239 42 44,5	12 1 14,8	11 19 45,4
		Benet. Wega	240 45 33,3			
		Benet. Arct.	238 31 34,7			

Ausser diesen Beobachtungen hat man noch die Kepler'schen und Longomontan'schen Schätzungen und die wirklichen Messungen des letztern. Dieser sind zwar nur zwei, allein ihre Güte und die Zeit, in welcher sie angestellt wurden, machen sie äusserst schätzbar. Ich reducirte sie daher eben so sorgfältig wie die vorigen und erhielt:

Tag alten Styls	Mittlere Pariser Zeit.	Verglichene Sterne.	Länge.	Mittel.	Breite.
Sept. 18	6 ^h 24 ^m 35 ^s	α Ursae majoris	161° 51' 32",0	161° 56' 49",3
		γ Ursae majoris	162 2 6,6		
— 21	6 38 38	ζ Urs. Gemma	196 46 15,8	37° 10' 29",6

Aus der ersten Beobachtung lässt sich die Breite nicht herleiten, da die Sterne und der Comet fast in gerader Linie standen; ich setzte daher die Breite = 40°,0 voraus, wie sie die Longomontan'sche Schätzung gibt, wenn man den mit blossen Augen geschehenen Durchmesser des Mondes = 40' setzt; unter dieser Voraussetzung erhielt ich obige Längen.

Nun erlaube ich mir noch einige Bemerkungen über den Inhalt der obigen Tafeln. Die Harriot'schen Beobachtungen haben, wie die Rechnung lehrt, den Grad von Genauigkeit, den man billigerweise von dem gebrauchten Instrumente fordern kann. Bei der Beobachtung vom 24. Septbr. liess sich aus der gemessenen Distanz von α Serpentes nicht anders etwas vernünftiges schliessen, als wenn man die Breite als bekannt voraussetzte, und damit den Längen-Unterschied berechnete. Die Beobachtungen vom 29. September und 5. Oct. werden vom Beobachter selbst als zweifelhaft angegeben; erstere kann auch ihrer Lage halber nicht zur Orts-Bestimmung des Cometen dienen.

Bei der ersten und letzten Harriot'schen Beobachtung sind einige Längen und Breiten ihrer vortheilhaften Lage ungeachtet ausgeschlossen. Bei der ersten stimmt die Distanz des Cometen von α Bootis nicht mit den übrigen und auch nicht mit der Longomontan'schen Beobachtung, die zwei Stunden früher angestellt wurde; bei der letzten ist die Entfernung des Cometen von λ Ophiuchi, wie die andern Distanzen zeigen, etwa 30' zu gross angegeben. Daher schloss

ich die Resultate aus, auf die diese beiden fehlerhaften Messungen Einfluss haben.

Das Harriot'sche Instrument schien mir anfangs fehlerhaft; ich bemerkte, dass man viele Distanzen etwas vergrössern müsse, um die verschiedenen Längen und Breiten einer Beobachtung in bessere Harmonie zu bringen. Um hierüber zu entscheiden, verglich ich die beobachteten Entfernungen einiger Fixsterne mit den berechneten. Der Erfolg zeigte aber so unregelmässige Unterschiede, dass sie nur den Beobachtungen zugeschrieben werden konnten. Es fanden sich folgende Distanzen.

	Beobachtet.	Berechnet	Fehler.
ϵ, δ Ophiuchi	1° 35'	1° 23' 53",1	+ 11' 6",9
ρ, ϵ Bootis	4 30	4 22 38,4	+ 7 21,6
α, η Bootis	5 0	5 10 20,5	- 10 20,5
δ, λ Ophiuchi	6 50 34",0	7 1 21,5	- 10 41,5
α, ϵ Bootis	10 0	10 7 50,3	- 7 50,3
α Coron. ϵ Bootis	11 0	11 3 32,7	- 3 32,7
α, ρ Bootis.	11 20	11 31 27,9	- 11 27,9
α Serp. δ Oph.	12 21	12 35 23,8	- 14 23,8
η Serp. ρ Boot.	14 35	14 37 17,6	- 2 17,6
α Coron. α Serp.	20 23	20 26 45,0	- 3 45,0
α Bootis α Serp.	25 10	25 2 1,2	+ 7 58,8

Wollte man noch auf die Verkürzung Rücksicht nehmen, die die Strahlenbrechung verursachte, so würden die positiven Fehler grösser, die negativen hingegen kleiner werden: das Mittel würde also dem Nichts noch näher kommen. Es folgt aus dieser Vergleichung

übrigens, dass eine einzelne Beobachtung wohl mit einem Fehler von 10' bis 15' behaftet sein kann.

Weit weniger genau und zuverlässig sind die Beobachtungen, die NATHANIEL TORPORLEY anstellte. Schon ein flüchtiger Ueberblick zeigt uns Unterschiede von ein und zwei Graden, die von bedeutenden Fehlern der Messungen herrühren müssen, da die Lage der verglichenen Sterne eine genaue Bestimmung zulies. Selbst die Beobachtung vom 29. Sept., bei welcher TORPORLEY anmerkt „Nox serenissima, ubi certior et accuratior observatio“ trägt das Gepräge der Unzuverlässigkeit; der Unterschied von der Harriot'schen fast gleichzeitigen in der Breite ist = 1° 19', viel zu gross, um ihn dieser, selbst unzuverlässigen Beobachtung aufbürden zu können! Unterschiede zwischen gleichzeitigen Bestimmungen, die 1/2 oder 3/4 Grad betragen, findet man nicht selten. Aus solchen Beobachtungen, die kaum der Rechnung werth sind, lassen sich wohl keine brauchbare Elemente der Bahn herleiten. Ich setze daher die ganze Reihe Torporley'scher Längen und Breiten bei Seite, da sie die aus den schärferen Harriot'schen und Longomontan'schen Bestimmungen herzuleitenden Elemente weder bestätigen noch widerlegen können.

Nach diesen Bemerkungen bleiben nur acht Beobachtungen HARRIOT'S und die beiden von LONGOMONTAN übrig, die man als gut und genau erkennt; es sind die folgenden:

Mittlere Pariser Zeit	Länge.	Längen-Parallaxe	Breite.	Breiten-Parallaxe
Sept. 18	6° 24' 35"	161° 56' 49",3	- 0',778	- 7',864
21	6 38 38	196 46 15,8	- 1,807	37° 10' 29",6 - 8,484
21	8 29 22	197 43 49,7	- 2,409	36 57 43,9 - 8,257
22	7 59 4	205 57 10,1	- 3,072	34 31 59,9 - 7,960
23	6 58 46	212 29 32,6	- 3,223	32 19 37,8 - 7,421
24	6 28 28	218 0 9,9	- 2,948	29 28 36,1 - 7,033
24	7 58 27	218 15 23,4	- 3,453	29 20 18,0 - 7,899
28	7 27 30	231 14 5,5	- 3,547	21 20 44,5 - 7,805
Oct. 3	6 56 6	238 8 11,1	- 3,411	15 35 54,4 - 7,850
13	5 54 20	242 18 35,3	- 3,040	9 39 40,0 - 7,988

Die unter der Aufschrift Längen- und Breiten-Parallaxe beigetzten Zahlen werden mit der Entfernung des Cometen von der Erde dividirt und mit ihrem Zeichen zu den berechneten Längen addirt, um die scheinbaren Oerter zu erhalten.

Um nach diesen Beobachtungen die Laufbahn des Cometen zu berechnen, bediente ich mich der Sonnen-tafeln des Freiherrn von ZACH. Ich vernachlässigte die Störung des Mars und verbesserte den Fehler bei

der Störung des Radius Vector durch Jupiter*). Die Elemente berechnete ich in einer Ellipse, deren halbe grosse Axe ich aus dem Mittel zwischen den beiden Erscheinungen von 1531 und 1682 = 17,86543 fand. Diese vorausgesetzt, erhielt ich durch wiederholte Annäherung folgende Elemente:

Zeit der Sonnennähe	Octbr. $\frac{16}{26}$. 17° 20' 19" m. Z. in Paris.
Länge des aufst. Knotens	= 1° 18' 40' 28",0
Neigung der Bahn	. . . = 17 12 17,1
Länge der Sonnennähe	. = 10° 1 38 10,5
kleinster Abst. v. d. Sonne	= 0,587974
Log. des kleinsten Abst.	= 9,7693580
Log. d. mittl. tägl. Beweg.	= 0,3060913

Aus diesen Elementen berechnete ich wieder die Oerter des Cometen; ich nahm gehörige Rücksicht auf Aberration, Nutation und Parallaxe. Folgende sind die Resultate:

	Mittlere Pariser Zeit.	Berechnete Länge.	Berechnete Breite.	Fehler der	
				Länge.	Breite.
Sept. 18,	26707	161° 56' 4",3	39° 48' 16",3	- 2' 45",0	. . .
21,	27673	196 53 57,5	37 6 49,6	+ 7 41,7	- 3' 40",0
21,	35373	197 37 3,3	36 54 28,2	- 6 46,4	- 3 15,7
22,	33269	205 55 51,2	34 29 31,1	- 1 18,9	- 2 28,8
23,	29081	212 30 29,7	31 59 27,7	+ 0 8,0	. . .
24,	26977	217 54 26,8	29 31 32,6	- 5 34,1	+ 2 54,5
24,	33226	218 12 46,6	29 22 24,9	- 2 36,8	+ 2 6,9
28,	31065	231 13 24,3	21 32 56,3	- 0 41,2	+ 12 9,8
Oct. 3,	28896	238 13 6,1	15 41 50,3	+ 4 55,0	+ 5 55,9
13,	24606	242 14 31,6	9 32 50,1	- 4 3,7	- 6 49,9

Das Resultat, welches ich oben aus der Beobachtung vom 23. September zog, weicht in der Länge + 0' 57",1 und in der Breite - 20' 10",1 von dem berechneten Orte des Cometen ab; allein augenscheinlich ist dieser Fehler der beobachteten Distanz des Cometen von ϵ Bootis zuzuschreiben, denn eine Vergrößerung dieser Distanz bringt eine beträchtliche Verminderung der Breite hervor. Wenn man aus dem berechneten Orte des Cometen die Entfernungen herleitet, die am 23. Sept. beobachtet wurden, so hat man

Comet, Arctur	= 11° 45' 24",3 - beob. = 11° 45' 17",4 - Fehler + 5',9**)
Comet, ϵ Boot.	= 11 46 12,3 - beob. = 11 30 18,2 - Fehler + 15' 54",1

Dieses zeigt noch augenscheinlicher einen Beobachtungs-Fehler. Ich begnügte mich daher, aus der

*) M. C. VIII. B. S. 450.

**) [so im Original.]

ersteren Entfernung und der berechneten Breite die Länge = $312^{\circ} 30' 21,7$ herzuleiten.

Die zwei Beobachtungen, die STANDISH am 15. Sept anstellte, weichen von unsern Elementen in der Länge um einen Grad ab, während das Mittel der Breitenfehler nur einige Minuten beträgt. Allein die Beobachtungen selbst sind sehr grob und fehlerhaft; der Beweis dieser Behauptung lässt sich leicht führen. Nach der Theorie sollte die Bewegung des Cometen in der Zwischenzeit von $3\frac{1}{2}$ Stunde $1^{\circ} 14'$ in Länge und $29'$ in Breite betragen; dagegen beobachtete STANDISH $2^{\circ} 6'$ und $4'$: die algebraische Summe der Fehler war also

$52'$ und $25'$. Es schien also nicht rathsam, nach diesen Beobachtungen etwas an den Elementen zu ändern.

Wo man mehr als eine Länge oder Breite beobachtete, weichen diese immer weit mehr von einander ab, als von den Elementen. Dass ein grosser Theil der Fehler auf Rechnung der Beobachtungen gesetzt werden muss, zeigen unter andern auch die beiden Angaben vom 21. Sept., wo LONGOMONTAN und HARRIS fast gleiche, aber entgegengesetzte Unterschiede von den Elementen haben; das Mittel aus diesen Fehlern = $27,7$ verschwindet fast.

2. Beiträge zur Berechnung der elliptischen Bahn eines Cometen.*)

(Bode Jahrb. f. 1810 p. 113.)

Der Zweck, den man sich bei der Berechnung der Bahn eines Himmelskörpers vorsetzt, ist, einen Kegelschnitt zu finden, der sich an alle Beobachtungen so gut als möglich anschliesst. Man kann nicht leugnen, dass in diesem Ausdrucke etwas Unbestimmtes liegt und daher kommt es auch, dass man mehrere dazu dienliche Methoden angeben kann, die eben so viele Erklärungen dieses Ausdruckes enthalten. Die erste Idee die sich mir darbot, war, eine Ellipse zu finden, die sich an die Beobachtungen so anschliessen sollte, dass nicht nur die Summe aller Fehler, sondern auch jedes Drittheils derselben, in chronologischer Ordnung genommen = 0 werden sollte.

Man kann diesen Zweck unter gewissen Einschränkungen auf eine sehr leichte Weise erreichen. Ich setze voraus, dass man eine vorläufige Bahn bestimmt hat, die der Wahrheit schon ziemlich nahe kömmt und deren noch unbekannte Unterschiede von der wahren Bahn in der geocentrischen Rectascension zu den Zeiten

$$\begin{aligned} a, b, c, d \dots m \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \dots \mu \end{aligned}$$

betragen. Man wird diese Unterschiede durch die Ordinaten einer höheren Parabel, deren Abscissen die Zeiten sind, darstellen oder μ durch eine rationale Function der Zeit m ausdrücken können. Es kömmt nun darauf an, die Gleichung einer Curve zu finden, die eine Anzahl gegebener Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots \mu$

durch $a, b, c, d \dots m$ darstellt: wenn man nun $\alpha, b, c, d \dots$ nahe genug beisammen setzt, so wird diese Curve auch alle intermediären Ordinaten berühren und man wird also im Stande sein, aus mehreren bekannten Unterschieden der beiden Bahnen auf die zwischenliegenden unbekanntenen zu schliessen.

Ich finde für diese Curve den allgemeinen Ausdruck:

$$\mu = Aa + B\beta + C\gamma + D\delta + \dots$$

wo die Coefficienten durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a \cdot b - m \cdot c - m \cdot d - m \dots}{b - a \cdot c - a \cdot d - a \dots} \\ B &= \frac{a - m \cdot c - m \cdot d - m \dots}{a - b \cdot c - c - b \cdot d - b \dots} \\ C &= \frac{a - m \cdot b - m \cdot c - m \cdot d - m \dots}{a - c \cdot b - c \cdot c \cdot d - c \dots} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Hat man nun eine Reihe von Unterschieden durch Beobachtung gefunden, so kann man jeden derselben dem obigen Ausdrucke gleich setzen und dann durch Addition so viele Gleichungen formiren, als unbekannt Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ vorkommen; dadurch werden diese bestimmt, und eine Bahn die man an sie anschliesst, wird die Summe nicht nur aller Fehler, sondern auch jedes Theils derselben, der zu der Formirung einer Gleichung diente, = 0 machen. Die Richtigkeit dieses Verfahrens hat indess ihre Grenzen: denn da man nur drei gerade Aufsteigungen und drei Abweichungen bei der Berechnung eines Kegelschnitts zu Grunde legen kann, so kann man auch nur vier

*) [Auszug aus der Preisschrift: „Untersuchung der wahren elliptischen Bewegung des Cometen von 1769“. (10 d. allgem. Verz.)]

drei unbekanntem Grössen α, β, γ für die Rectascension und von eben so vielen für die Declination Gebrauch machen, wodurch der Ausdruck jedes Fehlers auf

$$\frac{b-m \cdot c-m}{b-a \cdot c-a} \alpha + \frac{a-m \cdot c-m}{a-b \cdot c-b} \beta + \frac{a-m \cdot b-m}{a-c \cdot b-c} \gamma$$

reducirt wird. Man wird die Coefficienten $\frac{b-m \cdot c-m}{b-a \cdot c-a}$ etc. für jede vorhandene Beobachtung berechnen, und so die oben erwähnten 6 Gleichungen formiren; indess wird diese Arbeit noch erleichtert, wenn man nicht jeden Coefficienten einzeln, sondern die Summe aller zu einer Gleichung gehöriger sucht. Setzt man nämlich $m = a + m', a + m'', a + m''' \dots a + m^{(n)}$, so ist die Summe der zu diesen Werthen von m gehörigen Coefficienten

$$= \alpha \left\{ r - (m' + m'' + m''' + \dots) \frac{b+c-2a}{b-a \cdot c-a} + \frac{m'^2 + m''^2 + m'''^2 + \dots}{b-a \cdot c-a} \right\}$$

$$+ \beta \left\{ - (m' + m'' + m''' + \dots) \frac{c-a}{a-b \cdot c-b} + \frac{m'^2 + m''^2 + m'''^2 + \dots}{a-b \cdot c-b} \right\}$$

$$+ \gamma \left\{ - (m' + m'' + m''' + \dots) \frac{b-a}{a-c \cdot b-c} + \frac{m'^2 + m''^2 + m'''^2 + \dots}{a-c \cdot b-c} \right\}$$

Dieses wirklich sehr leichte Verfahren ist aber, wie wir bemerkt haben, nicht immer anwendbar und nur richtig, wenn es die Voraussetzung $\mu = h + im + km^2$ ist, welcher Fall immer eintreten wird, wenn die Zwischenzeiten klein sind und die vorläufige Bahn sich der Wahrheit schon stark nähert. — Die Mittel, aus den durch α, β, γ verbesserten Oertern die elliptische Laufbahn zu finden, übergehe ich hier, und verweise auf das in der M. C. September 1805 vorgeschlagene Verfahren*) oder ein anderes ihm gleichgültiges.

Bei unserm Cometen reichte diese Methode nicht mehr hin und ich war daher genöthigt, eine andere passendere, obgleich nicht so leichte anzuwenden. Schon der grosse EULER hat in seiner Theorie der Cometen, pag. 99 der deutschen Uebersetzung, bei dem Cometen von 1744 eine der von mir gebrauchten sehr ähnliche Methode angewandt; indess war der Gesichtspunkt, von dem EULER ausging, von dem meinigen verschieden; — er wollte seine Bahn nur aus drei Beobachtungen bestimmen, ich hingegen wollte die meinige an die ganze Reihe anschliessen. EULER hat nachher diese

Methode gegen eine andere vertauscht, denn er fand, dass sie nach sehr langen verdriesslichen Rechnungen auf Resultate führte, die man auf einem kürzern Wege mit weniger Mühe und mehr Sicherheit hätte finden können. Ich unterschreibe gern das Urtheil, was EULER § 4 des Anhangs hierüber fällt und ich würde diese Methode gewiss eben so wenig anwenden, als es EULER nachher that, wenn es nur darauf ankäme, aus drei Beobachtungen die Elemente zu bestimmen und wenn die vorläufige Bahn noch beträchtlich von der wahren verschieden wäre. Allein für den Zweck, den ich mir vorsetze, schien mir diese Methode vorzüglich brauchbar zu sein und ich gestehe, dass ich keine andere kenne, die das Gesuchte mit so vieler Sicherheit und Leichtigkeit gewährt haben würde. Doch habe ich an der Eulerschen Methode eine Aenderung angebracht, die den Calcul sehr beträchtlich abkürzt und die ausser dieser Abkürzung noch den Vortheil einer grösseren Genauigkeit hat. EULER variirte nämlich die Bestimmungsstücke der Bahn eines nach dem andern um eine bestimmte Grösse und berechnete mit allen diesen Variationen die Oerter der Cometen für die drei Beobachtungszeiten; daraus ergaben sich denn sechs Gleichungen, die eben so viele unbekante Grössen enthielten und deren Auflösung die Variationen angab, die man bei der angenommenen Bahn anbringen musste, um die wahre zu erhalten. Ich hingegen habe unmittelbar durch die Differentialrechnung die Aenderungen bestimmt, die eine angenommene Variation der Bestimmungsstücke auf die geocentrische gerade Aufsteigung und Abweichung hervorbringt. Nach der schon erwähnten Methode des Herrn Dr. GAUSS (M. C. Mai 1804) hat man:

$$x = \frac{(1+e) - \pi \sin \alpha}{1 + e \cos \varphi} \sin (A + P + \varphi)$$

$$y = \frac{(1+e) - \pi \sin b}{1 + e \cos \varphi} \sin (B + P + \varphi)$$

$$z = \frac{(1+e) - \pi \sin c}{1 + e \cos \varphi} \sin (C + P + \varphi)$$

dann

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - Y}{x - X} \quad \sin \delta = \frac{z - Z}{J}$$

wo x, y, z die Coordinaten des Cometen auf die dort angegebenen Ebenen, X, Y, Z die Coordinaten der Erde, α und δ die geocentrische gerade Aufsteigung und Abweichung bedeuten. A, B, C, a, b, c sind die constanten von der Lage der Bahn abhängigen Winkel, e die Excentricität, φ die wahre Anomalie, P die Elongation des Periheliums vom Ω . Durch Differentirung von α und δ hat man:

*) [s. d. folg. Abhndlg. 3.]

$$d\alpha = dy \frac{\cos \alpha}{J \cos \delta} - dx \frac{\sin \alpha}{J \cos \delta}$$

$$d\delta = dz \frac{\cos \delta}{J} - dy \frac{\sin \alpha \sin \delta}{J} - dx \frac{\cos \alpha \sin \delta}{J}$$

Ich werde nun die Werthe dx, dy, dz bestimmen, die den Differentialen der Elemente der Bahn zugehören.

I. Durchgangszeit durchs Perihelium.

Das Differential der Durchgangszeit = dT .

$$d\varphi = \frac{m \sqrt{1+c}}{2\pi^{\frac{1}{2}} \sin i'} (1 + e \cos \varphi)^2 dT$$

$$dx = x \left\{ \cotg(A + P + \varphi) + \frac{e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right\} d\varphi$$

$$dy = y \left\{ \cotg(B + P + \varphi) + \frac{e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right\} d\varphi$$

$$dz = z \left\{ \cotg(C + P + \varphi) + \frac{e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right\} d\varphi$$

II. Länge des aufsteigenden Knotens = n .

$$dA = \frac{\cos i}{\sin \alpha^2} dn \dots da \cotg a = -\cotg a \sin A \sin i dn$$

$$dB = \frac{\cos e \cos c}{\sin b^2} dn \dots db \cotg b = -\cotg b \sin B \sin i dn$$

$$dC = \frac{-\sin e \cos b}{\sin c^2} dn \dots dc \cotg c = -\cotg c \sin C \sin i dn$$

$$dx = x \left\{ \cotg a \cdot da + \cotg(A + P + \varphi) dA \right\}$$

$$dy = y \left\{ \cotg b \cdot db + \cotg(B + P + \varphi) dB \right\}$$

$$dz = z \left\{ \cotg c \cdot dc + \cotg(C + P + \varphi) dC \right\}$$

III. Neigung der Bahn = i .

$$dA = -\sin A \cotg a \cdot di \quad da \cotg a = -\cotg A \cdot dA$$

$$dB = -\sin B \cotg b \cdot di \quad db \cotg b = -\cotg B \cdot dB$$

$$dC = -\sin C \cotg c \cdot di \quad dc \cotg c = -\cotg C \cdot dC$$

dx, dy, dz wie bei II.

IV. Elongation des Periheliums von Ω .

$$dx = x \cotg(A + P + \varphi) dP$$

$$dy = y \cotg(B + P + \varphi) dP$$

$$dz = z \cotg(C + P + \varphi) dP$$

V. Kleinster Abstand von der Sonne.

$$d\varphi = -\frac{3mT}{\pi^{\frac{1}{2}}(1+e)^{\frac{1}{2}}} (1 + e \cos \varphi)^2$$

$$dx = \frac{x}{\pi} d\pi + x \left\{ \cotg(A + P + \varphi) + \frac{e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right\} d\varphi$$

$$dy = \frac{y}{\pi} d\pi + y \left\{ \cotg(B + P + \varphi) + \frac{e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right\} d\varphi$$

$$dz = \frac{z}{\pi} d\pi + z \left\{ \cotg(C + P + \varphi) + \frac{e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right\} d\varphi$$

VI. Abweichung von der Parabel = δ .

$d\varphi = V \cdot d\delta$, wo V aus der Tafel, die sich im September-Stücke 1805 der M. C. pag. 206 befindet, genommen wird.

$$dx = \frac{(\cos \varphi - 1)x}{(1 + e \cos \varphi)(1 + e)} d\delta$$

$$+ x \left\{ \cotg(A + P + \varphi) + \frac{e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right\} d\varphi$$

$$dy = \frac{(\cos \varphi - 1)y}{(1 + e \cos \varphi)(1 + e)} d\delta$$

$$+ y \left\{ \cotg(B + P + \varphi) + \frac{e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right\} d\varphi$$

$$dz = \frac{(\cos \varphi - 1)z}{(1 + e \cos \varphi)(1 + e)} d\delta$$

$$+ z \left\{ \cotg(C + P + \varphi) + \frac{e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right\} d\varphi$$

Wenn $1 - c$ sehr klein ist, so kann man

$$\text{statt } \frac{e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \dots \text{tg } \frac{1}{2} \varphi$$

und

$$\text{statt } \frac{(\cos \varphi - 1)}{(1 + e \cos \varphi)(1 + e)} \dots -\frac{1}{2} \text{tg } \frac{1}{2} \varphi^2$$

setzen. Die numerische Entwicklung dieser Differentiale wird sehr durch die schon vorhergegangene Berechnung von α und δ erleichtert; denn fast alle dort gebrauchten Logarithmen finden hier ihre Anwendung; so sind auch die Werthe von $da \cotg a, db \cotg b, dc \cotg c, dA, dB, dC$ constant, und die Logarithmen von

$$x \left\{ \cotg(A + P + \varphi) + \frac{e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right\}$$

kommen mehrmals vor. Obgleich diese Differentialausdrücke ihrer Natur nach keine sehr bequeme Form annehmen können, so glaube ich doch, dass ihre Auflösung kaum ein Drittel von der Zeit erfordert, die eine unmittelbare Berechnung von α und δ mit den variierten Bestimmungsstücken kosten würde; und wer kann bei der unmittelbaren Berechnung ein einzelnes Zehnthel einer Secunde verbürten, da man den Werth der Differentiale ohne Mühe auf Tausendtheile von Secunden finden kann?

Nachdem diese Differential-Coefficienten für alle Beobachtungen gefunden sind, kann man daraus sechs Gleichungen formiren, die dann die gesuchte Variation der angenommenen Elemente geben werden. Da durch die Substitution dieser Variationen die sechs Gleichungen = 0 werden, so ist dadurch die Bedingung am Anfange dieses Abschnittes erfüllt.

3. Ueber die Berechnung der wahren Anomalie in einer von der Parabel nicht sehr verschiedenen Bahn.

(Mon. Corresp. XII. p. 197.)

Die indirecte Auflösung der Aufgabe „die wahre Anomalie eines Cometen in einer sich der Parabel nähernden Bahn für eine gegebene Zeit zu finden,“ hat in der That Schwierigkeiten, die fast unübersteiglich sind, wenn der Unterschied der Bahn von einer Parabel sehr klein ist. Man ist dann gezwungen, die Rechnung mit sehr vielziffrigen Logarithmen zu führen, wobei man zuweilen selbst mit unsern grössten trigonometrischen Tafeln nicht ausreichen würde. Diese Schwierigkeiten und auch der lange mühsame Calcul, den man bei dieser indirecten Auflösung nicht vermeiden kann, mögen den Wunsch nach einer leichtern, aber eben so sichern Methode, rechtfertigen.

SIMPSON und LA PLACE lehrten ein viel leichteres Verfahren, das sich aber nur auf die erste Potenz des Unterschiedes der Bahn von der Parabel erstreckt, und da, wo man grosse Genauigkeit verlangt, nicht gebraucht werden kann. Die unendliche Reihe, die EULER in seiner Theorie der Planeten, in der siebenten Aufgabe, angab, enthält selbst diese erste Potenz nicht vollständig, welches von einer unrichtigen Annahme der Gestalt der Reihe herrührt. Die folgende Auflösung scheint also nicht ganz überflüssig zu sein*).

*) Hr. BESSEL, der astronomischen Welt durch seine frühere Abhandlung über den Cometen von 1607 (M. C. Nov. 1804, X. S. 425) schon rühmlichst bekannt, legt hier einen neuen Beweis seines Fleisses und Scharfsinnes ab, indem er die Auflösung einer Aufgabe liefert, die selbst ein EULER schwierig nennt, und die sogar letzterer in seiner Theorie der Planeten und Cometen (Aufgabe 7 S. 17) nur unvollständig durch eine fehlerhafte Reihe gegeben hatte.

Die Berechnung des Orts oder der wahren Anomalie eines Cometen beruht auf der durchlaufenen Fläche und der dazu angewandten Zeit, und ist als Function dieser Elemente anzusehen. Behält man die von EULER in dem angezeigten Werke angenommenen Benennungen bei (a perihelische Distanz, b halber Parameter der Bahn, $t = \frac{1}{2} \text{ tang (Anom. ver.)}$, so ist, allgemein ohne Rücksicht auf die Natur der krummen Linie (nur unter der Voraussetzung, dass es ein Kegelechnitt ist):

$$\text{Fläche} = \frac{a^2 b^2 \int dt (1 + tt)}{(b + \delta t^2)^2} = A; \quad \delta = 2a - b;$$

$$\text{Zeit} = \frac{a^2 b^2}{m \sqrt{b}} \int \frac{dt (1 + tt)}{(b + \delta t^2)^2} = T$$

wo allgemein

$$m = \frac{A}{T \sqrt{b}} = 271989,735 \text{ (EULER, Theorie der Planeten und Cometen S. 3).}$$

BESSEL'S Abhandlungen. 1. Bd.

Es sei π der kleinste Abstand der Bahn von der Sonne, e die Excentricität, und $1 - e = \delta$, $\varphi + \lambda$ die wahre Anomalie, und $\text{tang } \frac{1}{2}(\varphi + \lambda) = t$, so ist die Zeit

$$T = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{m \sqrt{2 - \delta}} \int \frac{dt (1 + tt)}{(1 + \frac{\delta}{2 - \delta} tt)^2};$$

hierin setze man der Kürze halber α statt $\frac{\delta}{2 - \delta}$ und integriere durch eine unendliche Reihe, so wird

Der Ausdruck für die Zeit ist eines algebraischen Integrals nur dann fähig, wenn

$$\delta = 2a - b = 0$$

wird, was bekanntlich dann der Fall ist, wenn die Bahn des Cometen eine Parabel ist, wo

$$\begin{aligned} \text{Zeit} &= \frac{a^2 \cdot 4a^2}{m \cdot 4a^2 \sqrt{2a}} \int dt (1 + tt) \\ &= \frac{a^{\frac{3}{2}}}{m \sqrt{2}} (t + \frac{1}{2}t^2) \end{aligned}$$

Für alle andere Fälle hat man kein endliches Integral zu finden vermocht, sondern musste zu der Integration durch Reihen seine Zuflucht nehmen, deren Branchbarkeit bei der numerischen Entwicklung von ihrer Convergenz abhängt. Aus dem Ausdruck für die Zeit muss durch Umkehrung der Reihen die Reihe für wahre Anomalie hergeleitet werden, und so leicht diese Entwicklung für eine parabolische Bahn ist, indem es hier einzig auf die Auflösung der cubischen Gleichung

$$\text{tg } \frac{1}{2} (\text{Anom. ver.}) + 3 \text{tg } \frac{1}{2} (\text{Anom. ver.}) - \frac{m T \sqrt{2}}{a^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ankömmt, so schwierig und mühsam ist dagegen diese Entwicklung bei einer Bahn, die von einer parabolischen nur wenig abweicht. Die Aufsuchung eines hierzu dienlichen Ausdrucks ist der Gegenstand dieses lehrreichen Ansatzes. Der Verfasser gelangt dazu auf einem eleganten analytischen Wege, indem er anfangs eine parabolische Bahn annimmt, dann aber die Variation der Coefficienten für eine andere Curve mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes bestimmt und durch wirkliche Entwicklung der Differentialen und durch die Umkehrung der hier nach gefundenen Reihe die Correction der parabolischen Anomalie selbst findet. So weitläufig der hier gefundene Ausdruck an sich selbst ist, so wird doch dessen jedesmalige numerische Entwicklung durch die diesem Aufsatz beigefügten Tafeln ungemein erleichtert. BESSEL'S Fleiss bürgt für die Richtigkeit dieses Ausdrucks, dessen Entwicklung nicht wenig mühsam sein müsste. (v. LINDENAU.)

[3 d. a. Verz. — POSSELT (Zeitschr. f. Astr. V., 161). OLDERS-ENCKE a. a. O. 242.]

$$T = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{m\sqrt{2-\delta}} \left\{ t + \frac{1}{2}(1-2\alpha)t^2 - \frac{3}{2}\alpha(1-\frac{3}{2}\alpha)t^3 + \dots \right\}$$

und wenn man alles nach Potenzen von δ ordnet

$$T = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{m\sqrt{2}} \left\{ t + \frac{1}{2}t^2 + \delta \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2 \right) + \delta^2 \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t^3 \right) + \dots \right\}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{m\sqrt{2}} (A' + B'\delta + C'\delta^2 + D'\delta^3 + \dots)$$

In einer Parabel, wo der kleinste Abstand = π , wird der Comet in der Zeit T die wahre Anomalie φ erreichen. Man wird φ mit Hilfe einer parabolischen

Tafel aus der Gleichung $T = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{m\sqrt{2}} (\vartheta + \frac{1}{2}\vartheta^2)$ finden, wo der Kürze halber ϑ statt tang $\frac{1}{2}\varphi$ gesetzt ist. Es ist also $0 = A' - \vartheta - \frac{1}{2}\vartheta^2 + B'\delta + C'\delta^2 + D'\delta^3 + \dots$

In dieser Gleichung sind ϑ und δ bekannt; t und die davon abhängigen Coefficienten enthalten, ausser den bekannten, nur die unbekannte Grösse λ , deren Erfindung die Auflösung der Aufgabe ausmacht.

Wenn man in einer Function (Fx) von x statt dieser Grösse ($x+i$) setzt, so wird die Function nach dem Taylor'schen Lehrsatz

$$= F(x+i) = (Fx) + \frac{d(Fx)}{dx} \cdot i + \frac{d^2(Fx)}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{d^3(Fx)}{dx^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \dots$$

Auf diese Weise erhält man

$$A' = A + \frac{dA}{d\lambda} \lambda + \frac{d^2A}{d\lambda^2} \frac{\lambda^2}{1.2} + \dots$$

wo A den Coefficienten A' bedeutet, wenn man ϑ' statt t setzt, welche Form begrifflich auch B', C', D', \dots erhalten. Man hat also

$$0 = \frac{dA}{d\varphi} \lambda + \frac{d^2A}{d\varphi^2} \frac{\lambda^2}{1.2} + \frac{d^3A}{d\varphi^3} \frac{\lambda^3}{1.2.3} + \dots$$

$$+ \delta (B + \frac{dB}{d\lambda} \lambda + \frac{d^2B}{d\lambda^2} \frac{\lambda^2}{1.2} + \frac{d^3B}{d\lambda^3} \frac{\lambda^3}{1.2.3} + \dots)$$

$$+ \delta^2 (C + \frac{dC}{d\varphi} \lambda + \frac{d^2C}{d\varphi^2} \frac{\lambda^2}{1.2} + \dots)$$

$$+ \delta^3 (D + \frac{dD}{d\varphi} \lambda + \dots)$$

Aus dieser Gleichung wird sich nun λ ohne Schwierigkeit bestimmen lassen. Man setze

$$\lambda = a\delta + b\delta^2 + c\delta^3 + d\delta^4 + \dots$$

und substituirt diesen Werth und seine Potenzen in die Gleichung, so erhält man, wenn man das was in jeder Potenz von δ multiplicirt ist, = 0 setzt

$$- a = B : \left(\frac{dA}{d\varphi} \right)$$

$$- b = \left(\frac{d^2A}{d\varphi^2} \cdot \frac{a^2}{1.2} + \frac{dB}{d\varphi} a + C \right) : \left(\frac{dA}{d\varphi} \right)$$

$$- c = \left(\frac{d^3A}{d\varphi^3} \cdot \frac{2ab}{1.2} + \frac{d^2A}{d\varphi^2} \cdot \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{dB}{d\varphi} b \right. \\ \left. + \frac{d^2B}{d\varphi^2} \cdot \frac{a^2}{1.2} + \frac{dC}{d\varphi} a + D \right) : \left(\frac{dA}{d\varphi} \right)$$

$$- d = \left(\frac{d^4A}{d\varphi^4} \cdot \frac{b^2 + 2ac}{1.2} + \frac{d^3A}{d\varphi^3} \cdot \frac{2ab}{1.2.3} + \frac{d^2A}{d\varphi^2} \cdot \frac{a^4}{1.2.3.4} + \frac{dB}{d\varphi} c \right. \\ \left. + \frac{d^3B}{d\varphi^3} \cdot \frac{2ab}{1.2} + \frac{d^2B}{d\varphi^2} \cdot \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{dC}{d\varphi} b + \frac{d^2C}{d\varphi^2} \cdot \frac{a^2}{1.2} + \frac{dD}{d\varphi} a + E \right) : \left(\frac{dA}{d\varphi} \right)$$

Durch wirkliche Entwicklung der Differentialen erhält man:

$$\lambda = \left(-\frac{1}{2}\vartheta + \frac{1}{2}\vartheta^2 + \frac{3}{2}\vartheta^3 \right) \delta$$

$$+ \left(-\frac{1}{24}\vartheta - \frac{1}{24}\vartheta^3 + \frac{3}{24}\vartheta^2 + \frac{3}{24}\vartheta^4 + \frac{3}{24}\vartheta^5 + \frac{3}{24}\vartheta^6 \right) \delta^2$$

$$+ \left(-\frac{1}{24}\vartheta - \frac{1}{24}\vartheta^3 - \frac{1}{24}\vartheta^5 + \frac{1}{24}\vartheta^4 + \frac{1}{24}\vartheta^6 + \frac{1}{24}\vartheta^7 \right) \delta^3$$

Man könnte, wenn es die Mühe lohnte, noch mehrere Glieder hinzufügen. — Dass diese Reihe sowohl für positive als negative Werthe von δ , oder sowohl für Ellipsen als Hyperbeln, dienen kann, versteht sich von selbst.

Die Berechnung dieser Reihe ist in der That mühsam. Indess kann man diesem Mangel durch einige Tafeln abhelfen, die die Coefficienten von δ, δ^2, \dots enthalten. Die erste dieser Tafeln würde mit der identisch sein, die schon SIMPSON, aber nur auf vier Decimalstellen, berechnete, und die, genauer berechnet, der Abhandlung des Dr. OLBERS: „Ueber die leichteste Methode der Bestimmung einer Cometen-Bahn“ folgte. Diese, und eine zweite von mir hinzugefügte Tafel für den Coefficienten von δ^2 , findet man am Ende dieses Aufsatzes. Um die Correction in Secunden zu erhalten, wurde überall 5,3144251 addirt. Da sich die Unterschiede der Logarithmen sehr ungleich ändern, so wurden noch die zweiten Differenzen hinzugefügt. Gemeinlich wird man bei der ersten Correction mit 5, bei der zweiten mit 3 oder 4 Decimalstellen ausreichen. Bei jener wurden deshalb die beiden letzten Ziffern durch einen Punkt abgeändert. Man addirt zu den Angaben der ersten Tafel Log. δ , zu der zweiten 2 Log. δ . Dadurch erhält man die Logarithmen der Correctionen in Secunden ausgedrückt. Das dritte Glied kann man schon vernachlässigen, wie dieses aus den folgenden Beispielen hervorgeht:

	Comet von	
	1759	1769
Wahre Anomalie	109° 0' 0",0	150° 0' 0",0
Log. des kleinsten Abstandes	9,7856500	9,0886320
Log. δ	8,5099324	7,9979400
Zeit, die zu der obigen Anomalie gehört	63,54892	72,99493
Die Anomalie in der Parabel	99° 36' 56",08	149° 47' 56",88
Erste Correction	+ 22 30,72	+ 12 0,24
Zweite —	+ 32,57	+ 2,87
Wahre Anomalie	99° 59' 59",37	149° 59' 59",99

Man könnte den Coefficienten a, b, c, \dots noch eine etwas bequemere Form geben, wenn man λ nach Potenzen von $\frac{\delta}{2-\delta}$ fortgehen liesse. Dann würde man aber die Anomalie φ in einer Parabel bestimmen müssen, deren kleinster Abstand von der Sonne = $\pi(1 - \frac{1}{2}\delta) - \frac{1}{2}$. Auch würde dieser Vortheil nur die Berechnung der Tafeln etwas erleichtern, den Gebrauch derselben aber keineswegs.

Vielleicht ist es nicht unpassend, hier anzumerken, wie man die sehr kurze und bequeme Verbesserungs-Methode, die Dr. OLBERS § 76 ff. seiner „Abhandlung über die leichteste Methode, die Bahn eines Cometen zu berechnen“ vorschreibt¹⁾, auch auf die Bestimmung einer elliptischen und hyperbolischen Bahn anwenden kann. Da man voraussetzen darf, dass diese vortreffliche Abhandlung sich in den Händen aller Leser befindet, so werden die dortigen Zeichen hier ohne weitere Erklärung gebraucht werden können. Man bestimme die Grössen x, y aus der mittlern Länge, und leite daraus die mittlere Breite her. Man wird sicher sein, dass der Comet sich in einer Parabel bewegt, wenn die so berechnete mittlere Breite mit der beobachteten harmonirt; wo nicht, so wird man den Unterschied entweder der Unsicherheit der Beobachtungen, oder der Abweichung der Bahn von einer Parabel zuschreiben. In diesem letztern Falle könnte folgendes Verfahren zur Bestimmung dieser Abweichung gebraucht werden:

Nachdem man die Rechnung für die Parabel geführt hat, wiederhole man sie für die erste Hypothese in einer Ellipse, wo man für δ eine willkürliche sehr kleine Grösse annimmt. Bis an die Herleitung der wahren Anomalie in der ersten Beobachtung ist an der für die Parabel geführten Rechnung nichts zu ändern. Diese wahre Anomalie φ berechnete man dann nach der Formel*)

¹⁾ OLBERS-ENCKE B. S. O. 61.]

*) Dieses Verfahren zur Bestimmung der wahren Anomalie in einer elliptischen Bahn scheint mir weit bequemer, denn dass, welches EULER (Theorie der Planeten und Cometen S. 19)

$$\sin(\varphi + \frac{u''' - u'}{2} + z) = \frac{r''' - r'}{r'' + r'} \frac{\cos z}{\sin(\frac{u''' - u'}{2}) (1 - \delta)}$$

$$= \frac{\sin z}{(1 - \delta) \cos(\frac{u''' - u'}{2})}$$

wobei $\tan z = \frac{r''' - r'}{r'' + r'} \cotang(\frac{u''' - u'}{2})$. Man kann auch nach dieser Formel schon die Anomalie in der Parabel bestimmen, wenn man $\delta = 0$ setzt, wodurch die Reduction auf die Ellipse sehr erleichtert wird. Die Zwischenzeit und die wahre Anomalie in der mittlern Beobachtung wird man nach der obigen Methode bestimmen, und daraus die geocentrische Länge und Breite ableiten. Durch diese, verbunden mit den schon bekannten, durch m und n verursachten Aenderungen, bestimme man x und y , so, dass sie der mittlern Länge genug thun. Die Unterschiede der Breite von der beobachteten und der in der Parabel berechneten, werden den Werth von δ zu erkennen geben, den man annehmen muss, um die drei Beobachtungen vollständig darzustellen. Bei diesem Verfahren vernachlässigt man die Producte $m\delta, n\delta$ (welches gewiss erlaubt ist), indem man p, q, r, s , in der Parabel und Ellipse für gleich gross annimmt. Wollte man diese kleinen Grössen aber nicht vernachlässigen, so dürfte man nur in der Ellipse die Rechnung für alle drei Hypothesen wiederholen, welches die Arbeit etwas vergrössern würde. Vielleicht dient es dieser Methode zu einiger Empfehlung, dass man dadurch gleich beurtheilen kann, wie stark sich die Abweichung der Bahn von einer Parabel auf die geocentrische Erscheinung äusserte, und wie grossen Einfluss vorausgesetzte Fehler der Beobachtungen auf die Natur der Bahn haben.

dazu angibt. Nach letzterem wird ein Hälfwinkel ω berechnet und dann

$$\tan \frac{1}{2}(\text{Anom. ver.}) = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2a-b}} \cdot \tan \frac{1}{2}\omega$$

gefunden. Zwar bedarf man auch hier einer Hälfsgrösse, allein diese wird durch eine leichte trigonometrische Rechnung unmittelbar gefunden, statt dessen man nach EULER die Angular-Grösse aus der transcendenten Gleichung $\omega - e \sin \omega - p' = 0$

$$e = \text{Excentricität der Bahn, } p' = \frac{2m \delta^2 \cdot T}{a^2}$$

suchen muss. Mag man sich nun zu Auflösung dieser Gleichung entweder der von LA GRANGE gegebenen directen Methode (Memoires de l'Acad. de Berlin 1768) oder der indirecten des CAUROLI (Traité de trigonome. Chap. XIII), bedienen, so bleibt doch allemal die Auflösung auf diesem Wege sehr mühsam, und steht obigem Verfahren an Leichtigkeit weit nach. (v. LINDENAU.)

[Tafeln, hier weggelassen, s. OLBERS-ENCKE a. a. O. 149; OPPOLZER, Lehrbuch z. Bahnbest. d. Planeten und Cometen, 326; WATSON, Theoret. Astronomy, Table IX. u. a. a. O.]

4. Rechtfertigung des in der „Monatlichen Correspondenz“ Sept. 1805 vorgeschlagenen Verfahrens, die Excentricität einer Cometenbahn zu finden.*

(Briefwechsel mit Olbers I. p. 27.)

Man hat:

Curtirter Abstand I. Hyp. II. Hyp. III. Hyp. IV. Hyp. Wahre Bahn.

1. Beobachtung	\mathcal{A}	$\mathcal{A}+m$	\mathcal{A}	\mathcal{A}	$\mathcal{A}+x$
3. Beobachtung	\mathcal{A}''	\mathcal{A}''	$\mathcal{A}''+n$	\mathcal{A}''	$\mathcal{A}''+y$
1-e	0	0	0	δ	z
Zwischenzeit	τ	$\tau+p$	$\tau+q$	$\tau+u$	t''
Länge	a	$a+r$	$a+s$	$a+v$	a''
Breite	b	$b+h$	$b+i$	$b+k$	β''

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$t'' - \tau = \frac{p \cdot x}{m} + \frac{q \cdot y}{n} + \frac{u \cdot z}{\delta}$$

$$a'' - a = \frac{r \cdot x}{m} + \frac{s \cdot y}{n} + \frac{v \cdot z}{\delta}$$

$$\beta'' - b = \frac{h \cdot x}{m} + \frac{i \cdot y}{n} + \frac{k \cdot z}{\delta}$$

Wenn man x und y eliminiert, so bleibt für z folgender Ausdruck:

$$(Q) \dots \frac{z}{\delta} = \frac{\left(\frac{t''-\tau}{p} - \frac{a''-a}{r}\right)\left(\frac{q}{p} - \frac{i}{h}\right) - \left(\frac{t''-\tau}{p} - \frac{\beta''-b}{h}\right)\left(\frac{q}{p} - \frac{s}{r}\right)}{\left(\frac{u-v}{p} - \frac{v}{r}\right)\left(\frac{q}{p} - \frac{i}{h}\right) - \left(\frac{u-v}{p} - \frac{k}{h}\right)\left(\frac{q}{p} - \frac{s}{r}\right)}$$

Dieser auf allgemein anerkannten Gründen beruhende Ausdruck kann als Probestein des oben erwähnten Verfahrens dienen. Nach jenem Verfahren

* [vergl. vorsteh. Abhdlg. 3 u. Olbers-Encke a. a. O. 61 ff.]

berechnet man nämlich in der Parabel $x^{(1)}, y^{(1)}, \beta''^{(1)}$, in der Ellipse $x^{(2)}, y^{(2)}, \beta''^{(2)}$, in der wahren Bahn sind diese Grössen x, y, β'' . Entwickelt man diese Rechnungen, so findet man

$$x^{(1)} = \frac{t''-\tau}{q} - \frac{a''-a}{s} \quad y^{(1)} = \frac{t''-\tau}{p} - \frac{a''-a}{r}$$

$$x^{(2)} = \frac{t''-(\tau+u)}{q} - \frac{a''-(a+v)}{s} \quad y^{(2)} = \frac{t''-(\tau+u)}{p} - \frac{a''-(a+v)}{r}$$

Ferner ist $\beta''^{(2)} - \beta''^{(1)} : \beta'' - \beta''^{(1)} = \delta : z$ also $\frac{z}{\delta} = \frac{\beta'' - \beta''^{(1)}}{\beta''^{(2)} - \beta''^{(1)}}$ und wenn man für $\beta''^{(1)}, \beta''^{(2)}$ ihre Werthe setzt und den Bruch mit $\left(\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right)$ aufhebt

$$\frac{z}{\delta} = \frac{(\beta'' - b)\left(\frac{q}{p} - \frac{s}{r}\right) + h\left(\frac{t''-\tau}{p} - a\right)\frac{q}{pr} - \left(\frac{t''-\tau}{p} - \frac{a''-a}{r}\right)\left(\frac{q}{p} - \frac{i}{h}\right)}{k\left(\frac{q}{p} - \frac{s}{r}\right) + h\left(\frac{u-v}{pr} - \frac{v}{q}\right) - i\left(\frac{u-v}{p} - \frac{v}{r}\right)}$$

$$= \frac{\beta'' - b\left(\frac{q}{p} - \frac{s}{r}\right) + \left(\frac{t''-\tau}{p} - a\right)\frac{q}{pr} - \frac{i}{h}\left(\frac{t''-\tau}{p} - \frac{a''-a}{r}\right)}{k\left(\frac{q}{p} - \frac{s}{r}\right) + \frac{u-v}{pr} - \frac{v}{q} - \frac{i}{h}\left(\frac{u-v}{p} - \frac{v}{r}\right)}$$

Da dieser Ausdruck mit dem vorigen (Q) völlig gleichlautend ist, so erhellt daraus die Richtigkeit des vorgeschlagenen Verfahrens.

5. Zur Bestimmung des Olbers'schen M.

(Briefwechsel mit Olbers I. p. 321.)

... Sie wollten längst Ihre berühmte Abhandlung über die Cometen neu auflegen, dürften wir nicht hoffen, dass bald Ihre Geschäfte es erlauben? Wäre unsere Hoffnung gegründet, so hätte ich ein Schärfein dazu beizutragen, von welchem ich nicht weiss, ob Sie es schon besitzen. Ihre beiden Methoden, M zu bestimmen, sind nämlich, wie es mir scheint, aus einer und derselben Quelle geschöpft, und deshalb nur in der Form verschieden. Man würde die Sache, wie es mir scheint, ziemlich leicht auf folgendem Wege darstellen können.

[Br. m. O. I. 384 (O.), 387, 427, 430 (O.).]

Allgemein hat man zwischen drei durch Längen A', A'', A''' , und Breiten B', B'', B''' (auf beliebige grösste Kreise bezogen) bestimmten Punkten der Sphäre, wenn sie in einem grössten Kreise liegen, die Gleichung

$$0 = \tan g B' \sin (A'' - A''') - \tan g B'' \sin (A''' - A') + \tan g B''' \sin (A' - A'')$$

Wendet man dieses auf die beiden Kreise an, in deren Durchschnitt Ihr durch y'' und c'' bestimmter Ort*) liegt oder setzt man

*) Olbers-Encke a. a. O. 28.]

$$\begin{aligned} B' &= \beta'' A' = \alpha' & B'' &= 0 & A'' &= A'' \\ B'' &= \gamma'' A'' = c'' & B''' &= \gamma''' A''' = c''' \\ B''' &= \beta''' A''' = \alpha''' & B'''' &= \beta'''' A'''' = \alpha'''' \end{aligned}$$

so hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \text{tang } B'(\sin \alpha''' - c') - \text{tang } \gamma'' \sin(\alpha''' - \alpha') + \text{tang } \beta'' \sin(c'' - \alpha') \\ 0 &= \text{tang } \gamma'' \sin(\alpha''' - A'') + \text{tang } \beta'' \sin(c'' - A'') \end{aligned}$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \text{tang } \beta' \sin(\alpha''' - c') - \text{tang } \beta'' \frac{\sin(\alpha''' - \alpha')}{\sin(\alpha''' - A'')} \sin(c'' - A'') \\ &\quad + \text{tang } \beta''' \sin(c'' - \alpha') \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich $\text{tang } c''$, und wenn man dieses in

$$M = \frac{t'}{r'} \cdot \frac{\sin(\alpha''' - c'')}{\sin(c'' - \alpha')} = \frac{t'}{r'} \cdot \frac{\sin \alpha''' - \cos \alpha''' \text{ tang } c''}{\cos \alpha' \text{ tang } c'' - \cos \alpha'} \text{ setzt,}$$

ohne Mühe Ihr zweiter Werth von M . Ich habe mir das Vergnügen gemacht, auf diesem Wege das immer kleine $c'' - \alpha''$ auszudrücken und die, freilich Ihrer Formel für M an Bequemlichkeit nicht gleichkommende

$$\text{tg}(c'' - \alpha'') = \frac{\text{tg } \beta' \sin(\alpha''' - \alpha') - \text{tg } \beta'' \sin(\alpha''' - \alpha') + \text{tg } \beta''' \sin(\alpha''' - \alpha')}{\text{tg } \beta' \cos(\alpha''' - \alpha') + \text{tg } \beta'' \frac{\sin(\alpha''' - \alpha')}{\text{tg}(\alpha''' - A'')} - \text{tg } \beta''' \cos(\alpha''' - \alpha')}$$

gefunden.

6. Beitrag zur Cometentheorie.

(Astronomische Abhandlungen, herausg. von Schumacher. 2. Hft. 1823. p. 1.)

Die Olbers'sche Methode, Cometenbahnen zu berechnen, beruht bekanntlich auf der Voraussetzung, dass die zwischen zwei äusseren Orten, sowohl des Cometen als der Erde gezogene Chorden, von den mittleren Radien im Verhältniss der Zwischenzeiten geschnitten werden. Den bei kleinen Zwischenzeiten stets geringen Fehler dieser Voraussetzung lehrt OLBERS § 54—62*) zu verbessern, indem er, statt des Verhältnisses der Zeiten, das aus der genäherten Bahn berechnete setzt. Herr CARLINI hat aber in den Mailänder Ephemeriden für 1820 darauf aufmerksam gemacht, dass man die aus dieser Ursache anzubringende Verbesserung unmittelbar aus den äusseren Radien und den Zwischenzeiten erhalten kann, ohne die Elemente der Bahn berechnen zu dürfen; er giebt den Anfang ihrer Reihenentwicklung für den Fall der gleichen Zwischenzeiten, und macht eine Anwendung davon auf den Cometen, welchen PONS am 12. Juni 1819 entdeckte.

Ich theile hier eine andere, ganz genaue und allgemeine Auflösung derselben Aufgabe mit; erlaube mir aber vorher einige Bemerkungen über ihre Anwendung. Wenn

- \odot, \odot', \odot'' die Längen der Sonne,
 R, R', R'' die Entfernungen derselben von der Erde,
 $\alpha, \alpha', \alpha''$ die geocentrischen Längen des Cometen,
 β, β', β'' die geocentrischen Breiten desselben,
 r, r', r'' die Entfernungen desselben von der Sonne,
 $\varrho, \varrho', \varrho''$ die curt. Entfernungen von der Erde,
 $\varphi, \varphi', \varphi''$ die wahren Anomalien des Cometen,

t, t', t'' die Beobachtungszeiten bedeuten, und ferner

$$n = r' r'' \sin(\varphi'' - \varphi'); \quad \tau = \frac{3k}{\sqrt{2}} (t' - t)$$

$$n' = r r'' \sin(\varphi' - \varphi); \quad \tau' = \frac{3k}{\sqrt{2}} (t'' - t')$$

wo $\log \frac{3k}{\sqrt{2}} = 8,5621877$, so ist (GAUSS Theoria Mot.

C. C. § 114. 5)

$$\varrho'' = \varrho \frac{n}{n'} \cdot \frac{\text{tg } \beta' \sin(\alpha' - \odot') - \text{tg } \beta'' \sin(\alpha - \odot')}{\text{tg } \beta' \sin(\alpha' - \odot') - \text{tg } \beta'' \sin(\alpha - \odot')}$$

$$+ \frac{R' \text{tg } \beta' \sin(\odot' - \odot) - \frac{n}{n'} R \text{tg } \beta'' \sin(\odot' - \odot)}{\text{tg } \beta' \sin(\alpha' - \odot') - \text{tg } \beta'' \sin(\alpha - \odot')}$$

woraus die Olbers'sche erste Näherungsformel

$$\varrho'' = \varrho \frac{t' - t'}{t' - t} \cdot \frac{\text{tg } \beta' \sin(\alpha' - \odot') - \text{tg } \beta'' \sin(\alpha - \odot')}{\text{tg } \beta' \sin(\alpha' - \odot') - \text{tg } \beta'' \sin(\alpha - \odot')}$$

entsteht, wenn man

$$\frac{n}{n'} = \frac{t' - t'}{t' - t} = \frac{R' \sin(\odot' - \odot)}{R \sin(\odot' - \odot)}$$

setzt. Die auf diese erste Annäherung gegründete Bahn weicht, im Allgemeinen, von der Wahrheit um Grössen der zweiten Ordnung von τ und τ' ; berechnet man aus derselben $\frac{n}{n'}$, und damit eine neue Bahn, so

ist ihr Fehler von der 4. Ordnung, und so stets um zwei Ordnungen steigend; wären aber die Zwischenzeiten gleich, so würden die Fehler der nacheinander berechneten Bahnen von der 3., 6., 9. . . Ordnung sein. Man kann daher auf diesem Wege eine Reihe von Elementen bestimmen, welche der Wahrheit schnell näher kommen, so dass sie, während sie in aller Schärfe durch die beobachteten äusseren Oerter gehen, auch dem die mittleren Oerter der

[161 d. a. Verz. — Br. m. O. II. 191—193.]

*) [OLBERS-ENCKE a. a. O. 46—52.]

Sonne und des Cometen verbindenden grössten Kreise (welcher das 5. Datum der Olbers'schen Methode ist), mit stets wachsender Annäherung entsprechen. Eine Auflösung der Aufgabe:

„ $\frac{n}{n}$, durch die beiden äusseren Radien und die

Zwischenzeiten unmittelbar zu finden,“

wird daher als ein Zusatz zu der Olbers'schen Methode angesehen werden können, indem vermöge desselben, durch die wiederholte Anwendung derselben Methode, jede beliebige Annäherung erreicht werden kann. Selbst wenn man $\frac{n}{n}$ nicht unmittelbar, sondern erst nach vorangegangener Aufsuchung der Elemente bestimmt, scheint mir die Olbers'sche Methode zur Verbesserung genäherter Bahnen sehr bequem zu sein, zumal wenn man die Gauss'sche Art die Versuche zu machen (M. C. XXVIII. S. 505) dabei benützt. Sehr häufige Anwendungen haben mich überzeugt, dass auch hier die Olbers'sche Methode den sonst gebräuchlichen drei Hypothesen vorzuziehen ist, vorausgesetzt, dass man das oben erwähnte 5. Datum wirklich anwendet und die Bahn nicht etwa einer anderen Bedingung gemäss bestimmen will. Da bei diesen Rechnungen φ' von der Form $M\varphi + \mu$ ist, so theile ich bei dieser Gelegenheit die durch das Hinzukommen der Grösse μ erzeugten Abänderungen der Gauss'schen Formeln mit, wobei ich die Zeichen aus der angeführten Abhandlung in der Mon. Corr. beibehalte: statt der Formeln für $g \cos(G-\odot)$ und $g \sin(G-\odot)$ wendet man nämlich folgende an

$$\begin{aligned} g \cos \gamma \cos(G-\odot) &= R' \cos(\odot''-\odot) - R - \mu \cos(\alpha''-\odot) \\ g \cos \gamma \sin(G-\odot) &= R' \sin(\odot''-\odot) - \mu \sin(\alpha''-\odot) \\ g \sin \gamma &= -\mu \operatorname{tg} \beta'' \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \zeta \cos \gamma \cos(G-H) + \sin \zeta \sin \gamma \\ c'' &= g \cos \varphi - b'' R' \cos \psi'' + \frac{h}{M} \mu \end{aligned}$$

Ich komme nur zur Auflösung der oben ausgesprochenen Aufgabe. Wenn man

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \vartheta; \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi' = \vartheta'; \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi'' = \vartheta''$$

setzt, so ist, für die Parabel, nach einer leichten Reduction

$$\frac{n}{n} = \frac{\vartheta'' - \vartheta' + 1 + \vartheta' \vartheta''}{\vartheta' - \vartheta + 1 + \vartheta \vartheta''} \dots \dots \dots (1)$$

ferner ist

$$\begin{aligned} r &= q^{\frac{1}{2}} (\vartheta' - \vartheta) \{3 + \vartheta \vartheta + \vartheta \vartheta' + \vartheta' \vartheta'\} \\ r'' &= q^{\frac{1}{2}} (\vartheta'' - \vartheta) \{3 + \vartheta' \vartheta' + \vartheta' \vartheta'' + \vartheta'' \vartheta''\} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} r - q^{\frac{1}{2}} (\vartheta' - \vartheta)^2 &= 3 q^{\frac{1}{2}} (\vartheta' - \vartheta) (1 + \vartheta \vartheta') \\ r'' - q^{\frac{1}{2}} (\vartheta'' - \vartheta)^2 &= 3 q^{\frac{1}{2}} (\vartheta'' - \vartheta) (1 + \vartheta' \vartheta'') \end{aligned}$$

wo q die Perihelentfernung bedeutet. Wenn man die beiden letzten Gleichungen ineinander dividirt, so hat man aus (1)

$$\frac{n}{n} = \frac{r'' - q^{\frac{1}{2}} (\vartheta'' - \vartheta)^2}{r - q^{\frac{1}{2}} (\vartheta' - \vartheta)^2} = \frac{r'' - n''^2}{r - n^2} \dots \dots \dots (3)$$

wo die unbekanntenen Grössen

$$\sqrt{q} \cdot (\vartheta' - \vartheta) \text{ und } \sqrt{q} \cdot (\vartheta'' - \vartheta)$$

der Kürze wegen durch u und u'' bezeichnet sind.

Diese unbekanntenen Grössen erhält man durch r, r'', τ, τ'' ausgedrückt, wenn man aus den Gleichungen (2) und aus

$$u = \sqrt{q} \cdot (\vartheta' - \vartheta); u'' = \sqrt{q} \cdot (\vartheta'' - \vartheta) \dots \dots \dots (4)$$

$$\vartheta \vartheta = \frac{r}{q} - 1; \vartheta' \vartheta'' = \frac{r''}{q} - 1 \dots \dots \dots (5)$$

$q, \vartheta, \vartheta', \vartheta''$ eliminiert. Setzt man in (2)

$$\vartheta' = \vartheta + \frac{u}{\sqrt{q}}, \vartheta'' = \vartheta'' + \frac{u''}{\sqrt{q}}$$

so verwandelt sie sich in

$$\begin{aligned} r &= u (3r + 3u \vartheta \sqrt{q} + u u) \\ r'' &= u'' (3r'' - 3u'' \vartheta'' \sqrt{q} + u'' u'') \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

und da man aus (4) und (5) hat

$$\begin{aligned} u'' + u &= \vartheta'' \sqrt{q} - \vartheta \sqrt{q} \\ r'' - r &= \vartheta'' \vartheta'' q - \vartheta \vartheta q \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} \frac{r'' - r}{u'' + u} &= \vartheta'' \sqrt{q} + \vartheta \sqrt{q} \\ 2 \vartheta \sqrt{q} &= \frac{r'' - r}{u'' + u} - (u'' + u); 2 \vartheta'' \sqrt{q} = \frac{r'' - r}{u'' + u} + (u'' + u) \end{aligned}$$

so geben die Gleichungen (6)

$$\begin{aligned} 2r &= u \left\{ 6r + 3u \frac{r'' - r}{u'' + u} - 3u u'' - u u \right\} \\ 2r'' &= u'' \left\{ 6r'' - 3u'' \frac{r'' - r}{u'' + u} - 3u u'' - u'' u'' \right\} \end{aligned}$$

Um hieraus u und u'' zu bestimmen, addire ich sowohl beide Gleichungen, als ihre Producte in $-u''$ und $+u$, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned} 2(r'' + r) &= 3(r'' + r)(u'' + u) - (u'' + u)^3 \\ 2(r'' u - r u'') &= u u'' \{3(r'' - r) + u u - u'' u''\} \end{aligned}$$

und wenn man

$$u'' + u = 2z; u'' - u = 2z'$$

setzt,

$$r'' + r = 3(r'' + r)z - 4z^2 \dots (7)$$

$2(r'' - r)z - 2(r'' + r)z' = (z^2 - z'^2) \{3(r'' - r) - 4z z'\}$ welche letzte Gleichung, mittelst der ersten, sich in $z'^2 - \frac{1}{2} \frac{r'' - r}{r'' + r} z'^2 + 3 \left(\frac{r'' + r}{2} - z z' \right) z' = \frac{r'' - r}{2} z - \frac{1}{2} (r'' - r) z \dots (8)$ verwandelt.

Die Auflösung der Aufgabe hängt also von zwei cubischen Gleichungen ab, deren erste 3 mögliche Wurzeln hat. Wenn man

$$\sin u = \frac{r'' + r}{(r'' + r)^{\frac{3}{2}}}$$

setzt, so ist

$$z = \sqrt{(r'' + r)} \sin \frac{1}{2} u$$

Unter den 3 in dieser Form enthaltenen Wurzeln ist eine negativ und gehört nicht hierher; die beiden anderen sind positiv, und man hat $u < 90^\circ$ zu nehmen, wenn der Comet weniger als 180° , dagegen $u > 90^\circ$, wenn er mehr als 180° durchlaufen hat. Die Gleichung (8) aber hat nur eine mögliche Wurzel, und kann durch die Barker'sche Tafel aufgelöst werden; sie nimmt eine etwas einfachere Gestalt an, wenn man das dritte Glied durch die Chorde k ausdrückt, nämlich:

$$z^3 - \frac{r'' - r}{z} z^2 + \frac{3kk}{16zz} \cdot z' = \frac{r'' - r}{2} - \frac{1}{2}(r'' - r)z$$

Es wird unnötig sein, hier die Fälle aufzuzählen, wo man mit einer genäherten Auflösung der beiden Gleichungen ausreicht. Entwickelt man beide unbekannte Grössen in Reihen, so findet man die ersten Glieder derselben sehr einfach:

$$z = \frac{r'' + r}{3(r'' + r)}$$

$$z' = \frac{r'' - r}{3(r'' + r)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{r''}{r'' + r} \cdot \frac{r'' - r}{(r'' + r)^2}$$

woraus daher, bis auf Grössen der 2. Ordnung incl. richtig, folgt

$$u = \frac{2r}{3(r'' + r)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{r''}{r'' + r} \cdot \frac{r'' - r}{(r'' + r)^2}$$

$$u'' = \frac{2r''}{3(r'' + r)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{r''}{r'' + r} \cdot \frac{r'' - r}{(r'' + r)^2}$$

7. Ueber die Berechnung der wahren parabolischen Anomalie aus der Zeit, für Fälle, in welchen sie sich 180° nähert.

(Astron. Nachr. 22. p. 253.)

Die Tafeln, durch deren Hülfe man, in dem Falle der parabolischen Bewegung eines Cometen, seine, gegebenen Zeiten (t) zugehörigen Anomalien (v) zu bestimmen pflegt, werden unvortheilhaft, wenn v sich 180° nähert; der merkwürdige Comet von 1843 ist, bei der äussersten Kleinheit seiner Perihelentfernung (q), schon sehr bald nach seinem Durchgange durch das Perihel zu solchen Anomalien gelangt, und hat dadurch ein besonderes Hülfsmittel zu ihrer Bestimmung wünschenswerth erscheinen lassen. Ich werde hier eine Tafel mittheilen, welche, in ähnlichen Fällen, das Gewünschte leisten wird.

Die Relation zwischen q , t und v , welcher gemäss die letzte dieser Grössen aufgesucht werden muss, wenn die beiden ersten gegeben sind, ist bekanntlich

$$\frac{kt}{\sqrt{2} \sqrt{q^2}} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3$$

wo k die von GAUSS unter diesem Zeichen eingeführte Zahl

$$\log k = 8,23558 \ 14526 - 10^*)$$

*) Dieser Werth von $\log k$ ist nicht genau der Theoria Mot. C. C. p. 2 angegebene, dessen drei letzte Decimale 414 sind. Er entspricht dem siderischen Jahre = 365.7266374417 (A. N. Nr. 133. S. 266) und dem Verhältnisse der Sonnenmasse zu der Erdmasse = 354890:1. Der Unterschied beider Werthe ist aber so unbedeutend, dass er nicht beachtet zu werden braucht.

[373 d. a. Verz. — OLBERS-EXERC. a. a. O. 148, 240.]

ist. Schreibt man recht von dem Gleichheitszeichen

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3 \{1 + 3 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} v^2\} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3 \{1 + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} v^2\} \cdot \frac{1 + 3 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} v^2}{(1 + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} v^2)^2}$$

oder

$$\frac{8}{3 \sin v^3} \cdot \frac{1 + 3 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} v^2}{(1 + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} v^2)^2}$$

so ist der zweite Factor nur um eine Grösse von der Ordnung von $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} v^4$ von 1 verschieden, also immer wenn v sich 180° nähert und daher $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} v$ eine kleine Grösse ist, sehr nahe = 1. Wenn v der Werth ist, den v annimmt, indem 1 statt dieses Factors gesetzt wird, wenn daher der stumpfe Winkel w nach der Formel

$$\sin w = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6k}} \cdot \frac{\sqrt{q}}{t}$$

aufgesucht wird, so ist w wenig von v verschieden, oder wenn man $v = w + \delta$ setzt, δ eine kleine Grösse.

Zur Bestimmung von δ hat man die Gleichung:

$$\frac{8}{\sin w^3} = 3 \operatorname{tg} \frac{1}{2}(w + \delta) + \operatorname{tg} \frac{1}{2}(w + \delta)^3$$

oder, wenn man $\operatorname{tg} \frac{1}{2} w = \theta$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = x$ setzt:

$$\frac{(1 + \theta\theta)^3}{\theta^3} = 3 \frac{\theta + x}{1 - \theta x} + \frac{(\theta + x)^3}{(1 - \theta x)^3}$$

welche, durch Multiplication mit $(1 - \theta x)^3 \theta^3$, in

$$1 + 3\theta\theta^3 = 3\theta(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6) + 3\theta^3(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6)x^3 + \theta^3(2 + 6\theta^2 + 3\theta^4 + \theta^6)x^2$$

verwandelt wird, oder, durch Division mit dem Coefficienten von x , in:

$$\frac{1 + 3\theta}{3\theta(1+4\theta^2+2\theta^4+\theta^6)} = x - \theta x^2 + \frac{\theta^2(2+6\theta^2+3\theta^4+\theta^6)}{3(1+4\theta^2+2\theta^4+\theta^6)} x^3.$$

Bezeichnet man

$$\frac{1 + 3\theta}{3\theta(1+4\theta^2+2\theta^4+\theta^6)} \text{ durch } y$$

und löset man die Gleichung durch Umkehrung aus, so erhält man

$$x = y + \theta y^2 + \frac{\theta^2(4 + 18\theta^2 + 9\theta^4 + 5\theta^6)}{3(1+4\theta^2+2\theta^4+\theta^6)} y^3 + \text{etc.}$$

und da $x = \text{tg } \frac{1}{2}\delta$, also $\delta = 2x - \frac{2}{3}x^3 + \dots$ ist,

$$\delta = 2y + 2\theta y^2 + \frac{-2 + 32\theta^2 + 16\theta^4 + 10\theta^6}{3(1+4\theta^2+2\theta^4+\theta^6)} y^3 + \text{etc.}$$

Indem y von der Ordnung von $\frac{1}{\theta^5}$ ist, so ist das 2. Glied von der Ordnung von $\frac{1}{\theta^3}$, das dritte von der Ordnung

$\frac{1}{\theta^{11}}$ u. s. w., wesshalb der Ausdruck von δ , in allen Fällen in welchen es ein Interesse hat die Anwendung der gewöhnlichen parabolischen Tafeln zu vermeiden, so schnell convergirt, dass das dritte Glied des Ausdruckes von δ bei der Berechnung dieser Grösse nicht mehr in Betracht kommt.

Die Tafel, welche ich am Ende dieses Aufsatzes mittheile, hat Herr WICHMANN berechnet, und dabei Sorge getragen, sie in den Hunderteln der Secunde

genau zu machen; das Fortschreiten der Argumente hat er so gewählt, dass aus der Vernachlässigung der zweiten Differenz kein Fehler hervorgeht, der grösser ist als ein halbes Hundertel einer Secunde. Sie geht von $w = 155^\circ$ bis $w = 180^\circ$. Ihre Anwendung setzt die Aufschrift von w nach der Formel

$\log \sin w = 0,7803007.592 + \frac{1}{2} \log v - \frac{1}{2} \log t$ voraus*). Mit dem Argumente w ergibt die Tafel δ , und dadurch $v = w + \delta$.

Die umgekehrte Aufgabe: die einer gegebenen wahren Anomalie zugehörige Zeit zu finden, kann auf ähnliche Art aufgelöst werden. Dazu würde erforderlich sein, dass der Tafel eine zweite Columnne gegeben würde, welche δ , mit dem Argumente v , angäbe. Allein zu diesem Zwecke ist ein besonderes Hilfsmittel weder nothwendig, noch halte ich es für vortheilhaft, indem der unmittelbare Ausdruck

$$t = \frac{V\sqrt{q^2}}{k} \left\{ \text{tg } \frac{1}{2}v + \frac{1}{3} \text{tg } \frac{1}{2}v^3 \right\}$$

leicht genug berechnet werden kann. Ich halte also auch für unnöthig, den von v abhängig gemachten Ausdruck von δ hier anzuführen.

*) Hat man schon das Argument der Barker'schen Tafel $\log w = 9,9601277.182 - \frac{1}{2} \log q + \log t$ aufgesucht, so erhält man, dadurch ausgedrückt, $\log \sin w = \frac{1}{2} (\log 200 - \log w)$.

Tafel zur Berechnung der wahren Anomalie für die parabolische Bewegung.

w	δ	w	δ	w	δ	w	δ	
155° 0'	3' 23,09	3,35	157° 0'	2' 14,00	2,41	159° 0'	1' 25,10	1,67
5	19,74	3,31	5	11,59	2,37	5	23,43	1,65
10	16,43	3,26	10	9,22	2,33	10	21,78	1,62
15	13,17	3,22	15	6,89	2,27	15	20,16	1,59
20	9,95	3,18	20	4,58	2,23	20	18,57	1,57
25	6,77	3,14	25	2,31	2,22	25	17,00	1,55
30	3,63	3,09	30	0,08	2,19	30	15,45	1,51
35	0,54	3,05	35	1 57,89	2,17	35	13,94	1,50
40	2 57,49	3,01	40	55,72	2,15	40	12,44	1,47
45	54,48	2,97	45	53,57	2,11	45	10,97	1,44
50	51,51	2,93	50	51,46	2,07	50	9,53	1,43
55	48,58	2,89	55	49,39	2,04	55	8,10	1,40
156° 0	2 45,69	2,85	158° 0	1 47,35	2,01	160° 0	1 6,70	1,37
5	42,84	2,81	5	45,34	1,99	5	5,33	1,36
10	40,03	2,77	10	43,35	1,96	10	3,97	1,33
15	37,26	2,73	15	41,39	1,92	15	2,64	1,31
20	34,53	2,70	20	39,47	1,90	20	1,33	1,29
25	31,83	2,66	25	37,57	1,87	25	0,04	1,26
30	29,17	2,62	30	35,70	1,83	30	0 58,78	1,24
35	26,55	2,58	35	33,87	1,81	35	57,54	1,23
40	23,97	2,54	40	32,06	1,78	40	56,31	1,20
45	21,43	2,51	45	30,28	1,76	45	55,11	1,18
50	18,92	2,51	50	28,52	1,72	50	53,93	1,16
55	16,44	2,48	55	26,80	1,72	55	52,77	1,14
157° 0	2 14,00	2,44	159° 0	1 25,10	1,70	161° 0	0 51,63	1,11
						162° 0	0 59,41	0,90
						5	58,51	0,89
						10	57,62	0,87
						15	56,75	0,85
						20	55,90	0,84
						25	55,06	0,82
						30	54,24	0,81
						35	53,43	0,79
						40	52,64	0,78
						45	51,86	0,76
						50	51,10	0,75
						55	50,35	0,73
						163° 0	0 29,62	0,73

ω	δ		ω	δ		ω	δ	
163° 0'	0' 29",62	0,72	166° 0'	0' 11",22	0,65	172° 0'	0' 0",68	0,07
5	28,90	0,70	10	10,57	0,62	10	0,61	0,06
10	28,20	0,69	20	9,95	0,59	20	0,55	0,06
15	27,51	0,68	30	9,36	0,56	30	0,49	0,05
20	26,83	0,67	40	8,80	0,54	40	0,44	0,05
25	26,16	0,65	50	8,26	0,51	50	0,39	0,04
30	25,51	0,63	167 0	0 7,75	0,48	173 0	0 0,35	0,04
35	24,88	0,63	10	7,27	0,46	10	0,31	0,04
40	24,26	0,61	20	6,81	0,44	20	0,27	0,03
45	23,64	0,60	30	6,37	0,41	30	0,24	0,03
50	23,04	0,59	40	5,96	0,39	40	0,21	0,02
55	22,45	0,57	50	5,57	0,37	50	0,19	0,02
164 0	0 21,88	0,57	168 0	0 5,20	0,36	174 0	0 0,16	0,02
5	21,31	0,55	10	4,84	0,33	10	0,14	0,02
10	20,76	0,54	20	4,51	0,31	20	0,12	0,02
15	20,22	0,53	30	4,20	0,30	30	0,10	0,01
20	19,69	0,51	40	3,90	0,28	40	0,09	0,01
25	19,18	0,51	50	3,62	0,26	50	0,08	0,01
30	18,67	0,50	169 0	0 3,56	0,25	175 0	0 0,07	0,01
35	18,17	0,48	10	3,11	0,23	10	0,06	0,01
40	17,69	0,48	20	2,88	0,22	20	0,05	0,01
45	17,21	0,46	30	2,66	0,20	30	0,04	0,01
50	16,75	0,46	40	2,46	0,19	40	0,03	0,00
55	16,29	0,44	50	2,27	0,18	50	0,03	0,01
165 0	0 15,85	0,44	170 0	0 2,09	0,17	176 0	0 0,02	0,00
5	15,41	0,43	10	1,92	0,16	10	0,02	0,01
10	14,98	0,41	20	1,76	0,14	20	0,01	0,00
15	14,57	0,41	30	1,62	0,14	30	0,01	0,00
20	14,16	0,40	40	1,48	0,13	40	0,01	0,00
25	13,76	0,38	50	1,35	0,12	50	0,01	0,00
30	13,38	0,38	171 0	0 1,23	0,11	177 0	0 0,01	0,00
35	13,00	0,37	10	1,12	0,10	10	0,00	0,01
40	12,63	0,37	20	1,02	0,09			
45	12,26	0,35	30	0,93	0,09			
50	11,91	0,35	40	0,84	0,08			
55	11,56	0,34	50	0,76	0,08			
166 0	0 11,22		172 0	0 0,68				

8. Analytische Auflösung der Kepler'schen Aufgabe*).

(Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften math. Cl. 1816—1817. p. 49.)

Die verschiedenen bekannt gewordenen Auflösungen der Aufgabe „die wahre Anomalie und den Radiusvector in seiner elliptischen Bahn in Reihen zu entwickeln, die nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen der mittleren Anomalie fortgehen,“ beruhen, wenn nicht etwa auf einer ganz kunstlosen successiven Bestimmung der Coefficienten, auf dem Lagrange'schen

Lehrsatz. LAGRANGE selbst deutete diese Rechnung nur an (Mécan. analyt. S. 271); allein LAPLACE, ORIANI, SCHUBERT u. A. haben sie ausgeführt, und der letzte hat noch ganz neulich eine vortreffliche Abhandlung über diesen Gegenstand geliefert, in welcher er die Zahlenentwicklung bis zur 13. Potenz der Excentricität getrieben hat.*)

Ein so allgemeines Mittel, alle Arten von Functionen in Reihen zu entwickeln, der Lagrange'sche Lehrsatz auch ist, so scheint die wahre Methode, die Aufgabe aufzulösen, doch nicht auf ihm zu beruhen.

*) Vorgelesen den 2. Juli 1818. — [125 d. allg. Verz. — Diese Abhandlung findet sich fast wörtlich in einem Brief an LINDEAU (v. Juni 1818) mitgetheilt: Zeitschr. f. Astron. V. p. 367 (124 d. allg. Verz.) sowie auch im Br. m. O. II. 85—89. — Liter. über das Kepler'sche Problem s. STRUZZI, libror. Palcov. catalogus (Petropoli 1860), 330—336.]

*) [Bode's Jahrb. f. 1820 p. 113.]

Ich habe eine andere angewandt, die gewissermassen das Umgekehrte von jener ist; während jene durch aufeinanderfolgende Differentirungen das Ziel erreicht, erreicht es diese durch eine Integration, deren Gesetz sich mit der grössten Leichtigkeit überschauen lässt.

Wenn eine Function von u in die Reihe

$$U = A' \sin u + A'' \sin 2u + \dots + A^{(i)} \sin iu + \dots \\ + B' \cos u + B'' \cos 2u + \dots + B^{(i)} \cos iu + \dots$$

zu entwickeln ist, so ist allgemein

$$A^{(i)} = \frac{1}{\pi} \int U \sin iu \cdot du \quad \left[\begin{array}{l} \text{von } u = 0 \\ \text{bis } u = 2\pi \end{array} \right] \\ B^{(i)} = \frac{1}{\pi} \int U \cos iu \cdot du$$

wovon der Grund am Tage liegt. Man erhält hierdurch die Reihenentwicklung in jedem Falle; entweder durch endliche Integrationen, oder durch unendliche Reihen, oder auch durch Anwendung des Verfahrens, welches ich in der Einleitung zur I. Abtheilung meiner Beobachtungen gegeben habe.*) Diese Art der Entwicklung wird häufig von Nutzen sein, und namentlich lassen sich viele und wichtige astronomische Aufgaben dadurch behandeln, wovon ich hier ein, freilich nicht zu den wichtigsten gehöriges, Beispiel gebe.

Bezeichnet man die mittlere, wahre und excentrische Anomalie durch μ , v , ϵ , die Excentricität durch e , den Radiusvector und die halbe grosse Axe durch r und a , und setzt man

$$v - \mu = A' \sin \mu + A'' \sin 2\mu + A''' \sin 3\mu + \dots \\ + B' \cos \mu + B'' \cos 2\mu + B''' \cos 3\mu + \dots$$

so hat man

$$A^{(i)} = \frac{1}{\pi} \int (v - \mu) \sin i\mu \cdot d\mu = \frac{v - \mu}{i\pi} \cos i\mu + \frac{1}{i\pi} \int \cos i\mu (dv - d\mu)$$

$$B^{(i)} = \frac{1}{\pi} \int (v - \mu) \cos i\mu \cdot d\mu = \frac{v - \mu}{i\pi} \sin i\mu - \frac{1}{i\pi} \int \sin i\mu (dv - d\mu)$$

und wenn man die durch die Annahme des Integrals von 0 bis 2π verschwindenden Glieder weglässt:

$$A^{(i)} = \frac{1}{i\pi} \int \cos i\mu \cdot dv$$

$$B^{(i)} = \frac{-1}{i\pi} \int \sin i\mu \cdot dv$$

Man hat aber bekanntlich

$$\mu = \epsilon - e \sin \epsilon$$

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2} d\epsilon}{1-e \cos \epsilon}$$

woraus folgt

$$A^{(i)} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{i\pi} \int \frac{\cos(i\epsilon - i\epsilon \sin \epsilon)}{1-e \cos \epsilon} d\epsilon$$

*) [s. Theorie d. Instr., Abh. über den Cary'schen Kreis.]

$$B^{(i)} = \frac{-\sqrt{1-e^2}}{i\pi} \int \frac{\sin(i\epsilon - i\epsilon \sin \epsilon)}{1-e \cos \epsilon} d\epsilon$$

Man sieht hieraus, dass alle Coefficienten der Cosinus verschwinden; denn für ϵ und $-\epsilon$ ist die unter dem Integrationszeichen stehende Quantität

$$\frac{\sin(i\epsilon - i\epsilon \sin \epsilon)}{1-e \cos \epsilon} \quad \text{und} \quad -\frac{\sin(i\epsilon - i\epsilon \sin \epsilon)}{1-e \cos \epsilon}$$

wodurch also das zwischen den angezeigten Grenzen genommene Integral verschwindet. Wir haben also nur $A^{(i)}$ näher zu untersuchen. Man hat

$$A^{(i)} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{i\pi} \int \left(\frac{\cos i\epsilon \cos(i\epsilon \sin \epsilon)}{1-e \cos \epsilon} + \frac{\sin i\epsilon \sin(i\epsilon \sin \epsilon)}{1-e \cos \epsilon} \right) d\epsilon$$

und wenn man $\cos(i\epsilon \sin \epsilon)$, $\sin(i\epsilon \sin \epsilon)$, $(1 - e \cos \epsilon)^{-1}$ in unendliche Reihen entwickelt

$$A^{(i)} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{i\pi} \int d\epsilon \left(1 + e \cos \epsilon + e^2 \cos^2 \epsilon + e^3 \cos^3 \epsilon + \dots \right) \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \cos i\epsilon \left(1 - \frac{i^2 e^2}{\Pi 2} \sin^2 \epsilon + \frac{i^4 e^4}{\Pi 4} \sin^4 \epsilon - \dots \right) \\ + \sin i\epsilon \left(i \epsilon \sin \epsilon - \frac{i^2 e^2}{\Pi 3} \sin^3 \epsilon + \frac{i^2 e^4}{\Pi 5} \sin^5 \epsilon - \dots \right) \end{array} \right\}$$

wo $\Pi n = 1.2.3\dots n$, nach der von GAUSS eingeführten Bezeichnung. Die Multiplication der Reihen giebt den Coefficienten einer geraden Potenz von e , von e^{2n} ,

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}}{i\pi}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int d\epsilon \cos i\epsilon \left(\cos \epsilon^{2n} - \frac{i^2}{\Pi 2} \cos \epsilon^{2n-2} \sin^2 \epsilon + \dots + (-1)^n \frac{i^{2n}}{\Pi 2n} \sin^{2n} \epsilon \right) \\ + \int d\epsilon \sin i\epsilon \left(i \cos \epsilon^{2n-1} \sin \epsilon - \frac{i^3}{\Pi 3} \cos \epsilon^{2n-3} \sin^3 \epsilon + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^n \frac{i^{2n-1}}{\Pi (2n-1)} \cos \epsilon \sin \epsilon^{2n-1} \right) \end{array} \right\}$$

und den Coefficienten einer ungeraden, e^{2n+1} ,

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}}{i\pi}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int d\epsilon \cos i\epsilon \left(\cos \epsilon^{2n+1} - \frac{i^2}{\Pi 2} \cos \epsilon^{2n-1} \sin^2 \epsilon + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^n \frac{i^{2n}}{\Pi 2n} \cos \epsilon \sin \epsilon^{2n} \right) \\ + \int d\epsilon \sin i\epsilon \left(i \cos \epsilon^{2n} \sin \epsilon - \frac{i^3}{\Pi 3} \cos \epsilon^{2n-2} \sin^3 \epsilon + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^n \frac{i^{2n+1}}{\Pi (2n+1)} \sin \epsilon^{2n+1} \right) \end{array} \right\}$$

Um das Gesetz dieser Integrale unter eine leichte Uebersicht zu bringen, werde ich sie ganz nach den Potenzen von $\cos \epsilon$ ordnen. Die Wiederholung für gerade und ungerade Potenzen von e wird überflüssig sein, indem man leicht sieht, was sich dadurch ändert; ich werde daher nur die geraden hier entwickeln. Man hat also das e^{2n} enthaltende Glied von $A^{(i)}$

$$\begin{aligned}
 & - \left(1 + \frac{i^2}{112} + \frac{i^4}{114} + \frac{i^6}{116} + \dots + \frac{i^{2n}}{112n} \right) \frac{\sqrt{1-ee}}{i\pi} \int d\varepsilon \cos i\varepsilon \cos \varepsilon^{2n} \\
 & - \left(\frac{i^2}{112} + \frac{2i^4}{114} + \frac{3i^6}{116} + \dots + n \cdot \frac{i^{2n}}{112n} \right) \frac{\sqrt{1-ee}}{i\pi} \int d\varepsilon \cos i\varepsilon \cos \varepsilon^{2n-2} \\
 & + \left(\frac{i^4}{114} + \frac{3i^6}{116} + \dots + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{i^{2n}}{112n} \right) \frac{\sqrt{1-ee}}{i\pi} \int d\varepsilon \cos i\varepsilon \cos \varepsilon^{2n-4} \\
 & + \text{etc.} \dots \dots \\
 & + \left(i + \frac{i^3}{113} + \frac{i^5}{115} + \frac{i^7}{117} + \dots + \frac{i^{2n-1}}{112n-1} \right) \frac{\sqrt{1-ee}}{i\pi} \int d\varepsilon \sin i\varepsilon \sin \varepsilon \cos \varepsilon^{2n-1} \\
 & - \left(\frac{i^3}{113} + \frac{2i^5}{115} + \frac{3i^7}{117} + \dots + (n-1) \cdot \frac{i^{2n-1}}{112n-1} \right) \frac{\sqrt{1-ee}}{i\pi} \int d\varepsilon \sin i\varepsilon \sin \varepsilon \cos \varepsilon^{2n-3} \\
 & + \left(\frac{i^5}{115} + \frac{3i^7}{117} + \dots + \frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{i^{2n-1}}{112n-1} \right) \frac{\sqrt{1-ee}}{i\pi} \int d\varepsilon \sin i\varepsilon \sin \varepsilon \cos \varepsilon^{2n-5} \\
 & + \text{etc.} \dots \dots
 \end{aligned}$$

Die Integrale der zweiten Abtheilung dieses Ausdrucks reduciren sich leicht auf die der ersten, indem man, zwischen den angegebenen Grenzen, hat

$$\int d\varepsilon \sin i\varepsilon \sin \varepsilon \cos \varepsilon^{2n-2k-1} = \frac{i}{2n-2k} \int \cos i\varepsilon \cdot \cos \varepsilon^{2n-2k} d\varepsilon$$

Diese aber sind, wenn P'_p den x^{ten} Coefficienten eines zur y^{ten} Potenz erhobenen Binomiums bedeutet,

$$\int \cos i\varepsilon \cos \varepsilon^{2n-2k} d\varepsilon = \pi \cdot 2^{-2k+2k+1} P'_{(2n-2k)} \left(\frac{i}{2n-2k} \right)$$

Man sieht hieraus, dass sämmtliche Integrale für ein ungerades i verschwinden, indem $n-k-\frac{i}{2}$ alsdann keine ganze Zahl ist; auch verschwinden die Integrale, für welche $n-k-\frac{i}{n}$ negativ ist. Setzt man daher, um keine unnütze Glieder in den Endausdruck aufzunehmen

$$2n = i + 2p$$

wo p nur positive ganze Zahlen, 0 mit eingeschlossen, bedeutet: so werden die Integrale, der Reihe nach,

$$\begin{aligned}
 & \pi 2^{-i-2p+1} P'_{(i+2p)}; \quad \pi 2^{-i-2p+3} P'_{(i+2p-2)}; \\
 & \pi 2^{-i-2p+5} P'_{(i+2p-4)}; \quad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

$$\frac{i\pi}{i+2p} 2^{-i-2p+1} P'_{(i+2p)}; \quad \frac{i\pi}{(i+2p-2)} 2^{-i-2p+3} P'_{(i+2p-2)};$$

$$\frac{i\pi}{i+2p-4} 2^{-i-2p+5} P'_{(i+2p-4)}; \quad \text{etc.}$$

Also das e^{i+2p} enthaltende Glied von $A^{(i)}$

$$= \frac{2\sqrt{1-ee}}{i} \left(\frac{e}{2} \right)^{i+2p} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{i^2}{112} + \frac{i^4}{114} + \dots + \frac{i^{i+2p}}{11(i+2p)} \right) P'_{(i+2p)} \\
 & - 2^i \left(\frac{i^2}{112} + \frac{2i^4}{114} + \dots + (i+p) \frac{i^{i+2p}}{11(i+2p)} \right) P'_{(i+2p-2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2^i \left(\frac{i^4}{114} + \dots + \frac{(i+p)(i+p-1)}{1 \cdot 2} \frac{i^{i+2p}}{11(i+2p)} \right) P'_{(i+2p-4)} \\
 & - \text{etc.} \dots \dots \\
 & + \frac{i}{i+2p} \left(i + \frac{i^3}{113} + \frac{i^5}{115} + \dots + \frac{i^{i+2p-1}}{11(i+2p-1)} \right) P'_{(i+2p)} \\
 & - \frac{i \cdot 2^i}{i+2p-2} \left(\frac{i^3}{113} + \frac{2i^5}{115} + \dots + (i+p-1) \frac{i^{i+2p-1}}{11(i+2p-1)} \right) P'_{(i+2p-2)} \\
 & + \frac{i \cdot 2^4}{i+2p-4} \left(\frac{i^5}{115} + \dots + \frac{(i+p-1)(i+p-2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{i^{i+2p-1}}{11(i+2p-1)} \right) P'_{(i+2p-4)} \\
 & - \text{etc.} \dots \dots
 \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise findet sich für ein ungerades i das e^{i+2p} enthaltende Glied von $A^{(i)}$

$$= \frac{2\sqrt{1-ee}}{i} \left(\frac{e}{2} \right)^{i+2p} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{i^2}{112} + \frac{i^4}{114} + \dots + \frac{i^{i+2p-1}}{11(i+2p-1)} \right) P'_{(i+2p)} \\
 & - 2^i \left(\frac{i^2}{112} + \frac{2i^4}{114} + \dots + \left(\frac{i-1}{2} + p \right) \frac{i^{i+2p-1}}{11(i+2p-1)} \right) P'_{(i+2p-2)} \\
 & + 2^i \left(\frac{i^4}{114} + \dots + \frac{\left(\frac{i-1}{2} + p \right) \left(\frac{i-3}{2} + p \right)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{i^{i+2p-1}}{11(i+2p-1)} \right) P'_{(i+2p-4)} \\
 & - \text{etc.} \dots \dots \\
 & + \frac{i}{i+2p} \left(i + \frac{i^3}{113} + \frac{i^5}{115} + \dots + \frac{i^{i+2p}}{11(i+2p)} \right) P'_{(i+2p)} \\
 & - \frac{i \cdot 2^i}{i+2p-2} \left(\frac{i^3}{113} + \frac{2i^5}{115} + \dots + \left(\frac{i-1}{2} + p \right) \frac{i^{i+2p}}{11(i+2p)} \right) P'_{(i+2p-2)} \\
 & + \frac{i \cdot 2^4}{i+2p-4} \left(\frac{i^5}{115} + \dots + \frac{\left(\frac{i-1}{2} + p \right) \left(\frac{i-3}{2} + p \right)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{i^{i+2p}}{11(i+2p)} \right) P'_{(i+2p-4)} \\
 & - \text{etc.} \dots \dots
 \end{aligned}$$

Die früheren Auflösungen derselben Aufgabe enthalten den Factor $\sqrt{1-ee}$ nicht in dieser Gestalt, sondern mit in die Reihe aufgelöst; ich habe dieses vermieden, theils wegen der grösseren Convergenz der Reihen, theils wegen der dadurch vermehrten Complication des Gesetzes.

Mit auffallender Leichtigkeit giebt diese Methode die Entwicklung des Radiusvectors. Setzt man, indem sich leicht zeigen lässt, dass alle Coefficienten der Sinus verschwinden,

$$r = B^0 + B^1 \cos \mu + B^2 \cos 2\mu + B^3 \cos 3\mu + \dots$$

so hat man

$$\begin{aligned}
 B^{(i)} &= \frac{1}{\pi} \int r \cos i\mu d\mu = \frac{a}{\pi} \int \cos(i\varepsilon - ic \sin \varepsilon) (1 - e \cos \varepsilon)^2 d\varepsilon \\
 &= -\frac{ae}{i\pi} \int \sin \varepsilon \sin(i\varepsilon - ic \sin \varepsilon) d\varepsilon
 \end{aligned}$$

$$= \frac{ae}{ix} \int d\varepsilon \left\{ \begin{aligned} &\cos i\varepsilon \left(i\varepsilon \sin \varepsilon^2 - \frac{i^2 \varepsilon^3}{1!3} \sin \varepsilon^4 + \frac{i^3 \varepsilon^4}{1!6} \sin \varepsilon^5 - \dots \right) \\ &- \sin i\varepsilon \left(\sin \varepsilon - \frac{i^2 \varepsilon^3}{2!2} \sin \varepsilon^3 + \frac{i^4 \varepsilon^4}{1!4} \sin \varepsilon^5 - \dots \right) \end{aligned} \right\}$$

Die allgemeinen Glieder beider Reihen sind

$$\frac{ae}{ix} (-1)^k \cdot \frac{\varepsilon^{2k+1} e^{i\varepsilon^{2k+1}}}{\Pi(2k+1)} \int \sin \varepsilon^{2k+2} \cos i\varepsilon d\varepsilon$$

$$\frac{ae}{ix} (-1)^{k-1} \cdot \frac{i^2 \varepsilon^{2k}}{\Pi 2k} \int \sin \varepsilon^{2k+1} \sin i\varepsilon d\varepsilon$$

und folglich die allgemeinen Glieder der Integrale

$$(-1)^{\frac{1}{2}i+k} \cdot a \cdot 2^{-2k-1} \cdot \frac{i^{2k} \varepsilon^{2k+2}}{\Pi(2k+1)} \cdot P^{i(\frac{1}{2}-k)}$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}i+k} \cdot a \cdot 2^{-2k} \cdot \frac{i^{2k-1} \varepsilon^{2k+1}}{\Pi 2k} \cdot P^{i(\frac{1}{2}+k)}$$

Für ein gerades i verschwindet das zweite, für ein ungerades das erste; setzt man im ersten $2k+2 = i+2p$, im zweiten $2k+1 = i+2p$, so erhalten beide den Ausdruck

$$B^{(i)} = \frac{-a \cdot i^{i-2} \varepsilon^i}{2^{i-1} \Pi i} \left\{ i - \frac{i+2}{1(i+1)} \left(\frac{i\varepsilon}{2}\right)^2 + \frac{i+4}{1 \cdot 2(i+1)(i+2)} \left(\frac{i\varepsilon}{2}\right)^4 - \frac{i+6}{1 \cdot 2 \cdot 3(i+1)(i+2)(i+3)} \left(\frac{i\varepsilon}{2}\right)^6 + \text{etc.} \dots \right\}$$

was auch für die Rechnung so bequem ist als man wünschen kann.

$$(-1)^{p-1} \cdot a \cdot 2^{-i-2p+1} \cdot \frac{i^{i+2p-2} \varepsilon^{i+2p}}{\Pi(i+2p-1)} P^{p(i+2p)}$$

welcher daher sowohl für ein gerades i als für ein ungerades i gilt. Dieser Ausdruck findet jedoch nur dann statt, wenn man für ein gerades i der Gleichung $2k+2 = i+2p$ und für ein ungerades i der Gleichung $2k+1 = i+2p$, durch ganze positive Werthe von k und p Genüge leisten kann. Die zweite Bedingung kann immer erfüllt werden, die erste aber nicht, wenn i und p zugleich $= 0$ sind; für diesen Fall findet man:

$$B^{(0)} = a \int (1 - e \cos \varepsilon)^2 d\varepsilon = a \left(1 + \frac{e^2}{2} \right)$$

wo jedoch das zweite Glied mit in der allgemeinen Gleichung enthalten sein muss und enthalten ist.

Aus dem eben gegebenen allgemeinen Gliede von $B^{(i)}$ folgt übrigens

9. Entwicklung einer allgemeinen Methode, die Störungen der Cometen zu berechnen*).

(Auszug aus: Untersuchungen über die scheinbare und wahre Bahn des im Jahre 1807 erschienenen grossen Cometen. [Königsberg 1810.] Zweite Abtheilung p. 43–65 und dritte Abtheilung p. 77 u. 78.)

Der Ort des Cometen sei durch drei rechtwinklige Coordinaten x, y, z , deren Anfangspunkt der Mittelpunkt der Sonne ist, bestimmt. Ausser der Kraft der Sonne $= \frac{1}{r^2}$, wirken auf ihn, parallel mit den Coordinaten, die Kräfte A, B, C ; sie sind positive, wenn sie die Coordinaten um negative Differentiale zu verändern streben. Man hat dann bekanntlich

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} + A \\ 0 &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} + B \\ 0 &= \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3} + C \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Man kann die Coordinaten immer unter folgende Form bringen

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin a \sin (\alpha + \omega + \varphi) \\ y &= r \sin b \sin (\beta + \omega + \varphi) \\ z &= r \sin c \sin (\gamma + \omega + \varphi) \end{aligned} \right\} \dots \dots (a)$$

wo $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ von der Lage der Bahn, zur Zeit, für welche die Gleichungen gelten, gegen eine willkürliche feste Ebene abhängen. Man bezeichne durch ω den Abstand des Perihels von der festen Ebene, so genommen, dass die wahre Anomalie $\varphi +$ dem Winkel ω , den zwischen der Knotenlinie und dem Rad. Vector r eingeschlossenen Winkel bedeutet. Die übrigen Elemente der Bahn sind: die Constante T , so genommen, dass $t + T$ immer die Zeit ausdrückt, die die wahre Anomalie bestimmt; der halbe Parameter h ; die halbe

* [Die Abhandlung (60 d. a.V.) enthält: 1. Abschnitt: Die scheinbare Bahn des Cometen am Himmel (p. 1–33). 2. Abschnitt: Bestimmung der wahren Bahn des Cometen. 1. Abth.: Parabolische und rein elliptische Elemente des Cometen (p. 34–43). 2. Abth.: Entwicklung einer allgemeinen Methode, die Störungen u der Cometen zu berechnen (p. 43–65). 3. Abth.: Berechnung der wahren Bahn des Cometen, mit Berücksichtigung seiner Störungen (p. 65–82).

Br. m. O. I, 214–217, 228–231, 230, 257 (O.), 303 (O.), II, 7.

Man vergl. übrigens neben den Arbeiten von HANSEN, ENCKE und AUV die Habilitationsschrift von WEYER: Ueber die Differentialformeln für Cometenbahnen von grosser Excentricität mit Berücksichtigung der planetarischen Störungen (Berlin 1852.)

grosse Axe a ; die Excentricität e ; die kleinste Entfernung der Bahn von der Sonne π , zwischen welchen Quantitäten die Gleichungen

$$a(1 - e) = hh = \pi(1 + e)$$

existiren; endlich der Abstand der Knotenlinie von einem festen Punkte in der willkürlichen Ebene = n ; und die Neigung der Bahn gegen sie i .

Diese Elemente werden constant sein, wenn $A, B, C = 0$ sind; im entgegengesetzten Falle wird man sie nach der schönen und so sehr natürlichen, von LAGRANGE in den Berliner Memoiren zuerst gegebenen Ansicht der Perturbationen*, als veränderlich betrachten, und ihre Werthe aus den Kräften A, B, C bestimmen. Die vorhin angegebenen Elemente werden also nur im Zeittheilen dt der Bahn des Cometen entsprechen; im nächstfolgenden aber sich in $\omega + d\omega, T + dT$ etc. verwandeln. Ich werde in dem Folgenden diese Methode anders entwickeln, als es LAGRANGE selbst thut, und sie so darstellen, wie sie dem Zwecke, den ich dadurch zu erreichen suche, und der ausser LAGRANGE'S näherem Gesichtskreise lag, am angemessensten scheint.

Man kann zwischen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, i, n$ eine grosse Menge Relationen entwickeln, von welchen ich einige hier anführen will, weil sie uns in der Folge von Nutzen sein werden. Es ist, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned} x &= r[\cos n \cdot \cos(\omega + \varphi) - \sin n \cdot \cos(\omega + \varphi) \cdot \cos i] \\ y &= r[\sin n \cdot \cos(\omega + \varphi) + \cos n \cdot \sin(\omega + \varphi) \cdot \cos i] \\ z &= r \sin(\omega + \varphi) \sin i. \end{aligned}$$

Folglich

$$\begin{aligned} \cotg \alpha &= -\text{tang } n \cdot \cos i \\ \cotg \beta &= +\cotg n \cdot \cos i \\ \cotg \gamma &= \infty \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin a \cdot \sin \alpha &= \cos n & \sin a \cdot \cos \alpha &= -\sin n \cdot \cos i \\ \sin b \cdot \sin \beta &= \sin n & \sin b \cdot \cos \beta &= +\cos n \cdot \cos i \\ \sin c \cdot \sin \gamma &= 0 & \sin c \cdot \cos \gamma &= +\sin i \end{aligned} \right\} (b)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin a \cdot \sin b \cdot \sin(\alpha - \beta) &= \cos i \\ \sin a \cdot \sin c \cdot \sin(\alpha - \gamma) &= \sin i \cdot \cos n \\ \sin b \cdot \sin c \cdot \sin(\beta - \gamma) &= \sin i \cdot \sin n \end{aligned} \right\} \dots (c)$$

Quadrirt man die 6 Gleichungen (b) und addirt sie, so ist ihre Summe

$$2 = \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c \dots \dots (d)$$

Die Summe der Quadrate der Gleichungen (c) ist

$$1 = [\sin a \cdot \sin b \cdot \sin(\alpha - \beta)]^2 + [\sin a \cdot \sin c \cdot \sin(\alpha - \gamma)]^2 + [\sin b \cdot \sin c \cdot \sin(\beta - \gamma)]^2 \dots \dots (e)$$

Eben so erhält man aus den Gleichungen für die Coordinaten

$$1 = \sin^2 a \cdot \sin(\alpha + \omega + \varphi)^2 + \sin^2 b \cdot \sin(\beta + \omega + \varphi)^2 + \sin^2 c \cdot \sin(\gamma + \omega + \varphi)^2 \dots \dots (f)$$

und da $\omega + \varphi$ hieraus verschwindet, man also jeden Werth dafür substituiren kann, auch

$$1 = \sin^2 a \cdot \cos(\alpha + \omega + \varphi)^2 + \sin^2 b \cdot \cos(\beta + \omega + \varphi)^2 + \sin^2 c \cdot \cos(\gamma + \omega + \varphi)^2 \dots \dots (g)$$

Aus der Entwicklung dieser Gleichungen zieht man leicht die folgende

$$0 = \sin^2 a \cdot \sin(\alpha + \omega + \varphi) \cdot \cos(\alpha + \omega + \varphi) + \sin^2 b \cdot \sin(\beta + \omega + \varphi) \cdot \cos(\beta + \omega + \varphi) + \sin^2 c \cdot \sin(\gamma + \omega + \varphi) \cdot \cos(\gamma + \omega + \varphi) \cdot (h)$$

In den Gleichungen (f), (g), (h) kann man $\varphi + \omega$ mit jedem beliebigen Winkel verwechseln.

Multiplircirt man die Gleichungen für die Coordinaten mit den Gleichungen (c), so erhält man, da bekanntlich allgemein

$$\begin{aligned} 0 &= \sin A \cdot \sin(B - C) - \sin B \cdot \sin(A - C) + \sin C \cdot \sin(A - B) \\ 0 &= x \sin n \cdot \sin i - y \cos n \cdot \sin i + z \cos n \dots \dots (i) \end{aligned}$$

Man multiplicire nun die Gleichungen (1):

$$\begin{array}{ccc|ccc} \text{mit} & y & z & 0 & 0 & 0 \\ -x & & & 0 & z & \\ 0 & -x & & -y & & \end{array}$$

und addire, so hat man

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d(ydx - xdy)}{dt^2} + Ay - Bx \\ 0 &= \frac{d(zdx - xdz)}{dt^2} + Az - Cx \\ 0 &= \frac{d(zdy - ydz)}{dt^2} + Bz - Cy \end{aligned}$$

Wenn man differentiirt, und dabei $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, beständig setzt, indem sie der Bewegung im Zeittheilen dt genau entsprechen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{ydx - xdy}{dt} &= r^2 \cdot \frac{d(\omega + \varphi)}{dt} \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \sin(\beta - \alpha) \\ \frac{zdx - xdz}{dt} &= r^2 \cdot \frac{d(\omega + \varphi)}{dt} \cdot \sin a \cdot \sin c \cdot \sin(\gamma - \alpha) \\ \frac{zdy - ydz}{dt} &= r^2 \cdot \frac{d(\omega + \varphi)}{dt} \cdot \sin b \cdot \sin c \cdot \sin(\gamma - \beta) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} 0 &= d \left\{ r^2 \cdot \frac{d(\omega + \varphi)}{dt} \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \sin(\beta - \alpha) \right\} : dt + Ay - Bx \\ 0 &= d \left\{ r^2 \cdot \frac{d(\omega + \varphi)}{dt} \cdot \sin a \cdot \sin c \cdot \sin(\gamma - \alpha) \right\} : dt + Az - Cx \\ 0 &= d \left\{ r^2 \cdot \frac{d(\omega + \varphi)}{dt} \cdot \sin b \cdot \sin c \cdot \sin(\gamma - \beta) \right\} : dt + Bz - Cy \end{aligned} \quad (k)$$

Man multiplicire nun die Gleichungen (1) mit

$$\left(\frac{dx}{dt} \right), \quad \left(\frac{dy}{dt} \right), \quad \left(\frac{dz}{dt} \right),$$

und addire, so wird man haben

*) [Mém. de l'Ac. de Berlin a. 1781 fig.]

$$0 = \frac{1}{2} d(dx^2 + dy^2 + dz^2) : dt^2 + A \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + B \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + C \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

Allein bekanntlich ist (LAPLACE Méc. Céle. Liv. II. Art. 18)

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2}$$

Also

$$0 = - \frac{d \left(\frac{1}{2a} \right)}{dt} + A \left(\frac{dx}{dt} \right) + B \left(\frac{dy}{dt} \right) + C \left(\frac{dz}{dt} \right) \dots (l)$$

Eine Multiplication mit x, y, z wird geben

$$0 = \frac{d \cdot r \left(\frac{dx}{dt} \right)}{dt} + \frac{1}{a} - \frac{1}{r} + Ax + By + Cz \dots (m)$$

Multiplirt man endlich die Gleichungen (1) mit

$$\begin{vmatrix} ydy + zdz & xdy - 2ydx & xdz - 2zdx \\ ydx - 2xdy & xdx + zdz & ydz - 2zdy \\ zdx - 2zdx & xdy - 2ydz & xdx + ydy \end{vmatrix}$$

und addirt sie, so hat man, nach einer Reduction, die ich hier nicht anführe, weil ein Jeder sie leicht selbst machen wird,

$$0 = - \frac{d[e \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \omega)]}{dt} + A \cdot r \left[\frac{dx}{dt} \right] + (Ax + By + Cz) \left[\frac{dx}{dt} \right] - z \left(A \left[\frac{dx}{dt} \right] + B \left[\frac{dy}{dt} \right] + C \left[\frac{dz}{dt} \right] \right) x$$

$$0 = - \frac{d[e \sin b \cdot \sin(\beta + \omega)]}{dt} + B \cdot r \left[\frac{dy}{dt} \right] + (Ax + By + Cz) \left[\frac{dy}{dt} \right] - z \left(A \left[\frac{dx}{dt} \right] + B \left[\frac{dy}{dt} \right] + C \left[\frac{dz}{dt} \right] \right) y$$

$$0 = - \frac{d[e \sin c \cdot \sin(\gamma + \omega)]}{dt} + C \cdot r \left[\frac{dz}{dt} \right] + (Ax + By + Cz) \left[\frac{dz}{dt} \right] - z \left(A \left[\frac{dx}{dt} \right] + B \left[\frac{dy}{dt} \right] + C \left[\frac{dz}{dt} \right] \right) z$$

In den Gleichungen k, l, m, n liegt die vollständigste Auflösung des Problems der drei Körper; man würde schon mit weniger ausreichen können, allein der Vollständigkeit halber habe ich so viele entwickelt.

Differentiirt man die Gleichungen (k) wirklich, so findet sich

$$0 = \frac{d \cdot \left(r^2 \cdot \frac{d \cdot \omega + \varphi}{dt} \right)}{dt} \cdot \sin \alpha \cdot \sin b \cdot \sin(\beta - \alpha) + r^2 \cdot \left(\frac{d \cdot \omega + \varphi}{dt} \right) \cdot \frac{d[\sin \alpha \cdot \sin b \cdot \sin(\beta - \alpha)]}{dt} + Ay - Bx$$

etc. etc.

Man multiplicire die drei Gleichungen unter dieser Form mit

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha \cdot \sin b \cdot \sin(\beta - \alpha) & + \sin c \cdot \cos \gamma & - \sin c \cdot \sin \gamma \\ \sin \alpha \cdot \sin c \cdot \sin(\gamma - \alpha) & - \sin b \cdot \cos \beta & + \sin b \cdot \sin \beta \\ \sin b \cdot \sin c \cdot \sin(\gamma - \beta) & + \sin a \cdot \cos \alpha & - \sin a \cdot \sin \alpha \end{vmatrix}$$

und addire, so hat man die Summen, mit Hilfe der Sätze c, e, i :

$$0 = \frac{d \cdot \left(r^2 \cdot \frac{d \cdot \omega + \varphi}{dt} \right)}{dt} + (Ay - Bx) \cdot \sin \alpha \cdot \sin b \cdot \sin(\beta - \alpha) + (Ax - Cx) \cdot \sin \alpha \cdot \sin c \cdot \sin(\gamma - \alpha) + (Bz - Cy) \cdot \sin b \cdot \sin c \cdot \sin(\gamma - \beta)$$

$$0 = r^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d \cdot \omega + \varphi}{dt} \right) + (Ay - Bx) \cdot \sin c \cdot \cos \gamma - (Ax - Cx) \cdot \sin b \cdot \cos \beta + (Bz - Cy) \cdot \sin a \cdot \cos \alpha$$

$$0 = r^2 \cdot \sin i \left(\frac{dn}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d \cdot \omega + \varphi}{dt} \right) - (Ay - Bx) \cdot \sin c \cdot \sin \gamma + (Ax - Cx) \cdot \sin b \cdot \sin \beta - (Bz - Cy) \cdot \sin a \cdot \sin \alpha$$

Man sieht leicht, dass man den, die störenden Kräfte enthaltenden Theilen der Gleichungen eine bequemere Form geben kann, wenn man die noch immer willkürlich gelassene Richtung der Kräfte durch diese Bedingung bestimmt. Diesen Zweck wird man erreichen, wenn man neue Kräfte A', B', C' so bestimmt, dass dadurch die drei letzten Glieder der Gleichungen m, o, p, q in eins zusammengezogen werden: man wird also

$$r \cdot A' = A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z$$

u. s. w.

setzen, und dadurch A', B', C' so bestimmen können, dass sie der Bedingung

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

Genüge leisten. Allein es fällt in die Augen, dass A' nichts anderes ist, als die nach dem Mittelpunkte der Sonne gerichtete störende Kraft; B' die in der Ebene der Bewegung gelegene, auf die vorige senkrechte, und C' die auf die beiden vorigen, und folglich auf die Ebene der Bewegung senkrechte. Wir werden also A', B', C' so bestimmen, dass es den Gleichungen

$$A' = A \cdot \cos \lambda + B \cdot \cos \lambda' + C \cdot \cos \lambda''$$

$$B' = A \cdot \cos \mu + B \cdot \cos \mu' + C \cdot \cos \mu''$$

$$C' = A \cdot \cos \nu + B \cdot \cos \nu' + C \cdot \cos \nu''$$

entsprechen, in welchen die Winkel der Axen der x, y, z mit dem Radius vector durch $\lambda, \lambda', \lambda''$; mit der darauf senkrechten, in der Ebene der Bewegung gezogenen Linie durch μ, μ', μ'' ; mit der auf beide senkrechten durch ν, ν', ν'' bezeichnet sind.

Nach dieser Erklärung wird man haben

$$\begin{vmatrix} A' = A \sin \alpha \sin(\alpha + \omega + \varphi) + B \sin b \sin(\beta + \omega + \varphi) + C \sin c \sin(\gamma + \omega + \varphi) \\ B' = A \sin \alpha \cos(\alpha + \omega + \varphi) + B \sin b \cos(\beta + \omega + \varphi) + C \sin c \cos(\gamma + \omega + \varphi) \\ C' = A \sin \alpha \sin i - B \cos \alpha \sin i + C \cos i \end{vmatrix} (r)$$

und ebenso

$$\begin{aligned} A &= A' \sin \alpha \sin(\alpha + \omega + \varphi) + B' \sin \alpha \cos(\alpha + \omega + \varphi) + C' \sin \alpha \sin i \\ B &= A' \sin b \sin(\beta + \omega + \varphi) + B' \sin b \cos(\beta + \omega + \varphi) - C' \cos n \sin i \\ C &= A' \sin c \sin(\gamma + \omega + \varphi) + B' \sin c \cos(\gamma + \omega + \varphi) + C' \cos i \end{aligned} \quad (s)$$

Es ziehen sich durch diese Transformation die letzten Glieder der Gleichungen m, o, p, q in eins zusammen, und $A \left(\frac{dx}{dt}\right) + B \left(\frac{dy}{dt}\right) + C \left(\frac{dz}{dt}\right)$ verwandelt sich in

$$\frac{1}{h} \left\{ B' + e(A' \sin \varphi + B' \cos \varphi) \right\}$$

Wir wollen nun die neuen Kräfte A', B', C' für A, B, C substituiren, wodurch die entwickelten Gleichungen folgende Form erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &= - \left[\frac{d \cdot e \sin \alpha \sin(\alpha + \omega)}{dt} \right] + h \cdot i' \sin \alpha \cos(\alpha + \omega + \varphi) \\ &\quad - h B' \sin \alpha \left[2 \sin(\alpha + \omega + \varphi) - \frac{\cos(\alpha + \omega + \varphi) \epsilon \sin \varphi}{1 + \epsilon \cos \varphi} \right] \\ &\quad + \frac{r}{h} C' \sin \alpha \sin i \cdot \epsilon \sin \varphi \\ 0 &= - \left[\frac{d \cdot e \sin b \sin(\beta + \omega)}{dt} \right] + h \cdot i' \sin b \cos \beta + \omega + \varphi \\ &\quad - h B' \sin b \left[2 \sin(\beta + \omega + \varphi) - \frac{\cos(\beta + \omega + \varphi) \epsilon \sin \varphi}{1 + \epsilon \cos \varphi} \right] \\ &\quad - \frac{r}{h} C' \cos n \sin i \cdot \epsilon \sin \varphi \\ 0 &= - \left[\frac{d \cdot e \sin c \sin(\gamma + \omega)}{dt} \right] + h \cdot i' \sin c \cos(\gamma + \omega + \varphi) \\ &\quad - h B' \sin c \left[2 \sin(\gamma + \omega + \varphi) - \frac{\cos(\gamma + \omega + \varphi) \epsilon \sin \varphi}{1 + \epsilon \cos \varphi} \right] \\ &\quad + \frac{r}{h} C' \cos i \cdot \epsilon \sin \varphi \end{aligned} \quad (n)^*$$

$$0 = \frac{d \cdot r^2 \cdot \frac{d \cdot \omega + \varphi}{dt}}{dt} + r B \dots \dots \dots (o)^*$$

$$0 = r^2 \cdot \left[\frac{d \cdot \omega + \varphi}{dt} \right] \cdot \left[\frac{d i}{dt} \right] + r \cdot C' \cdot \cos(\omega + \varphi) \dots (p)^*$$

$$0 = r^2 \cdot \left[\frac{d \cdot \omega + \varphi}{dt} \right] \cdot \left[\frac{d n}{dt} \right] \cdot \sin i + r \cdot C' \cdot \sin(\omega + \varphi) (q)^*$$

$$0 = - \left\{ \frac{d \cdot 2a}{dt} \right\} + \frac{1}{h} \left[B' + e(A' \sin \varphi + B' \cos \varphi) \right] (l)^*$$

$$0 = + \frac{d \cdot r \left[\frac{dr}{dt} \right]}{dt} + \frac{1}{a} - \frac{1}{r} + r \cdot A' \dots \dots \dots (m)^*$$

Wenn man die störenden Kräfte = 0 setzt, so verwandeln sich die Gleichungen

$$(o)^* \text{ in } 0 = 2r \cdot \left(\frac{dr}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d \cdot \omega + \varphi}{dt} \right) + r^2 \cdot \left(\frac{d^2 \cdot \omega + \varphi}{dt^2} \right)$$

$$(m)^* \text{ in } 0 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r \cdot \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right) + \frac{1}{a} - \frac{1}{r}$$

Diese entsprechen der Bewegung in einem, mit den

während dem Zeittheilchen dt stattfindenden Elementen beschriebenen Kegelschnitte. Da diese Elemente dem Zeittheilchen dt genau entsprechend angenommen werden, so geben sie in $(m)^*$ und $(o)^*$ genau $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ und $\left(\frac{d \cdot \omega + \varphi}{dt}\right)$; allein für $\left(\frac{d^2 \cdot r}{dt^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2 \cdot \omega + \varphi}{dt^2}\right)$ werden sie die Werthe geben, die diese Quantitäten in eben demselben Kegelschnitte haben, und folglich den Gleichungen $(o)^*$ und $(m)^*$ nicht entsprechen. Bezeichnet man nun den Werth von $\frac{d^2 r}{dt^2}$ in der zweiten Ellipse — dem in der ersten durch $\left(\frac{d^2 \cdot r}{dt^2}\right)'$, und eben so $\left(\frac{d^2 \cdot \omega + \varphi}{dt^2}\right)'$, so hat man aus $(o)^*$ und $(m)^*$ verbunden mit den beiden letzten Gleichungen,

$$0 = \left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)' + A' \dots \dots \dots (t)$$

$$0 = r \left(\frac{d^2 \cdot \omega + \varphi}{dt^2}\right)' + B' \dots \dots \dots (u)$$

Eben so geben die Gleichungen $(p)^*$, $(q)^*$ die Lage des Cometen gegen die Ebene seiner Bewegung im Zeittheilchen dt . Denn es ist ihr zweites Differential, welches ich durch $\left(\frac{d^2 i}{dt^2}\right)'$ bezeichnen werde,

$$= \frac{1}{\cos(\omega + \varphi)} \cdot \left(\frac{d i}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d \cdot \omega + \varphi}{dt}\right)'$$

Man sieht den Grund hiervon leicht ein, wenn man bedenkt, dass beide Ebenen, — die der Bahn im Zeittheilchen dt , und der im folgenden — sich in der von dem Mittelpunkte der Sonne nach dem des Cometen gezogenen geraden Linie schneiden; oder wenn man diese Bedingung aus den sie enthaltenden Gleichungen $(p)^*$, $(q)^*$ entwickelt. Es ist also

$$0 = r \left(\frac{d^2 i}{dt^2}\right)' + C' \dots \dots \dots (v)$$

Betrachtet man also die Elemente der Bahn fortwährend als beständig, so wird man durch die Gleichungen t, u, v die Correctionen bestimmen, die man den nach diesen Elementen berechneten Oertern hinzuzufügen hat. Die Schwierigkeit besteht nur in der doppelten Integration dieser Gleichungen; allein diese ist sehr reell, und bekanntlich ist, allgemein und auf eine unbestimmte Zeit ausgedehnt, das Integral nicht zu erhalten, wenn der gestörte und der störende Körper sich nicht in wenig verschiednen gelegenen Ebenen bewegen und geringe Excentricitäten haben. Bei den Bahnen der Cometen, wo dieser Fall nicht Statt findet, muss man zu mechanischen Quadraturen seine Zuflucht nehmen. Zwar liegt die Auseinandersetzung der hierzu anzuwendenden Methoden ausser meinem Plane, indem

ich bei dem Cometen von 1807 keinen Gebrauch davon machte; indess bemerke ich doch, dass sie, allgemein betrachtet, auf der Entwicklung von A' , B' und C' in Reihen von der Form

$$\lambda + \lambda' \cdot \psi t + \lambda'' \cdot \psi^2 t + \lambda''' \cdot \psi^3 t + \lambda^{IV} \cdot \psi^4 t + \text{etc.}$$

beruht, wo $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. von t unabhängig sind, und $\psi t, \psi^2 t$ etc. Functionen von t bedeuten, deren doppelte Integrale man erhalten kann. Fände man es bequem, den Reihen die Form

$$\lambda + \lambda' t + \lambda'' t^2 + \lambda''' t^3 + \lambda^{IV} t^4 + \text{etc.}$$

zu geben, so würden die zweiten Integrale die Form

$$\frac{1}{1 \cdot 2} t^2 + \frac{\lambda'}{2 \cdot 3} t^3 + \frac{\lambda''}{3 \cdot 4} t^4 + \frac{\lambda'''}{4 \cdot 5} t^5 + \text{etc.}$$

erhalten, wobei $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. die successiven Differentiale

$$\left(\frac{dA'}{dt}\right); \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2 A'}{dt^2}\right); \quad \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{d^3 A'}{dt^3}\right); \quad \text{etc.}$$

$$\text{oder } \left(\frac{dB':r}{dt}\right); \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2 B':r}{dt^2}\right); \quad \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{d^3 B':r}{dt^3}\right); \quad \text{etc.}$$

$$\text{oder } \left(\frac{dC':r}{dt}\right); \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2 C':r}{dt^2}\right); \quad \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{d^3 C':r}{dt^3}\right); \quad \text{etc.}$$

bedeuten würden. Man könnte dann die Werthe von $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. aus den endlichen Differenzen berechnen, oder sie auch in einigen Fällen analytisch entwickeln; allein eine umständliche Untersuchung einiger Vortheile, die man benutzen kann, diese Integrationen leichter und sicherer zu machen, würde mich zu weit von meinem Zwecke abziehen. Ich kehre also zu dem, den eigentlichen Gegenstand dieses Werkchens, den Cometen von 1807 angehenden, zurück.

Es war mir hier darum zu thun, die Veränderung seiner Elemente, und nicht unmittelbar die Veränderung seines Orts zu haben. Zwar werden auch die Elemente durch die eben angeführte Methode gegeben; indess, wie es mir scheint, nicht so bequem und sicher, als durch eine andere, die ich aus den Gleichungen (I)* bis (q)* ableitete, und die meinem Zwecke besser zu entsprechen schien.

Die Gleichungen t, u, r geben alle Variationen der Elemente der Bahn; allein lieber werde ich sie aus der unmittelbaren Betrachtung der Gleichungen (I)* bis (q)* herleiten. Da bei der Bewegung in Kegelschnitten $r^2 \cdot \frac{d \cdot \omega + \varphi}{dt} = h$, so ist ans

$$(o)^* \dots \left(\frac{dh}{dt}\right) = -rB' \dots \dots \dots (u)$$

$$(p)^* \dots \left(\frac{di}{dt}\right) = -\frac{r}{h} C' \cos(\omega + \varphi) \dots \dots (x)$$

$$(q)^* \dots \left(\frac{dn}{dt}\right) = -\frac{r}{h} C' \cdot \frac{\sin(\omega + \varphi)}{\sin i} \dots \dots (y)$$

und unmittelbar aus (I)*

$$\left(\frac{da}{dt}\right) = -\frac{2a^2}{h} [e \cdot A' \cdot \sin \varphi + B' \cdot (1 + e \cdot \cos \varphi)] \dots (z)$$

Aus (u) und (z) erhält man $\left(\frac{de}{dt}\right)$; denn es ist

$$a(1 - e) = hh,$$

woraus

$$de = \frac{da}{2a} \cdot \frac{h^2}{c} - \frac{h}{ac} \cdot dh$$

also ist

$$\left(\frac{de}{dt}\right) = -A' \cdot h \cdot \sin \varphi - B' \cdot \frac{r}{h} (e + 2 \cos \varphi + e \cdot \cos \varphi^2) \dots (a')$$

Die Differentiale in den Gleichungen (n)* sind, wenn man sie entwickelt,

$$-\left[\frac{de}{dt}\right] \sin a \sin(\alpha + \omega) - \left[\frac{d\omega}{dt}\right] e \sin a \cos(\alpha + \omega)$$

$$- e \sin b \sin c \sin(\beta - \gamma) \cdot \left[\frac{dt}{dt}\right] + e \sin b \sin(\beta + \omega) \cdot \left[\frac{dn}{dt}\right]$$

$$-\left[\frac{de}{dt}\right] \sin b \sin(\beta + \omega) - \left[\frac{d\omega}{dt}\right] e \sin b \cos(\beta + \omega)$$

$$+ e \sin a \sin c \sin(\alpha - \gamma) \cdot \left[\frac{dt}{dt}\right] - e \sin a \sin(\alpha + \omega) \cdot \left[\frac{dn}{dt}\right]$$

$$-\left[\frac{de}{dt}\right] \sin c \sin(\gamma + \omega) - \left[\frac{d\omega}{dt}\right] e \sin c \cos(\gamma + \omega)$$

$$- e \sin a \sin b \sin(\alpha - \beta) \cdot \left[\frac{dt}{dt}\right] + *$$

Substituirt man für $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dn}{dt}\right)$ ihre eben gefundenen Werthe, so verwandelt sich die erste der Gleichungen (n)* in

$$0 = -\left[\frac{de}{dt}\right] \sin(\alpha + \omega) - \left[\frac{d\omega}{dt}\right] e \cos(\alpha + \omega) + h A' \cos(\alpha + \omega + \varphi) - h B' \left[2 \sin(\alpha + \omega + \varphi) - \frac{e \sin \varphi \cdot \cos(\alpha + \omega + \varphi)}{1 + e \cos \varphi} \right] + \frac{er \cdot C'}{h \sin i} [\cos(\alpha + \omega + \varphi) \sin \omega + \cos \alpha \sin \varphi]$$

die anderen in völlig analoge. Multiplicirt man sie mit

$$\begin{array}{l} \sin a^2 \sin(\alpha + \omega) \quad \left| \quad \sin a^2 \cos(\alpha + \omega) \right. \\ \sin b^2 \sin(\beta + \omega) \quad \left| \quad \sin b^2 \cos(\beta + \omega) \right. \\ \sin c^2 \sin(\gamma + \omega) \quad \left| \quad \sin c^2 \cos(\gamma + \omega) \right. \end{array}$$

so hat man die Summen der Producte

$$0 = -\left(\frac{de}{dt}\right) - A' h \sin \varphi - \frac{B' \cdot r}{h} [e + 2 \cos \varphi + e \cos \varphi^2]$$

$$0 = -\left(\frac{d\omega}{dt}\right) e + A' h \cos \varphi - \frac{B' \cdot r}{h} [2 + e \cos \varphi] \sin \varphi + \frac{er \cdot er}{h \sin i} \sin(\omega + \varphi).$$

Hieraus ergibt sich für $\left(\frac{de}{dt}\right)$ der Werth (a'), und

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = \frac{A' \cdot h}{e} \cos \varphi - \frac{B' \cdot r}{h \cdot e} [2 + e \cos \varphi] \sin \varphi + \frac{C' \cdot r}{h \lg r} \sin(\omega + \varphi) \dots \dots \dots (b')$$

Es bleibt nur noch $\left(\frac{dT}{dt}\right)$ zu bestimmen übrig; man kann den Werth dieses Differential's durch die Gleichung (m)* erhalten. Es ist das dortige $r \cdot \frac{dr}{dt}$

$$= \frac{h e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}, \text{ und das Differential hiervon, so genommen, dass nur die Elemente als veränderlich angesehen werden, } = -A' \cdot r. \text{ Man findet durch die Differenzirung von } \frac{h e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}$$

$$0 = \left(\frac{dT}{dt}\right) \cdot \frac{e}{h^2} (e + \cos \varphi) + \left(\frac{d\epsilon}{dt}\right) \frac{a}{h} \sin \varphi + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) \left[\frac{h \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} - \frac{3}{h^2} (e + \cos \varphi) (T+t) \right] \frac{e}{2a} + A' r.$$

Woraus man, wenn man für $\left(\frac{d\epsilon}{dt}\right)$ und $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ ihre Werthe (z), (a'), setzt, erhält

$$\left(\frac{dT}{dt}\right) = A \left[\frac{r}{e} (2e - \cos \varphi - e \cos \varphi^2) - \frac{3e}{h} \sin \varphi (T+t) \right] A' + A \left[\frac{r}{e} \sin \varphi (2 + e \cos \varphi) - \frac{3}{h} (1 + e \cos \varphi) (T+t) \right] B' \quad (c')$$

Der Werth von $\left(\frac{dT}{dt}\right)$ lässt sich sehr schwer nach dieser Gleichung berechnen, wenn die Bahn einer Parabel sehr nahe kömmt; für die Parabel selbst wird der Ausdruck völlig unbestimmt. Man muss also einen andern entwickeln, der nach den Potenzen des Unterschiedes der Bahn von einer Parabel fortgeht; ich habe dazu folgenden Weg eingeschlagen.

Der Coefficient von A' im Ausdrucke von $\left(\frac{dT}{dt}\right)$ ist, wenn man darin die wahre Anomalie φ durch die excentrische u mittelst der Gleichung

$$\text{tg } \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \text{tg } \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{1-\delta}{2-\delta}} \cdot \text{tg } \frac{1}{2} \varphi$$

eliminiert, = V =

$$\frac{a^2}{r} \left[3 + e^2 - \left(3e + \frac{1}{e}\right) \cos u + e^3 \sin u^2 - 3e u \sin u \right].$$

Man setze $\text{tg } \frac{1}{2} \varphi = t$, $\text{tg } \frac{1}{2} u = r$, so hat man

$$\cos u = \frac{1-r^2}{1+r^2} = \frac{1-\frac{1}{2}\delta(1+tt)}{1+\frac{1}{2}\delta(1-tt)}$$

$$\sin u^2 = \frac{4r^2}{(1+r^2)^2} = \frac{2-\delta \cdot \delta \cdot tt}{[1-\frac{1}{2}\delta(1-tt)]^2}$$

$$u \sin u = \frac{2\delta \cdot t^2}{1-\frac{1}{2}\delta(1-tt)} \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta t^2}{2-\delta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2}{(2-\delta)^2} \cdot t^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^3}{(2-\delta)^3} \cdot t^6 + \text{etc.} \dots \right]$$

$$\frac{a^2}{r} = \frac{a^2 [1 - \frac{1}{2}\delta(1-tt)]}{(1+tt)(1-\frac{1}{2}\delta)}$$

und hieraus, nach einer leichten Reduction,

$$V = \frac{a^2}{(1+tt)(1-\frac{1}{2}\delta)} \left\{ (4-2\delta+\delta^2)tt - \frac{\delta^3}{1-\delta} [1-\frac{1}{2}\delta(1+tt)] + \frac{(2-5\delta+4\delta^2-\delta^3)}{1-\frac{1}{2}\delta(1-tt)} tt - 6(1-\delta)t^2 \left[1-\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta t^2}{2-\delta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2}{(2-\delta)^2} tt \dots \right] \right\}$$

Um diesen Ausdruck nach Potenzen von δ zu ordnen, bezeichne man allgemein den x^{ten} Coefficienten eines zur y^{ten} Potenz erhobenen Binomii durch $P_{(y)}^x$. Man wird dann das allgemeine Glied von

$$\frac{-\delta^3}{1-\delta} [1-\frac{1}{2}\delta(1+tt)] = [-P_{(-1)}^{3(n-2)} - P_{(-1)}^{3(n-3)} \frac{1}{2}(t+tt)] (-\delta)^n$$

das von

$$\frac{2-5\delta+4\delta^2-\delta^3}{1-\frac{1}{2}\delta(1-tt)} \cdot tt = \left[P_{(-1)}^{2n} \cdot 2 \left(\frac{1-tt}{2}\right)^n + P_{(-1)}^{2(n-1)} \cdot 6 \left(\frac{1-tt}{2}\right)^{n-1} + P_{(-1)}^{2(n-2)} \cdot 4 \left(\frac{1-tt}{2}\right)^{n-2} + P_{(-1)}^{2(n-3)} \left(\frac{1-tt}{2}\right)^{n-3} \right] t^2 (-\delta)^n$$

haben.

Das allgemeine Glied der Reihe ist

$$\frac{+\delta^m (-t)^m}{2^m \cdot 2m + 1 \cdot (1-\frac{1}{2}\delta)^m}$$

Allein das allgemeine Glied der Entwicklung von $(1-\frac{1}{2}\delta)^{-m}$ ist

$$P_{(-m)}^0 \left(\frac{-\delta}{2}\right)^i$$

folglich entsteht aus dem allgemeinen Gliede der Reihe ein Glied

$$P_{(-m)}^{2i} \cdot \frac{t^{2m}}{2^{2m+i} \cdot 2m+1} \cdot (-\delta)^{m+i}$$

Da aber die Reihe in $1-\delta$ multiplicirt ist, so ist das, aus dem m^{ten} Gliede derselben entspringende, die $m+i^{\text{te}}$ Potenz von δ enthaltende Glied

$$= \left[\frac{P_{(-m)}^{2i}}{2^{2m+i}} + \frac{P_{(-m)}^{2(i-1)}}{2^{2m+i-1}} \right] \frac{t^{2m}}{2m+1} \cdot (-\delta)^{m+i}$$

Setzt man nun $m+i = n$, so ist das aus dem m^{ten} Gliede der in $1-\delta$ multiplicirten Reihe entstehende allgemeine Glied

$$= \left[P_{(-m)}^{2(n-m)} + 2 P_{(-m)}^{2(n-m-1)} \right] \frac{t^{2m}}{2m+1} \cdot \left(\frac{-\delta}{2}\right)^n$$

folglich der aus allen Gliedern der in $-6t^2(1-\delta)$ multiplicirten Reihe entstehende Coefficient von $(-\delta)$

$$= \frac{-6}{2^n} \cdot \sum \frac{t^{2m+2}}{2m+1} \left(P_{(-m)}^{2(n-m)} + 2 P_{(-m)}^{2(n-m-1)} \right)$$

wo das Summenzeichen sich auf alle ganze positive m erstreckt.

Man addire nun alle entwickelte Coefficienten von $(-\delta)^n$, so wird man haben

BESSER'S Abhandlungen. 1. Bd.

$$V = \frac{a^2}{(1+\delta)(1-\delta)} \left\{ \begin{aligned} & (1-2\delta+\delta^2)t + \dots \sum_{(-1)}^{\dots} \left\{ -J^{(n-2)}_{(-1)} J^{(n-3)}_{(-1)} \left(\frac{1+t}{2} \right) \right. \\ & + J^{(n)}_{(-1)} 2t^2 \left(\frac{1-t}{2} \right)^n + J^{(n-1)}_{(-1)} \delta t^2 \left(\frac{1-t}{2} \right)^{n-1} \\ & \left. + J^{(n-2)}_{(-1)} 4t^3 \left(\frac{1-t}{2} \right)^{n-2} + J^{(n-3)}_{(-1)} t^4 \left(\frac{1-t}{2} \right)^{n-3} \right\} \\ & - \frac{6}{2^n} \sum_{2m+1}^{\dots} \left\{ J^{(n-m)}_{(-m)} + 2 J^{(n-m-1)}_{(-m)} \right\} \end{aligned} \right.$$

Wenn $n = 3$ oder grösser als 3 ist, so kann man das unter dem Summenzeichen stehende Glied noch sehr zusammenziehen, denn alsdann verschwindet keiner der Binomialcoefficienten, und alle zur Potenz -1 gehörige sind $= +1$ oder -1 . Berechnet man nun für $n = 1$ und 2 die Glieder besonders, so wird man für alle übrige folgenden bequemerer Ausdruck haben, in welchem noch für $a\delta$ sein Werth π gesetzt ist:

$$V = \frac{\pi^2}{(1-\frac{1}{2}\delta)(1+t)} \left\{ \begin{aligned} & (-1+3t^2+t^4+\frac{1}{2}t^6) + \dots \\ & + \sum_{(-1)}^{\dots} \delta^{n-2} \left\{ -\frac{1}{2}(1-t)^2 - \frac{(1-t)^{n-2}}{2^{n-1}}(1+t)^2 t^4 \right\} \\ & - \sum_{(-1)}^{\dots} \delta^{n-2} \frac{6}{2^n} \sum_{2m+1}^{\dots} \left\{ J^{(n-m)}_{(-m)} + 2 J^{(n-m-1)}_{(-m)} \right\} \end{aligned} \right.$$

Auf eine völlig ähnliche Weise findet man den Coefficienten von $B' = W$, aus der Entwicklung von

$$W = \frac{a^2 y^2 (1-\epsilon t)}{r} \left[\left(\frac{2}{c} - \cos u \right) \sin u + 2\epsilon \sin u - 3u \right]$$

und unter derselben Einschränkung, dass π nicht kleiner ist als 3, =

$$W = \frac{\pi^2}{(1-\frac{1}{2}\delta)(1+t)} \left\{ \begin{aligned} & (4t - t^3) + \dots \\ & + \sum_{(-1)}^{\dots} \delta^{n-2} \left[t - \frac{(1-t)^{n-2} t^3}{2^{n-1}} \right] \\ & - \sum_{(-1)}^{\dots} \delta^{n-2} \frac{3t}{2^{n-1}} \sum_{2m+1}^{\dots} \left[J^{(n-m)}_{(-m)} + \frac{1}{(1-t)t} J^{(n-m-1)}_{(-m)} \right] \end{aligned} \right.$$

Man kann nach diesen Ausdrücken leicht so viele Glieder berechnen, als man gebraucht; die ersten führe ich hier an:

$$\left[\frac{dT}{dt} \right] = \frac{A' \pi^2}{(1-\delta)(1+t)} \left[\begin{aligned} & (-1+3t^2+t^4+\frac{1}{2}t^6) + (-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{2}t^6+\frac{1}{2}t^8) \delta \\ & + \frac{B' \pi^2}{(1-\frac{1}{2}\delta)(1+t)} \left[(4t-\frac{1}{2}t^3) + (2t-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^5) \delta \right] \dots \end{aligned} \right] \quad (d')$$

Gewöhnlich wird man schon mit dem ersten Gliede ausreichen und

$$\left(\frac{dT}{dt} \right) = \frac{\pi^2}{1+t} A' (-1+3t^2+t^4+\frac{1}{2}t^6) + \frac{\pi^2}{1+t} B' (4t-t^3)$$

setzen können.

Die den entwickelten Differentialgleichungen zum Grunde liegende Zeiteinheit ist die, die ein von der Kraft 1 getriebener Körper gebrauchen würde, den Raum 1 zurück zu legen. Will man die Zeit in mittleren Tagen ausdrücken, so darf man diese nur mit $k=0,01720209895$

(der Logarithmus dieser Zahl ist 8,2355814414)* multipliciren, um sie auf jene Einheit zurück zu führen. Dann werden die Differentialgleichungen die Veränderungen der Elemente für einen mittleren Tag angeben; jedoch ist die für $\left(\frac{dT}{dt} \right)$ gefundene Gleichung (d') hiervon ausgenommen, indem sie auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Zeit in einem gleichen Maasse ausgedrückt enthält, also ohne Multiplication für jede Zeiteinheit gilt.

Kann man die Integrale der Gleichungen nicht analytisch erhalten, welches bei den Störungen der Cometen der Fall ist, so wird man sich die Zeiten und die ihnen zugehörigen Differentiale als rechtwinklige Coordinaten denken, die eine Curve aus dem Geschlechte der Parabeln bestimmen, deren Quadratur man immer erhalten kann. Die Theorie der endlichen Differenzen bietet die Mittel dazu dar, und giebt folglich die Integrale der Differentialgleichungen, oder die Veränderungen der Elemente, in einer endlichen, jedoch innerhalb gewisser Grenzen gelegenen Zeit. Es ist hier nicht der Ort, weitläufige Untersuchungen über diesen Gegenstand anzustellen; ich setze also die Methoden, die man gegeben hat, als bekannt voraus, und gehe zu der Berechnung der Kräfte, die den Cometen stören, über.

Man nenne die Coordinaten der störenden Körper $x', y', z', x'', y'', z''$ etc., ihre Massen μ', μ'' etc., so hat man

$$\begin{aligned} A &= \sum \left\{ \frac{x' \mu'}{r'^2} - \frac{(x' - x) \mu'}{\varrho^2} \right\} \\ B &= \sum \left\{ \frac{y' \mu'}{r'^2} - \frac{(y' - y) \mu'}{\varrho^2} \right\} \dots \dots \dots (e') \\ C &= \sum \left\{ \frac{z' \mu'}{r'^2} - \frac{(z' - z) \mu'}{\varrho^2} \right\} \end{aligned}$$

wo $\varrho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$, und das Summenzeichen sich auf alle störende Körper bezieht.

Bezieht man die Coordinaten auf die Ekliptik, welches am bequemsten sein wird, und setzt man

$$\begin{aligned} x' &= r' \cdot \cos l' \cdot \cos \lambda' \\ y' &= r' \cdot \sin l' \cdot \cos \lambda' \\ z' &= r' \cdot \sin \lambda', \end{aligned}$$

wo l' die heliocentrische Länge und λ' die heliocentrische Breite, r' den Radius vector des störenden Planeten bedeutet, so wird die durch die Nachtgleichpunkte und den Mittelpunkt der Sonne gezogene Linie die Axe der x' sein; die in der Ekliptik gelegene, auf die Axe der x' senkrechte, die Axe der y' ; endlich die auf beide vorige senkrechte die Axe der z' . Man wird dann die

*) GAUSS, Theoria motus corporum coelestium. § 1.

auf diese Axen bezogenen Coordinaten des Cometen erhalten, wenn man durch i die Neigung seiner Bahn gegen die Ekliptik, und durch u die Länge seines Knotens, vom Frühlingsnachtgleichpunkte an gerechnet, bezeichnet. Man könnte die Ausdrücke für A, B, C noch weiter entwickeln, und statt der Coordinaten die sie bestimmenden Winkel hineinbringen; allein mir scheint der unmittelbare Gebrauch der gegebenen Formeln bequemer.

Bezeichnet man $\sin a \cdot \sin(\alpha + \omega + \varphi)$ durch (a) , $\sin a \cdot \cos(\alpha + \omega + \varphi)$ durch (a') ; eben so $(b), (b'), (c), (c')$, so erhält man aus den Gleichungen (r) [p. 22], wenn man sich an die [p. 21] entwickelten Relationen erinnert,

$$\left. \begin{aligned} A' &= \Sigma \left([x'(a) + y'(b) + z'(c)] \left[\frac{\mu'}{r^2} - \frac{\mu'}{q^2} \right] + \frac{\mu' z'}{r^3} \right) \\ B' &= \Sigma \left([x'(a') + y'(b') + z'(c')] \left[\frac{\mu'}{r^2} - \frac{\mu'}{q^2} \right] \right) \\ C' &= \Sigma \left([x' \sin u \sin i - y' \cos u \sin i + z' \cos i] \left[\frac{\mu'}{r^2} - \frac{\mu'}{q^2} \right] \right) \end{aligned} \right\} (f')$$

Doch wird es, wenn man nicht die Störung jedes Planeten einzeln, sondern die Summe mehrer berechnen will, am bequemsten sein, A', B', C' aus den Werthen von A, B, C , die sich leichter berechnen lassen, durch die Gleichungen (r) herzuleiten.

Nach aller Schürfe müsste man die Gleichung

$$dT + \frac{2}{3} I \cdot a^{\frac{1}{3}} da$$

wo I ein Sideraljahr bedeutet, von $t = 0$ bis dahin integriren, wo $T + a^{\frac{1}{3}} I = t$ wird, welcher Zeitpunkt dann der Rückkehr des Cometen zu seiner Sonnennähe sein wird. Allein auch ohne diese endlose Arbeit zu übernehmen, kann man eine ungefähre Idee von der Wiederkehr des Cometen erhalten, wenn man nur den Theil der Störungen betrachtet, der von der directen Attraction der Planeten auf den Cometen herrührt, und wenn man annimmt, dass der Comet in einer beträchtlichen Entfernung von der Sonne eine Ellipse um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt des Systems beschreibt (LAPLACE Méc. Cél. Liv. IX. Art. 2). Dieses vorausgesetzt, wird man nur die Veränderungen der Elemente für den der Sonne nahe gelegenen Theil

der Bahn berechnen dürfen, und, da in diesem das Integral von dT ungleich kleiner ist, als das von $\frac{2}{3} I a^{\frac{1}{3}} da$, nur diesen Theil desselben. Allein dieses Differential der Umlaufszeit correspondirt sehr nahe dem Differentiale von c , und man wird nur dieses integriren dürfen, um immer die Umlaufszeit $= \left(\frac{\pi}{1-c} \right)^{\frac{3}{2}}$ daraus herleiten zu können.

Es ist [nach p. 24] sehr nahe

$$\left(\frac{dc}{dt} \right) = -A'h \sin \varphi - B'h(1 + \cos \varphi).$$

Substituirt man hierin für A' und B' den Theil ihrer Werthe [s. oben], der von der Wirkung der Planeten auf die Sonne herrührt, so erhält man

$$\left(\frac{dc}{dt} \right) = -2h \cos \frac{1}{2} \varphi \Sigma \frac{\mu'}{r^2} \left\{ \begin{aligned} &x' \sin a \cos(\alpha + \omega + \frac{1}{2} \varphi) \\ &+ y' \sin b \cos(\beta + \omega + \frac{1}{2} \varphi) \\ &+ z' \sin c \cos(\gamma + \omega + \frac{1}{2} \varphi) \end{aligned} \right\}$$

Dieser Theil der Störung wird sich nie sehr anhäufen können, weil er in Perioden, die ungefähr den Umlaufzeiten der störenden Planeten gleich sind, wiederkehrt; denn x', y', z' kehren in solchen Perioden wieder, und die Winkel $\alpha + \omega + \frac{1}{2} \varphi$ etc. wachsen ein oder einige Jahre nach dem Durchgange des Cometen durch die Sonnennähe so langsam, dass dadurch keine sehr beträchtliche Aenderung dieses Resultats entsteht. Dagegen ist die directe Wirkung der Planeten auf den Cometen, wegen des sehr anwachsenden Divisors im Ausdrucke der Kräfte [s. oben]

$$A' = -\Sigma \frac{\mu'}{q^2} [x'(a) + y'(b) + z'(c) + r]$$

$$B' = -\Sigma \frac{\mu'}{q^2} [x'(a') + y'(b') + z'(c')]$$

nur in der Nähe des Cometen bei den Planeten merklich; späterhin wird sie sehr klein, und A' nähert sich immer mehr dem Werthe $-\Sigma \frac{\mu'}{r^2}$, welcher sich mit der Attraction der Sonne vereinigt, und dann die Bewegung nicht mehr ungleichförmig stört. Da dieser Theil der Störungen den Einfluss, den er in dem der Sonne nahe gelegenen Theile der Bahn auf den Cometen hatte, nicht wieder aufheben kann, so ist er bleibend, und muss deshalb vorzüglich berücksichtigt werden.

10. Zusatz zur vorangehenden Abhandlung 9.

(Auszug aus: Untersuchungen über d. Bahn d. Olbers'schen Cometen. Abh. d. Berl. Akad. d. Wiss. Math. Cl. 1812 u. 1813. p. 119.)

... Die Methode, die bei dieser Arbeit [die Störungen des Olbers'schen Cometen zu berechnen] befolgt wurde, habe ich in meinem Werkchen über den Cometen von 1807 erläutert. Indessen veranlaßte mich die Absicht, durch eine nicht sehr bedeutende Vermehrung der Arbeit eine bedeutende Vermehrung der Sicherheit zu erlangen, nicht immer die bequemste, S. 77 [p. 27] gegebene Formel für den Differentialquotienten der nächsten Durchgangszeit, die ich durch T' bezeichne, nämlich: $\left(\frac{dT'}{dt}\right) = -\left(\frac{dT}{dt}\right) + \frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{da}{dt}\right)$, die sich, durch die

$$\text{Substitution der Werthe von } \left(\frac{dT}{dt}\right) \text{ und } \left(\frac{da}{dt}\right), \text{ in } \left(\frac{dT'}{dt}\right) \\ = -A'a \left\{ \frac{r}{e} (2e - \cos \varphi - e \cos \varphi^2) + \frac{3}{h} k (T' - t) \sin \varphi \right\} \\ - B'a \left\{ \frac{r}{e} (2 + e \cos \varphi) \sin \varphi + \frac{3}{h} k (T' - t) (1 + e \cos \varphi) \right\}$$

verwandelt, anzuwenden. Denn da die Störungen einen bedeutenden Einfluss auf die Bewegung des Cometen haben, so würde die Rechnung weit weniger genau ausgefallen sein, als ich wünschte, wenn man zu der Berechnung der Oerter u. s. w. des Cometen, für die ganze Dauer des Umlaufes, die bei seiner Sichtbarkeit stattfindenden Elemente unverändert beibehalten hätte. Selten oder nie wird man, wenn einige Genauigkeit erreicht werden soll, bei den Cometen die Quadrate und Producte der störenden Massen vernachlässigen können.

Allein es ist einleuchtend, dass man dennoch nicht nöthig hat, die Veränderungen aller Elemente zu berechnen, oder sehr häufig neue zu substituiren; den Fall ausgenommen, wo die Genauigkeit aufs Höchste getrieben werden soll, welcher bei einem Cometen eintreten würde, bei dem es der Zweck der Rechnung wäre, mehre beobachtete Wiederkehren mit der grössten Genauigkeit darzustellen und eine zu erwartende mit derselben Genauigkeit voraus zu bestimmen. Hier, wo ein Fehler von einigen Tagen von gar keiner Bedeutung ist*), kann man sich begnügen, die aus den Beobacht-

ungen geschlossenen Elemente bis zu etwa einem Viertel der Umlaufzeit ungeändert zu lassen, sie dann zu verbessern und die letzte Verbesserung am Ende des dritten Viertels vorzunehmen. Man wird ferner nicht alle Elemente verbessern dürfen, sondern nur die, die auf die Oerter des Cometen einen bedeutenden Einfluss haben, nämlich die Durchgangszeit durch das Perihelium (von 1815) und die grosse Axe. Knoten und Perihel wurden demzufolge während der ganzen Dauer des Umlaufes als siderisch ruhend, und die übrigen Elemente als unverändert angenommen, mit Ausschluss der Excentricität, die so bestimmt wurde, wie es die Veränderung der grossen Axe erforderte.

Da bei der Berechnung der Störungen für eine so lange Zeit die Erfindung der störenden Kräfte jedes Planeten sehr häufig wiederkehrt, so wurden für die Ausdrücke der Kräfte, in der Abhandlung über den Cometen von 1807 S. 46 [p. 21], folgende bequemere substituir.

Wenn man die Neigung der Bahn eines störenden Planeten gegen die Cometenbahn durch i' bezeichnet, die Länge des aufsteigenden Knotens des Planeten auf die Cometenbahn durch n' , die Länge des Planeten in seiner Bahn durch l' , den Abstand des Perihels des Cometen vom aufsteigenden Knoten des Planeten durch P' , die Länge des Planeten auf der Cometenbahn vom Knoten an gerechnet durch L , seine Breite durch λ ; ferner $l' - n'$ durch u' und $P' + \varphi$ durch u , so hat man die Coordinaten, parallel mit dem Radiusvector des Cometen und senkrecht auf denselben, durch die Formeln:

$$\cos \lambda \cos L = \cos u' \quad x' = r' \cos \lambda \cos (L - u) \quad x = r \\ \cos \lambda \sin L = \sin u' \cos i' \quad y' = r' \cos \lambda \sin (L - u) \quad y = 0 \\ \sin \lambda = \sin u' \sin i' \quad z' = r' \sin \lambda \quad z = 0$$

ferner

$$A' = \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{e^2}\right) \mu' x' + \frac{\mu' r'}{e^2}$$

$$\varphi^2 = (x' - x)^2 + y'^2 + z'^2; B' = \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{e^2}\right) \mu' y'$$

$$C' = \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{e^2}\right) \mu' z' \dots \dots$$

*) Wenn man die äusserste Genauigkeit erreichen wollte, so würde es bequemer sein, die Bewegung der Sonne um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt des Systems abgesondert in Rechnung zu bringen.

11. Auszug aus einem Schreiben an Lindenau.

(Mon. Corresp. XXIV. p. 176.)

Königsberg, den 30. Juni 1811.

... Für die Anzeige meiner Schrift über den Cometen von 1807 (M. C. 1811 April-Heft) bin ich Ihnen sehr dankbar. Erlauben Sie mir, Ihnen noch etwas über die unmittelbare Berechnung der Störungen der Oerter hinzuzufügen.*)

Es ist allerdings der einfachste Weg, die drei Störungen der täglichen Bewegungen durch eine einfache Integration mittelst mechanischer Quadraturen aus den Gleichungen S. 53 und 54 meiner Schrift [p. 23] herzuleiten; allein nachher muss man diese Störungen durch dieselben Quadraturen noch einmal integrieren, und dann wird man am Ende doch noch aus den äussern gefundenen Oertern und den für diese stattfindenden Bewegungen zu den Elementen, die doch das Resultat der Rechnung sein müssen, zurückkehren. Hier scheint es mir nun, als küme man bequemer zum Ziele, wenn man die Störungen der Elemente berechnet;

dieses war der Grund, warum ich diesen Weg einschlug. Ich würde es übrigens Niemand verdenken wenn er den andern ginge. — Dass die entwickelten Gleichungen auch in vielen andern Fällen brauchbar sind, leuchtet von selbst ein. Sie werden Beispiele davon in meiner Abhandlung über den vierten γ Satelliten finden.*)

Sie haben Recht, es zu erwähnen, dass ich nirgends deutlich genug sage, dass ich die Wirkung aller ältern Planeten, Mercur ausgenommen, berücksichtigte, und ich bitte dieses in der Mon. Corr. zu ergänzen. Was die Fehlergrenze von 5" anbelangt, so bemerke ich, dass diese nur bei den drei erstern und bessern Fundamental-Oertern angenommen wurde; für die übrigen würde sie allerdings wohl zu enge sein; allein für diese nahm ich auch 10', 10'', 20'' an, nach S. 74 und 80 meiner Schrift.

*) Unsere Leser erhalten im nächsten Heft die hauptsächlichsten Resultate dieser interessanten Abhandlung. [69 d. a. Verz.]. (LINDENAU.) [vgl. auch die folg. Abhandl. 17.]

[Auszug aus: 66 d. a. Verz.]

*) Man vergl. hiermit M. C. 1811 April-Heft. XXIII. S. 398.

12. Beitrag zu den Methoden, die Störungen der Cometen zu berechnen.

(Astron. Nachr. 14. p. 1.)

Die Methode die Differentiale der Elemente einer Cometenbahn durch mechanische Quadraturen zu integrieren, wird in dem Falle eines Cometen von langer Umlaufzeit lüstig, indem sie dann die Berechnung sehr vieler Ordinaten der zu quadrierenden Curve erfordert. LAGRANGE hat indessen ein Mittel angegeben, durch welches diese Rechnungen in eine, nach den Umständen mehr oder weniger ausgedehnte Begrenzung eingeschlossen werden können. Er hat nämlich bemerkt, dass die Kraft, welche die Bewegung eines Cometen um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Sonne und eines Planeten stört, in grosser Entfernung des ersteren von der Sonne weit kleiner wird, als die Bewegung um die Sonne störende Kraft. Da jene Kraft nahe im umgekehrten Verhältnisse des Cubus der Entfernung des Cometen von der Sonne ist, wenn

diese weit grösser ist als die Entfernung des störenden Planeten von der Sonne, so verkleinert sie sich, mit zunehmender Entfernung des Cometen, sehr schnell und kann einen so kleinen Werth erhalten, dass ihre Wirkung auf die Bewegung des Cometen unbedeutend wird. In diesem Falle ist diese Bewegung nicht mehr merklich verschieden von der rein-elliptischen um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt, in welchem die Massen der Sonne und des störenden Planeten vereinigt angenommen werden. Die Integration der Differentiale der Elemente durch mechanische Quadraturen erlangt dann ein Ende, welches offenbar für die der Sonne näheren Planeten weit früher eintritt, als für die entfernteren.

Der grosse Vortheil, welchen man solchergestalt aus der Betrachtung der Bewegung des Cometen um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt ziehen kann, hat die Rechnungen abgekürzt, welche Herr Professor ROSENBERGER über den Halley'schen Cometen gemacht

[297 d. a. Verz. — Br. II. O. II. 313. (O.), 316, 325 (O.) — vgl. LEHMANN, Astron. Nachr. 16. 97.]

hat. Herr PONTÉCOULANT hat, in der Connoissance des Temps für 1838, aufs Neue an diesen Vortheil erinnert. Allein die Mittel, welche man anwenden muss, wenn man über diese Annäherung hinausgehen will, sind bis jetzt nicht entwickelt worden, weshalb ich für nützlich gehalten habe, die Bewegung der Cometen, wenn sie viel weiter von der Sonne entfernt sind als ein störender Planet, zum Gegenstande der Untersuchung zu machen, welche ich gegenwärtig mittheile.

Ich betrachte nur einen störenden Planeten und nur den Theil seiner Wirkung auf den Cometen, welcher seiner Masse proportional ist. Der wirklich vorkommende Fall ist, scharf genommen, ein anderer, indem die Cometen, gleichzeitig, von allen Planeten Störungen erfahren; gleich oft so beträchtliche, dass der Einfluss derselben auf die sich ferner ereignenden Störungen nicht als eine kleine Grösse angesehen werden kann.

Die folgende Abhandlung zerfällt in zwei Abschnitte, deren erster die Entwicklung einer Methode enthält, durch welche man die Bewegung des Cometen, es sei um die Sonne, oder um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt, auf eine Art erhält, deren Annäherung an die Wahrheit allein von der Sorgfalt des Rechners abhängt. Der zweite Abschnitt geht von der Bewegung um den Schwerpunkt, als erster Annäherung, aus und bestimmt näherungsweise die Verbesserung, welche dieser noch hinzuzufügen ist. Die in diesem Abschnitte gegebenen Formeln können zugleich angewandt werden, um den Grad der Annäherung zu beurtheilen, welchen man durch die Voraussetzung der rein-elliptischen Bewegung um den Schwerpunkt erhalten würde. Ich habe für nöthig gehalten, ein von den Störungen des Halley'schen Cometen durch die Erde hergenommenes Beispiel vollständig durchzuführen. Die Erde, und nicht etwa den Jupiter habe ich gewählt, weil ich glaube, dass meine Rechnungsvorschriften vorzugsweise zu der Bestimmung der Störungen anwendbar sind, welche durch die von der Sonne weniger entfernten Planeten erzeugt werden.

$$I'' = -\frac{q'}{n} + \frac{1}{n^2} \frac{d^2 q'}{dt^2} - \frac{1}{n^2} \frac{d^2 q'}{dt^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \frac{dp'}{dt} - \frac{1}{n^2} \frac{d^2 p'}{dt^2} + \frac{1}{n^2} \frac{d^2 p'}{dt^2} - \dots$$

$$Q' = \frac{p'}{n} - \frac{1}{n^2} \frac{d^2 p'}{dt^2} + \frac{1}{n^2} \frac{d^2 p'}{dt^2} - \dots + \frac{1}{n^2} \frac{dq'}{dt} - \frac{1}{n^2} \frac{d^2 q'}{dt^2} + \frac{1}{n^2} \frac{d^2 q'}{dt^2} - \dots$$

Dieselben Formeln ergeben offenbar $I''', Q''; I''', Q'' \dots$ wenn man statt p', q', n resp. $p'', q'', 2n; p''', q''', 3n; \dots$ schreibt.

Diese Integration der periodischen Glieder des Ausdrucks von dc kann angewandt werden, wenn die

*) [vgl. Astr. Nachr. Bde. 8. 9. 11. 12.]

Erster Abschnitt.

1.

Wenn man dem Differentialquotienten eines Elementes c der Bahn des Cometen, die Form

$$\frac{dc}{dt} = p^0 + p' \cos n't + p'' \cos 2n't + p''' \cos 3n't + \dots + q' \sin n't + q'' \sin 2n't + q''' \sin 3n't + \dots$$

gibt, in welcher $n't$ die mittlere Anomalie des störenden Planeten und $p, p', p'', \dots, q, q'', \dots$ Functionen der Zeit und der Elemente beider Bahnen bezeichnen, so hat man die Aenderung des Elementes c während einer bestimmten Zeit durch das von dem Anfange bis zu dem Ende derselben genommene Integral:

$$\delta c = \int p^0 dt + \int (p' \cos n't + q' \sin n't) dt + \int (p'' \cos 2n't + q'' \sin 2n't) dt + \dots$$

Die Integrale der Cosinus und Sinus der mittleren Anomalie und ihrer Vielfachen enthaltenden Glieder dieses Ausdrucks kann man in Reihen entwickeln, deren Convergenz von der Convergenz der Reihe der Differentialquotienten von $p', q', p'', q'' \dots$ abhängt. Giebt man ihnen nämlich die Form:

$$\begin{aligned} f(p' \cos n't + q' \sin n't) dt &= P' \cos n't + Q' \sin n't \\ f(p'' \cos 2n't + q'' \sin 2n't) dt &= P'' \cos 2n't + Q'' \sin 2n't \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

so erhält man, durch Differentiirung der ersten dieser Formeln:

$$p' = \frac{dP'}{dt} + n'Q'$$

$$q' = \frac{dQ'}{dt} - n'P'$$

und wenn man $\frac{dP'}{dt}$ und $\frac{dQ'}{dt}$ durch Verbindung der einen Gleichung mit der andern wegschafft:

$$\frac{p'}{n} + \frac{1}{n^2} \frac{dq'}{dt} = Q' + \frac{1}{n^2} \frac{d^2 Q'}{dt^2}$$

$$- \frac{q'}{n} + \frac{1}{n^2} \frac{dp'}{dt} = P' + \frac{1}{n^2} \frac{d^2 P'}{dt^2}$$

Differentiirt man diese Gleichungen 2, 4, 6... Mal und schafft man immer den höchsten Differentialquotienten durch die folgende Differentiirung fort, so erhält man:

Werthe von p', q', p'', q'', \dots und ihrer Differentialquotienten, für die beiden Grenzen der Zeit, über welche sie sich erstrecken soll, bekannt sind und wenn die Reihen, welche $P', Q'; P'', Q'', \dots$ dadurch ausdrücken, convergiren. Das erste, von der Stellung des störenden Planeten unabhängige Glied, muss auf eine andere Art integrirt werden. Dieses Glied werde ich

später besonders untersuchen, jetzt aber die einzelnen Theile der Entwicklungen verfolgen, welche man machen muss, um zu der Kenntniss von $P, Q; P', Q'; \dots$ zu gelangen.

2.

Die Kraft, durch welche ein Planet, dessen Masse = m' ist, die elliptische Bewegung des Cometen um die Sonne stört, nehme ich durch drei aufeinander senkrechte Componenten A', B', C' gegeben an. Diese beziehen sich auf ein durch den Mittelpunkt des Cometen gelegtes System von Axen, deren erste mit dem Radiusvector zusammenfällt; die zweite mit der darauf senkrechten, in der Ebene der Bahn liegenden Richtung; die dritte mit der auf die Ebene der Bahn senkrechten Richtung. Diese Zerlegung der störenden Kraft ist dieselbe, durch welche ich früher sowol die Störungen der Elemente*, als auch die Störungen der Coordinaten** ausgedrückt habe. Bezeichnet man die auf dasselbe Axensystem bezogenen Coordinaten des störenden Planeten durch x', y', z' , seine Entfernung von der Sonne durch r' , die Entfernung des Cometen von der Sonne durch r , und

$$\sqrt{rr - 2rx' + r'r'} \text{ durch } \varphi$$

so hat man:

$$\begin{aligned} A' &= m'x' \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{\varphi^2} \right) + \frac{m'r}{\varphi^2} \\ B' &= m'y' \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{\varphi^2} \right) \\ C' &= m'z' \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{\varphi^2} \right) \end{aligned}$$

Die Coordinaten x', y', z' haben die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x' &= r' (\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos I) \\ y' &= r' (-\sin u \cos u' + \cos u \sin u' \cos I) \\ z' &= -r' \sin u \sin I \end{aligned}$$

in welchen u die Entfernung des Cometen von dem aufsteigenden Knoten seiner Bahn auf der Bahn des Planeten, u' die Entfernung des Planeten von demselben Punkte und I die Neigung der ersteren Bahn gegen die letztere bedeutet.

Diese Ausdrücke werde ich so umformen, dass sie unmittelbar von den Cosinussen und Sinussen der wahren Anomalien beider Körper, φ und φ' , abhängig werden; die Entfernungen der Perihelien beider Bahnen von

dem aufsteigenden Knoten der Bahn des Cometen auf der des Planeten werde ich durch ω und ω' bezeichnen. Setzt man

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos \omega \cos \omega' + \sin \omega \sin \omega' \cos I \\ \beta &= -\sin \omega \cos \omega' + \cos \omega \sin \omega' \cos I \\ \gamma &= -\sin \omega' \sin I \\ \alpha' &= \cos \omega \sin \omega' - \sin \omega \cos \omega' \cos I \\ \beta' &= -\sin \omega \sin \omega' - \cos \omega \cos \omega' \cos I \\ \gamma' &= \cos \omega' \sin I \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E &= r' \alpha \cos \varphi' - r' \alpha' \sin \varphi' \\ E' &= r' \beta \cos \varphi' - r' \beta' \sin \varphi' \\ E'' &= r' \gamma \cos \varphi' - r' \gamma' \sin \varphi' \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} x' &= E \cos \varphi + E' \sin \varphi \\ y' &= -E \sin \varphi + E' \cos \varphi \\ z' &= E'' \end{aligned}$$

und folglich auch

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{rr - 2r \cos \varphi E - 2r \sin \varphi E' + r'r'} \\ A' &= m' (E \cos \varphi + E' \sin \varphi) \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{\varphi^2} \right) + \frac{m'r}{\varphi^2} \\ B' &= m' (-E \sin \varphi + E' \cos \varphi) \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{\varphi^2} \right) \\ C' &= m' E'' \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{\varphi^2} \right) \end{aligned}$$

3.

Nimmt man als Elemente der Cometenbahn an: die Neigung gegen die Bahn des Planeten I die Länge des aufsteigenden Knotens auf derselben ... N die Entfernung des Perihels von aufsteigenden Knoten ω die halbe grosse Axe a die Excentricität e die Durchgangszeit durch das Perihel T und bezeichnet man

$$\sqrt{a(1-e)} \text{ durch } h$$

so sind die bekannten Ausdrücke der Differentialquotienten der Elemente:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\frac{rC'}{h} \cos(\omega + \varphi) \\ \sin I \frac{dN}{dt} &= -\frac{rC'}{h} \sin(\omega + \varphi) \\ \frac{d^1 2a}{dt} &= \frac{A'}{h} e \sin \varphi + \frac{B'h}{r} \\ \frac{dh}{dt} &= -rB' \end{aligned}$$

* Untersuchungen über die Bahn des Cometen von 1807. Königsberg 1810. [Abb. 9, p. 22, vgl. a. p. 28.]

** Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften für 1824. [vgl. die folg. Abb. 16.]

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -A'h \sin \varphi - \frac{rB'}{h} (e + 2 \cos \varphi + e \cos \varphi^2) \\ \cos I \frac{dN}{dt} + \frac{d\omega}{dt} &= \frac{A'h}{e} \cos \varphi - \frac{rB'}{he} (2 + e \cos \varphi) \sin \varphi \\ \frac{dT}{dt} &= A'a \left\{ -\frac{r}{e} (2e - \cos \varphi - e \cos \varphi^2) + \frac{3e}{h} \sin \varphi (t-T) \right\} \\ &\quad + B'a \left\{ -\frac{r}{e} (2 + e \cos \varphi) \sin \varphi + \frac{3h}{r} (t-T) \right\} \end{aligned}$$

Von den 3., 4., 5. Formeln folgt eine aus den beiden anderen. Multipliziert man die 6. mit $-ah$ und addirt man das Product zu der 7., so erhält man einen einfachen Ausdruck:

$$\frac{dT}{dt} - ah \left(\cos I \frac{dN}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \right) = A'a \left(-2r + \frac{3e}{h} \sin \varphi (t-T) \right) + B'a \cdot \frac{3h}{r} (t-T)$$

$$h \frac{dI}{dt} = -r \cos (\omega + \varphi) G E''$$

$$h \sin I \frac{dN}{dt} = -r \sin (\omega + \varphi) G E''$$

$$h \frac{d \frac{1}{2a}}{dt} = e \sin \varphi \cdot F - \sin \varphi \cdot G E + (\cos \varphi + e) G E'$$

$$\frac{dh}{dt} = r \sin \varphi \cdot G E - r' \cos \varphi \cdot G E'$$

$$h \frac{de}{dt} = -hh \sin \varphi \cdot F + r (\cos \varphi + e) \sin \varphi \cdot G E - r (1 + 2e \cos \varphi + \cos \varphi^2) G E'$$

$$hc \left(\cos I \frac{dN}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \right) = hh \cos \varphi \cdot F + r (2 + e \cos \varphi - \cos \varphi^2) G E - r \cos \varphi \sin \varphi \cdot G E'$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} - ah \left(\cos I \frac{dN}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \right) &= -a \left\{ 2r - \frac{3e}{h} \sin \varphi (t-T) \right\} F - a \left\{ 2r \cos \varphi + \frac{3 \sin \varphi (t-T)}{h} \right\} G E \\ &\quad - a \left\{ 2r \sin \varphi - \frac{3 (\cos \varphi + e)}{h} (t-T) \right\} G E' \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln geht hervor, dass die vier Grössen

$$F, G E, G E', G E''$$

nach den Cosinussen und Sinussen der mittleren Anomalie des störenden Planeten und ihrer Vielfachen entwickelt werden müssen, wenn man die ähnliche Entwicklung der Differentialquotienten der Elemente, welche das § 1 angegebene Verfahren voraussetzt, haben will. Die letzte dieser vier Grössen kann man indessen aus der zweiten und dritten zusammensetzen, indem

$$\gamma = -(\alpha \sin \omega + \beta \cos \omega) \operatorname{tg} I$$

$$\gamma' = -(\alpha' \sin \omega + \beta' \cos \omega) \operatorname{tg} I$$

also

$$E'' = -(E \sin \omega + E' \cos \omega) \operatorname{tg} I$$

ist. Man darf also nur die Entwicklungen der drei Grössen

$$F, G E, G E'$$

aufsuchen, indem die vierte sich aus der zweiten und dritten ergibt.

welchen man auch

$$-A' \cdot 2ar + 3a(t-T) \frac{d \frac{1}{2a}}{dt}$$

schreiben kann.

Substituirt man, statt A', B', C' ihre, am Ende des vorigen § gegebenen Ausdrücke und schreibt man, um abzukürzen,

$$F \text{ für } \frac{m'r}{e^2}$$

$$G \text{ für } m' \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{e^2} \right)$$

so verwandeln diese Formeln sich in:

4.

Es hat keine Schwierigkeit, diese Entwicklungen für jede gegebene Zeit zu erhalten. Man darf die dieser Zeit zugehörigen Werthe von φ und r nur mit einer Anzahl (n) Werthen von $n't$

$$= 0, \frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1) \frac{2\pi}{n}$$

verbinden, für jeden dieser n Werthe $F, G E, G E'$ berechnen und dann die periodische Formel suchen, welche sich an die n Werthe jeder dieser Grössen anschliesst. Wenn der Ausdruck einer derselben

$$c + c' \cos n't + c'' \cos 2n't + c''' \cos 3n't + \dots + s' \sin n't + s'' \sin 2n't + s''' \sin 3n't + \dots$$

ist, so kann man auf diese Art (Astron. Nachr. Nr. 136 S. 337) nicht $c, c', c'', \dots, s', s'', \dots$ finden, sondern nur:

$$\begin{aligned} &\text{statt } c \dots c + c^{(n)} + c^{(2n)} + \dots \\ &c' \dots c' + c'^{(n-1)} + c'^{(n+1)} + c'^{(2n-1)} + \dots \\ &s' \dots s' - s'^{(n-1)} + s'^{(n+1)} - s'^{(2n-1)} + \dots \end{aligned}$$

$$c'' \dots c'' + c^{(n-2)} + c^{(n+2)} + c^{(2n-2)} + \dots$$

$$s'' \dots s'' - s^{(n-2)} - s^{(n+2)} - s^{(2n-2)} + \dots$$

u. s. w.

welche Ausdrücke, wenn n eine ungerade Zahl ist, bis

$c^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ und $s^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ gehen, wenn es aber eine gerade

Zahl ist, bis $c^{\left(\frac{n}{2}\right)}$, statt dessen man

$$c^{\left(\frac{n}{2}\right)} + c^{\left(\frac{n}{2}\right)} + c^{\left(\frac{5n}{2}\right)} + \dots$$

erhält. Wenn n so gross angenommen wird, dass die Anfangsglieder dieser Ausdrücke die allein merklichen sind, so erhält man also die gesuchte Entwicklung.

Nachdem die drei Grössen F, GE, GE' auf diese Art entwickelt sind, ergeben sie die ähnlichen Entwicklungen der Differentialquotienten der verschiedenen Elemente der Cometenbahn. Man multiplicirt sie nämlich mit den von φ und r abhängigen Grössen, welche die Formeln des vorigen §s angeben. Die Entwickelung

von $\frac{d}{dt}$ findet man z. B., indem man die Entwickelung der drei Grössen resp. in

$$\frac{c}{h} \sin \varphi, \quad -\frac{\sin \varphi}{h}, \quad \frac{\cos \varphi + e}{h}$$

multiplicirt und die Producte addirt.

So wie die im 1. § vorausgesetzte Form des Ausdruckes des Differentialquotienten eines jeden Elementes der Cometenbahn jetzt durch die Berechnung von n Werthen der Grössen F, GE, GE' gefunden ist, so kann man auch die Differentialquotienten jedes seiner Glieder durch Rechnung finden. Wenn man den Ausdruck von $\frac{dc}{dt}$ nicht nur für die bestimmte Zeit τ , von welcher das Integral δc anfangen soll, sondern für die Zeiten

$$\dots \tau-3, \tau-2, \tau-1, \tau, \tau+1, \tau+2, \tau+3 \dots$$

berechnet, so erhält man eine Reihe von Werthen jedes Coefficienten, aus deren Differenzen man seine Differentialquotienten ableiten kann. Die Einheit der Zeit ist, in Tagen ausgedrückt, das Reciproke der Gaussischen Zahl k , oder = 58,13244 Tagen.

Bezeichnet man die Reihe von Werthen eines Coefficienten durch

$$\dots a''', a'', a', a, a', a'', a''' \dots$$

und nimmt man ihre Differenzen nach dem Schema:

Zeiten.						
$\tau-3$	a'''					
$\tau-2$	a''	b'''	c''	d''	e''	f''
$\tau-1$	a'	b''	c'	d'	e'	f'
τ	a	b'	c	d	e	f
$\tau+1$	a'	b''	c'	d'	e'	f'
$\tau+2$	a''	b'''	c''	d''	e''	f''
$\tau+3$	a'''					

so ist der zu der Zeit $\tau+x$ gehörige Werth der Grösse in der ersten Columne bekanntlich

$$y = a + x \cdot b + \frac{x^2}{2} c + \frac{x \cdot x \cdot x - 1}{2 \cdot 3} d + \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x - 1}{2 \cdot 3 \cdot 4} e$$

$$+ \frac{x \cdot x \cdot x - 1 \cdot x \cdot x - 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} f + \text{etc.}$$

wobei $b = \frac{1}{2}(b+b')$, $d = \frac{1}{2}(d+d')$, $f = \frac{1}{2}(f+f')$, bedeuten. Nach den Potenzen von x entwickelt, ist dieser Ausdruck:

$$y = a + x \left\{ b - \frac{1}{6} d + \frac{1}{30} f - \frac{1}{140} h + \frac{1}{630} k - \dots \right\}$$

$$+ \frac{x^2}{2} \left\{ c - \frac{1}{12} e + \frac{1}{90} g - \frac{1}{560} i + \dots \right\}$$

$$+ \frac{x^3}{2 \cdot 3} \left\{ d - \frac{1}{4} f + \frac{7}{120} h - \frac{41}{3024} k + \dots \right\}$$

$$+ \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left\{ e - \frac{1}{6} g + \frac{7}{240} i - \dots \right\}$$

$$+ \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left\{ f - \frac{1}{3} h + \frac{13}{144} k - \dots \right\}$$

$$+ \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left\{ g - \frac{1}{4} i + \dots \right\}$$

$$+ \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \left\{ h - \frac{5}{12} k + \dots \right\}$$

u. s. w.

Hieraus erhält man unmittelbar für die Zeit τ :

$$\frac{dy}{dt} = a$$

$$\frac{dy}{dt} = b - \frac{1}{6} d + \frac{1}{30} f - \frac{1}{140} h + \frac{1}{630} k - \dots$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c - \frac{1}{12} e + \frac{1}{90} g - \frac{1}{560} i + \dots$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = d - \frac{1}{4} f + \frac{7}{120} h - \frac{41}{3024} k + \dots$$

$$\frac{d^4y}{dt^4} = e - \frac{1}{6} g + \frac{7}{240} i - \dots$$

$$\frac{d^5y}{dt^5} = f - \frac{1}{3} h + \frac{13}{144} k - \dots$$

$$\frac{d^6y}{dt^6} = g - \frac{1}{4} i + \dots$$

$$\frac{d^7y}{dt^7} = h - \frac{5}{12} k + \dots$$

u. s. w.

Man hat also alles was man gebraucht, um $P', Q', P'', Q'', P''', Q'''; \dots$ zu berechnen.

5.

Die Anwendbarkeit dieser Integration der periodischen Glieder der Störungen der Elemente hängt von der Convergenz der Reihen ab, welche P', Q', P'', Q'' ausdrücken. Offenbar ist diese desto grösser, je weiter der Comet zu der Zeit τ von seinem Perihelium entfernt ist und je langsamer und gleichförmiger er sich also bewegt. Allein ich glaube, dass ein bestimmteres Urtheil sowohl über die Convergenz, als über die Zahl n , welche die Anzahl der für jede Zeit zu machenden Rechnungen bestimmt, nur durch die wirkliche Berechnung eines Beispiels erlangt werden kann. Ich habe daher die Bestimmung der Störungen, welche die Bewegung des Halley'schen Cometen um die Sonne, in der 720 Tage nach seinem jetzigen Durchgange durch das Perihelium anfangenden und sich 720 Tage vor dem bevorstehenden Durchgange endigenden Zeit, durch die Erde erleidet, zum Beispiele gewählt und werde jetzt die Hauptmomente der Rechnung mittheilen.

Die Elemente des Cometen habe ich so angenommen, wie sie Herr STRATFORD der Ephemeride zum Grunde gelegt hat, durch deren genaue und hinreichend ausgedehnte Berechnung der Astronomen einen grossen Dienst erwiesen hat*). Diese Elemente sind:

Durchgangszeit durch das Perihel 1835 Novbr. 15,941953 (Paris)	
Halbe grosse Axe	18,0779386
Excentricität	0,9675509
Entfernung des Perihels vom aufst. Knoten . . .	110° 36' 12",0
Aufst. Knoten (Mittl. Nachtlg. den 16. Novbr.) .	55 8 21,2
Neigung der Bahn	162 14 3,3

Diese Elemente habe ich, insofern sie zur Aus-

führung der § 2 und 3 erläuterten Rechnungen bekannt sein müssen, während der ganzen Dauer der Erscheinung als unveränderlich angesehen. Bezieht man sie auf die Ekliptik und das Aequinoctium von 1750, so erhält man

Länge des aufsteigenden Knotens	53° 54' 32",30
Neigung	162 13 43,91
Entfernung des Perihels vom aufst. Knoten . .	110 34 11,29

Für die veränderliche Bahn des störenden Planeten (der Erde) habe ich nach meinen Formeln (Tabulae Regiomontanae und Astr. Nachr. Nr. 133. S. 266*) gefunden:

	1835	1910
Länge des aufsteigenden Knotens .	171° 28' 47",1	171° 22' 16",4
Neigung	0 0 41,64	0 1 18,15
Entfernung des Perihels vom aufst. Knoten .	287 27 26,05	287 47 4,66
Excentricität	0,01677700	0,01674431

Aus diesen Angaben findet man für beide Epochen:

$\alpha =$	110° 36' 12",08	110° 37' 58",59
$\alpha' =$	44 59 45,86	45 11 12,22
$I =$	162 14 3,18	162 14 19,90

und ferner

	1835	1910
$\log \alpha$ und $\log \alpha'$	9,9440471n	9,9447869n
$\log \beta$ und $\log \beta'$	9,6283674n	9,6248233n
$\log \gamma$ und $\log \gamma'$	9,3339353n	9,3339949

Ich habe $n = 12$ gesetzt, also die Werthe von n' , für welche ich E und E' berechnet habe, von 30° zu 30° fortschreiten lassen. Die Logarithmen dieser Grössen und der Werthe von r' sind:

n'	1835			1910		
	$\log E$	$\log E'$	$\log r'$	$\log E$	$\log E'$	$\log r'$
0°	9,936699n	9,621019n	9,992652	9,937453n	9,617490n	9,992666
30	9,971449n	9,986148	9,993676	9,971255n	9,002450	9,993688
60	9,873177n	9,767037	9,996435	9,871897n	9,769235	9,996442
90	9,546475n	9,960384	0,000122	9,542299n	9,961082	0,000122
120	9,138711	9,998534	0,003718	9,150037	9,998335	0,003710
150	9,772092	9,913713	0,006294	9,774263	9,912506	0,006282
180	9,951273	9,635593	0,007226	9,951999	9,632035	0,007212
210	9,985743	8,819387n	0,006294	9,985579	8,844245n	0,006282
240	9,899181	9,737853n	0,003718	9,899002	9,740425n	0,003710
270	9,613774	9,946600n	0,000122	9,610185	9,947461n	0,000122
300	9,905620n	9,993317n	9,996435	9,925186n	9,993226n	9,996442
330	9,739785n	9,911180n	9,993676	9,742167n	9,910061n	9,993688

6.

Die Zeit, von welcher ich das Integral anfangen zu lassen beabsichtige, folgt 720 Tage auf den jetzigen Durchgang durch das Perihel; sie ist also = 1837

+ 308,941953 Tage. Die Entwickelungen von F, GE, GE' werde ich für 7 Zeiten suchen, welche resp.

$$720 - \frac{3}{k}, 720 - \frac{2}{k}, 720 - \frac{1}{k}, 720, 720 + \frac{1}{k}, 720 + \frac{2}{k}, 720 + \frac{3}{k}$$

*) [STRATFORD, on the elem. of the orbit of Halley's Comet 1835/36. London 1837.]

*) [vgl. die folg. Abhandl. 23.]

Tage auf den Durchgang durch das Perihel folgen. Für diese Zeiten ergeben die angeführten Elemente der Cometenbahn:

Bezeichnet man die Entwicklung jeder der in den drei letzten Columnen enthaltenen Grössen durch

$$c^0 + c \cos n't + c' \cos 2n't + c'' \cos 3n't + \dots \\ + s \sin n't + s' \sin 2n't + s'' \sin 3n't + \dots$$

und die berechneten 12 Zahlenwerthe dieser Grössen durch 1, 2, 3... 12, so stellt man diese vollständig dar durch:

$$12 c = 1 + 2 + 3 \dots \dots \dots + 12. \\ 6 c^I = 1 - 7 + (2 + 6 - 8 + 12) \cos 30^\circ + (3 - 5 - 9 + 11) \sin 30^\circ \\ 6 s^I = 4 - 10 + (2 + 6 - 8 - 12) \sin 30^\circ + (3 + 5 - 9 - 11) \cos 30^\circ \\ 6 c^{II} = 1 - 4 + 7 - 10 + (2 - 3 - 5 + 6 + 8 - 9 - 11 + 12) \sin 30^\circ \\ 6 s^{II} = (2 + 3 - 5 - 6 + 8 + 9 - 11 - 12) \cos 30^\circ \\ 6 c^{III} = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 \\ 6 s^{III} = 2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 \\ 6 c^{IV} = 1 + 4 + 7 + 10 - (2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 9 + 11 + 12) \sin 30^\circ \\ 6 s^{IV} = (2 - 3 + 5 - 6 + 8 - 9 + 11 - 12) \cos 30^\circ \\ 6 c^V = 1 - 7 - (2 - 6 - 8 + 12) \cos 30^\circ + (3 - 5 - 9 + 11) \sin 30^\circ \\ 6 s^V = 4 - 10 + (2 + 6 - 8 - 12) \sin 30^\circ - (3 + 5 - 9 - 11) \cos 30^\circ \\ 6 c^{VI} = 1 - 2 + 3 - 4 \dots \dots \dots + 11 - 12.$$

Die Masse der Erde habe ich = $\frac{1}{357594}$ angenommen, allein F und G mit $\omega = 206264,8$ multiplicirt, theils um die kleinen Brüche in der Rechnung zu vermeiden, theils um die Störungen der Neigung, der Länge des Knotens und der Entfernung des Perihels vom Knoten unmittelbar in Secunden ausgedrückt zu erhalten. Um den Gang der ferneren Rechnungen ganz anschaulich zu machen, werde ich von einer derselben, nämlich der zu der vierten Zeit gehörigen, die einzelnen Resultate anführen. Man findet für diese Zeit:

$n't$	$\log \frac{m'}{r^2}$	$\log \frac{m'}{a^3}$	F	GE	GE'
0 ⁰	9,78308	7,16695	+0,01182	-0,52331	-0,35288
30	9,78001	7,22808	+ 0,01326	- 0,56204	+ 0,05828
60	9,77173	7,24129	+ 0,01367	- 0,44013	+ 0,34480
90	9,76067	7,20108	+ 0,01246	- 0,20221	+ 0,52467
120	9,74988	7,12657	+ 0,01050	+ 0,07726	+ 0,55896
150	9,74215	7,04510	+ 0,00870	+ 0,32617	+ 0,45179
180	9,73936	6,97764	+ 0,00745	+ 0,48968	+ 0,23663
210	9,74215	6,93624	+ 0,00677	+ 0,53359	- 0,03646
240	9,74988	6,92667	+ 0,00662	+ 0,44501	- 0,30703
270	9,76067	6,95061	+ 0,00700	+ 0,23639	- 0,50890
300	9,77173	7,00576	+ 0,00795	- 0,04757	- 0,58116
330	9,78001	7,08378	+ 0,00951	- 0,33037	- 0,49009

Bei der Rechnung gegebenen Annäherung von 5 Decimalstellen kommen indessen c^V und s^V kaum, und die höheren Coefficienten gar nicht mehr in Betracht. Da diese Grössen schon unmerklich werden, so geht zugleich aus den im 4. § angeführten Formeln hervor, dass man mit $n = 8$, oder mit der Berechnung von 8 Werthen von F, GE, GE' , ausgereicht haben würde.

Die Werthe von $c, c', s', c'', s'', c''', s'''$ ergeben sich hieraus:

	c	c^I	s^I	c^{II}	s^{II}	c^{III}	s^{III}	c^{IV}	s^{IV}
F	+0,00962	+0,00211	+0,00277	-0,00012	+0,00063	-0,00007	+0,00004	-0,00001	0,00000
GE	+ 0,00031	- 0,50298	- 0,21948	- 0,01695	- 0,00717	- 0,00050	- 0,00018	- 0,00002	0,00000
GE'	- 0,00012	- 0,24455	+ 0,51729	- 0,00801	+ 0,01733	- 0,00020	+ 0,00051	- 0,00001	+ 0,00002

7.

Für die sieben verschiedenen Zeiten, für welche die Entwicklungen gemacht werden sollen, findet man auf gleiche Art:

	c	c^I	s^I	c^{II}	s^{II}	c^{III}	s^{III}	c^{IV}	s^{IV}
1 F	+0,01421	+0,00342	+0,00516	-0,00044	+0,00108	-0,00019	+0,00006	-0,00003	-0,00002
1 GE	+ 0,00067	- 0,50515	- 0,21907	- 0,01693	- 0,00691	- 0,00054	- 0,00015	- 0,00003	0,00000
1 GE'	- 0,00027	- 0,24420	+ 0,51642	- 0,00776	+ 0,01730	- 0,00016	+ 0,00055	- 0,00001	+ 0,00002
2 F	+ 0,01230	+ 0,00287	+ 0,00410	- 0,00027	+ 0,00084	- 0,00014	+ 0,00005	- 0,00002	- 0,00001
2 GE	+ 0,00051	- 0,50551	- 0,21925	- 0,01694	- 0,00703	- 0,00052	- 0,00016	- 0,00002	0,00000
2 GE'	- 0,00020	- 0,24435	+ 0,51680	- 0,00787	+ 0,01731	- 0,00018	+ 0,00054	- 0,00001	+ 0,00002

	c	c^2	s^2	c^{22}	s^{22}	c^{23}	s^{23}	c^{24}	s^{24}	
3 {	F	+0,01081	+0,000244	+0,000334	-0,000018	+0,000066	-0,000010	+0,000004	-0,000002	-0,000001
	GE	+0,000040	-0,50578	-0,21938	-0,01695	-0,00711	-0,00051	-0,00017	-0,00002	0,00000
	GE'	-0,000015	-0,24446	+0,51708	+0,00795	+0,01732	-0,00019	+0,00052	-0,00001	+0,00002
4 {	F	+0,00962	+0,00211	+0,00277	-0,00012	+0,00053	-0,00007	+0,00004	-0,00001	0,00000
	GE	+0,00031	-0,50598	-0,21948	-0,01695	-0,00717	-0,00050	-0,00018	-0,00002	0,00000
	GE'	-0,000012	-0,24455	+0,51729	-0,00801	+0,01733	-0,00020	+0,00051	-0,00001	+0,00002
5 {	F	+0,000864	+0,00184	+0,00233	-0,00008	+0,00048	-0,00005	+0,00003	-0,00001	0,00000
	GE	+0,00025	-0,50614	-0,21956	-0,01696	-0,00721	-0,00050	-0,00019	-0,00002	0,00000
	GE'	-0,000009	-0,24462	+0,51745	-0,00805	+0,01734	-0,00021	+0,00051	-0,00001	+0,00002
6 {	F	+0,00783	+0,00162	+0,00199	-0,00006	+0,00036	-0,00004	+0,00003	-0,00001	0,00000
	GE	+0,00021	-0,50627	-0,21961	-0,01697	-0,00724	-0,00049	-0,00019	-0,00001	0,00000
	GE'	-0,000007	-0,24467	+0,51758	-0,00808	+0,01735	-0,00022	+0,00050	-0,00001	+0,00002
7 {	F	+0,00715	+0,00144	+0,00172	-0,00004	+0,00030	-0,00003	+0,00002	-0,00000	0,00000
	GE	+0,00017	-0,50637	-0,21966	-0,01697	-0,00726	-0,00049	-0,00020	-0,00001	0,00000
	GE'	-0,000006	-0,24472	+0,51769	-0,00810	+0,01736	-0,00022	+0,00050	-0,00001	+0,00002

Um die Differentialquotienten der Elemente der Cometenbahn, oder vielmehr ihre Entwicklung für jede der 7 Zeiten zu erhalten, muss man die Zahlen, welche diese Tafel für jede Zeit angiebt, mit den derselben

Zeit zugehörigen Werthen der Coefficienten von F, GE, GE' (§ 3) multipliciren und die Producte addiren.

Dadurch findet man z. B. für $\frac{d^2a}{dt^2}$:

Zeit	p'	q'	p''	q''	p'''	q'''
1	+0,22262	+0,16641	+0,00726	+0,00580	+0,00016	+0,00016
2	0,21570	0,15591-5	0,00709	0,00539-5	0,00016	0,00015
3	0,20943	0,14693	0,00692-5	0,00505	0,00017	0,00014
4	0,20372	0,13912	0,00676	0,00477	0,00017	0,00014
5	0,19850	0,13224	0,00660	0,00451	0,00018	0,00013
6	0,19367	0,12611	0,00645	0,00429-5	0,00017	0,00012
7	0,18919	0,12061	0,00631	0,00410	0,00017	0,00012

Man leitet daraus, nach den Formeln des 4. §, ab:

Zeit 4	+0,20372	+0,13912	+0,00676	+0,00477	+0,00017	+0,00014
1. Differentialquotient . . .	-0,00545	-0,00731	-0,00016	-0,00027	+0,00001	-0,00001
2. " " . . .	+0,00048	+0,00092	0,00000	+0,00004		
3. " " . . .	-0,00008	-0,00021				
4. " " . . .		+0,00005				

Da die Bewegung der mittleren Anomalie der Erde in 365,25 Tagen

$$= 1295966,089$$

$$\text{ist, so erhält man } n' = \frac{1295966,089 \cdot \text{Arc. } 1''}{365,25 \cdot k}$$

$$= 0,999993$$

wodurch man, nach den Formeln § 1, findet

P'	Q'	P''	Q''	P'''	Q'''
-0,14362	+0,19614	-0,00242	+0,00347	-0,00005	+0,00006

Das von der Stellung des störenden Planeten unabhängige Glied habe ich hier nicht angeführt, weil jetzt nur von

den Störungen die Rede ist, welche aus den davon abhängigen Gliedern hervorgehen. Indem die Differentialquotienten von p', q', p'', q'', \dots für alle Elemente der Bahn sich so schnell verkleinern, dass die über den 4. hinausgehenden ausserhalb der Grenze liegen, bis zu welcher ich die Annäherung getrieben habe, so wäre es hinreichend gewesen, nur für 5 verschiedene Zeiten zu rechnen.

Auf ganz ähnliche Art findet man für alle Elemente der Cometenbahn.

	P'	Q'	P''	Q''	P'''	Q'''
$\delta I \dots$	+0,1290	-0,1107	+0,0021	-0,0019	0,0000	0,0000
$\delta N \dots$	+2,7839	-3,1183	+0,0473	-0,0511	+0,0009	-0,0010
$\delta \frac{1}{2a} \dots$	-0,14362	+0,19614	-0,00242	+0,00347	+0,00005	+0,00006
$\delta h \dots$	-2,9174	-3,3623	-0,0479	-0,0574	-0,0010	+0,0011
$\cos I \delta N + \delta \omega \dots$	-1,0285	+2,1318	+0,0011	-0,0358	-0,0004	-0,0007
$\delta T - ah (\cos I \delta N + \delta \omega) \dots$	+31,614	+40,314	+0,532	+0,686	+0,011	+0,013

Indem die mittlere Anomalie der Erde, für die Zeit (§ 6)

$$1837 + 308,941953 \text{ Tage,}$$

von welcher die Integration der Störungen der Elemente anfangen soll, = $30^{\circ} 17' 46,7''$ ist, so hat man diesen Werth für $n't$ zu setzen und erhält dadurch für den Anfang des Integrals:

$$\delta I \dots\dots + 0,1651$$

$$\delta N \dots\dots + 4,1700$$

$$\delta \frac{1}{2a} \dots\dots - 0,24527$$

$$\delta h \dots\dots + 1,2055$$

$$\cos I \delta N + \delta \omega \dots\dots + 1,2151$$

$$\delta T - ah(\cos I \delta N + \delta \omega) \dots\dots - 16,339$$

8.

Das Ende des Integrals soll auf die Zeit fallen, welche 720 Tage vor dem nächsten Durchgang des Cometen durch das Perihelium vorhergeht. Da die Umlaufzeit, den angewandten Elementen zufolge,

28075,130 Tage ist, so folgt die Zeit, bis zu welcher das Integral genommen werden soll, 27355,130 Tage auf den Durchgang von 1835. Dieselben Rechnungen, welche ich in den beiden vorigen §§ mitgetheilt habe, müssen also für 7 Zeitmomente gemacht werden, welche von dem eben angegebenen

$$-\frac{3}{k}, -\frac{2}{k}, -\frac{1}{k}, 0, +\frac{1}{k}, +\frac{2}{k}, +\frac{3}{k}$$

verschieden sind.

Die Mühe, diese Rechnungen auszuführen, hat ein eben so eifriger als kenntnisreicher Liebhaber der Astronomie, Herr Ingenieur-Hauptmann und Ritter SCHWINK in Pillau, übernommen und mir die folgenden Resultate derselben gütig mitgetheilt.

Indem die Rechnung mit den unveränderten Elementen geführt worden ist, sind die wahren Anomalien des Cometen die Ergänzungen der im 6. § angeführten zu 360° ; die Radienvectoren haben die dort angeführten Werthe. Die Werthe von $c, c', s, s', c'', s'', \dots$ für die 7 verschiedenen Zeiten sind:

	c	c'	s	c''	s''	c'''	s'''	c''''	s''''
1	F	+0,00715	+0,00231	-0,00012	+0,00033	-0,00003	+0,00004	-0,00001	+0,00001
	GE	+ 0,00009	- 0,50720	- 0,21781	- 0,01689	- 0,00726	- 0,00047	- 0,00020	- 0,00002
	GE'	+ 0,00005	- 0,24278	+ 0,51860	- 0,00809	+ 0,01727	- 0,00023	+ 0,00048	- 0,00001
2	F	+ 0,00783	+ 0,00263	- 0,00016	+ 0,00039	- 0,00005	+ 0,00005	- 0,00001	+ 0,00001
	GE	+ 0,00011	- 0,50709	- 0,21776	- 0,01686	- 0,00725	- 0,00046	- 0,00020	- 0,00001
	GE'	+ 0,00006	- 0,24273	+ 0,51849	- 0,00808	+ 0,01724	- 0,00022	+ 0,00047	- 0,00001
3	F	+ 0,00864	+ 0,00304	- 0,00023	+ 0,00047	- 0,00007	+ 0,00007	- 0,00001	+ 0,00001
	GE	+ 0,00013	- 0,50697	- 0,21770	- 0,01683	- 0,00725	- 0,00045	- 0,00020	- 0,00001
	GE'	+ 0,00008	- 0,24266	+ 0,51837	- 0,00807	+ 0,01734	- 0,00022	+ 0,00046	- 0,00001
4	F	+ 0,00961	+ 0,00356	- 0,00033	+ 0,00057	- 0,00011	+ 0,00009	- 0,00002	+ 0,00001
	GE	+ 0,00016	- 0,50680	- 0,21765	- 0,01679	- 0,00724	- 0,00044	- 0,00020	- 0,00001
	GE'	+ 0,00010	- 0,24259	+ 0,51822	- 0,00806	+ 0,01717	- 0,00022	+ 0,00045	- 0,00001
5	F	+ 0,01080	+ 0,00423	- 0,00047	+ 0,00072	- 0,00016	+ 0,00011	- 0,00004	+ 0,00002
	GE	+ 0,00020	- 0,50659	- 0,21759	- 0,01673	- 0,00722	- 0,00043	- 0,00020	- 0,00000
	GE'	+ 0,00013	- 0,24248	+ 0,51802	- 0,00804	+ 0,01711	- 0,00022	+ 0,00044	- 0,00001
6	F	+ 0,01230	+ 0,00510	- 0,00068	+ 0,00091	- 0,00024	+ 0,00015	- 0,00006	+ 0,00002
	GE	+ 0,00026	- 0,50631	- 0,21747	- 0,01665	- 0,00721	- 0,00041	- 0,00020	- 0,00000
	GE'	+ 0,00018	- 0,24234	+ 0,51775	- 0,00802	+ 0,01703	- 0,00021	+ 0,00042	- 0,00001
7	F	+ 0,01421	+ 0,00629	- 0,00099	+ 0,00119	- 0,00037	+ 0,00021	- 0,00010	+ 0,00003
	GE	+ 0,00035	- 0,50593	- 0,21732	- 0,01653	- 0,00719	- 0,00038	- 0,00020	- 0,00000
	GE'	+ 0,00025	- 0,24214	+ 0,51739	- 0,00799	+ 0,01691	- 0,00021	+ 0,00039	- 0,00001

Ferner haben sich die Werthe von $P, Q, P'', Q'', P''', Q'''$ für alle Elemente der Cometenbahn ergeben:

	P'	Q'	P''	Q''	P'''	Q'''
$\delta I \dots$	- 0,7083	+ 0,6594	- 0,0116	+ 0,0111	- 0,0002	+ 0,0002
$\delta N \dots$	+ 2,1004	- 1,8222	+ 0,0337	- 0,0313	+ 0,0006	- 0,0005
$\delta \frac{1}{2a} \dots$	+ 0,04516	- 0,24187	+ 0,00080	- 0,0412	+ 0,00001	- 0,00008
$\delta h \dots$	- 4,3323	- 0,0418	- 0,0733	+ 0,0011	- 0,0013	0,0000
$\cos I \delta N + \delta \omega \dots$	+ 2,9074	- 0,6080	+ 0,0368	- 0,0106	+ 0,0007	- 0,0002
$\delta T - ah(\cos I \delta N + \delta \omega) \dots$	+ 1132,29	- 6335,03	+ 20,40	- 104,97	+ 0,32	- 2,16

Da die Zeit, bis zu welcher die Störungen gesucht werden sollen

$$1910 + 282,072 \text{ Tage}$$

und die derselben zugehörige mittlere Anomalie der Erde = 275° 53' 36" 6 ist, so hat man diesen Werth für $n't$ zu setzen und erhält dadurch für das Ende des Integrals:

$$\begin{aligned} \delta I &\dots - 0,7193 \\ \delta N &\dots + 2,0010 \\ \delta \frac{1}{2a} &\dots + 0,24521 \\ \delta h &\dots - 0,3284 \\ \cos I \delta N + \delta \omega &\dots + 0,7974 \\ \delta T - ah (\cos I \delta N + \delta \omega) &\dots + 6417,13 \end{aligned}$$

Die Störungen, welche die Elemente der von dem Cometen um die Sonne beschriebenen Bahn zwischen 1837 + 308,942 Tage und 1910 + 282,072 Tage durch die Veränderungen der Stellungen der Erde erfahren, sind also, nach den in den beiden letzten §§, von mir und von Herrn Hauptmann SCHWINK erhaltenen Resultaten der Rechnung:

$$\begin{aligned} \delta I &= -0,7193 - 0,1651 = -0,8844 \\ \delta N &= + 2,0010 - 4,1700 = - 2,1690 \\ \delta \frac{1}{2a} &= + 0,24521 + 0,24527 = + 0,49048 \\ \delta h &= - 0,3284 - 1,2055 = - 1,5339 \\ \cos I \delta N + \delta \omega &= + 0,7974 - 1,2151 = - 0,4177 \\ \delta T - ah (\cos I \delta N + \delta \omega) &= + 6417,13 + 16,339 = + 6433,47 \end{aligned}$$

Will man δT in Tagen ausdrücken, so muss man seinen gefundenen Werth mit

$$\frac{1}{\omega k} \dots \log = 6,4499934$$

multiplizieren. Die Werthe von $\delta \frac{1}{2a}$ und δh müssen mit Arc. $1'' = \frac{1}{\omega}$ multiplicirt werden.

9.

Die bis hier berechneten Störungen des Cometen berücksichtigen noch nicht das von den Cosinussen und Sinussen von $n't$ und seiner Vielfachen unabhängige Glied der im 1. § angegebenen Formel:

$$\delta c = fp^0 dt + P' \cos n't + Q' \sin n't + \text{etc.} \dots$$

Der Einfluss dieses Gliedes auf die 6 Elemente der Cometenbahn muss also noch untersucht werden.

Dieses Glied ist gerade dasselbe, welches GAUSS in seiner denkwürdigen Abhandlung (Determinatio Attractionis etc.) untersucht und vollständig zu finden gelehrt hat. Man kann seine Methode also zur Ergänzung der hier dargestellten anwenden; aber die Aufgabe, deren Auflösung der Gegenstand dieser Ab-

handlung ist, ist durch die Bedingung beschränkt, dass die Entfernungen des Cometen von der Sonne weit grösser sind, als die Entfernungen der störenden Planeten von derselben. Aus dieser Beschränkung kann man Nutzen ziehen.

Die Ausdrücke der drei Componenten A', B', C' der störenden Kraft, welche ich im 2. § angewandt habe, sind bekanntlich von den Differentialquotienten der Grösse

$$R = \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r'^3} - \frac{m'}{q}$$

abhängig, nämlich:

$$\begin{aligned} A' &= \frac{dR}{dr} \\ B' &= \frac{1}{r} \frac{dR}{d\omega} \\ \sin(\omega + \varphi) C' &= \frac{1}{r} \frac{dR}{dI} \\ \cos(\omega + \varphi) C' &= \frac{1}{r \operatorname{tg} I} \frac{dR}{d\omega} + \frac{1}{r \sin I} \frac{dR}{d\omega} \end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Formeln des 3. §, so verwandeln sie sich in:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\frac{1}{h \operatorname{tg} I} \frac{dR}{d\omega} - \frac{1}{h \sin I} \frac{dR}{d\omega} \\ \frac{dN}{dt} &= -\frac{1}{h \sin I} \frac{dR}{dI} \\ \frac{d \frac{1}{2a}}{dt} &= \frac{c \sin \varphi}{h} \frac{dR}{dr} + \frac{h}{rr} \frac{dR}{d\omega} \\ \frac{dh}{dt} &= -\frac{dR}{d\omega} \\ \cos I \frac{dN}{dt} + \frac{d\omega}{dt} &= \frac{h \cos \varphi}{c} \frac{dR}{dr} - \frac{(2 + \epsilon \cos \varphi) \sin \varphi}{h \epsilon} \frac{dR}{d\omega} \\ \frac{dT}{dt} - ah \left(\cos I \frac{dN}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \right) &= a \left(-2r + \frac{3\epsilon \sin \varphi}{h} (t - T) \right) \frac{dR}{dr} \\ &\quad + \frac{3ah}{rr} (t - T) \frac{dR}{d\omega} \end{aligned}$$

Indem aber

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dT} &= -\frac{\epsilon \sin \varphi}{h} & \frac{d\varphi}{dT} &= -\frac{h}{rr} \\ \frac{dr}{d\epsilon} &= -a \cos \varphi & \frac{d\varphi}{d\epsilon} &= \frac{a(2 + \epsilon \cos \varphi) \sin \varphi}{h \epsilon} \\ \frac{dr}{da} &= \frac{r}{a} - \frac{3\epsilon \sin \varphi}{2ah} (t - T) & \frac{d\varphi}{da} &= -\frac{3h}{2a r r} (t - T) \end{aligned}$$

ist, nehmen sie ferner die, im Wesentlichen bekannte, Form

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\frac{1}{h \operatorname{tg} I} \frac{dR}{d\omega} - \frac{1}{h \sin I} \frac{dR}{d\omega} \\ \frac{dN}{dt} &= -\frac{1}{h \sin I} \frac{dR}{dI} \\ \frac{d \frac{1}{2a}}{dt} &= -\frac{dR}{dT} \end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{d\omega}$$

$$\cos I \frac{dN}{dt} + \frac{d\omega}{dt} = -\frac{h}{ae} \frac{dR}{dc}$$

$$\frac{dT}{dt} - ah \left(\cos I \frac{dN}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \right) = -2a \frac{dR}{da}$$

an. Unter dieser Form werde ich sie hier anwenden.

Der Theil von R , welcher hier allein in Betracht kömmt, ist der von $n't$ unabhängige, dessen Ausdruck

$$= \frac{m'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} - \frac{1}{q} \right\} d'n't$$

ist. Offenbar verschwindet der erste Theil dieses bestimmten Integrals, welches sich daher auf

$$-\frac{m'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d'n't}{q}$$

reducirt, und, indem $d'n't = (1 - e' \cos \epsilon') d\epsilon' = \frac{r'}{a} d\epsilon'$ ist, auch

$$-\frac{m'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r'}{a q} d\epsilon'$$

geschrieben werden kann. Der Theil von R , welcher hier allein in Betracht kömmt, ist daher der von der excentrischen Anomalie des störenden Planeten ϵ' unabhängige Theil der Entwicklung von

$$-\frac{m' r'}{a^2 q}$$

in eine nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen von ϵ' fortgehende Reihe.

10.

Wenn man

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{V(r r' - 2r x' + r r')}$$

in die nach den Potenzen von $\frac{1}{q}$ fortgehende Reihe

$$x' = a' p (\cos \epsilon' - e')$$

$$x'^2 = a'^2 \left\{ p^2 (\cos \epsilon' - e')^2 + q^2 (1 - e' e') \sin \epsilon'^2 \right\}$$

$$x'^3 = a'^3 \left\{ p^3 (\cos \epsilon' - e')^3 + 3p q^2 (1 - e' e') (\cos \epsilon' - e') \sin \epsilon'^2 \right\}$$

$$x'^4 = a'^4 \left\{ p^4 (\cos \epsilon' - e')^4 + 6p^2 q^2 (1 - e' e') (\cos \epsilon' - e')^2 \sin \epsilon'^2 + q^4 (1 - e' e')^2 \sin \epsilon'^4 \right\}$$

$$x'^5 = a'^5 \left\{ p^5 (\cos \epsilon' - e')^5 + 10p^3 q^2 (1 - e' e') (\cos \epsilon' - e')^3 \sin \epsilon'^2 + 5p q^4 (1 - e' e')^2 (\cos \epsilon' - e') \sin \epsilon'^4 \right\}$$

u. s. w.

Multiplicirt man jeden dieser Ausdrücke durch r', r'^3, r'^5, \dots lässt man die in Beziehung auf $\cos \epsilon'$ ungeraden Glieder der

$$\frac{U^0}{r} + \frac{a' U^{(1)}}{r^2} + \frac{a'^2 U^{(2)}}{r^3} + \frac{a'^3 U^{(3)}}{r^4} + \dots$$

entwickelt und den von ϵ' unabhängigen Theil der Producte der Zähler ihrer verschiedenen Glieder in $\frac{r'}{a} = 1 - e' \cos \epsilon'$ multiplicirt, durch $V^0, a' V^{(1)}, a'^2 V^{(2)}, \dots$ bezeichnet, so ist der hier in Betracht kommende Theil von R :

$$= -m' \left\{ \frac{V^0}{r} + \frac{a' V^{(1)}}{r^2} + \frac{a'^2 V^{(2)}}{r^3} + \dots \right\}$$

Man muss also die Ausdrücke von $V^0, V^{(1)}, V^{(2)}, \dots$ aufsuchen.

Zunächst findet man:

$$U^{(0)} = 1$$

$$a' U^{(1)} = x'$$

$$a'^2 U^{(2)} = \frac{1}{2} (3x'^2 - r'^2)$$

$$a'^3 U^{(3)} = \frac{1}{2} (5x'^3 - 3r'^2 x')$$

$$a'^4 U^{(4)} = \frac{1}{8} (35x'^4 - 30r'^2 x'^2 + 3r'^4)$$

$$a'^5 U^{(5)} = \frac{1}{8} (63x'^5 - 70r'^2 x'^3 + 15r'^4 x')$$

u. s. w.

Führt man in die Ausdrücke von x' und r' die excentrische Anomalie ein, oder setzt man

$$x' = a' \{ p (\cos \epsilon' - e') + q \sqrt{1 - e' e'} \sin \epsilon' \}$$

$$r' = a' (1 - e' \cos \epsilon'),$$

wo

$$p = \cos(\omega + \varphi) \cos \omega' + \sin(\omega + \varphi) \sin \omega' \cos I$$

$$q = -\cos(\omega + \varphi) \sin \omega' + \sin(\omega + \varphi) \cos \omega' \cos I$$

bedeuten, so kann man aus den Ausdrücken von $U^{(0)}, U^{(1)}, U^{(2)}, \dots$ alle in Beziehung auf $\sin \epsilon'$ ungeraden Glieder weglassen, indem sie in $V^{(0)}, V^{(1)}, V^{(2)}, \dots$ offenbar verschwinden. Man kann also setzen:

Producte weg, und schreibt man statt jedes geraden Gliedes seinen von ϵ' unabhängigen Theil, so erhält man:

$$r':a' = 1$$

$$r'x':a'^2 = -\frac{3}{2} e' p$$

$$\left\{ r'x'^2:a'^3 = p^2 \left(\frac{1}{2} + 2e'e' \right) + q^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e'e' \right) \right.$$

$$\left. r'^2:a'^3 = 1 + \frac{3}{2} e'e' \right.$$

$$\begin{cases} r'x^3:a^4 = -\dot{e}p \left\{ p^2 \left(\frac{15}{8} + \frac{5}{2} \dot{e}\dot{e}' \right) + q^2 \left(\frac{15}{8} - \frac{15}{8} \dot{e}\dot{e}' \right) \right\} \\ r'^2x^3:a^4 = -\dot{e}p \left(\frac{5}{2} + \frac{15}{8} \dot{e}\dot{e}' \right) \\ r'x^4:a^5 = p^4 \left(\frac{3}{8} + \frac{9}{2} \dot{e}\dot{e}' + 3\dot{e}'^2 \right) + p^2q^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{15}{4} \dot{e}\dot{e}' - \frac{9}{2} \dot{e}'^2 \right) + q^4 \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{4} \dot{e}\dot{e}' + \frac{3}{8} \dot{e}'^2 \right) \\ r'^2x^4:a^5 = p^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{41}{8} \dot{e}\dot{e}' + \frac{9}{4} \dot{e}'^2 \right) + q^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \dot{e}\dot{e}' - \frac{3}{8} \dot{e}'^2 \right) \\ r'^5:a^5 = 1 + 5\dot{e}\dot{e}' + \frac{15}{8} \dot{e}'^2 \\ r'x^5:a^6 = -\dot{e}p \left\{ p^4 \left(\frac{35}{16} + \frac{35}{4} \dot{e}\dot{e}' + \frac{7}{2} \dot{e}'^2 \right) + p^2q^2 \left(\frac{35}{8} + \frac{35}{8} \dot{e}\dot{e}' - \frac{35}{4} \dot{e}'^2 \right) + q^4 \left(\frac{35}{16} - \frac{35}{8} \dot{e}\dot{e}' + \frac{35}{16} \dot{e}'^2 \right) \right\} \\ r'^2x^5:a^6 = -\dot{e}p \left\{ p^3 \left(\frac{21}{8} + \frac{147}{16} \dot{e}\dot{e}' + \frac{21}{8} \dot{e}'^2 \right) + q^2 \left(\frac{21}{8} - \frac{21}{16} \dot{e}\dot{e}' - \frac{21}{16} \dot{e}'^2 \right) \right\} \\ r'^5x^5:a^6 = -\dot{e}p \left(\frac{7}{2} + \frac{35}{4} \dot{e}\dot{e}' + \frac{35}{16} \dot{e}'^2 \right) \end{cases}$$

Hieraus setzt man die Ausdrücke von $V^0, V^{(1)}, V^{(2)}, \dots$ ohne Mühe folgendermassen zusammen:

$$V^{(0)} = 1$$

$$V^{(1)} = -\frac{3}{2} \dot{e}\dot{e}'p$$

$$V^{(2)} = p^2 \left(\frac{3}{4} + 3\dot{e}\dot{e}' \right) + q^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \dot{e}\dot{e}' \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \dot{e}'^2 \right)$$

$$V^{(3)} = -\dot{e}p \left\{ p^2 \left(\frac{75}{16} + \frac{25}{4} \dot{e}\dot{e}' \right) + q^2 \left(\frac{75}{16} - \frac{75}{16} \dot{e}\dot{e}' \right) - \left(\frac{15}{4} + \frac{45}{16} \dot{e}'^2 \right) \right\}$$

$$V^{(4)} = p^4 \left(\frac{105}{64} + \frac{315}{16} \dot{e}\dot{e}' + \frac{105}{8} \dot{e}'^2 \right) + p^2q^2 \left(\frac{105}{32} + \frac{525}{32} \dot{e}\dot{e}' - \frac{315}{16} \dot{e}'^2 \right) + q^4 \left(\frac{105}{64} - \frac{105}{32} \dot{e}\dot{e}' + \frac{105}{64} \dot{e}'^2 \right) \\ - p^2 \left(\frac{15}{8} + \frac{615}{32} \dot{e}\dot{e}' + \frac{135}{16} \dot{e}'^2 \right) - q^2 \left(\frac{15}{8} - \frac{15}{32} \dot{e}\dot{e}' - \frac{45}{32} \dot{e}'^2 \right) + \frac{3}{8} + \frac{15}{8} \dot{e}\dot{e}' + \frac{45}{64} \dot{e}'^2$$

$$V^{(5)} = -\dot{e}p \left\{ p^4 \left(\frac{2205}{128} + \frac{2205}{64} \dot{e}\dot{e}' + \frac{441}{16} \dot{e}'^2 \right) + p^2q^2 \left(\frac{2205}{64} + \frac{2205}{64} \dot{e}\dot{e}' - \frac{2205}{32} \dot{e}'^2 \right) + q^4 \left(\frac{2205}{128} - \frac{2205}{64} \dot{e}\dot{e}' + \frac{2205}{128} \dot{e}'^2 \right) \right\} \\ - p^2 \left(\frac{735}{128} + \frac{5145}{64} \dot{e}\dot{e}' + \frac{735}{32} \dot{e}'^2 \right) - q^2 \left(\frac{735}{32} - \frac{735}{64} \dot{e}\dot{e}' - \frac{105}{64} \dot{e}'^2 \right) + \frac{105}{16} + \frac{525}{32} \dot{e}\dot{e}' - \frac{525}{128} \dot{e}'^2 \}$$

Ich werde dafür die abgekürzten Bezeichnungen schreiben:

$$V^{(0)} = 1$$

$$V^{(1)} = -\dot{e}pA$$

$$V^{(2)} = Bp^2 + B'q^2 - B''$$

$$V^{(3)} = -\dot{e}p \{ Cp^2 + C'q^2 - C'' \}$$

$$V^{(4)} = Dp^4 + D'p^2q^2 + D''q^4 - D'''p^2 - D''''q^2 + D''''$$

$$V^{(5)} = -\dot{e}p \{ Ep^4 + E'p^3q^2 + E''q^4 - E'''p^2 - E''''q^2 + E'''' \}$$

deren Coefficienten allein von der Excentricität der Bahn des störenden Planeten abhängen.

11.

Diese, bis zu der 6. Potenz von $\frac{1}{r}$ incl. vollständige Entwicklung des von der veränderlichen Stellung des störenden Planeten unabhängigen Theils von R , ist in einem, dem zum Beispiele gewählten ähnlichen Falle, mehr als hinreichend zu der Bestimmung der von diesem Theile herrührenden Aenderungen der Elemente.

Indem die Differentialquotienten der Elemente in Beziehung auf die Zeit durch Differentialquotienten von R in Beziehung auf die Elemente ausgedrückt worden sind, und indem die Integrale der ersteren über die Zeit ausgedehnt werden sollen, für deren Dauer man die Aenderungen der Elemente bestimmen will, ist es offenbar der Willkür überlassen, ob man R zuerst in Beziehung auf die Elemente differentiiren und dann in Beziehung auf die Zeit integriren will, oder ob man die Integration vorangehen lassen und dann das Integral differentiiren will. Ich habe den letzteren Weg eingeschlagen, also

$$m' \Pi = \int R dt = \frac{1}{h} \int R r r d\varphi$$

aufgesucht.

Die Reihe, welche R durch $r, V^{(0)}, V^{(1)}, \dots$ ausgedrückt, convergirt für solche Werthe von $\frac{a}{r}$, wie in dem Beispiele vorkommen, so schnell, dass ihr $V^{(5)}$ enthaltendes Glied nicht mehr in Betracht kömmt. Man muss also

$$II = -\frac{1}{h} \int V^{(0)} r d\varphi - \frac{a'}{h} \int V^{(1)} d\varphi - \frac{a'^2}{h} \int \frac{V^{(2)}}{r} d\varphi - \frac{a'^3}{h} \int \frac{V^{(3)}}{r^2} d\varphi$$

oder, wenn man für $r = \frac{hh}{1 + e \cos \varphi}$ schreibt,

$$II = -h \int \frac{V^{(0)} d\varphi}{1 + e \cos \varphi} - \frac{a'}{h} \int V^{(1)} d\varphi - \frac{a'^2}{h^2} \int V^{(2)} (1 + e \cos \varphi) d\varphi - \frac{a'^3}{h^3} \int V^{(3)} (1 + e \cos \varphi)^2 d\varphi$$

aufsuchen.

Die Erfindung der Aenderungen der Elemente aus diesem Ausdruck fordert seine Differentiation in Beziehung auf ω, ω', I, T, e und a . Es muss also für

$$\frac{dII}{de} = -\frac{a'^2}{h^{2i-1}} \left\{ \frac{-(2i-1)}{h} \cdot \frac{dh}{de} \int V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} d\varphi + (i-1) \int V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-2} \cos \varphi d\varphi + V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} \frac{d\varphi}{de} \right\}$$

Schreibt man darin

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1 + e \cos \varphi}{e} - \frac{1}{e} \\ \frac{dh}{de} &= -\frac{ae}{h} \\ \frac{d\varphi}{de} &= \frac{a(2 + e \cos \varphi) \sin \varphi}{hh} \end{aligned}$$

so verwandelt es sich in

$$\frac{dII}{de} = -\frac{a'^2}{eh^{2i-1}} \left\{ (i-1+ie) \int V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} d\varphi - (i-1)(1-ee) \int V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-2} d\varphi + e V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} (2 + e \cos \varphi) \sin \varphi \right\}.$$

Endlich ist das allgemeine Glied von

$$\frac{dII}{da} = -\frac{a'^i}{h^{2i-1}} \left\{ \frac{-(2i-1)}{h} \frac{dh}{da} \int V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} d\varphi + V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} \frac{d\varphi}{da} \right\}$$

und man hat:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{da} &= \frac{h}{2a} \\ \frac{d\varphi}{da} &= -\frac{3h}{2arr} (t - T) \end{aligned}$$

also

$$\frac{dII}{da} = -\frac{a'^i}{2ah^{2i-1}} \left\{ (2i-1) \int V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} d\varphi + \frac{3}{h^2} V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} (t - T) \right\}$$

Hieraus geht hervor, dass man, um die Aenderungen der Elemente während einer beliebigen Zeit zu erhalten, die unbestimmten Integrale:

$$\int V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} d\varphi \text{ und } \int V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-2} d\varphi$$

aufsuchen, und das erste derselben in Beziehung auf ω, ω', I differentiren muss.

12.

Da die durch A, B, B', B'', C, \dots bezeichneten Coefficienten der Ausdrücke von $V^{(0)}, V^{(1)}, \dots$ endliche, nach den Potenzen des Quadrats der Excentricität des störenden Planeten fortgehende Ausdrücke sind, so kann man sie, wenn man dieses Quadrat vernachlässigen

jeden Werth der Ordnungszahl i

$$-\frac{a'^i}{h^{2i-1}} \int V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} d\varphi$$

in Beziehung auf diese Elemente differentirt werden. Die drei ersten derselben kommen nur in $V^{(0)}$ vor. Der in Beziehung auf T genommene Differentialquotient von II ist $-\frac{dR}{dt}$, wodurch

$$\frac{d\frac{1}{2a}}{dt} = \frac{dR}{dt}$$

und folglich

$$\frac{1}{2a} = \text{Const.} + R$$

wird. Der Differentialquotient von II in Beziehung auf e hat das allgemeine Glied:

$$\int V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-2} \cos \varphi d\varphi + V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} \frac{d\varphi}{de}$$

$$\cos \varphi = \frac{1 + e \cos \varphi}{e} - \frac{1}{e}$$

$$\frac{dh}{de} = -\frac{ae}{h}$$

$$\frac{d\varphi}{de} = \frac{a(2 + e \cos \varphi) \sin \varphi}{hh}$$

$$\frac{dII}{de} = -\frac{a'^2}{eh^{2i-1}} \left\{ (i-1+ie) \int V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} d\varphi - (i-1)(1-ee) \int V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-2} d\varphi + e V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} (2 + e \cos \varphi) \sin \varphi \right\}.$$

Endlich ist das allgemeine Glied von

$$\frac{dII}{da} = -\frac{a'^i}{h^{2i-1}} \left\{ \frac{-(2i-1)}{h} \frac{dh}{da} \int V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} d\varphi + V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} \frac{d\varphi}{da} \right\}$$

und man hat:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{da} &= \frac{h}{2a} \\ \frac{d\varphi}{da} &= -\frac{3h}{2arr} (t - T) \end{aligned}$$

also

$$\frac{dII}{da} = -\frac{a'^i}{2ah^{2i-1}} \left\{ (2i-1) \int V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} d\varphi + \frac{3}{h^2} V^{(0)} (1 + e \cos \varphi)^{i-1} (t - T) \right\}$$

will, auf ihre ersten Glieder reduciren. Die Rechnung wird dadurch etwas erleichtert, während der Verlust an Genauigkeit, wenigstens für den zum Beispiele gewählten Fall, unbedeutend ist. Ich werde daher:

$$V^{(0)} = 1$$

$$V^{(1)} = -\frac{3}{2} e' p$$

$$V^{(2)} = \frac{1}{4} \{ 3(pp + qq) - 2 \}$$

$$V^{(3)} = -\frac{15}{16} e' p \{ 5(pp + qq) - 4 \}$$

$$V^{(4)} = \frac{3}{64} \{ 35(pp + qq)^2 - 40(pp + qq) + 8 \}$$

$$V^{(5)} = -\frac{105}{128} e' p \{ 21(pp + qq)^2 - 28(pp + qq) + 8 \}$$

setzen, wo

$$p = \cos(\omega + \varphi) \cos \omega' + \sin(\omega + \varphi) \sin \omega' \cos I$$

$$pp + qq = 1 - \sin(\omega + \varphi)^2 \sin I^2$$

sind, so dass man auch schreiben kann:

$$V^{(0)} = 1$$

$$V^{(1)} = -\frac{3}{2} \epsilon' p$$

$$V^{(2)} = \frac{1}{4} \{1 - 3 \sin(\omega + \varphi)^2 \sin I^2\}$$

$$V^{(3)} = -\frac{15}{16} \epsilon' p \{1 - 5 \sin(\omega + \varphi)^2 \sin I^2\}$$

$$V^{(4)} = \frac{3}{64} \{3 - 30 \sin(\omega + \varphi)^2 \sin I^2 + 85 \sin(\omega + \varphi)^4 \sin I^4\}$$

$$V^{(5)} = -\frac{105}{128} \epsilon' p \{1 - 14 \sin(\omega + \varphi)^2 \sin I^2 + 21 \sin(\omega + \varphi)^4 \sin I^4\}$$

Bezeichnet man

$$\delta I = \frac{m' a' i}{h^2 i \sin I} \left\{ \cos I \cdot \frac{dW^{(0)}}{d\omega} + \frac{dW^{(0)}}{d\omega'} \right\}$$

$$\delta N = \frac{m' a' i}{h^2 i \sin I} \cdot \frac{dW^{(0)}}{dI}$$

$$\delta \frac{1}{2a} = -m' \cdot \frac{a' i V^{(0)}}{r^2 + 1}$$

$$\delta h = \frac{m' a' i}{h^2 i - 1} \cdot \frac{dW^{(0)}}{d\omega}$$

$$\cos I \delta N + \delta \omega = \frac{m' a' i}{h^2 i \epsilon \epsilon'} \left\{ (i - 1 + i \epsilon \epsilon) W^{(0)} - (i - 1) (1 - \epsilon \epsilon) Y^{(0)} + \frac{\epsilon h^{2i-2}}{r^{i-1}} V^{(0)} (2 + \epsilon \cos \varphi) \sin \varphi \right\}$$

$$\delta T - a h \left\{ \cos I \delta N + \delta \omega \right\} = \frac{-m' a' i a}{h^{2i-1}} \left\{ (2i - 1) W^{(0)} + \frac{3 h^{2i-1} V^{(0)}}{r^{i+1}} (t - T) \right\}$$

Die Ausdrücke von $W^{(0)}$ und $Y^{(0)}$ findet man, durch Ausführung der angedeuteten Integrationen, folgendermassen:

$$W^{(0)} = \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon \epsilon}} = \frac{t - T}{ah} + \frac{\epsilon r \sin \varphi}{hh}$$

$$W^{(1)} = -\frac{3}{2} \epsilon' \left\{ \sin(\omega + \varphi) \cos \omega' - \cos(\omega + \varphi) \sin \omega' \cos I \right\}$$

$$W^{(2)} = \frac{1}{8} \left\{ (2 - 3 \sin I^2) (\varphi + \epsilon \sin \varphi) + \frac{3}{2} \sin I^2 \cdot F \right\}$$

$$W^{(3)} = -\frac{15}{64} \epsilon' \left\{ [(4 - 5 \sin I^2) G + 5 \sin I^2 H] \cos \omega' - [(4 - 15 \sin I^2) G' + 5 \sin I^2 H'] \sin \omega' \cos I \right\}$$

u. s. w.

$$Y^{(0)} = \frac{t - T}{h^2}$$

$Y^{(1)}$ = wird nicht gebraucht.

$$Y^{(2)} = \frac{1}{8} \left\{ (2 - 3 \sin I^2) \varphi + \frac{3}{2} \sin I^2 \sin(2\omega + 2\varphi) \right\}$$

$$Y^{(3)} = -\frac{15}{64} \epsilon' \left\{ [(4 - 5 \sin I^2) K + 5 \sin I^2 L] \cos \omega' - [(4 - 15 \sin I^2) K' + 5 \sin I^2 L'] \sin \omega' \cos I \right\}$$

u. s. w.

in welchen Formeln die eingeführten Bezeichnungen folgende Bedeutungen haben:

$$F = \epsilon \sin(2\omega + \varphi) + \sin(2\omega + 2\varphi) + \frac{\epsilon}{3} \sin(2\omega + 3\varphi)$$

$$F' = \epsilon \cos(2\omega + \varphi) + \cos(2\omega + 2\varphi) + \frac{\epsilon}{3} \cos(2\omega + 3\varphi)$$

$$\int \frac{V^{(0)} d\varphi}{1 + \epsilon \cos \varphi} = W^{(0)} \quad \int \frac{V^{(0)} d\varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2} = Y^{(0)}$$

$$\int V^{(1)} d\varphi = W^{(1)} \quad \int \frac{V^{(1)} d\varphi}{1 + \epsilon \cos \varphi} = Y^{(1)}$$

$$\int V^{(2)} (1 + \epsilon \cos \varphi) d\varphi = W^{(2)} \quad \int V^{(2)} d\varphi = Y^{(2)}$$

$$\int V^{(3)} (1 + \epsilon \cos \varphi)^2 d\varphi = W^{(3)} \quad \int V^{(3)} (1 + \epsilon \cos \varphi) d\varphi = Y^{(3)}$$

so ist

$$R = -m' \left\{ \frac{V^0}{r} + \frac{a' V^{(1)}}{r^2} + \frac{a'^2 V^{(2)}}{r^3} + \dots \right\}$$

$$m' II = -m' \left\{ h W^{(0)} + \frac{a'}{h} W^{(1)} + \frac{a'^2}{h^2} W^{(2)} + \dots \right\}$$

und man hat die Aenderungen der Elemente der Cometenbahn während einer unbestimmten Zeit, durch die für alle ganze positive Werthe von i , 0 eingeschlossen, zu nehmenden Ausdrücke (§ 9 und 11)

$$G = -\frac{e\epsilon}{4} \sin(\omega - \varphi) + e \cos \omega \cdot \varphi + \left(1 + \frac{e\epsilon}{2}\right) \sin(\omega + \varphi) + \frac{e}{2} \sin(\omega + 2\varphi) + \frac{e\epsilon}{12} \sin(\omega + 3\varphi)$$

$$G' = -\frac{e\epsilon}{4} \cos(\omega - \varphi) - e \sin \omega \cdot \varphi + \left(1 + \frac{e\epsilon}{2}\right) \cos(\omega + \varphi) + \frac{e}{2} \cos(\omega + 2\varphi) + \frac{e\epsilon}{12} \cos(\omega + 3\varphi)$$

$$H = \frac{e\epsilon}{4} \sin(3\omega + \varphi) + \frac{e}{2} \sin(3\omega + 2\varphi) + \left(\frac{1}{3} + \frac{e\epsilon}{6}\right) \sin(3\omega + 3\varphi) + \frac{e}{4} \sin(3\omega + 4\varphi) + \frac{e\epsilon}{20} \sin(3\omega + 5\varphi)$$

$$H' = \frac{e\epsilon}{4} \cos(3\omega + \varphi) + \frac{e}{2} \cos(3\omega + 2\varphi) + \left(\frac{1}{3} + \frac{e\epsilon}{6}\right) \cos(3\omega + 3\varphi) + \frac{e}{4} \cos(3\omega + 4\varphi) + \frac{e\epsilon}{20} \cos(3\omega + 5\varphi)$$

$$K = \frac{e}{2} \cos \omega \cdot \varphi + \sin(\omega + \varphi) + \frac{e}{4} \sin(\omega + 2\varphi)$$

$$K' = -\frac{e}{2} \sin \omega \cdot \varphi + \cos(\omega + \varphi) + \frac{e}{4} \cos(\omega + 2\varphi)$$

$$L = \frac{e}{4} \sin(3\omega + 2\varphi) + \frac{1}{3} \sin(3\omega + 3\varphi) + \frac{e}{8} \sin(3\omega + 4\varphi)$$

$$L' = \frac{e}{4} \cos(3\omega + 2\varphi) + \frac{1}{3} \cos(3\omega + 3\varphi) + \frac{e}{8} \cos(3\omega + 4\varphi)$$

Die Grösse F' kömmt in den Formeln zwar nicht vor, wird aber später gebraucht. Man bemerkt leicht, dass man hat

$$\frac{dF}{d\omega} = 2F'$$

$$\frac{dF'}{d\omega} = -2F$$

$$\frac{dG}{d\omega} = G$$

$$\frac{dG'}{d\omega} = -G$$

$$\frac{dH}{d\omega} = 3H'$$

$$\frac{dH'}{d\omega} = -3H$$

$$\frac{dK}{d\omega} = K$$

$$\frac{dK'}{d\omega} = -K$$

$$\frac{dL}{d\omega} = 3L'$$

$$\frac{dL'}{d\omega} = -3L$$

Die in den obigen Formeln für δI , δN und δh vorkommenden Differentialquotienten von $W^{(0)}$, $W^{(1)}$, ... findet man hieraus:

$$\frac{1}{\sin I} \left\{ \cos I \cdot \frac{dW^{(0)}}{d\omega} + \frac{dW^{(0)}}{d\omega'} \right\} = 0$$

$$\frac{1}{\sin I} \left\{ \cos I \cdot \frac{dW^{(1)}}{d\omega} + \frac{dW^{(1)}}{d\omega'} \right\} = \frac{3}{2} e' \sin I \sin \omega' \cdot \sin(\omega + \varphi)$$

$$\frac{1}{\sin I} \left\{ \cos I \cdot \frac{dW^{(2)}}{d\omega} + \frac{dW^{(2)}}{d\omega'} \right\} = \frac{3}{8} \sin I \cdot \cos I F'$$

$$\frac{1}{\sin I} \left\{ \cos I \cdot \frac{dW^{(3)}}{d\omega} + \frac{dW^{(3)}}{d\omega'} \right\} = \frac{75}{64} e' \sin I \left\{ \left(\frac{14}{5} - 3 \sin I^2\right) G \sin \omega' - (2 - 3 \sin I^2) H \sin \omega' - 2 \cos I \cos \omega' (G' + H') \right\}$$

u. s. w.

$$\frac{1}{\sin I} \frac{dW^{(0)}}{dI} = 0$$

$$\frac{1}{\sin I} \frac{dW^{(1)}}{dI} = -\frac{3}{2} e' \sin \omega' \cos(\omega + \varphi)$$

$$\frac{1}{\sin I} \frac{dW^{(2)}}{dI} = -\frac{3}{8} \cos I \left\{ 2(\varphi + e \sin \varphi) - F' \right\}$$

$$\frac{1}{\sin I} \frac{dW^{(3)}}{dI} = -\frac{75}{64} e' \left\{ \left(\frac{34}{5} - 9 \sin I^2\right) G' \sin \omega' - (2 - 3 \sin I^2) H' \sin \omega' - 2 \cos I \cos \omega' (G - H) \right\}$$

u. s. w.

$$\frac{dW^{(0)}}{d\omega} = 0$$

$$\frac{dW^{(1)}}{d\omega} = -\frac{3}{2} e' p$$

$$\frac{dW^{(2)}}{d\omega} = \frac{3}{8} \sin I^2 F'$$

$$\frac{dW^{(3)}}{d\omega} = -\frac{75}{64} e' \left\{ \left[\left(\frac{4}{5} - \sin I^2\right) G' + 3 \sin I^2 H'\right] \cos \omega' + \left[\left(\frac{4}{5} - 3 \sin I^2\right) G + 3 \sin I^2 H\right] \cos I \sin \omega' \right\}$$

u. s. w.

13.

Diese Formeln habe ich angewandt, um das oben in Beziehung auf die aus der veränderlichen Stellung der Erde entstehenden Störungen des Halley'schen Cometen verfolgte Beispiel zu vervollständigen. Für den Anfang und das Ende des Integrals sind die Werthe von $t - T = 720$ Tage und 27355,130 Tage, und in der gehörigen Einheit ausgedrückt:

$\log(t - T) =$	1,0929140	2,6726203
ferner	$\varphi = 151^\circ 49' 27,9$	$208^\circ 10' 57,1$
	$lr = 0,8945033$	$0,8945033$
	$\omega = 110^\circ 36' 16,1$	$110^\circ 37' 59,7$
	$\omega' = 45 \quad 0 \quad 11,9$	$45 \quad 11 \quad 19,3$
	$I = 162 \quad 14 \quad 3,8$	$162 \quad 14 \quad 20,1$
	$lc = 8,2246824$	$8,2238584$

Für die Cometenbahn ist $la = 1,2571489$; $lhk = 0,0622775$; $le = 9,9856738$.

Ich habe nur auf die 3 ersten Glieder der Reihe für R Rücksicht genommen, indem das vierte, den Factor $\frac{e}{r^4}$ enthaltende, so wie auch das fünfte, in $\frac{1}{r^4}$ multiplicirte und die folgenden, unbedeutende Einflüsse erhalten. Die Wirkungen dieser drei Glieder auf die Elemente haben sich für den Anfang und für das Ende des Integrals gefunden:

	Anfang.	Ende.
δI	$-0,0127$	$-0,0152$
δN	$+ 0,9220$	$+ 0,9484$
$\delta \frac{1}{2a}$	$- 0,07362$	$- 0,07357$
δh	$- 0,0043$	$- 0,0085$
$\cos I \delta N + \delta \omega$	$+ 1,1708$	$+ 0,6061$
$\delta T - ah \{ \cos I \delta N + \delta \omega \}$	$- 24,688$	$- 1658,339$

Der von der veränderlichen Stellung der Erde unabhängige Theil der Störungen des Halley'schen Cometen ist daher, während der Zeit, über welche die Rechnung sich erstreckt:

$$\begin{aligned} \delta I &= -0,0025 \\ \delta N &= + 0,0264 \\ \delta \frac{1}{2a} &= + 0,00005 \\ \delta h &= - 0,0042 \\ \cos I \delta N + \delta \omega &= - 0,5647 \\ \delta T - ah \{ \cos I \delta N + \delta \omega \} &= - 1633,651 \end{aligned}$$

Die Vereinigung dieses Theils der Störungen mit dem in 8. § gefundenen Theile giebt folgende Bestimmung der vollständigen Wirkung der Erde auf die Elemente der Bahn des Cometen um die Sonne:

$$\begin{aligned} \delta I &= -0,8869 \\ \delta N &= - 2,1426 \\ \delta \frac{1}{2a} &= + 0,49053 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta h &= -1,6381 \\ \cos I \delta N + \delta \omega &= - 0,5824 \\ \delta T - ah \{ \cos I \delta N + \delta \omega \} &= + 4799,82 \end{aligned}$$

Man erhält hieraus:

$$\begin{aligned} \delta \omega &= - 3,0229 \\ \delta T &= + 4780,75 = 1,347381 \text{ Tage.} \end{aligned}$$

Der Einfluss dieser Störungen auf die nächste Durchgangszeit des Cometen durch das Perihel findet sich nach der Formel:

$$\delta T' = \delta T - 3a\delta \frac{1}{2a}$$

und beträgt

$$\delta T' = + 0,77108 \text{ Tage.}$$

Das Beispiel, durch welches ich jetzt die Anwendbarkeit der mitgetheilten Methode gezeigt habe, betrifft die Bewegung des Cometen um die Sonne. Offenbar hätte es eben so gut von seiner Bewegung um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Sonne und des störenden Planeten hergenommen werden können.

Zweiter Abschnitt.

14.

Ich werde der vorigen Auflösung der Aufgabe von der Bestimmung der Störungen der Cometen in weiten Entfernungen derselben von der Sonne noch eine Annäherung an dieselbe hinzufügen, welche eine beträchtlich leichtere und dennoch nur sehr wenig von der Wahrheit abweichende Rechnung gewährt.

LAGRANGE hat gezeigt, dass ein Comet, welcher sehr viel weiter von der Sonne entfernt ist, als der störende Planet, sich um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt des letzteren und der Sonne sehr nahe so bewegt, als würde er allein von der, in diesem Punkte vereinigten Masse beider Körper angezogen. Welcher Theil der Störungen der Bewegung um die Sonne, durch die Annahme dieses veränderlichen Mittelpunkts der Bewegung aus der Betrachtung gebracht wird und welcher noch zu berücksichtigen ist, wird aus den Differentialgleichungen für die auf diesen Punkt bezogenen Coordinaten sichtbar.

Bezeichnet man die auf die Sonne bezogenen Coordinaten des Cometen durch x, y, z , des störenden Planeten durch x', y', z' und setzt man:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ \rho &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \end{aligned}$$

so sind, bekanntlich, die Differentialgleichungen für x, y, z :

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} + m' \left\{ \frac{x'}{r'^3} + \frac{x-x'}{q^3} \right\}$$

$$0 = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} + m' \left\{ \frac{y'}{r'^3} + \frac{y-y'}{q^3} \right\}$$

$$0 = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3} + m' \left\{ \frac{z'}{r'^3} + \frac{z-z'}{q^3} \right\}$$

Hieraus erhält man die Differentialgleichungen für die in dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte der Sonne und des störenden Planeten anfangenden Coordinaten x, y, z , wenn man

$$x = x_0 + \frac{m'}{1+m} x'$$

$$y = y_0 + \frac{m'}{1+m} y'$$

$$z = z_0 + \frac{m'}{1+m} z'$$

und

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

$$r = \sqrt{\left(x_0 + \frac{m'}{1+m} x'\right)^2 + \left(y_0 + \frac{m'}{1+m} y'\right)^2 + \left(z_0 + \frac{m'}{1+m} z'\right)^2}$$

$$q = \sqrt{\left(x_0 - \frac{x'}{1+m}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{y'}{1+m}\right)^2 + \left(z_0 - \frac{z'}{1+m}\right)^2}$$

einführt und die Differentialgleichungen für die Coordinaten des störenden Planeten zur Fortschaffung der zweiten Differentialquotienten derselben anwendet:

$$0 = \frac{d^2x'}{dt^2} + (1+m') \frac{x'}{r'^3}$$

$$+ \left(x_0 + \frac{m'}{1+m} x'\right) \frac{1}{r^3} - (1+m') \frac{x'}{r'^3} + \left(m'x_0 + \frac{m'}{1+m} x'\right) \frac{1}{q^3}$$

und ähnlich für y , und z . Wenn man

$$R = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} + m' \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{q} \right)$$

einführt, so lassen diese Gleichungen sich folgendermassen ausdrücken:

$$0 = \frac{d^2x'}{dt^2} + (1+m') \frac{x'}{r'^3} + \frac{dR}{dx'}$$

$$0 = \frac{d^2y'}{dt^2} + (1+m') \frac{y'}{r'^3} + \frac{dR}{dy'}$$

$$0 = \frac{d^2z'}{dt^2} + (1+m') \frac{z'}{r'^3} + \frac{dR}{dz'}$$

Wenn man R , nach den Potenzen von $\frac{1}{r'}$ entwickelt, so findet man, dass die Entwicklung mit dem Cubus dieses Bruches anfängt, während die ähnliche, für die Bewegung um die Sonne anzuwendende Grösse R schon $\frac{1}{r}$ selbst enthält. Durch die Beziehung der Bewegung des Cometen auf den gemeinschaftlichen Schwerpunkt gehen also die beiden ersten Potenzen von $\frac{1}{r'}$ verloren.

Die hieraus, in dem Falle einer grossen Entfernung des Cometen von der Sonne, folgende Verkleinerung der störenden Kraft und daher auch der Störungen, ist der Gewinn, welchen diese Umänderung des Anfangspunktes der Coordinaten gewährt. Wenn R , nach den Potenzen von $\frac{1}{r'}$ entwickelt und die Einwirkung jedes Gliedes dieser Entwickelung auf die Elemente des Cometen bestimmt wird, so ist die Summe aller dieser Einwirkungen die Verbesserung, welche den constanten Elementen der um den Schwerpunkt beschriebenen Bahn noch hinzuzufügen ist. Von dieser vollständigen Verbesserung werde ich jetzt den Theil aufsuchen, welcher aus dem ersten, in $\frac{1}{r'}$ multiplicirten Gliede von R , hervorgeht.

Wenn man, um abzukürzen, r, P für $x, x' + y, y' + z, z'$ schreibt, so hat man

$$\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} = \frac{m'}{1+m} \frac{P}{r'^2} - \left(\frac{m'}{1+m} \right)^2 \frac{3(P^2 - r'^2)}{2r'^3}$$

$$\frac{1}{r_0} - \frac{1}{q} = -\frac{1}{1+m} \frac{P}{r'^2} - \frac{1}{(1+m)^2} \frac{3(P^2 - r'^2)}{2r'^3}$$

woraus der Theil von R , welcher jetzt betrachtet werden soll:

$$R_1 = -\frac{m'}{1+m} \frac{3P^2 - r'^2}{2r'^3}$$

hervorgeht.

15.

Aus dem unbestimmten Integrale

$$\int R, dt$$

gehen, durch seine Differentiirung in Beziehung auf die Elemente, die Aenderungen der Elemente, nach den Formeln § 9, hervor. Wenn man R , in die Reihe (§ 1):

$$p + p^{(1)} \cos n't + p^{(2)} \cos 2n't + \text{etc.} \dots$$

$$+ q^{(1)} \sin n't + q^{(2)} \sin 2n't + \text{etc.} \dots$$

entwickelt und

$$fR, dt = f p dt + P^{(1)} \cos n't + P^{(2)} \cos 2n't + \text{etc.} \dots$$

$$+ Q^{(1)} \sin n't + Q^{(2)} \sin 2n't + \text{etc.} \dots$$

setzt, so werden $P^{(1)}, Q^{(1)}; P^{(2)}, Q^{(2)}; \dots$ nach den Formeln (§ 1) durch $p^{(1)}, q^{(1)}; p^{(2)}, q^{(2)}; \dots$ und ihre in Beziehung auf die Zeit genommenen Differentialquotienten ausgedrückt. Man muss daher, um dieses Integral, mit Ausnahme seines von $n't$ unabhängigen Gliedes, zu finden, zuerst $p^{(1)}, q^{(1)}; p^{(2)}, q^{(2)}; \dots$ und dann ihre Differentialquotienten aufsuchen.

Nach den Bezeichnungen § 10 ist:

$$P = a' \left\{ p (\cos \epsilon' - \epsilon) + q \sqrt{1 - \epsilon'^2} \sin \epsilon' \right\}$$

wo p und q die dort angegebenen, von der wahren Anomalie des Cometen φ und der gegenseitigen Lage

$$R = -\frac{m}{1+m} \frac{a' a''}{2r^3} \left\{ 3p^2 (\cos \varepsilon' - \varepsilon'')^2 + 3q^2 (1 - \varepsilon' \varepsilon'') \sin \varepsilon'' - (1 - \varepsilon' \cos \varepsilon'')^2 + 6pq \sqrt{1 - \varepsilon' \varepsilon''} (\cos \varepsilon' - \varepsilon'') \sin \varepsilon' \right\}$$

zuerst nach den Cosinussen und Sinussen der mittleren Anomalie des störenden Planeten und ihrer Vielfachen zu entwickeln.

Diese Entwicklung erhält man durch die Methode, welche ich in einer, unter den Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaften für 1824 erschienenen Abhandlung mitgeteilt habe.*) Ich habe daselbst gezeigt, dass die Entwicklung von $r^m \cos m\varepsilon$ und $r^m \sin m\varepsilon$, immer, wenn n und m ganze, positive Zahlen sind, auf eine transcendente Function:

$$I_{\frac{1}{2}}^k = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^k}{\pi k} \left\{ 1 - \frac{1}{k+1} \left(\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 (k+1)(k+2)} \left(\frac{k}{2}\right)^4 - \text{etc.} \dots \right\}$$

$$2\pi C^{(0)} = \int_0^{2\pi} E d n' t = \int_0^{2\pi} E (1 - \varepsilon' \cos \varepsilon') d\varepsilon'$$

$$2\pi C^{(1)} = \int_0^{2\pi} E \cos i n' t \cdot d n' t = \int_0^{2\pi} E \cos (i\varepsilon' - i\varepsilon' \sin \varepsilon') (1 - \varepsilon' \cos \varepsilon') d\varepsilon'$$

$$2\pi S^{(1)} = \int_0^{2\pi} E \sin i n' t \cdot d n' t = \int_0^{2\pi} E \sin (i\varepsilon' - i\varepsilon' \sin \varepsilon') (1 - \varepsilon' \cos \varepsilon') d\varepsilon'$$

$C^{(0)}$ hat, wie hieraus hervorgeht, einen endlichen algebraischen Ausdruck; die übrigen Coefficienten hängen entweder von der Transcendente $I_{\frac{1}{2}}^k$ ab, oder sie verschwinden.

$$\begin{aligned} 2\pi C^{(1)} &= \int_0^{2\pi} (\cos \varepsilon' - \varepsilon')^2 \cos (i\varepsilon' - i\varepsilon' \sin \varepsilon') (1 - \varepsilon' \cos \varepsilon') d\varepsilon' \\ &= \frac{2}{i} \int_0^{2\pi} (\cos \varepsilon' - \varepsilon') \sin (i\varepsilon' - i\varepsilon' \sin \varepsilon') \sin \varepsilon' d\varepsilon' \\ &= \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} (\cos \varepsilon' - \varepsilon') \left\{ \cos [(i-1)\varepsilon' - i\varepsilon' \sin \varepsilon'] - \cos [(i+1)\varepsilon' - i\varepsilon' \sin \varepsilon'] \right\} d\varepsilon'; \end{aligned}$$

Schreibt man statt $\cos \varepsilon' - \varepsilon'$, im ersten Gliede,

$$\frac{i-1-i'\varepsilon'}{i\varepsilon'} - \frac{i-1-i'\varepsilon' \cos \varepsilon'}{i\varepsilon'},$$

und im zweiten

$$\frac{i+1-i'\varepsilon'}{i\varepsilon'} - \frac{i+1-i'\varepsilon' \cos \varepsilon'}{i\varepsilon'},$$

so bleiben, bei der Integration, nur die ersten, $\cos \varepsilon'$ nicht enthaltenden Theile übrig und man erhält unmittelbar:

$$-\frac{2}{i} \int_0^{2\pi} \cos \varepsilon' \sin (i\varepsilon' - i\varepsilon' \sin \varepsilon') \sin \varepsilon' d\varepsilon' = -\frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \cos \varepsilon' \left\{ \cos [(i-1)\varepsilon' - i\varepsilon' \sin \varepsilon'] - \cos [(i+1)\varepsilon' - i\varepsilon' \sin \varepsilon'] \right\} d\varepsilon'$$

*) [vgl. die folg. Abb. 16.]

beider Bahnen abhängigen Grössen bezeichnen. Man hat also

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos (h\varepsilon - k \sin \varepsilon) d\varepsilon$$

in welcher Ph die Gaussische Bezeichnung für 1.2... h ist, zurückgeführt werden kann, deren Ausdruck durch ein bestimmtes Integral

$$\begin{aligned} E &= C^{(0)} + 2C^{(1)} \cos n't + 2C^{(2)} \cos 2n't + \dots \\ &+ 2S^{(1)} \sin n't + 2S^{(2)} \sin 2n't + \dots \end{aligned}$$

so hat man die Ausdrücke der Coefficienten:

Für die erste der zu entwickelnden Grössen $(\cos \varepsilon' - \varepsilon')$ ist

$$C^{(0)} = \frac{1}{2} + 2\varepsilon'$$

und alle S verschwinden offenbar. Man hat aber, durch theilweise Integration von 0 bis 2π :

$$C^{(1)} = \frac{i-1-i'\varepsilon'}{ii'\varepsilon'} I_{i\varepsilon'}^{i-1} - \frac{i+1-i'\varepsilon'}{ii'\varepsilon'} I_{i\varepsilon'}^{i+1}$$

Für die zweite Grösse $(1 - \varepsilon' \cos \varepsilon')$ ist:

$$C^{(0)} = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon' \varepsilon')$$

und alle S verschwinden ebenfalls. Den Ausdruck von $C^{(1)}$

$$\frac{2\pi C^{(1)}}{1 - \varepsilon' \varepsilon'} = \int_0^{2\pi} \sin \varepsilon'' \cos (i\varepsilon' - i\varepsilon' \sin \varepsilon') (1 - \varepsilon' \cos \varepsilon') d\varepsilon'$$

verwandelt man durch theilweise Integration in:

welcher, da

$$\cos \epsilon' = \frac{i-1}{ie'} - \frac{i-1-i\epsilon'\cos \epsilon'}{ie'} = \frac{i+1}{ie'} - \frac{i+1-i\epsilon'\cos \epsilon'}{ie'}$$

geschrieben werden kann, unmittelbar

$$C^{(0)} = \left\{ -\frac{i-1}{ie'} I_{ie'}^{i-1} + \frac{i+1}{ie'} I_{ie'}^{i+1} \right\} (1 - \epsilon' \epsilon')$$

ergiebt.

$$-\frac{2\epsilon'}{i} \int_0^{2\pi} (1 - \epsilon' \cos \epsilon') \sin(i\epsilon' - i\epsilon' \sin \epsilon') \sin \epsilon' d\epsilon'$$

$$= -\frac{\epsilon'}{i} \int_0^{2\pi} (1 - \epsilon' \cos \epsilon') \left\{ \cos[(i-1)\epsilon' - i\epsilon' \sin \epsilon'] - \cos[(i+1)\epsilon' - i\epsilon' \sin \epsilon'] \right\} d\epsilon'$$

und ergiebt, indem

$$1 - \epsilon' \cos \epsilon' = \frac{1}{i} + \frac{i-1-i\epsilon'\cos \epsilon'}{ie'} = -\frac{1}{i} + \frac{i+1-i\epsilon'\cos \epsilon'}{ie'}$$

ist,

$$C^{(0)} = -\frac{\epsilon'}{11} I_{ie'}^{i-1} - \frac{\epsilon'}{11} I_{ie'}^{i+1}$$

Die vierte der zu entwickelnden Grössen

$$\frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \cos(i\epsilon' - i\epsilon' \sin \epsilon') d\left\{ (\cos \epsilon' - \epsilon') \sin \epsilon' \right\} = \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \cos(i\epsilon' - i\epsilon' \sin \epsilon') (2 \cos \epsilon'^2 - 1 - \epsilon' \cos \epsilon') d\epsilon'$$

$$= \frac{1}{ie'\epsilon'} \int_0^{2\pi} \cos(i\epsilon' - i\epsilon' \sin \epsilon') \left\{ 2(1 - \epsilon' \epsilon') - (4 - \epsilon' \epsilon')(1 - \epsilon' \cos \epsilon') + 2(1 - \epsilon' \cos \epsilon')^2 \right\} d\epsilon'$$

Das erste der in der Klammer enthaltenen Glieder giebt

$$\frac{2(1 - \epsilon' \epsilon')}{ie'\epsilon'} 2\pi I_{ie'}^i;$$

das zweite verschwindet aus dem Integrale; das dritte kann durch theilweise Integration in

$$\frac{-2}{ie'\epsilon'} \int_0^{2\pi} \sin(i\epsilon' - i\epsilon' \sin \epsilon') \sin \epsilon' d\epsilon'$$

$$= \frac{-1}{ie'\epsilon'} \int_0^{2\pi} \left\{ \cos[(i-1)\epsilon' - i\epsilon' \sin \epsilon'] - \cos[(i+1)\epsilon' - i\epsilon' \sin \epsilon'] \right\} d\epsilon'$$

$$= \frac{-1}{ie'\epsilon'} 2\pi \left\{ I_{ie'}^{i-1} - I_{ie'}^{i+1} \right\}$$

verwandelt werden. Man hat daher

$$\frac{S^{(0)}}{\sqrt{1 - \epsilon' \epsilon'}} = \frac{2(1 - \epsilon' \epsilon')}{ie'\epsilon'} I_{ie'}^i - \frac{1}{ie'\epsilon'} \left\{ I_{ie'}^{i-1} - I_{ie'}^{i+1} \right\};$$

$$= -\frac{m'}{1+m'} \frac{a'a'}{r_s^3} \frac{1}{ie'\epsilon'} \left\{ 3p^2 \left\{ (i-1-i\epsilon'\epsilon') I_{ie'}^{i-1} - (i+1-i\epsilon'\epsilon') I_{ie'}^{i+1} \right\} - 3q^2 \left\{ (i-1) I_{ie'}^{i-1} - (i+1) I_{ie'}^{i+1} \right\} (1 - \epsilon' \epsilon') + \epsilon' \epsilon' \left\{ I_{ie'}^{i-1} + I_{ie'}^{i+1} \right\} \right\};$$

das in $\sin i n't$ multiplicirt:

$$= -\frac{m'}{1+m'} \frac{a'a'}{r_s^3} \frac{\sqrt{1 - \epsilon' \epsilon'}}{ie'\epsilon'} 6pq \left\{ (i-1-i\epsilon'\epsilon') I_{ie'}^{i-1} + (i+1-i\epsilon'\epsilon') I_{ie'}^{i+1} \right\}$$

Bezeichnet man das erstere durch

$$-\frac{m'}{1+m'} \frac{a'a'}{r_s^3} \left\{ A^{(0)} p^2 + B^{(0)} q^2 + C^{(0)} \right\};$$

Für die dritte Grösse $(1 - \epsilon' \cos \epsilon')^2$ findet man

$$C^{(0)} = 1 + \frac{4}{3} \epsilon' \epsilon'$$

und alle S verschwindend. Für $C^{(0)}$ verwandelt sich der Ausdruck

$$2\pi C^{(0)} = \int_0^{2\pi} \cos(i\epsilon' - i\epsilon' \sin \epsilon') (1 - \epsilon' \cos \epsilon')^2 d\epsilon',$$

durch theilweise Integration in

$$\sqrt{1 - \epsilon' \epsilon'} (\cos \epsilon' - \epsilon') \sin \epsilon'$$

enthält offenbar keine Cosinusse, sondern nur Sinusse der mittleren Anomalie. Der Ausdruck von $S^{(0)}$, nämlich

$$\frac{2\pi S^{(0)}}{\sqrt{1 - \epsilon' \epsilon'}} = \int_0^{2\pi} (\cos \epsilon' - \epsilon') \sin \epsilon' \sin(i\epsilon' - i\epsilon' \sin \epsilon') (1 - \epsilon' \cos \epsilon') d\epsilon'$$

verwandelt sich, durch theilweise Integration, in:

oder da

$$0 = \epsilon' I_{ie'}^{i-1} - 2 I_{ie'}^i + \epsilon' I_{ie'}^{i+1}$$

ist,

$$S^{(0)} = \left\{ \frac{i-1-i\epsilon'\epsilon'}{ie'\epsilon'} I_{ie'}^{i-1} + \frac{i+1-i\epsilon'\epsilon'}{ie'\epsilon'} I_{ie'}^{i+1} \right\} \sqrt{1 - \epsilon' \epsilon'}$$

16.

Setzt man die gefundenen Theile des Ausdruckes von R' zusammen, so erhält man sein von der mittleren Anomalie des störenden Planeten unabhängiges Glied:

$$= -\frac{m'}{1+m'} \frac{a'a'}{4r_s^3} \left\{ 3p^2(1+4\epsilon'\epsilon') + 3q^2(1-\epsilon'\epsilon') - (2+3\epsilon'\epsilon') \right\};$$

das in $\cos i n't$ multiplicirt:

$$\text{das andere durch } -\frac{m'}{1+m'} \frac{a'a'}{r_s^3} D^{(0)} 2pq,$$

so ist

$$R = -\frac{m'}{1+m} \frac{a'a'}{r^2} \left\{ A^{(0)}p^2 + B^{(0)}q^2 + C^{(0)} + (A^{(1)}p^2 + B^{(1)}q^2 + C^{(1)}) \cos n't + (A^{(2)}p^2 + B^{(2)}q^2 + C^{(2)}) \cos 2n't + \dots + D^{(1)}2pq \sin n't + D^{(2)}2pq \sin 2n't + \dots \right\}$$

Die Coefficienten der niedrigeren Glieder dieses Ausdrucks werde ich hier anführen, auch ihnen den Anfang ihrer Entwicklungen, bis zu ϵ^4 excl. beischreiben:

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= \frac{3}{4}(1 + 4\epsilon\epsilon') \dots\dots\dots \frac{3}{4} + 3\epsilon\epsilon' \\ A^{(1)} &= -3\epsilon I_{2\epsilon}' - \frac{3(2-\epsilon\epsilon')}{\epsilon} I_{2\epsilon}'' \dots\dots\dots -\frac{15}{4}\epsilon + \frac{19}{16}\epsilon^3 \\ A^{(2)} &= \frac{3(1-2\epsilon\epsilon')}{4\epsilon} I_{2\epsilon}' - \frac{3(3-2\epsilon\epsilon')}{4\epsilon} I_{2\epsilon}'' \dots\dots\dots \frac{3}{4} - \frac{9}{4}\epsilon\epsilon' \\ A^{(3)} &= \frac{3(2-3\epsilon\epsilon')}{9\epsilon} I_{2\epsilon}' - \frac{3(4-3\epsilon\epsilon')}{9\epsilon} I_{2\epsilon}'' \dots\dots\dots \frac{3}{4}\epsilon' - \frac{63}{32}\epsilon^3 \\ A^{(4)} &= \frac{3(3-4\epsilon\epsilon')}{16\epsilon} I_{2\epsilon}' - \frac{3(6-4\epsilon\epsilon')}{16\epsilon} I_{2\epsilon}'' \dots\dots\dots \frac{3}{4}\epsilon\epsilon' \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} B^{(0)} &= \frac{3}{4}(1 - \epsilon\epsilon') \dots\dots\dots \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\epsilon\epsilon' \\ B^{(1)} &= 3 \cdot \frac{(1-\epsilon\epsilon')}{\epsilon} \cdot 2 I_{2\epsilon}' \dots\dots\dots \frac{3}{4}\epsilon' - \frac{13}{16}\epsilon^3 \\ B^{(2)} &= -3 \cdot \frac{(1-\epsilon\epsilon')}{4\epsilon} \left\{ I_{2\epsilon}' - 3 I_{2\epsilon}'' \right\} \dots\dots\dots -\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\epsilon\epsilon' \\ B^{(3)} &= -3 \cdot \frac{(1-\epsilon\epsilon')}{9\epsilon} \left\{ 2 I_{2\epsilon}' - 4 I_{2\epsilon}'' \right\} \dots\dots\dots -\frac{3}{4}\epsilon' + \frac{51}{32}\epsilon^3 \\ B^{(4)} &= -3 \cdot \frac{(1-\epsilon\epsilon')}{16\epsilon} \left\{ 3 I_{2\epsilon}' - 5 I_{2\epsilon}'' \right\} \dots\dots\dots -\frac{3}{4}\epsilon\epsilon' \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} C^{(0)} &= -\frac{1}{4}(2 + 3\epsilon\epsilon') \dots\dots\dots -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\epsilon\epsilon' \\ C^{(1)} &= \epsilon \cdot (I_{2\epsilon}' + I_{2\epsilon}'') = 2 I_{2\epsilon}' \dots\dots\dots \epsilon' - \frac{1}{8}\epsilon^3 \\ C^{(2)} &= \frac{\epsilon}{4} (I_{2\epsilon}' + I_{2\epsilon}'') = \frac{2}{4} I_{2\epsilon}' \dots\dots\dots \frac{1}{4}\epsilon\epsilon' \\ C^{(3)} &= \frac{\epsilon}{9} (I_{2\epsilon}' + I_{2\epsilon}'') = \frac{2}{9} I_{2\epsilon}' \dots\dots\dots \frac{1}{8}\epsilon^3 \\ C^{(4)} &= \frac{\epsilon}{16} (I_{2\epsilon}' + I_{2\epsilon}'') = \frac{2}{16} I_{2\epsilon}' \dots\dots\dots 0 \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} D^{(1)} &= 3\sqrt{1-\epsilon\epsilon'} \left\{ -\epsilon I_{2\epsilon}' + \frac{2-\epsilon\epsilon'}{\epsilon} I_{2\epsilon}'' \right\} \dots\dots\dots -\frac{9}{4}\epsilon' + \frac{23}{16}\epsilon^3 \\ D^{(2)} &= 3\sqrt{1-\epsilon\epsilon'} \left\{ \frac{1-2\epsilon\epsilon'}{\epsilon} I_{2\epsilon}' + \frac{3-2\epsilon\epsilon'}{\epsilon} I_{2\epsilon}'' \right\} \dots\dots\dots \frac{3}{4} - \frac{15}{8}\epsilon\epsilon' \\ D^{(3)} &= 3\sqrt{1-\epsilon\epsilon'} \left\{ \frac{2-3\epsilon\epsilon'}{\epsilon} I_{2\epsilon}' + \frac{4-3\epsilon\epsilon'}{\epsilon} I_{2\epsilon}'' \right\} \dots\dots\dots \frac{3}{4}\epsilon' - \frac{57}{32}\epsilon^3 \\ D^{(4)} &= \frac{3\sqrt{1-\epsilon\epsilon'}}{16} \left\{ \frac{3-4\epsilon\epsilon'}{\epsilon} I_{2\epsilon}' + \frac{5-4\epsilon\epsilon'}{\epsilon} I_{2\epsilon}'' \right\} \dots\dots\dots \frac{3}{4}\epsilon\epsilon' \end{aligned}$$

u. s. w.

17.

Aus einem Gliede dieser Entwicklung von R ;

$$-\frac{m'}{1+m} a'a' \left\{ \frac{A^{(0)}p^2 + B^{(0)}q^2 + C^{(0)}}{r^2} \cos i n't + D^{(0)} \frac{2pq}{r^2} \sin i n't \right\}$$

oder nach der Bezeichnung des 1. §:

$$-\frac{m'}{1+m} a'a' \left\{ p^{(0)} \cos i n't + q^{(0)} \sin i n't \right\},$$

erhält man das entsprechende Glied von fR, dt

$$-\frac{m'}{1+m} a'a' \left\{ P^{(0)} \cos i n't + Q^{(0)} \sin i n't \right\},$$

wo

$$P^{(0)} = -\frac{q^{(0)}}{in} + \frac{d^2 q^{(0)}}{i^2 n^2 dt^2} - \frac{d^4 q^{(0)}}{i^4 n^4 dt^4} + \dots + \frac{d^p q^{(0)}}{i^p n^p dt^p} - \frac{d^3 p^{(0)}}{i^3 n^3 dt^3} + \dots$$

$$Q^{(0)} = \frac{p^{(0)}}{in} - \frac{d^2 p^{(0)}}{i^2 n^2 dt^2} + \frac{d^4 p^{(0)}}{i^4 n^4 dt^4} - \dots + \frac{d^q q^{(0)}}{i^q n^q dt^q} - \frac{d^3 q^{(0)}}{i^3 n^3 dt^3} + \dots$$

sind. Da alle $p^{(0)}$ und $q^{(0)}$ aus den Producten der vier Grössen

$$\frac{pp}{r^2}, \frac{qq}{r^2}, \frac{2pq}{r^2}, \frac{1}{r^3}$$

in unveränderliche Factoren multiplicirt, bestehen, so ist zur Erfindung von fR, dt nur noch nöthig, dass diese vier Grössen, so oft als erforderlich, in Beziehung auf die Zeit differentiirt werden.

Dieses hat zwar keine Schwierigkeit, allein die Ausdrücke der höheren Differentialquotienten werden so weitläufig, dass sie in der Rechnung sehr lästig werden würden, wenn es nöthig wäre sie anzuwenden. Da aber jede folgende Differentiirung den Exponenten von $\frac{1}{r}$ um eine Einheit vermehrt und da, der Voraussetzung der weiten Entfernung des Cometen von der Sonne zufolge, $\frac{1}{r}$ ein kleiner Bruch ist, so nehmen die Differentialquotienten schnell ab, so dass man schon durch die niedrigeren eine Annäherung erhält. Die Annäherung, welche gegenwärtig verfolgt wird, beruht auf der alleinigen Betrachtung des Anfangsgliedes der Entwicklung von R , nach den Potenzen von $\frac{1}{r}$, welches Glied die 3. Potenz dieser Grösse enthält; das folgende enthält zwar die 4., ist aber, so wie alle eine gerade Potenz von $\frac{1}{r}$ enthaltenden Glieder, in die Excentricität der Bahn des störenden Planeten multiplicirt*) und daher als von einer höhern Ordnung zu betrachten: durch die Vernachlässigung des diesem Gliede folgenden Gliedes wird $\frac{1}{r^5}$ vernachlässigt, weshalb es auch kein

*) Diese Glieder werden nämlich, wenn man $\epsilon' = 0$ setzt, von 0 bis 2π genommene Integrale ungerader Functionen von $\cos \epsilon'$ und $\sin \epsilon'$; sie verschwinden also in diesem Falle und können folglich kein, nicht in ϵ' multiplicirtes Glied enthalten.

Interesse hat, die Glieder dieser Ordnung in den Ausdrücken von $P^{(0)}$ und $Q^{(0)}$ beizubehalten. Man kann daher alle Differentialquotienten, welche über den ersten hinausgehen, vernachlässigen und

$$P^{(0)} = -\frac{q^{(0)}}{i'n} + \frac{dp^{(0)}}{i'n^2 dt}$$

$$Q^{(0)} = \frac{p^{(0)}}{i'n} + \frac{dq^{(0)}}{i'n^2 dt}$$

annehmen, ohne die hier erreichbare Genauigkeit im Wesentlichen zu beeinträchtigen.

Die ersten Differentialquotienten von $p^{(0)}$ und $q^{(0)}$ in Beziehung auf die Zeit sind

$$\frac{dp^{(0)}}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{dp^{(0)}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{3}{r} p^{(0)} \frac{e \sin \varphi}{h} + \frac{dp^{(0)}}{d\varphi} \cdot \frac{h}{r, r},$$

$$\frac{dq^{(0)}}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{dq^{(0)}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{3}{r} q^{(0)} \frac{e \sin \varphi}{h} + \frac{dq^{(0)}}{d\varphi} \cdot \frac{h}{r, r},$$

der letzte Theil derselben ist in die 5. Potenz von $\frac{1}{r}$ multiplicirt und daher ausserhalb der Grenze der hier erreichbaren Annäherung. Man kann also setzen:

$$\frac{dP^{(0)}}{dI} = \left[\frac{2D^{(0)}(p \cos \omega' + q \sin \omega')}{i'n^2 r^3} + \frac{2\lambda(A^{(0)} p \sin \omega' + B^{(0)} q \cos \omega')}{i'n^2 r^3} \right] \sin(\omega + \varphi) \sin I$$

$$\frac{dQ^{(0)}}{dI} = \left[\frac{2\lambda D^{(0)}(p \cos \omega' + q \sin \omega')}{i'n^2 r^3} - \frac{2(A^{(0)} p \sin \omega' + B^{(0)} q \cos \omega')}{i'n^2 r^3} \right] \sin(\omega + \varphi) \sin I$$

Da man

$$\left(\frac{dp}{d\omega} \cos I + \frac{dp}{d\omega'} \right) \sin(\omega + \varphi) = \frac{dp}{dI} \cos(\omega + \varphi) \sin I$$

$$\left(\frac{dq}{d\omega} \cos I + \frac{dq}{d\omega'} \right) \sin(\omega + \varphi) = \frac{dq}{dI} \cos(\omega + \varphi) \sin I$$

hat, so folgt hieraus:

$$\frac{dI^{(0)}}{d\omega} \cos I + \frac{dI^{(0)}}{d\omega'} = \left[\frac{2D^{(0)}(p \cos \omega' + q \sin \omega')}{i'n^2 r^3} + \frac{2\lambda(A^{(0)} p \sin \omega' + B^{(0)} q \cos \omega')}{i'n^2 r^3} \right] \cos(\omega + \varphi) \sin I^2$$

$$\frac{dQ^{(0)}}{d\omega} \cos I + \frac{dQ^{(0)}}{d\omega'} = \left[\frac{2\lambda D^{(0)}(p \cos \omega' + q \sin \omega')}{i'n^2 r^3} - \frac{2(A^{(0)} p \sin \omega' + B^{(0)} q \cos \omega')}{i'n^2 r^3} \right] \cos(\omega + \varphi) \sin I^2$$

Ferner hat man:

$$\frac{dI^{(0)}}{d\omega} = \left[-\frac{2I^{(0)}(pq' + qp')}{i'n^2 r^3} - \frac{2\lambda(A^{(0)} pp' + B^{(0)} qq')}{i'n^2 r^3} \right]$$

$$\frac{dQ^{(0)}}{d\omega} = \left[\frac{-2\lambda D^{(0)}(pq' + qp')}{i'n^2 r^3} + \frac{2(A^{(0)} pp' + B^{(0)} qq')}{i'n^2 r^3} \right]$$

wo p' und q' die in Beziehung auf ω oder φ genommenen Differentialquotienten von p und q , oder

$$p' = -\sin(\omega + \varphi) \cos \omega' + \cos(\omega + \varphi) \sin \omega' \cos I$$

$$q' = \sin(\omega + \varphi) \sin \omega' + \cos(\omega + \varphi) \cos \omega' \cos I$$

$$r^3 p^{(0)'} = A^{(0)} p^2 + B^{(0)} q^2 + C^{(0)}$$

$$r^3 p^{(0)''} = -2A^{(0)} p p' - 2B^{(0)} q q'$$

$$r^3 p_n^{(0)'} = 2A^{(0)} p \sin \omega' + 2B^{(0)} q \cos \omega'$$

und wenn man $\lambda = \tan \psi$ setzt, so erhält man:

$$i'n \cos \psi \frac{dP^{(0)}}{dI} = \left[p_n^{(0)} \sin \psi + q_n^{(0)} \cos \psi \right] \sin(\omega + \varphi) \sin I$$

$$i'n \cos \psi \frac{dQ^{(0)}}{dI} = \left[-p_n^{(0)} \cos \psi + q_n^{(0)} \sin \psi \right] \sin(\omega + \varphi) \sin I$$

$$P^{(0)} = -\frac{q^{(0)}}{i'n} - \frac{p^{(0)}}{i'n^2} \cdot \frac{3e \sin \varphi}{hr}$$

$$Q^{(0)} = \frac{p^{(0)}}{i'n} - \frac{q^{(0)}}{i'n^2} \cdot \frac{3e \sin \varphi}{hr}$$

oder, indem man für $p^{(0)}$ und $q^{(0)}$ ihre Ausdrücke schreibt

$$I^{(0)} = -\frac{D^{(0)} 2pq}{i'n^2 r^3} - \frac{1}{i'n^2 r^3} \left\{ A^{(0)} p^2 + B^{(0)} q^2 + C^{(0)} \right\} \frac{3e \sin \varphi}{hr}$$

$$Q^{(0)} = \frac{1}{i'n} \left\{ \frac{A^{(0)} p^2 + B^{(0)} q^2 + C^{(0)}}{r^3} \right\} - \frac{D^{(0)} 2pq}{i'n^2 r^3} \cdot \frac{3e \sin \varphi}{hr}$$

18.

Die hierdurch erlangte Entwicklung von r, R, dt ergibt die Aenderungen der Elemente der Bahn des Cometen, wenn man sie, nach den Formeln des §. 8, in Beziehung auf die Elemente differentiirt. Dadurch erhält man, wenn man λ für

$$\frac{3e \sin \varphi}{i'n^2 hr},$$

schreibt:

bezeichnen. Endlich ist, wenn $P^{(0)}$ und $Q^{(0)}$ als Functionen von p, q, r , und λ betrachtet werden:

$$\frac{dP^{(0)}}{dr} = -\frac{3}{r} P^{(0)}, \quad \frac{dQ^{(0)}}{dr} = -\frac{3}{r} Q^{(0)}$$

Wenn man daher bezeichnet

$$r^3 q^{(0)} = D^{(0)} 2pq$$

$$r^3 q_n^{(0)} = -2D^{(0)}(pq' + qp')$$

$$r^3 q_n^{(0)'} = 2D^{(0)}(p \cos \omega' + q \sin \omega')$$

$$\begin{aligned}
 i n' \cos \psi \left[\frac{dP^{(i)}}{d\omega} \cos I + \frac{dP^{(i)}}{dr} \right] &= \left[p_n^{(i)} \sin \psi + q_n^{(i)} \cos \psi \right] \cos(\omega + \varphi) \sin I^2 \\
 i n' \cos \psi \left[\frac{dQ^{(i)}}{d\omega} \cos I + \frac{dQ^{(i)}}{dr} \right] &= \left[-p_n^{(i)} \cos \psi + q_n^{(i)} \sin \psi \right] \cos(\omega + \varphi) \sin I^2 \\
 i n' \cos \psi \frac{dP^{(i)}}{d\omega} &= \left[p_n^{(i)} \sin \psi + q_n^{(i)} \cos \psi \right] \\
 i n' \cos \psi \frac{dQ^{(i)}}{d\omega} &= \left[-p_n^{(i)} \cos \psi + q_n^{(i)} \sin \psi \right] \\
 i n' \cos \psi \frac{dP^{(i)}}{dr} &= \left[-p^{(i)} \sin \psi + q^{(i)} \cos \psi \right] \frac{3}{r}, \\
 i n' \cos \psi \frac{dQ^{(i)}}{dr} &= \left[-p^{(i)} \cos \psi + q^{(i)} \sin \psi \right] \frac{3}{r}.
 \end{aligned}$$

Da statt R in den Formeln des 9. §'s hier

$$fR, dt = -\frac{m'}{1+m} a' a' \left[P^{(i)} \cos i n' t + Q^{(i)} \sin i n' t \right]$$

gesetzt werden muss, so erhält man aus denselben:

$$\begin{aligned}
 \delta I &= \frac{m'}{1+m} \frac{a' a'}{h i n' \cos \psi} \left[-p_n^{(i)} \sin(i n' t - \psi) + q_n^{(i)} \cos(i n' t - \psi) \right] \cos(\omega + \varphi) \sin I \\
 \delta N &= \frac{m'}{1+m} \frac{a' a'}{h i n' \cos \psi} \left[-p_n^{(i)} \sin(i n' t - \psi) + q_n^{(i)} \cos(i n' t - \psi) \right] \sin(\omega + \varphi) \\
 \delta \frac{1}{2a} &= \frac{m'}{1+m} \frac{a' a'}{i n' \cos \psi} \left[-\left(\frac{3}{r} p^{(i)} \frac{dr}{dT} + p^{(i)} \frac{d\varphi}{dT} \right) \sin(i n' t - \psi) + \left(\frac{3}{r} q^{(i)} \frac{dr}{dT} + q^{(i)} \frac{d\varphi}{dT} \right) \cos(i n' t - \psi) \right] \\
 &\quad - \frac{m'}{1+m} \frac{a' a'}{i n'} \left[p^{(i)} \cos i n' t + q^{(i)} \sin i n' t \right] \frac{dI}{dT} \\
 \delta h &= \frac{m'}{1+m} \frac{a' a'}{i n' \cos \psi} \left[-p^{(i)} \sin(i n' t - \psi) + q^{(i)} \cos(i n' t - \psi) \right] \\
 \cos I \delta N + \delta \omega &= \frac{m'}{1+m} \frac{a' a' h}{i n' a c \cos \psi} \left[-\left(\frac{3}{r} p^{(i)} \frac{dr}{dc} + p^{(i)} \frac{d\varphi}{dc} \right) \sin(i n' t - \psi) + \left(\frac{3}{r} q^{(i)} \frac{dr}{dc} + q^{(i)} \frac{d\varphi}{dc} \right) \cos(i n' t - \psi) \right] \\
 &\quad - \frac{m'}{1+m} \frac{a' a' h}{i n' a c} \left[p^{(i)} \cos i n' t + q^{(i)} \sin i n' t \right] \frac{dI}{dc} \\
 \delta T - a h \left\{ \cos I \delta N + \delta \omega \right\} &= \frac{m'}{1+m} \frac{2 a' a' a a}{i n' \cos \psi} \left[-\left(\frac{3}{r} p^{(i)} \frac{dr}{da} + p^{(i)} \frac{d\varphi}{da} \right) \sin(i n' t - \psi) + \left(\frac{3}{r} q^{(i)} \frac{dr}{da} + q^{(i)} \frac{d\varphi}{da} \right) \cos(i n' t - \psi) \right] \\
 &\quad - \frac{m'}{1+m} \frac{2 a' a' a a}{i n'} \left[p^{(i)} \cos i n' t + q^{(i)} \sin i n' t \right] \frac{dI}{da}
 \end{aligned}$$

Die in diesen Formeln noch vorkommenden Differentialquotienten haben die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{dT} &= -\frac{e}{h} \sin \varphi & \frac{d\varphi}{dT} &= -\frac{h}{r, r} & \frac{dI}{dT} &= -\frac{3e}{i n' h^2 r} (\cos \varphi + e \cos 2\varphi) \\
 \frac{dr}{dc} &= -a \cos \varphi & \frac{d\varphi}{dc} &= \frac{a(2 + e \cos \varphi) \sin \varphi}{h h} & \frac{dI}{dc} &= -\frac{3a}{i n' h r^2} (\sin \varphi + e \sin 2\varphi) \\
 \frac{dr}{da} &= \frac{r}{a} - \frac{3e}{2ah} \sin \varphi (t - T) & \frac{d\varphi}{da} &= -\frac{3h}{2a r, r} (t - T) & \frac{dI}{da} &= -\frac{3}{2a} \lambda + \frac{3}{2a} (t - T) \frac{dI}{dT}
 \end{aligned}$$

Für i müssen nach und nach die Zahlen 1, 2, 3... gesetzt werden. Da aber die gegenwärtige Annäherung Grössen von der Ordnung $\frac{e}{r^2}$ vernachlässigt, so hat es kein Interesse, die Genauigkeit der Rechnung weiter zu treiben, als bis zu $\frac{e}{r^2}$ incl. Es ist also hinreichend, 1, 2 und 3 für i zu setzen und statt der vollständigen, § 16 angeführten Ausdrücke der Coefficienten, anzunehmen:

$$\begin{aligned}
 A^{(1)} &= -\frac{1}{2} e' & B^{(1)} &= \frac{1}{2} e' & C^{(1)} &= e' & D^{(1)} &= -\frac{1}{2} e' \\
 A^{(2)} &= \frac{1}{2} & B^{(2)} &= -\frac{1}{2} & C^{(2)} &= 0 & D^{(2)} &= \frac{1}{2} \\
 A^{(3)} &= \frac{1}{2} e' & B^{(3)} &= -\frac{1}{2} e' & C^{(3)} &= 0 & D^{(3)} &= \frac{1}{2} e'
 \end{aligned}$$

Dem auf diese Art gefundenen Theile der Störungen des Cometen ist noch der Theil hinzuzufügen, welcher aus dem von $n't$ unabhängigen Gliede von R , hervorgeht. Da dieses Glied, nach der im 11. § angewandten Bezeichnung

$$= -\frac{m' \frac{a'a' r^{(2)}}{r^3}}$$

ist, so wird sein Einfluss auf die Elemente der Cometenbahn durch die Formeln des 12. § angegeben, wenn man darin $i = 2$ setzt.

19.

Der Anwendung dieser Näherung an die Auflösung der Aufgabe muss die Verwandlung der Elemente der Bewegung des Cometen um die Sonne in die Elemente seiner Bewegung um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt vorangehen; nach dieser Anwendung müssen die letzteren Elemente wieder in die ersteren verwandelt werden. Die Herren ARGELANDER und ROSENBERGER haben die hierzu nöthigen Formeln zwar schon angegeben, allein die Ableitung derselben nicht mitgetheilt, weshalb ich dieses, für den Fall, dass man das Quadrat von m' vernachlässigen will, hier thun werde.

Wenn man μ für $\frac{m'}{1+m'}$ schreibt, hat man (§ 14)

$$x = x - \mu x' \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} - \mu \frac{dx'}{dt}$$

$$y = y - \mu y' \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} - \mu \frac{dy'}{dt}$$

$$-\mu \frac{dx'}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathcal{A}I + \frac{d^2x}{dt^2} \mathcal{A}N + \frac{d^2x}{d\omega^2} \mathcal{A}\omega + \frac{d^2x}{dt^2} \mathcal{A}e + \frac{d^2x}{dh} \mathcal{A}h + \frac{d^2x}{dM} \mu + \frac{d^2x}{d\varphi} \mathcal{A}\varphi$$

wo die Differentialquotienten nur in Beziehung auf die ausdrücklich vorkommenden Größen genommen werden. Es kommt nun darauf an, die in diesen 6 Gleichungen vermischten enthaltenen Veränderungen der Elemente von einander zu trennen.

$$x = r \{ \cos N \cos(\omega + \varphi) - \sin N \sin(\omega + \varphi) \cos I \} \quad x' = r' \cos(\omega' + \varphi' + N)$$

$$y = r \{ \sin N \cos(\omega + \varphi) + \cos N \sin(\omega + \varphi) \cos I \} \quad y' = r' \sin(\omega' + \varphi' + N)$$

$$z = r \sin(\omega + \varphi) \sin I \quad z' = 0.$$

Da die gesuchten Aenderungen der Elemente die willkürliche Richtung der Axe der x nicht enthalten können, so kann man die Rechnung dadurch abkürzen, dass man $N=0$ setzt, welches jedoch in den Ausdrücken der Differentialquotienten in Beziehung auf N erst nach der Differentirung geschehen muss. Ich nehme also

$$x = r \cos(\omega + \varphi) \quad x' = r' \cos(\omega' + \varphi')$$

$$y = r \sin(\omega + \varphi) \cos I \quad y' = r' \sin(\omega' + \varphi')$$

$$z = r \sin(\omega + \varphi) \sin I \quad z' = 0$$

und

$$\frac{dx}{dN} = -r \sin(\omega + \varphi) \cos I$$

$$\frac{dy}{dN} = r \cos(\omega + \varphi)$$

$$\frac{dz}{dN} = 0$$

$$z, = z - \mu z' \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt} - \mu \frac{dz'}{dt}$$

Die gesuchten Elemente sind diejenigen, welche statt der sich auf die Sonne und ihre Masse = 1 beziehenden Coordinaten und ihrer Differentialquotienten für eine gegebene Zeit, die sich auf den Schwerpunkt und die Masse $1 + m' = \frac{1}{1-\mu}$ beziehenden ähnlichen Quantitäten angeben. Nimmt man als Elemente der Bewegung um die Sonne I, N, ω, e, h, T und $M = 1$, und als Elemente der Bewegung um den Schwerpunkt $I + \mathcal{A}I, N + \mathcal{A}N, \dots$ und $M = 1 + m' = \frac{1}{1-\mu}$ an und bezeichnet man die Werthe von r und φ , welche in der letzten Hypothese stattfinden, durch $r + \mathcal{A}r$ und $\varphi + \mathcal{A}\varphi$, so hat man für jede der Coordinaten eine Gleichung von der Form:

$$-\mu x' = \frac{dx}{dt} \mathcal{A}I + \frac{dx}{dN} \mathcal{A}N + \frac{dx}{d\omega} \mathcal{A}\omega + \frac{dx}{dr} \mathcal{A}r + \frac{dx}{d\varphi} \mathcal{A}\varphi$$

und für den Differentialquotienten jeder derselben, in dessen Ausdrücke r und T nicht, dagegen aber e, h und M explicite vorkommen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \mathcal{A}e + \frac{d^2x}{dh} \mathcal{A}h + \frac{d^2x}{dM} \mu + \frac{d^2x}{d\varphi} \mathcal{A}\varphi$$

Nimmt man die Axen der x und y in der Ebene der Bahn des störenden Planeten, die erste in der Richtung, von welcher an man die Länge des Knotens N zählt, so hat man:

$$x' = r' \cos(\omega' + \varphi' + N)$$

$$y' = r' \sin(\omega' + \varphi' + N)$$

$$z' = 0.$$

Schreibt man ξ und η für $r \cos(\omega + \varphi)$ und $r \sin(\omega + \varphi)$, so erhält man die 3 ersten Gleichungen:

$$-\mu x' = -\eta \cos I \mathcal{A}N - \eta \mathcal{A}\omega - \frac{\xi}{r} \mathcal{A}r - \eta \mathcal{A}\varphi$$

$$-\mu y' = -\xi \sin I \mathcal{A}I + \xi \mathcal{A}N + \xi \cos I \mathcal{A}\omega + \frac{\eta}{r} \cos I \mathcal{A}r + \xi \cos I \mathcal{A}\varphi$$

$$0 = \eta \cos I \mathcal{A}I - \xi \sin I \mathcal{A}\omega + \frac{\eta}{r} \sin I \mathcal{A}r + \xi \sin I \mathcal{A}\varphi$$

Indem die in Beziehung auf t genommenen Differentialquotienten von ξ und η die Ausdrücke:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{VM}{h} \{ \sin(\omega + \varphi) + e \sin \omega \}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{VM}{h} \{ \cos(\omega + \varphi) + e \cos \omega \}$$

haben, erhält man die 3 letzten Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 -\mu \frac{dx'}{dt} &= -\frac{d\eta}{dt} \cos I \Delta N - \frac{d\eta}{dt} \Delta \omega - \frac{1}{h} \sin \omega \Delta e - \frac{1}{h} \frac{d\xi}{dt} \Delta h + \frac{d\xi}{dt} \frac{\mu}{2} - \frac{\xi}{rh} \Delta \varphi \\
 -\mu \frac{dy'}{dt} &= -\frac{d\eta}{dt} \sin I \Delta I + \frac{d\xi}{dt} \Delta N + \frac{d\xi}{dt} \cos I \Delta \omega + \frac{\cos I}{h} \cos \omega \Delta e - \frac{\cos I}{h} \frac{d\eta}{dt} \Delta h + \frac{d\eta}{dt} \cos I \frac{\mu}{2} - \frac{\eta}{rh} \cos I \Delta \varphi \\
 0 &= \frac{d\eta}{dt} \cos I \Delta I + \frac{d\xi}{dt} \sin I \Delta \omega + \frac{\sin I}{h} \cos \omega \Delta e - \frac{\sin I}{h} \frac{d\eta}{dt} \Delta h + \frac{d\eta}{dt} \sin I \frac{\mu}{2} - \frac{\eta}{rh} \sin I \Delta \varphi
 \end{aligned}$$

Multipliziert man sowohl die 3 ersten, als die 3 letzten Gleichungen in:

$$\begin{vmatrix}
 -\frac{\xi}{r} & \left| \begin{array}{c} -\frac{\eta}{r} \\ +\frac{\xi}{r} \cos I \\ +\frac{\xi}{r} \sin I \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} 0 \\ -\sin I \\ +\cos I \end{array} \right|
 \end{vmatrix}$$

so werden die Summen der Produkte:

$$\begin{aligned}
 \mu \left\{ x' \frac{\xi}{r} + y' \frac{\eta}{r} \cos I \right\} &= -\Delta r \\
 \mu \left\{ x' \frac{\eta}{r} - y' \frac{\xi}{r} \cos I \right\} &= r \left\{ \cos I \Delta N + \Delta \omega + \Delta \varphi \right\} \\
 \mu y' \sin I &= \eta \Delta I - \xi \sin I \Delta N \\
 \mu \left\{ \frac{dx'}{dt} \frac{\xi}{r} + \frac{dy'}{dt} \frac{\eta}{r} \cos I \right\} &= \frac{h}{r} \left\{ \cos I \Delta N + \Delta \omega \right\} - \frac{1}{h} \sin \varphi \Delta e + \frac{1}{h} \frac{dr}{dt} \Delta h - \frac{dr}{dt} \frac{\mu}{2} + \frac{1}{h} \Delta \varphi \\
 \mu \left\{ \frac{dx'}{dt} \frac{\eta}{r} - \frac{dy'}{dt} \frac{\xi}{r} \cos I \right\} &= \frac{dr}{dt} \left\{ \cos I \Delta N + \Delta \omega \right\} + \frac{1}{h} \cos \varphi \Delta e - \frac{1}{r} \Delta h + \frac{h}{r} \frac{\mu}{2} \\
 \mu \frac{dy'}{dt} \sin I &= \frac{d\eta}{dt} \Delta I - \frac{d\xi}{dt} \sin I \Delta N
 \end{aligned}$$

Wenn man für die ersten Glieder dieser Gleichungen $\mu A, \mu B, \mu C, \mu A', \mu B', \mu C'$, und für Δr seinen Ausdruck durch $\Delta h, \Delta e$ und $\Delta \varphi$ schreibt, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \mu A &= +\frac{rr}{hh} \cos \varphi \Delta e - \frac{2r}{h} \Delta h - \frac{rr}{h} \frac{dr}{dt} \Delta \varphi \\
 \mu B &= r \left\{ \cos I \Delta N + \Delta \omega \right\} + r \Delta \varphi \\
 \mu C &= \eta \Delta I - \xi \sin I \Delta N \\
 \mu A' &= \frac{h}{r} \left\{ \cos I \Delta N + \Delta \omega \right\} - \frac{1}{h} \sin \varphi \Delta e + \frac{1}{h} \frac{dr}{dt} \Delta h - \frac{dr}{dt} \frac{\mu}{2} + \frac{1}{h} \Delta \varphi \\
 \mu B' &= \frac{dr}{dt} \left\{ \cos I \Delta N + \Delta \omega \right\} + \frac{1}{h} \cos \varphi \Delta e - \frac{1}{r} \Delta h + \frac{h}{r} \frac{\mu}{2} \\
 \mu C' &= \frac{d\eta}{dt} \Delta I - \frac{d\xi}{dt} \sin I \Delta N
 \end{aligned}$$

Multipliziert man sie mit folgenden Factoren:

$$\begin{aligned}
 \text{die 3. } \dots & \left| \begin{array}{c} -\frac{d\xi}{h dt} \\ -\frac{d\eta}{h dt} \end{array} \right| \\
 \text{die 6. } \dots & \left| \begin{array}{c} +\frac{\xi}{h} \\ +\frac{\eta}{h} \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned}
 \text{die 1. } & \left| \begin{array}{c} -\frac{e + \cos \varphi}{r} \\ \frac{\sin \varphi}{a} \\ -h \sin \varphi \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \frac{h}{r} \\ -\frac{e \sin \varphi}{h} \\ \frac{\sin \varphi}{r} \end{array} \right| \\
 \text{2. } & \left| \begin{array}{c} \frac{e + \cos \varphi}{hh} \\ +h \cos \varphi \end{array} \right| \\
 \text{4. } & \left| \begin{array}{c} +h \cos \varphi \end{array} \right| \\
 \text{5. } & \left| \begin{array}{c} \frac{r}{h} (e + 2 \cos \varphi + e \cos \varphi^2) + r \\ +\frac{r \sin \varphi}{h} (2 + e \cos \varphi) \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

so erhält man die Summen der Produkte:

$$\begin{aligned}
 \Delta I &= \frac{\mu}{h} \left\{ -C \frac{d\xi}{dt} + C' \cdot \xi \right\} \\
 \sin I \Delta N &= \frac{\mu}{h} \left\{ -C \frac{d\eta}{dt} + C' \cdot \eta \right\} \\
 \Delta e &= \mu \left\{ -A \frac{e + \cos \varphi}{r} - A' h \sin \varphi + B \frac{\sin \varphi}{a} + B' \frac{r}{h} (e + 2 \cos \varphi + e \cos \varphi^2) - (e + \cos \varphi) \right\} \\
 \Delta h &= \mu \left\{ -A \frac{h}{r} - B \frac{e \sin \varphi}{h} + B' r - \frac{h}{2} \right\} \\
 \cos I \Delta N + \Delta \omega &= \mu \left\{ -A \frac{\sin \varphi}{rc} + A' \frac{h \cos \varphi}{e} - B \frac{e + \cos \varphi}{h h e} + B' \frac{r \sin \varphi}{h e} (2 + e \cos \varphi) - \frac{\sin \varphi}{e} \right\}
 \end{aligned}$$

und aus der zweiten Gleichung:

$$\Delta\varphi = \mu \frac{B}{r} - \left\{ \cos I \Delta N + \Delta\omega \right\}.$$

Der Ausdruck von $\Delta\varphi$ dient zu der Bestimmung von

$$\Delta T = \left\{ \frac{arr \sin \varphi}{h^3} (2 + e \cos \varphi) - \frac{3ae}{hh} (t-T) \right\} \Delta e - \frac{3}{h} (t-T) \Delta h + (t-T) \frac{\mu}{2} - \frac{rr}{h} \Delta\varphi$$

und wenn man für $\Delta\varphi$ seinen Ausdruck setzt:

$$\Delta T = \left\{ \frac{arr \sin \varphi}{h^3} (2 + e \cos \varphi) - \frac{3ae}{hh} (t-T) \right\} \Delta e - \frac{3}{h} (t-T) \Delta h + \frac{rr}{h} \left\{ \cos I \Delta N + \Delta\omega \right\} - \mu \cdot \frac{r}{h} B + (t-T) \frac{\mu}{2}$$

Setzt man hier die gefundenen Werthe von Δe , Δh , $\cos I \Delta N + \Delta\omega$, so findet man:

$$\Delta T - ah \left\{ \cos I \Delta N + \Delta\omega \right\} = a\mu \left\{ A \left(\frac{3(t-T)}{rr} - \frac{e \sin \varphi}{h} \right) + A' \left(\frac{3e \sin \varphi}{h} (t-T) - 2r \right) + B \frac{h}{r} - B' \frac{3h}{r} (t-T) + \left(\frac{3}{r} - \frac{1}{a} \right) (t-T) - \frac{r \sin \varphi}{h} \right\}$$

Aus Δe und Δh erhält man:

$$\Delta \frac{1}{2a} = -\frac{e}{hh} \Delta e - \frac{1}{ah} \Delta h,$$

oder

$$f \sin F' = \cos (\omega + \varphi)$$

$$f \cos F' = \sin (\omega + \varphi) \cos I$$

$$A = r' f \sin (\omega' + \varphi' + F)$$

$$B = r' g \sin (\omega' + \varphi' + G)$$

$$C = r' \sin I \sin (\omega' + \varphi')$$

ΔT . Man erhält nämlich, indem man

$$t - T = \frac{h^3}{\sqrt{\mu(1-e^2)^3}} (\varepsilon - e \sin \varepsilon); \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$$

in Beziehung auf die Elemente differentiirt:

$$\Delta \frac{1}{2a} = \mu \left\{ A \cdot \frac{1}{rr} + A' \frac{r \sin \varphi}{h} - B \frac{h}{r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right\}.$$

Die Berechnung von A , A' , B , B' , C , C' macht man am leichtesten nach den Formeln:

$$g \sin G = \sin (\omega + \varphi)$$

$$g \cos G = -\cos (\omega + \varphi) \cos I$$

$$A' = \frac{f}{\sqrt{a(1-e^2)}} \left\{ \cos (\omega' + \varphi' + F) + e' \cos (\omega' + F) \right\}$$

$$B' = \frac{g}{\sqrt{a(1-e^2)}} \left\{ \cos (\omega' + \varphi' + G) + e' \cos (\omega' + G) \right\}$$

$$C' = \frac{\sin I}{\sqrt{a(1-e^2)}} \left\{ \cos (\omega' + \varphi') + e' \cos \omega' \right\}$$

20.

Um das Beispiel, welches ich im ersten Abschnitte nach der dort gegebenen Methode berechnet habe, auch nach der gegenwärtigen zu verfolgen, habe ich die Elemente der Bewegung um die Sonne, für den Anfang der Zeit, in die Elemente der Bewegung um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Sonne und der Erde verwandelt, und für das Ende der Zeit die umgekehrte Verwandlung vorgenommen. Beide haben ergeben:

	Anfang.	Ende.	Summe.
$\Delta I \dots$	-0',1648	-0',7185	-0',8833
$\Delta N \dots$	-4,1784	+1,9969	-2,1815
$\Delta \frac{1}{2a} \dots$	+0,30265	+0,18783	+0,49048
$\Delta h \dots$	-1,5195	-0,0202	-1,5397
$\cos I \Delta N + \Delta\omega \dots$	-1,5040	+0,5167	-0,9873
$\Delta T - ah \{ \cos I \Delta N + \Delta\omega \} \dots$	+23,816	+4781,587	+4805,40

Aus der Vergleichung dieser Zahlen mit den im 13. § erhaltenen sieht man, wie sehr nahe man, allein durch die Annahme einer rein elliptischen Bewegung des Cometen um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Sonne und der Erde, der Wahrheit gekommen ist; die Unterschiede beider Rechnungen betragen nur:

$$\Delta I \dots + 0',0636$$

$$\Delta N \dots - 0,0389$$

$$\Delta \frac{1}{2a} \dots \dots \dots - 0',00005$$

$$\Delta h \dots \dots \dots - 0,0016$$

$$\cos I \Delta N + \Delta\omega \dots \dots \dots - 0,0049$$

$$\Delta T - ah \{ \cos I \Delta N + \Delta\omega \} \dots \dots + 5,58 = 0,001573 \text{ Tage.}$$

Da hieraus hervorgeht, dass die Störungen der Bewegung um den Schwerpunkt sehr klein sind, so habe ich zu ihrer Berechnung nicht die vollständigen Formeln des 18. § angewandt, sondern nur den Theil derselben, welcher die Excentricität der Erdbahn nicht zum Factor hat; d. h. den Theil, welcher $i = 2$ entspricht. Auf diese Art habe ich die Einwirkung der veränderlichen Stellung der Erde auf die Elemente der Bewegung des Cometen gefunden:

	Anfang.	Ende.	Untersch.
$\delta I \dots$	0',0000	-0',0001	-0',0001
$\delta N \dots$	+0,0004	+0,0002	+0,0002
$\delta \frac{1}{2a} \dots$	+0,00005	+0,00005	+0,00001
$\delta h \dots$	-0,0006	-0,0008	-0,0002
$\cos I \delta N + \delta\omega \dots$	-0,0004	+0,0005	+0,0009
$\delta T - ah \{ \cos I \delta N + \delta\omega \} \dots$	+0,0008	+1,248	+1,240

Der von der Stellung der Erde unabhängige Theil der Störungen ist nach den Formeln des 12. §'s:

$$\begin{array}{r}
 \delta I \dots -0,0100 \quad -0,0134 \quad -0,0034 \\
 \delta N \dots + 0,9208 \quad + 0,9551 \quad + 0,9343 \\
 \delta \frac{1}{2a} \dots - 0,00022 \quad - 0,00026 \quad - 0,00004 \\
 \delta h \dots + 0,6034 \quad + 0,6046 \quad + 0,6012 \\
 \cos I \delta N + \delta \omega \dots + 0,8832 \quad + 0,8814 \quad - 0,0018 \\
 \delta T - ah \{ \cos I \delta N + \delta \omega \} \dots - 17,118 \quad - 24,020 \quad - 6,902
 \end{array}$$

Fügt man beide Theile der Störungen den oben gefundenen, aus der Reduction der Bewegung um die Sonne auf die Bewegung um den Schwerpunkt, und umgekehrt, entstehenden Aenderungen der Elemente hinzu, so erhält man:

$$\begin{array}{r}
 \delta I = - 0,8868 \\
 \delta N = - 2,1474 \\
 \delta \frac{1}{2a} = + 0,49043 \\
 \delta h = - 1,5387 \\
 \cos I \delta N + \delta \omega = - 0,9882 \\
 \delta T - ah \{ \cos I \delta N + \delta \omega \} = + 4799,74
 \end{array}$$

Die Vergleichung dieser Zahlen mit den im 8. und 13. § durch eine andere Methode gefundenen zeigt, dass die Rechnung nach den Näherungsformeln, bis auf unerhebliche Kleinigkeiten, die früheren Resultate wiedergibt. Ich glaube, dass man sie allen dem zum Beispiele gewählten ähnlichen Fällen vorziehen wird, da sie dann die erforderliche Genauigkeit, durch eine verhältnissmässig unbedeutende Rechnung herbeiführt.

Zum Schlusse bemerke ich noch, dass auch die Säcularänderungen der Elemente des störenden Planeten, bei der Rechnung nach der im ersten Abschnitte erläuterten Methode, nicht vernachlässigt werden. Will

man sie auch bei der Näherungsmethode berücksichtigen, so enthält der Ausdruck von R , Grössen, in welcher die Zeit ausser den Cosinus- und Sinuszeichen vorkömmt; diese Grössen sind hier als beständige angesehen worden, indem die Störung der elliptischen Bewegung um den Schwerpunkt so klein war, dass jede weitere Entwicklung derselben eine Weitläufigkeit ohne Interesse gewesen sein würde.

Ich zweifle nicht, dass die Näherungsmethode noch genügende Dienste leisten wird, wenn man die Bewegung des Cometen während einer Zeit bestimmen will, welche früher anfängt und sich später endigt, für deren Grenzen die Entfernung des Cometen von der Sonne beträchtlich kleiner ist, als in dem Beispiele, wo sie etwa 8mal so gross ist, als die mittlere Entfernung des störenden Planeten. Hätte man, in dem Beispiele, den Anfang und das Ende der Zeit, 360 Tage, statt 720, von den Durchgangszeiten durch das Perihel verschieden angenommen, so würde, meiner Meinung nach, die Näherungsmethode noch eine hinreichende Annäherung gewährt haben. Man würde also die Bewegung des Cometen, insofern sie von der Erde abhängt, nur während 360 Tagen vor und nach seinen Durchgängen durch das Perihel durch mechanische Quadraturen verfolgen dürfen. Für Mercur und Venus würde dieses mehr als hinreichend sein und die kleine Masse des Mars würde die kleinen, aus der Näherungsmethode hervorgehenden Fehler bis zum Unbedeutenden verkleinern.

13. Beobachtungen über die physische Beschaffenheit des Halley'schen Cometen und dadurch veranlasste Bemerkungen.*)

Astron. Nachr. 13. p. 185. (Mit einer lithogr. Tafel.)

Während der ersten Periode der Sichtbarkeit des Halley'schen Cometen entwickelte derselbe so auffallende Erscheinungen, dass es mir unmöglich war, ihnen meine Aufmerksamkeit zu versagen. Mit der Reihe der Beobachtungen über seine scheinbare Bewegung an der Himmelskugel wurde daher eine zweite verbunden, welche seine Beschaffenheit zum Gegenstande hatte. Die letztere erzeugte das Bedürfniss, die Wahrnehmungen

*) [293 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 289 (O.), II. 168, 174 (O.), 214 (O.), 218 (O.), 313 (O.), 325 (O.), 390, 400—404, 405—407 (O.), 408—412. — Beobachtungen von OLBERS, SCHWABE, STRUVE u. Astr. Nachr. Bde 12 u. 13; Rechnungen von (LEHMANN) ROSENBURGER S. A. N. 11 u. 12; von WESTPHALEN A. N. 24. u. 25. — Liter. s. auch nach Abb. 14. — Vgl. s. 279, 285, 287, 288, 292, 294, 383 d. a. V.]

in einen Zusammenhang zu bringen und sie in soweit zu erklären, dass ihre Möglichkeit übersehen werden konnte. Dieses war früher nicht geschehen und konnte nicht geschehen, weil die Kenntniss der Erscheinungen fehlte. Zur Zeit der Erscheinung des Cometen von 1811 hat uns OLBERS nicht nur eine Beschreibung des auffallend gestalteten Schweifes desselben, sondern auch eine Erklärung der Ursachen, welche verschiedene Formen der Cometschweife erzeugen können, gegeben.*) Was ich jetzt hinzusetze, beruht theils auf neuen Beobachtungen, theils auf einer theoretischen Untersuchung der Bewegung der Theilchen, welche die Schweife der Cometen bilden. Einiges

*) [Mon. Corresp. XXV. 3.]

davon halte ich für hinreichend erwiesen, Anderes für Ansichten, welche weiterer Prüfung, durch sorgfältige Beobachtung anderer Cometen, bedürfen.

Dadurch dass ich auch das letztere mittheile, beabsichtige ich nicht, meine Ansichten als begründete Wahrheit geltend zu machen. Vielmehr beabsichtige ich, durch eine durchgeführte Erklärung fühlbar zu machen, auf welche Gegenstände die Aufmerksamkeit bei fernerer Cometenerscheinungen zu richten ist. Ich glaube nämlich, dass wir weit brauchbarere Beobachtungen über die Beschaffenheit der Cometen besitzen würden, als wir wirklich besitzen, wenn eine Erklärung der Beobachtungen vorhanden gewesen wäre, an welche sich der Widerspruch oder die Bestätigung hätte halten können. Was mich selbst betrifft, so muss ich gestehen, dass meine Wahrnehmungen über die Beschaffenheit des Halley'schen Cometen grössere Vollständigkeit erhalten haben würden, wenn ich einen Versuch, wie den gegenwärtigen, zur Prüfung vor mir gehabt hätte.

Untersuchungen über die Beschaffenheit der Cometen gehören mehr für die Physiker als für die Astronomen. Sie fallen aber den letzteren zu, weil diese sich vorzugsweise in dem Besitze stärkerer Fernrohre befinden. Es ist indessen bekannt geworden, dass Herr ARAGO, der den Besitz und die Eigenschaften des Astronomen mit denen des Physikers vereinigt, dem Cometen seine Aufmerksamkeit geschenkt hat.*) Dass ihm auch meine Beobachtungen bei seinen Erklärungen von Nutzen sein mögen, ist ein Wunsch, welcher die Beilegung ihrer Mittheilung vorzüglich veranlasst.

1.

Der Comet zeigte, von seiner ersten Wahrnehmung an, immer eine so starke Verdichtung seines Nebels an einer Stelle, welche ich im Folgenden den Kern nennen werde, dass sie zwar nicht das Ansehen eines festen Körpers hatte, aber doch, ohne Schwierigkeit, von dem sie umgebenden Nebel unterschieden werden konnte. So sah ich den Cometen bis zu den letzten Tagen des Septembers und auch noch am 1. October.

Am 2. October heiterte sich der früher bewölkte Himmel um 11 Uhr auf, und nun zeigte der Comet eine beträchtliche Veränderung seines Ansehens. Ich hatte das allerschwächste, nur 45mal vergrössernde Ocular im Fernrohre des Heliometers; damit erschien der Kern so glänzend, dass er das Ansehen eines Fixsterns der 6. Grösse hatte, und ich in der That glaubte, er stehe vor einem solchen Sterne und das Licht desselben scheine durch ihn hindurch. Ich eilte indessen,

*) [vgl. ARAGO, Oeuvres XIV (Astron. II). 367 ff.]

die für die Lichtstärke des Fernrohres zu schwache, und fast nur zum Aufsuchen eines Gegenstandes anwendbare Vergrösserung, mit einer 179maligen zu vertauschen. Mit dieser gesehen zeigte sich der Kern nicht mehr wie ein fester, heller Punkt, sondern als eine zwar stark zusammengedrückte, aber dennoch unbestimmt begrenzte Lichtmasse, deren Form etwas Merkwürdiges darbot, welches ich gleich näher beschreiben werde. Vorher habe ich den Eindruck angeben wollen, welchen der Comet am 2. October machte, weil man dadurch ein Urtheil über die Grösse seiner Veränderung erhalten kann. Indessen sieht man einen Gegenstand am Himmel nicht unmittelbar, sondern immer durch die reinere, oder mit Dünsten gefülltere Luft: man darf also eine wahrgenommene Veränderung seiner Helligkeit nicht eher als ihm selbst angehörig ansehen, als bis man die Ueberzeugung erlangt hat, dass die Verschiedenheit der Durchsichtigkeit der Luft nicht zu ihrer Erklärung ausreicht. In dem gegenwärtigen Falle glaube ich zwar, dass der Glanz des Cometen am 2. October, vergleichungsweise mit den vorhergehenden Tagen, zu gross war, um ihn ganz durch die augenscheinlich stattfindende, vollkommene Heiterkeit der Luft erklären zu können, darf aber auch nicht unerwähnt lassen, dass der Himmel an den vorhergehenden, sowie an einigen folgenden Tagen, an welchen der Comet den Glanz des 2. Octobers gleichfalls nicht zeigte, sehr düstrig war. Da ich daher nicht mit Bestimmtheit angeben kann, ob das veränderte Ansehen des Cometen an diesem Tage zum Theil der grösseren Durchsichtigkeit der Luft zuzuschreiben ist, so muss ich unentschieden lassen, ob die grosse Vermehrung des Glanzes, welche am 2. Octbr. wahrgenommen wurde, zwischen dem 1. und 2., also sehr schnell, entstanden ist, oder ob sie sich nach und nach eingefunden hat und nur am 2. zuerst sichtbar geworden ist. Wäre das erstere entschieden, so würde damit ausser Zweifel gesetzt sein, dass der Comet selbst eine plötzliche Veränderung erlitten, entweder eigenes Licht entwickelt hätte, oder durch stärkere Verdichtung fähiger geworden wäre, das Sonnenlicht kräftig zurückzuwerfen. Denn die Aenderung des Ortes des Cometen gegen die Erde und die Sonne war zwischen dem 1. und 2. October zu unbedeutend, um eine so grosse Aenderung des Ansehens, wie die wahrgenommene, daraus erklären zu können.

Die schon erwähnte Merkwürdigkeit, welche der Comet zeigte, bestand in einer Ausströmung der Lichtmaterie aus dem Kerne, welche einen Kreissector von etwa 90° bildete, beiläufig der Sonne zugekehrt war und bis auf 12–15" Entfernung von dem Mittelpunkte,

von dem nebligen Grunde, auf welchem sie lag, unterschieden werden konnte. Die erste der zwölf Zeichnungen, welche ich diesem Aufsätze beilege, zeigt das Ansehen des Kopfes des Cometen; sie ist durch eine Linie abgeschnitten, welche senkrecht auf der Richtung von der Sonne nach dem Cometen steht, so dass die Sonne lothrecht über dem Kerne des Cometen angenommen werden muss. Eben so sind die übrigen Zeichnungen zu verstehen. Die Ausdehnung des Nebels konnte, trotz des Mondseins, bis auf 2 bis 3 Minuten von dem Mittelpunkte verfolgt werden. Ein Versuch, den Positionswinkel der Axe der Ausströmung zu messen, ergab ($12^h 42^m$ M. Z.) $87^{\circ} 50'$; allein diese Angabe kann, bei der Unbestimmtheit des Ansehens der Erscheinung, nur als eine unvollkommene Annäherung betrachtet und vielleicht nur bis auf 5° verbürgt werden.

Am 3. October war es trübe, am 4. nur dunstig. Der Comet erschien weit weniger glänzend als am 2., hatte auch, selbst bei der schwächsten Vergrößerung des Instruments, nicht das Ansehen eines Fixsterns; von der Ausströmung konnte ich nichts bemerken. Am 5. erschien der Comet, bei noch unreinerem Himmel, noch unscheinbarer und gleichfalls ohne Ausströmung. Am 8. October heiterte es sich wieder auf. Der Comet glänzte wieder so lebhaft, dass sein Kern noch mit 120maliger Vergrößerung fest erschien und erst durch noch stärkere Vergrößerungen dieses Ansehen verlor. Die Ausströmung war stärker geworden als am 2., der Winkel ihrer Ränder kleiner, etwa 45° ; ich konnte sie bis zu $15-20'$ Entfernung von dem Mittelpunkte von dem hellen Grunde unterscheiden, auf welchem sie lag. Ihren Positionswinkel fand ich ($11^h 53^m$ M. Z.) $= 135^{\circ} 20'$, jedoch mit kaum grösserer Sicherheit als am 2. Ihre Begrenzung auf der rechten Seite war merklich gekrümmt. Auch war der den Kern umgebende Nebel auf dieser Seite heller als auf der anderen. Alle diese Umstände werden durch die Zeichnung anschaulich gemacht.

Die nächste heitere Nacht war die des 12. Octobers. Der Comet war in seiner Erdnähe und erschien, mit blossen Augen gesehen, heller als die Sterne der zweiten Grösse im grossen Bären. Die Ausströmung war grösser und lebhafter geworden, wie die vier, das Ansehen des Cometen in dieser Nacht darstellenden Figuren zeigen. Ich konnte sie bis über $30'$ von dem Mittelpunkte verfolgen. Die Krümmung nach der rechten Seite war auffallender als am 8. Der Kern des Cometen und seine Ausströmung gewährten das Ansehen einer brennenden Rakete, deren Schweif, durch Zugwind, seitwärts abgelenkt wird. Wenn man die Krümmung an der rechten Seite wegdenkt, so mochten die

beiden Begrenzungen der Ausströmung einen Winkel von 30° mit einander machen. Da die Nacht heiter blieb, so konnte ich den Cometen 9 Stunden lang, von dem Untergange der Sonne bis gegen 3 Uhr Morgens, verfolgen. Sein Ansehen blieb sich während dieser Zeit nahe gleich und erlitt keine wesentliche Aenderung, ausser einer Verminderung des Unterschiedes der Helligkeiten des Kerns und des ihm nächsten Theiles der Ausströmung; dieser war Anfangs beträchtlich genug, um beide gehörig unterschieden darzustellen; zur Zeit der letzten Beobachtung aber war er kleiner geworden, so dass ich, bei einer um diese Zeit gemachten Ortsbestimmung, einige Schwierigkeit fand, den Mittelpunkt von dem Anfange der Ausströmung zu unterscheiden. Die Richtung aber, in welcher die Ausströmung erschien, erfuhr während dieser Nacht desto grössere Aenderungen, wie folgende Messungen ihres Positionswinkels zeigen:

$6^h 5^m$ M. Z.	$208^{\circ} 6'$
10 34 -	222 20
12 40 -	233 58
14 24 -	250 23

Da die Ausströmung heute bestimmter erschien als früher, so sollten diese Messungen auch grössere Sicherheit besitzen, als die früheren; ich halte sie in der That für sicherer, allein die Krümmung der Ausströmung an der rechten Seite erschwerte die Beurtheilung der Lage ihrer Axe so sehr, dass ich den Positionswinkeln doch eine Unsicherheit von mehreren Graden zuschreiben muss. Das was man unter schwächeren Vergrößerungen für einen festen Kern des Cometen hätte halten können, würde ich versucht haben zu messen, wenn die Begrenzungen desselben, bei der Anwendung stärkerer Vergrößerungen, nicht gänzlich unbestimmt geworden wären: mit 179mal. Vergr. würde ich vielleicht einen Durchmesser von 2 bis $3''$ haben messen können, wenn ich das was noch beträchtlich hell erschien, hätte messen wollen; eine 290mal. Vergr. vernichtete aber jeden Schein eines festen Körpers und zeigte, dass eine Grössenangabe völlig willkürlich gewesen sein würde.

Am 13. Octobr. waren die ersten Stunden des Abends heiter und der Comet zeigte sich mit dem gestrigen Glanze, aber von ganz veränderter Beschaffenheit. Eine auf beiden Seiten begrenzte Ausströmung war nicht mehr vorhanden; statt ihrer lag eine unbegrenzte Masse von Lichtmaterie links von dem Mittelpunkte, so wie die Zeichnung sie darstellt. Die Lage derselben konnte ich nur ganz beiläufig schätzen, indem ihre Unbestimmtheit alles Messen unmöglich machte: ihr hellster Theil

Halley'scher Comet 1835.

Octob. 2. 12° 12'

Octob. 8. 11° 53'

149. 1



Octob. 12. 6° 5'

Octob. 12. 10° 31'



Octob. 12. 12° 40'

Octob. 12. 14° 24'



Maaxwell, für Scindler

Halley'scher Comet 1835.

Octob. 13 7° 0'

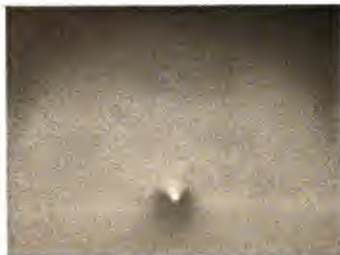
Octob. 14 7° 14'

Taf. II.



Octob. 15 6° 45'

Octob. 20 6° 20'




Octob. 22 6° 3'

Octob. 25 6° 7'



Grav. Inst. v. O. Bach (1835)

Maaßstab für Sekunden



ging (7^h M. Z.) nördlich vor dem Mittelpunkte des Cometen voran, so dass sein Positionswinkel grösser als 270° war; ich glaube, dass er kleiner gewesen ist als 290° und bin daher der Meinung, dass seine Annahme = 280° nicht viel von der Wahrheit abweichen wird. Die Lichtmaterie schien sich in grösserer Menge als gestern auf der Sonnenseite angehäuft zu haben; auf der rechten Seite war wieder mehr derselben vorhanden als auf der linken. Da der Himmel ausgezeichnet heiter und der Mond abwesend war, so ist nicht der geringste Zweifel an der Wirklichkeit der wahrgenommenen grossen Veränderung des Cometen vorhanden.

Der 14. October gewährte nur eine heitere Viertelstunde, aber eine ausgezeichnet heitere; sie reichte hin, neue, grosse Veränderungen des Cometen zu zeigen und die Zeichnung zu entwerfen. Die Ausströmung hatte sich nicht nur wieder hergestellt, sondern war weit lebhafter und stärker geworden als am 12.; ich konnte sie noch in 45" Entfernung von dem Mittelpunkte unterscheiden. Dagegen hatte der Glanz des Kerns abgenommen, so dass er schon unter 90maliger Vergrösserung das Ansehen der Festigkeit verlor. Die Krümmung der Grenzen der Ausströmung zeigte sich heute an beiden Seiten; an der rechten war der ausströmende Kegel aber heller als an der linken. Der Positionswinkel seiner Axe konnte ziemlich genau beobachtet werden, und fand sich (7^h 14^m M. Z.) = 222° 25'.

Am 15. October war der Comet weit weniger hell als gestern; die Ausströmung war schlecht begrenzt, so wie die Zeichnung sie darstellt. Ihren Positionswinkel fand ich (6^h 45^m M. Z.) = 176° 55', kann aber diese Bestimmung, bei der schlechten Begrenzung des Gegenstandes, nur als eine bis auf mehrere Grade unsichere Annäherung ansehen. Die Richtung des Schweifes des Cometen ging (6^h 56^m M. Z.) fast auf γ Draconis zu, etwa einen halben Grad links bei dem Sterne vorbei. Von einer Krümmung des Schweifes, welchen ich bis zu der halben Entfernung des Sterns von dem Cometen sicher verfolgen konnte, zuweilen aber bis fast an den Stern reichen zu sehen glaubte, konnte ich nichts Bestimmtes bemerken. Die angeführte Schätzung seiner Richtung bezieht sich auf den Punkt seiner Axe, welcher in der Mitte zwischen dem Cometen und dem Sterne lag.

Am 20. October war von der Ausströmung nur eine schwache Spur zu sehen, deren Richtung ich nicht bestimmen konnte, weil sie zu undeutlich war. Die Lichtmaterie schien ausgedehnter und gleichförmiger vertheilt zu sein als früher. So wenig diese Umstände der Erläuterung durch eine besondere Zeichnung werth sind, so theile ich diese doch mit, damit das Verhalten

des Cometen, vergleichungsweise mit dem früheren und späteren, anschaulich werde. Sie dient übrigens nur, das Ansehen der Ausströmung zu veranschlichen; die Richtung derselben ist willkürlich gezeichnet, da ich eben so wenig eine Schätzung als eine Beobachtung derselben gemacht habe.

Am 22. October war der Comet sehr glänzend und gleich, mit blossen Augen gesehen, wenigstens den Sternen der dritten Grösse. Die Ausströmung war lebhafter als je, hatte aber ihre Form wieder gänzlich geändert und erschien der Zeichnung gemäss; sie hatte eine beträchtliche Krümmung nach beiden Seiten angenommen und ihre Helligkeit war durchaus viel gleichförmiger als früher. Ihre äussere Begrenzung ging, an beiden Seiten, über einen Kreisbogen von etwa 30" Halbmesser (mit welchem sie in ihrem Scheitel zusammenfiel) hinaus und mochte also etwa parabolisch gekrümmt sein; die Entfernung jedes ihrer Enden von dem Mittelpunkte des Cometen betrug 35". Den Positionswinkel ihrer Mittellinie fand ich (6^h 3^m) = 270° 20'; offenbar mit sehr geringer Sicherheit, indem das, was ich für die Mittellinie annehmen konnte, dem Anblicke der Zeichnung zufolge, nothwendig sehr unbestimmt sein musste. Die Richtung des Schweifes ging (7^h 28^m M. Z.) auf σ Ophiuchi zu; die Länge desselben konnte ich nur bis auf die Hälfte der Entfernung des Cometen von diesem Sterne verfolgen.

Am 25. October, als es sich wieder sehr schön aufheiterte, war der Kern des Cometen so glänzend, dass man ihn, als die Dämmerung den Nebel noch fast unsichtbar machte, mit der schwächsten Vergrösserung des Helimeters für einen Fixstern hätte halten können. Die schöne Figur der Ausströmung, welche am 22. sichtbar gewesen war, war verschwunden und man sah statt derselben nur schwächere Lichtanhäufungen auf beiden Seiten des Mittelpunktes, welche ich in der Zeichnung dargestellt habe. Den Positionswinkel der auf diese Anhäufungen senkrecht stehenden Linie fand ich (6^h 7^m M. Z.) = 252°, was aber nur als eine beiläufige Schätzung angesehen werden kann.

Am 28. October sah ich den Cometen nur in den Dünsten des Horizonts, durch welche hindurch ich nichts Eigenthümliches bemerken konnte. Am 29. war sein Ansehen beinahe wie am 25., nur noch weniger bestimmt, wie auch der niedrige Stand des Cometen nicht anders erwarten liess. Später habe ich ihn nur noch am 8. November gesehen, allein nichts Merkwürdiges mehr an ihm wahrnehmen können.

In den gegebenen Beschreibungen habe ich nicht immer wiederholt, dass die rechte Seite des den Mittel-

punkt umgebenden Nebels fortwährend heller war als die linke. Auch habe ich einiger anderen Eigentümlichkeiten, welche immer hätten wiederholt werden müssen, nicht gedacht; auf der von der Sonne abgewandten Seite des Mittelpunktes schien weniger Lichtmaterie vorhanden zu sein als auf der ihr zugewandten; auch trat in die Krümmung des Nebels auf der Sonnenseite eine dunklere Stelle etwas hinein, so dass sein Umfang nicht gleichförmig convex erschien. Beides habe ich in den Zeichnungen wiederzugeben gesucht; allein ich muss bemerken, dass die vergleichungsweise beträchtliche Helligkeit des Kerns und seiner Ausströmung den Grund, auf welchem beide lagen, wahrscheinlich dunkeler haben erscheinen lassen, als er in der Wirklichkeit gewesen ist; die erwähnte Unterbrechung der Krümmung der Begrenzung des Nebels am Scheitel war sehr wenig auffallend. Endlich führe ich noch an, dass mir zuweilen einige Richtungen von dem Kerne aus mehr Nebel zu enthalten schienen als andere; ich habe aber wenig Aufmerksamkeit darauf verwandt, da ich sie für geringfügige Modificationen der Helligkeit halte, deren ich überdies nicht ganz sicher werden konnte.

2.

Das Merkwürdigste, was der Comet gezeigt hat, ist ohne Zweifel die drehende oder schwingende Bewegung des ausströmenden Lichtkegels, welche sich sowohl zwischen den zusammenhängenden Beobachtungen in der Nacht des 12. Octobers, als auch zwischen den vereinzelt der übrigen Tage findet. Aehnliches hat man früher nie wahrgenommen; was aber weniger beweist, dass es bei anderen Cometen nicht sichtbar gewesen sei, als dass man es nicht beachtet hat.

Um diese Erscheinung unter eine Uebersicht zu bringen, werde ich zuerst die beobachteten Positionswinkel der Axe der Ausströmung zusammenstellen und jedem derselben den Positionswinkel des von dem Cometen nach der Sonne gezogenen grössten Kreises, sowie auch den Unterschied beider, oder den Winkel zwischen den Richtungen der Sonne und der Ausströmung, bezeichnen.

	M. Z.	Positionswinkel der		Unterschied.
		Auströmung.	Sonne.	
Octbr. 2	12 ^h 42 ^m	87° 50'	95° 41,6	- 7° 52'
8	11 53	135 20	116 10,8	+ 19 9
12	6 5	208 6	189 13,6	+ 18 52
	10 34	222 20	192 53,3	+ 29 27
	12 40	233 58	194 32,0	+ 39 26
	14 24	250 28	195 51,9	+ 54 31
13	7 0	280 0	207 9,3	+ 72 51
14	7 14	222 25	219 51,3	+ 2 34
15	6 45	176 55	229 2,5	- 52 8
22	6 3	270 20	253 36,0	+ 16 44
25	6 7	252 0	256 17,6	- 4 18

Es geht hieraus hervor, dass der ausströmende Lichtkegel sich von der Richtung nach der Sonne, sowohl rechts als links, beträchtlich entfernt hat, immer aber wieder zu dieser Richtung zurückgekehrt ist, um auf die andere Seite derselben überzugehen. Es war ein glücklicher Umstand, dass der Comet am 12. October anhaltend beobachtet und dadurch die Art der Bewegung deutlich erkannt werden konnte: am Anfange dieser Nacht fand sich die Ausströmung schon merklich links von der Richtung nach der Sonne, und im Verlaufe derselben bewegte sie sich noch beträchtlich mehr links; am 13. zeigte sie sich noch weiter auf diese Seite gegangen; am 14. war sie beinahe zu der Richtung nach der Sonne zurückgekehrt und am 15. hatte sie sich bedeutend nach der rechten Seite bewegt. Es tritt nun die Aufgabe hervor, die Axe, um welche der ausströmende Lichtkegel sich drehte, aus den Beobachtungen zu erkennen.

Ich werde daher die Verbindung aufsuchen, in welcher die Elemente der Drehung der Axe des ausströmenden Lichtkegels, und der Positionswinkel, in welchem diese Axe sich zeigt, zu einander stehen. Legt man von dem Mittelpunkte des Cometen gerade Linien in den Richtungen der Drehungsaxe, der Axe der Ausströmung und der Erde, und bezeichnet man die diesen Richtungen entsprechenden Punkte der Himmelskugel durch A, B, C , so ist die Seite AB des sphärischen Dreiecks ABC der Winkel zwischen der Drehungsaxe und der Axe der Ausströmung (θ); die Seite AC ist die Entfernung (S) der Erde von dem Pole der Drehung; die Seite BC ist die Entfernung (T) der Erde von der Axe der Ausströmung. Ferner ist der Winkel A der Winkel zwischen zwei durch die Drehungsaxe gelegten Ebenen, deren eine durch die Axe der Ausströmung, die andere durch die Erde geht; oder, wenn der Winkel der ersten Ebene mit der Ebene des Declinationskreises der Drehungsaxe, von dem Nordpole des Aequators an gezählt, durch u bezeichnet wird, der Positionswinkel des von dem Cometen gesehenen Ortes der Erde an dem Pole der Drehung, durch P' , so ist $A = u - P'$. Endlich ist C der Winkel zwischen zwei durch den Cometen und die Erde gelegten Ebenen, deren eine durch die Drehungsaxe, die andere durch die Axe der Ausströmung geht; oder wenn der Positionswinkel des Poles der Drehung an dem geocentrischen Orte des Cometen durch P bezeichnet wird, der Positionswinkel, in welchem die Axe der Ausströmung erscheint, durch p , so ist $C = P - p$. Man hat also, durch die Formeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\begin{aligned}\cos T &= \cos S \cos \vartheta + \sin S \sin \vartheta \cos(\mu - P') \\ \sin T \cos(P-p) &= \sin S \cos \vartheta - \cos S \sin \vartheta \cos(\mu - P') \\ \sin T \sin(P-p) &= \sin \vartheta \sin(\mu - P')\end{aligned}$$

Wenn man in der Axe der Ausströmung, in der Entfernung r von dem Mittelpunkte des Cometen, einen Punkt annimmt, wenn man die Entfernungen des Cometen und dieses Punktes von der Erde durch ϱ und ϱ' bezeichnet, sowie den Winkel, unter welchem r erscheint, durch s , so hat man

$$\begin{aligned}\varrho' \cos s &= \varrho - r \cos T \\ \varrho' \sin s &= r \sin T,\end{aligned}$$

also auch:

$$\begin{aligned}\varrho' \cos s &= \varrho - r[\cos S \cos \vartheta + \sin S \sin \vartheta \cos(\mu - P')] \\ \varrho' \sin s \cos(P-p) &= r[\sin S \cos \vartheta - \cos S \sin \vartheta \cos(\mu - P')] \\ \varrho' \sin s \sin(P-p) &= r \sin \vartheta \sin(\mu - P').\end{aligned}$$

Durch diese Formeln wird die gesuchte Verbindung gegeben. Wenn man die geocentrische Geradeaufsteigung und Abweichung des Cometen durch α und δ bezeichnet, die Geradeaufsteigung und Abweichung des Poles der Drehung durch A und D , so erhält man zur Bestimmung von S , P und P' die Formeln:

$$\begin{aligned}\cos S &= -\sin \delta \sin D - \cos \delta \cos D \cos(A-\alpha) \\ \sin S \cos P &= \cos \delta \sin D + \sin \delta \cos D \cos(A-\alpha) \\ \sin S \sin P &= \cos D \sin(A-\alpha) \\ \sin S \cos P' &= -\sin \delta \cos D + \cos \delta \sin D \cos(A-\alpha) \\ \sin S \sin P' &= -\cos \delta \sin(A-\alpha)\end{aligned}$$

oder die Gauss'schen trigonometrischen Formeln:

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} (P+P') &= \sin \frac{1}{2} (A-\alpha) \sin \frac{1}{2} (D+\delta) \\ \sin \frac{1}{2} S \cos \frac{1}{2} (P+P') &= -\cos \frac{1}{2} (A-\alpha) \cos \frac{1}{2} (D-\delta) \\ \cos \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} (P-P') &= -\sin \frac{1}{2} (A-\alpha) \cos \frac{1}{2} (D+\delta) \\ \cos \frac{1}{2} S \cos \frac{1}{2} (P-P') &= -\cos \frac{1}{2} (A-\alpha) \sin \frac{1}{2} (D-\delta)\end{aligned}$$

Diese Formeln sind geeignet zur Vergleichung willkürlicher Annahmen über die Richtung der Drehungsaxe mit den Beobachtungen des Positionswinkels der Axe der Ausströmung. Da hier r , vergleichungsweise mit ϱ , sehr klein ist, so kann man $\varrho' = \varrho$ setzen; bezeichnet man die perspectivische Verkürzung von r durch n , oder setzt man:

$$\sin s = n \cdot \frac{r}{\varrho}$$

so hat man zur Erkennung dieser Verkürzung und des Positionswinkels:

$$\begin{aligned}n \cos(p-P) &= \sin S \cos \vartheta - \cos S \sin \vartheta \cos(\mu - P') \\ n \sin(p-P) &= -\sin \vartheta \sin(\mu - P')\end{aligned}$$

3.

Ich werde die Beobachtungen zuerst mit der Annahme vergleichen, dass die Ausströmung sich in der Ebene der Bahn des Cometen drehe, oder Schwingungen um eine Axe mache, welche senkrecht auf dieser Ebene steht. Bezeichnet man den Ort des aufsteigenden Knotens der Bahn auf dem Aequator durch N , ihre Neigung gegen den Aequator durch I , so wird also:

$$A = N - 90^\circ, \quad D = 90^\circ - I$$

angenommen.

Nach den von Herrn Professor ROSENBERGER aus der Erscheinung des Cometen im J. 1759 abgeleiteten und von ihm, durch die Störungsrechnungen, auf die jetzige Zeit reducirten Elementen, von welchen ich (A. N. Nr. 293) gezeigt habe, dass sie der jetzigen Erscheinung noch sehr nahe entsprechen, wenn man die Durchgangszeit durch das Perihel

$$= \text{Novbr. 15,94984 (Pariser Merid.)}$$

annimmt, sind die Knotenlänge und Neigung, bezogen auf die Ekliptik und den wahren Nachtgleichenpunkt des 12. Octobers

$$55^\circ 11' 3'', 7, \quad \text{und} \quad 162^\circ 16' 35'', 4,$$

welche Annahme, mit der wahren Schiefe der Ekliptik $= 23^\circ 27' 43'', 3$ verbunden,

$$N = 131^\circ 19' 50'', 8, \quad I = 160^\circ 33' 32'', 4,$$

also

$$A = 41^\circ 19' 50'', 8, \quad D = -70^\circ 33' 32'', 4$$

ergibt. Die ferner zu der Vergleichung der Beobachtungen nothwendigen geocentrischen Oerter des Cometen für die Zeiten meiner Beobachtungen habe ich aus denselben Elementen berechnet und theile sie hier zugleich mit den Oertern der Sonne mit:

M. Z. Paris.	Log Entf Comet s	Des Cometen		Der Sonne	
		AR.	Decl.	AR.	Decl.
Oct. 2,47871	9,64004	102°50'51"	+ 41°17'1"	188°18'0"	- 3°36'6"
8,44469	9,39190	130 34 59	58 24 30	193 44 17	- 3 53 6
12,20302	9,27100	205 38 57	57 44 48	197 11 44	- 7 18 43
12,28982	9,27043	209 5 2	56 24 58	197 32 6	- 7 22 56
12,47732	9,27039	210 36 31	55 45 39	197 26 57	- 7 24 54
12,54955	9,27038	211 49 47	55 12 25	197 30 57	- 7 26 32
13,24126	9,27646	221 51 14	49 26 8	198 9 21	- 7 42 8
14,25094	9,30033	232 5 38	40 29 7	199 5 32	- 8 4 48
15,23080	9,33604	238 43 42	32 21 54	200 3 11	- 8 26 41
22,20163	9,63440	255 8 25	2 19 40	206 3 9	- 10 58 47
25,20441	9,73284	257 12 22	- 2 45 6	209 24 51	- 12 1 59

Hieraus folgen die in den Formeln vorkommenden Grössen:

8*

	<i>S</i>	<i>P</i>	<i>P'</i>
Octbr. 2	59°46,7	199°47,0	130°10,1
8	36 46,7	213 46,2	128 58,1
12	14 25,3	201 10,5	35 23,5
	15 5,6	195 43,9	26 46,9
	15 30,8	193 37,2	23 2,3
	15 54,4	191 33,8	20 6,2
13	21 7,5	179 31,0	359 3,4
14	30 84,8	172 58,2	843 47,3
15	39 21,3	171 2,6	336 36,5
22	71 39,9	168 44,9	321 8,8
25	77 2,9	168 27,3	323 5,2

Indem in der Voraussetzung der Schwingung der Ausströmung in der Ebene der Bahn des Cometen, welche hier verfolgt wird, $\theta = 90^\circ$ ist, so verwandeln sich die Formeln am Ende des vorigen Art. in:

$$n \cos(p-P) = -\cos(u-P') \cos S$$

$$n \sin(p-P) = -\sin(u-P')$$

Ich habe in denselben für *p* sowohl den beobachteten, als auch den die Richtung der Sonne angegebenden Werth gesetzt, also für *u* zwei Werthe erhalten, deren einer sich auf die Axe der Ausströmung bezieht, der andere $u^{(0)}$ auf die Richtung nach der Sonne. Der Unterschied beider ist der Winkel, welchen die Axe der Ausströmung mit dem Radiusvector einschloss.

	<i>u</i>	<i>u</i> ⁰	<i>u</i> - <i>u</i> ⁰	<i>n</i>
Octbr. 2	151°27,6	133°38,6	-12°11'	0,841
8	223 17,8	199 31,3	+23 47	0,989
12	222 6,0	203 48,6	+18 17	0,969
	232 35,2	204 2,2	+28 33	0,972
	242 30,4	204 8,6	+38 22	0,977
	257 55,4	204 14,4	+51 41	0,989
13	260 16,3	205 5,3	+75 14	0,998
14	268 67,0	206 22,5	+2 35	0,933
15	162 19,6	207 39,8	-45 20	0,773
22	267 14,3	218 9,9	+49 3	0,855
25	206 18,1	223 27,2	-17 9	0,898

Einige Aufmerksamkeit auf das Fortschreiten der Werthe von $u - u^0$ (des Winkels zwischen der Ausströmung und dem Radiusvector des Cometen, positiv genommen, wenn die erstere, der Richtung der Bewegung nach, vor dem Cometen voraus ist) zeigt, dass dieselben sich durch eine schwingende Bewegung der Ausströmung, deren Periode 4,6 Tage und deren Ausdehnung 60° beträgt, einigermassen erklären lassen. Zählt man die Zeit *t* von Oct. 14,2825 an, so ist die Formel, welche diese Erklärung gewährt:

$$n = n^0 - 60^\circ \sin \left\{ t \cdot \frac{360^\circ}{4,6} \right\}$$

Wie sie die Beobachtungen der Positionswinkel dar-

stellt, sieht man aus der folgenden Vergleichung der aus ihr berechneten und der beobachteten Winkel der Ausströmung mit der Richtung der Sonne.

	Rechnung	Beobacht.	Unterschied.
Octbr. 2	-17°31'	-7°52'	+9°39'
8	+41 36	+19 2	+22 27
12	+18 19	+18 52	-0 33
	+32 36	+29 27	+3 9
	+38 29	+39 26	-0 57
	+42 52	+54 31	-11 39
13	+58 3	+72 51	-14 48
14	+2 34	+2 34	0 0
15	-65 36	-52 8	-14 28
22	+21 31	+16 44	+4 47
25	-7 41	-4 18	+3 23

Ein Theil dieser Unterschiede kann unbedenklich der unvermeidlichen Unsicherheit der Beobachtungen einer so unbestimmten Erscheinung, wie die Ausströmung meistens war, zugeschrieben werden. Ich glaube, dass man dieses am 15. Octbr. thun könnte, wo die Unbestimmtheit sehr gross war. Die Beobachtung vom 13. Octbr. hätte eigentlich nicht in die Reihe der zu vergleichenden gestellt werden sollen, indem der zu beobachtende Gegenstand, nämlich die Ausströmung selbst, nicht vorhanden war und statt ihrer etwas anderes, eine Anhäufung von Lichtmaterie, genommen wurde. Die letzte Beobachtung vom 12. wird jedenfalls nicht viel gegen die Richtigkeit einer Formel beweisen, mit welcher drei andere Beobachtungen desselben Tages, soweit ihre eigene Sicherheit erfordert, übereinstimmen. Allein die Beobachtung vom 8. October halte ich für entschieden abweichend von der Formel und würde sie für einen Beweis der Unrichtigkeit derselben ansehen, wenn ich mich für berechtigt hielte, die völlige Beständigkeit der Periode und Ausdehnung der Schwingungen zu fordern. Uebrigens kann man zur theoretischen Rechtfertigung der Formel nichts weiter anführen, als dass sie eine Annäherung an jede Pendelbewegung gewährt und unter den periodischen Formeln die einfachste ist.

4.

Obleich die beobachteten Bewegungen der Ausströmung sich auf diese Art, d. h. dadurch, dass man eine schwingende Bewegung in der Ebene der Bahn des Cometen als ihre Ursache annimmt, so gut erklären lassen, als man zu erwarten sich berechtigt halten kann, so schien mir es doch nothwendig, auch zu versuchen, was sich durch die zweite Art der drehenden Bewegung um die Richtung von dem Cometen nach der Sonne leisten lassen würde. Ich habe also eine

zweite Vergleichung der Beobachtungen mit der Annahme gemacht, die Axe der Ausströmung durchschneide den Radiusvector in einem beständigen Winkel und drehe sich gleichförmig um denselben. Es ist offenbar, dass beide Annahmen genau dasselbe leisten würden, wenn die Erde in der senkrecht auf die Ebene der Bahn des Cometen durch die Sonne gelegten Ebene stände und wenn dieses sich während der Dauer der Beobachtungen eben so wenig änderte, als der Winkel zwischen dem Radiusvector und von dem Cometen nach der Erde gelegten geraden Linie. Sie leisten aber nicht dasselbe, wenn dieses nicht der Fall ist. Bei unserem Cometen muss der Unterschied beträchtlich sein, indem die Bewegung desselben in Beziehung zur Erde, während der Dauer der Beobachtungen, sehr gross war.

In der Annahme, welche jetzt verfolgt werden soll, ist der aus dem Cometen gesehene Ort der Sonne der jedesmalige Pol der Drehung. Ich werde ihn zuerst angeben:

M. Z. Paris.	Log. Ref. Const. ☉	A	D
Oct. 2, 47871	0,03498	206° 53' 37"	- 18° 52' 16"
8, 44469	0,09656	200 43 36	- 18 16 57
12, 20302	0,07088	196 15 12	- 17 43 44
12, 38982	0,06958	126 1 5	- 17 41 47
12, 47732	0,06896	195 54 25	- 17 40 52
12, 54955	0,06846	195 48 54	- 17 40 7
13, 21126	0,06369	191 55 43	- 17 32 37
14, 25094	0,05643	193 35 40	- 17 20 56
15, 23080	0,04942	192 15 44	- 17 8 42
22, 20163	0,08802	181 22 8	- 15 10 13
25, 20441	0,07555	176 7 33	- 13 57 55

Hieraus und aus den im 3. Art. angeführten geocentrischen Oertern des Cometen folgen:

	S	P	P'
Octbr. 2	67° 17,8	95° 41,6	332° 12,4
8	84 21,6	116 10,8	209 40,8
12	104 7,2	189 13,6	174 50,7
	105 4,6	192 53,3	172 33,6
	105 30,7	194 32,0	171 28,8
	105 52,0	195 51,9	170 34,8
13	108 53,7	207 9,3	161 51,9
14	111 59,8	219 51,3	149 19,6
15	118 27,7	229 2,5	138 7,3
22	105 5,5	253 36,0	96 32,5
25	89 12,1	256 17,6	89 27,9

Die Verfolgung dieser Annahme hat gezeigt, dass sie alle Beobachtungen auch nur näherungsweise darzustellen nicht geeignet ist: jede Annahme des Winkels der Ausströmung mit dem Radiusvector, welche den Beobachtungen vom 12., 14. und 15. October einiger-

massen entspricht, entfernt sich beträchtlich von den früheren und späteren. Nimmt man z. B. $\theta = 55^\circ$ und $\mu = 70^\circ$, wo t die von Oct. 12, 1557 an gezählte Zeit bedeutet, so erhält man folgende Vergleichung zwischen der Rechnung und den Beobachtungen des Winkels der Ausströmung mit der Richtung nach der Sonne:

	Rechnung	Beobacht.	Unterschied.	μ
Octbr. 2	- 9° 13'	- 7° 22'	- 1° 21'	0,852
8	+ 22 18	+ 19 9	+ 33 7	0,975
12	+ 18 35	+ 18 52	- 0 17	0,378
	+ 42 41	+ 28 27	+ 13 14	0,488
	+ 49 10	+ 39 26	+ 9 44	0,558
	+ 52 54	+ 54 31	- 1 37	0,618
13	+ 57 19	+ 72 51	- 15 32	0,971
14	+ 2 34	+ 2 34	0 0	0,839
15	- 53 8	- 52 8	- 1 0	0,998
22	+ 58 2	+ 16 44	+ 41 18	0,887
25	- 56 6	- 4 18	- 51 48	0,958

Diese Annahme weicht am 8., 22., 25. October sehr beträchtlich von der Beobachtung ab; andere Annahmen von θ und μ geben keinen besseren Erfolg. Die Vergleichung beider Hypothesen fällt also zum Vortheile der ersteren aus. Allein es sind noch andere Gründe vorhanden, welche der Schwingung der Ausströmung in der Ebene der Bahn günstig sind.

Der einer derselben beruht auf der Ausdehnung, in welcher der ausströmende Lichtkegel am 12. und 14. October gesehen wurde. An diesen Tagen befand er sich ziemlich nahe in der durch die Erde, den Cometen und die Sonne gelegten Ebene; zwischen beiden lag etwa eine halbe Periode von μ , oder eine Aenderung dieses Arguments von 180° . In der ersten Hypothese hat diese Aenderung keinen Einfluss auf die perspectivische Verkürzung; in der anderen erzeugt sie beträchtliche Verschiedenheiten der Verkürzungen, welche ich in der That eben $= 0,378$ und $= 0,839$ gefunden habe. Berücksichtigt man auch die Aenderung der Entfernung des Cometen von der Erde, und setzt man die Ausdehnung, in welcher die Ausströmung zur Zeit der ersten Beobachtung des 12. Octobers gesehen sein würde, wenn sie senkrecht auf der Gesichtslinie gestanden hätte, $= s$, so erhält man ihre scheinbaren Ausdehnungen, unter der Voraussetzung ihres wirklichen Gleichbleibens:

Hypothese	I.	II.
Octbr. 12.	0,969 . s	0,378 . s
14.	0,872 . s	0,784 . s

Am 12. October konnte ich die Ausdehnung über $30'$ weit von dem Mittelpunkte verfolgen, am 14. bis auf $45'$; an jenem Tage schien der Mond sehr hell, an

diesem war er abwesend und der Himmel ausgezeichnet heiter. Ohne diese Verschiedenheit der äusseren Umstände müsste ich einen geringeren Unterschied der beobachteten Ausdehnungen gefunden haben. Die wahre Grösse der Ausströmung selbst war dagegen wahrscheinlich am 14. beträchtlicher als am 12.; denn die Beobachtungen zeigen sie Anfangs kleiner und fortwährend wachsend bis zum 22., wo sie, trotz der Lichtschwächung, welche sie durch die mehr als doppelte Entfernung des Cometen von der Erde erlitten haben muss, fast anderthalbmal so gross war als am 14. Berücksichtigt man alles dieses, so scheint es der ersten Hypothese völlig entsprechend zu sein, wogegen es von der zweiten beträchtlich verschieden ist.

Der andere Grund beruht auf dem Ansehen der Ausströmung. Die Beobachtungen lassen keinen Zweifel darüber, dass die Ausströmung lebhafter war, wenn sie in der Richtung der Sonne erschien, als wenn sie beträchtlich von derselben abwich; in dem einen Maximo ihrer Abweichung von dieser Richtung, am 13., hatte sie ganz aufgehört sichtbar zu sein; in der Nähe des anderen, am 15., war sie äusserst unscheinbar geworden, wogegen sie am 12. und 14. sehr lebhaft erschien. Wenn ihre Bewegung einer Schwingung in der Ebene der Bahn zuzuschreiben ist, so ist es nicht nur denkbar, sondern auch wahrscheinlich, dass sie die grösste Lebhaftigkeit hatte, wenn sie sich in der Richtung ihrer Ursache, der Sonne, befand. Wenn sie dagegen eine Folge der Drehung um den Radiusvector ist, so behält sie immer dieselbe Neigung gegen die Sonne, und man sieht keinen Grund, der ihre verschiedene Lebhaftigkeit erklären könnte; sie müsste, im Gegentheil, in den Grenzen ihrer Bewegung am lebhaftesten erschienen sein, indem sie sich hier unverkürzt zeigte. Endlich kann man noch bemerken, dass eine Drehung um eine nicht feste, sondern immer auf die Sonne gerichtete Axe nur statthaft ist, wenn eine besondere physische Ursache dieser Bewegung der Axe angenommen wird.

Da die Beobachtungen der Positionswinkel der Ausströmung für die Richtigkeit ihrer Erklärung durch eine schwingende Bewegung sprechen und da unverwerfliche Gründe anderer Art, wie ich eben gezeigt habe, sich damit vereinigen, so sehe ich kein Bedenken, diese schwingende Bewegung in der Ebene der Bahn als ein Resultat der Beobachtung anzunehmen.

5.

Eine schwingende Bewegung der Ausströmung um die Richtung des Radiusvectors erfordert, dass die Sonne,

ausser der anziehenden Kraft, welche den Schwerpunkt des Cometen nach den Kepler'schen Gesetzen bewegt, noch eine drehende Kraft auf ihn äussere, deren Resultante entweder, wenn sie nach der Sonne gerichtet ist, durch einen auf der Sonnenseite des Schwerpunkts des Cometen liegenden Punkt geht; oder, wenn sie von der Sonne abwärts gerichtet ist, durch einen jenseits des Schwerpunkts liegenden Punkt; oder endlich, wenn sie nicht eine Resultante, sondern zwei Resultanten hat, dass die eine in dem ersten, die andere in dem zweiten Falle ist. Wäre dieses umgekehrt, so würde jede vorhandene Abweichung der Axe der Ausströmung von der Richtung nach der Sonne sich vermehrt und am Ende in die derselben entgegengesetzte verwandelt haben.

Ferner erfordert die schwingende Bewegung der Ausströmung, dass der Körper des Cometen selbst diese Bewegung besitze. Da die Theilchen der ausströmenden Materie nicht in einem festen Zusammenhange sind, so nimmt jedes derselben diejenige Bewegung an, welche eine Folge der auf dasselbe wirkenden Kräfte und des ursprünglichen Zustandes seiner Bewegung ist. Eine Zusammensetzung dieser Bewegungen aller Theilchen zu einer schwingenden Bewegung fällt mit der Annahme der Festigkeit der Ausströmung zugleich weg. Sie könnte nur durch die Kräfte erklärt werden, wenn man diesen selbst eine ähnliche schwingende Bewegung beilegen, also etwas annehmen wollte, wovon diese eine Folge ist. Es ist daher der ursprüngliche Zustand der Bewegung, dessen Wirkung wir beobachtet haben, und es geht aus dieser hervor, dass der Körper des Cometen die leuchtende Materie von einem Theile seiner Oberfläche ausgeströmt und ihre jedesmalige Richtung durch die Richtung dieses Theiles bestimmt hat.

Die gewöhnliche Anziehungskraft der Sonne auf schwere Körper reicht aber zur Erklärung einer Schwingung des Körpers des Cometen von so kurzer Periode als die beobachtete durchaus nicht hin und es wird nöthig, eine andere Ursache zu suchen. Es ist zwar gewiss, dass die der Sonne näheren Theile des Cometen stärker von ihr angezogen werden, als die entfernteren; und dass daraus, verbunden mit seiner Bewegung in einer krummlinigen Bahn, eine der wahren Libration des Mondes ähnliche, schwingende Bewegung entstehen kann, wenn er einen verlängerten Durchmesser der Sonne zuwendet. Aber wenn auch die Integration der bekannten Differentialgleichung der Libration, in dem Falle einer so excentrischen Bewegung, wie die des Cometen ist, noch nicht überstiegene Schwierigkeiten darbietet und wenn man auch, wegen der Unbekanntheit mit den Momenten der Trägheit desselben, noch

viel weniger zu einem Zahlenresultate für die Periode der Schwingung gelangen kann, so kann man doch leicht zeigen, dass die Schnelligkeit der Aenderung des Arguments dieser Bewegung eine Grösse von der Ordnung der Quadratwurzel aus dem durch den Cubus der Entfernung des Cometen von der Sonne dividirten Producte der Sonnenmasse in seinen Durchmesser ist. Diese Grösse ist also äusserst klein, oder die Periode der aus der anziehenden Kraft der Sonne entstehenden Bewegung ist äusserst lang. Die beobachtete Bewegung von kurzer Periode kann daher nicht auf diese Art erklärt werden.

Ich sehe weder, wie man sich der Annahme einer Polarkraft wird entziehen können, welche Einen Halbmesser des Cometen zu der Sonne zu wenden, den entgegengesetzten von ihr abzuwenden strebt, noch welcher Grund vorhanden sein könnte, die Annahme einer solchen Kraft a priori zurückzuweisen. Es fehlt sogar nicht an einer Analogie, indem die Erde selbst eine Polarität, die magnetische, besitzt, von welcher jedoch nicht bekannt ist, dass ihre Gegensätze sich auf die Sonne beziehen. Sollte dieses der Fall sein, so kann sich ein Einfluss davon in der Vorrückung der Nachtgleichen zeigen.

Dass diese Kraft, welche zur Erklärung der Schwingungen von kurzer Periode nothwendig erscheint, diese Erklärung vollständig gewähren kann, ist nicht zu bezweifeln. Die Periode hängt von der Stärke der Kraft ab; die Ausdehnung von einer willkürlichen, sich auf den ursprünglichen Zustand beziehenden Constante.

Ich füge noch hinzu, dass, wenn die Sonne auf einen Theil der Masse des Cometen mit einer anderen als der gewöhnlichen anziehenden Kraft wirkt, diesen Theil also stärker oder schwächer anzieht, oder ihn abstösst, diese besondere Wirkung nothwendig eine polarische, d. h. die entgegengesetzte Wirkung auf einen anderen Theil der Masse bedingende sein muss. Würde dieses nicht der Fall, so würde die Summe aller Kräfte, welche die Sonne auf die ganze Masse äussert, nicht dieser Masse proportional sein und folglich die Bewegung des Cometen nach den Kepler'schen Gesetzen nicht derselben Sonnenmasse entsprechen, welche wir aus den Bewegungen der Planeten erkennen. Dieses ist ganz gegen die Beobachtungen, welche selbst einen kleinen Unterschied schon verrathen haben würden. Wenn wir daher die Ueberzeugung erlangen können, dass nicht die ganze Masse des Cometen von der Sonne auf gewöhnliche Art angezogen wird, so haben wir dadurch einen neuen Beweis für die Wirkung einer Polarkraft in demselben.

6.

Indessen muss ich, ehe ich die weitere Erklärung der Erscheinungen versuche, welche die Cometen darbieten, eine vollständige Darstellung der Beobachtungen geben. Wir besitzen vortreffliche Abbildungen des Cometen von 1744 in einem besonderen, seine Beschreibung enthaltenden Werke von HEINSIUS.*) Diese Abbildungen beruhen auf Beobachtungen mit einem 4flüssigen Teleskope von SHORT, einem Instrumente, welches nach seinen Leistungen zu urtheilen, nicht mindere Auszeichnung verdient, als die ehemals so häufig vorkommenden anderen Instrumente desselben Meisters. Es sind dieses die einzigen vorhandenen Beobachtungen eines grossen und prachtvollen Cometen, dessen Kern bemerkenswerthe Eigenthümlichkeiten dargeboten hätte; der Kern des Cometen von 1811 war, vergleichungsweise mit dem von 1744, durchaus nicht lehrreich. Dieser aber war dem Halley'schen Cometen in jeder Beziehung so ähnlich, dass der eine das was der andere gezeigt hat, ergänzen kann. Bei dem Cometen von 1744 trat das, was der Halley'sche in einem kleineren Maasstabe zeigte, in einem grösseren hervor; es wird also häufiger Veranlassung sein, meine Beobachtungen durch die von HEINSIUS zu ergänzen als umgekehrt. Zu bedauern ist es, dass HEINSIUS auf die schwingende Bewegung der Ausströmung nicht aufmerksam gewesen ist, oder der Mittel entbehrt hat, ordentliche Beobachtungen darüber anzustellen.

Ueber die Figur des Kerns habe ich keine Beobachtungen machen können: vor dem 2. October nicht, weil der Comet noch zu entfernt und zu dunkel erschien; nach diesem Tage nicht, weil die Ausströmung nahe an dem Kerne zu hell war, um ein Urtheil über die Figur zu erlauben, welche er gezeigt haben würde, wenn er von der Ausströmung abgesondert gewesen wäre; im Allgemeinen nicht, weil er immer zu klein war, um seine nicht scharf begrenzte Figur deutlich zu zeigen. Der Comet von 1744 hatte aber einen beträchtlich verlängerten, der Sonne zugewandten Durchmesser, dessen Verhältniss zu dem kürzesten, senkrecht auf ihn stehenden, HEINSIUS = 3 : 2 angiebt. Dieser verlängerte Kern war schon vor dem Sichtbarwerden der Ausströmung, am 5. Januar vorhanden. Er behielt seine Form auch nachdem die Ausströmung sich gebildet hatte, bis zum Ende der Beobachtungen am 16. Februar. Die Ausströmung entstand an dem Scheitel des längsten Durchmessers. Ich führe diese Wahrnehmung an, um durch ein anderes Beispiel noch wahr-

*) [St. Petersburg 1744.]

scheinlicher zu machen, als es durch das Verhalten des Halley'schen Cometen schon geworden ist, dass die Sonne es ist, welche die Ausströmung erzeugt und den Theil der Cometenoberfläche, von welchem sie ausgeht, zu sich wendet.

Die Ausströmung in der Richtung der Sonne bemerkte HEINSIUS zuerst am 25. Januar, an welchem Tage sie so weit entwickelt gewesen zu sein scheint, wie die des Halley'schen Cometen am 8. oder 12. October. Am 31. Januar war sie der von mir am 22. October beobachteten beinahe gleich, mit dem einzigen Unterschiede, dass ihr Bestreben, sich von der Sonne abwärts zu krümmen, schon erfolgreicher gewesen war, und eine ihrer Grenzen wirklich schon in diesem Sinne mehr gekrümmt hatte, als meine Beobachtung dieses zeigt. Am 2. Februar war dieses Aufwärtsgen der ausgeströmten Materie bereits viel sichtbarer geworden und fand an beiden Grenzen statt; so dass es den Anfang zweier Schenkel eines Schweifes bildete, welche an den folgenden Tagen immer lebhafter und länger wurden. Die Beobachtungen beider Cometen lassen also nicht den geringsten Zweifel darüber, dass die Materie, welche der Sonne zu ausgeströmt wurde, nicht fortfuhr, sich dieser zu bewegen, sondern auf der Sonnenseite des Cometen ein Maximum ihrer Fortbewegung von derselben erlangte und dann nach der entgegengesetzten Richtung fortging.

Der Theil der Oberfläche des Cometen, von welchem die Ausströmung ausging, scheint, in beiden Fällen, mit der Annäherung an die Sonne grösser geworden zu sein. Bei dem Halley'schen Cometen wird dieses durch die Beobachtung vom 22. October und durch die spätere vom 25. angedeutet; bei dem Cometen von 1744 ist es, den Zeichnungen von HEINSIUS zufolge, sehr sichtbar. Anfangs strömte nur ein kleiner Theil der Oberfläche sichtbar aus; später wurde dieser Theil grösser und erstreckte sich immer weiter über die der Sonne zugewandte Hälfte desselben, so dass er, bei der letzten Beobachtung, am 16. Februar, diese ganze Hälfte einnahm. Während der ganzen Zeit der Beobachtungen, sowohl von HEINSIUS als von mir, strömte die Lichtmaterie, d. h. die sichtbar ausströmende, in nicht stumpfen Winkeln mit dem Radiusvector, also der Sonne zu, aus, welches ein für die Erklärung der Ursache der Erscheinung erhebliches Moment zu sein scheint.

Beide Cometen zeigen, wie aus dieser Vergleichung hervorgeht, die allergrösste Ähnlichkeit. Sie scheinen, ausser in der Grösse und ihrem Einflusse auf die Deutlichkeit aller Erscheinungen, nur darin verschieden zu sein, dass der von 1744 dieselben beständiger zeigte,

als der andere. Dieses aber rührt ohne Zweifel von der schwingenden Bewegung der Ausströmung des letzteren her, deren grosser Einfluss auf die Lebhaftigkeit der Ausströmung aus meinen Beobachtungen schon hervorgegangen ist. Obgleich HEINSIUS die Richtungen der Ausströmung nicht näher bestimmt, so kann man doch aus der Beständigkeit derselben als wahrscheinlich folgern, dass ihre Schwingungen weit geringere Ausdehnung besessen haben, als die des Cometen von 1835.

7.

Es ist mir eine Beobachtung gelungen, welche einen Beitrag zu der Kenntniss der Beschaffenheit des den Kern des Cometen zunächst umgebenden Nebels liefert. Der Comet ging nämlich, am 29. Septbr., sehr nahe bei einem Fixsterne der 10. Grösse vorbei, und ich benutzte diese Gelegenheit, zu untersuchen, ob das Licht des Sterns, durch den Nebel, von seiner geradlinigen Bewegung abgelenkt werde. Die Beobachtungsart, welche ich angewandt habe, besteht in der Messung einer Reihe von Entfernungen und Positionswinkeln des bedeckten Sterns, bezogen auf einen anderen Stern in seiner Nähe, welcher aber ausser dem Nebel blieb. Vorher hatte ich den Ort des Cometen, durch 12 ähnliche Beobachtungen, mit demselben Sterne verglichen und konnte also berechnen, welche Entfernung der Comet, zur Zeit einer Beobachtung des bedeckten Sterns, sowohl von dem wahren Orte desselben, als von dem dann beobachteten hatte. Der Unterschied beider musste eine vorhandene Strahlenbrechung verrathen. Man konnte erwarten, auf diese Art eine beträchtliche Sicherheit zu erlangen, indem die Vergleichen zweier Fixsterne untereinander sich genauer machen lassen, als die Vergleichen des Cometen mit einem Fixsterne, zumal mit einem, vergleichungsweise mit dem Cometen, so lichtschwachen, als der bedeckte war.

Der Vergleichssterne (*a*) hat die 8. Grösse und kommt in Nr. 449 und 490 meiner Zonen vor; sein scheinbarer Ort ergibt sich daraus:

$$99^{\circ} 7' 25,6'' \text{ und } 36^{\circ} 48' 23,6''.$$

Der bedeckte Stern (*b*) ist 10mal mit diesem angenommenen Orte verglichen worden und es hat sich daraus ergeben:

M. Z.	AR.	Decl.
12 ^b 89 ^m 41 ^s	98 ^h 49' 23,89"	36 ^g 52' 34,12"
46 40	24,36	34,51
50 19,6	21,36	34,10
53 6,1	23,43	33,60
59 11,1	24,04	34,25

M. Z.	AR.	Decl.
13 ^b 8 ^m 37 ^s	98° 49' 23",62	36° 52' 35",14
16 35	23,72	33,18
20 5	23,86	35,47
22 34	26,17	34,76
25 34	22,07	34,90

Zu den Zeiten der 3., 4. und 5. Beobachtungen war der Stern in dem dichteren Theile des Cometennebels; die übrigen, bei welchen er freier davon war, ergeben seinen wahren Ort:

$$98^{\circ} 49' 23",94 \quad \text{und} \quad 36^{\circ} 52' 34",58.$$

Um die Beobachtungen des Cometen reduciren und seinen Ort sowohl mit diesem wahren Orte, als auch mit den, zur Zeit seiner grösseren Nähe bei dem Sterne *b* beobachteten scheinbaren Oertern desselben vergleichen zu können, habe ich einige Oerter des Cometen aus den schon im 3. Art. benutzten Elementen berechnet, welche ich hier anführe:

M. Z. Paris.	AR.	Decl.	log ρ
8 ^b 20 ^m 17 ^s .2	98° 39' 33",43	36° 42' 46",61	9,74024
11 20 14,9	47 14,15	36 51 39,09	9,73664
14 20 12,7	55 2,32	37 0 39,73	9,73298

Die Beobachtungen des Cometen haben seinen scheinbaren Ort

$$11^{\text{h}} 0^{\text{m}} 53^{\text{s}} \text{ M. Z.} \quad 98^{\circ} 44' 38",95 \quad 36^{\circ} 46' 51",19$$

ergeben, und den Fehler der Elemente, mit Rücksicht auf die Parallaxen:

$$\text{in AR.} = -70",40, \quad \text{in Decl.} = +2",96.$$

Zur Beurtheilung der Güte dieser Bestimmung führe ich ihre Vergleichung mit den 12 einzelnen Messungen, auf welchen sie beruhet, an, nämlich die übrigbleibenden Unterschiede der einzelnen, sowohl im Sinne der Entfernung, als senkrecht darauf:

+ 4",41	- 0",95
- 3,11	+ 1,71
+ 1,93	- 0,57
- 1,99	+ 2,17
+ 0,25	- 1,71
- 1,51	- 0,60
- 1,21	- 0,48
+ 0,04	+ 1,06
+ 2,96	- 0,45
- 1,55	+ 0,01
+ 2,27	- 3,37
- 2,51	+ 3,32

Aus der Vergleichung des scheinbaren Ortes des Cometen und des wahren Ortes des Sterns geht hervor, dass jener diesem um 12^b 54^m 15^s M. Z. in der Entfernung 6",66 am nächsten gewesen ist. Seine schein-

BEZEL'S Abhandlungen. 1. Bd.

baren Oerter für die Zeiten der 3., 4., 5. Beobachtung sind:

98° 49' 20",72	36° 52' 19",01
27,86	27,36
43,52	45,67

und ihre Entfernungen von dem unteren [wahren] Orte des Sterns:

$$15",78; \quad 7",78; \quad 19",19.$$

Die Entfernungen des Cometen von den zu denselben Zeiten beobachteten Oertern des Sterns sind dagegen:

$$15",10; \quad 7",18; \quad 19",32.$$

Wollte man die Unterschiede beider einer Strahlenbrechung in der Cometatmosphäre zuschreiben, so würde man den doppelten Werth derselben:

$$- 0",68; \quad - 0",60; \quad + 0",13$$

erhalten. Es geht also hervor, dass in den Entfernungen von dem Mittelpunkte, in welchem die Beobachtungen gemacht worden sind, keine Strahlenbrechung merklich war. Die kleinen Unterschiede haben sogar zweimal das einer Strahlenbrechung entgegengesetzte Zeichen und deuten daher nicht die geringste Spur derselben an. Ich benutze diese Gelegenheit, um zu bemerken, dass eine Strahlenbrechung in der Atmosphäre des Cometen sich noch auf eine andere Art zeigen könnte. Wenn nämlich ihr Maximum durch *R* und die scheinbare Entfernung von dem Mittelpunkte des Cometen, in welcher dasselbe stattfindet, durch ρ bezeichnet werden, so muss man das gebrochene Licht des Sterns an dem ihm entgegengesetzten Rande des Cometen sehen, wenn seine wahre Entfernung = $2R - \rho$ ist; in kleineren Entfernungen bricht der Comet noch mehr Licht von dem Sterne zum Auge. In diesen Entfernungen muss man also, wenn eine Strahlenbrechung vorhanden ist, einen Abglanz des Sterns an dem Cometen, diesen also heller sehen, als er ohne die Nachbarschaft des Sterns erscheinen würde. Ich hoffe, vor der Erscheinung des Cometen, zur Beobachtung naher Vorübergänge desselben vor Fixsternen häufigere Gelegenheiten zu erhalten; allein es war nur die eine, angeführte vorhanden. Auch glaube ich, dass sich Gelegenheit darbieten würde, darauf zu achten, ob die Nähe heller Sterne das Licht des Cometen vermehre; allein der oft halbtrübe Zustand des Himmels raubte diese Gelegenheiten meistentheils; nach der Entstehung der Ausströmung wurde das Licht des Cometen so stark, dass man später auch nicht mehr erwarten konnte, etwas dieser Art wahrzunehmen, selbst wenn er in die Nähe sehr heller Sterne gekommen wäre.

Die angeführte Beobachtung zeigt mit Gewissheit, dass der in 7",78 Entfernung von dem Mittelpunkte noch sehr dichte Nebel keine Strahlenbrechung geäußert hat.

Will man daraus schliessen, dass der Nebel eben so wenig in noch kleineren Entfernungen als in dieser eine strahlenbrechende Kraft äussere, so kann man ihn schwerlich für eine gasartige Flüssigkeit, sondern nur als aus getrennten Theilen bestehend ansehen; wenigstens fehlt uns die Analogie eines Gases, welches nicht auf das Licht wirkte.

8.

Bei dem angeführten Vorübergange des Cometen vor einem Sterne, so wie bei mehreren anderen weniger nahen Vorübergängen; erlitten die Sterne eine beträchtliche Schwächung ihres Lichtes. Einigen Beobachtern früherer Cometen sind Sterne im Nebel der Cometen mit ungeschwächter Helligkeit erschienen. OLBERS sah dagegen, dass Sterne der 8. Grösse, als sie in der hellen Begrenzung des Schweifes des Cometen von 1811 standen, beträchtlich schwächer erschienen (Mon. Corr. XXV. p. 15). Ich bin gleichfalls nicht zweifelhaft darüber, dass ich Sterne in dem Nebel des Cometen schwächer gesehen habe, als ausser demselben; allein man kann dadurch die Ueberzeugung nicht erlangen, ob die Schwächung des Lichtes nicht vielleicht allein dem hellen Grunde zuzuschreiben ist, auf welchem die Sterne erschienen. Entscheidend in dieser Frage scheint mir eine wichtige Beobachtung von ARAGO zu sein, deren Kenntniss ich der gütigen Mittheilung von OLBERS verdanke. Herr ARAGO hat nämlich untersucht, ob der Comet polarisirtes Licht enthalte und gefunden, dass er wirklich solches Licht besass.*) Da dieses nur der Fall sein kann, wenn der Comet Licht zurückwirft, so kann nicht weiter bezweifelt werden, dass er das Licht der Sterne, bei dem Durchgange desselben, schwächt; denn das Zurückwerfen des Lichts beweist, dass es nicht ohne Hinderniss hindurchgeht.

Die eben angeführte Beobachtung von ARAGO ist ein wichtiger Beitrag zur Kenntniss des Cometen, weil sie keinen Zweifel darüber lässt, dass er Sonnenlicht reflectirt. Indessen wird, wenn auch der Comet alles Licht, welches er zeigt, von der Sonne empfängt, nur ein kleiner Theil desselben polarisirt; und daraus, dass er polarisirtes Licht enthält, folgt nicht, dass der weit grössere, nicht polarisirte Theil seines Lichts ganz aus Sonnenlicht bestehe. Ich würde diese Bemerkung für unnütz halten, wenn nicht meine Beobachtungen anzudeuten schienen, dass der Comet eigenthümliches Licht entwickelt habe. Sie haben freilich weder das Verdienst der Arago'schen, noch haben sie von der veränderlichen Durchsichtigkeit der Luft unabhängig ge-

*) [Oeuvres, XIV (Astron. II), 423.]

macht werden können. Allein dennoch scheint es mir, als dürfe die grosse, am 2. October sichtbar gewordene Vermehrung der Helligkeit, in Verbindung mit der gleichzeitigen Entstehung der Ausströmung, eben so wenig ganz übersehen werden, als die Abnahme des Glanzes des Kerns, welche am 14. October, trotz ausgezeichneter Heiterkeit des Himmels, bemerkt wurde.

Mehrere Beobachter haben frühere Cometen über Sterne hinweggehen sehen und diese nicht aus dem Gesichte verloren. Wenn ein Vorübergang wirklich central gewesen ist und wenn die Atmosphäre des Cometen keine Strahlenbrechung besitzen hat, so begründet diese Beobachtung den Schluss, dass der Kern des Cometen kein undurchsichtiger Körper gewesen ist. Ich glaube zwar nicht, dass man die völlige Ueberzeugung hat erlangen können, dass die beobachteten Bedeckungen central waren; auch bin ich der Meinung, dass die Behauptung der gänzlichen Abwesenheit einer Strahlenbrechung auf Beobachtungen gegründet werden müsste, durch welche der scheinbare Ort eines Sterns in noch grösserer Nähe bei dem Mittelpunkte des Cometen bestimmt wird, als durch meine, im vorigen Artikel mitgetheilte Beobachtung der Fall ist. Demohngeachtet aber halte ich für wahrscheinlich, dass der Kern des Cometen kein eigentlich fester Körper ist, d. h. kein fester Körper der Art wie die Erde, der Mond und die Planeten. Er muss in der That leicht in den Zustand der Verflüchtigung übergehen können, während die eben genannten Körper diese Eigenschaft nicht, oder wenigstens in einem geringen Grade besitzen: indem seine Oberfläche keine feste Begrenzung zeigt, scheint sie sich in diesem Zustande zu befinden; der fast unbegreiflich grosse Raum, welcher durch die Schweife vieler Cometen gefüllt wird, verbunden mit der wahrscheinlichen äussersten Kleinheit ihrer Massen, zeigt gleichfalls, dass die Materie der Cometen die Eigenschaft erlangt, sich unbegrenzt auszudehnen. Allein diese Eigenschaft kann die Masse des Cometen ursprünglich nicht besitzen; wenigstens kann sie keine Materie sein, welche keine Dichtigkeit hat, wenn sie keinen Druck erleidet, denn eine solche Materie würde sich offenbar gänzlich zerstreuen. Ich sehe aber keine Schwierigkeit der Annahme, dass die Cometen aus Theilen bestehen, welchen nur noch wenig an der Wärme oder einer anderen repulsirenden Eigenschaft fehlt, welche sie besitzen müssen um flüchtig zu werden. Dass die Verflüchtigung sich an dem der Sonne gerade zugewandten Theile der Oberfläche am frühesten zeigt, auch dass sie sich durch grössere Annäherung an die Sonne und durch längere Dauer ihrer Wirkung vermehrt und über einen

immer grösser werdenden Theil der Oberfläche erstreckt, ist nach dieser Ansicht zu erwarten, so wie auch mit den Beobachtungen übereinstimmend. Dass die Verflüchtigung, durch den mit ihr verbundenen Wärmeverlust, das Mittel werden kann, durch welches ein Theil der Cometenmasse vor der Zerstreuung geschützt wird, ist, wenn ich nicht irre, schon von LAPLACE bemerkt worden. Endlich bemerke ich noch, dass mit dieser Ansicht durchsichtige oder undurchsichtige, strahlenbrechende oder nichtstrahlenbrechende Cometenkerne vereinbar sind.

9.

Glücklicherweise verhindert die Unsicherheit, in welcher wir uns nothwendigerweise befinden, wenn von den Bestandtheilen der Cometen die Rede ist, nicht die Anstellung von Untersuchungen über die Bewegung der Theilchen, welche sich von ihnen trennen. Diese ist den allgemeinen Gesetzen der Bewegung der Punkte unterworfen, welche ich demnach darauf anzuwenden suchen werde.

Vorher muss ich jedoch der Ansicht gedenken, welche NEWTON von der Entstehungsart der Cometschweife hatte;* denn nach dieser Ansicht würde die Bewegung der Theilchen eines angenommenen, den Weltraum füllenden Aethers, nicht der Theilchen der Cometen, zu untersuchen sein. NEWTON verglich das Aufsteigen des Cometennebels mit dem Aufsteigen des Rauches in der Luft; er nahm an, dass Brechungen und Zurückwerfungen des Lichts, durch die Atmosphäre der Cometen veranlasst, die umgebenden Aethertheile erwärmen und leichter machen, so dass sie in dem höheren, schwereren Aether aufsteigen und Theile der Atmosphäre mit sich fortreißen. Indem diese Ansicht von NEWTON ist, muss sie den ihm bekannten Eigenschaften der Cometschweife angemessen sein; es ist aber unmöglich, sie mit Erscheinungen zu vereinigen, welche man später wahrgenommen hat.

Ich erinnere an den Cometen von 1811, dessen Schweif die auffallende Erscheinung eines von dem Kerne getrennten, etwas parabolisch gekrümmten und mit seinem Scheitel der Sonne zugewandten Streifens zeigte; an denselben Cometen, welchen OLBERS in seiner gedankenreichen Abhandlung über die Cometschweife beschrieben hat.** Ferner erinnere ich an den Cometen von 1807, welcher einen längeren, fast geraden und einen kürzeren, stark gekrümmten Schweif zeigte. Endlich führe ich den Cometen von 1824 an, welcher zwei

mehrere Grade lange Schweife, den einen der Sonne zu-, den anderen von ihr abgewandt zeigte. Ich sehe diese Cometen als unzweideutige Beweise gegen die Meinung, dass die Theile der Cometenatmosphäre durch erwärmte Aethertheile mit sich fortgerissen werden, an, und werde mich daher bemühen, die Bewegungen der ersteren, nicht der letzteren, zu bestimmen.

Wenn man nicht allein die Wirkung der Sonne, sondern auch die Wirkung des Cometen auf ein sich frei bewegendes Theilchen berücksichtigen will, so ist die aufzulösende Aufgabe offenbar die der drei Körper, welche, wenn man ihre Allgemeinheit nicht beschränkt, bekanntlich auf nicht überstiegene Schwierigkeiten führt. Aber wenn man die Wirkung des Cometen nur in kleinen Entfernungen als merklich ansehen und sich begnügen will, die Bewegung eines Theilchens nach seinem Ausgange aus der Wirkungssphäre der Cometen zu untersuchen, so verliert die Aufgabe ihre Schwierigkeit. Wirklich hat man allen Grund, die Massen der Cometen, vergleichungsweise mit denen der Planeten, noch mehr also der Sonne, als beinahe verschwindend anzunehmen und demzufolge vorauszusetzen, dass ihre Wirkung nur in ganz kleinen Entfernungen merklich, oder mit der der Sonne vergleichbar ist. Was man durch die Untersuchung der Bewegung der Theilchen ausserhalb der Wirkungssphäre des Cometen verliert, ist die Kenntniss der Theorie ihrer Bewegung innerhalb derselben; eine Kenntniss, von welcher man übrigens wahrscheinlich keinen Nutzen würde ziehen können, indem der ursprüngliche Zustand der Bewegung eines Theilchens und die an der Oberfläche des Cometen wirkenden Kräfte wahrscheinlich unbekannt bleiben werden. Ich nehme für den ursprünglichen Zustand der Bewegung eines Theilchens den an, mit welchem es nicht den Cometen selbst, sondern seine Wirkungssphäre verlässt.

Ich werde den Punkt beziehungsweise auf den Cometen bestimmen, in welchem sich zur Zeit t ein Theilchen befindet, welches die Wirkungssphäre des Cometen zur Zeit $t - \tau$, an einem gegebenen Orte, mit gegebener Geschwindigkeit und in gegebener Richtung verlassen hat. Die Rechnung gründe ich nicht auf die Voraussetzung, dass die Masse, mit welcher die Sonne auf das Theilchen wirkt, der Masse $= 1$, mit welcher sie die Planeten und den Cometen selbst anzieht, gleich sei; vielmehr soll jene Masse durch μ bezeichnet werden und im Laufe der Rechnung unbestimmt bleiben. Zur Abkürzung werde ich nur Theilchen betrachten, welche sich in der Ebene der Bahn bewegen.

Ueber die unbestimmt bleibende Masse der Sonne in Beziehung zu dem Theilchen muss ich eine Erläu-

* [Philos. nat. princ. math. London 1687. 1. Ausg. p. 501. — Vgl. auch ZÖLLNER, Natur d. Cometen p. 134.]

** [Mon. Corresp. XXV. 3.]

terung voranschicken. Die Kraft, mit welcher die Sonne das Theilchen zu bewegen sucht, wird in der Entfernung r

$$= \frac{\mu}{rr}$$

vorausgesetzt. Wenn μ den Werth 1 hat, so ist die Wirkung der gewöhnlichen Anziehung der Sonne gleich; wenn $\mu < 1$, so ist die erstere kleiner als die letztere; wenn μ negativ, so verwandelt sich die Anziehung in eine Zurückstossung. In beiden, von der gewöhnlichen Anziehung verschiedenen Fällen ist es aber nicht nothwendig, der Sonne selbst eine andere Anziehungskraft oder eine Abstossungskraft auf das Theilchen zuzuschreiben; es bleibt möglich, beide durch die gewöhnliche Anziehungskraft der Sonne zu erklären. Man muss, wenn man dieses will, einen Aether annehmen, welcher zu der Sonne gravitirt, ohne der Bewegung einen Widerstand zu leisten. In dieser Voraussetzung ist die relative Anziehungskraft, mit welcher die Sonne auf ein Theilchen von der Dichtigkeit d , in einem Aether von der Dichtigkeit d' wirkt,

$$= \frac{d-d'}{dr} = \left(1 - \frac{d'}{d}\right) \frac{1}{rr}.$$

Man kann auf diese Art jede beliebige Anziehungskraft, wenn sie kleiner als die gewöhnliche ist, und auch eine Abstossungskraft erklären. Doch hat die letztere eine Grenze, wie Untersuchungen über die Bewegung eines Pendels in der Luft und POISSON'S bewunderungswürdige Analyse derselben gezeigt haben:*) die Bewegung des Schweiftheilchens im Aether wird nämlich die nothwendige Veranlassung einer Bewegung des Aethers selbst und die bewegendende Kraft des ersteren wird verwandt, eine grössere Masse in Bewegung zu setzen, als die des Schweiftheilchens ist. Aus diesem Grunde ist die beschleunigende Kraft kleiner als die relative Anziehungskraft der Sonne; ihr Ausdruck ist

$$\frac{d-d'}{d+kd'}$$

wo k einen positiven Coefficienten bezeichnet, dessen Werth von der Figur des bewegten Theilchens abhängt, den man aber bis jetzt weder durch die Analyse noch durch Beobachtungen für den Fall einer progressiven, sehr schnellen Bewegung kennen gelernt hat. Für eine Kugel, welche sehr kleine Schwingungen macht, findet POISSON $k = \frac{1}{2}$; die Beobachtungen haben einen beträchtlich grösseren Werth, nahe $= 1$ gegeben. Die Grenze der Abstossungskraft, welche man durch einen nicht widerstehenden Aether erklären kann, und welche erreicht wird, wenn die Dichtigkeit der bewegten Körper, vergleichungsweise mit der Dichtigkeit des Aethers,

*) [Connais. d. temps 1834.]

unendlich klein angenommen wird, ist $= \frac{1}{k}$. Man darf hoffen, dass die jetzt zur Preisbewerbung offene Aufgabe des Pariser Instituts zur Kenntniss eines, in ähnlichen Fällen wie der hier vorkommende, anwendbaren Werthes von k führen werde. Wird der Aether nicht bloss als schwer, sondern auch als widerstehend angenommen, so muss offenbar ein Maximum der Geschwindigkeit eines sich von der Sonne entfernenden Theilchens, bei einem nicht unendlich kleinen Werthe der Dichtigkeit desselben, eintreten.

10.

Ich bezeichne die Coordinaten des Cometen zur Zeit t , auf die Apsidenlinie der Bahn und die darauf senkrechte, durch die Sonne gehende Axe bezogen, durch x und y , seinen Radiusvector und seine wahre Anomalie durch r und v ; für die Zeit $t - \tau$ erhalten dieselben Grössen die Bezeichnungen x_0, y_0, r_0, v_0 ; für das Theilchen haben x', y', r', v' und x'_0, y'_0, r'_0, v'_0 dieselben Bedeutungen. Wenn man von dem Theilchen zur Zeit t ein Perpendikel auf den Radiusvector des Cometen fällt und die Entfernung seines Fusspunktes von dem Cometen, von der Sonne abwärts positiv genommen, durch ξ ; das Perpendikel selbst, in der Richtung von welcher der Comet herkommt positiv genommen, durch η bezeichnet, so sind:

$$\left. \begin{aligned} r\xi &= xx' + yy' - rr' \\ r\eta &= yx' - xy' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

durch τ und die zur Bestimmung der Bewegung des Theilchens nothwendigen Constanten auszudrücken.

Für diese Aufgabe kann man, durch die bekannte Theorie der Bewegung um einen Centralkörper, eine endliche Auflösung erhalten. Allein diese hat hier kein Interesse, indem die Constanten, von welchen die Bewegung des Theilchens abhängt, explicite in der Rechnung bleiben müssen, damit man beurtheilen könne, welchen Einfluss willkürliche Annahmen dieser Constanten und der Grösse μ auf den Ort des Theilchens haben. Unter der Beschränkung auf kleine Werthe von τ kann man die Auflösung nach den Potenzen dieser Grösse entwickeln, welcher Weg mir der hier zweckmässigste zu sein scheint. Die Entwicklung werde ich bis τ^3 incl. machen.

Die Coordinaten des Cometen zur Zeit $t - \tau$ sind nach dem Taylorschen Lehrsatz:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x - \frac{dx}{dt} \tau + \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{\tau^2}{2} - \text{etc.} \dots \dots \\ y_0 &= y - \frac{dy}{dt} \tau + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{\tau^2}{2} - \text{etc.} \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Wenn man die relativen Coordinaten des Theilchens zu derselben Zeit durch

$$\begin{aligned} x'_0 - x_0 &= a \\ y'_0 - y_0 &= b \end{aligned}$$

bezeichnet, so hat man also:

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= a + x - \frac{dx}{dt} \tau + \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{\tau^2}{2} - \text{etc.} \dots \\ y'_0 &= b + y - \frac{dy}{dt} \tau + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{\tau^2}{2} - \text{etc.} \dots \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Wenn man ferner die relativen Geschwindigkeiten des Theilchens, in dem Augenblicke seines Ausganges aus der Wirkungssphäre des Cometen, d. h. zur Zeit $t - \tau$, durch

$$\begin{aligned} \frac{dx'_0}{dt} - \frac{dx_0}{dt} &= \alpha \\ \frac{dy'_0}{dt} - \frac{dy_0}{dt} &= \beta \end{aligned}$$

bezeichnet, so hat man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx'_0}{dt} &= \alpha + \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \tau + \frac{d^3x}{dt^3} \cdot \frac{\tau^2}{2} - \text{etc.} \dots \\ \frac{dy'_0}{dt} &= \beta + \frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2} \tau + \frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{\tau^2}{2} - \text{etc.} \dots \end{aligned} \right\} (4)$$

Man erhält endlich durch nochmalige Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes die Coordinaten des Theilchens zur Zeit t :

$$\left. \begin{aligned} x' &= x'_0 + \frac{dx'_0}{dt} \tau + \frac{d^2x'_0}{dt^2} \cdot \frac{\tau^2}{2} + \text{etc.} \dots \\ y' &= y'_0 + \frac{dy'_0}{dt} \tau + \frac{d^2y'_0}{dt^2} \cdot \frac{\tau^2}{2} + \text{etc.} \dots \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Wenn diese gefunden sind, giebt die Substitution ihrer Ausdrücke in (1) die gesuchten ξ und η .

Die angedeuteten Differentirungen werde ich nur für eine der Coordinaten ausführen, indem das für diese geltende auch für die andere gilt. Die Differentialgleichungen der Bewegung des Cometen:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} \\ 0 &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} \end{aligned}$$

ergeben

$$x' = x + a + \alpha \tau + \left\{ (1 - \mu) \frac{x}{r^3} - \frac{\mu \alpha}{r^3} + \frac{3\mu x}{r^3} (ax + by) \right\} \frac{\tau^3}{2} - \left\{ \frac{2(1 - \mu)}{r^3} \left(\frac{dx}{dt} - \frac{3x}{r} \frac{dr}{dt} \right) - \frac{\mu \alpha}{r^3} - \frac{3\mu x}{r^3} (ax + \beta y) \right\} \frac{\tau^4}{6} \dots (7)$$

Setzt man diesen Ausdruck und den ähnlichen für y' in (1) und schreibt man für $x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$ die Quadrat-

$$\left. \begin{aligned} r \xi &= ax + by + (ax + \beta y) \tau + \left\{ \frac{1 - \mu}{r} + \frac{2\mu}{r^3} (ax + by) \right\} \frac{\tau^2}{2} + \left\{ \frac{4(1 - \mu)}{r^3} \frac{dr}{dt} + \frac{4\mu}{r^3} (ax + \beta y) \right\} \frac{\tau^3}{6} \\ r \eta &= ay - bx + (\alpha y - \beta x) \tau - \frac{\mu}{r^3} (ay - bx) \frac{\tau^2}{2} + \left\{ \frac{2(1 - \mu)}{r^3} \nu p + \frac{\mu}{r^3} (\alpha y - \beta x) \right\} \frac{\tau^3}{6} \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

Die vier Constanten, welche in diesen Ausdrücken vorkommen, werden am zweckmässigsten durch den

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{x}{r^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{1}{r^3} \frac{dx}{dt} + \frac{3x}{r^4} \frac{dr}{dt}, \end{aligned}$$

wodurch (3) und (4) sich in:

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= a + x - \frac{dx}{dt} \tau - \frac{x}{r^3} \frac{\tau^3}{2} + \left(\frac{1}{r^3} \frac{dx}{dt} - \frac{3x}{r^4} \frac{dr}{dt} \right) \frac{\tau^4}{6} \\ \frac{dx'_0}{dt} &= \alpha + \frac{dx}{dt} + \frac{x}{r^3} \tau - \left(\frac{1}{r^3} \frac{dx}{dt} - \frac{3x}{r^4} \frac{dr}{dt} \right) \frac{\tau^2}{2} \end{aligned} \right\} (6)$$

verwandeln.

Die Differentialgleichungen der Bewegung des Theilchens sind von denen des Cometen dadurch verschieden, dass die Sonnenmasse nicht = 1, sondern = μ gesetzt wird. Man erhält also dadurch:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x'}{dt^2} &= -\frac{\mu x'}{r'^3} \\ \frac{d^2y'}{dt^2} &= -\frac{\mu}{r'^3} \frac{dx'}{dt} + \frac{3\mu x'}{r'^4} \frac{dr'}{dt} \end{aligned}$$

und wenn man dieses, auf die Zeit $t - \tau$ angewandt, in (5) setzt,

$$x' = x'_0 + \frac{dx'_0}{dt} \tau - \frac{\mu x'_0}{r'_0{}^3} \frac{\tau^3}{2} - \left(\frac{\mu}{r'_0{}^3} \frac{dx'_0}{dt} - \frac{3\mu x'_0}{r'_0{}^4} \frac{dr'_0}{dt} \right) \frac{\tau^4}{6}$$

Substituirt man hierin für x'_0 und $\frac{dx'_0}{dt}$ ihre Ausdrücke (6), so erhält man:

$$\begin{aligned} x' &= a + x + \alpha \tau + \left(\frac{x}{r^3} - \frac{\mu(x+a)}{r'_0{}^3} \right) \frac{\tau^3}{2} \\ &\quad - \left\{ \frac{2}{r^3} \frac{dx}{dt} - \frac{6x}{r^4} \frac{dr}{dt} - \frac{2\mu}{r'_0{}^3} \left(\frac{dx}{dt} - \alpha \right) - \frac{3\mu(x+a)}{r'_0{}^4} \frac{dr'_0}{dt} \right\} \frac{\tau^4}{6} \end{aligned}$$

Um die Entwickelung vollständig zu erhalten, muss noch r'_0 in eine Reihe aufgelöst werden. Ich kürze indessen die Formel dadurch ab, dass ich Grössen von der Ordnung des Quadrates des Halbmessers der Wirkungssphäre des Cometen, oder aa, ab, bb , und im letzten Gliede auch a und b selbst, vernachlässige. Dadurch wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'_0{}^3} &= \frac{1}{r^3} - \frac{3(ax + by)}{r^5} + \frac{3}{r^4} \frac{dr}{dt} \tau \\ \frac{1}{r'_0{}^4} + \frac{dr'_0}{dt} &= \frac{1}{r^4} \frac{dr}{dt} + \frac{\alpha x + \beta y}{r^5} \end{aligned}$$

und endlich

$$\left. \begin{aligned} r \xi &= ax + by + (ax + \beta y) \tau + \left\{ \frac{1 - \mu}{r} + \frac{2\mu}{r^3} (ax + by) \right\} \frac{\tau^2}{2} + \left\{ \frac{4(1 - \mu)}{r^3} \frac{dr}{dt} + \frac{4\mu}{r^3} (ax + \beta y) \right\} \frac{\tau^3}{6} \\ r \eta &= ay - bx + (\alpha y - \beta x) \tau - \frac{\mu}{r^3} (ay - bx) \frac{\tau^2}{2} + \left\{ \frac{2(1 - \mu)}{r^3} \nu p + \frac{\mu}{r^3} (\alpha y - \beta x) \right\} \frac{\tau^3}{6} \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

Halbmesser f der Wirkungssphäre und den Winkel F' des nach dem Punkte, von welchem das Theilchen aus-

geht, gelegten Radius mit dem Radiusvector, so wie auch durch seine anfängliche Geschwindigkeit g und den Winkel G der Richtung seiner Bewegung mit dem Radiusvector, ausgedrückt. Zählt man beide Winkel von der Sonne an und nach der Richtung hin, von welcher der Comet herkommt, so hat man:

$$a = -f \cos(v_0 + F) \quad \alpha = -g \cos(v_0 + G)$$

$$\xi = -f \cos(v - v_0 - F) - g \cos(v - v_0 - G) \tau + \left\{ \frac{1-\mu}{rr} - \frac{2\mu}{r^2} f \cos(v - v_0 - F) \right\} \frac{\tau^2}{2} + \left\{ \frac{(1-\mu)}{r^2} \frac{4e \sin v}{Vp} - \frac{4\mu}{r^2} g \cos(v - v_0 - G) \right\} \frac{\tau^3}{6} \quad (9)$$

$$\eta = -f \sin(v - v_0 - F) - g \sin(v - v_0 - G) \tau + \frac{\mu}{r^2} f \sin(v - v_0 - F) \frac{\tau^2}{2} + \left\{ \frac{(1-\mu)}{r^2} 2Vp - \frac{\mu}{r^2} g \sin(v - v_0 - G) \right\} \frac{\tau^3}{6}$$

Da in v_0 noch die Zeit τ enthalten ist, so fordert die Vollständigkeit der Entwicklung, dass man v_0 noch durch v und τ ausdrücke, oder:

$$\cos v_0 = \cos v + \sin v \frac{Vp}{rr} \tau - \left(\frac{p}{r^2} \cos v - \frac{2e \sin v}{r^2} \right) \frac{\tau^2}{2} + \dots$$

$$\xi = -f \cos F - \left\{ g \cos G + f \sin F \frac{Vp}{rr} \right\} \tau + \left\{ \frac{1-\mu}{rr} - g \sin G \frac{2Vp}{rr} - f \cos F \left(\frac{2\mu}{r^2} - \frac{p}{r^2} \right) - f \sin F \frac{2e \sin v}{r^2} \right\} \frac{\tau^2}{2} + \left\{ \frac{1-\mu}{r^2} \frac{4e \sin v}{Vp} - g \cos G \left(\frac{4\mu}{r^2} - \frac{3p}{r^2} \right) - g \sin G \frac{6e \sin v}{r^2} \right\} \frac{\tau^3}{6} + \dots$$

$$\eta = f \sin F + \left\{ g \sin G - f \cos F \frac{Vp}{rr} \right\} \tau - \left\{ g \cos G \frac{2Vp}{rr} + f \sin F \left(\frac{\mu}{r^2} + \frac{p}{r^2} \right) + f \cos F \frac{2e \sin v}{r^2} \right\} \frac{\tau^2}{2} + \left\{ \frac{1-\mu}{r^2} 2Vp + g \sin G \left(\frac{\mu}{r^2} - \frac{3p}{r^2} \right) - g \cos G \frac{6e \sin v}{r^2} \right\} \frac{\tau^3}{6} - \dots \quad (10)$$

11.

Ich werde jetzt diese Theorie mit den verschiedenen Erscheinungen vergleichen, welche der Halley'sche Comet und der von 1744 dargeboten haben; später werde ich sie auch auf andere Cometen verwenden.

Wenn man zuerst nur eine Ausströmung in der Richtung der Sonne betrachtet, oder F und $G = 0$ setzt, so verwandelt sich der Ausdruck von η in:

$$-f \frac{Vp}{rr} \tau - \left(\frac{gVp}{rr} - f \frac{e \sin v}{r^2} \right) \tau^2 + \left(\frac{1-\mu}{r^2} Vp + g \frac{3e \sin v}{r^2} \right) \frac{\tau^3}{3}$$

Da zur Zeit der Beobachtungen des Halley'schen Cometen derselbe noch vor seinem Durchgange durch das Perihel war, war $\sin v$ negativ: die beiden ersten Glieder des Ausdruckes sind daher negativ, und alle Theilchen, welche zwischen der Beobachtungszeit und einer früheren in der Richtung nach der Sonne ausgeströmt sind, gehen dem Cometen voran, falls der Unterschied beider Zeiten nicht so gross ist, dass das in seinen

$$b = -f \sin(v_0 + F) \quad \beta = -g \sin(v_0 + G)$$

Setzt man überdies

$$x = r \cos v \quad y = r \sin v$$

und

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e \sin v}{Vp}$$

so verwandeln die Formeln (8) sich in:

$$\sin v_0 = \sin v - \cos v \frac{Vp}{rr} \tau - \left(\frac{p}{r^2} \sin v + \frac{2e \sin v \cos v}{r^2} \right) \frac{\tau^2}{2} + \dots$$

setze. Dadurch erhält man die vollständig entwickelten Formeln:

Cubus multiplicirte dritte Glied grösser wird als die beiden früheren, in die erste Potenz und das Quadrat multiplicirten. Dieses findet aber, wie man aus dem Ausdrucke von ξ leicht ableiten kann, für einen Werth von τ , für welchen ein Theilchen sich noch im Sinne von ξ von dem Cometen entfernt, nicht statt. Die sich der Sonne nähernden Theilchen müssen also sämmtlich dem Cometen vorangehen.

Hierdurch wird die Krümmung der Ausströmung erklärt, welche ich vorzugsweise an der rechten, vorangehenden Grenze derselben beobachtet habe. Allein diese Ursache ist nicht die einzige, welche eine Krümmung der Anströmung verursacht; die drehende Bewegung des Cometen, welcher die Ausströmung folgt, vereinigt sich entweder mit ihr, oder wirkt ihr entgegen, je nachdem sie von der rechten Seite zur linken oder umgekehrt geht. Denn die ausgeströmten Theilchen, welche ihre ursprüngliche Drehungsgeschwindigkeit während ihres Aufstieges behalten, bleiben hinter

der Richtung des Punktes, von welchem sie ausgegangen sind, desto mehr zurück, je weiter sie sich von ihm entfernen. Das Zusammenwirken beider Ursachen fand am 8. und 12. October statt; ihr Gegeneinanderwirken am 14.: es ist also nicht auffallend, dass an den ersteren Tagen die Krümmung auf der rechten Seite sehr sichtbar erschien, während sie an dem letzteren auf beiden Seiten vielleicht gleich war. Genauer konnte man dieses nicht beurtheilen, weil die Ausströmung am 14. an beiden Grenzen des Kegels nicht gleich lebhaft war; an der schwächeren linken Seite musste sie sich früher mit dem hellen Grunde vermischen, auf welchem sie lag.

Hierdurch wird ferner erklärt, warum immer mehr ausgeströmte Materie auf der rechten Seite lag als auf der linken, und warum die Grenze derselben, auf der Sonnenseite, nicht gleichförmig convex erschien (vgl. Art. 1 am Ende). Die in grösserer Menge nach der rechten Seite strömende Materie musste wirklich beide Erscheinungen zur Folge haben.

Die Ausdehnung des Nebels auf der Sonnenseite des Kerns ist mit μ und der Ausgangsgeschwindigkeit in einer Verbindung, welche es der Mühe werth ist, näher zu untersuchen. Bezeichnet man den Ausdruck von ξ (10), abgekürzt, durch

$$\xi = a + b\tau + c\frac{\tau^2}{2} + d\frac{\tau^3}{6}$$

so haben diejenigen der vor der Beobachtungszeit aus der Wirkungssphäre des Cometen ausgegangenen Theilchen das Maximum von ξ erreicht, für welche

$$0 = \frac{d\xi}{d\tau} = b + c\tau + d\frac{\tau^2}{2}$$

ist, welchen also

$$\tau = \frac{R-c}{d} \left(R = \sqrt{cc - 2bd} \right)$$

zugehört. Setzt man diesen Werth von τ in den Ausdruck von ξ , so erhält man sein Maximum, welches ich durch $-\epsilon$ bezeichnen werde, aus dem Ausdrucke:

$$\epsilon + a = \frac{(R-c)^3(2R+c)}{6dd},$$

welchen man, da

$$d = \frac{cc - RR}{2b}$$

ist, auch

$$\epsilon + a = \frac{3}{2}bb \frac{2R+c}{(R+c)^2}$$

schreiben kann.

Wenn ϵ eine kleine Grösse ist, wie bei dem Halley'schen Cometen, so ist nothwendig, dass b , vergleichungsweise mit $1 - \mu$, auch eine kleine Grösse sei. Lässt

man daher alles weg, was über das Quadrat von b hinausgeht, und setzt man für die Coefficienten ihre Ausdrücke, so erhält man:

$$\epsilon = f \cos F + \frac{rr}{2(1-\mu)} \left(g \cos G + f \sin F \frac{VP}{rr} \right)^2$$

Der grösste Werth dieses Ausdruckes ist die weiteste Entfernung des Nebels auf der Sonnenseite des Cometen. Da derselbe sehr nahe für $F=0$ und $G=0$ stattfindet, so erhält man diese weiteste Entfernung:

$$\epsilon = f + \frac{rrgg}{2(1-\mu)}$$

Dieser Ausdruck setzt voraus, dass die weiteste Entfernung des Nebels auf der Sonnenseite, welche er angiebt, sich ausserhalb der Wirkungssphäre des Cometen befinde. Un den Grund, mit welchem dieses angenommen werden kann, einigermaßen übersehen zu können, werde ich diejenige Entfernung von dem Cometen aufsuchen, in welcher seine Anziehungskraft und die der Sonne sich das Gleichgewicht halten. Ich werde dabei annehmen, dass der Halley'sche Comet die Masse habe, welche LAPLACE als eine von der Masse des Cometen von 1770 nicht erreichte Grenze angab, nämlich den fünftausendsten Theil der Erdmasse. Hiernach wäre die Masse des Cometen der 1785000000te Theil der Sonnenmasse und die gesuchte Entfernung wäre der 42250te Theil der Entfernung des Cometen von der Sonne; ein so weit von ihm entfernter Punkt erschien, zur Zeit der Erdnähe, in einem Abstände von 23'', während der Nebel sich wenigstens 4 Minuten weit erstreckte. Obgleich diese Schätzung keine Sicherheit dafür gewähren kann, dass der Nebel sich wirklich über die Wirkungssphäre des Cometen erstreckt hat, so giebt sie doch auch keinen Grund, das Gegentheil anzunehmen.

Eine Schwierigkeit der Vergleichung der Formel mit den Beobachtungen liegt in der unbestimmten Begrenzung des Nebels, welche nicht erlaubt, eine Grenze für seine Entfernung anzugeben. Indessen zweifle ich nicht, dass sich zur Zeit der Erdnähe noch in 4 Minuten Entfernung von dem Kerne Nebel befunden habe; welche Schätzung mit der damals stattfindenden Entfernung ($\log = 9.27038$) verbunden

$$\epsilon = 0,0002169$$

ergiebt. Da zu derselben Zeit $\log r = 9,96846$ war, so erhält man, wenn man f vernachlässigt,

$$\log \frac{gg}{1-\mu} = 6,70028.$$

Zu diesem Resultate werde ich später zurückkehren.

12.

Eine Erscheinung, über deren Vorhandensein meine Beobachtung vom 22. October keinen Zweifel lässt, welche sich aber noch vollständiger aus den Beobachtungen von HEINSIUS im Jahre 1744 erkennen lässt, ist, dass Theilchen, welche in spitzen Winkeln mit dem Radiusvector ausgehen, im Verfolge ihrer Bewegung aufhören, sich der Sonne zu nähern und dann anfangen sich von ihr zu entfernen, so dass sie sich in dem von der Sonne abgewandten Schwefel fortbewegen (§ 6).

Wenn man zuerst annimmt, dass die Bewegung dieser Theilchen, so wie an ihrem Anfange, auch noch bei ihrem Ausgange aus der Wirkungssphäre des Cometen, in einem spitzen Winkel mit dem Radiusvector vor sich gegangen sei, so lassen diese Beobachtungen keinen Zweifel darüber, dass $1 - \mu$ für beide Cometen einen positiven Werth gehabt hat, oder dass μ , wenn nicht negativ, doch kleiner als 1 gewesen ist. Denn der Ausdruck von μ enthält für beide Cometen, welche ihre Perihelien noch nicht erreicht hatten, für welche also τ negativ war, für Werthe von F und G zwischen 0 und -90° , nur ein einziges positives Glied, nämlich das erste der in $\frac{\tau \tau'}{2}$ multiplicirten; für Werthe von F und G zwischen 0 und 90° erhält er dieselbe Eigenschaft, wenn man ihn nach den Potenzen einer sehr wenig von τ verschiedenen Grösse τ' , welche mit der ersteren durch die Gleichung

$$\tau = \tau' - \frac{3}{2} \frac{e \sin \nu}{r \sqrt{p}} \tau' \tau'$$

verbunden ist, ordnet. Indem dennoch die Theilchen aufgestiegen sind, muss $1 - \mu$ einen positiven Werth gehabt haben, einen so grossen positiven Werth, dass er sämmtliche negative Glieder überwogen hat.

Um diesen Schluss von der Annahme zu befreien,

$$\begin{aligned} \xi &= -f \cos F - \left(g \cos G + f \sin F \frac{\sqrt{p}}{r r'} \right) \tau' \\ &+ \left\{ \frac{1-\mu}{r r'} - g \sin G \frac{2\sqrt{p}}{r r'} + g \cos G \frac{4e \sin \nu}{3r \sqrt{p}} - f \cos F \left(\frac{2\mu}{r^2} - \frac{p}{r^4} \right) - f \sin F \frac{2e \sin \nu}{3r^2} \right\} \frac{\tau' \tau'}{2} \\ &- \left\{ g \cos G \left(\frac{4\mu}{r^2} - \frac{3p}{r^4} \right) - g \sin G \frac{2e \sin \nu}{r^2} \right\} \frac{\tau'^2}{6} + \dots \\ \eta &= f \sin F + \left(g \sin G - f \cos F \frac{\sqrt{p}}{r r'} \right) \tau' \\ &- \left\{ g \cos G \frac{2\sqrt{p}}{r r'} + g \sin G \frac{4e \sin \nu}{3r \sqrt{p}} + f \sin F \left(\frac{\mu}{r^2} + \frac{p}{r^4} \right) + f \cos F \frac{2e \sin \nu}{3r^2} \right\} \frac{\tau' \tau'}{2} \\ &+ \left\{ (1-\mu) \frac{2\sqrt{p}}{r^2} + g \sin G \left(\frac{\mu}{r^2} - \frac{3p}{r^4} \right) + g \cos G \frac{2e \sin \nu}{r^2} \right\} \frac{\tau'^2}{6} - \dots \end{aligned}$$

Die Gleichung der Curve, in welcher Theilchen sich zur Zeit t befinden, welche früher aus der Wirkungssphäre des Cometen, immer an demselben Punkte, mit gleicher Geschwindigkeit und in gleicher Richtung aus-

gegangen sind, welche am Anfange ihrer Bewegung sich in spitzen Winkeln gegen den Radiusvector bewegt haben, auch in solchen Winkeln aus der Wirkungssphäre des Cometen gegangen seien, darf man nur bemerken, dass ihre Bewegungen nur dann von der Richtung nach der Sonne abwärts gekrümmt werden können, wenn $\mu < 1$ ist. Denn, indem sie sich Anfangs zu der Sonne bewegen, und selbst in dem ungünstigsten Falle $\mu = 1$, aus diesem Grunde eine grössere Anziehung erleiden als der Comet, so folgt, dass die Winkel ihrer Richtung mit dem Radiusvector, selbst in diesem Falle, also noch mehr in dem Falle $\mu > 1$, nur spitzer, nicht stumpfer werden können.

Man kann also das Aufsteigen der in einem spitzen Winkel mit der Richtung nach der Sonne auströmenden Theilchen als einen unzweideutigen Beweis eines positiven Werthes von $1 - \mu$ ansehen. Unter der Voraussetzung, dass der Nebel auf der Sonnenseite sich ausserhalb der Wirkungssphäre des Cometen befinde, giebt das im vorigen Art. untersuchte Maximum seiner Entfernung einen zweiten Beweis dafür, denn dann ist $\varepsilon - f$ nothwendig positiv.

Indessen kann man, durch weitere Verfolgung der an den Cometen wahrgenommenen Erscheinungen, namentlich durch die Betrachtung ihrer Schweife, noch beträchtlich weiter, auch bis zu einer Bestimmung des Werthes von $1 - \mu$ gelangen. Ich werde daher die entwickelte Theorie auf die Figur der Schweife anwenden; vorher aber die Umformung der Ausdrücke von ξ und η mittheilen, welche durch die Einführung der oben schon erwähnten, durch τ' bezeichneten Grösse erlangt wird, denn unter dieser Form ergeben die Ausdrücke die daraus zu ziehenden Folgerungen leichter. Man erhält, nach τ' geordnet:

gegangen sind, erhält man, wenn man τ' aus diesen Ausdrücken von ξ und η eliminirt. Indem ich schon bemerkt habe, dass das in das Quadrat von τ' multiplicirte Glied des ersten Ausdruckles dasjenige ist, wel-

ches das Aufsteigen der Theilchen erklärt, und indem Glieder von der Ordnung von f und g sowohl in die erste als in die dritte, nämlich sowohl in die niedrigere als in die höhere Potenz von r' multiplicirt sind, folgt, dass wenn das Aufsteigen sich nicht etwa erst geraume Zeit nach dem Ausgange aus der Wirkungssphäre des Cometen, sondern schon für die Werthe von r' einfinden soll, für welche man den Ausdruck von ξ als schnell convergirend annehmen kann, dass, sage ich, f und g , vergleichungsweise mit $1 - \mu$, kleine Grössen sind. Man erhält also einen genäherten Werth von r' , wenn man die Gleichung:

$$\xi = a + br' + c \frac{r'^2}{2} + d \frac{r'^3}{6}$$

in welcher a, b, c, d Bezeichnungen der oben gegebenen Ausdrücke der Coefficienten sind, ohne Rücksicht auf ihr drittes Glied auflöst, oder

$$\eta = f \sin F' + (g \sin Grr - f \cos F' \gamma p) \frac{R}{1 - \mu} - \left\{ g \sin G \frac{2r^2 \epsilon \sin v}{3 \gamma p} + f \sin F' \left(\frac{\mu r - 3p}{2} \right) - f \cos F' \frac{3}{2} r \epsilon \sin v \right\} \frac{R^2}{(1 - \mu)^2} + \frac{r \gamma p}{3} \frac{R^3}{(1 - \mu)^3}.$$

Dieses ist die Gleichung der Curve, in welcher zur Beobachtungszeit Theilchen sich befinden, welche vor derselben mit gegebenen Werthen von f, F, g, G aus der Wirkungssphäre des Cometen ausgegangen sind.

Wendet man sie auf Punkte dieser Curve an, welchen einigermaßen grosse Werthe von ξ zugehören, für welche also das zweite Glied des Ausdrucks von R , vergleichungsweise mit dem ersten, sehr klein ist und vernachlässigt man, um eine einfachere Uebersicht zu erhalten, Grössen von der Ordnung des Halbmessers f der Wirkungssphäre des Cometen, so verwandelt sich der Ausdruck von η in

$$\eta = g \sin G \frac{r}{1 - \mu} \sqrt{2\xi} - g \sin G \frac{2r \epsilon \sin v}{3 \gamma p} \cdot \frac{\sqrt{2\xi}}{1 - \mu} + \frac{\gamma p}{3r} \frac{(2\xi)^{\frac{3}{2}}}{1 - \mu}$$

Dividirt man ihn durch ξ , so ergibt er die Tangente des Winkels eines Punktes der Curve mit der Verlängerung des Radiusvectors, nämlich:

$$\text{tang } \varphi = g \sin G \left\{ \frac{r \sqrt{2}}{\sqrt{1 - \mu} \sqrt{\xi}} - \frac{4r \epsilon \sin v}{3 \gamma p (1 - \mu)} \right\} + \frac{2 \sqrt{2} p}{3r} \frac{\sqrt{\xi}}{1 - \mu}.$$

13.

Diese Formel werde ich jetzt mit meiner Beobachtung der Richtung des Schweifes am 15. October, welche ich im 1. Art. angeführt habe, vergleichen. Zur Zeit derselben war der Ort des Cometen:

BRUNN'S Abhandlungen. 1. Bd.

$$r' = \frac{R - b}{c}$$

setzt, wo

$$R = \sqrt{2c(\xi - a) + bb}$$

ist. Nimmt man auch auf das letzte Glied Rücksicht, so erhält dieser Ausdruck noch eine kleine Verbesserung und wird, mit noch stärkerer Annäherung:

$$r' = \frac{R - b}{c} - \frac{dRR}{6c^2}$$

Setzt man ihn in den Ausdruck von η , nämlich in

$$\eta = a' + b'r' + c' \frac{r'^2}{2} + d' \frac{r'^3}{6}$$

und vernachlässigt man Grössen von der Ordnung der Quadrate und Producte von f und g , so erhält man

$$\eta = a' + \frac{b'}{c} R + \frac{cc' - bd'}{2c^2} R^2 + \frac{d'}{6c^3} R^3$$

und, nach der Substitution der Werthe von a', b', c', d' :

$$\text{AR.} = 238^\circ 46' 20'' \quad \text{Decl.} = 32^\circ 18' 26'';$$

der Ort γ Draconis, von welchem Sterne die Richtung einen halben Grad links vorbeiging, war

$$\text{AR.} = 268^\circ 11' 37'' \quad \text{Decl.} = 51^\circ 30' 52''.$$

Hieraus folgt die Entfernung beider = $28^\circ 46,7$ und der Positionswinkel des Sterns an dem Cometen = $39^\circ 25'$, wozu aber noch $1^\circ 2'$ addirt werden müssen, indem die Richtung des Schweifes in $30'$ Entfernung links von dem Sterne vorbeiging. Die Sonne hatte zu derselben Zeit an dem Cometen den Positionswinkel $229^\circ 6'$. Der Schweif machte also einen Winkel von $8^\circ 39'$ mit der der Sonne entgegengesetzten Richtung, und zwar nach der Seite, von welcher der Comet herkam, derselben auf welcher η und φ positiv sind. Reducirt man diese Angaben auf die Ebene der Bahn, was nach den Formeln § 3 geschieht, so findet man

$$\varphi = 9^\circ 4'.$$

Indem der Punkt der Axe des Schweifes, auf welchen diese Bestimmung sich bezieht, $14^\circ 23,35$ von dem Cometen abstand, erhält man durch die Formeln § 3, unter Voraussetzung $\log \rho = 9,33631$, seine Entfernung von dem Cometen = $0,055484$ und $\xi = 0,054791$. Man hat ferner für die Zeit der Beobachtung

$$\log r = 0,94936$$

$$r = 72^s 8'$$

und durch die bekannten Elemente der Bahn:

$$\log p = 0,06624; \quad e = 0,98572.$$

Mit diesen Elementen giebt die Formel:

$$\tan \varphi = g \sin G \left\{ \frac{5,3767}{\sqrt{1-\mu}} + 1,0314 \right\} + \frac{0,26762}{\sqrt{1-\mu}}$$

Setzt man für $g \sin G$ die Grenzen der Werthe, welche es hat, so ergiebt diese Formel offenbar die Winkel der Grenzen des Schweifes mit der Verlängerung des Radiusvectors, also auch die Ausdehnung desselben in der Breite. Nimmt man das Mittel aus allen Werthen von $g \sin G$ als verschwindend an, oder setzt man voraus, dass der Comet die Schweifmaterie nicht vorzugsweise nach einer Seite des Radiusvectors ausgeströmt habe, so das letzte Glied der Formel für die Axe des Schweifes, und man erhält die Gleichung:

$$\tan 9^{\circ} 4' = \frac{0,26762}{\sqrt{1-\mu}}$$

woraus $1 - \mu = 2,812$, also $\mu = -1,812$ hervorgeht.

Nach dieser Bestimmung des Werthes von $1 - \mu$ würde man die Grenzen von $g \sin G$ erkennen können, wenn man die Ausdehnung des Schweifes in der Breite beobachtet hätte. Dieses ist nicht geschehen, weil seine Grenzen zu unbestimmt waren und ich auch kein grosses Gewicht auf ihre Beobachtung legte; ich glaube aber, dass die Breite des Schweifes, so weit er noch deutlich unterschieden werden konnte, in der angegebenen Entfernung von dem Cometen kleiner war als 3° ; dass man also durch diese Annahme die Grenzen von $g \sin G$ nicht zu eng erhält. Legt man sie der Rechnung zum Grunde, so findet man dieselben

$$= \pm 0,006330.$$

Die erlangte Kenntniss des Werthes von μ macht eine Schätzung des Werthes von g möglich. Die auf die Ausdehnung des Nebels auf der Sonnenseite des Cometen gegründete Gleichung am Ende des 11. Art, nämlich

$$\log \frac{gg}{1-\mu} = 6,70028$$

ergiebt, durch die Anwendung des erhaltenen Werthes von μ ,

$$\log g = 8,57469.$$

Dieses g ist die Ausgangsgeschwindigkeit der Theilchen, bezogen auf die Zeiteinheit, welche das Reciproke der Gaussischen Zahl k ist. Nimmt man den Tag zur Zeiteinheit, so erhält man das darauf bezogene $g = 0,000646$, oder etwa = 15,5 Halbmesser der Erde.

Die Vergleichung des Werthes von g mit den Grenzen von $g \sin G$ zeigt, dass der Comet entweder nur in der Nähe der Richtung nach oder von der Sonne Schweifmaterie ausgeströmt hat, oder dass die Geschwindigkeit ihrer Ausströmung desto geringer gewor-

den ist, je weiter ihre Richtung sich von jener entfernt hat. Denn wenn man alle Ausgangsgeschwindigkeiten gleich dem für die Ausströmung im Scheitel gefundenen Werthe derselben annimmt, so findet man G in den Grenzen $\pm 9^{\circ} 42'$ oder $180^{\circ} \pm 9^{\circ} 42'$ eingeschlossen; hat G weitere Grenzen gehabt, oder hat der Comet in allen Richtungen ausgeströmt, so muss die Geschwindigkeit desto kleiner geworden sein, je grösser $\sin G$ geworden ist, denn das Product $g \sin G$ hat die angegebenen engen Grenzen. Dem Urtheile hierüber kommen meine Beobachtungen vom 22. und 25. October zu Hülfe, welche sichtbar ausströmende Materie in grösseren Winkeln mit der Richtung der Sonne zeigen; noch weit deutlicher zeigen die Figuren von HEINSIUS dergleichen sich von dieser Richtung fast einen rechten Winkel entfernende Ausströmungen, dennoch aber einen sehr langgestreckten, wenig breiten Schweif des Cometen. Man muss daraus schliessen, dass die Ausströmungsgeschwindigkeit desto kleiner geworden ist, je grösser der Sinus der Neigung ihrer Richtung gegen den Radiusvector wurde.

Um die Vergleichung der Theorie mit dem Halley'schen Cometen vollständig zu machen, bemerke ich noch, dass die nahe gerade Richtung des Schweifes, welche ich am 15. October beobachtete, mit der Formel am Ende des 12. Oct. nicht vereinbar ist, wenn gleich diese jedesmal eine Krümmung des Schweifes fordert. Man darf, um sich hiervon zu überzeugen, nur die Entfernung aufsuchen, in welcher ein Punkt in der Axe und in der Entfernung $\frac{1}{2} \xi$ von dem Cometen sich von der geraden Linie, welche den Cometen und den beobachteten Punkt des Schweifes verbindet, befunden hat. Für den ersteren Punkt ist

$$\eta' = \frac{Yp}{3r} \frac{\xi^3}{\sqrt{1-\mu}}$$

für den anderen

$$\eta = \frac{Yp}{3r} \frac{(2\xi)^3}{\sqrt{1-\mu}};$$

die Entfernung des ersteren von der nach dem anderen gezogenen geraden Linie ist daher:

$$\eta' - \frac{1}{2} \eta = - \frac{Yp}{3r} \frac{Y^2 - 1}{\sqrt{1-\mu}} \xi^3;$$

wenn man sie durch $\frac{1}{2} \xi$ dividirt, so erhält man den Winkel, welchen der erste Punkt und die nach dem zweiten gezogene gerade Linie am Cometen einschliessen,

$$= - \frac{2Yp}{3r} \frac{Y^2 - 1}{\sqrt{1-\mu}} \sqrt{\xi},$$

oder

$$= - \tan \varphi \frac{Y^2 - 1}{Y^2}.$$

Das Product dieses Winkels in die halbe Entfernung

des Punktes, auf welchen die Beobachtung sich bezieht, ist nahe die scheinbare Entfernung des gekrümmten Schweifes von der oft erwähnten geraden Linie. Man erhält auf diese Art etwa 20' dafür; eine Grösse, welche sich nothwendig mit der Undeutlichkeit des Schweifes bis zum Unkenntlichwerden vermischen musste.

Ich werde noch die Zeit bestimmen, welche der

$$\tau' = \frac{r\sqrt{2\xi}}{\sqrt{1-\mu}} \left\{ 1 + g \sin G \frac{r\rho}{1-\mu} - g \cos G \frac{2er \sin r}{3(1-\mu)\sqrt{\rho}} \right\} \\ + g \cos G \frac{rr}{1-\mu} + \frac{\xi}{(1-\mu)} \left\{ g \cos G \frac{(4\mu r + 3\rho)}{3} - g \sin G \sqrt[3]{er \sin r} \right\}.$$

Für Theilchen, welche sich der Sonne zu von dem Cometen entfernt haben, für welche also $G = 0$ ist, giebt diese Formel:

$$\tau' = 0,18064$$

und man erhält dadurch

$$\tau = 0,20177$$

oder in Tagen ausgedrückt

$$\tau = 11,73.$$

Nach dieser Rechnung sind also die Theilchen, welche sich zur Beobachtungszeit = October 15,23, in dem beobachteten Punkte des Schweifes befanden, zwischen dem 3. und 4. October von dem Cometen ausgegangen; höhere, auch noch bemerkbare Theilchen, also noch früher. Dass diese Zeit mit der Zeit des sichtbaren Anfanges der Ausströmung so nahe zusammenfällt, ist vermuthlich nur zufällig; doch kann man in der Folge auch hierauf aufmerksam sein.

Nachdem ich nun alle Erscheinungen, welche der Halley'sche Comet mir gezeigt hat, mit der Theorie zusammengeworfen habe, muss ich noch Einiges über die Sicherheit der erlangten Bestimmung des Werthes von μ hinzufügen. Wenn auch nicht zu erwarten ist, dass so rohe Beobachtungen wie die der Richtung eines Cometenschweifes nothwendig sind, eine genaue Bestimmung dieses Werthes gewähren, so kann doch auch nicht bezweifelt werden, dass sie eine Annäherung an denselben geben. Der Anblick der Formel am Ende des 12. Art. zeigt unmittelbar, dass ein kleiner oder gar ein verschwindender Werth von $1 - \mu$ mit der Erscheinung langgestreckter, nicht sehr beträchtlich gekrümmter und der Sonne näherungsweise entgegengesetzter Cometenschweife, unvereinbar ist. Die Mittellinie des Schweifes, auf welche das letzte Glied der Formel sich bezieht, würde einen zwar Anfangs verschwindenden, aber mit ξ schnell wachsenden Winkel mit dem Radiusvector erhalten, so dass nicht nur die Krümmung derselben sehr beträchtlich werden, sondern auch seine Richtung sich schnell der auf die der Sonne senkrechten nähern würde. Das erste Glied der Formel würde,

Theorie zufolge zum Aufsteigen der Theilchen, bis zu dem beobachteten Punkte des Schweifes, verwandt worden ist. Man hat nach der Formel Art. 12

$$\tau' = \frac{R-b}{c} - \frac{dRR}{6c^3}$$

und wenn man die Grössen der zweiten Ordnung, sowie auch f vernachlässigt:

für einen merklichen Werth von $g \sin G$, eine beträchtliche Grösse erhalten und also dem Schweife eine grosse Ausdehnung in der Breite geben. Man sieht hieraus, dass kleine Werthe von $1 - \mu$ wohl mit mehr oder weniger runden Nebelhüllen der Cometen, nicht aber mit solchen Schweifen vereinbar sind, wie viele Cometen sie zeigen. Man kann also an der — wirklichen oder scheinbaren (§ 9) — abstossenden Kraft der Sonne, in Beziehung auf die Cometenschweife, nicht zweifeln.

14.

Der Ausdruck von η durch ξ (Art. 12) zeigt unmittelbar, dass alle von dem Cometen ausgehenden Theilchen, sobald sie die kleinen Werthe von ξ , für welche dieser Ausdruck nicht anwendbar ist, überschritten haben, eine und dieselbe Curve beschreiben, wenn das Product $g \sin G$ einen beständigen Werth hat. Die zwischen $G = 0$ und $G = 180^\circ$ ausgehenden beschreiben dann einen Schenkel der Curve; die zwischen $G = 0$ und $G = -180^\circ$ ausgehenden den anderen.

Dieses Resultat der Theorie scheint mir sehr merkwürdig zu sein, indem es die Erscheinung vollständig erklärt, welche der Comet von 1811 gezeigt hat. Bei diesem Cometen bewegten sich nämlich die Schweiftheilchen in den beiden Schenkeln einer etwa parabolisch gekrümmten Linie oder in der durch Drehung einer solchen Linie um ihre Axe entstehenden conoidischen Oberfläche. Beides ist gleich gut vereinbar mit der Theorie, welche eine Curve ergiebt, wenn die Ausströmungen nur in der Ebene der Bahn stattfinden; eine Oberfläche, wenn sie in allen Ebenen vor sich gehen.

Auch die Heinsius'schen Beobachtungen des Cometen von 1744 zeigen, noch aus einem anderen Grunde als dem in 13. Art. aus der Ausdehnung seines Schweifes in der Breite hergenommenen, dass das Product $g \sin G$ nahe beständig gewesen ist. Denn die in spitzen Winkeln mit dem Radiusvector ausgeströmte Materie fing am 31. Januar an, sich in zwei Schenkeln einer Curve aufwärts zu bewegen, welche sich im Verfolge

der Beobachtungen immer mehr verlängerten, ohne deshalb bedeutend an Breite zu gewinnen. Dass auch Ausströmungen in Neigungen gegen den Radiusvector, welche sich dem rechten Winkel nähern, vorhanden waren, zeigen, wie ich schon im 13. Art. angeführt habe, die Zeichnungen von HEINSIUS: man kann also die geringe Breite der Schenkel des Schweifes nicht einem Mangel der Ausströmung in grösseren Winkeln von G zuschreiben, sondern muss sie durch eine Verschiedenheit ihrer Geschwindigkeit in verschiedenen Richtungen, welche dem Producte $g \sin G$ einen nahe oder ganz beständigen Werth giebt, erklären.

OLBERS führt mehrere Cometen an, von welchen selbst ihre mangelhaften Beschreibungen verstaten, anzunehmen, dass sie dem Cometen von 1811, in der Art der Bildung des Schweifes, ähnlich gewesen sind. Wenn spätere Beobachtungen das häufigere Vorkommen dieser Bildung bestätigen, so kann das Verhältniss zwischen der Geschwindigkeit und der Richtung der Ausströmung, welches die Cometen von 1744 und 1811 gezeigt haben, vielleicht als eine allgemeine Eigenschaft der Cometen nachgewiesen werden. Allein für solche Cometen, für welche es sich auch nicht aus den Beobachtungen nachweisen lässt, kann es auch nicht aus diesen bestritten werden; denn der gerade aufwärtsgehende, nicht aus zwei getrennten Schenkeln bestehende Schweif eines Cometen kann aus demselben Gesetze erklärt werden, welches nur deshalb einen anderen Erfolg zeigt, weil die beständige Grösse, welcher $g \sin G$ gleich ist, einen kleineren Werth besitzt. Die auffallende Verschiedenheit der Figur des Schweifes, welche Cometen wie der von 1811 und wie der Halley'sche gezeigt haben, zwingt also nicht zu der Annahme einer Verschiedenheit der beiden zum Grunde liegenden Eigenschaften, sondern sie wird schon durch die Verschiedenheit der Grösse einer Constante erklärt, welche jedem derselben eigenthümlich ist. Ist diese Constante gross, so entfernen sich beide Schenkel des Schweifes weit von einander; ist sie klein, so kommen sie einander nahe und gewähren den Anblick eines ungetheilten Schweifes.

Die Bedingung, dass das Product $g \sin G$ eine beständige Grösse sei, fordert, in Worten ausgesprochen, dass die ausströmenden Theilchen, trotz ihrer verschiedenen Richtungen gegen den Radiusvector, sich sämmtlich mit gleicher Geschwindigkeit von diesem entfernen. Parallel mit dem Radiusvector besitzen sie also Geschwindigkeiten, welche sich zu der vorigen verhalten wie die Cotangente des Winkels ihrer Bewegung mit dem Radiusvector sich zum Radius verhält. Diese Ge-

schwindigkeiten werden also desto grösser, je kleinere Neigungen gegen den Radiusvector die Bewegungen der Theilchen haben; die Theilchen fliehen von dem Mittelpunkt des Cometen nach entgegengesetzten Richtungen mit desto grösserer Geschwindigkeit, je mehr ihre Richtung sich der Richtung des Radiusvectors nähert. Dieses ist das reine Resultat der Beobachtungen; keine willkürliche Annahme liegt ihm zum Grunde. Die Beobachtungen geben es nicht so bestimmt, dass sie die Möglichkeit einer kleinen Unbeständigkeit des Productes $g \sin G$ zurückwiesen; allein sie lassen darüber keine Unsicherheit, welche seine Richtigkeit im Ganzen zu bezweifeln erlaubte. Wir besitzen auch eine Beobachtung, welche ein gleichzeitiges Ausströmen der Lichtmaterie an entgegengesetzten Theilen eines Cometen sichtbar zeigt, also, ohne alles Raisonnement, die Bewegung in entgegengesetzten, nach und von der Sonne gewandten Richtungen darthut; dieses ist die Beobachtung von HEINSIUS vom 31. Januar 1744.

Ich glaube dass das, was ich im vorigen und im gegenwärtigen § angeführt habe, eine zweite Wirkung einer sich gleichfalls auf die Sonne beziehenden Polarkraft auf dem Cometen eben so wenig bezweifeln lässt, als die beobachteten Schwingungen die erste zweifelhaft gelassen haben.

15.

Der Comet von 1811 zeigte nicht vorzugsweise in der Richtung der Sonne eine sichtbare Ausströmung, sondern alle Theile seiner Oberfläche schienen die Lichtmaterie gleichmässig von sich zu entfernen; zugleich zeigte die Figur seines Schweifes, dass ihm ein grösserer Werth der Constante $g \sin G$ zugehörte. Eine solche grössere Geschwindigkeit der Bewegung der Theilchen in senkrechter Richtung auf den Radiusvector hat zur Folge, dass die Winkel ihrer Ausströmungen mit demselben im Ganzen grösser werden, als im Falle einer kleineren. Ich bemerke dieses, weil es vielleicht der Grund der Sichtbarkeit der Ausströmung des einen Cometen zur Sonne und ihrer Unsichtbarkeit bei einem anderen sein kann; doch eben diese Sichtbarkeit, oder der auffallende Unterschied zwischen den Begrenzungen des der Sonne zu ausströmenden Kegels und der in anderen Richtungen ausströmenden Materie, welchen sowohl der Halley'sche Comet, als der von 1744 gezeigt haben, macht viel wahrscheinlicher, dass beide Ausströmungen verschiedene Ursachen haben, oder nicht durch einen stetigen Uebergang von kleineren Geschwindigkeiten zu grösseren erklärt werden dürfen. Die Ausströmung nach allen Richtungen erscheint dann als die Folge einer gemeinschaftlichen Wirkung der Sonne auf

alle Theile der Cometen, während die sichtbare Ausströmung nach der Sonne ihrer vorzugsweisen Wirkung auf ihr zugewandte Theile der Oberfläche zuzuschreiben ist. Dass unter dieser Annahme beide Ausströmungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten stattfinden, so wie auch sonst verschiedene Bedingungen erfüllen können, ist nicht zu bezweifeln.

Nach dem Urtheile von **OLBERS** ist nicht zu bezweifeln, dass **MESSIER**, an dem Cometen von 1769, zwei verschiedene Schenkelpaare gesehen hat. Diese gehen aus der Formel (§ 12) hervor, wenn man dem Producte $g \sin G$ zwei verschiedene beständige Werthe beilegt, den einen zugehörig einem Theile der ausströmenden Materie, den anderen einem anderen Theile derselben. Diese Erscheinung aber noch über ihre Erklärung im Allgemeinen hinaus zu verfolgen, verbietet die Mangelhaftigkeit der Wahrnehmung derselben.

Eine sehr verschiedene Erscheinung zeigte der Comet von 1807. Vom 22. October an wurden an demselben zwei Schweife bemerkt, welche beide in gleicher Richtung von dem Kerne ausgingen, allein sich schon in der Entfernung von einem Grade trennten: der eine war der der Sonne entgegengesetzten Richtung näher und beinahe gerade; nach einer Zeichnung vom 22. October, welche ich in meinen Lillenthaler Tagebüchern finde, konnte ich diesen Schweif etwa 41° weit verfolgen und den Positionswinkel seiner Richtung auf etwa 62° schätzen. Der andere Schweif konnte etwa nur 3° weit unterschieden werden; er war stark gekrümmt und in der Breite weit ausgedehnter als der erste; der grösste Kreis, durch den Cometen und den äussersten sichtbaren Punkt der Axe dieses Schweifes gelegt, hatte an dem Cometen einen Positionswinkel von etwa 83° . Der Positionswinkel der Sonne am Cometen war zu derselben Zeit $233^\circ 48'$, so dass also das Ende des einen Schweifes etwa 8° , das des anderen etwa 29° gegen die ihr entgegengesetzte Richtung geneigt zu sein schien. Diese Beobachtung weiter durch die Rechnung zu verfolgen, habe ich unterlassen, weil sie zu unvollkommen ist; indessen stellt sie die Thatsache, welche übrigens von allen damaligen Astronomen bemerkt worden ist, im Ganzen fest. Dergleichen in gleicher Richtung von einem Cometen ausgehende, sich später aber trennende Schweife lassen, verglichen mit der Formel § 12, keinen Zweifel über das Vorhandensein zweier verschiedenen Werthe der abstossenden Wirkung der Sonne, deren einer einen Theil der ausströmenden Materie bewegt, der andere einen anderen.

Dass das Vorhandensein der Schweife der Cometen im Allgemeinen, nach der Bemerkung am Ende des

13. §, über die Wirkung einer Kraft, welche von der gewöhnlichen anziehenden Kraft der Sonne bedeutend verschieden ist, keinen Zweifel übrig lässt, und da der Halley'sche Comet, für welchen ich ihre Grösse habe bestimmen können, sie als eine Abstossung von fast doppelter Grösse der gewöhnlichen Anziehung zu erkennen gegeben hat, so ist kein Zweifel mehr vorhanden, dass diejenigen Theile der Cometen, welche die Schweife bilden, die Einwirkung einer abstossenden Kraft der Sonne erfahren. Ob aber diese abstossende Kraft in ihrer Grundeigenschaft von der gewöhnlichen Kraft der Sonne verschieden, oder nur eine Folge des Aufsteigens der Schweiftheilchen in einem weit dichterem, dennoch aber nicht merklich widerstehenden Aether ist (§ 9), ist hieraus nicht zu entscheiden. Wenn man die letztere Erklärung derselben annimmt, so zeigt der eben angeführte Comet von 1807, dass Schweiftheilchen von zwei verschiedenen specifischen Gewichten vorhanden sein können; wenn man eine wirklich abstossende Kraft annimmt, so ist ihre Stärke für verschiedene Schweiftheilchen verschieden.

Es sind aber andere Erscheinungen vorhanden, welche durch die Annahme eines nicht widerstehenden Aethers, von beträchtlich grösserer Dichtigkeit als die Schweiftheile der Cometen, nicht erklärt werden können. Die schwingende Bewegung der Ausströmung des Halley'schen Cometen hat nämlich die Wirkung einer Polarkraft in demselben dargethan; und dieselbe Kraft hat ihre Wirkung darin gezeigt, dass sie die ausströmenden Theilchen mit beschleunigter Geschwindigkeit in der Richtung der durch die Sonne und den Cometen gehenden Linie, sowohl zu der Sonne als von derselben, trieb. Diese beiden Erscheinungen lassen sich durch die Annahme eines schweren aber nicht widerstehenden Aethers nicht erklären. Auch ist die Möglichkeit, eine von der gewöhnlichen anziehenden Kraft der Sonne verschiedene Kraft durch einen Aether zu erklären, nur vorhanden, wenn sie entweder eine kleine Anziehung, oder eine $\frac{1}{2}$ nicht überschreitende Abstossung ist (vgl. § 9 am Ende); nicht aber wenn sie eine grössere Anziehung ist, von welchem Falle der der Sonne zugewandte Schweif des Cometen von 1824 ein Beispiel giebt.

Die Fälle, welche man durch die Hypothese des Aethers möglicherweise erklären könnte, durch eine völlig hypothetische Ursache zu erklären, während man eine von der gewöhnlichen Anziehungskraft verschiedene, zur Erklärung der Abstossung der Theilchen durch die Sonne hinreichende Kraft ohnedies anerkennen muss,

dieses würde wenigstens gegen die erste der drei Regeln verstossen, welche NEWTON dem dritten Buche seiner Principien vorgesetzt hat. Uebrigens würde diese Hypothese fordern, dass die Schweiftheilchen, als sie noch dem Cometen angehörten und sich der gewöhnlichen Anziehungskraft der Sonne unterworfen zeigten, vergleichungsweise mit dem Aether eine sehr grosse Dichtigkeit besessen haben, welche, nach ihrer Trennung, in eine demselben Maasse nach sehr kleine übergegangen sei. Aus allen diesen mehr oder weniger gegen die Erklärung der Schweife der Cometen durch das Aufsteigen leichterer Theilchen in einem schweren Aether sprechenden Gründen, erscheint diese Hypothese auch in den Fällen, in welchen sie nicht als ganz unstatthaft zurückgewiesen werden kann, so wenig wahrscheinlich, dass man an dem, beziehungsweise auf die Cometschweife allgemeinen Vorhandensein einer von der gewöhnlichen Anziehungskraft der Sonne specifisch verschiedenen Kraft nicht wohl zweifeln kann.

16.

Ich betrachte die schwingende Bewegung der sichtbaren Ausströmung des Halley'schen Cometen nach der Sonne als eine Aeusserung derselben Kraft, welche die Bewegungen sich von dem Cometen entfernender Theilchen, parallel mit dem Radiusvector, nach entgegengesetzten Richtungen beschleunigte. Ich muss aber noch angeben, wie ich mir die Verbindung zwischen diesen Erscheinungen und der abstossenden Kraft vorstelle, welche die Sonne, sowohl auf die in ihrer Richtung ausgeströmten, als auf die im Schweife befindlichen Theilchen geäussert hat. Hier verlassen uns die unmittelbaren Beobachtungen. Eine fortgesetzte Erforschung aller Verhältnisse, unter welchen sich Polarkräfte zeigen, so wie wir sie der, in ununterbrochener Entwicklung begriffenen Erkenntniss der von solchen Kräften abhängigen Erscheinungen und der schon oft darauf angewandten kraftvollen Analyse Poisson's hoffentlich bald verdanken werden, muss die Lücke ausfüllen, welche die Beobachtungen offen lassen.

Meine Vorstellung von der Möglichkeit einer Verbindung aller an den Cometen beobachteten Erscheinungen ist indessen die folgende. Jede Wirkung eines Körpers auf einen anderen kann in zwei Theile zerlegt werden, deren einer für alle Theile des letzteren gleich ist, während der andere aus den Unterschieden der Wirkungen auf verschiedene Theile entsteht. Wenn die Wirkung in sehr grossen Entfernungen der Körper von einander sehr klein ist, so ist der erste Theil derselben derjenige, welcher, bei einem Uebergange von

diesen Entfernungen zu kleineren, zuerst merklich wird; der andere kann erst später eine merkliche Grösse erlangen. Im Falle eines Cometen, welcher in sehr grosser Entfernung zu der Sonne herabkommt, zeigt sich also zuerst die allen seinen Theilen gemeinschaftliche Wirkung; ich nehme an, dass sie in einer Verflüchtigung von Theilchen bestehe, welche der Sonne feindlich polarisirt werden. Der andere, später merklich werdende Theil der Wirkung allein kann eine Polarisirung des Cometen selbst, so wie eine vorzugsweise Ausströmung nach der Sonne zu zur Folge haben. Zeigen die Beobachtungen wirklich diese Erscheinungen, wie bei dem Cometen von 1744 und dem Halley'schen der Fall war, so kann nicht geleugnet werden, dass die Ausströmung, indem sie aus einem der Sonne zugewandten, also ihr freundlich polarisirten Theile der Oberfläche hervorgeht, auch dieselbe Polarisirung besitzt, welche die ausströmenden Theilchen der Sonne zu nähern sucht. Dass die ausgeströmten Theilchen dennoch von der Sonne zurückgestossen werden, wie die Beobachtungen zeigen, kann vielleicht dadurch erklärt werden, dass die Ausströmung in einem Raume stattfindet, welcher schon mit ihr feindlich polarisirter Materie gefüllt ist und fortdauernd damit gefüllt wird, wodurch die entgegengesetzten Polaritäten sich ausgleichen und die ausströmenden Theilchen desto mehr von ihrer ursprünglichen Eigenschaft verlieren und desto mehr die entgegengesetzte annehmen, je weiter sie sich von dem Kerne des Cometen entfernen.

Durch diese Ansicht werden alle Erscheinungen, welche ich an dem Cometen wahrgenommen habe, unter einander in Verbindung gesetzt. Weiter rechtfertigen kann man dergleichen Ansichten nicht, und ich bin gewiss nicht geneigt, dieses bei der meinigen zu versuchen. Aber weiter verfolgen darf man sie: von dieser Seite glaube ich bemerken zu dürfen, dass die angeführte Ansicht den zu der Sonne gewandten Schweif des Cometen von 1824 möglich erscheinen lässt, wenn man annimmt, dass dieser Comet dadurch eine Ausnahme von der Regel gemacht habe, dass seine Polarisirung sich früher eingefunden habe, als der umgebende, feindlich zur Sonne polarisirte Nebel. In diesem Falle wäre wirklich keine Leitung der Polarität der Ausströmung an einem Scheitel zu der am anderen vor sich gehenden vorhanden, und beide Ausströmungen könnten ihre ursprünglichen Bewegungen ungehindert fortsetzen. Der beobachtete Winkel der Richtungen beider Schweife dieses Cometen, oder vielmehr seine Abweichung von 180°, wird durch die oben entwickelte Theorie übrigens ohne alle Schwierigkeit erklärt.

Ich würde diese Ansicht leicht noch weiter verfolgen und die Einzelheiten der beobachteten Erscheinungen damit in Verbindung bringen können; auch würde man nicht lange suchen dürfen, wenn es darauf ankäme, Aehnlichkeiten zwischen diesen Erscheinungen und denen, welche man an der Electricität und dem Magnetismus beobachtet hat, aufzufinden. Ich glaube aber, eher schon zu weit als nicht weit genug gegangen zu sein und erlaube mir daher nur noch, auf Etwas aufmerksam zu machen, welches sich auf die Bewegung der Cometen bezieht.

17.

Die Ausströmung des Halley'schen Cometen, ohngefähr in der Richtung der Sonne, gab ihm, wie ich schon in der Beschreibung seines Aussehens (§ 1) angeführt habe, das Ansehen einer brennenden Rakete. Sie muss auch dieselbe Wirkung auf seine Bewegung gehabt haben, welche das Brennen einer Rakete auf die ihre hat; sie muss ihm eine ihrer eigenen entgegengesetzte Geschwindigkeit ertheilt haben. Demu nicht der Schwerpunkt des Cometen selbst, sondern nur der gemeinschaftliche Schwerpunkt des Cometen und der Ausströmung kann in jedem Augenblicke einen Kegelschnitt nach den Kepler'schen Gesetzen beschreiben; da die Ausströmung sich in jedem Augenblicke erneuert, ist die ausgeströmte Materie aber den Cometen verlässt, so muss sich die zurückstossende Wirkung der erstern auf den Schwerpunkt des Cometen gleichfalls in jedem Augenblicke erneuern oder sich als eine beschleunigende Kraft zeigen. Der Anblick der Lebhaftigkeit der Ausströmung, oder vielmehr das anscheinende Verhältniss ihrer Masse zu der Masse des Kerns, muss die Meinung erzeugen, dass die daraus hervorgehende störende Kraft der elliptischen Bewegung des Cometen merklich sein könne. Ich hoffe, dass die Reihe meiner Ortsbestimmungen des Cometen, welche durch die Kraft des dazu angewandten grossen Heliometers eine ausgezeichnete Genauigkeit erhalten hat, nach der genauen Bestimmung der verglichenen Sterne und der endlichen Reduction der Beobachtungen hierüber aufklären wird. Ich gestehe, dass ich, wenn keine Wirkung dieser Art sich zeigen sollte, für wahrscheinlicher halten würde, dass der sichtbare Ausströmung durch entgegengesetzte unsichtbare Ausströmungen entgegengewirkt sei, als dass

[Die vorstehende Abhandlung, wie die von OLDERS über den Cometen von 1811 (*Mon. Corresp.* XXV.) findet sich vollständig, die Untersuchungen von PAPPE (*Astr. Nachr.* 49) und WINNECKE (*A. N.* 50 u. *Mém. de l'Ac. de Petersbourg*, V. VII. Nr. 7. 1864) über die hellen C. von 1858 und 1862 im Auszug in: ZÖLLNER, über die Natur der Cometen etc. Leipzig 1872. — Die Berichtigungen von PAPPE (*Astr. Nachr.* 49. 335) und BRECHIGNY (54. 292) sind berücksichtigt. Letztere erfordern indessen selbst wieder, wie eine — auch von Herrn Prof. BAURIS controlirte — Nachrechnung ergab, Correctionen. Zugleich werden noch zwei Originalfehler (in Formel für r_1 p. 69 und erste Formel für η p. 70) verbessert.]

sie an sich ohne merklichen Einfluss gewesen wäre. Die fleissigen Untersuchungen unseres vortrefflichen ARGELANDER's über die Bewegung des Cometen von 1811*) schienen Wirkungen dieser Art anzudeuten, welche ich mir damals (*S. 77* der Argelander'schen Schrift) auf eine ähnliche Art zu erklären suchte. Die weit genaueren Beobachtungen des gegenwärtigen Cometen werden in dieser Untersuchung weit mehr Kraft haben, als die Beobachtungen des Cometen von 1811.

Ich mache noch darauf aufmerksam, dass sorgfältige Beobachtungen über die Schweife der Cometen (welche sich freilich nicht an allen Cometen anstellen lassen), der Grund eines Urtheils über das Dasein eines widerstehenden Aethers im Weltraume werden können. Man begreift leicht, dass der Widerstand sich ohne Vergleich stärker äussern muss, als er sich auf die Cometen selbst äussert, wenn er sich auf Theilchen äussert, deren Dichte, vergleichungsweise mit der Dichte des Cometen selbst, nur unmerklich sein kann. Sorgfältige Beobachtungen über den Kern, den Nebel und den Schweif eines Cometen verheissen im Allgemeinen neue Einsichten in die Physik des Himmels. Ich hoffe, dass wir wesentliche Beiträge zu den von mir an dem Halley'schen Cometen gemachten Wahrnehmungen von verschiedenen Seiten erhalten werden, vorzüglich von den Besitzern grosser Fernröhre, namentlich von Herrn ELIATSRATH STRUVE,***) SIR JAMES SOUTH und SIR JOHN HERSCHEL:***) die des letzteren können einen Zuwachs ihrer ohnehin zu erwartenden Wichtigkeit dadurch erhalten, dass der Comet auf dem Vorgebirge der guten Hoffnung zu einer Zeit gut sichtbar geworden ist, zu welcher er auf unseren nördlichen Sternwarten nicht mehr unter vortheilhaften Umständen erschien. Machen diese erwarteten Beiträge es nöthig, auf diese Materie zurückzukommen, so werde ich dieses nicht versäumen. Auch hoffe ich Musse zu finden, vorhandene Beschreibungen der Schweife einiger Cometen zur Bestimmung der Grösse der auf sie wirkenden Kraft der Sonne zu benutzen.

*) [Untersuchungen über d. Bahn d. grossen Cometen vom J. 1811. Königsberg 1822.]

**) [Vgl. STRUVE, Beobachtungen des Halley'schen Cometen von 1835. Petersburg 1839.]

***) [Vgl. HERSCHEL, *Observat. of the Comet of Halley 1835.* *Mem. Ast. Soc. Vol. X.* s. a. MACLEAN's Capbeobachtungen, *ibid.*]

14. Bemerkungen über mögliche Unzulänglichkeit der die Anziehungen allein berücksichtigenden Theorie der Cometen*).

(Astr. Nachr. 18. p. 345.)

Ein Comet kann keinen Theil seiner Masse von sich entfernen, ohne selbst die Rückwirkung der dazu erforderlichen Kraft zu erfahren. Diese Rückwirkung giebt den übrigen Theilen des Cometen eine Bewegung nach der entgegengesetzten Richtung, deren Quantität so gross ist, wie die Quantität der Bewegung des sich entfernenden Theiles. So lange dieser zu der Masse des Cometen gehört, wird der Schwerpunkt dieser Masse hierdurch nicht aus der Bewegung gebracht, welche der ursprüngliche Zustand und die auf den Cometen wirkenden äusseren Kräfte ihm vorschreiben. Wenn aber ein Theil der Masse sich von dem Cometen trennt und in den Weltraum verliert, so behält der übrige Theil der Masse die Bewegung bei, welche er durch die Ausstossung jenes Theils erhalten hat. Sein Schwerpunkt kann also nach dieser Ausstossung nicht die Bewegung haben, welche er haben würde, wenn die Ausstossung nicht erfolgt wäre. Trennen sich mehrere Theile von dem Cometen, so sind sie von Einfluss oder nicht von Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunkts der übrigbleibenden Masse, je nachdem die zusammengesetzte aller die Trennung bewirkenden Kräfte nicht verschwindet oder verschwindet. In dem ersten Falle ist die Bewegung des Cometen von der Bewegung verschieden, welche die Anziehungen allein, die er erfährt, zur Folge haben würden.

Diese sich sogleich aufdringenden Bemerkungen sind nicht geeignet, uns zu überzeugen, dass die Cometen oder wenigstens diejenigen, welche Schweife haben und dadurch eine dauernde Ausstossung von Theilen offenbaren, den Anziehungen der übrigen Weltkörper allein folgen. Wenn die Ausstossung der sich in den Schweifen verlierenden Theile vorzugweise in einer Richtung vor sich geht und also die zusammengesetzte aller dazu verwandten Kräfte nicht verschwindet, so ist im Gegentheile ein Einfluss derselben auf die Bewegung des Cometen nothwendig und nicht sein Vorhandensein, sondern nur seine Grösse bleibt unbekannt.

*) [296 d. a. Verz. — Br. m. O. I, 289 (O.), II, 168, 174 (O.), 214 (O.), 218 (O.), 313 (O.), 325 (O.), 390, 400—404, 405—407 (O.), 408—412. — Ueber Bewegung im widerstehenden Mittel bez. ENCKE'S Comet s. A. N. II, 11 (HASSER); 13, 263 (ENCKE); 85, 337 (V. ASTER).]

Der Comet von 1744 hat, bei seiner Annäherung an die Sonne, sichtbare Materie der Sonne zu auströmt; der Halley'sche Comet hat im vorigen Jahre eine ähnliche Erscheinung gezeigt. Die Abbildungen des ersten von HEINSIUS zeigen, dass nicht etwa eine kaum sichtbare Ausströmung von ihm ausging, sondern eine lebhaft, fast wie der Kern selbst leuchtende. Die Beobachtungen des anderen zeigten grosse Veränderungen in der Lebhaftigkeit der Ausströmung; zur Zeit der letzten meiner Beobachtungen am 12. October war der dem Kerne nächste Theil der Ausströmung so hell, dass ich Mühe hatte beide von einander zu unterscheiden. Will man von dem lebhaften Lichte der beiden beobachteten Ausströmungen auf ein nicht unbeträchtliches Verhältniss der ausströmenden Masse zu der übrigbleibenden schliessen, so muss man veranlasst werden zu glauben, dass ihr Einfluss auf die Bewegung beider Cometen gleichfalls nicht unbeträchtlich war.

Die von ARGELANDER untersuchte Bewegung des Cometen von 1811 deutet eine Abweichung derselben von der aus den Anziehungsgesetzen allein folgenden an. Ich hege auch die Hoffnung, dass die ohne Vergleich viel genaueren Beobachtungen des Halley'schen Cometen, welche wir grösseren und besseren Instrumenten haben abgewinnen können, hinreichend sein werden, etwas den Anziehungen fremdes sicher zu zeigen, wenn es auch nur eine geringe Einwirkung geäussert haben sollte. Für jetzt kann aus diesen Beobachtungen noch nichts gefolgert werden, indem sie vor der gemachten Bestimmung der verglichenen Sterne nicht reducirt werden können.

Allein man kann den Zusammenhang zwischen einer Ausströmung von gegebener Masse, Geschwindigkeit und Richtung und ihrem Einflusse auf die Elemente der Bahn des Cometen leicht durch Rechnung verfolgen und dadurch eine Uebersicht über die Grösse dieses Einflusses erlangen. Ich werde die daraus hervorgehenden Aenderungen der grossen Axe und der Umlaufzeit aufsuchen. Wenn man den Ort des Cometen in der Ebene seiner Bahn durch die rechtwinkligen Coordinaten x und y angiebt, die halbe grosse Axe derselben durch a , den Radiusvector durch r bezeichnet, so ist bekanntlich:

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{r} - \frac{dx^2 + dy^2}{2dt^2}$$

Nimmt man an, dass der Comet in einer Zeiteinheit ($\frac{1}{k} = 58,13244$ Tage) einen Theil seiner Masse ausströmt, dessen Verhältniss zu dem übrigbleibenden Theile $= \mu : 1$ ist und sich der Zeit proportional verändert, so strömt er in der unendlich kleinen Zeit dt die Masse μdt aus; bezeichnet man die Geschwindigkeit der Ausströmung durch g , den Winkel mit dem Radiusvector, in welchem sie vor sich geht durch α , die wahre Anomalie des Cometen durch v , so ist die aus der Ausströmung hervorgehende, parallel mit der grossen Axe der Bahn und senkrecht darauf zerlegte Geschwindigkeit des Cometeu:

$$= g\mu \cos(v - \alpha) dt \quad \text{und} \quad = g\mu \sin(v - \alpha) dt.$$

Die dadurch veränderten Werthe von $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ sind also:

$$\frac{dx}{dt} + g\mu \cos(v - \alpha) dt$$

und $\frac{dy}{dt} + g\mu \sin(v - \alpha) dt$

Man erhält die Aenderung von $\frac{1}{2a}$ während des Zeittheilchens dt , indem man seinen Ausdruck differentiirt und die eben gefundenen Aenderungen von $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ substituirt, nämlich:

$$d\frac{1}{2a} = -g\mu \left\{ \frac{dx}{dt} \cos(v - \alpha) + \frac{dy}{dt} \sin(v - \alpha) \right\} dt,$$

oder, da

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sin r}{\nu p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\cos r + e}{\nu p}$$

ist,

$$d\frac{1}{2a} = \frac{g\mu}{\nu p} \{ \sin \alpha - e \sin(v - \alpha) \} dt,$$

in welcher Formel p und e den halben Parameter und die Excentricität der Cometenbahn bezeichnen. Setzt man statt dt

$$\frac{r r dr}{\nu p} = \frac{p^3 dr}{(1 + e \cos r)^2}$$

so erhält man:

$$d\frac{1}{2a} = g\mu p \left\{ \frac{\sin \alpha - e \sin(r - \alpha)}{(1 + e \cos r)^2} \right\} dr,$$

oder auch

$$d\frac{1}{2a} = g\mu p \left\{ \frac{\sin \alpha dr}{1 + e \cos r} - \frac{e \cos r \sin r dr}{(1 + e \cos r)^2} \right\}$$

Die Aenderung, welche $\frac{1}{2a}$ während der Bewegung des Cometen zwischen zwei Grenzen r' und r'' von r erfährt, ist das zwischen diesen beiden Grenzen genommene Integral:

BRUNNEN'S Abhandlungen. I. Bd

$$\delta \frac{1}{2a} = g\mu \left\{ \sqrt{ap} \sin \alpha (\epsilon'' - \epsilon' - \cos \alpha (r'' - r')) \right\}$$

wo ϵ' , ϵ'' und r' , r'' die den Grenzen des Integrals entsprechenden Werthe der excentrischen Anomalie und des Radiusvectors bedeuten. Die correspondirende Aenderung der Umlaufzeit τ folgt hieraus:

$$\delta \tau = -3g\mu a \tau \left\{ \sqrt{ap} \sin \alpha (\epsilon'' - \epsilon') - \cos \alpha (r'' - r') \right\}$$

Nimmt man, um die beabsichtigte Uebersicht über die Grösse des Einflusses der Ausströmung auf die Umlaufzeit zu erlangen, zum Beispiele $a = 0$, oder die Ausströmung in der Richtung der Sonne vor sich gehend an, und setzt man für g den Werth, welchen ich für den Halley'schen Cometen durch eine auf der Ausdehnung des Nebels auf der Sonnenseite des Kerns beruhende Schätzung gefunden habe, nämlich $g = 0,03756$ (Astr. Naehr. Nr. 302. S. 223 [p. 74]), so findet man für diese Cometen, in Tagen ausgedrückt:

$$\delta \tau = 57185 (r'' - r') \cdot \mu.$$

Für den 2. October, an welchem Tage ich anfang die Ausströmung zu sehen, ist $r' = 1,08386$; für den 25. October, wo ich sie zuletzt deutlich sah, ist $r'' = 0,75085$. Die in der Zwischenzeit von 23 Tagen aus der Ausströmung entstandene Aenderung der Umlaufzeit ist also unter den der Rechnung zum Grunde liegenden Voraussetzungen:

$$\delta \tau = -19043 \mu.$$

Man sieht hieraus, dass selbst eine der Masse nach wenig beträchtliche Ausströmung einen beträchtlichen Einfluss auf die Umlaufzeit erhält. Wollte man annehmen, der Comet habe während der 23 Tage, über welche die Rechnung sich erstreckt, täglich ein Tausendtel seiner Masse der Sonne zu ausgeströmt, so würde daraus

$$\mu = \frac{0,001}{k} = 0,05813244$$

und

$$\delta \tau = -1107 \text{ Tage}$$

folgen.

Ich habe diese Rechnung hier vorgelegt, nicht um ein sicheres Resultat dadurch zu erlangen, sondern nur um dadurch zu zeigen, dass Annahmen über die Beträchtlichkeit der Ausströmung und ihre Geschwindigkeit, welche wenigstens nicht durch den Augenschein als übertrieben zurückgewiesen werden, einen sehr beträchtlichen Einfluss auf die Umlaufzeit des Cometen erlangen. Wenn man den Betrag der täglichen Ausströmung nach der Lebhaftigkeit ihres Lichtes schätzen wollte, so würde man ihn ohne Zweifel meistens weit grösser als 0,001 geschätzt haben, z. B. zur Zeit der oben erwähnten Beobachtung vom 12. October, wo der

Kern des Cometen mit solcher Lebhaftigkeit ausströmte, dass der Strom an seinem Anfange fast so hell erschien, als der Kern selbst.

Der grosse Einfluss einer Ausströmung auf die Bewegung des Cometen kann nur durch eine genau gleiche Ausströmung auf der entgegengesetzten Seite des Perihels vernichtet werden. Ob darin wirklich eine völlige Gleichheit, oder ob auf einer der beiden Seiten des Perihels ein Uebergewicht stattfindet, wissen wir nicht. Der Anblick des Cometen kann darüber offenbar nichts lehren, selbst wenn es sich einmal treffen sollte, dass die Sonne, der Comet und die Erde bei dem Aufsteigen des Cometen wieder dieselben Entfernungen von einander erhielten, welche sie bei dem Absteigen hatten. Noch weniger haben die beiden Cometen, an welchen bis jetzt die Ausströmung beobachtet worden ist, hierüber eine Andeutung geben können, indem sie in dieser Beziehung nur bei ihrem Herabsteigen beobachtet werden konnten. Wenn man die Grösse des Einflusses einer Ausströmung betrachtet, so wird man versucht, für wahrscheinlich zu halten, dass bei weitem der grösste Theil desselben durch seine eigene Entgegenwirkung in verschiedenen Theilen der Bahn verschwinde, und nur ein vergleichungsweise kleiner Rest übrigbleibe, welcher dann in den Wiederkehren des Cometen zu der Sonne hervortritt.

Von dieser Art waren die Gründe, welche mich veranlassten, in Nr. 289 der Astr. Nachr. zu äussern, dass die von ENCKE erwiesene Beschleunigung der Umläufe des von ihm erschöpfend berechneten Cometen nicht nothwendig von einem Widerstande im Weltraume herrühre.*) Es ist in der That nur bekannt, dass diese

*) Bis jetzt kann es nur die Aufmerksamkeit erregen, dass der (Halley'sche) Comet einige Tage später gekommen ist, als es der Rosenberger'schen Rechnung zufolge hätte kommen sollen, während bei dem von ENCKE so vollständig berechneten Cometen das Gegentheil stattgefunden hat. Ob ein nochmaliges Zurückkommen auf die Rechnung, vielleicht die Untersuchung des Einflusses der Aenderungen der Planetenmassen, hierin eine Aenderung geben wird, muss man erwarten; einen Widerspruch würde ich aber selbst in einer bleibenden Verschiedenheit beider Cometen in dieser Beziehung nicht sehen, indem mir die beschleunigten Umläufe des von ENCKE berechneten Cometen zwar durch die Beobachtungen völlig erwiesen erscheinen, die Annahme eines widerstehenden Aethers zur Erklärung der Beschleunigung aber nicht hinreichend dadurch begründet ist. Die Thatsache ist einfach, dass die Umläufe sich beschleunigen; es sind hundert Ursachen möglich, welche einen solchen Erfolg hervorbringen, man kann aber nur eine bestimmte davon anzunehmen sich berechtigt fühlen, wenn ihr Dasein anderweitig nachgewiesen ist, oder ihre Annahme noch andere Erscheinungen erklärt. Bei dem widerstehenden Aether ist bei-

Beschleunigung stattfindet, nicht aber, aus welcher Ursache sie entstanden ist. Die Aufgabe, aus einer einfachen Erscheinung, welche bei ihrer Wiederkehr keine Abänderungen zeigt, die Ursache derselben zu finden, ist unbestimmt und man kann sie durch eine unbestimmte Anzahl physischer Hypothesen auflösen, ohne dass eine dieser Auflösungen dadurch, dass sie der Erscheinung Genüge leistet, vor den anderen, welche dieses mit ihr gemein haben, ein Gewicht erhalten könnte. Ein Widerstand im Weltraume ist bis jetzt durch keine andere Erscheinung bemerkbar geworden; vielmehr hat die Bewegung des Mondes gezeigt, dass ein etwaniger Widerstand beziehungsweise auf die Masse und die Geschwindigkeit des Mondes unmerklich ist. Ich bin weit entfernt, hieraus zu folgern, dass der bei der Bewegung des Mondes unmerkliche Einfluss eines Widerstandes auch bei der Bewegung eines Cometen, der wahrscheinlich eine weit kleinere Masse besitzt und augenscheinlich einen weit grösseren Raum einnimmt, unmerklich sein müsse; allein der Annahme eines Widerstandes zur Erklärung der Beschleunigung fehlt hiermit das, was ihren Vorzug vor anderen möglichen Erklärungen begründen könnte.

Es konnte weder meine Ansicht sein, noch war sie es, den Widerstand aus der Zahl der Möglichkeiten ausschliessen zu wollen, durch welche man die Beschleunigung der Umläufe des Cometen erklären kann. Ich bemerkte aber, dass, falls ein Comet keine Beschleunigung oder statt dieser eine Verzögerung zeigen sollte, darin kein Widerspruch gegen das von ENCKE gefundene wichtige Resultat, sondern nur gegen die Erklärung derselben durch einen Widerstand liege. So unerheblich diese Bemerkung ist, weil Niemand das dadurch Geäusserte bezweifelt, so hat sie doch ENCKE veranlasst, in Nr. 305 der Astr. Nachr. die Gründe zusammenzustellen, welche der Hypothese des Widerstandes günstig sind. Meine unbedeutende Aeusserung hat dadurch grösseren Erfolg erhalten, als ich ahnen konnte: sie hat den Lesern der Astr. Nachr. eine Vertretung des Widerstandes eingebracht, deren Kenntniss wenigstens einem von ihnen, nämlich mir, lehrreich und erfreulich gewesen ist. Indessen ist diese Ver-

des, so viel ich weiss, nicht der Fall: denn wenn man auch den Lichtäther zugeben will, so ist damit das widerstehende Mittel nicht eher zugegeben, als nachgewiesen sein wird, dass er die Cometen nicht durchdringt; etwas anderes als die Bewegung des einen Cometen, was durch einen Widerstand im Weltraume erklärt werden könnte, ist bekanntlich bis jetzt nicht vorhanden, indem der Lauf der Planeten und des Mondes keine Andeutung eines Widerstandes gegeben hat.

[B. in einem Brief an SCHUMACHER vom 11. September 1835.]

theidigung gegen die oben angeführte Aeusserung von mir gerichtet und fordert daher von mir, dass ich mich näher über dieselbe erkläre. Zu dem was ich darüber schon gesagt habe, füge ich noch hinzu, dass, indem die Einwirkung einer Ausströmung auf die Bewegung des Cometen der sie besitzt, nicht bezweifelt werden kann, nicht ihr Dasein, sondern nur ihre Grösse und ihr Gesetz Gegenstände der weiteren Untersuchung sind. Unglücklicherweise ist bei dem jetzigen Zustande unserer Kenntnisse von einer Verfolgung beider Ansichten kein Vortheil zu erwarten. Beide entziehen sich der Rechnung: die Hypothese der Ausströmung, weil die Gesetze, nach welchen die Ausströmung vor sich geht, unbekannt sind; die Hypothese des Widerstandes, weil das Gesetz der Dichtigkeit des angenommenen widerstehenden Aethers und die unermesslichen Aenderungen, welche der Umfang des Cometen bei seinem Herabsteigen zu der Sonne erfährt, gleichfalls unbekannt sind. Eine Verhandlung über diesen Gegenstand gehört daher zu den unfruchtbarsten; ich würde eine gelegentliche Aeusserung darüber auch für hinreichend gehalten haben, wenn das 305. Stück der Astr. Nachr. mir nicht die Aufforderung gäbe, jene, so weit wie es jetzt geschehen ist, auszudehnen.

[Literatur der Astr. Nachrichten über Cometen. — Rechnungen über periodische C. Halley'scher C. von ROSENBERGER (Bd. 8, 9, 11, 12), LEHMANN (12), WERTHEIMEN (24, 25), ENCKE'scher C. von ENCKE (6, 9, 13, 21, 51), BUCKER (71), GLASNAFF (78), ANTEL (85), FAYE'scher C. von MÖLLER (54, 64, 79, 80), BRODSCH'scher C. von BRUNS (71), d'ARREST'scher C. von LEVEAU (68, 70). — Physische Erscheinung: Biela'scher C. (1832) von OLBERS

(6), Halley'scher C. (1835) von OLBERS (12), SCHWABE, STRUVE (13), C. III. 1853 von RUMKER, SCHMIDT (37), C. V. 1857 von PAFK (47), Donat'scher C. (V. 1858) von AICWERS, HAGENF, HEIS, MÄDLER, PAPE, RESLHUBER (49); GALLE, HORCK, SEIDEL, WINKECKE (50), BRUNS, FÖRSTER (51); FEARNLEY, POLKOWA (52); BOHD (58, 60), SCHMIDT (59), C. III. 1860 von SCHMIDT (53), C. II. 1861 von C. H. F. PETERS (60), SCHMIDT (73), ENCKE'scher C. (1862) von BRUNS, FÖRSTER, TIETJEN (60). (1868) von SCHMIDT (72, 79), C. II. 1862 von SCHMIDT (58, 59), SCHWABE (58), FÖRSTER, TIETJEN (60). BRODSCH'scher C. (1868) von d'ARREST (71), SCHMIDT (72). Coggia'scher C. (III. 1874) von ADDE, ZENKER (84), BRUNS, SCHLÖPF, TEMPEL (85). — Zusammenhang mit Sternschnuppen: BRUNS, OPFOLZER, C. F. W. PETERS, SCHIAPARELLI, WEISS (68); d'ARREST, GALLE (69); FALS (72, 73, 74); WEISS, WOLF (73); C. F. W. PETERS (74); BARHELDEN, BRUNS, GALLE, HOLESCHER, KLINKEFELDES, OPFOLZER, C. F. W. PETERS (80); OPFOLZER (81). — Specter: C. II. 1868 von HUGGINS (71); C. I. 1871 von VOGEL (77, 78); ENCKE'scher C. 1871 von HUGGINS (78), 1875 von KOKKOLY (85); Coggia'scher Comet von d'ARREST, FEARNLEY, KOKKOLY (84); VOGEL (85); C. II. 1874 von VOGEL (85); verschiedene von VOGEL (80). — Verschiedenes: OLBERS, möglicher Zusammenstoß mit einem C. 6, über anormale Cometen Schweife (8); VALZ, Bestimmung der Dichtigkeit des Aethers (8); LINDSAY, negativer Beitrag zur Erklärung der Cometen Schweife (30); PAPE, über die Erscheinung des Donat'schen C. (49); WINKECKE, über den Donat'schen C. (50); FAYE, über die Hypothesen zur Erklärung der Cometen Schweife (52); über Untersuchungen von HORCK über die Figur der C. (52); PAPE, über FAYE's Bemerkungen; Adscitiven von HORCK, NEWTON, KIPLER, ELLER über C. (52); BREUCHIN, über die Cometen Schweife (54), Schweifrichtung der C. III. 1844 und III. 1855 (55); SCHMIDT, Bewegung der Lichtmaterie der C. in der Coma (56); d'ARREST, Notiz von PAPE über Schwächerwerden der C. (72); ZENKER, physikalische Verhältnisse und Entwicklung der C. (79); ZÖLLNER, elektrische und magnetische Fernwirkung der Sonne (80); ZENKER, über einige Punkte seiner Cometen theorie (84).

15. Projectirte Störungstafeln. Auszug aus einem Schreiben an Lindenau.*

(Mon. Corr. XXIII. p. 190.)

Königsberg, am 11. Jan. 1811.

... Die Abkürzung der Perturbations-Rechnungen für die Planeten, die ich im Sinne hatte, ist nicht auf die Verkleinerung des Umfangs der Tafeln berechnet, sondern auf die Bequemlichkeit ihres Gebrauchs. Ich dachte mir Tafeln wie die Delambre'schen, nur mit dem Unterschiede, dass das eine, die Länge des Planeten enthaltende Argument, durch das ganze Jahr unverändert bleiben sollte. Diese Einrichtung ist möglich und muss die Rechnung sehr erleichtern, da man dadurch alle Störungen für ein ganzes Jahr in einer Vertical-Columnne finden, auch der Mühe überhoben

sein würde, die Argumente aufzuschreiben und zusammen zu addiren. Nach dieser Idee sollte z. B. die Störung des 2 auf die Erde in eine Tafel gebracht werden, deren erste Columnne die Störungen enthalten sollte, die statt finden, wenn die mittlere Länge des 2, bei irgend einer angenommenen Sonnenlänge (etwa $9^{\circ} 10'$, so wie sie ohngefähr am Anfang des Jahres ist) = 0 ist; die zweite Columnne sollte für ein Jahr gelten, in welchem die = 10°; die dritte für ein Jahr, in welchem dem gleichen Sonnenorte die Länge des 2 = 20° zugehört u. s. w. — Man würde dann in der Epochen-tafel die mittlere Länge des 2, in Decimalen des ganzen Kreises ausgedrückt, immer für die Sonnenlänge

* [Auszug a. 61. d. a. Verz. — Br. m. O. I. 250.]

$9^{\circ} 10'$ ansetzen, und diese, ohne etwas zu addiren, für das ganze Jahr gebrauchen. Die Vertical-Columnae sollte als Argument die Länge der Sonne, in Zeichen, Graden u. s. w. ausgedrückt oder vielleicht auch, nach einer kleinen Correction, in Tagen (welches jedoch nicht so bequem sein möchte, da man die mittlere Sonnen-Länge immer schon kennt, wenn man die Perturbationen berechnen will) enthalten. — Die auf diese Weise construirten Tafeln, würden im Aeusseren den Delambre'schen sehr ähnlich sein; auch würde ihre Berechnung eben so mühsam sein (jedoch nicht mühsamer, wenn man den Grundformeln eine für diese Rechnungen

passende Gestalt giebt); allein ihr Gebrauch würde sehr bequem sein, da sie eigentlich als nur ein Argument habend angesehen werden müssen. Für 2 und 5, wo die Störungen sehr gross sind, passt vielleicht diese Einrichtung weniger; leicht wird es sich indes bei der Anwendung beurtheilen lassen, ob der Vorschlag in allen Fällen, oder, wenn dieses nicht ist, in welchen er als bequem betrachtet werden kann. Ich bedaure, dass viele Arbeiten mir nicht erlaubt haben, die Perturbationsformeln für die Erde, so wie ich es thun wollte, nach dieser Idee zu entwickeln oder umzuformen.

16. Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht.*

(Abhandl. d. Berl. Akademie der Wissenschaften 1824. Mathemat. Cl. p. 1. Der Akademie vorgelegt am 29. Januar 1824.)

1.

Die Störungen der elliptischen Bewegung eines Planeten durch einen anderen bestehen aus zwei Theilen: der eine rührt von der Anziehung her, welche der gestörte Planet durch den störenden erfährt; der andere von der Bewegung der Sonne, welche der letztere erzeugt. Beide Theile sind in den bisherigen Entwicklungen der planetarischen Störungen zusammengenommen; allein es ist zweckmässiger, jeden derselben abgesondert zu untersuchen. Der letztere nämlich kann, wie ich in gegenwärtiger Abhandlung zeigen werde, direct und vollständig entwickelt werden und verdient deshalb eine Trennung von dem ersteren, bei welchem dieses noch nicht geleistet worden ist; die Trennung wird sogar notwendig, wenn man die bisher allgemeine Annahme, dass der störende Planet auf den gestörten und die Sonne mit gleicher Masse wirkt, einer Prüfung unterwerfen will.

Diese Annahme ist eine Folge des Satzes, dass die Körper ihren Massen proportional anziehen. NEWTON leitete denselben bekanntlich aus Erfahrungssätzen, verbunden mit der notwendigen Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung ab. Aber abgesehen davon, dass die Erfahrungssätze innerhalb gewisser Grenzen bezweifelt werden können, kann man auch nachweisen, dass die Data, welche NEWTON seiner Annahme zum Grunde legte, andere Systeme keineswegs ausschliessen, sodass also anderweitige Erfahrungen entscheiden müssen,

ob der Satz von der den Massen proportionalen Anziehung der Körper wirklich das allgemeine Gesetz der Natur ist. Da dieses den angenommenen Vorstellungen entgegen ist, so wird es mir erlaubt sein, diese Abhandlung durch eine nähere Untersuchung der Gründe zu eröffnen, wodurch NEWTON diesen Theil seines Systems unterstützte.

Um dieses kurz und deutlich thun zu können, werde ich die beschleunigende Kraft, mit welcher der Körper x in der Entfernung 1 auf den Körper y wirkt, durch $\left(\frac{x}{y}\right)$ bezeichnen. Nach dieser Bezeichnung hat man die Sätze, auf welche NEWTON'S Annahme sich gründet, folgendermassen:

$$1. \dots \dots \left(\frac{0}{1}\right) = \left(\frac{0}{2}\right) = \left(\frac{0}{3}\right) = \text{u. s. w.}$$

wo 0 die Sonne und 1, 2, 3... Planeten bedeuten: denn das dritte Kepler'sche Gesetz erfordert, dass die beschleunigende Kraft, womit die Sonne auf die Planeten wirkt, auf gleiche Entfernung reducirt, gleich ist;

$$2. \dots \dots \left(\frac{p}{I}\right) = \left(\frac{p}{II}\right) = \left(\frac{p}{III}\right) = \text{u. s. w.}$$

wo p den Jupiter oder Saturn und I, II, III... ihre Monde bezeichnen: denn auch bei diesen bewährt sich dasselbe Kepler'sche Gesetz;

$$3. \dots \dots \left(\frac{t}{u}\right) = \left(\frac{t}{v}\right) = \left(\frac{t}{w}\right) = \text{u. s. w.} = \left(\frac{t}{I}\right)$$

wo t die Erde, u, v, w ... irdische Körper und I den Mond bedeuten: denn NEWTON'S Versuche über die Pendelschwingungen verschiedenartiger

*) [179 d. u. Verz. — Br. in. O. H. 238, 242, 244 (O.), 256, 261, 268 (O.)]

Körper und die Vergleichung derselben mit der Bewegung des Mondes, zeigten, dass die beschleunigende Kraft, womit die Erde auf diese Körper wirkt, gleich ist;

$$4. \dots \dots \left(\frac{0}{y}\right) - \left(\frac{0}{I}\right) - \left(\frac{0}{II}\right) = \text{u. s. w.}$$

denn wenn diese beschleunigenden Kräfte nicht gleich wären, so müssten die Bewegungen der Monde Ungleichheiten zeigen, welche die Bewegungen nicht verrathen;

$$5. \dots \dots \left(\frac{x}{y}\right) y = \left(\frac{y}{x}\right) x$$

wow y und x die Massen der Körper y und x bezeichnen; die Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung erfordert dieses, von welcher Beschaffenheit auch die Wirkung sein mag.

Dass diese fünf Sätze nicht allein mit der Annahme der Anziehung im Verhältniss der Massen, sondern noch mit anderen Hypothesen vereinbar sind, glaube ich am besten zeigen zu können, wenn ich eine dieser Hypothesen mit denselben vergleiche: ich nehme die Körper als aus verschiedenen Elementen $a, b, c \dots$ zusammengesetzt an, so dass a nur a , b nur b , u. s. w. nicht aber das eine Element das andere anzieht; von diesen Elementen enthalte die Sonne gleiche Quantitäten, und alles, was zu einem Hauptplaneten gehört, sowohl seine einzelnen Theile als seine Monde, sei, in Beziehung auf diese Elemente, ähnlich, wenn auch nicht gleich gemischt.

Denkt man sich zwei Körper x und y , deren erster von den verschiedenen Elementen die Quantitäten $a, b, c \dots$ enthält, der andere $a, b, c \dots$, so ist die Anziehung des einen durch den anderen

$$aa + bb + cc + \dots$$

allgemein übereinstimmend mit der fünften Forderung; die beschleunigende Kraft, womit der erste Körper auf den andern wirkt, ist diese Anziehung dividirt durch die Masse des angezogenen, oder

$$\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{aa + bb + cc + \dots}{a + b + c + \dots}$$

Behält man nun die oben schon angewandten Bezeichnungen der Sonne, der Planeten, Monde und irdischen Körper bei, und setzt man, der Hypothese zufolge,

$$a = b = c = \text{u. s. w.}$$

$$a : a : a : \dots = b : b : b : \dots = c : c : c : \dots = \text{u. s. w.}$$

$$a : a : a : \dots = b : b : b : \dots = c : c : c : \dots = \text{u. s. w.}$$

so hat man

$$\left(\frac{0}{1}\right) = \frac{a^0 + a^0 + a^0 + \dots}{a + b + c + \dots} = a^0$$

also den ersten Erfahrungssatz

$$\left(\frac{0}{1}\right) = \left(\frac{0}{2}\right) = \left(\frac{0}{3}\right) = \text{u. s. w.}$$

ferner hat man

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{a^1 + b^1 + c^1 + \dots}{a + b + c + \dots}$$

welches, mit $a : a = b : b = c : c = \text{u. s. w.} = 1 : \lambda$ verbunden,

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{(a^1 \lambda + b^1 \lambda + c^1 \lambda + \dots)}{a + b + c + \dots} = \frac{(a^1) + (b^1) + (c^1) + \dots}{a + b + c + \dots}$$

und daher den zweiten Erfahrungssatz

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \left(\frac{1}{I}\right) = \left(\frac{1}{II}\right) = \text{u. s. w.}$$

gibt; der dritte und vierte Erfahrungssatz folgen aus denselben Betrachtungen, wodurch die Behauptung, dass die Hypothese denselben Gründen entspreche, aus welchem NEWTON die seinige ableitete, gerechtfertigt ist. Dieselbe Hypothese giebt aber

$$\left(\frac{0}{1}\right) = \frac{a^0 + b^0 + c^0 + \dots}{a + b + c + \dots}$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{a^1 + b^1 + c^1 + \dots}{a + b + c + \dots}$$

$$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}{a + b + c + \dots}$$

u. s. w.

also die beschleunigenden Kräfte, womit der Planet n auf die Sonne und die übrigen Planeten wirkt, im Allgemeinen verschieden.

Die Hypothese, vermöge welcher hier den fünf Sätzen genügt worden ist, verwandelt sich in die Newton'sche, wenn man nur ein Element annimmt; sie ist so gewählt, dass sie der letzteren so nahe als möglich kommt, übrigens aber nur als ein Mittel aufgestellt, wodurch gezeigt werden sollte, dass NEWTON'S Hypothese nicht eine Folge der fünf Sätze ist. Ein Planet kann also so viele verschiedene Massen (um den gewöhnlichen Sprachgebrauch beizubehalten) zeigen, als Körper vorhanden sind, auf welche er wirkt; betrachtet man aber die gegenseitigen Bewegungen von n Planeten und der Sonne, so finden, vermöge des fünften Satzes, unter den $n(n+1)$ Massen, $\frac{1}{2}n(n-1)$

Bedingungsgleichungen statt, und, wenn man auch den ersten Satz als wahr annimmt, $\frac{1}{2}n(n+1)$, so dass nur $\frac{1}{2}n(n+1)$ Massen unbekannt bleiben. Setzt man z. B. für drei Planeten

$$\begin{aligned} \binom{0}{1} &= 1; & \binom{0}{2} &= 1; & \binom{0}{3} &= 1 \\ \binom{1}{1} &= m'; & \binom{1}{2} &= m'i; & \binom{1}{3} &= m'k \\ \binom{2}{0} &= m''; & \binom{2}{1} &= m''i'; & \binom{2}{3} &= m''l \\ \binom{3}{0} &= m'''; & \binom{3}{1} &= m'''k'; & \binom{3}{2} &= m'''l' \end{aligned}$$

so hat man die Gleichungen

$$i = i'; k = k'; l = l'$$

wodurch die Zahl der unbekannt Grössen von 9 auf 6 reducirt wird.

Es ist übrigens klar, dass man die vier ersten Sätze, welche durch Erfahrung gegeben sind, innerhalb gewisser Grenzen bezweifeln kann, welche, namentlich bei den beiden ersten derselben, vielleicht nicht so eng sind, als der Schärfe der heutigen Beobachtungen angemessen wäre. Ob aber die astronomischen Theorien allenthalben in so grosser Uebereinstimmung mit den Beobachtungen sind, dass dadurch jeder Zweifel an der Wahrheit der Newton'schen Annahme zurückgewiesen wird, dieses ist eine Frage, welche wohl Niemand bezagen wird, deren genaue Erörterung jedoch sehr wichtig ist und die grössten Fortschritte der Wissenschaft verheisst.

Der erste, welcher die Anziehung im Verhältnisse der Massen bezweifelte, ist JOHANN TOBIAS MAYER;* ich habe aber geglaubt, eine von der seinigen verschiedene Ansicht aufstellen zu dürfen, weil es mir wesentlich zu sein schien, zu zeigen, dass unter den Werthen von

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \dots$$

Verschiedenheiten sein können, nicht etwa nur von der Ordnung der Planetenmassen, sondern von jeder beliebigen Grösse.

2.

Den Planeten, dessen Bewegung untersucht werden soll, werde ich im Folgenden durch p bezeichnen, den störenden durch p' ; als Einheit der Kräfte werde ich

$$\binom{0}{p} + \binom{p}{0}$$

annehmen, und, in diesem Maasse ausgedrückt,

$$- \binom{p}{0} \text{ und } \binom{p}{p}$$

durch m und m' andeuten.

Wenn x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten und r den Radiusvector von p bedeuten, x', y', z', r' dasselbe für p' und

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2} \\ R &= \frac{m(xx' + yy' + zz')}{r^3} - \frac{m'}{\rho^3} \end{aligned}$$

so hat man

$$0 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{x}{r^3} + \left(\frac{dR}{dx}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{y}{r^3} + \left(\frac{dR}{dy}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{z}{r^3} + \left(\frac{dR}{dz}\right)$$

Die störenden Kräfte, parallel zum Radiusvector, senkrecht auf denselben in der Ebene und nach der Richtung der Bewegung, und senkrecht auf diese beiden, bezeichne ich durch A', B', C' ; die letzte ist positiv, wenn sie von oben nach unten gerichtet ist, für einen Beobachter, welcher, von der Sonne aus, die Bewegung des Planeten von der Rechten nach der Linken sieht. Ich werde zuerst die Ausdrücke dieser Kräfte durch die Differentialquotienten von R , in Beziehung auf die Elemente von p , angegeben und dabei folgende Bezeichnungen anwenden:

- Länge des aufsteigenden Knotens n
 - Neigung der Bahn i
 - Entfernung des Perihels vom Knoten ω
 - Excentricität e
 - halbe grosse Axe a
 - $\sqrt{a(1-e)}$ h
 - wahre, excentrische, mittlere Anomalie φ, ϵ, μ
- für den störenden Planeten . $n', i', \omega', \epsilon', a', h', \varphi', \epsilon', \mu'$

Man hat bekanntlich

$$x = r \{ \cos n \cos(\omega + \varphi) - \sin n \sin(\omega + \varphi) \cos i \}$$

$$y = r \{ \sin n \cos(\omega + \varphi) + \cos n \sin(\omega + \varphi) \cos i \}$$

$$z = r \sin(\omega + \varphi) \sin i$$

$$rA' = \left(\frac{dR}{dx}\right)x + \left(\frac{dR}{dy}\right)y + \left(\frac{dR}{dz}\right)z$$

$$rB' = \left(\frac{dR}{dx}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right) + \left(\frac{dR}{dy}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right)\left(\frac{dz}{d\omega}\right)$$

$$rC' = \left(\frac{dR}{dx}\right)r \sin n \sin i - \left(\frac{dR}{dy}\right)r \cos n \sin i + \left(\frac{dR}{dz}\right)r \cos i$$

also

$$(1) \dots rA' = \left(\frac{dR}{dr}\right)r = \left(\frac{dR}{da}\right)a$$

$$(2) \dots rB' = \left(\frac{dR}{d\omega}\right)$$

Multiplircirt man den Ausdruck für rC' mit $\sin(\omega + \varphi)$ und setzt man in dem Producte für

*) Comment. Soc. Reg. Scient. Göttingensis ad A. MDCCCIV - VIII.

$r \sin(\omega + \varphi) \sin n \sin i$; $-r \sin(\omega + \varphi) \cos n \sin i$; $r \sin(\omega + \varphi) \cos i$
ihre Ausdrücke, nämlich

$$\left(\frac{dx}{dt}\right); \left(\frac{dy}{dt}\right); \left(\frac{dz}{dt}\right),$$

so erhält man

$$(3) \dots rC' \sin(\omega + \varphi) = \left(\frac{dR}{dt}\right)$$

Man hat ferner die Gleichungen

$$\left(\frac{dR}{d\omega}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right) \left(\frac{dx}{d\omega}\right) + \left(\frac{dR}{dy}\right) \left(\frac{dy}{d\omega}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right) \left(\frac{dz}{d\omega}\right)$$

$$\left(\frac{dR}{dn}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right) \left(\frac{dx}{dn}\right) + \left(\frac{dR}{dy}\right) \left(\frac{dy}{dn}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right) \left(\frac{dz}{dn}\right)$$

und

$$\left(\frac{dx}{d\omega}\right) \cos i - \left(\frac{dx}{dn}\right) = r \cos(\omega + \varphi) \sin n \sin i^2$$

$$\left(\frac{dy}{d\omega}\right) \cos i - \left(\frac{dy}{dn}\right) = -r \cos(\omega + \varphi) \cos n \sin i^2$$

$$\left(\frac{dz}{d\omega}\right) \cos i - \left(\frac{dz}{dn}\right) = r \cos(\omega + \varphi) \cos i \sin i$$

also, wenn man $\left(\frac{dR}{d\omega}\right)$ mit $\cos i$ multiplicirt und $\left(\frac{dR}{dn}\right)$ davon abzieht,

$$(4) \dots rC' \cos(\omega + \varphi) = \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \cot g i - \left(\frac{dR}{dn}\right) \operatorname{cosec} i.$$

Mehrerer Einfachheit halber werde ich im Folgenden die Bahn des störenden Planeten zur festen Ebene wählen, die Winkel ω und ω' von dem aufsteigenden Knoten der Bahn des gestörten auf dieser Ebene an rechnen, und unter J die Neigung derselben Bahn gegen die feste Ebene verstehen, wodurch man erhält:

$$(5) \dots rC' \sin(\omega + \varphi) = \left(\frac{dR}{dJ}\right)$$

$$(6) \dots rC' \cos(\omega + \varphi) = \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \cot g J + \left(\frac{dR}{d\omega'}\right) \operatorname{cosec} J$$

3.

Durch diese störenden Kräfte A' , B' , C' habe ich früher*) die Veränderungen der Elemente von p ausgedrückt; jetzt werde ich unmittelbar die Störungen des Radiusvectors $= \delta r$, der wahren Länge in der Bahn $= \delta v$ und der Breite über der mittlern Ebene in der Bahn $= \delta s$ angeben, dabei aber nur die erste Potenz der störenden Masse berücksichtigen. Man hat**)

$$0 = -\frac{d \cdot r}{dt} \frac{dr}{dt} + \frac{1}{a} - \frac{1}{r} + rA'$$

woraus unter Vernachlässigung von δr^2 u. s. w. folgt

$$0 = \frac{d^2 \cdot r}{dt^2} + \frac{r \delta r}{r^3} + rA' + \delta \frac{1}{a}.$$

*) Untersuchungen über den Kometen von 1807. II. Abtheilung. [Abb. 9.]

**) Elendasselbst S. 52. [p. 23].

Setzt man für $\delta \frac{1}{a}$ seinen Ausdruck durch die störenden Kräfte, nämlich

$$2 \int \left\{ A' \frac{dr}{dt} + B' \frac{h}{r} \right\} dt = 2 \int \left\{ \left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{d\omega}\right) d\omega \right\} \\ = 2 \int \left\{ \left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{dv}\right) dv \right\}$$

oder, da das in Beziehung auf die Coordinaten von p angenommene Differential von R

$$= \left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{dv}\right) dv = \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu$$

ist,

$$\delta \frac{1}{a} = 2 \int \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu;$$

so hat man

$$0 = \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{r \delta r}{r^3} + a \left(\frac{dR}{da}\right) + 2 \int \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu$$

welche Gleichung Méc. Cél. Buch II. § 46 folgendermassen integrirt ist:

$$(7) \dots \delta r = a a \sqrt{1 - e^2} \left\{ \cos \varphi \int \frac{Q \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} d\mu - \sin \varphi \int \frac{Q \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} d\mu \right\}$$

wo, um abzukürzen, Q für

$$a \left(\frac{dR}{da}\right) + 2 \int \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu$$

geschrieben ist.

Den Ausdruck von δr giebt Herr LAPLACE durch den von δr ; ich werde ihn aber unmittelbar auf die störenden Kräfte zurückführen. Man hat

$$0 = \frac{dr r}{dt} \frac{dr}{dt} + rB', \text{ oder}$$

$$0 = r r \frac{d\delta r}{dt} + 2r \delta r \frac{dv}{dt} + \int rB' dt$$

und wenn man mit $\frac{dt}{rr}$ multiplicirt und integrirt

$$\delta v = -2 \int \frac{\delta r}{r} dv - \int \frac{dt}{rr} \int rB' dt.$$

Das erste Glied dieses Integrals findet man, wenn man für δr seinen Ausdruck (7) setzt,

$$= -\frac{a}{1 - e^2} \left\{ \left(2 \sin \varphi + \frac{e}{2} \sin 2\varphi \right) \int \frac{Q \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} d\mu \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{2} e + 2 \cos \varphi + \frac{e}{2} \cos 2\varphi \right) \int \frac{Q \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} d\mu \right. \\ \left. - 2 \int Q d\mu + e \int d\varphi \int \frac{Q \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} d\mu \right\}$$

Wenn man das letzte Glied dieses Ausdrucks mit dem letzten Gliede des Ausdrucks von δv vereinigt, so ist die Summe

$$= -\int \frac{dt}{rr} \int \left\{ a^3 e \sin \varphi \cdot Q + r B' \frac{dt}{d\mu} \right\} d\mu$$

$$= - \int \frac{dt}{rr'} \int \left\{ \frac{Qr}{h} dr + r B' dt \right\}$$

und wenn man für Q und B' ihre Werthe setzt, auch $\left(\frac{dR}{d\omega}\right)$ durch die Gleichung

$$\left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{d\omega}\right) d\varphi = \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu$$

eliminiert,

$$= - \int \frac{dt}{rr'} \int \left\{ \frac{2r dr}{h} \int \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu + \frac{rr'}{h} \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu \right\}$$

$$= - \frac{1}{h} \int dt \int \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu$$

$$= - \frac{a}{2\sqrt{1-ec}} \int Q d\mu + \frac{a}{2\sqrt{1-ec}} \int a \left(\frac{dR}{da}\right) d\mu$$

Man hat daher

$$(8) \dots \delta r = - \frac{2a}{\sqrt{1-ec}} \left(\sin\varphi + \frac{e}{4} \sin 2\varphi \right) \int \frac{Q \sin \varphi}{1 + c \cos \varphi} d\mu$$

$$- \frac{2a}{\sqrt{1-ec}} \left(\frac{3}{4} e + \cos\varphi + \frac{e}{4} \cos 2\varphi \right) \int \frac{Q \cos \varphi}{1 + c \cos \varphi} d\mu$$

$$+ \frac{3a}{2\sqrt{1-ec}} \int Q d\mu + \frac{a}{2\sqrt{1-ec}} \int a \left(\frac{dR}{da}\right) d\mu$$

Die Breite über der mittleren Ebene der Bahn ist

$$\delta s = \delta i \sin(\omega + \varphi) - \delta n \cos(\omega + \varphi) \sin i$$

Man hat aber (a. a. O. S. 56 [p. 24])

$$\left(\frac{di}{dt}\right) = - \frac{rC'}{h} \cos(\omega + \varphi)$$

$$\left(\frac{dn}{dt}\right) = - \frac{rC'}{h} \sin(\omega + \varphi) \operatorname{cosec} i$$

und wenn man (3) und (4) substituirt

$$\left(\frac{di}{dt}\right) = - \frac{1}{h} \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \cotg i + \frac{1}{h} \left(\frac{dR}{dm}\right) \operatorname{cosec} i$$

$$\left(\frac{dn}{dt}\right) = - \frac{1}{h} \left(\frac{dR}{di}\right) \operatorname{cosec} i$$

welche Ausdrücke sich in der vortrefflichen, von Herrn LAPLACE dem Bureau des Longitudes am 17. August 1808 vorgelegten Abhandlung, nicht in dieser Form finden. Setzt man die Integrale derselben in den Ausdruck von δs , so erhält man

$$\delta s = \frac{-a}{\sqrt{1-ec}} \sin(\omega + \varphi) \int \left\{ \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \cotg i - \left(\frac{dR}{dm}\right) \operatorname{cosec} i \right\} d\mu$$

$$+ \frac{a}{\sqrt{1-ec}} \cos(\omega + \varphi) \int \left(\frac{dR}{di}\right) d\mu$$

oder, nach (5) und (6)

$$(9) \dots \delta s = \frac{-a}{\sqrt{1-ec}} \sin(\omega + \varphi) \int \left\{ \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \cotg J + \left(\frac{dR}{dm}\right) \operatorname{cosec} J \right\} d\mu$$

$$+ \frac{a}{\sqrt{1-ec}} \cos(\omega + \varphi) \int \left(\frac{dR}{dJ}\right) d\mu$$

4.

Der Theil der Störungen des Radiusvectors, der

Länge in der Bahn und der Breite über der mittleren Ebene derselben, welcher den Gegenstand dieser Abhandlung ausmacht, entsteht aus dem ersten Theile von R ; ich werde daher

$$R = \frac{mr}{r'r'} \left\{ \cos(\omega + \varphi) \cos(\omega' + \varphi') + \sin(\omega + \varphi) \cos(\omega' + \varphi') \cos J \right\}$$

setzen und diesem Ausdrucke die Form

$$(10) \dots R = \frac{mr}{r'r'} \left\{ \cos J^2 \cos(\varphi - \varphi' + \omega - \omega') + \sin J^2 \cos(\varphi + \varphi' + \omega + \omega') \right\}$$

geben.

Die Entwicklung dieses R in eine Reihe, welche nach den Cosinussen der Zeit proportional wachsender Bögen fortsieht, hängt von den Entwicklungen von

$$r \cos \varphi, \quad r \sin \varphi, \quad \frac{1}{r'} \cos \varphi', \quad \frac{1}{r'} \sin \varphi'$$

ab; diese letzteren werden aus einer besonderen, unten folgenden Untersuchung hervorgehen; für jetzt aber werde ich

$$r \cos \varphi = a c \cos i \mu; \quad r \sin \varphi = a s \sin i \mu$$

$$\frac{a'a'}{r'r'} \cos \varphi' = \gamma \cos k \mu'; \quad \frac{a'a'}{r'r'} \sin \varphi' = \sigma \sin k \mu'$$

setzen und unter i und k alle ganze, sowohl positive als negative Zahlen, 0 nicht ausgenommen, verstehen. Erinnerung man sich an die Bemerkung im 48. Satze des 2. Buchs der Mécanique céleste, so findet man leicht

$$\frac{a'a'r}{r'r'a} \cos(\varphi - \varphi' + \omega - \omega') =$$

$$= \frac{1}{4} (\gamma + \sigma) (c + s) \cos(i \mu - k \mu' + \omega - \omega')$$

$$+ \frac{1}{4} (\gamma + \sigma) (c - s) \cos(-i \mu - k \mu' + \omega - \omega')$$

$$+ \frac{1}{4} (\gamma - \sigma) (c - s) \cos(-i \mu + k \mu' + \omega - \omega')$$

$$+ \frac{1}{4} (\gamma - \sigma) (c + s) \cos(i \mu + k \mu' + \omega - \omega')$$

Es ist aber

$$c = c; \quad s = -s; \quad \gamma = \gamma; \quad \sigma = -\sigma$$

und daher, wenn man, um abzukürzen,

$$\gamma + \sigma \text{ durch } \alpha, \quad c + s \text{ durch } a$$

$$\gamma - \sigma = \alpha, \quad c - s = a$$

wodurch der gegebene Ausdruck die Bezeichnung

$$\frac{1}{4} \alpha a \cos(i \mu - k \mu' + \omega - \omega') + \frac{1}{4} \alpha a \cos(-i \mu - k \mu' + \omega - \omega')$$

$$+ \frac{1}{4} \alpha a \cos(-i \mu + k \mu' + \omega - \omega') + \frac{1}{4} \alpha a \cos(i \mu + k \mu' + \omega - \omega')$$

erhält. Da er für alle ganze i zu nehmen ist, so sind das erste und zweite, sowie das dritte und vierte Glied einander gleich, so dass man ihn schreiben kann:

$$\frac{1}{2} \alpha a \cos(i \mu - k \mu' + \omega - \omega') + \frac{1}{2} \alpha a \cos(i \mu + k \mu' + \omega - \omega')$$

und da auch diese beiden Glieder, für alle ganze k genommen, einander gleich sind, so hat man den Ausdruck

$$= \frac{k i}{a \alpha} \cos(i\mu - k\mu' + \omega - \omega')$$

und eben so das zweite Glied von R (10): folglich ist

$$\left(\frac{dR}{d\mu}\right) = -\frac{am}{a'a'} \frac{k i}{\alpha} \left\{ \cos \frac{1}{2} J^2 \sin(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \sin \frac{1}{2} J^2 \sin(i\mu + k\mu' + \omega + \omega') \right\}$$

und wenn $\left(\frac{d\mu}{dt}\right) = v$ gesetzt wird,

$$\int \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu = \frac{am}{a'a'} \frac{k i}{\alpha} \left\{ \cos \frac{1}{2} J^2 \cdot \frac{2i}{i-kv} \cos(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \sin \frac{1}{2} J^2 \cdot \frac{2i}{i+kv} \cos(i\mu + k\mu' + \omega + \omega') \right\}$$

$$(14) \dots \dots \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \cot g J + \left(\frac{dR}{d\omega'}\right) \operatorname{cosec} J = \frac{am}{a'a'} \frac{k i}{\alpha} \frac{1}{2} \sin J \left\{ \sin(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') - \sin(i\mu + k\mu' + \omega + \omega') \right\}$$

$$(15) \dots \dots \left(\frac{dR}{dJ}\right) = -\frac{am}{a'a'} \frac{k i}{\alpha} \frac{1}{2} \sin J \left\{ \cos(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') - \cos(i\mu + k\mu' + \omega + \omega') \right\}$$

5.

Die Störung des Radiusvectors setzt, nach (7), die Integrationen von

$$\frac{Q \sin \varphi}{1 + \epsilon \cos \varphi} d\mu \quad \text{und} \quad \frac{Q \cos \varphi}{1 + \epsilon \cos \varphi} d\mu$$

oder, was dasselbe ist, von

$$\frac{Q \sin \varphi}{1 + \epsilon \cos \varphi} = \frac{am}{a'a'} \frac{k i}{\alpha} \left\{ \cos \frac{1}{2} J^2 \cdot \frac{3i-kv}{i-kv} \cdot \frac{s}{1-\epsilon c} \cos(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') \sin h\mu + \sin \frac{1}{2} J^2 \cdot \frac{3i+kv}{i+kv} \cdot \frac{s}{1-\epsilon c} \cos(i\mu + k\mu' + \omega + \omega') \sin h\mu \right\}$$

$$= \frac{am}{a'a'} \frac{k i}{\alpha} \left\{ \cos \frac{1}{2} J^2 \cdot \frac{3i-kv}{i-kv} \cdot \frac{s}{1-\epsilon c} \sin[(i+h)\mu - k\mu' + \omega - \omega'] + \sin \frac{1}{2} J^2 \cdot \frac{3i+kv}{i+kv} \cdot \frac{s}{1-\epsilon c} \sin[(i+h)\mu + k\mu' + \omega + \omega'] \right\}$$

wenn man mit $d\mu$ multiplicirt und integrirt, auch mit dem zweiten Theile des Ausdrucks (7) ganz ähnlich verfährt:

$$(16) \dots \dots \delta r = \frac{-a^2 m}{a'a' \sqrt{1-\epsilon c}} \frac{k i}{\alpha} \cos \frac{1}{2} J^2 \cdot \left\{ \frac{3i-kv}{i-kv} \cdot \frac{s}{i+h-kv} \cos \varphi \cos[(i+h)\mu - k\mu' + \omega - \omega'] + \frac{3i-kv}{i-kv} \cdot \frac{c}{i+h-kv} \sin \varphi \sin[(i+h)\mu - k\mu' + \omega - \omega'] \right\}$$

$$- \frac{a^2 m}{a'a' \sqrt{1-\epsilon c}} \frac{k i}{\alpha} \sin \frac{1}{2} J^2 \cdot \left\{ \frac{3i+kv}{i+kv} \cdot \frac{s}{i+h+kv} \cos \varphi \cos[(i+h)\mu + k\mu' + \omega + \omega'] + \frac{3i+kv}{i+kv} \cdot \frac{c}{i+h+kv} \sin \varphi \sin[(i+h)\mu + k\mu' + \omega + \omega'] \right\}$$

Setzt man nun noch

$$\cos \varphi = \overset{C}{\underset{S}{\overset{g}{\cos}}} \cos g\mu, \quad \sin \varphi = \overset{C}{\underset{S}{\overset{g}{\sin}}} \sin g\mu$$

und vereinigt man die Glieder, welche gleiche Cosinus enthalten, so hat man

$$\delta r = \frac{-a^2 m}{a'a' \sqrt{1-\epsilon c}} \frac{k i}{\alpha} \frac{3i-kv}{i-kv} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} J^2}{i+h-kv} \left\{ \overset{C}{\underset{S}{\overset{g}{\cos}}} \cos[(i+h+g)\mu - k\mu' + \omega - \omega'] - \overset{C}{\underset{S}{\overset{g}{\sin}}} \cos[(i+h+g)\mu + k\mu' + \omega + \omega'] \right\}$$

$$- \frac{a^2 m}{a'a' \sqrt{1-\epsilon c}} \frac{k i}{\alpha} \frac{3i+kv}{i+kv} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} J^2}{i+h+kv} \left\{ \overset{C}{\underset{S}{\overset{g}{\sin}}} \cos[(i+h+g)\mu - k\mu' + \omega - \omega'] + \overset{C}{\underset{S}{\overset{g}{\cos}}} \cos[(i+h+g)\mu + k\mu' + \omega + \omega'] \right\}$$

Setzt man endlich

$$(11) \dots R = \frac{m}{a'a'} \frac{k i}{\alpha} \left\{ \cos \frac{1}{2} J^2 \cos(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \sin \frac{1}{2} J^2 \cos(i\mu + k\mu' + \omega + \omega') \right\}$$

Hieraus folgt

$$(12) \dots \dots a \left(\frac{dR}{da}\right) = R$$

woraus, nach (7), folgt,

$$(13) \dots Q = \frac{am}{a'a'} \frac{k i}{\alpha} \left\{ \cos \frac{1}{2} J^2 \cdot \frac{3i-kv}{i-kv} \cos(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \sin \frac{1}{2} J^2 \cdot \frac{3i+kv}{i+kv} \cos(i\mu + k\mu' + \omega - \omega') \right\}$$

Man hat ferner

$$\frac{1}{a(1-\epsilon c)} Q r \sin \varphi d\mu \quad \text{und} \quad \frac{1}{a(1-\epsilon c)} Q r \cos \varphi d\mu$$

voraus. Nach der im vorigen Artikel angewandten Bezeichnung ist

$$r \sin \varphi = a s \sin h\mu; \quad r \cos \varphi = a c \cos h\mu$$

wo h alle ganze Zahlen bedeutet; verbindet man dieses mit (13), so erhält man

$$i + h + g = f, \quad h = f - i - g$$

so erhält man

$$(17) \dots \delta r = \frac{-a^2 m}{a' a' \sqrt{1-ec}} \frac{k i}{\alpha \alpha'} \frac{3i-kv}{i-kv} \frac{\cos \frac{1}{2} J^2}{f-g-kv} \left\{ \frac{(f-i-g)g(f-i-g)g}{s \ C-c \ S} \right\} \cos(f\mu - k\mu' + \omega - \omega')$$

$$- \frac{a^2 m}{a' a' \sqrt{1-ec}} \frac{k i}{\alpha \alpha'} \frac{3i+kv}{i+kv} \frac{\sin \frac{1}{2} J^2}{f-g+kv} \left\{ \frac{(f-i-g)g(f-i-g)g}{s \ C-c \ S} \right\} \cos(f\mu + k\mu' + \omega + \omega')$$

Die Berechnung des Coefficienten eines bestimmten Cosinus, für welchen also f und k gegebene Zahlen sind, erfordert eine doppelte Summation des Ausdrucks

$$i \frac{3i-kv}{i-kv} \frac{1}{f-g-kv} \left\{ \frac{(f-i-g)g(f-i-g)g}{s \ C-c \ S} \right\}$$

sowohl für i als für g ; man kann für i nach und nach

$$0, \quad +1, \quad +2, \quad +3, \quad \text{u. s. w.}$$

$$0, \quad -1, \quad -2, \quad -3, \quad \text{u. s. w.}$$

setzen und für jede dieser Voraussetzungen alle g nehmen. Diese Rechnung lässt sich erleichtern, wenn man die Logarithmen der wiederholt vorkommenden Grössen in Tafeln bringt, so dass die erste derselben, mit den Argumenten k und i ,

$$\log \left\{ \frac{-a^2 m}{a' a' \sqrt{1-ec}} \frac{k i}{\alpha \alpha'} \frac{3i-kv}{i-kv} \cos \frac{1}{2} J^2 \right\}$$

die andere mit den Argumenten x und g

$$\log \left\{ \frac{x}{s \ C-c \ S} \right\}$$

angiebt. Wenn der in $\cos \frac{1}{2} J^2$ multiplicirte Theil bereits berechnet ist, so findet man den in $\sin \frac{1}{2} J^2$ multiplicirten dadurch, dass man den ersten mit

$$\frac{-k}{\alpha} \operatorname{tg} \frac{1}{2} J^2$$

multiplicirt und unter dem Cosinuszeichen ω' in $-\omega'$ verwandelt.

$$(18) \dots \delta v = \frac{a a m \cos \frac{1}{2} J^2}{a' a' \sqrt{1-ec}} \frac{k i}{\alpha \alpha'} \left\{ \frac{(2 \sin \varphi + \frac{e}{2} \sin 2 \varphi)}{1-ec} \frac{3i-kv}{i-kv} \frac{\frac{h}{s}}{i+h-kv} \cos [(i+h)\mu - k\mu' + \omega - \omega'] \right.$$

$$- \frac{(2 \cos \varphi + \frac{e}{2} \cos 2 \varphi + \frac{3}{2} e)}{1-ec} \frac{3i-kv}{i-kv} \frac{\frac{h}{c}}{i+h-kv} \sin [(i+h)\mu - k\mu' + \omega - \omega']$$

$$+ \left. \frac{5i-2kv}{(i-kv)^2} \sin (i\mu - k\mu' + \omega - \omega') \right\}$$

$$+ \frac{a a m \sin \frac{1}{2} J^2}{a' a' \sqrt{1-ec}} \frac{k i}{\alpha \alpha'} \left\{ \frac{(2 \sin \varphi + \frac{e}{2} \sin 2 \varphi)}{1-ec} \frac{3i+kv}{i+kv} \frac{\frac{h}{s}}{i+h+kv} \cos [(i+h)\mu + k\mu' + \omega + \omega'] \right.$$

$$- \frac{(2 \cos \varphi + \frac{e}{2} \cos 2 \varphi + \frac{3}{2} e)}{1-ec} \frac{3i+kv}{i+kv} \frac{\frac{h}{c}}{i+h+kv} \sin [(i+h)\mu + k\mu' + \omega + \omega']$$

$$+ \left. \frac{5i+2kv}{(i+kv)^2} \sin (i\mu + k\mu' + \omega + \omega') \right\}$$

Setzt man hier

Man rechnet aber noch leichter, wenn man in (16) $i + h = n$ und $h = n - i$ setzt, wodurch man den Coefficienten von $\cos \varphi \cos (n\mu - k\mu' + \omega - \omega')$

$$= \frac{a^2 m}{a' a' \sqrt{1-ec}} \frac{k}{n-kv} \cos \frac{1}{2} J^2 \cdot \Sigma \left\{ \frac{3i-kv}{i-kv} \cdot a \cdot s^{(n-i)} \right\}$$

und den Coefficienten von $\sin \varphi \sin (n\mu - k\mu' + \omega - \omega')$

$$= \frac{a^2 m}{a' a' \sqrt{1-ec}} \frac{k}{n-kv} \cos \frac{1}{2} J^2 \cdot \Sigma \left\{ \frac{3i-kv}{i-kv} \cdot a \cdot c^{(n-i)} \right\}$$

findet, beide durch eine Summation in Bezug auf i allein; nennt man diese Coefficienten $A^{(n)}$ und $B^{(n)}$, so sind die beiden ersten Glieder von δr

$$= A^{(n)} \cos \varphi \cos (n\mu - k\mu' + \omega - \omega')$$

$$+ B^{(n)} \sin \varphi \sin (n\mu - k\mu' + \omega - \omega')$$

und ergeben daher, wenn man $n+g = f$ setzt, den Coefficienten von $\cos (f\mu - k\mu' + \omega - \omega')$

$$= A^{(f)} \overset{0}{C} + (A^{(f-1)} + A^{(f+1)}) \overset{1}{C} + (A^{(f-2)} + A^{(f+2)}) \overset{2}{C} + \text{u. s. w.}$$

$$- B^{(f)} \overset{0}{S} - (B^{(f-1)} - B^{(f+1)}) \overset{1}{S} - (B^{(f-2)} - B^{(f+2)}) \overset{2}{S} - \text{u. s. w.}$$

Die beiden letzten Glieder erhalten einen ganz ähnlichen Ausdruck.

6.

Die Störung der Länge in der Bahn findet man auf ganz ähnliche Art, aus dem Ausdrucke (8):

$$2 \sin \varphi + \frac{e}{s} \sin 2\varphi = (1 - ee) S^g \sin g\mu$$

$$\frac{3}{2} e + 2 \cos \varphi + \frac{e}{s} \cos 2\varphi = (1 - ee) C^g \cos g\mu$$

und, so wie bei der vorigen Entwicklung, $i + h + g = f$, so erhält man

$$(19) \dots \delta v = \frac{aam}{a'a\sqrt{1-ee}} \left\{ \begin{aligned} &+ \left\{ \begin{aligned} &\frac{k i}{\alpha a} \frac{3i-kv}{i-kv} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} J^g}{f-g-kv} \left\{ \frac{(f-g)g}{s} \frac{(f-g)g}{S^g - C^g} \right\} \\ &+ \frac{k f}{\alpha a} \cdot \frac{5f-2kv}{(f-kv)^2} \cdot \cos \frac{1}{2} J^g \end{aligned} \right\} \sin (f\mu - k\mu' + \omega - \omega) \\ &+ \left\{ \begin{aligned} &\frac{k i}{\alpha a} \frac{3i+kv}{i+kv} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} J^g}{f-g+kv} \left\{ \frac{(f-g)g}{s} \frac{(f-g)g}{S^g - C^g} \right\} \\ &+ \frac{k f}{\alpha a} \cdot \frac{5f+2kv}{(f+kv)^2} \cdot \sin \frac{1}{2} J^g \end{aligned} \right\} \sin (f\mu + k\mu' + \omega + \omega) \end{aligned} \right.$$

Von der Berechnung dieses Ausdrucks gilt alles das, was bei Gelegenheit von δr gesagt worden ist; der Vortheil, auch hier nach (18) zu rechnen, wird noch dadurch vergrößert, dass die bei der Berechnung von δr schon angewandten, durch A' und B' u. s. w. bezeichneten Summen hier wieder eine Anwendung finden.

7.

Die Störung der Breite ist, nach (9), wenn man, um abzukürzen, für

$$P = -\frac{am}{a'a} \cdot \frac{1}{2} \sin J \cdot \alpha \alpha \left\{ \frac{1}{i-kv} \cos (i\mu - k\mu' + \omega - \omega) - \frac{1}{i+kv} \cos (i\mu + k\mu' + \omega + \omega) \right\}$$

$$P' = -\frac{am}{a'a} \cdot \frac{1}{2} \sin J \cdot \alpha \alpha \left\{ \frac{1}{i-kv} \sin (i\mu - k\mu' + \omega - \omega) - \frac{1}{i+kv} \sin (i\mu + k\mu' + \omega + \omega) \right\}$$

Wenn man dieses in den letzten Ausdruck von δs setzt, so wird er

$$\delta s = \frac{aam \sin J}{a'a\sqrt{1-ee}} \cdot \frac{k i}{2} \left\{ \begin{aligned} &\sin \varphi \left\{ \frac{\cos (i\mu - k\mu' - \omega)}{i-kv} - \frac{\cos (i\mu + k\mu' + \omega)}{i+kv} \right\} \\ &- \cos \varphi \left\{ \frac{\sin (i\mu - k\mu' - \omega)}{i-kv} - \frac{\sin (i\mu + k\mu' + \omega)}{i+kv} \right\} \end{aligned} \right.$$

und wenn man $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ nach der oben schon angewandten Bezeichnung entwickelt,

$$\delta s = \frac{aam \sin J}{a'a\sqrt{1-ee}} \cdot \frac{k i}{2} \left\{ S^g - C^g \right\} \left\{ \frac{1}{i-kv} \sin [(i+g)\mu - k\mu' - \omega] - \frac{1}{i+kv} \sin [(i+g)\mu + k\mu' + \omega] \right\}$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $i + g = f$, $i = f - g$, so wird er

$$(20) \dots \delta s = \frac{aam \sin J}{a'a\sqrt{1-ee}} \cdot \frac{k(f-g)}{2} \left\{ S^g - C^g \right\} \left\{ \frac{\sin (f\mu - k\mu' - \omega)}{f-g-kv} - \frac{\sin (f\mu + k\mu' + \omega)}{f-g+kv} \right\}$$

und erfordert daher, für gegebene f und k , eine Summation in Beziehung auf g .

8.

Diese vollständige Auflösung der Aufgabe erfordert nun noch die Bestimmung der durch c , γ , C , C' und s , σ , S , S' bezeichneten Coefficienten; man erhält dieselben nach der Methode, welche ich der Akademie am 2. Julius 1818 vorgel. egthabe.*) Man hat nämlich:

$$2\pi c = \int \frac{r}{a} \cos \varphi \cos i\mu \cdot d\mu$$

*) [s. Abhandl. 8.]

$$2\pi s = \int \frac{r}{a} \sin \varphi \sin i\mu \cdot d\mu$$

$$2\pi \gamma = \int \frac{a'a}{r'r'} \cos \varphi' \cos i\mu' \cdot d\mu'$$

$$2\pi \sigma = \int \frac{a'a}{r'r'} \sin \varphi' \sin i\mu' \cdot d\mu'$$

$$2\pi C = \int \cos \varphi \cos i\mu \cdot d\mu$$

$$2\pi S^i = \int \sin \varphi \sin i\mu \cdot d\mu$$

$$2\pi C^i = \int \left\{ \frac{3}{2}e + 2 \cos \varphi + \frac{1}{2}e \cos 2\varphi \right\} \frac{\cos i\mu}{1-ee'} \cdot d\mu$$

$$2\pi S^i = \int \left\{ 2 \sin \varphi + \frac{1}{2}e \sin 2\varphi \right\} \frac{\sin i\mu}{1-ee'} \cdot d\mu$$

sämmtliche Integrale von φ, ϵ oder $\mu = 0$ bis 2π genommen. Die sechs ersten derselben lassen sich

$$2\pi C^i = \int (\cos \epsilon - e) \cos i\mu d\mu = \frac{1}{i} \sin i\mu (\cos \epsilon - e) + \frac{1}{i} \int \sin i\mu \sin \epsilon d\epsilon$$

wo das erste Glied, ausgenommen für $i=0$, verschwindet; daher

$$(21) \dots 2\pi C^0 = -3\pi e; 2\pi C^i = \frac{1}{i} \int \sin i\mu \sin \epsilon d\epsilon$$

$$2 \dots \frac{r}{a} \sin \varphi = \sqrt{1-ee'} \sin \epsilon$$

$$2\pi S^i = \sqrt{1-ee'} \int \sin i\mu \sin \epsilon \cdot d\mu$$

$$= -\frac{\sqrt{1-ee'}}{i} \cos i\mu \sin \epsilon + \frac{\sqrt{1-ee'}}{i} \int \cos i\mu \cos \epsilon d\epsilon$$

$$(22) \dots 2\pi S^0 = 0; 2\pi S^i = \frac{\sqrt{1-ee'}}{i} \int \cos i\mu \cos \epsilon d\epsilon$$

$$3 \dots \frac{d\left(\frac{r}{a} \sin \varphi\right)}{d\mu} = \frac{e + \cos \varphi}{\sqrt{1-ee'}} \text{ oder } \cos \varphi = \frac{d\left(\frac{r}{a} \sin \varphi\right)}{\sqrt{1-ee'}} \cdot e$$

Das allgemeine Glied von $\frac{r}{a} \sin \varphi$ ist $= s \sin i\mu$, also das allgemeine Glied von $\cos \varphi = i \cdot s \sqrt{1-ee'} \cos i\mu$; daher

$$(23) \dots 2\pi C^0 = -2\pi e; 2\pi C^i = (1-ee') \int \cos i\mu \cos \epsilon d\epsilon$$

$$4 \dots \frac{d\left(\frac{r}{a} \cos \varphi\right)}{d\mu} = \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{1-ee'}} \text{ oder } \sin \varphi = -\sqrt{1-ee'} \frac{d\left(\frac{r}{a} \cos \varphi\right)}{d\mu}$$

Das allgemeine Glied von $\frac{r}{a} \cos \varphi$ ist $= c \cos i\mu$, also das allgemeine Glied von $\sin \varphi = i \cdot c \sqrt{1-ee'} \sin i\mu$; daher

$$(24) \dots 2\pi S^i = \sqrt{1-ee'} \int \sin i\mu \sin \epsilon d\epsilon$$

$$5 \dots \frac{d \sin \varphi}{d\mu} = \frac{aa'}{rr} \sqrt{1-ee'} \cos \varphi, \text{ oder } \frac{aa'}{rr} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-ee'}} \cdot \frac{d \sin \varphi}{d\mu},$$

folglich

$$(25) \dots 2\pi \gamma^i = i \int \sin i\mu \sin \epsilon d\epsilon$$

$$6 \dots \frac{d \cos \varphi}{d\mu} = \frac{-aa'}{rr} \sqrt{1-ee'} \sin \varphi, \text{ oder } \frac{aa'}{rr} \sin \varphi = \frac{-1}{\sqrt{1-ee'}} \cdot \frac{d \cos \varphi}{d\mu},$$

folglich

$$(26) \dots 2\pi \sigma^i = i \sqrt{1-ee'} \int \cos i\mu \cos \epsilon d\epsilon$$

leicht auf

$$\int \cos i\mu \cos \epsilon \cdot d\epsilon \text{ und } \int \sin i\mu \sin \epsilon \cdot d\epsilon$$

zurückführen, die beiden letzten auf die Coefficienten der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung. Denn man hat

$$1 \dots \frac{r}{a} \cos \varphi = \cos \epsilon - e, \text{ also}$$

$$7 \dots \frac{\frac{3}{2}e + 2 \cos \varphi + \frac{1}{2}e \cos 2\varphi}{1-ee'} = \frac{1-ee'}{e(1-\cos \epsilon)^2} = \frac{1}{e} \frac{d\varphi}{(1-\cos \epsilon)^2}, \text{ folglich}$$

$$\frac{\frac{3}{2}e + 2 \cos \varphi + \frac{1}{2}e \cos 2\varphi}{1-ee'} = \frac{\sqrt{1-ee'}}{e} \frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{1}{e}$$

Wenn man daher die Mittelpunktsgleichung durch $\varphi - \mu = 2A' \sin \mu + 2A'' \sin 2\mu + u$ s. w. bezeichnet, so hat man

$$(27) \dots C^0 = -1 + \sqrt{1-ee'}; C^i = \frac{i\sqrt{1-ee'}}{e} A^{(i)}$$

$$8 \dots \frac{d\varphi}{d\epsilon} = \frac{\sin \varphi}{1-ee'} (2 + e \cos \varphi) = \frac{2 \sin \varphi + \frac{1}{2}e \sin 2\varphi}{1-ee'}, \text{ also}$$

$$(28) \dots S^i = \frac{dA^{(i)}}{d\epsilon}$$

Die beiden in den sechs ersten Formeln vorkommenden Integrale

$$\int \cos i\mu \cos \epsilon d\epsilon \text{ und } \int \sin i\mu \sin \epsilon d\epsilon$$

kaun man leicht auf $\int \cos (h\epsilon - k \sin \epsilon) d\epsilon$ reduciren, wo h eine ganze Zahl bedeutet; dieses letzte Integral werde ich durch

$$\int \cos (h\epsilon - k \sin \epsilon) d\epsilon = 2\pi I_k^h$$

bezeichnen. Man hat nämlich

$$\int \cos i\mu \cos \epsilon \cdot d\epsilon = \int \cos i\mu [1 - \frac{1}{2}(1-\cos \epsilon)] \frac{d\epsilon}{e}$$

$$= \frac{1}{e} \int \cos i\mu \cdot d\epsilon - \frac{1}{2e} \int \cos i\mu \cdot d\mu$$

wo der letzte Theil, von $\mu=0$ bis $\mu=2\pi$ genommen, verschwindet; also

$$(29) \dots \int \cos i\mu \cos \epsilon d\epsilon = 2\pi \cdot \frac{1}{e} I_0^i$$

Ferner hat man

$$\int \sin i\mu \sin \epsilon d\epsilon = \int \cos i\mu \cos \epsilon d\epsilon - \int \cos (\epsilon + i\mu) d\epsilon$$

oder

$$(30) \dots \int \sin i\mu \sin \epsilon d\epsilon = 2\pi \cdot \frac{1}{e} I_{-i}^i - 2\pi I_{i+1}^{i+1}$$

Die Reihenentwicklung von $\frac{1}{h^k}$ erhält man auf die, in meiner Abhandlung über die Kepler'sche Aufgabe angewandte Art*), nämlich

$$(31) \dots \frac{1}{h^k} = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^k}{h^k} \left\{ 1 - \frac{1}{h+1} \left(\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 (h+1) (h+2)} \left(\frac{k}{2}\right)^4 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 (h+1) (h+2) (h+3)} \left(\frac{k}{2}\right)^6 + \text{u. s. w.} \right\}$$

woraus also folgende Formeln für die Berechnung der Coefficienten der obigen Ausdrücke hervorgehen, wobei die Reihen

$$1 - \frac{1}{i+1} \cdot \left(\frac{ie}{2}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 (i+1) (i+2)} \left(\frac{ie}{2}\right)^4 - \text{u. s. w.}$$

$$1 - \frac{1}{i+2} \cdot \left(\frac{ie}{2}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 (i+2) (i+3)} \left(\frac{ie}{2}\right)^4 - \text{u. s. w.}$$

der Kürze wegen durch φi und $\varphi' i$ bezeichnet sind:

$$c = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-1}}{2 \Pi i} \left\{ \varphi i - \frac{eei}{2i+2} \varphi' i \right\}; \quad c = -\frac{3}{2} e$$

$$s = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-1}}{2 \Pi i} \sqrt{1-ee} \cdot \varphi i; \quad s = 0$$

$$C = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^i}{e \Pi i} (1-ee) \cdot \varphi i; \quad C = -e$$

$$S = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^i}{e \Pi i} \sqrt{1-ee} \left\{ \varphi i - \frac{eei}{2i+2} \varphi' i \right\}; \quad S = 0$$

$$\gamma = \frac{\left(\frac{ie'}{2}\right)^i}{e' \Pi i} \left\{ \varphi i - \frac{e'e'i}{2i+2} \varphi' i \right\}; \quad \gamma = 0$$

$$\delta = \frac{\left(\frac{ie'}{2}\right)^i}{e' \Pi i} \sqrt{1-e'e'} \cdot \varphi i; \quad \delta = 0$$

$$a = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-1}}{2 \Pi i} \left\{ (1 + \sqrt{1-ee}) \varphi i - \frac{eei}{2i+2} \varphi' i \right\}; \quad a = -\frac{3}{2} e$$

$$a = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-1}}{2 \Pi i} \left\{ (1 - \sqrt{1-ee}) \varphi i - \frac{eei}{2i+2} \varphi' i \right\};$$

$$a = \frac{\left(\frac{ie'}{2}\right)^i}{e' \Pi i} \left\{ (1 + \sqrt{1-e'e'}) \varphi i - \frac{e'e'i}{2i+2} \varphi' i \right\}; \quad a = 0$$

$$a = \frac{\left(\frac{ie'}{2}\right)^i}{e' \Pi i} \left\{ (1 - \sqrt{1-e'e'}) \varphi i - \frac{e'e'i}{2i+2} \varphi' i \right\}$$

Die Zahlenwerthe von C' und S' leitet man aus den bekannten Coefficienten der Reihenentwicklung der Mittelpunktsgleichung nach (27) und (28) ab.

9.

In den meisten vorkommenden Fällen werden die Ausdrücke von δr , δv , δs sehr schnell convergiren, wenn man sie in Reihen entwickelt, welche nach den Potenzen der Excentricitäten und der Neigung fortschreiten; diese Reihen erhält man, wenn man die eben bestimmten Coefficienten nach den Potenzen von e, e', J schreibt und in die Ausdrücke (17), (19) und (20) setzt. Durch eine doppelt, sowohl nach dieser, als nach einer anderen Art, geführte Rechnung habe ich diese Reihen bis zu den Gliedern der zweiten Ordnung incl. entwickelt, und führe das Resultat davon hier an; wenn die höhern Ordnungen noch merkwürdige Werthe haben, so ist es bequemer, nach der oben entwickelten strengen Methode zu rechnen.

$$(32) \dots \delta r = m \cdot \frac{a^3}{a} \cos \frac{1}{2} J^2 \sqrt{1-ee'} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \cos (\mu - \mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} \left\{ -\frac{3}{v} + \frac{4}{v+1} - \frac{1}{v-2} + \frac{ee}{2} \left(\frac{1}{v+1} + \frac{3}{v} - \frac{2}{v-1} + \frac{1}{v-2} - \frac{3}{v-3} + \frac{6}{(v-2)^2} \right) \right\} \\ & + \cos (-\mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} e \left\{ \frac{1}{v+1} + \frac{6}{v} - \frac{5}{v-1} - \frac{2}{v-2} + \frac{6}{(v-1)^2} \right\} \\ & + \cos (2\mu - \mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} e \left\{ -\frac{6}{v} - \frac{1}{v-1} + \frac{10}{v-2} - \frac{3}{v-3} - \frac{6}{(v-1)^2} \right\} \\ & + \cos (\mu - 2\mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} e' \left\{ -\frac{3}{v} - \frac{1}{v-1} + \frac{8}{2v-1} \right\} \\ & + \cos (\mu + \mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} e e' \left\{ \frac{3}{v} - \frac{4}{v+1} + \frac{1}{v+2} \right\} \\ & + \cos (-\mu - \mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} e e' \left\{ \frac{2}{v+2} - \frac{8}{v+1} + \frac{27}{v-1} - \frac{12}{v-2} + \frac{24}{(v-1)^2} \right\} \\ & + \cos (3\mu - \mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} e e' \left\{ -\frac{27}{v} + \frac{4}{v-1} - \frac{9}{v-2} + \frac{48}{v-3} - \frac{16}{v-4} - \frac{24}{(v-1)^2} - \frac{24}{(v-2)^2} \right\} \end{aligned} \right.$$

*) Abhandlungen der Akademie 1816 - 17. Mathemat. Klasse S. 55. [Abb. 8. p. 20.]

$$\begin{aligned}
 & + \cos(-2\mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} e' e' \left\{ \frac{3}{v} - \frac{1}{v-1} + \frac{1}{2v+1} - \frac{5}{2v-1} + \frac{6}{(2v-1)^2} \right\} \\
 & + \cos(2\mu - 2\mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} e' e' \left\{ -\frac{3}{v} + \frac{5}{v-1} - \frac{1}{2v-1} - \frac{3}{2v-3} - \frac{6}{(2v-1)^2} \right\} \\
 & + \cos(\mu - 3\mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} e' e' \left\{ \frac{1}{v} - \frac{4}{3v-1} + \frac{1}{3v-2} \right\} \\
 & + \cos(\mu + \mu' + \omega + \omega') \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} J^2 \left\{ \frac{3}{v} - \frac{4}{v+1} + \frac{1}{v+2} \right\}
 \end{aligned}$$

(33) $\delta v = m \cdot \frac{aa}{a^2} \cos \frac{1}{2} J^2 \sqrt{1-e'e'} \times$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \sin(\mu - \mu' + \omega - \omega') \left\{ \frac{3}{v} - \frac{2}{v-1} - \frac{1}{v-2} + \frac{3}{(v-1)^2} + \frac{ee'}{8} \left(-\frac{5}{v+1} + \frac{4}{v-1} + \frac{16}{v-2} - \frac{15}{v-3} - \frac{12}{(v-1)^2} + \frac{24}{(v-2)^2} \right) \right\} \\
 & + \sin(-\mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} e \left\{ -\frac{2}{v+1} + \frac{9}{v} - \frac{2}{v-1} - \frac{5}{v-2} + \frac{12}{(v-1)^2} \right\} \\
 & + \sin(2\mu - \mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} e \left\{ \frac{15}{v} - \frac{6}{v-1} - \frac{3}{v-2} - \frac{6}{v-3} + \frac{12}{(v-1)^2} + \frac{12}{(v-2)^2} \right\} \\
 & + \sin(\mu - 2\mu' + \omega - \omega') e' \left\{ \frac{3}{v} - \frac{4}{2v-1} - \frac{2}{2v-2} + \frac{6}{(2v-1)^2} \right\} \\
 & + \sin(\mu + \mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} e' e' \left\{ \frac{1}{v+2} + \frac{2}{v+1} - \frac{3}{v} + \frac{3}{(v+1)^2} \right\} \\
 & + \sin(-\mu - \mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} ee' \left\{ -\frac{2}{v+2} - \frac{1}{v+1} + \frac{21}{v} - \frac{5}{v-1} - \frac{13}{v-2} - \frac{3}{(v+1)^2} + \frac{30}{(v-1)^2} \right\} \\
 & + \sin(3\mu - \mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} ee' \left\{ \frac{39}{v} - \frac{15}{v-1} - \frac{5}{v-2} - \frac{3}{v-3} - \frac{16}{v-4} + \frac{30}{(v-1)^2} + \frac{24}{(v-2)^2} + \frac{27}{(v-3)^2} \right\} \\
 & + \sin(-2\mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} e' e' \left\{ -\frac{2}{2v+1} + \frac{9}{2v} - \frac{2}{2v-1} - \frac{5}{2v-2} + \frac{12}{(2v-1)^2} \right\} \\
 & + \sin(2\mu - 2\mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} e' e' \left\{ \frac{15}{2v} - \frac{6}{2v-1} - \frac{3}{2v-2} - \frac{6}{2v-3} + \frac{12}{(2v-1)^2} + \frac{12}{(2v-2)^2} \right\} \\
 & + \sin(\mu - 3\mu' + \omega - \omega') \frac{1}{2} e' e' \left\{ -\frac{1}{v} + \frac{2}{3v-1} + \frac{1}{3v-2} - \frac{5}{(3v-1)^2} \right\} \\
 & + \sin(\mu + \mu' + \omega + \omega') \sin \frac{1}{2} J^2 \left\{ -\frac{3}{v} + \frac{2}{v+1} + \frac{1}{v+2} + \frac{3}{(v+1)^2} \right\}
 \end{aligned} \right.$$

(34) $\delta s = m \cdot \frac{aa}{a^2} \frac{\sin J}{2} \times$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \sin(\mu' + \omega') \left\{ \frac{1}{v+1} - \frac{1}{v-1} \right\} \\
 & + \sin(2\mu' + \omega') 2e' \left\{ \frac{1}{2v+1} - \frac{1}{2v-1} \right\} \\
 & + \sin(\mu + \mu' + \omega') \frac{e}{2} \left\{ -\frac{2}{v+1} + \frac{3}{v} - \frac{2}{v-1} + \frac{1}{v+2} \right\} \\
 & + \sin(-\mu + \mu' + \omega') \frac{e}{2} \left\{ \frac{2}{v+1} - \frac{3}{v} + \frac{2}{v-1} - \frac{1}{v-2} \right\}
 \end{aligned} \right.$$

10.

Obleich die immer convergirende Reihe (31) zu der Berechnung der Zahlenwerthe von I_k^4 hinreicht und daher für die Aufgabe, welche aufgelöset werden sollte, von dieser Seite nichts zu wünschen übrig bleibt, so glaube ich doch diese Gelegenheit benutzen zu dürfen, um über die bestimmten Integrale, welche hier angewandt worden sind, etwas zu sagen.

Nicht nur die Mittelpunktleichung und die Grössen

$$\cos \varphi, \sin \varphi, r \cos \varphi, r \sin \varphi, \frac{1}{rr} \cos \varphi, \frac{1}{rr} \sin \varphi$$

führen in ihrer Entwicklung auf diese bestimmten Integrale, sondern dieses ist auch der Fall bei

$\log r, r^n, r^n \cos m\varphi, r^n \sin m\varphi, r^n \cos m\epsilon, r^n \sin m\epsilon$, immer, wenn n und m ganze, entweder positive oder negative Zahlen, 0 nicht ausgeschlossen, sind. Da die meisten Probleme der physischen Astronomie auf solche Reihenentwicklungen zurückführen, so ist eine genauere Kenntniss dieser Integrale wünschenswerth.

Ich werde, der Kürze wegen, die vier Integrale, von 0 bis 2π genommen, folgendermassen bezeichnen:

$$\begin{aligned}
 \frac{2\pi}{c} L &= \int_0^{2\pi} \cos i\mu \cos \epsilon d\epsilon; & \frac{2\pi}{c} L' &= \int_0^{2\pi} \sin i\mu \sin \epsilon d\epsilon \\
 \frac{2\pi}{c} M &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos i\mu \cos \epsilon d\epsilon}{1 - e \cos \epsilon}; & \frac{2\pi}{c} M' &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin i\mu \sin \epsilon d\epsilon}{1 - e \cos \epsilon}
 \end{aligned}$$

und zuerst zeigen, dass die Entwicklung der angeführten Grössen von denselben abhängt.

Bezeichnet man den Coefficienten von $\cos i\mu$ in der Entwicklung des Logarithmen von r durch H und nimmt man denselben so, dass die Reihe nicht nur alle positiven ganzen i , sondern auch die negativen enthält, so hat man

$$2\pi H = \int \log r \cos i\mu \cdot d\mu$$

$$= \frac{1}{i} \log r \sin i\mu - \frac{e}{i} \int \frac{\sin i\mu \sin \epsilon d\epsilon}{1 - e \cos \epsilon}$$

also, mit Ausnahme von $i = 0$,

$$(35) \dots \dots \dots H = -\frac{1}{i} M'$$

Für $i = 0$ erhält man einen logarithmischen Ausdruck; man hat nämlich, wenn man

$$\frac{e}{1 + \sqrt{1 - ee}}$$

durch λ bezeichnet und die halbe grosse Axe = 1 annimmt,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 - ee}} \left\{ 1 + 2\lambda \cos \epsilon + 2\lambda^2 \cos 2\epsilon + 2\lambda^3 \cos 3\epsilon + \dots \right\}$$

und wenn man mit $dr = e \sin \epsilon d\epsilon$ multiplicirt und integrirt

$$\log r = c - 2 \left\{ \lambda \cos \epsilon + \frac{1}{2} \lambda^2 \cos 2\epsilon + \frac{1}{3} \lambda^3 \cos 3\epsilon + \dots \right\}$$

zur Bestimmung der Constante c ist, für $\epsilon = 0$

$$\log(1 - c) = c - 2 \left\{ \lambda + \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{1}{3} \lambda^3 + \dots \right\} = c - 2\lambda(1 - \lambda)$$

also

$$\log r = l \frac{1 - e}{(1 - \lambda)^2} - 2 \left\{ \lambda \cos \epsilon + \frac{1}{2} \lambda^2 \cos 2\epsilon + \frac{1}{3} \lambda^3 \cos 3\epsilon + \dots \right\}$$

und wenn man dieses mit $d\mu = (1 - e \cos \epsilon) d\epsilon$ multiplicirt und von 0 bis 2π integrirt

$$(36) \dots \dots H = l \frac{1 - e}{(1 - \lambda)^2} + \lambda c = l \frac{1 + \sqrt{1 - ee}}{2} + \frac{ee}{1 + \sqrt{1 - ee}}$$

Den Coefficienten von $\cos i\mu$ in der Entwicklung der ganzen Potenzen des Radiusvectors = r^n bezeichne ich durch $C^{(n)}$; ich werde zuerst die vier Integrale durch diese Coefficienten ausdrücken und dann eine allgemeine Relation zwischen den zu verschiedenen Potenzen von r gehörigen C geben, woraus denn hervorgehen wird, dass $C^{(n)}$ jedesmal auf diese Integrale zurückgeführt werden kann.

Man hat

$$1 \dots \int \cos i\mu \cos \epsilon d\epsilon = \frac{1}{e} \int \cos i\mu (1 - r) d\epsilon = \frac{2\pi}{e} C^{(-1)}$$

wovon $i = 0$ ausgenommen ist.

$$2 \dots \int \sin i\mu \sin \epsilon d\epsilon = \frac{r}{e} \sin i\mu - \frac{i}{e} \int r r \cos i\mu d\epsilon = -\frac{2\pi}{e} i C^{(1)}$$

$$3 \dots \int \frac{\cos i\mu \cos \epsilon d\epsilon}{1 - e \cos \epsilon} = \frac{1}{e} \int \cos i\mu \left(\frac{1}{r} - 1 \right) d\epsilon = \frac{2\pi}{e} \left\{ -C^{(-1)} + C^{(-2)} \right\}$$

$$4 \dots \int \frac{\sin i\mu \sin \epsilon d\epsilon}{1 - e \cos \epsilon} = -\frac{1}{i} \frac{\cos i\mu \sin \epsilon}{(1 - e \cos \epsilon)^2} + \frac{1}{i} \int \cos i\mu \cdot \epsilon \left(\frac{\sin \epsilon}{r r} \right),$$

wenn man in letzten Gliede wirklich differentiirt und $\sin \epsilon^2$ durch r eliminirt, so erhält man, mit Ausnahme von $i = 0$,

$$\int \frac{\sin i\mu \sin \epsilon d\epsilon}{1 - e \cos \epsilon} = \frac{1}{ie} \int \cos i\mu d\epsilon \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{r r} + \frac{2(1 - ee)}{r^3} \right)$$

oder

$$= \frac{2\pi}{e} \cdot \frac{1}{i} \left\{ C^{(-2)} - 3C^{(-3)} + 2(1 - ee)C^{(-4)} \right\}$$

Die oben erwähnte allgemeine Relation erhält man, wenn man den zweiten Differentialquotienten von r^n vor und nach der Entwicklung in die Reihe vergleicht; man hat nämlich dadurch

$$\frac{d^2 r^n}{d\mu^2} = -n(n-1)r^{n-2} + n(2n-3)r^{n-3} - n(n-2)(1-ee)r^{n-4}$$

$$= -\Sigma ii C^{(i)} \cos i\mu$$

folglich

$$(37) \dots 0 = ii C^{(n)} - n(n-1)C^{(n-2)} + n(2n-3)C^{(n-3)} - n(n-2)(1-ee)C^{(n-4)}$$

und diese Relation, verbunden mit den vorher gegebenen vier Sätzen, bestimmt alle $C^{(n)}$. Für verschiedene Werthe von n findet man nämlich:

$$n = -2 \dots 0 = ii C^{(-2)} - 6C^{(-4)} + 14C^{(-5)} - 8(1-ee)C^{(-6)}$$

$$n = -1 \dots 0 = ii C^{(-1)} - 2C^{(-3)} + 5C^{(-4)} - 3(1-ee)C^{(-5)}$$

$$n = 0 \dots 0 = ii C^{(0)}$$

$$n = +1 \dots 0 = ii C^{(1)} \quad * \quad - C^{(-2)} + (1-ee)C^{(-3)}$$

$$n = +2 \dots 0 = ii C^{(2)} - 2C^{(0)} + 2C^{(-1)} \quad *$$

$$n = +3 \dots 0 = ii C^{(3)} - 6C^{(1)} + 9C^{(0)} - 3(1-ee)C^{(-1)}$$

$$n = +4 \dots 0 = ii C^{(4)} - 12C^{(2)} + 20C^{(1)} - 8(1-ee)C^{(0)}$$

u. s. w.

Ferner hat man die vier Sätze

$$(38) \dots \begin{cases} L = C^{(-1)}; & L' = -i C^{(1)} \\ M = -C^{(-1)} + C^{(-2)}; & M' = \frac{1}{i} \left\{ C^{(-2)} - 3C^{(-3)} + 2(1-ee)C^{(-4)} \right\} \end{cases}$$

sodass die Verbindung mit denselben mit den eben angeführten Gleichungen sowohl hinreichend als nothwendig ist, um alle C zu bestimmen:

$$C^{(-4)} = \left\{ (2+ee)L + 3iL' + (2+ee)M + i(1-ee)M' \right\} : 2(1-ee)^2$$

$$C^{(-3)} = \{ L + iL' + M \} : (1-ee)$$

$$C^{(-2)} = L + M$$

$$C^{(-1)} = L$$

$$C^{(1)} = -\frac{1}{i} L'$$

$$C^{(2)} = -\frac{2}{11} L$$

$$C^{(3)} = \frac{3(1-\epsilon\epsilon)}{i^3} L - \frac{6}{i^3} L'$$

$$C^{(4)} = -\frac{24}{i^4} L - \frac{20}{i^4} L'$$

u. s. w.

Für $i = 0$ hat man, statt der Relation (37), die folgende:

$$(39) \dots 0 = (n+1)C^{(n)} - (2n+1)C^{(n-1)} + (1-\epsilon\epsilon)nC^{(n-2)}$$

und diese, verbunden mit

$$C^{(0)} = 1; \quad C^{(-1)} = 1; \quad C^{(-2)} = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon\epsilon}}$$

gibt alle übrigen C .

Dass auch $r^n \cos m\varphi$ und $r^n \sin m\varphi$ von den vier Integralen abhängen, lässt sich am leichtesten dadurch zeigen, dass man diese Ausdrücke von φ befreit und dagegen r einführt. Man hat nämlich $\cos m\varphi$ gleich einer ganzen rationalen Function von $\cos \varphi = \frac{1-\epsilon\epsilon}{\epsilon r} - \frac{1}{\epsilon}$, wodurch $r^n \cos m\varphi$ sich in eine Reihe von Gliedern von der Form $F \cdot r'$ verwandelt, deren jedes daher, in seiner Entwicklung, den Coefficienten von $\cos i\mu = F \cdot C^{(i)}$ giebt; $r^n \sin m\varphi$ ist dagegen gleich einer Reihe von Gliedern von Form $F r' \sin \varphi$, oder

$$F \frac{\sqrt{1-\epsilon\epsilon}}{\epsilon} \cdot \frac{r' dr}{d\mu} = F \frac{\sqrt{1-\epsilon\epsilon}}{\epsilon(f+1)} \cdot \frac{d \cdot r'^{f+1}}{d\mu}$$

und der Coefficient von $\sin i\mu$ daher

$$= -F \cdot \frac{i\sqrt{1-\epsilon\epsilon}}{\epsilon(f+1)} C^{(f+1)}.$$

Eben so wie $r^n \cos m\varphi$ und $r^n \sin m\varphi$ verhalten sich in dieser Beziehung $r^n \cos m\epsilon$ und $r^n \sin m\epsilon$. Es geht also hieraus hervor, dass alle Entwicklungen der ganzen Potenzen des Radiusvectors, oder der Producte dieser Potenzen in Cosinusse oder Sinusse der Vielfachen der Anomalien, von den vier Integralen abhängen. Die zweckmässigsten Arten, die Reduction wirklich zu machen, wird man aus den unten vorkommenden weitern Untersuchungen über die Integrale ableiten.

11.

Was die beiden ersten Integrale L und L' betrifft, so ist ihre Reduction auf I_k^h oben (29) und (30) schon gegeben; wir werden also nur diese transcendente Function näher untersuchen dürfen.

Man hat

$$\cos[(i+1)\epsilon - k \sin \epsilon] + \cos[(i-1)\epsilon - k \sin \epsilon] = 2 \cos(i\epsilon - k \sin \epsilon) \cos \epsilon$$

und wenn man das letzte Glied

$$\frac{2i}{k} \cos(i\epsilon - k \sin \epsilon) - \frac{2}{k} \cos(i\epsilon - k \sin \epsilon) (i - k \cos \epsilon)$$

schreibt, mit $d\epsilon$ multiplicirt und von 0 bis 2π integrirt

$$(40) \dots 0 = k I_k^{i-1} - 2i I_k^i + k I_k^{i+1}$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass man durch zwei Functionen dieser Art alle übrigen ausdrücken kann, und dass man daher nur zwei, z. B.

$$I_k^0 = 1 - \frac{k^2}{2^2} + \frac{k^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{k^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \text{etc.} \dots$$

$$I_k^1 = \frac{2k}{2^2} - \frac{4k^3}{(2 \cdot 4)^2} + \frac{6k^5}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} - \frac{8k^7}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2} + \text{etc.} \dots$$

zu kennen braucht, um alle I_k^i dadurch zu finden; ferner dass

$$(41) \dots I_k^{-i} = (-1)^i I_k^i$$

ist, so dass also nur positive ganze i betrachtet werden dürfen.

Den Ausdruck von I_k^i durch I_k^0 und I_k^1 erhält man durch die Eigenschaften der Kettenbrüche. Man hat nämlich aus [40]

$$\frac{I_k^i}{I_k^{i-1}} = \frac{\frac{k}{2i}}{1 - \frac{k}{2i}} \cdot \frac{I_k^{i+1}}{I_k^i}$$

und wenn man dieses fortsetzt

$$(42) \dots \frac{I_k^i}{I_k^{i-1}} = \frac{k}{2i} \cdot \frac{kk}{1 - \frac{kk}{2i+2}} \cdot \frac{kk}{1 - \frac{kk}{2i+2 \cdot 2i+4}} \cdot \dots \cdot \frac{kk}{1 - \frac{kk}{2i+2h-4 \cdot 2i+2h-2}} \cdot \frac{I_k^{i+h}}{I_k^{i+h-1}}$$

Für $h = \infty$ giebt dieser Kettenbruch das Verhältniss zweier aufeinander folgenden Functionen unabhängig von anderen; für $i = 1$ und $h = i - 1$ giebt er

$$(43) \dots \frac{I_k^1}{I_k^0} = \frac{\frac{k}{2}}{1 - \frac{kk}{2 \cdot 4}} \cdot \frac{kk}{1 - \frac{kk}{4 \cdot 6}} \cdot \dots \cdot \frac{kk}{1 - \frac{kk}{2i-4 \cdot 2i-2}} \cdot \frac{I_k^i}{I_k^{i-1}}$$

Verwandelt man diesen Kettenbruch, bis zu einem Gliede $1 - \frac{kk}{2h-2 \cdot 2h}$ incl. genommen, in einen gewöhnlichen Bruch und bezeichnet man Zähler und Nen-

ner desselben durch $A^{(i)}$ und $B^{(i)}$, so hat man (43)

$$\frac{I_1^i}{I_2^i} = \frac{A^{(i-1)} - \frac{k}{2i-2} \cdot A^{(i-2)} I_1^i : I_1^{i-1}}{B^{(i-1)} - \frac{k}{2i-2} \cdot B^{(i-2)} I_1^i : I_1^{i-1}}$$

oder

$$\frac{I_1^i}{I_2^i} = \frac{2i-2}{k} \cdot \frac{A^{(i-1)} - B^{(i-1)} I_1^i : I_2^i}{A^{(i-2)} - B^{(i-2)} I_1^i : I_2^i} ;$$

ähnliche Ausdrücke hat man, wenn man successive i in $i-1, i-2, i-3 \dots 2$ verwandelt; multiplicirt man dieselben miteinander, so ist das Product

$$\frac{I_1^i}{I_2^i} = \frac{2 \cdot 4 \dots 2i-2}{k^{i-1}} \cdot \frac{A^{(i-1)} - B^{(i-1)} I_1^i : I_2^i}{-I_1^i : I_2^i}$$

oder

$$(44) \dots I_2^i = \frac{-2 \cdot 4 \dots 2i-2}{k^{i-1}} \left\{ A^{(i-1)} I_2^0 - B^{(i-1)} I_1^i \right\}$$

Eliminirt man I_2^0 und I_1^i aus drei Ausdrücken dieser Art für I_1^i, I_1^i, I_1^i , so erhält man eine Gleichung zwischen diesen drei Functionen, welche durch Berücksichtigung der bekannten Eigenschaften der Kettenbrüche, auf ihre einfachste Gestalt gebracht werden kann. Wenn aber k ein kleiner Bruch ist, so ist weder (44), noch ein anderer endlicher Ausdruck, welcher ein höheres I_2^i aus zwei niedrigeren ergibt, zur Rechnung bequem; denn da I_1^i von der Ordnung von k^i ist, so ist $A^{(i-1)} I_2^0 - B^{(i-1)} I_1^i$ von der Ordnung k^{2i-1} und wird durch den Unterschied zweier Grössen von der Ordnung von k gefunden, also mit desto geringerer Genauigkeit, je kleiner k und je grösser i ist.

Von dieser Unbequemlichkeit frei ist ein anderer, aber unendlicher Ausdruck von I_2^i , welchen man leicht aus (44) ableiten kann. Eliminirt man nämlich I_1^i aus den Ausdrücken von I_1^i und I_2^{i+1} , so erhält man

$$-\frac{2i}{k} B^{(i)} I_1^i + B^{(i-1)} I_2^{i+1} = \frac{2 \cdot 4 \dots 2i}{k^i} \left\{ A^{(i-1)} B^{(i)} - A^{(i)} B^{(i-1)} \right\} I_2^0$$

und nach den bekannten Eigenschaften der Kettenbrüche hat man

$$A^{(i-1)} B^{(i)} - A^{(i)} B^{(i-1)} = \frac{-k^{2i-1}}{2^i \cdot 4^i \dots (2i-2)^2 \cdot 2^i} ;$$

setzt man dieses in den eben gefundenen Ausdruck, so wird er

$$-\frac{2i}{k} B^{(i)} I_1^i + B^{(i-1)} I_2^{i+1} = \frac{-k^{2i-1}}{2 \cdot 4 \dots 2i-2} I_2^0$$

oder

$$I_2^i = \frac{k^i}{2 \cdot 4 \dots 2i} \cdot \frac{I_2^0}{B^{(i)} - B^{(i-1)} \frac{k}{2i} \cdot \frac{I_2^{i+1}}{I_2^i}}$$

und nach (42)

$$(45) \dots I_2^i = \frac{k^i}{2 \cdot 4 \dots 2i} \cdot \frac{I_2^0}{B^{(i)} - B^{(i-1)}} \cdot \frac{kk}{2i \cdot 2i+2} \cdot \frac{kk}{1 - \frac{kk}{2i+2 \cdot 2i+4} \dots}$$

Diese verschiedenen Ausdrücke können, wenn man nicht unmittelbar nach der Reihe (31) rechnen will, benutzt werden, um I_2^i aus I_2^0 und I_1^i zu erhalten; (44) mit desto geringerem Nachtheile, je grösser k ist.

12.

Differentiirt man $2\pi I_1^i = f \cos(i\varepsilon - k \sin \varepsilon) d\varepsilon$ in Beziehung auf k , so erhält man $f \sin(i\varepsilon - k \sin \varepsilon) \sin \varepsilon d\varepsilon$, also nach (30)

$$\frac{dI_1^i}{dk} = \frac{i}{k} I_1^i - I_2^{i+1}, \text{ oder}$$

$$I_2^{i+1} = \frac{i}{k} I_1^i - \frac{dI_1^i}{dk}$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\left(\frac{k}{2}\right)^{i+1}$, so ergibt sie

$$\left(\frac{k}{2}\right)^{i+1} = \frac{d \left\{ \frac{I_1^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i} \right\}}{d \cdot \frac{kk}{4}} = \frac{d^2 \left\{ \frac{I_2^{i-1}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i-1}} \right\}}{\left(d \cdot \frac{kk}{4}\right)^2} = \text{etc.}$$

oder

$$(46) \dots \frac{I_2^{i+4}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+4}} = (-1)^i \frac{d^4 \left\{ \frac{I_2^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i} \right\}}{\left(d \cdot \frac{kk}{4}\right)^4}$$

wovon ein besonderer Fall ist

$$(47) \dots \frac{I_2^2}{\left(\frac{k}{2}\right)^2} = (-1)^0 \frac{d^2 \cdot I_2^0}{\left(d \cdot \frac{kk}{4}\right)^2}$$

Vergleicht man (40) und (46), so erhält man die Differentialgleichung der zweiten Ordnung, welcher I_2^i entspricht:

$$(48) \dots 0 = \frac{d^2 I_2^i}{dk^2} + \frac{1}{k} \frac{dI_2^i}{dk} + I_2^i \left(1 - \frac{ii}{kk}\right)$$

Die durch (46) angegebene Verbindung der verschiedenen, zu einem gleichen Argumente k gehörigen Functionen, ergibt die endliche Veränderung einer derselben, welche dadurch entsteht, dass k sich in $k \pm z$ verwandelt. Man hat nämlich

$$d \cdot \frac{I_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i} = - \frac{I_k^{i+1}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+1}}$$

$$d^2 \cdot \frac{I_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i} = + \frac{I_k^{i+2}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+2}}$$

$$\frac{I_k^{i+2}}{\left(\frac{k+z}{2}\right)^i} = \frac{I_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i} + d \cdot \frac{I_k^i}{\frac{k}{4}} \cdot \left(\frac{kz}{2} + \frac{zz}{4}\right) + \frac{d^2 \cdot \frac{I_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i}}{2 \left(d \cdot \frac{k}{4}\right)^2} \cdot \left(\frac{kz}{2} + \frac{zz}{4}\right)^2 + \text{etc. ...}$$

oder

$$(49) \dots \dots \dots I_{(k+z)}^i = \left(1 + \frac{z}{k}\right)^i \left\{ I_k^i - I_k^{i+1} \cdot z \left(1 + \frac{z}{2k}\right) + \frac{I_k^{i+2}}{1-2} z^2 \left(1 + \frac{z}{2k}\right)^2 - \text{etc. ...} \right\}$$

welche Reihe zur Berechnung und Interpolation einer Tafel dieser Functionen angewendet werden kann und bei der, dieser Abhandlung angehängten, von $k=0$ bis $k=3, 2$ gehenden, I_k^0 und I_k^1 enthaltenden, benutzt worden ist.

13.

Auf die Function I_k^i lassen sich noch andere Integrale zurückführen, wie aus den folgenden Beispielen hervorgehen wird.

$$(50) \dots \frac{1}{2\pi} \int \cos(ix - m \cos \varepsilon - n \sin \varepsilon) d\varepsilon = \cos i\alpha I_{\sqrt{m^2+n^2}}^i$$

Beweis. Setzt man $m = a \sin \alpha$, $n = a \cos \alpha$, $\alpha + \varepsilon = z$, so wird der Ausdruck

$$= \frac{1}{2\pi} \int \cos(-i\alpha + iz - a \sin z) dz = \frac{\cos i\alpha}{2\pi} \int \cos(ix - a \sin z) dz + \frac{\sin i\alpha}{2\pi} \int \sin(ix - a \sin z) dz$$

Das letzte Glied dieses Ausdrucks verschwindet aber, wenn man es von 0 bis 2π nimmt; denn $\sin(ix - a \sin z)$ lässt sich in eine Reihe von Sinussen der Vielfachen von z verwandeln. Also bleibt nur das erste übrig und dieses giebt

$$\cos i\alpha I_a^i = \cos i\alpha I_{\sqrt{m^2+n^2}}^i$$

$$(51) \dots \frac{1}{2\pi} \int \cos i\varepsilon \cos(m \cos \varepsilon + n \sin \varepsilon) d\varepsilon = \cos i\alpha I_{\sqrt{m^2+n^2}}^i$$

für ein gerades i und $= 0$ für ein ungerades.

Beweis. Das Integral ist

$$\frac{1}{4\pi} \int \cos(i\varepsilon - m \cos \varepsilon - n \sin \varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{4\pi} \int \cos(-i\varepsilon - m \cos \varepsilon - n \sin \varepsilon) d\varepsilon$$

also nach (41) und (50)

$$d^2 \cdot \frac{I_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i} = - \frac{I_k^{i+2}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+2}}$$

u. s. w.

also nach dem Taylor'schen Lehrsatz

$$\frac{1}{2} \cos i\alpha \left\{ I_{\sqrt{m^2+n^2}}^i + (-1)^i I_{\sqrt{m^2+n^2}}^i \right\} Q. E. D.$$

$$(52) \dots \frac{1}{2\pi} \int \sin i\varepsilon \sin(m \cos \varepsilon + n \sin \varepsilon) d\varepsilon = \cos i\alpha I_{\sqrt{m^2+n^2}}^i$$

für ein ungerades i und $= 0$ für ein gerades.

Beweis. Das Integral ist

$$\frac{1}{4\pi} \int \cos(i\varepsilon - m \cos \varepsilon - n \sin \varepsilon) d\varepsilon - \frac{1}{4\pi} \int \cos(-i\varepsilon - m \cos \varepsilon - n \sin \varepsilon) d\varepsilon$$

also nach (41) und (50)

$$\frac{1}{2} \cos i\alpha \left\{ I_{\sqrt{m^2+n^2}}^i - (-1)^i I_{\sqrt{m^2+n^2}}^i \right\} Q. E. D.$$

$$(53) \dots \frac{1}{2\pi} \int \cos \varepsilon^{2i} \cos(k \sin \varepsilon) d\varepsilon = \frac{1 \cdot 3 \dots 2i-1}{k^i} I_k^i$$

Beweis. Durch theilweise Integration erhält man das Integral

$$\sin \varepsilon \cos \varepsilon^{2i-1} \cos(k \sin \varepsilon) - \frac{k}{2i+1} \cos \varepsilon^{2i+1} \sin(k \sin \varepsilon) + (2i-1) f \cos \varepsilon^{2i-2} \cos(k \sin \varepsilon) d\varepsilon - (2i-1) f \cos \varepsilon^{2i} \cos(k \sin \varepsilon) d\varepsilon + \frac{k}{2i+1} \int \cos \varepsilon^{2i+2} \cos(k \sin \varepsilon) d\varepsilon$$

wo die beiden ersten Glieder, von $\varepsilon=0$ bis $\varepsilon=2\pi$ genommen, verschwinden; man hat also

$$0 = (2i-1) f \cos \varepsilon^{2i-2} \cos(k \sin \varepsilon) d\varepsilon - 2i f \cos \varepsilon^{2i} \cos(k \sin \varepsilon) d\varepsilon + \frac{k}{2i+1} \int \cos \varepsilon^{2i+2} \cos(k \sin \varepsilon) d\varepsilon$$

und wenn man

$$\int \cos \varepsilon^{2h} \cos(k \sin \varepsilon) d\varepsilon \text{ durch } \frac{1 \cdot 3 \dots 2h-1}{k^h} \varphi h$$

bezeichnet

$$0 = k\varphi(i-1) - 2i\varphi(i) + k\varphi(i+1).$$

Diese Relation stimmt mit (40) überein; allein für

$i = 0$ und $i = 1$ findet man $\varphi_0 = 1_0^i$ und $\varphi_1 = 1_1^i$, also auch $\varphi_2 = 1_2^i$, u. s. w. Q. E. D.

$$(54) \dots \int \cos kx \cdot (1-zz)^{\frac{2i-1}{2}} dz \left[\begin{matrix} \text{von } z=0 \\ \text{bis } z=1 \end{matrix} \right] = \frac{1 \cdot 3 \dots 2i-1}{4^i} I_1^i$$

Beweis. $\cos \varepsilon^i \cos(k \sin \varepsilon)$ enthält nur gerade

$$\int \cos \varepsilon^{2i} \cos(k \sin \varepsilon) d\varepsilon \left[\begin{matrix} \text{von } \varepsilon=0 \\ \text{bis } \varepsilon=\frac{1}{2}\pi \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \int \cos \varepsilon^{2i} \cos(k \sin \varepsilon) d\varepsilon \left[\begin{matrix} \text{von } \varepsilon=0 \\ \text{bis } \varepsilon=2\pi \end{matrix} \right] = \frac{1 \cdot 3 \dots 2i-1}{4 \cdot k^i} I_1^i \text{ nach (53).}$$

Schreibt man z für $\sin \varepsilon$, so erhält man $d\varepsilon = \frac{dz}{\sqrt{1-zz}}$, $\cos \varepsilon^2 = 1-zz$ und damit den Satz

$$(55) \dots \frac{1}{2\pi} \int e^{n \cos \varepsilon} \cos(m \sin \varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{m^2-n^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon \left\{ 1 + \frac{n^2}{\Pi^2} \cos^2 \varepsilon + \frac{n^4}{\Pi^4} \cos^4 \varepsilon + \dots \right\} \left\{ 1 - \frac{m^2}{\Pi^2} \sin^2 \varepsilon + \frac{m^4}{\Pi^4} \sin^4 \varepsilon - \text{etc.} \dots \right\}$$

und das allgemeine Glied des Products dieser beiden Reihen

$$= \frac{n^{2i}}{\Pi^{2i}} \cos \varepsilon^{2i} - \frac{n^{2i-2} m^2}{\Pi(2i-2)\Pi^2} \cos \varepsilon^{2i-2} \sin^2 \varepsilon + \frac{n^{2i-4} m^4}{\Pi(2i-4)\Pi^4} \cos \varepsilon^{2i-4} \sin^4 \varepsilon - \text{etc.} \dots;$$

allein $\frac{1}{2\pi} \int \cos \varepsilon^{2i-2k} \sin^2 \varepsilon^k d\varepsilon = \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\Pi 2k \cdot \Pi(2i-2k)}{\Pi^i \cdot \Pi k \cdot \Pi(i-k)}$ und daher das allgemeine Glied

$$= \frac{1}{2^i \cdot (\Pi i)^i} \left\{ n^{2i-i} \cdot n^{2i-2} m^2 + \frac{i \cdot i-1}{1 \cdot 2} n^{2i-4} m^4 - \text{etc.} \dots \right\} = \frac{(n^2-m^2)^i}{2^i \cdot (\Pi i)^i}$$

Das allgemeine Glied von I_1^0 ist $(-1)^i \frac{k^i}{2^i \cdot (\Pi i)^i}$,

woraus, wenn man $\sqrt{mm-nn}$ für k schreibt, der Satz folgt.

Man könnte die Anzahl dieser Sätze noch sehr vermehren, auch durch Verwechslung der Sinus und Cosinus Abänderungen derselben machen, allein ich glaube nicht länger dabei verweilen zu dürfen. Ich bemerke nur noch, dass die Reihenentwickelungen von $\cos k \cdot I_1^0$ und $\sin k \cdot I_1^0$ nach sehr einfachen Gesetzen fortschreiten: man hat nämlich

$$I_1^0 = \frac{1}{2\pi} \int \cos(k \cos \varepsilon) d\varepsilon; \quad 0 = \frac{1}{2\pi} \int \sin(k \cos \varepsilon) d\varepsilon;$$

durch Multiplication dieser Gleichungen mit

$$(56) \dots \dots \dots \begin{cases} \cos k \cdot I_1^0 = 1 - \frac{3}{(\Pi 2)^2} k^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{(\Pi 4)^2} k^4 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{(\Pi 6)^2} k^6 + \text{etc.} \dots \\ \sin k \cdot I_1^0 = k - \frac{3 \cdot 5}{(\Pi 3)^2} k^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{(\Pi 5)^2} k^5 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{(\Pi 7)^2} k^7 + \text{etc.} \dots \end{cases}$$

14.

Die Function I_1^0 hat mit den Sinussen und Cosinussen die merkwürdige Eigenschaft gemein, immer, wenn ihr Argument k von $2n\pi$ bis zu $(2n+2)\pi$ wächst, zweimal zu verschwinden und dann das Zeichen zu ändern. Ich werde zeigen, dass I_1^0 von $k = m\pi$ bis $(m+\frac{1}{2})\pi$ immer positiv ist, wenn m eine gerade Zahl, und negativ, wenn m ungerade ist.

Potenzen von $\cos \varepsilon$ und $\sin \varepsilon$, also nur Cosinusse der geraden Vielfachen von ε ; $\int \cos \varepsilon^{2i} \cdot \cos(k \sin \varepsilon) d\varepsilon$ also ausser dem in ε multiplicirten Gliede nur Sinusse der geraden Vielfachen von ε , welche daher, von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, von $\frac{1}{2}\pi$ bis π , von π bis $\frac{3}{2}\pi$ und von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π genommen, verschwinden. Man hat daher

Beweis. Die ungeraden Potenzen von $\cos \varepsilon$, in der Entwickelung der Exponentialgrösse verschwinden aus dem Integrale; man hat dasselbe daher

$$\begin{matrix} \cos k & \sin k \\ \sin k & -\cos k \end{matrix}$$

findet man

$$\cos k \cdot I_1^0 = \frac{1}{2\pi} \int \cos(k-k \cos \varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int \cos(2k \sin \frac{1}{2} \varepsilon^2) d\varepsilon$$

$$\sin k \cdot I_1^0 = \frac{1}{2\pi} \int \sin(k-k \cos \varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int \sin(2k \sin \frac{1}{2} \varepsilon^2) d\varepsilon$$

und wenn man die beiden letzten Ausdrücke in die Reihen

$$\frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon \left\{ 1 - \frac{(2k)^2 \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon^2}{\Pi^2} + \frac{(2k)^4 \sin^4 \frac{1}{2} \varepsilon^2}{\Pi^4} - \frac{(2k)^6 \sin^6 \frac{1}{2} \varepsilon^2}{\Pi^6} + \text{etc.} \dots \right\}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon \left\{ 2k \sin \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{(2k)^3 \sin^3 \frac{1}{2} \varepsilon^2}{\Pi^3} + \frac{(2k)^5 \sin^5 \frac{1}{2} \varepsilon^2}{\Pi^5} - \text{etc.} \dots \right\}$$

entwickelt und jedes Glied derselben von 0 bis 2π nimmt,

Wenn man $\sin \varepsilon = z$ und $k = \frac{2m+\frac{1}{2}m'}{2} \cdot \pi$ setzt, wo m' einen eigentlichen Bruch bedeutet, so hat man nach der bei (54) gemachten Bemerkung,

$$I_1^0 = \frac{2}{\pi} \int \cos \frac{2m+\frac{1}{2}m'}{2} \pi z \cdot \frac{dz}{\sqrt{1-zz}} \left[\begin{matrix} \text{von } z=0 \\ \text{bis } z=1 \end{matrix} \right];$$

schreibt man v für $(2m+\frac{1}{2}m')z$, so verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$I_k^0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} \nu \cdot \frac{d\nu}{\sqrt{(2m+m')^2 - \nu^2}} \left[\begin{array}{l} \text{von } \nu = 0 \\ \text{bis } \nu = 2m+m' \end{array} \right]$$

Das Integral, von $\nu = a$ bis $\nu = b$ genommen, ist, wenn man $h+u$ für ν schreibt

$$= \int \cos \left(\frac{h\pi}{2} + \frac{\pi}{2} u \right) \frac{du}{\sqrt{(2m+m')^2 - (h+u)^2}} \left[\begin{array}{l} \text{von } u = a-h \\ \text{bis } u = b-h \end{array} \right]$$

nimmt man nun h nach und nach $= 1, 3, \dots, 2m-1$ und a und b immer $= h-1$ und $h+1$, so ergibt der letzte Ausdruck

$$I_k^0 = \frac{2}{\pi} \int \sin \frac{\pi}{2} u \cdot du \left\{ \frac{-1}{\sqrt{\mu\mu - (1+u)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\mu\mu - (3+u)^2}} - \dots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{\mu\mu - (2m-3+u)^2}} + \frac{(-1)^m}{\sqrt{\mu\mu - (2m-1+u)^2}} \right\} \left[\begin{array}{l} \text{von } u = -1 \\ \text{bis } u = +1 \end{array} \right] \\ + \frac{2}{\pi} (-1)^m \int \frac{\cos \frac{\pi}{2} u \cdot du}{\sqrt{\mu\mu - (2m+u)^2}} \left[\begin{array}{l} \text{von } u = 0 \\ \text{bis } u = m' \end{array} \right]$$

wo μ für $2m+m'$ geschrieben ist. Die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks sind positiv, das letzte offenbar, weil $\frac{\pi}{2} u$ immer kleiner ist als $\frac{\pi}{2}$, die übrigen, weil ihr positiver Theil grösser ist als der negative; denn man hat

$$\int \frac{\sin \frac{\pi}{2} u \cdot du}{\sqrt{\mu\mu - (h+u)^2}} \left[\begin{array}{l} \text{von } u = -1 \\ \text{bis } u = +1 \end{array} \right] \\ = \int \sin \frac{\pi}{2} u \cdot du \left\{ \frac{1}{\sqrt{\mu\mu - (h+u)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\mu\mu - (h-u)^2}} \right\} \left[\begin{array}{l} \text{von } u = 0 \\ \text{bis } u = 1 \end{array} \right]$$

wo der Nenner des positiven Theils stets kleiner ist als der des negativen. Ferner ist jedes folgende Glied grösser als das vorhergehende, wegen der immer abnehmenden Nenner; die Summe zweier aufeinander folgenden hat daher das Zeichen des letzten derselben. Wenn m gerade ist, so ist das letzte Glied in der Klammer positiv und daher die Summe aller Glieder positiv; wenn m ungerade ist, so ist das letzte Glied negativ und daher die Summe aller Glieder bis zum zweiten negativ und das erste Glied, so wie das Glied ausser der Klammer, sind gleichfalls negativ.

Diese Eigenschaft kommt der Function I_k^0 nicht allein zu, sondern alle I_k^i besitzen eine ähnliche. Man hat nämlich (46), wenn man Kürze wegen I_k^i durch $\left(\frac{k}{2}\right) I_k^{(i)}$ und $\frac{k}{4}$ durch x bezeichnet

$$I_k^{(i+1)} = -\frac{dI_k^{(i)}}{dx},$$

woraus folgt, dass $I_k^{(i+1)}$ verschwindet, wenn $I_k^{(i)}$ ein Maximum oder Minimum ist; allein zwischen zwei Werthen von k oder x , für welche $I_k^{(i)}$ verschwindet, liegt nothwendig ein Maximum oder Minimum, also auch ein

verschwindendes $I_k^{(i+1)}$. Es ist daher klar, dass I_k^1 eben so oft $= 0$ wird, so oft I_k^0 ein Maximum oder Minimum ist; zwischen zwei Werthen von k , für welche I_k^1 verschwindet, liegt immer ein Maximum oder Minimum von I_k^0 , daher ein verschwindendes I_k^2 , u. s. w.

15.

Die beiden in 10. Artikel durch M und M' bezeichneten Integrale sind weit zusammengesetzter als die beiden anderen L und L' . Eine endliche Relation zwischen einem derselben und der transcendenten Function J_k^i scheint nicht vorhanden zu sein; allein man kann sehr leicht zeigen, dass beide sich auf Integrale von der Form

$$\int \frac{\cos(h\varepsilon - k \sin \varepsilon) d\varepsilon}{1 - e \cos \varepsilon} \left[\begin{array}{l} \text{von } \varepsilon = 0 \\ \text{bis } \varepsilon = 2\pi \end{array} \right]$$

zurückführen lassen. Bezeichnet man dieses Integral durch

$$2\pi \cdot J_k^h,$$

so hat man nämlich

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\cos(i\varepsilon - k \sin \varepsilon) \cos \varepsilon d\varepsilon}{1 - e \cos \varepsilon} = \frac{1}{2} J_k^{i-1} + \frac{1}{2} J_k^{i+1} \\ \frac{1}{2\pi} \int \frac{\sin(i\varepsilon - k \sin \varepsilon) \sin \varepsilon d\varepsilon}{1 - e \cos \varepsilon} = \frac{1}{2} J_k^{i-1} - \frac{1}{2} J_k^{i+1}$$

woraus für $k = ie$ die Ausdrücke von M und M' folgen, nämlich

$$(57) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} M = \frac{e}{2} J_{ie}^{i-1} + \frac{e}{2} J_{ie}^{i+1} \\ M' = \frac{e}{2} J_{ie}^{i-1} - \frac{e}{2} J_{ie}^{i+1} \end{array} \right.$$

Man hat ferner

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\cos(i\varepsilon - k \sin \varepsilon) \cos \varepsilon d\varepsilon}{1 - e \cos \varepsilon} \\ = \frac{1}{2\pi e} \int \cos(i\varepsilon - k \sin \varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{2\pi e} \int \frac{\cos(i\varepsilon - k \sin \varepsilon) d\varepsilon}{1 - e \cos \varepsilon} \\ = -\frac{1}{c} I_k^i + \frac{1}{e} J_k^i$$

und die Verbindung dieses Ausdrucks mit dem vorher für dasselbe Integral gefundenen giebt

$$(58) \dots \dots I_k^i = -\frac{e}{2} J_k^{i-1} + J_k^i - \frac{e}{2} J_k^{i+1}$$

woraus also hervorgeht, dass jedes J_k^i durch I_k^0, I_k^1, J_k^1 und J_k^2 gefunden werden kann. Es wäre also nöthig, noeh J_k^0 und J_k^1 näher zu untersuchen, allein es ist mir nicht gelungen, diese beiden transcendenten Functionen, welche die beiden Argumente e und k haben, auf andere, nur von Einem Argumente abhängige, welche in eine Tafel gebracht werden könnten, zurückzuführen.

Die Methode, das Integral J_k^i in eine Reihe zu entwickeln, habe ich in meiner Abhandlung über das Kepler'sche Problem gegeben;* hier theile ich eine zweite Reihenentwicklung mit, welche die Tafel für I_k^i und I_k^i voraussetzt und in allen Fällen convergirt. Man hat bekanntlich

$$\frac{1}{1-\epsilon \cos \epsilon} = \frac{1}{1-\epsilon \epsilon} \left\{ 1 + 2\lambda \cos \epsilon + 2\lambda^2 \cos 2\epsilon + 2\lambda^3 \cos 3\epsilon + \dots \right\}$$

wo

$$\lambda = \frac{1}{1 + \sqrt{1-\epsilon \epsilon}};$$

multiplirt man diese Reihe mit $\cos(i\epsilon - k \sin \epsilon) d\epsilon$ und integrirt von 0 bis 2π , so erhält man

$$J_k^i = \frac{1}{1-\epsilon \epsilon} \left\{ I_k^i + \lambda I_k^{i+1} + \lambda^2 I_k^{i+2} + \dots + \lambda I_k^{i-1} + \lambda^2 I_k^{i-2} + \dots \right\}$$

oder anders geschrieben

$$(59) \dots J_k^i = \frac{1}{1-\epsilon \epsilon} \left\{ \lambda^i I_k^i + \lambda^{i-1} I_k^i + \dots + I_k^i - \lambda^{i+1} I_k^i + \lambda^{i+2} I_k^i - \lambda^{i+3} I_k^i + \dots + \lambda I_k^{i+1} + \lambda^2 I_k^{i+2} + \lambda^3 I_k^{i+3} + \dots \right\}$$

wo die beiden unendlichen Reihen mit einem Gliede der $i + 2^{\text{ten}}$ Ordnung anfangen. Will man von J_k^i zu dem folgenden J_k^{i+1} übergehen, so erhält man eine dazu dienliche Formel, wenn man den eben gegebenen Ausdruck mit λ multiplirt und das Product von dem ähnlichen Ausdrucke für J_k^{i+1} abzieht; man hat dadurch

$$(60) J_k^{i+1} = \lambda J_k^i + \frac{2}{1+\sqrt{1-\epsilon \epsilon}} \left\{ I_k^{i+1} + \lambda I_k^{i+2} + \lambda^2 I_k^{i+3} + \dots \right\}$$

Will man die beiden Integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\cos i\mu \cos \epsilon}{1-\epsilon \cos \epsilon} d\epsilon \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi} \int \frac{\sin i\mu \sin \epsilon}{1-\epsilon \cos \epsilon} d\epsilon$$

auf die Coefficienten der Reihe für die Mittelpunkts-gleichung

$$\varphi = \mu + 2A' \sin \mu + 2A'' \sin 2\mu + \dots$$

zurückführen, so geschieht dieses folgendermassen:

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\cos i\mu \cos \epsilon}{1-\epsilon \cos \epsilon} d\epsilon = -\frac{1}{2\pi \epsilon} \int \cos i\mu d\epsilon + \frac{1}{2\pi \epsilon} \int \frac{\cos i\mu \cdot d\epsilon}{1-\epsilon \cos \epsilon}$$

wo das letzte Glied der Ausdruck von $\frac{i}{\epsilon \sqrt{1-\epsilon \epsilon}} A^{(i)}$ ist; man hat daher

$$(61) \dots \dots M = \frac{i}{\sqrt{1-\epsilon \epsilon}} A^{(i)} - I_{i,\epsilon}^i;$$

ferner hat man

$$\frac{d\varphi}{d\epsilon} = \frac{\sin \varphi}{1-\epsilon \epsilon} (2 + \epsilon \cos \varphi) = \frac{\sqrt{1-\epsilon \epsilon} \sin \epsilon}{1-\epsilon \cos \epsilon} \left\{ \frac{1}{1-\epsilon \epsilon} + \frac{1}{1-\epsilon \cos \epsilon} \right\};$$

*) [Abhandl. 8.]

entwickelt man diesen Ausdruck in die Reihe

$$\frac{d\varphi}{d\epsilon} = 2B' \sin \mu + 2B'' \sin 2\mu + 2B''' \sin 3\mu + \dots,$$

so ist einerseits

$$B^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon \epsilon}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int \sin i\mu \sin \epsilon d\epsilon + \sqrt{1-\epsilon \epsilon} \int \frac{\sin i\mu \sin \epsilon}{1-\epsilon \cos \epsilon} d\epsilon$$

und andererseits

$$B^{(i)} = \frac{dA^{(i)}}{d\epsilon};$$

man hat also, nach (30),

$$(62) \dots M' = \frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon \epsilon}} \frac{dA^{(i)}}{d\epsilon} - \frac{1}{1-\epsilon \epsilon} I_{i,\epsilon}^i + \frac{\epsilon}{1-\epsilon \epsilon} I_{i,\epsilon}^{i+1}$$

16.

Bei der Auflösung der Aufgaben der physischen Astronomie, welche auf I_k^i und J_k^i zurückführen, wird k meistens nicht sehr gross sein; dann ist der Gebrauch der Tafel für die erste dieser Functionen nicht so zweckmässig und bequem, als die directe Berechnung des Reihenausdrucks derselben. Um aber doch von der Anwendung der am Ende dieser Abhandlung abgedruckten Tafeln Beispiele zu geben, werde ich den Coefficienten von $\cos 4\mu$ in der Entwicklung von r^3 und den Coefficienten von $\sin 4\mu$ in der Entwicklung der Mittelpunkts-gleichung, beide für eine Ellipse, deren Excentricität = 0,35 ist, mittelst der Tafeln bestimmen.

Der Coefficient von $\cos i\mu$ in der Entwicklung von r^3 ist, nach den Formeln im 10. Artikel,

$$\frac{3(1-\epsilon \epsilon)}{ii} L - \frac{6}{i^3} L';$$

also für $i = 4$,

$$I_{4,\epsilon}^3 = \frac{1}{1-\epsilon \epsilon} \cdot \frac{1}{2\pi} \int \cos 4\mu \cos \epsilon d\epsilon - \frac{1}{3^3} \epsilon \cdot \frac{1}{2\pi} \int \sin 4\mu \sin \epsilon d\epsilon$$

und nach (29) und (30)

$$= I_{4,\epsilon}^3 (1-\epsilon \epsilon) I_{4,\epsilon}^4 - \frac{1}{3^3} I_{4,\epsilon}^4 + \frac{1}{3^3} \epsilon I_{4,\epsilon}^5 = \frac{2,265}{32} I_{4,\epsilon}^4 + \frac{1,05}{32} I_{4,\epsilon}^5$$

Aus den in der Tafel enthaltenen Werthen

$$I_{4,\epsilon}^0 = 0,56685 \ 51204 \quad \text{und} \quad I_{4,\epsilon}^1 = 0,54194 \ 77139$$

findet man

$$I_{4,\epsilon}^4 = 0,00906 \ 28717 \quad \text{und} \quad I_{4,\epsilon}^5 = 0,00129 \ 01251$$

und damit den gesuchten Coefficienten = +0,00068 38136, wobei zu bemerken ist, dass man ihn verdoppeln muss, wenn man nur die positiven Vielfachen von μ in der Entwicklung haben will.

Der Coefficient von $\sin i\mu$ in der Entwicklung der Mittelpunkts-gleichung ist

$$\frac{\sqrt{1-\epsilon\epsilon}}{i} \cdot \frac{1}{2\pi} \int \frac{\cos i\mu \cdot d\mu}{1-\epsilon\cos\epsilon} = \frac{\sqrt{1-\epsilon\epsilon}}{i} \cdot J'_{i\epsilon}$$

also, für $i = 4$ und $\epsilon = 0,35$, nach (59)

$$= \left\{ \begin{aligned} &\lambda^4 I^0_{1,4} + \lambda^3 I^1_{1,4} + \lambda^2 I^2_{1,4} + \lambda I^3_{1,4} + I^4_{1,4} \\ &- \lambda^2 I^1_{1,4} + \lambda I^2_{1,4} - \lambda^2 I^3_{1,4} + \text{etc.} \dots \\ &+ \lambda I^5_{1,4} + \lambda^2 I^6_{1,4} + \lambda^3 I^7_{1,4} + \text{etc.} \dots \end{aligned} \right\}$$

Man findet:

$I^0 =$	0,56685	51204
$I^1 =$	0,54194	77139
$I^2 =$	0,20735	58995
$I^3 =$	0,05049	77133
$I^4 =$	0,00906	28717
$I^5 =$	0,00129	01251
$I^6 =$	0,00015	23073
$I^7 =$	0,00001	53661
$I^8 =$	0,00000	13538

und hiermit

$\lambda^4 I^0 =$	+ 0,00060	45751	$-\lambda^3 I^1 =$	- 0,00010	44552
$\lambda^3 I^1 =$	0,00319	84608	$+\lambda^2 I^2 =$	+	72224
$\lambda^2 I^2 =$	0,00677	18213	$-\lambda I^3 =$	-	3179
$\lambda I^3 =$	0,00912	57015	$+\lambda^2 I^4 =$	+	103
$I^4 =$	0,00906	28717	$-\lambda I^5 =$	-	3
+ 0,02876		34304	- 0,00009		75407
$\lambda I^5 =$	+ 0,00023	31451			
$\lambda^2 I^6 =$	+	49740			
$\lambda^3 I^7 =$	+	907			
$\lambda^4 I^8 =$	+	14			
+ 0,00023		82112			

Die Summe aller drei Theile ist 0,02890 41009
und daher der gesuchte Coefficient = 0,00722 60252

= 24' 50",47460; er muss gleichfalls verdoppelt werden, wenn die Entwicklung nur die positiven Vielfachen von μ enthalten soll.

[Literatur der Astronom. Nachr. über Störungen: HANSEN, Disquisitiones circa theoriā perturbat. etc. (Bd. 7, 8, 11, 12, 13), Störungen eines widerstehenden Mittels beim Encke'schen Cometen (11, 12, 13 [Rechnungsbeispiel für Venus]); gegenseitige St. dreier und mehr Körper, die sich um einen vierten bewegen (14); zur Theorie der planetarischen St. (15); über PLANA's Untersuchung der Mondstörungen (17); Resultate seiner und DAMOISSEAU's Mondst. (17); St. der mittleren Länge des Mondes (17); osculirende Elemente als Grundlage der Berechnung der St. eines Planeten (18); unabhängige Elemente der „Fundam. nova“ (18); über die Behandlung der Theorie der Mondst. (19); absolute St. bei sehr excentrischen Bahnen (20); über die Theorie der St. in sehr excentrischen Bahnen (21); St. durch mechanische Quadraturen (34, 37); absolute St. der Egeria durch \mathcal{Q} (37); neues Verfahren, die St. zu berechnen (37); Bemerkungen zu ENCKE's Störungsarbeiten (37, 38); über die Flora-St. und Streit mit ENCKE (42, 48); neue Ableitung seiner Fundamentalformeln (42). — ENCKE, neue Methode der speciellen Planetenstörungen (33, 34); über BOND's „Applicat. of the method of mechan. quadratures“ (34); Erwiderung auf HANSEN's Bemerkungen (37); über die Flora-St. und Streit mit HANSEN (42, 43, 44, 49). — AIRY, Ungleichheit in der Bewegung von Erde und Venus (9). CLAUDE-JACOBI, zum Problem der drei K. (20). VALZ, Einwirkung der St. der Planeten auf Cometenbahnen (22). ZECH, über Berechnung der St. durch mechan. Quadraturen (37); neue Ableitung der Hansen'schen Fundamentalformeln (41). ANGEN, über EULER's Störungsmethode (42, 45). GRUNERT, über die Berechnung der St. (50). LESSER, über HANSEN's Störungsmethoden (50). SIDLER, über eine Störungsmethode nach HAABE (51). POWALKY, HANSEN's Formeln für specielle St. (60). SCHIAPARELLI, Theoreme zur Störungstheorie (62). OPPOLZER, Uebergang von Coordinaten-St. auf Elementen-St. (67). RADAU, über das Problem der drei K. (72, 74). WEILER, über dasselbe (74, 75). HILL, Methode der absoluten St. (83).]

Tafel der Functionen I_k^0 und I_k^1 .

k	I_k^0	Diff. I.	Diff. II.	I_k^1	Diff. I.	Diff. II.
0,00	0,00000 00000	— 2 19998	— 4 99979	0,00000 00000	+ 199 99375	— 3750
0,01	0,99997 50002	— 7 49977	— 4 99921	0,00499 99375	+ 499 95625	— 7499
0,02	0,99990 00025	— 12 49898	— 4 99829	0,00999 95000	+ 499 88126	— 11249
0,03	0,99977 50127	— 17 49727	— 4 99697	0,01499 83126	+ 499 76877	— 14997
0,04	0,99960 00400	— 22 49424	— 4 99527	0,01999 60003	+ 499 61880	— 18743
0,05	0,99937 50976	— 27 48951	— 4 99323	0,02499 21883	+ 499 43137	— 22488
0,06	0,99910 02025	— 32 48274	— 4 99078	0,02998 65920	+ 499 20649	— 26233
0,07	0,99877 53751	— 37 47352	— 4 98798	0,03497 85669	+ 498 94416	— 29972
0,08	0,99840 06399	— 42 46150	— 4 98478	0,03996 80085	+ 498 64444	— 33713
0,09	0,99797 00249	— 47 44628	— 4 98124	0,04495 44529	+ 498 30731	— 37447
0,10	0,99750 15621	— 52 42762	— 4 97730	0,04993 75260	+ 497 93284	— 41180
0,11	0,99697 72869	— 57 40482	— 4 97299	0,05491 68544	+ 497 52104	— 44910
0,12	0,99640 32387	— 62 37781	— 4 96833	0,05989 20648	+ 497 07194	— 48636
0,13	0,99577 94606	— 67 34614	— 4 96326	0,06486 27842	+ 496 58558	— 52366
0,14	0,99510 59992	— 72 30940	— 4 95785	0,06982 86400	+ 496 06202	— 56075
0,15	0,99438 29052	— 77 26725	— 4 95205	0,07478 93692	+ 495 50127	— 59786
0,16	0,99361 02927	— 82 21930	— 4 94590	0,07974 42729	+ 494 90341	— 63494
0,17	0,99278 80397	— 87 16520	— 4 93933	0,08469 33070	+ 494 26847	— 67196
0,18	0,99191 63877	— 92 10455	— 4 93245	0,08963 59917	+ 493 59651	— 70893
0,19	0,99099 53422	— 97 03700	— 4 92517	0,09457 19568	+ 492 88758	— 74583
0,20	0,99002 49722	— 101 96217	— 4 91755	0,09950 08326	+ 492 14175	— 78269
0,21	0,98900 53505	— 106 87972	— 4 90951	0,10442 22501	+ 491 35906	— 81945
0,22	0,98793 65533	— 111 78923	— 4 90116	0,10933 58407	+ 490 53961	— 85618
0,23	0,98681 86610	— 116 69039	— 4 89239	0,11424 12368	+ 489 68343	— 89281
0,24	0,98565 17571	— 121 58278	— 4 88329	0,11913 80711	+ 488 79062	— 92937
0,25	0,98443 59293	— 126 46607	— 4 87382	0,12402 59773	+ 487 86125	— 96588
0,26	0,98317 12686	— 131 33989	— 4 86397	0,12890 45898	+ 486 89537	— 1 00227
0,27	0,98185 78697	— 136 20386	— 4 85377	0,13377 35435	+ 485 89310	— 1 03859
0,28	0,98049 58311	— 141 05763	— 4 84320	0,13863 24745	+ 484 85451	— 1 07484
0,29	0,97908 52548	— 145 90083	— 4 83227	0,14348 10196	+ 483 77967	— 1 11099
0,30	0,97762 62465	— 150 73310	— 4 82098	0,14831 88163	+ 482 66868	— 1 14704
0,31	0,97611 89155	— 155 55408	— 4 80935	0,15314 55031	+ 481 52164	— 1 18300
0,32	0,97456 33747	— 160 36343	— 4 79731	0,15796 07195	+ 480 33864	— 1 21886
0,33	0,97295 97406	— 165 16074	— 4 78495	0,16276 11059	+ 479 11978	— 1 25463
0,34	0,97130 81332	— 169 94569	— 4 77223	0,16755 53037	+ 477 86515	— 1 29027
0,35	0,96960 86763	— 174 71792	— 4 75915	0,17233 39552	+ 476 57488	— 1 32584
0,36	0,96786 14971	— 179 47707	— 4 74571	0,17709 97040	+ 475 24904	— 1 36126
0,37	0,96606 67264	— 184 22278	— 4 73193	0,18185 21944	+ 473 88778	— 1 39659
0,38	0,96422 44986	— 188 95471	— 4 71777	0,18659 10722	+ 472 49119	— 1 43180
0,39	0,96233 49515	— 193 67248	— 4 70330	0,19131 59841	+ 471 06939	— 1 46690
0,40	0,96039 89267			0,19602 65780		

k	I_2^0	Diff. I.	Diff. II.	I_2^1	Diff. I.	Diff. II.
0,40	0,96039 82267	- 193 37578	- 4 68844	0,19602 65780	+ 469 59249	- 1 50184
0,11	0,95811 44689	- 203 06122	- 4 67326	0,20072 25029	+ 468 09065	- 1 53671
0,42	0,95638 39267	- 207 73748	- 4 65770	0,20540 34094	+ 466 55394	- 1 57141
0,43	0,95430 64519	- 212 39518	- 4 64183	0,21006 89488	+ 464 98253	- 1 60599
0,44	0,95218 25001	- 217 03701	- 4 62560	0,21471 87741	+ 463 37654	- 1 64045
0,45	0,95001 21300	- 221 66261	- 4 60990	0,21935 25395	+ 461 73609	- 1 67476
0,46	0,94779 55039	- 226 27161	- 4 59211	0,22396 99004	+ 460 06133	- 1 70894
0,47	0,94553 27878	- 230 86372	- 4 57183	0,22857 05137	+ 458 35239	- 1 74296
0,48	0,94322 41506	- 235 43855	- 4 55224	0,23315 40376	+ 456 60943	- 1 77685
0,49	0,94086 97651	- 239 99579	- 4 53930	0,23772 01319	+ 454 83258	- 1 81060
0,50	0,93846 98072	- 244 53599	- 4 52103	0,24226 84577	+ 453 02198	- 1 84417
0,51	0,93602 41563	- 249 05612	- 4 50241	0,24679 86775	+ 451 17781	- 1 87762
0,52	0,93353 39951	- 253 55853	- 4 48348	0,25131 04556	+ 449 30019	- 1 91090
0,53	0,93109 83098	- 258 04201	- 4 46420	0,25580 34575	+ 447 38929	- 1 94400
0,54	0,92841 78897	- 262 50621	- 4 44460	0,26027 73504	+ 445 44529	- 1 97698
0,55	0,92579 28276	- 266 95081	- 4 42465	0,26473 18033	+ 443 46831	- 2 00977
0,56	0,92312 33195	- 271 37546	- 4 40441	0,26916 61864	+ 441 45854	- 2 04239
0,57	0,92040 95649	- 275 77987	- 4 38381	0,27358 10718	+ 439 41615	- 2 07484
0,58	0,91765 17662	- 280 16368	- 4 36291	0,27797 52333	+ 437 34131	- 2 10714
0,59	0,91485 01291	- 284 52659	- 4 34167	0,28234 86464	+ 435 23417	- 2 13925
0,60	0,91200 48635	- 288 86826	- 4 32012	0,28670 09881	+ 433 09492	- 2 17117
0,61	0,90911 61809	- 293 18838	- 4 29825	0,29103 19373	+ 430 92375	- 2 20293
0,62	0,90618 42971	- 297 48663	- 4 27606	0,29534 11748	+ 428 72082	- 2 23449
0,63	0,90320 94308	- 301 76269	- 4 25356	0,29962 83830	+ 426 48633	- 2 26587
0,64	0,90019 18039	- 306 01625	- 4 23074	0,30389 52463	+ 424 22016	- 2 29708
0,65	0,89713 16414	- 310 24699	- 4 20762	0,30813 51509	+ 421 92338	- 2 32807
0,66	0,89402 91715	- 314 45461	- 4 18419	0,31235 46847	+ 419 59631	- 2 35888
0,67	0,89088 46254	- 318 63880	- 4 16044	0,31655 06378	+ 417 23643	- 2 38950
0,68	0,88769 82374	- 322 79924	- 4 13640	0,32072 30021	+ 414 84693	- 2 41992
0,69	0,88447 02450	- 326 93564	- 4 11204	0,32487 14714	+ 412 42701	- 2 45012
0,70	0,88120 08886	- 331 04768	- 4 08739	0,32899 57415	+ 409 97689	- 2 48013
0,71	0,87789 01118	- 335 13567	- 4 06215	0,33309 55104	+ 407 49676	- 2 50996
0,72	0,87453 90611	- 339 19752	- 4 03719	0,33717 04780	+ 404 98680	- 2 53953
0,73	0,87114 70859	- 343 23471	- 4 01165	0,34122 09460	+ 402 44727	- 2 56892
0,74	0,86771 47388	- 347 24636	- 3 98582	0,34524 48187	+ 399 87835	- 2 59811
0,75	0,86424 22752	- 351 23218	- 3 95970	0,34924 36922	+ 397 28024	- 2 62705
0,76	0,86072 99534	- 355 19188	- 3 93327	0,35321 64046	+ 394 65319	- 2 65579
0,77	0,85717 80346	- 359 12515	- 3 90657	0,35716 29365	+ 391 99740	- 2 68432
0,78	0,85358 67831	- 363 03172	- 3 87959	0,36108 29105	+ 389 31308	- 2 71260
0,79	0,84995 64659	- 366 91131	- 3 85234	0,36497 60413	+ 386 60048	- 2 74069
0,80	0,84628 73528	- 370 76365	- 3 81477	0,36884 20461	+ 383 85979	- 2 76851
0,81	0,84257 97163	- 374 58842	- 3 79655	0,37268 06430	+ 381 09128	- 2 79615
0,82	0,83883 38321	- 378 38637	- 3 77866	0,37649 15568	+ 378 29513	- 2 82351
0,83	0,83504 99784	- 382 15423	- 3 74048	0,38027 45081	+ 375 47162	- 2 85067
0,84	0,83122 84361	- 385 89471	- 3 71185	0,38402 92243	+ 372 62095	- 2 87768
0,85	0,82736 94890	- 389 60656	- 3 68294	0,38775 54338	+ 369 74337	- 2 90425
0,86	0,82347 34234	- 393 28950	- 3 65375	0,39145 28675	+ 366 83912	- 2 93069
0,87	0,81954 05284	- 396 94325	- 3 62433	0,39512 12567	+ 363 90843	- 2 95687
0,88	0,81557 10959	- 400 56758	- 3 59462	0,39876 03430	+ 360 95156	- 2 98281
0,89	0,81156 54201	- 404 16220	- 3 56466	0,40236 98586	+ 357 96875	- 3 00854
0,90	0,80752 37981			0,40594 95461		

k	I_1^0	Diff. I.	Diff. II.	I_1^1	Diff. I.	Diff. II.
0,90	0,80752 37981	- 407 72686	- 3 53416	0,40594 95461	+ 354 96921	- 3 03394
0,91	0,80344 65295	- 411 26132	- 3 50399	0,40949 91483	+ 351 92627	- 3 05917
0,92	0,79933 39163	- 414 76531	- 3 47326	0,41301 84110	+ 348 86710	- 3 08410
0,93	0,79518 62632	- 418 23857	- 3 44232	0,41650 70820	+ 345 78300	- 3 10880
0,94	0,79100 38775	- 421 68089	- 3 41109	0,41996 49120	+ 342 67420	- 3 13322
0,95	0,78678 70686	- 425 09198	- 3 37964	0,42339 16540	+ 339 54098	- 3 15739
0,96	0,78253 61488	- 428 47162	- 3 34795	0,42678 70638	+ 336 38359	- 3 18131
0,97	0,77825 14326	- 431 81957	- 3 31602	0,43015 08997	+ 333 20226	- 3 20495
0,98	0,77393 32369	- 435 13559	- 3 28385	0,43348 29225	+ 329 99733	- 3 22834
0,99	0,76958 18810	- 438 41944	- 3 25146	0,43678 28958	+ 326 76899	- 3 25144
1,00	0,76519 76866	- 441 67090	- 3 21881	0,44005 05857	+ 323 51755	- 3 27430
1,01	0,76078 09776	- 444 88971	- 3 18598	0,44328 57612	+ 320 24325	- 3 29687
1,02	0,75633 20805	- 448 07569	- 3 15288	0,44648 81937	+ 316 94638	- 3 31916
1,03	0,75183 13236	- 451 22857	- 3 11958	0,44965 76575	+ 313 62732	- 3 34121
1,04	0,74733 90379	- 454 34815	- 3 08606	0,45279 39297	+ 310 28601	- 3 36295
1,05	0,74279 55564	- 457 43421	- 3 05236	0,45589 67898	+ 306 92306	- 3 38443
1,06	0,73822 12143	- 460 48657	- 3 01835	0,45896 60204	+ 303 53863	- 3 40561
1,07	0,73361 63488	- 463 50492	- 2 98421	0,46200 14067	+ 300 13302	- 3 42654
1,08	0,72898 12996	- 466 48913	- 2 94985	0,46500 27369	+ 296 70648	- 3 44716
1,09	0,72431 64083	- 469 43898	- 2 91526	0,46796 98017	+ 293 25932	- 3 46751
1,10	0,71962 20185	- 472 35424	- 2 88052	0,47090 23949	+ 289 79181	- 3 48757
1,11	0,71489 84761	- 475 23476	- 2 84551	0,47380 03130	+ 286 30134	- 3 50733
1,12	0,71014 61285	- 478 08027	- 2 81034	0,47666 33551	+ 282 79691	- 3 52682
1,13	0,70536 53258	- 480 89061	- 2 77501	0,47949 13245	+ 279 27609	- 3 54601
1,14	0,70055 64197	- 483 66562	- 2 73942	0,48228 40254	+ 275 72408	- 3 56491
1,15	0,69571 97635	- 486 40504	- 2 70369	0,48504 12662	+ 272 15917	- 3 58352
1,16	0,69085 57131	- 489 10873	- 2 66776	0,48776 28579	+ 268 57565	- 3 60181
1,17	0,68596 46258	- 491 77649	- 2 63166	0,49044 86144	+ 264 97384	- 3 61983
1,18	0,68104 68609	- 494 40815	- 2 59536	0,49309 83528	+ 261 35401	- 3 63754
1,19	0,67610 27794	- 497 00351	- 2 55891	0,49571 18929	+ 257 71647	- 3 65497
1,20	0,67113 27443	- 499 56242	- 2 52227	0,49828 90576	+ 254 06150	- 3 67206
1,21	0,66613 71291	- 502 08469	- 2 48546	0,50082 96726	+ 250 38944	- 3 68888
1,22	0,66111 62732	- 504 57015	- 2 44849	0,50333 35670	+ 246 70656	- 3 70538
1,23	0,65607 05717	- 507 01864	- 2 41136	0,50580 05726	+ 242 99517	- 3 72159
1,24	0,65100 03853	- 509 43000	- 2 37406	0,50823 05244	+ 239 27559	- 3 73747
1,25	0,64590 60853	- 511 80406	- 2 33662	0,51062 32603	+ 235 53612	- 3 75307
1,26	0,64078 80447	- 514 14069	- 2 29899	0,51297 86215	+ 231 78305	- 3 76834
1,27	0,63564 60379	- 516 43967	- 2 26124	0,51529 64520	+ 228 01471	- 3 78331
1,28	0,63048 22412	- 518 70091	- 2 22334	0,51757 65991	+ 224 23140	- 3 79797
1,29	0,62529 52921	- 520 92425	- 2 18529	0,51981 89131	+ 220 43343	- 3 81230
1,30	0,62008 59896	- 523 10954	- 2 14709	0,52202 32474	+ 216 62113	- 3 82635
1,31	0,61485 48942	- 525 25663	- 2 10875	0,52418 94587	+ 212 79478	- 3 84004
1,32	0,60960 23279	- 527 36538	- 2 07030	0,52631 74065	+ 208 95174	- 3 85346
1,33	0,60432 86741	- 529 43568	- 2 03169	0,52840 69539	+ 205 10128	- 3 86654
1,34	0,59903 43173	- 531 46737	- 1 99296	0,53045 79667	+ 201 23474	- 3 87931
1,35	0,59371 96436	- 533 46033	- 1 95410	0,53247 03141	+ 197 35543	- 3 89174
1,36	0,58838 50403	- 535 41443	- 1 91513	0,53444 38684	+ 193 46369	- 3 90389
1,37	0,58303 08960	- 537 32956	- 1 87603	0,53637 85053	+ 189 55980	- 3 91568
1,38	0,57765 76904	- 539 20559	- 1 83682	0,53827 41033	+ 185 64412	- 3 92718
1,39	0,57226 55445	- 541 04241	- 1 79749	0,54013 05445	+ 181 71694	- 3 93833
1,40	0,56685 51204			0,54194 77139		

k	l_k^0	Diff. I.	Diff. II.	l_k^1	Diff. I.	Diff. II.
1,40	0,56685 51204	- 542 83990	- 1 75804	0,54194 77139	+ 177 77861	- 3 94918
1,41	0,56142 67214	- 544 59794	- 1 71861	0,54372 55000	+ 173 82943	- 3 95909
1,42	0,55598 07420	- 546 31645	- 1 67885	0,54546 37943	+ 169 86974	- 3 96989
1,43	0,55051 75775	- 547 99530	- 1 63911	0,54716 24917	+ 165 89985	- 3 97976
1,44	0,54503 76245	- 549 63441	- 1 59926	0,54882 14902	+ 161 92009	- 3 98929
1,45	0,53954 12904	- 551 23367	- 1 55933	0,55044 06911	+ 157 93080	- 3 99851
1,46	0,53402 89437	- 552 79300	- 1 51929	0,55201 99991	+ 153 93229	- 4 00740
1,47	0,52850 10137	- 554 31239	- 1 47917	0,55355 93220	+ 149 92489	- 4 01595
1,48	0,52295 78908	- 555 79146	- 1 43899	0,55505 85709	+ 145 90894	- 4 02418
1,49	0,51739 99762	- 557 23045	- 1 39868	0,55651 76603	+ 141 88476	- 4 03209
1,50	0,51182 76717	- 558 62913	- 1 36834	0,55793 65079	+ 137 85267	- 4 03966
1,51	0,50624 13804	- 559 98747	- 1 31790	0,55931 50346	+ 133 81301	- 4 04690
1,52	0,50064 16057	- 561 30537	- 1 27740	0,56065 31647	+ 129 76611	- 4 05381
1,53	0,49502 84520	- 562 58277	- 1 23682	0,56195 08258	+ 125 71230	- 4 06039
1,54	0,48940 26248	- 563 81959	- 1 19620	0,56320 79488	+ 121 65191	- 4 06662
1,55	0,48376 44284	- 565 01579	- 1 16549	0,56442 44679	+ 117 58529	- 4 07257
1,56	0,47811 42705	- 566 17128	- 1 11474	0,56560 03208	+ 113 51272	- 4 07812
1,57	0,47245 25577	- 567 28602	- 1 07394	0,56673 54480	+ 109 43460	- 4 08339
1,58	0,46677 96975	- 568 35996	- 1 03307	0,56782 97940	+ 105 35121	- 4 08829
1,59	0,46109 60979	- 569 39303	- 99216	0,56888 33061	+ 101 26292	- 4 09289
1,60	0,45540 21676	- 570 38519	- 95123	0,56989 59353	+ 97 17003	- 4 09714
1,61	0,44969 83157	- 571 33642	- 91022	0,57086 76356	+ 93 07289	- 4 10104
1,62	0,44398 49515	- 572 24664	- 86920	0,57179 83645	+ 88 97185	- 4 10463
1,63	0,43826 24851	- 573 11584	- 82814	0,57268 80830	+ 84 86722	- 4 10788
1,64	0,43253 13267	- 573 94398	- 78704	0,57353 67552	+ 80 75934	- 4 11079
1,65	0,42679 18869	- 574 73102	- 74592	0,57434 43486	+ 76 64855	- 4 11337
1,66	0,42104 45767	- 575 47894	- 70477	0,57511 08341	+ 72 53518	- 4 11561
1,67	0,41528 98073	- 576 18171	- 66361	0,57583 61859	+ 68 41957	- 4 11753
1,68	0,40952 79902	- 576 84532	- 62244	0,57652 03816	+ 64 30201	- 4 11909
1,69	0,40375 95307	- 577 46776	- 58121	0,57716 34020	+ 60 18295	- 4 12034
1,70	0,39798 48594	- 578 04897	- 54003	0,57776 52315	+ 56 06261	- 4 12124
1,71	0,39220 43697	- 578 58900	- 49881	0,57832 58576	+ 51 94137	- 4 12181
1,72	0,38641 84797	- 579 08781	- 45758	0,57884 52713	+ 47 81956	- 4 12205
1,73	0,38062 76016	- 579 54539	- 41636	0,57932 34669	+ 43 69751	- 4 12195
1,74	0,37483 21477	- 579 96175	- 37515	0,57976 04420	+ 39 57556	- 4 12151
1,75	0,36903 25302	- 580 33690	- 33394	0,58015 61976	+ 35 45405	- 4 12076
1,76	0,36322 91612	- 580 67084	- 29273	0,58051 07381	+ 31 33329	- 4 11964
1,77	0,35742 24528	- 580 96357	- 25155	0,58082 40710	+ 27 21365	- 4 11822
1,78	0,35161 28171	- 581 21512	- 21037	0,58109 62075	+ 23 09543	- 4 11644
1,79	0,34580 06659	- 581 42549	- 16921	0,58132 71618	+ 18 97899	- 4 11434
1,80	0,33998 64110	- 581 59470	- 12809	0,58151 69517	+ 14 86465	- 4 11192
1,81	0,33417 04640	- 581 72279	- 8697	0,58166 55982	+ 10 75273	- 4 10914
1,82	0,32835 32361	- 581 80976	- 4591	0,58177 31255	+ 6 64359	- 4 10695
1,83	0,32253 51385	- 581 85567	- 486	0,58183 95614	+ 2 43764	- 4 10261
1,84	0,31671 65518	- 581 86053	+ 3615	0,58186 49368	- 1 56507	- 4 09885
1,85	0,31089 79765	- 581 82438	+ 7711	0,58184 92861	- 5 66392	- 4 09476
1,86	0,30507 97327	- 581 74727	+ 11805	0,58179 26469	- 9 75668	- 4 09035
1,87	0,29926 22600	- 581 62922	+ 15892	0,58169 60601	- 13 84903	- 4 08557
1,88	0,29344 59678	- 581 47030	+ 19976	0,58155 65698	- 17 93460	- 4 08051
1,89	0,28763 12648	- 581 27054	+ 24052	0,58137 72238	- 22 01511	- 4 07509
1,90	0,28181 85594			0,58115 70727		

k	I_0^0	Diff. I.	Diff. II.	I_1^1	Diff. I.	Diff. II.
1,90	0,28181 85594	— 581 03002	+ 28126	0,58115 70727	— 26 09020	— 4 06936
1,91	0,27600 82592	— 580 74876	+ 32192	0,58089 61707	— 30 16556	— 4 06332
1,92	0,27020 07716	— 580 42684	+ 36251	0,58059 45761	— 34 22284	— 4 05689
1,93	0,26439 65032	— 580 06433	+ 40306	0,58025 23467	— 38 27973	— 4 05018
1,94	0,25859 58599	— 579 66127	+ 44352	0,57986 95494	— 42 32991	— 4 04313
1,95	0,25279 92472	— 579 21775	+ 48391	0,57944 02508	— 46 37304	— 4 03576
1,96	0,24700 70697	— 578 73384	+ 52424	0,57898 25199	— 50 40880	— 4 02807
1,97	0,24121 27813	— 578 20960	+ 56447	0,57847 84319	— 54 43667	— 4 02005
1,98	0,23543 76353	— 577 64513	+ 60464	0,57793 40632	— 58 45692	— 4 01170
1,99	0,22966 11840	— 577 04049	+ 64471	0,57734 94940	— 62 46862	— 4 00306
2,00	0,22389 07791	— 576 39578	+ 68470	0,57672 48078	— 66 47168	— 3 99407
2,01	0,21812 68213	— 575 71108	+ 72458	0,57606 00910	— 70 46575	— 3 98476
2,02	0,21236 97105	— 574 98650	+ 76439	0,57535 54335	— 74 45052	— 3 97515
2,03	0,20661 98455	— 574 22211	+ 80409	0,57461 09283	— 78 42567	— 3 96522
2,04	0,20087 76244	— 573 41802	+ 84370	0,57382 66716	— 82 39089	— 3 95495
2,05	0,19514 84442	— 572 57432	+ 88318	0,57300 27627	— 86 34584	— 3 94439
2,06	0,18941 77010	— 571 69114	+ 92259	0,57213 93043	— 90 29023	— 3 93351
2,07	0,18370 07896	— 570 76855	+ 96185	0,57123 64020	— 94 22374	— 3 92230
2,08	0,17799 31041	— 569 80670	+ 1 00102	0,57029 41646	— 98 14604	— 3 91080
2,09	0,17229 50371	— 568 80568	+ 1 04008	0,56931 27042	— 102 06684	— 3 89989
2,10	0,16660 69803	— 567 76560	+ 1 07900	0,56829 21358	— 105 95582	— 3 88968
2,11	0,16092 93243	— 566 68660	+ 1 11781	0,56723 25776	— 109 84265	— 3 87440
2,12	0,15526 24583	— 565 56879	+ 1 15650	0,56613 41511	— 113 71705	— 3 86166
2,13	0,14960 67704	— 564 41229	+ 1 19503	0,56499 69806	— 117 57871	— 3 84858
2,14	0,14396 26475	— 563 21726	+ 1 23346	0,56382 11935	— 121 42729	— 3 83524
2,15	0,13833 04749	— 561 98380	+ 1 27174	0,56260 69206	— 125 26253	— 3 82156
2,16	0,13271 06369	— 560 71206	+ 1 30990	0,56135 42953	— 129 08409	— 3 80759
2,17	0,12710 35163	— 559 40216	+ 1 34789	0,56006 34544	— 132 89168	— 3 79333
2,18	0,12150 94947	— 558 05427	+ 1 38576	0,55873 45376	— 136 68501	— 3 77876
2,19	0,11592 89520	— 556 66851	+ 1 42347	0,55736 76875	— 140 46377	— 3 76388
2,20	0,11036 22669	— 555 24504	+ 1 46183	0,55596 30498	— 144 22765	— 3 74871
2,21	0,10480 98165	— 553 78401	+ 1 49845	0,55452 07733	— 147 97636	— 3 73327
2,22	0,09927 19764	— 552 28556	+ 1 53569	0,55304 10097	— 151 70963	— 3 71748
2,23	0,09374 91208	— 550 74987	+ 1 57279	0,55152 39134	— 155 42711	— 3 70146
2,24	0,08824 16221	— 549 17708	+ 1 60973	0,54996 96423	— 159 12857	— 3 68509
2,25	0,08274 98513	— 547 56735	+ 1 64649	0,54837 83566	— 162 81366	— 3 66848
2,26	0,07727 41778	— 545 92086	+ 1 68309	0,54675 02200	— 166 48214	— 3 65155
2,27	0,07181 49692	— 544 23777	+ 1 71953	0,54508 53986	— 170 13369	— 3 63434
2,28	0,06637 25915	— 542 51824	+ 1 75577	0,54338 40617	— 173 76893	— 3 61685
2,29	0,06094 74091	— 540 76247	+ 1 79187	0,54164 63814	— 177 38488	— 3 59907
2,30	0,05553 97844	— 538 97060	+ 1 82776	0,53987 25392	— 180 98395	— 3 58102
2,31	0,05015 00784	— 537 14284	+ 1 86347	0,53806 26931	— 184 56497	— 3 56268
2,32	0,04477 86500	— 535 27937	+ 1 89901	0,53621 70434	— 188 12765	— 3 54405
2,33	0,03942 58563	— 533 38036	+ 1 93437	0,53433 57669	— 191 67170	— 3 52516
2,34	0,03409 20527	— 531 44599	+ 1 96951	0,53241 90499	— 195 19686	— 3 50601
2,35	0,02877 75928	— 529 47648	+ 2 00448	0,53046 70813	— 198 70287	— 3 48654
2,36	0,02348 28280	— 527 47200	+ 2 03924	0,52848 00526	— 202 18941	— 3 46684
2,37	0,01820 81080	— 525 43276	+ 2 07381	0,52645 81585	— 205 65625	— 3 44694
2,38	0,01295 37804	— 523 35895	+ 2 10819	0,52440 15960	— 209 10300	— 3 42661
2,39	0,00772 01909	— 521 25076	+ 2 14234	0,52231 05651	— 212 52968	— 3 40611
2,40	0,00250 76833			0,52018 52682		

k	l_k^0	Diff. I.	Diff. II.	l_k^1	Diff. I.	Diff. II.
2,40	+ 0,00250 76833	- 519 10812	+ 2 17650	0,52018 52682	- 215 93579	- 3 38529
2,41	- 0,00268 34009	- 516 93212	+ 2 21006	0,51802 59103	- 219 32108	- 3 36424
2,42	- 0,00785 27221	- 514 72206	+ 2 24357	0,51588 26995	- 222 66532	- 3 34295
2,43	- 0,01299 99427	- 512 57849	+ 2 27692	0,51360 58463	- 226 02827	- 3 32138
2,44	- 0,01812 47276	- 510 20157	+ 2 31001	0,51134 55636	- 229 34965	- 3 29957
2,45	- 0,02322 67433	- 507 89156	+ 2 34289	0,50905 20671	- 232 64922	- 3 27749
2,46	- 0,02830 66589	- 505 54867	+ 2 37557	0,50672 55749	- 236 92671	- 3 25516
2,47	- 0,03356 11456	- 503 17310	+ 2 40800	0,50436 63078	- 239 18187	- 3 23258
2,48	- 0,03839 28766	- 500 76510	+ 2 44021	0,50197 44891	- 242 41445	- 3 20976
2,49	- 0,04340 05276	- 498 32498	+ 2 47220	0,49955 03446	- 246 62421	- 3 18669
2,50	- 0,04888 37765	- 495 85269	+ 2 50394	0,49709 41025	- 248 81090	- 3 16336
2,51	- 0,05334 23034	- 493 34875	+ 2 53646	0,49460 59935	- 251 97426	- 3 13981
2,52	- 0,05827 57909	- 490 81329	+ 2 56675	0,49208 62509	- 255 11407	- 3 11601
2,53	- 0,06318 39238	- 488 24654	+ 2 59777	0,48955 51102	- 258 23008	- 3 09198
2,54	- 0,06806 63892	- 485 64877	+ 2 62858	0,48695 28094	- 261 32206	- 3 06769
2,55	- 0,07292 28769	- 483 02019	+ 2 65914	0,48435 95888	- 264 38975	- 3 04321
2,56	- 0,07775 30788	- 480 36105	+ 2 68944	0,48169 56913	- 267 43296	- 3 01845
2,57	- 0,08255 66893	- 477 67161	+ 2 71951	0,47902 13617	- 270 45141	- 2 99349
2,58	- 0,08733 34054	- 474 95210	+ 2 74930	0,47631 68476	- 273 44490	- 2 96831
2,59	- 0,09208 29264	- 472 20280	+ 2 77887	0,47358 23986	- 276 41321	- 2 94288
2,60	- 0,09680 49544	- 469 42393	+ 2 80817	0,47081 82665	- 279 35609	- 2 91724
2,61	- 0,10149 91937	- 466 61576	+ 2 83722	0,46802 47056	- 282 27333	- 2 89140
2,62	- 0,10616 53513	- 463 77854	+ 2 86598	0,46520 19725	- 285 16473	- 2 86529
2,63	- 0,11080 31367	- 460 91256	+ 2 89453	0,46235 03260	- 288 03002	- 2 83903
2,64	- 0,11541 22623	- 458 01803	+ 2 92277	0,45947 00248	- 290 86905	- 2 81251
2,65	- 0,11999 24426	- 455 09526	+ 2 95077	0,45656 13343	- 293 68156	- 2 78580
2,66	- 0,12454 33952	- 452 14449	+ 2 97849	0,45362 45187	- 296 46736	- 2 75887
2,67	- 0,12906 48401	- 449 16600	+ 3 00594	0,45065 98451	- 299 22623	- 2 73175
2,68	- 0,13355 65001	- 446 16006	+ 3 03313	0,44766 75828	- 301 95798	- 2 70441
2,69	- 0,13801 81007	- 443 12693	+ 3 06002	0,44464 80030	- 304 66239	- 2 67688
2,70	- 0,14244 93700	- 440 06691	+ 3 08667	0,44160 13791	- 307 33927	- 2 64915
2,71	- 0,14685 06391	- 436 98024	+ 3 11302	0,43852 79864	- 309 98842	- 2 62122
2,72	- 0,15121 98415	- 433 86722	+ 3 13907	0,43542 81022	- 312 60964	- 2 59311
2,73	- 0,15555 85137	- 430 72815	+ 3 16489	0,43230 20058	- 315 20275	- 2 56478
2,74	- 0,15986 57952	- 427 56326	+ 3 19037	0,42914 99783	- 317 76753	- 2 53630
2,75	- 0,16414 14278	- 424 37289	+ 3 21561	0,42597 23030	- 320 30383	- 2 50761
2,76	- 0,16838 51567	- 421 15728	+ 3 24053	0,42276 92647	- 322 81144	- 2 47873
2,77	- 0,17259 67295	- 417 91675	+ 3 26517	0,41954 11503	- 325 29017	- 2 44968
2,78	- 0,17677 58970	- 414 65158	+ 3 28952	0,41628 82486	- 327 73985	- 2 42047
2,79	- 0,18092 24128	- 411 36206	+ 3 31359	0,41301 08501	- 330 16032	- 2 39106
2,80	- 0,18503 60334	- 408 04847	+ 3 33735	0,40970 92469	- 332 55158	- 2 36149
2,81	- 0,18911 65181	- 404 71112	+ 3 36081	0,40638 87331	- 334 91287	- 2 33172
2,82	- 0,19316 36293	- 401 35031	+ 3 38398	0,40305 46044	- 337 24459	- 2 30184
2,83	- 0,19717 71324	- 397 96633	+ 3 40684	0,39966 21585	- 339 54643	- 2 27173
2,84	- 0,20115 67957	- 394 55949	+ 3 42942	0,39626 66942	- 341 81816	- 2 24152
2,85	- 0,20510 23906	- 391 13007	+ 3 45168	0,39284 85126	- 344 05968	- 2 21110
2,86	- 0,20901 36913	- 387 67839	+ 3 47363	0,38940 79158	- 346 27078	- 2 18054
2,87	- 0,21289 04752	- 384 20476	+ 3 49530	0,38594 52980	- 348 45132	- 2 14984
2,88	- 0,21673 25228	- 380 70946	+ 3 51662	0,38246 06948	- 350 60116	- 2 11898
2,89	- 0,22053 96174	- 377 19284	+ 3 53767	0,37895 46832	- 352 72014	- 2 08796
2,90	- 0,22431 15458			0,37542 74818		

k	I_k^0	Diff. I.	Diff. II.	I_k^1	Diff. I.	Diff. II.
2,90	- 0,22431 15458	- 373 65517	+ 3 65840	0,37542 74818	- 354 80810	- 2 05680
2,91	- 0,22804 80975	- 370 09677	+ 3 57879	0,37187 94008	- 356 86490	- 2 02551
2,92	- 0,23174 90652	- 366 51798	+ 3 59891	0,36831 07518	- 358 89041	- 1 99406
2,93	- 0,23541 42450	- 362 91907	+ 3 61868	0,36472 18477	- 360 88447	- 1 96249
2,94	- 0,23904 34357	- 359 30039	+ 3 63815	0,36111 30030	- 362 84696	- 1 93076
2,95	- 0,24263 64396	- 355 66224	+ 3 65730	0,35748 45334	- 364 77772	- 1 89893
2,96	- 0,24619 30620	- 352 00494	+ 3 67612	0,35383 67562	- 366 67665	- 1 86695
2,97	- 0,24971 31114	- 348 32882	+ 3 69464	0,35016 99897	- 368 54360	- 1 83485
2,98	- 0,25319 63996	- 344 63418	+ 3 71283	0,34648 45537	- 370 37845	- 1 80262
2,99	- 0,25664 27414	- 340 92135	+ 3 73069	0,34278 07692	- 372 18107	- 1 77027
3,00	- 0,26005 19549	- 337 19066	+ 3 74822	0,33905 89585	- 373 95134	- 1 73782
3,01	- 0,26342 38615	- 333 44244	+ 3 76545	0,33531 94451	- 375 68916	- 1 70522
3,02	- 0,26675 82859	- 329 67609	+ 3 78234	0,33156 25535	- 377 39438	- 1 67255
3,03	- 0,27005 50558	- 325 89465	+ 3 79889	0,32778 86097	- 379 06693	- 1 63974
3,04	- 0,27331 40023	- 322 09576	+ 3 81513	0,32399 79404	- 380 70667	- 1 60682
3,05	- 0,27653 49599	- 318 28063	+ 3 83103	0,32019 08737	- 382 31349	- 1 57383
3,06	- 0,27971 77662	- 314 44960	+ 3 84660	0,31636 77388	- 383 88732	- 1 54070
3,07	- 0,28286 22622	- 310 60300	+ 3 86185	0,31252 88656	- 385 42802	- 1 50750
3,08	- 0,28596 82922	- 306 74115	+ 3 87675	0,30867 45854	- 386 93552	- 1 47419
3,09	- 0,28903 57037	- 302 86440	+ 3 89134	0,30480 52302	- 388 40971	- 1 44079
3,10	- 0,29206 34377	- 298 97306	+ 3 90556	0,30092 11331	- 389 85050	- 1 40732
3,11	- 0,29505 40783	- 295 06750	+ 3 91948	0,29702 26281	- 391 25782	- 1 37372
3,12	- 0,29800 47533	- 291 14802	+ 3 93304	0,29311 00499	- 392 63154	- 1 34009
3,13	- 0,30091 62335	- 287 21498	+ 3 94627	0,28918 37345	- 393 97163	- 1 30634
3,14	- 0,30378 83833	- 283 26871	+ 3 95918	0,28524 40182	- 395 27797	- 1 27253
3,15	- 0,30662 10704	- 279 30953	+ 3 97173	0,28129 12385	- 396 55050	- 1 23864
3,16	- 0,30941 41657	- 275 33780	+ 3 98393	0,27732 57335	- 397 78914	- 1 20468
3,17	- 0,31216 75437	- 271 35387	+ 3 99583	0,27334 78421	- 398 99382	- 1 17065
3,18	- 0,31488 10824	- 267 35804	+ 4 00735	0,26935 79039	- 400 16447	- 1 13657
3,19	- 0,31755 46628	- 263 35069	+ 4 01855	0,26535 62592	- 401 30104	- 1 10238
3,20	- 0,32018 81697			0,26134 32488		

17. Untersuchungen über den Planeten Saturn, seinen Ring und seinen vierten Trabanten.*)

(Königsberger Archiv f. Naturwiss. u. Mathem. 1812. 1. Bd. p. 113.)

1.

Die Schwierigkeiten, die sich mit der Beobachtung so lichtschwacher Gegenstände als die Saturnstrabanten sind, verbinden, sind die Ursachen des geringen Fortschreitens unserer Kenntniss dieser Weltkörper. Kaum kennen wir ihre Umlaufzeiten mit einiger Genauigkeit; die Natur ihrer Bahnen blieb uns fremd, und selbst die Lage und Abstände derselben wurden von den Astronomen sehr mangelhaft bestimmt. Bei der Theorie der Satelliten, die CASSINI vor fast 100 Jahren gegeben hat, blieb es bis jetzt, einige von neueren Astronomen auf einseitige Beobachtungen gegründete und deshalb nicht gerade als Verbesserungen anzusehende Veränderungen ausgenommen; das Saturnsystem macht also einen der wenigen Punkte der Astronomie aus, deren Kenntniss das letzte Jahrhundert wenig oder gar nicht vermehrt hat, und doch ist es in mehr als einer Hinsicht interessant. — Meine Untersuchungen über diesen Gegenstand lege ich hier den Astronomen vor, theils weil wie ich glaube die Sache dadurch gewinnt, theils um dadurch neue Beobachtungen zu veranlassen, die allein zur ferneren Vervollkommnung der Theorie beitragen können.

Als ich im Jahre 1806 nach Lilienthal kam und die dortigen trefflichen Teleskope zu meiner Disposition erhielt, war es mein eifriger Wunsch Data zu sammeln zur Bestimmung der Masse des Saturns, die durch die beiden von HERSCHEL und POUND gemessenen Elongationen nicht mit Sicherheit gegeben wurde. Der verehrte SCHRÖTER theilte diesen Wunsch mit mir; er hatte selbst die Ausführung der Messungen beschlossen, die er mir jetzt überliess. Ich entwarf daher den Plan zur Messung der Abstände der Trabanten, dessen Ausführung ich unter anderen hierher gehörigen Gegenständen hier mittheile.

2.

Zuförderst war es zu entscheiden, durch welchen der Trabanten der Zweck am besten und sichersten erreicht werden konnte. Der Einfluss einer fehlerhaften

[82 d. a. V. — Ein die wesentlichsten Resultate der Beobachtungen des 4. Satelliten enthaltender Auszug findet sich: Mon. Corresp. XXIV. p. 197 (69 d. a. Verz.); s. a. Bode's Jahrb. f. 1814 p. 173 (64 d. a. Verz.). — Br. m. O. I. 45, 91, 100, 270 bis 275, 281, 287 (O.), 291.]

Messung der halben grossen Axe der Trabantenbahn auf die Masse des Planeten ist, wie man leicht findet, $= 3M \frac{a}{a}$, wenn M die Masse des Planeten, a der Abstand des Trabanten, $\mathcal{L}a$ der dabei begangene Fehler; die Masse des Planeten wird also desto sicherer bestimmt werden können, je kleiner der Quotient $\frac{\mathcal{L}a}{a}$ ist, oder, wenn der Messungsfehler bei kleinen und grossen Distanzen derselbe bleibt, durch den entferntesten Satelliten am sichersten. Die Entscheidung der Frage hängt also von der Kenntniss der Natur des Mikrometers ab; denn wenn die Fehler in einem stärkeren Verhältnisse als die gemessenen Winkel wüchsen, so würde man dem näheren Trabanten den Vorzug einräumen müssen. — Bei dem Gebrauche eines Helimeters oder eines ähnlichen Mikrometers, dessen Anwendung durch die tägliche Bewegung der Gestirne nicht erschwert wird, wird man es durch Sorgfalt und Studium des Instruments leicht dahin bringen können, die wahrscheinlichen Fehler bei kleinen und grossen Distanzen gleich zu machen; also verdient dann der entferntere Satellit unbedingt den Vorzug. Benutzt man aber ein Mikrometer, durch welches man die bewegten Bilder im Fernrohre mit unbeweglichen Gegenständen in oder ausser demselben vergleicht, so ist es ausgemacht, dass die Beobachtungen unsicherer werden, je grösser die Distanzen sind. Die wahrscheinlichen Fehler wachsen dann in einem Verhältnisse, dessen Exponent von der zweckmässigen Einrichtung des Instrumentes und der Subtilität seiner Bewegungen abhängt; hier also wird man den entfernteren Satelliten nur dann anwenden dürfen, wenn man den Exponenten kleiner als 1 schätzt. Bei der von mir angewandten Messungsmethode mögen die Fehler etwa in dem Verhältnisse der Entfernungen oder doch in einem nicht viel kleineren wachsen, und deshalb würde die Wahl willkürlich gewesen sein, wenn die Beobachtungen sämmtlich mit gleicher Leichtigkeit hätten angestellt werden können. Allein dieses war nicht der Fall; die geringe Lichtstärke der vier näheren Satelliten des Saturns stellte den genauen Messungen ihrer Abstände ein Hinderniss entgegen, welches ich fast für unübersteiglich halten möchte; der sogenannte dritte Trabant ist heller und möchte sich allenfalls mit einem lichtstarken Teleskope gut beobachten lassen; allein

ungleich leichter ist dieses bei dem vierten, dessen lebhaftes Licht ihn selbst dann hell genug erscheinen lässt, wenn Dünste, Mondschein und Dämmerung nicht verstaten, an die Messungen des dritten zu denken. Der fünfte Trabant, dessen periodischer Lichtwechsel ihn in der einen Digression sehr schwach oder gar nicht erscheinen lässt, kann auch aus diesem Grunde nicht zu der Bestimmung der Masse des Planeten benutzt werden. Ich wählte also, nachdem ich mich überzeugt hatte, dass die von mir angewandte Messungsmethode für so grosse Distanzen noch brauchbar ist, den vierten Trabanten zum Hauptgegenstande meiner Beobachtungen; später, da ich sah, wie selten die Umstände einer Messung des dritten günstig waren, erkannte ich die getroffene Wahl für nothwendig.

3.

Zur Beurtheilung meiner Beobachtungen ist es nothwendig, dass ich eine genaue Erklärung der dazu angewandten Methode und eine Beschreibung des Instruments gebe. Die einzige Messungsart, deren Ausführung mir in Lilienthal möglich war, bestand in einer Vergleichung der Distanzen, so wie das Fernrohr sie zeigte, mit bekannten, durch das unbewaffnete Auge gesehenen Angularentfernungen. Die hierzu dienende äusserst einfache Schröter'sche Vorrichtung ist zwar den Astronomen bekannt, jedoch wird eine in ein paar Worte zusammengefasste Beschreibung derselben nicht unnuß sein. Da wo das Ocular des Newton'schen Reflectors sich befindet, ist das Rohr auf beiden Seiten durchbrochen, so dass das linke Auge in horizontaler Richtung senkrecht auf die Axe des Teleskops eine freie Aussicht hat, während das rechte sich vor dem Ocular befindet. Oben auf dem Rohre des Reflectors ist eine etwa 6 Fuss lange Stange befestigt, die senkrecht auf die Axe des Teleskops horizontal in der Ebene, in welcher das linke Auge sich befindet, fortläuft, und nach den Entfernungen vom Auge in Zolle und Linien getheilt ist. An dieser Stange verschiebt sich eine Tafel, auf welcher sich die Gegenstände befinden, deren Winkel am Auge man mit dem im Teleskop gesehenen vergleichen will; entweder trägt die Tafel, wenn man sie zu Tagbeobachtungen benutzen will, eine in Quadrate von bekannter Grösse eingetheilte Scheibe; oder bei Nachtbeobachtungen ein Blech, welches mehrere Paare sehr feiner Löcher von gleichfalls bekanntem Abstände enthält, die man durch eine dahinter angebrachte Erleuchtung sichtbar macht; oder endlich eine Zeichnung des Gegenstandes den man messen will, gewöhnlich weiss auf schwarzem Grunde, so dass das

hinter der Tafel befindliche Licht ihn durchscheint. Die Operation selbst ist nun sehr einfach, obgleich in der Ausführung Uebung fordernd und etwas schwierig: man bringt die Gegenstände, deren Winkel man messen will, ins Teleskop, und verschiebt entweder die Tafel so lange, bis jene Entfernung einem bestimmten Maasse auf derselben gleich erscheint, oder man verschiebt die Tafel nicht und beobachtet dann auf ihr die Grösse des Maasses. Man erhält so zwei einander gleiche Winkel: den zwischen der Projection und dem Auge durch die Entfernung der Tafel vom Auge und die Grösse der Projection, den andern durch das unmittelbare Sehen im Fernrohre. Kennt man nun die Vergrösserung des Fernrohrs, so ist nichts leichter, als von dem ersten Winkel zu dem wahren Angularabstände der Gegenstände zurückzugehen.

4.

Um sich bei diesen Beobachtungen vor Irrthum zu schützen, muss man die Natur der Operationen, worauf sie beruhen, genauer beleuchten und daraus Vorsichtsmassregeln abstrahiren. — Ein gesundes Auge sieht Punkte nicht nur in einer bestimmten Entfernung deutlich; es finden zwei Grenzen statt, für die und für alle zwischenliegende Entfernungen es seine Brennweite einrichten kann; sind diese Grenzen φ , φ' , so ist also das Auge fähig, alle Strahlen auf der Netzhaut zu vereinigen, deren Divergenz zwischen $\frac{1}{\varphi}$ und $\frac{1}{\varphi'}$ liegt. Damit nun die Strahlen, die durch das Ocular eines Teleskops ins Auge fallen, diese Divergenzen haben, muss das Ocular, dessen Brennweite für parallele Strahlen ich k' nenne (nach einer bekannten dioptrischen Formel), von dem Bilde im Brennpunkte des Objectivs die Entfernungen

$$\frac{\varphi k'}{\varphi + k'} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi' k'}{\varphi' + k'}$$

haben. Die Vergrösserung eines Fernrohrs ist aber der Quotient, den man durch die Division der Brennweite des Objectivs k mit der Entfernung des Oculars vom Brennpunkte desselben erhält; also schwankt sie zwischen

$$\frac{k}{k'} \left\{ 1 + \frac{k'}{\varphi} \right\} \quad \text{und} \quad \frac{k}{k'} \left\{ 1 + \frac{k'}{\varphi'} \right\}$$

oder verhält sich in ihren äussersten Grenzen wie

$$1 + \frac{k'}{\varphi} : 1 + \frac{k'}{\varphi'}$$

Für mein Auge sind diese Grenzen sehr weit, denn es sieht Gegenstände in allen Entfernungen zwischen 10 Zoll und ∞ mit Deutlichkeit. Legt man dieses zum

Grunde und nimmt man, wie bei dem zu den Messungen der Abstände gebrauchten Oculare, $\lambda' = \frac{6}{7}$ Zoll, so sind die Grenzen der Vergrößerungen desselben Oculars des Reflectors, die bei vollkommener Deutlichkeit stattfinden können, in dem Verhältnisse 35:38. Wenn man dieser Fehlerquelle nicht ausweichen könnte, so würde man einen Abstand von 3' (etwa die Distanz des vierten Saturnsatelliten) einmal 172,6 und ein andermal 187,4 messen können. Indessen habe ich in der That ein Mittel gefunden, den hieraus entstehenden Irrthum zu vermeiden und die Messung unabhängig von der falschen Voraussetzung einer sich immer gleich bleibenden Vergrößerung des Fernrohrs zu erhalten.

5.

Es existirt nämlich eine gewisse Uebereinstimmung zwischen beiden Augen, nach welcher man, wenn man zwei Gegenstände, mit jedem Auge einen, zugleich deutlich sieht, den einen nicht verrücken kann, ohne die Deutlichkeit bei ihm oder bei dem andern aufzuopfern. Ich erkannte diesen Zusammenhang zwischen den beiden Augen schon bei der Bestimmung der Vergrößerungen des Teleskops, wobei es sich zeigte, dass ich, um sowohl die Projectionstafel als das Object im Fernrohre zugleich vollkommen deutlich zu sehen, das Ocular immer dann verrücken musste, wenn ich die Tafel dem Auge näherte oder sie entfernte. — Auch fand sich für eine gleiche Entfernung der Tafel immer derselbe Stand des Oculars wieder, mit einer ungleich grösseren Genauigkeit, als ich ihn zu erhalten pflegte, wenn ich das linke Auge verschloss und die Projectionstafel nicht zum Vergleichungspunkte benutzte.

Es ergibt sich hieraus nun die Möglichkeit, die Vergrößerung eines Fernrohrs unabhängig von der zufälligen Constitution des Auges für parallel aus dem Ocular ausgehende Strahlen zu bestimmen, selbst für einen Beobachter, dessen Augen ihm Gegenstände, die ihm parallele Strahlen zusenden, nicht deutlich zeigen. Um dieses, und damit zugleich die Art, wie die Vergrößerungen wirklich bestimmt wurden, näher zu entwickeln, nehme ich in der Entfernung D vom Spiegel des Teleskops einen Gegenstand an, dessen Länge $= K$; auf der in der Entfernung d vom Auge befindlichen Projectionstafel nimmt er, nachdem das Ocular auf die angegebene Weise gestellt ist, die Länge k ein; $m = \frac{K}{k}$ sei die Vergrößerung für parallel auf den Spiegel und eben so wieder durch das Ocular fallende Strahlen. Dieses vorausgesetzt haben die Strahlen, die das Auge aus dem Ocular empfängt, dieselbe

Divergenz mit den von der Tafel kommenden; der Abstand des Oculars vom Bilde im Brennpunkte des Spiegels ist also

$$\frac{\lambda'd}{d+\lambda} = \lambda;$$

ferner die Brennweite des Spiegels für die Entfernung D

$$= \frac{\lambda D}{D-\lambda} = \lambda;$$

folglich die scheinbare Vergrößerung

$$m = \frac{\lambda}{k}; \quad m = m \left\{ \frac{D}{D-\lambda} \cdot \frac{d+\lambda}{d} \right\}.$$

Da aber, den Winkel am Spiegel μ gesetzt,

$$2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \mu = \frac{K}{D}; \quad 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} m, \mu = \frac{k}{d}$$

so ergibt sich hieraus nach einer leichten Reduction

$$m = \frac{k}{d} \cdot \frac{D-1}{K} - \frac{1}{d} - \frac{m}{12} \left(\frac{k}{d} \right)^2$$

wo das letzte Glied gewöhnlich wird vernachlässigt werden dürfen. Ist $D = \infty$, wie bei den astronomischen Anwendungen der Projectionsmessungen, so erhält man

$$\mu = \frac{k}{md+\lambda} - \frac{m}{12} \left(\frac{k}{d} \right)^2$$

Es ist nun klar, dass nach dieser Art die Beobachtungen anzustellen und zu berechnen der Einfluss der Augen eliminiert wird; dass sowohl kurz- als weitsichtige Personen eine gleiche Bestimmung der Vergrößerung m und bei ihrer Anwendung gleiche Winkel erhalten; und dass selbst eine ursprüngliche Ungleichheit beider Augen, wenn sie existiren sollte, unschädlich ist, so lange der Beobachter nur von seiner eigenen Bestimmung von m Gebrauch macht. Man sieht zugleich, wie wesentlich heiterer Himmel und ein reines Bild des zu messenden Gegenstandes sind; bei grösseren Distanzen weit mehr wegen der Ungewissheit in der Stellung des Oculars, die durch die Undeutlichkeit erzeugt werden kann, als wegen des directen Einflusses der Undeutlichkeit auf die Messung. Die Basis, auf welche man bei den Projectionsmessungen baut, ist die Brennweite des Oculars; ist diese in irgend einem Verhältnisse unsicher, so ist es die Vergrößerung und die Messung der Winkel in einem gleichen. Man wird aus diesem Grunde die auseinander gesetzte Methode, sowie Alles, was dazu beitragen kann dem Ocular den richtigen Stand zu geben, nicht für überflüssig halten. — Ausser der hierauf zu verwendenden Sorgfalt muss man noch Acht haben, dass beide Augen immer gleichweit von der Axe des Rohres abstehen.

6.

Das Teleskop, welches ich zu meinen Messungen der Abstände des vierten Trabanten benutzte, ist ein 15füßiger Gefken'scher Reflector von vorzüglicher Güte, der eine sehr gute Maschinerie besitzt und sich so schnell und leicht bewegen lässt, dass es nicht sehr schwierig ist, einen Stern einige Zeit im Sehelfelde relativ ruhend zu erhalten. Zu dem Reflector gehören zwei Spiegel, deren erster, obgleich er anfangs sehr vollkommen war, im Frühjahr 1806 anfang, seine Figur etwas zu verändern und die Bilder nicht immer vollkommen deutlich zu zeigen. Herr Justizrath SCHRÖTER, der der Ursache davon nachspürte, entdeckte sie in der nicht hinlänglichen Dicke des Metalls, die eine Biegung verursacht hatte, und gleich trug er dem Opticus GEFKEN die Verfertigung eines neuen Spiegels auf, der am 9. Juli 1806 den Platz des alten einnahm und der als das Meisterstück seines Verfertigers angesehen werden kann. Mit ausserordentlicher Lichtstärke vereinigte das 15füßige Teleskop von nun an die vollkommenste Deutlichkeit; schwerlich möchte mehr als einmal seines Gleichen in der Welt existiren. Die Focallänge des alten Spiegels war genau 1 Zoll kürzer als die des neuen, weshalb denn die Vergrößerungen nach dem 9. Juli 1806 etwas stärker wurden als vorher.

Zu einigen Messungen des Durchmessers des Ringes benutzte ich ein 7füßiges Herschel'sches Teleskop, welches gut genannt zu werden verdient, obgleich es natürlich nicht mit dem 15füßigen Reflector verglichen werden darf.

Aus sehr vielen nach der angegebenen Methode berechneten, schön harmonirenden terrestrischen Beobachtungen ergeben sich die Vergrößerungen

I. des 15füßigen Refl. vor 9. Juli 1806 nach 9. Juli 1806
schwächeres Ocular 139,97 140,80
stärkeres " 298,72 300,50

II. des 7füß. Herschel'schen
Telescop's gebr. Ocular 317,07 mal.

Es wurde bei diesen Bestimmungen die Vorsicht gebraucht, sowohl helle Objecte auf dunklem Grunde, als dunkle auf hellem zu beobachten, um dadurch die Unsicherheit aufzuheben, welche aus der Irradiation entstehen könnte, deren Einfluss ich jedoch nirgends bemerkte.

7.

Da es unmöglich war, den Abstand des Trabanten vom Mittelpunkte des Saturns unmittelbar zu messen, so hätte ich gewünscht, die Distanzen von beiden Ansen messen zu können. Indess fand ich die Observa-

tion der Entfernung von der entfernteren Anse so schwierig, dass ich darauf Verzicht leisten und mich mit der näheren allein begnügen musste. Um indess die Unsicherheit wegen des Durchmessers des Ringes, die bei dieser Beobachtungsart ihren vollen Einfluss äussern musste, zu heben, beobachtete ich gleichzeitig mit den Distanzen eine Reihe von Durchmessern, mit denselben Teleskopen und nach derselben Methode. — Die meisten dieser Messungen fielen in die Zeit der sehr hellen Dämmerung, andere wurden später in der Nacht gemacht.

Beobachtete Distanzen vom nächsten Punkte des Ringes.

M. Z. Paris.		Distanz	Beobh.	
1806 Mai	10.	10 ^b 25 ^m	165,94	2
"	18.	10 35	164,21	2
"	19.	10 13	173,75	2
"	26.	9 18	164,44	2
"	27.	10 13	160,68	2
Juni	12.	10 18	154,76	2
Juli	4.	10 25	136,54	2
"	5.	10 17	154,19	4
1807 April	25.	11 47	131,52	3
"	26.	12 5	166,88	3
Mai	5.	12 48	165,75	1
"	20.	10 16	156,59	2
"	22.	11 36	147,07	2
1808 Mai	30.	10 24 ^l	170,39	2

Beobachtete Durchmesser des Ringes.

1806 Mai	10. ... 46,19 ... 2	Beobh.	15füßiger Gefken'scher Reflector.
"	16. ... 45,60 ... 1	"	
"	28. ... 46,32 ... 1	"	
Juni	9. ... 45,12 ... 1	"	Alter Spiegel m = 298,72
"	10. ... 43,77 ... 1	"	
Juli	5. ... 42,45 ... 1	"	7füßiger Herschel'scher Reflector.
1806 Juni	12. ... 44,85 ... 2	"	
"	13. ... 43,04 ... 1	"	
"	14. ... 43,93 ... 1	"	
"	18. ... 43,76 ... 1	"	m = 317,07
"	28. ... 40,86 ... 1	"	
1806 Juli	12. ... 40,01 ... 1	"	15füßiger Gefken'scher Reflector.
"	15. ... 40,97 ... 2	"	
"	16. ... 40,73 ... 1	"	

Meine Lilienthaler Tagebücher enthalten ausser diesen noch zwei Beobachtungen, um die Zeit angestellt, da sich der Trabant in der Nähe der kleinen Axe seiner scheinbaren Bahn befand. Sie sind dort mit einer ihnen nachtheiligen Bemerkung begleitet, indem ich sie sehr schwierig fand, und nachdem sich wirklich zu Stande gebracht waren, doch nicht für ganz sicher hielt.

1807 Juni 26, $9^{\text{h}} 54^{\text{m}} 26^{\text{s}}$ m. Z. Paris. Abstand v. d. 6^{ten}. Henkelspitze
= $45^{\circ} 70'$, 3 Beob.

1808 Mai 2, $10^{\text{h}} 55^{\text{m}}$ m. Z. Paris. Abstand v. d. 6^{ten}. Henkelspitze
= $70^{\circ} 72'$, 2 Beob.; vom Südpole = $64^{\circ} 06'$, 2 Beob.

8.

Im Jahre 1808 war die Witterung teleskopischen Beobachtungen äusserst ungünstig; 1809 zogen andere Geschäfte meine Aufmerksamkeit vom Saturn ab; 1810 hatte ich Lilienthal verlassen und befand mich in Königsberg ohne Instrumente. — Allein 1811 konnte der Planet hier wieder beobachtet und mit einem zwar kleinen, aber schönen Dollond'schen Heliometer gemessen werden. Dieses Instrument gehört zu einem auf einem Aequatoraal befindlichen 16zölligen Fernrohre und ist weit besser als seine geringe Dimension vermuthen lässt; ich glaube, dass die Summe aller Fehler eines damit gemessenen Winkels nicht $1''$ überschreiten kann. Folgende sind die damit angestellten Messungen:

	Grosse	Kleine	Achse des Ringes.	
1811 Mai 14.	$39^{\circ} 66'$	$17^{\circ} 91'$	4 Beob.
„ 18.	$39,87$	$17,97$	4 „
„ 21.	$39,62$	$18,00$	2 „
Juni 5.	$39,71$	$17,63$	2 „
„ 8.	$40,50$	$19,18$	2 „
„ 11.	$40,85$	$18,78$	2 „

Unter ausgezeichnet günstigen Umständen wurden die Beobachtungen vom 14., 18. und 21. Mai gemacht. Die kleine Axe des Ringes wurde am 8. Juni so gemessen, dass ich bestimmt überzeugt war, sie sei nicht grösser; bei dieser Beobachtung hatte ich weniger die Erfindung der wahren Länge der kleinen Axe im Sinne, als die Bestimmung einer Grenze, über welche sie nicht hinausgeht.

Zu bedauern ist es, dass das erwähnte Heliometer nicht lichtstark genug ist, um damit die Distanz des vierten Trabanten messen zu können; ich würde mir von seiner Genauigkeit gute Resultate versprochen haben.

9.

Ehe ich zu der Benutzung dieser Beobachtungen und anderer übergehe, erlaube ich mir einige Bemerkungen über die bis jetzt angenommene Neigung der Ringebene gegen die Ekliptik.*) Man gründete die allgemein angenommene Neigung = $31^{\circ} 20'$ mehr auf eine Voraussetzung MARALDI'S, als auf wirkliche Beobachtungen. In der That sagt jener Astronom nirgends, dass er die

*) [Vgl. d. betr. Abhandlung unter: II. Sphärische Astronomie (215 d. a. Verz.)]

Neigung so gefunden habe; in den Mém. de l'Académie des Sciences für 1716 kommen nur zwei hierhergehörige Stellen vor; zuerst spricht MARALDI von der Neigung gegen die Ekliptik „que nous supposons de $31^{\circ} 20'$ “; dann von der Neigung gegen die Saturnsbahn „qu'on suppose de $30'$ “. Auf diese Autorität nimmt LALANDE die Neigung an und führt zur Bestätigung die von HEINSIUS gefundene $31^{\circ} 23' 17''$ an, die aber nichts anderes ist, als das Resultat einer genaueren Berechnung der anderen Maraldi'schen Voraussetzung. Dagegen behauptete HALLEY noch in den Philos. Transactions 1718 bestimmt, dass die Ebene des Saturnringes unserm Aequator nahe parallel sei. HUYGENS hatte dieselbe Meinung auf eigene Beobachtungen gegründet, allein am 7. August 1668 fand er die Neigung der grossen Axe der Ellipse gegen unsern Aequator ohngefähr = 9° und daraus die Neigung der Ebene gegen die Ekliptik = 31° ; ferner bemerkte CAMPANI im Juli 1664, dass die grosse Axe des Ringes das Doppelte der kleinen war und aus dieser Wahrnehmung zog man ohngefähr dasselbe Resultat. — Die letzten Angaben kenne ich aus den Philosophical Transactions Nr. 45, ohne von ihrem Detail unterrichtet zu sein; es bleibt mir sogar zweifelhaft, ob CAMPANI eine wirkliche Messung anstellte oder nur nach dem Augenmaass schätzte. Da ich nun nirgends etwas Bestimmteres über die Neigung finde, so vermute ich, dass diese beiden Angaben der Maraldi'schen Aeusserung zum Grunde liegen; auf jeden Fall aber wird man zugeben, dass MARALDI'S Voraussetzung die Ehrfurcht nicht verdient, die man ihr dadurch erwies, dass man sie 100 Jahre ungeprüft liess. Noch mehr! HUYGEN'S Beobachtung gibt eine ganz andere Neigung, als man daraus ableitete; der geocentrische Ort des Saturns war nämlich: $308^{\circ} 43' 11''$, — $0^{\circ} 55' 53''$; der Positionswinkel $15^{\circ} 17' 9''$ und hieraus der Winkel der grossen Axe gegen die Ekliptik

$$= 24^{\circ} 17' 9''.$$

Verbindet man dieses mit der Länge des Knotens = $165^{\circ} 23' 21''$, so wie meine Untersuchungen sie geben, so erhält man die Neigung

$$= 29^{\circ} 29' 28''$$

und nicht 31° , wie man berechnete. HALLEY'S bestimmte Behauptung und HUYGEN'S Beobachtung stimmen also für eine kleinere Neigung, und es scheint mir, dass sie CAMPANI'S Angabe weit überwiegen, indem die Kunst kleine Winkel zu messen im Jahre 1664 noch nicht so vervollkommen war, um des Resultats bis auf einige Grade sicher sein zu können. Es scheint also, dass MARALDI'S Annahme nur durch ein Missverständ-

niss, ohne hinlängliche Prüfung ausgehalten zu haben, in unseren astronomischen Werken erhalten worden ist.

Die Länge der Knotenlinie, auf der Saturnsbahn gerechnet, ist durch die Verschwindungen und Wiedererscheinungen des Ringes mit ziemlich grosser Sicherheit bestimmt; nicht so ist es mit der Knotenlinie auf der Ekliptik, die von der Neigung der Bahn mehr abhängt und mit ihr unsicher ist.

10.

Meine eigenen Beobachtungen im Jahre 1811 fallen in die Zeit der grössten Öffnung des Ringes und sind deshalb geschickt, die Neigung seiner Ebene anzugeben. Reducirt man diese Beobachtungen auf die mittlere Entfernung des Saturns, so verwandeln sich die Art. 8 angegebenen Zahlen in folgende:

Mai	14.	38,20	...	17,25	...	4	Beobb.
"	18.	38,37	...	17,29	...	4	"
"	21.	37,93	...	17,23	...	2	"
"	22.	38,74	...	17,67	...	1	"
Juni	5.	37,70	...	16,74	...	2	"
"	8.	38,42	...	18,20	...	2	"
"	11.	38,73	...	17,81	...	2	"

Das Mittel aus diesen Messungen, mit Rücksicht auf die Anzahl der Beobachtungen, die einer jeden zum Grunde liegen, gibt den wahren Durchmesser des Ringes in der mittlern Entfernung des Saturns

$$= 38,2694 \dots 17 \text{ Beobb.}$$

Da die Messungen der kleinen Axe der Ellipse die Neigung der Ebene nicht direct, sondern nur unter der Voraussetzung der bekannten Knotenlänge angeben können, so verband ich die Untersuchung dieser beiden Elemente mit einander und erhielt zum Resultate

$$\text{Neigung der Ringebene gegen die Ekliptik} = 28^{\circ} 34' 6''$$

$$\text{Länge des Knotens für den 1. Januar 1800} = 166 52 11$$

$$\text{Jährliche Bewegung} \dots \dots \dots = + 40,57$$

Hieraus ergibt sich die Lage der Ebene gegen die Saturnsbahn:

$$\text{Neigung} = 27^{\circ} 12' 26'' + 0,52 (t - 1800)$$

$$\text{Knotenlinie} = 170 49 54 + 41,00 (t - 1800)$$

wobei t das zugehörige Jahr bedeutet. Ich darf es kaum erwähnen, dass die jährliche Aenderung der Neigung nur eine Folge der vorausgesetzten unveränderlichen Neigung gegen die Ekliptik und nur beigefügt ist, um beide Angaben immer übereinstimmend zu erhalten.

11.

Die beobachteten Verschwindungen und Wiedererscheinungen des Ringes, die hierbei benutzt wurden, waren folgende:

- 1) 1714 October 13. 0^h verschwand der Ring, indem die Erde seine erleuchtete Südseite verliess und in die dunkle Nordseite überging.
(MARALDI, Mém. 1715 und 1716. Am 12. October Morgens war der Ring noch sichtbar, allein am 14. war er verschwunden.)
- 2) 1715 Februar 10. 0^h erschien er wieder, indem die Sonne nun anfang, seine Nordseite zu erleuchten.
(MARALDI *ibid.* Der Ring, der seit dem 1. nicht beobachtet werden konnte, war am 10. sehr schwach sichtbar.)
- 3) 1715 März 23. 0^h zweite Verschwindung. δ von Norden nach Süden.
(MARALDI *ibid.* Am 22. sah man noch eine Anse, allein am 23. war auch diese verschwunden.)
- 4) 1715 Juli 11. 0^h zweite Erscheinung. δ von Süden nach Norden.
(MARALDI *ibid.* Am 11. war der Planet ohne Anse, am 12. nicht mehr.)
- 5) 1773 October 11. 6^h erfolgten die Erscheinungen
- 6) 1774 Januar 10. 0^h auf dieselbe Art u. in ders.
- 7) 1774 April 4. 0^h Ordnung wie 1714 und 1715.
- 8) 1774 Juli 1. 9^h MESSIER, Mém. de Berlin 1776. (1773 October 11 Morgens war der Ring noch sichtbar, den 12. aber nicht mehr. — 1774 Januar 11 Morgens waren die Ansen schon erschienen, obgleich sehr schwach. — 1774 April 3 Abends waren die Ansen noch sichtbar, am 5. nicht mehr. — 1774 Juni 30 Abends war der Ring noch unsichtbar, allein Tags darauf erschien er sehr schwach.)
- 9) 1789 Mai 6. 0^h erste Verschwindung. δ von Norden nach Süden.
(FLAUGERGUES, Nova Acta Petrop. VIII. Die Verschwindung fand zwischen dem 5. und 7. statt.)
- 10) 1789 August 28. 10^h 30^m erste Wiedererscheinung. δ von Süden nach Norden.
- 11) 1789 October 6. 0^h zweite Verschwindung. \odot von Norden nach Süden.
- 12) 1790 Januar 29. 6^h 15^m zweite Wiedererscheinung. δ von Norden nach Süden.
(10–12 sind unmittelbar vom Beobachter angegebene Momente. FLAUGERGUES *ibid.*)
- 13) 1802 December 20. 16^h erste Verschwindung. δ von Süden nach Norden.
(MÉCHAIN, Mon. Corresp. VIII. p. 188.)
- 14) 1803 Januar 3. 13^h 30^m erste Wiedererscheinung. δ von Norden nach Süden.
(SCHRÖTER und HARDING, Kronogr. Fragmente p. 209.)

- 15) 1803 Juni 16. 9^h 30^m zweite Verschwindung. ☉
von Süden nach Norden.
(SCHRÖTER und HARDING, Kronogr. Fragmente
p. 209.)

Ich weiss, dass noch mehrere ähnliche Beobachtungen der Durchgänge der Erde oder Sonne durch die Ebene zwischen 1729 und 1760 vorhanden sind, allein mir wurden sie nicht bekannt.

12.

Unter der Voraussetzung, dass beide Seiten des Ringes parallel sind und seine Dicke so gering ist, dass er für die zu seinen Beobachtungen gebrauchten Fernrohre verschwindet, wenn nicht von seinen Seitenflächen Licht ins Auge des Beobachters gesandt wird, wird man angeben können, auf welcher Seite der Ebene die Erde oder Sonne im Augenblicke einer Verschwindung oder Wiedererscheinung stehen muss. Unter derselben Voraussetzung wird zwar der Elevationswinkel über dieser Seite desto kleiner, je vollkommener das zur Beobachtung gebrauchte Fernrohr ist; allein die Grenze 0 kann er nicht überschreiten, oder der Ring kann nicht gesehen werden, wenn die Erde schon unter der erleuchteten Seite steht; — den 13. October 1714 z. E. muss in der gemachten Voraussetzung bei der Verschwindung des Ringes die Erde noch über der südlichen Seite der Ringebene gewesen sein. Ob diese Voraussetzung, die bisher allen Rechnungen zum Grunde lag, erlaubt ist oder nicht, darüber können uns die Beobachtungen selbst belehren; ist sie es, so muss sich eine Ebene angeben lassen, die, wenn man aus ihrer Lage die Elevationen der Erde oder Sonne berechnet, wirklich für den erwähnten Fall eine südliche, für den zweiten, dritten, vierten eine nördliche u. s. w. gibt; findet man dagegen, dass sich eine solche Ebene nicht angeben lässt, so wird man daraus die Unstatthaftigkeit der Voraussetzung erkennen, und dann wird der Zweck der Rechnung sein, die Ebene zu erfinden, welche den Beobachtungen so nahe als möglich Genüge leistet.

Ich halte es für nicht das uninteressanteste Resultat meiner Untersuchungen, dass sie die Unrechtmässigkeit der Voraussetzungen erwiesen haben, wie dieses die folgende Vergleichung darthut:

1714 October 13.	— 530" ± —
1715 Februar 10.	+ 231 ☉ +
März 23.	— 457 ± +
Juli 11.	— 252 ± +
1773 October 11.	+ 651 ± —
1774 Januar 10.	+ 264 ☉ +

1774 April	4.	+ 119" ± +
Juli	1.	+ 173 ± +
1789 Mai	6.	— 546 ± +
August 26.	+ 237 ± +	
October 6.	+ 66 ☉ +	
1790 Januar 29.	— 105 ± —	
1802 December 20.	— 96 ± —	
1803 Januar 3.	— 173 ± —	
Juni 16.	— 284 ☉ —	

In der ersten Spalte finden sich die Breiten der Erde oder der Sonne über der Ebene, deren Lage ich oben angegeben habe und die so bestimmt wurde, dass die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Breiten so klein als möglich ist; die zweite enthält die Zeichen der Breiten, wie sie im Fall der Rechtmässigkeit der Voraussetzung hätten sein sollen. Dass aber die Angabe einer Ebene, die allen Breiten das Zeichen dieser Spalte gibt, unmöglich ist, sieht man leicht, wenn man bedenkt, dass die Aenderung der Breiten bei den Beobachtungen

$$1 \text{ bis } 8 \text{ und } 13 \text{ bis } 15 \text{ etwa } - 0,475 n + 0,08 i$$

$$9 \text{ bis } 12 \text{ } + 0,475 n - 0,08 i$$

beträgt, wo n die Aenderung der Knotenlänge und i die der Neigung bedeutet.

Da nun die Voraussetzung unstatthaft ist, so ist es ausgemacht, dass entweder nicht der ganze Ring in einer Ebene liegt, oder dass die verschiedenen Ringe nicht eine gleiche Ebene haben, oder dass die Seitenflächen nicht parallel sind, und folglich die Dicke nicht als verschwindend betrachtet werden kann.

Eine Vergleichung der aus der Art. 11 angegebenen Lage der Ebene und dem Durchmesser Art. 10 berechneten kleinen Axe mit der beobachteten gibt folgende Unterschiede:

Mai 14.	die Rechnung gibt	+ 0,05
" 18.	" "	+ 0,01
" 21.	" "	+ 0,09
" 22.	" "	— 0,34
Juni 5.	" "	+ 0,62
" 8.	" "	— 0,82
" 11.	" "	— 0,42

Im Mittel, wenn man dabei die Art. 8 gemachte Bemerkung berücksichtigt, sehr nahe = 0. Die angegebene Ebene leistet also den Beobachtungen, sowohl der Verschwindungen als der kleinen Axen, so nahe als möglich Genüge, und damit scheint sie mit mehrer Sicherheit als bisher bestimmt zu sein.

13.

Ausser der Lage der Trabantenbahn muss man zur Reduccion der gemessenen Distanzen noch ihre

übrigen Elemente kennen, und zwar genauer als CASSINI sie angeben konnte. — Eine vorläufige Reduction, die ich mit CASSINI'S Elementen vornahm, zeigte mir in meinen Beobachtungen grosse Unregelmäßigkeiten, die wohl nicht auf die Rechnung der Messungen geschrieben werden durften. Es ergab sich hieraus die Nothwendigkeit, alle vorhandenen Beobachtungen des Trabanten zu sammeln, um darauf eine fester begründete Theorie zu bauen. Ehe ich meine dahin abzweckenden Untersuchungen hier mittheile, mögen einige durch die Theorie gegebene Resultate hier ihren Platz finden. — Es ist jedoch nicht meine Idee, hier die schönen Untersuchungen darzustellen, die LAPLACE über einige Eigenschaften der Bahnen der Saturnsatelliten angestellt hat; ich würde dadurch bekannte Sachen wiederholen, die man besser in der unsterblichen „Mécanique céleste“ selbst nachlesen wird. Nur anführen werde ich die Resultate davon, und hinzufügen das, was mir selbst eine Untersuchung einiger Punkte, die von LAPLACE nicht berücksichtigt wurden, gegeben hat. Die hieher gehörigen Früchte der Untersuchungen des grossen Geometers sind folgende:

Der vierte Trabant bewegt sich in einer Ebene, die immer sehr nahe mit der Ebene des Saturns-äquators und des Ringes zusammenfallen muss, wenn die Masse des äussersten Satelliten unmerklich ist; ist dieses nicht der Fall, so bewegt die Knotenlinie der Bahn sich rückwärts, auf einer fixen Ebene, die immer durch den Durchschnitt der Ebenen des Äquators und der Bahn des Planeten geht. Die Neigung dieser Ebene und der Bahn des Trabanten ist sehr nahe constant.

Man kann also nur aus den Beobachtungen erkennen, ob wirklich der Trabant sich in der Ebene des Ringes bewegt; denn obgleich wir mit Wahrscheinlichkeit voraussetzen können, dass die Masse des äussersten Satelliten gegen die des Saturns fast verschwindet, so ist diese Voraussetzung doch noch immer weit von der Gewissheit entfernt, die die Astronomen heutzutage allenthalben zu erhalten streben. Auf der andern Seite ist die Entscheidung durch Beobachtungen jetzt noch ganz unmöglich, indem, meine beiden oben angeführten Observationen der kleinen Axe der scheinbaren Trabantenbahn ausgenommen, keine bekannt sind, die uns einen Aufschluss geben könnten; jene beiden Messungen aber zur Grundlage einer feinen Bestimmung zu machen darf man nicht wagen, weil sie nicht als völlig zuverlässig angegeben sind, und, wenn sie auch ganz genau wären, doch die gewünschte Bestimmung nicht vollständig geben können. Indessen schei-

nen die Beobachtungen, die in der Zeit der Durchgänge der Erde durch die Ebene des Ringes gemacht wurden, im Allgemeinen zu zeigen, dass wenigstens die Knotenlinie der Trabantenbahn sehr nahe mit der des Ringes zusammenfällt, denn alle Beobachter versichern uns, dass der Trabant unter diesen Umständen eine gerade Linie zu beschreiben scheint. Ich werde auf diesen Gegenstand unten zurückkommen, jetzt aber noch einige theoretische Untersuchungen geben.

14.

Die periodischen Ungleichheiten der Länge des Trabanten, die von der Wirkung der Sonne herrühren, sind äusserst klein, wie man durch eine leichte Rechnung finden kann; die grösste ist

$$+ 1',453 \sin 2 (\text{long. } b - \text{long. Satell.})$$

also für uns ganz unmerklich. Etwas grösser sind die periodischen Aenderungen der Lage der Trabantenbahn gegen die des Saturns; denn es finden sich, ausser mehreren ganz unmerklichen Gliedern, die Correctionen

$$\text{der Neigung} \dots = + \frac{1}{3} \sin I \frac{T}{T'} \cos 2 (b - N)$$

$$\text{der Knotenlinie} = + \frac{1}{3} \cos I \frac{T}{T'} \sin 2 (b - N)$$

wo I und N die auf die Saturnsbahn bezogene Neigung und Knotenlinie, T , T' die Sideralumlafzeiten des Trabanten und des Saturns bedeuten. Mit dem Werthe von I Art. 10 findet man die Coefficienten $+ 52',42$; $+ 101',96$. — Auch diese Gleichungen sind unmerklich, wenigstens für die bis jetzt vorhandenen Beobachtungen. Da nun der Trabant ausser diesen Breitenstörungen und den vom fünften Trabanten herrührenden, die wir aus Unbekanntheit mit der störenden Masse nicht berechnen, aber mit Grund als sehr klein voraussetzen können, keine erleidet, so dürfen wir die periodischen Gleichungen seiner Ebene ganz vernachlässigen.

15.

Grösseren Einfluss auf den Trabanten äussert die Attraction des Ringes, die eine Bewegung der Apsidenlinie zur Folge hat, welche sehr beträchtlich sein würde, wenn die Masse des Ringes grösser wäre, als sie wirklich ist.

Nimmt man einen Ring von verschwindender Breite und Dicke β , der um einen Mittelpunkt mit dem Halbmesser ρ beschrieben ist, so hat man die Attraction in der Ebene dieses Ringes

$$L = \int \frac{\beta \cdot \mathcal{A}(r - \varrho \cos \mu) \varrho d\mu}{(r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos \mu)^{\frac{3}{2}}}$$

wo r die Entfernung des angezogenen Punktes, μ der Angularabstand zwischen diesem und dem anziehenden Punkte des Ringes und \mathcal{A} die Dichte des Elementes ist; das Integral von $\mu = 0$ bis $\mu = 2\pi$ genommen. Man kann bekanntlich das Integral am leichtesten erhalten, wenn man die Function

$$\lambda = (r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos \mu)^{-\frac{1}{2}}$$

in eine Reihe entwickelt und bedenkt, dass das Integral

$$L = -\mathcal{A}\beta \int \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right) \varrho d\mu$$

ist. Setzt man nun für λ

$$(r - \varrho e^{-\mu\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}} \cdot (r - \varrho e^{+\mu\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}$$

entwickelt man dieses und integrirt man von $\mu = 0$ bis $\mu = 2\pi$, so findet man

$$\int \lambda \cdot d\mu = 2\pi \left\{ \frac{1}{r} + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\varrho^2}{r^3} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right) \frac{\varrho^4}{r^5} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right) \frac{\varrho^6}{r^7} + \text{etc.} \right\}$$

und hieraus das gesuchte Integral

$$L = 2\pi \mathcal{A}\beta \left\{ \frac{\varrho}{r^2} + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{3\varrho^3}{r^4} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right) \frac{5\varrho^5}{r^6} + \text{etc.} \right\}$$

Der Saturnsring kann als aus unendlich vielen solchen Ringen zusammengesetzt angesehen werden; um also seine Attraction zu finden, muss man $L d\varrho$ zwischen den äussersten Grenzen von ϱ integriren, welches nur dann in aller Schärfe möglich wäre, wenn man wüsste, was für eine Function von ϱ das Product $\beta \mathcal{A}$ ist. Da man aber diese Function nicht kennt, so wird man darüber die einfache Voraussetzung machen dürfen, dass $\beta \mathcal{A}$ allenthalben constant, oder die Masse in allen Punkten der Ringe gleichförmig vertheilt ist. Setzt man nun die Grenzen von $\varrho = \varrho'$ und ϱ'' , so hat man das gesuchte $\int L d\varrho$

$$= 2\pi \beta \mathcal{A} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\varrho''^2 - \varrho'^2}{r^2} + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{3}{4} \cdot \frac{\varrho''^4 - \varrho'^4}{r^4} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right) \frac{5}{6} \cdot \frac{\varrho''^6 - \varrho'^6}{r^6} + \text{etc.} \right\}$$

Da aber unter der gemachten Voraussetzung die Masse des Ringes $m = \mathcal{A}\beta\pi(\varrho''^2 - \varrho'^2)$, so hat man seine ganze Attraction in der Ebene

$$= \frac{m}{r^2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{3}{2} \cdot \frac{(\varrho''^4 - \varrho'^4)}{r^2} : (\varrho''^2 - \varrho'^2) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right) \frac{5}{3} \cdot \frac{(\varrho''^6 - \varrho'^6)}{r^4} : (\varrho''^2 - \varrho'^2) + \text{etc.} \right\}$$

Wenn die Bahn des vierten Trabanten elliptisch oder r veränderlich ist, so besteht die Reihe aus

einem constanten Theile A und einem veränderlichen A' ; jener wird sich der Masse des Saturns einverleiben, dieser wird eine Bewegung der Apsideinie hervorbringen, die man leicht aus den Formeln schliessen kann, die ich in meinem Werkchen über den Cometen von 1807 gegeben habe.*) Dort fand sich das Differential der Länge der Apsideinie, von einem festen Punkte der Bahn gezählt:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = \frac{A'h}{e} \cos \varphi - \frac{B'r}{hc} (2 + e \cos \varphi) \sin \varphi$$

wo A' die nach dem Brennpunkte gerichtete störende Kraft, B' die darauf senkrechte in der Ebene der Bahn, h den halben Parameter, e die Excentricität und φ die wahre Anomalie bedeutet. Hier, wo $B' = 0$ ist, zieht sich die Gleichung in

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = \frac{A'h}{e} \cos \varphi$$

zusammen. Setzt man nun oben $r = \frac{1 - e\epsilon}{1 + e \cos \varphi}$, die mittlere Entfernung des Trabanten zur Einheit angenommen, so findet man leicht:

$$A = m \left\{ 1 + \frac{\alpha'}{(1-e\epsilon)^2} + \frac{\alpha''}{(1-e\epsilon)^3} + \frac{\alpha'''}{(1-e\epsilon)^4} + \text{etc.} \right\}$$

$$A' = \frac{m\alpha'}{(1-e\epsilon)^2} \left\{ (1 + e \cos \varphi)^2 - 1 \right\}$$

$$+ \frac{m\alpha''}{(1-e\epsilon)^3} \left\{ (1 + e \cos \varphi)^3 - 1 \right\}$$

$$+ \frac{m\alpha'''}{(1-e\epsilon)^4} \left\{ (1 + e \cos \varphi)^4 - 1 \right\} + \text{etc. etc.}$$

wo α', α'', \dots zur Abkürzung für die Coefficienten von $\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}, \dots$ gesetzt sind.

Man hat nun

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = \frac{m}{r^2} \cdot \frac{h \cos \varphi}{e} \cdot A'$$

und wenn man für dt seinen Werth $\frac{r^2}{h} d(\varphi + \omega)$ setzt:

$$d\omega = \frac{m A' \cos \varphi \cdot d\varphi}{e - m A' \cos \varphi}$$

oder, da man das Quadrat von m vernachlässigen kann:

$$d\omega = \frac{m A'}{e} \cos \varphi \cdot d\varphi$$

In diesem Ausdrücke verschwinden bei der Integration von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ alle Glieder, die eine ungerade Potenz von $\cos \varphi$ enthalten; man darf also nur die übrigen betrachten und

*) [Vgl. Abh. 9 p. 25.]

$$d\omega = m d\varphi \left\{ \frac{\alpha'}{(1-\epsilon\epsilon)^2} 2 \cos \varphi^2 + \frac{\alpha''}{(1-\epsilon\epsilon)^4} (4 \cos \varphi^2 + 4 \epsilon^2 \cos \varphi^4) + \frac{\alpha'''}{(1-\epsilon\epsilon)^6} (6 \cos \varphi^2 + 20 \epsilon^2 \cos \varphi^4 + 6 \epsilon^4 \cos \varphi^6) + \text{etc.} \dots \right\}$$

setzen, woraus sich nach der Integration die Bewegung der Apsidenlinie in einem anomalistischen Umlaufe, die, weil wir das Quadrat von m vernachlässigen, mit einem siderischen verwechselt werden kann, ergibt

$$= 2\pi m \left\{ \frac{\alpha'}{(1-\epsilon\epsilon)^2} + \frac{\alpha''}{(1-\epsilon\epsilon)^4} (2 + \frac{3}{2} \epsilon\epsilon) + \frac{\alpha'''}{(1-\epsilon\epsilon)^6} (3 + \frac{15}{2} \epsilon\epsilon + \frac{15}{8} \epsilon^4) + \frac{\alpha''''}{(1-\epsilon\epsilon)^8} (4 + 21 \epsilon\epsilon + \frac{35}{2} \epsilon^4 + \frac{35}{16} \epsilon^8) + \text{etc.} \dots \right\}$$

oder in einem Julianischen Jahre, wenn man für die Reihe R schreibt,

$$= \frac{1296000'' \cdot 365,25 R}{T}$$

Um diese Bewegung in Zahlen zu berechnen, nehme ich aus Gründen, die unten vorkommen werden

$$\varrho'' = 21'' : 178'' : 658; \quad \varrho' = 15'' : 178'' : 658$$

$$\epsilon\epsilon = 0,00238885 \quad T = 15,9454683$$

und damit erhalte ich die Constante der Attraction des Trabanten durch den Planeten und seine Ringe

$$= 1 + 1,00794303 m$$

und die jährliche Bewegung der Apsidenlinie

$$= 238236'' \cdot m$$

Die Vergleichung dieser Rechnung mit der aus den Beobachtungen folgenden Bewegung der Apsidenlinie wird uns die Masse des Ringes kennen lehren. Es ist übrigens klar, dass der Ring auf die Bewegung des Satelliten keinen anderen Einfluss haben kann, wenn er wirklich die vorausgesetzte Constitution hat; nun hat er diese Constitution, in aller Schärfe genommen, gewiss nicht, wie LAPLACE dieses dargethan hat; allein es lässt sich zeigen, dass der Irrthum dieser

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{h r m'}{\epsilon r^2} \left\{ \cos \varphi - 3 \left[\cos(\odot - N) \cos(\varphi + \omega) + \sin(\odot - N) \sin(\varphi + \omega) \cos I \right] \left[\sin a \sin(\alpha + \omega) \cos \odot + \sin b \sin(\beta + \omega) \sin \odot \right] - \frac{\sin \varphi}{1 + \epsilon \cos \varphi} \left(\sin a \cos(\alpha + \omega + \varphi) \cos \odot + \sin b \cos(\beta + \omega + \varphi) \sin \odot \right) \right\}$$

*) [Vgl. Abb. 9 p. 20.]

**) [A. a. O. p. 25.]

Voraussetzung, die man übrigens machen muss, weil man die wahre Constitution nicht kennt, unbedeutend sein muss.

16.

Da die Bewegung der Apsidenlinie der Trabantenbahn die ganze Aufmerksamkeit der Astronomen verdient, indem sie uns die interessante Bestimmung der Masse des Ringes geben und dadurch unsere Ideen über diesen sonderbaren Himmelskörper berichtigen kann, so ist es gewiss der Mühe werth, auch ihre anderen Bewegungen zu untersuchen. Die von der Attraction der Sonne herrührende findet man leicht durch eine Anwendung der schon oben benutzten Formeln.

Benutzt man nämlich die Bezeichnungen § 30 meiner Untersuchungen über den Cometen von 1807,*) bezieht man die Coordinaten auf die Bahn des Saturns und setzt man die auf dieser Ebene gezählte, aus seinem Mittelpunkte gesehene Länge der Sonne = \odot , ihren Abstand = r' , so hat man:

$$\begin{aligned} x &= r \{ \cos N \cos(\varphi + \omega) + \sin N \sin(\varphi + \omega) \cos I \} \\ y &= r \{ \sin N \cos(\varphi + \omega) - \cos N \sin(\varphi + \omega) \cos I \} \\ z &= r \sin I \sin(\varphi + \omega) \\ x' &= r' \cos \odot; \quad y' = r' \sin \odot; \quad z' = 0 \end{aligned}$$

Man hat hieraus

$$\begin{aligned} \varphi'^2 &= r'^2 - 2r'r' \{ \cos(\odot - N) \cos(\varphi + \omega) + \sin(\odot - N) \sin(\varphi + \omega) \cos I \} + r^2 \\ A' &= m' \left\{ [x'(a) + y'(b)] \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\varphi^2} \right) + \frac{r}{\varphi^3} \right\} \\ B' &= m' \left\{ [x'(a) + y'(b)] \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\varphi^2} \right) \right\} \\ C' &= m' \left\{ (x' \sin N - y' \cos N) \sin I \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\varphi^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

Vernachlässigt man die Quadrate und höheren Potenzen von $\frac{r}{\varphi}$, welches immer erlaubt ist, so hat man

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\varphi^2} = -\frac{3r}{r'} \left\{ \cos(\odot - N) \cos(\varphi + \omega) + \sin(\odot - N) \sin(\varphi + \omega) \cos I \right\}$$

und hiermit, da der sich auf einen festen Anfangspunkt beziehende Theil der Apsidenlinie (§ 40)**)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{h}{\epsilon} \left(A' \cos \varphi - B' \sin \varphi - \frac{B' \sin \varphi}{1 + \epsilon \cos \varphi} \right),$$

findet man:

Diesen Ausdruck muss man in eine Reihe von Sinussen und Cosinussen verwandeln, deren zugehörige Bögen der Zeit proportional wachsen; die constanten Glieder, die er dann enthält, werden die sein, die wir hier suchen. Wenn man die Annäherung bis zum Quadrate der Excentricität treibt, so kann man ihre Aussonderung durch folgenden Kunstgriff äusserst leicht machen. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{hrm'}{er's} (\cos \varphi - R')$$

und bedenkt man, dass ein jedes Glied von R' den Winkel \odot zweimal enthält, so ist es klar, dass nach der Entwicklung der Producte der Sinus in Summen und Unterschiede in jedem Gliede entweder der Winkel $2\odot$ oder $0\odot$ vorkommen muss. Nun ist es ferner klar, dass ein $2\odot$ enthaltendes Glied, dessen allgemeiner Ausdruck

$$= \frac{\gamma}{r's} \sin(2\odot + \gamma')$$

nachdem man \odot und r' in einer Reihe von Sinussen,

$$= -\frac{3}{2}(1 - \sin I^2 \sin \omega^2) \cos \varphi + \frac{3}{2} \sin I^2 \sin \omega \cos \omega \sin \varphi - \frac{3}{4} \frac{\sin I^2 \sin(2\omega + \varphi) \sin \varphi}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

findet. Nun macht es keine Mühe mehr, die constanten Glieder von den übrigen zu trennen; man erhält so

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{m'}{a'a} \cdot \frac{3}{4} \left\{ 1 + \sin I^2 (1 - 5 \sin \omega^2) \right\}$$

woraus die Bewegung der Apsidenlinie in einem Julianischen Jahre

$$= \frac{972000'' \cdot 365,25 T}{T^2 r'} \left\{ 1 + \sin I^2 (1 - 5 \sin \omega^2) \right\} \\ = + 50',997 \text{ (für 1800)}$$

folgt.

Es ist gewiss, dass auch die Wirkung des Saturns-äquators und der übrigen Trabanten auf die Bewegung der Apsidenlinie Einfluss haben, allein der Rechnung können wir ihn nicht unterwerfen, weil wir weder die Masse des Trabanten, noch die Ellipticität des Saturns kennen. Diese würden wir aus der beobachteten Bewegung der Knotenlinie des Ringes erkennen können, wenn die Beobachtungen dieses Element sicher genug gäben; augenscheinlich ist es indess, dass die Ellipticität des Planeten die Apsiden vorrücken lässt.

17.

Die Zahl der vorhandenen Beobachtungen, die zur Verbesserung der Elemente geschieht sind, ist zwar gering, indessen finden sich mehrere darunter, deren vorzügliche Güte sie immer zu festen Grundlagen jeder Theorie des Trabanten machen wird. Die vollständige

deren Bögen der Zeit proportional wachsen, verwandelt hat, nie ein constantes Glied von der Ordnung der Excentricität geben kann; da wir nun die Näherung nicht weiter treiben, so verschwinden alle jetzt $2\odot$ enthaltenden Glieder aus dem Endresultate. Substituirt man nun für \odot in R' zwei Werthe, die 90° von einander verschieden sind, so werden die beiden R' , die man so erhält, gleiche Glieder enthalten, allein die, worin $2\odot$ vorkömmt, mit entgegengesetztem Zeichen; die Summe beider R' ist also die doppelte Summe aller den Winkel \odot nicht enthaltender Glieder. Dieser Bemerkung zufolge setze ich zuerst $\odot = 0$, dann 90° und erhalte dadurch für R' die beiden Werthe:

$$3 \sin a^2 \sin(\alpha + \omega + \varphi) \left\{ \sin(\alpha + \omega) - \frac{\sin \varphi \cos(\alpha + \omega + \varphi)}{1 + \epsilon \cos \varphi} \right\} \\ 3 \sin b^2 \sin(\beta + \omega + \varphi) \left\{ \sin(\beta + \omega) - \frac{\sin \varphi \cos(\beta + \omega + \varphi)}{1 + \epsilon \cos \varphi} \right\}$$

deren halbe Summe man, wenn man sich an die § 30 l. c. [p. 21] gegebenen Relationen erinnert, sehr leicht

Zusammenstellung aller dieser Beobachtungen wird denen angenehm sein, die sich in der Folge mit dem Trabanten beschäftigen wollen; die dabei angeführten Zeiten sind immer vom mittleren Pariser Mittage gezählt; die Oerter des Planeten aber aus den Tafeln in LALANDE'S Astronomie berechnet.

I. 1659 März 14. 8^h 9^m 20^s. (Mém. de Paris 1716.) Der Trabant war in Conjunction (δ) nach HUYGENS' einige Stunden später angestellter und auf diesen Moment reducirter Beobachtung. — δ 20^o 9' 22"; + 2^o 43' 33",5.

II. 1673 Juli 23. 15^h 5^m 47^s. (Mém. de Paris 1716.) Abstand von der δ 2^o 45' nach CASSINI; ohne Zweifel aber war der Trabant in δ mit dem westlichen Rande des Planeten. — δ 15^o 5' 51"; — 2^o 31' 56".

III. 1682 November 23. 18^h 55^m 55^s. (Philos. Transact. Nr. 145.) δ mit dem westlichen Rande des Planeten, nach HALLEY. — δ 14^o 23' 1"; + 1^o 1' 15",5.

IV. 1682 Dec. 1. 18^h 58^m 55^s. (Philos. Transact. Nr. 145.) δ nach HALLEY'S Beobachtung. — δ 14^o 25' 22",5; + 1^o 2' 53".

V. 1683 Febr. 3. 8^h 23^m 32^s. (Philos. Transact. Nr. 145.) δ mit dem westlichen Rande des Planeten nach HALLEY. — δ 13^o 7' 30"; + 1^o 13' 47".

VI. 1683 Febr. 19. 8^h 33^m 32^s. (Philos. Transact. Nr. 145.) δ nach HALLEY'S Beobachtung. — δ 13^o 49' 37"; + 1^o 14' 57".

VII. 1685 Mai 21. $10^h 52^m 28^s$. (Mém. de Paris 1716.) δ nach CASSINI'S Beobachtung. — $b 160^{\circ} 26' 41''$; $+ 2^{\circ} 6' 37''$.

VIII. 1687 März 7. $12^h 19^m 22^s$. (Mém. de Paris 1716.) δ nach CASSINI'S Beobachtung. — $b 190^{\circ} 42' 36''$; $+ 2^{\circ} 41' 56''$.

IX. 1691 Jan. 18. $18^h 25^m 21^s$. (Mém. de Paris 1716.) δ nach CASSINI'S Beobachtung. — $b 238^{\circ} 15' 20''$; $+ 2^{\circ} 7' 12''$.

X. 1697 Aug. 25. $10^h 46^m 28^s$. (Mém. de Paris 1716.) Abstand von der $\delta = 1^{\circ}$, nach CASSINI. Der Beobachter sagt nicht, ob der Trabant vor oder nach der Zusammenkunft war; allein der dort gegebene Unterschied von den Tafeln entscheidet für das letztere. — $b 303^{\circ} 20' 38''$; — $0^{\circ} 43' 5''$.

XI. 1704 Octbr. 27. $10^h 55^m 57^s$. (Mém. de Paris 1716.) δ nach CASSINI'S Beobachtung. — $b 32^{\circ} 32' 10''$; — $2^{\circ} 44' 41''$.

XII. 1706 März 6. $8^h 1^m 50^s$. (Mém. de Paris 1716.) δ nach CASSINI'S Beobachtung. — $b 45^{\circ} 13' 41'' 5$; — $2^{\circ} 4' 19''$.

XIII. 1714 Febr. 11. $10^h 14^m 53^s$. (Mém. de Paris 1716.) δ nach CASSINI'S Beobachtung. — $b 159^{\circ} 4' 56''$; $+ 2^{\circ} 0' 32'' 5$.

XIV. 1715 März 25. $10^h 21^m 10^s$. (Mém. de Paris 1715.) Diese Beobachtung ist von CASSINI. $9^h 43^m 40^s$ sah er den Trabanten den Saturnsrand berühren und $10^h 58^m 40^s$ war er ganz hinter den Planeten getreten. — $b 169^{\circ} 55' 10''$; $+ 2^{\circ} 24' 58'' 5$.

XV. 1787 Juli 26. $10^h 42^m 57^s$. (Mém. de Paris 1786.) δ mit dem westlichen Rande des Planeten, nach BERNARD. —

XVI. 1787 Aug. 11. $11^h 12^m 38^s$. (Mém. de Paris 1786.) δ mit dem westlichen Rande des Ringes, nach BERNARD. —

XVII. 1787 August 18. $10^h 39^m 18^s$. (Mém. de Paris 1786.) δ mit dem westlichen Rande des Ringes, nach BERNARD. —

XVIII. 1787 Sept. 3. $10^h 3^m 51^s$. (Mém. de Paris 1786.) δ mit dem westlichen Rande des Ringes, nach BERNARD. —

XIX. 1787 Octbr. 21. $6^h 9^m 34^s$. (Mém. de Paris 1786.) δ mit der Mitte der Breite des Ringes, gegen Westen, BERNARD. —

XX. 1789 Sept. 23. $10^h 23^m 40^s$. (Philos. Transact. 1790.) Der Trabant trat um diese Zeit aus dem Schatten der Kugel, der östlich vom Saturn lag; nach HERSHEY'S Beobachtung. — Hel. Ort $b = 350^{\circ} 13' 25''$; — $2^{\circ} 7' 36''$.
Geoc. Ort $b = 348^{\circ} 56' 50''$; — $2^{\circ} 22' 7'' 5$.

XXI. 1789 Nov. 2. $8^h 42^m 31^s$. (Philos. Transact.

1790.) Austritt des Trabanten, der sich vor der Scheibe befunden hatte, aus dem Saturnsrande; nach HERSHEY. — $b 346^{\circ} 44' 27''$; — $2^{\circ} 18' 12''$.

XXII. 1789 Nov. 2. $10^h 43^m 51^s$. (Philos. Transact. 1790.) HERSHEY sah den Schatten des Trabanten als einen dunkeln Fleck, genau im Mittelpunkte des Saturns. — Hel. Ort $b 351^{\circ} 33' 11''$; — $2^{\circ} 9' 21''$.

XXIII. 1789 Nov. 10. $8^h 6^m 9^s$. (Philos. Transact. 1790.) Einige Secunden früher trat der Trabant aus dem Schatten der Kugel, nach HERSHEY. — Hel. Ort. $b 351^{\circ} 48' 55''$; — $2^{\circ} 8' 31''$.

XXIV. 1790 Novbr. 12. $6^h 31^m 52^s$. (Handschriftl. Nachricht.) Der Trabant war in δ , nach KÖHLER. — $b 359^{\circ} 26' 32''$; — $2^{\circ} 33' 13''$.

XXV. 1790 Decbr. 30. $5^h 17^m 5^s$. (Handschriftl. Nachricht.) KÖHLER beobachtete folgende Conjunctionen: $4^h 39^m 50^s$, der Trabant $\frac{1}{4}$ Diam. b östl. vom Mittelpunkte; $5^h 54^m 20^s$ „ „ in δ mit dem östlichen Rande.

Hieraus folgt für die angegebene Zeit die δ mit einem Punkte $\frac{2}{3}$ Diam. östlich vom Mittelpunkte. — $b 359^{\circ} 51' 6''$; — $2^{\circ} 22' 16''$.

Für die Beobachtungen von 1787 habe ich die Oerter des Saturns nicht angegeben; sie werden durch folgende, für den mittleren Pariser Mittag berechnete Ephemeride, die auch für die BERNARD'SCHEN Beobachtungen der übrigen Trabanten gebraucht werden kann, ersetzt:

1787 Juli 26.	$327^{\circ} 8' 22''$	— $1^{\circ} 25' 59''$
August 11.	$326 0 36$	— $1 31 57$
„ 27.	$324 48 37$	— $1 33 7$
Septbr. 12.	$323 41 53$	— $1 33 25$
„ 28.	$322 49 14$	— $1 33 16$
Octbr. 14.	$322 17 20$	— $1 31 53$

18.

Ein etwas aufmerksamer Blick auf diese 25 Beobachtungen läßt uns schon erkennen, dass sie von sehr ungleichem Werthe sind. Meistentheils sind es Ocularschätzungen, die sich auf die Ansenlinie beziehen und desto unsicherer sein müssen, je weiter der Ring und die Trabantenbahn geöffnet sind; denn theils lässt sich die Lage der grossen Axe einer weit offenen Ellipse schwer durch das blossе Augenmaass mit Sicherheit angeben, theils ist die Schätzung des Orts, wo ein von dem weit entfernten Trabanten auf sie gefälltes Perpendikel sie trifft, weit unsicherer, als bei einem geringen Abstände des Trabanten. Ich glaube aus diesen Gründen, dass die Unsicherheit der Beobachtungen wie das Quadrat der Oeffnung der Ellipse zunimmt; unten, bei der Reduction der Beobachtungen, werde ich die jedesmalige Oeffnung und damit das Maass der Unsicherheit angeben. — Aus eigener Er-

fahrung kenne ich die grosse Schwierigkeit der Beobachtungen bei einer grossen Oeffnung der Ellipse und deshalb gebe ich die folgenden zwei eigenen Observationen mehr als ohngefähre Schätzungen, und will nicht, dass man sie mit den besseren der oben angeführten in gleichen Rang setze:

1807 Mai 25. $8^h 22^m$ m. Z. Paris. δ m. d. östl. Randed. Planet.
1808 Juli 5. $10^h 18^m$ " " " " westl. " " "

Die Cassini'schen Observationen in den Mémoires de Paris, p. 1716, sind dort nur zur Bestätigung seiner Tafeln angeführt und nach CASSINI'S Rechnung stimmen sie in der That nahe genug überein. Mehrere andere Beobachtungen gibt CASSINI uns nicht, da er ihre Mittheilung für zu weitläufig hält. — Da CASSINI seine Beobachtungen verglich und seine Tafeln construirte, ohne die Längen des Saturns auf die Trabantenbahn zu reduciren, da er ferner den Trabanten eine Kreisbahn beilegte, welche er nicht beschreibt, so ist die nahe Uebereinstimmung die er findet, allerdings sonderbar und könnte vielleicht die Vermuthung veranlassen, als hätte CASSINI nur die schlechter übereinstimmenden Beobachtungen, die, wobei beide Fehler der Rechnung sich nicht aufhoben, weggelassen. — Die beiden letzten Beobachtungen von KÖHLER verdanke ich der Güte des Herrn von ZACH, der mir des Beobachters eigene Nachrichten darüber mittheilte; man erkennt auch in diesen Beobachtungen die Sorgfalt und Genauigkeitsliebe, die KÖHLER eigen war. Sie verdienen grosses Vertrauen, da der Trabant sehr nahe bei dem Planeten vorbeiging.

19.

Ausser der Art. 10 gegebenen Lage der Ebene des Ringes, die ich für die der Trabantenbahn annehme, muss man, um alle Beobachtungen reduciren zu können, die beiden Durchmesser des Saturns und den seines Ringes und den Abstand des Satelliten vom Mittelpunkt kennen.

Oben fand ich aus 17 sehr guten im Jahre 1811 angestellten Messungen den Durchmesser des Ringes in der mittleren Entfernung = $38,2694$. — Reducirt man meine Lillienthaler Beobachtungen Art. 7 eben so auf die mittlere Entfernung, so hat man diesen Durchmesser:

15füssiger Reflector, alter Spiegel.			
1806 Mai 10.	$42,74$	2 Beob.
" 16.	$42,43$	1 "
" 28.	$43,70$	1 "
Juni 9.	$43,29$	1 "
" 10.	$42,05$	1 "
Juli 5.	$42,50$	1 "

7füssiger Herschel'scher Reflector.			
1806 Juni 12.	$43,23$	2 Beob.
" 13.	$41,55$	1 "
" 14.	$42,47$	1 "
" 18.	$42,58$	1 "
" 28.	$40,43$	1 "
15füssiger Reflector, neuer Spiegel.			
1806 Juli 12.	$40,54$	1 Beob.
" 15.	$41,73$	2 "
" 16.	$41,55$	1 "

Im Mittel also aus der

ersten Reihe	$42,78$	7 Beob.
zweiten "	$42,25$	6 "
dritten "	$41,39$	4 "

Im Mittel aus allen Beobachtungen

$42,25$ 17 Beob.

Die Abweichung dieses Resultats von dem 1811 gefundenen ist in der That auffallend; ohne Unbilligkeit wird man den Beobachtungen bei ihrer guten Harmonie unter einander nicht einen so grossen mittleren Fehler aufbürden können, und schwer ist es, den Unterschied auf eine andere Ursache zu schieben. — Die Irradiation, der man gewöhnlich die Abweichungen mikrometrischer Beobachtungen aufbürdet, konnte hier nicht, wenigstens nicht ganz, die Ursache sein; denn hätte sie in den sehr lichtstarken Teleskopen den Durchmesser wirklich $4''$ grösser dargestellt, so müsste auch die Breite des Ringes $4''$ grösser und der dunkle Zwischenraum $4''$ kleiner erschienen sein, als in Königsberg; oder wenn diese Dimensionen in Lillienthal $6''$ und $6''$ waren, müssten sie sich nachher = $10''$ und $2''$ dargestellt haben, welches keineswegs der Fall ist. Ueberdiess wurden viele der Beobachtungen 1806 in heller Dämmerung gemacht, so dass die Irradiation auch aus diesem Grunde nicht so beträchtlich sein konnte. — Eine jede andere die Beobachtungen respectirende Erklärung hat, ich gestehe es, grosse Schwierigkeiten; allein der Mühe scheint es mir nicht unwerth zu sein, den Durchmesser des Ringes von Jahr zu Jahr mit einem gleichen Instrumente zu beobachten. — Man mag nun eine Partie ergreifen welche man will, so wird man mit mir darin übereinstimmen, dass der Durchmesser des Ringes für die mit den verschiedenen Fernröhren angestellten Beobachtungen am sichersten so angenommen werden muss, als ihn eben diese Fernröhre gleichzeitig ergaben, und so werde ich ihn in der That bei den Reductionen meiner eigenen Beobachtungen voraussetzen. Für alle fremde aber nehme ich einen mittleren Werth, in runder Zahl = $40''$. Die Durchmesser des Saturns selbst konnte ich wegen der ungünstigen Lage des Planeten nicht erhalten; ich

stelle deshalb alle mir bekannt gewordene Angaben anderer Astronomen hier zusammen:

	Ring.	Aequator.	Polaraxe.
1. KÖHLER . . .	37,39	16,527	15,062
2. POUND . . .	42,00	18,000	—
3. ROCHON . . .	40,60	16,900	—
4. USHER . . .	—	18,120	15,855
5. HERSCHEL . . .	46,682	22,810	20,564
6. VON ZACH . . .	35,039	13,097	—
7. BUDGE . . .	—	11,286	7,626

Trotz der ausserordentlich grossen Unterschiede glaube ich hieraus doch mit einiger Sicherheit schliessen zu dürfen:

Durchmesser des Ringes = 40,0
 „ „ Aequators = 17,4
 Axenverhältniss . . . 1:0,892385.

Die Köhler'schen Messungen empfang ich neben den Art. 17 und 18 erwähnten; es sind ihrer zwei:

1790 Octbr. 5. . . .	42,505	18,468	16,960
Novbr. 16. . . .	40,104	18,034	16,311

die nach der vom Beobachter selbst vorgenommenen Reduction auf die mittlere Entfernung

37,631 . . .	16,349 . . .	15,015
37,148 . . .	16,705 . . .	15,108

und im Mittel das angeführte Resultat geben.

Die Entfernung des Trabanten vom Mittelpunkt, die bei der Reduction vorausgesetzt werden musste, konnte nicht eher gefunden werden, ehe die Bahn selbst vollständig bekannt war. Statt nun meine Leser durch die deshalb nothwendigen Umwege zu führen, die ohnehin kein Interesse haben können, bemerke ich nur, dass ich die mittlere Entfernung = 178" voraussetzte und endlich die im folgenden Artikel enthaltenen Elemente fand, deren Vergleichung mit den durch sie selbst reducirten Beobachtungen dann die Data zu ihrer Beurtheilung geben mag.

20.

Die Elemente der Trabantenbahn sind nun folgende:

	Perisaturnium.			
Epoche für den Pariser Meridian 1800 . . .	67°25' 47"	203°35' 7"		
Bewegungen in				
100 Greg. Jahren . . .	2290 Rev.	202 12 26	33 49 34	
365,25 Tagen	22 "	326 14 52,232	20 17,773	
365,00 "	22 "	320 36 12,935	20 16,940	
1 "	22 34	37,186	3,334	
Grösste Mittelpunktsgleichung . . .	5 36 8			
Excentricität	0,0488759			

Die dieser Abhandlung angehängten Tafeln sind nach diesen Elementen entworfen. Um die Vergleichung anderer Elemente mit den meinigen zu erleichtern, führe ich eine Reduction jener auf meine Epoche hier an; die Herschel'sche Epoche für 1789 ist mit meiner mittleren Bewegung auf 1800 reducirt, indem dieser Astronom nur die Epoche untersuchte.

	Epoche 1800	Bewegung in 365,25 Tagen.
CASSINI . . .	68° 39' 8"	326° 15' 46"
HALLEY . . .	63 48 13	326 13 45
LALANDE . . .	70 30 37	326 18 16,25
HERSCHEL . .	64 44 14	

Eine Correction von merklichem Einflusse, wegen der nicht momentanen Fortpflanzung des Lichtes, darf man bei der Berechnung eines Orts aus den Tafeln nicht vernachlässigen; sie findet sich in Secunden ausgedrückt

$$= 493''(9,5388 - \text{Dist. } \zeta \text{ a } \delta)$$

und muss der Beobachtungszeit beigefügt werden. Eine Tafel gebe ich nicht dafür, da ihr Gebrauch nicht bequemer sein würde als die unmittelbare Berechnung, indem man die wahre Entfernung des Saturns gewöhnlich schon kennen wird.

Vor der Vergleichung der Tafeln mit den Beobachtungen mögen hier noch folgende Sätze von der Reduction der Längen des Saturns auf die Ebene der Trabantenbahn u. s. w. einen Platz finden. Bezeichnet man durch ζ die Länge, durch λ die Breite des Saturns, durch n und i die Knotenlinie und Neigung des Trabanten, so hat man die reducirte Länge L , die Breite der Erde (oder Sonne) über der Ebene der Trabantenbahn l und den Winkel der kleinen Axe gegen einen Breitenkreis p , gegen Osten positiv genommen, aus folgenden Gleichungen:

$$tg(L-n) = \frac{\sin(\zeta-n)\cos i + tg \lambda \sin i}{\cos(\zeta-n)}$$

$$\sin l = \sin(\zeta-n)\sin i \cos \lambda - \cos i \sin \lambda$$

$$\cotg p = \frac{\cos \lambda \cotg i - \sin \lambda \sin(\zeta-n)}{\cos(\zeta-n)}$$

21.

Nach den vorhergehenden Erklärungen werden die folgenden, die Reduction der Beobachtungen und die Unterschiede der Elemente enthaltenden Tafeln keine weiter bedürfen.

	Auf die mittlere Entfernung reducirte Beobachtungszeit.	Reducirte Länge des Saturns.	Kllipt. Ra- diusvector.	Beobachteter Längennutzwert.	Länge des Tra- banten.	
I.	1659 März 14	8 ^h 14 ^m 19 ^s	206° 22' 52"	—	+ 180° 0' 0"	26° 22' 52"
II.	1673 Juli 23	15 9 39	13 6 44	1,0424	— 2 40 59	10 25 45
III.	1682 Novbr. 23	19 1 24	143 55 22	1,0464	+ 182 40 18	326 15 40
IV.	Decbr. 1	19 5 20	143 38 16	—	0 0 0	143 38 16
V.	1683 Febr. 3	8 34 40	140 40 25	0,9564	— 2 55 25	137 45 0
VI.	Febr. 19	8 44 19	139 28 22	—	0 0 0	139 28 22
VII.	1685 Mai 21	10 55 24	162 4 9	—	180 0 0	342 4 9
VIII.	1687 März 7	12 26 23	189 10 49	—	180 0 0	9 10 49
IX.	1691 Jan. 18	18 22 19	236 23 41	—	0 0 0	236 23 41
X.	1697 Aug. 25.	10 50 19	307 17 59	—	+ 1 0 0	308 17 59
XI.	1704 Octbr. 27	11 6 37	29 49 37	—	0 0 0	29 49 37
XII.	1706 März 6	8 1 32	42 28 16	—	0 0 0	42 28 16
XIII.	1714 Febr. 11	10 24 32	160 51 55	—	180 0 0	340 51 55
XIV.	1715 März 25	10 29 56	170 35 11	0,9515	— 2 55 39	167 39 32
XV.	1787 Juli 26	10 48 17	330 2 34	0,9660	+ 182 53 49	152 56 23
XVI.	Aug. 11	11 18 33	329 1 53	0,9646	+ 186 40 44	155 42 37
XVII.	Aug. 18	10 45 12	328 33 45	1,0220	— 6 18 32	322 15 13
XVIII.	Septbr. 3	10 9 26	327 29 54	1,0232	— 6 18 4	321 11 50
XIX.	Octbr. 21	6 10 56	325 34 3	1,0232	— 5 21 9	320 12 54
XX.	1789 Sept. 23	10 31 14	350 49 3	1,0432	+ 2 40 12	353 29 15
XXI.	Novbr. 2	8 47 10	347 50 49	0,9573	+ 181 50 29	169 41 18
XXII.	Novbr. 2	10 48 30	351 59 56	0,9565	+ 179 47 18	171 47 14
XXIII.	Novbr. 10	8 9 31	352 13 26	1,0438	+ 2 36 31	354 50 7
XXIV.	1790 Novbr. 12	6 37 47	359 8 26	—	0 0 0	359 8 26
XXV.	Decbr. 30	5 16 51	359 25 4	1,0459	+ 2 0 17	1 25 21

Es ist vielleicht nicht überflüssig, dass ich die Art angebe, wie ich den Abstand von der Conjunction bei den Beobachtungen erhielt, wo der Trabant den Rand des Saturns (oder des Schattens) berührte. Nennt man diesen Abstand δ , a den Aequatorealdurchmesser des Planeten, ε die Excentricität seiner Meridiane, R die wahre Entfernung des Trabanten vom Mittelpunkte, l die Breite der Erde (oder Sonne) über der Trabantenbahn, so sieht man die Projection des Saturns (oder die Figur des Schattens) als eine Ellipse, deren Gleichung für Coordinaten aus dem Mittelpunkte

$$y^2 = (1 - \varepsilon^2 \cos^2 l) \left(\frac{1}{4} a^2 - x^2 \right)$$

wo, weil der Trabant diesem x und y entspricht:

$$x = r \sin \delta; \quad y = r \sin l \cos \delta.$$

Man findet hieraus leicht δ durch eine quadratische Gleichung.

Die Beobachtung XXII wurde nach der Formel

$$\sin \delta = \frac{a}{2r} \sin 4^\circ 9' 1''$$

berechnet, indem der Schatten, der von der Erde aus gesehen im Mittelpunkte der Kugel stand, von der Sonne gesehen $\frac{1}{4} a \sin$ (long. reduct. \odot — long. red. ε) östlich vom Mittelpunkte entfernt sein musste, welches in der Bahn des Trabanten den in der Tafel gegebenen Winkel ausmacht.

Vergleichung der Beobachtungen und der Rechnung.

	Fehler der Rechnung.	Oeffnung des Ringes.	
I.	1659 März 14	— 0 ^m 12' 48"	0,289
II.	1673 Juli 23	+ 7 4	0,198
III.	1682 Novbr. 23	+ 7 4	0,219
IV.	Decbr. 1	— 14 24	0,219
V.	1683 Febr. 3	+ 8 33	0,259
VI.	Febr. 19	+ 0 5	0,259
VII.	1685 Mai 21	+ 15 13	0,075
VIII.	1687 März 7	— 4 48	0,162
IX.	1691 Jan. 18.	+ 7 18 57	0,424
X.	1697 Aug. 25.	— 10 29	0,333
XI.	1704 Octbr. 27	+ 19 33	0,306
XII.	1706 März 6	— 24 19	0,380
XIII.	1714 Febr. 11	— 3 24	0,088
XIV.	1715 März 25	+ 0 44	0,90366
XV.	1787 Juli 26	— 1 32 34	0,176
XVI.	Aug. 11	— 2 29 10	0,182
XVII.	Aug. 18	— 2 38 41	0,189
XVIII.	Septbr. 3	— 56 49	0,198
XIX.	Octbr. 21	— 0 14	0,212
XX.	1789 Sept. 23	+ 6 47	0,993669
XXI.	Novbr. 2	+ 1 34	0,035417
XXII.	Novbr. 2	+ 0 9	—
XXIII.	Novbr. 10	+ 7 34	0,909323
XXIV.	1790 Novbr. 12	— 12 4	0,065703
XXV.	Decbr. 30	— 15 42	0,071826

Wenn man IX ausnimmt, so ist die Ueberein-

stimmung so gut als man erwarten kann; der grosse Fehler bei dieser Beobachtung aber ist auffallend, da es gewiss ist, dass CASSINI, trotz der grossen Öffnung des Ringes, nicht so viel fehlen konnte. Vielleicht, oder wahrscheinlich, wurde die Conjunction mit der östlichen Anse beobachtet und dafür bloss eine Conjunction notirt; in dieser Voraussetzung würde der Fehler sehr gering sein. — Die Bernard'schen Beobachtungen von 1787 fehlen auch nicht unbedeutend, allein hier scheinen offenbar Beobachtungsfehler zu sein, denn die Observationen vom 18. August und 21. October, die fast in demselben Punkte der Bahn gemacht wurden, weichen 2° 38' 27" von einander ab. — Um die Elemente durch spätere Beobachtungen zu prüfen, verglich ich sie mit einen beiden Art. 18 angeführten Schätzungen, woraus sich die Fehler

$$1807 \text{ Mai } 25 \dots + 1^{\circ} 19'$$

$$1808 \text{ Juli } 5 \dots - 1 \quad 3$$

d. i. nicht grösser ergeben, als die ungünstige Lage des Planeten zur Zeit dieser Beobachtungen erwarten liess.

22.

Um die Wiederholung der Reduction meiner gemessenen Abstände des Satelliten, die ich auf die angeführten Elemente gründete, zu erleichtern, gebe ich hier die dazu zu benutzenden Oerter des Saturns, aus DELAMBRE'S Tafeln berechnet.

	M. Z. Paris.	Long. geoc.	Lat. geoc.	Log. Dist. a *
1806 Mai 10	0 ^h 0 ^m 0 ^s	203° 19' 46,7	2° 44' 59,5	0,945638
" 26	" " "	202 25 56,0	2 42 14,0	0,962858
Juni 11	" " "	201 52 29,0	2 38 36,6	0,962562
" 27	" " "	201 43 14,4	2 34 28,2	0,975838
Juli 13	" " "	201 59 15,6	2 30 14,5	0,985735
1807 April 25	" " "	217 22 21,9	2 41 6,0	0,945855
Mai 11	" " "	216 10 33,4	2 40 18,4	0,947105
" 27	" " "	215 5 20,6	2 38 14,0	0,951851
Juni 26	9 54 26	213 51 14,4	2 31 33,4	0,968763
1808 Mai 2	10 55 0	229 27 35,2	2 28 48,8	0,950092
" 30	10 14 26	227 25 13,7	2 26 50,5	0,952926

Die im 7. Artikel angeführten Messungen der Abstände brachte ich hiermit auf die mittlere Entfernung; dann unter Zuziehung der Länge des Trabanten, sowie die Tafel sie geben, und der Ringdiameter nach Art. 19, auf wahre Abstände vom Mittelpunkte des Planeten; endlich diese durch Vergleichung mit den elliptischen, gleichfalls durch die Tafeln angegebenen Radien auf die halbe grosse Axe der Trabantenbahn. Die Resultate dieser drei Reductionen findet man in den drei Spalten folgender Tafel:

1806 Mai 10	10 ^h 30 ^m 53 ^s	153,56	176,17	178,36
" 18	10 40 14	153,11	181,46	178,62
" 19	10 18 8	162,17	184,37	184,85
" 26	9 52 33	154,74	177,03	179,12
" 27	10 17 28	151,39	180,69	179,30
Juni 12	10 29 51	149,17	180,08	178,51
Juli 4	10 25 33	136,54	187,14	181,69
" 5	10 16 54	154,40	179,60	177,24
1807 April 25	10 52 51	121,72	176,22	181,03
" 26	12 10 51	154,44	179,93	181,24
Mai 5	12 53 46	153,65	174,36	175,69
" 20	10 21 13	146,13	179,87	177,76
" 22	11 41 6	137,46	170,94	175,58
1808 Mai 30	10 29 9	160,28	181,40	178,42

Im Mittel aus den 14 Resultaten der letzten Columne ergibt sich hieraus die mittlere Entfernung = 179,01

oder, wenn man die einzige etwas beträchtlich abweichende Beobachtung vom 19. Mai 1806, die jedoch in meinem Tagebuche nicht als zweifelhaft notirt ist, ausschliesst,

$$= 178,658.$$

23.

Die nun vollständig bekamten Data zur Reduction der beiden Beobachtungen vom 26. Juni 1807 und 2. Mai 1808 (Art. 7) habe ich zu diesem Zwecke benutzt und folgende Resultate erhalten:

$$1807 \text{ Juni } 26. 9^{\text{h}} 56^{\text{m}} 21^{\text{s}}.$$

$$\text{Abstand des Trabanten von der } \mathcal{J} \dots = 10^{\circ} 2' 39''$$

$$R \dots \dots \dots = 0,9526$$

Gemessene und auf die mittlere Entfernung des Saturns gebrachte Distanz von der Ansenlinie $\dots \dots \dots = 44,7585$
und hieraus $l \dots \dots \dots = 15^{\circ} 25' 47''$

$$1808 \text{ Mai } 2. 10^{\text{h}} 59^{\text{m}} 55^{\text{s}}.$$

$$\text{Abstand des Trabanten von der } \mathcal{J} \dots = 6^{\circ} 13' 31''$$

$$R \dots \dots \dots = 1,04724$$

Gemessene und auf die mittlere Entfernung des Saturns gebrachte Distanzen $\dots \dots \dots = 66,090; 59,867$
Darans berechnete Distanzen von

$$\text{der Ansenlinie } \dots \dots \dots = 66,088; 64,123$$

$$\text{und hieraus endlich } l \dots \dots \dots = 20^{\circ} 29' 18''$$

Die Neigung gegen die Ekliptik habe ich, unter der Voraussetzung der Knotenlinie auf der Saturnsbahn nach Art 10, hieraus gefunden:

$$\text{erste Beobachtung} = 24^{\circ} 30'$$

$$\text{zweite } \quad \quad \quad = 25 \quad 55$$

Der Unterschied dieser Neigung von der vorausgesetzten = 28° 34' 6" scheint mir der Aufmerksamkeit

der Astronomen würdig zu sein; denn obgleich die Beobachtungen, worauf ich die gegenwärtige Bestimmung gründete, nicht ganz sicher sind, so möchten sie doch schwerlich so sehr abirren können, als man voraussetzen muss, wenn man die Neigung $28^{\circ} 34' 6''$ annimmt. Ich glaube daher, dass diese Neigung noch zu gross ist; allein da die Autorität meiner beiden Beobachtungen nicht respectabel genug ist, um darauf eine feste Bestimmung gründen zu dürfen, so bin ich gezwungen, mich bis zu ferneren Beobachtungen bei der angenommenen Neigung zu beruhigen.

24.

Die Masse der Saturnsringe ergibt sich aus den bisherigen Untersuchungen zwar nicht mit voller Bestimmtheit, indem wir einige in Rechnung kommende Elemente nicht kennen; allein einen Näherungswerth geben sie zu erkennen und mit diesem müssen wir uns begnügen. Ich fand die jährliche Bewegung der Apisidlinie des vierten Trabanten (Art. 20) = $1217,773$

Präcession = $50,110$

Jährliche Sideralbewegung . . . = $1167,663$

Wirkung der Sonne (Art. 16) . . . = $50,997$

Also die von der vereinten Wirkung der Ringe, des Saturnsäquators und der Trabanten erzeugte Bewegung = $1116,666$. — Nimmt man nun an, dass die Störung der Trabanten die Apisidlinie nur langsam bewegen kann; bedenkt man ferner, dass die Ellipticität des Planeten sie vorwärts bewegen muss, so wird man mit nicht grosser Gefahr zu irren annehmen können, dass die Masse des Ringes kleiner ist, als die aus der Gleichung (Art. 15)

$$m \cdot 238236'' = 1116,666$$

folgende, welche $m = \frac{1}{213,35}$ gibt.

Die Masse des Planeten findet man aus der bekannten Gleichung

$$m' = \frac{q^2 \left(\frac{T'}{T}\right)^3}{1 - q^2 \left(\frac{T'}{T}\right)^3}$$

in welcher

$$q = \sin 178,658$$

$$T = 15,9454683 \text{ Tage}$$

$$T' = 10759,077213 \text{ Tage}$$

$$m' = \frac{1}{3379,12}$$

Dieses m' ist, nach Art. 15, nicht die Summe der Massen des Saturns, des Ringes und des Trabanten, sondern es ist um $0,00794303 m$ grösser; allein da $m = \frac{1}{213}$,

so ist der Unterschied unbedeutend. — Bekanntlich gab uns LAPLACE vor einigen Jahren eine neue Bestimmung der Masse des Saturns, indem er sie aus den Störungen des Jupiters herleitete; es ist nicht meine Idee, durch das Resultat meiner Beobachtungen das auf jenem Wege gefundene verdrängen zu wollen, denn ich glaube allerdings, dass viele mit grosser Sorgfalt berechnete und mit der Theorie verglichene Beobachtungen der Gegenseite die Masse mit grösserer Genauigkeit angeben können, als die gemessenen Elongationen. Da aber meine Massenbestimmung von der Laplace'schen $\frac{1}{22}$ verschieden und dieser Unterschied nicht ganz unbedeutend ist, also eine nähere Prüfung verdient, so veranlasst er vielleicht Herrn BOUVARD uns die Grenzen anzugeben, innerhalb welcher seine Rechnung bei einer billigen Voraussetzung für die Beobachtungsfehler sicher ist. Die Laplace'sche Masse würde den Abstand des Trabanten etwa = $176''$ voraussetzen, der sich schwerlich mit meinen Beobachtungen ganz vereinigen lassen möchte. — Dem sei indess wie ihm wolle, so glaube ich doch, den Astronomen durch meine Messungen der Abstände eine nicht uninteressante Mittheilung zu machen.

25.

Das Vorhergehende scheint mir nun Alles zu sein, was wir aus den vorhandenen Beobachtungen schliessen können. Die Ueberzeugung, dass uns noch vieles an der ganz genauen Bestimmung der Bahn des vierten Satelliten mangelt, wird hoffentlich die Astronomen bewegen, sich mit Eifer des Saturns anzunehmen.

Vorzügliche Aufmerksamkeit scheint mir die Neigung des Ringes zu verdienen, und diese möchte sich am besten und sichersten durch den Winkel messen lassen, den die Apselinie nicht lange vor und nach ihrer Verschwindung mit dem Erläquator macht. Die Neigung der Trabantenbahn wird auf dieselbe Weise, aber vielleicht noch besser durch die Abstände in der kleinen Axe der projectirten Bahn gemessen werden können. Es wird sich durch diese Observationen mit Sicherheit entscheiden lassen, ob Ring und Trabantenbahn bis auf einen Grad in Einer Ebene liegen.

Gleichen Anspruch auf die Aufmerksamkeit der Astronomen haben die Conjunctionen der Trabanten mit dem Planeten; bei den letzten Durchgängen des Saturns durch die Knotenlinie seines Ringes im Jahre 1803 scheint Niemand auf die Trabanten in dieser Hinsicht aufmerksam gewesen zu sein. Möchten uns die nächsten Durchgänge doch eine reichere Ausbeute liefern! — Interessant für die Theorie des Saturns ist

die genauere Kenntniss der Bahn eines oder mehrerer inneren Trabanten; denn gelänge es uns, auch bei ihnen eine Excentricität und eine Bewegung der Apsidenlinie zu entdecken, so würde es möglich sein, die Abplattung des Planeten und die Masse des Ringes separat zu bestimmen, und hieraus würde sich mehr als Ein schönes Datum für die Theorie des ganzen

Saturnsystems ergeben. Leider aber existiren selbst vom dritten Trabanten nur so wenige und schlechte Observationen, dass sich jetzt noch gar nicht an die Bestimmung seiner Bahn denken lässt.

[Tafeln der Bewegung des vierten Trabanten weggelassen; vgl. die genaueren am Schluss der folgenden Abb. 18.]

1 8. Bestimmung der Bahn des Hugenischen Saturns-Satelliten.*

(Astr. Nachr. 9. p. 1.)

Die Bahnen der Satelliten des Saturns und Uranus sind uns fast unbekannt geblieben, während in der langen Zeit, welche seit der Entdeckung der ersten verstrichen ist, die Erkenntniss der Bewegungen aller übrigen bekannten Körper des Sonnensystems fortwährende Anstrengungen veranlasst und dadurch immer neue Erfolge herbeigeführt hat. Als Ursache des Zurückbleibens unserer Kenntnisse dieser Satelliten kann theils die Lichtschwäche derselben, theils der Mangel zuverlässiger Mikrometer genannt werden; allein man muss zugleich zugestehen, dass die Astronomen, auch ohne sehr starke Fernröhre und Mikrometer, den Saturnsatelliten viele für ihre Theorie nützliche Beobachtungen hätten abgewinnen können, wenn sie die Durchgangszeiten derselben durch die kleine Axe der Ringellipse fleissiger beobachtet hätten, als sie gethan haben. Wahrnehmungen dieser Art finden sich nur von EDMUND HALLEY, von CASSINI Vater und Sohn, von HERSCHEL und von KÜHLER. HUGEN selbst hat uns keine Beobachtung einer Conjunctionszeit hinterlassen, sondern nur um Mitternacht des 14. März 1659 den Ort des Satelliten so bezeichnet, dass man erkennt, dass er mehrere Stunden früher in Conjunction gewesen sein muss; BERNARD hat zwar im Jahre 1787 mehrere Conjunctionen beobachtet, allein aus der Berechnung derselben geht hervor, dass er dabei nicht die Sorgfalt angewandt hat, welche, mehr noch als instrumentale Hilfsmittel, nothwendig ist, um brauchbare Resultate zu erlangen. Ein Theil der Nachrichten über den Satelliten, welche wir von den genannten Astronomen besitzen, ist aus Gründen, welche ich im Verlaufe

dieser Abhandlung anführen werde, nicht geeignet, Zutrauen einzuflößen, und die keineswegs beträchtliche Anzahl derselben muss noch vermindert werden, wenn die Absicht ist, eine Theorie des Satelliten darauf zu gründen. Inzwischen verrathen schon diese spärlichen Angaben eine Abweichung der Bahn des Satelliten von dem Kreise, sind aber nicht genügend, dieselbe mit einiger Genauigkeit zu bestimmen; ein Versuch, dieses dennoch zu leisten, welchen ich im Jahre 1812 bekannt gemacht habe**, ist daher sehr unvollkommen geblieben und bedarf wesentlich derjenigen Vervollkommnung, welche ich aus einer Reihe mit dem grossen Heliometer der Königsberger Sternwarte gemachten Beobachtungen des Satelliten jetzt ziehen kann.

Diejenige Art von Beobachtungen, welche die früheren Astronomen uns hinterlassen haben, nämlich die Schätzung der Conjunctionszeiten des Satelliten, entweder mit dem Mittelpunkte oder mit einem Rande des Planeten oder seines Ringes, kann nur dann mit einiger Sicherheit gemacht werden, wenn die Entfernung des Satelliten von der grossen Axe der scheinbaren Ringellipse klein ist; dieses findet nur dann statt, wenn der Planet sich in der Nähe der Knotenlinie der Trabantenbahn befindet, und es folgt hieraus, dass alle sicherere Beobachtungen des Trabanten in zwei diametral einander entgegengesetzte Theile seiner Bahn fallen und daher zur Bestimmung aller Elemente, von welchen der Ort des Trabanten in seiner Bahn abhängt, nicht hinreichend sind. Man muss also die besseren Beobachtungen mit schlechteren vermischen, um eine vollständige Bestimmung zu erhalten. Hierin liegt die eigentliche Schwierigkeit der Aufgabe; allein

* [251 d. a. Verz. — Br. m. O. II. 340—49, 352 (O.), 359, 371 (O.). — MARTIN, Untersuchungen über Satelliten, Astr. Nachr. 44.]

** Königsberger Archiv f. Naturwissensch. u. Math., p. 113. [s. die vorangehende Abhandlung 17.]

dieselbe würde noch stärker hervortreten, wenn nicht die Apsidenlinie der Bahn eine beträchtliche Bewegung besässe, vermöge welcher ihre Lage, seit der Hugenischen Entdeckung des Trabanten, sich bereits um einen Quadranten geändert hat; diese Bewegung führt immer andere Punkte der Ellipse in die Gegenden der Bahn, welche sicherer beobachtet werden können, und es würde während der langen Zeit, welche die Beobachtungen umfassen, wirklich alle Schwierigkeit verschwunden sein, wenn wir von allen Durchgängen des Saturns durch die Knotenlinie so genügende Nachrichten besässen als diejenigen sind, welche wir HERSCHEL und KÖHLER vom Durchgange von 1789 verdanken. Will man diese Schwierigkeit nicht durch die Hoffnung, dass im Verlaufe eines folgenden Jahrhunderts nachgeholt werde, was in einem früheren versäumt worden ist, sondern schon in unserer Zeit zu beseitigen suchen, so bleibt nur die Anstellung einer Beobachtungsreihe anderer Art, nämlich einer solchen, durch welche der Ort des Trabanten vollständig und in jedem Punkte seiner Bahn mit gleicher Sicherheit angegeben wird, übrig; nur eine solche Beobachtungsreihe kann auch die zur Erkenntnis der Masse des Planeten notwendige Bestimmung der mittleren Entfernung des Trabanten ergeben und die Lage seiner Bahn festsetzen, von welcher bisher angenommen worden ist, dass sie mit der Lage der Ringebene zusammenfalle. Ist es gelungen, aus Beobachtungen dieser Art sämtliche Elemente für die gegenwärtige Zeit zu bestimmen, so werden die älteren Nachrichten nur zu Rathe gezogen werden dürfen, um die mittleren Bewegungen der Länge des Trabanten und der Apsidenlinie und der Knoten seiner Bahn daraus zu erkennen, welche geringere Zahl von Elementen dieselben mit weit mehr Sicherheit ergeben können als früher die grössere Zahl.

Eine Beobachtungsreihe dieser Art habe ich in der ersten auf die Aufstellung des Heliometers folgenden Periode der Sichtbarkeit des Saturns gemacht. Man wird im Folgenden sehen, dass ihr Zweck mit beträchtlicher Sicherheit erreicht worden ist, mit einer Sicherheit, welche keinen Zweifel darüber lässt, dass eine Fortsetzung derselben Beobachtungen durch einige Jahre hindurch eine Genauigkeit der Resultate geben wird, welche man in dem Falle eines Saturns-Satelliten vielleicht nicht erwartet hat. Diese weitere Verfeinerung der Resultate wird mich wahrscheinlich veranlassen, später auf diesen Gegenstand zurückzukommen; allein da es Bedürfniss wird, dass es bei dem bevorstehenden Durchgange des Planeten durch die Knotenlinie der Trabantenbahn nicht an Elementen fehle, aus welchen

die Zeiten und Umstände der Conjunctionen des Satelliten, der Finsternisse, welche derselbe durch den Planeten und vielleicht auch durch den Ring erleiden wird und der Vorübergänge seines Schattens hinreichend genau vorausberechnet werden können, so verzögere ich nicht die Mittheilung der auf den Beobachtungen der ersten Periode allein beruhenden Resultate. Denn, wenn die genannten Erscheinungen jetzt, nachdem man durch das Heliometer in den Stand gesetzt ist, den Satelliten in allen Punkten seiner Bahn mit genügender Genauigkeit zu beobachten, ihr früheres Interesse auch zum Theil verloren haben, so wird es doch sehr nützlich bleiben, sie mit der grössten Aufmerksamkeit zu verfolgen.

1.

Ich werde zuerst die Beobachtungen mit dem Heliometer insoweit erläutern, als es hier nothwendig ist. Wenn man eine der Objectivhälften so stellt, dass ihre Axe mit der Axe des Fernrohrs zusammenfällt, die andere aber so verschiebt und beide zusammen so um die Axe des Rohrs dreht, dass diejenige Entfernung und Lage der doppelten Bilder beider zu vergleichenden Gegenstände, welche man hervorbringen beabsichtigt, zuerst durch die Verschiebung nach einer Richtung, dann nach der entgegengesetzten, beide Male aber in der Mitte des Sehfeldes des in die Axe des Rohrs gestellten Oculars hervorgebracht werden, so gehen die Entfernung ($= s$) und die halbe Summe der Winkel, in welchen der grösste durch die beiden Gegenstände gelegte Kreis die Declinationskreise derselben durchschneidet ($= p$), aus den Ausdrücken:

$$\omega \operatorname{tg} s = mR; \quad p = \frac{1}{2}(n + n') + c$$

hervor, wo $\omega = 206264,8$, m die halbe Verschiebung der Objectivhälfte in Revolutionen der Schraube ausgedrückt, R den Werth einer solchen Revolution, n und n' die abgelesenen Angaben des Positionskreises und c seinen Indexfehler bezeichnen.

Den Werth von R habe ich für die Angabe t der Fahrn. Thermometers

$$= 52,91788 - (t - 49,2) 0,0004493$$

gefunden; über die Rechtfertigung der ersten Formel werde ich bei einer anderen Gelegenheit das Nöthige beibringen; zur Bestimmung von c sind eben so sichere als leicht anwendbare Mittel vorhanden. Den Positionswinkel p zähle ich so, dass er sich auf die Richtung von dem Gegenstande, dessen Ort als bekannt angenommen werden soll, nach dem zu bestimmenden bezieht, von Norden (wo er $= 0$ ist) nach derselben

Seite herum, auf welcher die Rectascensionen grösser werden. Diese Art der Angabe des Positionswinkels ist schon früher von Herrn HERSCHEL II gewählt worden, was mir, als ich sie vorschlug*), noch unbekannt war, jetzt aber ihre Zweckmässigkeit verbürgt.

Die Werthe von

$$2\omega \sin \frac{1}{2} s \sin p = x$$

$$2\omega \sin \frac{1}{2} s \cos p = y$$

können als das Resultat jeder Beobachtung mit dem Heliometer angesehen werden. Nachdem sie von dem Einflusse der Refraction befreit worden sind, werden sie durch die Rectascensionen und Declinationen des zum Grunde gelegten und des zu bestimmenden Punktes α , δ , α' , δ' folgendermassen ausgedrückt:

$$x = 2\omega \sin \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) \cos \frac{1}{2} (\delta' + \delta)$$

$$y = 2\omega \cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) \sin \frac{1}{2} (\delta' - \delta).$$

Für so kleine Entfernungen, wie bei dem Saturns-Satelliten vorkommen, können sie einfacher

$$x = s \sin p; \quad y = s \cos p$$

geschrieben werden. Da man aber die Beobachtungen des Satelliten nicht unmittelbar auf den Mittelpunkt des Planeten beziehen kann, so habe ich zwei Punkte zur Vergleichung angewandt, von welchen vorausgesetzt worden ist, dass sie in einer geraden, durch den Mittelpunkt gehenden Linie auf beiden Seiten gleich weit entfernt liegen. Diese waren meistens die beiden Scheitelpunkte der Ringellipse, oft aber auch die in der Richtung der grossen Axe dieser Ellipse befindlichen Punkte des Saturnsrandes. Nie ist die Beobachtung auf einen Punkt allein bezogen, sondern immer auf beide, wodurch die Entfernung derselben geradezu aus dem Resultate geschaff ist.

Wenn die auf beide Punkte sich beziehenden Werthe von x und y durch x_1 , y_1 , und x_2 , y_2 , bezeichnet werden, die Entfernung des Satelliten von dem Mittelpunkte des Planeten durch s , sein Positionswinkel an demselben durch p , $s \sin p$ und $s \cos p$ durch x und y , so findet man mit Rücksicht auf die Glieder der zweiten Ordnung:

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta \cdot xy \sin 1''$$

$$y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta \cdot xx \sin 1''$$

Nach diesen Formeln sind die folgenden Ortsangaben berechnet worden. Jede derselben ist das Resultat einer vollständigen Beobachtung; die um den Mittelpunkt des Saturns als symmetrisch angenommenen Punkte sind durch den Ring oder durch den Planeten selbst erkannt worden, je nachdem R oder P beigesetzt ist.

	M.Z.	x	y	
1829 Dec. 11.	11 ^b 17 ^m 35 ^s	-199 ^b 43	-167 ^b 34 R.	Unzuverlässig.
1830 Jan. 12.	9 55 35	-207,87	-19,13 ..	
21.	9 52 14	+187,86	+37,08 ..	
24.	9 21 23	+ 1,78	+54,62 ..	Am spätesten unruhige Luft.
	12 3 22	- 6,59	+53,27 ..	
25.	9 44 33	-79,15	+42,18 ..	
	11 27 39	-83,76	+40,95 ..	
26.	9 41 2	-146,20	+23,39 ..	
Febr. 1.	9 20 31	-19,69	-58,12 ..	
	11 8 28	-14,49	-57,95 ..	
2.	9 30 17	+59,38	-46,23 ..	Dunstig; d. Trabant schwer zu sehen.
	9 50 51	+60,96	-46,50 ..	
6.	9 14 10	+186,00	+39,73 ..	
	9 57 11	+185,40	+39,70 ..	
14.	9 31 22	-196,42	-43,76 ..	Der Trabant fast unsichtbar.
15.	9 8 23	-152,79	-56,58 ..	
16.	9 8 0	-89,10	-62,37 ..	
	9 27 4	-87,71	-62,26 P.	
19.	10 11 45	+137,84	-26,18 R.	
24.	10 5 43	+62,18	+60,77 ..	Unruhige Luft.
März 1.	8 47 15	-207,84	-25,22 ..	
	9 37 52	-208,01	-25,80 P.	
3.	11 51 36	-138,91	-59,00 R.	
	12 18 9	-138,09	-59,22 ..	
10.	9 13 15	+175,75	+43,69 ..	
	10 2 21	+174,16	+43,93 ..	
14.	7 59 31	-94,86	+41,17 ..	
	8 18 53	-95,24	+40,86 P.	
	9 27 50	-98,38	+40,05 ..	
	9 46 38	-100,02	+39,23 R.	
15.	8 55 50	-157,84	+19,58 ..	
	8 56 17	-157,48	+19,85 P.	
17.	7 17 56	-203,98	-25,87 R.	
	7 17 50	-203,71	-25,65 P.	
	9 19 45	-203,57	-27,46 R.	
	9 20 4	-203,40	-27,28 P.	
22.	9 55 59	+80,38	-43,41 R.	Rasse u. unendlich.
	9 57 14	+81,08	-43,42 P.	
27.	8 57 20	+118,98	+56,95 R.	Dunstig, schwer zu sehen.
April 5.	10 58 24	-59,19	-61,16 ..	
	10 59 23	-59,34	-60,84 P.	Unsicher.
	11 27 39	-57,91	-61,59 R.	
18.	9 34 38	-191,98	-29,33 ..	
	9 35 37	-191,89	-29,35 P.	
19.	8 58 57	-170,00	-46,49 R.	Schwer zu sehen.
	9 40 20	-168,29	-45,92 ..	
21.	9 55 7	-57,83	-60,11 ..	
	9 54 22	-57,24	-59,87 P.	Dunstige Luft.
24.	9 10 17	+139,00	-20,07 R.	
	9 10 11	+139,04	-19,80 P.	
25.	9 51 14	+174,01	+4,07 R.	
	9 51 41	+174,11	+4,24 P.	
26.	9 36 4	+178,96	+26,21 R.	
	9 35 46	+178,98	+26,49 P.	
27.	10 17 33	+152,94	+44,80 R.	Unendlich kaum zu sehen.
	10 17 41	+153,57	+44,83 P.	
29.	9 17 16	+37,84	+56,12 R.	Sehr dunstig, Am spätesten schwer zu sehen.
	9 46 32	+36,74	+55,92 ..	

*) Astr. Nachr. Nr. 189, p. 412.

Bessel's Abhandlungen. I Bd.

	M. Z.	x	y	
1830 Mai 3.	9 ^h 44 ^m 39 ^s	- 183,98	- 7,90 R.	Unruhig Luft; schwer zu sehen.
	10 6 45	- 183,81	- 8,83 „	
	10 28 17	- 184,04	- 8,66 „	Schwer zu sehen.
5.	8 51 27	- 164,14	- 45,02 „	
	8 51 34	- 164,10	- 44,77 P.	Unruhig u. dunstig
	9 22 19	- 162,89	- 45,30 R.	
	9 22 1	- 162,83	- 44,82 P.	Schwer zu sehen.
6.	8 58 28	- 117,95	- 55,26 R.	
8.	9 20 53	+ 14,95	- 51,27 „	Schwer zu sehen.
	9 20 32	+ 14,85	- 51,17 P.	
	10 33 15	+ 17,54	- 51,14 R.	Schwer zu sehen.
	10 33 50	+ 17,91	- 50,99 P.	
12.	9 18 50	+ 174,21	+ 25,70 R.	Schwer zu sehen.
	9 41 39	+ 173,70	+ 25,59 „	
15.	11 12 21	+ 30,71	+ 54,98 „	Schwer zu sehen.
16.	9 43 18	- 35,74	+ 46,96 „	
	10 12 45	- 37,47	+ 46,36 „	Schwer zu sehen.
17.	10 0 1	- 101,54	+ 32,00 „	
	10 2 1	- 102,59	+ 31,91 „	Schwer zu sehen.
18.	9 11 53	- 149,98	+ 12,86 „	
	9 11 53	- 150,11	+ 13,30 P.	Schwer zu sehen.
	9 38 55	- 150,80	+ 13,07 R.	
20.	10 48 29	- 180,21	- 28,23 „	Schwer zu sehen.
	11 5 5	- 180,28	- 28,91 „	

2.

Der Angabe der aus diesen Beobachtungen folgenden Elemente lasse ich die Auseinandersetzung der dabei befolgten Theorie vorangehen. Wenn α und δ die Rectascension und Declination des Saturns, α' und δ' des Trabanten bezeichnen, so hat man:

$$\left. \begin{aligned} \cos s &= \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha) \\ \sin s \cos p &= \cos \delta \sin \delta' - \sin \delta \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha) \\ \sin s \sin p &= \cos \delta' \sin(\alpha' - \alpha) \end{aligned} \right\} (a)$$

Bezeichnet man die aus dem Saturn gesehene Rectascension und Declination des Trabanten durch α_0 und d , seine Entfernung vom Saturn durch r , von der Erde durch ρ' , des Saturns von der Erde durch ρ , so ist:

$$\left. \begin{aligned} \rho' \cos \delta' \cos \alpha' &= \rho \cos \delta \cos \alpha + r \cos d \cos \alpha \\ \rho' \cos \delta' \sin \alpha' &= \rho \cos \delta \sin \alpha + r \cos d \sin \alpha \\ \rho' \sin \delta' &= \rho \sin \delta + r \sin d \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \rho' \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha) &= \rho \cos \delta + r \cos d \cos(\alpha - \alpha) \\ \rho' \cos \delta' \sin(\alpha' - \alpha) &= r \cos d \sin(\alpha - \alpha) \\ \rho' \sin \delta' &= \rho \sin \delta + r \sin d \end{aligned} \right\}$$

$$\omega \cdot \xi = r \frac{(\rho)}{\rho} \mathcal{A} [\sin u \cos(\alpha - N) \cos I - \cos u \sin(\alpha - N)]$$

$$\omega \cdot \eta = r \frac{(\rho)}{\rho} \mathcal{A} [\sin u \{ \cos \delta \sin I - \sin \delta \cos I \sin(\alpha - N) \} - \cos u \sin \delta \cos(\alpha - N)]$$

$$\omega \cdot \zeta = r \frac{(\rho)}{\rho} \mathcal{A} [\sin \delta \sin I + \cos \delta \cos I \sin(\alpha - N)] + \cos u \cos \delta \cos(\alpha - N)]$$

Multiplicirt man die Gleichungen (a) mit ρ' , so ergibt ihre Yergleichung mit den eben gefundenen:

$$\left. \begin{aligned} \rho' \cos s &= \rho + r [\sin d \sin \delta + \cos d \cos \delta \cos(\alpha - \alpha)] \\ \rho' \sin s \cos p &= r [\sin d \cos \delta - \cos d \sin \delta \cos(\alpha - \alpha)] \\ \rho' \sin s \sin p &= r \cos d \sin(\alpha - \alpha) \end{aligned} \right\}$$

wofür ich schreiben werde:

$$\left. \begin{aligned} \rho' \cos s &= \rho \cdot (1 + \xi) \\ \rho' \sin s \cos p &= \rho \cdot \eta \\ \rho' \sin s \sin p &= \rho \cdot \zeta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (b)$$

Man erhält hierdurch, wenn man $\omega \tan s$ und s wechselt, was ohne merklichen Fehler geschehen kann, die Ausdrücke der beobachteten Größen x und y :

$$x = \frac{\omega \cdot \xi}{1 + \xi}; \quad y = \frac{\omega \cdot \eta}{1 + \xi}$$

Die Größen ξ, η, ζ sind nun durch die Elemente der Bahn des Trabanten auszuzeichnen. Ich werde folgende Bezeichnungen anwenden:

- Länge des aufsteigenden Knotens der Trabantenbahn auf der Ekliptik n
- Neigung gegen die Ekliptik i
- Länge des aufsteigenden Knotens auf dem Aequator N
- Neigung gegen den Aequator I
- Entfernung der Ekliptik vom Aequator, auf der Trabantenbahn gemessen α
- Länge des Trabanten in seiner Bahn v
- Seine Entfernung vom Aequator $v - n + \alpha = u$
- Mittlere Entfernung des Saturns von der Sonne (ρ)
- Halbe grosse Axe der Trabantenbahn $(\rho) \sin \mathcal{A}$

wo also \mathcal{A} die mittlere Elongation des Trabanten bedeutet. Misst man die Entfernung r des Trabanten vom Saturn durch die halbe grosse Axe seiner Bahn, so wird statt dieses Zeichens jetzt

$$(\rho) \sin \mathcal{A} \cdot r$$

oder mit hinreichender Genauigkeit

$$(\rho) \frac{\mathcal{A}}{\omega} r$$

geschrieben.

Diesen Bezeichnungen zufolge hat man:

$$\left. \begin{aligned} \cos d \cos(\alpha - \alpha) &= \sin u \sin(\alpha - N) \cos I + \cos u \cos(\alpha - N) \\ \cos d \sin(\alpha - \alpha) &= \sin u \cos(\alpha - N) \cos I - \cos u \sin(\alpha - N) \sin I \\ \sin d &= \sin u \sin I \end{aligned} \right\}$$

und wenn man dieses in die Ausdrücke (b) setzt:

Bestimmt man nun Hülfswinkel f, F, g, G, h, H nach den Formeln:

$$\begin{aligned}\sin f \cos F &= \cos(\alpha - N) \cos I \\ \sin f \sin F &= -\sin(\alpha - N) \\ \cos f &= -\cos(\alpha - N) \sin I \\ \sin g \cos G &= \cos \delta \sin I - \sin \delta \cos I \sin(\alpha - N) \\ \sin g \sin G &= -\sin \delta \cos(\alpha - N) \\ \cos g &= \cos \delta \cos I + \sin \delta \sin I \sin(\alpha - N) \\ \sin h \cos H &= \sin \delta \sin I + \cos \delta \cos I \sin(\alpha - N) \\ \sin h \sin H &= \cos \delta \cos(\alpha - N) \\ \cos h &= \sin \delta \cos I - \cos \delta \sin I \sin(\alpha - N)\end{aligned}$$

so erhält man die zur Rechnung bequemen Ausdrücke:

$$\omega \cdot \xi = r \frac{(\varrho)}{\varrho} \Delta \sin f \sin(F + \nu)$$

$$\omega \cdot \eta = r \frac{(\varrho)}{\varrho} \Delta \sin g \sin(G + \nu)$$

$$\omega \cdot \zeta = r \frac{(\varrho)}{\varrho} \Delta \sin h \sin(H + \nu)$$

oder, wenn man f', g', h' für

$$\frac{(\varrho)}{\varrho} \Delta \sin f; \quad \frac{(\varrho)}{\varrho} \Delta \sin g; \quad \frac{(\varrho)}{\varrho} \Delta \sin h,$$

und F', G', H' für

$$F + \nu - n; \quad G + \nu - n; \quad H + \nu - n$$

schreibt:

$$\omega \cdot \xi = r \cdot f' \sin(F' + \nu)$$

$$\omega \cdot \eta = r \cdot g' \sin(G' + \nu)$$

$$\omega \cdot \zeta = r \cdot h' \sin(H' + \nu)$$

Für die Grössen $\log f', \log g', \log h', F', G', H'$ kann eine Ephemeride berechnet werden, welche das zur Berechnung von ξ Nothwendige aber nur mit geringer Annäherung enthalten darf, indem der Einfluss von ξ auf x und y sehr gering ist.

Nimmt man die Bewegung des Trabanten als rein

$$a = \omega \cdot \frac{d\xi}{dE} = \frac{f'}{\sqrt{1-ee}} \left\{ \cos(F' + \nu) + e \cos(F' + P) \right\}$$

$$b = \omega \cdot \frac{d\xi}{e dP} = \frac{-f'}{\sqrt{1-ee}} \left\{ \cos(F' + \nu) (\cos e \sqrt{1-ee} + \frac{e}{1 + \sqrt{1-ee}}) + \cos(F' + P) \right\}$$

$$c = \omega \cdot \frac{d\xi}{d\epsilon} = \frac{f'}{\sqrt{1-ee}} \left\{ \cos(F' + \nu) \sin \epsilon - \sin(F' + P) \sqrt{1-ee} \right\}$$

$$d = \omega \cdot \frac{d\xi}{dJ} = \frac{\omega \cdot \xi}{J}$$

$$e = \omega \cdot \frac{d\xi}{\sin I \cdot dN} = -f' \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \cdot r \cos(F' + \nu) \cos \nu - \frac{(\varrho)}{\varrho} \Delta \cos f \cdot r \cos(\nu - n + \nu)$$

$$f = \omega \cdot \frac{d\xi}{dI} = f' \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \cdot r \cos(F' + \nu) \sin \nu + \frac{(\varrho)}{\varrho} \Delta \cos f \cdot r \sin(\nu - n + \nu)$$

Zieht man vor, $\sin i \cdot dn$ und di , nämlich die Verbesserung der angenommenen Länge des Knotens auf der Ekliptik und der Neigung gegen dieselbe, statt der

elliptisch an und bezeichnet man die mittlere Länge für das Moment, von welchem man die Zeit t an rechnet, durch E , die tägliche Bewegung durch λ , die Länge des Perisaturniums durch P , die Excentricität durch e , die mittlere, excentrische und wahre Anomalie durch μ, ϵ, φ , so hat man:

$$\mu = E + \lambda t - P' = \epsilon - e \sin \epsilon$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\nu - P) = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \epsilon$$

$$r = 1 - e \cos \epsilon$$

und hiermit also alle zur Vergleichung gegebener Elemente mit den Beobachtungen nothwendigen Formeln.

3.

Um näherungsweise bekannte Elemente durch ihre Vergleichung mit den Beobachtungen zu berichtigen, hat man für jede Beobachtung die Bedingungsgleichung

$$0 = n + a \cdot dE + b \cdot edP + c \cdot de + d \cdot dd\Delta + \epsilon \cdot \sin IdN + f \cdot dI$$

sowohl für x als auch für y zu berechnen und endlich alle zusammen nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösen. Wenn die Beobachtungsreihe nur eine kurze Zeit umfasst, kann λ ohne merklichen Fehler so angenommen werden, wie frühere Bestimmungen es ergeben haben, oder es ist unnöthig, den Einfluss des Fehlers dieser Annahme auf die Endresultate zu entwickeln. Ferner ist es wegen des geringen Einflusses von ξ unnöthig, die Veränderung seines Werthes, welche aus den Verbesserungen der angenommenen Elemente entsteht, zu berücksichtigen. Man wird also statt x und y nur $\omega \cdot \xi$ und $\omega \cdot \eta$ differentiiren dürfen, um die Coefficienten a, b, c etc. . . . zu erhalten.

Die bequemsten Formeln für die Berechnung dieser Coefficienten scheinen mir folgende zu sein:

auf den Aequator sich beziehenden ähnlichen Grössen in die Rechnung einzuführen, so hat man statt der beiden letzten Formeln:

$$-f' \operatorname{tg} \frac{1}{2} i . r \cos (F'' + r) - \frac{(\varrho)}{\varphi} \mathcal{A} \cos f . r \cos (v - n)$$

und $\frac{(\varrho)}{\varphi} \mathcal{A} \cos f . r \sin (v - n)$

Um die ähnlichen Differentialquotienten von η und ζ zu finden, werden f, F' mit g, G und h, H vertauscht, allein es ist, wie ich schon bemerkt habe, unnöthig, die letzteren zu berechnen. Die nicht von dem jedesmaligen Orte des Trabanten abhängigen Theile dieser Formeln können theils aus der oben erwähnten Ephemeride, theils aus ihr noch hinzuzufügenden Columnen genommen werden; bei einer Anwendung derselben Formeln auf eine im Raume feste Bahn sind diese Theile constant.

4.

Bei der Anwendung dieser Vorschriften auf meine Beobachtungen habe ich die gerade Aufsteigung, Abweichung und Entfernung des Saturns aus ENCKE'S Astronomischem Jahrbuch genommen; die mittlere Entfernung von der Sonne habe ich nach BOUVARD'S dieser Ephemeride zum Grunde liegenden Tafeln, welche für $1800 + t$

$$\begin{aligned} \text{die grösste Entfernung} &= 10,078362 + t, 0,00001140 \\ \text{die kleinste } &= 9,007118 - t, 0,00004814 \\ \text{also die mittlere } &= 9,542740 - t, 0,00001837 \end{aligned}$$

und daher für 1830

$$(\varrho) = 9,542189; \quad \log(\varrho) = 0,9796480$$

ergeben, angenommen. Die Beobachtungszeiten habe ich durch Hinzufügung von

$$- 1^h 12^m 39^s - \varrho . 493,15$$

auf den Pariser Meridian und auf die Momente des Ausganges des Lichts von dem Planeten reducirt; die Berliner Ephemeride gilt für $11^h 15^m 47,4$ derselben Zeit.

Von den im ersten Artikel mitgetheilten Beobachtungen habe ich alle diejenigen ausgeschlossen, welche durch die ihnen beigefügten nachtheiligen Bemerkungen mehr oder weniger unsicher erscheinen; die übrigen haben, unter Annahme von $\lambda = 22^{\circ} 34' 37''$, 1861, folgende Elemente ergeben:

Epoche 1830, Pariser Meridian	$E = 125^{\circ} 3' 7,7$
Perisaturnium	$P = 243 37 43$
Excentricität	$e = 0,02871743$
Mittlere Elongation	$\mathcal{A} = 176,62537$
Aufst. Knoten auf dem Aequator	$N = 122^{\circ} 3' 27,4$
Neigung gegen den Aequator	$I = 6 42 13,3$
Aufst. Knoten auf der Ekliptik	$n = 167 39 34,5$
Neigung gegen die Ekliptik	$i = 27 34 28,8$

[Folgt eine Vergleichung der oben gegebenen Beobachtungen.]

Die Abweichungen der unzuverlässigen Beobachtungen von den Elementen sind allerdings grösser als die sich bei den zuverlässigeren zeigenden; in den meisten ungunstigen Fällen hätte gar nicht beobachtet werden sollen und es würde auch wohl nicht geschehen sein, wenn die unter nicht ungunstigen Umständen mit dem Heliometer erreichbare Sicherheit schon so vor Augen gelegen hätte, wie es jetzt, durch das erste Fehlerverzeichniss, der Fall ist. Inzwischen stimmen viele der unter ungunstigen Umständen gemachten Beobachtungen sehr nahe mit den Elementen überein: unter 56 Fehlern sind nur 13 eine halbe Secunde oder mehr betragende; einer ist darunter, der eine ganze Secunde überschreitet, der sich aber an einem Tage findet, an welchem der schlechte Zustand der Luft den Trabanten fast unsichtbar machte. — Wenn aber auch unter ungunstigen Umständen ein geringerer Grad von Sicherheit erreicht wird als unter günstigen, so hat das kraftvolle Instrument doch selbst dort so viel geleistet, dass ich ein Mikrometer, welches unter günstigen Umständen eine gleiche Wirkung hervorgebracht hätte, früher für einen sehr werthvollen Besitz gehalten haben würde.

Aus den 108 Fehlern, welche sich bei den 54 zuverlässigeren Beobachtungen finden, folgt die mittlere Abweichung der Elemente von jeder derselben $= \pm 0,2656$, die wahrscheinliche $= \pm 0,1791$. Der ersten Zahl gemäss habe ich den mittleren Fehler jedes der sechs Elemente berechnet:

$$\begin{aligned} dE &= 62,2 \\ e . dP &= 57,7 \\ de &= 0,0001679 \\ d\mathcal{A} &= 0,04513 \\ \sin I . dN &= 61,8 \\ dI &= 56,3 \end{aligned}$$

Vor einigen Jahren hat Herr SCHWABE in Dessau bemerkt, dass der Saturnsring nicht concentrisch mit dem Planeten sei, und zwar so, dass nicht etwa bald die eine, bald die andere, sondern immer die östliche Anse sich weiter entferne als die westliche. HARDING hat dieses gleichfalls so gesehen, und SCHUMACHER nicht nur dasselbe, sondern auch noch dazu bemerkt, dass der innere Rand des Ringes auf der Ostseite fortwährend verwaschener erschien, als der schärfer begrenzte auf der Westseite. STRUBE hat Messungen darüber angestellt und auch dadurch das, was das Augenmaass gezeigt hatte, bestätigt gefunden. Endlich haben HERSCHEL und SOUTH zwar durch ihre Messungen keinen Unterschied erkannt, halten aber denselben dennoch für augenscheinlich.*

*) [Vgl. Literatur nach Abb. 22.]

Vergleicht man die Unterschiede der Elemente von meinen Beobachtungen, an den Tagen, an welchen diese sowohl auf zwei Punkte am Ringe, als auch auf zwei Punkte am Saturn selbst gegründet wurden, so bemerkt man, dass die ersteren den Trabanten im Ganzen westlicher und südlicher ergeben haben als die letzteren; die Unterschiede an den einzelnen Tagen sind:

Febr. 16.	0,43 West	0,12 Süd
März 1.	0,28 Ost	0,19 „
14.	0,56 West	0,07 Nord
15.	0,84 „	0,58 Süd
17.	0,38 „	0,27 „
17.	0,27 „	0,22 „
17.	0,16 „	0,18 „
April 18.	0,08 „	0,00 „
24.	0,04 „	0,27 „
25.	0,09 „	0,17 „
26.	0,02 „	0,29 „
Mai 5.	0,07 „	0,48 „
8.	0,08 Ost	0,11 „
18.	0,13 „	0,44 „
Mittel ...	0,17 West	0,23 Süd

Nach diesen Beobachtungen läge daher der Mittelpunkt der äusseren Begrenzung des Ringes östlich von dem des Planeten und es ginge aus ihnen eine Bestätigung der früheren Wahrnehmung hervor; allein diese Bestätigung ist nicht direct genug erlangt, um Zutrauen zu verdienen. — Es würde übrigens sehr interessant sein, wenn man eine Excentricität des Ringes, und die Art, wie sie sich im Verlaufe der Zeit darstellen würde, sicher erkennen könnte; denn sie scheint mit unseren gegenwärtigen Ansichten von der Natur dieses Körpers nicht vereinigt werden zu können, sondern voraussetzen, entweder dass der Ring sich nicht um seine Axe drehe, oder dass er aus unzähligen, sich frei bewegenden Theilen bestehe, deren Bahnen eine gemeinschaftliche Apsidenlinie haben. Wenn die Beobachtungen nöthigen werden, eine Erklärung zu suchen, so wird die Theorie die Wahl derselben wahrscheinlich nicht zweifelhaft lassen. — Hier würde ich dieser Erscheinung nicht erwähnt haben, wenn sie nicht Einfluss auf die Uebereinstimmung der Beobachtungen unter einander erzielte: denn wenn man eine Excentricität des Ringes als unbekannt Grösse in die Bedingungsgleichungen einführt, so muss die Ueberein-

stimmung der Beobachtungen nothwendig dadurch vermehrt werden.

5.

Die im vorigen Artikel erlangten Resultate beruhen auf der Voraussetzung, dass die Bewegung des Trabanten in einer festen und rein elliptischen Bahn vor sich gehe. Der Theil der Störungen der Bewegung, welcher allein von der Anziehung der Sonne herrührt, kann leicht theoretisch bestimmt werden, enthält aber keine einigermaßen merkliche Glieder von so kurzer Periode, dass sie während der Dauer einiger Monate nicht als sich mit den Elementen vereinigt angesehen werden könnten. Die Anziehung der Ringe bringt eine Bewegung der Apsidenlinie hervor, welche aus den Beobachtungen erkannt werden muss, dann aber ein Datum zur Bestimmung der Masse der Ringe ergibt. Die Störungen, welche die übrigen Trabanten erzeugen, sind von den unbekannt Massen derselben abhängig und daher gleichfalls unbekannt; dass sie, oder eigentlich ihre Glieder von kurzen Perioden, aber nicht beträchtlich sein können, geht aus der Uebereinstimmung hervor, in welche rein elliptische Elemente mit meinen Beobachtungen haben gebracht werden können; das unscheinbare Ansehen dieser Trabanten lässt auch unbeträchtliche Massen und Grössen derselben vermuthen.

Die Anziehung der Sonne erzeugt aber Aenderungen der Elemente, welche theils von den gegenseitigen Stellungen der Sonne und des Trabanten unabhängig, theils von der Länge des Saturns in seiner Bahn abhängig sind, und welche ich nun näher untersuchen muss, damit die gefundenen Elemente durch Bestimmung ihrer Säcularbewegungen und periodischen Aenderungen auf andere Zeiten übertragen werden können.

Wendet man ansser den im vierten Artikel gebrauchten Bezeichnungen der Elemente der Trabantenbahn noch die folgenden an: siderische Umlaufszeit T , Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn auf der Saturnsbahn n' , Neigung beider gegen einander i' , Entfernung des Perisaturniums vom Knoten Γ , des Saturns vom Knoten u' , Umlaufszeit, wahre Anomalie und Excentricität des Saturns T' , φ' , e' , so erhält man diejenigen Theile der Differentiale der Elemente, welche die Länge des Trabanten nicht enthalten:

$$dA = 0$$

$$dE = \frac{T'}{T} \cdot \frac{(1 + e' \cos \varphi') d\varphi'}{\sqrt{(1 - e'^2)^3}} \left\{ -1 + \frac{1}{2} \sin i'^2 - \frac{1}{2} \sin i'^2 \cos 2u' + \frac{1}{2} [1 + ee' - \sqrt{1 - ee'}] \times \right.$$

$$\left. \left[-1 + \frac{1}{2} \sin i'^2 - \frac{1}{2} \sin i'^2 \cos 2u' - \frac{1}{2} \sin i'^2 \cos 2\Gamma - 5(\cos 2u' \cos 2\Gamma \cdot \frac{1 + \cos i'^2}{2} + \sin 2u' \sin 2\Gamma \cos i') \right] \right\}$$

$$dP = \frac{T}{T'} \cdot \frac{\sqrt{1-ee'(1+e'\cos\varphi')d\varphi'}}{\sqrt{(1-e'e')^2}} \cdot \frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \sin i'^2 + \frac{1}{3} \sin i'^2 \cos 2u' + \frac{1}{3} \sin i'^2 \cos 2\Gamma + \right. \\ \left. + 5 \left(\cos 2u' \cos 2\Gamma \cdot \frac{1+\cos i'^2}{2} + \sin 2u' \sin 2\Gamma \cos i' \right) \right\}$$

$$de = \frac{T}{T'} \cdot \frac{\sqrt{1-ee'(1+e'\cos\varphi')d\varphi'}}{\sqrt{(1-e'e')^2}} \cdot \frac{1}{3} e' \left\{ \frac{1}{3} \sin i'^2 \sin 2\Gamma + \cos 2u' \sin 2\Gamma \cdot \frac{1+\cos i'^2}{2} - \sin 2u' \cos 2\Gamma \cos i' \right\}$$

$$di' = -\frac{T}{T'} \cdot \frac{(1+e'\cos\varphi')d\varphi'}{\sqrt{1-ee'} \cdot \sqrt{(1-e'e')^2}} \sin i' \cdot \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3} ee' \cos i' \sin 2\Gamma - \frac{1}{3} ee' \cos i' \sin 2\Gamma \cos 2u' + \sin 2u' (1 + \frac{1}{3} ee' + \frac{1}{3} ee' \cos 2\Gamma) \right\}$$

$$dn' = -\frac{T}{T'} \cdot \frac{(1+e'\cos\varphi')d\varphi'}{\sqrt{1-ee'} \cdot \sqrt{(1-e'e')^2}} \cdot \frac{1}{3} \left\{ \cos i' (1 + \frac{1}{3} ee' - \frac{1}{3} ee' \cos 2\Gamma) - \cos 2u' \cos i' (1 + \frac{1}{3} ee' - \frac{1}{3} ee' \cos 2\Gamma + \frac{1}{3} ee' \sin 2\Gamma \sin 2u') \right\}$$

Diese Ausdrücke sind in Beziehung auf die erste Potenz der Saturnsmaße und des Verhältnisses der Entfernungen vollständig. Die u' und φ' nicht enthaltenden Theile derselben sind die Säcularbewegungen, welche man unter Voraussetzung von

$$T = 15794545154 \\ T' = 10759725182 \\ e = 0,02871743 \\ e' = 0,05622557 \\ i' = 26^\circ 13' 54''$$

und unter Annahme des Julianischen Jahres als Zeiteinheit folgendermassen findet:

$$\frac{dE}{dt} = -46,357 - 0,030 \cos 2\Gamma \\ \frac{dP}{dt} = +34,721 + 23,988 \cos 2\Gamma \\ \omega \cdot \frac{de}{dt} = +23,988 e \sin 2\Gamma \\ \frac{di'}{dt} = -0,040 \sin 2\Gamma \\ \frac{dn'}{dt} = -44,147 + 0,091 \cos 2\Gamma$$

Diese Formeln zeigen, dass die Ausdrücke aller fünf Elemente Ungleichheiten enthalten, deren Argument 2Γ ist; die Grösse derselben hängt von der Schnelligkeit ab, mit welcher Γ sich ändert, wofür die Beobachtungen für ein Jahr etwa einen halben Grad ergeben werden. Diese Ungleichheiten können daher nur für die Lage der Apisidenlinie und die Excentricität einigermassen merklich werden. Vernachlässigt man sie bei den übrigen Elementen, so wird die mittlere Neigung der Bahn beständig, die rückgängige Bewegung der Knotenlinie = $-44,147$ jährlich; allein LAPLACE hat bemerkt, dass die Wirkungen der sphäroidischen Gestalt des Saturns und der Ringe die von der Sonne erzeugten Säcularänderungen der Ebene der Bahn des Hugenischen Satelliten noch wesentlich vermindern können, so dass man nur berechtigt ist, die jährliche Bewegung der Knotenlinie auf der Saturnsbahn = $-44,147.k$ anzunehmen, wo

k einen nicht 1 überschreitenden positiven Factor bedeutet, dessen Bestimmung nur die Vergleichung der Elemente mit älteren Beobachtungen ergeben kann, da die Grundlagen zu seiner theoretischen Bestimmung noch fehlen.

Die periodischen Glieder, welche die Integration der Differentiale der Elemente gibt, sind von den Winkeln $2u'$, $2u' - \varphi'$ und $2u' + \varphi'$ abhängig; nur die ersteren sind nicht in die Excentricität der Saturnsbahn multiplicirt, die Berechnung der beiden anderen hat kein Interesse, da sie durch die Multiplication mit diesem Factor für einen Beobachter auf der Erde unmerklich werden. Die von $2u'$ abhängigen haben, wenn man einen sehr kleinen, in $\sin \frac{1}{2} i'^4$ multiplicirten Theil derselben weglässt, folgende Werthe:

$$E \dots - 45,0 \sin 2u' \\ P \dots + 33,7 \sin 2u' + 517,9 \sin (2u' - 2\Gamma) \\ \omega \cdot e \dots + 14,9 \cos (2u' - 2\Gamma) \\ i' \dots + 51,0 \cos 2u' \\ n' \dots + 103,5 \sin 2u'$$

Das von $\sin 2u'$ abhängige Glied von P erhält keinen bedeutenden Einfluss auf den Ort des Trabanten; auch alle übrigen Ungleichheiten können den Ort, von der Erde gesehen, nicht über ein Zehntel einer Secunde ändern. Allein dennoch dürfen sie nicht vernachlässigt werden, indem die mittleren Fehler, welche die Beobachtungen eines einzigen Jahres in den Elementen (Art. 4) übrig gelassen haben, nicht viel beträchtlicher sind, als die sich mit denselben vereinigenden periodischen Störungen. Ich werde sie also zuerst anwenden, um die aus den Beobachtungen unmittelbar hergeleiteten gestörten Elemente in mittlere zu verwandeln.

Die Zeit, für welche die im vierten Artikel erhaltene Bestimmung gilt, kann = 1830,2 gesetzt werden; für diese Zeit ist die Länge des Saturns = $136^\circ 8'$, $n' = 171^\circ 50'$, $u' = 144^\circ 18'$, $\Gamma = 71^\circ 19'$, und hiermit finden sich die mittleren Werthe der Elemente für 1830,2:

Epoche 1830.	$E = 125^{\circ} 2' 25,1$
Perisaturnium	$P = 243 33 30$
Excentricität	$e = 0,02877729$
Aufsteigender Knoten auf d. Ekliptik	$n = 167^{\circ} 41' 5''$
Neigung	$i = 27 34 9,2$

6.

Unter den Säcularänderungen dieser Elemente werde ich die die Ebene der Bahn angehenden zuerst untersuchen, indem man diese fast unabhängig von den übrigen Elementen aus der Vergleichung einiger älterer Wahrnehmungen erhalten kann.

$$n = 167^{\circ} 41' 5,0 + t [49,545 - k . 42,024] + 98,9 \sin(2 u' + 5^{\circ} 12')$$

$$i = 27 34 9,2 + t [-0,780 + k . 1,582] + 51,0 \cos(2 u' + 4 11)$$

Es sind drei ältere Beobachtungen vorhanden, welche benutzt werden können, den Werth von k in gewisse Grenzen einzuschliessen. Die sicherste von allen ist die des Vorüberganges des Schattens des Trabanten vor der Scheibe des Planeten, welchen HERSCHEL am 2. November 1789 zu sehen das seltene Glück hatte. Eine andere ist von KÖHLER, welcher den Durchgang des Trabanten durch die kleine Axe der Ringellipse am 12. November 1790 beobachtete und die sehr kleine Entfernung vom Rande des Planeten, in welcher er erfolgte, der Breite der Henkel, da wo sie an den Planeten anstossen, gleich fand. Die dritte ist vom 25. März 1715, wo CASSINI II eine Bedeckung des Trabanten vom Planeten beobachtete und dabei angab, „dass derselbe mit dem ersten und dritten Trabanten „und dem Schatten des Ringes, welcher durch den „Mittelpunkt des Saturns ging, nahe in gerader Linie „gewesen sei.“ Die letztere Angabe ist nicht so bestimmt ausgesprochen, als man wünschen könnte; allein ihre der Zeit nach beträchtliche Entfernung lässt selbst eine kleine Bewegung der Knotenlinie so stark hervortreten, dass auch diese Angabe zur Ausmittelung der Grenzen, zwischen welchen k enthalten ist, beitragen kann.

Da diese Beobachtungen, sowie alle übrigen vorhandenen älteren Angaben, welche ich noch benutzen werde, um die mittleren Bewegungen des Trabanten und der ApSIDENLINIE seiner Bahn daraus abzuleiten, sich auf die Ringellipse beziehen, so setzt ihre Berechnung die Kenntniss der Lage der Ringebene voraus. Die Länge der Knotenlinie dieser Ebene auf der Saturnsbahn habe ich früher aus den Beobachtungen, welche über die Verschwindungs- und Wiedererscheinungszeiten des Ringes in den Jahren 1715, 1774, 1789 und 1803 gemacht sind, zu bestimmen gesucht; die Neigung aus

Nimmt man die Länge des aufsteigenden Knotens der Saturnsbahn und ihre Neigung aus BOUVARD'S Tafeln, nämlich für 1830,2 + t :

$$112^{\circ} 11' 35,1 - t . 19,369 + \text{Präcession}$$

$$2 29 31,3 - t . 0,155$$

so findet man die jährlichen Aenderungen von n und i , bezogen auf die bewegliche Ekliptik:

$$= + 50,231 - 0,686 \text{ und } = - 0,780;$$

fügt man noch hinzu, was aus der Bewegung der Trabantenbahn auf der Saturnsbahn hervorgeht, so erhält man folgende Formeln für die Zeit 1830,2 + t :

eigenen, im Jahre 1818 gemachten Beobachtungen der Positionswinkel der Ansenlinie. Es hat sich jedoch die beträchtliche Schwierigkeit gefunden, dass sich keine Ebene angeben lässt, durch welche die Erde oder die Sonne nicht einige Male früher durchgegangen wäre als der Ring verschwand, oder später als er wiedererschien. Dieses könnte nicht sein, wenn der Ring ganz in einer Ebene läge; wenn es sich aber ereignet hat, so folgt daraus, dass nicht sowohl die Lage einer bestimmten Ringebene, als die Lage derjenigen Ebene, welche den Erscheinungen am nächsten Genüge leistet und aus welcher die Theile des Ringes sowohl nach der einen als nach der anderen Seite ausweichen, das Resultat der Beobachtungen sein kann. Die hierin liegende Unbestimmtheit ist zwar nicht geeignet, der folgenden, aus den angeführten Beobachtungen abgeleiteten Formel für die Länge des aufsteigenden Knotens n'' und die Neigung i'' der Ringebene zur Zeit 1800 + t grosses Zutrauen zu erwerben:*)

$$n'' = 166^{\circ} 50' 41'' + 40,65 . t$$

$$i'' = 28 22 1 - 0,38 . t$$

allein die Unsicherheit dieser Formel scheint auch nicht beträchtlich grösser zu sein, als die Unbestimmtheit selbst. Wenigstens hat eine zahlreiche Reihe im Jahre 1830 gemachter Beobachtungen der Positionswinkel der Ansenlinie eine nahe Bestätigung der Formel ergeben. Indessen wird der bevorstehende Durchgang des Saturns durch die Knotenlinie der Ringebene Veranlassung geben, durch die Anwendung jetzt vorhandener genügendere Mittel die Lage der Ringe genauer zu bestimmen, weshalb ich auch aus den eben erwähnten neuen Beobachtungen nicht eher ein Resultat ziehen werde, als bis der Durchgang erfolgt und

*) Astron. Jahrb. f. 1829. [vgl. die betr. Abb. unter „Sphär. Astron.]

dadurch den Beobachtungen die wünschenswerthe Vollständigkeit gegeben sein wird. — Wenn man übrigens überlegt, worin der Einfluss der Lage der Ringebene auf die Durchgangszeiten des Trabanten durch die kleine Axe der Ringellipse besteht, so bemerkt man leicht, dass derselbe sehr klein ist, wenn der Ring sich wenig geöffnet zeigt, in welchem Falle allein die Schätzung dieser Durchgangszeiten durch das Augenmass mit einiger Sicherheit gemacht werden konnte. Es ist daher nicht zu fürchten, dass die sichereren unter den älteren Beobachtungen dadurch merklich an Werth verlieren, dass sie nicht auf die Declinations- oder Breitenkreise, sondern auf die Axen der Ringellipse bezogen sind.

7.

Ehe ich aus der Beobachtung des Schattenvorüberganges am 2. November 1789 Resultate ziehe, werde ich die Theorie solcher Erscheinungen entwickeln. Den Punkt der Planetenscheibe, an welchem der Schatten von der Erde gesehen erscheint, werde ich durch zwei sich auf die Axen der Ringellipse beziehende Angaben bezeichnen: nämlich durch den Winkel p , welchen ein auf die Ansenlinie senkrechter, durch den Schatten gelegter grösster Kreis und ein ähnlich durch den Mittelpunkt des Planeten gelegter einschliessen, und durch die Entfernung q des Schattens von der Ansenlinie; p werde ich positiv annehmen wenn der Schatten östlich, q wenn er nördlich vom Mittelpunkte erscheint.

Ich lege drei auf einander senkrechte Ebenen durch den Mittelpunkt des Saturns: die Ebene des Ringes; die darauf und auf der Knotenlinie desselben mit der

$$\left. \begin{aligned} \varrho'' \cos q \cos p &= \varrho' - \{ X \cos(\lambda' - n'') + Y \sin(\lambda' - n'') \} \cos \beta' - Z \sin \beta' \\ \varrho'' \cos q \sin p &= X \sin(\lambda' - n'') - Y \cos(\lambda' - n'') \\ \varrho'' \sin q &= - \{ X \cos(\lambda' - n'') + Y \sin(\lambda' - n'') \} \sin \beta' + Z \cos \beta' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (c)$$

in welchen ϱ'' die Entfernung des Schattens von der Erde, λ' und β' die auf die Ringebene bezogene Länge und Breite der Erde bedeuten.

Will man die Momente des Eintritts und Austritts des Schattens, so wie sie von der Erde sichtbar werden, finden, so hat man den in (a) und (b) enthaltenen Bedingungen noch hinzuzufügen, dass die entweder von der Erde oder von der Sonne nach dem Schatten gezogene gerade Linie das Ellipsoid tangire. Das erstere, welches durch die Gleichung

$$1 = \frac{\xi X}{aa} + \frac{\eta Y}{aa} + \frac{\zeta Z}{bb} \dots \dots \dots (d)$$

ausgedrückt wird, findet statt, wenn der Schatten an

Ekliptik senkrechte; die auf diese beiden senkrechte. Diejenigen Pole dieser Ebenen, in deren Richtung die Coordinaten x, y, z eines Punktes positiv genommen werden, sind für die erste der nördliche, für die zweite der in den aufsteigenden Knoten des Ringes fallende, für die dritte der um einen Quadranten nach der Ordnung der Zeichen von diesem entfernte. Die Coordinaten des Trabanten bezeichne ich durch x, y, z ; seines Schattens durch X, Y, Z ; der Sonne durch ξ, η, ζ ; der Erde durch ξ', η', ζ' .

Die Bedingung, dass die Sonne, der Trabant und der Schatten in gerader Linie liegen, wird durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} X &= x - h(\xi - x) \\ Y &= y - h(\eta - y) \\ Z &= z - h(\zeta - z) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (a)$$

ausgedrückt, in welchen h die Entfernung des Schattens vom Trabanten, die Entfernung des letzteren von der Sonne als Einheit augenommen, bedeutet. Die Bedingung, dass der Schatten auf der Oberfläche des Saturnsellipsoids liegt, dessen mit den drei Coordinatenaxen zusammenfallende Axen $2b, 2a, 2a$ sind, ist in der Gleichung

$$1 = \frac{XX}{aa} + \frac{YY}{aa} + \frac{ZZ}{bb} \dots \dots \dots (b)$$

enthalten, welche für h quadratisch ist, also zwei Werthe desselben ergibt, deren kleinster genommen werden muss, indem der Schatten auf der äusseren Oberfläche des Saturns liegt. Für eine gegebene Zeit, für welche die Coordinaten x, y, z als bekannt angenommen werden, erhält man aus diesen Gleichungen X, Y, Z und hiermit p und q aus den Formeln:

dem erleuchteten Rande des Planeten erscheint; das andere in der Gleichung

$$1 = \frac{\xi X}{aa} + \frac{\eta Y}{aa} + \frac{\zeta Z}{bb} \dots \dots \dots (c)$$

oder auch in der Bedingung, dass die beiden Werthe von h sich vereinigen, enthaltene, wenn er an der Lichtgrenze erscheint. Die eine oder die andere dieser Gleichungen, verbunden mit (a) und (b), lässt nach der Elimination von h, X, Y, Z die gesuchte Gleichung zur Bestimmung des Anfanges oder Endes des Schattenvorüberganges übrig. Ob der Rand, an welchem der Schatten erscheint, der erleuchtete oder die Lichtgrenze ist, wird durch das Zeichen des Ausdruckes

$$\frac{X(\xi - \xi')}{aa} + \frac{Y(\eta - \eta')}{aa} + \frac{Z(\zeta - \zeta')}{bb}$$

angegeben: wenn X, Y, Z den Gleichungen (a), (b), (c) gemäss bestimmt werden, so deutet das positive Zeichen den erleuchteten Rand, das negative die Lichtgrenze an; wenn sie den Gleichungen (a), (b), (d) gemäss bestimmt werden, so ist es umgekehrt. Aus diesen Gleichungen zur Rechnung bequeme Vorschriften abzuleiten unterlasse ich, da dieselben im Verlaufe dieser Abhandlung nicht gebraucht werden; dagegen werde ich vollständiger entwickeln, wie Beobachtungen von der Art der Herschel'schen vom 2. November 1789 zu berechnen sind, wenn man eine Ortsbestimmung des Trabanten daraus ableiten will.

Ich werde annehmen, dass entweder p allein, oder p und q für ein Zeitmoment während der Dauer des Vorüberganges bekannt geworden sind. Sie könnten durch Messungen gefunden werden, allein Schätzungen des Ortes des Schattens, bezogen auf die sichtbare Begrenzung der Scheibe, können die Stelle derselben

$$\frac{a}{r} \left\{ \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\cos b} - \frac{r}{\rho} \cdot \frac{\sin(\lambda' - l)}{\cos \beta} \right\}^2 = \left\{ \sin(l - \lambda) + \frac{\rho'}{r} p \cdot \frac{\cos(\lambda' - \lambda)}{\cos b} \right\}^2 + \left\{ \frac{\rho'}{r} p \cdot \frac{\sin(\lambda' - l)}{\cos \beta} \right\}^2 + \frac{a}{b} \left\{ \text{tg } \beta \sin(\lambda' - l) - \text{tg } b \sin(\lambda' - \lambda) - \frac{\rho'}{r} p \cdot \frac{\text{tg } \beta}{\cos b} \right\}^2.$$

Ferner erhält man durch Substitution derselben Ausdrücke in die letzte der Formeln (c):

$$q = \frac{r}{\rho'} \frac{\cos b \cos \beta}{\sin(\lambda' - \lambda)} \left\{ -\text{tg } \beta \sin(l - \lambda) + \text{tg } b \sin(\lambda' - \lambda) - \text{tg } \beta \sin(\lambda' - l) \right\} - p \cos \beta \left\{ \text{tg } \beta - \text{tg } \beta' \cos(\lambda' - \lambda) \right\}$$

Wenn man die Elemente der Bahn des Trabanten als bekannt annimmt, so gibt die erste Gleichung den Ort desselben in seiner Bahn, denn l, b, r hängen dann nur von diesem Orte ab; wenn r und l als bekannt angenommen werden, so erhält man aus der zweiten Gleichung b und damit ein Datum zur Bestimmung der Länge des Knotens. Die erste Gleichung wird am leichtesten durch Näherungen aufgelöst: man sucht nämlich einen Näherungswert von l nach der Formel:

$$\sin(l - \lambda) = \frac{a}{r} \sin(\lambda' - \lambda) - \frac{\rho'}{r} \cos(\lambda' - \lambda)$$

wobei man für r einen Näherungswert annimmt; dieses l und die bekannte Lage der Bahn ergeben b und die Länge in der Bahn, von welcher r abhängt, und hiernit kann man sämtliche Glieder der Gleichung in Rechnung bringen; die Convergenz dieses Verfahrens lässt in keinem Falle etwas zu wünschen übrig, indem die Breiten, immer wenn der Schatten vor der Planetenscheibe vorübergeht, sehr klein sind.

Wenn p nicht durch eine Messung bestimmt, sondern statt derselben die Conjunctionszeit des Schattens mit dem Mittelpunkte der Planetenscheibe angegeben

vertreten, so wie es bei der Herschel'schen Beobachtung wirklich der Fall war. Die Formeln (c) ergeben den Ausdruck von p durch die Coordinaten des Schattens ohne merklichen Fehler:

$$\rho' p = X \sin(\lambda' - n'') - Y \cos(\lambda' - n'').$$

Verbindet man dieses mit den Gleichungen (a), so erhält man:

$$\begin{aligned} NX &= (\xi y - \eta x) \cos(\lambda' - n'') + \rho' p (\xi - x) \\ NY &= (\xi y - \eta x) \sin(\lambda' - n'') + \rho' p (\eta - y) \\ NZ &= (\xi z - \zeta x) \sin(\lambda' - n'') - (\eta z - \xi y) \cos(\lambda' - n'') \\ &\quad + \rho' p (\zeta - z) \end{aligned}$$

wo N für

$$(\xi - x) \sin(\lambda' - n'') - (\eta - y) \cos(\lambda' - n'')$$

geschrieben ist. Diese Ausdrücke von X, Y, Z in die Gleichung (b) gesetzt, ergeben, wenn man ρ, λ, β für die Sonne und r, l, b für den Trabanten in derselben Bedeutung nimmt, welche ρ', λ', β' für die Erde haben und wenn man die nicht merklich werdenden Glieder weglässt:

ist, so ist p für diese Zeit nicht in aller Schärfe = 0, sondern es hat einen kleinen positiven oder negativen Werth, je nachdem der Planet von der Ostseite oder Westseite erleuchtet wird. Ich werde diesen Umstand bei der Herschel'schen Beobachtung nicht vernachlässigen, weil es ein Interesse hat, diese Beobachtung, die nicht nur einzig in ihrer Art, sondern auch die schätzbarste unter den älteren Beobachtungen ist, ganz genau zu berechnen.

Die Zeit der Conjunction, welche man beobachtet, ist die Zeit des Durchganges des Schattens durch den Mittelpunkt des sichtbaren Theiles der der Anselinie in der Entfernung q parallel gelegten Chorde; wenn die Werthe von p für die Endpunkte derselben p_1 und p_2 genannt werden, so ist also $p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$. Ich werde zuerst den in der Erleuchtungsgrenze liegenden Endpunkt bestimmen. Die Formeln (c) ergeben, wenn man durch X, Y, Z die Coordinaten eines in der Erleuchtungsgrenze liegenden Punktes der Saturnsoberfläche bezeichnet:

$$\begin{aligned} \rho' p_1 &= X \sin(\lambda' - n'') - Y \cos(\lambda' - n'') \\ \rho' q &= -\{X \cos(\lambda' - n'') + Y \sin(\lambda' - n'')\} \sin \beta' + Z \cos \beta' \end{aligned}$$

ferner hat man, da der Punkt in der Erleuchtungs-
oberfläche liegt, die Gleichung (e), und da er sich auf der
Oberfläche des Planeten befindet, die Gleichung (b).
Aus diesen vier Gleichungen wird nach der Elimination
von X, Y, Z die gesuchte Gleichung zwischen p , und q
gefunden. Um derselben die einfachste Gestalt zu ge-
ben, setzt man:

$$\begin{aligned} \rho \cos \beta &= \rho, \cos \beta, & \rho' \cos \beta' &= \rho' \cos \beta', \\ \frac{a}{b} \rho \sin \beta &= \rho, \sin \beta, & \frac{a}{b} \rho' \sin \beta' &= \rho' \sin \beta', \end{aligned}$$

und ferner

$$\begin{aligned} \sin \beta, \sin \beta' + \cos \beta, \cos \beta', \cos (\lambda' - \lambda) &= \cos d \\ \sin \beta, \cos \beta' - \cos \beta, \sin \beta', \cos (\lambda' - \lambda) &= \sin d \cos w \\ \cos \beta, \sin (\lambda' - \lambda) &= \sin d \sin w \end{aligned}$$

endlich

$$\begin{aligned} p, \cos w - \frac{a}{b} q \cdot \frac{\rho'}{\rho} \sin w &= u \\ p, \sin w + \frac{a}{b} q \cdot \frac{\rho'}{\rho} \cos w &= v \end{aligned}$$

und erhält dadurch

$$\cos d^2 \left\{ \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 - u u - v v \right\} = \left\{ c \sin d - \frac{a a'}{\rho \rho'} \right\}^2$$

oder ohne merkblichen Fehler:

$$\left(\frac{a}{\rho} \right)^2 = \frac{v v}{\cos d^2} + u u$$

wodurch p , gefunden wird. Die am Rande der Planeten-
scheibe liegenden Punkte der Chorde ergeben sich aus
der Gleichung:

$$\left(\frac{a}{\rho} \right)^2 = p, p, + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{\rho'}{\rho} \right)^2 q q.$$

Meistentheils wird der eine Endpunkt der Chorde am
erleuchteten Rande, der andere in der Lichtgrenze liegen;
es ist aber auch möglich, dass beide die eine oder die
andere Begrenzung haben. In Fällen wo hierüber ein
Zweifel bleibt, kann die Entscheidung durch das oben
angegebene Mittel erlangt werden.

8.

Die Conjunction des Trabantenschattens mit dem
scheinbaren Mittelpunkte des Saturns ereignete sich
nach HERSCHEL'S Beobachtung 1789 Novbr. 2. 1^h21^m51^s
St. Z. in Slough = 10^h43^m10^s M. Z. in Paris, welches
Moment 9^h28^m50^s reducirter Zeit entspricht, indem
das Licht 1^h14^m20^s verwandte, um von dem Trabanten
zum Schatten und von diesem zur Erde zu gelangen.
Den beobachteten Werth von p kann man, sobald q
bekannt ist, nach der Vorschrift im vorigen Artikel
finden; q aber ist nicht unmittelbar von HERSCHEL
angegeben, sondern er beschreibt nur den Weg, wel-
chen der Schatten auf der Scheibe des Planeten nahm,

durch eine Vergleichung desselben mit dem sichtbaren
Aequatoralstreifen: 52^m vor der Conjunction war der
Schatten etwas nördlich von diesem Streifen, allein er
näherete sich, während er fortschritt, der Mitte desselben,
und hatte sie zur Zeit der Conjunction erreicht.

Um hierans die Entfernung zu erkennen, in wel-
cher der Schatten bei dem Mittelpunkte des Planeten
vorbeiging, muss man die Art wie dieser sich darstellte,
kennen lernen. Der heliocentrische Ort des Planeten
ergibt sich aus BOUVARD'S Tafeln:

$$351^{\circ} 32' 50,6, \quad - 2^{\circ} 9' 12,4, \quad 0,9816958$$

der geocentrische:

$$346^{\circ} 44' 7,3, \quad - 2^{\circ} 18' 2,3, \quad 0,9559934,$$

woraus, unter Anwendung der Lage der Ringebene
nach der im sechsten Artikel angeführten Formel,
nämlich

$$n' = 166^{\circ} 43' 48'', \quad i' = 28^{\circ} 22' 5'',$$

die auf die Ringebene bezogenen Längen und Breiten
der Sonne und Erde:

$$\begin{aligned} \lambda &= 171^{\circ} 59' 28,9, & \beta &= - 0^{\circ} 23' 24,7 \\ \lambda' &= 167^{\circ} 49' 41,8, & \beta' &= + 2^{\circ} 18' 1,1 \end{aligned}$$

folgen.

Nimmt man die Halbmesser des Saturns, nach
meinen Beobachtungen im Jahre 1830, für die mittlere
Entfernung des Planeten:

$$a = 8,7503, \quad b = 7,837,$$

den äusseren Halbmesser des Ringes, gleichfalls nach
meinen Beobachtungen = 19,636, den inneren nach
den Struve'schen = 13,374, so zeigen die Breiten der
Sonne und der Erde über der Ringebene, dass der
Schatten des Ringes sich als ein dunkler Streifen pro-
jectirt haben muss, dessen Ränder 0,236 und 0,281
südlich von der Aenslinie lagen; die dunkle Seite des
Ringes aber als ein ähnlicher Streifen, dessen beide
Ränder 0,498 und 0,732 gleichfalls südlich lagen.
Es hätte also eine doppelte dunkle Linie auf dem
Saturn sichtbar sein sollen, allein HERSCHEL'S Zeich-
nung gibt nur eine einfache in dem Aequatoralstreifen
an, welche nicht genau durch die Mitte desselben,
sondern dieser etwas südlich vorbeigiegt; diese Linie ist
ohne Zweifel die dunkle Seite des Ringes; der Schatten
war wohl zu schmal, um unterschieden werden zu kön-
nen. Die Mitte der dunkeln Seite des Ringes projectirte
sich 0,615 südlich von der Aenslinie und 0,299 süd-
lich von dem Aequator des Planeten, welcher selbst
sich 0,316 südlich von der Aenslinie projectirte. Dies-
es stimmt, soweit man durch die Zeichnung beurtheilen
kann, mit der Annahme, dass die Mitte des Aequatoral-

streifens unter dem wahren Aequator des Planeten lag, völlig überein, und es scheint daher nicht, dass diese Annahme einen beträchtlichen Irrthum erzeugen könne. Ich nehme daher $q = -0,316$.

Dieser Werth von q ergibt, nach den Formeln des 7. Artikels, für die in der Lichtgrenze und am erleuchteten Rande des Planeten liegenden beiden Endpunkte der Chorde:

$$p = +8,9496; \quad p_n = -8,9718$$

also

$$p = \frac{1}{2}(p + p_n) = -0,0111.$$

Diese Beobachtung, sowie die beiden anderen im 6. Artikel angeführten gleichfalls zur Bestimmung der Bewegung der Knotenlinie anwendbaren, werde ich mit zwei Hypothesen über diese Bewegung vergleichen: die erste derselben setzt in den Formeln für n und i (Art. 6) $k = 0$ voraus, die zweite $k = 1$. Die Entfernung des Trabanten vom Saturn r , welche als bekannt angenommen werden muss, um die Beobachtung nach den im vorigen Artikel gegebenen Formeln berechnen zu können, äussert so geringen Einfluss auf das Resultat, dass man ohne beträchtlichen Fehler die mittlere dafür setzen könnte; ich habe sie, durch die mittlere Entfernung des Trabanten gemessen = $0,98166$ angenommen, übereinstimmend mit dem Werthe, welchen die vollendete Untersuchung der Elemente ihr gibt. In beiden Hypothesen hat sich ergeben:

	I.	II.
l	$171^{\circ} 47' 28,4$	$171^{\circ} 47' 28,1$
b	$-0 15 13,7$	$0 28 22,2$
Länge in der Bahn, r	$171 50 23,3$	$171 53 56,4$
q	$+ 0,065$	$- 0,635$

Der Werth von q ist aus der Beobachtung = $-0,316$ hervorgegangen; man erhält also als Resultat derselben die Gleichung

$$-0,316 = +0,065 - k \cdot 0,700.$$

An demselben Tage machte HERSCHEL noch eine andere Beobachtung des Trabanten: $23^{\circ} 20' 5''$ St. Z. sah er eine Hervorragung am südlich vorgehenden Rande des Saturns, welche sich bald als der austretende Trabant zu erkennen gab, der 18^m später von dem Planeten ganz getrennt erschien. Da die Beobachtung des Schattens den Ort des Trabanten an diesem Tage vollständig kennen gelehrt hat, so wird die des Austritts eine Bestimmung des Halbmessers des Saturns ergeben können. Da zu der Zeit, wo HERSCHEL den Trabanten zuerst bemerkte, ein Theil desselben schon ausgetreten sein musste, so muss der Austritt des Mittelpunkts sich früher ereignet haben, als in der Mitte zwischen dieser Zeit und der der völligen Trennung

der Ränder; ich werde ihn $23^{\circ} 26' 51''$ oder $1^{\circ} 54' 41''$ M. Z. vor der Conjunctionszeit des Schattens annehmen.

Ein Eintritt des Trabanten in die Planetenscheibe oder ein Austritt aus derselben findet statt, wenn die Gleichungen (a), (b), (c) des 7. Artikels erfüllt werden, jedoch mit dem Unterschiede, dass in denselben ξ', η', ζ' für ξ, η, ζ gesetzt werden. Diese Gleichungen, in bequeme Rechnungsvorschriften verwandelt, ergeben die Formeln:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} b, &= \frac{a}{b} \operatorname{tg} b; & r, &= r \frac{\cos b}{\cos b}, \\ \operatorname{tg} \beta', &= \frac{a}{b} \operatorname{tg} \beta'; & \phi', &= \phi' \frac{\cos \beta'}{\cos \beta'}, \\ \cos d &= \cos b, \cos \beta', \cos (l - \lambda') + \sin b, \sin \beta', \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} d' &= \frac{\phi' + r}{\phi' - r} \operatorname{tg} \frac{1}{2} d \\ a &= r, \sin \left(\lambda' d + \frac{1}{2} d' \right) \end{aligned}$$

Um die Herschel'sche Beobachtung hiernach zu berechnen, muss die wahre Bewegung des Trabanten in der Zwischenzeit von $1^{\circ} 54' 41''$ M. Z. sowie auch r bekannt sein; ich finde beide aus dem Orte des Trabanten in seiner Bahn $1^{\circ} 51' 50,77$ und $0,98220$ und hiermit in beiden Hypothesen

	$k = 0$	$k = 1$
r	$169^{\circ} 58' 32,6$	$170^{\circ} 1' 55,7$
l	$169 55 38,2$	$169 55 37,8$
b	$- 13 44,7$	$- 26 52,4$

ferner

$$\begin{aligned} \lambda' &= 167^{\circ} 49' 49,0; & \beta' &= +2^{\circ} 1' 15,1; & \log \phi' &= 0,95599; \\ \text{endlich, unter der Annahme } a: b &= 8,503: 7,837, \\ & a &= 9,756 \text{ und } 10,301. \end{aligned}$$

Will man die Beobachtung des Schattens vollständig darstellen, so geht aus dem dadurch erlangten Ausdrucke von q , $k = +0,544$ hervor, welchem Werthe $a = 10,053$ entspricht.

Diese Bestimmung des Halbmessers des Saturns ist bedeutend grösser als die meine = $8,503$ und auch als die Struve'sche = $8,996$. Sie wird durch HERSCHEL'S directe Messungen beider Halbmesser am 14. September 1789 = $22,741^*$ und $20,61$ unterstützt, woraus ich für die mittlere Entfernung

$$a = 10,098, \quad b = 9,287$$

erhalten habe. Das Verhältniss beider ist sehr nahe das von mir gefundene; die Grösse derselben sehr nahe die aus dem Austritte des Trabanten gefolgerte. Man kann nicht mehr bezweifeln, dass HERSCHEL den Sa-

* In den Philos. Transact. 1790. P. I. pag. 17 steht $22,81$; das wahre Mittel aus den vier einzelnen Messungen ist aber $22,41$.

turn nicht allein grösser gemessen, sondern wirklich auch grösser gesehen hat, als die jetzigen Achromaten ihn zeigen; denn der einzige Zweifel gegen die Richtigkeit der Beobachtung des Austritts, welchen man geltend zu machen geneigt sein könnte, nämlich dass der in der Nähe des hellen Planetenrandes lichtschwache erscheinende Trabant zu spät gesehen worden sei, ist mit der Beschreibung, welche HERSCHEL von der Beobachtung gibt, nicht vereinbar: er sah den Trabanten sich gewissermassen von dem Rande des Planeten ablösen und erwähnt auch der Lichtschwäche nicht als störend, was ein so vortrefflicher und zuverlässiger Astronom nicht unterlassen haben würde, wenn sie ihm wirklich störend gewesen wäre. Die bekannte Erfahrung, dass verschiedene Fernröhre die Fixsterne in verschiedener Grösse zeigen, scheint hiermit zusammen zu hängen; auch kann man für die Richtigkeit der neuen Messung und gegen die der alten anführen, dass nicht denkbar ist, dass ein Fernrohr einen hellen Gegenstand auf dunklem Grunde kleiner zeige als er wirklich ist. Allein dagegen dringt sich die Frage auf, wie die feinsten dunkeln Linien auf dem Ringe sichtbar bleiben können mit einem Instrumente, welches jeden hellen Rand mehr als eine Secunde weit in das Dunkle rückt? —

9.

Die zweite oben angeführte Beobachtung, welche zur Erkenntniss der Grösse von k beitragen kann, die Köhler'sche vom 12. November 1790, verdanke ich der gütigen Mittheilung des Herrn VON ZACH. Der Durchgang des Trabanten durch die kleine Axe der Ringellipse ereignete sich 7^h 17^m 32^s M. Z. in Dresden = 5^h 19^m 32^s reducirte Pariser Zeit; die Entfernung desselben vom Südpole des Saturns war der Breite der Projection des Ringes, da wo dieselbe an den Planeten ansties, gleich. Diese Beobachtung ist mit erwünschter Aufmerksamkeit gemacht: KÖHLER verfolgte die Bewegung des Trabanten und bemerkte 5^m 26^s vor dem angegebenen Momente der Conjunction, dass dieselbe noch nicht erfolgt, so wie 3^m 25^s nach demselben, dass sie bereits vorüber war; auch machte er noch eine zweite Schätzung der Entfernung = $\frac{1}{2}$, höchstens = $\frac{1}{4}$ der Axe. Diese ist mit der ersteren ziemlich übereinstimmend; allein ich halte mich an jene, indem ich glaube, dass sich sicherer beurtheilen lässt, ob zwei Grössen gleich sind, als welcher aliquote Theil der einen die andere ist. Endlich lasse ich nicht unerrinert, dass das Instrument womit KÖHLER beobachtete, den Planeten etwa von derselben Grösse gezeigt haben müsste, wie ich ihn

mit dem Heliometer sehe, denn zwei Messungen der Axen gaben ihm $a = 8'',264$, $b = 7'',531$, nur so wenig von meiner Bestimmung verschieden, dass man aus nur zwei Beobachtungen nicht folgern darf, dass er den Planeten wirklich kleiner gesehen habe als ich.

Der geocentrische Ort des Saturns ist:

$$359^{\circ} 26' 31'',4, \quad - 2^{\circ} 33' 0'',2, \quad 0,9453650;$$

für die Ringebene ergibt die Formel im 6. Artikel:

$$n'' = 166^{\circ} 44' 21'', \quad i'' = 28^{\circ} 22' 4'',$$

und hiermit findet man:

$$\lambda' = 179^{\circ} 8' 54'',7, \quad \beta' = - 3^{\circ} 44' 23'',4,$$

also, da der Trabant in der Erdferne war:

$$l = \lambda' + 180^{\circ} = 359^{\circ} 8' 54'',7.$$

In beiden Hypothesen $k = 0$ und $k = 1$ findet man aus diesen Werthe von l :

$$r = 359^{\circ} 11' 58'',7 \quad 359^{\circ} 15' 15'',9$$

$$b = + 21' 23,3 \quad + 34 \quad 5,0$$

und, wenn man $r = 1,01997$ annimmt, die Entfernung, in welcher der Trabant bei dem Mittelpunkte des Planeten vorbeiging

$$- 11'',494 \text{ und } - 10'',776.$$

Der Polarhalbmeridian erschien dagegen = $8'',484$, die Henkelbreite = $2'',496$; der Trabant hat also der Beobachtung zufolge die Entfernung = $10'',980$ gehabt und man erhält durch dieselbe die Gleichung

$$- 10'',980 = - 11'',494 + k \cdot 0'',718.$$

Die dritte Beobachtung vom 25. März 1715 gehört wegen der von CASSINI II dabei gemachten, im 6. Artikel angeführten Bemerkung hierher. Er sah 10^h 45^m w. Z. den Satelliten, welcher den Planeten zu berühren schien; darauf fing derselbe an, an Grösse abzunehmen, und um 11^h war er ganz vom Planeten verfinstert.

Das Mittel aus den beiden angegebenen Zeiten ist 10^h 58^m 31^s M. Z. = 9^h 48^m 53^s reducirte Zeit; der geocentrische Ort des Saturns

$$169^{\circ} 55' 35'',0, \quad + 2^{\circ} 24' 36'',4, \quad 0,9279835;$$

für die Ringebene ist

$$n'' = 165^{\circ} 53' 15'', \quad i'' = 28^{\circ} 22' 33''$$

und hieraus folgt

$$\lambda' = 350^{\circ} 35' 7'',5, \quad \beta' = - 0^{\circ} 12' 13'',3.$$

Aus diesen Rechnungselementen erhält man den Punkt der Bahn, welcher mit dem Mittelpunkte des Planeten in Conjunction war, in beiden Hypothesen

$$170^{\circ} 36' 43'', \quad 170^{\circ} 46' 22''.$$

Die Entfernung des Trabanten von diesem Punkte ist.

dem Halbmesser des Planeten und dem hinreichend genau bekannten Werthe von $r = 0,97248$ zufolge $= -2^{\circ} 50' 13''$; der hierdurch bestimmte Ort des Trabanten in seiner Bahn ergibt seine Breite über der Ringebene

$$b = -7' 34'' \text{ und } -44' 54''$$

und endlich seine Entfernung von der Ansenlinie

$$= -1,112 \text{ und } -3,211.$$

Das Ansehen, welches Saturn an dem Tage dieser Beobachtung darbot, war dem für den 2. November 1789 beschriebenen ähnlich; nur erschien jetzt die dunkle Seite des Ringes sehr schmal, nur $0,02$ breit und wurde daher nicht gesehen; dagegen war der Schatten des Ringes breiter $= 0,092$, lag $0,241$ südlich von der Ansenlinie und wurde von CASSINI mit einem Fernrohre von 114 Fuss Länge gesehen. Hätte er bestimmt angegeben, dass der Trabant am Ringschatten eingetreten sei, so würde man die Gleichung

$$-0,241 = -1,112 - k \cdot 2,009$$

erlangen, welche, wegen der Grösse des Coefficienten von k , zur Bestimmung von k sehr schätzbare sein würde. Da er aber nur sagt, der Trabant sei nahe in der Schattenlinie gewesen, so schliesst seine Angabe nur diejenigen Werthe von k aus, welche man mit dieser Aeusserung nicht vereinigen zu können glaubt. Man muss sehr bedauern, dass CASSINI seiner seltenen Beobachtung durch die Unterlassung der genauen Beschreibung derselben den grössten Theil der Wichtigkeit, welche sie haben könnte, entzogen hat.

Ausser diesen drei Beobachtungen finde ich in älteren Nachrichten nichts, was zur Untersuchung der Knotenbewegung zugezogen werden könnte. Bezeichnet man durch s, s', s'' die Grössen, bis auf welche ein angenommener Werth von k die drei Wahrnehmungen darstellt, so ergeben die drei entwickelten Gleichungen:

$$s = +0,381 - k \cdot 0,700$$

$$s' = -0,514 + k \cdot 0,718$$

$$s'' = -0,871 - k \cdot 2,009$$

Setzt man $k = 0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1$, so erhält man in diesen vier Hypothesen die Werthe:

$$s = +0,381, +0,148, -0,086, -0,319$$

$$s' = -0,514, -0,275, -0,035, +0,204$$

$$s'' = -0,871, -1,571, -2,270, -2,970$$

Die erste dieser Hypothesen scheint mit den Beobachtungen von HERSCHEL und KÖHLER unverträglich zu sein, die letzte passt nicht zu der Angabe von CASSINI, denn sie würde den Trabanten mehr als ein Drittel des Halbmessers des Planeten von dem Ringschatten

entfernen; die dritte würde die beiden ersten Beobachtungen am nächsten darstellen, allein die zweite entfernt sich von ihnen auch nicht ausser der Grenze ihrer Sicherheit und empfiehlt sich durch näheres Anschliessen an die letzte Beobachtung. Ich habe daher der zweiten Hypothese den Vorzug gegeben und $k = \frac{1}{2}$ gesetzt. Sobald der Fehler dieser Schätzung anfangen wird, in künftigen genaueren Beobachtungen merklich hervorzutreten, wird man sie berichtigen können; ich glaube aber nicht, dass dieses in ein Paar Decennien der Fall sein wird.

Für $k = \frac{1}{2}$ wird die Formel für die Lage der Bahn im 6. Artikel, wenn man die Zeit t von 1830 an rechnet:

$$n = 167^{\circ} 40' 57,9'' + t \cdot 35,537 + 98,9 \sin(2n' + 5^{\circ} 12')$$

$$i = 27 \ 34 \ 9,3 - t \cdot 0,253 + 51,0 \cos(2n' + 4 \ 11)$$

Es folgen hieraus die Ausdrücke der Länge des Knotens der Trabantenbahn auf der Saturnsbahn (n'), der Neigung gegen dieselbe (i') und der Entfernung der Saturnsbahn von der Ekliptik auf der Trabantenbahn gemessen (ω):

$$n' = 171^{\circ} 49' 48,0'' + t \cdot 35,515 + 103,5 \sin 2n'$$

$$i' = 26 \ 13 \ 53,9 - t \cdot 0,253 \cos 2n'$$

$$\omega = 4 \ 38 \ 58,7 - t \cdot 0,019 - 7,9 \cos 2n' + 5,5 \sin 2n'.$$

10.

Es sind nun noch zwei Elemente zu bestimmen, nämlich die mittlere Bewegung des Trabanten und die Bewegung der Apsidenlinie seiner Bahn. Ich werde zuerst das, was die Theorie über die letztere und die Veränderung der Excentricität ergeben hat, weiter entwickeln.

Wenn man dem im 5. Artikel angegebenen Ausdrucke des von den Längen der Sonne und des Trabanten unabhängigen Theils der Bewegung der Apsidenlinie die jährliche Vorrückung der Nachtgleichen hinzuzufügt, oder P auf den beweglichen Nachtgleichenpunkt bezieht, so wird dieser Ausdruck:

$$\frac{dP}{dt} = +84,952 + 23,988 \cos 2\Gamma,$$

wo Γ die Entfernung des Perisaturniums des Trabanten von dem aufsteigenden Knoten seiner Bahn auf der Saturnsbahn, also $= P - n - \omega$, und nach der im vorigen Artikel erlangten Bestimmung von n und ω , für 1830,2 + t

$$= P - 172^{\circ} 20' 3,7'' - t \cdot 35,538$$

ist. Der durch diese Formel ausgedrückten Wirkung der Sonne auf die Apsidenlinie kömmt noch das hinzu, was aus den Anziehungen hervorgeht, welche der Trabant von der sphäroidischen Gestalt des Saturns, von

den Ringen und von den übrigen Trabanten erfährt. Dieses ist eine unbekannte beständige Grösse, das eine der noch zu suchenden Elemente; ich werde die Bezeichnung x dafür anwenden. Man hat also

$$\frac{dP}{dt} = x + 84,952 + 23,988 \cos 2\Gamma$$

oder

$$\frac{d\Gamma}{dt} = x + 49,434 + 23,988 \cos 2\Gamma$$

wofür ich, um abzukürzen

$$\alpha + \beta \cos 2\Gamma$$

schreiben werde.

Wenn man den Werth von Γ für 1830,2 durch Γ' bezeichnet, und

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \operatorname{tg} \Gamma$$

$$\operatorname{tg} \psi' = \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \frac{1}{2} \operatorname{tg} \Gamma$$

setzt, so ist das Integral der Gleichung für Γ

$$\psi = \psi' + t \sqrt{\alpha - \beta}$$

oder

$$\operatorname{tg} \Gamma = \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} \operatorname{tg}(\psi' + t \sqrt{\alpha - \beta}).$$

Verwandelt man diesen Ausdruck in die Reihe

$\Gamma = \psi' + \alpha' t + \beta' \sin 2(\psi' + t\alpha') + \frac{1}{2} \beta'^2 \sin 4(\psi' + t\alpha') + \text{etc.}$
in welcher α' und β' für

$$\sqrt{\alpha - \beta} \beta \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{\alpha + \alpha'}$$

geschrieben sind, so ist für einen so grossen Werth von x , wie die Beobachtungen ergeben, die Convergenz derselben so gross, dass man die in das Quadrat und die höheren Potenzen von β' multiplicirten Glieder vernachlässigen kann; hierdurch wird sie für die An-Epoche 1830 . . . $125^\circ 2' 25,1 - 34,1 \sin(2u' - 1^\circ 41')$

Perisaturnium . . . $\psi' + 172^\circ 20' 3,7 + t(\alpha' + 35,518) + \beta' \sin 2\Gamma + 44,6 \sin(2u' + 1^\circ 17') + 517,9 \sin(2u' - 2\Gamma)$
Excentricität . . . $0,02877729 \frac{\cos \Gamma'}{\cos \psi'} (1 + \beta' + \frac{1}{2} \beta' \beta') (1 - \beta' \cos 2\Gamma) + 0,00007224 \cos(2u' - 2\Gamma)$

Knoten $167^\circ 41' 5,0 + t \cdot 35,537 + 98,9 \sin(2u' + 5^\circ 12')$

Neigung $27^\circ 34' 9,2 - t \cdot 0,253 + 51,0 \cos(2u' + 4^\circ 11')$

$$\alpha = x + 49,434; \quad \beta = 23,988$$

$$\alpha' = \sqrt{\alpha - \beta} \beta; \quad \beta' = \frac{\beta}{\alpha + \alpha'}$$

$$\Gamma = 71^\circ 13' 26,3; \quad \operatorname{tg} \psi' = \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \operatorname{tg} \Gamma$$

$$\Gamma = \psi' + \alpha' t; \quad u' = b - 171^\circ 50' - t \cdot 35,515$$

Die bequemste Art, den Einfluss der periodischen Theile dieser Ausdrücke in Rechnung zu bringen, besteht darin, dass man dem Logarithmen des Radiusvectors und der Länge in der Bahn die daraus entstehenden Ver-

wendung bequemer als der endliche Ausdruck. Setzt man für Γ seinen Ausdruck durch P , so erhält man $P = \psi' + 172^\circ 20' 3,7 + t(\alpha' + 35,518) + \beta' \sin 2(\psi' + \alpha' t)$; der im 5. Artikel gegebene Werth von P für 1830,2 ergibt

$$\Gamma = 71^\circ 13' 26,3; \quad \operatorname{tg} \psi' = \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \operatorname{tg} \Gamma.$$

Der Differentialquotient der Excentricität ist, dem 5. Artikel zufolge

$$\omega \cdot \frac{de}{dt} = + 23,988 \cdot e \sin 2\Gamma.$$

Diese Gleichung mit e dividirt und mit $dt = \frac{d\Gamma}{\alpha + \beta \cos 2\Gamma}$ multiplicirt ergibt

$$\omega \cdot \frac{de}{e} = \frac{\beta \sin 2\Gamma \cdot d\Gamma}{\alpha + \beta \cos 2\Gamma}$$

wovon das Integral

$$e = e' \sqrt{\frac{\alpha + \beta \cos 2\Gamma'}{\alpha + \beta \cos 2\Gamma}} = e' \frac{\cos \Gamma'}{\cos \psi'} \cdot \frac{\cos \psi}{\cos \Gamma}$$

ist, und e' den Werth der Excentricität für 1830,2 = 0,02877729 bedeutet. Auch statt dieses Ausdrucks kann man den Anfang seiner Reihenentwicklung, nämlich

$$e = e' \cdot \frac{\cos \Gamma'}{\cos \psi'} (1 + \beta' + \frac{1}{2} \beta' \beta') [1 - \beta' \cos 2(\psi' + \alpha' t)]$$

mit demselben Rechte wie oben anwenden.

Ich werde nun die Ausdrücke sämtlicher Elemente und der Argumente, von welchen ihre Ungleichheiten abhängen, sammeln, und zugleich die allgemeine, aus der Bewegung der Ebene der Bahn hervorgehende Veränderung der Längen, nämlich

$$+ 10,9 \sin 2u' + 1,0 \cos 2u'$$

den Ausdrücken der mittleren Länge und der Länge des Perisaturniums hinzufügen:

änderungen hinzufügt und die Breite des Trabanten über der mittleren Ebene seiner Bahn berücksichtigt. Man erhält auf diese Art:

$$\delta \log r = \frac{0,43429}{2 \cdot \omega} m \cos(M + \varphi)$$

$$\delta v = -45,70 \sin 2u' - m \sin(M + \varphi)$$

$$\delta b = m' \sin(M' + \varphi)$$

wo

$$m \sin M = 2\beta' \epsilon \sin 2\Gamma + 29,8 \sin(2u' - 2\Gamma) + 157,4 \epsilon \sin 2u'$$

$$m \cos M = 2\beta' \epsilon \cos 2\Gamma - 29,8 \cos(2u' - 2\Gamma)$$

$$m' \sin(M' - \Gamma) = -45,7 \sin 2u'$$

$$m' \cos(M' - \Gamma) = +51,0 \cos 2u'$$

gesetzt worden sind. Die Werthe der hier eingeführten m, M, m', M' ändern sich sehr langsam, weshalb es, wenn man mehrere in einer Periode der Sichtbarkeit des Planeten gemachte Beobachtungen zu vergleichen hat, vorthellhaft ist, diese Grössen für gewisse Zeiten, z. B. für jeden hundertsten Tag, vorher zu berechnen. Will man aber für die Knotenlinie und Neigung ihre gestörten Werthe in die Rechnung bringen, um dagegen keine Breitenstörung berechnen zu dürfen, so muss man das erste Glied von δv nicht $-45,70 \sin 2u'$, sondern $-34,1 \sin(2u' - 1^\circ 41')$ setzen.

11.

Die älteren Beobachtungen, durch welche die Bestimmungen der mittleren Bewegung und der Constante x erlangt werden können, bestehen meistens in Angaben der Zeiten der Conjunction des Trabanten, entweder mit dem Mittelpunkte oder mit einem andern in der Ansenlinie liegenden Punkte des Planeten oder seines

$\cos b \sin(l - \lambda') = \cos \delta b [\cos I \sin(v - n - a) \cos(\lambda' - n'' - a') - \cos(v - n - a) \sin(\lambda' - n'' - a')] - \sin \delta b \sin I \cos(\lambda' - n'' - a')$

$$\cos b \sin(l - \lambda') = \cos \delta b [\cos I \sin(v - n - a) \cos(\lambda' - n'' - a') - \cos(v - n - a) \sin(\lambda' - n'' - a')] - \sin \delta b \sin I \cos(\lambda' - n'' - a')$$

und ferner ohne merklichen Fehler

$$\cos b \sin(l - \lambda') = \cos \delta b [\cos I \sin(v - n - a) \cos(\lambda' - n'' - a') - \cos(v - n - a) \sin(\lambda' - n'' - a')] - \sin \delta b \sin I \cos(\lambda' - n'' - a')$$

für den Fall, dass er jenseits des Saturns steht

$$\cos b \sin(l - \lambda') = \cos \delta b [\cos I \sin(v - n - a) \cos(\lambda' - n'' - a') - \cos(v - n - a) \sin(\lambda' - n'' - a')] - \sin \delta b \sin I \cos(\lambda' - n'' - a')$$

so erhält man

$$\sin z = \mp (\cos \delta b \sin I) \frac{p}{r} + \cos A \sin(A + z) 2 \sin \frac{1}{2} I^2 \pm \cos A \sin I \cdot \delta b$$

wo A für $\lambda' - n'' - a'$ geschrieben ist und die oberen Zeichen dem ersten, die unteren dem zweiten Falle gemäss sind.

Zur Berechnung von a, a', I dienen die Gaussischen trigonometrischen Formeln:

Ringes. Der Anführung der zu diesen Bestimmungen angewandten Beobachtungen lasse ich die Vorschrift zu ihrer Berechnung vorangehen.

Wenn man in den Formeln (c) des 7. Artikels für X, Y, Z die Coordinaten x, y, z des Trabanten setzt, so ist p die auf der Ansenlinie gezählte Entfernung des Punktes, mit welchem der Trabant in Conjunction ist, von dem Mittelpunkte des Planeten. Man hat also, nachdem man x, y, z durch r, l, b ausgedrückt hat:

$$\tan p = \frac{-r \cos b \sin(l - \lambda')}{\cos \delta b [\cos I \sin(v - n - a) \cos(\lambda' - n'' - a') - \cos(v - n - a) \sin(\lambda' - n'' - a')] - \sin \delta b \sin I \cos(\lambda' - n'' - a')}$$

woraus v , die Länge des Trabanten in der Bahn, zu finden ist. Der Nenner dieses Ausdrucks ist, je nachdem der Trabant sich zwischen der Erde und dem Saturn oder über diesem hinaus befindet, hinreichend nahe $= \cos \delta b$ oder $= \cos \delta b \cos I$, weshalb der Ausdruck

$$\tan p = \frac{-r \cos b \sin(l - \lambda')}{\cos \delta b \cos I}$$

geschrieben werden kann. Bezeichnet man die Entfernung des aufsteigenden Knotens der mittleren Ebene der Trabantenbahn auf der Ringebene von dem aufsteigenden Knoten der ersteren auf der Ekliptik durch a , die Entfernung desselben Punktes von dem aufsteigenden Knoten der letzteren auf der Ekliptik durch a' , die Neigung beider Ebenen gegeneinander durch I , so hat man

$$\cos b \cos(l - n'' - a') = \cos \delta b \cos(v - n - a)$$

$$\cos b \sin(l - n'' - a') = \cos \delta b \sin(v - n - a) \cos I - \sin \delta b \sin I \cos(\lambda' - n'' - a')$$

$$\cos b \sin(l - n'' - a') = \cos \delta b \sin(v - n - a) \cos I - \sin \delta b \sin I \cos(\lambda' - n'' - a')$$

$$\cos b \sin(l - n'' - a') = \cos \delta b \sin(v - n - a) \cos I - \sin \delta b \sin I \cos(\lambda' - n'' - a')$$

$$\cos b \sin(l - n'' - a') = \cos \delta b \sin(v - n - a) \cos I - \sin \delta b \sin I \cos(\lambda' - n'' - a')$$

$$\cos b \sin(l - n'' - a') = \cos \delta b \sin(v - n - a) \cos I - \sin \delta b \sin I \cos(\lambda' - n'' - a')$$

$$\cos b \sin(l - n'' - a') = \cos \delta b \sin(v - n - a) \cos I - \sin \delta b \sin I \cos(\lambda' - n'' - a')$$

$$\cos b \sin(l - n'' - a') = \cos \delta b \sin(v - n - a) \cos I - \sin \delta b \sin I \cos(\lambda' - n'' - a')$$

$$\cos b \sin(l - n'' - a') = \cos \delta b \sin(v - n - a) \cos I - \sin \delta b \sin I \cos(\lambda' - n'' - a')$$

allein die folgende Table überhebt der Mühe der Rechnung in jedem vorkommenden Falle:

	$n + a$	$n'' + a'$	$n + a - n'' - a'$	I
1670	322° 42' 42"	322° 37' 36"	+ 5' 57,6	62° 10,9
1680	323 12 48	323 7 48	4 59,6	52 0,4
1690	323 43 4	323 38 10	4 53,6	51 50,1
1700	324 13 29	324 8 41	4 47,7	51 39,9
1710	324 44 4	324 39 22	4 41,7	51 29,9
1720	325 14 48	325 10 12	4 35,7	51 20,0
1730	325 45 41	325 41 11	4 29,7	51 10,2
1740	326 16 43	326 12 19	4 23,7	51 0,6
1750	326 47 54	326 43 37	4 17,7	50 51,4
1760	327 19 15	327 15 4	4 11,7	50 42,0
1770	327 50 44	327 46 39	4 5,7	50 32,9

	$n+a$	$n'+a'$	$n+a-n'-a'$	I
1780	328° 22' 23"	328° 18' 23"	+ 3' 59",7	50' 24",0
1790	328 54 10	328 50 16	3 53,7	50 15,2
1800	329 26 6	329 22 18	3 47,8	50 6,6
1810	329 58 10	329 54 28	3 41,8	49 58,2
1820	330 30 23	330 26 47	3 35,8	49 50,0
1830	331 2 45	330 59 15	3 29,8	49 41,9
1840	331 35 15	331 31 51	3 23,8	49 34,0
1850	332 7 53	332 4 35	3 17,8	49 26,2

[Der Schluss der Artikels enthält die 7 älteren Beobachtungen von 1682 — 1790, der Anfang des Artikels 12 die Vergleichungen.]

12.

Die vortheilhafteste Darstellung der Beobachtungen erhält man durch den Werth von $x = 1744,699$ und den dazu gehörigen von $r = + 17,422$; die übrig bleibenden Fehler sind dann:

[HALLEY]	{ 1682 [Decbr. 1]	= - 10 ^m 27,1
	{ 1683 [Febr. 19]	= + 10 56,3
[CASSINI I]	{ 1685 [Mai 21]	= - 2 55,6
	{ 1687 [März 7]	= + 7 9,0
[HERSCHEL]	{ 1789 [Novbr. 2]	= + 0 8,3
[KÖHLER]	{ 1790 [Novbr. 12]	= - 2 16,0

und für die ausgeschlossene Beobachtung

[CASSINI II]	{ 1714 [Febr. 11]	= - 30 ^m 20,2
--------------	-------------------	--------------------------

Wenn man nicht beträchtliche Störungen durch die übrigen Trabanten annehmen will, von einer Art, welche die Heliometerbeobachtungen nicht verrathen konnten, d. h. von langen Perioden, so wird man annehmen müssen, dass CASSINI II. die Conjunction eine halbe Stunde zu früh angegeben habe. Wenn man indessen nicht aus der Angabe der Zeit in runder Zahl (10 Uhr) den Verdacht schöpfen will, dass der Beobachter die grösste erreichbare Sicherheit der Beobachtung nicht gesucht habe, so kann man einen so grossen Fehler, der wenigstens das Doppelte des unvermeidlichen ist, nicht annehmen.

Die Elemente sind nun, nach den Angaben des 5. und 9. Artikels und nach den Formeln des 10., für 1830 + t :
 Epoche 1830 125^o 2' 21",6
 Mittl. Beweg. in 365,25 Tagen . . 326 15 9,654 + 22 Rev.

$$\begin{aligned}
 x = \frac{1296000}{T} \times 365,25 \cdot M \times \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{3}{2} \cdot \frac{(\rho^4 - \rho^2)}{J^2(1 - ee)^2} + \right. \\
 + \frac{(1.5)^2}{(2.4)} \frac{5}{3} \cdot \frac{(\rho^4 - \rho^2)}{J^2(1 - ee)^4} \left(2 + \frac{3}{2} ee \right) + \\
 + \frac{(1.3.5)^2}{(2.4.6)} \frac{7}{4} \cdot \frac{(\rho^4 - \rho^2)}{J^2(1 - ee)^6} \left(3 + \frac{15}{2} ee + \frac{15}{8} e^2 \right) + \\
 \left. + \frac{(1.3.5.7)^2}{(2.4.6.8)} \frac{9}{5} \cdot \frac{(\rho^{10} - \rho^{10})}{J^2(1 - ee)^8} \left(4 + 21ee + \frac{35}{2} e^2 + \frac{35}{16} e^4 \right) + \text{etc.} \dots \right\}
 \end{aligned}$$

Perisaturnium	243 13 19 + t 1829,491
Excentricität	0,02862534
Mittlere Entfernung	176,62537
Aufsteigender Knoten	167° 40' 57",9 + t 35,537
Neigung	27 34 9,3 - t 0,253

Die Ungleichheiten sind:

$$\begin{aligned}
 \delta \cdot \log r &= 0,000001053 m \cos(M + \varphi) \\
 \delta \cdot r &= - 45,0 \sin 2u' - m \sin(M + \varphi) \\
 \delta \cdot b &= m' \sin(M' + \varphi)
 \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
 m \sin M &= + 79,0 \sin 2\Gamma + 29,8 \sin(2u' - 2\Gamma) + 4,5 \sin 2u' \\
 m \cos M &= + 79,0 \cos 2\Gamma - 29,8 \cos(2u' - 2\Gamma) \\
 m' \sin(M' - \Gamma) &= - 45,7 \sin 2u' \\
 m' \cos(M' - \Gamma) &= + 51,0 \cos 2u'
 \end{aligned}$$

bedeuten und die Argumente nach den Formeln

$$\begin{aligned}
 u' &= b - 171^{\circ} 49' 48",0 - t \cdot 35,515 \\
 \Gamma &= 70^{\circ} 53' 22",6 + t \cdot 1793,973
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
 2\Gamma &= 141^{\circ} 46' 45",t + t \cdot 59' 47",95 \\
 2u' - 2\Gamma &= 2b + 23^{\circ} 33' 39",t - t \cdot 60' 58",98 \\
 2u' &= 2b + 16 20 24 - t \cdot 1 11,93
 \end{aligned}$$

berechnet werden.

13. 14.

[Vergleichung älterer Beobachtungen: HERSCHEL, 1789 Sept. 23. (Austritt des Trabanten aus dem Planetenschatten); CASSINI II, 1715 März 25 (Bedeckung des Trabanten); KÖHLER, 1790 Decbr. 30 (Conjunction); HALLEY, 1682 Novbr. 23 und 1683 Febr. 3; CASSINI, 1691, 1704, 1706 (Conjunctionen.)]

15.

Es sind nun noch einige Folgerungen aus den vorigen Untersuchungen zu ziehen; namentlich die Bestimmungen der Massen des Planeten und seines Ringes. Die Bewegung der Apsidenlinie der Trabantenbahn ist eine der Erscheinungen, welche man zur Bestimmung der Masse des Ringes benutzen kann. Wenn man die Begrenzungen der Ringe als um den Mittelpunkt des Saturns mit den Halbmessern ρ und ρ' beschriebene Kreise, die Masse M der Ringe als gleichförmig zwischen diesen Kreisen vertheilt annimmt und durch Δ , e , T die mittlere Entfernung, Excentricität und siderische Umlaufzeit des Trabanten bezeichnet, so findet man die Bewegung der Apsidenlinie in einem julianischen Jahre:

Setzt man $\varrho = 13,374$, $\varrho' = 19,656$, die übrigen Elemente, aber wie ich sie gefunden habe, so ergibt diese Formel die jährliche Bewegung

$$k = 205682'' M.$$

Aus den Beobachtungen ist $\alpha = 1744,699$ gefunden, allein diese Bewegung ist nicht dem Ringe allein zuzuschreiben, sondern ein Theil derselben entsteht aus den Anziehungen des sphäroidischen Planeten und der übrigen Trabanten; diesen wahrscheinlich wenig beträchtlichen Theil kann man nicht berücksichtigen, da alles zu seiner Berechnung Nothwendige unbekannt ist; man kann daher nur aus der Gleichung

$$1744,699 = 205682'' M$$

einen Näherungswert

$$M = \frac{1}{118}$$

erhalten. Der wahre Werth der Masse der Ringe scheint eher kleiner als grösser zu sein, indem die angeführten Anziehungen die Apsidenlinie in derselben Richtung bewegen, in welcher diese Masse sie bewegt. Nimmt man die Dichtigkeit der Ringe (die des Saturns = 1 gesetzt) = δ an, so ergeben der gefundene Werth von M und die Voraussetzung der gleichförmigen Vertheilung der Masse die Dicke der Ringe

$$= \frac{0,031}{\delta}$$

oder in geographischen Meilen ausgedrückt

$$= \frac{29,7}{\delta}$$

Wenn dieses Resultat auch auf einigen nicht sicheren Voraussetzungen beruht, so möchte es doch von der bisher unbekanntem Dicke der Ringe einen ohngefähren Begriff geben können.

Ausser dem Theile der Anziehung des Trabanten durch die Ringe, welcher die Bewegung der Apsidenlinie ergibt, ist noch der sich mit der Anziehung des Planeten vereinigende Theil zu untersuchen. Unter den bei jenem gemachten Voraussetzungen ist der Ausdruck desselben

$$\begin{aligned} = M \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{3}{2} \cdot \frac{(\varrho'^2 - \varrho^2)^2 (\varrho'^2 - \varrho^2)}{\mathcal{A}^2 (1 - \epsilon)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{5}{3} \cdot \frac{(\varrho'^2 - \varrho^2)^2 (\varrho'^2 - \varrho^2)}{\mathcal{A}^2 (1 - \epsilon)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon \epsilon \right) \\ + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{7}{4} \cdot \frac{(\varrho'^2 - \varrho^2)^2 (\varrho'^2 - \varrho^2)}{\mathcal{A}^2 (1 - \epsilon)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + 3 \epsilon \epsilon + \frac{3}{8} \epsilon^2 \right) \\ \left. + \text{etc.} \dots \right\} \end{aligned}$$

und sein Zahlenwerth

$$= M \cdot 1,006858;$$

erlangt einen kleinen Einfluss auf die Masse des

Saturns, welche man aus der mittleren Entfernung und der mittleren Bewegung des Trabanten ableitet.

Nimmt man die Masse der Sonne zur Einheit und bezeichnet man die Massen des Saturns und des Trabanten durch m und Mm , so ist die Anziehung, welche die elliptische Bewegung des Trabanten erzeugt, der Summe

$$m [1 + M + M' + M \cdot 0,006858]$$

proportional; die Masse, womit die drei Körper vereint in beträchtlichen Entfernungen anziehen, aber

$$m [1 + M + M']$$

proportional. Diese letztere ist das, was man in der Theorie des Planetensystems unter der Benennung der Saturnsmasse zu wissen verlangt; ich werde sie durch μ , die mittleren Bewegungen des Trabanten und des Planeten in einem julianischen Jahre durch n und n' bezeichnen. Nach diesen Bezeichnungen hat man

$$\frac{\sqrt{1 + \mu}}{n} = \frac{\sqrt{\mu + m M \cdot 0,006858}}{n' \sin \mathcal{A}^2}$$

woraus

$$\mu = \frac{\left(\frac{n'}{n} \right)^2 \sin \mathcal{A}^2 - 0,006858 M m}{1 - \left(\frac{n'}{n} \right)^2 \sin \mathcal{A}^2}$$

folgt.

Die mittlere tropische Bewegung des Trabanten in einem julianischen Jahre ist = 22 Rev. + 32° 15' 9",654; vermindert man sie um die Präcession = 50",231 und fügt man + 46",357 hinzu (Art. 5), um sie von der Einwirkung der Sonne zu befreien, so erhält man

$$n = 29686505,78;$$

die mittlere Bewegung des Saturns dagegen ist nach Herrn BOUVARD's Tafeln = 12° 14' 6",227 und ergibt, wenn man die Präcession abzieht

$$n' = 43995,996.$$

Endlich ist meinen Beobachtungen zufolge

$$\mathcal{A} = 176,62537$$

und der mittlere Fehler dieser Bestimmung

$$= \pm 0,04513.$$

Diese Werthe von n , n' , \mathcal{A} und die Annahme $Mm = \frac{\mu}{119}$ ergeben die Saturnsmasse

$$= \frac{1}{3497,24}$$

und den mittleren Fehler des Nenners dieses Bruchs

$$= \pm 2,68$$

Einheiten. Dieses Resultat stimmt ausserordentlich nahe mit dem von Herrn BOUVARD auf einem sehr verschiedenen Wege gefundenen überein.

Tafeln der mittleren Bewegungen des Hugenischen Saturns-Satelliten.

Jahr	Länge.	Peri- satumnum.	Knoten.	Neigung.	Jahr	Länge.	Peri- satumnum.	Knoten.	Neigung.
1800	68°44' 50,6	227°58' 37"	167°23' 11,8	27°34' 16,9	1852	113°53' 12,6	254°24' 10'	167°53' 59,8	27°34' 37,7
1801	29 21 20,9	228 20 5	23 47,4	34 16,6	1853	74 29 42,9	254 54 39	54 35,3	34 3,5
1802	349 57 51,3	228 59 33	24 22,9	34 16,4	1854	35 6 13,3	255 25 7	55 10,8	34 3,2
1803	310 34 21,6	229 30 1	24 58,4	34 16,1	1855	355 42 43,6	255 55 35	55 46,3	34 3,0
1804	293 45 29,2	230 0 35	167 25 34,0	27 34 15,9	1856	338 53 51,2	256 26 8	167 56 21,9	27 34 2,7
1805	254 21 59,6	230 31 3	26 9,5	34 15,6	1857	299 30 21,6	256 56 37	56 57,4	34 2,5
1806	214 58 29,9	231 1 31	26 45,0	34 15,4	1858	260 6 51,9	257 27 5	57 32,9	34 2,2
1807	175 35 0,2	231 31 59	27 20,5	34 15,1	1859	220 43 22,3	257 57 33	58 8,5	34 2,0
1808	158 46 7,8	232 2 33	167 27 56,1	27 34 14,9	1860	203 54 29,8	258 28 6	167 58 44,1	27 34 1,7
1809	119 22 38,2	232 33 1	28 31,6	34 14,6	1861	164 31 0,2	258 58 34	59 19,6	34 1,5
1810	79 59 8,5	233 3 29	29 7,2	34 14,4	1862	125 7 30,5	259 29 3	59 55,1	34 1,2
1811	40 35 38,9	233 33 57	29 42,7	34 14,1	1863	85 44 0,9	259 59 31	168 0 30,6	34 1,0
1812	23 46 46,4	234 4 31	167 30 18,3	27 34 13,9	1864	68 55 8,5	260 30 4	168 1 6,2	27 34 0,7
1813	344 23 16,8	234 34 59	30 53,8	34 13,6	1865	29 31 38,8	261 0 32	1 41,7	34 0,4
1814	304 59 47,1	235 5 27	31 29,3	34 13,3	1866	350 8 9,1	261 31 1	2 17,2	34 0,2
1815	265 36 17,5	235 35 55	32 4,8	34 13,1	1867	310 44 39,5	262 1 29	2 52,7	33 59,9
1816	248 47 25,1	236 6 29	167 32 40,4	27 34 12,8	1868	293 55 47,1	262 32 2	168 3 28,4	27 33 59,7
1817	209 23 55,4	236 36 57	33 15,9	34 12,6	1869	254 32 17,4	263 2 30	4 3,9	33 59,4
1818	170 0 25,8	237 7 25	33 51,5	34 12,3	1870	215 8 47,8	263 32 59	4 39,4	33 59,2
1819	130 36 56,1	237 37 53	34 27,0	34 12,1	1871	175 45 18,1	264 3 27	5 14,9	33 58,9
1820	113 48 3,7	238 8 27	167 35 2,6	27 34 11,8	1872	158 56 25,7	264 34 0	168 5 50,5	27 33 58,7
1821	74 24 34,0	238 38 55	35 38,1	34 11,6	1873	119 32 56,0	265 4 28	6 26,0	33 58,4
1822	35 1 4,4	239 9 23	36 13,6	34 11,3	1874	80 9 26,4	265 34 57	7 1,5	33 58,2
1823	355 37 34,7	239 39 51	36 49,1	34 11,1	1875	40 45 56,7	266 5 25	7 37,0	33 57,9
1824	338 48 42,3	240 10 25	167 37 24,7	27 34 10,8	1876	23 57 4,3	266 35 58	168 8 12,7	27 33 57,7
1825	299 25 12,6	240 40 53	38 0,2	34 10,6	1877	344 33 34,6	267 6 26	8 48,2	33 57,4
1826	260 1 43,0	241 11 21	38 35,3	34 10,3	1878	305 10 5,0	267 36 55	9 23,7	33 57,2
1827	220 38 13,3	241 41 49	39 11,8	34 10,1	1879	265 46 35,3	268 7 23	9 59,2	33 56,9
1828	203 49 20,9	242 12 23	167 39 46,9	27 34 9,8	1880	248 57 42,9	268 37 56	168 10 34,8	27 33 56,7
1829	164 25 51,3	242 42 51	40 22,4	34 9,6	1881	209 34 13,3	269 8 24	11 10,3	33 56,4
1830	125 2 21,6	243 13 19	40 57,9	34 9,3	1882	170 10 43,6	269 38 53	11 45,8	33 56,1
1831	85 38 52,0	213 43 47	41 33,4	34 9,0	1883	130 47 14,0	270 9 21	12 21,3	33 55,9
1832	68 49 59,5	244 14 20	167 42 9,0	27 34 8,8	1884	113 58 21,5	270 39 54	168 12 56,9	27 33 55,6
1833	29 26 29,9	244 44 49	42 44,5	34 8,5	1885	74 34 51,9	271 10 22	13 32,5	33 55,4
1834	350 3 0,2	245 15 17	43 20,0	34 8,3	1886	35 11 22,2	271 40 50	14 8,0	33 55,1
1835	310 39 30,6	245 45 45	43 55,6	34 8,0	1887	355 47 52,6	272 11 19	14 43,5	33 54,9
1836	293 59 38,1	246 16 18	167 44 31,2	27 34 7,8	1888	338 59 0,1	272 41 52	168 15 19,1	27 33 54,6
1837	254 27 8,5	246 46 47	45 61,7	34 7,5	1889	299 35 30,5	273 12 20	15 54,6	33 54,4
1838	215 3 38,8	247 17 15	45 42,2	34 7,3	1890	260 12 0,8	273 42 48	16 30,1	33 54,1
1839	175 40 9,2	247 47 43	46 17,7	34 7,0	1891	220 48 31,2	274 13 17	17 5,6	33 53,9
1840	158 51 16,8	248 18 16	167 46 53,3	27 34 6,8	1892	203 59 38,8	274 43 50	168 17 41,2	24 33 53,6
1841	119 27 47,1	248 48 45	47 28,8	34 6,5	1893	164 36 9,1	275 14 18	18 16,8	33 53,4
1842	80 4 17,4	249 19 13	48 4,3	34 6,3	1894	125 12 39,5	275 44 46	18 52,3	33 53,1
1843	40 40 47,8	249 49 41	48 39,9	34 6,0	1895	85 49 9,8	276 15 15	19 27,8	33 52,9
1844	23 51 55,4	250 20 14	167 49 15,5	27 34 5,8	1896	69 0 17,4	276 45 48	168 20 3,4	27 33 52,6
1845	344 28 25,7	250 50 43	49 51,0	34 5,5	1897	29 36 47,7	277 16 16	20 38,9	33 52,3
1846	305 4 56,1	251 21 11	50 26,5	34 5,3	1898	350 13 18,1	277 46 44	21 14,4	33 52,1
1847	265 41 26,4	251 51 39	51 2,0	34 5,0	1899	310 49 48,4	278 17 13	21 49,9	33 51,8
1848	248 52 34,0	252 22 12	167 51 37,6	27 34 4,7					
1849	209 29 4,3	252 52 41	52 13,1	34 4,5					
1850	170 5 34,7	253 23 9	52 48,6	34 4,2					
1851	130 42 5,0	253 53 37	53 24,2	34 4,0					

Reduction auf die beiden früheren Jahrhunderte:

$$- 200 \ 314 \ 37 \ 3,7 \quad 258 \ 21 \ 52 \quad - 1 \ 58 \ 27,4 \quad + \ 50,6 \quad - 100 \ 157 \ 18 \ 31,8 \quad 309 \ 10 \ 56 \quad - 0 \ 59 \ 13,7 \quad + \ 26,3$$

Monate.	Länge.	Perisat.	Knoten.
Januar	0° 0' 0,0	0' 0"	0,0
Februar	339 53 14,2	2 35	3,0
März	252 2 36,8	4 56	5,7
April	231 55 51,0	7 31	8,8
Mai	189 14 28,1	10 1	11,7
Juni	169 7 42,3	12 36	14,7
Juli	126 26 19,3	15 7	17,6
August	106 19 33,6	17 42	20,6
September	86 12 47,8	20 17	23,6
October	43 31 24,8	22 47	26,6
November	23 24 39,1	25 23	29,6
December	340 43 16,1	27 53	32,6

Tag.

1	22 34 37,2	0 5	0,1
2	45 9 14,5	0 10	0,2
3	67 43 51,7	0 15	0,3
4	90 18 28,9	0 20	0,4
5	112 53 6,2	0 25	0,5
6	135 27 43,4	0 30	0,6
7	158 2 20,6	0 35	0,7
8	180 36 57,9	0 40	0,8
9	203 11 35,1	0 45	0,9
10	225 46 12,3	0 50	1,0
11	248 20 49,6	0 55	1,1
12	270 55 26,8	1 0	1,2
13	293 30 4,0	1 5	1,3
14	316 4 41,3	1 10	1,4
15	338 39 18,5	1 15	1,5
16	1 13 55,7	1 20	1,6
17	23 48 33,0	1 25	1,7
18	46 23 10,2	1 30	1,8
19	68 57 47,4	1 35	1,8
20	91 32 24,7	1 40	1,9
21	114 7 1,9	1 45	2,0
22	136 41 39,1	1 50	2,1
23	159 16 16,4	1 55	2,2
24	181 50 53,6	2 0	2,3
25	204 25 30,8	2 5	2,4
26	227 0 8,1	2 10	2,5
27	249 34 45,3	2 15	2,6
28	272 9 22,5	2 20	2,7

Tag.	Länge.	Perisat.	Knoten.
29	294°43' 59,8	2' 25"	2,8
30	317 18 37,0	2 30	2,9
31	339 53 14,2	2 35	3,0
32	2 27 51,5	2 40	3,1

Im Januar und Februar der Schaltjahre wird der vorhergehende Tag genommen.

Stunden.		Minuten und Sekunden.					
Länge.	Länge.	Länge.	Länge.	Länge.	Länge.		
1	0°56' 26,7	1	0' 56",4	21	19' 45",3	41	38' 34",1
2	1 52 53,1	2	1 52,9	22	20 41,7	42	39 30,6
3	2 49 19,7	3	2 49,3	23	21 38,2	43	40 27,0
4	3 45 46,2	4	3 45,8	24	22 34,6	44	41 23,5
5	4 42 12,7	5	4 42,2	25	23 31,1	45	42 19,9
6	5 38 39,3	6	5 38,7	26	24 27,5	46	43 16,3
7	6 35 5,9	7	6 35,1	27	25 23,9	47	44 12,8
8	7 31 32,4	8	7 31,5	28	26 20,4	48	45 9,2
9	8 27 59,0	9	8 28,0	29	27 16,8	49	46 5,7
10	9 24 25,5	10	9 24,4	30	28 13,3	50	47 2,1
11	10 20 52,1	11	10 20,9	31	29 9,7	51	47 58,6
12	11 17 18,6	12	11 17,3	32	30 6,2	52	48 55,0
13	12 13 45,2	13	12 13,8	33	31 2,6	53	49 51,4
14	13 10 11,7	14	13 10,2	34	31 59,0	54	50 47,9
15	14 6 38,3	15	14 6,6	35	32 55,5	55	51 44,3
16	15 3 4,8	16	15 3,1	36	33 51,9	56	52 40,8
17	15 59 31,4	17	15 59,5	37	34 48,4	57	53 37,2
18	16 55 57,9	18	16 56,0	38	35 44,8	58	54 33,7
19	17 52 24,5	19	17 52,4	39	36 41,3	59	55 30,1
20	18 48 51,0	20	18 48,8	40	37 37,7	60	56 26,5
21	19 45 17,6						
22	20 41 44,1						
23	21 38 10,7						
24	22 34 37,2						

$$\log \omega \cdot e = 3,771176$$

$$\log \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 0,0124352$$

$$\log e = 8,456751$$

Argumente der Ungleichheiten:

$$\Gamma = \text{Perisaturnium} - \text{Knoten} - 4^\circ 39'$$

$$u' = \text{Länge } \delta - \text{Knoten} - 4^\circ 19'$$

19. Erste Fortsetzung der Untersuchungen über die Bewegung des Hugenischen Saturns-Satelliten.*)

(Astr. Nachr. 9. p. 381.)

In der Einleitung meiner, Nr. 193 — 195 der Astr. Nachr. abgedruckten, Abhandlung über den Hugenischen Saturns-Satelliten habe ich den Grund angegeben, welcher mich bewegen hat, aus den während einer einzigen Periode der Sichtbarkeit des Planeten durch das

Heliometer erlangten Beobachtungen schon Resultate zu suchen und bekannt zu machen [vgl. Abb. 18; p. 128]. Die Untersuchung mit diesen Resultaten abzuschließen war nicht meine Absicht; vielmehr wollte ich im Verlaufe der Zeit noch ähnliche Beobachtungsreihen machen und durch ihre Hinzufügung zu der ersten die Resultate nach und nach verfeinern. Dieser Absicht entsprache

*) [Auszug aus 256 d. a. Verz.]

ich jetzt, indem ich den Astronomen die zweite, im letzten Winter und Frühjahr gemachte Beobachtungsreihe vorlege und daraus diejenigen Verbesserungen ableite, welche den auf der ersten allein beruhenden Elementen hinzugefügt werden müssen, damit sie beiden Reihen so viel als möglich entsprechen. Ich werde diejenige Form der Darstellung wählen, welche die Hinzufügung späterer, ähnlicher Beobachtungsreihen so leicht als möglich machen wird.

[Mittheilungen von 61 Beob. 1830 Dec. 19 bis 1831 Mai 19.]

Der einzige Unterschied dieser Beobachtungsreihe von der vorigen besteht darin, dass ich, wenn der Zustand der Luft nur ganz unsichere Beobachtungen gewährt haben würde, das Instrument verliess, ohne den Versuch, wie es in der ersten Reihe geschah, dennoch zu beendigen. Aus diesem Grunde enthält sie in der Regel keine Angaben, welche keinen Anspruch haben, zum Resultate gezogen zu werden. . . . Ich erinnere bei dieser Gelegenheit daran, dass von dem Zustande der Luft, bei welchem ich gar nicht beobachtete, zu dem Zustande, bei welchem eine Beobachtung vollkommenes Zutrauen verdient, ein Uebergang stattfindet, welcher den Beobachtungen ungleichen Werth geben muss. Unter der Breite von Königsberg ist aber die Luft, vorzüglich im Winter, der Anwendung grosser und stark vergrößernder Instrumente so selten günstig, dass man, wenn man nur unter ganz vortheilhaften Umständen beobachten wollte, eine sehr geringe Ausbeute erhalten würde, deren Werth weit kleiner sein würde, als der Werth häufigerer Beobachtungen, welche man erhält, indem man nur die allernaetheiligsten Zustände der Atmosphäre als Hindernisse gelten lässt.

[Aus der Vergleichung dieser Beobachtungen mit der Abh. 18 entwickelten Theorie] erhält man die

Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler = 16,933 und den mittleren Fehler jeder einzelnen Vergleichung der Theorie mit der Beobachtung

$$= \sqrt{\frac{16,933}{218}} = \pm 0,2787;$$

endlich		Mittl. Fehler.
ΔE	= - 92,84	45,22
ΔP	= + 110,42	50,99
Δe	= + 0,00068908	0,00009879
ΔA	= - 0,049918	0,03269
$\sin i \Delta n$	= - 52,40	42,33
Δi	= + 17,12	42,59

Die verbesserten Elemente der Bahn des Satelliten für 1830 sind hiernach:

Epoche	= 125° 0' 48,8
Perisaturnium	= 244 17 36,0
Excentricität	= 0,02931442
Mittlere Entfernung. =	176,57545
Knoten	= 167° 39' 47
Neigung	= 27 34 26,4

Die Vergleichung aller Beobachtungen mit einem Systeme von Elementen kann so lange aufgeschoben werden, bis fernere Beobachtungsreihen der Bestimmung dieser Elemente den Grad von Sicherheit gegeben haben werden, welchen ich ihnen anzuzeigen wünsche. Bis dahin werde ich auch aufschieben, die Verbesserungen der mittleren Bewegungen zu untersuchen, welche aus den gefundenen kleinen Verbesserungen der Elemente für 1830 hervorgehen. Der oben gefundene Werth der mittleren Entfernung des Trabanten gibt inzwischen die Saturnsmasse $= \frac{1}{35^{+0,2}}$

und den mittleren Fehler des Nenners dieses Bruchs = $\pm 1,94$ Einheiten.

20. Zweite Fortsetzung der Untersuchungen über die Bewegung des Hugenischen Saturns-Satelliten.*)

(Astr. Nachr. 11. p. 17.)

Während der Periode der Sichtbarkeit des Saturns im Jahre 1832 wurden die Beobachtungen des Hugenischen Satelliten, deren Anfang im Jahre 1830 in Nr. 193—195 und deren erste Fortsetzung im Jahre 1831 in Nr. 214 der Astr. Nachr. mitgetheilt worden sind [s. vorstehend], weiter fortgesetzt. Der Absicht gemäss die Beobachtungen, welche jedes folgende Jahr liefert, mit den in den vorangegangenen Jahren erhaltenen zu

vereinigen, um den Elementen der Bahn dieses Satelliten einen immer wachsenden Grad von Zuverlässigkeit zu geben, theile ich jetzt die zweite Fortsetzung meiner in den zuerst angeführten Stücken der Astr. Nachr. enthaltenen Untersuchungen mit.

Diesesmal hat Herr DR. SELANDER aus Upsala, dessen Anwesenheit in Königsberg ich mich gegenwärtig erfreue, die Mühe der Rechnung so vollständig übernommen, dass er selbst die Originalmessungen reducirt und nicht nur nichts zu wünschen, sondern auch mir

*) [Auszug aus 269 d. n. Ver.]

nichts zu thun übrig gelassen hat, als die Zahlen aus seinen Heften abzuschreiben.

1.

Die neue Beobachtungsreihe ist etwas zahlreicher als jede der früheren; sie hat 62 vollständige Ortsbestimmungen des Satelliten geliefert (Febr. 9. bis Mai 7.).

Im Allgemeinen habe ich über diese zweite Fortsetzung der Beobachtungen nur zu bemerken, dass die unmittelbaren Messungen sich nur zweimal, und zwar bei den ersten Angaben für den 9. und 13. Februar, auf die Scheitelpunkte der Ringellipse, in allen übrigen Fällen Anzahl = 348

(nn) = 24,124	(an) = + 0,390	(bn) = - 1,981	(cn) = + 6,805	(dn) = + 3,102	(en) = - 0,410	(fn) = + 3,158
(aa) = + 75,091	(bb) = + 44,194	(cc) = + 346,086	(dd) = + 123,468	(ee) = + 80,976	(ff) = + 75,797	
(ab) = - 1,491	(bc) = - 15,261	(cd) = - 9,777	(de) = + 13,072	(ef) = - 8,269		
(ac) = - 7,082	(bd) = - 9,837	(ce) = + 1,212	(df) = + 4,350			
(ad) = + 2,383	(be) = + 1,484	(ef) = + 0,418				
(ae) = - 24,800	(bf) = - 1,006					
(af) = + 13,594						

Hieraus folgen die allen drei Beobachtungsreihen angemessensten Werthe der unbekanntenen Grössen:

p = + 0,003434,	Gewicht = 65,479
q = + 0,032072,	" 42,568
r = - 0,018803,	" 338,604
s = - 0,023296,	" 117,733
t = + 0,005503,	" 70,882
u = - 0,039812,	" 72,949

Ferner ist die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler = 23,733 und der mittlere Fehler jeder einzelnen Vergleichung der Theorie mit der Beobachtung

$$= \sqrt{\frac{23,733}{342}} = \pm 0,2634$$

Die den zum Grunde gelegten Elementen (Astr. Nachr. Nr. 214, S. 385, [p. 148]) hinzuzufügenden Verbesserungen und ihre mittleren Fehler sind daher:

$\Delta E = + 3,43$	Mittl. Fehler.
$\epsilon \Delta P = + 32,07$	32,755
$\Delta c = - 0,000069116$	0,00006940
$\Delta j = - 0,023296$	0,019281
$\sin i \Delta n = + 5,750$	31,729
$\Delta i = - 39,81$	30,84

Endlich sind die verbesserten Elemente:

Epoche	= 125° 0' 52,2
Perisaturnium	= 244 35 50,0
Excentricität	= 0,02922326
Mittlere Entfernung =	176,55215

aber auf die in der grossen Axe dieser Ellipse liegenden Punkte des Planetenrandes beziehen. Das durch die sehr geringe Oeffnung der Ringellipse veränderte Ansehen des Planeten machte diese Abänderung der Beobachtungen vortheilhaft.

2.

Bei der ferneren, diesen zu den früheren hinzukommenden Beobachtungen gemässen Verbesserung der Elemente des Satelliten ist Herr DR. SELANDER von der in Nr. 214 mitgetheilten Bestimmung derselben ausgegangen

Alle drei Reihen zusammen genommen ergeben folgendes:

Knoten	= 167° 39' 16,6
Neigung	= 27 33 46,6

3.

4.

. . . Die dritten Elemente stimmen mit den zweiten schon so nahe überein, dass die erlangte Annäherung an die wahre Bewegung des Satelliten für sehr gross gehalten werden muss. Dennoch werde ich die Beobachtungen und ihre Anwendung zu weiteren Verfeinerungen der Elemente noch fortsetzen, indem ich sie zu Grundlagen anderer Untersuchungen über das Saturnssystem zu machen gedenke. Obgleich die Geringfügigkeit der den zweiten Elementen angebrachten Verbesserungen schon erwarten lässt, dass die Uebereinstimmung der beiden ersten Beobachtungsreihen mit ihnen sehr nahe so gross sein wird, als sie mit den früheren Elementen war, so führe ich doch an, dass die Summe der Quadrate der Fehler jener beiden Beobachtungsreihen durch die Verbesserungen der Elemente nur um 0,302 gewachsen, also von 16,549 in 16,851 übergegangen ist; die dritte Reihe fügt dieser Summe nur 6,882 hinzu, erscheint also als noch besser gelungen als die früheren.

Die gefundene mittlere Entfernung des Satelliten gibt die Saturnsmasse = $\frac{1}{3501,6}$ und den mittleren Fehler des Nenners dieses Bruches = $\pm 1,15$ Einheiten.

21. Bestimmung der Lage und Grösse des Saturnsrings und der Figur und Grösse des Saturns.*)

(Astr. Nachr. 12. p. 153.)

Die im Jahre 1833 beobachteten Durchgänge der Erde durch die Ebene des Saturnsrings und die seit 1830 mit dem Heliometer gemachten Beobachtungen der Positionswinkel der grossen Axe der Ringellipse setzen mich jetzt in den Stand, die Lage der Ebene des Ringes genauer zu bestimmen als früher möglich war. Bekanntlich wurde die Neigung des Ringes gegen die Ekliptik früher viel zu gross angenommen. Der Fehler dieser Annahme zeigte sich im J. 1811 durch einige Messungen beider Axen der damals weit geöffneten Figur des Ringes, welche ich mit dem Objectivmikrometer eines 16zölligen Dollond'schen Fernrohrs aufstellte und welche später, als Saturn in die Nähe der Knotenlinie des Ringes gekommen war, durch den mit demselben Instrumente beobachteten Positionswinkel der grossen Axe der Ringellipse insoweit bestätigt wurden, als Beobachtungen mit einem so kleinen Instrumente zu erwarten berechtigten**). Obgleich durch diese Versuche, die Lage der Ebene des Ringes genauer zu bestimmen, der bis dahin vorhandene grosse Fehler entfernt wurde, so war doch zu erwarten, dass man der Bestimmung durch Anwendung des grossen Heliometers der Königsberger Sternwarte einen beträchtlich grösseren Grad von Sicherheit werde geben können. Ich habe daher die Positionswinkel des Ringes seit 5 Jahren häufig beobachtet und auf diese Beobachtungen, verbunden mit den seit dem Anfange des vorigen Jahrhunderts wahrgenommenen Verschwindungs- und Wiedererscheinungszeiten des Ringes, die neue Untersuchung der Lage seiner Ebene gegründet, welche ich jetzt mittheile. Ich benutze diese Gelegenheit, meine bisherigen, zur Bestimmung der Grössen des Ringes und des Planeten, so wie auch der Figur des letzteren dienenden Messungen bekannt zu machen.

1.

Die Lage der Ebene des Saturnsäquators ist Veränderungen unterworfen, welche unserer Vorrückung der Nachtgleichen ganz ähnlich sind. Sie durchschneidet eine feste Ebene, welche mit der Ebene der Saturnsbahn zu einer gegebenen Zeit zusammenfällt, unter einem sehr nahe beständigen Winkel, und ihre Durch-

schnittlinien mit dieser Ebene bewegen sich sehr nahe der Zeit proportional gegen die Ordnung der Zeichen. Indem die beträchtliche Abplattung des Saturns und die Nähe des Ringes verursachen, dass die Ebene des Ringes sich immer sehr nahe in der Ebene des Aequators erhält, wird die Bewegung der gemeinschaftlichen Knotenlinie beider Ebenen aus der Einwirkung der Sonne auf beide Körper zusammengesetzt; ihre Grösse kann aber noch nicht aus der Theorie bestimmt werden, indem die dazu notwendige Kenntniss der inneren Beschaffenheiten des Saturns und seines Ringes noch fehlen. Ich werde sie daher als unbekannt Grösse in die Untersuchung einführen und ihre Bestimmung durch die Beobachtungen versuchen.

Um die Lage der Ebene des Saturnsrings gegen die Ekliptik durch die veränderlichen Grössen, welche Einfluss darauf haben, auszudrücken, werde ich sie zuerst auf die Ekliptik von 1750 beziehen und die Länge des aufsteigenden Knotens und die Neigung in Beziehung auf diese Ebene durch n , und i , bezeichnen: die ähnlichen Bestimmungsstücke der Ebene der Saturnsbahn für 1750 durch N und I ; die Länge des aufsteigenden Knotens der Ringebene auf der Ebene der Saturnsbahn für 1750 durch n_0 , die Neigung beider Ebenen gegen einander durch i_0 . Das sphärische Dreieck zwischen den diesen drei Ebenen entsprechenden grössten Kreisen der Kugel ergiebt n , und i , durch n_0 und i_0 , nämlich:

$$\begin{aligned} \sin i, \sin(n, - N) &= \sin i_0, \sin(n_0, - N) \\ \sin i, \cos(n, - N) &= \cos i_0, \sin I + \sin i_0, \cos I \cos(n_0, - N) \\ \cos i, &= \cos i_0, \cos I - \sin i_0, \sin I \cos(n_0, - N) \end{aligned}$$

Um aus n , und i , die Länge des aufsteigenden Knotens der Ringebene auf der beweglichen Ebene der Ekliptik $= n$ und die Neigung beider gegen einander $= i$ zu erhalten, werde ich für die Länge des aufsteigenden Knotens und die Neigung dieser Ebene, in Beziehung auf die Ebene der Ekliptik von 1750, die gebräuchlichen Zeichen Π und σ , so wie für die Entfernung der Durchschnittlinie des Aequators und der festen Ekliptik von 1750, von der Nachtgleichenlinie von 1750 angerechnet, das Zeichen ϕ , anwenden. Das sphärische Dreieck zwischen der Ekliptik von 1750, der beweglichen Ekliptik und der Ebene des Ringes ergiebt dann:

*) [281 d. a. Verz. — Br. m. O. II. 388, 391 — 393 (O.). — Literatur s. nach Abb. 22.]

** [vgl. Abb. 17, sowie unter Sphär. Astr. Abb. 49.]

$$\begin{aligned} \sin i \sin(n - II - \psi) &= \sin i, \sin(n, -II) \\ \sin i \cos(n - II - \psi) &= \cos i, \sin \pi + \sin i, \cos \pi \cos(n, -II) \\ \cos i &= \cos i, \cos \pi - \sin i, \sin \pi \cos(n, -II) \end{aligned}$$

Durch diese Formeln wird die Lage der Ebene des Saturnsringes gegen die bewegliche Ekliptik bekannt, wenn i_n und n_n bekannt sind. Betrachtet man die Neigung der Ringebene gegen die Saturnsbahn von 1750 als unveränderlich und bezeichnet man die jährliche Veränderung der Knotenlinie jener auf dieser durch $-m$, so erhält man durch die Entwicklung der ersten Formeln für 1750 + t :

$$\begin{aligned} n &= n' - \left[\cos I - \frac{\sin I}{\operatorname{tg} i} \cos(n' - N) \right] mt \\ i &= i' + \sin I \sin(n' - N) mt \end{aligned}$$

wo n' und i' die Lage der Ringebene gegen die Ekliptik für die Zeit 1750 bestimmen. Ferner ergibt die ähnliche Entwicklung der letzten Formeln:

$$\begin{aligned} n &= n_0 + \psi + \frac{\pi}{\operatorname{tg} i} \sin(n_0 - II) \\ i &= i_0 - \pi \cos(n_0 - II) \end{aligned}$$

Die Verbindung beider ergibt endlich:

$$\begin{aligned} n &= n' + \psi - \left[\cos I - \frac{\sin I}{\operatorname{tg} i} \cos(n' - N) \right] mt + \frac{\pi}{\operatorname{tg} i} \sin(n' - II) \\ i &= i' + \sin I \sin(n' - N) mt - \pi \cos(n' - II). \end{aligned}$$

Durch eine vorläufige Berechnung einiger der Beobachtungen, deren vollständige Untersuchung ich im Folgenden mittheilen werde, habe ich Näherungswerte von n und i für 1833 erhalten, nämlich

$$n = 167^\circ 21' \quad i = 28^\circ 9' 30''.$$

Herr BOUVARD giebt in seinen Tafeln des Saturns:

$$N = 111^\circ 30' 13''.8, \quad I = 2^\circ 29' 43''.63$$

und nach den Tabulis Reg. P. V. ist

$$\begin{aligned} II &= 171^\circ 36' 10'' \quad \pi = + 0''.48892 \cdot t \\ \psi &= 50''.211 \cdot t. \end{aligned}$$

Unter Voraussetzung dieser Bestimmungen und wenn man den angenommenen Näherungswerten von n und i noch die Verbesserungen δn und δi hinzufügt, erhält man, durch die eben gegebenen Formeln:

$$\begin{aligned} n &= 167^\circ 21' 0'' + \delta n + [50''.125 - 0,952(8)m](t - 83) \\ i &= 28^\circ 9' 30'' + \delta i - [0,487 - 0,03553m](t - 83) \end{aligned}$$

Die vorhandenen Beobachtungen werde ich jetzt mit diesen Formeln vergleichen, um dadurch die drei unbekanntenen Grössen δn , δi und m zu bestimmen.

2.

Ich werde die beobachteten Positionswinkel zugleich mit ihrer Vergleichung mit den eben gegebenen Aus-

drücken von n und i mittheilen. Die Beobachtungen sind von dem Fehler des Index und der Theilungen des Positionskreises schon befreit; auch habe ich bei denselben eine Verbesserung angebracht, von welcher in der Theorie des Heliometers, welche man in der XV. Abtheilung der Beobachtungen auf der Königsberger Sternwarte findet, noch nicht die Rede gewesen ist, indem ihre Nothwendigkeit erst später, im J. 1833, bemerkt worden ist. Diese Verbesserung entsteht aus einer Biegung, welche eine Drehung des Fernrohrs um seine Längsaxe erzeugt, also den Indexfehler des Positionskreises veränderlich macht; ihr Maximum habe ich im Mittel aus 4 Bestimmungen = $2' 34''$ gefunden; ihr Einfluss auf die Beobachtungen in jeder Lage des Instruments kann vollständig berechnet werden, wie ich an einem anderen Orte zeigen werde.

Wenn man die geocentrische Geradeaufsteigung und Abweichung des Planeten durch α und δ bezeichnet, die Länge des aufsteigenden Knotens der Ringebene auf dem Erdäquator genommen durch N , ihre Neigung gegen denselben durch I , die Breite der Erde über der Ringebene durch b , den Positionswinkel des folgenden Theils der Ringellipse durch p , so hat man:

$$\begin{aligned} \cos b \cos p &= \sin I \cos(\alpha - N) \\ \cos b \sin p &= \cos I \cos \delta + \sin I \cos \delta \sin(\alpha - N) \\ \sin b &= -\cos I \sin \delta + \sin I \cos \delta \sin(\alpha - N) \end{aligned}$$

und zur Berechnung von N und I die Formeln:

$$\begin{aligned} \sin I \sin N &= \sin i \sin n \\ \sin I \cos N &= \cos i \sin \omega + \sin i \cos \omega \cos n \\ \cos I &= \cos i \cos \omega - \sin i \sin \omega \cos n \end{aligned}$$

in welchen ω die Schiefe der Ekliptik bedeutet.

	1830	p	Bedingungsbedingungen.			Beob.	
Jan. 12	82° 41',3	0	+	4,3+0,2239 δn	-0,9200 δi	+0,73 m	2
19	43,5		+	0,6+0,2276	-0,9171	+0,74	1
21	38,7		+	5,0+0,2288	-0,9163	+0,74	1
25	54,6		-	11,8+0,2311	-0,9144	+0,75	2
26	40,9		+	1,7+0,2317	-0,9140	+0,76	2
Febr. 1	32,6		+	8,7+0,2353	-0,9110	+0,76	1
6	31,4		+	8,8+0,2384	-0,9084	+0,76	1
9	23,4		+	16,1+0,2403	-0,9068	+0,76	2
14	6,2		+	32,3+0,2433	-0,9042	+0,76	1
15	22,1		+	16,2+0,2439	-0,9037	+0,76	1
16	17,1		+	21,0+0,2445	-0,9031	+0,76	1
März 1	18,9		+	16,8+0,2510	-0,8969	+0,76	2
3	56,8		-	21,4+0,2526	-0,8960	+0,76	2
10	13,2		+	21,2+0,2559	-0,8930	+0,77	1
14	2,9		+	31,0+0,2575	-0,8914	+0,77	2
15	22,1		+	11,7+0,2579	-0,8910	+0,77	1

1830	p	Bedingungsgleichungen.			Beob.
März 16	82°34'	0 =	$1,0+0,2582\delta n$	$-0,8907\delta i+0,77 m$	
17	20,3		$+13,2+0,2586$	$-0,8903 +0,77$	1
April 13	14,2		$+18,0+0,2634$	$-0,8853 +0,77$	1
19	50,0		$-17,7+0,2630$	$-0,8857 +0,76$	2
21	50,4		$-18,0+0,2626$	$-0,8860 +0,76$	1
1831					
Jan. 20	83 43,9		$-9,7+0,1171$	$-0,9825 +0,29$	1
Febr. 16	37,3		$-11,1+0,1319$	$-0,9772 +0,30$	1
19	42,0		$-16,8+0,1337$	$-0,9766 +0,31$	1
März 24	6,3		$+10,0+0,1514$	$-0,9687 +0,32$	2
26	3,6		$+12,3+0,1522$	$-0,9683 +0,32$	2
28	14,1		$+1,5+0,1530$	$-0,9679 +0,32$	1
April 1	21,8		$-6,9+0,1544$	$-0,9672 +0,32$	1
10	29,2		$-15,5+0,1568$	$-0,9669 +0,32$	1
11	12,1		$+1,5+0,1570$	$-0,9659 +0,32$	1
12	19,6		$-6,1+0,1572$	$-0,9658 +0,32$	2
20	2,3		$+10,7+0,1584$	$-0,9652 +0,31$	1
21	12,8		$+0,1+0,1585$	$-0,9651 +0,31$	1
27	18,4		$-5,5+0,1587$	$-0,9649 +0,31$	1
1832					
Febr. 9	84 31,5		$+0,4+0,0205$	$-1,0012 +0,05$	2
11	29,5		$+1,7+0,0215$	$-1,0012 +0,05$	2
13	25,3		$+5,2+0,0225$	$-1,0012 +0,05$	2
14	56,1		$-26,0+0,0230$	$-1,0012 +0,05$	2
15	43,6		$-13,8+0,0235$	$-1,0012 +0,05$	2
16	31,9		$-2,5+0,0241$	$-1,0012 +0,05$	2
17	48,3		$-19,2+0,0246$	$-1,0011 +0,05$	2
19	47,7		$-19,4+0,0258$	$-1,0011 +0,05$	2
22	43,1		$-15,9+0,0274$	$-1,0011 +0,06$	2
28	33,5		$-8,5+0,0308$	$-1,0010 +0,06$	2
März 1	29,7		$-5,5+0,0320$	$-1,0009 +0,06$	2
11	17,8		$+2,7+0,0378$	$-1,0006 +0,06$	2
15	24,7		$-5,6+0,0400$	$-1,0004 +0,06$	2
16	33,5		$-15,5+0,0406$	$-1,0003 +0,06$	1
28	4,5		$+10,3+0,0468$	$-0,9997 +0,06$	2
31	2,6		$+4,3+0,0482$	$-0,9996 +0,06$	3
April 1	8,1		$+5,5+0,0487$	$-0,9995 +0,06$	4
Mai 5	83 45,2		$+22,8+0,0579$	$-0,9982 +0,07$	4
1833					
Febr. 22	85 36,5		$+17,4-0,0744$	$-0,9882$	0,00
23	36,4		$-2,4-0,0739$	$-0,9882$	0,00
25	40,1		$+1,3-0,0739$	$-0,9882$	0,00
27	46,7		$+9,5-0,0719$	$-0,9889$	0,00
März 29	25,7		$+0,8-0,0550$	$-0,9932$	0,00
April 5	31,9		$+9,8-0,0513$	$-0,9941$	0,00
12	16,7		$-2,9-0,0480$	$-0,9948$	0,00
17	13,8		$-4,2-0,0457$	$-0,9953$	0,00
1834					
März 3	87 12,4		$-17,5-0,1694$	$-0,9430 +0,15$	2
7	18,0		$-24,7-0,1672$	$-0,9445 +0,15$	3
13	7,4		$-16,7-0,1638$	$-0,9468 +0,14$	3
18	86 55,8		$-7,4-0,1610$	$-0,9486 +0,14$	3
29	33,4		$+9,9-0,1548$	$-0,9523 +0,14$	4
Mai 10	13,2		$+13,5-0,1345$	$-0,9635 +0,12$	4
12	28,8		$-2,6-0,1338$	$-0,9638 +0,12$	4

Ich habe aus den durch die Beobachtungen eines jeden der fünf Jahre 1830—1834 erlangten Bedingungsgleich-

ungen das arithmetische Mittel genommen und auf diese Art folgende fünf Gleichungen erlangt:

1830	29 Beob.	$0 = +6,07 + 0,2456\delta n - 0,9017\delta i + 0,76 m$	1
1831	16 "	$-1,21 + 0,1501 - 0,9690 + 0,31$	1
1832	39 "	$-0,10 + 0,0356 - 1,0092 + 0,06$	1
1833	24 "	$+3,66 - 0,0618 - 0,9914$	0,00
1834	23 "	$-4,23 - 0,1525 - 0,9532 + 0,14$	1

Ich zweifle nicht, dass den Beobachtungen der verschiedenen Jahre verschiedene, von der Öffnung der Ringellipse abhängige Werthe beigelegt werden sollten; allein theils ist der Unterschied derselben nicht so gross, dass er in den zufälligen Beobachtungsfehlern auffallend hervorgetreten wäre; theils ist es mir vorgekommen, als würden die Beobachtungen, während sich durch die Verkleinerung der kleinen Axe der Ringellipse der Scheitel derselben deutlicher auszeichnet, durch eine sehr geringe Breite der erleuchteten Fläche, deren beide Scheitel man durch das Helimeter in Berührung bringt, wiederum erschwert. Ich habe, in Ermangelung des richtigen Maasses des verhältnissmässigen Werthes der Beobachtungen, alle in Ein Mittel vereinigt und dieses folgendermassen gefunden:

$$131 \text{ Beob. } \dots 0 = +65,2 + 0,0452\delta n - 0,9647\delta i + 0,25 m$$

3.

So wie die Neigung der Ebene des Saturnsringes durch diese Beobachtungen der Positionswinkel fast unabhängig von der Länge des Knotens und ihrer Veränderung bestimmt wird, so bestimmen die Beobachtungen der Verschwindungen und Wiedererscheinungen des Ringes, bei den Durchgängen der Sonne und der Erde durch seine Ebene, die beiden letzteren Elemente fast unabhängig von dem ersteren. Ich habe Herrn Dr. SELANDER in Upsala, während seines Aufenthalts in Königsberg, ersucht, alle vorhandene Beobachtungen dieser Art zu sammeln. Da er meine Bitte erfüllt hat, so bin ich im Stande, hier alles dieser Art zusammenzustellen, was mir mehr oder weniger brauchbar zu sein scheint.

Indem ein Beobachter nie die Zeit einer Verschwindung oder Wiedererscheinung des Saturnsringes, sondern nur den Tag angeben kann, an welchem er ihn zuletzt oder zuerst sah, so wie auch den Tag, an welchem er ihn im ersten Falle nicht mehr und im andern noch nicht sehen konnte, so bestimmen alle Beobachtungen dieser Art nur zwei Grenzen, zwischen welchen die Zeit der Verschwindung oder Wiedererscheinung liegt. Eine dieser Grenzen wird nur dann als eine Annäherung an die Zeit der Verschwindung oder Wiedererscheinung angesehen werden können, wenn

beide nahe bei einander liegen, was nur der Fall sein kann, wenn der Beobachter keinen Tag ungenutzt gelassen hat und seine Aufmerksamkeit zugleich durch den Zustand des Himmels begünstigt worden ist. Wenn daher die Zeit der Verschwindung oder Wiedererscheinung des Ringes nur im Allgemeinen, nicht aber der bestimmte Tag der auflörenden oder anfangenden Sichtbarkeit desselben angegeben ist, so kann man aus dieser, beider Grenzen entbehrenden Angabe keinen Nutzen ziehen. Wenn nur eine Grenze angegeben ist, oder die zweite der ersten nicht sehr nahe liegt, so kann die Angabe nur zur Ausschliessung einer ihr widersprechenden Lage der Ringebene dienen. Wenn endlich beide Grenzen angegeben und einander hinlänglich genähert sind, so erlangt die Angabe das Recht, für die Lage der Ringebene mitzustimmen. Nach diesen Bemerkungen müssen die vorhandenen Angaben der Verschwindungen und Wiedererscheinungen des Ringes sorgfältig gesondert werden. Alle aus dem 17. und einige aus dem 18. Jahrhundert scheinen mir von der zuerst berührten Art zu sein und sind daher bei der folgenden Untersuchung nicht berücksichtigt worden; unter 20 Angaben des 18. und 19. Jahrhunderts finden sich 5 einfach und 15 doppelt begrenzte, welches ich durch (*) und (**) andeuten werde. Ich theile diese 20 Angaben mit den zu ihrer Beurtheilung nöthigen Umständen und mit den Gründen, sie in die eine oder die andere Classe zu versetzen, hier mit. Die Zeit der Erscheinung, welche eigentlich beobachtet werden sollte, werde ich immer so annehmen, dass sie nie die Grenze der Sichtbarkeit des Ringes überschreiten kann, d. h. ich werde bei einer Verschwindung immer eine Zeit, zu welcher der Ring wirklich noch gesehen worden ist, dafür annehmen; bei einer Wiedererscheinung eine Zeit, zu welcher er wirklich schon beobachtet wurde.

I. Durchgang von 1701.

Saturn wurde während des Novembers auf der Pariser Sternwarte aufmerksam beobachtet. Am 7. sah man, statt der Henkel, nur noch einen schwachen Strahl; am 10. stellt eine Zeichnung die Henkel durch einen schwachen Federstrich dar; am 11. durch einen noch schwächeren. Endlich ist Saturn am 25. als rund gezeichnet, durchschnitten von einer punktirten Linie, welche nur durch einen Punkt über die Scheibe hinausgeht und dadurch eine höchst schwache Spur des westlichen Henkels andeutet. Nachher findet man vor dem 20. December keine Beobachtung (Mém. de l'Acad. 1789 p. 146).

Nach diesen Angaben kann die Sichtbarkeit des
BRUNNEN'S Abhandlungen. I. Bd.

Ringes am 25. November nicht bezweifelt werden; allein der Tag, an welchem der Ring zuerst nicht gesehen ist, ist sehr entfernt, weshalb ich die Beobachtung unter die einseitig begrenzten versetze und sie folgendermassen in die Untersuchung bringe:

(1) 1701 Nov. 25,25 Erde Südseite.

II. Durchgänge von 1714 und 1715.

MARALDI gibt (Mém. 1715 p. 12) an, dass am 12. October 1714 nur noch der westliche Henkel sichtbar gewesen, dann aber ein trüber Tag eingetreten, und am 14. von dem Ringe nichts mehr gesehen sei. Hiermit stimmt nicht ganz überein, was CASSINI (Mém. 1774 p. 8 und 1789 p. 147) als von MARALDI'S eigener Hand in den Tagebüchern der Sternwarte angeschrieben, mittheilt: am 13. October nämlich habe man den Saturn in einigen Oeffnungen der Wolken gesehen und die Henkel fast verschwunden gefunden; am 16. aber habe das grosse Fernrohr von 34 Fuss den Planeten auf der rechten Seite völlig rund, auf der linken aber noch mit der Spur eines Henkels versehen gezeigt. Die Verschwindung des Ringes muss also nicht auf den 12. October, sondern auf den 16. (Morgens) gesetzt werden.

Zur Zeit der Wiedererscheinung des Ringes war das Wetter vom 1. bis 10. Febr. 1715 ungünstig. Am Anfange dieses Zeitraumes war von dem Ringe noch nichts zu sehen, am Ende desselben erschienen die Henkel sehr schmal und dunkel. Vermuthlich wäre der Ring schon vor dem 10. Febr. gesehen worden, wenn der Himmel günstig gewesen wäre. Auf jeden Fall gehört die Angabe zu den einseitig begrenzten.

Die zweite Verschwindung kündigte sich am 21. März durch beträchtliche Lichtschwächung der Henkel an; am 22. sah man nur noch eine schwache Spur des westlichen, am 23. auch diese nicht mehr. Man beobachtete nun den Saturn ohne Ring bis zum 11. Juli incl.; allein am 12. hatte er seine Henkel wiedererhalten (Mém. 1716 p. 173 und 1789 p. 148).

Diesen Beobachtungen zufolge nehme ich für die 4 Erscheinungen:

(2) 1714 Octbr. 15,75 ** Erde Südseite
 (3) 1715 Febr. 10,45 * Sonne Nordseite
 (4) März 22,5 ** Erde " "
 (5) Juli 12,375** " "

III. Durchgang von 1731.

Am 10. Febr. konnte man mit dem Fernrohre von 34 Fuss von dem Ringe noch nichts bemerken, allein am 15. zeigte Saturn sehr feine Henkel (Mém. 1789 p. 149).

Wegen der Zwischenzeit von 5 Tagen, welche zwischen beiden Beobachtungen liegt, muss diese Angabe zu den nur einseitig begrenzten gezählt werden. Allein obgleich die Sichtbarkeit des Ringes am 15. Februar nicht bezweifelt werden kann, so kann man seine Unsichtbarkeit am 10. nicht für eben so sicher halten. Der Planet stand damals etwa 30° von der Sonne entfernt und am Ende der Abenddämmerung schon so niedrig, dass eine schwächere Spur des Ringes wohl übersehen sein kann, es also auch möglich ist, dass die Wiedererscheinung des Ringes noch vor dem 10. Februar eingetreten ist. Ich ziehe aus der Beobachtung die Angabe:

(6) 1731 Febr. 15,25* Erde Süd.

IV. Durchgänge von 1744.

Sie konnten nicht beobachtet werden, indem der Planet der Sonne zu nahe war.

V. Durchgang von 1760.

LEMONNIER sah am 12. Mai die Henkel so dunkel und so schwach, dass er Mühe hatte, sich von ihrer wirklichen Sichtbarkeit zu vergewissern. Am 19. Mai sah er ihre Enden „comme de petits points ronds et colorés“ (Mém. 1774 p. 15 und 16).

Auch diese Beobachtung gehört zu den einseitig begrenzten. Die Beschreibung, welche LEMONNIER von dem Ansehen des sichtbarer gewordenen Ringes gibt, stimmt nicht mit den Beschreibungen der ähnlichen Erscheinung, welche andere Beobachter machen und lässt vermuthen, dass er ein mittelmässiges Fernrohr angewandt hat, welches auch durch die Farbe angedeutet wird, welche er an den Enden der Henkel gesehen hat.

(7) 1760 Mai 11,7* Sonne Südseite.

VI. Durchgänge von 1773 und 1774.

Auf der Pariser Sternwarte sah man den Ring vor der ersten Verschwindung bis zum 6. October 1773; der Abbé ROCHON glaubte noch am 10. etwas davon zu sehen; MESSIER sah noch am 11. eine schwache Spur des Ringes, welche aber am 12. verschwunden war (Mém. de Berlin 1776 p. 315). ST. JACQUES DE SYLVA-BELLE in Marseille sah den Ring noch am 12. (Morgens) (Mém. 1774 p. 86). Nach einer in einer politischen Zeitung befindlichen Nachricht versichert Pater MAYER in Mannheim, den Ring noch am 16. (Morgens) gesehen zu haben; ich glaube aber, diese weniger authentische Angabe nicht berücksichtigen zu dürfen.

Vor der ersten Wiedererscheinung sah MESSIER

den Planeten am 4. Jan. 1774 ohne Ring; allein am 11. Jan. (Morgens) waren beide Henkel erschienen, obgleich noch äusserst schwach und noch getrennt von der Scheibe des Planeten. Obgleich aus dieser Beschreibung hervorzugehen scheint, dass der Ring nicht viel früher als am 11. Jan. sichtbar gewesen ist, so setze ich diese Angabe doch unter die nur einseitig begrenzten.

Zur Zeit der zweiten Verschwindung sah MESSIER die Henkel noch am 3. April; am 4. war der Himmel bewölkt, und am 5. Abends war jede Spur des Ringes verschwunden (Mém. de Berlin 1776 p. 320). FRANCIS WOLLASTON sah den Ring noch am 4., am 5. aber nicht mehr (Phil. Tr. 1775 p. 294). Hiermit stimmt die Angabe von TOFINO in Cadix völlig überein. Dagegen glaubten DE RATTE und POITEVIN in Montpellier den Ring noch am 10. April zu sehen, sprechen sich aber nicht so bestimmt aus, dass es rathsam erscheinen könnte, ihre Angabe den übereinstimmenden anderen vorzuziehen (Mém. 1774 p. 88).

Die zweite Wiedererscheinung des Ringes bemerkte MESSIER am 1. Juli zwischen 9 und 10^h Abends; damals erschien nur der östliche Henkel, und zwar äusserst schwach (Mém. de Berlin 1776 p. 322). TOFINO in Cadix und FRANCIS WOLLASTON in London sahen den Ring schon am 30. Juni (Phil. Tr. 1775 p. 295 und Mém. 1774 p. 88).

- (8) 1773 Octbr. 11,7** Erde Südseite
 (9) 1774 Jan. 10,7* Sonne Nordseite
 (10) April 4,5** Erde „
 (11) Juni 30,4** „ „

VII. Durchgänge von 1789 und 1790.

MÉCHAIN gibt in der Conn. des Tems 1792 einen sehr umständlichen Bericht über alle ihm bekannt gewordenen Beobachtungen, aus welchem das Folgende ausgezogen ist.

Die erste Verschwindung wurde in Paris wegen des bewölkten Himmels verfehlt; am 6. Mai sahen MÉCHAIN und MESSIER den Saturn ohne Ring. FLAUGERGUES in Viviers war glücklicher, denn er sah den Planeten noch am 5. (Morgens) mit äusserst schwachen Spuren des Ringes; am 6. war der Himmel trübe; am 7. konnte er vom Ringe nichts mehr unterscheiden.

Die erste Wiedererscheinung bemerkte MÉCHAIN zuerst am 27. August, wo nur eine sehr schwache Spur des östlichen Henkels sichtbar wurde. MESSIER sah diesen Henkel am 28. MASKELYNE setzt die Wiedererscheinung gleichfalls auf den 28. BERNARD in Trans stimmt mit MÉCHAIN's Angabe überein. Die Mailänder

Astronomen sahen gleichfalls am 27. schwache Spuren des Ringes.

Die zweite Verschwindung wurde von mehreren Astronomen am 3., 4., 5. October gesehen; allein am 7. sah man auf der Pariser Sternwarte noch eine Spur des Ringes, welche bei sehr heiterem Himmel am 10. noch nicht, wohl aber am 11. verschwunden war. Die Herren BERNARD, Graf BRÜHL und BUGGE sahen gleichfalls den Ring zuletzt am 10. Allein sogar am 15. sah ihn noch DARQUIER in Toulouse. Obgleich ich durchaus keinen Grund habe, der Angabe dieser gefübten Beobachters zu misstrauen, so habe ich mich doch auch nicht entschliessen können, ihr vor den übrigen den Vorzug einzuräumen.

Die zweite Wiedererscheinung sah MESSIER zuerst am 29. Jan., wo der östliche Henkel anfang sichtbar zu werden. An demselben Tage fing auch ST. JACQUES DE SYLVAELLE an den Ring zu sehen. Mehrere Astronomen sahen ihn einen oder mehrere Tage später.

Die sehr vollständig gelungenen Beobachtungen dieser Durchgänge nehme ich folgendermassen an:

- (12) 1789 Mai 4,7** Erde Nordseite
 (13) Aug. 27,3** " "
 (14) Oct. 10,4** Sonne "
 (15) 1790 Jan. 29,25** Erde Südseite.

VIII. Durchgänge von 1802 und 1803.

Zur Zeit der ersten Verschwindung sah MÉCHAIN den Ring noch am 15. Dec. 1802 (Morgens); am 20. meinte er noch eine schwache Spur des östlichen Henkels zu sehen, war aber nicht sicher (Monatl. Corresp. VII S. 187). FLAUGERGUES setzt die Verschwindung des Ringes auf dieselbe Zeit, zu welcher MÉCHAIN den Ring noch gesehen hatte (Conn. des Tems XV p. 492, wo aber keine Einzelheiten der Beobachtung angeführt sind).

Die erste Wiedererscheinung beobachtete HARDING in Lilienthal 1803 Jan. 3. 14^h. Damals zeigte das lichtstarke 13füssige Spiegelteleskop nur den westlichen Henkel; es ist nicht wahrscheinlich, dass andere Fernröhre früher eine Spur des Ringes gezeigt haben sollten. (SCHROETER, Chronograph. Fragmente S. 55).

Die zweite Verschwindung bemerkte SCHROETER am 16. Juni 9^h 55^m, wo der östliche Henkel schon verschwunden und der westliche nur noch sehr schwach sichtbar war (ebendasselbst S. 209).

Die zweite Wiedererscheinung konnte nicht beobachtet werden, indem Saturn der Sonne zu nahe war. Diese Durchgänge liefern daher die folgenden drei Angaben:

- (16) 1802 Dec. 14,75** Erde Südseite
 (17) 1803 Jan. 3,6** " "
 (18) Juni 16,4** Sonne "

IX. Durchgänge von 1819.

Sie konnten wegen der ungünstigen Stellung des Planeten nicht beobachtet werden.

X. Durchgänge von 1832 und 1833.

Die erste Verschwindung fiel am Ende Septembers 1832 vor, und die Stellung des Planeten gegen die Sonne erlaubte nicht sie zu beobachten.

Die erste Wiedererscheinung, welche sich Anfangs December ereignete, scheint von wenigen Astronomen beachtet, von denen aber, welche sie zu beobachten suchten, des schlechten Wetters wegen verfehlt zu sein. In Königsberg sah ich am 28. Nov. den Planeten ohne Ring; als ich ihn aber am 12. Dec. wieder sah, war der Ring schon sehr augenfällig. Herr SCHWABE in Dessau glaubt, schon am 1. Dec. eine Spur des Ringes gesehen zu haben (Astr. Nachr. Nr. 239), allein da auch ihm das Wetter höchst ungünstig war, so konnte er nicht sicher darüber werden. Wenn nicht noch andere Beobachtungen bekannt werden, so ist also diese Wiedererscheinung verloren.

Zur Zeit der zweiten Verschwindung hat Herr MÄDLER den Ring bis zum 25. April gesehen, die Herren v. BOGUSLAWSKI, BIANCHI und PETERSEN bis zum 26. und Herr SCHWABE bis zum 27. Herr VALZ in Nismes und ich in Königsberg haben ihn am 23. zuletzt gesehen, allein hier waren alle Abende zwischen dem 23. und dem 30. trübe, an diesem Tage war aber von dem Ring nichts mehr sichtbar. Die Nachrichten der verschiedenen hier genannten Astronomen findet man in dieser Zeitschrift Nr. 243, 247, 249, 252.

Die zweite Wiedererscheinung sah Herr v. BOGUSLAWSKI am 13. Juni, wo nur eine sehr schwache Spur des Ringes bemerkbar war; Herr BIANCHI glaubte ihn am 14. zu sehen und überzeugte sich von der Wiedererscheinung völlig am 15., an welchem Tage auch Herr VALZ den Ring sah. Diesen Angaben zufolge nehme ich an:

- (9) 1833 April 26,37** Erde Nordseite
 (20) Juni 13,37** " "

4.

Die im vorigen Art. angeführten Verschwindungen und Wiedererscheinungen des Ringes sind theils durch Durchgänge der Sonne, theils durch Durchgänge der Erde durch seine Ebene erzeugt worden. Ich habe jeder

der 20 Beobachtungen beigeschrieben, welche Art des Durchganges ihre Ursache war. Zugleich habe ich bemerkt, welche von beiden Seiten des Ringes, die Nord- oder die Südseite, verschwunden oder wiedererschienen ist.

Wenn man die Zeit einer Verschwindung oder Wiedererscheinung des Ringes so annimmt, wie ich sie hier angenommen habe, die erstere nicht nach, die letztere nicht vor der Zeit, zu welcher der Ring wirklich gesehen wurde, so liegt am Tage, dass die Erde und die Sonne zu jeder der angegebenen Zeiten auf derselben Seite des Ringes gestanden haben müssen, und zwar auf der Seite, welche ich den Angaben (1) bis (20) beigeschrieben habe. Wenn also die Ansicht von der Beschaffenheit des Ringes, welche man früher hatte, richtig und derselbe demnach ein durch parallele Ebenen begrenzter Körper ist, von so geringer Dicke, dass das von ihm reflectirte Licht auf der Erde nicht anders gesehen werden kann, als wenn es von einer der ebenen Seitenflächen kömmt, so muss sich eine Ebene finden lassen, über welche die Erde sowohl als die Sonne zu jeder der angegebenen 20 Zeiten nach derselben und zwar der den Zeiten beigeschriebenen Seite erhoben waren. Ist keine Ebene, durch welche diese Bedingung erfüllt wird, vorhanden, so ist die der Bedingung zum Grunde liegende Ansicht unrichtig. Es geht dann hervor, dass entweder die beiden Seiten des Ringes nicht durch parallele Ebenen begrenzt werden, oder dass derselbe selbst dann noch sichtbar sein muss, wenn von seinen Seitenflächen kein Licht mehr zu uns gelangen kann. Dieses letztere kann man jedoch nicht annehmen, indem dann der Ring, so wie er für HERSCHEL'S grosses Teleskop nicht verschwand, auch für andere Fernröhre nicht verschwinden könnte, während doch alle Astronomen, ausser HERSCHEL, ihn aus dem Gesichte verloren haben; das erstere wird dagegen durch die, fast bei allen Verschwindungen und Wiedererscheinungen des Ringes bemerkte nicht gleichzeitige Unsichtbarkeit beider Henkel wahrscheinlich. In dem Falle, dass es keine der erwähnten Bedingung entsprechende Ebene gibt, kann man nur darauf ausgehen, die Ebene zu bestimmen, über welche die Erde oder Sonne zu den angegebenen Zeiten sich so wenig erhoben als möglich ist, unbekümmert um den Sinn, in welchem die Erhebungen stattfinden. Obgleich dann der Saturnsring sich nicht in Einer Ebene befindet, so muss die so bestimmte Ebene doch für die seinige angenommen werden.

Ich werde nun mittheilen, was aus der Berechnung der zwanzig Zeitangaben hervorgegangen ist. Wenn

man den geocentrischen (oder heliocentrischen) Ort des Saturns in Beziehung auf die Ekliptik durch die Länge λ und Breite β bezeichnet, so erhält man die Erhebung der Erde (oder Sonne) über einer durch den Mittelpunkt des Saturns gehenden Ebene, deren Lage gegen die Ekliptik durch die Länge ihrer Knotenlinie $= n + \delta n$ und ihre Neigung $= i + \delta i$ gegeben ist, durch die Formel:

$$\begin{aligned} \sin b = & -\cos i \sin \beta + \sin i \cos \beta \sin(\lambda - n) \\ & - \sin i \cos \beta \cos(\lambda - n) \delta n \\ & + [\sin i \sin \beta + \cos i \cos \beta \sin(\lambda - n)] \delta i \end{aligned}$$

Bei der Anwendung derselben habe ich, dem ersten Art. zufolge

$$\begin{aligned} n = & 167^\circ 21' 0'' + \delta n + (50'', 125 - 0,95206 m)(t - 83) \\ i = & 28^\circ 9' 30'' + \delta i - (0,487 - 0,03553 m)(t - 83) \end{aligned}$$

gesetzt, jedoch statt der unbekanntenen Grösse m eine neue $m' = m - 10''$, von welcher ich glaubte, dass ihr Werth kleiner ausfallen würde als der Werth von m , in die Rechnung eingeführt, so dass die Beobachtungen mit den Formeln

$$\begin{aligned} n = & 167^\circ 21' 0'' + \delta n + (40'', 6044 - 0,95206 m')(t - 83) \\ i = & 28^\circ 9' 30'' + \delta i - (0,1317 - 0,03553 m')(t - 83) \end{aligned}$$

verglichen worden sind. Die dazu angewandten Werthe von λ und β habe ich aus BOUVARD'S Tafeln für den Saturn und den meinigen für die Sonne berechnet und sie folgendermassen gefunden:

	λ	β	
1701 Nov. 25,25	350° 3' 47,1	- 2° 20' 17,5	Geocentr.
1714 Oct. 15,75	169 17 13,2	+ 1 52 28,4	"
1715 Febr. 10,45	170 0 8,5	+ 2 8 2,7	Heliocentr.
März 22,5	170 11 1,4	+ 2 24 54,6	Geocentr.
Juli 12,375	169 48 51,2	+ 2 8 11,7	"
1731 Febr. 15,25	350 41 58,6	- 2 0 40,3	"
1760 Mai 11,7	351 1 33,4	- 2 8 47,6	Heliocentr.
1773 Oct. 11,7	170 29 4,4	+ 1 53 21,9	Geocentr.
1774 Jan. 10,7	170 41 25,5	+ 2 8 9,6	Heliocentr.
April 4,5	171 3 42,3	+ 2 26 6,7	Geocentr.
Juni 30,4	170 39 16,0	+ 2 11 32,9	"
1769 Mai 4,7	350 27 50,4	- 1 54 8,5	"
Aug. 27,5	350 59 43,0	- 2 20 25,9	"
Oct. 10,4	350 47 11,5	- 2 8 10,9	Heliocentr.
1790 Jan. 29,25	350 37 31,9	- 2 3 28,2	Geocentr.
1802 Dec. 14,75	170 27 36,1	+ 1 59 54,6	"
1803 Jan. 3,6	170 41 53,7	+ 2 5 24,1	"
Juni 16,4	170 46 16,9	+ 2 8 5,2	Heliocentr.
1833 April 26,37	171 52 29,5	+ 2 25 39,9	Geocentr.
Juni 13,37	171 37 2,9	+ 2 15 6,9	"

Die Ausdrücke von b habe ich endlich erhalten:

11701	Nov.	20	+ 5' 8",7	+0,4703	δn	-0,0836	δi	+59,09	m'	δ	-
21714	Oct.	15	- 6 37,8	-0,4710		+0,0657		-53,28		δ^{**}	-
31716	Febr.	10	- 0 15,9	-0,4705		+0,0788		-53,14		δ°	+
1	März	22	-10 3,3	-0,4703		+0,0838		-53,09		δ^{**}	+
5	Juli	12	- 5 50,1	-0,4706		+0,0758		-52,95		δ^{**}	+
61731	Febr.	15	-20 49,0	+0,4702		-0,0857		+45,91		δ°	-
17160	Mai	11	-13 33,0	+0,4702		-0,0867		+32,74		δ°	-
81773	Oct.	11	+ 7 36,5	-0,4707		+0,0740		-26,69		δ^{**}	-
91774	Jan.	10	+ 0 17,8	-0,4705		+0,0791		-26,98		δ°	+
10	April	4	- 5 8,8	-0,4701		+0,0872		-26,47		δ^{**}	+
11	Juni	30	- 3 51,9	-0,4705		+0,0790		-26,37		δ^{**}	+
121789	Mai	4	- 1 22,9	+0,4707		-0,0711		+19,68		δ^{**}	+
13	Aug.	27	+ 6 54,8	+0,4703		-0,0828		+19,53		δ^{**}	+
14	Oct.	10	+ 2 21,1	+0,4705		-0,0779		+19,48		δ^{**}	+
151790	Jan.	29	+ 2 31,1	+0,4706		-0,0747		+19,34		δ^{**}	-
161802	Dec.	14	- 8 9,4	-0,4708		+0,0695		-13,54		δ^{**}	-
171803	Jan.	3	- 6 17,5	-0,4706		+0,0739		-13,52		δ^{**}	-
18	Juni	16	- 6 43,8	-0,4706		+0,0753		-13,32		δ^{**}	-
191833	April	26	- 0 19,1	-0,4700		+0,0894		+ 0,14		δ^{**}	+
20	Juni	13	+ 1 23,3	-0,4702		+0,0840		+ 0,21		δ^{**}	+

Die letzte Spalte dieser Tafel bezeichnet die Art des Durchganges, die Vollständigkeit oder Unvollständigkeit der Beobachtung und die sichtbare Seite des Ringes.

5.

Die eben angeführten Rechnungen lassen nicht den mindesten Zweifel über die Unrichtigkeit der Annahme, dass der Ring durch zwei parallele Ebenen begrenzt sei. Dieser Annahme wird in der That durch jeden der drei vollständiger beobachteten Durchgänge widersprochen: am 15. October 1714 hätte die Erde, in Beziehung auf eine der Ebene des Ringes nahe entsprechende Ebene, südlicher sein sollen als am 22. März 1715; am 11. Oct. 1773 südlicher als am 4. April 1774; am 4. Mai 1789 nördlicher als am 29. Jan. 1790; es war aber in allen drei Fällen genau entgegengesetzt. Früher bin ich, bei einer ähnlichen Untersuchung, schon auf dieselbe Bemerkung geführt worden; man wird aber, wie ich glaube, ihre Bestätigung durch die gegenwärtige vollständigere Bearbeitung der Beobachtungen nicht ungern sehen.

Da durch diese Bemerkung klar wird, dass man keine Ebene finden kann, über welche die Erhebungen der Erde und Sonne zu den angegebenen Zeiten die Zeichen erhalten, welche die letzte Spalte der Tafel für dieselben vorschreibt, so kann die Ebene, welche man für die Ebene des Ringes annehmen will, nur so bestimmt werden, dass die Summe der Quadrate der zu den Zeiten der aufgehenden oder wieder anfangenden Sichtbarkeit stattfindenden Erhebung der Erde oder Sonne über ihr, den möglichst kleinen Werth erhält. Ich habe also die 15 beiderseitig begrenzten Angaben der Tafel nach der Methode der kleinsten Quadrate be-

handelt und dadurch die Gleichungen zur Bestimmung von δn und m'

$$0 = + 1527,9 + 3,3205 \delta n - 0,5486 \delta i + 167,949 m'$$

erhalten. Schreibt man darin $m - 10''$ für m' und verbindet man sie mit der, am Ende des 2. Art., auf die Beobachtungen der Positionswinkel der Herkellinie gegründeten Gleichung:

$$0 = + 65,2 + 0,0452 \delta n + 0,9647 \delta i + 0,25 m$$

so erhält man durch Auflösung derselben:

$$\delta n = - 137,9$$

$$\delta i = + 63,1$$

$$m = + 3,848$$

und damit die Ausdrücke der Länge des aufsteigenden Knotens des Saturns-Aequators und seiner Neigung für die Zeit T :

$$n = 166^{\circ} 53' 8,9 + 46,462 (T - 1800)$$

$$i = 28 10 44,7 - 0,350 (T - 1800)$$

Die so bestimmte Ebene des Saturns-Aequators stellt die einzelnen Jahrgänge der Beobachtungen der Positionswinkel des Ringes bis auf

1830	+ 4' 36"	29	Beobb.
1831	- 2 33	16	"
1832	- 1 14	39	"
1833	+ 2 46	24	"
1834	- 4 52	23	"

dar und ist daher, in Beziehung auf ihre Neigung, destomehr als sehr gut bestimmt anzunehmen, da man nicht wissen kann, ob die Abweichungen des Ringes von ihr nicht auch in den Positionswinkeln Ungleichheiten erzeugen.

Die Abweichungen der Erde oder Sonne von derselben Ebene, zur Zeit jeder der 15 Angaben der Verschwindungen oder Wiedererscheinungen des Ringes, welche zur Grundlage der Untersuchung gemacht sind, finden sich:

		b	
1714	Oct. 15	- 0' 1"	δ -
1716	März 22	- 3 27	δ +
	Juli 12	+ 0 45	δ +
1773	Oct. 11	+ 11 30	δ -
1774	April 4	- 1 16	δ +
	Juni 30	0 0	δ +
1789	Mai 4	- 4 33	δ +
	Aug. 27	+ 3 45	δ +
	Oct. 10	+ 1 8	δ +
1790	Jan. 29	+ 0 35	δ -
1802	Dec. 14	- 5 57	δ -
1803	Jan. 3	- 3 45	δ -
	Juni 16	- 4 12	δ -
1833	April 26	+ 0 60	δ +
	Juni 13	+ 2 32	δ +

Die stärkste Abweichung der Erde von der bestimmten Ebene, sowohl der Grösse als dem Zeichen nach, findet sich am 11. October 1773, bei einer nicht dem geringsten Zweifel unterworfenen Beobachtung: diese Abweichung würde noch grösser geworden sein, wenn ich die Verschwindung nach CHRISTIAN MAYER'S Angabe hätte annehmen wollen. Man sieht also aus dieser Zusammenstellung, dass der Ring noch gesehen worden ist, während die Erde fast einen Viertelgrad unter der von der Sonne erleuchteten Seite derselben stand.

Die 5 übrigen, nur einseitig begrenzten Angaben zeigen folgende Abweichungen der Erde und Sonne von der bestimmten Ebene:

1701 Nov. 25	— 2' 6"	δ —
1715 Febr. 10	+ 6 21	⊙ +
1731 Febr. 15	— 26 42	δ —
1760 Mai 11	— 18 5	⊙ —
1774 Jan. 10	+ 4 11	⊙ +

Sie stimmen also alle mit dem Zeichen überein, welches die Abweichungen zu früh angegebener Verschwindungen, oder zu spät angegebener Wiedererscheinungen erhalten müssen; auch fallen die grössten Unterschiede auf die beiden Beobachtungen, von welchen sich aus Gründen, welche ich im 3. Art. angeführt habe, keine Sicherheit erwarten liess. Diese Abweichungen sprechen daher nicht gegen die Richtigkeit der Bestimmung der mittleren Ebene des Ringes.

6.

Den Durchmesser des Ringes des Saturns und beide Durchmesser des Planeten selbst habe ich so oft gemessen, als der Zustand des Himmels Erfolg dafür zu versprechen schien. Ich theile hier alle diese Messungen mit, so wie auch ihre Reduction auf die mittlere Entfernung des Saturns von der Sonne, deren Logarithmen ich = 0,9796480 angenommen habe. Die Messungen des Polardurchmessers erforderten, ausser der Reduction auf die mittlere Entfernung, noch die Reduction der gesehenen Projection des Sphäroids auf seine kleine Axe, welche man durch Multiplication des scheinbaren Polardurchmessers mit

$$\frac{\sqrt{1 - ee}}{\sqrt{1 - ee \cos b^2}}$$

erhält. Den Durchmesser des Ringes habe ich in den Jahren 1832 und 1833 nicht mehr gemessen, weil die geringe Oeffnung desselben mir nicht vorthellhaft dafür erschien.

	Ring- durchm.	Arquat- durchm.	Polardurchm.	Reduction auf die mittlere Entfernung	Anzahl d. Beob.
1829 Dec. 11	43,26	—	—	38,91	2 —
21	44,40	19,55	17,81	39,32	2 1 1
1830 Jan. 12	45,09	—	—	18,47	—
21	45,80	19,53	18,42	38,93	15,85
25	45,72	19,74	18,23	39,17	16,91
26	46,20	19,82	18,28	39,04	16,98
46,07	—	—	—	39,46	—
Febr. 1	45,93	19,95	18,31	39,30	17,07
6	45,62	19,74	18,52	39,03	16,89
9	45,96	19,58	18,55	39,35	16,76
14	45,85	—	—	39,25	—
15	45,64	—	—	18,07	39,14
16	46,01	19,74	18,36	39,47	16,93
16	45,77	19,87	18,49	39,29	17,06
März 1	45,38	19,63	18,31	39,32	17,01
3	45,47	—	—	39,40	—
10	45,20	19,45	18,26	39,33	16,89
14	45,24	—	—	39,28	—
14	44,90	19,58	18,02	39,62	17,13
14	44,79	19,47	17,97	39,40	17,13
15	44,69	19,18	17,78	39,36	16,89
16	44,45	19,42	17,89	39,20	17,13
17	44,63	19,32	17,70	39,42	17,06
April 13	42,57	18,65	—	39,30	17,22
18	42,31	—	—	39,41	—
19	42,25	18,15	16,77	39,43	16,94
21	42,02	18,10	16,75	39,36	16,95
1831 Jan. 20	44,50	19,24	17,40	39,02	16,87
Febr. 16	45,11	19,78	—	39,01	17,10
19	44,93	19,50	17,57	38,86	16,86
März 24	44,63	19,34	—	39,51	17,12
28	44,11	19,10	—	39,21	16,98
April 1	43,82	19,21	—	39,17	17,17
10	43,71	18,67	16,99	39,60	16,91
12	43,51	18,75	16,88	39,54	17,04
21	42,76	18,08	16,75	39,45	17,39
27	42,60	18,39	16,81	39,72	17,15
1832 Febr. 9	—	19,15	17,03	—	16,89
11	—	19,26	16,88	—	16,97
13	—	19,21	16,99	—	16,91
14	—	19,36	17,29	—	16,94
15	—	19,54	17,33	—	17,18
17	—	19,64	17,41	—	17,25
20	—	19,63	17,37	—	17,22
März 1	—	19,42	17,51	—	17,00
11	—	19,52	17,63	—	17,12
16	—	19,36	—	—	16,93
31	—	19,40	17,25	—	17,25
1833 Febr. 22	—	18,99	16,85	—	16,97
23	—	19,12	17,05	—	17,07
—	—	18,98	17,00	—	16,95
27	—	19,24	16,92	—	17,14
März 29	—	19,30	17,25	—	17,26

Die mittleren Resultate dieser Messungen sind:

Durchmesser des Ringes 39^o 311 44 Beobb.
 Äquatoral-Durchmesser des Saturns 17,053 70 „
 Polar-Durchmesser des Saturns . . . 15,381 68 „

7.

Bekanntlich hat Sir WILLIAM HERSCHEL eine Eigenthümlichkeit der Figur des Saturns zu bemerken geglaubt und sie auch durch seine Messungen bestätigt gefunden. Nach dem übereinstimmenden Zeugnisse des Augenscheins und der Messungen nahm er an, dass der grösste Durchmesser des Planeten nicht seinem Äquator, sondern der Breite von 43° 20' entspreche: wenn er ihn = 36 setzte, so fand er den Durchmesser des Äquators = 35; den Polardurchmesser der Figur, welche im J. 1805 die Projection des Sphäroids des Saturns war = 32. HERSCHEL glaubte, dass eine solche Eigenthümlichkeit der Figur des Planeten von der Anziehung der Ringe herrühren könne, welche Meinung jedoch durch eine theoretische Untersuchung des Einflusses der Ringe auf die Figur des Planeten, welche ich im XV. Bande von v. ZACH'S Monatl. Correspondenz mitgetheilt habe, nicht bestätigt worden ist.*) HERSCHEL machte diese Wahrnehmung im J. 1805, als der Ring schon beträchtlich geöffnet war und daher eine Abweichung des Planeten von der ellipsoidischen Figur nicht mehr so augenfällig hervortreten konnte, als zur Zeit des Durchganges der Erde durch die gemeinschaftliche Ebene des Ringes und des Äquators, zu welcher Zeit HERSCHEL selbst und andere Astronomen die Eigenthümlichkeit der Figur nicht bemerkt hatten. Das Zusammentreffen des theoretischen Grundes gegen die Herschel'sche Wahrnehmung mit dem Umstande, dass sie nicht zu der Zeit, als sie am vortheilhaftesten hätte gemacht werden können, sondern erst dann gemacht wurde, als das Anstossen der Henkel an die Scheibe des Planeten den Umfang derselben an vier Stellen unterbrach und dadurch die Beurtheilung der Figur durch den Augenschein erschweren musste, liessen mich glauben, dass der zuletzt erwähnte Umstand eine Täuschung verursacht haben könne, welcher durch die Schwierigkeit, mit einem Apparate wie der Herschel'sche war, genau zu messen, nur eine zufällige Bestätigung erhalten habe. Allein ich lege jeder Wahrnehmung von HERSCHEL ein zu grosses Gewicht bei, um die Veranlassung die Figur des Planeten von neuem zu untersuchen, welche der Besitz des grossen Heliometers und

die letzten Durchgänge der Erde durch die Ebene des Saturns Äquators darboten, unbeachtet vorübergehen zu lassen. Ich habe daher günstige Zustände der Luft, welche am 20. Febr., 1. und 31. März 1832 eintraten, benutzt, um die Durchmesser des Planeten in den Winkeln 0, 22° 30', 45°, 67° 30', 90° gegen den Äquator desselben zu messen. Diese Messungen haben ergeben:

	Febr. 20 1 Beob.	März 1 3 Beob.	März 31 3 Beob.
Äquator . . .	17 ^o 632	17 ^o 421	17 ^o 400
22° 30' . . .	18,998	18,929	18,886
45 0	18,574	18,474	18,325
67 30	17,992	17,802	17,506
90 0	17,373	17,042	17,251

Nach der Reduction auf die mittlere Entfernung des Planeten von der Sonne werden diese Zahlen:

Äquator . . .	17 ^o 217	16 ^o 999	17 ^o 254
22° 30' . . .	16,661	16,568	16,797
45 0	16,290	16,170	16,298
67 30	15,779	15,582	15,570
90 0	15,236	15,354	15,343

und ihre arithmetischen, mit Rücksicht auf die Anzahl der Beobachtungen genommenen Mittel, finden sich

Äquator . . .	17 ^o 139
22° 30' . . .	16,679
45 0	16,242
67 30	15,605
90 0	15,332

Die Erhebung der Erde über der Ebene des Saturns Äquators, zu der diesen arithmetischen Mitteln entsprechenden Zeit, war = 4° 54'; hieraus folgen die grosse und die kleine Axe der gemessenen Projection, den Angaben des vorigen Art. gemäss:

$$= 17^o 053 \text{ und } 15^o 394$$

und diesen Axen entsprechen die Durchmesser, welche, in der elliptischen Hypothese, in den fünf Richtungen hätten gemessen werden sollen:

Äquator . . .	17 ^o 053
22° 30' . . .	16,777
45 0	16,160
67 30	15,607
90 0	15,394

Sie sind den wirklich gemessenen so nahe gleich, dass diese der Herschel'schen Figur bestimmt widersprechen. Bei der Sicherheit der Messungen, welche das Heliometer gewährt, war die öftere Wiederholung von Beobachtungen, welche nur eine Entscheidung von zwei weit von einander entfernten Hypothesen herbeiführen sollten, nicht nöthig.

*) [14 d. a. Verz. — Vgl. die betr. Abh. unter „Verschiedenes“.

22. Theorie des Saturnsystems.*)

[Astr. Nachr. 28. p. 1. 49. 321. 371.]

Erster Abschnitt.

Differentialgleichungen der Bewegungen des Saturnsystems.

1.

Indem die Bewegungen untersucht werden sollen, welche die Theile des Systems des Saturn um seinen Mittelpunkt beschreiben, ist Veranlassung vorhanden, die bekannte Auflösung der Aufgabe von der Drehung der festen Körper hier kurz anzuführen. Ich werde damit anfangen.

Wenn der Schwerpunkt eines anziehenden Körpers die rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ hat und seine Masse μ als in jenem Punkte vereinigt angesehen werden kann; wenn ferner seine Entfernung von einem durch x, y, z bestimmten angezogenen Punkte durch

$$A = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

und $\frac{\mu}{A^2}$ durch v bezeichnet werden, so sind die Anziehungen, welche dieser Punkt, parallel mit den drei Coordinatenaxen, erfährt:

$$\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz} \dots \dots \dots (1)$$

und zwar ist jede derselben, je nachdem ihr Ausdruck einen positiven oder negativen Werth hat, nach der Seite gerichtet, nach welcher die Coordinaten negativ oder positiv genommen werden.

Wenn der angezogene Punkt ein Massentheilchen dm eines festen Körpers ist, so erlangt dieser durch die Anziehung das Bestreben, nicht allein sich fortzubewegen, sondern auch sich um seinen Schwerpunkt zu drehen. Diese Drehung kann immer als aus Drehungen des Körpers um seine drei Hauptaxen zusammengesetzt betrachtet werden, deren durch drei Winkel ϑ, ψ, φ zu bestimmende Richtungen, wenn diese durch die unbestimmte Zeit t ausgedrückt sind, die Lage des Körpers, beziehungsweise auf seinen Schwerpunkt, kennen lehren. Wenn die sich auf die Hauptaxen beziehenden Coordinaten des Massentheilchens dm durch x, y, z ,

bezeichnet werden, und wenn die Axe der x , die ist, welcher das kleinste, die der z , die, welcher das grösste Moment der Trägheit zugehört, so soll ϑ den Winkel zwischen der Ebene der x, y -Axen und der festen Ebene der xy -Axen bedeuten; ψ die Entfernung der festen Axe der x von dem aufsteigenden Knoten der ersten Ebene auf der zweiten; φ die Entfernung der Axe der x , von demselben Knoten. Der Winkel ϑ soll kleiner als 90° angenommen werden; ψ, φ sollen vom Knoten an nach der Richtung gezählt werden, nach welcher die Drehung des Körpers vor sich geht, so dass der Ort des Knotens, von der festen Axe der x an gezählt, $= 360^\circ - \psi$ ist.

Die Differentialgleichungen, deren Integration die zu einer unbestimmten Zeit t stattfindenden Werthe von

$$\vartheta, \psi, \varphi \text{ und } \frac{d\vartheta}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}$$

ergeben muss, sind bekanntlich:

$$\left. \begin{aligned} C \frac{d^2 p}{dt^2} + (B - A)qr &= M \\ A \frac{d^2 q}{dt^2} + (C - B)pr &= M' \\ B \frac{d^2 r}{dt^2} + (A - C)pq &= M'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Die darin vorkommenden Grössen haben folgende Bedeutungen:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta \\ q &= \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta \sin \varphi - \frac{d\vartheta}{dt} \cos \varphi \\ r &= \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta \cos \varphi + \frac{d\vartheta}{dt} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

ferner:

$$\left. \begin{aligned} mA &= f dm(y, y, + z, z,) \\ mB &= f dm(x, z, + x, x,) \\ mC &= f dm(x, x, + y, y,) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

welche Integrale auf die ganze Masse des Körpers ausgedehnt werden; endlich:

$$\begin{aligned} mM &= f dm \left(x, \frac{dv}{dy} - y, \frac{dv}{dx} \right) = f dm \left(\eta, \frac{dv}{d\xi} - \xi, \frac{dv}{d\eta} \right) \\ mM' &= f dm \left(y, \frac{dv}{dz} - z, \frac{dv}{dy} \right) = f dm \left(\zeta, \frac{dv}{d\eta} - \eta, \frac{dv}{d\zeta} \right) \\ mM'' &= f dm \left(z, \frac{dv}{dx} - x, \frac{dv}{dz} \right) = f dm \left(\xi, \frac{dv}{d\xi} - \xi, \frac{dv}{d\xi} \right) \end{aligned}$$

wo die Coordinaten auf die Hauptaxen des sich drehen-

*) Diese hinterlassene Arbeit meines unvergesslichen Freundes verdanke ich der Güte der Frau Wittwe. BESSEL hat selbst in den letzten Zeiten auf das Heft geschrieben:

„Wenn auch diese Abhandlung unvollendet bleiben sollte, so mag das davon, was fertig geworden sein wird, doch gedruckt werden.“

SCHUMACHER.

[386 d. a. Verz.]

den Körpers bezogen, angenommen sind. Indem die zweite Form der Ausdrücke von mM , mM' , mM'' nur Differentirungen in Beziehung auf die Coordinaten des anziehenden Punktes verlangt, kann diesen auch die sich auf die Masse des angezogenen beziehende Integration vorangehen, oder die Ausdrücke können:

$$\left. \begin{aligned} mM &= \mu \left[\eta' \frac{dV}{d\xi} - \xi \frac{dV}{d\eta} \right] \\ mM' &= \mu \left[\xi \frac{dV}{d\eta} - \eta' \frac{dV}{d\xi} \right] \\ mM'' &= \mu \left[\xi \frac{dV}{d\xi} - \zeta \frac{dV}{d\xi} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

geschrieben werden, wenn

$$V = \int \frac{d^m}{r}$$

bedeutet, welchem Integrale GAUSS die Benennung Potential gegeben hat.

2.

Ich werde sowohl den Planeten als auch seine Ringe als Rotationskörper annehmen, als solche, deren Masse um die Hauptaxe der z , gleichförmig vertheilt ist. In Fällen dieser Art erfährt die im vorigen Art. angeführte Auflösung der allgemeinen Aufgabe eine Vereinfachung.

Die Eigenschaft, welche die Rotationskörper von anderen Körpern unterscheidet, ist, dass V eine Function von $\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, und ξ , η , ζ ist, welche ξ , und

$$\begin{aligned} \xi &= \xi[\cos \vartheta \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi] + \eta[\cos \vartheta \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi] - \zeta \sin \vartheta \sin \varphi \\ \eta &= \xi[\cos \vartheta \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi] + \eta[\cos \vartheta \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi] - \zeta \sin \vartheta \cos \varphi \\ \zeta &= \xi \sin \vartheta \sin \psi + \eta \sin \vartheta \cos \psi + \zeta \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Indem man statt der beiden ersten auch

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{d\zeta}{\sin \vartheta d\psi} \cos \varphi + \frac{d\zeta}{d\vartheta} \sin \varphi \\ \eta &= -\frac{d\zeta}{\sin \vartheta d\psi} \sin \varphi + \frac{d\zeta}{d\vartheta} \cos \varphi \end{aligned}$$

schreiben kann, erhalten die Formeln (6) die Bezeichnung:

$$\begin{aligned} mM &= \mu \frac{dV}{d\zeta} \left[\frac{d\zeta}{\sin \vartheta d\psi} \sin \varphi - \frac{d\zeta}{d\vartheta} \cos \varphi \right] \\ mM' &= \mu \frac{dV}{d\zeta} \left[\frac{d\zeta}{\sin \vartheta d\psi} \cos \varphi + \frac{d\zeta}{d\vartheta} \sin \varphi \right] \end{aligned}$$

oder, da V die Winkel ϑ , ψ allein in der Coordinate ζ , enthält:

$$\begin{aligned} mM &= \mu \left[\frac{dV}{\sin \vartheta d\psi} \sin \varphi - \frac{dV}{d\vartheta} \cos \varphi \right] \\ mM' &= \mu \left[\frac{dV}{\sin \vartheta d\psi} \cos \varphi + \frac{dV}{d\vartheta} \sin \varphi \right] \end{aligned}$$

Dadurch verwandeln sich die Gleichungen (7) in:

RESNAULT'S Abhandlungen, 1. Bd.

η , nur in ihrer Verbindung zu ϱ enthält. Aus dieser Eigenschaft folgen die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\xi} &= \frac{dV}{d\varrho} \cdot \frac{\xi}{\varrho} \\ \frac{dV}{d\eta} &= \frac{dV}{d\varrho} \cdot \frac{\eta}{\varrho} \\ \frac{dV}{d\zeta} &= \frac{dV}{d\varrho} \cdot \frac{\zeta}{\varrho} + \frac{dV}{d\zeta} \end{aligned}$$

und daher (5):

$$\left. \begin{aligned} mM &= 0 \\ mM' &= -\mu \eta \frac{dV}{d\zeta} \\ mM'' &= \mu \xi \frac{dV}{d\zeta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

worin der sich auf ξ , beziehende Differentialquotient von V nur das ausser ϱ vorkommende ζ , berücksichtigt. Da auch $B = A$ eine Folge der Voraussetzung ist, so verwandelt die erste der Gleichungen (2) sich in:

$$C \frac{dp}{dt} = 0$$

und zeigt dadurch, dass p eine beständige Grösse ist. Die beiden übrigen werden:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dq}{dt} + (C-A)pr &= M' \\ A \frac{dr}{dt} + (A-C)pq &= M'' \end{aligned} \right\} \dots \dots (7)$$

Die Ausdrücke der Coordinaten ξ , η , ζ durch die sich auf das feste Axensystem beziehenden ξ , η , ζ sind bekanntlich:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dq}{dt} + (C-A)pr &= \frac{\mu}{m} \left[\frac{dV}{\sin \vartheta d\psi} \sin \varphi - \frac{dV}{d\vartheta} \cos \varphi \right] \\ A \frac{dr}{dt} - (C-A)pq &= \frac{\mu}{m} \left[\frac{dV}{\sin \vartheta d\psi} \cos \varphi + \frac{dV}{d\vartheta} \sin \varphi \right] \end{aligned} \right\} (8)$$

Substituirt man für q und r ihre Ausdrücke durch $d\psi$ und $d\vartheta$ (3), und multiplicirt man dann in $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$, wie auch in $-\cos \varphi$ und $\sin \varphi$, so werden die Summen der Producte:

$$\begin{aligned} \frac{A \cdot d \cdot \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt}}{dt} + \left[A \frac{d\varphi}{dt} + (C-A)p \right] \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\mu}{m} \frac{dV}{\sin \vartheta d\psi} \\ \frac{A \cdot d \cdot \frac{d\vartheta}{dt}}{dt} - \left[A \frac{d\varphi}{dt} + (C-A)p \right] \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\mu}{m} \frac{dV}{d\vartheta} \end{aligned}$$

oder, wenn man

$$\frac{d\varphi}{dt} = p + \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta$$

setzt und (3) mit $\frac{dt}{A}$ multiplicirt:

$$\left. \begin{aligned} d \cdot \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt} + \left[\frac{C}{A} p + \cos \vartheta \frac{d\psi}{dt} \right] d\vartheta &= \frac{\mu}{Am} \cdot \frac{dV}{\sin \vartheta d\psi} \cdot dt \\ d \cdot \frac{d\vartheta}{dt} - \left[\frac{C}{A} p + \cos \vartheta \frac{d\psi}{dt} \right] \sin \vartheta d\psi &= \frac{\mu}{Am} \cdot \frac{dV}{d\vartheta} \cdot dt \end{aligned} \right\} (9)$$

Aus diesen Gleichungen ist der Winkel φ verschwunden; da jede in der Ebene des Aequators des Rotationskörpers durch seinen Schwerpunkt gelegte gerade Linie als die Hauptaxe der x , angesehen werden kann, so bezieht sich φ auf eine willkürlich anzunehmende dieser Linien, woraus leicht gefolgert werden kann, dass dieser Winkel in ψ und ϑ bestimmenden Gleichungen überflüssig ist.

3.

Ich werde die ersten Integrale dieser Gleichungen aufsuchen. Um verschiedene anziehende Massen μ, μ', μ'', \dots zugleich zu berücksichtigen, werde ich die ihnen entsprechende Summe

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt} &= \cos u f P \cos u dt + \sin u f P \sin u dt + \cos u f Q \sin u dt - \sin u f Q \cos u dt \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \sin u f P \cos u dt - \cos u f P \sin u dt + \sin u f Q \sin u dt + \cos u f Q \cos u dt \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

Diese Integrale sind als vollständig anzusehen, indem die Constanten durch die noch auszuführenden Integrationen geliefert werden können. Wenn man nur

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt} &= \cos nt f P \cos ntdt + \sin nt f P \sin ntdt + \cos nt f Q \sin ntdt - \sin nt f Q \cos ntdt \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \sin nt f P \cos ntdt - \cos nt f P \sin ntdt + \sin nt f Q \sin ntdt + \cos nt f Q \cos ntdt \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

schreiben.

Wenn T eine Function von t bedeutet, so ist:

$$fT \cos ntdt = c + \frac{1}{n} fT \cdot \sin nt + \frac{1}{n} f'T \cdot \cos nt$$

$$fT \sin ntdt = c' - \frac{1}{n} fT \cdot \cos nt + \frac{1}{n} f'T \cdot \sin nt$$

wobei c, c' willkürliche Constanten und

$$fT = T - \frac{d^2 T}{n^2 dt^2} + \frac{d^4 T}{n^4 dt^4} - \dots$$

$$fT = \Sigma h \sin(it + H) \left[1 + \frac{ii}{nn} + \frac{i^4}{n^4} + \dots \right] = \Sigma \frac{h \sin(it + H)}{1 - \frac{ii}{nn}}$$

$$f'T = \Sigma \frac{i}{n} h \cos(it + H) \left[1 + \frac{ii}{nn} + \frac{i^4}{n^4} + \dots \right] = \Sigma \frac{i h \cos(it + H)}{1 - \frac{ii}{nn}}$$

Je kleiner $\frac{i}{n}$ ist, mit desto grösserem Rechte darf der Nenner dieser Formeln mit 1 verwechselt werden, und desto kleiner ist $f'T$ vergleichungsweise mit fT . Allgemein, auch auf nichtperiodische Theile von T bezogen, wird jedes folgende Glied der Reihen, ver-

$$\mu V + \mu' V' + \mu'' V'' + \dots$$

durch $m\Omega$ bezeichnen, die Gleichungen (9) also

$$d \cdot \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt} + \left[\frac{C}{A} p + \cos \vartheta \frac{d\psi}{dt} \right] d\vartheta = \frac{1}{A} \cdot \frac{d\Omega}{\sin \vartheta d\psi} \cdot dt$$

$$d \cdot \frac{d\vartheta}{dt} - \left[\frac{C}{A} p + \cos \vartheta \frac{d\psi}{dt} \right] \sin \vartheta d\psi = \frac{1}{A} \cdot \frac{d\Omega}{d\vartheta} \cdot dt$$

schreiben. Schreibt man abgekürzt $P, Q, \frac{d\Omega}{dt}$ für

$$\frac{1}{A} \frac{d\Omega}{\sin \vartheta d\psi}, \quad \frac{1}{A} \frac{d\Omega}{d\vartheta}, \quad \frac{C}{A} p + \cos \vartheta \frac{d\psi}{dt}$$

und multiplicirt man in $\cos u$ und $\sin u$, ferner in $-\sin u$ und $\cos u$, so werden die Summen der Producte:

$$d \left[\sin \vartheta \frac{d\psi}{dt} \cos u + \frac{d\vartheta}{dt} \sin u \right] = (P \cos u + Q \sin u) dt$$

$$d \left[-\sin \vartheta \frac{d\psi}{dt} \sin u + \frac{d\vartheta}{dt} \cos u \right] = (-P \sin u + Q \cos u) dt$$

und daher die Integrale:

die erste Ordnung der Störungen berücksichtigen will, darf man $\cos \vartheta d\psi$ im Ausdrücke von du vernachlässigen, oder nt statt u , die Ausdrücke (10) also:

$$f'T = \frac{dT}{ndt} - \frac{d^2 T}{n^2 dt^2} + \frac{d^4 T}{n^4 dt^4} - \dots$$

bedeuten. Wenn T eine ganze, rationale, algebraische Function von t ist, so sind fT und $f'T$ offenbar auch solche Functionen; wenn T eine ganze, rationale, periodische Function von t , oder aus Gliedern von der Form $h \sin(it + H)$ zusammengesetzt ist, so führt die gegenwärtige Art der Integration zu bekannten Formeln, nämlich:

gleichungswise mit dem vorhergehenden, so wie auch $f'T$, vergleichungswise mit fT , desto kleiner, je kleiner das Verhältniss der Veränderungen von T zu den Veränderungen von nt ist.

Aus dieser Integration folgt:

$$\cos nt f T \cos ntdt + \sin nt f T \sin ntdt = c \cos nt + c' \sin nt + \frac{1}{n} f' T$$

$$\sin nt f T \cos ntdt - \cos nt f T \sin ntdt = c \sin nt - c' \cos nt + \frac{1}{n} f' T$$

und die Anwendung dieser Formeln verwandelt (11) in:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt} &= (c + c') \cos nt - (c - c') \sin nt + \frac{1}{n} f' P - \frac{1}{n} f' Q \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= (c + c') \sin nt + (c - c') \cos nt + \frac{1}{n} f' P + \frac{1}{n} f' Q \end{aligned}$$

Die Constanten $c + c'$ und $c - c'$ verschwinden, wenn der Körper sich um eine seiner Hauptaxen drehet. Eine andere Art der Drehung hat man noch bei keinem Weltkörper bemerkt, selbst nicht bei der Erde, obgleich die Genauigkeit der Beobachtungen hinreichend gewesen sein würde, einen Werth der Constanten an den Tag zu

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{n} f' P - \frac{1}{n} f' Q = -\frac{1}{C_p} \left[f \left(\frac{d\Omega}{d\vartheta} \right) - f' \left(\frac{d\Omega}{\sin \vartheta d\psi} \right) \right] \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{1}{n} f' P + \frac{1}{n} f' Q = \frac{1}{C_p} \left[f \left(\frac{d\Omega}{\sin \vartheta d\psi} \right) + f' \left(\frac{d\Omega}{d\vartheta} \right) \right] \end{aligned} \dots \dots \dots (12)$$

reduciren werde.

POISSON hat in seiner 1827 bekannt gemachten Abhandlung über die Bewegungen der Erde um ihren Schwerpunkt*) die einfachsten, diese Bewegungen bestimmenden Ausdrücke zuerst gegeben, nämlich:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{1}{C_p} \frac{d\Omega}{d\vartheta} \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{1}{C_p \sin \vartheta d\psi} \end{aligned} \dots \dots \dots (13)$$

Aus den vollständigen Ausdrücken (12) geht hervor, dass dadurch

$$f \left(\frac{d\Omega}{\sin \vartheta d\psi} \right) \text{ und } f' \left(\frac{d\Omega}{d\vartheta} \right)$$

vernachlässigt, und

$$f \left(\frac{d\Omega}{\sin \vartheta d\psi} \right) = \frac{d\Omega}{\sin \vartheta d\psi}, \quad f' \left(\frac{d\Omega}{d\vartheta} \right) = \frac{d\Omega}{d\vartheta}$$

angenommen worden sind, welches erlaubt ist, indem Glieder der Ausdrücke von ψ und ϑ nur eine erhebliche Grösse erlangen, wenn $\frac{i}{n}$ ein sehr kleiner Bruch ist, oder, wenn sie, vergleichungsweise mit der Umdrehungszeit der Erde, eine sehr lange Periode besitzen. Aus demselben Grunde wird es auch in der Theorie der Drehungen des Saturn und seiner Ringe

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2i-1)^2}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i)^2} \left\{ \varphi(i, \mu) \varphi(i, \mu') + \right. \\ &+ \frac{i-i-1}{i+1} \nu \nu' \varphi(i-1, \mu) \varphi(i-1, \mu') 2 \cos(\omega - \omega') \\ &+ \frac{i-i-1}{i+1} \nu^2 \nu'^2 \varphi(i-2, \mu) \varphi(i-2, \mu') 2 \cos 2(\omega - \omega') \\ &+ \frac{i-i-1}{i+1} \nu^3 \nu'^3 \varphi(i-3, \mu) \varphi(i-3, \mu') 2 \cos 3(\omega - \omega') \\ &+ \text{etc.} \dots \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

legen, wenn er auch nur eine Secunde betrüge. In dem Falle des weit entfernten Saturnsystems, dessen Drehungen nur mit weit geringerer Genauigkeit beobachtet werden können, erscheint die fernere Berücksichtigung von $c + c'$ und $c - c'$ überflüssig, weshalb ich die eben gefundenen Ausdrücke, durch ihre Vernachlässigung, auf

erlaubt sein, statt der Ausdrücke (12) die abgekürzten Poisson'schen (13) anzuwenden.

4.

Ich werde der Entwicklung des Potentials

$$V = \int \frac{dm}{r} = \int \frac{dm}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}}$$

in eine nach den Potenzen von

$$r = \sqrt{\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta}$$

fallende Reihe hier eine Stelle einräumen, obgleich das Meiste davon bekannt ist: einige sich an dieses anknüpfende Bemerkungen scheinen mir noch nicht ausgesprochen zu sein. Wenn gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \beta \cos \omega & x &= r' \cos \beta' \cos \omega' \\ \eta &= r \cos \beta \sin \omega & y &= r' \cos \beta' \sin \omega' \\ \zeta &= r \sin \beta & z &= r' \sin \beta' \end{aligned}$$

so kann

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{r'}{rr} Q_1 + \frac{r'^2}{r^2} Q_2 + \frac{r'^3}{r^3} Q_3 + \dots \dots$$

angenommen werden, in welcher Reihe die r und r' nicht enthaltenden Q_1, Q_2, \dots , der Mécanique Céleste zufolge den allgemeinen Ausdruck

*) [Mémoire sur le mouvement de la terre autour de son centre de gravité. Paris 1827.]

haben, worin μ, μ' für $\sin \beta, \sin \beta'$ und ν, ν' für $\cos \beta, \cos \beta'$ geschrieben sind, und

$$\varphi(i-n, \mu) = \mu^{i-n} - \frac{i-n \cdot i-n-1}{2 \cdot 2-1} \mu^{i-n-2} + \frac{i-n \cdot i-n-1 \cdot i-n-2 \cdot i-n-3}{2 \cdot 4 \cdot 2i-1 \cdot 2i-3} \mu^{i-n-4} - \dots$$

bedeutet. Wenn die Dichte des Körpers an dem durch r', β', ω' bestimmten Punkte durch δ bezeichnet wird, so ist

$$dm = \delta r' dr' \cdot \cos \beta' d\beta' \cdot d\omega' = \delta \cdot r' r' dr' \cdot d\mu' \cdot d\omega'$$

wodurch das allgemeine Glied des Ausdrucks des Potentials, nämlich des Ausdruckes:

$$V = \frac{1}{r} \int dm + \frac{1}{r r'} \int r' Q_1 dm + \frac{1}{r^2} \int r' r' Q_2 dm + \dots$$

den Ausdruck:

$$\begin{aligned} V = & \frac{m}{r} + \frac{2\pi}{r r'} \mu \int \int \delta \cdot r'^3 dr' \mu' d\mu' + \frac{2\pi}{r^2} \left(\frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2}\right)^2 (\mu\mu - \frac{1}{2}) \int \int \delta \cdot r'^4 dr' (\mu'\mu' - \frac{1}{2}) d\mu' \\ & + \frac{2\pi}{r^3} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right)^2 (\mu^3 - \frac{3}{2}\mu) \int \int \delta \cdot r'^5 dr' (\mu'^3 - \frac{3}{2}\mu') d\mu' \\ & + \frac{2\pi}{r^4} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right)^2 (\mu^4 - \frac{6}{5}\mu^2 + \frac{3}{5}) \int \int \delta \cdot r'^6 dr' (\mu'^4 - \frac{6}{5}\mu'^2 + \frac{3}{5}) d\mu' \\ & + \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

worin die Integrale von $r' = 0$ bis zu seinem, der Oberfläche entsprechenden Ausdrucke durch $\mu',$ und von

$$\begin{aligned} y_1 = & \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2i-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \varphi(i, \mu) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2i-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} [\mu^i - \frac{i \cdot i-1}{2 \cdot 2i-1} \mu^{i-2} + \text{etc.} \dots] \\ y_2 = & \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2i-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \varphi(i, \mu') = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2i-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} [\mu'^i - \frac{i \cdot i-1}{2 \cdot 2i-1} \mu'^{i-2} + \text{etc.} \dots] \end{aligned}$$

einführt, wird

$$V = \frac{m}{r} + \frac{2\pi}{r r'} y_1 \int \int \delta \cdot r'^3 dr' y_1' d\mu' + \frac{2\pi}{r^2} y_2 \int \int \delta \cdot r'^4 dr' y_2' d\mu' + \text{etc.} \dots \dots \dots (14)$$

Theilt man den Körper in Schichten von gleicher Dichtigkeit und drückt man den Halbmesser einer unbestimmten dieser Schichten durch das Product au aus, von dessen Factoren a die Schichte selbst bestimmt, also von den Anfangspunkte der r' bis zu der Oberfläche wächst, u aber eine Function von μ' ist, welche allgemein, d. h. wenn die Aehnlichkeit aller Schichten nicht vorausgesetzt wird, auch von a abhängt, so wird das allgemeine Glied des Ausdrucks (14):

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi y_i}{i+3 \cdot r^{i+1}} \int \int \delta \cdot d(a^{i+3} u^{i+3}) y_i' d\mu' \\ & \frac{2\pi y_i}{i+3 \cdot r^{i+1}} \left[f\delta \cdot d(a^{i+3} \lambda) \cdot f y_i' d\mu' + f\delta \cdot d(a^{i+3} \lambda_1) \cdot f y_i' \mu' d\mu' + f\delta \cdot d(a^{i+3} \lambda_2) \cdot f y_i' \mu' \mu' d\mu' + \dots \right] \end{aligned}$$

von welchen Integralen die zuerst geschriebenen von dem Mittelpunkte bis zu der Oberfläche, die zuletzt geschriebenen zwischen den schon oft angegebenen Grenzen von μ' zu nehmen sind. LEGENDRE hat gezeigt*), dass der Werth des bestimmten Integrals

erhält. Das dreifache Integral ist von $\omega' = 0$ bis $\omega' = 2\pi$, von $\mu' = -1$ bis $\mu' = 1$, von $r' = 0$ bis zu seinem Werthe an der Oberfläche des Körpers zu nehmen. Wenn der Körper ein Rotationskörper ist, also der Ausdruck von r' den Winkel ω' nicht enthält, verschwinden die in die Cosinus der Vielfachen von $\omega - \omega'$ multiplicirten Theile des Ausdrucks von Q_i aus dem von $\omega' = 0$ bis $\omega' = 2\pi$ genommenen Integrale, und man erhält:

$$\frac{1}{r^{i+1}} \int r' Q_i dm = \frac{1}{r^{i+1}} \int \int \int \delta \cdot r'^{i+2} Q_i dr' d\mu' d\omega'$$

$\mu' = -1$ bis $\mu' = 1$ genommen werden müssen. Wenn man die Bezeichnungen

welches Integral von $a = 0$ bis zur Oberfläche und von $\mu' = -1$ bis $\mu' = 1$ genommen wird. Indem für jedes Gesetz der Figur der Schichten von gleicher Dichtigkeit u^{i+3} durch die Reihe:

$$\lambda + \lambda_1 \mu^1 + \lambda_2 \mu^2 + \lambda_3 \mu^3 + \dots$$

ausgedrückt werden kann, deren Coefficienten von μ' unabhängig, aber im Allgemeinen von a abhängig sind, kann dieser Ausdruck in eine Reihe von Producten zweier bestimmten Integrale verwandelt werden, nämlich:

$$\int_{-1}^{+1} y_i \mu'^m d\mu'$$

wenn i und m beide gerade Zahlen sind:

$$= 2 \cdot \frac{m-i+2 \cdot m-i+4 \dots m}{m+1 \cdot m+3 \dots m+i-1 \cdot m+i+1}$$

ist; wenn beide ungerade Zahlen sind:

*) Exercices de Calcul intégral Vol. II. p. 262.

$$= 2 \cdot \frac{m-i+2 \cdot m-i+4 \dots m-1}{m+2 \cdot m+4 \dots m+i-1 \cdot m+i+1};$$

offenbar verschwindet er wenn eine dieser Zahlen gerade, die andere ungerade ist. Diese Formeln zeigen, dass

$$\frac{4\pi y_i}{i+3 \cdot i'+1} \left[\frac{2 \cdot 4 \dots i}{i+1 \cdot i+3 \dots 2i+1} \int \delta \cdot d(a^{i+3} \lambda) + \frac{4 \cdot 6 \dots i+2}{i+3 \cdot i+5 \dots 2i+3} \int \delta \cdot d(a^{i+3} \lambda_{i+2}) + \dots \right] \dots (15)$$

reducirt; wenn i ungerade ist, auf:

$$\frac{4\pi y_i}{i+3 \cdot i'+1} \left[\frac{2 \cdot 4 \dots i-1}{i+2 \cdot i+4 \dots 2i+1} \int \delta \cdot d(a^{i+3} \lambda) + \frac{4 \cdot 6 \dots i+1}{i+4 \cdot i+6 \dots 2i+3} \int \delta \cdot d(a^{i+3} \lambda_{i+2}) + \dots \right] \dots (15^*)$$

Wenn man u , also auch die u^{i+3} ausdrückende Reihe kennt, kann man die Entwicklung des Potentials durch diese Formeln mit jeder beliebigen Annäherung kennen lernen. Die Aufsuchung einer beliebigen Zahl von Gliedern der Reihe für u^{i+3} hat auch dann keine Schwierigkeit, wenn der Ausdruck von u nicht einfach genug ist, um ihr Gesetz zu verrathen. Sehr einfach wird die Entwicklung, wenn u ein Binomium ist; um ein Beispiel davon zu geben, werde ich die Entwicklung des Potentials eines elliptischen Rotationsphäroids aufsuchen, welche auch LEGENDRE durch eine andere Art der Betrachtung gefunden hat. Für diesen Fall, welchem, wenn der Mittelpunkt zum Anfangspunkte der r' genommen wird,

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{ee}{1-ee} \mu' \mu'}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon \mu' \mu'}}$$

entspricht, hat LEGENDRE das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{+1} u^{i+3} y_i d\mu' = \frac{2(-\epsilon)^{\frac{i}{2}}}{(i+1)(1+\epsilon)^{\frac{i}{2}+1}} = \frac{2E}{i+1}$$

$$\frac{(-1)^{\frac{i}{2}} 4\pi y_i}{i+1 \cdot i+3 \cdot i'+1} \left[\int \delta \cdot d(a^{i+3} \epsilon^{\frac{i}{2}}) - \frac{i+1}{2} \int \delta \cdot d(a^{i+3} \epsilon^{\frac{i}{2}+1}) + \frac{i+1 \cdot i+3}{2 \cdot 4} \int \delta \cdot d(a^{i+3} \epsilon^{\frac{i}{2}+2}) - \text{etc.} \dots \right]$$

oder, da die Factoren der Integrale die Binomialcoefficienten der $-\frac{i+1}{2}$ Potenz sind

$$\frac{(-1)^{\frac{i}{2}} 4\pi y_i}{i+1 \cdot i+3 \cdot i'+1} \int \delta \cdot d \left(\frac{a^{i+3} \epsilon^{\frac{i}{2}}}{(1+\epsilon)^{\frac{i}{2}}} \right) = \frac{(-1)^{\frac{i}{2}} 4\pi y_i}{i+1 \cdot i+r \cdot i'+1} \int \delta \cdot d(a^{i+3} e^i \sqrt{1-ee})$$

übereinstimmend mit dem angeführten, von LEGENDRE gegebenen Ausdrucke.

Man hat also die vollständige Entwicklung des Potentials eines aus elliptischen Schichten bestehenden Rotationsphäroids:

$$V = \frac{m}{r} - \frac{4\pi f \delta \cdot d(a^3 e^2 \sqrt{1-ee})}{3 \cdot 5 \cdot r^3} y_2 + \frac{4\pi f \delta \cdot d(a^5 e^4 \sqrt{1-ee})}{5 \cdot 7 \cdot r^5} y_4 - \text{etc.} \dots (17)$$

In dem Falle der Aehnlichkeit aller seiner Schichten, wodurch e unabhängig von a wird, verwandelt sich dieser Ausdruck in:

$$V = \frac{m}{r} - \frac{4\pi e^2 \sqrt{1-ee} f \delta \cdot da^3}{3 \cdot 5 \cdot r^3} y_2 + \frac{4\pi e^4 \sqrt{1-ee} f \delta \cdot da^5}{5 \cdot 7 \cdot r^5} y_4 - \text{etc.} \dots (17^*)$$

und in dem Falle der Homogenität in:

$$V = \frac{m}{r} - \frac{4\pi e^2 \sqrt{1-ee} \cdot \delta \cdot a^3}{3 \cdot 5 \cdot r^3} y_2 + \frac{4\pi e^4 \sqrt{1-ee} \cdot \delta \cdot a^5}{5 \cdot 7 \cdot r^5} y_4 - \text{etc.} \dots (17^{**})$$

die Theile des eben gegebenen Ausdruckes des allgemeinen Gliedes, in welchem $m < i$ ist, verschwinden, und dass er sich, wenn i gerade ist, auf:

gegeben*), woraus das durch (15) ausgedrückte allgemeine Glied des Potentials

$$= \frac{4\pi y_i}{i+1 \cdot i+3 \cdot i'+1} \int \delta \cdot d(a^{i+3} \cdot E)$$

folgt. Indem die mit ungeraden Ordnungszahlen versehenen λ in der Entwicklung von u^{i+3} fehlen, und die mit geraden, $i, i+2, i+4, \dots$ versehenen, dem Binomischen Lehrsätze zufolge

$$\lambda_i = \frac{i+3 \cdot i+5 \dots 2i+1}{2 \cdot 4 \dots i} (-\epsilon)^{\frac{i}{2}}$$

$$\lambda_{i+2} = \frac{i+3 \cdot i+5 \dots 2i+3}{2 \cdot 4 \dots i+2} (-\epsilon)^{\frac{i}{2}+1}$$

$$\lambda_{i+4} = \frac{i+3 \cdot i+5 \dots 2i+5}{2 \cdot 4 \dots i+4} (-\epsilon)^{\frac{i}{2}+2}$$

u. s. w.

sind, so wird der erste der Ausdrücke (15), nachdem man zwischen den Klammern durch $i+1$ multiplicirt, ausser ihnen dadurch dividirt hat:

*) Exercices de Calcul intégral Vol. II. p. 255.

Der Ausdruck der Masse des Sphäroids ist, in denselben Fällen, resp.

$$\frac{4}{3} \pi f \delta \cdot d(a^3 \sqrt{1-ee}), \quad \frac{4}{3} \pi \sqrt{1-ee} f \delta \cdot da^3, \quad \frac{4}{3} \pi \sqrt{1-ee} \cdot \delta a^3$$

wodurch sich die Formel (17) in:

$$V = \frac{m}{r} \left[1 - \frac{3f\delta \cdot d(a^3 \sqrt{1-ee})}{3 \cdot 5 r^2 f \delta \cdot d(a^3 \sqrt{1-ee})} y_2 + \frac{3f\delta \cdot d(a^3 e^2 \sqrt{1-ee})}{5 \cdot 7 r^2 f \delta \cdot d(a^3 \sqrt{1-ee})} y_4 - \text{etc.} \dots \dots \right] \dots \dots (18)$$

verwandelt; ferner die Formel (17*) in:

$$V = \frac{m}{r} \left[1 - \frac{3e^2 f \delta \cdot da^3}{3 \cdot 5 r^2 f \delta \cdot da^3} y_2 + \frac{3e^4 f \delta \cdot da^3}{5 \cdot 7 r^2 f \delta \cdot da^3} y_4 - \text{etc.} \dots \dots \right] (18^*)$$

endlich die Formel (17**) in:

$$V = \frac{m}{r} \left[1 - \frac{3e^2 a^2}{3 \cdot 5 r^2} y_2 + \frac{3e^4 a^4}{5 \cdot 7 r^2} y_4 - \text{etc.} \dots \dots \right] (18^{**})$$

Die Entwicklung von V (14) convergirt für jedes einem nicht innerhalb des Sphäroids liegenden Punkte zugehörige r desto schneller, je weniger das Sphäroid von der Kugel abweicht, wovon die für ein elliptisches Sphäroid entwickelten Formeln (18) ein Beispiel geben. Sie convergirt aber auch, unabhängig von der Figur des Körpers, desto schneller, je grösser r ist; wovon die Folge ist, dass die Figur und Beschaffenheit des Körpers ihren Einfluss auf die Grösse des Potentials desto mehr verlieren, je grösser r wird. Wenn r gross genug ist, um $\frac{aa}{rr}$ unmerklich zu machen, so äussern sich die Figur und Beschaffenheit eines Körpers nicht mehr merklich in seinem Potentiale, indem dieses keinen anderen Werth erhält, als den die Vereinigung der Masse des Körpers im Anfangspunkte von r ihm geben würde. Ist dieser Punkt der Schwerpunkte des Körpers, so verschwindet bekanntlich das zweite, y_1 enthaltende und durch rr dividirte Glied der Entwicklung des Potentials.

Wird r nur so gross, dass erst $\left(\frac{a}{r}\right)^4$, $\left(\frac{a}{r}\right)^5$, als unmerklich betrachtet werden können, so unterscheidet sich der Körper, in den Werthen seines Potentials, nicht merklich von einem Ellipsoide, so weit auch seine innere und äussere Beschaffenheit davon abweichen mögen. Treffen beide Ursachen einer schnellen Convergenz der Entwicklung zusammen, so entsteht daraus eine noch schnellere; so dass z. B. für ein elliptisches Rotationssphäroid, wenn sowohl e^4 als $\left(\frac{a}{r}\right)^5$ noch merkliche Grössen sind, ihr Product aber unmerklich wird, die Entwicklung sich mit dem ee enthaltenden, durch r^2 dividirten Gliede schliesst. — In Fällen, in welchen μ immer sehr klein bleibt, z. B. in dem Falle der Bewegung eines Punktes in einer sehr wenig gegen die Ebene des Aequators des Sphäroids geneigten Bahn, kann die Entwicklung des Potentials auch durch Weglassung höherer Potenzen von μ abgekürzt werden.

5.

Die Körper, deren Wirkungen auf einander untersucht werden sollen, sind Saturn selbst, seine Ringe und seine Satelliten; auf alle Körper dieses Systems äussert die Sonne ihre Anziehung. Es ist nothwendig, ein Bezeichnungssystem zu wählen, welches Analoges für alle diese Körper leichtverständlich unterscheidet; es wird auch bequemer sein, diese Bezeichnungen hier in eine Uebersicht zu bringen, als sie an den Orten zerstreut mit zutheilen, wo sie zuerst in Anwendung kommen.

Analoge Grössen für die verschiedenen, in Betracht kommenden Körper, sollen durch gleiche Buchstaben bezeichnet, aber für die Sonne durch (s), für die Ringe durch (r), für die Satelliten durch (t), (u), unterschieden werden, während sie für Saturn selbst keine Unterscheidungszeichen erhalten. Die Massen dieser Körper sollen die Bezeichnungen

$$m^0, m, m', m'', m''', \dots \dots$$

erhalten; die Entfernungen von den Mittelpunkten des Saturn

$$r^0, r, r', r'', r''', \dots \dots$$

wovon r und r' unbestimmten Punkten des Saturn und der Ringe zugehören.

Die feste Ebene, auf welche die Lagen beweglicher Ebenen bezogen werden sollen, kann willkürlich bleiben. Die Neigungen der letzteren gegen sie werde ich durch i , die Entfernungen ihrer aufsteigenden Knoten von einem festen Punkte der festen Ebene durch u bezeichnen, so dass

$$i^0, i, i', i'', i''', \dots \dots$$

$$u^0, u, u', u'', u''', \dots \dots$$

die Lagen der Ebenen der Saturnsbewegung um die Sonne, des Saturnsäquators, der Ringe, der Satellitenbahnen bestimmen. Die Entfernungen unbestimmter Punkte dieser Ebene von ihrem aufsteigenden Knoten sollen die Zeichen

$$u^0, u, u', u'', u''', \dots \dots$$

erhalten.

Der Neigung einer dieser Ebenen gegen eine andere werde ich das Zeichen γ , dem ihrem aufsteigenden Knoten auf dieser entsprechenden Werthe von u das Zeichen Γ geben; aber um anzudeuten, welche Ebene dadurch bestimmt werden soll, wird ihr Unterscheidungs-

zeichen an den Fuss von Γ geschrieben werden; so wie auch um auszudrücken, auf welche Ebene die Bestimmung sich bezieht, das dieser zugehörige Unterscheidungszeichen, welches an den Kopf von Γ geschrieben wird. Z. B. bedeuten Γ_n und Γ'_n die Entfernungen der aufsteigenden Knoten der Ebene der Bahn des durch (*) bezeichneten Satelliten auf der Ebene des Saturnsäquators und der Ringebene, von den aufsteigenden Knoten der letzteren Ebenen auf der festen Ebene. Die relativen Neigungen der Ebenen erhalten zwar auch dieselben Unterscheidungszeichen, aber offenbar ist gleichgültig, welches von beiden oben oder unten gestellt wird; z. B. $\gamma^0 = \gamma_0$, $\gamma^0 = \gamma'_0$, u. s. w.

Zeichen, die ausser den hier erklärten noch nothwendig werden, werde ich da angeben, wo sie zuerst in Anwendung kommen.

6.

Differentialgleichungen der Bewegungen der Drehungsaxe des Saturn.

Wenn die Gleichungen (13) auf Saturn angewandt werden sollen, müssen dem vorigen § zufolge i und $360^\circ - n$, statt ϑ und ψ , die Gleichungen selbst also:

$$\left. \begin{aligned} \sin i \frac{dn}{dt} &= \frac{1}{Cp} \cdot \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{Cp} \cdot \frac{d\Omega}{\sin i} \end{aligned} \right\} \dots \dots (19)$$

geschrieben werden; das Fehlen eines Unterscheidungszeichens von i , n , C , p deutet an, dass diese Grössen dem Saturn angehören. Ich werde den Ausdruck von Ω aufsuchen.

Die Sonne liefert zu $m\Omega$ den Beitrag m^0V_0 , worin V_0 , bei der Grösse ihrer Entfernung vom Saturn, äusserst wenig von dem ersten Gliede seiner Entwicklung, nämlich von $\frac{m}{r^0}$, verschieden ist. Das zweite, y , enthaltende Glied dieser Entwicklung verschwindet, indem der Schwerpunkt des Saturn der Anfangspunkt von r^0 ist; mit dem folgenden, y_2 enthaltenden und durch $r^{0,2}$ dividirten Gliede kann, der am Ende des 4. §'s gemachten Bemerkung gemäss, die Entwicklung von V_0 geschlossen werden. Man hat also

$$V_0 = \frac{m}{r^0} - \frac{mk}{r^{0,2}} y_2 = \frac{m}{r^0} - \frac{mk}{r^{0,2}} \left(\frac{3}{2} \mu \mu - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \iint \delta' dr' du' + \frac{k}{2} \int \int \frac{\delta' dr' du'}{r' r'} - \frac{3k}{4} \sin \gamma^2 \int \int \frac{\delta' dr' du'}{r' r'} [1 - \cos 2(u' - \Gamma')]$$

oder

$$= m \iint \delta' dr' du' + \frac{mk}{2} \int \int \frac{\delta' dr' du'}{r' r'} - \frac{3mk}{4} \sin \gamma^2 \int \int \frac{\delta' dr' du'}{r' r'} [1 - \cos 2(u' - \Gamma')]$$

wo unter der Annahme, dass Saturn ein elliptisches Rotationsphäroid ist (18):

$$k = \frac{f \delta \cdot d(a^3 e^2 \sqrt{1-ec})}{5f \delta \cdot d(a^3 \sqrt{1-ec})}$$

bedeutet. Die Grösse μ , oder der Sinus der Breite der Sonne über der Ebene des Saturnsäquators, ist den Bezeichnungen § 5 gemäss:

$$= \sin \gamma^0 \sin (n^0 - \Gamma^0)$$

wo n^0 und Γ^0 die Entfernungen des Saturn und des aufsteigenden Knotens der Ebene seiner Bahn auf der Ebene des Saturnsäquators, von dem ansteigenden Knoten des letzteren auf der festen Ebene bedeuten. Man hat also den Beitrag der Sonne zu dem Ausdrucke von Ω :

$$\frac{m^0}{m} V_0 = \frac{m^0}{r^0} + \frac{m^0 k}{2r^{0,2}} - \frac{3m^0 k}{4r^{0,2}} \sin \gamma^0 [1 - \cos 2(n^0 - \Gamma^0)] (20)$$

Einen Beitrag von gleicher Form liefert auch jeder der Satelliten; denn obgleich ihre Entfernungen von dem Saturn weit kleiner sind, als die Entfernung der Sonne, so sind sie doch noch gross genug um die Weglassung der für diese vernachlässigten Glieder der Entwicklung von V zu erlauben. Die Satelliten setzen also dem Ausdrucke von Ω hinzu:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m''}{m} V_n &= \frac{m''}{r''} + \frac{m'' k}{2r''^2} - \frac{3m'' k}{4r''^2} \sin \gamma'' [1 - \cos 2(n'' - \Gamma'')] \\ \frac{m'''}{m} V_m &= \frac{m'''}{r'''} + \frac{m''' k}{2r'''^2} - \frac{3m''' k}{4r'''^2} \sin \gamma''' [1 - \cos 2(n''' - \Gamma''')] \end{aligned} \right\} (21)$$

u. s. w.

Der ähnliche Beitrag eines Massentheilchens dm' der Ringe, dessen Radiusvector $= r'$ und dessen Entfernung von dem aufsteigenden Knoten der Ringebene auf der festen Ebene $= u'$ ist, hat den Ausdruck:

$$\frac{dm'}{r'} + \frac{k dm'}{2r'^2} - \frac{3k dm'}{4r'^2} \sin \gamma^2 [1 - \cos 2(u' - \Gamma')]$$

Wenn man die in der Flächeneinheit der Ringe, an dem durch r' und u' bestimmten Punkte, enthaltene Masse durch δ' bezeichnet, ist

$$dm' = \delta' \cdot r' dr' du'$$

und der ganze, aus allen dm' entstehende Beitrag der Ringe ist

Wenn δ' nicht von u' unabhängig ist, so kann es nur eine periodische Function davon sein. Beide Fälle unterscheiden sich aber nicht in den von $u' = 0$ bis $u' = 2\pi$ genommenen Integrale:

$$f \delta' dr' du', \quad f \delta' r' dr' du', \quad \int \frac{\delta' dr' du'}{r' r' dr'}$$

nur das Integral

$$\int \frac{\delta' dr' du'}{r' r' dr' \cos 2(u' - \Gamma')}$$

welches, wenn δ' von u' unabhängig ist, verschwindet, erhält einen nichtverschwindenden Werth, falls der Ausdruck von δ' ein von $\sin 2u'$ und $\cos 2u'$ abhängiges Glied enthält. Vernachlässigt man dieses Integral, so reducirt sich der Beitrag der Ringe zu dem Ausdrucke von Ω auf

$$m' \frac{f \delta' dr'}{f \delta' r' dr'} + \frac{m' k}{2} \int \frac{\delta' dr'}{r' r' dr'} - \frac{3m' k}{4} \sin \gamma'^2 \int \frac{\delta' dr'}{r' r' dr'}$$

$$\Omega = -\frac{1}{2} k \left\{ \frac{m''}{r''^2} \sin \gamma'^2 [1 - \cos 2(u'' - \Gamma'')] + \frac{m'}{a'^2} \sin \gamma'^2 + \frac{m''}{r''^2} \sin \gamma''^2 [1 - \cos 2(u'' - \Gamma'')] + \text{etc.} \dots \right\} \quad (23)$$

Indem hieraus hervorgeht, dass in den Gleichungen (19) der Quotient $\frac{k}{G}$ Factor ist, werde ich ihn durch die Elemente ausdrücken, welche die Beschaffenheit des Saturnsphäroids bestimmen. Der Ausdruck von C (4) ist:

$$C = \frac{1}{m} \int dm (x, x_r + y, y_r) = \frac{1}{m} \int dm . r r' (1 - \mu \mu)$$

und wenn für dm sein Ausdruck gesetzt wird:

$$C = \frac{1}{m} \int \int \delta . r^4 (1 - \mu \mu) dr . d\mu . d\omega$$

und im Falle eines Rotationssphäroids:

$$C = \frac{2\pi}{m} \int \int \delta . r^4 (1 - \mu \mu) dr . d\mu$$

Wird dieses Sphäroid als ein elliptisches angenommen, und daher

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{e e}{1 - e e} \mu \mu}}$$

gesetzt, so erhält man, durch die Integration von $\mu = -1$ bis $\mu = 1$,

$$h = \frac{f \delta . d(a^2 e^2 \sqrt{1 - e e})}{f \delta . d(a^2 \sqrt{1 - e e})}$$

$$w = \frac{m''}{r''^2} \sin \gamma'^2 [1 - \cos 2(u'' - \Gamma'')] + \frac{m'}{a'^2} \sin \gamma'^2 + \frac{m''}{r''^2} \sin \gamma''^2 [1 - \cos 2(u'' - \Gamma'')] + \text{etc.} \dots$$

7.

Zwei der Voraussetzungen, welche diesem Ausdrucke zum Grunde liegen, bedürfen einer Erörterung.

wo δ' den von u' unabhängigen Theil seines Ausdruckes bedeutet und die Integrale von der inneren Grenze von r' bis zu der äusseren genommen werden. Wenn der Halbmesser eines Kreises, welcher, wenn die Masse der Ringe gleichmässig auf seinem Umfange vertheilt wäre, gleichgrossen Beitrag zu Ω liefern würde, durch a' bezeichnet, oder wenn a' durch den Ausdruck:

$$a' = \frac{f \delta' r' dr'}{\int \frac{\delta' dr'}{r' r' dr'}}$$

bestimmt wird, wird also der Beitrag der Ringe:

$$\frac{m'}{m} V_r = m' \frac{f \delta' dr'}{f \delta' r' dr'} + \frac{m' k}{2 a'^2} - \frac{3 m' k}{4 a'^2} \sin \gamma'^2 \dots \quad (22)$$

Der Ausdruck von Ω ist die Summe der Ausdrücke (20), (21), (22); da aber aus den Differentialgleichungen (19) alle von der Lage der Ebene des Saturns äquators unabhängige Glieder von Ω verschwinden, so kann man diese weglassen, wodurch nur übrig bleibt:

$$C = \frac{2\pi}{m} \cdot \frac{4}{15} \int \delta . d(a^2 \sqrt{1 - e e})$$

und da

$$m = \frac{4}{3} \pi f \delta . d(a^2 \sqrt{1 - e e})$$

ist,

$$C = \frac{2 f \delta . d(a^2 \sqrt{1 - e e})}{5 f \delta . d(a^2 \sqrt{1 - e e})}$$

also, dem schon angegebenen Ausdrucke von k gemäss,

$$\frac{k}{C} = \frac{1}{5} \frac{f \delta . d(a^2 e^2 \sqrt{1 - e e})}{f \delta . d(a^2 \sqrt{1 - e e})}$$

Damit erlangen die Differentialgleichungen (19) den Ausdruck:

$$\left. \begin{aligned} \sin i \frac{dn}{dt} &= -\frac{3}{5} \frac{h}{p} \cdot \frac{dw}{di} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{3}{5} \frac{h}{p} \cdot \frac{dw}{\sin i dn} \end{aligned} \right\} \dots \dots \quad (24)$$

wo h für $\frac{2k}{C}$, und w für die zwischen den Klammern eingeschlossene Grösse (23) geschrieben sind, also:

Sein von dem Ringsysteme herrührender Theil setzt voraus, dass die für die Sonne und die Satelliten unbedenkliche Vernachlässigung der höheren Glieder der Entwicklung des Potentials auch hier erlaubt sei. Da

aber die Ringe dem Saturn näher, und daher die vernachlässigten Glieder grösser sind, als in jenen Fällen, so erscheint der Versuch einer Schätzung ihrer Grösse nothwendig. Wenn Saturn ein elliptisches Rotations-sphäroid ist, so ist der durch das den angewandten Gliedern folgende Glied vervollständigte Ausdruck von V ,

$$= \frac{m}{r} - \frac{m}{r^3} k_2 y_2 + \frac{m}{r^5} k_1 y_1$$

worin (18)

$$k = \frac{f \delta \cdot d(a^2 e^2 \sqrt{1-ee})}{5f \delta \cdot d(a^2 \sqrt{1-ee})}, \quad k_1 = \frac{3f \delta \cdot d(a^2 e^2 \sqrt{1-ee})}{35f \delta \cdot d(a^2 \sqrt{1-ee})}$$

bedeuten. Indem von

$$y_2 = \frac{3}{2} \mu \mu - \frac{1}{2}, \quad y_1 = \frac{3}{2} \mu^4 - \frac{1}{2} \mu^2 + \frac{3}{2}$$

die μ nicht enthaltenden Glieder nicht in Betracht kommen, kann statt des obigen Ausdrucks von V :

$$- \frac{m}{r^3} \cdot \frac{3}{2} k \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k_1}{k} \cdot \frac{1}{r^2} \right) \mu^2 + \frac{m}{r^5} \cdot \frac{3}{2} k_1 \cdot \mu^4$$

geschrieben werden, wodurch sichtbar wird, dass die Vervollständigung des Ausdrucks von V , das in μ^2 multiplicirte, schon in (23) enthaltene Glied vergrössert und das in μ^4 multiplicirte hinzusetzt. Der innere Halbmesser der Ringe ist etwa doppelt so gross als der Aequatorhalbmesser des Saturn, und daher, wenn dieser durch a bezeichnet wird,

$$\frac{1}{r^3} < \frac{1}{4aa}$$

also

$$\frac{3}{2} \frac{k_1}{k} \cdot \frac{1}{r^2} < \frac{3}{2} \frac{f \delta \cdot d(a^2 e^2 \sqrt{1-ee})}{aa f \delta \cdot d(a^2 \sqrt{1-ee})}$$

Um die letztere Grösse einigermassen zu schätzen, kann man Saturn als homogen, sein Axenverhältniss = 10:9, also $ee = 0,19$ annehmen, wodurch

$$\frac{3}{2} \frac{k_1}{k} \cdot \frac{1}{r^2} < \frac{3}{2} \cdot 0,19 < 0,051$$

wird. Die Vergrösserung des in dem Ausdrucke (23) enthaltenen Theils der Wirkung der Ringe kann daher auf weniger als ein Zwanzigstel geschätzt werden; sie äussert sich dadurch, dass sie die Masse m' der Ringe etwas grösser erscheinen lässt, als sie wirklich ist. Der hinzugekommene, in μ^4 multiplicirte Theil ist unmerklich, weil nicht nur k_1 klein ist, sondern auch das nahe Zusammenfallen der Ebene des Aequators und der Ringe des Saturn μ sehr klein, und seine 4. Potenz ganz unbedeutend macht.

Die zweite Voraussetzung, deren Richtigkeit bezweifelt werden kann, ist die, dass das von $u' = 0$ bis $u' = 2\pi$ genommene Integral:

$$\int \delta' \frac{dr'}{r'} du' \cos 2(u' - \Gamma')$$

verschwinde. Wenn es nicht verschwindet, so wird es doch frei von u' , bringt also nur hervor, dass

$$\int \delta' \frac{dr'}{r'} du' \quad \text{und} \quad \int \delta' \frac{dr'}{r'} du' [1 - \cos 2(u' - \Gamma')]$$

nicht übereinstimmen, was wiederum auf eine Verschiedenheit des im Ausdrucke (23) anzunehmenden Werthes der Masse von ihrem wahren Werthe zurückgeführt werden kann. Eine Unrichtigkeit der einen, wie der anderen Voraussetzung erlangt daher nur Einfluss auf die Bewegungen der Drehungsaxe des Saturn, indem sie sie von einer — wahrscheinlich sehr wenig — veränderten Ringmasse abhängig macht.

8.

Differentialgleichungen der Bewegungen der Drehungsaxe der Ringe.

Gegenwärtig werde ich das ganze Ringsystem des Saturn als einen festen Körper betrachten, dessen Theile in Einer Ebene liegen; allein später werde ich auf diese Annahme zurückkommen.

Die Differentialgleichungen (13), auf die Ringebene angewandt, werden den Gleichungen (19) ähnlich, nur durch sich auf das Ringsystem beziehende Bezeichnungen davon verschieden:

$$\left. \begin{aligned} \sin i' \frac{dn'}{dt} &= \frac{1}{C'p'} \frac{d\Omega'}{dt} \\ \frac{dt'}{dt} &= -\frac{1}{C'p'} \frac{d\Omega'}{\sin i' dn'} \end{aligned} \right\} \dots \dots (25)$$

Da alle Theile der Ringe in einer Ebene liegend angenommen werden sollen, so muss man μ' und seine Potenzen in den Ausdrücken der verschiedenen y' vernachlässigen, wodurch der allgemeine Ausdruck des Potentials eines Rotationskörpers (14), bei seiner Anwendung auf die Saturnsringe, in:

$$V' = \frac{m'}{r} - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{r^3} y_2 \int \delta' r'^3 dr' + \frac{1,3}{24} \frac{2\pi}{r^5} \int \delta' r'^5 dr' - \text{etc.} \dots$$

verwandelt wird. Das darin vorkommende δ' ist, wie im 6. §, die in der Flächeneinheit der Ringe enthaltene Masse = $f \delta \cdot r' d\mu'$; die Integrale werden von dem der inneren Grenze der Ringe entsprechenden Werthe von r' bis zu dem der äusseren entsprechenden genommen. Indem

$$m' = 2\pi f \delta \cdot r' dr'$$

ist, kann

$$V' = \frac{m'}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{y_2}{r^2} \cdot \frac{f \delta \cdot r'^3 dr'}{f \delta \cdot r' dr'} + \frac{1,3}{24} \frac{y_1}{r^4} \cdot \frac{f \delta \cdot r'^5 dr'}{f \delta \cdot r' dr'} \dots \text{etc.} \dots \right]$$

oder abgekürzt

$$V' = \frac{m'}{r} \left[1 - k' \frac{y_4}{r^2} + k'_1 \frac{y_4}{r^2} - k'_2 \frac{y_4}{r^2} + \dots \right]$$

geschrieben werden.

Die Sonne liefert zu dem Ausdruck von \mathcal{Q} einen Beitrag, welcher dem durch (20) ausgedrückten ganz ähnlich ist, also:

$$\frac{m^0}{m} V'_0 = \frac{m^0}{r^0} + \frac{m^0 k'}{2r^0{}^3} - \frac{3m^0 k'}{4r^0{}^3} \sin \gamma_0{}^2 [1 - \cos 2(u^0 - \Gamma^0)] \quad (26)$$

Die Satelliten liefern auch (21) ähnliche Beiträge, wenn ihre Entfernungen gross genug sind, um die in diesen Formeln vernachlässigten höheren Glieder der Entwicklung des Potentials unmerklich zu machen, nämlich:

$$- \frac{3}{2} k' \left\{ \frac{m'}{r^0{}^3} \sin \gamma_0{}^2 [1 - \cos 2(u^0 - \Gamma^0)] + \frac{m'}{a^0{}^3} \frac{k'}{k} \sin \gamma_0{}^2 + \frac{m''}{r^0{}^3} \sin \gamma_0{}^2 [1 - \cos 2(u'' - \Gamma'')] + \text{etc.} \dots \right\}$$

in den Gleichungen (25) Anwendung. Er ist daselbst durch C' dividirt, welches den Ausdruck

$$C' = \frac{1}{m} \int r' r' dm' = \frac{2\pi}{m} \int \delta' \cdot r'^2 dr' = 2k'$$

hat. Hiermit erlangen die Gleichungen (25) den Ausdruck:

$$w' = \frac{m^0}{r^0{}^3} \sin \gamma_0{}^2 [1 - \cos 2(u_0 - \Gamma^0)] + \frac{m'}{a^0{}^3} \cdot \frac{k'}{k} \sin \gamma_0{}^2 + \frac{m''}{r^0{}^3} \sin \gamma_0{}^2 [1 - \cos 2(u'' - \Gamma'')] + \text{etc.} \dots$$

$$k' = \frac{\int \delta' \cdot r'^2 dr'}{2 \int \delta' \cdot r' dr'}$$

bedeuten.

Wenn man auch das y_4 enthaltende Glied der Entwicklung des Potentials berücksichtigen will, so vervollständigt sich dadurch der μ enthaltende, allein in Betracht kommende Theil des Beitrages eines Satelliten, dem vorigen § zufolge, in:

$$- \frac{m}{r^3} \cdot \frac{3}{2} k' \left(1 + \frac{K'}{k} \cdot \frac{1}{rr} \right) \mu^2 + \frac{m}{r^3} \frac{3\mu}{2} k' \mu^4$$

so dass die Vervollständigung sowohl eine mit r veränderliche Vergrösserung der in μ^2 multiplicirten Grösse bewirkt, als auch das in μ^4 multiplicirte Glied hinzusetzt. Jene Vergrösserung ist kleiner als sie sein würde, wenn die Masse der Ringe auf ihrem äusseren Umfange vertheilt wäre, in welchem Falle sie, wenn r' den Halbmesser dieses Umfanges bedeutet, in dem Verhältnisse

$$1 : 1 + \psi \left(\frac{r'}{r} \right)^2$$

stattfinden würde. Für den 5. Satelliten, den entferntesten, ist sie $< 0,003$, für den 4., den Huygen'schen, $< 0,023$, für den 3. $< 0,125$. Sie zeigt sich in der Einwirkung der Satelliten auf die Bewegungen der Ringebene sehr nahe wie eine, innerhalb dieser Grenzen

$$\left. \begin{aligned} \frac{m''}{m} V''_0 &= \frac{m''}{r''} + \frac{m'' k'}{2r''^3} - \frac{3m'' k'}{4r''^3} \sin \gamma_0{}^2 [1 - \cos 2(u'' - \Gamma'')] \\ \frac{m'''}{m} V'''_0 &= \frac{m'''}{r'''} + \frac{m''' k'}{2r'''^3} - \frac{3m''' k'}{4r'''^3} \sin \gamma_0{}^2 [1 - \cos 2(u''' - \Gamma''')] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

u. s. w.

Der Beitrag des Saturn selbst zu dem Ausdrucke von \mathcal{Q} ist $\frac{m_s}{m} V'$, und da V' und V_s , so wie allgemein V_1^s und V_1^a gleichbedeutend sind, dem Ausdrucke (22) gemäss:

$$\frac{m}{m} V' = m \frac{f \delta' \cdot dr'}{f \delta' \cdot r' dr'} + \frac{mk}{2a^3} - \frac{3mk}{4a^3} \sin \gamma_0{}^2 \dots \quad (28)$$

Von den Ausdrücken (26), (27), (28) findet aber nur der von der Lage der Ringebene abhängige Theil, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \sin i' \frac{d\alpha'}{dt} &= - \frac{3}{8p} \cdot \frac{d\alpha'}{dt} \\ \frac{d\alpha'}{dt} &= \frac{3}{8p} \cdot \frac{d\alpha'}{\sin i' dt} \end{aligned} \right\} \dots \quad (29)$$

worin

befindliche Vergrösserung ihrer Massen, welche, selbst in dem Falle des 3. Satelliten, als wenig erheblich angesehen werden kann, da dieser sich sehr nahe in der Ringebene bewegt und daher seine Einwirkung auf diese sehr klein ist. Für die noch näheren Satelliten würde man das y_4 enthaltende Glied der Entwicklung mit weit wenigerem Rechte unberücksichtigt lassen dürfen; allein der für den 3. angeführte Grund, seinen Einfluss auf die Lage der Ringebene für sehr klein zu halten, ist nicht nur auch für die näheren vorhanden, sondern er wird noch durch die wahrscheinliche äusserste Kleinheit ihrer Massen verstärkt. Ich werde daher die Formeln (29) für alle Satelliten genügend annehmen, deren Einfluss auf die Lage der Ringebene merklich werden kann.

9.

Differentialgleichungen der Bewegung eines Satelliten.

Um anzudeuten, für welchen der Satelliten die Differentialgleichungen der Bewegung gesucht werden sollen, sollten die sich auf ihn beziehenden Grössen,

der im § 5 gewählten Bezeichnungsart gemäss, mit dem ihm zukommenden Unterscheidungszeichen versehen werden; allein da entbehrliche Unterscheidungszeichen den Ueberblick über die Formeln, welche ich mitzutheilen haben werde, erschweren, und wirklich keine Zweideutigkeit entstehen wird, wird in diesem und dem folgenden § das Unterscheidungszeichen des Satelliten, für dessen Bewegung die Gleichungen entwickelt werden sollen, weggelassen und einem seine Bewegung störenden das Unterscheidungszeichen (') gegeben wird, so werde ich mir diese Aenderung der § 5 eingeführten Bezeichnungsart, zu welcher ich jedoch zurückkehren werde, hier erlauben; damit Verwechslung mit den schon angewandten und auch hier in der Betrachtung

$$\Omega = V + V' + m^0 \left[\frac{1}{r^3} - \frac{xx'' + yy'' + zz''}{r^5} \right] + m' \left[\frac{1}{r'^3} - \frac{xx'' + yy'' + zz''}{r'^5} \right] + \text{etc.}$$

die Grösse, durch deren, in Beziehung auf x, y, z genommene Differentialquotienten die, den Koordinatenachsen parallel, beziehungsweise auf den Mittelpunkt des Saturn, wirkenden Kräfte ausgedrückt werden; das Fortsetzungszeichen an ihrem Ende bedeutet, dass für jeden störenden Satelliten ein dem letzten ähnliches Glied hinzugefügt werden soll. Schreibt man:

$$\Omega = \frac{m + m'}{r} + w$$

so sind die, die Bewegung des Satelliten um den Mittelpunkt des Saturn bestimmenden Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + (m + m' + m) \frac{x}{r^3} &= \left(\frac{dw}{dx} \right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} + (m + m' + m) \frac{y}{r^3} &= \left(\frac{dw}{dy} \right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} + (m + m' + m) \frac{z}{r^3} &= \left(\frac{dw}{dz} \right) \end{aligned} \right\} \dots (30)$$

Wenn die Masse der Sonne als Einheit der Massen, ihre mittlere Entfernung von der Erde als Einheit der Entfernungen angenommen werden, so ist die dem Umgekehrten der Gaussischen Zahl k gleiche Anzahl mittlerer Tage die von diesen Gleichungen vorausgesetzte Einheit der Zeit. Nimmt man die Länge des siderischen Jahres, meiner Bestimmung zufolge = 365^r256374417, die Erdmasse = $\frac{1}{331455}$, so wird

$$\log k = 8,2355814526$$

und damit die Einheit der Zeit

$$\frac{1}{k} = 58^r 1324394$$

Will man aber $m + m' + m$ als Einheit der Massen annehmen, wodurch die Differentialgleichungen sich in

bleibenden m und m' vermieden werde, muss ich jedoch hier den Massen der Satelliten neue Zeichen, m und m' , geben.

Wenn V und V' die Potentiale des Saturn und seines Ringsystems, auf den Satelliten bezogen, für dessen Bewegung die Differentialgleichungen gesucht werden sollen, bedeuten, x, y, z die Coordinaten dieses Satelliten, x', y', z' die Coordinaten eines störenden, x^0, y^0, z^0 die Coordinaten der Sonne; ferner

$$V^0 = \sqrt{(x-x^0)^2 + (y-y^0)^2 + (z-z^0)^2}$$

$$V' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

so ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} &= \left(\frac{dw}{dx} \right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} &= \left(\frac{dw}{dy} \right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3} &= \left(\frac{dw}{dz} \right) \end{aligned} \right\} \dots (31)$$

verwandeln, so ist die Einheit der Zeit

$$\frac{\sqrt{m^0}}{k} = 58^r 1324394 \sqrt{m^0}$$

wo m^0 die in der jetzt angenommenen Masseneinheit ausgedrückte Masse der Sonne bedeutet.

10.

Wenn w verschwindet, so entsprechen diese Gleichungen der elliptischen Bewegung des Satelliten um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt des Saturn und seiner Ringe. Gibt man, in diesem Falle, den Integralen von (31) die Form:

$$\left. \begin{aligned} x &= r [\cos(\Pi + v) \cos n - \sin(\Pi + v) \sin n \cos i] \\ y &= r [\cos(\Pi + v) \sin n + \sin(\Pi + v) \cos n \cos i] \\ z &= r \sin(\Pi + v) \sin i \end{aligned} \right\} (32)$$

worin r und v aus den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{t - \tau}{a^3} &= e - e \sin e \\ r \cos v &= a (\cos e - e) \\ r \sin v &= a \sqrt{1 - e^2} \sin e \end{aligned} \right\}$$

hervorgehen, und n, i, a, e, Π, τ willkürliche Constanten sind, so sind die aus einem nichtverschwindenden w entstehenden Differentialquotienten dieser Grössen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{1}{h \sin i} \frac{d\omega}{di} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{h \sin i} \left[\frac{d\omega}{dn} - \frac{d\omega}{d\Omega} \cos i \right] \\ \frac{da}{dt} &= -2aa \frac{d\omega}{d\tau} \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{d\omega}{d\Omega} \end{aligned} \right\} (33)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} + \cos i \frac{dn}{dt} = \frac{h}{ae} \frac{d\omega}{de}$$

$$\frac{d\tau}{dt} - ah \left(\frac{d\Omega}{dt} + \cos i \frac{dn}{dt} \right) = 2aa \frac{d\omega}{da}$$

wo h , um abzukürzen, für $\sqrt{a(1-ee)}$ geschrieben ist. In dieser Form sind die, im Wesentlichen zuerst von LAPLACE gegebenen, und von POISSON in seiner berühmten Abhandlung über die Variation der willkürlichen Constanten wieder hervorgebrachten Ausdrücke, am geeignetsten zur Anwendung auf die Bewegung in einer Bahn, deren Excentricität sich der 1 nähert*). Wenn aber die Bahn weniger excentrisch ist, so ist es gebräuchlicher, den Integralen (32) die Form:

$$\left. \begin{aligned} x &= r [\cos(\lambda - n) \cos n - \sin(\lambda - n) \sin n \cos i] \\ y &= r [\cos(\lambda - n) \sin n + \sin(\lambda - n) \cos n \cos i] \\ z &= r \sin(\lambda - n) \sin i \end{aligned} \right\} (34)$$

zu geben und r und λ aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} E - \omega + \frac{t^2}{a^3} &= \varepsilon - e \sin \varepsilon \\ r \cos(\lambda - \omega) &= a(\cos \varepsilon - e) \\ r \sin(\lambda - \omega) &= a\sqrt{1-ee} \sin \varepsilon \end{aligned}$$

abzuleiten, in welchem Falle also n, i, a, e, ω, E als willkürliche Constanten eingeführt werden. Die vier ersten davon sind die unter gleichen Bezeichnungen vorher angewandten; ω und E haben aber durch diese die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \omega &= \Omega + n \\ E &= \Omega + n - \frac{r}{a^3} \end{aligned}$$

Hieraus folgen die Ausdrücke der in (34) angewandten Differentialquotienten von w durch die jetzt anzuwendenden:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\Omega} &= \frac{dw}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\Omega} + \frac{dw}{dE} \cdot \frac{dE}{d\Omega} \\ \frac{dw}{dn} &= \frac{dw}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dn} + \frac{dw}{dE} \cdot \frac{dE}{dn} + \frac{dw}{dn} \\ \frac{dw}{da} &= \frac{dw}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{da} + \frac{dw}{da} \\ \frac{dw}{d\tau} &= \frac{dw}{dE} \cdot \frac{dE}{d\tau} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\Omega} &= \frac{dw}{d\omega} + \frac{dw}{dE} \\ \frac{dw}{dn} &= \frac{dw}{d\omega} + \frac{dw}{dE} - \frac{dw}{dn} \\ \frac{dw}{da} &= \frac{dw}{d\omega} - \frac{dw}{dE} \cdot \frac{3(E-\omega)}{2a} \\ \frac{dw}{d\tau} &= -\frac{dw}{dE} \cdot \frac{1}{a^3} \end{aligned}$$

und ferner die Ausdrücke dn in Beziehung auf t genommenen Differentialquotienten der in (33) vorkommenden Constanten durch die der jetzt anzuwendenden:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{d\omega}{dt} - \frac{dn}{dt} \\ \frac{d\tau}{dt} &= -a^3 \frac{dE}{dt} + a^3 \frac{d\omega}{dt} - \frac{3}{2} \sqrt{a(E-\omega)} \frac{da}{dt} \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1-ee}}{2\gamma a} \frac{da}{dt} - \frac{e\gamma a}{dt} \frac{de}{dt} \end{aligned}$$

Substituirt man dieses in den Formeln (33), so verwandeln sie sich in:

$$\begin{aligned} \sin i \frac{dn}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{1-ee}} \cdot \frac{d\omega}{di} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{1-ee}} \left[\frac{d\omega}{\sin i} \frac{dn}{dt} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \left(\frac{d\omega}{d\omega} + \frac{d\omega}{dE} \right) \right] \\ \frac{da}{dt} &= 2\gamma a \cdot \frac{d\omega}{dE} \\ \frac{\sqrt{1-ee}}{2\gamma a} \frac{da}{dt} - \frac{e\gamma a}{\sqrt{1-ee}} \frac{de}{dt} &= \frac{d\omega}{d\omega} + \frac{d\omega}{dE} \\ \frac{d\omega}{dt} - (1-\cos i) \frac{dn}{dt} &= \frac{\sqrt{1-ee}}{e\gamma a} \frac{d\omega}{d\tau} \\ -a^3 \frac{dE}{dt} + a^3 \frac{d\omega}{dt} - a^3 \sqrt{1-ee} \left[\frac{d\omega}{dt} - (1-\cos i) \frac{dn}{dt} \right] &= 2aa \frac{d\omega}{da} \end{aligned}$$

*) Die obige Form der beiden ersten Ausdrücke findet sich nicht bei LAPLACE und POISSON; ich habe sie zuerst gegeben.

und es folgen daraus die Ausdrücke der Differentialquotienten der in (34) angewandten Constanten:

$$\left. \begin{aligned} \sin i \frac{dn}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{a} \sqrt{1-ee}} \cdot \frac{dw}{di} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{-1}{\sqrt{a} \sqrt{1-ee}} \left[\sin i \frac{dw}{dn} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \left(\frac{dw}{da} + \frac{dw}{dE} \right) \right] \\ \frac{da}{dt} &= 2 \sqrt{a} \cdot \frac{dw}{dE} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-ee}}{e \sqrt{a}} \frac{dw}{da} - \frac{\sqrt{1-ee}}{e \sqrt{a}} [1 - \sqrt{1-ee}] \frac{dw}{dE} \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\sqrt{1-ee}}{e \sqrt{a}} \cdot \frac{dw}{de} + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} i}{\sqrt{a} \sqrt{1-ee}} \cdot \frac{dw}{di} \\ \frac{dE}{dt} &= -2 \sqrt{a} \frac{dw}{da} + \frac{\sqrt{1-ee}}{e \sqrt{a}} [1 - \sqrt{1-ee}] \frac{dw}{de} + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} i}{\sqrt{a} \sqrt{1-ee}} \cdot \frac{dw}{di} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

Das darin vorkommende w ist:

$$w = -\frac{mk}{2^3} [1 - \frac{3}{2} \sin^2 \gamma (1 - \cos 2(u - \Gamma))] + \frac{mk'}{2^3} [1 - \frac{3}{2} \sin^2 \gamma' (1 - \cos 2(u - \Gamma'))] \\ + m^0 \left[\frac{1}{a^3} - \frac{xx'' + yy'' + zz''}{r^3} \right] + m' \left[\frac{1}{a'^3} - \frac{xx'' + yy'' + zz''}{r'^3} \right] + \text{etc.} \dots \dots \dots (36)$$

und es bedeuten darin γ, γ' , die Neigungen der Bahn des Satelliten gegen die Ebene des Saturnsäquators und die Ringebene, Γ, Γ' , die Entfernungen der aufsteigenden Knoten der Satellitenbahn auf diesen Ebenen von dem aufsteigenden Knoten der ersteren auf der festen Ebene, und u die Entfernung des Satelliten von diesem Punkte.

Zweiter Abschnitt.

Säcularänderungen des Saturnsystems.

11.

Die Differentialgleichungen, welche die Säcularänderungen des Saturnsystems bestimmen, gehen aus (24), (29), (35) hervor, indem statt w, w', w die nicht-periodischen Theile ihrer Entwicklungen nach sinus und cosinus der mittleren Bewegung gesetzt werden.

Der nichtperiodische Theil einer Function Π von r und r' ist, wenn r den Radiusvector und v die wahre Anomalie eines der elliptischen Bewegung folgenden Punktes sind, dessen mittlere und excentrische Anomalien durch μ und ϵ , die halbe grosse Axe durch a bezeichnet werden:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi d\mu = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-ee}} \int_0^{2\pi} \Pi \frac{rr'}{aa'} dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi \frac{r}{a} d\epsilon$$

Wenn Π auch die einem anderen Punkte zugehörigen r' und u' enthält, und das Resultat der eben gegebenen Vorschrift noch von diesen Grössen abhängig ist, so fordert seine Befreiung auch davon, dass dieselbe Vorschrift auch in Beziehung auf sie angewandt werde.

Offenbar ist das, was man auf diese Art erhält, Π mag von dem Orte eines Körpers, oder von den Oertern zweier Körper abhängen, wenn es durch die wahren Anomalien ausgedrückt ist, der von ihnen freie Theil des Products:

$$\frac{\Pi}{\sqrt{1-ee} \sqrt{1-e'e'}} \cdot \frac{rr'}{aa'} \cdot \frac{r'r'}{a'a'} = \frac{\Pi(1-ee)^{\frac{3}{2}}(1-e'e')^{\frac{3}{2}}}{(1+e \cos \epsilon)^2(1+e' \cos \epsilon')^2}$$

und wenn es durch die excentrischen Anomalien ausgedrückt ist, der von ihnen freie Theil des Products:

$$\Pi \frac{r}{a} \cdot \frac{r'}{a'} = \Pi(1-e \cos \epsilon)(1-e' \cos \epsilon')$$

Diese Vorschriften müssen angewandt werden, um dadurch die Theile der Grössen w, w', w auszusondern, welche die Säcularänderungen ergeben.

Die beiden ersteren dieser Grössen enthalten allein einem störenden Körper zugehörige veränderliche Grössen, und zwar nur in Gliedern der Form:

$$\frac{1}{r^3}, \quad \frac{\cos 2(v+A)}{r^3}, \quad \frac{\sin 2(v+A)}{r^3};$$

ihre auszusondernden Theile sind also die von v freien der Ausdrücke:

$$\frac{1}{aa \sqrt{1-ee} r'}, \quad \frac{\cos 2(v+A)}{aa \sqrt{1-ee} r'}, \quad \frac{\sin 2(v+A)}{aa \sqrt{1-ee} r'}$$

oder

$$\frac{1+e \cos r}{a^3(1-ee)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\cos 2(v+A)(1+e \cos r)}{a^3(1-ee)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\sin 2(v+A)(1+e \cos r)}{a^3(1-ee)^{\frac{3}{2}}}$$

also offenbar

$$\frac{1}{a^3(1-ee)^{\frac{3}{2}}}, \quad 0, \quad 0.$$

Hierdurch hat man unmittelbar die in der Untersuchung der Säcularbewegungen der Drehungsaxen

des Saturn und seiner Ringe anzuwendenden Ausdrücke von w (24) und w' (29):

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{m^0}{a^{0.5}(1-e^0e^0)^{3/2}} \sin \gamma^{0.2} + \frac{m^1}{a^{0.5}} \sin \gamma'^2 + \frac{m''}{a^{0.5}(1-e''e'')^{3/2}} \sin \gamma''^2 + \text{etc.} \dots \dots \dots \\ w' &= \frac{m^0}{a^{0.5}(1-e^0e^0)^{3/2}} \sin \gamma^{0.2} + \frac{m}{a^{0.5}} k' \sin \gamma^2 + \frac{m''}{a^{0.5}(1-e''e'')^{3/2}} \sin \gamma''^2 + \text{etc.} \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

Hier habe ich die im 5. § eingeführten Unterscheidungszeichen für die Satelliten angewandt, und ebenso werde ich in den drei ersten Gliedern des Ausdruckes von w (36) wieder zu ihnen zurückkehren. Der nichtperio-

dische Theil der beiden ersten derselben wird also, indem der Satellit, dessen Säcularänderungen untersucht werden sollen, durch (") unterschieden wird:

$$\frac{mk}{2a^{0.5}(1-e^0e^0)^{3/2}} (1 - \frac{1}{2} \sin \gamma'^2) + \frac{m^1 k^1}{2a^{0.5}(1-e''e'')^{3/2}} (1 - \frac{1}{2} \sin \gamma''^2) \dots \dots \dots (38)$$

Das dritte, durch die Sonne erzeugte Glied des Ausdruckes (36) kann in eine, nach den Potenzen von r^0 fallende Reihe verwandelt werden, welche, wegen der Kleinheit der Entfernungen des Satelliten von dem Planeten, vergleichungsweise mit der Entfernung des Planeten von der Sonne, so schnell convergirt, dass nur ihre Anfangsglieder:

$$\frac{m^0}{r^0} - \frac{m^0 r' r''}{2r^{0.5}} + \frac{3m^0(x''x^0 + y''y^0 + z''z^0)^2}{2r^{0.5}}$$

einen merklichen Werth erhalten. Da $x''x^0 + y''y^0 + z''z^0$ von der Lage der Coordinatenaxen unabhängig ist, man diese also beliebig wählen kann, so werde ich Axen

annehmen, auf welche bezogen $x'', y'', z''; x^0, y^0, z^0$ die einfachsten Ausdrücke erhalten: zwei davon sollen in der Ebene der Satellitenbahn, die dritte senkrecht darauf genommen werden, eine von jenen mit der Durchschnittslinie der Saturnsbahn und Satellitenbahn zusammenfallen. Demgemäss werde ich setzen:

$$\begin{aligned} x'' &= r'' \cos(u'' - \Gamma_0'') & x^0 &= r^0 \cos(u^0 - \Gamma_0^0) \\ y'' &= r'' \sin(u'' - \Gamma_0'') & y^0 &= r^0 \sin(u^0 - \Gamma_0^0) \cos \gamma_0^0 \\ z'' &= 0 & z^0 &= r^0 \sin(u^0 - \Gamma_0^0) \sin \gamma_0^0 \end{aligned}$$

wodurch der Ausdruck des dritten Gliedes in:

$$\begin{aligned} \frac{m^0}{r^0} - \frac{m^0 r' r''}{2r^{0.5}} [1 - 3(\cos(u'' - \Gamma_0'') \cos(u^0 - \Gamma_0^0) + \sin(u'' - \Gamma_0'') \sin(u^0 - \Gamma_0^0) \cos \gamma_0^0)^2] \\ = \frac{m^0}{r^0} + \frac{m^0 r' r''}{r^{0.5}} [\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \sin \gamma_0^0^2 + \frac{3}{4} \sin \gamma_0^0^2 \cos 2(u'' - \Gamma_0'') \\ + \frac{m^0 r' r''}{r^{0.5}} [\frac{3}{4} \sin \gamma_0^0^2 + \frac{3}{4} (1 + \cos \gamma_0^0^2) \cos 2(u'' - \Gamma_0'') \cos 2(u^0 - \Gamma_0^0) \\ + \frac{m^0 r' r''}{r^{0.5}} \cdot \frac{3}{4} \cos \gamma_0^0 \sin 2(u'' - \Gamma_0'') \sin 2(u^0 - \Gamma_0^0) \end{aligned}$$

verwandelt wird. Hiervon kann das von dem Satelliten unabhängige erste Glied weggelassen werden. Sondert man von den übrigen zuerst ab, was von dem Orte des Saturn unabhängig ist, setzt man also für

$$\frac{1}{r^{0.5}}, \quad \frac{\cos 2(u^0 - \Gamma_0^0)}{r^{0.5}}, \quad \frac{\sin 2(u^0 - \Gamma_0^0)}{r^{0.5}}$$

resp. $\frac{1}{a^{0.5}(1-e^0e^0)^{3/2}}, \quad 0, \quad 0$

so bleibt übrig:

$$\frac{m^0 r' r''}{a^{0.5}(1-e^0e^0)^{3/2}} [\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \sin \gamma_0^0^2 (1 - \cos 2(u'' - \Gamma_0''))]$$

oder, wenn man die wahre Anomalie des Satelliten einführt, also $u'' = \omega'' - n'' + v''$ setzt,

$$= \frac{m^0 a'' a''}{a^{0.5}(1-e^0e^0)^{3/2}} [(1 + \frac{3}{4} e'' e'') (\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \sin \gamma_0^0^2) + \frac{3}{4} e'' e'' \sin \gamma_0^0^2 \cos 2(\omega'' - n'' - \Gamma_0^0)] \dots \dots \dots (39)$$

$\frac{m^0 r' r''}{a^{0.5}(1-e^0e^0)^{3/2}} [\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \sin \gamma_0^0^2 (1 - \cos 2(u'' + \omega'' - n'' - \Gamma_0^0))]$

Durch die excentrische Anomalie e'' ausgedrückt, ist

$$\begin{aligned} r'' r'' &= a'' a'' (1 - e'' \cos e'')^2 \\ r'' r'' \cos 2v'' &= a'' a'' [(\cos e'' - e'')^2 - (1 - e'' e'') \sin e''^2] \\ r'' r'' \sin 2v'' &= 2 a'' a'' \sqrt{1 - e'' e''} (\cos e'' - e'') \sin e'' \end{aligned}$$

und die von dem Orte dieses Satelliten unabhängigen Theile dieser Grössen sind die von e'' freien ihrer Producte in $1 - e'' \cos e''$, also resp.

$$a'' a'' (1 + \frac{3}{4} e'' e''), \quad \frac{3}{4} a'' a'' e'' e'', \quad 0$$

wodurch der für die Säcularänderungen allein in Betracht kommende Theil des dritten Gliedes von w

12.

Die Entwicklung des noch aufzusuchenden, nicht-periodischen Theils des vierten Gliedes des Ausdruckes von w (36), nämlich des den Einfluss eines Satelliten auf einen anderen enthaltenden Gliedes:

$$m' \left[\frac{1}{J'} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right]$$

ist zwar nichts weniger als unbekannt, mag aber dennoch hier eine Stelle finden, da man sie kurz genug ableiten kann, wenn man sich mit einer in der zweiten Dimension der Excentricitäten und gegenseitigen Neigung der Bahnen vollständigen Annäherung begnügen will. Auch wird sie Gelegenheit geben, eine noch nicht gemachte, einen beachtenswerthen besonderen Fall betreffende Bemerkung mitzutheilen. Indem der Grund, der im 9. § eine vorübergehende Aenderung der § 5 eingeführten Bezeichnungsart veranlasst hat, hier noch mehr gelten wird als dort, werde ich ihm auch hier folgen.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'\mathcal{A}' &= rr' + r'r' - 2rr'[\cos(v + \omega - n - \Gamma_r) \cos(v' + \omega' - n' - \Gamma_r') + \sin(v + \omega - n - \Gamma_r) \sin(v' + \omega' - n' - \Gamma_r') \cos \gamma_r] \\ &= rr' + r'r' - 2rr' \cos(v - v' + B) + 4rr' \sin(v + \Pi) \sin(v' + \Pi') \sin \frac{1}{2} \gamma_r^2 \end{aligned}$$

wo Π, Π', B die Bedeutungen:

$$\Pi = \omega - n - \Gamma_r, \quad \Pi' = \omega' - n' - \Gamma_r', \quad B = \Pi - \Pi'$$

haben. Durch die Einführung der excentrischen Anomalien verwandelt sich dieser Ausdruck in:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'\mathcal{A}' &= aa'(1 - e \cos \varepsilon)^2 + a'a' \sqrt{1 - e' \cos \varepsilon'}^2 \\ &\quad - 2aa' \{ \cos B [(\cos \varepsilon - e)(\cos \varepsilon' - e') + \sqrt{1 - ee'} \sqrt{1 - e'e'} \sin \varepsilon \sin \varepsilon'] \\ &\quad - \sin B [\sqrt{1 - ee'} \sin \varepsilon (\cos \varepsilon' - e') - \sqrt{1 - e'e'} \sin \varepsilon' (\cos \varepsilon - e)] \} \\ &\quad + 4aa' \sin \frac{1}{2} \gamma_r^2 [\sin \Pi (\cos \varepsilon - e) + \cos \Pi \sqrt{1 - ee'} \sin \varepsilon] [\sin \Pi' (\cos \varepsilon' - e') + \cos \Pi' \sqrt{1 - e'e'} \sin \varepsilon'] \end{aligned}$$

und wenn man das die zweite Dimension von e, e', γ_r Ueberschreitende davon weglässt, in

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'\mathcal{A}' &= aa' - 2aa' \cos(\varepsilon - \varepsilon' + B) + a'a' \\ &\quad - 2aa' \left\{ \left(\frac{a}{a'} e - e' \cos B \right) \cos \varepsilon + e' \sin B \sin \varepsilon + \left(\frac{a'}{a} e' - e \cos B \right) \cos \varepsilon' - e \sin B \sin \varepsilon' \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{a}{a'} ee' \cos \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \frac{a'}{a} e'e' \cos \varepsilon'^2 - \frac{1}{2} (ee' + e'e') \cos B \sin \varepsilon \sin \varepsilon' + ee' \cos B \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} ee' \sin B \sin \varepsilon \cos \varepsilon' - \frac{1}{2} e'e' \sin B \sin \varepsilon' \cos \varepsilon \right\} \\ &\quad + 4aa' \sin \frac{1}{2} \gamma_r^2 \sin(\varepsilon + \Pi) \sin(\varepsilon' + \Pi'). \end{aligned}$$

Schreibt man dafür

$$\mathcal{A}'\mathcal{A}' = U - 2aa'U' + 4aa'U''$$

so erhält man, in der zweiten Ordnung vollständig:

$$\frac{1}{J'} = \frac{1}{\sqrt{U}} + aa' \frac{U' - 2U''}{\sqrt{U}^3} + \frac{3}{2} aa'a' \frac{U'U''}{\sqrt{U}^5}. \quad (40)$$

und der Theil des Products dieser Entwicklung in $(1 - e \cos \varepsilon)(1 - e' \cos \varepsilon')$, welcher keine der beiden excentrischen Anomalien enthält, ist $= \left(\frac{1}{J'} \right)$.

Indem

$$\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} = \frac{r'r'}{a'a' \sqrt{1 - e'e'}} = \frac{xx' + yy' + zz'}{a'a'r' \sqrt{1 - e'e'}}$$

offenbar kein von der wahren Anomalie des störenden Satelliten freies Glied enthält, erlangt nur der erste Theil des gegenwärtig zu entwickelnden vierten Gliedes des Ausdruckes von w Einfluss auf die Säcularänderungen der Satellitenbahn. Was davon hiehergehört, ist der sowohl von ε , als auch von ε' freie Theil der Grösse

$$m'(1 - e \cos \varepsilon)(1 - e' \cos \varepsilon')$$

welchen ich, um abzukürzen, durch $m' \left(\frac{1}{J'} \right)$ bezeichnen werde.

Durch die wahren Anomalien beider Satelliten ausgedrückt, ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{U}} &= A_0^0 + 2A_0^1 \cos(\varepsilon - \varepsilon' + B) + 2A_0^2 \cos 2(\varepsilon - \varepsilon' + B) + \text{etc.} \dots\dots \\ \frac{1}{\sqrt{U^2}} &= A_1^0 + 2A_1^1 \cos(\varepsilon - \varepsilon' + B) + 2A_1^2 \cos 2(\varepsilon - \varepsilon' + B) + \text{etc.} \dots\dots \\ \frac{1}{\sqrt{U^3}} &= A_2^0 + 2A_2^1 \cos(\varepsilon - \varepsilon' + B) + 2A_2^2 \cos 2(\varepsilon - \varepsilon' + B) + \text{etc.} \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

so können nur die Theile der Producte von

$$(1 - e \cos \varepsilon)(1 - e' \cos \varepsilon')$$

in die Zähler der Glieder von (40) ein von ε und ε'

freies Glied ergeben, welche entweder keine der Anomalien, oder $\varepsilon - \varepsilon'$, oder ein Vielfaches davon enthalten. Man kann also ihre übrigen Glieder weglassen und statt (40) schreiben:

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \frac{1}{2} e e' \cos(\varepsilon - \varepsilon')}{\sqrt{U^2}} \\ & + \frac{aa'}{\sqrt{U^2}} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a'} ee + \frac{a'}{a} e'e' \right) + 2ee' \cos B - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a'} + \frac{a'}{a} \right) ee' \cos(\varepsilon - \varepsilon') + \frac{1}{4} (ee + e'e' - 4 \sin \frac{1}{2} \gamma^2) \cos(\varepsilon - \varepsilon' + B) \right] \\ & + \frac{3a^2 a'^2}{2\sqrt{U^2}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{aa'}{a'a} ee + \frac{a'a'}{aa} e'e' \right) - \left(\frac{a}{a'} + \frac{a'}{a} \right) ee' \cos B + \frac{1}{2} (ee + e'e') + ee' \cos(\varepsilon - \varepsilon') \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{a}{a'} ee + \frac{a'}{a} e'e' \right) \cos(\varepsilon - \varepsilon' + B) + ee' \cos(\varepsilon - \varepsilon' + 2B) \right] \end{aligned}$$

Hieraus erhält man unmittelbar den auch von $\varepsilon - \varepsilon'$ freien Theil von $\frac{1}{U^2}$, oder $\left(\frac{1}{U^2}\right) = A_0^0 + A_0^1 ee' \cos B$

$$\begin{aligned} & + aa' A_1^0 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a'} ee + \frac{a'}{a} e'e' \right) + 2ee' \cos B \right] - aa' A_1^1 \left[\left(\frac{a}{a'} + \frac{a'}{a} \right) \frac{ee'}{2} \cos B - \frac{1}{4} (ee + e'e') + \sin \frac{1}{2} \gamma^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} a^2 a'^2 A_2^0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{aa'}{a'a} ee + \frac{a'a'}{aa} e'e' \right) - \left(\frac{a}{a'} + \frac{a'}{a} \right) ee' \cos B + \frac{1}{2} (ee + e'e') \right] \\ & + \frac{1}{2} a^2 a'^2 A_2^1 \left[2ee' \cos B - \frac{a}{a'} ee - \frac{a'}{a} e'e' \right] \end{aligned}$$

welcher Ausdruck, gehörig zusammengezogen:

$$\left(\frac{1}{U^2}\right) = A_0^0 + \frac{1}{4} (a^2 e^2 + a'^2 e'^2) [-A_1^0 + (aa + a'a') A_2^0 - 2aa' A_2^1] + \frac{aa'}{4} (ee + e'e' - 4 \sin \frac{1}{2} \gamma^2) A_1^1 + ee' \cos B [A_0^1 + 2aa' A_1^0 - \frac{1}{2} (aa + a'a') A_1^1 - \frac{3}{4} (aa + a'a') aa' A_2^0 + 3a^2 a'^2 A_2^1] \dots\dots\dots (42)$$

ist.

Indessen ist zwischen je drei aufeinanderfolgenden Coefficienten jeder der Reihen (41) die bekannte Relation:

$$0 = (2i + 2s - 1) A_i^{i-1} - 2i \frac{aa + a'a'}{aa} A_i^i + (2i - 2s + 1) A_i^{i+1} \dots\dots\dots (43)$$

und die Coefficienten der verschiedenen Reihen sind durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2i + 2s + 1}{2s + 1} A_i^i &= (aa + a'a') A_{i+1}^i - 2aa' A_{i+1}^{i+1} \\ \frac{2i - 2s + 1}{2s + 1} A_i^{i+1} &= 2aa' A_{i+1}^i - (aa + a'a') A_{i+1}^{i+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

mit einander verbunden, deren erste, für $s = 1$ und $i = 0$

$$A_1^0 = (aa + a'a') A_2^0 - 2aa' A_2^1$$

wird, und daher den gefundenen Ausdruck auf

$$\left(\frac{1}{U^2}\right) = A_0^0 + \frac{aa'}{4} (ee + e'e' - 4 \sin \frac{1}{2} \gamma^2) A_1^1 + ee' \cos B [A_0^1 + \frac{1}{2} aa' A_1^0 - \frac{1}{2} (aa + a'a') A_1^1]$$

reducirt. Die letzte Gleichung wird, für $s = 0$ und $i = 0$,

$$A_0^1 = 2aa' A_1^0 - (aa + a'a') A_1^1;$$

wenn man dadurch A'_i aus dem letzten Gliede des Ausdruckes eliminiert, wieder

$$\Pi - \Pi' = \omega - n - \Gamma, -(\omega' - n' - \Gamma')$$

$$\left(\frac{1}{\mathcal{L}'}\right) = A_0'' + \frac{aa'}{4} A_1' (ee + e'e' - \sin \gamma'^2) + [3A_0' - aa'A_1'] \frac{ee'}{2} \cos[\omega - n - \Gamma, -\omega' + n' + \Gamma'] \dots (45)$$

Hiermit ist die Entwicklung des nichtperiodischen Theils der Grösse w , durch deren Differentialquotienten die die Söcularänderungen der Satellitenbahnen bestimmenden Gleichungen (35) gegeben sind, beendet. Man hat nur (38), (39), (45) zusammensetzen, nachdem man den letzten dieser Ausdröcke in die Masse des störenden Satelliten multiplicirt und die während seiner Entwicklung benutzte Veränderung der Unterscheidungszeichen, zu deren ferneren Anwendung nun kein Grund mehr vorhanden ist, wieder gegen die im

$$[\kappa\lambda]_0'' + 2[\kappa\lambda]_1'' \cos(\varepsilon - \varepsilon' + B) + 2[\kappa\lambda]_2'' \cos 2(\varepsilon - \varepsilon' + B) + \text{etc.} \dots$$

$$[\kappa\lambda]_0'' + 2[\kappa\lambda]_1'' \cos(\varepsilon - \varepsilon' + B) + 2[\kappa\lambda]_1'' \cos 2(\varepsilon - \varepsilon' + B) + \text{etc.} \dots$$

$$[\kappa\lambda]_2'' + 2[\kappa\lambda]_2'' \cos(\varepsilon - \varepsilon' + B) + 2[\kappa\lambda]_2'' \cos 2(\varepsilon - \varepsilon' + B) + \text{etc.} \dots$$

u. s. w.

statt der Reihen (41) schreiben. Damit sogleich anschaulich werde, auf welchen gestörten Satelliten w sich bezieht, werde ich w'' , w''' , \dots , d. h. w mit

$$w'' = \frac{m^2 a'' a'''}{\alpha^{3/2} (1 - e'' e''')^{3/2}} \left\{ \left[(1 + \frac{1}{2} e'' e''') \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \gamma''^2 \right) + \frac{1}{2} e'' e''' \sin \gamma''^2 \cos 2(\omega'' - n'' - \Gamma''_0) \right] \right. \\ + \frac{mk}{2 a''^2 (1 - e'' e''')^{3/2}} (1 - \frac{1}{2} \sin \gamma''^2) \\ + \frac{m'k'}{2 a''^2 (1 - e'' e''')^{3/2}} (1 - \frac{1}{2} \sin \gamma''^2) \\ \left. + m''' \left[[2.3]_0'' + \frac{a'' a'''}{4} [2.3]_1'' (ee + e'e' - \sin \gamma''^2) + (3[2.3]_0'' - a'' a''' [2.3]_1'') \frac{ee''''}{2} \cos(\omega'' - n'' - \Gamma''_3 - \omega''' + n''' - \Gamma''_2) \right] \right\} \\ + \text{etc.} \dots (46)$$

Das letzte Glied wird, auf jeden der störenden Satelliten bezogen, wiederholt.

13.

Die am Anfange des vorigen §s erwähnte Bemerkung ist, dass $\frac{1}{\mathcal{L}'}$ vollständig und dennoch sehr einfach entwickelt werden kann, wenn die Ex-

$$\frac{1}{\mathcal{L}'} = \frac{1}{V U'} + \frac{1}{2} \frac{2 a a' \sin \frac{1}{2} \gamma'^2}{V U'^3} \cos(u + u') + \frac{1.3}{2.4} \frac{(2 a a' \sin \frac{1}{2} \gamma'^2)^2}{V U'^5} \cos(u + u')^2 + \dots$$

Wenn man die Potenzen von U , welche hier vorkommen, nach den Cosinussen der Vielfachen von $u - u'$ entwickelt und folgendermassen bezeichnet:

$$\frac{1}{V U'} = A_0'' + 2A_0' \cos(u - u') + 2A_0'' \cos 2(u - u') + \text{etc.} \dots$$

$$\frac{1}{V U'^3} = A_1'' + 2A_1' \cos(u - u') + 2A_1'' \cos 2(u - u') + \text{etc.} \dots$$

$$\frac{1}{V U'^5} = A_2'' + 2A_2' \cos(u - u') + 2A_2'' \cos 2(u - u') + \text{etc.} \dots$$

u. s. w.

statt B , und $\sin \gamma'^2$ statt $4 \sin \frac{1}{2} \gamma'^2$ schreibt, wird er endlich:

§ 5. eingeföhrte Bezeichnungsart vertauscht hat. Indessen wird notwendig, die Coefficienten der Reihen (41) so zu bezeichnen, dass auch aus der Bezeichnung hervorgeht, auf welches Paar der Satelliten sie sich beziehen: wenn einer der mit den Unterscheidungszeichen λ und κ versehenen Satelliten der störende, der andere der gestörte ist, die Coefficienten der Reihen also von $\alpha^{(\lambda)}$ und $\alpha^{(\kappa)}$ abhängen, so werde ich $[\kappa\lambda]$ oder $[\lambda\kappa]$ statt A , also auch

dem ihm zukommenden Unterscheidungszeichen, dafür schreiben. Man hat also:

centricitäten ausser Acht gelassen werden. In diesem Falle ist

$$\frac{1}{\mathcal{L}'} = \frac{1}{\sqrt{aa + a' - 2aa' \cos \frac{1}{2} \gamma'^2 \cos(u - u') - 2aa' \sin \frac{1}{2} \gamma'^2 \cos(u + u')}} \\ \text{also, wenn}$$

$$U = aa + a'a' - 2aa' \cos \frac{1}{2} \gamma'^2 \cos(u - u')$$

angenommen wird,

so wird das $\cos i(u-u')$ enthaltende Glied von $\frac{1}{J}$.

$$= 2 \cos i(u-u') \left[A'_0 + \frac{1}{2} 2 a a' \sin \frac{1}{2} \gamma^2 A'_1 \cos(u+u') + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (2 a a' \sin \frac{1}{2} \gamma^2)^2 A'_2 \cos(u+u')^2 + \text{etc.} \dots \right]$$

wovon aber nur die Hälfte genommen wird wenn $i=0$ ist. Nach den Cosinussen der Vielfachen von $u+u'$ geordnet, wird dieser Ausdruck:

$$2 \cos i(u-u') \left\{ \begin{aligned} & A'_0 + A'_1 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} (a a' \sin \frac{1}{2} \gamma^2)^2 + A'_2 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4} (a a' \sin \frac{1}{2} \gamma^2)^4 + \dots \\ & + \left[A'_1 \frac{1}{2} a a' \sin \frac{1}{2} \gamma^2 + A'_3 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 2} (a a' \sin \frac{1}{2} \gamma^2)^3 + A'_5 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4} (a a' \sin \frac{1}{2} \gamma^2)^5 + \dots \right] 2 \cos(u+u') \\ & + \left[A'_2 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (a a' \sin \frac{1}{2} \gamma^2)^2 + A'_4 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2} (a a' \sin \frac{1}{2} \gamma^2)^4 + A'_6 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 4} (a a' \sin \frac{1}{2} \gamma^2)^6 + \dots \right] 2 \cos 2(u+u') \\ & + \left[A'_3 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} (a a' \sin \frac{1}{2} \gamma^2)^3 + A'_5 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 2} (a a' \sin \frac{1}{2} \gamma^2)^5 + \dots \right] 2 \cos 3(u+u') \\ & + \text{u. s. w.} \end{aligned} \right\}$$

Bezeichnet man die einzelnen Reihen (deren Fortgangsart nach den Biquadraten von $\sin \frac{1}{2} \gamma$ offenbar ist) durch B'_0, B'_1, B'_2, \dots , so wird der vorige Ausdruck:

$$2 \cos i(u-u') \{ B'_0 + 2 B'_1 \cos(u+u') + 2 B'_2 \cos 2(u+u') + \text{etc.} \dots \}$$

oder

$$2 B'_0 \cos i(u-u') + 2 B'_1 \cos [i(u-u') + (u+u')] + 2 B'_2 \cos [i(u-u') + 2(u+u')] + \text{etc.} \dots + 2 B'_1 \cos [i(u-u') - (u+u')] + 2 B'_2 \cos [i(u-u') - 2(u+u')] + \text{etc.} \dots$$

Man erhält also die vollständige Entwicklung von $\frac{1}{J}$, wenn man diese Reihe auf $i=0, 1, 2, \dots$ anwendet; für $i=0$ wird nur ihre Hälfte:

$$\left(\frac{1}{J} \right) = B_0 = A_0^0 + A_2^0 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} a^2 a'^2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma^4 + A_4^0 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4} a^4 a'^4 \sin^4 \frac{1}{2} \gamma^8 + \text{etc.} \dots$$

Die Einfachheit dieser Entwicklung von $\frac{1}{J}$ ist durch die Annahme von $\cos \frac{1}{2} \gamma^2$ in den Ausdruck von U erlangt worden. Wenn die Bahnen der Körper des Sonnensystems kreisförmig, dabei aber beliebig gegen einander geneigt wären, so würde diese Art der Entwicklung jede Schwierigkeit der Bestimmung ihrer gegenseitigen Störungen, insofern dabei nur die erste Dimension der Massen in Betracht gezogen wird, beiseiten.

14.

Um die Differentialgleichungen, welche die Säcularänderungen des Saturnsystems bestimmen, ganz zu entwickeln, muss man die Ausdrücke (37) und (46)

$$\begin{aligned} \frac{d\omega''}{d\omega''} &= - \frac{m^0 a'' a''}{a''^3 (1 - e'' e'')^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} e'' e'' \sin \gamma''^2 \sin 2(\omega'' - n'' - \Gamma_0'') \\ &- m''' (3 [2.3]_0 - a'' a''' [2.3]_1) \frac{1}{2} e'' e''' \sin(\omega'' - n'' - \Gamma_3'' - \omega''' + n''' + \Gamma_3''') \\ &- \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

eine Grösse von der Ordnung der zweiten Dimension der Excentricitäten. Vernachlässigt man sie, so trennen sich die Säcularänderungen sämtlicher Ebenen

$B_0^0 + 2 B_1^0 \cos(u+u') + 2 B_2^0 \cos 2(u+u') + \text{etc.} \dots$ genommen. Das erste Glied davon ist der für die Säcularänderungen allein in Betracht kommende Ausdruck von:

von $\omega, \omega', \omega''$, und die dem letzten ähnlichen für andere Satelliten so differenzieren, wie die Gleichungen (24), (29), (35) fordern. Die die Ebenen des Aequators und der Ringe des Saturn bestimmenden Gleichungen (24) und (29) setzen nur die in Beziehung auf i, n und i', n' genommenen Differentialquotienten von ω und ω' voraus; die die Ebene der Satellitenbahn bestimmenden beiden ersten der Gleichungen (35) fordern aber die in Beziehung auf i'', n'', ω'', E'' genommenen Differentialquotienten von ω'' . Der letzte davon fällt jedoch hier für die Säcularänderungen fort, indem der Ausdruck (46) den Ort des Satelliten, und damit E'' nicht enthält; diesem Ausdrucke gemäss ist:

des Saturnsystems bestimmenden Gleichungen gänzlich von den übrigen, so dass sie ein System bilden, welches abgesondert von den übrigen Elemente bestimmendes

verfolgt werden kann. Diese Trennung werde ich vornehmen, und demzufolge den Ausdruck (46), insofern er zur Bestimmung der mittleren Ebenen der Satellitenbahnen angewandt werden soll, von allen Gliedern

$$-\frac{3m^0 a'' a''' (1 + \frac{1}{2} \epsilon'' \epsilon''')}{8a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \sin \gamma_0''^2 - \frac{3mk}{4a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \sin \gamma''^2 - \frac{3mk'}{4a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \sin \gamma_1''^2 - \dots - \frac{m''}{4} a'' a''' [2.3], \sin \gamma_2'' - \frac{m'''}{4} a'' a''' [2.4], \sin \gamma_4''^2 - \text{etc.} \dots \dots \dots (46^*)$$

Zur gänzlichen Entwicklung der Gleichungen, welche die Sicularänderungen der Ebenen des Saturnsystems bestimmen, ist also nur die Aufsuchung der Differentialquotienten der verschiedenen $\sin \gamma^i$, in Beziehung auf die n und i , welche dem am Kopfe der γ befindlichen Unterscheidungszeichen entsprechen, erforderlich.

In dem sphärischen Dreiecke, welches durch die feste Ebene, die Ebene des Saturnsäquators und die Ringebene gebildet wird, ist die in der ersten liegende Seite $= n' - n$, die in der zweiten und dritten liegenden Seiten sind Γ , und $\Gamma + 180^\circ$; die diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel sind resp. γ , (oder γ'), $180^\circ - i'$, i .

$$\sin i \frac{dn}{dt} = \frac{3h}{4p} \left[\frac{m^0}{a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \cos \gamma_0 \sin \gamma_0 \cos \Gamma_0 + \frac{m''}{a''^3} \cos \gamma_1 \sin \gamma_1 \cos \Gamma_1 + \frac{m'''}{a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \cos \gamma_2 \sin \gamma_2 \cos \Gamma_2 + \text{etc.} \right] (47)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{3h}{4p} \left[\frac{m^0}{a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \cos \gamma_0 \sin \gamma_0 \sin \Gamma_0 + \frac{m''}{a''^3} \cos \gamma_1 \sin \gamma_1 \sin \Gamma_1 + \frac{m'''}{a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \cos \gamma_2 \sin \gamma_2 \sin \Gamma_2 + \text{etc.} \right]$$

ferner, den Gleichungen (29) und dem zweiten der Ausdrücke (37) gemäss:

$$\sin i \frac{dn'}{dt} = \frac{3}{4p} \left[\frac{m^0}{a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \cos \gamma_0' \sin \gamma_0' \cos \Gamma_0' + \frac{m''}{a''^3} \cos \gamma_1' \sin \gamma_1' \cos \Gamma_1' + \frac{m'''}{a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \cos \gamma_2' \sin \gamma_2' \cos \Gamma_2' + \text{etc.} \right] (48)$$

$$\frac{di'}{dt} = -\frac{3}{4p} \left[\frac{m^0}{a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \cos \gamma_0' \sin \gamma_0' \sin \Gamma_0' + \frac{m''}{a''^3} \cos \gamma_1' \sin \gamma_1' \sin \Gamma_1' + \frac{m'''}{a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \cos \gamma_2' \sin \gamma_2' \sin \Gamma_2' + \text{etc.} \right]$$

und endlich, den beiden ersten Gleichungen (35) und dem Ausdrücke (46*) zufolge:

$$\sin i \frac{dn''}{dt} = \frac{3a''^{\frac{3}{2}}}{4p \sqrt{1 - \epsilon'' \epsilon'''}} \left[\frac{m^0 (1 + \frac{1}{2} \epsilon'' \epsilon''')}{a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \cos \gamma_0'' \sin \gamma_0'' \cos \Gamma_0'' + \frac{2mk}{a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \cos \gamma_1'' \sin \gamma_1'' \cos \Gamma_1'' + \frac{2mk'}{a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \cos \gamma_2'' \sin \gamma_2'' \cos \Gamma_2'' + \dots + \frac{3}{2} m'' \frac{a'' a'''}{a''^2} [2.3], \cos \gamma_3'' \sin \gamma_3'' \cos \Gamma_3'' + \text{etc.} \dots \dots \dots \right] (49)$$

$$\frac{di''}{dt} = -\frac{3a''^{\frac{3}{2}}}{4p \sqrt{1 - \epsilon'' \epsilon'''}} \left[\frac{m^0 (1 + \frac{1}{2} \epsilon'' \epsilon''')}{a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \cos \gamma_0'' \sin \gamma_0'' \sin \Gamma_0'' + \frac{2mk}{a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \cos \gamma_1'' \sin \gamma_1'' \sin \Gamma_1'' + \frac{2mk'}{a''^3 (1 - \epsilon'' \epsilon''')^{\frac{3}{2}}} \cos \gamma_2'' \sin \gamma_2'' \sin \Gamma_2'' + \dots + \frac{3}{2} m'' \frac{a'' a'''}{a''^2} [2.3], \cos \gamma_3'' \sin \gamma_3'' \sin \Gamma_3'' + \text{etc.} \dots \dots \dots \right] (49)$$

Das letzte Glied jedes dieser 6 Ausdrücke wird, auf jeden der störenden Satelliten bezogen, wiederholt; die beiden letzten Ausdrücke werden auf jeden gestörten angewandt.

Ich werde diese Ausdrücke durch Einführung der mittleren Bewegungen, statt der verschiedenen a , verändern. Wenn zwei Körper, deren Massensumme m ist, ihren gegenseitigen Anziehungen gemäss, eine Umlaufbewegung besitzen, so dass ihre mittlere Entfernung a und ihre Umlaufzeit τ ist, so sind die Einheiten von m , a , τ durch die Gleichung

befreien, welche aus seinen in Beziehung auf die Neigung und Knotenlänge genommenen Differentialquotienten entweder verschwinden, oder zu der schon vernachlässigten Ordnung gehören. Dadurch reducirt er sich auf

Die Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie ergeben daher:

$$\frac{d \sin \gamma^i}{dt} = -2 \cos \gamma, \sin \gamma, \cos \Gamma,$$

$$\frac{d \sin \gamma^i}{\sin i \, d n} = -2 \cos \gamma, \sin \gamma, \sin \Gamma,$$

so wie allgemein:

$$\frac{d \sin \gamma_1^{(i)}}{d \Gamma^{(i)}} = -2 \cos \gamma_1^{(i)} \sin \gamma_1^{(i)} \cos \Gamma^{(i)}$$

$$\frac{d \sin \gamma_2^{(i)}}{\sin i^{(i)} \, d n^{(i)}} = -2 \cos \gamma_2^{(i)} \sin \gamma_2^{(i)} \sin \Gamma^{(i)}$$

Man hat also, den Gleichungen (24) und dem ersten der Ausdrücke (37) gemäss:

$$(2\pi)^3 a^3 = m \tau \tau$$

miteinander verbunden, oder ihre mittlere Bewegung in der Zeiteinheit $= p$ ist durch

$$pp a^3 = m$$

mit a und m verbunden. Nimmt man die Masse des ganzen Saturnsystems, nämlich $m + m' + m'' + m''' + \dots$ zur Masseneinheit an, so hat man also:

$$p^0 p^0 a^0 = m^0 + 1$$

$$p'' p'' a'' = m + m' + m'' = 1 - (m) + m''$$

$$p''' p''' a''' = m + m' + m'' = 1 - (m) + m''''$$

u. s. w.

wo (m) die Summe sämtlicher Satellitenmassen bedeutet; wegen der Kleinheit dieser Massen werde ich aber $1 - (m) + m'$, $1 - (m) + m''$, ... mit 1 verwechseln und also annehmen

$$\frac{1}{a^{m_3}} = \frac{p^0 p^0}{m^0 + 1}, \quad \frac{1}{a^{m'_3}} = p' p', \quad \frac{1}{a^{m''_3}} = p'' p'', \dots$$

Bezeichnet man die mittlere Entfernung vom Mittelpunkt des Saturn, in welcher ein von der Masse 1 ausgehender Punkt dieselbe mittlere Bewegung p' erlangen

$$\mu^0 = \frac{3h}{4p} \cdot \frac{m^0}{a^{m_3}(1-e^0 e^0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} h \frac{m^0}{m^0 + 1} \cdot \frac{1}{(1-e^0 e^0)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{p^0 p^0}{p}$$

$$\mu' = \frac{3h}{4p} \cdot \frac{m'}{a^3} = \frac{3}{4} h m' \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \cdot \frac{p' p'}{p}$$

$$\mu'' = \frac{3h}{4p} \cdot \frac{m''}{a^{m''_3}(1-e'' e'')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} h m'' \frac{1}{(1-e'' e'')^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{p'' p''}{p}$$

$$\mu''' = \frac{3h}{4p} \cdot \frac{m'''}{a^{m'''_3}(1-e''' e''')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} h m''' \frac{1}{(1-e''' e''')^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{p''' p'''}{p}$$

u. s. w.

$$\mu_0^0 = \frac{3}{4p} \cdot \frac{m^0}{a^{m_3}(1-e^0 e^0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} \frac{m^0}{m^0 + 1} \frac{1}{(1-e^0 e^0)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{p^0 p^0}{p}$$

$$\mu_1 = \frac{3}{4p} \cdot \frac{m \cdot k}{a^3} = \frac{3}{4} m \left(\frac{a'}{a}\right)^3 k \cdot p'$$

$$\mu_2 = \frac{3}{4p} \cdot \frac{m''}{a^{m''_3}(1-e'' e'')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} m'' \frac{1}{(1-e'' e'')^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{p'' p''}{p}$$

$$\mu_3 = \frac{3}{4p} \cdot \frac{m'''}{a^{m'''_3}(1-e''' e''')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} m''' \frac{1}{(1-e''' e''')^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{p''' p'''}{p}$$

u. s. w.

$$\mu_2^0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-e^0 e^0}} \cdot \frac{m^0(1+\frac{3}{2}e^0 e^0)}{a^{m_3}(1-e^0 e^0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} \frac{m^0}{m^0 + 1} \frac{1 + \frac{3}{2}e^0 e^0}{\sqrt{1-e^0 e^0}(1-e^0 e^0)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{p^0 p^0}{p}$$

$$\mu_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-e'' e''}} \cdot \frac{m \cdot 2k}{a^{m_3}(1-e'' e'')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} m \frac{2k}{a^{\frac{m_3}{2}} \cdot (1-e'' e'')^{\frac{3}{2}}} \cdot p''$$

$$\mu_2' = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-e'' e''}} \cdot \frac{m' \cdot 2k'}{a^{m'_3}(1-e'' e'')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} m' \frac{2k'}{a^{\frac{m'_3}{2}} \cdot (1-e'' e'')^{\frac{3}{2}}} \cdot p''$$

$$\mu_2''' = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-e''' e'''}} \cdot \frac{m''' a'''}{a^{m'''_3}(1-e''' e''')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} \frac{m'''}{\sqrt{1-e''' e'''}} a'' a''' a''' [2 \cdot 3] \cdot p''$$

u. s. w.

$$\mu_3^0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-e^0 e^0}} \cdot \frac{m^0(1+\frac{3}{2}e^0 e^0)}{a^{m_3}(1-e^0 e^0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} \frac{m^0}{m^0 + 1} \frac{1 + \frac{3}{2}e^0 e^0}{\sqrt{1-e^0 e^0}(1-e^0 e^0)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{p^0 p^0}{p}$$

$$\mu_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-e'' e''}} \cdot \frac{m \cdot 2k}{a^{m_3}(1-e'' e'')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} \cdot m \frac{2k}{a^{\frac{m_3}{2}} \cdot (1-e'' e'')^{\frac{3}{2}}} \cdot p''$$

$$\mu_3' = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-e'' e''}} \cdot \frac{m' \cdot 2k'}{a^{m'_3}(1-e'' e'')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} \cdot m' \frac{2k'}{a^{\frac{m'_3}{2}} \cdot (1-e'' e'')^{\frac{3}{2}}} \cdot p''$$

$$\mu_3''' = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-e''' e'''}} \cdot \frac{m''' a'''}{a^{m'''_3}(1-e''' e''')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{m'''}{\sqrt{1-e''' e'''}} a'' a''' a''' [3 \cdot 2] \cdot p''$$

u. s. w.

wobei zu bemerken ist, dass $[2 \cdot 3] = [3 \cdot 2]$ und dass diese Grösse von der — 3^{ten} Dimension ihrer Elemente a' , a'' , also die Producte $a'' a'' a'' [2 \cdot 3]$ und

würde, welche der Ring besitzt, durch a' , so hat man ferner $1 = a'^3 p' p'$, also

$$\frac{1}{a^3} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3 p' p'$$

so verschwindet durch die Substitution dieser Ausdrücke in (47), (48), (49) die Einheit des Masses aus diesen Gleichungen und die Zeiteinheit wird willkürlich. Ich werde nun folgende Bezeichnungen einführen:

$a'' a'' a'' [3 \cdot 2]$ ohne Dimension sind. Diesen Bezeichnungen gemäss verwandeln sich die Gleichungen (47), (48), (49) in folgende:

$$\begin{aligned}
 \sin i \frac{dn}{dt} &= \mu^0 \cos \gamma_0 \sin \gamma_0 \cos \Gamma_0 + \mu' \cos \gamma' \sin \gamma' \cos \Gamma' + \mu'' \cos \gamma_2 \sin \gamma_2 \cos \Gamma_2 + \mu''' \cos \gamma_3 \sin \gamma_3 \cos \Gamma_3 + \dots \\
 - \frac{di}{dt} &= \mu^0 \cos \gamma_0 \sin \gamma_0 \sin \Gamma_0 + \mu' \cos \gamma' \sin \gamma' \sin \Gamma' + \mu'' \cos \gamma_2 \sin \gamma_2 \sin \Gamma_2 + \mu''' \cos \gamma_3 \sin \gamma_3 \sin \Gamma_3 + \dots \\
 \sin i' \frac{dn'}{dt} &= \mu^0 \cos \gamma'_0 \sin \gamma'_0 \cos \Gamma'_0 + \mu_1 \cos \gamma' \sin \gamma' \cos \Gamma'' + \mu_2 \cos \gamma'_2 \sin \gamma'_2 \cos \Gamma'_2 + \mu_3 \cos \gamma'_3 \sin \gamma'_3 \cos \Gamma'_3 + \dots \\
 - \frac{di'}{dt} &= \mu^0 \cos \gamma'_0 \sin \gamma'_0 \sin \Gamma'_0 + \mu_1 \cos \gamma' \sin \gamma' \sin \Gamma'' + \mu_2 \cos \gamma'_2 \sin \gamma'_2 \sin \Gamma'_2 + \mu_3 \cos \gamma'_3 \sin \gamma'_3 \sin \Gamma'_3 + \dots \\
 \sin i'' \frac{dn''}{dt} &= \mu_2^0 \cos \gamma''_0 \sin \gamma''_0 \cos \Gamma''_0 + \mu_2 \cos \gamma'' \sin \gamma'' \cos \Gamma''' + \mu_2' \cos \gamma''_2 \sin \gamma''_2 \cos \Gamma''_2 + \mu_2'' \cos \gamma''_3 \sin \gamma''_3 \cos \Gamma''_3 + \dots \\
 - \frac{di''}{dt} &= \mu_2^0 \cos \gamma''_0 \sin \gamma''_0 \sin \Gamma''_0 + \mu_2 \cos \gamma'' \sin \gamma'' \sin \Gamma''' + \mu_2' \cos \gamma''_2 \sin \gamma''_2 \sin \Gamma''_2 + \mu_2'' \cos \gamma''_3 \sin \gamma''_3 \sin \Gamma''_3 + \dots \\
 \sin i''' \frac{dn'''}{dt} &= \mu_3^0 \cos \gamma'''_0 \sin \gamma'''_0 \cos \Gamma'''_0 + \mu_3 \cos \gamma''' \sin \gamma''' \cos \Gamma'''' + \mu_3' \cos \gamma'''_2 \sin \gamma'''_2 \cos \Gamma'''_2 + \mu_3'' \cos \gamma'''_3 \sin \gamma'''_3 \cos \Gamma'''_3 + \dots \\
 - \frac{di'''}{dt} &= \mu_3^0 \cos \gamma'''_0 \sin \gamma'''_0 \sin \Gamma'''_0 + \mu_3 \cos \gamma''' \sin \gamma''' \sin \Gamma'''' + \mu_3' \cos \gamma'''_2 \sin \gamma'''_2 \sin \Gamma'''_2 + \mu_3'' \cos \gamma'''_3 \sin \gamma'''_3 \sin \Gamma'''_3 + \dots
 \end{aligned} \tag{50}$$

II. 8. W.

15.

Die dritte und vierte dieser Gleichungen, die die Sicularbewegungen der Ringebene bestimmenden, sind unter der Voraussetzung entwickelt, dass das ganze Ringsystem ein fester Körper sei; unter einer Voraussetzung, deren Richtigkeit nicht so unzweifelhaft ist, dass die Vergleichung ihrer Folgen mit denen einer anderen, nämlich der Annahme der Zusammensetzung der Ringe aus getrennten, sich wie Satelliten frei bewegenden Theilen, überflüssig erschiene. Ich werde daher auch diese Voraussetzung verfolgen.

Offenbar können nur die durch $\mu^0, \mu_1, \mu_2, \dots$

$$\mu^0 = \frac{3}{4} \frac{m^0}{m^0 + 1} \frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{p^0 p^0}{p^0}, \quad \mu_1 = \frac{3}{4} m \frac{2k}{r' r'} \frac{p' p'}{p'}, \quad \mu_2 = \frac{3}{4} m'' \frac{p'' p''}{p''}, \dots$$

Macht man dagegen nicht die Voraussetzung der festen Verbindung der Theilchen des Ringes, so werden die

$$\mu^0 = \frac{3}{4} \frac{m^0}{m^0 + 1} \frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{p^0 p^0}{p^0}, \quad \mu_1 = \frac{3}{4} m \frac{2k}{r' r'} \cdot p', \quad \mu_2 = \frac{3}{4} m'' r' r' a'' [1 - 2] p', \dots$$

wo [1.2], den Werth bedeutet, welchen der Coefficient A' (41) annimmt, wenn r' und a'' statt a und a' genommen werden. Um sie mit den vorigen Ausdrücken von $\mu^0, \mu_1, \mu_2, \dots$ zu vergleichen, muss man für [1.2], [1.3], ... ihre Entwicklungen setzen, nämlich:

$$[1.2] = \frac{3}{4} \frac{r'}{a''} \left\{ 1 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \frac{r'}{a''} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{3}{4} \frac{r' r'}{a'' a''} + \dots \right\}$$

Die unendliche Reihe ist wenig von 1 verschieden wenn $\frac{r'}{a''}$ ein kleiner Bruch ist, welche Annahme, da sie der im 6. und 7. § gegebenen Entwicklung für den Fall eines festen Ringes zum Grunde liegt, auch hier gemacht werden muss, um die beiden Voraussetzungen angemessenen Formeln vergleichbar zu machen. Nimmt man daher an:

bezeichneten Coefficienten, nicht die trigonometrischen Functionen der Lagen der Ebenen, in welche sie multiplicirt sind, in beiden Voraussetzungen verschieden sein. Betrachtet man zuerst einen festen Ring von unendlich kleiner Breite, dessen beide Halbmesser r' und $r' + dr'$ sind, so ist für ihn:

$$k = \frac{1}{2} r' r', \quad \left(\frac{a''}{a} \right)^3 = \frac{1}{r' a'' p'} = \frac{p' p'}{p' p'}$$

wo p' die Umlaufgeschwindigkeit eines Satelliten bedeutet, der sich in einem Kreise vom Halbmesser r' bewegen würde. In Beziehung auf diesen Ring hat man also:

für Satelliten entwickelten Formeln die anzuwendenden. Dem gegenwärtigen Falle gemäss bezeichnet sind sie:

$$[1.2] = \frac{3}{4} \frac{r'}{a''}, \quad r' r' a'' [1.2] = \frac{3}{4} \left(\frac{r'}{a''} \right)^3 = \frac{3}{4} \frac{p' p''}{p' p'}$$

so erhält man, für die jetzige Voraussetzung:

$$\mu_1 = \frac{3}{4} m \frac{p' p''}{p' p'}, \quad \mu_2 = \frac{3}{4} m'' \frac{p'' p''}{p''}, \text{ u. s. w.}$$

Die Ausdrücke sämtlicher μ in beiden Fällen sind also im Verhältnisse $p'' : p'$ und daher gleich oder verschieden, je nachdem $p' = p''$, oder verschieden von p' ist. Da das Ringsystem des Saturn aus mehreren, näherungsweise in einer Ebene liegenden Ringen von geringer Breite zusammengesetzt erscheint, in dieser Beziehung also beide Voraussetzungen nicht wesentlich von einander verschieden erscheinen, so können die gefundenen, die Sicularbewegungen bestimmenden Gleichungen als unabhängig von der ihnen zum Grunde lie-

genden Voraussetzung angesehen werden, falls das Ringsystem sich eben so schnell drehet, wie ein Sattellit, in etwa der Mitte der Breite desselben entsprechenden Entfernung sich bewegen würde.

HERSCHEL hat die Umdrehungszeit der Ringe auf $10\frac{1}{2}$ Stunden = 0,4375 Tag geschätzt. Dieser Zeit entspricht eine Entfernung vom Mittelpunkte des Saturn, welche, in der mittleren Entfernung des Planeten gesehen, etwa $16''$ gross erscheint, also etwa in die Mitte der Breite des Ringsystems trifft. Die Drehungsgeschwindigkeit der Ringe scheint daher so gross zu sein, als sie in der zweiten Voraussetzung sein müsste, weshalb wenig Aussicht vorhanden ist, durch Beobachtung der Säcularbewegung der Ringebene eine Verschiedenheit von p' und p'' zu erkennen und dadurch die Entscheidung zwischen beiden Voraussetzungen herbeizuführen.

16.

Die Formeln (50) drücken die Geschwindigkeiten der Bewegungen der verschiedenen Ebenen des Saturnsystems aus. Wenn $h, \frac{\alpha}{a}, k, k'$ und die Massen bekannt sind, so findet man jene Geschwindigkeiten da-

$$\frac{d(\sin i \cos n)}{dt} = -\mu^0 \cos \gamma_0 \sin \gamma_0 [\sin n \cos \Gamma_0 + \cos n \sin \Gamma_0 \cos i] - \mu' \cos \gamma, \sin \gamma, [\sin n \cos \Gamma, + \cos n \sin \Gamma, \cos i] - \text{etc.}$$

$$-\frac{d(\sin i \sin n)}{dt} = -\mu^0 \cos \gamma_0 \sin \gamma_0 [\cos n \cos \Gamma_0 - \sin n \sin \Gamma_0 \cos i] - \mu' \cos \gamma, \sin \gamma, [\cos n \cos \Gamma, - \sin n \sin \Gamma, \cos i] - \text{etc.}$$

oder, da $\gamma_0, \Gamma_0; \gamma, \Gamma; \dots$ mit den verschiedenen i und n durch die trigonometrischen Formeln:

$$\begin{aligned} \cos \gamma_0 &= \sin i \sin i^0 \cos (n^0 - n) + \cos i \cos i^0 \\ \sin \gamma_0 \cos \Gamma_0 &= \cos i \sin i^0 \cos (n^0 - n) - \sin i \cos i^0 \\ \sin \gamma_0 \sin \Gamma_0 &= \sin i^0 \sin (n^0 - n) \\ \cos \gamma, &= \sin i \sin i' \cos (n' - n) + \cos i \cos i' \\ \sin \gamma, \cos \Gamma, &= \cos i \sin i' \cos (n' - n) - \sin i \cos i' \\ \sin \gamma, \cos \Gamma, &= \sin i' \sin (n' - n) \end{aligned}$$

u. s. w.

verbunden sind:

$$\frac{d(\sin i \cos n)}{dt} = \mu^0 \cos \gamma_0 [\cos i^0 \sin i \sin n - \cos i \sin i^0 \sin n^0] + \mu' \cos \gamma, [\cos i' \sin i \sin n - \cos i \sin i' \sin n'] + \text{etc.}$$

$$-\frac{d(\sin i \sin n)}{dt} = \mu^0 \cos \gamma_0 [\cos i^0 \sin i \cos n - \cos i \sin i^0 \cos n^0] + \mu' \cos \gamma, [\cos i' \sin i \cos n - \cos i \sin i' \cos n'] + \text{etc.}$$

Führt man folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} x^0 &= \sin i^0 \cos n^0 & y^0 &= \sin i^0 \sin n^0 & z^0 &= \cos i^0 \\ x &= \sin i \cos n & y &= \sin i \sin n & z &= \cos i \\ x' &= \sin i' \cos n' & y' &= \sin i' \sin n' & z' &= \cos i' \end{aligned}$$

u. s. w.

und ferner

$$\cos \gamma_1^{(r)} = \cos \gamma_x^{(l)} = x^{(r)} x^{(l)} + y^{(r)} y^{(l)} + z^{(r)} z^{(l)} = \zeta_1^{(r)} = \zeta_x^{(l)}$$

$$1 = xx + yy + zz = x'x' + y'y' + z'z' = x''x'' + y''y'' + z''z'' = \text{etc.} \dots$$

durch für jede Zeit, für welche man die Lagen sämmtlicher Ebenen, und damit die Werthe der verschiedenen γ und Γ , schon kennt. Das Bedürfniss der Astronomie des Saturnsystems würde durch die einer bestimmten Zeit entsprechende Kenntniss dieser Geschwindigkeiten für lange Zeit befriedigt werden, indem sie nur sehr langsame Aenderungen erfahren können; allein man kann noch nicht zu ihr gelangen, indem ihre Elemente $h, \frac{\alpha}{a}, k, k'$, u. s. w. für jetzt entweder noch mangelhaft bekannt, oder ganz unbekannt sind. Indessen bestimmen die Formeln (50) nicht allein die Geschwindigkeiten der Bewegungen der Ebenen des Systems; die Integration derselben muss auch zur Kenntniss der Verbindungen führen, welche zwischen ihnen stattfinden mögen, und deren Ermittlung einer der interessantesten Theile der Theorie des Saturnsystems ist.

Zuerst werde ich die Differentialgleichungen (50) in eine Form bringen, welche das, was die Integration zu leisten hat, deutlicher an den Tag legt. Multiplicirt man die erste derselben in $-\sin n$, die zweite in $-\cos i \cos n$, ferner jene in $-\cos n$, diese in $\cos i \sin n$, so erhält man die Summen der Producte:

so verwandeln sich diese Gleichungen in:

$$\frac{dx}{dt} = \mu^0 \zeta^0 [z^0 y - z y^0] + \mu' \zeta' [z' y' - z y'] + \text{etc.} \dots$$

$$-\frac{dy}{dt} = \mu^0 \zeta^0 [z^0 x - z x^0] + \mu' \zeta' [z' x' - z x'] + \text{etc.} \dots$$

und alle folgenden werden ihnen offenbar ähnlich. Verbunden mit

bestimmen alle zusammen sämtliche veränderliche Grössen, vorausgesetzt dass x^0, y^0, z^0 gegeben, d. h. die Sicularbewegungen der Ebene der Saturnsbahn bekannt sind.

Man weiss diese Gleichungen nicht zu integrieren, wohl aber die ähnlichen lineären, in welche sie sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= [\mu^0 \xi^0 z' + \mu' \xi' z' + \mu'' \xi'' z' + \dots] y - \mu' \xi' z \cdot y' - \mu'' \xi'' z \cdot y'' - \dots - \mu^0 \xi^0 z \cdot y^0 \\ \frac{dx'}{dt} &= -\mu_1 \xi_1 z' \cdot y + [\mu_1^0 \xi_1^0 z^0 + \mu_1 \xi_1 z + \mu_1'' \xi_1'' z' + \dots] y' - \mu_1'' \xi_1'' z' \cdot y'' - \dots - \mu_1^0 \xi_1^0 z' \cdot y^0 \\ \frac{dx''}{dt} &= -\mu_2 \xi_2 z'' \cdot y - \mu_2' \xi_2' z'' \cdot y' + [\mu_2^0 \xi_2^0 z^0 + \mu_2 \xi_2 z + \mu_2' \xi_2' z' + \dots] y'' - \dots - \mu_2^0 \xi_2^0 z'' \cdot y^0 \\ &\quad \text{u. s. w.} \\ -\frac{dy}{dt} &= [\mu^0 \xi^0 z^0 + \mu' \xi' z' + \mu'' \xi'' z'' + \dots] x - \mu' \xi' z \cdot x' - \mu'' \xi'' z \cdot x'' - \dots - \mu^0 \xi^0 z \cdot x^0 \\ -\frac{dy'}{dt} &= -\mu_1 \xi_1 z' \cdot x + [\mu_1^0 \xi_1^0 z^0 + \mu_1 \xi_1 z + \mu_1'' \xi_1'' z' + \dots] x' - \mu_1'' \xi_1'' z' \cdot x'' - \dots - \mu_1^0 \xi_1^0 z^0 \cdot x^0 \\ -\frac{dy''}{dt} &= -\mu_2 \xi_2 z'' \cdot x - \mu_2' \xi_2' z'' \cdot x' + [\mu_2^0 \xi_2^0 z^0 + \mu_2 \xi_2 z + \mu_2' \xi_2' z' + \dots] x'' - \dots - \mu_2^0 \xi_2^0 z'' \cdot x^0 \\ &\quad \text{u. s. w.} \end{aligned} \right\} \dots (51)$$

17.

Ogleich ich später zeigen werde, dass diese Differentialgleichungen durch die Einführung anderer veränderlicher Grössen so verändert werden können, dass die Coefficienten in den correspondirenden horizontalen und verticalen Reihen einander gleich werden, woraus eine beträchtliche Erleichterung ihrer Integration hervorgeht, so glaube ich doch die gegenwärtige Gelegenheit benutzen zu dürfen, um ihre Integration auch ohne Rücksicht auf diesen, sowie auf jeden anderen besonderen Fall zu verfolgen. Indem ich ihnen die abgekürzte Bezeichnung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ay + a'y + a''y'' + \dots - a^0 y^0 \\ \frac{dx'}{dt} &= by + b'y' + b''y'' + \dots - b^0 y^0 \\ \frac{dx''}{dt} &= cy + c'y' + c''y'' + \dots - c^0 y^0 \\ &\quad \text{u. s. w.} \\ -\frac{dy}{dt} &= ax + a'x' + a''x'' + \dots - a^0 x^0 \\ -\frac{dy'}{dt} &= bx + b'x' + b''x'' + \dots - b^0 x^0 \\ -\frac{dy''}{dt} &= cx + c'x' + c''x'' + \dots - c^0 x^0 \\ &\quad \text{u. s. w.} \end{aligned} \right\} \dots (52)$$

gebe, werde ich also die Bedeutung der beständigen Grössen $a, a', a'', \dots, a^0; b, b', b'', \dots, b^0$ u. s. w. nicht beschränken.

Multiplicität man diese Gleichungen zuerst in:

$$\vartheta \cos gt, \vartheta' \cos gt, \vartheta'' \cos gt, \dots, \vartheta \sin gt, \vartheta' \sin gt, \vartheta'' \sin gt, \dots$$

dann in

$$\vartheta \sin gt, \vartheta' \sin gt, \vartheta'' \sin gt, \dots - \vartheta \cos gt, -\vartheta' \cos gt, -\vartheta'' \cos gt, \dots$$

so erhält man durch die Integrale der Summen der Producte

$$\left. \begin{aligned} \vartheta x + \vartheta' x' + \vartheta'' x'' + \dots &= k \sin(gt+l) + Dfg \\ \vartheta y + \vartheta' y' + \vartheta'' y'' + \dots &= k \cos(gt+l) + Dfg \end{aligned} \right\} \dots (53)$$

wo k und l willkürliche Constanten sind,

$$D = a^0 \vartheta + b^0 \vartheta' + c^0 \vartheta'' \dots$$

$$fg = \sin gt f x^0 \cos gt dt - \cos gt f x^0 \sin gt dt - \cos gt f y^0 \cos gt dt - \sin gt f y^0 \sin gt dt$$

$$f'g = \cos gt f x^0 \cos gt dt + \sin gt f x^0 \sin gt dt + \sin gt f y^0 \cos gt dt - \cos gt f y^0 \sin gt dt$$

bedeuten, und $\vartheta, \vartheta', \vartheta'', \dots$ und g den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (a-g)\vartheta + b\vartheta' + c\vartheta'' + \dots \\ 0 &= a'\vartheta + (b'-g)\vartheta' + c'\vartheta'' + \dots \\ 0 &= a''\vartheta + b''\vartheta' + (c''-g)\vartheta'' + \dots \end{aligned} \right\} \dots (54)$$

u. s. w.

verwandeln, wenn die Cosinus sämtlicher Neigungen, d. h. sämtliche z und ξ , als unveränderlich angenommen werden. Durch diese Annahme erhalten sämtliche x und y beständige Coefficienten; die gehörig geordneten Gleichungen werden:

entsprechend angenommen werden müssen. — Was zunächst gefordert werden muss, ist die Absonderung jeder der Veränderlichen $x, x', x'', \dots, y, y', y'' \dots$ von allen übrigen.

Da die Gleichungen (54) nur die Verhältnisse einer

der Grössen $\vartheta, \vartheta', \vartheta'', \dots$ zu den übrigen bestimmen, erhält man, indem man die erste derselben unberücksichtigt lässt, durch Auflösung der übrigen:

$$\vartheta' = \frac{N'}{N} \vartheta, \quad \vartheta'' = \frac{N''}{N} \vartheta, \quad \vartheta''' = \frac{N'''}{N} \vartheta, \dots$$

wo $N, N', N'' \dots$ Functionen von $a, b-g, c', \dots, a'', b'', c''-g, \dots$ u. s. w. sind. Durch die Substitution dieser Ausdrücke in der $2^{ten}, 3^{ten}, \dots$ der Gleichungen werden diese, unabhängig von einem bestimmten Werthe von g , identisch = 0; aber die erste Gleichung geht durch ihre Substitution in:

$$0 = \vartheta \{ (a-g)N + bN' + cN'' + \dots \}$$

über, und fordert daher dass g der Gleichung:

$$0 = (a-g)N + bN' + cN'' + \dots$$

entsprechend angenommen werde. Diese Gleichung werde ich durch $G = 0$ bezeichnen. Ihr Grad ist die Zahl der Veränderlichen x oder y , der nt ; ihre (sämmtlich voneinander verschieden vorausgesetzten) Wurzeln sollen durch $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n$ bezeichnet werden; die Ausdrücke, in welche G sich verwandelt, indem diese Wurzeln statt des unbestimmten g geschrieben werden, durch $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$. Um jede unnöthige Unbestimmtheit zu vermeiden, werde ich G so geschrieben annehmen, dass das höchste Glied davon $+g^n$ wird.

In der Art der Zusammensetzung des Ausdrucks

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG_1}{da}x + \frac{dG_1}{db}x' + \frac{dG_1}{dc}x'' + \dots &= \frac{k_1}{A_1} \sin(g_1t + l_1) + \delta_1 \cdot fg_1 \\ \frac{dG_2}{da}x + \frac{dG_2}{db}x' + \frac{dG_2}{dc}x'' + \dots &= \frac{k_2}{A_2} \sin(g_2t + l_2) + \delta_2 \cdot fg_2 \\ \frac{dG_3}{da}x + \frac{dG_3}{db}x' + \frac{dG_3}{dc}x'' + \dots &= \frac{k_3}{A_3} \sin(g_3t + l_3) + \delta_3 \cdot fg_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

u. s. w.

oder, wenn man andere Bezeichnungen der Constanten, nämlich:

$$\frac{k_1}{A_1} = \frac{dG_1}{da} c_1, \quad \frac{k_2}{A_2} = \frac{dG_2}{db} c_2, \quad \frac{k_3}{A_3} = \frac{dG_3}{dc} c_3, \dots$$

einführt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG_1}{da}x + \frac{dG_1}{db}x' + \frac{dG_1}{dc}x'' + \dots &= \frac{dG_1}{da} c_1 \sin(g_1t + l_1) + \delta_1 \cdot fg_1 \\ \frac{dG_2}{da}x + \frac{dG_2}{db}x' + \frac{dG_2}{dc}x'' + \dots &= \frac{dG_2}{db} c_2 \sin(g_2t + l_2) + \delta_2 \cdot fg_2 \\ \frac{dG_3}{da}x + \frac{dG_3}{db}x' + \frac{dG_3}{dc}x'' + \dots &= \frac{dG_3}{dc} c_3 \sin(g_3t + l_3) + \delta_3 \cdot fg_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (56^*)$$

u. s. w.

Ganz ähnliche Ausdrücke erhält man offenbar aus der zweiten der Gleichungen (53); nur werden darin y, y', y'', \dots statt x, x', x'', \dots \cos statt \sin und f' statt f geschrieben, also:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG_1}{da}y + \frac{dG_1}{db}y' + \frac{dG_1}{dc}y'' + \dots &= \frac{dG_1}{da} c_1 \cos(g_1t + l_1) + \delta_1 \cdot f'g_1 \\ \frac{dG_2}{da}y + \frac{dG_2}{db}y' + \frac{dG_2}{dc}y'' + \dots &= \frac{dG_2}{db} c_2 \cos(g_2t + l_2) + \delta_2 \cdot f'g_2 \\ \frac{dG_3}{da}y + \frac{dG_3}{db}y' + \frac{dG_3}{dc}y'' + \dots &= \frac{dG_3}{dc} c_3 \cos(g_3t + l_3) + \delta_3 \cdot f'g_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (55^*)$$

u. s. w.

von G liegt am Tage, dass jede der Grössen $a-g, b, c, \dots$ nur in ihrer ersten Potenz, und kein Product verschiedener derselben darin vorkommt; und damit auch, dass die, der Annahme irgend einer der Wurzeln (g_n) entsprechenden Werthen von $\vartheta, \vartheta', \vartheta'', \dots$ nämlich $\vartheta_n, \vartheta'_n, \vartheta''_n, \dots$ resp.

$$\frac{dG_n}{da}, \quad \frac{dG_n}{db}, \quad \frac{dG_n}{dc}, \dots$$

proportional, oder

$$\vartheta_n = A_n \frac{dG_n}{da}, \quad \vartheta'_n = A_n \frac{dG_n}{db}, \quad \vartheta''_n = A_n \frac{dG_n}{dc}, \dots$$

sind, wo A_n unbestimmt bleibt. Wiederholt man nun die erste der Gleichungen (53) so, dass man für g nach und nach $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n$ annimmt, bezeichnet man die mit diesen verschiedenen Annahmen zu verbindenden willkürlichen Constanten durch $k_1, l_1; k_2, l_2; k_3, l_3; \dots$ und die ihnen gemässen Werthe von D durch:

$$D_1 = A_1 \left\{ a^n \frac{dG_1}{da} + b^n \frac{dG_1}{db} + c^n \frac{dG_1}{dc} + \dots \right\} = A_1 \cdot \delta_1$$

$$D_2 = A_2 \left\{ a^n \frac{dG_2}{da} + b^n \frac{dG_2}{db} + c^n \frac{dG_2}{dc} + \dots \right\} = A_2 \cdot \delta_2$$

$$D_3 = A_3 \left\{ a^n \frac{dG_3}{da} + b^n \frac{dG_3}{db} + c^n \frac{dG_3}{dc} + \dots \right\} = A_3 \cdot \delta_3$$

u. s. w.

so hat man, nach der Division durch A_1, A_2, A_3, \dots

Um nun jede der Veränderlichen x, x', x'', \dots y, y', y'', \dots von den übrigen abzusondern, darf man sich nur an den schönen und wichtigen, von EULER gefundenen Satz erinnern, welchem zufolge, wenn $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n$ beliebige Grössen und

$$\begin{aligned} \varphi g_1 &= g_1 - g_2 \cdot g_1 - g_3 \cdot g_1 - g_4 \cdot g_1 - \dots \\ \varphi g_2 &= g_2 - g_1 \cdot g_2 - g_3 \cdot g_2 - g_4 \cdot g_2 - \dots \\ \varphi g_3 &= g_3 - g_1 \cdot g_3 - g_2 \cdot g_3 - g_4 \cdot g_3 - \dots \end{aligned}$$

u. s. w.

bedeuten,

$$\frac{g_1^m}{\varphi g_1} + \frac{g_2^m}{\varphi g_2} + \frac{g_3^m}{\varphi g_3} + \dots + \frac{g_n^m}{\varphi g_n} \dots \dots (56)$$

für $m = n - 1$ Eins ist, für alle ganze m von 0 bis $n - 2$ incl. aber verschwindet. Der in Beziehung auf a genommene Differentialquotient von G ist nämlich vom $n - 1$ ten Grade, während die in Beziehung auf b, c, d, \dots genommene Differentialquotienten von G höchstens

$$\left. \begin{aligned} -x &= \frac{dG_1}{\varphi g_1 \cdot da} \cdot c_1 \sin(g_1 t + l_1) + \frac{dG_2}{\varphi g_2 \cdot db} \cdot c_2 \sin(g_2 t + l_2) + \dots + \frac{f g_1}{\varphi g_1} \delta_1 + \frac{f g_2}{\varphi g_2} \delta_2 + \dots \\ -y &= \frac{dG_1}{\varphi g_1 \cdot da} \cdot c_1 \cos(g_1 t + l_1) + \frac{dG_2}{\varphi g_2 \cdot db} \cdot c_2 \cos(g_2 t + l_2) + \dots + \frac{f g_1}{\varphi g_1} \delta_1 + \frac{f g_2}{\varphi g_2} \delta_2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (D)$$

So wie die 2, 3, ... der Gleichungen (54) identisch = 0 gemacht worden sind und dadurch die erste derselben in $G = 0$ übergegangen ist, eben so kann man auch jede der folgenden, indem man die übrigen identisch macht, in $G = 0$ übergehen lassen. Durch jede dieser Aenderungen erhält man andere Ausdrücke von $\vartheta_m, \vartheta'_m, \vartheta''_m, \dots$, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_m &= A_m \frac{dG_m}{da}, & \vartheta'_m &= A_m \frac{dG_m}{db}, & \vartheta''_m &= A_m \frac{dG_m}{dc}, \dots \\ \vartheta_m &= B_m \frac{dG_m}{da}, & \vartheta'_m &= B_m \frac{dG_m}{db}, & \vartheta''_m &= B_m \frac{dG_m}{dc}, \dots \\ \vartheta_m &= C_m \frac{dG_m}{da}, & \vartheta'_m &= C_m \frac{dG_m}{db}, & \vartheta''_m &= C_m \frac{dG_m}{dc}, \dots \end{aligned} \right\} (57)$$

u. s. w.

welche resp. zur abgesonderten Bestimmung von x, y ;

$$\begin{aligned} \frac{dG_1}{da} x + \frac{dG_1}{db} x' + \frac{dG_1}{dc} x'' + \dots &= \frac{k_1}{B_1} \sin(g_1 t + l_1) + \delta'_1 \cdot f g_1 \\ \frac{dG_2}{da} x + \frac{dG_2}{db} x' + \frac{dG_2}{dc} x'' + \dots &= \frac{k_2}{B_2} \sin(g_2 t + l_2) + \delta'_2 \cdot f g_2 \\ \frac{dG_3}{da} x + \frac{dG_3}{db} x' + \frac{dG_3}{dc} x'' + \dots &= \frac{k_3}{B_3} \sin(g_3 t + l_3) + \delta'_3 \cdot f g_3 \end{aligned}$$

u. s. w.

wo der erste Factor rechts vom Gleichheitszeichen, den Relationen (57) gemäss, folgendermassen anders ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{B_1} &= \frac{k_1}{A_1} \cdot \frac{A_1}{B_1} = \frac{dG_1}{da} \cdot c_1 \frac{A_1}{B_1} = \frac{dG_1}{da} \cdot c_1 \\ \frac{k_2}{B_2} &= \frac{k_2}{A_2} \cdot \frac{A_2}{B_2} = \frac{dG_2}{db} \cdot c_2 \frac{A_2}{B_2} = \frac{dG_2}{db} \cdot c_2 \end{aligned}$$

von $n - 2$ ten sein können, weil sonst die 2, 3, ... der Gleichungen (54), oder

$$\begin{aligned} 0 &= a \frac{dG}{da} + (b' - g) \frac{dG}{db} + c \frac{dG}{dc} + \dots \\ 0 &= a'' \frac{dG}{da} + b'' \frac{dG}{db} + (c' - g) \frac{dG}{dc} + \dots \end{aligned}$$

u. s. w.

nicht identisch sein könnten; woraus unmittelbar hervorgeht, dass die Summe der Quotienten der Gleichungen, sowohl (55^a) als auch (55^b), dividirt resp. durch $\varphi g_1, \varphi g_2, \varphi g_3, \dots$ von $x', x'', \dots, y', y'', \dots$ frei ist, und dass diese Summe x und y in den Coefficienten der höchsten ($n - 1$ ten) Potenz von g im Ausdrücke von $\frac{dG}{da}$ multiplicirt enthält. Da aber das höchste Glied von G aus dem Producte $(-1)^n (a - g) (b' - g) (c' - g) \dots$ entsteht, so ist dieser Coefficient = -1 und man erhält, abgesondert von $x', x'', \dots, y', y'', \dots$:

x', y', x'', y'', \dots führen. Führt man auch jeder dieser Aenderungen entsprechende analoge Bezeichnungen $\delta_m, \delta'_m, \delta''_m, \dots$ ein, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \delta_m &= a'' \frac{dG_m}{da} + b'' \frac{dG_m}{db} + c'' \frac{dG_m}{dc} + \dots \\ \delta'_m &= a' \frac{dG_m}{da} + b' \frac{dG_m}{db} + c' \frac{dG_m}{dc} + \dots \\ \delta''_m &= a \frac{dG_m}{da} + b \frac{dG_m}{db} + c \frac{dG_m}{dc} + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (58)$$

u. s. w.

so erlangt man durch die 2, 3, .. Aenderung Ausdrücke von x', y', x'', y'', \dots welche den schon gefundenen Ausdrücken von x, y ganz ähnlich sind. So ergibt z. B. die zweite Aenderung statt der Gleichungen (D):

$$\frac{k_2}{B_2} = \frac{k_2}{A_2} \cdot \frac{A_2}{B_2} = \frac{dG_2}{db} \cdot c_2 \frac{A_2}{B_2} = \frac{dG_2}{db} \cdot c_2$$

u. s. w.

Diese Ausdrücke zeigen, dass man, indem man statt der ersten die zweite der Gleichungen (54) in $G = 0$ übergehen lässt, zu Gleichungen gelangt, welche sich von (55) nur dadurch unterscheiden, dass sie statt der

in diesen vorkommenden $a, b, c, \dots \delta$ die ähnlichen Grössen $a', b', c', \dots \delta'$ enthalten. Offenbar gelangt man von ihnen, eben so wie man von (55) zu Ausdrücken von x und y gelangt ist, zu Ausdrücken von

$$\left. \begin{aligned} -x &= \frac{dG_1}{\varphi g_1 \cdot da} \cdot c_1 \sin(g_1 t + l_1) + \frac{dG_2}{\varphi g_2 \cdot db} \cdot c_2 \sin(g_2 t + l_2) + \dots + \frac{f g_1}{\varphi g_1} \cdot \delta_1 + \frac{f g_2}{\varphi g_2} \cdot \delta_2 + \dots \\ -y &= \frac{dG_1}{\varphi g_1 \cdot da} \cdot c_1 \cos(g_1 t + l_1) + \frac{dG_2}{\varphi g_2 \cdot db} \cdot c_2 \cos(g_2 t + l_2) + \dots + \frac{f' g_1}{\varphi g_1} \cdot \delta_1 + \frac{f' g_2}{\varphi g_2} \cdot \delta_2 + \dots \\ -c' &= \frac{dG_1}{\varphi g_1 \cdot da} \cdot c_1 \sin(g_1 t + l_1) + \frac{dG_2}{\varphi g_2 \cdot db} \cdot c_2 \sin(g_2 t + l_2) + \dots + \frac{f g_1}{\varphi g_1} \cdot \delta_1' + \frac{f g_2}{\varphi g_2} \cdot \delta_2' + \dots \\ -y' &= \frac{dG_1}{\varphi g_1 \cdot da} \cdot c_1 \cos(g_1 t + l_1) + \frac{dG_2}{\varphi g_2 \cdot db} \cdot c_2 \cos(g_2 t + l_2) + \dots + \frac{f' g_1}{\varphi g_1} \cdot \delta_1' + \frac{f' g_2}{\varphi g_2} \cdot \delta_2' + \dots \\ -x'' &= \frac{dG_1}{\varphi g_1 \cdot da} \cdot c_1 \sin(g_1 t + l_1) + \frac{dG_2}{\varphi g_2 \cdot db} \cdot c_2 \sin(g_2 t + l_2) + \dots + \frac{f g_1}{\varphi g_1} \cdot \delta_1'' + \frac{f g_2}{\varphi g_2} \cdot \delta_2'' + \dots \\ -y'' &= \frac{dG_1}{\varphi g_1 \cdot da} \cdot c_1 \cos(g_1 t + l_1) + \frac{dG_2}{\varphi g_2 \cdot db} \cdot c_2 \cos(g_2 t + l_2) + \dots + \frac{f' g_1}{\varphi g_1} \cdot \delta_1'' + \frac{f' g_2}{\varphi g_2} \cdot \delta_2'' + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (59)$$

u. s. w.

Die Constanten $c_1, c_2, \dots l_1, l_2, \dots$ werden durch gegebene Werthe der veränderlichen Grössen bestimmt. Bezeichnet man die zu der Zeit, von welcher an man t zählt und auch die in den Functionen f und f' enthaltenen Integrale anfängl. gehörigen Werthe von x, x', x'', \dots und y, y', y'', \dots durch ξ, ξ', ξ'', \dots und $\eta, \eta', \eta'', \dots$ so erhält man die Gleichungen (55):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG_1}{da} \cdot c_1 \sin l_1 &= \frac{dG_1}{da} \xi + \frac{dG_2}{db} \xi' + \frac{dG_3}{dc} \xi'' + \dots \\ \frac{dG_1}{da} \cdot c_1 \cos l_1 &= \frac{dG_1}{da} \eta + \frac{dG_2}{db} \eta' + \frac{dG_3}{dc} \eta'' + \dots \\ \frac{dG_2}{db} \cdot c_2 \sin l_2 &= \frac{dG_2}{db} \xi + \frac{dG_3}{dc} \xi' + \frac{dG_4}{de} \xi'' + \dots \\ \frac{dG_2}{db} \cdot c_2 \cos l_2 &= \frac{dG_2}{db} \eta + \frac{dG_3}{dc} \eta' + \frac{dG_4}{de} \eta'' + \dots \\ \frac{dG_3}{dc} \cdot c_3 \sin l_3 &= \frac{dG_3}{dc} \xi + \frac{dG_4}{de} \xi' + \frac{dG_5}{df} \xi'' + \dots \\ \frac{dG_3}{dc} \cdot c_3 \cos l_3 &= \frac{dG_3}{dc} \eta + \frac{dG_4}{de} \eta' + \frac{dG_5}{df} \eta'' + \dots \end{aligned} \right\} \dots (60)$$

u. s. w.

In jeder dieser Formeln können, den Relationen (57) zufolge, statt a, b, c, \dots nach Belieben a', b', c', \dots oder a'', b'', c'', \dots , oder a''', b''', c''', \dots u. s. w. geschrieben werden.

18.

In jedem besonderen Falle ist zu erwarten, dass sich aus den ihm gemäss gegebenen Ausdrücken der Functionen der Zeit x^0 und y^0 Mittel werden ableiten lassen, die letzten, die Functionen f und f' enthaltenden Glieder der Formeln (59) zusammenzuziehen. Ich werde dieses durch zwei Fälle verfolgen, von denen der eine oder andere Anwendung finden wird, wenn die Diffe-

rentialgleichungen (52): x' und y' , zwischen welchen und den vorigen auch nur derselbe Unterschied stattfindet. — Man erhält also folgende Ausdrücke aller veränderlichen Grössen der Differentialgleichungen (52):

rentialgleichungen (52) die Säcularbewegungen der Elemente der Himmelskörper bestimmen sollen.

Der erste Fall setzt voraus, dass x^0 und y^0 Summen von Gliedern der Form $h \sin(it + H)$ und $h \cos(it + H)$, oder dass ihre Ausdrücke:

$$x^0 = \Sigma h \sin(it + H), \quad y^0 = \Sigma h \cos(it + H)$$

sind. In diesem Falle erhält man die, mit $t = 0$ anfangend genommenen Ausdrücke von fg und $f'g$:

$$fg = \Sigma \frac{h}{g-i} [\sin(it + H) - \sin H]$$

$$f'g = \Sigma \frac{h}{g-i} [\cos(it + H) - \cos H]$$

Wenn man in den beiden ersten der Formeln (59) für $\delta_1, \delta_2, \dots$ ihre Ausdrücke (58) schreibt, werden die davon abhängigen Theile:

$$\text{von } -x = \Sigma h [\sin(it + H) - \sin H] \psi_i$$

$$\text{von } -y = \Sigma h [\cos(it + H) - \cos H] \psi_i$$

wo

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{1}{g_1 - i \cdot \varphi g_1} \left(a^0 \frac{dG_1}{da} + b^0 \frac{dG_1}{db} + c^0 \frac{dG_1}{dc} + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{g_2 - i \cdot \varphi g_2} \left(a^0 \frac{dG_2}{da} + b^0 \frac{dG_2}{db} + c^0 \frac{dG_2}{dc} + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{g_3 - i \cdot \varphi g_3} \left(a^0 \frac{dG_3}{da} + b^0 \frac{dG_3}{db} + c^0 \frac{dG_3}{dc} + \dots \right) \end{aligned}$$

u. s. w.

bedeutet. Die zwischen den Klammern befindlichen Grössen sind Werthe einer ganzen, rationalen Function vom $n - 1^{\text{ten}}$ Grade, gehörig zu den Werthen g_1, g_2, g_3, \dots ihrer Veränderlichen. Schreibt man $g_1 - i + i, g_2 - i + i, g_3 - i + i, \dots$ statt g_1, g_2, g_3, \dots und ordnet man nach den Potenzen von resp. $g_1 - i, g_2 - i, g_3 - i, \dots$ so

wird das letzte, das von diesen Grössen unabhängige Glied, offenbar:

$$a^o \frac{dI}{da} + b^o \frac{dI}{db} + c^o \frac{dI}{dc} + \dots$$

wo I der Ausdruck ist, in den G sich verwandelt, wenn i statt g geschrieben wird. Die früheren Glieder, dessen höchstes die $n-1$ te Potenz von resp. $g_1-i, g_2-i,$

$$\psi i = \left\{ \frac{1}{g_1-i \cdot \varphi g_1} + \frac{1}{g_2-i \cdot \varphi g_2} + \frac{1}{g_3-i \cdot \varphi g_3} + \dots \right\} \left\{ a^o \frac{dI}{da} + b^o \frac{dI}{db} + c^o \frac{dI}{dc} + \dots \right\}$$

Indessen hat NICOLAUS VON FUSS, in den Gedenschriften der Petersburger Akademie für 1777, die erste der

g_2-i, \dots enthält, ergeben, nach der Division durch resp. diese Grössen, welche der ausser den Klammern befindliche Nenner verlangt, eine ganze Function von $n-2$ ten Grade, welche, dem Euler'schen Satze (56) zufolge, aus der Summe aller Zeilen des Ausdrucks von ψi verschwindet. Dieser Ausdruck reducirt sich daher auf:

später vollständig bekannt gewordenen Erweiterungen des Euler'schen Satzes gefunden, welcher zufolge:

$$\frac{1}{g_1 \varphi g_1} + \frac{1}{g_2 \varphi g_2} + \frac{1}{g_3 \varphi g_3} + \dots + \frac{1}{g_n \varphi g_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{g_1 g_2 g_3 \dots g_n} \dots \dots \dots (61)$$

also auch

$$\frac{1}{g_1-i \cdot \varphi g_1} + \frac{1}{g_2-i \cdot \varphi g_2} + \frac{1}{g_3-i \cdot \varphi g_3} + \dots = \frac{(-1)^{n-1}}{g_1-i g_2-i g_3-i \dots g_n-i}$$

ist, und wodurch der erste Factor des Ausdrucks von ψi auf

$$\frac{-1}{i-g_1 \cdot i-g_2 \dots i-g_n} = -\frac{1}{I}$$

reducirt wird, man also:

$$\psi i = -\frac{1}{I} \left\{ a^o \frac{dI}{da} + b^o \frac{dI}{db} + c^o \frac{dI}{dc} + \dots \right\}$$

und demgemäss:

$$\frac{f'g_1}{\varphi g_1} \cdot \delta_1 + \frac{f'g_2}{\varphi g_2} \cdot \delta_2 + \dots = -\Sigma \frac{h}{I} \left\{ a^o \frac{dI}{da} + b^o \frac{dI}{db} + c^o \frac{dI}{dc} + \dots \right\} [\sin(it+H) - \sin iH]$$

$$\frac{f'g_1}{\varphi g_1} \cdot \delta_1 + \frac{f'g_2}{\varphi g_2} \cdot \delta_2 + \dots = -\Sigma \frac{h}{I} \left\{ a^o \frac{dI}{da} + b^o \frac{dI}{db} + c^o \frac{dI}{dc} + \dots \right\} [\cos(it+H) - \cos iH]$$

hat.

Dieselbe Reduction, welche hier die aus x^o und y^o entstehenden Theile der Ausdrücke von x und y (58) erfahren haben, findet auch hier ihre Anwendung auf die ähnlichen Theile der Ausdrücke von $x', y'; x'', y''; \dots$ indem für diese nur $a', b', c', \dots; a'', b'', c'', \dots$

u. s. w. statt a, b, c, \dots geschrieben werden dürfen. Man hat also in dem hier betrachteten Falle, nämlich wenn gegeben sind:

$$x^o = \Sigma h \sin(it+H), \quad y^o = \Sigma h \cos(it+H),$$

die Ausdrücke der Veränderlichen:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{dG_1}{\varphi g_1 da} c_1 \sin(g_1 t + l_1) - \frac{dG_2}{\varphi g_2 db} c_2 \sin(g_2 t + l_2) - \dots + \Sigma \frac{h}{I} \left(a^o \frac{dI}{da} + b^o \frac{dI}{db} + c^o \frac{dI}{dc} + \dots \right) [\sin(it+H) - \sin iH] \\ y &= -\frac{dG_1}{\varphi g_1 da} c_1 \cos(g_1 t + l_1) - \frac{dG_2}{\varphi g_2 db} c_2 \cos(g_2 t + l_2) - \dots + \Sigma \frac{h}{I} \left(a^o \frac{dI}{da} + b^o \frac{dI}{db} + c^o \frac{dI}{dc} + \dots \right) [\cos(it+H) - \cos iH] \\ x' &= -\frac{dG_1}{\varphi g_1 da} c_1 \sin(g_1 t + l_1) - \frac{dG_2}{\varphi g_2 db} c_2 \sin(g_2 t + l_2) - \dots + \Sigma \frac{h}{I} \left(a^o \frac{dI}{da} + b^o \frac{dI}{db} + c^o \frac{dI}{dc} + \dots \right) [\sin(it+H) - \sin iH] \\ y' &= -\frac{dG_1}{\varphi g_1 da} c_1 \cos(g_1 t + l_1) - \frac{dG_2}{\varphi g_2 db} c_2 \cos(g_2 t + l_2) - \dots + \Sigma \frac{h}{I} \left(a^o \frac{dI}{da} + b^o \frac{dI}{db} + c^o \frac{dI}{dc} + \dots \right) [\cos(it+H) - \cos iH] \\ x'' &= -\frac{dG_1}{\varphi g_1 da} c_1 \sin(g_1 t + l_1) - \frac{dG_2}{\varphi g_2 db} c_2 \sin(g_2 t + l_2) - \dots + \Sigma \frac{h}{I} \left(a^o \frac{dI}{da} + b^o \frac{dI}{db} + c^o \frac{dI}{dc} + \dots \right) [\sin(it+H) - \sin iH] \\ y'' &= -\frac{dG_1}{\varphi g_1 da} c_1 \cos(g_1 t + l_1) - \frac{dG_2}{\varphi g_2 db} c_2 \cos(g_2 t + l_2) - \dots + \Sigma \frac{h}{I} \left(a^o \frac{dI}{da} + b^o \frac{dI}{db} + c^o \frac{dI}{dc} + \dots \right) [\cos(it+H) - \cos iH] \end{aligned} \right\} (62)$$

u. s. w.

Der zweite Fall den ich verfolgen werde, setzt

$$x^o = ht, \quad y^o = h't$$

voraus. Ihm entsprechen

$$fg = \frac{h}{g} t, \quad f'g = \frac{h'}{g'} t$$

und damit die Summe der letzten Glieder des Ausdrucks von $-x$ (59):

$$\begin{aligned} ht &\left[\frac{1}{g_1 \varphi g_1} \left(a^o \frac{dG_1}{da} + b^o \frac{dG_1}{db} + c^o \frac{dG_1}{dc} + \dots \right) \right. \\ &+ \frac{1}{g_2 \varphi g_2} \left(a^o \frac{dG_2}{da} + b^o \frac{dG_2}{db} + c^o \frac{dG_2}{dc} + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{g_3 \varphi g_3} \left(a^o \frac{dG_3}{da} + b^o \frac{dG_3}{db} + c^o \frac{dG_3}{dc} + \dots \right) \\ &\left. \text{u. s. w.} \dots \dots \dots \right] \end{aligned}$$

aus welcher Summe, der schon bei dem vorigen Falle gemachten Bemerkung gemäss, alle von g abhängigen Glieder des Ausdrucks G verschwinden. Bezeichnet man sein letztes, von g freies Glied, durch $(-1)^n N$, so reducirt sich daher der eben gegebene Ausdruck auf:

$$(-1)^n h t \left[\frac{1}{g_1 \varphi g_1} + \frac{1}{g_2 \varphi g_2} + \frac{1}{g_3 \varphi g_3} + \dots \right] \left[a^0 \frac{dN}{da} + b^0 \frac{dN}{db} + c^0 \frac{dN}{dc} + \dots \right]$$

und da

$$\frac{1}{g_1 \varphi g_1} + \frac{1}{g_2 \varphi g_2} + \frac{1}{g_3 \varphi g_3} + \dots = \frac{(-1)^{n-1}}{g_1 \varphi g_1 \dots g_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{N}$$

ist, auf

$$\begin{aligned} & - \frac{h t}{N} \left[a^0 \frac{dN}{da} + b^0 \frac{dN}{db} + c^0 \frac{dN}{dc} + \dots \right] \\ x = & - \frac{dG_1}{\varphi g_1 da} c_1 \sin(g_1 t + l_1) - \frac{dG_2}{\varphi g_2 db} c_2 \sin(g_2 t + l_2) - \dots + \frac{t h}{N} \left(a^0 \frac{dN}{da} + b^0 \frac{dN}{db} + c^0 \frac{dN}{dc} + \dots \right) \\ y = & - \frac{dG_1}{\varphi g_1 da} c_1 \cos(g_1 t + l_1) - \frac{dG_2}{\varphi g_2 db} c_2 \cos(g_2 t + l_2) - \dots + \frac{t h'}{N} \left(a^0 \frac{dN}{da} + b^0 \frac{dN}{db} + c^0 \frac{dN}{dc} + \dots \right) \\ x' = & - \frac{dG_1}{\varphi g_1 da} c_1 \sin(g_1 t + l_1) - \frac{dG_2}{\varphi g_2 db} c_2 \sin(g_2 t + l_2) - \dots + \frac{t h}{N} \left(a^0 \frac{dN}{da} + b^0 \frac{dN}{db} + c^0 \frac{dN}{dc} + \dots \right) \\ y' = & - \frac{dG_1}{\varphi g_1 da} c_1 \cos(g_1 t + l_1) - \frac{dG_2}{\varphi g_2 db} c_2 \cos(g_2 t + l_2) - \dots + \frac{t h'}{N} \left(a^0 \frac{dN}{da} + b^0 \frac{dN}{db} + c^0 \frac{dN}{dc} + \dots \right) \\ x'' = & - \frac{dG_1}{\varphi g_1 da} c_1 \sin(g_1 t + l_1) - \frac{dG_2}{\varphi g_2 db} c_2 \sin(g_2 t + l_2) - \dots + \frac{t h}{N} \left(a^0 \frac{dN}{da} + b^0 \frac{dN}{db} + c^0 \frac{dN}{dc} + \dots \right) \\ y'' = & - \frac{dG_1}{\varphi g_1 da} c_1 \cos(g_1 t + l_1) - \frac{dG_2}{\varphi g_2 db} c_2 \cos(g_2 t + l_2) - \dots + \frac{t h'}{N} \left(a^0 \frac{dN}{da} + b^0 \frac{dN}{db} + c^0 \frac{dN}{dc} + \dots \right) \end{aligned} \quad (63)$$

u. s. w.

19.

In den beiden letzten §§ ist die Entwicklung der veränderlichen Grössen der Differentialgleichungen (52) ganz auf die Kenntniss des Ausdrucks von G und der Wurzeln der Gleichung $G = 0$ zurückgeführt worden. Jener Ausdruck geht aus der Elimination von $\vartheta, \vartheta', \vartheta'' \dots$ aus den Gleichungen (54) hervor. Seine merkwürdigen Eigenschaften haben CAUCHY*) und JACOBI**) veranlasst, ihn in besonderen Abhandlungen unter der Benennung Determinante zu untersuchen. Er kann unmittelbar, d. h. ohne wirkliche Verfolgung der Elimination, gefunden werden. Schreibt man a, b', c'', d''' , statt $a - g, b' - g, c'' - g, d''' - g \dots$ (unter dem Vorbehalte diese abgekürzte Bezeichnung später wieder in die zusammengesetzte zu verwandeln) so ist G ein Aggregat aller Producte, welche man durch Versetzung der Indices des Ausdrucks $a, b', c'', d''' \dots$ erhalten kann. Die eine Hälfte dieser Producte wird mit dem $+$ Zeichen, die andere mit dem $-$ Zeichen genommen, und zwar nach folgender, CAUCHY zu verdankenden Regel: schreibt man, statt der Reihenfolge der Indices

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

resp. die Reihenfolge der Buchstaben:

*) Journal de l'école polytechnique. 17. Cahier.

**) CRELLE, Journal für die reine und angewandte Mathematik. 22. Band p. 285.

a, b, c, d, e, \dots

so dass jedes Product P_i , dessen Zeichen bestimmt werden soll, als ein Product von Potenzen der Basen $a, b, c, d \dots$ (seiner Elemente) erscheint; vertheilt man ferner diese Potenzen in die möglichst grosse Zahl von Gruppen, deren jede gleiche Buchstaben als Basen und als Exponenten, wenn auch in verschiedener Ordnung, enthält; so erhält P_i das $+$ Zeichen oder das $-$ Zeichen, je nachdem die Anzahl dieser Gruppen gerade oder ungerade ist. Als Beispiele hiervon werde ich die Fälle $n = 2, n = 3, n = 4$ verfolgen.

I. Zwei Elemente ab , oder $n = 2$.

$P_1 = ab$; Bezeichnung $a^a b$; Gruppen $\binom{a}{a} \binom{b}{b}$; also $+P_1$
 $P_2 = a^b b$; " $\binom{b}{a} \binom{a}{b}$ " $-P_2$,
 woraus folgt:

$$G = ab - a^b b$$

und nach der Wiederherstellung der früheren Bezeichnung

$$(i = (a-g)(b-g) - a^b$$

II. Drei Elemente abc , oder $n = 3$.

$P_1 = a^b c'$; Bezeichnung $a^a b^a c$; Gruppen $\binom{a}{a} \binom{b}{b} \binom{c}{c}$; also $-P_1$
 $P_2 = a^b b' c$ " $\binom{a}{a} \binom{c}{b} \binom{b}{c}$ " $+P_2$
 $P_3 = a'' b' c$ " $\binom{b}{a} \binom{c}{a} \binom{a}{c}$ " $+P_3$
 $P_4 = a^b c''$ " $\binom{b}{a} \binom{c}{a} \binom{a}{b}$ " $+P_4$

$P_5 = a'b''c$; Bezeichnung abc ; Gruppen $\begin{matrix} bca \\ abc \end{matrix}$; also $-P_5$
 $P_6 = a''b'c'$ " $\begin{matrix} cab \\ abc \end{matrix}$ " $\begin{matrix} cba \\ abc \end{matrix}$ " $-P_6$

woraus folgt:
 $G = -ab'c' + ab''c + a''b'c + a'bc' - a'b''c - a''bc'$
 und nach der Wiederherstellung der früheren Bezeichnung:

$$G = -(a-g)(b'-g)(c''-g) + b''c'(a-g) + a''c'(b'-g) + a'b'(c''-g) - a'b''c - a''bc'$$

III. Vier Elemente $abcd$, oder $n = 4$.

$P_1 = ab'c''d''''$	Bezeichnung $abcd$;	Gruppen $\begin{matrix} abcd \\ abcd \end{matrix}$;	also $+P_1$
$P_2 = ab'c''d''$	" $abcd$	" $\begin{matrix} a(b)(cd) \\ abcd \end{matrix}$	" $-P_2$
$P_3 = ab''c'd'$	" $abcd$	" $\begin{matrix} a(c)(bd) \\ abcd \end{matrix}$	" $-P_3$
$P_4 = ab''c'd''''$	" $abcd$	" $\begin{matrix} a(d)(bc) \\ abcd \end{matrix}$	" $-P_4$
$P_5 = a''b'c'd$	" $abcd$	" $\begin{matrix} b(c)(ad) \\ abcd \end{matrix}$	" $-P_5$
$P_6 = a''b'c'd''''$	" $abcd$	" $\begin{matrix} b(d)(ac) \\ abcd \end{matrix}$	" $-P_6$
$P_7 = a'b'c''d''''$	" $abcd$	" $\begin{matrix} c(d)(ab) \\ abcd \end{matrix}$	" $-P_7$
$P_8 = ab''c''d'$	" $abcd$	" $\begin{matrix} a(bcd) \\ abcd \end{matrix}$	" $+P_8$
$P_9 = ab''c''d''$	" $abcd$	" $\begin{matrix} a(bcd) \\ abcd \end{matrix}$	" $+P_9$
$P_{10} = a'b'c''d$	" $abcd$	" $\begin{matrix} b(acd) \\ abcd \end{matrix}$	" $+P_{10}$
$P_{11} = a''b'c'd''$	" $abcd$	" $\begin{matrix} b(acd) \\ abcd \end{matrix}$	" $+P_{11}$
$P_{12} = a'b''c'd$	" $abcd$	" $\begin{matrix} c(abd) \\ abcd \end{matrix}$	" $+P_{12}$
$P_{13} = a''b'c'd''$	" $abcd$	" $\begin{matrix} c(abd) \\ abcd \end{matrix}$	" $+P_{13}$
$P_{14} = a'b'c'd''''$	" $abcd$	" $\begin{matrix} d(abc) \\ abcd \end{matrix}$	" $+P_{14}$
$P_{15} = a''b'c'd''''$	" $abcd$	" $\begin{matrix} d(abc) \\ abcd \end{matrix}$	" $+P_{15}$
$P_{16} = a'b'c''d''$	" $abcd$	" $\begin{matrix} a(bcd) \\ abcd \end{matrix}$	" $+P_{16}$
$P_{17} = a'b'c''d''''$	" $abcd$	" $\begin{matrix} a(bcd) \\ abcd \end{matrix}$	" $-P_{17}$
$P_{18} = a'b''c'd''$	" $abcd$	" $\begin{matrix} a(bcd) \\ abcd \end{matrix}$	" $-P_{18}$
$P_{19} = a'b'c''d'$	" $abcd$	" $\begin{matrix} a(bcd) \\ abcd \end{matrix}$	" $-P_{19}$
$P_{20} = a''b''c'd'$	" $abcd$	" $\begin{matrix} a(c)(bd) \\ abcd \end{matrix}$	" $+P_{20}$
$P_{21} = a''b''c'd''$	" $abcd$	" $\begin{matrix} a(c)(bd) \\ abcd \end{matrix}$	" $-P_{21}$
$P_{22} = a''b'c'd''$	" $abcd$	" $\begin{matrix} a(bcd) \\ abcd \end{matrix}$	" $-P_{22}$
$P_{23} = a''b''c'd'$	" $abcd$	" $\begin{matrix} a(bcd) \\ abcd \end{matrix}$	" $-P_{23}$
$P_{24} = a''b''c'd''$	" $abcd$	" $\begin{matrix} (ad)(bc) \\ abcd \end{matrix}$	" $+P_{24}$

woraus folgt
 $G = ab'c''d'''' - ab'c''d'' - ab''c'd' - ab''c'd'' - a''b'c'd - a''b'cd'' - a'b'c'd'''' + ab''c'd' + ab''c'd'' + a''b'c'd''''$
 $+ a''b'cd'' + a''b'c'd + a''b'c'd'' + a''b'cd'''' + a'b'c'd'''' + a'b'c'd'' - a'b''c'd - a'b''cd'' - a'b'c'd'''' + a''b'c'd''''$
 $- a''b'c'd - a''b'c'd'' - a''b'cd' + a''b'c'd''$

und nach der Wiederherstellung der früheren Bezeichnung:
 $G = (a-g)(b'-g)(c''-g)(d''''-g) - c''d''(a-g)(b'-g) - b''d'(a-g)(c''-g) - b''c'(a-g)(d''''-g)$
 $- a''d'(b'-g)(c''-g) - a''c'(b'-g)(d''''-g) - ab'(c''-g)(d''''-g) + b''c'd'(a-g) + b''c'd''(a-g)$
 $+ a''c''d'(b'-g) + a''c''d''(b'-g) + a''b'd'(c''-g) + a''b'd''(c''-g) + a''b'c'(d''''-g) + a''b'c''(d''''-g) + a'b'c'd''''$
 $- a'b'c'd'' - a'b'c'd' - a'b'c'd'' + a'b'c'd' - a''b''c'd - a''b''cd'' - a''b''c'd' + a''b''c'd''$

Die Werthe, welche sämtliche nn , in Beziehung auf $a, a', a'', \dots; b, b', b'', \dots; c, c', c'' \dots$ u. s. w. genommene Differentialquotienten von G_m erlangen, indem G_m eine der Wurzeln der Gleichung $G = 0$ bedeutet, sind durch $nn - (n-1)^2 = 2n - 1$ derselben gegeben, so dass, um alle kennen zu lernen, nur $2n - 1$ von ihnen unmittelbar aus ihren Ausdrücken abgeleitet werden dürfen. Den Relationen (57) zufolge sind nämlich alle Glieder zweier Horizontalreihen des Schema's:

$$\begin{aligned} \frac{dG_m}{da}, \frac{dG_m}{db}, \frac{dG_m}{dc}, \dots \\ \frac{dG_m}{da'}, \frac{dG_m}{db'}, \frac{dG_m}{dc'}, \dots \\ \frac{dG_m}{da''}, \frac{dG_m}{db''}, \frac{dG_m}{dc''}, \dots \end{aligned}$$

u. s. w.

in gleichem Verhältnisse, woraus unmittelbar hervorgeht, dass auch die in zwei Verticalreihen befindlichen dieselbe Eigenschaft besitzen. Vergleicht man z. B. die 2., 3.... Horizontalreihe mit der ersten, indem man ihre Verhältnisse durch $1:p'_m:p''_m: \dots$ bezeichnet;

und eben so die 2., 3.... Verticalreihe mit der ersten, indem man für die Verhältnisse die Bezeichnung $1:q'_m:q''_m: \dots$ anwendet, so verwandelt sich dadurch das obige Schema in:

$$\begin{aligned} \frac{dG_m}{da}, \frac{dG_m}{da'} q'_m, \frac{dG_m}{da''} q''_m, \dots \\ \frac{dG_m}{da} p'_m, \frac{dG_m}{da'} p'_m q'_m, \frac{dG_m}{da''} p''_m q''_m, \dots \\ \frac{dG_m}{da} p''_m, \frac{dG_m}{da'} p''_m q'_m, \frac{dG_m}{da''} p''_m q''_m, \dots \end{aligned}$$

u. s. w.

so dass die Werthe seiner sämtlichen nn Glieder durch die $2n - 1$ Grössen:

$$\frac{dG_m}{da}, p'_m, p''_m, p'''_m, \dots$$

$q'_m, q''_m, q'''_m, \dots$

oder durch

$$\frac{dG_m}{da}, \frac{dG_m}{da'}, \frac{dG_m}{da''}, \frac{dG_m}{da'''}, \dots$$

$$\frac{dG_m}{db}, \frac{dG_m}{dc}, \frac{dG_m}{dd}, \dots$$

gegeben sind.

Die Elemente der Saturnsbewegung um die Sonne, für die Zeit $1800 + t$, nehme ich an:

Mittl. Entf. v. der Sonne $a^0 = 9,54302$	
Excentricität $e^0 = 0,0561505 - t \cdot 0,000002704$	
Mittlere Länge $123^\circ 4' 29,700 + t \cdot 43995,996$	
Länge des Perihels $89 8 20,33 + t \cdot 16,718$	
„ „ aufst. Knotens $111 56 6,73 - t \cdot 9,378$	
Neigung $2 29 58,55 + t \cdot 0,0982$	

Für den mittleren Pariser Mittag des 31. Decembers 1799, von wo an die Zeit t in Julianischen Jahren gezählt wird, stimmen diese Elemente mit den Tafeln des Herrn BOUTARD überein. Die vier letzten derselben beziehen sich auf die feste Ekliptik und den Frühlingsnachtgleichenpunkt für $t = 0$. Die Aenderung der mittleren Länge ist die um $50',231$ verminderte tropische der angeführten Tafeln; die Säcularänderungen der übrigen Elemente habe ich aus der grossen und

$$\left. \begin{aligned} \sin i^0 \cos n^0 = t \{ 0,0982 \cos N + 9,378 \sin I \sin N \} = + t \cdot 0,343 = x^0 \\ \sin i^0 \sin n^0 = t \{ 0,0982 \sin N - 9,378 \sin I \cos N \} = + t \cdot 0,244 = y^0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (64)$$

Von den in den Gleichungen (51) vorkommenden e, c', γ , ist nur e — der Cosinus der Neigung des Saturnsäquators gegen die feste Ebene — mit grösserer Sicherheit bekannt, indem die Messung der Positionswinkel der grossen Axe der Ringellipse die Neigung der Ringebene = $26^\circ 48'$ ergeben hat und Grund der Annahme vorhanden ist, dass die Ringebene und die

verdienstlichen Arbeit entlehnt, welche Herr LEVERRIER in der Conn. des Temps p. 1844 bekannt gemacht hat.

Wählt man die Ebene der Saturnsbahn für $t = 0$ zur festen Ebene, und bestimmen N und I ihre Lage gegen die zu derselben Zeit stattfindende Ebene der Ekliptik, so wie N' und I' die Lage einer andern Ebene, so hat man:

$$\left. \begin{aligned} \cos i &= \sin I \cos I' \cos(N' - N) + \cos I \cos I' \\ \sin i \cos(n - N) &= \cos I \sin I' \cos(N' - N) - \sin I \cos I' \\ \sin i \sin(n - N) &= \sin I' \sin(N' - N) \end{aligned} \right\} (63)$$

Wenn man dieses zur Bestimmung der Lage der beweglichen Saturnsbahn gegen die feste von 1800 anwendet, indem man N' und I' für jene und N und I für diese gelten lässt, und dabei nur die erste Dimension von $I' - I$ und $N' - N$ berücksichtigt, erhält man:

Ebene des Saturnsäquators nicht so weit von einander abweichen, dass der Unterschied wesentlichen Einfluss auf den Werth von e erhalte; c' und γ , die Cosinus der Neigungen der Ebene der Bahn des Satelliten V gegen die feste Ebene und die Ebene des Saturnsäquators, können bis jetzt nur so angenommen werden, wie sie aus der, auf wenig zuverlässigen Grundlagen be-

ruhenden, Bestimmung der Lage der ersten Ebene hervorgehen, welche LALANDE (Astronomie § 3074) mittheilt. Dieser Bestimmung nach ist, für 1800, die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn des Satelliten V auf der Saturnsbahn = 147° 18', die Neigung = 22° 42', und aus ihrer Verbindung mit der Lage der Ebene des Saturnsäquators folgt die gegenseitige Neigung beider Ebenen = 10° 30'. Ich werde daher annehmen:

$$\log. c = 9,95065, \quad \log. c' = 9,96498, \quad \log. \gamma = 9,99267.$$

Die zur Kenntniss der verschiedenen μ erforderlichen p^0, p^1, p^2, \dots nehme ich, unter Voraussetzung des julianischen Jahrs als Zeiteinheit:

$p^0 =$	43995,996;	$\log. =$	4,6434132
$p^1 =$	1105249422		9,0434603
$p^2 =$	1081974855		9,0342172
$p^3 =$	104784696		8,2029799
$p^4 =$	29686505,78		7,4725591
$p^5 =$	5967051		6,7757597

Von diesen Werthen ist p^0 die schon angeführte mittlere siderische Bewegung des Saturn; p^1 und p^2 entsprechen den Herschel'schen Bestimmungen der Umdrehungszeiten des Saturn (10^h 16^m 44^s) und des Ringes (10^h 30^m); p^3, p^4, p^5 sind die mittleren siderischen Bewegungen der Satelliten III, IV, V, von welchen nur die zweite eine neue Bestimmung erfahren hat, die erste und dritte aber noch die Angaben von LALANDE (Astronomie § 3068) sind. Aus diesen drei Satelliten noch andere, in der Untersuchung der gegenseitigen Einflüsse der Körper des Saturnsystems, in-

$$\frac{m}{r} - \frac{m\alpha}{r^3} \cdot \frac{k}{a^3} (\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}) + \frac{m\alpha^2}{r^5} \cdot \frac{k}{a^3} (\frac{3}{5}\mu^4 - \frac{1}{5}\mu^2 + \frac{2}{5}) - \text{etc.}$$

und wendet man den Ausdruck erst auf einen Punkt unter dem Aequator, dann auf einen der Pole des Saturn an, setzt man also erst $r = a, \mu = 0, x = a,$

$$\frac{1}{2}ga + \frac{m}{2a} + \frac{m}{2a} \cdot \frac{k}{a\alpha} + \frac{3m}{8a} \frac{k}{a^3} + \dots = \frac{m}{a} - \frac{m\alpha^2}{b^3} \cdot \frac{k}{a^3} + \frac{m\alpha^2 k}{b^5 a^3} - \dots$$

oder

$$\frac{g\alpha a}{2m} = \frac{\alpha}{b} - 1 - \frac{k}{a^3} \left(\frac{\alpha^2}{b^3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{k}{a^3} \left(\frac{\alpha^2}{b^5} - \frac{1}{2} \right) - \frac{k}{a^3} \left(\frac{\alpha^2}{b^5} + \frac{1}{2} \right) + \text{etc. (65)}$$

Wenn τ die Umdrehungszeit des Saturn, τ' die Umlaufzeit eines seiner Satelliten und a' die mittlere Entfernung desselben bedeuten, so ist das erste — in der Méc. Céleste durch $\frac{1}{2}\varphi$ bezeichnete — Glied dieser Gleichung

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\tau'}{\tau} \right)^2 \left(\frac{a}{a'} \right)^3$$

Diese Gleichung drückt die Relation aus, welche, in Folge der Voraussetzung des Gleichgewichts der Ober-

sofern er die Säcularbewegungen der Ebenen betrifft, zu berücksichtigen, wird sich als unnöthig erweisen.

Von den übrigen, in den Ausdrücken der verschiedenen μ (§ 14) vorkommenden Grössen kann m^0 als bekannt angenommen werden, ich werde $m^0 = 3501,6$ anwenden, welche, $m + m' + m'' + \dots$ als Einheit voraussetzende Bestimmung ich durch Beobachtungen des Satelliten IV erhalten habe. — Die von der Beschaffenheit des Saturnsphäroids abhängigen k und h haben die Ausdrücke (§ 6):

$$k = \frac{f\delta \cdot d \cdot (a^2 \epsilon \epsilon \sqrt{1 - \epsilon \epsilon})}{5f\delta \cdot d \cdot (a^2 \sqrt{1 - \epsilon \epsilon})}, \quad h = \frac{f\delta \cdot d \cdot (a^2 \epsilon \epsilon \sqrt{1 - \epsilon \epsilon})}{f\delta \cdot d \cdot (a^2 \sqrt{1 - \epsilon \epsilon})}$$

Wenn an der Oberfläche des Saturns Gleichgewicht stattfindet, so ist eine Verbindung zwischen ihrer Figur und dem Werthe von k vorhanden, welche ich bei dieser Gelegenheit, auch mit Rücksicht auf Grössen, die LAPLACE in der Méc. Céleste nicht berücksichtigt, entwickeln werde. Wenn nur die Anziehungen der Massentheile des Sphäroids und die aus seiner Axendrehung entstehende Centrifugalkraft in Betracht gezogen, Anziehungen äusserer Körper aber ausser Acht gelassen werden, ist zu diesem Gleichgewichte erforderlich, dass der Ausdruck:

$$V + g \frac{x^2}{2a},$$

in welchem g die Centrifugalkraft unter dem Aequator des Saturn, a seinen Aequatorialradius und x die Entfernung eines Punkts seiner Oberfläche von der Drehungsaxe bedeuten, für alle Punkte der Oberfläche gleichen Werth erhalte. Schreibt man für V seine Entwicklung:

dann $r =$ dem Polarradius $= b, \mu = 1, x = 0,$ so ergibt die Vergleichung beider Anwendungen die Gleichung:

fläche, zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{k}{a^3}, \frac{k}{a^5} \dots$ stattfindet. Wo die Voraussetzung gerechtfertigt ist und nur die erste Potenz der Abplattung berücksichtigt zu werden braucht, gibt sie das Mittel, entweder das Axenverhältniss durch Beobachtung des Einflusses von k auf die Bewegungen des Systems, zu welchem das Sphäroid gehört, oder k durch die Beobachtung des Axenverhältnisses zu bestimmen.

LAPLACE hatte kein Bedenken, die, durch die flüssige Oberfläche der Erde für diese gerechtfertigte Voraussetzung des Gleichgewichts, auch für den Jupiter zu machen, wo sie sich auch, durch Uebereinstimmung der auf sie gegründeten Relation mit dem aus den Bewegungen der Satelliten gefolgerten Werthe von k und dem gemessenen Axenverhältnisse, in so weit bestätigte, als die Beobachtungen zu beurtheilen erlauben. In dem Systeme des Saturn haben die Erlaubungen die von k abhängigen Bewegungen noch nicht kennen gelehrt, also auch noch nicht zur Prüfung der Voraussetzung beigetragen. Ich werde, statt k , das Product seines, unter der Voraussetzung des Gleichgewichts aus dem Axenverhältnisse hervorgehenden

$$\frac{a}{b} - 1 = 0,108706, \quad \frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{2} = 1,862852, \quad \frac{a^3}{b^3} - \frac{1}{2} = 1,300255, \quad \frac{a^4}{b^4} + \frac{1}{3} = 4,246770$$

und damit

$$0,01645 = \frac{k}{a^2} - \frac{k}{a^4} \cdot 0,6980 + \frac{k}{a^6} \cdot 2,2797 - \text{etc. . . .}$$

welcher Gleichung zufolge ich

$$k = aa \cdot 0,01645 x$$

setzen werde.

Die zweite der von der Beschaffenheit des Saturnsphäroids abhängigen Grössen, welche der Ausdruck:

$$h = \frac{\int \delta \cdot d \cdot (a^2 e e \sqrt{1 - e e})}{\int \delta \cdot d \cdot (a^2 \sqrt{1 - e e})}$$

hat (§ 6), ist unter der Voraussetzung dass c von a unabhängig sei, oder dass die Schichten des Saturnkörpers von gleicher Dichtigkeit einander ähnlich seien, das Quadrat der Excentricität seiner Meridiane = ec , der schon angeführten Messung des Verhältnisses $a : b$ zufolge = 0,1865. Um aber mögliche Fehler der Voraussetzung und der Messung nicht ausser Acht zu lassen, werde ich auch hier einen unbestimmten Factor einführen und

$$h = 0,1865 \lambda$$

setzen.

Die von der Vertheilung der Masse des Ringsystems abhängigen k' und a' haben die Ausdrücke (§ 6 und 7):

$$k' = \frac{\int \delta \cdot r^2 \cdot dr'}{\int \delta \cdot r' \cdot dr'} \quad a'^2 = \frac{\int \delta \cdot r' \cdot dr'}{\int \delta \cdot \frac{dr'}{r'}}$$

Wenn δ' beständig, oder die Masse zwischen der inneren und äusseren Grenze des Ringsystems gleichmässig vertheilt ist, und wenn die Halbmesser dieser Grenzen durch R und R' bezeichnet werden, so werden

$$k' = \frac{1}{2} (RR + R'R'), \quad a'^2 = \frac{R R' R + R'^2 R'}{2}$$

Werthes in einen unbestimmten Factor (x) multiplicirt, anwenden; welcher Factor also = 1 ist, wenn auf der Oberfläche des Saturn Gleichgewicht stattfindet und das Verhältniss seiner Axen richtig gemessen worden ist. Nimmt man für a, b, a' die Werthe an, welche meine Messungen der Halbmesser des Saturn und der halben grossen Axe der Bahn des Satelliten IV (für die mittlere Entfernung des Planeten) ergeben haben, nämlich:

$$a = 8,5265, \quad b = 7,6905, \quad b' = 176,552$$

ferner für τ die Herschel'sche Bestimmung = $10^h 16^m 44^s$ und für τ' die meine = 15,04542664 Tage, so erhält man

$$\varphi = 0,156134$$

so dass k' nahe das halbe Quadrat und a'^2 nahe der Cubus des mittleren Ringhalbmessers ist. Dieser mittlere Ringhalbmesser erscheint in der mittleren Entfernung des Planeten, den Messungen der Herren ENCKE und STRUVE zufolge, $16,77$ und $16,69$ gross, während meine, nur R' (nicht R) bestimmenden Messungen, verbunden mit der aus jenen hervorgehenden Ringbreite, $16,73$ ergeben. Die der Herschel'schen Schätzung der Umdrehungszeit der Ringe ($10^h 30^m$) entsprechende, im 14. § durch a' bezeichnete Entfernung ist = $16,0608$; jedenfalls so nahe dem mittleren Ringhalbmesser gleich, dass für jetzt noch kein Grund vorhanden ist, k' und a' für grösser oder für kleiner zu halten als resp. $\frac{1}{2} a' a' \cdot x'$ und a' . Um indessen auch hierüber noch nichts festzusetzen, werde ich unbestimmte Grössen x' und λ' einführen und

$$k' = \frac{1}{2} a' a' \cdot x'; \quad \left(\frac{a'}{a}\right)^3 = x' \lambda'$$

setzen.

Die Werthe der halben grossen Axen der Satellitenbahnen a'', a''', a'''' , habe ich aus der zweiten von ihnen, dem Keplerschen Gesetze gemäss abgeleitet. Ich stelle sämmtliche a hier zusammen:

Saturn	$a = 8,5265$;	$\log. = 0,9307708$
Ring	$a' = 16,0608$	$1,2057672$
Satellit III.	$a'' = 76,1576$	$1,8817134$
„ IV.	$a''' = 176,5520$	$2,2468726$
„ V.	$a'''' = 514,5228$	$2,7114055$

Die aus a'', a''', a'''' hervorgehenden, in den Ausdrücken der Einflüsse der Satelliten aufeinander vorkommenden Grössen habe ich gefunden:

$$\begin{aligned} a'' a'' a'' [2 \cdot 3] &= 0,177405 & a'' a'' a'' [3 \cdot 2] &= 0,411268 \\ a'' a'' a'' [2 \cdot 4] &= 0,005071 & a'' a'' a'' [4 \cdot 2] &= 0,034257 \\ a'' a'' a'' [3 \cdot 4] &= 0,076694 & a'' a'' a'' [4 \cdot 3] &= 0,223510 \end{aligned}$$

Unter den Excentricitäten ist, ausser der schon angeführten der Saturnsbahn $e^0 = 0,0561505$, nur noch die der Bahn des Satelliten IV, $e''' = 0,02922326$ bekannt*). Die ausser diesen noch in den Ausdrücken der verschiedenen μ (§ 14) vorkommenden Excentricitäten müssen, bis zur Erlangung näherer Kenntniss der Bahnen der übrigen Satelliten, vernachlässigt werden.

20.

So wenig genügend zur endlichen Bestimmung der Sicularbewegungen der Ebenen des Saturnsystems

$$\begin{aligned} \mu^0 &= 0',1085 \cdot \lambda \\ \mu_1^0 &= 1,3477 & \mu_1 &= 7524569'' \lambda' \cdot \kappa m \\ \mu_2^0 &= 13,9163 & \mu_2 &= 32409 \cdot \kappa m \\ \mu_3^0 &= 49,2044 & \mu_3 &= 1711 \cdot \kappa m \\ \mu_4^0 &= 244,3776 & \mu_4 &= 40 \cdot \kappa m \\ \mu'' &= 612820'' \lambda \cdot m'' & \mu''' &= 49251'' \lambda \cdot m''' \\ \mu_1'' &= 7610968 \cdot m'' & \mu_1''' &= 611672 \cdot m''' \\ & & \mu_2''' &= 9294666 \cdot m''' \\ \mu_3'' &= 6107163 \cdot m'' & & \\ \mu_4'' &= 102207 \cdot m'' & \mu_4''' &= 666848 \cdot m''' \end{aligned}$$

Daraus folgen die Werthe der Coefficienten der Gleichungen (52), ihren Ausdrücken (51) gemäss:

$$\begin{aligned} a &= \lambda \{ 0,0969 + 58320500 \lambda' \cdot \kappa m'' + 546994 m'' \\ &\quad + 43960 m''' + 1813 m^{IV} \} \\ a' &= - 58320500 \lambda \lambda' \cdot \kappa m'' \\ a'' &= - 546994 \lambda \cdot m'' \\ a''' &= - 43960 \lambda \cdot m''' \\ a^{IV} &= - 1744 \lambda \cdot m^{IV} \\ \alpha &= + 0,0865 \lambda \\ b &= - 6716323 \lambda' \cdot \kappa m \\ b' &= + 1,2030 + 6716323 \lambda' \cdot \kappa m + 6793442 m'' \\ &\quad + 545970 m''' + 22388 m^{IV} \\ b'' &= - 6793442 m'' \\ b''' &= - 545970 m''' \\ b^{IV} &= - 21661 m^{IV} \\ \beta &= + 1,0738 \\ c &= - 28928,1 \kappa m \\ c' &= - 3110729 \kappa m' \\ c'' &= + 12,4124 + 28928,1 \kappa m + 3110729 \kappa m' \\ &\quad + 8296288 m'' + 240977 m''' \\ c''' &= - 8296288 m'' \\ c^{IV} &= - 233155 m^{IV} \\ \gamma &= + 11,0872 \\ \delta &= - 1527,58 \kappa m \end{aligned}$$

die mangelhafte Kenntniss der Elemente ist, welche ich im vorigen § angeführt habe, so besitzen wir doch bis jetzt keine vollkommene, auch ist sie hinreichend, die Nachweisung des Vorhandenseins gewisser Verbindungen zwischen diesen Bewegungen zu begründen, deren Ausmittlung eine der wesentlichsten Aufgaben ist, welche die Theorie des Saturnsystems aufzulösen hat. Ich werde daher nicht unterlassen, die Zahlenwerthe der Coefficienten der Gleichungen (52) den angeführten Elementen gemäss aufzusuchen.

Die Werthe der verschiedenen μ (§ 14) sind:

$$\begin{aligned} \mu' &= 65338820'' \lambda \lambda' \cdot \kappa m' \\ \mu_2' &= 3495158 \cdot \kappa m' \\ \mu_3' &= 184566 \cdot \kappa m' \\ \mu_4' &= 4361 \cdot \kappa m' \\ \mu^{IV} &= 1987'' \lambda \cdot m^{IV} \\ \mu_1^{IV} &= 24681 \cdot m^{IV} \\ \mu_2^{IV} &= 265660 \cdot m^{IV} \\ \mu_3^{IV} &= 1138875 \cdot m^{IV} \\ d' &= - 164741 \kappa m' \\ d'' &= - 5451167 m'' \\ d''' &= + 43,9192 + 1527,58 \kappa m + 164741 \kappa m' \\ &\quad + 5451167 m'' + 1033061 m''' \\ d^{IV} &= - 999530 m^{IV} \\ \delta &= + 39,2016 \\ e &= - 36,68 \kappa m \\ e' &= - 2121 \kappa m' \\ e'' &= - 92711 m'' \\ e''' &= - 604890 m''' \\ e^{IV} &= + 229,2827 + 36,69 \kappa m + 2090 \kappa m' + 91228 m'' \\ &\quad + 595219 m''' \\ \varepsilon &= + 207,9800. \end{aligned}$$

Anmerkung.

Auf der 387. [192.] Seite, bei dem Worte ähnlich (5. [18.] Zeile v. u.) hört das von BESSEL selbst zusammengeheftete Manuscript auf. Seitenschriften und Text laufen auf 2 eingelegten Blättern fort, die er wahrscheinlich noch zu revidiren beabsichtigte. Am Ende hat er mit Bleistift beige geschrieben:

NB. Alle 1 enthaltenen Zahlen sind im Verhältnisse $\frac{12500}{1111}$ zu vergrössern.

NB. Muss sorgfältig nachgerechnet werden, auch die Zahlen auf der vorigen Seite.

Die vorige Seite des Manuscripts, von der BESSEL spricht, fängt im Abdrucke p. 389 [p. 192] mit den Worten: „Ich stelle sämmtliche a hier zusammen“ ad.

Ich glaube das Manuscript ganz so, wie es BESSEL hinterliess, abdrucken lassen zu müssen. SCHUMACHER.

*) Astron. Nachr. Nr. 242 p. 21. [vgl. Abh. 20. p. 149.]

[Literatur der Astr. Nachr. über Saturn und seine Trabanten: Messungen von STRUYE (Bd. 5, 6), J. HERSCHEL (7), BESSEL (8, vgl. Nr. 247 des allg. Verz. und die betr. Abb. unter „Theorie der Instrum.“), HERSHEY (11), LAMONT (12), ENCKE (15), GALLE (27, 32), CHEVALIER (27), SCHMIDT (28), LASSELL (36, 39), JACOB (44), SECCI, KAISER (45). — MÄSSIG nach CLAIRAUT (12), BESSEL, BOUVARD, LAPLACE, NEWTON (19). — Physiische Beobachtungen von STRUYE (5), SCHWARZ (10, 19, 25, 27, 28, 46, 58), OLBERG (11, 12), ENCKE, DE VICO (15), SCHMIDT (29, 32), DAWES (32, 34, 35, 41), HARTNUP (33), SECCI (34, 36, 39, 41), LASSELL (35); Verschwinden (Wiedererscheinen) des Ringes von BESSEL (10 [266 d. a. Verz.], 11 [270 d. a. Verz.]), BIANCHINI, BOGUSLAWSKI, MÄDLER, PETERSEN, SCHWARZ, VALE (11), BUSCH (28), SECCI (56), AUWERS, SCHMIDT, SCHWARZ (58). — Beobachtungen der Trabanten von STRUYE (5), DE VICO (15),

LASSELL (27, 28, 32, 35, 36), W. C. BOND (28, 31), DAWES (41), SECCI (44). — Bahnen (Tafeln, Ephemeriden) der Trabanten von BEER und MÄDLER (13), LAMONT (14), JACOB (54, vgl. Phil. Transact. Vol. 149. London 1860), SCHMIDT (57), MARTI (84). — Verschiedenes: STRUYE, Ringneigung (5); HERSCHEL, Benennung der Trabanten (27, 28); JACOBI, Berechnung der grossen Ungleichheit (28); KIRKWOOD, Durchmesser der Anziehungssphäre des S. (30); SCHWIEGER, über die Umlaufzeiten der Trab. (35); SECCI, über die Farben des S. (41); DAWES, Helligkeit zweier Trabanten (41); MARTI, Untersuchungen über Satelliten (44); SECCI, KAISER, über Periodicität in den Ringdimensionen (45), LERMAN, über Beobachtungen zur Zeit der Quadraturen und Bahnelemente der grossen Planeten (55); D'ARREST, Verhältnisse der Umlaufzeiten der 4 innern Trab. (57); LERMAN, Sicularstörungen (60).]

23. Ueber den gegenwärtigen Zustand unserer Kenntniss der Sonnenbewegung und die Mittel zu ihrer Verbesserung.*)

(Astr. Nachr. 6. p. 261.)

1.

Die Bewegung der Erde um die Sonne verdient der Gegenstand der angestrengtesten Bemühungen der Astronomen zu sein. Sie ist die einfachste Bewegung, welche wir beobachten können und es ist bei ihr, mehr als bei der Bewegung eines andern Planeten, die Hoffnung vorhanden, entweder die Kenntniss ihrer Elemente in sehr enge Grenzen einzuschliessen, oder wenigstens die Ueberzeugung zu erwerben, dass die Abweichungen der Rechnung von den Beobachtungen nicht durch Verbesserungen der Elemente erklärt werden können. Dieser letztere Fall kann zwar, wenn die oft gemachte Behauptung, dass unsere Kenntniss der Anziehungen im Sonnensysteme alle Bewegungen vollständig erkläre, wahr ist, nicht eintreten; allein diese Behauptung ist keineswegs so erwiesen, wie man sie erwiesen zu sehen wünschen muss; auch gehört sie zu denen, die, indem sie sich auf Beobachtungen stützen, immer neue Beweise erfordern, sobald die Beobachtungen neue Vervollkommnungen erlangen. Von diesem Gesichtspunkte angesehen, scheint mir die sorgfältigste Untersuchung der Sonnentheorie, ausser dem Interesse, welches die Erforschung der Bewegung jedes Himmels-

körpers hat, noch das allgemeinere, unsere bisherige Ansicht des Sonnensystems entweder zu bestätigen oder ihre Unzulänglichkeit zu zeigen, am leichtesten befriedigen zu können. Hierzu kommt noch der Einfluss der Sonnentheorie auf die geocentrischen Oerter der Planeten und Cometen, und daher auf die Berechnung der Bahnen derselben; endlich die Beobachtung der Sonne zur Bestimmung der Länge auf dem Meere.

Dieses vielseitige Interesse einer gründlichen Untersuchung der Sonnentheorie hat schon vor zwanzig Jahren den Wunsch in mir erzeugt, sie dereinst ausführen zu können. Allein die damals vorhandenen Data schienen nicht hinreichend zu sein, den Erfolg sicher herbeizuführen; es fand sich im Gegentheil, bei genauerer Prüfung der anzuwendenden Mittel, dass viele und weitläufige Vorarbeiten gemacht werden mussten, ehe man zu der Untersuchung selbst gelangen konnte. Ich glaube dass Jeder, der den Gang meiner astronomischen Beschäftigungen seiner Aufmerksamkeit würdigt, finden wird, dass derselbe gerade der war, der eingeschlagen werden musste, wenn man zu einer nicht nur neuen, sondern wirklich verbesserten Sonnentheorie gelangen wollte. Ich habe die mir zu Gebote stehende Zeit und Hilfsmittel meistens verwandt, um die Grundlagen der astronomischen Beobachtungen für zwei Epochen, die von BRADLEY und die jetzige, festzusetzen und die übrigen Reductionselemente neu, und so viel mir möglich war, sicher zu bestimmen. Ferner habe ich seit Errichtung der Königsberger Sternwarte die

*) [225 d. a. Verz. — Vgl. Einleitung zu den Fundam. und Tabl. Regiomont. — Beobachtungen von Solstitien s. 95, 101, 105, 111, 112, 117, 126, 134, 135; Vergleichung mit den Sonnentafeln s. 240, 242, 258, 286; Reductionselemente u. a. s. 136, 165, 170, 197, 200, 211, 346 d. a. Verz. — Br. m. O. II. 321, 326 (O), 330, 332.]

Sonne so fleissig beobachtet, als es die Umstände erlauben, so dass jetzt eine 14 Jahre umfassende Reihe von Sonnenbeobachtungen vorhanden ist, deren Reduction allein auf den Elementen beruht, welche die Beobachtungen auf denselben Sternwarte ergeben haben. Diese Reihe enthält fünfjährige Beobachtungen mit dem Kreise von CARY und mit dem Mittagsfernrohr von DOLLOND, und achtjährige mit dem Meridiankreise von REICHENBACH und ERTEL; das Jahr 1811, welches beide von einander trennt, ist grösstentheils ungenutzt geblieben, indem in demselben die Vorbereitungen zur Aufstellung des neuen Instruments die Beobachtungen unterbrachen. Diese neue Beobachtungsreihe schien mir nicht nur als eine Vermehrung der vorhandenen Greenwicher Beobachtungen wünschenswerth, sondern sogar nothwendig zu sein, indem ich glaube, dass die früheren Beobachter die Vorsicht nicht angewandt haben, die Instrumente während der Beobachtung vor den Sonnenstrahlen vollständig zu schützen. Wie gross die Fehler sind, die hieraus entstehen können, habe ich in der V. Abtheilung meiner Beobachtungen durch darüber angestellte Versuche mit dem Dollond'schen Mittagsfernrohre, welche einen Einfluss der Erwärmung auf die Rectascensionen der Sonne von $10''$ ergaben, gezeigt; es ist nicht nothwendig, dass dieser Einfluss bei allen Einrichtungen der Sternwarten und bei allen Instrumenten diese Grösse erlange, aber die Sicherheit der Beobachtungen geht dadurch gänzlich verloren. Später sind andere Sternwarten dem Beispiele der Königsberger hierin gefolgt, so dass in der Folge kein Mangel an zuverlässigen Sonnenbeobachtungen sein wird.

2.

Gegenwärtig glaube ich im Besitze aller Vorarbeiten zu sein, welche der Untersuchung der Sonnenbewegung vorangehen mussten. Ich habe daher seit mehreren Jahren diese Untersuchung wirklich angefangen und bin auch zu einigen Resultaten gelangt. Doch habe ich der Arbeit bis jetzt noch nicht die Ausdehnung geben können, welche sie haben muss, wenn ihr Resultat alles leisten soll, was man von einer nach der Beendigung der nothwendigen Vorarbeiten zu entwerfenden Sonnen-theorie zu erwarten berechtigt ist. Die Ursachen, welche die Vollendung der Arbeit verhindert haben, liegen zum Theil in den Beschäftigungen, welche die Sternwarten ihren Vorstehern geben, und welche in Königsberg durch Untersuchungen vermehrt worden sind, von welchen man schon an ihrem Anfange übersehen konnte, dass sie sehr zeitraubend werden, und also die Aufopferung anderer Arbeiten kosten würden. Dieses sind

hauptsächlich die allgemeine Beobachtung des Himmels und eine Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels; Unternehmungen, deren erste mir zu wichtig erscheint, um nicht jedes Opfer zu rechtfertigen, und deren andere noch weit mehr Zeit gekostet hat, als ich Anfangs erwartete. Unterbrechungen dieser Art meiner, durch Verhältnisse zur Universität ohnehin sehr beengten Zeit sind aber noch vorhanden, und namentlich in den nächsten Jahren werden dieselben so häufig sein, dass ich keine Möglichkeit sehe, die Untersuchung der Sonnenbewegung so früh zu beendigen, als das Bedürfniss, die jetzt sehr gross gewordenen Fehler der Tafeln von DELAMBRE und VON ZACH wenigstens vorläufig zu verbessern, erheischt.

Ich habe daher, um den Fortschritt einer so wesentlichen Grundlage unserer Kenntnisse des Sonnensystems so sehr zu befördern, als es jetzt in meinen Kräften steht, für das Beste gehalten, sowohl das Resultat meiner vorläufigen Untersuchungen, als auch meine Ansicht von der Art, wie die Arbeit in ihrer ganzen Ausdehnung geführt werden muss, mitzutheilen, damit Andere das was sie für gut finden, davon benutzen können.

3.

Die Lage des grössten Kreises, in welchem die Sonne sich bewegt, gegen den, auf welchen die astronomischen Beobachtungen sich beziehen — der Ekliptik gegen den Aequator — kann von den übrigen Elementen der Sonnenbewegung getrennt bestimmt werden.

Aus der in Nr. 92 der Astr. Nachr. mitgetheilten Berichtigung, welche die in den Fundamentis Astr. pro a. 1755 gegebene Bestimmung der Präcession durch die Königsberger Fundamental-Cataloge erhält*), folgt, dass der Durchschnittspunkt der mittleren Ebene des Aequators und der Ekliptik zur Zeit $1750 + t$ von dem Aequinoctialpunkte von 1750

$$t \cdot 50,21129 + tt \cdot 0,0001221483$$

entfernt ist. Setzt man den Anfang der Zeit t aber auf den Anfang des Jahres 1800, so erhält man die Entfernung des Aequinoctialpunktes von $1800 + t$ von dem von 1800

$$= t \cdot 50,22350 + tt \cdot 0,0001221805,$$

wo der Coefficient des zweiten Gliedes diejenige kleine Abänderung erhalten hat, welche die in die höheren Potenzen der Zeit multiplicirten Glieder der von Herrn

*) [Vgl. a. „Sphärische Astronomie“, Abb. De media Aequinoct. Praecessione.]

CARLINI vollständiger entwickelten Laplace'schen Formel ihm geben. Der Durchschnittspunkt der wahren

$$- 16,78332 \sin \Omega + 0,20209 \sin 2\Omega$$

entfernt. In diesen Formeln ist die Einheit von $t = 365,25$ Tagen; die Zeichen Ω , \odot , \mathcal{C} bedürfen keiner Erklärung.

Die Neigung beider grössten Kreise gegen einander, oder die Schiefe der Ekliptik, habe ich in den Fund. Astr. für 1755 = $23^\circ 28' 15,44$ gefunden. Zu den sichersten Bestimmungen für die gegenwärtige Zeit scheinen mir die zu gehören, welche bei Gelegenheit der Berechnung der beiden Königsberger Cataloge der Fundamentalsterne, nicht aus den Solstitien allein, sondern aus meinen sämtlichen Beobachtungen, welche dem ersten Cataloge (1815) zum Grunde liegen, ergaben für 1815 $23^\circ 27' 47,42$; die mit dem Meridiankreise bis zum 24. October 1824 gemachten, worauf der zweite Catalog beruht, ergaben für die Epoche dieses Catalogs (1825) = $23^\circ 27' 43,78$. Die letzte Bestimmung verdient indessen den Vorzug, sowohl weil das dabei angewandte Instrument genauer ist, als auch hauptsächlich, weil die Strahlenbrechung, welche zu ihrer Berechnung gebraucht wurde, die aus den Königs-

$$23^\circ 27' 54,8 - t \cdot 0,457 + 8,97707 \cos \Omega - 0,08773 \cos 2\Omega + 0,57990 \cos 2\odot + 0,08738 \cos 2\mathcal{C}.$$

4.

Die elliptischen Elemente der Sonnenbahn habe ich gefunden:

Epoche 1800, Pariser Meridian . . . $279^\circ 54' 1,36$
 Siderische Bewegung in 365,25 Tagen $360^\circ - 22,617656$
 Länge des Perigeums 1800 $279^\circ 30' 8,39$
 Excentricität 1800 $0,0167922585$

Diese Elemente beruhen auf meinen Sonnenbeobachtungen von 1820 bis 1825 incl. und auf denen von BRADLEY von 1753 und 1754. Sie sind durch Vergleichung dieser Beobachtungen mit den Carlini'schen Tafeln gefunden, bei welchen ich jedoch diejenigen Werthe der Massen der Venus und des Mars, welche BURCKHARDT in der *Connaissance des Temps pour 1816* gegeben hat, substituirt und das Maximum der Mondstörung = $6,0$ setzte, sehr nahe mit derjenigen Mondmasse übereinstimmend, welche sich aus der von LINDENAU'Schen Bestimmung der Nutation ergibt. Die Lage des Aequators und der Ekliptik wurde dem vorigen Artikel zufolge angenommen.

Hieraus ergibt sich die mittlere Länge der Sonne für $1800 + t$, wenn man die Präcession hinzufügt:
 $= 279^\circ 54' 1,36 + t[360^\circ 0' 27,605844] + t \cdot 0,0001221805$;
 es ist dieses die scheinbare mittlere Länge, also wegen

Ebene des Aequators aber ist von dem der mittleren nach Nr. 83 der Astr. Nachr.*)

$$- 1,33589 \sin 2\odot - 0,20128 \sin 2\mathcal{C}$$

berger Beobachtungen selbst bestimmte ist, während die erstere die etwas kleinere, aus BRADLEY'S Beobachtungen gefolgerte Strahlenbrechung voraussetzt und daher etwas zu klein sein muss. Aber der Unterschied beider von der in den Fund. Astr. p. 61 angenommenen Formel für $1800 + t$

$$23^\circ 27' 54,80 - t \cdot 0,457$$

ist so gering, dass die Richtigkeit, weder der Formel noch der Beobachtungen, innerhalb seiner Grenze verbürgt werden kann. Ich glaube daher an dieser Formel nichts ändern zu dürfen, zumal da die aus den Beobachtungen abgeleitete jährliche Abnahme der Schiefe, welche sie enthält, genau mit derjenigen übereinstimmt, welche Herr POISSON in seiner höchst vortrefflichen, am 30. April 1827 der Pariser Akademie vorgelesenen Abhandlung aus der Theorie erhalt.

Die wahre Ebene des Aequators hat unter Annahme dieser Formel gegen die Ekliptik die Neigung (Astr. Nachr. Nr. 83)

der Aberration $20,25$ kleiner als die wahre; dasselbe ist bei der Länge des Perigeums der Fall.

Die Säcularänderungen der Länge des Perigeums und der Excentricität habe ich so angenommen, wie Herr Prof. NICOLAI sie nach der Gauss'schen Methode im astronomischen Jahrbuche für 1820 berechnet hat. Allein ich habe die Massen der Venus und des Mars, welche dieser Rechnung zum Grunde liegen, nach BURCKHARDT verändert, nämlich

$$\text{Venus} = \frac{1,0743 \times 0,8875}{383137} = \frac{1}{401847}$$

$$\text{Mars} = \frac{0,725 \times 0,95}{1846082} = \frac{1}{2680337}$$

woraus die Veränderungen für beide Planeten
 $- 0,046559$ und $- 0,31125$

entstehen. Die hierdurch veränderten Werthe der Differentialquotienten der Länge des Perigeums und der Excentricität für 1800 sind

$$\text{Perigeum} \dots + 11,72936$$

$$\text{Excentricität} \dots - 0,08992 = - 0,0000004359$$

Da die Rechnung des Herrn NICOLAI aber nur für 1800 und nicht für eine zweite Epoche geführt ist, so ersieht

*) [Vgl. Fundam. p. 128; Zeitschr. f. Astr. VI. p. 218; Tab. Regiom. p. XV.]

man daraus nicht die Veränderungen, welche die Sicularstörungen mit der Zeit erhalten; diese wurden nach den Laplace'schen Formeln, oder vielmehr nach der von Herrn CARLINI gegebenen Entwicklung derselben, angenommen, und demzufolge die vom Aequinoctialpunkte von 1800 an gerechnete Länge des Perigeums = $279^{\circ} 30' 8'' 39 + t \cdot 11'' 2936 + t t \cdot 0'' 0000816482$; die auf den jedesmaligen Aequinoctialpunkt bezogene = $279^{\circ} 30' 8'' 39 + t \cdot 61'' 5171 + t t \cdot 0'' 0002037965$; die Excentricität = $0,0167922585 - t \cdot 0,0000004359$

gesetzt.
Diese Elemente sind von denen der Herren DE-
= $365^d 5^h 48^m 47,8091 - t \cdot 0'' 00595$

Die letztere ist also wieder auf den Werth zurückgekommen, welchen ihr LACAILLE und die frühern Tafeln von DELAMBRE und VON ZACH anwiesen.

5.

Die Veränderungen, welche man den Carlini'schen Tafeln anbringen muss, um sie mit diesen Elementen übereinstimmend zu machen, sind für

Mittlere Länge . . . $\Delta m = + 2'',65 + t \cdot 0'',144477$
Länge des Perigeums $\Delta P = + 64,99 - t \cdot 0,41015$
Excentricität $\Delta e = - 0,0000024625 - t \cdot 0,00000001786$

Setzt man die hieraus entstehenden Veränderungen der wahren Sonnenlänge

$$= \alpha + \beta \cos \odot + \gamma \sin \odot + \delta \cos 2 \odot + \varepsilon \sin 2 \odot$$

und des Logarithmen des Radiusvectors

$$= \mu [\alpha' + \beta' \cos \odot + \gamma' \sin \odot + \delta' \cos 2 \odot + \varepsilon' \sin 2 \odot]$$

so hat man

$$\alpha = \Delta P + (\Delta m - \Delta P) \frac{1 + \frac{1}{2} e e}{V(1 - e e)^3}$$

$$\beta = (\Delta m - \Delta P) \frac{2 e \cos P}{V(1 - e e)^3} - \frac{2 \varrho \Delta e}{1 - e e} \sin P$$

$$\gamma = (\Delta m - \Delta P) \frac{2 e \sin P}{V(1 - e e)^3} + \frac{2 \varrho \Delta e}{1 - e e} \cos P$$

$$\delta = (\Delta m - \Delta P) \frac{e e \cos 2 P}{2 V(1 - e e)^3} - \frac{2 \varrho \Delta e}{1 - e e} \sin 2 P$$

$$\varepsilon = (\Delta m - \Delta P) \frac{e e \sin 2 P}{2 V(1 - e e)^3} + \frac{2 \varrho \Delta e}{1 - e e} \cos 2 P$$

$$+ 2'',6148 - 1'',3330 \cos \odot + 1'',8963 \sin \odot + 0'',0070 \cos 2 \odot + 0'',0068 \sin 2 \odot$$

$$+ t[0'',14479 - 0'',00475 \cos \odot - 0'',02005 \sin \odot - 0'',00009 \cos 2 \odot + 0'',00001 \sin 2 \odot]$$

und dasselbe für den Logarithmen des Radiusvectors:

$$+ 0,090 - 19,964 \cos \odot - 14,033 \sin \odot - 0,143 \cos 2 \odot + 0,146 \sin 2 \odot$$

$$+ t[0,0006 + 0,2111 \cos \odot - 0,0501 \sin \odot - 0,0002 \cos 2 \odot - 0,0019 \sin 2 \odot]$$

LAMBRE und VON ZACH, welche bekanntlich sehr nahe zusammenstimmen, auffallend verschieden; sie fügen den Bestimmungen dieser Astronomen folgendes hinzu:

Mittlere Länge . . . { DELAMBRE + $2'',65 + t \cdot 0'',1445$
VON ZACH + $2,02 + t \cdot 0,1258$

Perigeum { DELAMBRE + $64,99 - t \cdot 0,4102$
VON ZACH + $67,04 - t \cdot 0,5013$

Grösste Mittelpunkts- { DELAMBRE - $1,02 - t \cdot 0,0074$
gleichung { VON ZACH - $0,51 + t \cdot 0,0082$

Die mittlere Bewegung ergibt die Länge des siderischen Jahres

$$= 365^d 6^h 9^m 10,7496 = 365^d 256374417;$$

des tropischen zwischen 1800 + t und 1800 + t + 1

$$= 365^d 242220013 - t \cdot 0,00000006886$$

$$\alpha' = - \frac{e \Delta e}{2(1 - e e)}$$

$$\beta' = - \frac{\gamma}{2 \varrho}$$

$$\gamma' = \frac{\beta}{2 \varrho}$$

$$\delta' = - \frac{\varepsilon}{\varrho}$$

$$\varepsilon' = \frac{\delta}{e}$$

wobei μ den Modul der Tafeln und ϱ den Halbmesser des Kreises, in Secunden ausgedrückt, bezeichnen.

Substituirt man die Werthe der Veränderungen der Elemente für $t = -50$ und $t = +50$ in diese Formeln, so erhält man

	1750	1850
α	- 4'',6248	+ 9'',8543
β	- 1,0953	- 1,5707
γ	+ 2,8968	+ 0,8988
δ	+ 0,0114	+ 0,0025
ε	+ 0,0064	+ 0,0072
$\mu \alpha'$	+ 0,057	+ 0,122
$\mu \beta'$	- 30,517	- 9,410
$\mu \gamma'$	- 11,530	- 16,536
$\mu \delta'$	- 0,134	- 0,151
$\mu \varepsilon'$	+ 0,239	+ 0,053

wobei die Einheit von $\mu \alpha'$, $\mu \beta'$ etc. die 7. Decimale ist. Hieraus folgt das, was dem aus den Tafeln berechneten Sonnenorte wegen der Veränderung der elliptischen Elemente hinzuzufügen ist:

6.

Die Veränderung der Massen erfordert eine zweite Abänderung der CARLINI'schen Tafeln. Wenn man die aus den Tafeln V und VI, IX und XI genommenen Zahlen durch (V et VI), (IX), (XI) bezeichnet, so sind die Störungen der Sonnenlänge, insofern sie durch den Mond, durch Venus und durch Mars erzeugt werden, nach CARLINI

$$\begin{aligned} &= (V + VI) - 8'',0 \\ &\quad + (IX) - 13,5 \\ &\quad + (XI) - 5,6 \end{aligned}$$

Verändert man die Massen dieser drei Körper in den Verhältnissen resp. 1 : 0,8, 1 : 0,8875, 1 : 0,95, so wird die Summe der eben angegebenen Störungen in

$$\begin{aligned} &0,8(V + VI) - 8'',0 + 1'',60 \\ &+ 0,8875(IX) - 13,5 + 1,52 \\ &+ 0,95(XI) - 5,6 + 0,28 \end{aligned}$$

verändert, oder man hat die aus den Tafeln V et VI, IX und XI genommenen Zahlen mit den angegebenen Factoren zu multipliciren und der Sonnenlänge die Constante + 3'',4 hinzuzufügen. Ebenso hat man für den Logarithmus des Radiusvectors

$$0,8(XIV) + 0,8875(XV) + 0,95(XVII)$$

zu nehmen und + 49,67 hinzuzufügen. Die Breite der Sonne wird

$$0,8(XXV) + 0,8875(XXVI) + (XXVII).$$

Endlich sind statt der Nutation in Länge und statt der Schiefe der Ekliptik, welche CARLINI's Tafeln enthalten, die aus den im 3. Art. gegebenen Ausdrücken hervorgehenden zu nehmen. Da CARLINI die Solar-nutation der Länge = $-1'',12 \sin 2\odot$ gesetzt und seiner Tafel III einverleibt hat, so ist der Länge aus dieser Ursache noch $-0'',21589 \sin 2\odot$ hinzuzufügen, oder der im 5. Art. gegebene Coefficient von $\sin 2\odot$ um so viel zu verändern.

Man könnte auch die kleinen von der doppelten Mondlänge abhängigen Glieder der Nutation mit in CARLINI's Tafel V bringen, ohne dass ihr Gebrauch dadurch mühsamer würde; allein es ist genauer sie wegzulassen, wenn man sie nicht auch in den Tafeln

$$\begin{aligned} &+ 6'',0148 - 1'',3330 \cos \odot + 1'',8963 \sin \odot + 0'',0070 \cos 2\odot - 0'',2091 \sin 2\odot \\ &+ t\{0'',14479 - 0'',00475 \cos \odot - 0'',02005 \sin \odot - 0'',00009 \cos 2\odot + 0'',00001 \sin 2\odot\}. \end{aligned}$$

für den Logarithmus des Radiusvectors

$$\begin{aligned} &+ 49,76 - 19,964 \cos \odot - 14,033 \sin \odot - 0,143 \cos 2\odot + 0,146 \sin 2\odot \\ &+ t\{+ 0,2111 \cos \odot - 0,0501 \sin \odot\} \end{aligned}$$

hinzu. Diese Correctionen sind in meiner Tafel IV enthalten, nämlich die Zahlen a, b, a', b' , so dass

für die Fundamentalsterne aufnehmen will. Aber hier kann die wegen der Kürze ihrer Periode ganz unwesentliche Berücksichtigung dieser Glieder der Leichtigkeit der Rechnung aufgeopfert werden. — Hier mag noch die Erinnerung ihren Platz finden, dass man, bei der Anwendung aller Tafeln für die Bewegung der Himmelskörper, die in ihnen gewöhnlich enthaltene Nutations-tafel für die Länge, wenn sie nicht etwa nach der Formel im 3. Art. construiert ist, stets unangewandt lassen und dagegen dieselbe Nutation anwenden muss, welche der Berechnung der Tafeln für die Fundamentalsterne zum Grunde liegt; in den Schumacher'schen Ephemeriden ist dieses bekanntlich die oben angegebene.

7.

Nach dem Vorhergehenden erhält man den meinen Elementen entsprechenden Ort der Sonne, wenn man bei der Berechnung aus CARLINI's Tafeln folgende Aenderungen anbringt:

1. Man substituirt statt der Nutation (Tafel VII CARLINI) die aus meiner Formel hervorgehende in der diesem Aufsatz beigelegten Tafel (Taf. II BESSEL) enthaltene.
2. Man multiplicirt die Störung durch den Mond für Länge Taf. V + Taf. VI für Breite Taf. XXV für log. Radiusvector . . Taf. XIV mit 0,8 oder zieht $\frac{1}{2}$ der aus diesen Tafeln genommenen Zahlen ab. Die durch Venus erzeugte für Länge Taf. IX für Breite Taf. XXVI für log. Radiusvector . . Taf. XV mit 0,8875, oder zieht $\frac{1}{2}$ und noch ein $\frac{1}{4}$ dieses Zehntels ab. Die durch Mars hervorgebrachte für Länge Taf. XI für log. Radiusvector . . Taf. XVII mit 0,95 oder zieht $\frac{1}{2}$ ab.
3. Dem auf diese Weise gefundenen Orte fügt man für die Länge

die Verbesserung der Länge = $a + bt$, des log. Radiusvector = $a' + b't$ ist. Da t die vom An-

fange von 1800 an gerechnete Zeit, also im Allgemeinen eine ganze Zahl und ein Bruch ist, der letztere aber von der Sonnenlänge selbst abhängt, so kann der aus ihm entstehende Theil der Verbesserung mit dem ersten Gliede (a und a') vereinigt werden. Dieses ist in der Tafel geschehen, weshalb man b und b' nur mit der Jahreszahl, von 1800 an gerechnet, zu multipliciren hat.

Die Anbringung dieser Verbesserungen wird die Mühe der Berechnung der Sonnenörter aus CARLINI'S Tafeln nur unbedeutend vermehren, wenn man diesen eine Copie der Verbesserungstafeln beilegt, so dass man ganz neue Tafeln füglich entbehren kann.

Die bequemste Art die Carlini'schen Tafeln anzuwenden ist bekanntlich, dass man die Störungstafeln nur einfach, allein in Beziehung auf E, F , etc. interpolirt, und die auf diese Art erhaltenen Störungen aller Planeten, die Säcularungleichheit, die Nutation und den zweiten Theil der Mondstörung, für die runden Zahlen von Tagen 0, 10, 20 . . . in eine Columne von Sum-

$$= 279^{\circ} 54' 17,36 + t \cdot 27,605844 + tt \cdot 0,0001221805 - (t - 4M)$$

wo M die zwischen dem Ende des Jahres, für welches gerechnet werden soll, und 1800 befindlichen Schalttage bezeichnet. Wenn die Jahreszahl, durch 4 dividirt, den Rest r übrig lässt, so hat man für Jahre im 18. Jahrhundert

$$(t - 4M) = -4 + r, \\ = 279^{\circ} 54' 17,36 + t \cdot 27,605844 + tt \cdot 0,0001221805 - f(14' 47,083) + g(59' 8,3302)$$

oder

$$= 280^{\circ} + g(59' 8,3302) - 5' 58,64 + t \cdot 27,605844 + tt \cdot 0,0001221805 - f(14' 47,083).$$

Berechnet man daher eine Tafel für die mittlere Länge nach der Formel

$$280^{\circ} + g(59' 8,3302) \\ K = \frac{24 \text{ St.}}{59' 8,3302} [-5' 58,64 + t \cdot 27,605844 + tt \cdot 0,0001221805 - f(14' 47,083)] \\ = -2^{\circ} 25' 32,698 + t(11^{\circ} 12,18798) + tt \cdot 0,002975 - f \cdot 6^{\circ}$$

ist. Für die mittlere Zeit T eines Ortes, dessen östlicher Mittagsunterschied von Paris $= d$ ist, ist daher das Argument

$$= K + T - d.$$

Da es bequemer und genauer ist, neue Tafeln für die mittlere Rectascension der Sonne anzuwenden, als den Carlini'schen die den neuen Elementen zufolge nöthigen Verbesserungen anzubringen, so theile ich diese neuen Tafeln hier mit. Taf. I enthält das hier durch K bezeichnete Argument in Stunden, Minuten etc. ausgedrückt; Taf. II die Lunarnutation, durch Division mit 15 in Zeit verwandelt; Taf. V enthält

$$18^{\circ} 40'' + g(3^{\circ} 56;55347) - 0,081695 \sin 2\odot.$$

men vereinigt, welche man dann durch eine zweite Interpolation auf die einzelnen Tage bringt. Bei dieser Anordnung der Rechnung wird die Veränderung der Störungen durch die angegebenen Factoren nur eine unerhebliche Vermehrung der Rechnung verursachen.

8.

Ich muss nun noch die Vorschrift zur Erfindung der mittleren Rectascension der Sonne, welche wegen der Zeitverwandlungen von häufigem Gebrauche ist, geben. Sie ist die mittlere Länge der Sonne, auf dem Aequator und zwar von dem Punkte desselben an gerechnet, in welchem er die Ekliptik durchschneidet; also, wenn die mittlere Länge durch m bezeichnet und der von $2\odot$ abhängige Theil der Nutation vernachlässigt wird,

$$= m - 15,39537 \sin \odot + 0,18538 \sin 2\odot - 1,22542 \sin 2\odot.$$

Für den Anfang des Jahres 1800 + t ist, nach dem im 4. Art. angeführten Elementen, die Epoche

$$= 0,0001221805 - (t - 4M) 14' 47,083$$

im 19. Jahrhundert

$$(t - 4M) = r,$$

welche Werthe von $(t - 4M)$ ich allgemein durch f bezeichnen werde. Für den g^{ten} Tag des Jahres ist dann die mittlere Länge

$$= 280^{\circ} + g(59' 8,3302) - 5' 58,64 + t \cdot 27,605844 + tt \cdot 0,0001221805 - f(14' 47,083)$$

so muss man, wenn man aus ihr die mittlere Länge für den mittleren Pariser Mittag nehmen will, das Argument $g + K$ anwenden, wo

Diese letzte hat Herr ANGER, in den Tausendtheilen der Secunden zuverlässig, berechnet. Endlich gibt Taf. VI die dem Werthe von $K + T - d$ zukommende Veränderung der für jeden einzelnen Tag des Jahres in Taf. V enthaltenen Zahl. Diese bleibt für jeden bestimmten Werth von T während eines ganzen Jahres unverändert, so dass man bei der Berechnung der Ephemeriden den Zahlen der Taf. V nur die Lunarnutation (Taf. II) und diese constante Veränderung hinzuzufügen hat. Für das gegenwärtige Jahr 1828 und den Meridian der Schumacher'schen Ephemeriden, oder $d = 30^{\circ} 26'$, hat man z. B.

$$K - d = + 2^{\circ} 18' 49; \quad D = 2800,$$

also die wegen $K - d$ hinzuzufügende Veränderung der Taf. V = + 22;684, und wegen der Lunarnutation für die Tage 0, 100, 200, 300, 400, noch + 0;552, + 0;467, + 0;378, + 0;287, + 0;192. Die Summe beider ist

$$\begin{aligned} 0 &= + 23;236 \\ 100 &= + 23,151 \\ 200 &= + 23,062 \\ 300 &= + 22,971 \\ 400 &= + 22,876 \end{aligned}$$

also für den heutigen Tag, den 12. März, oder den 71. Tag des Jahres = + 23;176. Dieses, zur Taf. V hinzugefügt, gibt die mittlere Rectascension der Sonne für den heutigen Altonaer Mittag

$$= 23^{\circ} 20' 18''.629.$$

9.

[Vergleichung der Königsberger Sonnenbeobachtungen von 1820—1825 und von 1827 mit den Tafeln von CARLINI und BESSEL.]

10.

Obleich die Elemente, nach dem Zeugnisse der angeführten Vergleichen, den gegenwärtigen Beobachtungen der Sonne angemessen sind, und auch die mittlere Bewegung mir nahe richtig zu sein scheint, so betrachte ich sie doch nur als die erste Annäherung an diejenige Sonnentheorie, welche ich zu entwerfen wünschte, woran ich aber durch die im 2. Art. angeführten Ursachen für jetzt verhindert werde. Ich theile den Weg mit, der meiner Meinung nach eingeschlagen werden muss, wenn man etwas Genügenderes leisten will.

Den Anfang der Untersuchung sollte eine neue und strenge Berechnung der Störungen machen, nach einer Methode geföhrt, welche selbst in den kleineren Theilen der Secunden die Richtigkeit der Coefficienten verbürgt. Eine Rechnung dieser Art, welche aber nur die Säcularänderungen für 1800 angibt, hat Herr Prof. NICOLAI nach der Gaussischen, leider noch nicht zur allgemeinen Benutzung gelangten Methode geföhrt (s. Astr. Jahrb. 1820). Es ist wünschenswerth, dass eine ähnliche Arbeit auch für die periodischen Störungen gemacht und für eine 100 Jahre entfernte Epoche wiederholt werde, damit auch die Aenderungen der Säcularstörungen mit derselben Schärfe bekannt werden, wie ihr Werth für 1800. — Man würde diese scharfe Entwicklung der Störungen schon durch Verfolgung des Weges, welchen GAUSS in seiner eine neue Bahn brechenden Abhandlung (*Determinatio attractionis etc.*, Göttingae 1818) betreten hat, erlangen können; es ist aber nicht zu bezweifeln, dass GAUSS selbst der Störungstheorie,

bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Bewegung der Pallas, eine sehr hohe Ausbildung gegeben hat.

Nach diesen schärferen Formeln sollten neue Störungstafeln berechnet und dabei die Massen des Mondes, der Venus und des Mars vorläufig so angenommen werden, wie sie wahrscheinlich der Wahrheit sehr nahe kommen; nämlich die erstere, nach Herrn von LINDENAT'S Bestimmung der Constante der Nutation = $\frac{1}{87,73}$ der Erdmasse, die beiden anderen nach BURCKHARDT (Art. 4). Ich habe diese Massen, durch eigene Zusammenstellungen der Sonnenbeobachtungen, zu prüfen gesucht, und dadurch noch mehr Vertrauen zu ihrer nahen Richtigkeit erhalten.

Die ganze Reihe meiner mit dem Meridiankreise von 1820 bis jetzt beobachteten Rectascensionen der Sonne sollte dann mit meinen vorläufig bestimmten elliptischen Elementen und diesen verbesserten Störungstafeln verglichen werden; dabei sollten alle als zweifelhaft angegebenen Beobachtungen, alle sich auf einen einzelnen Rand der Sonne beziehenden und endlich alle diejenigen ausgeschlossen werden, für welche nicht wenigstens zwei Fundamentalsterne die Correction der Uhr ergeben haben.

Die hierdurch herausgebrachten Fehler der Tafeln sollten, als von den Fehlern der angenommenen Massen des Mondes, der Venus und des Mars allein herrührend betrachtet und jedem seine von diesen drei unbekanntem Grössen abhängige Verbesserung beigezeichnet werden, wodurch Bedingungsgleichungen von der Form

$$0 = n + a\zeta + b\eta + c\delta$$

entstehen, in welchen a den in der Rechnung angewandten Betrag der Mondstörung, b die Summe der periodischen und säcularen Störungen durch Venus, die letzteren von 1824 an gerechnet, c dasselbe für Mars bezeichnen. Die Bedingungsgleichungen sollten nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst werden, und zwar ohne Abkürzung oder Zusammenziehung, welche nicht nöthig sind, indem die geringe Zahl von drei unbekanntem Grössen die Arbeit ohnedies leicht genug macht. Die dadurch gefundenen Werthe von Mond, Venus und Mars sollten in die einzelnen Bedingungsgleichungen gesetzt und dadurch die Unterschiede der Tafeln von den Beobachtungen verbessert werden.

Die nun noch übrigen Fehler sollten zu einer neuen Verbesserung der elliptischen Elemente angewandt und zu diesem Zwecke in 36 Mittel für 0° , 10° , 20°

der Länge vereinigt werden, und diese sollten neue Werthe der mittleren Länge, der Länge des Perigeums und der Excentricität für die mittlere Epoche der Beobachtungen (1824) ergeben. Es ist vorauszusetzen, dass diese von denen, welche die erste Annäherung gegeben hat, nicht beträchtlich verschieden sein können, und dass demnach die successive Annäherung hiermit geschlossen sein wird.

11.

Der Grund, weshalb ich bei dem eben dargestellten Theile der Untersuchung nur meine eigenen 8jährigen Rectascensionsbeobachtungen anzuwenden vorgeschlagen habe, ist nicht allein, dass ich sie dazu für hinreichend halte, sondern auch, dass mir keine andere Reihe von Beobachtungen bekannt geworden ist, bei welcher über die Beschirmung des Instrumentes genügende Auskunft gegeben ist. Ich weiss, dass gegenwärtig auf mehreren Sternwarten die Beschirmung angewandt wird; allein die seit der Zeit ihrer Einführung gemachten Beobachtungen sind meistens wohl noch nicht bekannt und auch vermuthlich noch nicht so lange fortgesetzt als in Königsberg. — Die Bradley'schen Beobachtungen der Rectascensionen der Sonne stimmen weit weniger genau unter einander überein als die Königsberger, so dass eine auf die erstere zu gründende Bestimmung der elliptischen Ungleichheiten der Sonnenbewegung beträchtlich grössere wahrscheinliche Fehler haben würde, als die aus den letzteren abzuleitende. Dieses würde aber von geringerer Bedeutung sein, wenn man die Sicherheit erlangen könnte, dass eine vollständige Beschirmung stattgefunden habe. Ist diese Beschirmung unterblieben, so wird es schwierig sein, nach der von mir gemachten, im 2. Artikel angeführten Erfahrung sich zu versichern, dass nicht ein nach den Jahreszeiten veränderlicher, sich also mit den elliptischen Ungleichheiten vermischender Einfluss übrig geblieben ist. Es scheint mir, dass diese Ungewissheit über die Beschirmung uns den Vortheil raubt, die Säcularstörungen der Sonnenbahn durch die Beobachtungen bestätigen zu können.

Ich halte für nicht unwahrscheinlich, dass auch die beträchtliche Abweichung meiner Bestimmung des Perigeums von der fast übereinstimmenden der Herren DELAMBRE und VON ZACH eine Folge der früher mangelnden Beschirmung der Mittagsfernrohre ist. Die Beobachtungen, welche auf dieses Element den meisten Einfluss erhalten, sind die in der Mitte des Sommers und in der Mitte des Winters, also bei den grössten und geringsten Höhen der Sonne gemachten; dass ein Einfluss der Sonnenstrahlen auf das Instrument, wenn

er stattfindet, unter so verschiedenen Umständen immer derselbe bleiben sollte, ist nicht wahrscheinlich, noch viel weniger gewiss. Ungleichheiten der Bewegung der Sonne, welche nicht an die jährliche Periode gebunden sind, können aus einer langen Reihe von Beobachtungen mit einem unbeschirmten Mittagsfernrohre ohne Zweifel sicherer abgeleitet werden, als die jährlich sich erneuernden.

12.

Nach der Beendigung der Bestimmung sämtlicher Ungleichheiten der Sonne, so wie ich dieselbe im 10. Artikel vorgeschlagen habe, bleibt noch die der mittleren Bewegung übrig.

Die Astronomen, welche in neueren Zeiten die Sonnenbewegung untersucht haben, haben auch die Epoche und die mittlere Bewegung aus den Rectascensionsbeobachtungen abgeleitet. Dieses scheint mir nur unter gewissen Bedingungen erlaubt, aber auch dann nicht das wahre Verfahren zu sein. Indem nämlich die Rectascensionen der Fundamentalsterne, und mit denselben alle übrigen Rectascensionen, so wie auch die aus diesen abgeleitete mittlere Länge der Sonne, auf den beobachteten Declinationen der Sonne beruhen, so ist es wenigstens ein Umweg, wenn man die letztere nicht unmittelbar auf diese Declinationen gründet. Wenn man die Rectascensionen der Fundamentalsterne für zwei Epochen, z. B. für 1755 und die gegenwärtige Zeit bestimmt hat, so ist es allerdings erlaubt, aus denselben Beobachtungsreihen der Sonne am Mittagsfernrohre, welche diese Bestimmung ergeben haben, die mittleren Längen der Sonne für die Epochen dieser Beobachtungen abzuleiten; allein wenn man aus den Formeln, welche die Rectascensionen der Fundamentalsterne für beide Epochen darstellen, diese für eine dritte Zeit folgert und zur Reduction einer um diese Zeit gemachten Reihe von Sonnenbeobachtungen anwendet, so gibt dieselbe keine unabhängige Bestimmung der mittleren Länge, sondern eine auch auf den beiden Fundamental-Catalogen zum Grunde liegenden Sonnendclinationen beruhende, also nur eine Prüfung der Gleichförmigkeit der siderischen Bewegung der Sonne. Kann man nicht sicher sein, dass die Sonnenbeobachtungen für diese dritte Zeit, durch vollständige Beschirmung des Instruments, von jedem mittlern Fehler frei sind, so wird auch das Resultat der erwähnten Prüfung zweifelhaft sein; für die beiden zuerst genannten Epochen bleibt aber ein Fehler dieser Art ohne Einfluss auf die mittlere Länge.

Ich halte aus diesen Gründen für rathsam, die

Rectascensionen der Sonne zur Bestimmung ihrer mittleren Länge und Bewegung gar nicht anzuwenden, und also selbst die nach dem im 10. Art. angegebenen Verfahren gefundene mittlere Länge für 1824 nur als ein vorläufiges Resultat zu betrachten, obgleich dieselbe Beobachtungsreihe, woraus sie abgeleitet ist, auch die zur Reduction angewandten Rectascensionen der Fundamentalsterne gegeben hat.

Wenn die Tafeln in Beziehung auf alle Ungleichheiten der Sonnenbewegung berichtigt sein werden, also nach der Vollendung der im 10. Art. angegebenen Untersuchung, hat die Theorie nur noch eine unbekannt Grösse, nämlich die mittlere Länge. Bezeichnet man die Verbesserung derselben, welche meiner vorläufigen Bestimmung anzubringen ist, durch Δm , so wird man, wegen der nahen Richtigkeit der mittleren Bewegung in diesen vorläufigen Elementen, annehmen dürfen, dass der Werth von Δm während eines Zeitraums von etwa 10 Jahren ungeändert so bleibt, wie er in der Mitte dieses Zeitraums ist; man wird dann, wenn die verbesserten Tafeln eine Declination der Sonne = δ ergeben, die wahren

$$= \delta + \frac{\sin \omega \cos \varpi}{\cos \delta} \cdot \frac{\sqrt{1-ee}}{rr} \Delta m + \frac{\cos \omega \sin \varpi}{\cos \delta} \Delta \omega$$

oder auch

$$= \delta + \sin \omega \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{1-ee}}{rr} \Delta m + \sin \alpha \Delta \omega$$

erhalten, in welcher Formel auch die Schiefe der Ekliptik als unbekannt angesehen ist. Hat die Beobachtung diese Declination = δ' ergeben, so ist dieses die wahre, wenn man anderweitig die Ueberzeugung erwerben kann, dass das Instrument und die angewandten Reductions-Elemente absolut richtige Declinationen ergeben, und dass der Mittelpunkt der Figur und der Schwerpunkt der Sonne zusammenfallen; um aber das Resultat von dieser Voraussetzung zu befreien, muss man der Declination noch eine unbekannt Verbesserung x hinzuzufügen, wodurch

$$\delta' + x = \delta + a \Delta m + b \Delta \omega$$

oder

$$0 = \delta - \delta' + a \Delta m + b \Delta \omega - x$$

wird. Aus allen Gleichungen dieser Art, welche eine z. B. 10jährige Reihe von Beobachtungen der Sonnen-declinationen ergibt*), müssen $b \Delta \omega - x$ eliminiert und Δm bestimmt werden.

Ist x , oder nur seine Veränderung mit den Zenith-distanzen bekannt, so kann auch $\Delta \omega$ bestimmt werden.

*) Es werden deren mehrere sein, als man Rectascensionen erhalten kann; denn hier fallen die wegen Unvollständigkeit der Beobachtung der Rectascensionen ausgeschlossen nicht weg.

Beide erlangen keinen Einfluss auf Δm , wenn jede Beobachtung der Sonne in den aufsteigenden Zeichen eine correspondirende in den niedersteigenden hat, wodurch die Endgleichung, welche man durch Multiplication jeder einzelnen mit dem Coefficienten von Δm erhält, von den übrigen unbekannt Grössen fast befreit wird. Um dasselbe auch bei ungleichförmiger Vertheilung der Sonnenbeobachtungen zu erhalten, müssen nur die innerhalb gewisser Grenzen der Declination gemachten untereinander verglichen werden; zwischen jedem Paare solcher Grenzen sieht man $b \Delta \omega - x$ als beständig an, und es wird auf die Sicherheit, womit man auf diese Beständigkeit rechnen kann, ankommen, wie weit man die Grenzen auseinander legt. Ich glaube, dass man auch bei den Maskelyne'schen Beobachtungen, bei welchen der Mauerquadrant bekanntlich nicht mehr in seinem ursprünglichen guten Zustande war, die Grenzen fünf Grade wird von einander entfernen dürfen, ohne Gefahr eines erheblichen Fehlers.

13.

Da die mittlere Bewegung dasjenige Element der Sonnentheorie ist, von dessen guter Bestimmung ihre dauernde Richtigkeit abhängt, so halte ich für notwendig, dass auf ihre Bestimmung der äusserste Fleiss verwandt werde. Soll nichts zu wünschen übrig bleiben, so müssen aus den seit 70 Jahren beobachteten Sonnen-declinationen folgende Bestimmungen der mittleren Länge und ihres wahrscheinlichen Fehlers abgeleitet werden: aus den Bradley'schen Beobachtungen mit dem neuen Quadranten für 1757; aus den Maskelyne'schen etwa für 1770, 79, 88, 97 und 1805; aus denen des Herrn POND und den meinigen mit dem Cary'schen Kreise zwei Bestimmungen für 1815; endlich wiederum aus den Pond'schen und aus meinen Beobachtungen mit dem Meridiankreise zwei Bestimmungen für 1824. Die doppelten Bestimmungen für die beiden letzten Epochen werden sich gegenseitig controliren, und dieses scheint mir so wünschenswerth zu sein, dass ich deshalb gewagt habe, meine Beobachtungen mit dem Cary'schen Kreise neben denen des Herrn POND zu nennen.

Ausser diesen Bestimmungen muss man noch eine weit frühere zu erlangen suchen. FLAMSTEED's Beobachtungen werden sie ergeben, und ich glaube, dass ihr wahrscheinlicher Fehler nicht so gross gefunden werden wird, um ihr neben den späteren allen Werth in Beziehung auf die mittlere Bewegung zu rauben. Es ist zwar nicht zu bezweifeln, dass das Unterlassen der Beschränkung auch auf die Declinationen der Sonne Einfluss erhält; allein theils bleibt kein Mittel, sich

hier sicher zu stellen, ausser der Ausschliessung der Beobachtungen mit unbeschrifteten Instrumenten, wodurch aber die mittlere Bewegung der Sonne selbst unbestimmt bleiben würde; theils ist anzunehmen, dass der Einfluss im Mittel aus mehreren Beobachtungen nur von der Zenithdistanz der Sonne abhängt, in welchem Falle er sich mit der oben durch x bezeichneten unbekanntem Verbesserung der Zenithdistanzen vereinigt und mit dieser aus dem Resultate verschwindet.

Die verschiedenen, durch diese freilich weitläufige Untersuchung erlangten Bestimmungen von Δm , jede mit ihrem wahrscheinlichen Fehler, ergeben endlich die wahrscheinlichsten Werthe der Epoche für ein bestimmtes Jahr und der mittleren Bewegung der Sonne.

14.

Um die mittlere Länge der Sonne aus einer Reihe von Beobachtungen ihrer Declinationen sicher zu erhalten, muss die Verbesserung x beim Aufsteigen und beim Niedersteigen der Sonne gleich bleiben. Die Beobachtungen mit ganzen Kreisen lassen hierüber keinen Zweifel, allein bei den Beobachtungen mit dem Greenwicher Mauerquadranten muss der Collimationsfehler, oder vielmehr seine Veränderungen, bekannt sein. Doch kommen unter den Maskelyne'schen Beobachtungen Jahrgänge vor, in welchen so wenige Fixsterne an dem Mauerquadranten beobachtet worden sind, dass man sie nur unter der Voraussetzung eines unverändert gebliebenen Collimationsfehlers wird anwenden können.

Zur Bestimmung des Collimationsfehlers des Greenwicher Quadranten sind vorzugsweise zwei Mittel zu benutzen, nämlich die Beobachtungen γ Draconis und der Sterne $H, \eta, \mu, \nu, \epsilon, \zeta$ Geminorum. Da das Instrument während der langen Anwendung eine beträchtliche Excentricität erhalten hat, so kann nur durch den ersten Stern der eigentliche Collimationsfehler erkannt werden, durch die übrigen aber nur die Veränderungen desselben, was indessen für den hier dadurch zu erreichenden Zweck gleichgültig ist. Bestimmungen der Sterne in den Zwillingen für 1820 habe ich in der VIII. Abtheilung meiner Beobachtungen gegeben; für γ Draconis aber habe ich alle in Greenwich am Zenithsector gemachten Beobachtungen dieses Sterns angewandt, um daraus eine Formel für seine Zenithdistanz abzuleiten, welche daher, wenn man nicht die periodischen Ungleichheiten derselben bezweifeln will, vor der unmittelbaren Anwendung der Beobachtungen am Zenithsector einen Vorzug verdient. Hier, wo nur die Veränderungen des Collimationsfehlers in Betracht kommen, ist es zwar gleichgültig, welche

mittlere Zenithdistanz des Sterns man anwendet; allein da die Berechnung der Sonnenbeobachtungen auch über die Beschaffenheit des Quadranten etwas lehren kann, so ist die Angabe des für die Zenithdistanz von γ Draconis erhaltenen Resultates hier nicht ganz am unrechten Orte. Ich habe die mittlere Z.D. für 1800 + t

$$= 2^{\circ}26',669 - t.0',7139 + t.t.0',00101$$

gefunden; die beobachteten Werthe derselben, immer auf den Anfang des Beobachtungsjahres reducirt, sind folgende:

	Mittlere Z. D.	Gewicht	Unterschied der Formel
1750	3' 4',91	12,0 Beob.	- 0',02
1751	3,51	7,9	+ 0,37
1751	4,35	8,9	- 0,27
1752	4,01	8,9	- 0,74
1753	3,14	7,5	- 0,68
1754	~ 0,98	6,0	+ 1,57
1768	2 50,36	21,0	+ 0,19
1777	43,78	18,8	- 0,16
1785	38,79	4,0	- 1,18
1800	26,72	24,5	- 0,05
1801	26,10	18,2	- 1,44
1802	24,72	18,5	+ 0,53
1802	24,37	30,0	+ 0,88
1805	22,20	37,9	+ 0,93
1809	19,85	26,7	+ 0,48
1810	18,96	19,0	+ 0,67
1811	19,46	27,8	- 0,52
1811	19,98	21,0	- 1,04
1812	18,94	56,8	- 0,69

Bei den Flamsteed'schen Beobachtungen tritt die Schwierigkeit ein, dass der Stand der meteorologischen Instrumente nicht angemerket ist, so dass man auch die Strahlenbrechung nicht richtig berechnen kann. Dies ist nicht ohne Einfluss auf die mittlere Länge der Sonne, indem die Temperatur bei dem Aufsteigen der Sonne stets beträchtlich niedriger ist als bei dem Niedersteigen, also die Strahlenbrechung im ersten Falle grösser als im letzteren. Indessen kann man aus den Temperaturen, welche seit BRADLEY's Zeit bei jeder Sonnenbeobachtung angegeben sind, die mittlere Temperatur der heiteren Mittage für die verschiedenen Zeiten des Jahres erhalten, und dieselben durch eine Formel

$$\alpha + \beta \cos \odot + \gamma \sin \odot + \delta \cos 2 \odot + \epsilon \sin 2 \odot + \text{etc.}$$

darstellen, wozu in der I. Abtheilung meiner Beobachtungen die Anweisung gegeben ist*). Die Abweichungen der Temperaturen der einzelnen Tage von

*) [Vgl. „Theorie der Instrumente“, Abb. über den Cary'schen Kreis.]

ihrem durch diese Formel ausgedrückten mittleren Gange werden keinen constanten Fehler mehr erzeugen, da FLAMSTEED'S Beobachtungen lange genug fortgesetzt sind.

15.

Ich habe in dem Vorhergehenden angenommen, dass die Theorie der Bewegungen im Sonnensysteme richtig ist, oder mit anderen Worten, dass die periodischen Ungleichheiten durch unsere Störungstheorie vollständig angegeben werden, und dass die mittlere Bewegung gleichförmig ist. Beides ist nicht eigentlich nothwendig, sondern muss durch die Beobachtungen gezeigt werden. Es ist ohne Zweifel interessant, zu untersuchen, was die Sonnenbewegung hierüber andeutet.

Ich erlaube mir daran zu erinnern, dass ich in einer Abhandlung über denjenigen Theil der planetarischen Störungen, welcher von der Bewegung der Sonne herrührt** (welche unter den Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften für 1824 gedruckt worden ist), gezeigt habe, dass die Proportionalität der Massen und Anziehungen nicht mathematisch nöthig ist und daher nur durch die Beobachtungen gerechtfertigt werden kann. Dadurch zerfällt die Störung, welche ein Planet in der Bewegung der Erde erzeugt, in zwei Theile

$$pm - p'm'$$

deren erster von der Anziehung der Sonne durch den störenden Planeten, der andere von der directen Einwirkung desselben auf die Erde herrührt, m und m' bezeichnen die Kräfte, mit welchen der Planet auf die Sonne und die Erde in einer der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne gleichen Entfernung wirken würde, p und p' Functionen der Zeit, welche durch die Entwicklung beider Einwirkungen bestimmt werden. Unsere bisherige Theorie der Störungen setzt $m = m'$ und daher die Störung selbst

$$= m'(p - p');$$

will man sie von der Voraussetzung der Proportionalität der Massen und Anziehungen befreien, so muss man statt dieses Ausdrucks den obigen

$$= m'(p - p') + (m - m')p$$

anwenden. Den Ausdruck von p hat LAPLACE in der Mécanique céleste gegeben; in meiner angeführten Abhandlung ist er unter einer anderen Form entwickelt. Es ist, wie es mir scheint, nicht ohne Interesse, aus den 8 Jahrgängen der Königsberger Rectascensionsbeobachtungen der Sonne zu folgern, in welche Grenzen sich $m - m'$ einschliessen lässt. Ich habe einige Versuche dieser Art gemacht und halte danach für wahrscheinlich, dass $m - m'$ sehr klein oder ganz unmerklich gefunden werden wird. Wenn man dieses vollständiger untersuchen will, so wird auch die Jupitersmasse nicht geradezu als bekannt angesehen werden dürfen. Die Säcularstörungen hängen von m' allein ab.

Auch die Gleichförmigkeit der mittleren siderischen Bewegung der Erde muss man geprüft zu sehen wünschen. Sie würde ungleichförmig sein, wenn ein Widerstand im Weltraume merklich wäre; mehrere Phänomene deuten bekanntlich an, dass dieser Widerstand sehr klein sein muss, allein es wäre dennoch nicht ohne Interesse, darüber auch das Zeugniß älterer Sonnenbeobachtungen zu vernehmen. Obgleich es wahrscheinlich ist, dass die aus FLAMSTEED'S Beobachtungen zu ziehende Bestimmung der mittleren Sonnenlänge sich durch die Annahme einer gleichförmigen mittleren Bewegung mit den neueren vereinigen lassen wird, so wird eine Bestätigung dieser Annahme doch der Mühe der Berechnung der Flamsteed'schen Beobachtungen werth sein. Endlich muss es interessant sein, zu sehen, ob, nachdem alle Elemente der Bewegung möglichst richtig bestimmt sein werden, zu keiner Zeit mittlere Unterschiede von den Beobachtungen vorkommen, welche sich nicht durch Unvollkommenheiten der Beobachtungen selbst erklären lassen.

*) [Abhandlung 16.]

II. Sphärische Astronomie.

24. Berechnung der im Jahre 1807 bald nach dem Neumonde vorfallenden Sternbedeckungen.*)

(Mon. Corresp. XIV. p. 481.)

Bei der Schwierigkeit der geographischen Längenbestimmungen durch himmlische Beobachtungen und bei der Seltenheit der hierzu dienlichen Mittel äusserte man schon oft den Wunsch, eine Vorausberechnung der Bedeckungen solcher kleinen Sterne zu besitzen, die der Mond bald nach der Conjunction mit der Sonne auf seinem Wege antrifft. Herr Oberhofmeister von ZACH setzte in dem Decbr.-Stück 1799 der Allg. Geogr. Ephemeriden den Nutzen einer solchen Berechnung aus-

einander; indess finde ich nicht, dass irgend ein Astronom sich dieser, doch eben nicht so sehr mühsamen Arbeit unterzogen und dadurch die Vorschläge des Herrn von ZACH ausgeführt hätte. Dieses war die Veranlassung der folgenden Tafel, welche die im Jahre 1807 in Lilienthal sichtbaren Bedeckungen aller in der Histoire Céleste und dem Piazzischen Cataloge befindlichen Sterne enthält.

1807.	Namen der Sterne.	Gr.	Phase.	W. Z. in Lilienthal.	Abstand des St. v. Mittelp. in Declin.	Orter der Sterne.			
						Gerade Aufst.	Declin.		
Januar 11.	Anonyma	8.9	Eintr.	5 ^h 28 ^m	7' S.	323 ^o 5'	10 ^o 30' A.		
	—	8.9	"	5 45	8 N.	323 11	10 12 "		
	—	7.8	"	6 58	10 N.	323 39	9 55 "		
	c 1 Capric.	6	"	6 57	8 N.				
13.	Anonyma	9	"	6 29	6 S.	845 34	1 14 A.		
	—	8	"	7 2	1 N. }	345 46	1 1 "		
	—		Austr.	8 4	19 N. }				
14.	64 X Bode	7.8	Eintr.	6 54	4 N. }	356 43	3 34 B.		
			Austr.	8 4	9 N. }				
Febr. 11.	45 X Fl.	6	Eintr.	5 31	15 N.				
			Austr.	5 52	11 N.				
12.	Anonyma	8.9	Eintr.	5 50	½ S.	15 44	10 43 B.		
			"	5 54	5 S.	15 45	10 39 "		
			"	5 57	13 N.	15 39	10 58 "		
April 12.	105 Y Fl.	6	Eintr.	6 54	15 S.				
			Austr.	7 21	14 S.				
	Anonyma	9	Eintr.	7 31	4 N.	74 35	21 44 B.		
			"	9	"	7 44	4 N.	74 41	21 43 "
	—	8	"	7 57	14 N.	74 40	21 53 "		
			"	8 4	6 S.	74 52	21 32 "		
	13.	Anonyma	7.8	Eintr.	8 9	5½ N. }	89 8	21 18 B.	
				Austr.	9 5	10½ N. }			
265 Orion. B.		7	Eintr.	9 47	8 S.				
Mai 10.	Anonyma	8	Eintr.	8 0	19½ N.	85 25	21 29 B.		
			"	8	"	7 57	9 S.	85 31	21 6 "
			"	8	"	8 34	10 N.	85 52	21 21 "
			"	8.9	"	8 41	9 S.	85 56	21 2 "
			"	8	"	7 59	11½ S.	99 51	19 41 B.
11.	Anonyma	9	"	8 58	3 N.	100 29	19 40 "		
			"	8.9	"	9 39	9 S.	100 48	19 49 "

*) [11 d. allg. Verz.]

1867.	Namen der Sterne.	Gr.	Phase.	W. Z. in L. Mittelst.	Abstand des St. v. Mittelp. in Declin.	Orter der Sterne.	
						Gerade Aufst.	Declin.
Mai 12.	Anonyma		Eintr.	7 ^h 40 ^m	13° S.	113° 54'	17° 6' B.
13.	1 A ☉	6	Eintr.	8 12	12 S.		
			Austr.	9 11	0		
			"	9 30	nahe c'		
Junius 9.	Anonyma	8,9	Eintr.	9 37	15 S.	126 25	13 54 B.
			"	9 49	6 N.	125 43	14 12 "
			"	9 58	10 S.		
			"	9 5	14 S.	138 55	9 38 B.
10.	Anonyma	7	Eintr.	8	14 S.		

Die Beobachtung der hier angekündigten Erscheinungen ist, wie ich aus Erfahrung weiss, sehr leicht, und schon ein mittelmässiges Fernrohr reicht hin, den Eintritt eines Sternes 8. Grösse am dunkeln Rande des 4 oder 5 Tage alten Mondes zu zeigen. Die Austritte sind allerdings schwerer zu beobachten, und man muss gänzlich darauf Verzicht leisten, wenn der Stern nicht wenigstens die 7. Grösse erreicht. Diese Ephemeride geht nur bis zum Junius incl. (im Julius fallen nämlich keine Bedeckungen vor) und sie wurde nicht weiter ausgedehnt, weil in den letzten fünf Monaten des Jahres der Mond bald nach der Conjunction eine zu südliche Lage hat, um in unsern nördlichen Gegenden gesehen werden zu können.

Da mir die dieser Rechnung zum Grunde liegenden parallactischen Ausdrücke bequem scheinen, und da sie auch in andern Fällen angewandt werden können, so führe ich sie hier an: den Beweis wird sich jeder leicht selbst hinzufügen. Es sei

L Länge

B Breite

π Horizontal-Parallaxe für den } des Mondes.

Beobachtungsort

d Halbmesser

μ Sternzeit in Grade verwandelt.

ω Schiefe der Ekliptik.

φ' Verbesserte Polhöhe.

α' Scheinbare gerade Aufsteigung des Mondes.

δ' Scheinbare Abweichung des Mondes.

Dann setze man $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{cotg} B \sin L$

$$x = \cos L \cos B,$$

$$x' = \sin \pi \cos \mu \cos \varphi'$$

$$y = \frac{\sin B}{\cos \psi} \sin(\psi - \omega)$$

$$y' = \sin \pi \sin \mu \cos \varphi'$$

$$z = \frac{\sin B}{\cos \psi} \cos(\psi - \omega)$$

$$z' = \sin \pi \sin \varphi'$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{y - y'}{x - x'}, \quad r' \cos \delta' = \frac{x - x'}{\cos \alpha'}$$

$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{z - z'}{r' \cos \delta'}$$

$$d' = \frac{d}{r'}$$

Auf diese Weise kann man für drei verschiedene Zeiten die Orter des Mondes berechnen und daraus schliessen, was für Sterne bedeckt werden und zu welcher Zeit die Ein- oder Austritte geschehen. Man erspart durch dieses Verfahren die Berechnung der Länge und Breite der Fixsterne und auch die des Nongesimus.

25. Anleitung und Tafeln, die stündliche Bewegung des Mondes zu finden. *)

(Astron. Nachr. 2. p. 137.)

Der schöne Aufsatz des Herrn NICOLAI über die Berechnung der correspondirenden Mondbeobachtungen im 26. Stück der Astron. Nachr. [2. p. 17, vgl. auch 2. p. 213] lässt weder in der Sache selbst, noch in der Darstellung derselben etwas zu wünschen übrig; allein er bringt mir einige eigene frühere Rechnungen dieser

Art in Erinnerung, bei welchen ich mir die Erfindung der stündlichen Bewegung des Mondes durch eine kleine Hilfstafel etwas zu erleichtern suchte.

Aus den Angaben der Connoissance des Temps kann man die Rectascension des Mondes für die wahre Paris-er Zeit $t \cdot 12^m$ nach der Formel

$$\alpha + t \cdot A_1 + \frac{t \cdot t - 1}{1 \cdot 2} A_2 + \frac{t \cdot t - 1 \cdot t - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} A_3 + \text{etc.}$$

berechnen, wo $t \cdot 12^m$ von Mitternacht an gezählt wird,

*) [168 d. a. Verz. — Interpolat. Formel bei © Finsternissen
VON ÅSTRAND, s. Astr. Nachr. 47. p. 321.

wenn die wahre Zeit grösser ist als 12^h; differentiirt man diese Formel in Beziehung auf t , so gibt sie die 12stündige Bewegung so wie sie sein würde, wenn der Mond sich mit der Geschwindigkeit in AR, welche er zur Zeit $t \cdot 12^h$ hat, gleichförmig fortbewegte. Die Differentialquotienten der Coefficienten kann man nun ein für allemal, von Stunde zu Stunde, in eine Tafel bringen und diese wird alsdann unmittelbar die Bewegung geben.

Indessen ist es vorthellhafter und eben so bequem, wenn man die Bewegung des Mondes nicht allein durch die Angaben der Connoissance des Tems, welche zu folgenden Mittagen und Mitternächten gehören, ausdrückt; wenn man auch die vorhergehenden dabei benutzt, so erlangt man im Allgemeinen eine schneller convergirende Reihe und auch die Fehler, welche aus den vernachlässigten Zehntel-Seconden entstehen, haben, im Ganzen genommen, einen geringeren Einfluss. Ich theile daher die auf die vorhergehenden und folgenden berechneten Zahlenwerthe einer Function be-

$$= a + t \cdot b + \frac{t \cdot t - 1}{1 \cdot 2} c + \frac{t \cdot t - 1 \cdot t - \frac{1}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \frac{t + 1 \cdot t - 1 \cdot t - 1 \cdot t - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e +$$

wo das Gesetz offenbar ist. Wenn t zwischen 0 und 1 liegt, so sind die Coefficienten dieser Reihe, vom 3. an gerechnet, offenbar kleiner als die der gewöhnlichen Formel; für $t = \frac{1}{2}$ gibt sie die bekannte Regel für die Interpolation eines Gliedes in die Mitte zweier berechneten, nämlich

$$b + \frac{2t-1}{1 \cdot 2} c + \frac{3t^2-3t+\frac{1}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \frac{4t^3-6t^2-2t+2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e + \frac{5t^4-10t^3+5t-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} f + \frac{6t^5-15t^4-40t^3+90t^2+18t-27}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} g + \text{etc.}$$

wofür ich, der kürzeren Bezeichnung wegen

$$b + Tc + T^2d + T^3e + T^4f + T^5g + \text{etc.}$$

Um diese letzte Formel auf die Berechnung der 12stündigen, als gleichförmig angenommenen Bewegung des Mondes anzuwenden, habe ich die Coefficienten für $t = 0, \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \dots, \frac{11}{12}, 1$ berechnet, so wie folgende Tafel dieselben enthält:

$t \cdot 12^h$	12 T	288 T''	10368 T'''	248320 T''''
0	-6	+24	+864	-20736
1	-5	+13	+775	-12211
2	-4	+4	+656	-4336
3	-3	-3	+513	+2349
4	-2	-8	+352	+7424
5	-1	-11	+179	+10589
6	0	-12	0	+11664
7	+1	-11	-179	+10589
8	+2	-8	-352	+7424
9	+3	-3	-513	+2349
10	+4	+4	-656	-4336
11	+5	+13	-775	-12211
12	+6	+24	-864	-20736

ruhende Interpolationsformel hier mit, da ich mich nicht erinnere, sie irgendwo gefunden zu haben.

Zu den Argumenten

$$\dots -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots$$

gehören die Zahlenwerthe einer Function

$$\dots a_n; a_n; a_n; a'; a'; a'; \dots$$

deren Differenzen ich nach folgendem Schema geschrieben annehme:

	I.	II.	III.	IV.	V.
a_n	b_n	c_n	d_n	e_n	f_n
a'	b'	c'	d'	e'	f'
a''	b''	c''	d''	e''	f''
a'''	b'''	c'''	d'''	e'''	f'''
a''''	b''''	c''''	d''''	e''''	f''''
a'''''	b'''''	c'''''	d'''''	e'''''	f'''''

Setzt man nun $c + c' = 2c$; $e + e' = 2e$; $g + g' = 2g$ u. s. w., so ist der zu dem Argumente t gehörige Zahlenwerth der Function

$$= a + t \cdot b + \frac{t \cdot t - 1}{1 \cdot 2} c + \frac{t \cdot t - 1 \cdot t - \frac{1}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \frac{t + 1 \cdot t - 1 \cdot t - 1 \cdot t - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e + \frac{t + 1 \cdot t - 1 \cdot t - 1 \cdot t - 1 \cdot t - 2 \cdot t - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} f + \frac{t + 2 \cdot t + 1 \cdot t - 1 \cdot t - 1 \cdot t - 2 \cdot t - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} g + \text{etc.}$$

$$\frac{a + a'}{2} - \frac{1}{8} c + \frac{3}{128} e - \frac{5}{1024} g + \frac{35}{32768} i - \text{etc.}$$

für andere specielle Werthe von t gibt sie Formeln, welche COTES in der Harmonia Mensurarum mitgetheilt hat.

Der erste Differentialquotient der zum Argumente t gehörenden Function ist

Es scheint mir aber bequemer, mit Logarithmen zu rechnen, zumal wenn man die Bewegung des Mondes für verschiedene Stunden sucht; ich führe daher noch die Logarithmen der Coefficienten, mit 5 Decimalstellen, an:

$t \cdot 12^h$	$\log T$	$\log T'$	$\log T''$	$\log T'''$
0	9,69897n	8,92082	8,92082	7,92082n
1	9,61979n	8,65455	8,87361	7,69085n
2	9,52288n	8,14267	8,80121	7,24118n
3	9,39794n	8,01773n	8,69442	6,97498
4	9,22185n	8,44370n	8,53085	7,47473
5	8,92082n	8,58200n	8,37114	7,62895
6	$-\infty$	8,61979n	$-\infty$	7,67094
7	8,92082	8,58200n	8,23714n	7,62895
8	9,22185	8,44370n	8,53085n	7,47473
9	9,39794	8,01773n	8,69442n	6,97498
10	9,52288	8,14267	8,80121n	7,24118n
11	9,61979	8,65455	8,87361n	7,69085n
12	9,69897	8,92082	8,92082n	7,92082n

Um den Gebrauch dieser Tafel an einem Beispiele zu zeigen, wähle ich den 3. März 1822, und die wahren Pariser Zeiten 7^h, 8^h, 9^h. Die Rectascensionen des

Mondes vom 2. März 0^h bis 4. März 12^h, und ihre Differenzen finden sich aus der Conn. des Temps:

März 2.	0 ^h	96° 43' 58"			
	12	104 20 21	+ 7° 36' 23"	- 11' 44"	- 1' 52"
	3.	0 111 45 0	+ 7 24 39	- 13 36	- 0 58 + 54"
	12	118 56 3	+ 7 11 3	- 14 34	- 0 7 + 51 - 3"
	4.	0 125 52 32	+ 6 56 29	- 14 41	- 0 7 + 51 - 3"
	12	132 34 20	+ 6 41 48		

woraus also folgt

$b = 7^{\circ} 11' 3''$	
$c = - 14 5$	$\log c = 2,92686n$
$d = - 58$	$\log d = 1,76343n$
$e = + 52,5$	$\log e = 1,72016$
$f = - 3$	$\log f = 0,47712n$

Addirt man zu diesen Logarithmen die für 7^h, 8^h, 9^h in der Tafel enthaltenen Logarithmen, so findet man

b	$7^{\circ} 11' 3''$	$7^{\circ} 11' 3''$	$7^{\circ} 11' 3''$
$c T$	- 1 10,42	- 2 20,84	- 3 31,25
$d T'$	+ 2,22	+ 1,61	+ 0,60
$e T''$	- 0,91	- 1,78	- 2,60
$f T'''$	- 0,01	- 0,01	0,00
Summe	7 9 53,88	7 8 41,98	7 7 29,75

und, durch Division mit 12, die stündlichen Bewegungen

$$\begin{aligned}
 y_{0+x} = y_0 &+ \frac{1}{2} \left((A_{-1} + A_{+1}) - \frac{1}{2} ((A_{-1}^2 + A_{+1}^2) - \frac{1}{2} ((A_{-1}^3 + A_{+1}^3) - \text{etc.})) \right) x \\
 &+ \frac{1}{2} \left(A_0^2 - \frac{1}{2} (A_0^2 - \frac{1}{2} (A_0^2 - \text{etc.})) \right) x^2 \\
 &+ \frac{1}{2} \left((A_{-1}^2 + A_{+1}^2) - \frac{1}{2} ((A_{-1}^3 + A_{+1}^3) - \text{etc.}) \right) x^3 \\
 &+ \frac{1}{2} \left(A_0^3 - \frac{1}{2} (A_0^3 - \text{etc.}) \right) x^4 \\
 &+ \frac{1}{2} \left((A_{-1}^3 + A_{+1}^3) - \text{etc.} \right) x^5 \\
 &+ \frac{1}{2} \left(A_0^4 - \text{etc.} \right) x^6 + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

eine allgemeine Interpolationsformel, die ich bei Gelegenheit des letzten Cometen aus der gewöhnlichen ableitete.

Substituirt man nun, in Uebereinstimmung mit den Ephemeriden, welche die Mondsörter von 12 zu

stündliche Bewegung für die Zeit $t = \frac{1}{12} \left((A_{-1} + A_{+1}) - \frac{1}{2} ((A_{-1}^2 + A_{+1}^2) - \frac{1}{2} ((A_{-1}^3 + A_{+1}^3) - \text{etc.})) \right)$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{1}{12^2} \left(A_0^2 - \frac{1}{2} (A_0^2 - \frac{1}{2} (A_0^2 - \text{etc.})) \right) t \\
 &+ \frac{1}{4 \cdot 12^3} \left((A_{-1}^2 + A_{+1}^2) - \text{etc.} \right) t^2 \\
 &+ \frac{2}{12^4} \left(A_0^3 - \text{etc.} \right) t^3 + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Die fünften und höheren Differenzen zu berücksichtigen, möchte wohl bei der actuellen Bewegung des Mondes überflüssig sein, so wie man auch die beiden kleinen von den dritten und vierten Differenzen abhängigen

35° 49',49; 35° 43',50; 35° 37',48; übereinstimmend mit Herrn NICOLAI's Rechnung.

Zusatz von HANSEN.

Es sei mir bei dieser Gelegenheit erlaubt, das Verfahren anzugeben, dessen ich mich bei der Berechnung der Copenhagener Beobachtungen bedient habe, um die stündliche Bewegung des Mondes zu finden.

Wenn man die Bezeichnungen aus folgendem Schema entlehnt:

Reihe.	Differenzen.			
y_{-1}	:	:	:	
y_0	A_{-1}	A_{-1}^2	A_{-1}^3	etc.
y_{+1}	A_{+1}	A_{+1}^2	A_{+1}^3	etc.
:	:	:	:	

und den Abstand des einzuschaltenden Gliedes vom nächstvorhergehenden x nennt, so ist, das sich stets gleichbleibende Increment der Argumente als Einheit genommen,

12 Stunden angeben, hier statt x , $t - \frac{1}{24}$ und $t + \frac{1}{24}$ und zieht das erstere Resultat vom letzteren ab, so bekommt man, nachdem man mit den resp. Potenzen von 12 dividirt hat, damit die Stunde zur Einheit werde:

Glieder vernachlässigen kann. Um den Gebrauch der Formel zu erleichtern, hatte ich mir überdies folgende Tafel berechnet:

Arg. ($\mathcal{J}_{-1} + \mathcal{J}_{+1}$)	a	Arg. \mathcal{J}_0^2	c	Arg. \mathcal{J}_0^3	e	Arg. ($\mathcal{J}_{-1}^3 + \mathcal{J}_{+1}^3$)	b	e	Arg. \mathcal{J}_0^4	d	f
10 ⁹	25' 0"	1'	0,417	11'	4,583	1'	-0,42	0,0087	0' 30"	-0,017	0,00024
11	27 30	2	0,833	12	5,000	2	0,83	0,0174	1 0	0,035	0,00048
12	30 0	3	1,250	13	5,417	3	1,25	0,0260	1 30	0,052	0,00072
13	32 30	4	1,667	14	5,833	4	1,66	0,0347			
14	35 0	5	2,083	15	6,250	5	2,08	0,0434			
1	37 30	6	2,500	16	6,667	6	2,50	0,0521			
16	40 0	7	2,917	17	7,083	7	2,91	0,0608			
17	42 30	8	3,333	18	7,500	8	3,33	0,0694			
18	45 0	9	3,750	19	7,917	9	3,74	0,0781			
Diff. für $t' = 2''5$		10	4,167	20	8,333	10	4,16	0,0868			
						11	4,58	0,0955			
						12	4,99	0,1042			

Nimmt man hieraus mit den beigeetzten Argumenten die entsprechenden Grössen a, b, c, d, e, f , so ist
stündl. Bew. = $a + b + (c + d + (e + ft)t) t$

welcher Form ich zur Rechnung ohne Logarithmen den Vorzug geben möchte.

(HANSEN.)

26. Ueber die Vorausberechnung der Sternbedeckungen.*

(Astr. Nachr. 7, p. 1.)

1.

Jedem Beobachter von Sternbedeckungen wird es oft angenehm oder nothwendig gewesen sein, die Zeiten des Eintritts oder Austritts und den Ort des Mondrandes, wo der letzter erfolgt, näherungsweise voraus zu wissen, damit die Aufmerksamkeit nicht durch zu langes Warten geschwächt und durch Unsicherheit über den Ort vertheilt werde; mir wenigstens ist es meistens nöthig gewesen, die zu beobachtende Bedeckung für meinen Beobachtungsort voraus zu berechnen. Die bequemsten Vorschriften zu dieser Rechnung finde ich nirgends entwickelt, obgleich in LAGRANGE'S Abhandlung im Berliner Jahrbuche für 1782 das Wesentlichste davon enthalten und aus dieser in spätere Lehrbücher übergegangen ist.

Die Angabe der AR. und Decl. des Mondes von 12 zu 12 Stunden wahrer Zeit, welche sowohl die Connoissance des tems als auch der Nautical Almanac seit einigen Jahren enthalten, erleichtert diese Rechnung sehr, und noch leichter wird sie durch dieselben Angaben für die mittleren Mittage und Mitternächte, welche man in dem vortreflichen Jahrbuche von ENCKE, mit der Genauigkeit der Tafeln selbst, findet. Ich werde zuerst die Aufgabe in aller Schärfe auflösen; später

diejenige Annäherung angeben, welche hinreichend ist, wenn die Vorausberechnung nur Behufs der anzustellenden Beobachtung gemacht werden soll; endlich werde ich zeigen, welche Angaben die Ephemeriden enthalten müssen, damit die Rechnung für andere Oerter möglichst dadurch erleichtert werde.

2.

Die Bezeichnungen, welche ich anwenden werde, sind die folgenden:

A ... scheinbare AR. } des bedeckten Fixsterns.
 D ... " Decl. }

α ... wahre AR. }
 δ ... " Decl. }
 π ... Aequatorealparallaxe } des Mondes.
 ρ ... horizontaler Halbmesser }
 α' ... scheinbare AR. }

δ' ... " Decl. }
 ρ' ... scheinbarer Halbmesser }
 μ ... Sternzeit }
 φ ... Polhöhe } des Beobachtungs-
 φ' ... verbesserte Breite } ortes.
 r ... Entfernung vom Erd-
mittelpunkte }

Legt man durch den Stern und den Mittelpunkt des Mondes einen grössten Kreis, bezeichnet man die auf denselben gemessene Entfernung beider durch Σ ,

*) [229 d. n. Verz. — Vergl. auch Astron. Untersuch. Analyse der Finsterniss. 4. Abschn. — Liter. der Astr. Nachr.: CLAUSEN (2), OUDMAN, Ueber RAFFIN'S Methode (74).

BRUNN'S Abhandlungen. I. Bd.

den Winkel dieses grössten Kreises mit dem von dem Sterne nach dem Nordpole gehenden Declinationskreise, von 0 bis 360° gezählt, durch P , so dass P zwischen 0 und 180° ist, wenn $\alpha' < A$, zwischen 180° und 360° , wenn $\alpha' > A$, so hat man

$$(1) \dots \begin{cases} \sin \Sigma \sin P = -\cos \delta' \sin(\alpha' - A) \\ \sin \Sigma \cos P = \sin \delta' \cos D - \cos \delta' \sin D \cos(\alpha' - A) \\ \cos \Sigma = \sin \delta' \sin D + \cos \delta' \cos D \cos(\alpha' - A) \end{cases}$$

$$(2) \dots \begin{cases} \Delta \sin \Sigma \sin P = -\cos \delta \sin(\alpha - A) + r \cos \varphi' \sin \pi \sin(\mu - A) \\ \Delta \sin \Sigma \cos P = \sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A) - r \sin \pi [\sin \varphi' \cos D - \cos \varphi' \sin D \cos(\mu - A)] \\ \Delta \cos \Sigma = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(\alpha - A) - r \sin \pi [\sin \varphi' \sin D + \cos \varphi' \cos D \cos(\mu - A)] \end{cases}$$

welches die von LAGRANGE gegebenen Formeln, aber auf den Aequator bezogen, sind.

3.

Für den Anfang und das Ende einer Sternbedeckung ist

$$\Sigma = \varphi'$$

$$(3) \dots \begin{cases} \sin \varphi \sin P = -\cos \delta \sin(\alpha - A) + r \cos \varphi' \sin \pi \sin(\mu - A) \\ \sin \varphi \cos P = -\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A) - r \sin \pi [\sin \varphi' \cos D - \cos \varphi' \sin D \cos(\mu - A)] \end{cases}$$

und man gebraucht die dritte Formel (2) nicht weiter, da sie nur darüber entscheidet, ob die Entfernung φ' oder $180^\circ - \varphi'$ ist, welches ohnedies nicht zweifelhaft ist.

$$(4) \dots \dots \begin{cases} k \sin P = -\frac{\cos \delta \sin(\alpha - A)}{\sin \pi} + r \cos \varphi' \sin(\mu - A) \\ k \cos P = \frac{\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A)}{\sin \pi} - r [\sin \varphi' \cos D - \cos \varphi' \sin D \cos(\mu - A)] \end{cases}$$

welche Formeln aus zwei getrennten Theilen bestehen, deren erster sich allein auf den Mond, der andere

$$(5) \dots \dots kk = \left\{ \frac{\cos \delta \sin(\alpha - A)}{\sin \pi} - r \cos \varphi' \sin(\mu - A) \right\}^2 + \left\{ \frac{\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A)}{\sin \pi} - r [\sin \varphi' \cos D - \cos \varphi' \sin D \cos(\mu - A)] \right\}^2$$

welche, indem die beiden zum Quadrat erhobenen Theile als Functionen der Zeit angesehen werden können, nur die Zeit des Ein- und Austritts als unbekannt Grösse enthält.

4.

Da dieser Gleichung, ohne Einschränkung genommen, die Zeiten unendlich vieler Ein- und Austritte des Sterns genügen müssen, so ist sie transcendent und kann daher nicht direct aufgelöst werden; sie muss also entweder durch Versuche oder durch aufeinanderfolgende Näherungen aufgelöst werden. Das letztere scheint mir das Zweckmässigste zu sein. Ich nehme daher α, δ, π, μ für eine Zeit T als bekannt an, welche

Allein der scheinbare Ort des Mondes wird durch den wahren ausgedrückt mittelst der bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} \Delta \cos \delta' \sin \alpha' &= \cos \delta \sin \alpha - r \cos \varphi' \sin \pi \sin \mu \\ \Delta \cos \delta' \cos \alpha' &= \cos \delta \cos \alpha - r \cos \varphi' \sin \pi \cos \mu \\ \Delta \sin \delta' &= \sin \delta - r \sin \varphi' \sin \pi \end{aligned}$$

in welchen Δ die Entfernung des Mondes vom Beobachtungsorte bedeutet. Substituirt man dieses in (1), so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta \sin \varphi' &= \sin \varphi \\ \text{also auch} \quad \Delta \sin \Sigma &= \sin \varphi, \end{aligned}$$

wodurch der scheinbare Halbmesser des Mondes aus den beiden ersten der Formeln (2) verschwindet, wenn man sie auf die Berechnung eines Eintritts oder Austritts anwendet. Man hat also für diese Phasen

Dividirt man diese Formeln durch $\sin \pi$ und setzt man $\sin \varphi = k \sin \pi$, wo die Constante k nach BURKHARDT's Tafeln = 0,2725, ihr Logarithme = 9,4353665 ist, so verwandeln sie sich in

allein auf den Beobachtungsort bezieht. Die Summe der Quadrate beider gibt die Gleichung

der gesuchten Zeit $T + t$ des Eintritts oder Austritts so nahe liegt, dass man die Glieder rechts vom Gleichheitszeichen in schnell convergirende Reihen verwandeln kann. Setzt man unter dieser Voraussetzung

$$\begin{aligned} \frac{\cos \delta \sin(\alpha - A)}{\sin \pi} &= p + p't \\ \frac{\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A)}{\sin \pi} &= q + q't \\ r \cos \varphi' \sin(\mu - A) &= u + u't \\ r \sin \varphi' \cos D - r \cos \varphi' \sin D \cos(\mu - A) &= v + v't \end{aligned}$$

so sind p, q, u, v die zu der Zeit T gehörigen Werthe; p', q', u', v' aber selbst Functionen von t , in welchen jedoch, der Voraussetzung gemäss, die von t und seinen Potenzen abhängigen Glieder sehr klein sind. Setzt

man t , insofern es auf diese Grössen Einfluss hat, als näherungsweise bekannt voraus, so ergibt die Auflösung der Gleichung (5) oder in ihrer jetzigen Form

[6] . . . $kk = [p - u + (p' - u')t]^2 + [q - v + (q' - v')t]^2$
 eine stärkere Annäherung für t ; durch diese erhält man Werthe von $p' - u'$ und $q' - v'$, welche näher richtig sind als die der Rechnung zum Grunde gelegten, und wenn man die Rechnung damit wiederholt, eine weitere Annäherung für t , u. s. w.

Die Auflösung der Gleichung (6) wird sehr bequem, wenn man

$$p - u = m \sin M, \quad p' - u' = n \sin N$$

$$q - v = m \cos M, \quad q' - v' = n \cos N$$

setzt, wodurch sie sich in

$$kk = mm \sin(M - N)^2 + [m \cos(M - N) + nt]^2$$

verwandelt, und wenn man

$$\frac{m}{k} \sin(M - N) = \cos \psi$$

setzt,

$$(7) \dots t = -\frac{m}{n} \cos(M - N) \mp \frac{k}{n} \sin \psi$$

ergibt, wo das obere Zeichen für den Eintritt, das untere für den Austritt gilt, vorausgesetzt, dass man $\psi < 180^\circ$ genommen hat, was immer geschehen kann. Findet man aber $\frac{m}{k} \sin(M - N) > 1$, so erfolgt keine Bedeckung, sondern der Mond geht bei dem Sterne vorbei, ohne ihn zu bedecken. Es versteht sich übrigens, dass dieses nur bei vollendeter Annäherung nothwendig wahr ist, und dass ein Fehler in N eine Bedeckung als nicht stattfindend erscheinen lassen kann, welche wirklich stattfindet, oder umgekehrt. Hat man $\cos \psi > 1$ gefunden, so wird man dennoch t nach der Formel

$$t = -\frac{m}{n} \cos(M - N)$$

bestimmen und hiermit die Annäherungen fortsetzen können, wodurch es sich entscheiden wird, ob $\cos \psi$ wirklich grösser ist als 1; ebenso kann ein in einer früheren Annäherung möglich erscheinendes ψ bei einer weiter getriebenen sich als unmöglich zeigen. Diese Fälle werden aber, wenn T von der Zeit der Bedeckung nicht gar so entfernt ist, nur bei Bedeckungen vorkommen, bei welchen der Stern dem Mondrande sehr nahe bleibt.

Indem durch die Einführung der Bezeichnungen in diesem Artikel die Formeln (4) sich in

$$k \sin P = -m \sin M - n \sin N \cdot t$$

$$k \cos P = m \cos M + n \cos N \cdot t$$

verwandeln, so erhält man nach der Substitution des Werthes von t

$$k \sin P = -m \sin(M - N) \cos N \pm k \sin N \sin \psi$$

$$k \cos P = -m \sin(M - N) \sin N \mp k \cos N \sin \psi$$

und, da $m \sin(M - N) = k \cos \psi$ ist,

$$\sin P = -\cos(N \pm \psi)$$

$$\cos P = -\sin(N \pm \psi)$$

woraus

$$(8) \dots P = 270^\circ - N \mp \psi$$

folgt. Will man den Ort des Eintritts und Austritts durch den Winkel, welchen die vom Mittelpunkte des Mondes nach dem Stern und dem Nordpole gezogenen grössten Kreise einschliessen, von Norden links herum gezählt, angeben, so hat man diesen Winkel sehr nahe

$$Q = 180^\circ - P = N \pm \psi - 90^\circ.$$

5.

Die Grössen p, q, p', q' , welche von der Bewegung des Mondes abhängen, findet man am bequemsten durch Berechnung der Werthe von

$$\frac{\cos \delta \sin(\alpha - A)}{\sin \pi}$$

und

$$\frac{\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A)}{\sin \pi}$$

für verschiedene Zeiten, wobei man dem letzteren die Form

$$\frac{\sin(\delta - D) \cos \frac{1}{2}(\alpha - A) + \sin(\delta + D) \sin \frac{1}{2}(\alpha - A)^2}{\sin \pi}$$

geben kann. Man wird dabei die der Mitte der Bedeckung nächste volle Stunde des Ortes, für welchen die Ephemeride berechnet ist, für T annehmen, und für die übrigen Zeiten die vorhergehenden und folgenden vollen Stunden, wodurch man den Vortheil erhält, die Interpolation aus der Ephemeride mit ein für allemal berechneten Coefficienten machen zu können. Damit man alles sich auf diese Rechnung beziehende beisammen habe, theile ich hier eine Tafel für diese Coefficienten mit, welche sich auf das Schema

Zeichen		Orter				
$\tau,$	$a,$	b	$c,$	d	$e,$...
τ'	a'		c'		e'	

bezieht, in welchem a und a' die in der Ephemeride enthaltenen Orter für den Anfang τ , und das Ende τ' des halben Tages, in welchem $T, T \mp 1^h, T \mp 2^h \dots$ liegen, b die erste Differenz, c und c' die zweiten Differenzen etc. bezeichnen. Setzt man

$$a, + a' = 2a; \quad c, + c' = 2c; \quad e, + e' = 2e; \dots$$

so hat man den zu der Zeit

$$\frac{1}{2}(\tau, + \tau') + x$$

gehörigen Ort nach der Formel

$$a + X \cdot b + X' \cdot c + X'' \cdot d + \text{etc.} \dots$$

in welcher die Coefficienten folgende Werthe haben:

x	12 X	288 X'	10368 X''	497664 X'''	log X	log X'	log X''	log X'''
-8h	-8	+28	-224	-7280	9,82391n	8,98777	8,33455n	8,16520n
-7	-7	+13	-91	-3575	9,76592n	8,65455	7,94336n	7,85634n
-6	-6	0	0	0	9,69897n	-∞	-∞	-∞
-5	-5	-11	+55	+3280	9,61979n	8,58200n	7,73467	7,82013
-4	-4	-20	+80	+6160	9,52288n	8,84164n	7,88740	8,09264
-3	-3	-27	+81	+8505	9,39794n	8,97197n	7,89279	8,23274
-2	-2	-32	+64	+10240	9,22185n	9,04576n	7,79048	8,31336
-1	-1	-35	+35	+11305	8,92082n	9,08468n	7,52837	8,35633
0	0	-36	0	+11664	-∞	9,09691n	-∞	8,36991
+1	+1	-35	-35	+11305	8,92082	9,08468n	7,52837n	8,35633
+2	+2	-32	-64	+10240	9,22185	9,04576n	7,79048n	8,31336
+3	+3	-27	-81	+8505	9,39794	8,97197n	7,89279n	8,23274
+4	+4	-20	-80	+6160	9,52288	8,84164n	7,88740n	8,09264
+5	+5	-11	-55	+3280	9,61979	8,58200n	7,73467n	7,82013
+6	+6	0	0	0	9,69897	-∞	-∞	-∞
+7	+7	+13	+91	-3575	9,76592	8,65455	7,94336	7,85634n
+8	+8	+28	+224	-7280	9,82391	8,98777	8,33455	8,16520n

6.

Für das von Herrn Professor ENCKE gegebene Beispiel, nämlich die Bedeckung 82 Leonis am 5. April 1830, hat man aus der Ephemeride die gerade Aufsteigung des Mondes

April 4. 0 ^h	168° 41' 31,78	+ 5° 50' 21,1	- 4 25,3	
12	159 31 52,9	+ 5 45 55,8	- 3 29,8	+ 55,5
5. 0	165 17 48,7	+ 5 42 26,0	- 2 32,6	+ 57,2 + 1,7
12	171 0 14,7	+ 5 39 53,4	- 1 35,5	+ 57,1 - 0,1
6. 0	176 40 8,1	+ 5 38 17,9		
12	182 18 26,0			

also

$a =$	168° 9' 1,7
$b =$	+ 5 42 26,0
$c =$	- 3 1,2
$d =$	+ 57,2
$e =$	+ 0,8

Ebenso für die Abweichung

$a =$	+ 4° 52' 45,55
$b =$	- 1 48 44,7
$c =$	- 3 33,25
$d =$	+ 1 1,7
$e =$	- 1,0

und für die Parallaxe

$a =$	54' 12,2
$b =$	- 7,0
$c =$	+ 1,8

Hieraus ergibt sich für 5^h, 6^h, 7^h, 8^h, 9^h mittlere Zeit in Berlin

$$a + t \cdot b + \frac{t^2}{2} \cdot c + \frac{t^3}{6} \cdot d + \frac{t^4}{24} \cdot e + \text{etc.} \dots = a + t \left\{ b - \frac{1}{6} d + \frac{t}{2} c + \frac{t^2}{6} d \dots \right\}$$

woraus sich für das Beispiel ergibt:

α	δ	π
5 ^h 167° 40' 51,76	+ 5° 2' 8,09	54' 13,0(0)
6 168 9 24,37	4 54 4,69	12,43
7 168 37 55,72	4 44 0,22	11,84
8 169 6 25,83	4 34 54,73	11,23
9 169 34 54,75	4 25 48,24	10,62

Wenn man den Ort des Sterns, übereinstimmend mit ENCKE,

$$A = 169^\circ 14' 6,6; \quad D = + 4^\circ 14' 4,8$$

annimmt, so erhält man hieraus die Werte von

	$\cos \delta \sin(\alpha - A)$			
	a	b	c	d
5 ^h	- 1,71312	+ 52384		
6	- 1,18928	+ 52396	+ 12	- 2
7	- 0,66532	+ 52406	+ 10	- 6
8	- 0,14126	+ 52410	+ 4	
9	- 0,38284			

und die Werte von

	$\sin(\delta - D) \cos \frac{1}{2}(\alpha - A) + \sin(\delta + D) \sin \frac{1}{2}(\alpha - A)$			
	a	b	c	d
5 ^h	+ 0,88807	- 16778		
6	+ 0,72029	- 16789	- 11	
7	+ 0,55240	- 16793	- 4	+ 7
8	+ 0,38447	- 16797	- 4	0
9	+ 0,21650			

Hat man für eine ungerade Anzahl von Stunden gerechnet, in deren Mitte die Stunde T liegt, so ist die Formel zur Interpolation der Columnne a

$$p = -0,66532$$

$$p' = +0,524017 + t \cdot 0,00005 - tt \cdot 0,000007$$

$$q = +0,55240$$

$$q' = -0,167904 - t \cdot 0,00002 + tt \cdot 0,000006$$

Ich glaube aber nicht, dass es je ein Interesse haben wird, über die zweiten Differenzen hinauszugehen oder die Rechnung für mehr als drei Stunden zu machen; will man die Genauigkeit weiter treiben, so wird man auch eine grössere Anzahl von Decimalen anwenden müssen, als hier geschehen ist.

7.

Die sich auf den Beobachtungsort beziehenden Grössen u, v, u', v' hängen sowohl von der Polhöhe desselben als von der Sternzeit ab. Es ist unnöthig, r und φ' besonders zu berechnen, indem man

$$\sin(\mu - A) = \sin(\mu' - A) + 2 \sin[t \cdot 27073,92] \cos[\mu' - A + t \cdot 27073,92]$$

$$\cos(\mu - A) = \cos(\mu' - A) - 2 \sin[t \cdot 27073,92] \sin[\mu' - A + t \cdot 27073,92]$$

folgt. Man hat daher

$$u = r \cos \varphi' \sin(\mu' - A)$$

$$v = r \sin \varphi' \cos D - r \cos \varphi' \sin D \cos(\mu' - A)$$

$$u' = r \cos \varphi' \cdot \frac{2 \sin[t \cdot 27073,92]}{t} \cdot \cos[\mu' - A + t \cdot 27073,92]$$

$$v' = r \cos \varphi' \sin D \cdot \frac{2 \sin[t \cdot 27073,92]}{t} \cdot \sin[\mu' - A + t \cdot 27073,92]$$

Zur leichteren Berechnung von u' und v' ist diesem Aufsätze eine Tafel angehängt, welche

$$\log \frac{2 \sin[t \cdot 27073,92]}{t} = \log \lambda$$

und

$$t \cdot 27073,92 = x$$

von $t = 0$ bis $t = 1,5$ enthält.

8.

Ich werde jetzt das oben schon angeführte Beispiel vollenden. Man hat für $T = 7^h$ die Sternzeit = $7^h 54^m 7,264$, also

$$\mu' = 118^{\circ} 31' 49,0$$

$$\mu' - A = -50 \ 42 \ 17,6$$

Hieraus folgt

$$u = -0,47177; \quad v = +0,75914$$

und ferner

$$m \sin M = p - u = -0,19355$$

$$m \cos M = q - v = -0,20674$$

$$M = 223^{\circ} 6' 46'' \quad \log m = 9,45210$$

$$r \cos \varphi' = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e e \sin^2 \varphi}}, \quad r \sin \varphi' = \frac{(1 - e e) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e e \sin^2 \varphi}},$$

hat, wo e die Excentricität der Erdmeridiane bedeutet. Für das Beispiel des Herrn Professor ENCKE ist $\varphi = 52^{\circ} 31' 15''$ und die Abplattung = $\frac{1}{302,78}$, woraus

$$\log r \cos \varphi' = 9,78505$$

$$\log r \sin \varphi' = 9,89752$$

folgen.

Bezeichnet man die zu der mittleren Zeit T gehörige, in Bogentheilen ausgedrückte Sternzeit durch μ' , so ist die zu der Zeit $T + t$ gehörige

$$\mu = \mu' + t \cdot 54147,84,$$

woraus

Zur ersten Annäherung an t wird sein Werth in den Ausdrücken von $p', q', u', v' = 0$ gesetzt, wodurch man erhält

$$p' = +0,5240 \quad q' = -0,1679$$

$$u' = +0,1013 \quad v' = -0,0091$$

$$n \sin N = +0,4227 \quad n \cos N = -0,1588$$

$$N = 110^{\circ} 35' 26'' \quad \log n = 9,65470$$

$$t = +0,2402 \mp 0,1690$$

oder

$$\text{Eintritt } 7^h 07' 12; \quad \text{Austritt } 7^h 40' 92$$

Hiermit erhält man zur zweiten Annäherung aus den Formeln des 6. Artikels:

Eintritt	Austritt
$p' = +0,52402$	$+0,52404$
$q' = -0,16790$	$-0,16791$

und aus der Tafel am Ende dieses Aufsatzes

$$x = +32' 7,7 \quad + 3^{\circ} 4' 38,6$$

$$\log \lambda = 9,41915 \quad 9,41895$$

wodurch ferner gefunden wird

$$\begin{array}{rcl}
 u' = + 0,10250 & + 0,10780 \\
 v' = - 0,00907 & - 0,00873 \\
 n \sin N = + 0,42152 & + 0,41624 \\
 n \cos N = - 0,15883 & - 0,15918 \\
 N = 110^\circ 38' 47'' & 110^\circ 55' 41'' \\
 \log n = 9,65365 & 9,64898 \\
 t = \begin{cases} + 0,24026 \\ - 0,16857 \end{cases} & \begin{cases} + 0,23997 \\ + 0,16621 \end{cases} \\
 = + 0,07169 & + 0,40618
 \end{array}$$

Die dritte Annäherung gibt die bei der zweiten gefundenen Werthe von p' und q' wieder; ferner

$$\begin{array}{rcl}
 x = + 32^\circ 20' 9'' & + 32^\circ 256' 9'' \\
 \log \lambda = 9,41915 & 9,41895 \\
 u' = + 0,10251 & + 0,10774 \\
 v' = - 0,00907 & - 0,00873 \\
 n \sin N = + 0,42151 & + 0,41630 \\
 n \cos N = - 0,15883 & - 0,15918 \\
 N = 110^\circ 38' 49'' & 110^\circ 55' 30'' \\
 \log n = 9,65364 & 9,64904 \\
 t = \begin{cases} + 0,24026 \\ - 0,16857 \end{cases} & \begin{cases} + 0,23996 \\ + 0,16625 \end{cases} \\
 = + 0,07169 & + 0,40621
 \end{array}$$

wodurch, bei der unmerklichen Abweichung von der zweiten Annäherung, das Ende der Rechnung erreicht ist. Man hat also die Zeiten beider Phasen

$$= 7^h 4^m 18,1 \quad \text{und} \quad 7^h 24^m 22,4$$

und den oben durch Q bezeichneten Winkel

$$= 36^\circ 49,6 \quad \text{und} \quad 5^\circ 9,2.$$

9.

Eine so genaue Rechnung hat indessen kein Interesse, wenn es nur darauf ankommt, die Momente der Bedeckung behufs der anzustellenden Beobachtung vorauszuberechnen; hier ist ein Fehler von einer Zeitminute von gar keinem Belang, und wenn man nur das zu diesem Zwecke Nothwendige haben will, so darf man, unter der Bedingung, dass t nicht über eine

Stunde oder wenigstens nicht viel darüber betrügt*), folgende weit kürzere Rechnung anwenden. Für

$$\begin{array}{c}
 \cos \delta \sin(\alpha - A) \\
 \sin \pi \\
 \text{und} \\
 \frac{\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A)}{\sin \pi}
 \end{array}$$

setzt man

$$\frac{\alpha - A}{\pi} \cos \delta \quad \text{und} \quad \frac{\delta - D}{\pi}$$

und wenn man auch die Veränderungen von $\cos \delta$ und π vernachlässigt, unter α und δ die AR und Declination des Mondes zur Zeit T und unter $A\alpha$ und $A\delta$ ihre stündlichen Veränderungen versteht,

$$\begin{array}{ll}
 p = \frac{\alpha - A}{\pi} \cos \delta & p' = \frac{A\alpha}{\pi} \cos \delta \\
 q = \frac{\delta - D}{\pi} & q' = \frac{A\delta}{\pi}
 \end{array}$$

Ferner vernachlässigt man t in den Ausdrücken von u' und v' , wodurch man erhält

$$\begin{array}{ll}
 u = r \cos \varphi' \sin(\mu' - A) & \\
 v = r \sin \varphi' \cos D - r \cos \varphi' \sin D \cos(\mu' - A) & \\
 u' = r \cos \varphi' \cdot \lambda \cos(\mu' - A) & \\
 v' = r \cos \varphi' \cdot \lambda \sin(\mu' - A) \sin D &
 \end{array}$$

Für den Ort, für welchen man rechnen will, sind die Logarithmen von $r \cos \varphi'$ und $r \sin \varphi'$ als gegeben anzunehmen. Schreibt man

$$\begin{array}{l}
 a \text{ für } r \cos \varphi' \sin(\mu' - A) \\
 b \text{ ,, } r \cos \varphi' \cos(\mu' - A) \\
 c \text{ ,, } r \sin \varphi' \cos D
 \end{array}$$

so hat man

$$\begin{array}{ll}
 u = a & u' = b \cdot \lambda \\
 v = c - b \sin D & v' = a \cdot \lambda \sin D
 \end{array}$$

wo $\log \lambda = 9,4192$ ist und c aus einer kleinen Tafel genommen werden kann, welche es für jeden Grad von D mit der hier hinreichenden Genauigkeit von vier Decimalen ergibt. Die Auflösung der Gleichung [6] bleibt ungeändert. Um die Rechnung anschaulich zu machen, setze ich sie für das Beispiel vollständig hier her.

1830 April 5. 82 Leonis.

$$\begin{array}{rclcl}
 T = 7^h, & \mu' = 118^\circ 32' & \mu' - A = - 50^\circ 42' & \pi = 54,18 \\
 \alpha = 168^\circ 37,93 & \delta = + 4^\circ 44,90 & A\alpha = 28,50 \\
 A = 169 \ 14,11 & D = + 4 \ 14,08 & A\delta = - 9,08 \\
 & & & + 29,92
 \end{array}$$

*) Sollte sich diese Voraussetzung am Ende der Rechnung nicht rechtfertigen, oder man aus anderen Gründen eine grössere Genauigkeit wünschen, so wird man dieselbe schon durch die

zweite Annäherung für u' und v' , ohne p' und q' zu ändern, erhalten.

	$\frac{\cos \delta}{}$		
$\log(\alpha - A) = 1,5585_u - 0,0015$		$\log r \cos \varphi' = 9,7850$	$c = 0,7876$
$\log \Delta \alpha = 1,4548 - 0,0015$		$\log \sin(\mu' - A) = 9,8887_u$	$b \sin D = 0,0285$
$\log(\delta - D) = 1,4760$		$\log \cos(\mu' - A) = 9,8017$	
$\log \Delta \delta = 0,9481_u$		$\log a = 9,6737_u$	
$\log \pi = 8,2662$		$\log b = 9,5867$	
		$\log \lambda = 9,4192$	
		$\log \sin D = 8,8683$	
$p = -0,6656$	$u = -0,4717$	$\log m \sin M = 9,2876_u$	
$q = +0,5523$	$v = +0,7591$	$\log m \cos M = 9,3156_u$	
$p' = +0,5242$	$u' = +0,1014$	$\log n \sin N = 9,6261$	
$q' = -0,1638$	$v' = -0,0092$	$\log n \cos N = 9,1892_u$	
$M = 223^\circ 9'$	$\log m = 9,4525$	$N = 110^\circ 5'$	$\log n = 9,6533$
$\log \frac{m}{k} = 0,0171$		$\log \frac{m}{n} = 9,7992_u$	$\log \frac{k}{n} = 9,7821$
$\log \sin(M - N) = 9,9638$		$\log \cos(M - N) = 9,5931_u$	$\log \sin \psi = 9,4626$
$\psi = 16^\circ 52'$		$+ 0,247$	$\mp 0,176$
	Eintritt $7^h 4^m 3$	Austritt $7^h 25^m 4$	
	$Q = 37^\circ 0$	$3^\circ 2$	

10.

Die Rechnungsvorschrift, welche ENCKE bei der Construction seiner (hoffentlich durch zahlreiche Beobachtungen von Sternbedeckungen belohnt werdenden!) Ephemeride für 1830 befolgt hat, ist etwa eben so leicht als die hier gegebene, setzt aber die vorläufige Berechnung einiger Tafeln voraus [Jahrbuch f. 1830 p. 253 ff.]. Dass diese Tafeln hier erspart werden, wird es den Beobachtern an andern Orten leicht machen, jede Sternbedeckung für ihren Horizont vorauszuberechnen, wenn die bei der Berechnung der Ephemeride schon benutzten Werthe von p, q, p', q' und ebenso der Stundenwinkel des Sterns zur Zeit T , nämlich $\mu' - A$, wofür ich jetzt h schreiben werde, angegeben werden.

Diese Angaben bleiben, indem sie sich auf den Mond allein beziehen, in der Rechnung für einen andern Ort ungeändert; nur h verandert sich in $h + d$,

wenn d die, östlich positiv genommene, Länge des Orts von Berlin bedeutet. Man hat also für diesen Ort

$$\begin{aligned} a &= r \cos \varphi' \sin(h + d) \\ b &= r \cos \varphi' \cos(h + d) \\ u &= a & u' &= b \cdot \lambda \\ v &= c - b \sin D & v' &= a \cdot \lambda \sin D \end{aligned}$$

hieraus m, M, n, N und endlich die beiden Werthe von t , welche die Berliner mittleren Zeiten ergeben, bei welchen der Eintritt und Austritt an dem Orte, für welchen gerechnet worden ist, stattfinden. Auch diese erläutere ich durch die Berechnung der Bedeckung 82 Leonis für Altona.

Als gegeben werden angenommen:

$$T = 7^h \left\{ \begin{array}{l} p = -0,6656 \quad p' = +0,5242 \\ q = +0,5523 \quad q' = -0,1638 \end{array} \right\} h = -50^\circ 42'$$

Für Altona ist

$\log r \cos \varphi' = 9,77485$	$\log r \sin \varphi' = 9,90349$	$d = -3^\circ 27'$
$\log \cos \varphi' = 9,7749$	$u = -0,4827$	$c = 0,7986$
$\log \sin(h + d) = 9,9088_u$	$v = +0,7728$	$b \sin D = 0,0258$
$\log \cos(h + d) = 9,7677$	$u' = +0,0916$	
$\log a = 9,6837_u$	$v' = -0,0094$	
$\log b = 9,5426$		
$\log \lambda = 9,4192$		
$\log \sin D = 8,8683$		

$$\log m \sin M = 9,2622,$$

$$\log m \cos M = 9,3434,$$

$$\log n \sin N = 9,6361$$

$$\log n \cos N = 9,1887,$$

$$M = 219^{\circ}40'$$

$$N = 109^{\circ}39'$$

$$\log m = 9,4571$$

$$\log n = 9,6621$$

$$\log \frac{m}{k} = 0,0217$$

$$\log \frac{m}{n} = 9,7950,$$

$$\log \frac{k}{n} = 9,7733$$

$$\log \sin(M-N) = 9,9729$$

$$\log \cos(M-N) = 9,5344,$$

$$\log \sin \psi = 9,1951$$

$$\psi = 9^{\circ}1'$$

$$+ 0,214$$

$$\mp 0,093$$

Eintritt 7^h 7^m 3

= 6 53,5

$Q = 28^{\circ}7$

Austritt 7^h 18^m 4 Berliner Zeit

7 4,6 Altonaer Zeit

10^h 6

Hilftafel zur Vorausberechnung der Sternbedeckungen.

t	$\log \lambda$	x	t	$\log \lambda$	x	t	$\log \lambda$	x	t	$\log \lambda$	x
0,00	9,41916	0° 0' 0",0	0,38	9,41898	2° 51' 28",1	0,76	9,41844	5° 42' 56",2	1,14	9,41753	8° 34' 24",3
0,01	916	0 4 30,7	0,39	897	2 55 58,8	0,77	812	5 47 26,9	1,15	751	8 38 55,9
0,02	916	0 9 1,5	0,40	896	3 0 29,6	0,78	840	5 51 57,7	1,16	748	8 43 25,8
0,03	915	0 13 32,3	0,41	895	3 5 0,3	0,79	838	5 56 28,4	1,17	745	8 47 56,5
0,04	915	0 18 3,0	0,42	894	3 9 31,1	0,80	836	6 0 59,1	1,18	742	8 52 27,2
0,05	915	0 22 53,7	0,43	893	3 14 1,8	0,81	834	6 5 29,9	1,19	739	8 56 58,0
0,06	915	0 27 4,4	0,44	891	3 18 32,5	0,82	832	6 10 0,6	1,20	736	9 1 28,7
0,07	915	0 31 35,2	0,45	890	3 23 3,3	0,83	830	6 14 31,4	1,21	733	9 5 59,5
0,08	915	0 36 5,9	0,46	889	3 27 34,0	0,84	828	6 19 2,1	1,22	730	9 10 30,2
0,09	915	0 40 36,7	0,47	888	3 32 4,8	0,85	825	6 23 32,8	1,23	727	9 15 0,9
0,10	914	0 45 7,4	0,48	887	3 36 35,5	0,86	823	6 28 3,6	1,24	724	9 19 31,7
0,11	914	0 49 38,1	0,49	885	3 41 6,2	0,87	821	6 32 34,3	1,25	721	9 24 2,4
0,12	914	0 54 8,9	0,50	884	3 45 37,0	0,88	819	6 37 5,1	1,26	717	9 28 33,2
0,13	913	0 58 39,6	0,51	883	3 50 7,7	0,89	817	6 41 35,8	1,27	714	9 33 3,9
0,14	913	1 3 10,4	0,52	882	3 54 38,4	0,90	815	6 46 6,5	1,28	711	9 37 34,6
0,15	913	1 7 41,1	0,53	881	3 59 9,2	0,91	812	6 50 37,3	1,29	708	9 42 5,4
0,16	912	1 12 11,8	0,54	879	4 3 39,9	0,92	810	6 55 8,0	1,30	705	9 46 36,1
0,17	912	1 16 42,6	0,55	878	4 8 10,7	0,93	808	6 59 38,8	1,31	701	9 51 6,8
0,18	912	1 21 13,3	0,56	876	4 12 41,4	0,94	805	7 4 9,5	1,32	698	9 55 37,6
0,19	911	1 25 44,1	0,57	875	4 17 12,1	0,95	803	7 8 40,2	1,33	695	10 0 8,3
0,20	911	1 30 14,8	0,58	874	4 21 42,9	0,96	801	7 13 11,0	1,34	691	10 4 39,1
0,21	910	1 34 45,5	0,59	872	4 26 13,6	0,97	798	7 17 41,7	1,35	688	10 9 9,8
0,22	910	1 39 16,2	0,60	871	4 30 44,4	0,98	796	7 22 12,4	1,36	685	10 13 40,5
0,23	909	1 43 47,0	0,61	869	4 35 15,1	0,99	793	7 26 43,2	1,37	681	10 18 11,3
0,24	908	1 48 17,7	0,62	868	4 39 45,8	1,00	791	7 31 13,9	1,38	678	10 22 42,0
0,25	908	1 52 48,5	0,63	866	4 44 16,6	1,01	788	7 35 44,7	1,39	674	10 27 12,8
0,26	907	1 57 19,2	0,64	865	4 48 47,3	1,02	786	7 40 15,4	1,40	671	10 31 43,5
0,27	907	2 1 50,0	0,65	863	4 53 18,1	1,03	783	7 44 46,1	1,41	667	10 36 14,2
0,28	906	2 6 20,7	0,66	861	4 57 48,8	1,04	781	7 49 16,9	1,42	664	10 40 45,0
0,29	905	2 10 51,4	0,67	860	5 2 19,5	1,05	778	7 53 47,6	1,43	660	10 45 15,7
0,30	904	2 15 22,2	0,68	858	5 6 50,3	1,06	775	7 58 18,4	1,44	657	10 49 46,5
0,31	904	2 19 52,9	0,69	856	5 11 21,0	1,07	773	8 2 49,1	1,45	653	10 54 17,2
0,32	903	2 24 23,7	0,70	854	5 15 51,7	1,08	770	8 7 19,8	1,46	649	10 58 47,9
0,33	902	2 28 54,4	0,71	853	5 20 22,5	1,09	767	8 11 50,6	1,47	646	11 3 18,7
0,34	901	2 33 25,1	0,72	851	5 24 53,2	1,10	765	8 16 21,3	1,48	642	11 7 49,4
0,35	900	2 37 55,9	0,73	849	5 29 24,0	1,11	762	8 20 52,0	1,49	638	11 12 20,2
0,36	899	2 42 26,6	0,74	847	5 33 54,7	1,12	759	8 25 22,8	1,50	635	11 16 50,9
0,37	899	2 46 57,4	0,75	845	5 38 25,4	1,13	756	8 29 53,5			
0,38	898	2 51 28,1	0,76	844	5 42 56,2	1,14	753	8 34 24,3			

27. Ueber die Wirkung der Strahlenbrechung bei Mikrometer-Beobachtungen.*)

(Mon. Corresp. XVII. p. 209.)

Zu den Theilen der Astronomie, die durch wiederholte Untersuchungen nicht erschöpft wurden, gehört unstreitig die Aufgabe, von der hier die Rede ist. LALANDE war, wie es scheint, der erste, der die von der Refraction herrührende Correction bei Mikrometer-Beobachtungen vorschlug und deshalb die in der dritten Ausgabe seiner Astronomie § 2545 befindlichen Formeln gab. KAESTNER las, hierdurch veranlasst, der Königlichen Göttinger Societät im Jahr 1772 eine Abhandlung vor, worin er auch seinerseits diese Formeln aufsuchte und Ausdrücke fand, die mit den LALANDE'schen genau identisch waren. Diesen beiden übereinstimmenden Auflösungen der Aufgabe liegen indess Voraussetzungen zum Grunde, die man sich nicht erlauben darf und die auf der Uebergangung von Grössen beruhen, die Glieder von der Ordnung der zu bestimmenden Correction hervorbringen würden. Es wird sich nachher eine Gelegenheit darbieten, diese Behauptung zu rechtfertigen und zu zeigen, dass man sich durch die LALANDE'schen und KÄSTNER'schen Formeln in gewissen Fällen der Wahrheit kaum nähert. In den Comment. Petrop. für 1774 findet sich eine Formel von LEXELL, die sich jedoch nur auf einen Theil der Correction bezieht, den LALANDE richtig und mit ihr im Wesentlichen übereinstimmend entwickelt. Was CAGNOLI, Trigonometrie § 826 u. s. w. hierüber beibringt, wird von denselben Vorwürfen getroffen, die man den oben erwähnten Auflösungen machen kann, indem hier dieselben Grössen unberücksichtigt blieben.

Die Ursache, warum diese angeführten Auflösungen der Aufgabe nicht früher berichtigt wurden, liegt wohl zum Theil in dem wenigen Gebrauche, den man von ihnen machte, denn kaum wurden sie anders angewandt, als um zu erläuternden Beispielen zu dienen. Nichtsdestoweniger können diese Correctionen oft beträchtlich werden, und dann wird man sie mit eben so wenigem Rechte vernachlässigen können, als die Aberration und Nutation. In allen Fällen, wo ein beobachtetes Gestirn nicht sehr hoch stand, wird man, wenn man anders in der Angabe der einzelnen Sekunden consequent sein will, die Wirkung der Refraction berechnen müssen. Bei dem Cometen von 1769 (Astron. Jahrb. 1810) kommt eine Observation vor, die

eine Correction von $27\frac{1}{2}$ erforderte, bei mehreren andern stieg sie über 1'. Auch der Comet von 1806, der besonders bei seiner Wiedererscheinung sehr niedrig stand, die Pallas bei ihrer Opposition im Jahre 1806 u. s. w. geben neue Belege zu dem Gesagten. Eine nochmalige Untersuchung der Aufgabe scheint also keineswegs überflüssig zu sein.

Den parallactischen Winkel eines Sterns bezeichne man durch p , seine Declination durch δ , die Refraction, die er erfährt, durch ϱ ; bei einem andern Stern, dessen Ort man durch eine mikrometrische Vergleichung mit diesem bestimmen will, verwaudeln sich diese Buchstaben in p' , δ' , ϱ' . Nun hat man des ersten Sterns

$$\text{scheinbare AR} = \text{wahre AR} + \varrho \frac{\sin p}{\cos \delta}$$

$$\text{scheinbare Decl.} = \text{wahre Decl.} + \varrho \cos p.$$

Hieraus und auch aus der Natur der Sache folgt es, dass die Refraction den Parallelismus mit der wahren täglichen Bewegung stört und dem Sterne eine von der ohne Refraction Statt findenden verschiedene Geschwindigkeit beilegt.

Am kunstlosesten und natürlichsten ist es wohl, die sämtlichen Correctionen aus diesen Ausdrücken durch Differentialrechnung zu entwickeln und die dann darin vorkommenden Aenderungen der Refraction aus den Tafeln zu entlehnen; auch haben LALANDE und KAESTNER diesen Weg betreten, und sie haben die langen mühsamen Formeln, auf die er führte, nur durch die oben erwähnten Vernachlässigungen vermieden. Wenn man die Refractionen als kleine Grössen der ersten Ordnung betrachtet und auch den Declinationsunterschied der beiden Sterne zu dieser Ordnung rechnet, so wird die gesuchte Correction zu der zweiten gehören: man darf also in den Coefficienten von ϱ nicht die Grössen der ersten Ordnung vernachlässigen, wenn man die Correction vollständig haben will. Den bisherigen Formeln liegt indess diese Vernachlässigung, die sehr viel zu ihrer Vereinfachung beiträgt, zum Grunde; doch wird sie selten einen so bedeutenden Einfluss haben, als die scheinbare Bewegung der Sterne in Rectascension, auf die man bisher gar keine Rücksicht nahm. Wollte man diese Fehler verbessern, so würde man, wie schon oben bemerkt wurde, auf sehr weitläufige Formeln verfallen, zu deren Vermeidung man also einen andern Weg einschlagen muss.

*) [29 d. a. v. — Br. m. O. I. 77 (O.). 78. 80 (O.). 81 (O.). 84. 153 (O.).]

Bessel's Abhandlungen. I. Bd.

Die oben angeführten, verschiedenartig sich äussernden Wirkungen der Refraction geben Gelegenheit, die Mikrometer in drei, in dieser Hinsicht wesentlich von einander verschiedene Klassen einzutheilen. In die erste Klasse können die Mikrometer gesetzt werden, vermöge welcher man die Unterschiede der A Recta durch Antritte an Fäden, die nach der wahren täglichen Bewegung gestellt sind, die Unterschiede der Declination aber durch die Angaben eines Gradbogens, durch Revolutionen einer Schraube, oder auf andere, nur vom Zeitmaass unabhängige Art bestimmt. Hierher gehört u. a. der Aequatorial-Sector. Auf Mikrometern dieser Klasse hat weder die Richtung, noch die Geschwindigkeit der scheinbaren Bewegung Einfluss, und die Correction hängt nur von der Refraction der Sterne in den Augenblicken der Beobachtung ab. Die zweite Klasse könnte dann die Fadennetze enthalten, durch die man die Oerter der Sterne nur durch Beobachtung ihrer Antritte an mehrere Fäden, also die Declinationen nur durch das Zeitmaass bestimmen kann. Ausser der Wirkung der Refraction, die bei den Mikrometern der ersten Klasse Statt findet, kommt bei den Fadennetzen der zweiten noch die Geschwindigkeit der scheinbaren Bewegung in Betracht. Die Richtung dieser Bewegung hat nur dann Einfluss, wenn die Fäden nicht nach der wahren täglichen Bewegung gestellt sind, welches etwa durch eine feststehende parallactische Maschine bewirkt werden könnte. Die dritte Klasse enthält endlich solche Mikrometer, die keiner Bewegung parallel gestellt werden können, wo also nothwendig alle Wirkungen der Refraction Statt finden müssen, z. E. die Kreismikrometer.

Wenn man die Wirkung der Strahlenbrechung auf Mikrometer-Beobachtungen näher betrachtet, so sieht man sogleich, dass sie grösstentheils von der Veränderung der Refraction in grösseren und geringeren Höhen herrühren, also dieser Veränderung beinahe proportional sind. Da ferner die Refractionen sich fast wie die Cotangenten und ihre Veränderungen verkehrt wie die Quadrate der Sinus der Höhen verhalten, so kann man die wahre Veränderung der Refraction oder

$$\frac{d\rho}{dh} = \frac{-\alpha}{\sin h^2}$$

setzen, wo α ein von der Höhe h abhängiger Factor ist, dessen Unterschied von der Refraction für 45° , oder von $57''$, nur in kleinen Höhen beträchtlich wird, für grössere aber fast ganz verschwindet. Dieser Veränderung der Strahlenbrechung werden also die zu bestimmenden Correctionen beinahe proportional sein, und es kommt nur darauf an, zu untersuchen, ob wir diese

Proportionalität als in aller Schärfe existirend ohne merklichen Fehler annehmen können. Dann würde man in der Hypothese $\rho = 57'' \cotg h$, die auf die bequemsten Formeln zu führen scheint, die man für unseren Zweck geben kann, die Correctionen berechnen und das Fehlerhafte dieser Voraussetzung dadurch verbessern können, dass man α statt $57''$ setzt. Es wird sich unten eine Gelegenheit finden, die Rechtmässigkeit dieser Annahme zu zeigen, weshalb wir uns hier nicht weiter dabei aufhalten und sie den folgenden Rechnungen zum Grunde legen.

In dieser Hypothese ist, wie man leicht findet, die Refraction eines Sterns in

$$AR = 57'' \frac{\operatorname{tg} t \cdot \sin \psi}{\cos \delta \cdot \sin(\psi + \delta)} \dots \dots (1)$$

$$\text{Decl.} = 57'' \cotg(\psi + \delta) \dots \dots (2)$$

wo t den Stundenwinkel (die östlichen t sind negativ genommen), δ die Declination und ψ einen Hülfswinkel bedeutet, den man aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \psi = \cos t \cdot \cotg \text{ Polhöhe}$$

findet. Durch Differentirung dieser Ausdrücke findet man die Geschwindigkeit der Bewegung in

$$AR = 57'' \left(\frac{\cos \psi}{\sin(\psi + \delta) \operatorname{tg} \varphi} \right)^2 (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta \cos t) \dots (3)$$

$$\text{Decl.} = 57'' \left(\frac{\cos \psi}{\sin(\psi + \delta)} \right)^2 \cotg \varphi \sin t \dots \dots (4)$$

$$(\varphi = \text{Polhöhe}).$$

Bei der ersten Klasse der Mikrometer ist die wahre Rectascension des beobachteten Sterns = der beobachteten

$$+ 57'' \operatorname{tg} t \sin \psi \left\{ \frac{1}{\cos \delta \cdot \sin(\psi + \delta)} - \frac{1}{\cos \delta' \cdot \sin(\psi + \delta')} \right\}$$

welcher Ausdruck sich in

$$+ 57'' \frac{\sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \cdot \frac{\operatorname{tg} t \sin \psi}{\cos \delta \cos \delta'} \cos(\psi + \delta + \delta') \dots (5)$$

verwandelt. Die wahre Declination ist = der beobachteten

$$+ 57'' [\cotg(\psi + \delta) - \cotg(\psi + \delta')]$$

oder

$$+ 57'' \frac{\sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \dots \dots (6)$$

Die Correction der AR, die von der veränderten Richtung der Bewegung herrührt und die alle Mikrometer der zweiten und dritten Klasse gemein haben (den Fall, wo jene nach der wahren Bewegung gestellt sind, ausgenommen), findet man aus dem Ausdrucke

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right) \frac{d'}{\cos \delta} - \left(\frac{d\delta}{dt}\right) \frac{d}{\cos \delta} = 57'' \cos \psi^2 \cot \varphi \sin t \left\{ \frac{-d}{\sin(\psi + \delta)^2 \cos \delta} + \frac{d}{\sin(\psi + \delta)^2 \cos \delta} \right\}$$

wo d' , d die Abstände der Sterne vom Mittelpunkte des Mikrometers bedeuten, oder wo $d' - d$ dem Declinations-Unterschiede der Sterne gleich ist. Substituirt man für $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$ und $\left(\frac{d\delta'}{dt}\right)$ ihre Werthe (4), so ist diese Correction

$$= \frac{57'' \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \cdot \frac{\operatorname{tg} t \sin \psi}{\cos \delta \cos \delta'} \left\{ \cos(\psi + \delta + \delta') + \cos \psi \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta') \right\} \dots \dots \dots (8)$$

erhält.

Nicht so allgemeine Vorschriften lassen sich für die Declination geben, und die individuellen Umstände einer Beobachtung kommen dabei mehr in Betracht. Am kürzesten wäre es immer, wenn man unmittelbar die Declinations-Unterschiede so berechnete, dass man, statt die beobachteten Zwischenzeiten durch die Multiplication mit $15 \cos \delta$ (wenn man an einer nach mittlerer Zeit gehenden Uhr beobachtet mit $15,014 \cos \delta$) in Bogentheile zu verwandeln, diese Verwandlung durch den Factor (3)

$$15 \cos \delta \left\{ 1 - \sin 57'' \left(\frac{\cos \psi}{\sin(\psi + \delta) \operatorname{tg} \varphi} \right)^2 (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta \cos t) \right\} (9)$$

der die scheinbare Bewegung in einer Secunde ausdrückt, vornähme. Allein es werden oft Fälle vorkommen, wo man entweder die Declinations-Unterschiede ohne Rücksicht auf die Refraction schon berechnet hat, oder wo man andere Beobachtungen, bei denen oft nur diese angegeben sind, genauer reduciren will. Bei dieser Operation bedarf es für jede Art der Mikrometer eigene Vorschriften; indess bieten die gebräuchlichen Fadennetze Mittel dar, diese Vorschriften in einiger Allgemeinheit zu geben. Die Fäden sind nämlich so zusammengesetzt, dass sie in gewissen Punkten zusammentreffen und die Seiten von Dreiecken

$$+ 57'' \frac{\sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \left\{ 1 - \frac{\cos \psi^2}{\operatorname{tg} \varphi^2} - \cos \psi \sin \psi \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta + \delta') \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Bei dem Bradley'schen Netze erhält die Correction denselben Werth, wenn beide Sterne auf derselben Seite des Mittelpunktes vorbeigehen, oder allgemeiner, wenn ihr Declinations-Unterschied durch Antritte an, sich in

$$57'' \frac{\sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \left\{ 1 - \frac{\cos \psi^2}{\operatorname{tg} \varphi^2} - \cos \psi \sin \psi \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta + \delta') \right\} \\ + 57'' \frac{\alpha \sin i}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \left\{ \frac{\cos \psi^2}{\operatorname{tg} \varphi^2} + \cos \psi \sin \psi \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta + \delta') \right\}$$

oder auch

$$+ 57'' \frac{\sin(\delta' + \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} + \frac{\alpha \sin i - \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \left\{ \frac{\cos \psi^2}{\operatorname{tg} \varphi^2} + \cos \psi \sin \psi \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta + \delta') \right\} \dots \dots \dots (11)$$

welchen Ausdruck man, ohne Gefahr merklich zu irren

$$= 57'' \frac{\cos \psi^2 \cot \varphi \cdot \sin t \cdot \sin(\delta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta + \delta') \sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \dots \dots \dots (7)$$

setzen, und dem obigen (5) vereinigen kann, so dass man die ganze Correction der AR

bilden, deren Basis der Weg des Sterns durch das Feld des Fernrohres ist. Ganz allgemein bestimmt man daher die Unterschiede der Declinationen beider Sterne durch Perpendikel, von diesen Punkten auf die Wege der Sterne gezogen; es folgt also aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, dass die Perpendikel, die man in der Voraussetzung keiner Refraction berechnete, sich zu den wahren verhalten werden, wie (9)

$$1 : 1 - \sin 57'' \left(\frac{\cos \psi}{\sin(\psi + \delta) \operatorname{tg} \varphi} \right)^2 (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta \cos t)$$

Für ein gewöhnliches 45Graden-Mikrometer, bei welchem die Fäden nur einen Durchschnittpunkt haben, ist der Unterschied der Perpendikel der Declinations-Unterschied selbst, und folglich die Correction desselben

$$= 57'' d \left(\frac{\cos \psi}{\sin(\psi + \delta) \operatorname{tg} \varphi} \right)^2 (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta \cos t) \\ - 57'' d' \left(\frac{\cos \psi}{\sin(\psi + \delta) \operatorname{tg} \varphi} \right)^2 (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta' \cos t)$$

oder mit hinlänglicher Genauigkeit

$$- 57'' \frac{\sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \cdot \frac{\cos \psi^2}{\operatorname{tg} \varphi^2} (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta + \delta') \cos t)$$

welches, der Correction (6) vereinigt, die ganze Verbesserung der Declination gibt

einem Punkte schneidende Fäden bestimmt wird. In dem entgegengesetzten Falle aber wird sie mit hinlänglicher Genauigkeit

wo a die grösste Diagonale, i ihre Neigung gegen die tägliche Bewegung, also $a \sin i$ den Unterschied beider Spitzen des Netzes in Declination bedeutet. Es würde zu weitläufig sein, für alle möglichen Fälle, die bei dem Bradley'schen Netze vorkommen können, Vorschriften zu geben; jeder wird sie sich ohne Mühe selbst formiren, auch diese Sätze auf andere Arten der Faden-Mikrometer ausdehnen können.

Die Declinations-Unterschiede beim Gebrauche des Kreis-Mikrometers finden sich durch die Gleichungen

$$= 57'' \frac{\sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} + \frac{57'' \cdot T^2}{d \cdot \sin(\psi + \delta)^2} \left\{ \frac{\cos \psi^2}{\operatorname{tg} \varphi^2} + \cos \psi \sin \psi \operatorname{tg} \delta \right\} - \frac{57'' \cdot T'^2}{d \cdot \sin(\psi + \delta')^2} \left\{ \frac{\cos \psi'^2}{\operatorname{tg} \varphi'^2} + \cos \psi' \sin \psi' \operatorname{tg} \delta' \right\}$$

wofür man ohne merklichen Fehler setzen kann

$$\frac{57'' \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \left\{ 1 - \left[\frac{r^2}{d^2} + 1 \right] \frac{\cos \psi^2}{\operatorname{tg} \varphi^2} + \cos \psi \sin \psi \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta + \delta') \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Wir kehren nun zu der allen diesen Formeln zum Grunde liegenden Hypothese zurück, deren Fehler noch eine Verbesserung erfordern. In so fern die Correctionen von der Aenderung der Refraction abhängen, kann man die Verbesserung durch die Multiplication mit einem gemeinschaftlichen Factor, der das Verhältniss der wahren Veränderung zur angenommenen ausdrückt, anbringen. Allein die oben gegebenen Ausdrücke enthalten, obgleich nicht in dieser Gestalt, Glieder, die die Refraction selbst zum Factor haben, und die, wie man leicht findet, für

$$\text{AR} = \varrho \left(\frac{d \sin p}{\cos \delta} \right) (\delta' - \delta)$$

$$\text{Decl.} = \varrho \left(\frac{d \cos p}{d \delta} \right) (\delta' - \delta)$$

oder

$$57'' \left\{ \frac{\sin p \cos p}{\cos \delta} + \frac{\operatorname{tg} t \sin \psi \sin \delta}{\sin(\psi + \delta) \cos^2 \delta} \right\} (\delta' - \delta)$$

und

$$57'' \sin p^2 (\delta' - \delta)$$

betragen. Indess sind diese Glieder bei kleinen Höhen, für die $\psi + \delta$ immer klein ist, weit unbedeutlicher als (5) und (6), und man wird sie aus dieser Ursache mit desto mehrerem Rechte mit dem oben erwähnten gemeinschaftlichen Factor multipliciren können, je weniger er von dem abweicht, der ihnen eigentlich zukommt; für grössere Höhen nähern die Factoren sich so sehr, dass man sie ohne merklichen Irrthum mit einander verwechseln kann. Man wird es sich daher erlauben können, die ganze gefundene Correction in dem Verhältnisse

$$\frac{d^2}{d'^2} = \frac{r^2 - T^2}{r^2 - T'^2}$$

wo r der Halbmesser des Sehfeldes und T, T' die in Bogenheile verwandelten halben Durchgange-Zeiten der Sterne bedeuten. Multiplicirt man T^2, T'^2 mit dem Quadrate des Factors in (9), so erhält man dadurch den wahren Abstand des Sterns vom Mittelpunkte

$$= d + 57'' \frac{T^2}{d} \left(\frac{\cos \psi}{\sin(\psi + \delta) \operatorname{tg} \varphi} \right)^2 (1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \delta \cos t)$$

und folglich die ganze Correction der Declination (6)

$$\left(\frac{d\varrho}{dh} \right) : \left(\frac{d\varrho'}{dh'} \right)$$

zu verbessern, wo h' die scheinbare Höhe und ϱ' die wahre Bradley'sche Refraction bedeutet; oder man wird allenthalben statt $57''$ den Factor $\alpha = 57'' \left(\frac{d\varrho}{dh} \right) : \left(\frac{d\varrho'}{dh'} \right)$ setzen können. Bekanntlich sind die Bradley'schen Refractionen nach Sinussen aus der Formel

$$a \cos h' = \cos(h' + m\varrho')$$

berechnet, in welcher a und m constant sind. Hieraus folgt

$$\left(\frac{d\varrho}{dh} \right) = \frac{a \sin h' - \sin(h' + m\varrho')}{m \sin(h' + m\varrho')}$$

Und wenn man statt h' die wahre Höhe h einführt und gehörig reducirt, α oder

$$57'' \left(\frac{d\varrho'}{dh'} \right) = \frac{2a \sin m\varrho' \cdot \sin h^2}{m \sin(2h + 2[m+1]\varrho') \sin^2 h}$$

oder, weil ϱ' immer einen kleinen Bogen bedeutet, ohne merklichen Irrthum

$$\alpha = \frac{2a \cdot \varrho' \cdot \sin h^2}{\sin(2h + 2[m+1]\varrho')}$$

Dieser Werth des Factors α lässt sich leicht in eine Tafel bringen, deren Argument die wahre Höhe des Sterns, oder genauer das Mittel aus den wahren Höhen beider Sterne ist. Am Ende dieses Aufsatzes findet man diese Tafel, die nach den, den Refractionstafeln des Herrn Oberhofm. von ZACH (Tab. motuum Solis etc. Gothae 1806, pag. 22) zum Grunde liegenden Werthen von m und a berechnet wurde; zu mehrer Bequemlichkeit enthält sie nicht α selbst, sondern

seinen Logarithmen, den man also statt des Logarithmen von 57" bei der Berechnung der Correctionen anwenden muss.

Um die Uebersicht zu erleichtern, sammle ich hier alle Formeln; α bedeutet dabei immer die Zahl, deren

Logarithmen die Tafel angibt, A' die AR des zu bestimmenden Sterns, die man ohne Rücksicht auf Refraction berechnet hat, A' seine wahre AR; δ' und δ haben für die Declination dieselbe Bedeutung.

I. Refractions-Verbesserung für Mikrometer der ersten Klasse.

$$A' = A + \frac{\alpha \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \cdot \frac{\text{tg } t \sin \psi \cos(\psi + \delta + \delta')}{\cos \delta \cos \delta'}$$

$$\delta' = \delta + \frac{\alpha \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')}$$

II. Für Mikrometer der zweiten Klasse.

$$A' = A + \frac{\alpha \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \cdot \frac{\text{tg } t \sin \psi}{\cos \delta \cos \delta'} \left\{ \cos(\psi + \delta + \delta') + \cos \psi \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta') \right\}$$

$$\delta' = \delta + \frac{\alpha \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \cdot \left\{ 1 - \frac{\cos \psi^2}{\text{tg } \varphi^2} - \cos \psi \sin \psi \text{tg } \frac{1}{2}(\delta' + \delta) \right\}$$

Wegen der Aenderungen dieses letzten Ausdrucks sehe man die bei dem Bradley'schen Netze gemachten Anmerkungen. Ist der Stundenfaden dieser Mikrometer

nach der wahren täglichen Bewegung gestellt, so ist die Correction von A' , der für die erste Klasse gefundenen gleich.

III. Für Kreismikrometer.

A' wie für die zweite Klasse

$$\delta' = \delta + \frac{\alpha \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \left\{ 1 - \left(\frac{r^2}{d d'} + 1 \right) \left(\frac{\cos \psi^2}{\text{tg } \varphi^2} + \cos \psi \sin \psi \text{tg } \frac{1}{2}(\delta + \delta') \right) \right\}$$

Bei der Anwendung dieser Formeln kann keine Zweideutigkeit existiren, wenn man nur darauf achtet, ob $(\delta' - \delta)$, δ , δ' negativ oder positiv sind, und wenn man die östlichen Stundenwinkel negativ setzt. Für Höhen über 10 bis 12° wird man, wenn $(\delta' - \delta)$ nicht gar zu gross ist, α fast immer mit 57" verwechseln können; auch kann man die Formeln dadurch etwas abkürzen, dass man statt $\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')$, $\sin \left\{ \psi + \frac{1}{2}(\delta + \delta') \right\}^2$ setzt. Auf den Stand des Barometers und Thermometers kann man, wenn man die Genauigkeit so weit treiben will als möglich ist, auf die gewöhnliche Weise Rücksicht nehmen.

Um den Gebrauch der Formeln zu zeigen, führe ich hier folgendes Beispiel an, welches, weil es zugleich zu einer Prüfung ihrer Genauigkeit dienen sollte, nicht von einer Beobachtung hergenommen, sondern berechnet wurde. Durch das, 40' im Durchmesser haltende Kreismikrometer eines in 5^h westlichen Stundenwinkels und 5° südlicher Declination stehenden Fernrohres gehen zwei Sterne, deren Declinationen $\delta = -4^{\circ}50'$ und $\delta' = -5^{\circ}20'$ und deren Rectascensionen gleich sind. Mit Anwendung der Refractionen aus Herrn von ZACH's neuen Tafeln erfolgen die Ein- und Austritte dieser Sterne im Fernrohre (Polhöhe = 53°8'30"):

des nördlichen 4^h59^m45^s.436 und 5^h0^m58^s.034
des südlichen 4 59 19,634 „ 5 1 31,141

Hieraus erhält man

$$d = 17^{\circ}50',71 \quad \delta' - \delta = -29',96$$

$$d' = -11^{\circ}18,88$$

Also

$A' = A + 46'',54$	
$\delta' = -5^{\circ}19' 9'',6$	
$t = 75 \ 5 \ 27$	$2 \log \cos \psi \dots 9,98414$
$\varphi = 53 \ 8 \ 30$	$2 \log \cotg \varphi \dots 9,74976$
	$9,73390$

$\log \cos t \dots \dots \dots 9,41042$	$\log \cos \psi \sin \psi \dots 9,26944$
$\log \cotg \varphi \dots \dots \dots 9,87488$	$\log \text{tg } \frac{1}{2}(\delta + \delta') \dots 8,94918,$
$\log \text{tg } \psi \dots \dots \dots 9,28530$	$8,21862,$
$\psi \dots \dots \dots 10^{\circ}55'$	Zugehörige Zahl $-0,01654$
$\psi + \frac{1}{2}(\delta + \delta') \dots 5 \ 50$	$\frac{\cos \psi^2}{\text{tg } \varphi^2} \dots \dots \dots 0,54188$
$\log \sin \varphi \dots \dots \dots 9,90316$	Summe $\dots \dots \dots 0,52534$
$\text{cpl } \log \cos \psi \dots \dots 0,00793$	$\log \dots \dots \dots 9,72044$
$\log \sin(\psi + \frac{1}{2}(\delta + \delta')) \dots 9,00704$	$\log - \left(\frac{r^2}{d d'} + 1 \right) \dots 9,99193$

log sin h	8,91813	log $\frac{\alpha \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \frac{1}{2}(\delta' + \delta))}$	1,51762 _n
h	4° 45'		0,18061
2log r	6,15836		
log dd'	5,86134 _n	Corr. d. Decl. =	-49',9
log $\frac{r^2}{dd'}$	0,29702 _n	cos(ψ + δ + δ')	0,99931
$\frac{r^2}{dd'} + 1$	-0,9816	cosψ cos $\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$	0,97807
log α	1,60319	log	0,29622
log sin(δ' - δ)	7,92852 _n	log tang t	0,50471
2cplog sin(ψ + $\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$)	1,98591	log sin ψ	9,47737
		1,51762 _n	2cplog cos $\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$
Zugehörige Zahl	-	+ log	1,51762 _n
			1,66943 _n

Corr. der AR. — 46',7

Also ist A' = A - 0',2

δ' = -5° 19' 59",5.

Man sieht aus diesem Beispiele, dass die gegebenen Formeln so genaue Resultate geben, als man erwarten kann; indess lässt es sich nicht läugnen, dass ihre Anwendung etwas beschwerlich ist. Eine Erleichterung könnte man durch Tafeln erhalten, die für eine bestimmte Polhöhe die doppelten Argumente t und $\frac{1}{2}(\delta + \delta')$ haben würden; freilich würden auch diese nicht ohne Mühe berechnet werden können, allein ein Astronom, der viele Mikrometerbeobachtungen anstellt, würde seine Arbeit bald belohnt finden.

[Fehler des Beispiels corrigirt.]

Tafel zur Berechnung der Strahlenbrechung bei Mikrometer-Beobachtungen.

Wahre Höhe.	log. α	Wahre Höhe.	log. α	Wahre Höhe.	log. α	Wahre Höhe.	log. α	Wahre Höhe.	log. α	Wahre Höhe.	log. α	Wahre Höhe.	log. α
2° 0'	1,25625	4° 0'	1,55569	6° 0'	1,65295	8° 0'	1,69453	10° 0'	1,71546	14° 0'	1,73482	17° 0'	1,74152
10	1,29953	10	1,56793	10	1,65775	10	1,69683	20	1,71797	20	1,73575	30	1,74235
20	1,33747	20	1,57911	20	1,66220	20	1,69896	40	1,72023	40	1,73667	18 0	1,74314
30	1,37124	30	1,58939	30	1,66648	30	1,70098	11 0	1,72227	15 0	1,73754	30	1,74385
40	1,40125	40	1,59883	40	1,67046	40	1,70290	20	1,72406	30	1,73871	19 0	1,74445
50	1,42823	50	1,60755	50	1,67417	50	1,70480	40	1,72582	16 0	1,73975	30	1,74502
3 0	1,45229	5 0	1,61569	7	1,67763	9 0	1,70661	12 0	1,72743	30	1,74067	20 0	1,74556
10	1,47413	10	1,62304	10	1,68087	10	1,70829	20	1,72891				
20	1,49380	20	1,62992	20	1,68391	20	1,70997	40	1,73030				
30	1,51151	30	1,63632	30	1,68679	30	1,71133	13 0	1,73158				
40	1,52755	40	1,64227	40	1,68951	40	1,71273	20	1,73276				
50	1,54227	50	1,64780	50	1,69212	50	1,71412	40	1,73384				

28. Einige Resultate aus Bradley's Beobachtungen.*)

(Königsberger Archiv f. Naturw. u. Mathem. I. p. 369.)

Die Resultate, die ich hier den Astronomen vorlege, sind ein Theil der mir durch eine sehr sorgfältige Bearbeitung der Bradley'schen Observationen gegebenen, ein Theil der Früchte unermesslicher Rechnungen, die mich, obgleich mit einigen Unterbrechungen, seit fünf Jahren beschäftigen, und deren völligen Beendigung ich mich sehr bald zu erfreuen hoffe. Ich übergebe sie den Astronomen als Proben des unschätzbaren Gewinns, der in BRADLEY'S Beobachtungen verborgen lag; zugleich mögen sie zeigen, welche Genauigkeit und Sicherheit man von den übrigen Bestimmungen er-

warten kann, die die erwähnte Bearbeitung gab und die ich bald in einem grossen, ganz diesen Gegenständen gewidmeten Werke bekannt zu machen hoffe.

Ich wähle die Untersuchung der astronomischen Refraction zum Gegenstande der gegenwärtigen Abhandlung. So einfach die Bestimmung der Constanten zu sein scheint, die der Theorie der Refraction zum Grunde liegen, so mühsam wird sie, wenn man dabei einen ganz richtigen, alle logische Kreise ausschliessenden Weg gehen will; alsdann erfordert die Untersuchung die vorhergehenden Bestimmungen fast aller Fundamente der beobachtenden Astronomie. BRADLEY'S sich nicht nur in der Genauigkeit jeder einzelnen Observation, sondern auch in der Anordnung des Ganzen,

*) [84 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 97 (O.). 99. 160. 165. 168. 170. 172 (O.). 174. 175 (O.). 176 (O.). 316 (O.). 355. — vgl. Fundam. astr., sowie auch die folg. Abb. 38 u. 39.]

die alle der Aufmerksamkeit der Astronomen würdige Gegenstände umfasst, zeigendes, von vortrefflichen, vielleicht bis jetzt unübertroffenen Instrumenten unterstütztes Beobachtungstalent fordert die Herleitung aller zur Reduction seiner Beobachtungen notwendigen Elemente aus diesen Beobachtungen selbst, ohne Zuziehung einer fremden Bestimmung. BRADLEY'S Beobachtungen müssen also als ganz isolirt dastehend betrachtet werden, und wir sind es diesem unvergleichlichen Beobachter schuldig, aus seiner in ihrer Art einzigen Sammlung von Observationen allen den Nutzen zu ziehen, der wirklich darin verborgen liegt.

Dem hier aufgestellten Gesichtspunkte getreu werde ich meine Untersuchungen, insofern sie auf die Refraction Bezug haben, hier vorlegen; desto lieber, je glücklicher ihr Erfolg war. Ich werde ferner die Bestimmung aller Elemente mittheilen, die man benutzen muss, um die Greenwicher Beobachtungen zu reduciren.

1.

Zu Erfindung der Collimationsfehler der beiden Quadranten wurden zwei verschiedene Methoden angewandt; die eine besteht in einer Vergleichung der an den Quadranten beobachteten Zenithdistanzen einiger Sterne mit den durch den oft durch Umwendung berichtigten Zenithsector angegebenen; die andere gründet sich auf den Gebrauch BRADLEY'S, eine Anzahl Sterne in den Zwillingen sehr häufig zu beobachten; sie setzt den Collimationsfehler für eine bestimmte Epoche als bekannt voraus und gibt ihn für jede andere durch Vergleichung mit diesem. Diese minder directe Methode wurde nur dann angewandt, wenn die andere aus Mangel an Beobachtungen nicht benutzt werden konnte; die durch sie erhaltenen Collimationsfehler sind in folgender Tafel mit * bezeichnet.

Nördliche Quadranten:

1750 Aug. 20.	— 1,70 . . . 63	Observ.	} neuer Quadrant.
Dec. 31.	— 3,56 . . . 10	"	
1751 Jan. 31.	— 4,39 . . . 21	"	
Aug. 15.	— 1,12 . . . 45	"	
1752 Juli 15.	— 0,89 . . . 42	"	
1753 Juni 1.	— 2,90 . . . 8	"	} alter Quadrant.
1753 Sept. 18.	— 9,33 . . . 25	"	
1754 Febr. 18.	— 7,44 . . . 7	"	
Sept. 18.	— 7,06 . . . 13	"	

Südliche Quadranten:

1750 Oct. 15.	— 3,60 . . . 21	Observ.	} alter Quadrant.
1751 Juni 15.	— 2,85 . . . 50	"	
1752 Aug. 15.	— 2,24 . . . 27	"	

1753 Sept. 1.	+ 0,54 . . . 35	Observ.	} neuer Quadrant.
1754 Juni 15.	+ 0,64 . . . 39	"	
1755 Febr. 1.	+ 0,34 . . . 10*	"	
Aug. 15.	+ 0,47 . . . 3	"	
Oct. 10.	— 0,20 . . . 20*	"	
1756 Febr. 11.	— 0,58 . . . 32*	"	
April 25.	+ 0,75 . . . 3	"	
Sept. 30.	+ 1,81 . . . 16*	"	
1757 März 1.	— 0,21 . . . 51*	"	
Dec. 26.	— 0,38 . . . 12*	"	
1758 Febr. 27.	— 0,09 . . . 54*	"	
Juni 15.	— 0,75 . . . 14	"	
Oct. 5.	— 0,47 . . . 20*	"	
1759 März 9.	— 2,31 . . . 37*	"	
1760 Febr. 20.	— 2,12 . . . 30*	"	
Sept. 15.	— 1,35 . . . 4	"	
1761 Febr. 22.	— 2,75 . . . 53*	"	
1762 März 1.	— 9,39 . . . 13*	"	
1763 März 18.	— 3,45 . . . 18*	"	

BRADLEY selbst gebrauchte in seinen Rechnungen seit der Aufstellung des neuen Quadranten gegen Süden gar keinen Collimationsfehler; meine Tafel zeigt, dass diese Voraussetzung der Wahrheit nicht nahe genug kömmt, um zugelassen zu werden.

2.

Den Theilungsfehler des neuen Quadranten fand BRADLEY wiederholt = 0. Der Bogen von 90° war bei einer horizontalen Lage des Instruments sehr sorgfältig von BIRD bestimmt, und da sich nach der Aufhängung gegen Norden (17. Januar 1753) und späterhin gegen Süden (28. Juli 1759) diese Bestimmung bei einer verticalen Lage bestätigte, so kann man daraus auf die Solidität des Instruments schliessen. Der alte Quadrant hatte einen Theilungsfehler von — 16", wie BRADLEY durch eine Bestimmung im Sept. 1745, von der mir aber die näheren Umstände unbekannt sind, erkannte; am 11. Febr. 1753 fand er diesen Fehler = — 26". Der Unterschied von 10", der zu gross ist, um den Fehlern der von BRADLEY unternommenen Operationen zugeschrieben werden zu können, beweist die Wandelbarkeit dieses Instrumentes und begründet den Vorzug des neuen Quadranten. Man wird unten eine wahrseheinliche Erklärung dieses Unterschiedes sehen, die zugleich die Vortrefflichkeit des neuen Quadranten in helles Licht setzen wird.

Der feste Stand der Instrumente, dieses erste Erforderniss genauer Beobachtungen, war in Greenwich in hohem Grade erreicht. Den Beweis hiervon liefert die Lage des Mittagsfernrohrs, welches oft in langen Zeitintervallen sich nicht merklich änderte. Ich gebe, um dieses zu zeigen, hier die folgende, seine Abweichungen enthaltende Tafel.

Alter Styl.		a	b	c
1750	Sept. 6. bis Sept. 17.	+ 0,313	—	—
	„ 17. „ Dec. 16.	0,000	—	—
	Dec. 19. „ Jan. 7.	—	+	0,020
1751	Jan. 14. „ April 30.	—	+ 0,146	—
	Mai 1. „ Juni 3.	—	—	0,263
	Juni 4. „ Juli 13.	+ 0,202	—	—
	Juli 18. „ Aug. 12.	0,000	—	—
	Aug. 12. „ Sept. 29.	—	—	+ 0,125
	Sept. 29. „ Nov. 12.	— 0,059	—	—
	Nov. 12. „ Dec. 31.	— 0,159	—	—
1752	Jan. 1. „ Jan. 31.	— 0,500	—	—
	Febr. 1. „ Febr. 15.	0,000	—	—
	Febr. 16. „ April 30.	+ 0,250	—	—
	Mai 1. „ Juli 10.	+ 0,036	—	—
	Juli 10. „ Oct. 20.	— 0,033	—	—
Neuer Styl.				
	Oct. 20. „ Dec. 31.	— 0,159	—	—
1753	Jan. 1. „ Mai 19.	— 0,150	—	—
	Mai 20. „ Juni 11.	— 0,355	—	—
	Juni 12. „ „ 16.	—	—	+ 0,151
	„ 18. „ „ 24.	—	—	— 0,416
	„ 25. „ Sept. 19.	+ 0,069	—	—
	Sept. 19. „ „ 23.	0,000	—	—
	„ 23. „ Oct. 16.	+ 0,136	—	—
	Oct. 17. „ „ 17.	—	—	+ 1,133
	„ 18. „ Oct. 31.	0,000	—	—
	Nov. 1. „ Nov. 22.	—	+ 0,128	—
	„ 22. „ Dec. 3.	—	—	+ 0,031
	Dec. 3. „ Jan. 9.	—	—	+ 0,052
1754	Jan. 9. „ „ 30.	—	—	+ 0,123
	„ 31. „ Mai 11.	—	—	— 0,060
	Mai 12. „ Juni 11.	—	—	— 0,278
	Juni 12. „ „ 28.	+ 0,043	—	—
	„ 29. „ Juli 13.	— 0,260	—	—
	Juli 13. „ Nov. 19.	0,000	—	—
	Nov. 19. „ „ 19.	—	—	+ 0,347
	„ 20. „ Nov. 28.	—	—	+ 0,180
	„ 29. „ Dec. 2.	— 0,119	—	—
	Dec. 2. „ „ 7.	— 0,180	—	—
	„ 7. „ Febr. 10.	— 0,242	—	—
1755	Febr. 10. „ Nov. 6.	0,000	—	—
	Nov. 7. „ „ 26.	— 0,170	—	—
	„ 26. „ Dec. 22.	— 0,106	—	—
	Dec. 22. „ „ 31.	—	+ 0,056	—
1756	Jan. 1. „ Aug. 31.	—	— 0,200	—
	Sept. 1. „ Sept. 9.	+ 0,170	—	—
	„ 10. „ Nov. 27.	—	— 0,000	—
	Nov. 27. „ „ 29.	+ 0,526	—	—
	„ 29. „ Dec. 31.	+ 0,322	—	—
1757	Jan. 1. „ Febr. 12.	+ 0,200	—	—
	Febr. 13. „ März 31.	0,000	—	—
	April 1. „ Juli 19.	—	— 0,170	—
	Juli 19. „ Aug. 7.	0,000	—	—
	Aug. 8. „ Oct. 19.	+ 0,500	—	—
	Oct. 19. „ Dec. 31.	— 0,127	—	—
1758	Jan. 1. „ Juli 20.	0,000	—	—
	Juli 20. „ Nov. 24.	—	+ 0,124	—
	Nov. 24. „ „ 24.	+ 0,142	—	—
	„ 25. „ Mai 19.	0,000	—	—

		a	b	c
1759	Mai 19. bis Juni 15.	+ 0,228	—	—
	Juni 15. „ Oct. 22.	+ 0,214	—	—
	Oct. 23. „ Nov. 16.	+ 0,081	—	—
	Nov. 17. „ Juni 21.	—	—	+ 0,105
1760	Juni 21. bis } 1762 Dec. 19. }	0,000	—	—
	„ 20. „ Dec. 26.	+ 0,190	—	—
1763	Jan. 1. „ „ 8.	+ 0,360	—	—
1764	„ 14. „ „ 14.	+ 0,141	—	—

Die Correction der beobachteten Durchgänge durch den Meridian wird aus dieser Tafel nach der Formel

$$a \frac{\sin \text{Zen.-Dist.}}{\cos \text{Decl.}} + b \frac{\cos \text{Zen.-Dist.}}{\cos \text{Decl.}} + \frac{c}{\cos \text{Decl.}}$$

in welcher südliche Zenithdistanzen positiv, nördliche negativ genommen werden, berechnet. Für Durchgänge unter dem Pol wird das entgegengesetzte Zeichen genommen.

3.

Nach diesen Untersuchungen über die Instrumente, mit welchen BRADLEY seine Beobachtungen anstellte, ist es nun leicht, einen gerade zu unserem Zwecke führenden Weg zu finden. Die Bestimmung der Polhöhe konnte nun näherungsweise vorausgesetzt und damit die Declinationen der Fixsterne aus Zenithdistanzen sowohl über als unter dem Pol berechnet werden; eine Vergleichung beider musste dann die Refraction und Polhöhe geben, die den Observationen am meisten Genüge leisten. Indessen würde dieses Verfahren zu sehr auf die Voraussetzung der Richtigkeit des Quadranten gegründet sein, um vollkommenes Vertrauen zu verdienen. Wir haben zwar gesehen, dass der ganze Bogen des neuen Quadranten immer = 90° war; allein damit ist theils die Nichtexistenz zwischenliegender Theilungsfehler nicht erwiesen, theils ist es dadurch nicht entschieden, ob wirklich der Quadrant Eine Ebene bildet. Findet die letzte Voraussetzung nicht statt, so sind die Zenithdistanzen fehlerhaft, indem alsdann der Horizontalfaden nicht immer senkrecht auf dem Meridian stehen kann. Wenn μ der Winkel des Fadens mit dem Meridiane, a der Abstand des Mittelpunktes des Fernrohrs von der Ebene des Quadranten und R sein Halbmesser ist, so ist der hieraus erwachsende Fehler:

$$= \frac{a}{R} \cos \mu.$$

Bei dem Bird'schen Quadranten der Göttinger Sternwarte betrug nach TOBIAS MAYER'S Untersuchung dieser Fehler mehrere Secunden.

Diesen Unsicherheiten entgeht man, so sehr es möglich ist, indem man die Polhöhe auf eine doppelte Weise bestimmt: einmal aus den Zenithdistanzen der

Circumpolarsterne, und dann aus den Zenithdistanzen der Sonne zur Zeit der Nachtgleichen. Um aber hier die Rechnung von fremden Voraussetzungen rein zu erhalten, muss man die Declinationen der Sonne aus ihren beobachteten Rectascensionen schliessen, und diese wird man nur aus den Rectascensionen der Fundamentalsterne erhalten können. Die Bestimmung dieser muss also vorangehen. Stimmen dann beide gefundene Polhöhen überein, so ist die zu den Rechnungen gebrauchte Refraction und die Construction des Quadranten richtig, oder beider Fehler heben sich einander auf; stimmen sie nicht überein, so ist, wenn die Polhöhe von der Aequatorshöhe nicht sehr verschieden ist, das Mittel aus beiden, genauer mit Rücksicht auf das Gesetz der Refractionen genommen, die wahre, von aller fremden Hypothese möglichst unabhängige Polhöhe, welche man dann zur fernern Untersuchung der Refractionen benutzen kann.

4.

Um hier nichts zu wünschen übrig zu lassen, gebe ich zuerst meine Untersuchungen über die absoluten Rectascensionen der Fundamentalsterne, die ich auf alle mit dem neuen Quadranten gemessenen Zenithdistanzen der Sonne zwischen 14° nördlicher und 14° südlicher Declination gründete, und die ich, um nicht die vielleicht irrigte Voraussetzung zu machen, dass die Summe der Fehler des Quadranten und der Refraction in dem ganzen Umfange dieses Bogens von 28° con-

stant sei, so berechnete, dass ich immer nur in Zonen von 2° beobachtete Zenithdistanzen der Sonne sowohl in den aufsteigenden als niedersteigenden Zeichen mit einander verglich. Ich erreichte dadurch nicht nur diesen Zweck, sondern erkannte zugleich die Correctionen, die man bei den in den einzelnen Punkten des Intervalls beobachteten Zenithdistanzen anbringen muss, um die wahren, d. i. die zu finden, die die bei beiden Nachtgleichen beobachteten Rectascensionen in Uebereinstimmung bringen. Alle diese Rechnungen führte ich unter der Voraussetzung der Polhöhe = 51° 28' 40" und der Bradley'schen Refraction, bei welcher ich jedoch die Correction für die Veränderung der Temperatur = 0,0020833 für 1° des Fahrh. Thermometers voraussetzte, indem GAY-LUSSAC'S Versuche dieses Element mit grösserer Schärfe bestimmen als die astronomischen Beobachtungen; die Schiefe der Ekliptik setzte ich für 1755 = 23° 28' 14",97 und ihre jährliche Abnahme = - 0",52 voraus. Offenbar haben die Fehler, die in diesen Voraussetzungen begriffen sein können, keinen Einfluss auf das Endresultat, wenn man die Thermometercorrection davon ausnimmt.

Unter Anwendung aller Correctionen, welche die neuere Astronomie gegeben hat, ergaben sich auf die angezeigte Weise die Rectascensionen von 14 Hauptsternen durch unmittelbare Vergleichung mit der Sonne, völlig unabhängig von einander, so wie die folgende Tafel sie enthält:

	Anzahl der Beob.	AR. für 1755.	Präcession		Jährliche eigene Beweg.	Differenzen.		
			1755.	1800.		BRADLEY 1760.	HORNBY 1760.	MARKELYNE 1770.
Aldebaran	108	4 ^h 21 ^m 53 ^s ,446	3 ^h ,4104	3 ^h ,4150	+ 0 ^h ,00908	+ 0 ^h ,037	- 0 ^h ,394	+ 0 ^h ,004
Capella	137	4 58 37,998	4,3825	4,3920	+ 0,01515	- 0,024	+ 0,055	- 0,557
Rigel	134	5 2 46,440	2,8688	2,8699	+ 0,00505	- 0,082	- 0,132	- 0,160
α Orionis	170	5 41 54,867	3,2337	3,2344	+ 0,00841	+ 0,069	+ 0,009	- 0,040
Sirius	191	6 34 20,973	2,6738	2,6727	- 0,03031	+ 0,262	+ 0,075	+ 0,128
Castor	136	7 18 55,335	3,8600	3,8519	- 0,00525	+ 0,241	+ 0,155	- 0,247
Procyon	215	7 26 27,776	3,1891	3,1855	- 0,04002	+ 0,262	- 0,036	- 0,004
Pollux	200	7 30 17,392	3,7343	3,7265	- 0,04284	+ 0,399	+ 0,089	- 0,168
Regulus	73	9 55 17,956	3,2238	3,2171	- 0,01429	+ 0,165	- 0,037	- 0,196
Spica	14	13 12 19,045	3,1344	3,1394	+ 0,00470	+ 0,199	+ 0,067	- 0,081
Arcturus	129	14 4 29,677	2,8047	2,8040	- 0,07509	+ 0,210	- 0,116	- 0,055
α Lyrae	174	18 28 38,771	2,0058	2,0052	+ 0,02092	- 0,169	- 0,104	- 0,138
α Aquilae	253	19 38 49,600	2,8863	2,8846	+ 0,04155	- 0,192	- 0,102	- 0,005
α Cygni	128	20 33 5,263	2,0350	2,0350	+ 0,00064	- 0,022	- 0,169	- 0,108

Die eigenen Bewegungen sind aus einer Vergleichung mit MARKELYNE'S und PIAZZI'S Bestimmungen für 1805 geschlossen.

5.

Dieselben Beobachtungen, die die absoluten Aescensionen gegeben hatten, ergaben den Einfluss der Irr-

thümer der der Rechnung zum Grunde gelegten Voraussetzungen (Art. 4). Die folgende Tafel enthält diese Correctionen der beobachteten Rectascensionen in Zeit, ihre Zeichen sind richtig für eine Herbstnachtgleiche und müssen für eine Frühlingsnachtgleiche geändert werden.

Declination der Sonne.

- 14° bis - 12° . . .	0,093	96	Observ.
- 12 " - 10 " . . .	0,095	106	"
- 10 " - 8 " . . .	0,150	69	"
- 8 " - 6 " . . .	0,062	108	"
- 6 " - 4 " . . .	0,174	107	"
- 4 " - 2 " . . .	0,038	94	"
- 2 " 0 " . . .	+ 0,224	145	"
0 " + 2 " . . .	+ 0,005	120	"
+ 2 " + 4 " . . .	+ 0,067	185	"
+ 4 " + 6 " . . .	+ 0,100	153	"
+ 6 " + 8 " . . .	+ 0,026	112	"
+ 8 " + 10 " . . .	+ 0,114	143	"
+ 10 " + 12 " . . .	+ 0,060	122	"
+ 12 " + 14 " . . .	+ 0,168	130	"

Durch diese Zahlen wurde jede einzelne Beobachtung verbessert, und so erhielt man die in der Tafel enthaltenen Rectascensionen bei allen Sternen fast vollkommen übereinstimmend aus beiden Nachtgleichen.

Die grosse Wichtigkeit der genauen Kenntniss der Rectascensionen der Fundamentalsterne macht die Angaben mehrerer Details der Rechnung, welches allein die Beurtheilung der Genauigkeit der Bestimmung leiten kann, wünschenswerth; allein ich unterdrückte es hier, um nicht weiltätig zu werden. In meinem grösseren Werke wird man indess sehen, dass auch hier BRADLEY'S Beobachtungen das Lob der unübertroffenen Genauigkeit verdienen, indem ich dort zeigen werde, dass der Fehler der beobachteten Zenithdistanzen selten oder nie 3 bis 4" beträgt*).

6.

Nennt man die Correctionen der angenommenen Schiefe der Ekliptik, Polhöhe und Bradley'schen Refraction für 45°: $d\omega$, $d\varphi$, $d\alpha$; ferner die Correction der durch den Quadranten angegebenen Zenithdistanz $z = c(x)$, so hat man, vermöge der im vorigen Artikel gegebenen Correctionstafel, die Verbesserungen der unter den gemachten Voraussetzungen berechneten Declinationen:

- 13° . . .	0',49	- 0,600 $d\omega$	- $d\varphi$	- 2,094 $d\alpha$	- $c(64^{\circ}29')$
- 11° . . .	0,83	- 0,513 $d\omega$	- $d\varphi$	- 1,919 $d\alpha$	- $c(62^{\circ}29')$
- 9° . . .	0,89	- 0,423 $d\omega$	- $d\varphi$	- 1,766 $d\alpha$	- $c(60^{\circ}29')$
- 7° . . .	0,39	- 0,331 $d\omega$	- $d\varphi$	- 1,630 $d\alpha$	- $c(58^{\circ}29')$
- 5° . . .	1,10	- 0,238 $d\omega$	- $d\varphi$	- 1,509 $d\alpha$	- $c(56^{\circ}29')$
- 3° . . .	0,25	- 0,143 $d\omega$	- $d\varphi$	- 1,401 $d\alpha$	- $c(54^{\circ}29')$
- 1° . . .	1,46	- 0,048 $d\omega$	- $d\varphi$	- 1,302 $d\alpha$	- $c(52^{\circ}29')$
+ 1° . . .	+ 0,03	+ 0,048 $d\omega$	- $d\varphi$	- 1,212 $d\alpha$	- $c(50^{\circ}29')$
+ 3° . . .	+ 0,43	+ 0,143 $d\omega$	- $d\varphi$	- 1,129 $d\alpha$	- $c(48^{\circ}29')$
+ 5° . . .	- 0,63	+ 0,238 $d\omega$	- $d\varphi$	- 1,053 $d\alpha$	- $c(46^{\circ}29')$

*) [Fund. astr. p. 18 ff.]

+ 7° . . .	+ 0',16	+ 0,331 $d\omega$	- $d\varphi$	- 0,982 $d\alpha$	- $c(44^{\circ}29')$
+ 9° . . .	- 0,67	+ 0,423 $d\omega$	- $d\varphi$	- 0,915 $d\alpha$	- $c(42^{\circ}29')$
+ 11° . . .	- 0,34	+ 0,523 $d\omega$	- $d\varphi$	- 0,853 $d\alpha$	- $c(40^{\circ}29')$
+ 13° . . .	- 0,88	+ 0,600 $d\omega$	- $d\varphi$	- 0,793 $d\alpha$	- $c(38^{\circ}29')$

Das Mittel aus allen diesen Bestimmungen ist, unter der Voraussetzung, dass das Mittel aus den Correctionen des Quadranten die Correction für die mittlere Zenithdistanz ist:

$$-0,292 = d\varphi - 1,3256 d\alpha - c(51^{\circ}29') \dots 1690 \text{ Observ.}$$

Die beobachteten Zenithdistanzen der Circumpolarsterne gaben die folgenden Bestimmungen der Polhöhe:

Polarstern	= 51°28' 38",27	- 0,803 $d\alpha$	217	Observ.
δ Ursae min.	= 38,79	- 0,806 $d\alpha$	9	"
Anon. 8°24' 82",22'	= 39,86	- 0,816 $d\alpha$	19	"
43 Cephei Hev.	= 39,79	- 0,807 $d\alpha$	25	"
Anon. 10°15' 85°50'	= 39,94	- 0,808 $d\alpha$	14	"
39 Cephei Hev.	= 40,03	- 0,813 $d\alpha$	4	"
Anon. 184°4' 89°4'	= 40,38	- 0,807 $d\alpha$	4	"
Anon. 7°29' 87°42'	= 38,13	- 0,803 $d\alpha$	4	"
32 Camelop. Hev.	= 40,42	- 0,815 $d\alpha$	10	"
" " "	= 40,63	- 0,815 $d\alpha$	4	"
Anon. 356°0' 81°49'	= 38,66	- 0,834 $d\alpha$	4	"
4 Dracon. Hev. el.	= 40,61	- 0,808 $d\alpha$	4	"
Mittel	= 51°28' 39",456	- 0,8149 $d\alpha$	318	Obs.

Es schien mir nicht zweckmässig zu sein, aus diesen 12 Bestimmungen das Mittel so zu nehmen, dass jeder einzelnen Beobachtung dabei gleicher Werth zugestanden wird. Alsdann würde das Resultat, welches der Polarstern gab, einen unverhältnissmässig grossen Einfluss erlangt haben, den ich ihm nicht zugestehen wollte, indem dadurch ein leicht möglicher Theilungsfehler von einer oder einigen Secunden an einer der Stellen des Quadranten, an welcher die Zenithdistanzen bei beiden Culminationen gemessen wurden, fast ganz auf das Resultat übertragen sein würde. Da aber eine Ansicht des sehr regelmässigen Ganges der Observationen zeigt, dass die Fehler der Beobachtungen selbst immer sehr klein sind, so glaubte ich diese weit weniger fürchten zu müssen, als die mögliche Unrichtigkeit der Theilstriche. Aus diesem Grunde legte ich den einzelnen Bestimmungen die Werthe

$$4, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1$$

bei und erhielt so das oben angegebene Mittel.

Wir haben also gefunden aus den beobachteten Zenithdistanzen der

$$\text{Circumpolarsterne } d\varphi = -0,292 - 0,8149 d\alpha - c(38^{\circ}31')$$

$$\text{Sonne } \dots \dots \dots d\varphi = -0,292 + 1,3256 d\alpha + c(51^{\circ}29')$$

und hieraus ergibt sich $d\varphi = -0,44$ oder die Polhöhe

$$= 51^{\circ}28'39,56$$

wofür ich in runder Zahl annehmen werde

= 51° 28' 39",6 . . . 2008 Observ.

Obleich wir allerdings Ursache haben, die beiden Bedingungsgleichungen, die diese Polhöhe ergaben, und damit das daraus gezogene Resultat als sehr genau vorauszusetzen, so würde es doch zu gewagt sein, wenn man aus diesen Gleichungen $\delta\alpha$ bestimmen wollte. Es würde nämlich $\delta\alpha$ um

— Corr. für 38° 31' + Corr. für 51° 29'

2,416

oder etwa um den ganzen Fehler des Quadranten irrig ausfallen, statt dass dieser Fehler bei der Bestimmung der Polhöhe sich sehr nahe, vielleicht ganz, aufhebt. Man muss daher $\delta\alpha$ aus Beobachtungen herleiten, bei welchen es mehr vergrößert erscheint.

7.

Die jetzt bestimmte Polhöhe wurde zur Berechnung der Abweichungen einiger oft bei ihrer unteren Culmination beobachteter Sterne, welche ich zur Grundlage der ferneren Untersuchungen über die Strahlenbrechung wählte, benutzt. Diese Abweichungen wurden später, als mir der wahre Werth von $\delta\alpha$ bekannt geworden war, um unerhebliche Kleinigkeiten geändert. Da diese mit grosser Schärfe berechneten Resultate Interesse haben, so theile ich sie als einen Theil des grossen auf BRADLEY'S Beobachtungen gegründeten Catalogen auf 3175 Sternen hier mit.

	Declination		Präcession		Eigene Bewegung	Anz. der Beob.
	1755.	1755.	1755.	1805.		
α Lyrae	38° 34' 11",44	+ 1",985	+ 2",099	+ 0",849	51	
β Persei	39 59 30,2	+ 14,63	+ 14,40	+ 0,077	4	
ζ Aurigae	40 41 21,1	+ 6,41	+ 6,10	+ 0,026	6	
η "	40 52 27,1	+ 6,08	+ 5,79	+ 0,009	6	
γ Andromed.	41 8 28,5	+ 17,80	+ 17,68	— 0,012	3	
μ Ursae maj.	42 43 15,8	— 17,57	— 17,79	+ 0,046	2	
ξ Cygni	42 57 38,5	+ 13,91	+ 14,01	+ 0,078	5	
α "	44 24 56,66	+ 12,404	+ 12,522	+ 0,040	50	
δ "	44 32 39,8	+ 8,25	+ 8,38	+ 0,191	4	
Capella	45 43 4,8	+ 5,302	+ 4,989	— 0,429	50	
ι Herculis	46 8 54,5	— 2,40	— 2,27	+ 0,122	4	
δ Persei	46 58 47,4	+ 12,49	+ 12,24	— 0,034	12	
θ "	48 10 27,1	+ 16,02	+ 15,83	— 0,044	8	
2π Cygni	48 11 4,7	+ 16,28	+ 16,38	+ 0,017	12	
ι Ursae maj.	48 59 1,4	— 13,02	— 13,25	— 0,252	4	
α Persei	48 57 59,5	+ 13,73	+ 13,50	+ 0,029	14	
θ Cygni	49 39 51,7	+ 7,65	+ 7,76	+ 0,300	17	
η Ursae maj.	50 32 39,0	— 18,22	— 18,16	— 0,034	15	
ι Cygni	51 13 3,1	+ 7,13	+ 7,24	+ 0,164	34	
γ Draconis	51 31 40,6	— 0,804	— 0,693	— 0,027	58	
ν Persei	51 44 24,7	+ 15,51	+ 15,31	— 0,024	8	
β Draconis	52 29 33,3	— 3,06	— 2,96	+ 0,043	39	
γ Persei	52 31 31,7	+ 14,33	+ 14,72	+ 0,038	14	

	Declination		Präcession		Eigene Bewegung	Anz. der Beob.
	1755.	1755.	1755.	1805.		
κ Cygni	52° 55' 33",6	+ 6",14	+ 6",24	+ 0",163	32	
ϕ Cassiopeae	53 50 20,8	+ 19,42	+ 19,35	+ 0,003	7	
α "	55 11 23,7	+ 19,89	+ 19,86	— 0,013	9	
ζ Ursae maj.	56 12 41,3	— 18,99	— 18,93	— 0,006	11	
β "	57 41 21,1	— 19,02	— 19,10	— 0,016	9	
β Cassiopeae	57 47 53,5	+ 20,03	+ 20,03	— 0,200	10	

Später unten werde ich die mittelst dieser Declinationen berechneten Strahlenbrechungen zugleich mit der Vergleichung der darauf gebauten Theorie geben.

8.

Bekanntlich hat Herr Graf LAPLACE bei seiner bewunderungswürdigen Bearbeitung der Theorie der Refraction zwei verschiedene Ausdrücke gefunden; der eine gibt die Refractionen unter der Voraussetzung

der Dichte der Atmosphäre im Verhältnisse $c \frac{r}{r'}$, der andere folgt aus einem zusammengesetzteren Verhältnisse, welches den Vorzug hat, eine leichtere Rechnung zu gewähren und den beobachteten Wärmeabnahmen und Refractionen zugleich zu entsprechen. Diese wichtigen Vorzüge des anderen Ausdrucks, dessen Erfindung immer die Bewunderung der Geometer erregen wird, würden auch mich veranlassen haben, ihn meinen Untersuchungen zum Grunde zu legen. Allein wenn man ihn annimmt, so muss man entweder auf die Untersuchung der Horizontalrefraction aus astronomischen Beobachtungen Verzicht leisten, oder wenn diese bedeutend von der dem erwähnten Ausdrücke zum Grunde liegenden, der Bradley'schen, verschieden gefunden werden sollte, die Uebereinstimmung des Gesetzes der Wärmeabnahme aufopfern. Die discutirten Beobachtungen schienen mir nun eine weit grössere Horizontalrefraction anzudeuten, als TOBIAS MAYER und BRADLEY bestimmten, und für diese entfernte sich die erwähnte Voraussetzung über die Constitution der Atmosphäre sehr weit von der beobachteten Wärmeabnahme.

Dieses ist die Ursache, warum ich in den ersten Laplace'schen Ausdruck meinen Rechnungen zum Grunde legte. Da wir die Unregelmässigkeiten der unteren Schichten der Atmosphäre nicht der Rechnung unterwerfen und folglich nicht die Wahrheit ganz erreichen können, so nahm ich für die Abnahme der specifischen Elasticität der Luftschichten die einfachste Hypothese die sich darbot und setzte (die Bezeichnungen der Mécanique Céleste beibehalten):

$$\frac{p(\vartheta)}{(p)\vartheta} = c \frac{r}{r'}$$

29*

woraus näherungsweise

$$\varphi = (\varphi) c \frac{(\varphi - \beta)}{g^i} a s$$

folgt. Eine sehr sorgfältige Discussion der Observationen gab mir nun, unter Voraussetzung von

$$t = 4161,5 \text{ Toisen} \times [1 + (t - 50) 0,00208333]$$

$$a = 3266330 \text{ Toisen,}$$

wo t die Grade des von BRADLEY gebrauchten Thermometers bedeuten, die Werthe der Constanten:

$$\alpha = \frac{57,538 \cdot b : 29,6}{[1 + (t - 50) 0,00208333] [1 + (t - 50) 0,0001025]}$$

$$g = 38383,2 \text{ Toisen.}$$

Es ist wahr, dass die aus dem Ausdrucke $c \frac{-\alpha}{g}$ folgende Wärmeabnahme geringer ist als die beobachtete; allein ich glaubte in der Wahl, entweder die Uebereinstimmung bei dieser Beobachtung oder bei den astronomischen Observationen aufzuopfern, nicht zweifelhaft sein zu dürfen.

Die Horizontalrefraction für 29,6 Zoll des Barometers und 50° des von BRADLEY gebrauchten Thermometers findet sich aus meinen Constanten = 36' 6",51; unsere bisherigen Refractionstafeln geben sie bedeutend kleiner und vereinigen sich nicht so gut mit den Observationen als die meinigen. Dieser Unterschied scheint mir indess leicht erklärlich zu sein: ehe uns Herr Graf LAPLACE und Herr KRAMP die wahre Theorie der Refractionen gaben, wurden diese immer nach der SIMPSON'schen Regel berechnet; diese gibt aber die Zunahme der Refraction sehr nahe am Horizont viel geringer, als die scharfe Integration der Differentialgleichungen; BRADLEY und TOBIAS MAYER mussten daher, indem sie der unrichtigen Theorie folgten, entweder alle Refractionen für Höhen unter 1° bis 2° bedeutend zu klein,

$$\delta \theta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \text{tg } \theta \cdot \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{5}{8} \alpha^3 + \dots \\ & + \text{tg } \theta^2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha + \alpha^2 - \frac{15}{8} \alpha^3 - \beta \left(1 + \frac{9}{4} \alpha + \frac{55}{12} \alpha^2 \right) \dots \right\} \\ & + \text{tg } \theta^4 \left\{ \frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{15}{8} \alpha^3 - \beta \left(\frac{9}{4} \alpha + \frac{55}{6} \alpha^2 \right) + \beta^2 \left(3 + \frac{105}{8} \alpha \right) \dots \right\} \\ & + \text{tg } \theta^6 \left\{ \frac{5}{8} \alpha^2 - \beta \left(\frac{55}{12} \alpha^2 \right) + \beta^2 \left(\frac{105}{8} \alpha + \frac{2975}{36} \alpha^2 \right) - \beta^3 \left(15 + \frac{1575}{16} \alpha \right) \right\} \end{aligned} \right\}$$

etc. etc.

Wenn man für α und β ihre für den oben angegebenen Zustand der Atmosphäre, oder für $b = 29,6$ und $t = 50^\circ$ stattfindenden Werthe setzt, so hat man

$$\delta \theta = 57,5621 \text{ tg } \theta - 0,06919 \text{ tg } \theta^2 + 0,0003073 \text{ tg } \theta^3 - 0,00000151 \text{ tg } \theta^4.$$

Die Berechnung der Refraction für grössere Zenithdistanzen ist wegen der dabei vorkommenden Function Ψ schwieriger. Indess habe ich diese Schwierigkeit durch

oder für kleine Höhen über 1° bis 2° bedeutend zu gross finden. Es ist keinem Zweifel unterworfen, dass Gründe genug vorhanden waren, sie für das erstere zu entscheiden, indem die dem Horizont sehr nahen Refractionen ohnedies zu unregelmässig sind, um auf sie so fest rechnen zu können als auf die übrigen.

9.

Die nach den gegebenen Werthen von α und g entworfenen Tafeln sind auf den Ausdruck Mécanique Céleste IV. B. p. 251. gegründet:

$$\delta \theta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \sqrt{\frac{2}{\beta}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & c^{\frac{-\alpha}{\beta \sin^2 \theta}} \Psi \left(\frac{\cotg \theta}{\sqrt{\frac{2}{\beta}}} \right) \\ & + 2^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha}{\beta \sin \theta^2} \cdot c^{\frac{-\alpha}{\beta \sin^2 \theta}} \Psi \left(\frac{\cotg \theta}{\sqrt{\frac{2}{\beta}}} \right) \\ & + \frac{3^{\frac{3}{2}}}{1 \cdot 2} \left(\frac{\alpha}{\beta \sin \theta^2} \right)^2 \cdot c^{\frac{-3\alpha}{\beta \sin^2 \theta}} \Psi \left(\frac{\cotg \theta}{\sqrt{\frac{2}{\beta}}} \right) \\ & + \frac{4^{\frac{3}{2}}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{\alpha}{\beta \sin \theta^2} \right)^3 \cdot c^{\frac{-4\alpha}{\beta \sin^2 \theta}} \Psi \left(\frac{\cotg \theta}{\sqrt{\frac{2}{\beta}}} \right) \\ & \text{etc. etc.} \end{aligned} \right\}$$

in welchem ich β für $\frac{g^2}{a(g - t)}$ geschrieben habe.

Es ist sehr leicht, diesen Ausdruck in eine Reihe zu entwickeln, welche nach Potenzen der Tangente der Zenithdistanz fortgeht und weit leichter zum Ziele führt, als dieser Ausdruck selbst, wenn die Zenithdistanz nicht grösser ist als 75° bis 78°; die so erhaltene Reihe schliesst sich, indem sie eine bloss Transformation ist, aufs Genaueste an den Laplace'schen Ausdruck an; ihre merklichen Glieder sind folgende:

eine sehr bequeme Hilfstafel, die ich in meinem grösseren Werke bekannt machen werde, zu heben gesucht*).

* [Fund. astr. p. 45 ff.]

10.

Die dieser Abhandlung angehängten Refractionstafeln haben eine von der gewöhnlichen verschiedene Einrichtung. Man setze nämlich gewöhnlich voraus, dass die Refractionen sich verhalten wie die Dichtigkeiten der Luft am Orte des Beobachters, oder

$$\delta \theta = \frac{\text{Refr. Tab.} \times (1 + y)}{1 + (t - 50) 0,00280333}$$

$$\delta \theta = \left\{ R + R'(t - 50) + R''(t - 50)^2 \right\} \left\{ 1 + A \left(\frac{b : 29,6}{1 + (t - 50) 0,0001025} - 1 \right) \right\}$$

Meine Tafel enthält R, R', R'' und A . Man kann in-
dess die Berechnung der Refractionen, ohne dadurch

LAPLACE hat auf den hieraus entstehenden Fehler aufmerksam gemacht und Méc. Cél. IV. B. p. 271 einen schärferen Ausdruck gegeben. Ich habe mich genau an die Theorie gehalten, welche für die beobachteten Thermometer- und Barometerstände t und b ohne merklichen Fehler gibt:

etwas Wesentliches aufzuopfern, noch etwas erleichtern, wenn man setzt:

$$\delta \theta = \left\{ R + R'(t - 50) + R''(t - 50)^2 \right\} \left\{ \frac{b : 29,6}{1 + (t - 50) 0,0001025} \right\} A$$

oder

$$\log \delta \theta = \log \left\{ R + R'(t - 50) + R''(t - 50)^2 \right\} + A \log \frac{b}{29,6} - 0,0000445 (t - 50)$$

Wenn die Zenithdistanz kleiner als 80° ist, wird man selbst bei den schärfsten Rechnungen $A = 1$ setzen können, und bei Zenithdistanzen unter 75° wird man nie merklich irren, wenn man die Refraction aus der Formel

$$\delta \theta = \frac{R(b : 29,6)}{\{1 + (t - 50) 0,00280333\} \{1 + (t - 50) 0,0001025\}}$$

berechnet. Die Werthe dieses Multiplicators von R findet man in meiner zweiten Tafel.

11.

Zum Beweise der guten Uebereinstimmung der Refractionstafeln mit den Observationen gebe ich hier ihre Vergleichung mit sämmtlichen Beobachtungen.

Da es sich zeigte, dass für Zenithdistanzen unter 87° die Tafeln immer so genau übereinstimmten, dass keine merklichen Unregelmässigkeiten im Gange der aus verschiedenen Observationen desselben Sterns hergeleiteten Fehler stattfanden, so habe ich noch für die über 87° hinaus beobachteten Zenithdistanzen die Vergleichung mit einzelnen Beobachtungen in die Tafel gesetzt, für alle übrigen aber ein Mittel aus mehreren Observationen genommen und auf den Barometerstand von 29,6 Zoll reducirt. In der letzten Columne habe ich eine Vergleichung mit DELAMBRE'S Tafeln gegeben, indem es dadurch sichtbar wird, dass wirklich BRADLEY'S Horizontalrefraction zu klein ist.

	[Stern.]	Beob.	Beob.	Baro-	Thermo-	Fehler der Tafeln.	
		Z. - D.	Refract.	meter.	meter.	BRADLEY.	DELAMBRE.
1750 Octbr. 13	α Lyrae	89° 27,03	30' 3,6	30,11	37,75	+ 39,73	- 59,73
" 29		26,48	30 39,3	29,58	32	- 1,5	- 109,9
Novbr. 5		27,23	29 55,4	29,58	28	+ 78,0	- 43,5
" 28	γ Cygni	27,48	29 50,4	29,91	31	+ 78,5	- 27,6
1751 Febr. 14		27,28	30 18,6	29,97	31,5	+ 54,3	- 56,6
Octbr. 25		26,22	30 45,7	29,95	38,25	- 25,6	- 119,8
1752 Novbr. 2	β Persei	26,43	30 29,2	30,25	35,75	+ 29,0	- 74,5
1750 Octbr. 29		88 39,76	22 56,7	29,58	31,75	+ 21,4	- 14,7
Novbr. 6		39,45	23 15,8	29,60	28	+ 18,0	- 23,9
" 7	38,30	24 25,8	29,47	22,5	- 38,0	- 90,8	
" 10	39,78	22 55,8	29,50	32,5	+ 19,2	- 19,7	
" 28	39,23	23 32,5	29,92	30	+ 10,4	- 32,8	
1751 März 30	β Persei	41,06	22 9,4	29,25	42	+ 22,6	- 2,9
Octbr. 25		39,42	23 3,5	29,95	37,5	+ 8,8	- 23,6
1752 Jan. 15		39,17	23 35,2	30,27	37	- 7,0	- 41,2
Novbr. 2	38,92	24 31,0	30,27	34,75	- 54,5	- 91,9	
" 13	40,25	24 12,5	30,19	48,5	- 29,0	- 48,8	
1751 Jan. 17.	β Persei	88 12,72	19 52,4	29,59	35	+ 19,3	+ 0,3
" 18.		12,47	20 7,3	29,77	35	+ 10,1	- 8,5

	[Stern.]	Beob. Z. - D.	Beob. Refract.	Baro- meter.	Thermo- meter.	Fehler der Tafeln.	
						BESSEL.	DELABRE.
1752 Mai 29	β Persei	88° 13,34	19' 27,6	30,16	54°	+ 4,3	+ 3,2
1751 April 2	ζ Aurigae	87 33,10	17 12,7	30,15	33,5	+ 6,2	- 1,7
Mai 31		33,80	16 38,4	30,30	51	- 1,6	+ 2,4
Juni 15		34,34	16 5,8	30,09	62	- 3,3	+ 7,7
Juli 4		34,25	16 12,7	29,89	53	+ 6,6	+ 12,1
1752 Juni 27		34,53	15 48,5	29,83	61	+ 8,6	+ 19,2
Juli 7		34,68	15 39,7	29,84	69	- 2,2	+ 13,1
1751 April 2	η Aurigae	87 22,72	16 28,7	30,15	33,5	+ 6,8	+ 1,1
Mai 31		23,51	15 47,4	30,30	51	+ 9,6	+ 15,3
Juni 15		23,86	15 26,5	30,09	62	- 3,0	+ 7,6
" 18		23,99	15 19,8	29,92	63,25	- 4,6	+ 7,0
" 30		23,93	15 24,8	29,88	56	+ 7,3	+ 14,7
Juli 4		23,73	15 37,0	29,89	53	+ 2,3	+ 8,0
1752 Juni 15		23,67	15 35,5	30,05	56	+ 1,0	+ 8,2
1753 Jan. 27		87 23,94	15 17,0	29,83	61	+ 0,9	+ 11,3
Juli 7		24,25	14 59,4	29,84	69	+ 0,5	+ 14,9
1751 Jan. 18	γ Androm.	87 8,50	15 17,1	29,77	35	+ 8,9	+ 5,0
Mai 29		9,22	14 49,0	30,16	56	- 0,4	+ 7,0
" 30		9,21	14 49,6	30,27	54	+ 7,3	+ 13,4
" 31		9,18	14 51,8	30,30	55	+ 3,3	+ 10,2
1752 März 29		8,60	15 5,0	29,40	36	+ 7,1	+ 4,3
Mai 22		8,92	14 51,5	30,10	53	+ 1,5	+ 7,4
1753 Mai 29		8,71	14 49,1	30,23	50	- 7,2	+ 1,9
3 Beobacht.	μ Ursae maj.	85 36,5	11 7,33	29,6	37,67	+ 2,2	+ 3,5
3 "		36,5	11 46,01	"	50,33	+ 2,7	+ 6,8
10 "	ξ Cygni	85 23	11 46,55	"	37,03	- 2,6	- 0,8
14 "	α Cygni	83 58	8 44,78	"	29,95	- 0,8	+ 0,5
11 "		58	8 29,65	"	40,38	+ 1,2	+ 3,8
14 "	δ Cygni	83 50,5	8 29,37	"	37,07	- 3,5	- 1,2
7 "	Capella	82 41	7 16,57	"	33,84	+ 1,2	+ 1,7
20 "		41	6 56,83	"	55,73	- 1,2	+ 1,5
22 "		41	6 47,83	"	64,68	- 0,6	+ 2,9
5 "	ϵ Hercul.	82 15,5	6 59,80	"	30,50	- 0,8	+ 0,1
5 "		15,5	6 49,70	"	41,25	- 1,3	+ 0,4
12 "	δ Persei	81 27	5 58,04	"	58,19	+ 0,4	+ 3,2
6 "	θ Persei	80 16	5 24,05	"	48,42	+ 0,4	+ 2,3
2 "	2π Cygni	80 15	5 34,59	"	34,00	+ 0,3	+ 1,6
6 "	ι Ursae maj.	79 27	5 5,83	"	40,88	+ 0,1	+ 1,1
15 "	α Persei	79 29	4 54,95	"	55,35	+ 2,1	+ 3,6
14 "	θ Cygni	78 47	4 53,33	"	33,68	- 0,5	+ 0,4
3 "	η Ursae maj.	77 53	4 29,86	"	35,25	+ 0,6	+ 1,8
15 "	ι Cygni	77 14	4 18,22	"	34,37	- 0,8	+ 0,1
17 "	γ Draconis	76 56	4 8,43	"	37,10	+ 1,5	+ 2,4
10 "	τ Persei	76 44	3 52,93	"	55,25	+ 3,5	+ 4,9
15 "	β Draconis	75 58	3 51,40	"	36,82	+ 1,5	+ 2,3
12 "	γ Persei	75 57	3 40,44	"	55,65	+ 2,5	+ 3,8
15 "	κ Cygni	75 32	3 47,94	"	34,05	- 0,6	+ 0,2
10 "	ϕ Cassiopeae	74 38,36	3 30,89	"	40,85	- 0,5	+ 0,5
6 "	α Cassiopeae	73 17,69	3 13,42	"	39,37	+ 0,5	+ 1,3
8 "	ζ Ursae maj.	72 14,81	3 2,03	"	38,63	+ 0,2	+ 0,9
15 "	β Ursae maj.	70 46,50	2 46,28	"	44,17	- 0,7	0,0
3 "	β Cassiopeae	70 41,68	2 49,06	"	35,17	- 0,8	- 0,3

12.

Meine Theorie stützt sich nur auf die Beobacht-

ungen der Circumpolarsterne; ich habe dabei sorgfältig
vermieden, eine Sonnenbeobachtung zur Bestimmung

der Constanten concurriren zu lassen, indem man neuerlich geglaubt hat, die Brechung der Sonnenstrahlen von der des Fixsternlichtes verschieden zu finden. Aus diesem Grunde ist es nothwendig, dass ich die Resultate einer Reduction der von BRADLEY beobachteten Solstitien hier anführe, welche ich unter Berücksichtigung der Breite der Sonne und der Solarnutation so erhielt, wie das folgende Tableau sie enthält:

Wintersonnenwenden.

	Scheinbare Schiefe.	Mittl. Schiefe für 1. Jan. 1755.	
1753	23° 28' 77,73	23° 28' 16,98	4 Observ.
1754	7,95	17,88	4 "
1755	5,23	15,38	9 "
1756	6,05	15,37	4 "
1757	7,92	14,65	6 "
1758	10,30	15,57	2 "
1759	11,97	14,56	6 "
1760	14,12	14,05	4 "

Sommersonnennwenden.

	Scheinbare Schiefe.	Mittl. Schiefe für 1. Jan. 1755.	
1754	23° 28' 57,41	23° 28' 14,92	7 Observ.
1755	6,20	16,38	9 "
1756	3,29	13,12	8 "
1757	6,13	14,71	7 "
1758	9,91	16,42	7 "
1759	12,09	16,04	8 "
1760	16,75	17,99	4 "

Das Mittel, mit Rücksicht auf die Anzahl der Beobachtungen genommen, ist:

Wintersonnenwenden . . .	23° 28' 15,37	39	Observ.
Sommersonnenwenden . . .	15,49	50	"
Alle Beobachtungen . . .	15,44	89	"

Diese vortreffliche Harmonie zwischen beiden nach meinen Elementen berechneten Sonnenwenden bestätigt die Richtigkeit meiner Tafeln. Zugleich entscheidet sie über verschiedene bis jetzt zweifelhafte Punkte der Astronomie und macht es höchst wahrscheinlich, dass die von neueren Beobachtern gefundenen Unterschiede zwischen den Sommer- und Wintersonnenwenden nur von Zufälligkeiten herrühren. Nach einer im XVI. Bande der Monatl. Corresp. des Herrn VON ZACH befindlichen Zusammenstellung der von PIAZZI beobachteten Schiefen der Ekliptik findet man, nach Verbesserung der Polhöhe von Palermo (— 17,5), für 1800 aus

10 Sommersonnenwenden . . .	23° 27' 56,14
9 Wintersonnenwenden . . .	51,96
Mittel	54,05

und hieraus, aus einer Vergleichung mit 1755, die jährliche Veränderung = — 0,4765.

Die Benützung von MASKELYNE'S neuen Observationen der Schiefe der Ekliptik habe ich nicht gewagt, indem der Greenwicher Quadrant sich seit BRADLEY'S Zeit bedeutend geändert hat; er hat eine Excentricität erhalten, die ich zwar schon vor einigen Jahren aus den Beobachtungen erkannte, allein nicht vor der Beendigung aller meiner Rechnungen über die Greenwicher Beobachtungen zu bestimmen wage; in einer mir durch Herrn BURCKHARDT in Paris und Herrn Dr. OLBERS mitgetheilten, von MASKELYNE selbst entworfenen Tafel scheint mir jedoch diese Excentricität etwas zu gross angegeben zu sein. — Die Resultate, die Herr DELAMBRE über die Schiefe der Ekliptik durch sehr zahlreiche und vortreffliche Observationen erhielt, scheinen die jährliche Abnahme etwas geringer zu geben, doch sind sie mir nicht detaillirt genug bekannt, um dieses sicher behaupten zu können.

Da meine Rechnungen eine vollkommene Uebereinstimmung in den aus beiden Solstitien hergeleiteten Schiefen geben, so wird der Unterschied, den PIAZZI fand, desto problematischer; er würde sich erklären lassen, wenn man annehmen könnte, dass PIAZZI'S Kreis alle Zenithdistanzen um eine Secunde zu klein angibt: die hieraus folgende Verbesserung der Polhöhe würde nämlich — 1", die der Schiefe aus den Sommersolstitien — 2" und aus den Wintersolstitien + 2" sein, und alsdann würden sie übereinstimmen. Allein obgleich es zu gewagt sein würde, diese Correctionen anzunehmen, so scheint es mir doch sicherer, sich an das Mittel aus beiden Solstitien zu halten, als mit PIAZZI die Wintersolstitien, gegen deren Richtigkeit sich keine erheblichen Zweifel äussern lassen als gegen die der Sommersonnenwenden, ganz bei Seite zu setzen. Ich behalte mir übrigens vor, die interessante Frage, warum die neueren Astronomen fast sämmtlich die Winterschiefen kleiner finden als die im Sommer beobachteten, aus den vorhandenen Beobachtungen zu discutiren, in der Hoffnung, dadurch nicht unwichtige Winke für die beobachtende Astronomie zu erhalten.

13.

Da meine Tafeln ganz den Greenwicher Beobachtungen entsprechen, so glaube ich durch sie für die Sicherheit der Reductionen dieser wichtigen Thatsachen nicht unwesentlich gewonnen zu haben. Will man sie auf andere Beobachtungsorter anwenden, so darf man die Bemerkung BRADLEY'S nicht vergessen, nach welcher das gebrauchte Fahrenheit'sche Thermometer im October 1750 1 bis 1½°, im Mittel 1,25°, höher stand, als es stehen sollte. Ist diese Bemerkung richtig, so

gilt meine Tafel nicht eigentlich für 50° Fahrenheit, sondern für 48°,75; diesen Unterschied, der auf BRADLEY'S Beobachtungen selbst keinen Einfluss hat, habe ich bei der Vergleichung mit DELAMBRE'S Tafeln berücksichtigt. Ich habe mir früher Mühe gegeben, aus England noch befriedigendere Nachrichten über BRADLEY'S Thermometer zu erhalten, allein es ist mir nicht gelungen.

Da es mir interessant scheint, meine Tafeln durch unter ungewöhnlichen Umständen gemachte Beobachtungen zu prüfen, so wähle ich die beiden bekannten von SVANBERG gemessenen Zenithdistanzen der Sonne

	Zen.-Dist.	Refract.	Barom.	Thermometer.
1802 Dec. 23.	89° 43'	45",7	37 47",68	28°,81
1803 Jan. 3.	89 5 6,2	32 14,93	29,28	- 20,20 (- 18,95)

Meine Tafeln irren bei diesen Beobachtungen um $- 86",1$ und $- 32",6$, die von DELAMBRE um $- 5' 18",3$ und $- 3' 35",0$.

Es wird unnöthig sein, hier noch mehrere Prüfungen der fast vollkommenen Uebereinstimmung der Theorie mit den Beobachtungen zu geben, sonst würde es mir leicht sein, aus dem auf die Bradley'schen Beobachtungen gegründeten Fixsternencatalog für 1755 sehr zahlreiche Beispiele anzuführen, um dadurch zu zeigen, dass die aus Culminationen über und unter dem Pol nach meinen Reductionselementen geschlossenen Declinationen sehr vieler nördlicher Sterne immer wenn die untere nur drei bis vier Grad über dem Horizont stattfand, so nahe mit einander übereinstimmen, dass sich dabei gar nichts mehr wünschen lässt.

14.

Mit den aus den vorhergehenden Untersuchungen folgenden Werthen

$$\begin{aligned} d\omega &= + 0',47 \\ d\varphi &= - 0',40 \end{aligned}$$

und unter der Voraussetzung der Refraction meiner Tafeln finden sich nun die Correctionen, die man den nach meinen Elementen berechneten Declinationen hinzufügen muss, aus Art. 6:

$- 13^\circ = + 0',71$	$+ 1^\circ = + 1',03$
$- 11 = + 0,63$	$+ 3 = + 1,48$
$- 9 = + 0,24$	$+ 5 = + 0,42$
$- 7 = + 0,72$	$+ 7 = + 1,22$
$- 5 = - 0,06$	$+ 9 = + 0,47$
$- 3 = + 0,67$	$+ 11 = + 0,93$
$- 1 = + 2,36$	$+ 13 = + 0,49$

im Mittel $= + 0',80$, welche Correction wahrscheinlich von der im 3. Art. erwähnten Ursache herrührt. Die hier gefundenen Zahlen sind sehr wichtig für die Be-

rechnung der Declinationen. Durch ihre Anwendung erhält man diese ganz unabhängig von den Fehlern des Quadranten und der zur Reduction angewandten Elemente.

Wollte man aus den Art. 6 befindlichen Angaben $d\omega$ selbst bestimmen, so würde man aus den drei äusseren Werthen der Tafel finden:

$$\begin{aligned} - 0',64 - 0,512 d\omega &= d\varphi - 1,926 d\alpha - c(62^\circ 29') \\ - 0,63 + 0,512 d\omega &= d\varphi - 0,854 d\alpha - c(40^\circ 29') \\ + 0',01 + 1,024 d\omega &= 1,072 d\alpha + c(62^\circ 29') - c(40^\circ 29') \end{aligned}$$

und wenn man $d\alpha = + 0',5$ setzt, wie meine Untersuchungen es ergeben,

$$\begin{aligned} d\omega &= + 0',51 \\ \text{oder } \omega &= 29^\circ 28' 15",48 \end{aligned}$$

übereinstimmend mit dem ω , welches Art. 12 die Solstitien ergaben. Alle diese Prüfungen beweisen die Vortrefflichkeit des neuen Quadranten zu BRADLEY'S Zeiten, das Talent dieses bewunderungswürdigen Beobachters und die Güte und Sicherheit der Bestimmungen, von denen ich hier den Astronomen vorläufig einige mittheile.

15.

Um die Elemente zur Reduction der Greenwicher Beobachtungen vollständig zu liefern, gebe ich hier einige der Resultate, die ich aus einer Untersuchung des alten Quadranten erhielt. Ich verglich nämlich die Declinationen mehrerer Sterne, die mir der neue Quadrant gegeben hatte, mit denen die der alte ergab und suchte auf diese Weise den Theilungsfehler der letzteren und seine Wandelbarkeit auszumitteln. So erhielt ich die Correctionen der beobachteten Zenithdistanzen:

für 22° 53' = - 5',54 aus 10 Beob. d. Pollux		Therm. = 55°,65
31 1 = - 6,19	14 " "	Areturus " 44,57
31 1 = - 5,27	7 " "	" " 54,21
31 1 = - 5,19	14 " "	" " 63,29
45 38 = - 10,82	17 " "	Procyon " 56,76
61 21 = - 14,20	9 " "	Spica " 42,33
61 21 = - 11,71	8 " "	" " 62,63
67 53 = - 17,55	4 " "	Sirius " 40,56
67 53 = - 13,48	9 " "	" " 58,94
67 53 = - 12,09	16 " "	" " 64,09

Die hierbei benutzten, mit dem neuen Quadranten bestimmten Declinationen für 1755 sind folgende:

Pollux	= + 28° 35' 40",75	... 33	Observ.
Areturus	= + 20 28 5,60	... 50	"
Procyon	= + 5 49 59,30	... 50	"
Spica	= - 9 52 27,74	... 21	"
Sirius	= - 16 23 53,8	... 50	"

Es ist hieraus klar, dass der Bogen des Quadranten, wie BRADLEY (Art. 2) schon fand, zu klein

ist, und ferner, dass der Fehler für eine höhere Temperatur geringer wird. Ich glaubte daher die beobachteten Zenithdistanzen durch die Formel

$$\frac{\text{Zen.-Dist.}}{90^\circ} \left\{ m + \gamma (t - 50) \right\}$$

corrigiren zu können, in welcher m den ganzen Theilungsfehler für $t = 50^\circ$ und γ seine Aenderung für jeden Grad des Thermometers bedeutet. Die angeführten Vergleichen gaben mir nun diese Constanten, und damit die Correction der Zenithdistanz:

$$= \frac{\text{Zen.-Dist.}}{90^\circ} \left\{ -19,69 + 0,253 (t - 50) \right\}$$

Mit dieser Formel stimmen die oben gegebenen Fehler der Zenithdistanzen wie folgt überein:

+0',5, -1',1, -1',1, -0',4, +1',7, -0',5, +0',5, +0',9, +0',4, +0',9.

Wie oben angeführt wurde, fand BRADLEY am 11. Febr. 1753 den Theilungsfehler = -26'', bei einem Thermometerstande von 35°. Meine Formel gibt dafür

- 23',5, sodass der Unterschied nur 2',5 betrügt. Im Sept. 1745 hatte er den Theilungsfehler = -16',0 gefunden; dieser setzt eine Temperatur von 64',6 voraus, wie sie in der That im September in Greenwich gewöhnlich ist. Da sowohl die astronomischen Beobachtungen als die directen Versuche so nahe mit meiner Formel übereinstimmen, so halte ich sie für gerechtfertigt und glaube demnach annehmen zu dürfen, dass das Metall des Limbus des alten Quadranten stärkere Veränderungen durch die Temperatur erleidet, als die übrigen Theile des Instruments. Bei dieser Gelegenheit lasse ich nicht unerwähnt, dass eine sehr sorgfältige Untersuchung mir bei dem neuen Quadranten $\gamma = 0$ gegeben hat, woraus sowohl die Unveränderlichkeit dieses schönen Instruments, als die Uebereinstimmung des angenommenen Factors der Thermometercorrection der Strahlenbrechung mit den Greenwicher Beobachtungen folgt.

Refractions-Tafel *

für einen Barometerstand von 29,6 engl. Zollen, und für 50° des von BRADLEY gebrauchten Fahrenheit'schen Thermometers (Art. 10).

Zen.-Dist.	R	R'	R''	Zen.-Dist.	R	R'	R''	Zen.-Dist.	R	R'	R''	A
0°	0',00	0',000	+ 0',0000	40°	48',26	- 0',101	+ 0',0002	80°	5' 15',08	- 0',682	+ 0',0014	1,004
5	5,03	- 0,010	+ 0,0000	45	57,50	- 0,120	+ 0,0002	81	5 48,07	- 0,762	+ 0,0017	1,005
10	10,15	- 0,021	+ 0,0000	50	1' 8,49	- 0,143	+ 0,0003	82	6 28,22	- 0,857	+ 0,0019	1,006
15	15,43	- 0,031	+ 0,0001	55	1 22,02	- 0,171	+ 0,0004	83	7 18,09	- 0,980	+ 0,0022	1,007
20	20,95	- 0,044	+ 0,0001	60	1 39,35	- 0,208	+ 0,0004	84	8 21,62	- 1,142	+ 0,0025	1,010
25	26,83	- 0,055	+ 0,0001	65	2 2,76	- 0,257	+ 0,0005	85	9 44,28	- 1,363	+ 0,0028	1,013
30	33,23	- 0,069	+ 0,0001	70	2 36,75	- 0,329	+ 0,0007	86	11 36,89	- 1,688	+ 0,0037	1,017
35	40,29	- 0,084	+ 0,0002	75	3 31,38	- 0,448	+ 0,0009	87	14 15,63	- 2,185	+ 0,0047	1,024
40	48,26	- 0,101	+ 0,0002	80	5 15,08	- 0,682	+ 0,0014	88	18 13,99	- 2,992	+ 0,0069	1,036
								89	24 38,03	- 4,514	+ 0,0127	1,059
								90	36 6,51	- 7,842	+ 0,0247	1,105

Tafel II. *)

Logarithmen der Correctionsfactoren der Refraction für den Thermometerstand t und den Barometerstand b .

t		t	b	
20°	0,02946	50°	0,00000	28,0 9,97587
25	0,02440	55	9,99529	28,5 9,98355
30	0,01942	60	9,99061	29,0 9,99111
35	0,01448	65	9,98600	29,5 9,99853
40	0,00960	70	9,98142	30,0 0,00683
45	0,00478	75	9,97690	30,5 0,01301
50	0,00000	80	9,97241	31,0 0,02007

*) [Auszug. Tafel I schreitet im Original von 1° zu 1° bez. 10' zu 10', Taf. II von 1° zu 1° bez. 0',1 zu 0',1 fort.]

29. Ueber die astronomische Strahlenbrechung.*)

(Bode's Jahrb. f. 1826, p. 216).

In der VII. Abtheilung meiner Beobachtungen habe ich untersucht, welche Grösse man der Strahlenbrechung beilegen muss, wenn sie den Beobachtungen mit dem Reichenbach'schen Meridiankreise so nahe als möglich Genüge leisten soll; — ich habe dabei die Tafel in den Fundamentis Astronomiae zum Grunde gelegt und angenommen, dass die anzubringenden Veränderungen den Strahlenbrechungen selbst proportional sind. Diese Voraussetzung kann man, vom Zenith bis zu etwa 5° Höhe, unbedenklich gelten lassen, und bis zu dieser Grenze habe ich den Factor, mit welchem die Zahlen der Tafel multiplicirt werden müssen = 1,003282 gefunden.

Später habe ich Gelegenheit gehabt, die Scale meines Barometers zu prüfen, wodurch ich erkannt habe, dass sie einen beständigen Fehler von genau einer halben Linie hat, um welche die Höhen vermehrt werden müssen; dieses hat die Wirkung, dass die nach der Formel $\rho \cdot 1,003282$ berechneten Strahlenbrechungen nicht zu dem Barometerstande = 29,6 Zoll Engl., sondern zu einem um eine halbe Linie höheren gehören, also zu 333,78 L. Paris, so dass also der Factor womit die Tafel multiplicirt werden muss wenn sie

für 29,6 Zoll Engl. und 48,75 Fahr.

gelten soll, nur = 1,001779 ist. Meine neue Bestimmung der Strahlenbrechung ist also mit der früheren auf BRADLEY'S Beobachtungen gegründeten, übereinstimmend, wenn man die letztere nicht für 48,75 F. sondern für 49,66 F. geltend annimmt; sie gilt eigentlich für 50° des von BRADLEY gebrauchten Thermometers, allein die Bemerkung, dass dasselbe Thermometer die Temperatur des schmelzenden Schnees einen bis anderthalb Grad zu hoch angab, veranlasste mich, 50° desselben = 48,75 F. zu setzen; hiergegen hat mein vortrefflicher, leider nun verewigter Freund TRALLES erinnert, dass die Thermometer im schmelzenden Schnee, wenn derselbe bereits mit Wasser vermischt ist, stets etwas zu hoch stehen, so dass die angebrachte Verbesserung des Thermometers zweifelhaft wird, und der unbedeutende Unterschied meiner beiden Bestimmungen ganz in den Grenzen dieses Zweifels liegt. — Da die neue Bestimmung auf einem Thermometer beruht, welches ich nach der in der VII. Abtheilung meiner Beobachtungen dargestell-

ten Methode*) mit der äussersten Schärfe berichtigt habe, so ist dabei kein Zweifel dieser Art vorhanden.

Nach dieser neuen Uebereinstimmung zweier, auf so verschiedenen Wegen abgeleiteten Bestimmungen der Strahlenbrechung glaube ich, dass dieselbe nur äusserst wenig zweifelhaft sein kann. Allein anders verhält es sich ganz in der Nähe des Horizonts, wo jede einzelne Beobachtung einer Refraction, durch zufällige Erwärmung des Erdbodens und der unteren Luftschichten, so bedeutende Aenderungen erleidet, dass eine grosse Menge derselben, unter den verschiedensten Umständen angestellt, nothwendig sind, um das Mittel einermassen von diesen Zufälligkeiten zu befreien. Da eine so zahlreiche und vollständige Reihe von Beobachtungen, als hier nothwendig ist, noch nicht vorhanden war, so ist es nicht zu verwundern, dass fast alle älteren Tafeln die Horizontalstrahlenbrechung viel zu klein machen; zu gross findet man sie nie angegeben, weil die Simpson'sche Theorie, welche jenen Tafeln zum Grunde liegt, eine zu kleine Horizontalstrahlenbrechung erfordert, wenn sie für Höhen von einigen Graden sich nicht gar zu weit von der Wahrheit entfernen soll. Man kann nicht läugnen, dass die Strahlenbrechungen in sehr kleinen Höhen noch fast unbekannt waren, und mehr auf den Hypothesen, welche man über die Dichtigkeit der Luft machte, als auf wirklichen Beobachtungen beruhten; der Versuch, welchen ich auf BRADLEY'S Beobachtungen gründete, hat den Zweifel vielleicht vermindert, aber dennoch blieb eine vollständige, ausschliesslich diesem Gegenstande gewidmete Beobachtungsreihe äusserst wünschenswerth, indem sie sowohl diesen Theil der Astronomie fester begründen, als die Wahl der Annahmen über das Gesetz der Dichtigkeit der Luft leiten konnte.

Aus diesem Grunde ersuchte ich Herrn Dr. ARGELANDER, seine Thätigkeit auf der hiesigen Sternwarte mit einer Beobachtungsreihe dieser Art zu eröffnen; er benutzte dazu den Cary'schen Kreis, der zu diesem Zweck gegen Westen gewandt wurde, und mit welchem er die Zeiten beobachtete, wann die untergehenden Sterne die Zenithdistanzen 85°, 85°30', 86°, . . bis 89°30' erreichten; einige Beobachtungen gelangen ihm noch bei 89°45', aber kein Stern konnte bis an den, meistens nicht ganz freien, Horizont verfolgt werden, und er

*) [171 d. a. Verz. — 1. Sept. 1823 eingesandt. Vgl. auch die folgende Abb. 30. — Br. m. O. II. 249.]

*) [Vergl. die betr. Abhandlung unter „Physik“.]

konnte nur zwei Horizontalrefractionen durch die Sonne erhalten. Die Original-Beobachtungen befinden sich in meiner VII. Abtheilung, die Resultate ihrer, durch Herrn Dr. ANGELANDER unternommenen Berechnung, werden in der VII. erscheinen; ich glaube aber, den Astronomen keine ganz uninteressante Mittheilung zu machen, wenn ich dieselben hier anführe*). Die aus wenigeren Beobachtungen gezogenen Resultate lasse ich jedoch hier weg, und gebe nur die Verbesserungen in den Fundamentis Astr., welche von 85° Z. D. bis 89° 30' von halben zu halben Grad gehören; bringt man sie an die Zahlen der Tafel an; so gilt dieselbe für 333,78 Lin. Barometer und 48°75 F. Thermometerstand.†)

Es folgt also hieraus, dass meine Tafel in den Fundamentis bei 88° Z. D. anfängt, etwas zu grosse Strahlenbrechungen zu geben; wie gross die mittlere Horizontalrefraction, bei dem vorausgesetzten Stande der meteorologischen Instrumente, sein wird, lässt sich, ohne weitere theoretische Untersuchungen, nicht genau angeben, doch scheint sie auf etwa 35' 30" zu kommen.

Mein gegenwärtiger Gehülfe, Herr ROSENBERGER, dessen vorzügliche Fähigkeiten und Eifer der Astro-

nomie Viel verheissen, hat die oben angeführten wahrscheinlichen Fehler der Resultate berechnet, zugleich aber ausgemittelt, welchen wahrscheinlichen Fehler eine einzelne, nach meinen, durch die oben angeführten Zahlen verbesserten Tafeln, besitzt. Um die Uebersicht zu vervollständigen, führe ich hier die von mir selbst, früher, für kleinere Zenithdistanzen gefundenen w. Fehler mit an**).

Wenn man die Tafeln ohne Rücksicht auf die Vergrößerung der Wärmeverbesserung in der Nähe des Horizonts anwenden wollte, so würden die wahrscheinlichen Unregelmässigkeiten der Strahlenbrechungen sehr bedeutend grösser sein.

Diese verschiedenen Resultate beruhen allein auf den Beobachtungen der Fixsterne, welche sämmtlich bei Nacht, also zu einer Zeit gemacht sind, in welcher die durch den Sonnenschein hervorgerufenen Unregelmässigkeiten, wahrscheinlich weit kleiner sind als bei Tage. Die Untergänge der Sonne geben, in der Nähe des Horizonts, durchgängig kleinere Strahlenbrechungen, allein der Unterschied, welcher bei 0° 30' Höhe eine halbe Minute beträgt, ist schon bei der Höhe von 5° sehr gering.

30. Ueber Refraction.***)

(Astr. Nachr. 2. p. 381. — Aus einem Briefe an SCHUMACHER vom 10. Novbr. 1823.)

Für die gütige Mittheilung der Zweifel, welche Herr — †) gegen meine Refractionen aufstellt, bin ich Ihnen sehr verbunden, und benutze die mir dadurch gegebene Veranlassung, Ihnen zusammenzustellen, was die neuesten Untersuchungen dieses Gegenstandes gegeben haben.

Bei meinen Bemühungen um diese Materie habe ich die Refractionen nicht allein als Mittel, die beobachteten Zenithdistanzen zu reduciren, betrachtet, sondern geglaubt, dass ihre Festsetzung ein Interesse für sich besitzt. In dieser Ausdehnung genommen, erfordert die Auflösung der Aufgabe die Fortsetzung der

Tafel bis zum Horizonte; handelt es sich dagegen nur um die Reduction der Beobachtungen, so darf die Tafel nur bis zu den Höhen nöthig sein, in welchen die Sterne noch ruhig und deutlich erscheinen, die nächsten 5 Grade bei dem Horizonte könnten dann füglich ganz unbekannt bleiben. — Ich habe aber, wie gesagt, eine andere Ansicht befolgt, auch geglaubt, dass gerade die geringen Höhen das sicherste Mittel geben, die Richtigkeit der dem Ganzen zum Grunde liegenden Theorie zu prüfen.

Man kann die Strahlenbrechungen in der Nähe des Horizonts von den entfernteren fast ganz trennen, indem eine kleine Aenderung der ersteren auf die letzten nur unmerklichen Einfluss äussert. Diese letzteren, bei 85° Zd., glaube ich so bestimmt zu haben, dass dabei wenig mehr zu wünschen ist; meine eigenen Beobachtungen gaben nämlich eine Vergrößerung der aus BRADLEY'S Beobachtungen abgeleiteten Tafel in den Fundamentis Astron. im Verhältnisse 1:1,003282, und wenn man einen später entdeckten Fehler der Scale meines Barometers in Rechnung bringt, 1:1,001779,

*) [Vgl. die identischen Zahlen der folg. Abh. 30, p. 236.]

**) [Vgl. die identischen Zahlen der folg. Abh. 30, p. 237.]

***) [174 d. a. Verz. — Vgl. auch die vorangehende Abhandlung 29. — Br. m. O. II. 249.]

†) Es stand hier der Name eines der ausgezeichneteten Physiker und Mathematiker, da aber die berührten Zweifel mir nur in Privatbriefen mitgetheilt sind, so habe ich mich nicht für befugt gehalten, ihn öffentlich mit Namen anzuführen.

SCHUMACHER.

so dass beide Bestimmungen bei der Zd. = 80° noch nicht 0,6 verschieden sind. Dieser Unterschied verschwindet ganz, wenn man die Tafel in den Fund. Astr. für 49,66 F. gültig annimmt; sie gilt eigentlich für 50° des Bradley'schen Thermometers, welche ich = 48,75 F. annahm, aus einem Grunde, welchen, wie Sie wissen, TRALLES nicht für hinreichend erkannte; — der kleine Unterschied kann also vielleicht allein vom Thermometer herrühren, und da hierüber keine Sicherheit vorhanden ist, so sieht man zwar, dass beide Beobachtungsreihen sehr nahe übereinstimmen, den kleinen Unterschied kann man aber nicht näher angeben.

Wenn BRADLEY'S und meine Beobachtungen hier so gut übereinstimmen, so liegt dieses wohl an der Vollständigkeit beider Reihen und an der Möglichkeit, aus beiden die constanten Fehler zu eliminiren. Weit weniger vollständig waren aber BRADLEY'S Beobachtungen in der Nähe des Horizontes, und wenn sie auch keine Zweifel darüber übrig liessen, dass DELAMBRE'S Tafel hier zu kleine Refractionen gibt, so war eine weit zahlreichere Reihe von Beobachtungen doch desto wünschenswerther, da die zufälligen Störungen der Refraction, welche aus uns unbekanntem Unregelmässigkeiten der unteren Luftschichten entstehen, das mittlere Resultat weniger Beobachtungen sehr stark entstellen können. Diese Lücke füllte, auf meine Bitte, Herr Dr. ARGELANDER aus, indem er, mit dem Cary'schen Kreise, eine Anzahl von Sternen, von 85° Zd. bis zu 89° 30', sehr häufig und unter den verschiedensten Umständen, welche die heftigste Kälte und die Wärme des Sommers umfassen, beobachtete. Diese Beobachtungen habe ich in der VII. Abtheilung meiner Tagebücher bekannt gemacht; ihre Berechnung findet sich in der VIII. und aus dieser entlehne ich hier die folgenden Verbesserungen, welche man an die Tafeln in den Fundamentis Astr. anbringen muss, um sie für den Barometerstand von 333.78 L. Paris und 48,75 des Fahren. Thermometers gültig zu machen:

Z. D.	Wahrsch. F.
85° 0' + 0,05 . 47 Beobb. . . .	0,71
30 + 3,30 . 50 " . . .	0,67
86 0 + 1,97 . 56 " . . .	0,65
30 — 0,77 . 63 " . . .	0,64
87 0 — 1,42 . 75 " . . .	0,68
30 — 1,19 . 75 " . . .	0,79
88 0 — 5,46 . 82 " . . .	0,98
30 — 10,35 . 80 " . . .	1,28
89 0 — 13,60 . 51 " . . .	2,44
30 — 24,06 . 30 " . . .	3,74

Es geht hieraus hervor, dass die Tafeln in den Fundamentis von 88° Zd. bis zum Horizonte zu grosse

Refractionen geben; dasselbe folgt aus der Vergleichung mit BRADLEY'S Beobachtungen F. A. p. 53, und ich würde die Horizontalrefraction in der That etwas verkleinert haben, wenn nicht die beiden Sonnenbeobachtungen von SVANBERG eine grössere angäben. — Will man die Theorie den hiesigen Beobachtungen ganz anschliessen, so muss man, wenn man die Form beibehält, welche ich angenommen habe, zwar die von mir durch g bezeichnete Grösse verkleinern, aber eine Uebereinstimmung mit der durch Herrn GAY-LUSSAC bei seiner Luftfahrt beobachteten Wärmeabnahme wird man dadurch noch nicht erhalten.

Es ist keinem Zweifel unterworfen, dass man die beobachteten Refractionen durch die Theorie darstellen wird, sobald man das wahre Gesetz der specifischen Elasticität der Atmosphäre kennt; wenn daher die Uebereinstimmung fehlt, so müssen entweder die astronomischen Beobachtungen oder die Annahme über die specifische Elasticität, welche der Rechnung zum Grunde gelegt worden ist, irrig sein. Welches von beiden das Sicherere ist, darüber kann nach der vollständigen hiesigen Beobachtungsreihe wohl kaum ein Zweifel sein, zumal da die in vier verschiedenen Jahren wiederholten Thermometerbeobachtungen des Herrn ZUMSTEIN auf dem Mont-Rosa äusserst abweichende Resultate liefern und dadurch beweisen, dass die Wärmeabnahme der Atmosphäre nichts weniger als gleichförmig ist; — man kann noch hinzufügen, dass die directen Beobachtungen der Wärmeabnahme immer am Tage, die der Refractionen stets in der Nacht gemacht sind und dass die Erwärmung der Erdoberfläche durch den Sonnenschein wahrscheinlich die Wärmeabnahme vergrössert hat. — Meines Erachtens müsste man die Wärmeabnahme gerade aus den Beobachtungen der Strahlenbrechungen folgern, wobei aber die Unbekanntheit mit dem mathematischen Gesetze derselben noch eine Schwierigkeit erzeugen würde; es scheint mir wahrscheinlich, dass am Tage beobachtete Refractionen eine grössere Wärmeabnahme geben werden, als Nachtbeobachtungen.

Auch dieses wird durch Herrn ARGELANDER'S Observationen bestätigt: ausser den Fixsternen bei Nacht beobachtete er auch den Untergang der Sonne, und dieser ergibt durchgängig kleinere Strahlenbrechungen, als die oben angeführten, auf die Fixsterne gegründeten; ich glaube aber, dass eine Refractionstafel für die Nacht eingerichtet werden muss, indem dann, wegen der Abwesenheit der Sonne, die Atmosphäre wahrscheinlich mehr im Gleichgewichte ist. — Der Aufgang der Sonne würde vielleicht ein entgegengesetztes Resultat geliefert

haben, allein es fehlte an Gelegenheit, diesen hier zu beobachten.

Aus dem, was ich hier angeführt habe, geht hervor, dass ich darin nicht mit Herrn — übereinstimme, eine Refractionstheorie deshalb für unrichtig zu halten, weil sie nicht mit der Wärmeabnahme übereinstimmt, welche als direct beobachtet angenommen wird. Herr — führt zwar an, dass DELAMBRE'S Beobachtungen eine Horizontalstrahlenbrechung geben, welche mit Herrn GAY-LUSSAC'S Wärmeabnahme übereinstimmt, allein meines Wissens sind diese Beobachtungen nie bekannt geworden und man kann daher nicht beurtheilen, ob sie hinlänglich zahlreich und im Horizonte selbst, oder vielleicht in einiger Entfernung von demselben gemacht sind; Herr DELAMBRE äusserte sich bei dieser Gelegenheit gegen die Vergrösserung der Thermometerverbesserung in der Nähe des Horizonts, welche TOBIAS MAYER vorgeschrieben hat — dieses ist zuverlässig unrichtig und man kann wenigstens fürchten, dass die mit einer zu kleinen Thermometerverbesserung auf die Normaltemperatur der Tafeln reducirten Beobachtungen nicht das richtige Resultat gegeben haben.

Was nun den Exponenten des Thermometerfactors, welchen ich in meinen Tafeln durch λ bezeichnet habe, anlangt, so scheint er mir durch die Theorie so sicher gegeben zu sein, dass dagegen kein Zweifel erhoben werden kann; diesem, mit der Zenithdistanz veränderlichen Exponenten ist es zuzuschreiben, dass meine Tafeln bei allen Temperaturen so nahe mit den Beobachtungen übereinstimmen, als man nur irgend erwarten kann. Ich führe hier die wahrscheinlichen Fehler an,

welche eine aus meinen Tafeln berechnete Strahlenbrechung in verschiedenen Zenithdistanzen den Beobachtungen zufolge hat:

45° . . . 0,27	85° 0' . . . 1,71
60 . . . 0,34	30 . . . 2,00
65 . . . 0,37	86 0 . . . 2,40
70 . . . 0,46	30 . . . 2,63
75 . . . 0,66	87 0 . . . 3,87
80 . . . 0,92	30 . . . 5,30
81 . . . 1,00	88 0 . . . 7,74
82 . . . 1,11	30 . . . 10,58
83 . . . 1,25	89 0 . . . 16,84
84 . . . 1,43	30 . . . 20,01

Hätte man $\lambda = 1$ gesetzt, und Beobachtungen in so verschiedenen Temperaturen, als hier in Königsberg vorgekommen sind, unter dieser Voraussetzung mit den Tafeln verglichen, so würden die Unregelmässigkeiten, vorzüglich nahe am Horizonte, so sehr viel grösser ausgefallen sein, dass man dadurch die Nothwendigkeit einer veränderlichen Thermometerverbesserung hätte erkennen müssen; auch würden die Fehler der Rechnung nach der Temperatur veränderlich gewesen sein, woron nun keine Spur zu bemerken ist, ausser vielleicht bei den allerstärksten Kältegraden, welchen noch etwas grössere Thermometerverbesserungen zuzugehören scheinen, als selbst die Werthe von λ in meiner Tafel sie ergeben.

Sobald meine Geschäfte es erlauben, gedenke ich die Theorie der Strahlenbrechungen in ganz kleinen Höhen nach den Beobachtungen des Herrn ARGELANDER neu zu untersuchen, und dabei die Resultate zu benutzen, welche Herr PLANA in seiner schönen Abhandlung über diesen Gegenstand erhalten hat.

31. Ueber den Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen.*)

(Astr. Nachr. 3. p. 377 und 4. p. 27.)

Bereits vor 16 Jahren habe ich, im XVII. Bande der Monatlichen Correspondenz des Herrn von ZACH, einen Aufsatz über diesen Gegenstand geliefert, wobei die Absicht war, den Einfluss der Strahlenbrechung unmittelbar durch Grössen auszudrücken, welche durch die Beobachtung selbst gegeben sind. Die dort entwickelten Formeln enthalten also weder die parallaktischen Winkel, noch die Höhen der Sterne; allein ganz unabhängig von den Höhen sind sie nur dann, wenn

*) [195 und 199 d. a. Verz. — Vgl. die vorangehende Abhandlung 27, sowie die spätere, ausführlichere der „Astronom. Untersuchungen“ I. p. 153.]

diese so gross sind, dass die Voraussetzung der Strahlenbrechung im Verhältnisse der Cotangente der Höhe nicht merklich unrichtig ist; kann man diese Voraussetzung nicht mehr machen, so wird es nöthig, statt eines Factors, welcher für grössere Höhen constant ist, einen veränderlichen zu setzen, welchen man aus einer Tafel nimmt, deren Argument die wahre Höhe ist.

Diese Art die Aufgabe aufzulösen scheint mir noch, nachdem seit jener Jugendarbeit viele Jahre verflossen sind, bequemer zu sein. Allein der erwähnte Aufsatz enthält zwei Rechnungsfehler, deren Einfluss auf das Resultat in manchen Fällen merklich ist; der erste be-

steht darin, dass die Zeit durch Multiplication mit dem Cosinus der wahren Declination auf den grössten Kreis reducirt ist, statt dass die scheinbare, d. i. die durch die Strahlenbrechung veränderte, Declination hätte angewandt werden sollen; der andere findet sich in derjenigen Verbesserung der geraden Aufsteigung, welche von der Veränderung des Parallels herrührt, und welche statt durch den Cosinus der Declination, durch das Quadrat dieses Cosinus hätte dividirt werden sollen. Den ersten Fehler hat mir Herr Professor ENCKE bereits vor mehreren Jahren angezeigt; den andern vor Kurzem Herr HANSEN; Beiden bezeuge ich hier meinen verbindlichsten Dank. Sobald ich die erste dieser Anzeigen empfing, beschäftigte ich mich mit diesem Gegenstande von Neuem, und bemerkte bald, dass die Erscheinung in dem früheren Aufsätze nicht auf die einfachste Weise aufgefasst war; es wurde nämlich dort die unmittelbare Einwirkung der Strahlenbrechung auf die Oerter der Sterne und der Einfluss, welchen dieselbe durch Veränderung der Geschwindigkeit und Richtung der täglichen Bewegung äussert, abgesondert betrachtet, während es befriedigender ist, die durch die Natur des Mikrometers gegebenen Bedingungen unmittelbar auf die scheinbaren Oerter der Sterne, so wie sie zu den verschiedenen Momenten der Beobachtung gehören, anzuwenden. Dadurch erhält man eine strenge Auflösung der Aufgabe, aus welcher später die Näherung abgeleitet werden mag, welche für die Ausübung hinreichend ist. Ich glaube die Gelegenheit, welche mir die Bekanntmachung der berichtigten Formeln gibt, benutzen zu dürfen, um diese Ansicht zu entwickeln.

Die wahre gerade Aufsteigung und Abweichung eines Sterns S bezeichne ich durch α und δ , die scheinbare, durch die Strahlenbrechung veränderte, durch $\alpha + p$ und $\delta + q$; die Sternzeit, stets in Graden, Minuten etc. ausgedrückt, durch t ; den Stundenwinkel $= t - \alpha$ durch τ . Wenn diese Angaben zu einem andern Sterne S' gehören, so werden sie in α', δ' u. s. w. verändert, wenn zu einer andern Zeit t , in

$$= (t - t' - p' + p) \frac{\cos(\delta' + q')}{\operatorname{tg} i} - (t - t' - p + p) \frac{\cos(\delta + q)}{\operatorname{tg} i} - q' + q$$

folgt. Setzt man

$$\mathcal{A} = (t - t) \cos \delta \cotg i; \quad \mathcal{A}' = (t' - t') \cos \delta' \cotg i,$$

wo also \mathcal{A} und \mathcal{A}' die ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung berechneten Declinationsunterschiede bedeuten so hat man

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= t' - t - p' + p \\ \delta' - \delta &= \left\{ 1 - \frac{p' - p}{t' - t} \right\} \mathcal{A}' \frac{\cos(\delta' + q')}{\cos \delta'} - \left\{ 1 - \frac{p - p'}{t - t'} \right\} \mathcal{A} \frac{\cos(\delta + q)}{\cos \delta} - q' + q \right\} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$\alpha + p$, $\delta + q$, u. s. w. Den Stundenwinkel und die wahre Declination, welchen derjenige Punkt des Instrumentes entspricht, von welchem man die Declinationsunterschiede an rechnet, werde ich durch T und D andeuten. — Die Auflösung aller hierher gehörigen Aufgaben besteht darin, dass man T und D aus den Gleichungen eliminirt, welche durch die einzelnen Momente der Beobachtung gegeben sind, so dass α' und δ' als unbekannte Grössen allein übrig bleiben. Dieses werde ich an vier Arten von Mikrometern ausführen.

I. Das Aequatorale, oder ein Mikrometer mit einer Schraube für die Declinationsunterschiede, dessen Stundenfaden durch parallaktische Aufstellung stets in den Declinationskreisen erhalten wird. Wenn \mathcal{A} den gemessenen Unterschied der Declinationen des Sterns und des Anfangspunkts der Theilungen bezeichnet, so ist für S

$$t - \alpha - p = T; \quad \delta + q - D = \mathcal{A}$$

und für S'

$$t' - \alpha' - p' = T'; \quad \delta' + q' - D = \mathcal{A}'$$

woraus also folgt

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= t' - t - p' + p \\ \delta' - \delta &= \mathcal{A}' - \mathcal{A} - q' + q \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

II. Das Mikrometer, dessen Stundenfaden durch parallaktische Aufstellung immer in den Declinationskreisen erhalten wird, welches aber die Declinationen durch die Zeit angibt, welche die Sterne anwenden, um von einem im Winkel i geneigten Faden zum Stundenfaden zu gelangen.

Wenn man die Zeit des Durchganges durch den geneigten Faden durch t , bezeichnet, so hat man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} t - \alpha - p &= T - (\delta + q, - D) \frac{\operatorname{tg} i}{\cos(\delta + q)} \\ t - \alpha - p &= T \end{aligned}$$

und zwei ähnliche für S' , nämlich

$$\begin{aligned} t' - \alpha' - p' &= T' - (\delta' + q', - D) \frac{\operatorname{tg} i}{\cos(\delta' + q')} \\ t' - \alpha' - p' &= T' \end{aligned}$$

woraus also $\alpha' - \alpha$ wie bei I. und $\delta' - \delta$

III. Das Netz von drei sich in einem Punkte schneidenden Fäden, dessen Lage gegen den Declinationskreis unbekannt ist.

Bezeichnet man den Winkel des mittleren Fadens mit dem Declinationskreise durch I , die Winkel der beiden anderen Fäden durch $I - i$ und $I + i'$ (wo i und i' bekannt, meistens gleich, angenommen werden), ferner die Durchgangszeiten durch den mittleren Faden und beide Seitenfäden durch t, t_n, t_n , so hat man für S

$$t - \alpha - p = T + (\delta + q - D) \frac{\operatorname{tg} I}{\cos(\delta + q)}$$

$$t_n - \alpha - p_n = T + (\delta + q_n - D) \frac{\operatorname{tg}(I - i)}{\cos(\delta + q)}$$

$$t_n - \alpha - p_n = T + (\delta + q_n - D) \frac{\operatorname{tg}(I + i')}{\cos(\delta + q_n)}$$

und ähnliche Gleichungen für S' ; nämlich

$$t' - \alpha' - p' = T + (\delta' + q' - D) \frac{\operatorname{tg} I}{\cos(\delta' + q')}$$

$$t'_n - \alpha' - p'_n = T + (\delta' + q'_n - D) \frac{\operatorname{tg}(I - i')}{\cos(\delta' + q'_n)}$$

$$t'_n - \alpha' - p'_n = T + (\delta' + q'_n - D) \frac{\operatorname{tg}(I + i)}{\cos(\delta' + q'_n)}$$

Da nur 5 unbekannte Grössen I, T, D, α' und δ' vorhanden sind, so wird durch diese 6 Gleichungen die Aufgabe mehr als bestimmt; man sollte daher von Näherungswerthen dieser Unbekannten ausgehen und diejenigen Verbesserungen derselben bestimmen, welche allen vorhandenen Gleichungen möglichst nahe Genüge leisten, auch denen, welche aus der Beobachtung eines zweiten bekannten Sterns hervorgehen, dessen Zuziehung immer wünschenswerth sein wird, indem die Fehler bei dieser Beobachtungsart einen vergrösserten Einfluss auf das Resultat erhalten.

Es hat nun keine Schwierigkeit, die unbekannt Grössen $I, t - \alpha - p - T, \delta + q - D$ aus den 3 ersten Gleichungen zu bestimmen; die erste findet man, wenn man mit

$$\frac{\sin(i + i')}{\sin i \sin i'} - \frac{(\cos I - i)}{\cos i \sin i'} - \frac{\cos(I + i')}{\cos i \sin i'}$$

multiplirt und die Producte addirt; um aber das Resultat bequemer schreiben zu können, kann man die Veränderungen von p und q in der Zwischenzeit $t_n - t$, als gleichförmig und alle 3 Cosinus in den Nennern als gleich annehmen, wodurch man, ganz ungewöhnliche Fälle ausgenommen, nichts Erhebliches von der Genauigkeit verliert. Setzt man daher

$$p_n = p - \frac{dp}{dt}(t_n - t); \quad q_n = q - \frac{dq}{dt}(t_n - t)$$

$$p_n = p + \frac{dp}{dt}(t_n - t); \quad q_n = q + \frac{dq}{dt}(t_n - t)$$

so erhält man, auf die angezeigte Weise,

$$\left(1 - \frac{dp}{dt}\right) \{ (t - t_n) \operatorname{cotg} i - (t_n - t) \operatorname{cotg} i' + (t_n - t) \operatorname{tg} I \} \\ = \frac{dq}{\cos(\delta + q)} \{ (t - t_n) \operatorname{cotg} i \operatorname{tg} I - (t_n - t) \operatorname{cotg} i' \operatorname{tg} I - (t_n - t) \}$$

und, wenn man zwei Winkel I' und h einführt, sodass

$$\operatorname{tg} I' = \frac{t_n - t}{t_n - t} \operatorname{cotg} i' - \frac{t - t_n}{t_n - t} \operatorname{cotg} i$$

$$\operatorname{tg} h = \frac{dq}{\left(1 - \frac{dp}{dt}\right) \cos(\delta + q)}$$

ist,

$$\operatorname{tg} I' - \operatorname{tg} I = \operatorname{tg} h \{ \operatorname{tg} I' \operatorname{tg} I + 1 \}$$

oder

$$I = I' - h$$

wo es in die Augen fällt, dass I' die Neigung des mittleren Fadens gegen das Perpendikel auf den scheinbaren Weg des Sterns, und h den Winkel des letzteren und des Parallelkreises bedeuten.

Sobald hieraus, oder durch noch mehrere Beobachtungen, I gefunden ist, reichen zwei der Gleichungen zur Bestimmung von $t - \alpha - p - T$ und $\delta + q - D$ hin. Es ist aber allgemeiner, diese Quantitäten nicht unmittelbar durch die Beobachtungsmomente, sondern durch ähnliche Werthe, welche man ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung berechnet, zu bestimmen. Diese letzteren bezeichne ich durch A und A' ; sie entsprechen den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} A &= \mathcal{A} \operatorname{tg} I' \sec \delta \\ A - (t - t_n) &= \mathcal{A}' \operatorname{tg}(I' - i) \sec \delta \\ A + (t_n - t) &= \mathcal{A}' \operatorname{tg}(I' + i') \sec \delta \end{aligned} \right\} \dots \textcircled{\circ}$$

im Falle der bestimmten Aufgabe vollständig, im Falle der mehr als bestimmten näherungsweise; diesen letzten Fall kann man dadurch auf den ersten zurückführen, dass man statt der Beobachtungsmomente diejenigen Werthe derselben annimmt, welchen diese Gleichungen vollkommen entsprechen. Es werden sich dann $t - \alpha - p - T = x$ und $\delta + q - D = y$ leicht so angeben lassen, dass sie denselben Zeitmomenten Genüge leisten. — Es ist klar, dass die Gleichungen $\textcircled{\circ}$ für I' denselben Ausdruck geben, welcher oben schon im Ausdruck von I vorgekommen ist; man hat also, wie oben, $I = I' - h$, und wird nun x und y durch A und A' ausdrücken können, wenn man $t - t_n$ und $t_n - t$ aus den beiderseitigen Gleichungen eliminirt. Diese Rechnung hier zu geben wird unnöthig sein; ihr Resultat ist

$$x = A \left(1 - \frac{dp}{dt} \right) - \frac{\mathcal{A} \frac{dq}{dt}}{\cos \delta \cos(\delta + q)}$$

$$y = \mathcal{A} \left(1 - \frac{dp}{dt} \right) \frac{\cos(\delta + q)}{\cos \delta} + A \frac{dq}{dt}$$

Für den Stern S' hat man ähnliche Ausdrücke, bei welchen die Neigung des mittleren Fadens, aller Schürfe nach, = $I + k'$ vorauszusetzen ist; also

$$x' = A' \left(1 - \frac{dp'}{dt} \right) - \frac{\mathcal{A}' \frac{dq'}{dt}}{\cos \delta' \cos(\delta' + q')}$$

$$y' = \mathcal{A}' \left(1 - \frac{dp'}{dt} \right) \frac{\cos(\delta' + q')}{\cos \delta'} + A' \frac{dq'}{dt}$$

Die Verbindung beider gibt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= t' - t - p' + p - A' \left(1 - \frac{dp'}{dt} \right) + A \left(1 - \frac{dp}{dt} \right) + \frac{\mathcal{A}' \frac{dq'}{dt}}{\cos \delta' \cos(\delta' + q')} - \frac{\mathcal{A} \frac{dq}{dt}}{\cos \delta \cos(\delta + q)} \\ \delta' - \delta &= \mathcal{A}' \left(1 - \frac{dp'}{dt} \right) \frac{\cos(\delta' + q')}{\cos \delta'} - \mathcal{A} \left(1 - \frac{dp}{dt} \right) \frac{\cos(\delta + q)}{\cos \delta} + A' \frac{dq'}{dt} - A \frac{dq}{dt} - q' + q \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

IV. Das Kreismikrometer. Wenn die Zeiten des Ein- und Austrittes durch t , und t_n bezeichnet werden, der Halbmesser des Kreises durch r , so hat man

$$rr = (T - t + \alpha + p)^2 \cos D \cos(\delta + q) + (\delta + q - D)^2$$

$$rr = (t_n - \alpha - p_n - T)^2 \cos D \cos(\delta + q_n) + (\delta + q_n - D)^2$$

Schreibt man, um abzukürzen,

$$rr = \frac{1}{4} (t_n - t - p_n + p - 2x)^2 \cos D \cos(\delta + q) + \left(\mathcal{A} - \frac{q_n - q}{2} \right)^2$$

$$rr = \frac{1}{4} (t_n - t - p_n + p + 2x)^2 \cos D \cos(\delta + q) + \left(\mathcal{A} + \frac{q_n - q}{2} \right)^2$$

und wenn man den halben Unterschied und die halbe Summe derselben nimmt, in

$$0 = x (t_n - t - p_n + p) \cos D \cos(\delta + q) + \mathcal{A} (q_n - q)$$

$$rr = \left\{ \frac{1}{4} (t_n - t - p_n + p)^2 + xx \right\} \cos D \cos(\delta + q) + \mathcal{A} \mathcal{A} + \frac{1}{4} (q_n - q)^2$$

woraus x und \mathcal{A} leicht gefunden werden. Setzt man indessen,

$$p_n - p = \frac{dp}{dt} (t_n - t); \quad q_n - q = \frac{dq}{dt} (t_n - t)$$

so hat man

$$0 = x \left(1 - \frac{dp}{dt} \right) \cos D \cos(\delta + q) + \mathcal{A} \frac{dq}{dt}$$

$$rr = \left\{ \frac{1}{4} (t_n - t)^2 \left(1 - \frac{dp}{dt} \right)^2 + xx \right\} \cos D \cos(\delta + q) + \mathcal{A} \mathcal{A} + \frac{1}{4} (t_n - t)^2 \left(\frac{dq}{dt} \right)^2$$

oder, wenn man

$$rr - \frac{1}{4} (t_n - t)^2 \left(1 - \frac{dp}{dt} \right)^2 \cos D \cos(\delta + q) - \frac{1}{4} (t_n - t)^2 \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = \eta \eta$$

setzt,

$$\eta \eta - \mathcal{A} \mathcal{A} = xx \cos D \cos(\delta + q).$$

Da für den Stern S' ähnliche Gleichungen stattfinden, man also $x, \mathcal{A}, x', \mathcal{A}'$ kennt, so hat man

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= t' - t - p' + p - x' + x \\ \delta' - \delta &= \mathcal{A}' - \mathcal{A} - q' + q \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

Die Entwicklung dieser Vorschriften für noch mehrere Abänderungen der Mikrometer, z. B. für das Bradley'sche Netz, kann kaum ein Interesse haben, da man das hier benutzte Princip, wenn es erforderlich

$$\begin{aligned} t & \text{ für } \frac{1}{2} (t + t_n) \\ p & \text{ „ } \frac{1}{2} (p + p_n) \\ q & \text{ „ } \frac{1}{2} (q + q_n) \\ x & \text{ „ } t - \alpha - p - T \\ \mathcal{A} & \text{ „ } \delta + q - D \end{aligned}$$

und vernachlässigt man unter dem Cosinuszeichen die Quantität $\frac{1}{4} (q_n - q)$, so verwandeln sich die beiden Gleichungen in

ist, eben so leicht darauf anwenden, als hier die Anwendung aufsuchen wird.

Die streng richtigen Ausdrücke von $p, q, \frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}$ sind in folgenden Formeln enthalten, in welchen φ die Strahlenbrechung, φ die Polhöhe, z die wahre Zenithdistanz, s den parallaktischen Winkel und a das Azimuth, von Süden durch Westen gezählt, bedeuten:

$$\begin{aligned} \sin p \cos(\delta + q) &= \sin \varphi \sin s \\ \cos p \cos(\delta + q) &= \cos \delta \cos \varphi - \sin \delta \sin \varphi \cos s \\ \sin(\delta + q) &= \sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos s \end{aligned}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{\sin s^2 \cos \delta^2}{\cos(\delta + \varphi)} + \sin \varphi \cdot \frac{\cos \varphi \cos a}{\sin z \cos(\delta + \varphi)} (\cos s \cos \delta \cos \varphi - \sin \delta \sin \varphi)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{\sin s \cos \delta}{\cos(\delta + \varphi)} (\cos s \cos \delta \cos \varphi - \sin \delta \sin \varphi) - \sin \varphi \cdot \frac{\cos \varphi \cos a}{\cos(\delta + \varphi) \sin z} \sin s \cos \delta$$

Da aber selten Veranlassung sein wird, nach den streng richtigen Formeln zu rechnen, so werde ich jetzt die zur Anwendung bequemen Näherungen ableiten. Ich setze dabei, so wie in dem erwähnten früheren Aufsätze,

$$\varphi = k \operatorname{tg} z$$

und werde das Quadrat und die höheren Potenzen von k vernachlässigen. Setzt man

$$\operatorname{tg} \psi = \cotg \varphi \cos z$$

so hat man bekanntlich

$$\cos z = \frac{\sin \varphi}{\cos \psi} \sin(\psi + \delta)$$

und ferner

Ad I.

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= t' - t + \frac{k \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \cdot \frac{\operatorname{tg} z \sin \psi}{\cos \delta \cos \delta'} \cos(\psi + \delta + \delta') \\ \delta' - \delta &= \delta' - \delta + \frac{k \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1^*)$$

Ad II.

Man hat

$$\begin{aligned} 1 - \frac{p-p'}{t-t'} &= 1 - \frac{dp}{dt} \\ \frac{\cos(\delta + \varphi)}{\cos \delta} &= 1 - q \operatorname{tg} \delta \\ q &= q - \frac{dq}{dt} (t - t') \end{aligned}$$

$\alpha' - \alpha$ wie ad I

$$\left. \begin{aligned} \delta' - \delta &= \delta' - \delta + \frac{k \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \left\{ 1 - \frac{\cos \psi^2}{\operatorname{tg} \varphi^2} - \sin \frac{\delta' + \delta}{2} \sin \left(2\psi + \frac{\delta' + \delta}{2} \right) \right\} \\ &+ \frac{k \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \cdot \frac{\cos \psi^2 \sin \psi \operatorname{tg} z}{\cos \frac{\delta' + \delta}{2}} \cdot \operatorname{tg} i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2^*)$$

Die Declination erfordert also bei dieser Beobachtungsart eine Verbesserung, welche von der Neigung des schiefen Fadens gegen den Stundenfaden abhängt; hat man aber die Beobachtung an einem zweiten, auf der entgegengesetzten Seite in gleichem Winkel i liegenden schiefen Faden wiederholt und δ' und δ durch die Verweilungen der Sterne zwischen beiden schiefen Fäden bestimmt, so verschwindet die von $\operatorname{tg} i$ abhängige Verbesserung. In diesem Falle benutzt man den Stundenfaden allein für die gerade Aufsteigung, die schiefen Fäden allein für die Abweichung; will man aber den möglichst grossen Vortheil aus der mehr als bestimmten Beobachtung ziehen, so muss die Rechnung für die gerade Aufsteigung mit Rücksicht auf alle drei Zeiten geführt werden.

$$p = k \frac{\operatorname{tg} z \sin \psi}{\cos \delta \sin(\psi + \delta)}$$

$$q = k \cotg(\psi + \delta)$$

$$\frac{dp}{dt} = k \left(\frac{\cos \psi}{\sin(\psi + \delta)} \right)^2 (\cotg \varphi^2 + \cotg \varphi \operatorname{tg} \delta \cos z)$$

$$\frac{dq}{dt} = k \left(\frac{\cos \psi}{\sin(\psi + \delta)} \right)^2 \cotg \varphi \sin z$$

Setzt man die Näherungsformeln in die für die vier verschiedenen Arten der Mikrometer oben gefundenen Ausdrücke und vernachlässigt man allenthalben k^2 u. s. w., so erhält man:

Setzt man dieses und die ähnlichen sich auf S' beziehenden Ausdrücke in die Formeln (2), und erlaubt man sich das Endresultat dadurch abzukürzen, dass man die beiden Sternen zugehörigen Theile vereinigt, wodurch man Grössen von der Ordnung des Products der Strahlenbrechung in das Quadrat des Declinationsunterschiedes vernachlässigt, so erhält man:

Ad III.

In den Formeln (3) bezeichnen p, q, p', q' die Strahlenbrechungen in gerader Aufsteigung und Abweichung in den Augenblicken der Durchgänge durch den mittlern Faden; es ist aber bequem, die Näherungsformel nur von einem Stundenwinkel und dem dazu gehörigen ψ abhängig zu machen. Nimmt man die halbe Summe der Stundenwinkel beider Sterne dafür an, und berechnet man p, q, p', q' für diesen Stundenwinkel, so hat man für die ähnlichen in den Formeln vorkommenden Buchstaben zu setzen:

$$\begin{aligned} p + \frac{dp}{dt} \frac{1}{2}(A - A'); & \quad q + \frac{dq}{dt} \frac{1}{2}(A - A') \\ p' - \frac{dp'}{dt} \frac{1}{2}(A - A'); & \quad q' - \frac{dq'}{dt} \frac{1}{2}(A - A') \end{aligned}$$

wodurch man erhält

$$\alpha' - \alpha = \ell - t - p' + p - A' + A + \frac{1}{2}(A' + A) \left(\frac{dp'}{dt} - \frac{dp}{dt} \right) + \frac{A' dq'}{\cos \delta' \cos(\delta' + q')} - \frac{A dq}{\cos \delta \cos(\delta + q)}$$

$$\delta' - \delta = A' \left(1 - \frac{dp'}{dt} \frac{\cos(\delta' + q')}{\cos \delta'} \right) - A \left(1 - \frac{dp}{dt} \frac{\cos(\delta + q)}{\cos \delta} \right) - q' + q + \frac{1}{2}(A' + A) \left(\frac{dq'}{dt} - \frac{dq}{dt} \right)$$

Vernachlässigt man hier wieder die schon oben vernachlässigten Größen, so erhält man, nach der Substitution der Ausdrücke von p, q , etc.

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \ell - t - A' + A + \frac{k \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \psi \sin \psi \cos\left(\psi + \frac{\delta + \delta'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\delta + \delta'}{2}\right)} \\ \delta' - \delta &= A' - A + \frac{k \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \left\{ 1 - \frac{\cos \psi^2}{\operatorname{tg} \psi^2} - \sin\left(\frac{\delta + \delta'}{2}\right) \sin\left(2\psi + \frac{\delta + \delta'}{2}\right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3^*)$$

Ad. IV.

Wenn man auch hier das Quadrat der Strahlenbrechung vernachlässigt, so ist

$$\mathcal{A} = \eta$$

$$x = - \frac{\eta \frac{dq}{dt}}{\cos \delta^2}$$

Berechnet man daher \mathcal{A} nach der Formel

und ferner

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \ell - t + \frac{k \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \psi \sin \psi \cos\left(\psi + \frac{\delta' + \delta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\delta' + \delta}{2}\right)} \\ \delta' - \delta &= \mathcal{A} - \mathcal{A} + \frac{k \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \delta) \sin(\psi + \delta')} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4^*)$$

Es ist nun noch übrig, zu untersuchen, welchen Werth man dem Factor k beilegen muss, damit die berechneten Verbesserungen der Beobachtungen der Wahrheit so nahe kommen, als es bei der angenommenen Form möglich ist. Diese Verbesserungen rühren fast ganz von der Veränderung der Strahlenbrechung mit der Zenithdistanz her; die absolute Grösse derselben hat nur geringen Einfluss. Man muss daher k so annehmen, dass es die wahre Veränderung der Strahlenbrechung darstellt. Berechnet man die verschiedenen Formeln so, dass man für $\delta' - \delta$ den beobachteten Unterschied der scheinbaren Declinationen setzt, so sollte man, statt der Differentialquotienten der Strahlenbrechung in Beziehung auf die wahre Zenithdistanz, diese Differentialquotienten in Beziehung auf die scheinbare Zenithdistanz nehmen oder die Formeln mit

$$\frac{dq}{dz - dq}$$

multiplizieren; k muss aber so bestimmt werden, dass

$$\frac{k}{\cos z^2} = \frac{dq}{dz}$$

oder

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \mathcal{A} &= rr - \frac{1}{2}(t_r - t_r)^2 \left(1 - \frac{dp}{dt} \right)^2 \cos D \cos(\delta + q) \\ &= rr - \frac{1}{2}(t_r - t_r)^2 \cos(\delta - \mathcal{A}) \cos \delta \cdot ff \end{aligned}$$

so hat man

$$f = \left(1 - \frac{dp}{dt} \right) \sqrt{\frac{\cos(\delta - \mathcal{A} + q) \cos(\delta + q)}{\cos(\delta - \mathcal{A}) \cos \delta}}$$

oder, durch ψ und δ ausgedrückt, nahe

$$f = 1 - \frac{k}{\sin(\psi + \delta)^2} \left\{ \frac{\cos \psi^2}{\operatorname{tg} \psi^2} + \sin \delta \sin(2\psi + \delta) \right\}$$

$$k = \frac{dq}{dz} \cos z^2$$

ist; man hat also, statt der in den Formeln vorkommenden k

$$\frac{dq}{dz - dq} \cos z^2 = \frac{dq}{dz} \cos z^2$$

zu setzen, wo z' die scheinbare Zenithdistanz bezeichnet. Nach dieser Formel habe ich die unten folgende Tafel für die Logarithmen von k berechnet, woraus man den in den Formeln anzuwendenden Werth derselben mit dem Argumente der halben Summe der wahren Zenithdistanzen entnimmt. Sie setzt die Elemente der Königsberger Strahlenbrechungstafel voraus und gilt, so wie diese, für den Barometerstand = 333,78 Linien Pariser Mass und den Thermometerstand = 48,75 Fahrenheit; sie wird daher auf einen andern Stand der meteorologischen Instrumente übertragen, wenn man die Logarithmen der Verbesserungsfactoren hinzufügt, welche ich in der VIII. Abtheilung meiner Beobachtungen gegeben habe.

Tafel für den Logarithmen von k .

Argument. Halbe Summe der wahren Zenithdistanzen.

0°	1,7609	78°	1,7246	83° 50'	1,6433	86° 10'	1,5255	— 143
45	1,7590	79 0'	1,7180	— 66	84 0	1,6379	— 54	20
50	1,7583	30	1,7142	— 38	10	1,6324	— 55	30
55	1,7572	— 11	80 0	1,7095	— 47	20	1,6266	— 58
60	1,7556	— 16	30	1,7044	— 51	30	1,6203	— 63
65	1,7527	— 29	81 0'	1,6989	— 55	40	1,6137	— 66
70	1,7477	— 50	30	1,6927	— 62	50	1,6069	— 68
71	1,7463	— 14	82 0	1,6851	— 76	85 0	1,5997	— 72
72	1,7445	— 18	30	1,6762	— 89	10	1,5916	— 81
73	1,7424	— 21	83 0	1,6660	— 102	20	1,5826	— 90
74	1,7400	— 24	10	1,6621	— 39	30	1,5728	— 98
75	1,7372	— 28	20	1,6579	— 42	40	1,5622	— 106
76	1,7339	— 33	30	1,6534	— 45	50	1,5508	— 114
77	1,7297	— 42	40	1,6485	— 49	86 0	1,5385	— 123
78	1,7246	— 51	50	1,6433	— 52	10	1,5255	— 130

Rechnungsbeispiele (Astr. Nachr. 4. p. 27.)

Es ist schwierig direct zu entwickeln, wie gross der Fehler der Nährungsformeln zur Berechnung des Einflusses der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen in der Nähe des Horizonts werden kann; dieses ist eine Folge der grossen Complication des Gesetzes der Strahlenbrechung. Um aber diesen Punkt nicht ganz ohne Erörterung zu lassen, theile ich zwei Beispiele mit, welche ich für ein Kreismikrometer von 40' Durchmesser berechnet habe, so aufgestellt angenommen, dass sein Mittelpunkt der wahren Zenithdistanz = 86° entspricht.

Die Zeiten der Ein- und Austritte der Sterne habe ich, unter Anwendung derselben Strahlenbrechung, nach welcher die Tafel für den Logarithmen von k am Ende des Aufsatzes construirt worden ist, berechnet und auf die dadurch entstandenen fingirten Beobachtungen die Nährungsformeln angewandt. Der Unterschied der dadurch herausgebrachten geraden Aufsteigungs- und Abweichungsunterschiede von den zum Grunde gelegten ist der Fehler jener Formeln in den zu den Beispielen gewählten Fällen.

Die Strahlenbrechungen für diejenigen wahren Zenithdistanzen, welche bei dieser Rechnung in Betracht kommen, sind folgende:

Wahre Z.-D.	Ref.	
85° 30'	10' 18",70	
40	10 36,29	
50	10 54,78	Beide Beispiele beziehen sich auf die
86 0	11 14,24	Polhöhe von Königberg = 54° 42' 50";
10	11 34,71	die übrigen Hauptmomente der Rechnung sind folgende:
20	11 56,36	
30	12 19,22	
40	12 43,35	
50	13 8,88	

	I.	II.	
Aufstellung des Instruments . $\left\{ \begin{matrix} T \\ D \end{matrix} \right.$	82° 44' 18",0	146° 38' 0",0	
Decl. des südl. Sterns δ	0 0 0,0	35 0 0,0	
" " nördl. " δ'	+ 0 2 0,0	35 2 0,0	
Stundenwinkel der des ersteren	82 33 2,65	146 16 57,14	
Ein- und Austritte des anderen	83 4 37,12	146 57 45,55	
Hieraus folgen also die halben Summen der Stundenwinkel der Ein- und Austritte	82 32 40,01	146 18 36,98	
Zeiten der Verweilung im Kreismikrometer	83 6 30,27	146 57 14,86	
Unter Annahme von τ	82 49 12,5	146 37 38,6	
findet man $\log f$	9,99472	9,99833	
	9,99524	9,99851	
Hieraus folgen $\left\{ \begin{matrix} J \\ J' \end{matrix} \right.$	— 12 31,18	— 10 59,84	
Also der Declinationsunterschied	+ 10 57,13	+ 12 17,14	
Strahlenbr. nach d. Nährungsformel	+ 23 28,31	+ 23 16,98	
wahrer Declinationsunterschied	+ 32,57	+ 42,91	
Beobachteter AR-Unterschied	+ 24 0,88	+ 23 59,89	
Strahlenbr. nach d. Nährungsformel	— 45,26	— 34,57	
Wahrer AR-Unterschied	+ 45,39	+ 34,94	
Fehler der Nährungsformeln	+ 0,13	+ 0,37	
	in AR	+ 0,13	+ 0,37
	in Decl.	+ 0,88	— 0,11

Es scheint hieraus hervorzugehen, dass die Nährungsformeln, selbst in der geringen Höhe von 4°, noch alle wünschenswerthe Genauigkeit besitzen; für grössere Höhen ist diese Untersuchung ihrer Genauigkeit unnöthig, indem die Vernachlässigungen, welche alsdann begangen werden, offenbar unerheblich sind.

32. Disquisitiones de refractione institutae.*)

(Fundamenta astron. Sect. IV. p. 26—44.)

Ut admirabilis, quam debemus KRAMPIO et LAPLACIO, theoria refractionum astronomicarum responderet refractionibus observatis, effici posset diligenti et aequabili determinatione, elementorum in calculo occurrentium, si nota esset vera aeris circumjecti natura. Quum autem varios consideramus effectus, quos mutatio temperaturae in terrae superficie habet ad densitatem proximorum stratorum aeris, concedemus, theoriam haec omnia praetermittentem haud facile consentaneam fore cum observationibus. Quamvis igitur hac in causa non tanta possit inpenetrari subtilitas, quantum alioquin admittere solent calculi astronomici; tamen erit astronomi, tam prope accedere ad veritatem, quam ipsa sinat res, neque in calculis negligere quiddam, quod conspiciam e fontibus notis manantem vim habere possit ad eventum.

Hac habita ratione, vulgatae refractionis tabulae non eum praebent usum, qui optari possit: facile est enim probatu, si quis totam refractionem proportionalem ponat aeris densitati, qualis est in ipsius observatoris loco, hanc hypothesin non omnibus absolutam esse numeris, et in horizontis vicinia multum adeo abhorre a veritate. E KRAMPII igitur et LAPLACII theoriis petenda sunt subsidia ad inveniendas veras refractionis correctiones, ob varium aeris pressum caloremque inducendas. Quocirca nostra refractionis disquisitio, quae niti debuit observationibus BRADLEII, ab hoc opprobrio vindicanda fuit eoque ad verum propius advocanda. Ceterum in hoc quoque capite non aequales solum, verum etiam posteriores astronomos antecessit TOBIAS MAYER, in refractionis formula rectius adhibens thermometri correctionem; utrum observationes an theoria eum huc perduxerint latet: sed confidendum est, correctionem illam postea inutilem atque falsam iudicatam ejusque auctorem vituperatum esse quod eam calculis inseruerit. Etsi subtilis theoretica thermometri correctionis determinatio non prorsus congruit cum MAYERI hujus rei tractandae ratione: tamen, si eam receperissent astronomi, maximam partem evitas-

sent errorum, quos gignit refractionis, aeris densitati in observatoris loco aut refrangendi facultati tota proportionalis posita.

LAPLACIUS in refractione inquirenda talem proposuit legem densitatis aeris, qualis et refractioni horizontali in ipsa BRADLEII tabula et diminutioni temperaturae, quae in locis editioribus fit, respondet. Haec hypothesis, multa cum commoditate ratiocinationis conjuncta, certam quandam refractionis prope horizontem magnitudinem sibi concedi postulat, a qua si eam sejunxeris, sive refractionem quandam horizontalem, a BRADLEIANA diversam, secutus fueris, consensus diminutionis caloris evanescit. Itaque aut BRADLEIANA in horizonte refractionis, sine ulla disquisitione admittenda, aut, si contrarium requirent observationes, consensus caloris diminutionis esset abiciendus, ut LAPLACII satisfaceret formulae. Hujus vero quamquam inventio semper geometrarum movebit admirationem, tamen nonnisi utriusque rei nititur consensu: qui si intra errorum observandi terminos non apparet, non amplius illa formula praeferenda erit aliis illorum consensum negligentibus, aliorumque argumentorum ope dijudicandum erit, quid sit eligendum.

Postquam praevia omnium observationum in horizontis vicinia factarum comparatio docuerat, multo minorem, quam vulgo caloris diminutione directe observata gignatur, adsumendam esse elasticitatis specificae diminutionem, ut observationibus apte responderet refractionis tabula: hanc ob rem LAPLACII theoria, ad aeris densitatem spectans, relinquenda in ejusque locum substituenda videbatur alia, potissimum ob simplicitatem non mediocrem digna quae anteferreretur. Nimirum verisimilimum est, temperaturam variorum aeris stratorum non sequi legem quovis tempore constantem; nam et BIOTII, BRANDESHI, SIXII, TRALLESHI animadversiones probaverunt, temperaturam illam non semper exprimi posse functione altitudinis primi gradus, quoniam saepe longe supra terrae superficiem maximus sit calor. Veritas igitur tunc solum attingi posset, si temporis et altitudinis aliarumque, credo, variabilium quantitatum nota esset functio, temperaturam exprimens: quod quum desperandum sit, omnis haec causa in imperfecta versabitur approximatione. Sic nihil astronomo relictum videtur, nisi ut refractionis calculum ita instituat, ut quam maxime satisfaciatur observationibus

* [Auszug aus 130 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 166, 168—170, 172 (O.), 174, 175 (O.), 176 (O.), 262—268, 355, 364. II. 55 (O.), 59. — Vgl. auch: BURNES, die astronomische Strahlenbrechung (Leipzig, 1861). GYLDÉN, Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Mém. de l'Acad. St. Pétersbourg. T. X. 1866. T. XII. 1868.]

astronomicis; qua ratione genus quoddam mediae refractionis obtinebitur, a memorata temperaturae inconstantia, quatenus res sinat, vacuum. Illud quoque dubitari nequit, quin refractionis determinatio multo propior evasura sit veritati, si nunquam non pro una thermometri observatione plures instituantur, varia quidem in altitudine, eadem tamen linea verticali: eo enim modo specificae atmosphaerae elasticitates in stratis terrae proximis ita innotescent, ut ad calculos eas vocare liceret. Neque indignum fortasse astronomorum attentione hoc est monitum, etsi ejus usus, ut infra apparebit, maxime ad refractiones prope horizontem pertinet, quoniam in altitudine duorum triumve graduum una thermometri sufficit observatio ad calculos cum observationibus conciliandos.

Specifica aeris elasticitas in stratis adita facilibus imminuit, atque huic diminutioni simplicem hanc quam diximus legem posuimus

$$e^{-\frac{as}{p}}$$

eo consilio ut constans g ita determinaretur, ut eo refractionibus observatis satisfieret, ubi a radium oculi significat sphaeroidis terrestris in eo plano verticali, in quo sita est illa aeris particula, as autem ejus elevationem supra maris superficiem. Hoc posito, particulae atmosphaerae densitatem habes

$$\rho = (\rho) e^{-\frac{g}{p}} \left(e^{\frac{as}{p}} - 1 \right) + \frac{as}{p}$$

sive, si g magnum habet valorem ad constantem barometricam l , sine gravi errore

$$\rho = (\rho) e^{-\frac{(g-n)}{p} as}$$

quae posterior formula eo facilius pro priore potest recipi, quod utriusque elementa nonnisi hypothetica sunt. Hac igitur in sequentibus disquisitionibus usurpata, e Mechanica coelesti Tom. IV. p. 251 consequatur

$$\delta\theta = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sqrt{2\beta} \left\{ \begin{array}{l} e^{-\frac{\alpha g}{\sin \theta^2}} \Psi(1) \\ + 2^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha \beta}{\sin \theta^2} \cdot e^{-\frac{2\alpha g}{\sin \theta^2}} \Psi(2) \\ + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\alpha^2 \beta^2}{\sin \theta^4} \cdot e^{-\frac{3\alpha g}{\sin \theta^2}} \Psi(3) \\ + \frac{4^{\frac{1}{2}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\alpha^3 \beta^3}{\sin \theta^6} \cdot e^{-\frac{4\alpha g}{\sin \theta^2}} \Psi(4) \\ + \frac{5^{\frac{1}{2}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\alpha^4 \beta^4}{\sin \theta^8} \cdot e^{-\frac{5\alpha g}{\sin \theta^2}} \Psi(5) \\ + \text{etc. etc.} \end{array} \right\} \quad (1)$$

Signorum ubi introductorum haec est vis:

α est refractionis constans

$$\beta \dots \dots \frac{g-l}{g} a$$

$$\Psi(n) \dots e^{\frac{n g}{2} \cot \theta} \int e^{-n t} dt \left[\begin{array}{l} a t = \sqrt{\frac{n \beta}{2}} \cot \theta \text{ usque} \\ \text{ad } t = \infty \text{ sumptam} \end{array} \right]$$

Sed commodiorem hic refractionis valor nancisci potest formam, a LAPLACIO et KRAMPTIO inventam et infra una cum aliis huc spectantibus transformationibus in medium prolatam.

$$\text{Voluminis ejusdam aeris extensio adsumpta est} \\ = 1 + (\tau - 50) \frac{0,375}{180} = 1 + (\tau - 50) 0,00208333$$

ubi τ indicat gradum thermometri a BRADLEIO usurpato, quod FAHRENHEITIANA quidem instructum fuit scala, sed ex observatione mense Octobri a. 1750 facta, temperaturam uivis liquescentis in 33,25 indicavit.

Si itaque thermometri sub dio gradum ponis = τ , barometri = b (pollicibus Anglicis expressum) et thermometri in barometro = τ' , ex antecedente hae fluunt formulae

$$l = l' [1 + (\tau - 50) 0,00208333]$$

$$\alpha = \frac{\alpha' \left(\frac{b}{29,6} \right)}{[1 + (\tau - 50) 0,00208333] [1 + (\tau' - 50) 0,0001025]}$$

unde post l' , α' et g determinata, qualiscunque barometri et thermometri sit gradus, deduci potest refractione ope superioris formulae.

Quum vero difficilior sit, semper calculo directo quaerere refractionem, usui melius accommodata est haec forma

$$\left\{ \delta\theta + \frac{d\delta\theta}{d\tau} (\tau - 50) + \frac{d^2\delta\theta}{1 \cdot 2 \cdot d\tau^2} (\tau - 50)^2 \right\} \\ \times \left\{ 1 + \frac{d\delta\theta}{\delta\theta \cdot d b} \left(\frac{b: 29,6}{1 + (\tau' - 50) 0,0001025} - 1 \right) \right\}$$

in qua omissa membra semper sunt levioris momenti. Tabula igitur, varias hujus formulae partes pro $\tau = 50^{\circ}$ continens, ipsius formulae locum explebit. Vulgo tamen magis etiam expediet haec ejusdem forma

$$\left\{ \frac{\delta\theta}{1 + \varepsilon(\tau - 50)^2} + \left\{ \frac{d^2\delta\theta}{1 \cdot 2 \cdot d\tau^2} - \frac{1 \cdot 1 + \varepsilon}{1 \cdot 2} \varepsilon^2 \cdot \delta\theta \right\} (\tau - 50)^2 \right\} \\ \times \left\{ \frac{b: 29,6}{1 + (\tau' - 50) 0,0001025} \right\}^4$$

ubi ε scriptum est pro 0,00208333. Praeterea quantitates in hac formula neglectae leviores sunt, quam in antecedenti, quoniam hic membra, quibus inest $(\tau - 50)^2$ etc. non omittuntur, sed in factore $[1 + \varepsilon(\tau - 50)]^{-2}$ magna certe cum approximatione continentur. Exponentes λ et A ita determinati sunt ut sit

$$-\lambda \cdot \varepsilon \delta \theta = \frac{d\delta\theta}{d\tau}$$

$$A \cdot \delta \theta = \frac{d\delta\theta}{db}$$

Jam etiam præferenda est illa formula ob usum logarithmicum, si excipis membrum

$$\left\{ \frac{d^2\delta\theta}{1.2 \cdot d\tau^2} - \frac{1.1+1}{1.2} \varepsilon^2 \delta \theta \right\} (\tau - 50)^2$$

quod, ut sequentia docebat, quum minutissimum sit, aut omnino negligi potest aut facile addi post finitos calculos.

Non quidem difficile est invenire quotientes differentiales ad $\delta\theta$ pertinentes, id quod necessarium est, si quis tabulam ad quemque instrumentorum meteorologicorum gradum pariter aptam construere velit: nihilo minus autem ea, quæ proprie exhiberunt calculi, quo-

$$Q = xq' + x^2 \left\{ \frac{1}{2} q'' - q' \right\} + \frac{x^3}{1.2} \left\{ \frac{1}{2} q''' - 2q'' + q' \right\} + \frac{x^4}{1.2.3} \left\{ \frac{1}{2} q'''' - 3q''' + 3.2q'' - q' \right\} + \text{etc.}$$

$$Q' = xq' + x^2 \left\{ q'' - q' \right\} + \frac{x^3}{1.2} \left\{ q''' - 2.2q'' + q' \right\} + \frac{x^4}{1.2.3} \left\{ q'''' - 3.3q''' + 3.2^2q'' - q' \right\} + \text{etc.}$$

$$Q'' = xq' + x^2 \left\{ 2q'' - q' \right\} + \frac{x^3}{1.2} \left\{ 3q''' - 2.2^2q'' + q' \right\} + \frac{x^4}{1.2.3} \left\{ 4q'''' - 3.3^2q''' + 3.2^3q'' - q' \right\} + \text{etc.}$$

$$Q''' = xq' + x^2 \left\{ 2^2q'' - q' \right\} + \frac{x^3}{1.2} \left\{ 3^2q''' - 2.2^3q'' + q' \right\} + \frac{x^4}{1.2.3} \left\{ 4^2q'''' - 3.3^3q''' + 3.2^4q'' - q' \right\} + \text{etc.}$$

cui brevittatis causa substitui potest

$$Q = xU + x^2U' + \frac{x^3}{1.2} U'' + \frac{x^4}{1.2.3} U''' + \text{etc.}$$

$$Q' = xU' + x^2U'' + \frac{x^3}{1.2} U''' + \frac{x^4}{1.2.3} U'''' + \text{etc.}$$

$$Q'' = xU'' + x^2U''' + \frac{x^3}{1.2} U'''' + \frac{x^4}{1.2.4} U''''' + \text{etc.}$$

$$Q''' = xU''' + x^2U'''' + \frac{x^3}{1.2} U''''' + \frac{x^4}{1.2.3} U'''''' + \text{etc.}$$

Differentiatio functionum (2) has præbet aequationes differentiales

$$\left. \begin{aligned} x \left(\frac{dQ}{dx} \right) &= (1-x)Q' \\ x \left(\frac{dQ'}{dx} \right) &= (1-x)Q'' \\ x \left(\frac{dQ''}{dx} \right) &= (1-x)Q''' \\ \text{etc.} & \quad \text{etc.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

dammodo transformanda sunt, ne ratiocinatio ipsa nimia implicetur difficultate. Qualis sit hujus transformationis lex, hic liceat afferre.

Series functionum

$$Q = xe^{-x}q' + \frac{x^2}{1.2} e^{-2x} \cdot q'' + \frac{x^3}{1.2.3} e^{-3x} \cdot q''' + \text{etc.}$$

$$Q' = xe^{-x}q' + \frac{x^2}{1.2} e^{-2x} \cdot 2q'' + \frac{x^3}{1.2.3} e^{-3x} \cdot 3q''' + \text{etc.}$$

$$Q'' = xe^{-x}q' + \frac{x^2}{1.2} e^{-2x} \cdot 2^2q'' + \frac{x^3}{1.2.3} e^{-3x} \cdot 3^2q''' + \text{etc.}$$

$$Q''' = xe^{-x}q' + \frac{x^2}{1.2} e^{-2x} \cdot 2^3q'' + \frac{x^3}{1.2.3} e^{-3x} \cdot 3^3q''' + \text{etc.}$$

quantitatibus exponentialibus in series infinitas dissolutis, facile in hanc convertitur

quibus adjuvantibus, functiones $Q, Q', Q'', \text{etc.}$ reduci possunt ad series infinitas, secundum coefficientes illorum Q vel Q' vel Q'' etc. (3) progredientes: ita ut una ex his coefficientium seriibus computata sufficiat ad omnia $Q^{(n)}$ determinanda. Quodsi igitur hic utimur coefficientibus

$$U; U'; U''; U'''; \text{etc.}$$

ideoque initium ducimus a valore, quem habet Q (3): deinceps facta hujus valoris differentiatione, et eliminatione quotientium differentialium per aequationes (4) adhibita, obtinemus

$$\left. \begin{aligned} Q &= \Sigma \frac{x^{n+1}}{1.2 \dots n} U_{(n)} \\ (1-x) Q' &= \Sigma \frac{(n+1)x^{n+1}}{1.2 \dots n} U_{(n)} \\ -xQ' + (1-x)^2 Q'' &= \Sigma \frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{1.2 \dots n} U_{(n)} \\ -xQ' - 3x(1-x)Q'' + (1-x)^3 Q''' &= \Sigma \frac{(n+1)^3 x^{n+1}}{1.2 \dots n} U_{(n)} \\ -xQ' - x(4-7x)Q'' - 6x(1-x)^2 Q''' + (1-x)^4 Q'''' &= \Sigma \frac{(n+1)^4 x^{n+1}}{1.2 \dots n} U_{(n)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Illud vero quum pateat, series infinitas hic occurrentes eo commodius exhibituras esse quodvis $Q^{(n)}$ (si comparas cum seriebus (3)) quo minor relatio sit

$$(n+1)^n U_{(n)}^{(n)} : U_{(n)}^{(n)}$$

hanc ob rem, ut omnia $Q^{(n)}$ quam facillime impetrentur, ea potissimum harum functionum habenda erit prima ordine, in qua relatio ista, dum n crescit, celerime decrescit.

In specialibus pro q', q'', q''' etc. . . . positis valoribus, disquisitio illa inter multa alia aliquo ducit, quod in refractionum theoria gravissimum est ideoque commemoratione dignum. Fac esse

$$\begin{aligned} q' &= 1 \\ q'' &= 2 \\ q''' &= 3^2 \\ q'''' &= 4^3 \\ q^v &= 5^4 \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

habes

$$U = 1; \quad U_n = 0; \quad U_{nn} = 0; \quad U_{nnn} = 0; \quad \text{etc.}$$

et si ad aequationes (5) respicis,

$$x = ze^{-x+\mu} + z^2e^{-2x+2\mu} + \frac{3}{1.2} z^3e^{-3x+3\mu} + \frac{4^3}{1.2.3} z^4e^{-4x+4\mu} + \text{etc. . . .}$$

quae series secundum ipsius μ potentias disposita, hoc offert

$$x = Q + Q'\mu + Q''\frac{\mu^2}{1.2} + Q'''\frac{\mu^3}{1.2.3} + \text{etc. . . .}$$

vel secundum (6)

$$x = z \left\{ 1 + \frac{1}{1-z} \cdot \mu + \frac{1}{(1-z)^2} \cdot \frac{\mu^2}{1.2} + \frac{1+2z}{(1-z)^3} \cdot \frac{\mu^3}{1.2.3} + \frac{1+8z+6z^2}{(1-z)^4} \cdot \frac{\mu^4}{1.2.3.4} + \text{etc. . . .} \right\} \dots \dots (7)$$

Ex iis, quae supra attuli, intelligere licet, evanescere $U; U_n; U_{nn};$ etc. . . . quum $q'; q''; q'''$. . . inter se relationem $1:2:3^2:4^3$. . . habeant, finitamque tunc serierum (2) summationem obtineri posse. Ubi vero non multum absunt ab hac relatione valores illorum $q'; q''; q'''$. . . magna apparet serierum convergentia, quoniam tali modo ordo omnium U cito decrescit. Quibuscum si confers seriem de refractione antea allatam, in qua fuit

$$q^{(n+1)} : q^{(n)} = (n+1)^{\frac{2n+1}{2}} \Psi(n+1) : n^{\frac{2n-1}{2}} \Psi(n)$$

facile cernitur, mutatam ejus formam (3) eo majori convergentia affectum iri, quo magis quantitates

$$(n+1)^{\frac{1}{2}} \Psi(n+1) \quad \text{et} \quad n^{\frac{1}{2}} \Psi(n)$$

ad aequalitatem inclinent. Quum autem relationi quantitatum istarum hi sint bini limites

$$\begin{aligned} (n+1)^{\frac{1}{2}} : n^{\frac{1}{2}} &\dots \text{ pro } \vartheta = 90^\circ \\ 1 : 1 &\dots \text{ pro } \vartheta = 0^\circ \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} Q &= z \\ Q' &= \frac{z}{1-z} \\ Q'' &= \frac{z}{(1-z)^2} \\ Q''' &= \frac{z(1+2z)}{(1-z)^3} \\ Q'''' &= \frac{z(1+8z+6z^2)}{(1-z)^4} \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Quod ubi locum habet, serierum (2) summatio finita tibi contingit; sin vero, id quod simile est, datum sit $e^{-x} z^n q^{(n)} = n^{n-1} \cdot u^n$

summationem illam reduces ad solvendam hanc transcendentem aequationem

$$u = ze^{-x}$$

ex eaque repertum x in formulis (6) substituas. Hinc vice versa manat transcendens aequationis solutio

$$xe^{-x} = ze^{-x+\mu}$$

per seriem infinitam, quae in parvis pro μ valoribus citissime convergit: est enim generaliter (6)

$$x = xe^{-x} + z^2e^{-2x} + \frac{3}{1.2} z^3e^{-3x} + \frac{4^3}{1.2.3} z^4e^{-4x} + \text{etc.}$$

ideoque nostrum

omnino perexpedit ad finem pervenies, si, LAPLACIO ac KRAMPIO ducibus, refractionem computaveris e transformatione, quam prima serierum (3) offert.

His ita praeparatis, maxime juvat in quotientibus differentialibus inquirendis, refractionem tractare tamquam functionem variabilium sejunctorum

$$\frac{\alpha\beta}{\sin \vartheta^2} \quad \text{et} \quad \beta,$$

quarum utraque cum thermometro variat: prior etiam cum barometro. Positis igitur

$$\frac{\alpha\beta}{\sin \vartheta^2} = z$$

$$n^{\frac{2n-1}{2}} \Psi(n) = q^{(n)}$$

habes

$$(1-\alpha)\delta\vartheta = \sin \vartheta^2 \cdot \sqrt{\frac{z}{\beta}} \cdot Q$$

ubi, ut supra,

$$Q = \sum \frac{z^n e^{-nz}}{1.2 \dots n} q^{(n)}$$

Quotientes differentiales refractionis $\delta\theta$ facile inveniri possunt ex iis, qui pertinent ad Q ; quamobrem in hos inquirendum erit. Notum est autem, esse

$$\begin{aligned} \left(\frac{dQ}{d\tau}\right) &= \left(\frac{dQ}{d\alpha}\right)\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right) + \left(\frac{dQ}{d\beta}\right)\left(\frac{d\beta}{d\tau}\right) \\ \left(\frac{d^2Q}{d\tau^2}\right) &= \left(\frac{d^2Q}{d\alpha^2}\right)\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{d\alpha}\right)\left(\frac{d^2\alpha}{d\tau^2}\right) + 2\left(\frac{d^2Q}{d\alpha d\beta}\right)\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right)\left(\frac{d\beta}{d\tau}\right) \\ &\quad + \left(\frac{d^2Q}{d\beta^2}\right)\left(\frac{d\beta}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{d\beta}\right)\left(\frac{d^2\beta}{d\tau^2}\right) \\ \left(\frac{dQ}{db}\right) &= \left(\frac{dQ}{d\alpha}\right)\left(\frac{d\alpha}{db}\right). \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d^2Q}{d\beta^2}\right) = \frac{\cotg\theta^2}{4} Q'' - \sqrt{\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\cotg\theta^2}{4\beta} \cdot \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} + \sqrt{\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\cotg\theta}{4\beta^2} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Quotientes autem differentiales, ad α relati, consequuntur ex (4)

$$\begin{aligned} \left(\frac{dQ}{d\alpha}\right) &= \frac{1-\alpha}{\alpha} Q', \\ \left(\frac{d^2Q}{d\alpha^2}\right) &= -\frac{1}{\alpha^2} Q' + \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^2} Q'', \end{aligned}$$

denique, si e $\left(\frac{dQ}{d\alpha}\right)$ quotientem differentialem, ad β relatum quaeris, nancisceris

$$\left(\frac{d^2Q}{d\alpha d\beta}\right) = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\cotg\theta^2}{2} Q'' - \sqrt{\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\cotg\theta}{2\beta} \cdot \frac{1}{(1-\alpha)^2}.$$

$$\left(\frac{dQ}{db}\right) = (1-\alpha) Q'$$

$$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right) = -\alpha Q' \left\{ \frac{2g-l}{g-l} (1-\alpha) + \frac{g}{g-l} \cdot \frac{\beta}{2} \cotg\theta^2 \right\} + \varepsilon \sqrt{\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\cotg\theta}{2} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{g}{g-l}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2Q}{d\tau^2}\right) &= +\varepsilon^2 Q'' \left\{ \frac{2g-l}{g-l} (1-\alpha) + \frac{g}{g-l} \cdot \frac{\beta}{2} \cotg\theta^2 \right\}^2 + \varepsilon^2 Q' \left\{ \frac{6g-2l}{g-l} (1-\alpha) + \left(\frac{2g-l}{g-l}\right)^2 + \frac{\beta}{2} \cotg\theta^2 \cdot \frac{2g}{g-l} \right\} \\ &\quad - \varepsilon^2 \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\beta}{2} \cdot \cotg\theta \cdot \frac{g}{g-l} \left\{ \frac{g}{g-l} \cdot \frac{\beta}{2} \cdot \cotg\theta^2 + \frac{2g-l}{g-l} \cdot \frac{1}{1-\alpha} + \frac{3g-4l}{4g-4l} \right\} \end{aligned}$$

Adhibitis ergo quantitibus similibus signis expressis

$$(1-\alpha) \delta\theta = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \cdot \sin\theta^2 \cdot Q$$

$$(1-\alpha) \delta'\theta = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \cdot \sin\theta^2 \cdot Q'$$

$$(1-\alpha) \delta''\theta = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \cdot \sin\theta^2 \cdot Q''$$

etc. etc.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2(1-\alpha)\delta\theta}{1.2d\tau^2}\right) &= +\frac{1}{2}\varepsilon^2(1-\alpha)\delta''\theta \left\{ \frac{2g-l}{g-l} (1-\alpha) + \frac{g}{g-l} \cdot \frac{\beta}{2} \cotg\theta^2 \right\}^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}\varepsilon^2(1-\alpha)\delta'\theta \left\{ \left(4 + \frac{l(g-4l)}{(g-l)^2} \right) (1-\alpha) \left(\frac{2g-l}{g-l} \right)^2 + \frac{g(g-2l)}{(g-l)^2} \cdot \frac{\beta}{2} \cotg\theta^2 \right\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cdot (1-\alpha) \delta\theta \left\{ \frac{g(g-4l)}{4(g-l)^2} \right\} - \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \frac{\alpha\beta \cotg\theta}{1-\alpha} \left\{ \frac{gg}{(g-l)^2} \cdot \frac{\beta}{4} \cdot \cotg\theta^2 + \frac{g(2g-l)}{(g-l)^2} \cdot \frac{1}{1-\alpha} + \frac{g(g-4l)}{4(g-l)^2} \right\} \end{aligned}$$

Commodiores quotientium differentialium formulas nobis comparare possemus, si poneremus illud g ex

Sed et functionis $\Psi(n)$ natura intelligitur, esse

$$\left(\frac{d\psi^{(n)}}{d\beta}\right) = \frac{\cotg\theta^2}{2} n \psi^{(n)} - \frac{\cotg\theta}{2\beta} \sqrt{\frac{\beta}{2}} \cdot n^2$$

quod, si eum (2) et (6) comparas evadit

$$\left(\frac{dQ'}{d\beta}\right) = \frac{\cotg\theta^2}{2} Q' - \frac{\cotg\theta}{2\beta} \sqrt{\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Similiter quoque differentiatio functionis Q' praebet

$$\left(\frac{dQ'}{d\beta}\right) = \frac{\cotg\theta^2}{2} Q'' - \frac{\cotg\theta}{2\beta} \sqrt{\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

unde proficiscitur

Formulae, pro α et β supra allatae, haec exhibent:

$$\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right) = -\varepsilon \cdot \alpha \left(\frac{2g-l}{g-l} \right)$$

$$\left(\frac{d^2\alpha}{d\tau^2}\right) = +\varepsilon^2 \cdot 2\alpha \left(\frac{3g-l}{g-l} \right)$$

$$\left(\frac{d\beta}{d\tau}\right) = -\varepsilon \cdot \beta \left(\frac{g}{g-l} \right)$$

$$\left(\frac{d^2\beta}{d\tau^2}\right) = +\varepsilon^2 \cdot 2\beta \left(\frac{g}{g-l} \right)$$

quibus apte substitutis, hi se offerunt quotientes differentiales, ad Q pertinentes:

e quotientibus differentialibus pro Q manabunt haec:

$$\left(\frac{d(1-\alpha)\delta\theta}{db}\right) = (1-\alpha)\delta'\theta(1-\alpha)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d(1-\alpha)\delta'\theta}{d\tau}\right) &= -\varepsilon(1-\alpha)\delta''\theta \left\{ \frac{2g-l}{g-l} (1-\alpha) + \frac{g}{g-l} \cdot \frac{\beta}{2} \cotg\theta^2 \right\} \\ &\quad + \varepsilon(1-\alpha)\delta\theta \cdot \frac{3g}{g-l} + \varepsilon \frac{\alpha\beta \cotg\theta}{1-\alpha} \cdot \frac{3g}{g-l} \end{aligned}$$

eadem lege varians, cui obnoxium est l ; veruntamen non usi sumus hac hypothesi. Contra in sequentratio

cinatione factorem $(1 - \alpha)$ adhibuimus, ut si constans esset: est enim α ita minutum, ut error hinc ortus nullus sit habendus.

Summa refractionum computandarum difficultas in formandis functionibus $q', q'', q''' \dots$ sita est, quod pendet ab inveniendis functionibus $\Psi(n)$. Harum quidem determinandarum causa KRAMPUS dedit tabulam, quae logarithmos pro cunctis partibus centenariis argumenti

$$\sqrt{\frac{n\beta}{2}} \cdot \cotg \theta = T$$

a 0 usque ad 3 suppeditat, et cui ubi de refractionibus prope horizontem agitur, satis inest praesidium. Sed in minoribus a vertice distantis occurrunt argumenta, numero 3 majora et hanc ob causam tabulae amplificationem requirentia. Jam illud, quod functio $\Psi(n)$ eo propius inverse proportionalis sit argumento suo, quo hoc est majus, nos docet commodiorem exarare tabulam, quae non solum minorem extensionem habeat, verum etiam usum faciliorem praebet. Quare inserenda videtur huic loco. Illa enim functionis natura, quam modo commemoravimus, sat declarat, ubi non T ipsum sed logarithmum T sinamus esse tabulae argumentum, argumenti et tabulae differentias eo propius accessuras esse ad aequalitatem, quo majus sit argumentum. Commodior hinc evadit interpolatio neque argumentum e suis logarithmis quaerendum est: celeriter denique pervenimus ad majores valores quantitatis T . Haec tamen tabula quam in minoribus argumenti valoribus multum de praestantia amittat, in his anteposenda est KRAMPANA, e qua ubertatis caussa hic promam, quidquid ad utramque tabulam probe copulandam supplendamque valebit. Itaque ubi prior desierit tabula, initium ducet posterior, nimirum a $T = 1$ sive $\log \text{Br. } T = 0$; poteritque adhiberi usque ad $T = 10$ sive $\log \text{Br. } T = 1$: quod sufficit ubicunque eam in usum vocabimus. Quoad ad refractionis formulas saepius redire necesse esset, quam revera est, quoniam habemus tabulam jam compositam: juvaret construere tabulam, e qua cum argumento

$$\sqrt{\frac{\beta}{2}} \cdot \cotg \theta \quad \text{sive} \quad \log \sqrt{\frac{\beta}{2}} \cotg \theta$$

logarithmos ad

$$U; U'; U''; U''' \dots \text{ etc.}$$

pertinentes sumere liceret: quam quidem hic, ubi de refractionum tabula semel construenda agitur, conficere non esset operae pretium.

Hae tabulae omnia, quae ad refractiones computandas necessaria sunt, directe exhibent si distantia a vertice minor est quam 90° : in distantia a vertice $= 180^\circ - \theta$ reperitur conveniens $q^{(n)}$

$$= \sqrt{x} \cdot n^{\frac{2n-1}{2}} e^{n \cdot \frac{\beta}{2} \cotg \theta} - q^{(n)}$$

et hinc

$$\delta\theta + \delta(180^\circ - \theta) = \frac{\sin \theta^3}{1 - \alpha} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \left\{ \begin{array}{l} x \cdot e^{-z + \frac{\beta}{2} \cotg \theta^2} \\ + 2\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-2z + 2 \cdot \frac{\beta}{2} \cotg \theta^2} \\ + \frac{3\frac{1}{2}}{1 \cdot 2} x^3 \cdot e^{-3z + 3 \cdot \frac{\beta}{2} \cotg \theta^2} \\ + \frac{4\frac{1}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^4 \cdot e^{-4z + 4 \cdot \frac{\beta}{2} \cotg \theta^2} \\ + \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{array} \right.$$

quae formula docet, qualis sit nexus inter refractiones binarum a vertice distantiarum, ad 180° se invicem supplementium. Quod vero hic occurrit

$$\frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot x^n \cdot e^{-nz + n \cdot \frac{\beta}{2} \cotg \theta^2}$$

mutari potest in

$$\frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot x'^n \cdot e^{-n'z'}$$

eaque ratione quaestio, quae sit refractionum summa, reduci potest ad solutionem aequationis transcendentis et ad computationem refractionis horizontalis. Ponere etiam fas est

$$\delta\theta + \delta(180^\circ - \theta) = \frac{\sin \theta^3}{1 - \alpha} \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \cdot Q$$

ubi Q secundum transformationem supra (3) allatam invenitur

$$z' + z'^2 \left\{ 2\frac{1}{2} - 1 \right\} + \frac{z'^3}{1 \cdot 2} \left\{ 3\frac{1}{2} - 2 \cdot 2\frac{1}{2} + 1 \right\} + \text{etc.} \dots$$

quae series exhibet refractiones horizontales; z' autem prodit ex aequatione in (7) soluta

$$z' e^{-z'} = x e^{-z + \frac{\beta}{2} \cotg \theta^2}$$

Hae theoriae de refractione explicatione praemissa, jam pauca addenda videntur de re, quae, quam non omni vacet dubitatione, illustranda est priusquam theoriam ad observationes transferamus. Est enim triplex astronomorum consuetudo thermometri observandi, quod quidem tantum abest, ut sit levioris momenti, ut etiam differentias refractionum ab astronomis notatas genuisse videatur. Alii enim tabularum refractiones ex his corrigunt, quae indicat thermometrum versus septentrionem sub dio collocat: alii medium sumunt ejus quod

Tabula I.
 Logarithmi functionis $e^{tt} f e^{-tt}$ at $t = T$ usque ad $t = \infty$ sumpti.
 Argumentum = T .

Arg.	Logarithmi.	Differentiae		Arg.	Logarithmi.	Differentiae	
		I.	II.			I.	II.
0,00	9,9475449	- 48847	+ 312	0,50	9,7369072	- 36060	+ 202
0,01	9,9426602	18535	312	0,51	9,7333012	35858	203
0,02	9,9378067	48223	306	0,52	9,7297154	35655	201
0,03	9,9329844	47917	305	0,53	9,7261499	35454	199
0,04	9,9281927	47612	303	0,54	9,7226045	35255	196
0,05	9,9234315	- 47309	+ 300	0,55	9,7190790	- 35059	+ 197
0,06	9,9187006	47009	297	0,56	9,7155731	34862	195
0,07	9,9139997	46712	296	0,57	9,7120869	34667	190
0,08	9,9093285	46416	291	0,58	9,7086202	34477	191
0,09	9,9046869	46125	290	0,59	9,7051725	34286	190
0,10	9,9000744	- 45835	+ 287	0,60	9,7017439	- 34096	+ 187
0,11	9,8954909	45548	286	0,61	9,6983343	33909	187
0,12	9,8909361	45262	283	0,62	9,6949434	33722	184
0,13	9,8864099	44979	279	0,63	9,6915712	33538	182
0,14	9,8819120	44700	278	0,64	9,6882174	33356	182
0,15	9,8774420	- 44422	+ 275	0,65	9,6848818	- 33174	+ 180
0,16	9,8729998	44147	273	0,66	9,6815644	32994	179
0,17	9,8685851	43874	271	0,67	9,6782650	32815	175
0,18	9,8641977	43603	269	0,68	9,6749835	32640	177
0,19	9,8598374	43334	266	0,69	9,6717195	32463	172
0,20	9,8555040	- 43068	+ 262	0,70	9,6684732	- 32291	+ 175
0,21	9,8511972	42806	262	0,71	9,6652441	32116	170
0,22	9,8469166	42544	260	0,72	9,6620325	31946	170
0,23	9,8426622	42284	257	0,73	9,6588379	31776	167
0,24	9,8384338	42027	255	0,74	9,6556603	31609	170
0,25	9,8342311	- 41772	+ 252	0,75	9,6524994	- 31439	+ 162
0,26	9,8300539	41520	251	0,76	9,6493555	31277	166
0,27	9,8259019	41269	249	0,77	9,6462278	31111	162
0,28	9,8217750	41020	245	0,78	9,6431167	30949	162
0,29	9,8176730	40775	245	0,79	9,6400218	30787	161
0,30	9,8135955	- 40530	+ 242	0,80	9,6369431	- 30626	+ 157
0,31	9,8095425	40288	239	0,81	9,6338805	30469	159
0,32	9,8055137	40049	238	0,82	9,6308336	30310	156
0,33	9,8015088	39811	237	0,83	9,6278026	30154	155
0,34	9,7975277	39574	235	0,84	9,6247872	29999	154
0,35	9,7935703	- 39339	+ 230	0,85	9,6217873	- 29845	+ 151
0,36	9,7896364	39109	229	0,86	9,6188028	29694	152
0,37	9,7857255	38880	270	0,87	9,6158334	29542	151
0,38	9,7818375	38650	226	0,88	9,6128792	29391	148
0,39	9,7779725	38424	223	0,89	9,6099401	29243	148
0,40	9,7741301	- 38201	+ 222	0,90	9,6070158	- 29095	+ 146
0,41	9,7703100	37979	221	0,91	9,6041063	28949	146
0,42	9,7665121	37758	220	0,92	9,6012114	28803	144
0,43	9,7627363	37538	215	0,93	9,5983311	28659	143
0,44	9,7589825	37323	215	0,94	9,5954652	28516	142
0,45	9,7552502	- 37108	+ 213	0,95	9,5926136	- 28374	+ 139
0,46	9,7515394	36895	210	0,96	9,5897762	28235	140
0,47	9,7478499	36685	210	0,97	9,5869527	28095	140
0,48	9,7441814	36475	208	0,98	9,5841432	27955	138
0,49	9,7405339	36267	207	0,99	9,5813477	27817	138
0,50	9,7369072			1,00	9,5785660		

Tabula II.
 Logarithmi functionis $e^{tt} f e^{-tt}$ a $t = T$ usque ad $t = \infty$ sumpti.
 Argumentum = log Br. T. -

Arg.	Logarithmi.	Differentiae		Arg.	Logarithmi.	Differentiae	
		I.	II.			I.	II.
0,00	9,5785660	- 64271	- 746	0,50	9,1794673	- 92013	- 301
0,01	9,5721389	65017	742	0,51	9,1702660	92314	291
0,02	9,5656872	65759	738	0,52	9,1610346	92605	282
0,03	9,55920613	66497	735	0,53	9,1517741	92887	272
0,04	9,55274116	67232	729	0,54	9,1424854	93159	264
0,05	9,5462884	- 67961	- 726	0,55	9,1331695	- 93423	- 256
0,06	9,53983923	68687	720	0,56	9,12388272	93679	245
0,07	9,53320296	69407	716	0,57	9,1144693	93924	239
0,08	9,52550829	70123	707	0,58	9,1050669	94163	230
0,09	9,5169706	70830	704	0,59	9,0956506	94393	223
0,10	9,5109876	- 71534	- 695	0,60	9,0862113	- 94616	- 214
0,11	9,5038342	72229	689	0,61	9,0767497	94830	206
0,12	9,4966113	72918	681	0,62	9,0672667	95036	200
0,13	9,4893196	73599	676	0,63	9,0577631	95236	192
0,14	9,4819596	74275	666	0,64	9,0482395	95428	184
0,15	9,4745321	- 74940	- 660	0,65	9,0386967	- 95612	- 180
0,16	9,4670381	75600	649	0,66	9,0291355	95792	171
0,17	9,4594781	76249	642	0,67	9,0195563	95963	166
0,18	9,4518532	76891	633	0,68	9,0099600	96129	159
0,19	9,4441641	77524	622	0,69	9,0003471	96288	154
0,20	9,4364117	- 78146	- 615	0,70	8,9907183	- 96442	- 147
0,21	9,4285971	78761	605	0,71	8,9810741	96589	142
0,22	9,4207210	79366	594	0,72	8,9714152	96731	136
0,23	9,4127844	79960	586	0,73	8,9617421	96867	131
0,24	9,4047884	80546	574	0,74	8,9520554	96998	127
0,25	9,3967338	- 81120	- 565	0,75	8,9423556	- 97125	- 120
0,26	9,3886218	81685	554	0,76	8,9326431	97245	117
0,27	9,3804533	82239	543	0,77	8,9229186	97362	111
0,28	9,3722294	82782	534	0,78	8,9131824	97473	108
0,29	9,3639612	83316	522	0,79	8,9034351	97581	102
0,30	9,3556196	- 83838	- 511	0,80	8,8936770	- 97683	- 100
0,31	9,3472358	84349	500	0,81	8,8839087	97783	94
0,32	9,3388009	84849	490	0,82	8,8741304	97877	90
0,33	9,3303160	85339	479	0,83	8,8643427	97967	89
0,34	9,3217821	85818	468	0,84	8,8545460	98056	82
0,35	9,3132003	- 86286	- 456	0,85	8,8447404	- 98138	- 81
0,36	9,3045717	86742	447	0,86	8,8349266	98219	77
0,37	9,2958975	87189	434	0,87	8,8251047	98296	74
0,38	9,2871786	87623	424	0,88	8,8152751	98370	70
0,39	9,2784163	88047	413	0,89	8,8054381	98440	68
0,40	9,2696116	- 88460	- 403	0,90	8,7955941	- 98508	- 65
0,41	9,2607656	88863	391	0,91	8,7857433	98573	61
0,42	9,2518793	89254	381	0,92	8,7758860	98634	61
0,43	9,2429539	89635	371	0,93	8,7660226	98695	56
0,44	9,2339904	90006	360	0,94	8,7561531	98751	55
0,45	9,2249898	- 90366	- 350	0,95	8,7462780	- 98806	- 52
0,46	9,2159532	90716	339	0,96	8,7363974	98858	50
0,47	9,2068816	91055	329	0,97	8,7265116	98908	48
0,48	9,1977761	91384	320	0,98	8,7166208	98956	46
0,49	9,1886377	91704	309	0,99	8,7067252	99002	44
0,50	9,1794673			1,00	8,6968250		

indicant gradus thermometrorum in aere libro et in specula suspensorum: alii denique ad solam specularum temperaturam respiciunt. Atqui dubitari non posset, quin ultima ratio in iis certe distantis a vertice, quae 80 gradibus minores sunt, vera esset, dummodo speculae aer, plerumque calidior, quietam atque horizontalem haberet superficiem. Raro autem vel nunquam hoc accidit, ideoque ratio illa vana duenda est. Dum enim exterior aer qui frigidior est, speculam invadit, multis modis forma ejus mutatur varia tecti apertura, vento, aerae denique per speculam tractu: ita ut refractionis foris facta et augeri et imminui possit radiis intrantibus in regiones calidiores. Medius igitur effectus discriminis, quod est inter temperaturas intra et extra speculam, evanescere videtur, quum aeris dissimiliter calefacti commixtio non certam sequatur legem; nullam quidem, quae ad calculos vocari queat. Neque quemquam observatorem id fugit phaenomenon, quod aeris intra et extra speculam versantis commixtionem turbatam esse satis declarat: saepissime enim sidera apparent vehementi vacillantia tremore, id quod sub dio nunquam tam vehementer conspicitur, quam in specula per aliquod tempus clausa ideoque temperaturam ab exteriori diversissimam habente. Quocirca thermometrum exterius solum debet consuli: intus vero positum eo tantum inservit, ut barometri altitudo reducat ad tabulae temperaturam normalem. Maxime autem expediet, speculam aperire, priusquam observationes instituantur, ut aeris interioris et exterioris temperatura adaequetur aerae tractu. Refractionis tabula hac sectione inclusa, adaptata est ad exteriorem temperaturam neque corrigi potest interioris ope; quae quum vulgo major sit illa, majores praebuisset refractiones: discrimen tamen usu desineret, si semper eadem esset interioris et exterioris temperaturae differentia, quod longe aliter se habet.

Determinatio constantis α peti potuisset e duabus illis aequationibus conditionalibus, in sectione III allatis, quas exhibuerunt observationes stellarum circumpolarium solisque in vicinia aequinoctiorum versantis: veruntamen nimium tunc esset tributum creditae quadrantis praestantiae, neque ob hanc rem sat confidi posset eventui. Nam errorum instrumentorum vis valeret

$$= \frac{c(38^{\circ} 31') \pm c(51^{\circ} 29')}{2,1405}$$

eoque determinationi illi omnis detrahatur fides. Itaque eliciendum fuit α ex observationibus, majorem illius quantitatis amplificationem praebentibus, id est ex observationibus multo majorum refractionum, quae ob id

accuratius ipso quadrante α exhibere potuerunt. Duplex quidem via ad illum patet finem: nam vel solis, solstitiorum tempore observationibus uti, vel binas meridianas altitudines stellarum non occidentium adhibere licet. Priore enim ratione partim quantitas illa quam quaerendo investigamus non ita accurata reperta foret, partim vero fundamento quodam praemisso pro certo usi essemus in nostra disquisitione, quod utrum verum sit necne, ex ipsis observationibus demum intelligere volupe esset. Hoc vero quod ita pro fundamento praemissum foret, est aequalis refractionis radiorum solis et stellarum fixarum, quod nonnulli recentiorum astronomorum in dubium vocarunt. Posteriore igitur adhibita ratione, declinationes 24 stellarum in inferiore culminatione saepissime observatarum, diligenter supputabantur ex observationibus in superiori culminatione factis, adhibita poli elevatione = $51^{\circ} 28' 39,6''$: simulque BRADLEIANAE refractionis error ratiocinationi illi adjungebatur aequationis conditionalis ope. Sic culminationis inferioris distantiae a vertice, ex his declinationibus et poli elevatione collectae et eum iis collatae quae vera observatae sunt, exhibuerunt observatarum refractionum seriem, qua sola inuntur insequentis determinationes.

Unamquamque aequationem conditionalem, ex his observationibus repetitam, afferre supersedi: namque consensus theoriae eamque confirmantium observationum, postea apparens, evidentiis etiam docebit, quantum prospere cesserit refractionum determinatio. Disquisitione diligenter instituta repertum est

$$\alpha' = 57,538$$

$$g = 116865,8 \text{ Toises.}$$

Reliqua commentationi huic inservientia elementa haec sunt:

- 1) Constans barometria, secundum RAMONDIUM LAPLACIUMQUE, atque BIOTIUM ARAGONEMQUE, pro media temperatura normali:

$$l' = 4226,05 \text{ Toises.}$$

- 2) Radius osuli meridiani Grenoviensis

$$a = 3269805 \text{ Toises.}$$

- 3) Mutationes illorum α' et l' , propter aeris temperaturae a temperatura normali defectionem: temperatura autem normalis ea est ubi $\tau = 50^{\circ}$ thermometri a BRADLEIO usurpatis, atque $b = 29,6$ pollices anglicos pro $\tau = 50^{\circ}$.

His assumptis elementis, reperti sunt numeri, qui refractionum tabula continentur. Quum vero commo- dum sit, omnia, quae ad istas supputandas necessaria sint, iterum et probe quidem disposita numeralibusque

valoribus substitutis, reperire in unum locum congesta: hic ea lubet afferre.

Argumenta duarum in hac sectione propositarum tabularum haec sunt:

- Tab. I. $\left. \begin{matrix} \sqrt{\frac{n\beta}{2}} \cdot \cotg \vartheta \\ \log \left\{ \sqrt{\frac{n\beta}{2}} \cdot \cotg \vartheta \right\} \end{matrix} \right\}$ pro $n = 1, 2, 3, 4$, etc.
- Tab. II.

ubi $\log \sqrt{\frac{\beta}{2}} = 1,2857831$.

Hinc in altera tabularum invenitur $\log \Psi_{(n)}$ ejusque ope computatur

$$p^{(n)} = \frac{q^{(n)}}{1.2.3 \dots n} = \frac{\frac{2n-1}{n^2} \Psi_{(n)}}{1.2.3 \dots n}$$

ubi uti licet his computatis logarithmorum coefficientium numeralium valoribus:

- 1 = 1,00000000; log = 0,00000000
 $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{1.2} = 1,41421356; \dots 0,15051510$
 $\frac{3^{\frac{1}{2}}}{1.2.3} = 2,59807621; \dots 0,4146519$

$$\delta \vartheta = \frac{\sqrt{\frac{\beta}{2}}}{(1-\alpha) \sin 1''} \cdot \sin \vartheta^2 \left\{ zU + z^2 U_1 + \frac{z^3}{1.2} U_2 + \frac{z^4}{1.2.3} U_3 + \dots \right\}$$

$$\delta' \vartheta = \frac{\sqrt{\frac{\beta}{2}}}{(1-\alpha) \sin 1''} \cdot \frac{\sin \vartheta^2}{(1-z)} \left\{ zU + 2z^2 U_1 + \frac{3z^3}{1.2} U_2 + \frac{4z^4}{1.2.3} U_3 + \dots \right\}$$

$$\delta'' \vartheta = \frac{\sqrt{\frac{\beta}{2}}}{(1-\alpha) \sin 1''} \cdot \frac{\sin \vartheta^2}{(1-z)^2} \left\{ zU + 2z^2 U_1 + \frac{3z^3}{1.2} U_2 + \frac{4z^4}{1.2.3} U_3 + \dots \right\} + \frac{z}{(1-z)^2} \delta' \vartheta$$

ubi

$$z = \frac{\alpha \beta}{\sin \vartheta^2} \dots \log \alpha \beta = 9,3181259 - 10; \quad \log \frac{\sqrt{\frac{\beta}{2}}}{(1-\alpha) \sin 1''} = 4,0287632;$$

nec non quotientes differentiales, e formulis allatis ad numeros tractados:

	Logarithmi
$\frac{d \cdot \delta \vartheta}{d \alpha}$	7,5265691 - 10
	9,9058445 - 10
	7,037244 - 10
	1,6663966
$\frac{d^2 \cdot \delta \vartheta}{1.2 d \alpha^2}$	4,3164915 - 10
	6,9064613 - 10
	3,6985646 - 10
	1,2716872
	9,2942570 - 10
	8,3312369 - 10
$A = \frac{\delta' \vartheta}{\delta \vartheta} (1-z)$	

$$\frac{4^{\frac{1}{2}}}{1.2.3.4} = 5,33333333; \quad \log = 0,7269987$$

$$\frac{5^{\frac{1}{2}}}{1.2.3.4.5} = 11,64618740; \quad \dots 1,0661838$$

$$\frac{6^{\frac{1}{2}}}{1.2.3.4.5.6} = 26,45365597; \quad \dots 1,4224994$$

$$\frac{7^{\frac{1}{2}}}{1.2.3.4.5.6.7} = 61,75991984; \quad \dots 1,7907067$$

E valoribus pro $p^{(n)}$ deducitur series omnium $U_{(n)}$ (\mathcal{A}^m significante differentiarum ordinem qui est m^{sim}).

$$U = p'$$

$$U_1 = \mathcal{A} \{ p'; p'' \}$$

$$\frac{1}{2} U_2 = \mathcal{A}^2 \left\{ \frac{1}{2} p'; p''; p''' \right\}$$

$$\frac{1}{6} U_3 = \mathcal{A}^3 \left\{ \frac{1}{2.3} p'; \frac{2}{3} p''; p'''; p'''' \right\}$$

$$\frac{1}{24} U_4 = \mathcal{A}^4 \left\{ \frac{1}{2.3.4} p'; \frac{2^2}{3.4} p''; \frac{3}{4} p'''; p''''; p'''' \right\}$$

$$1 \frac{1}{24} U_5 = \mathcal{A}^5 \left\{ \frac{1}{2.3.4.5} p'; \frac{3^2}{3.4.5} p''; \frac{3^2}{4.5} p'''; \frac{4}{5} p''''; p''''; p'''' \right\}$$

etc. etc.

unde concludere potes:

Ut refractiones pro $\theta > 90^\circ$ reperiantur, primum quaeritur

$$z' = z \left\{ 1 + \frac{1}{(1-z)} \cdot \frac{\beta}{2} \cotg \theta^2 + \frac{1}{(1-z)^2} \cdot \frac{\beta^2}{4} \cotg \theta^4 + \frac{1+2z}{(1-z)^3} \cdot \frac{\beta^3}{8} \cotg \theta^6 + \frac{1+8z+6z^2}{(1-z)^4} \cdot \frac{\beta^4}{16} \cotg \theta^8 + \text{etc.} \dots \right\}$$

et idcirco

$$\delta\theta + \delta(180^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}}{(1-\alpha)\sin 1''} \cdot \sin \theta^2 \left\{ Ux' + U, z'^2 + U_n \frac{z'^3}{1.2} + U_m \frac{z'^4}{1.2.3} + \text{etc.} \dots \right\}$$

$$\delta'\theta + \delta'(180^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}}{(1-\alpha)\sin 1''} \cdot \frac{\sin \theta^2}{(1-z')^2} \left\{ Ux' + U, 2z'^2 + U_n \frac{3z'^3}{1.2} + U_m \frac{4z'^4}{1.2.3} + \text{etc.} \dots \right\}$$

$$\delta''\theta + \delta''(180^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}}{(1-\alpha)\sin 1''} \cdot \frac{\sin \theta^2}{(1-z')^3} \left\{ Ux' + U, 2^2 z'^2 + U_n \frac{3^2 z'^3}{1.2} + U_m \frac{4^2 z'^4}{1.2.3} + \text{etc.} \dots \right\} + \frac{z'}{(1-z')^2} \left\{ \delta'\theta + \delta'(180^\circ - \theta) \right\}$$

unde, aucta supputatis $\delta\theta$, $\delta'\theta$, $\delta''\theta$, omnia elici possunt quae ad $\delta(180^\circ - \theta)$ atque ejusdem quantitatis quotientes differentiales inveniendis requiruntur. Constantes hic adhibendae sunt

$$\log \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}}{(1-\alpha)\sin 1''} = 4,2773381$$

- $U = 1,00000000$; $\log = 0,00000000$
- $U' = 0,41421356$; $9,6172243 - 10$
- $\frac{1}{2} U'' = 0,26964909$; $9,4307989 - 10$
- $\frac{1}{6} U''' = 0,20086515$; $9,3029046 - 10$
- $\frac{1}{24} U^{(4)} = 0,16024563$; $9,2047861 - 10$
- $\frac{1}{120} U^{(5)} = 0,13251839$; $9,1222761 - 10$
- $\frac{1}{720} U^{(6)} = 0,11921007$; $9,0763130 - 10$

Formulae modo probatae revera non incommodae videntur ad refractiones pro omnibus a vertice distantibus inquirendas, quoniam in minoribus citissime convergunt: veruntamen non minus subtile et pro $\theta < 75^\circ$ commodius etiam est, totam refractionis formulam in seriem dissolvere, secundum dignitates tangentis θ dispositam: id quod haud difficile est consequi, si in (1) pro functionibus $\Psi_{(n)}$ substituantur noti in series infinitas evoluti valores. Series explicatae numericque circumscriptae hae sunt:

$$\begin{aligned} \delta\theta &= \text{tg } \theta \cdot 57,5621 \dots \log = 1,7601366 \\ &- \text{tg } \theta^3 \cdot 0,069192 \dots \dots \dots 8,84005 - 10 \\ &+ \text{tg } \theta^5 \cdot 0,00026459 \dots \dots \dots 6,42257 - 10 \\ &- \text{tg } \theta^7 \cdot 0,000001733 \dots \dots \dots 4,23879 - 10 \\ \frac{d\delta\theta}{d\tau} &= -\text{tg } \theta \cdot 0,11894 \dots \dots \dots 9,07896 - 10 \\ &- \text{tg } \theta^3 \cdot 0,0000392 \dots \dots \dots 5,59329 - 10 \\ &+ \text{tg } \theta^5 \cdot 0,000000685 \dots \dots \dots 3,83569 - 10 \\ &- \text{tg } \theta^7 \cdot 0,000000090 \dots \dots \dots 1,95424 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta\theta}{1.2.d\tau^2} &= \text{tg } \theta \cdot 0,0002499 \dots \dots \dots 6,39777 - 10 \\ &+ \text{tg } \theta^3 \cdot 0,000000104 \dots \dots \dots 3,01703 - 10 \\ &- \text{tg } \theta^5 \cdot 0,0000000006 \dots \dots \dots 9,77815 - 20 \\ &- \text{tg } \theta^7 \cdot 0,00000000009 \dots \dots \dots 8,95424 - 20 \end{aligned}$$

quae series, e primitivis formulis transformatione natae, accuratissime cum illis consentiunt, dummodo distantia a vertice tam modica sit, ut tangentis nona dignitas sequentesque negligi possint. Tota igitur refractionum tabula quasi ex una eademque formula profecta est.

Jam necesse erit, quae sit refractionum tabularum dispositio, accuratius exponere. In quibus qui sub titulis

$$\delta\theta; \quad \frac{d\delta\theta}{d\tau}; \quad \frac{d^2\delta\theta}{1.2.d\tau^2}$$

inveniuntur numeri in formam columnae dispositi, nulla egent explicatione, eodemque modo, quae subjecta vis sit literae A , supra jam docuimus. Hae tres columnae quamvis sufficient ad refractiones computandas; tamen aliae tres additae sunt, quarum prima refractionum logarithmos continet, minutis secundis expressarum: secunda exponentem factoris thermometrici $= \lambda$ ita exhibet, ut primo quotienti differentialis respondet: tertia denique ea complectitur, quae refractioni illius exponentis ope correctae addenda sunt, ut secundo quoque quotienti differentialis satisfiat.

Nam in illis columnis insatiati eam potissimum ob causam tanta diligentia inquisiti sunt, ut etiam in summis infimisque temperaturis, quae rarius accidunt, perpaullulum tantum tabulae numeri ab iis deflecterent, quae ipsa continet formula: vulgo tamen multo minorem approximationem adhibere licebit et extrema in primis columnae, etiamsi distantiae a vertice superent 80° , saepe poterit negligi. Peculiarior haec de re praecipere, quandoque practicam utilitatem habeat illa tanta

subtilitas, anquirere supervacaneum foret, quoniam elementa totius illius tabulae majori obnoxia sunt incertitudini. Atqui illud tenendum est, ita optime quamvis comparari tabulam, ut utenti relinquatur licentia, quantum sibi placeat negligendi: neque enim magna approximatione incommodior evadit tabularum usus, siquidem quisque, cujus fini tanta subtilitas non convenit, ubique omittere potest unam notam decimalem. Quod eo magis concessum erit, quum jam decima gradus thermometri FAHRENHEITIANI pars logarithmum re-

fractionis mutatione afficiat unitatis quartae notae decimalis.

Extrema si aut plane negligitur columna, aut correctio ibi allata in ratiocinationis fine inseritur; omnia, ut jam supra diximus, ad logarithmos vocari queunt. Ultima igitur tabulae transformatio id offert utilitatis, ut ipsa per se ad omnes barometri et thermometri scalas adhiberi possit neque ad pollices anglicos gradusve thermometri a BRADLEIO usurpati eam transferri necesse sit: qua de causa adjunctae sunt correctionum tabulae logarithmicae, his e formulis deductae:

Barometri altitudo = b .

Pollices Anglici	$\log b - 1,47129$
Lineae Parisienses	$\log b - 2,52281$
Metra (Mètres)	$\log b + 0,12388$

Thermometri interioris gradus = r' .

Scala FAHRENHEITIANA	$0,00000 - \log [1 + (r' - 50^\circ) 0,0001025]$
Scala REAUMURIANA	$0,00080 - \log (1 + r' \cdot 0,00023105)$
Scala centesimalis	$0,00080 - \log (1 + r' \cdot 0,00018484)$

Thermometri exterioris gradus = r .

BRADLEIANUM	$0,00000 - \log [1 + (r - 50^\circ) 0,0020833]$
Scala FAHRENHEITIANA	$-0,00113 - \log [1 + (r - 50^\circ) 0,0020779]$
Scala REAUMURIANA	$+0,01543 - \log (1 + r \cdot 0,0048570)$
Scala centesimalis	$+0,01543 - \log (1 + r \cdot 0,0038856)$

Omnibus his subsidiis inventis refractiones quam facillime accuratissimeque supputari queunt. Primum enim e tabulis petantur

$$\log \delta \theta; \quad A; \quad \lambda;$$

dein e correctionum tabulis una cum barometri et thermometri interni argumento sumantur numeri eo pertinentes, quorum summa multiplicetur per A ; denique cum exterioris quoque thermometri argumento numerus eo spectans promatur idemque multiplicetur per λ . Ambo producta ad $\log \delta \theta$ addita, exhibent logarithmum verae refractionis. Si vero etiam ea, quae

in ultima tabulae columna continentur a $70^\circ 40'$ usque ad $90^\circ 30'$ D. a V., alicujus sunt momenti, fini ratiocinationis facillime adjungi possunt. Ceterum per se patet, si quis refractionum tabula non logarithmica uti velit, correctionem barometri adhiberi posse secundum eam, quam ultimo loco attulimus, rationem; quoniam aequae subtilis et commodior etiam est, quam formula

$$1 + A \left\{ \frac{b : 29,6}{1 + (r - 50^\circ) 0,0001025} - 1 \right\}$$

ab initio accepta.

[Folgt die Refractions-Tafel.]

33. Refractio Astronomica.*)

(Tabb. Regiomont. Einleitung zu Tab. XIV. p. LIX.)

Refractio Tabula, quam hic tradam, ex ea, quam e BRADLEII observationibus derivaveram**), orta est hoc modo, quod correctiones adhibui necessarias, ut illarum cum Regiomontanis completa fieret consensio. Cujus Tabulae historiam breviter hic attingendam esse, haud superfluum duco. Tabulae in „Fundamentis Astronomiae“ subest haec hypothesis, densitatem aeris in altitudine *as* supra superficiem terrae esse

$$= (\rho) \cdot e^{-\frac{g \cdot a}{p} \cdot as}$$

ubi (ρ) densitatem in superficie terrae, *a* radium osculationem meridiani pro specula Grenovicensi = 3269805 Tois., *g* constantem valorem 116865,8 Tois.

$$l = 4226,05 \{ 1 + (\tau - 50) 0,00208333 \}$$

et τ gradum Thermometri a BRADLEIO adhibiti significat. Pro unitate, quae metiamur (ρ) , sumpta est ea aeris densitas, quae tum erit, quum Barometrum 29,6 digitos Anglicos, Thermometrum indicaverit 50°. Sin Barometri altitudo erit *b*, Thermometrum vero, Barometri affixum, temperaturam τ' indicabit mercurii, positum est

$$(\rho) = \frac{b}{29,6 \{ 1 + (\tau' - 50) 0,0001025 \} \{ 1 + (\tau - 50) 0,00208333 \}}$$

Pro aeris densitate = 1, Tabula constantem Refractionis numerum

$$\alpha = 57,538$$

supponit.

$$\delta \theta \left\{ \frac{b}{29,6 \{ 1 + (\tau' - 50) 0,0001025 \}} \right\}^{\lambda} [1 + (f - 48,75) 0,00208333]^{-1}$$

Annis 1820 et 1821 postquam Circulum meridianum a REICHENBACHIO et TERELLIO confectum, quo tum specula Regiomontana instructa erat, ita examinaveram, ut observationibus hoc instrumento institutis exiguas illas addere possem correctiones, quae a flexione instrumenti et a divisionis erroribus orientur, quumque instrumentum ita examinatum certissimas polliceretur observationes, methodo insuper adhibita Thermometrum plane corrigendi, ad novam Refractionis Tabulam condendam observationes pervestigavi stellarum 58 circumpolarium, quae a stella α Ursae minoris culminant usque ad distantiam zenithalem 86° 27'. Quum

*) [Auszug aus 248 d. a. Verz. — Die Tafeln selbst sind weggelassen.]

**) Fundamenta Astronomiae pro Anno 1755. Sect. IV.

His positis elementis, Refractio invenitur e solutione problematica, a KRAMPIO et LAPLACIO prolata. Tabula non modo Refractionis valorem continet pro $b = 29,6$ et $\tau = \tau' = 50^\circ$, sed etiam variationes, quas illa patitur, si b , τ , τ' alios nanciscantur valores. Sed haec variationes theoriae convenienter computatae sunt, neque, ut in prioribus Tabulis suppositum est, totam Refractionem densitati aeris in loco observationis esse proportionalem. Quo accuratiore calculo effectus Barometri et Thermometri consensio Tabulae cum observationibus valde aucta est. Etiam illi, qui serius hanc rem tractaverunt, exemplum Tabulae meae plane secuti sunt plus minusve. Thermometrum, scala FAHRENHEITIANA instructum, quo BRADLEIUS utebatur ad cognoscendam aeris temperaturam, quum esset mense Octob. 1750 in nivem immersum, punctum gelationis habuit in 33° 25, unde supposui, quoniam sufficientes caret de hoc instrumento investigationes, omnes temperaturas illud indicasse 1° 25 supra veras, ergo Tabulam valere pro 48° 75 veri Thermometri FAHRENHEITIANI. Refractioe hujus Tabulae significata per $\delta \theta$, quum A et λ numeri sint, qui in Tabula pro unaquaque distantia zenithali inveniantur, formula, qua vera computabitur Refractio pro Barometri altitudine *b*, pro indicationibus interioris et exterioris Thermometri *f* et *f*, erit:

Refractiois variationes, a temperatura profectas, et observationibus 56 stellarum, quarum distantia zenithalis 60° transcenderet, determinare operam dedissem, inveni, densitatem aeris in temperatura *x* pro scala centesimali Thermometri sumendam esse

$$= \frac{1}{1 + x \cdot 0,0036438}$$

ut observationes quam accuratissime repraesentarentur. Hunc quidem coefficientem Cel. GAY-LUSSAC invenit = 0,00375, sed quum hic pro aere sicco, cujus majores fere sunt respectu Refractionis mutationes, quam aeris humore satiati, numerus inventus à me medio cuidam humoris statui respondet, ita ut positio hoc statu, hic cum illo consentiat numerus. Quam ob causam illi numero numerum praeferre non dubitavi meum. Porro

hac posita determinatione inveni, Refractiones in Tabula „Fundamentorum Astronomiae“ multiplicandas esse per 1,003282, ut, quantum fieri possit, cum observationibus Regiomontanis consentiant. Serius Barometri altitudines, in his observationibus adhibiti, dimidia Linea Parisiensi augendas esse cognovi, quo efficitur, ut Barometri altitudo, pro qua Refractiones per 1,003282 multiplicatae valent, non adequat Lineas Parisinas 333,28, ut suppositum est in disquisitione, sed Lineas 333,78. Quae correctio differentiam inter recentem et veterem determinationem vel minorem praebet, quia nunc tantum est in ratione 1:0,001779, quod, quum pro distantia zenithali 80° nondum 0,6 assequatur, profecto limites non egrediatur incertitudinis, qua BRADLEY instrumenta meteorologica sunt affecta. Utramque igitur determinationem inter se congruere, supponendum est, neaque quidem sententia etiam observationes Grenovicenses reduci poterunt secundum Tabulam Regiomontanam, in qua respectu instrumentorum meteorologicorum nihil incertum residet.

Secundum has igitur pervestigationes Refractionem habemus:

$$= (1+k) \delta \theta \cdot \beta^4 \cdot \gamma^2$$

ubi $k = 0,003282$, β significat Barometri altitudinem divisam per 333,78 Lineas (utramque altitudinem supponimus reductam ad easdem et mercurii et scalae temperaturas), γ aeris densitatem, quatenus a sola temperatura pendente, item divisam per densitatem eam, quae pro 48°75 Thermometri FAHRENHEITIANI locum habet. Aeris temperaturam, prout illum sive scala FAHRENHEITIANA metiamur, sive REAUMURIANA, sive Centesimali, notabimus per f , r , c ; Barometri temperaturam per f' , r' , c' , Barometri altitudinem Lineis Parisiensibus, sive digitis Anglicis, sive partibus Metri Gallici expressam per b^0 , $b^{(1)}$, $b^{(m)}$ significabimus. Quoniam normalis temperatura est harum mensurarum resp. $r = 13^0$, $f' = 62^0$, $c' = 0$, Barometri altitudo ad veram mensuram reducta erit resp.

$$b^0 = \frac{80+r's}{80+13.s}; \quad b^{(1)} = \frac{180+(f'-32)s}{180+30.s}; \quad b^{(m)} = \frac{100+c's}{100}$$

ubi s extensionem indicat scalae a puncto glaciali usque ad punctum aquae bullientis, et si scala erit ex aurichalco fabricata, $= 0,0018782$. Sed quia digitus Anglicus metitur Lineas Parisienses 12:1,065765, Metrum vero 443,296, habebimus

$$b^0 = \frac{80+r's}{80+13.s} = b^{(1)} \frac{12}{1,065765} \cdot \frac{180+(f'-32)s}{180+30.s} \\ = b^{(m)} 443,296 \cdot \frac{100+c's}{100}$$

Supposita normalis Barometri altitudo Linearum 333,78, quam scala dimetiamur, cujus sit temperatura $f' = 50^0$ sive $r' = 8^0$ sive $c' = 10^0$, vera Parisiensis mensura expressa, erit

$$333,78 \frac{80+s.g}{80+13.s}$$

porro mercurii densitas, quae pro eadem temperatura sumpta est pro unitate, erit

$$= \frac{80+s.g}{80+s'.g} = \frac{180+18.g}{180+(f'-32)g} = \frac{100+10.g}{100+c'.g}$$

ubi g extensionem significat a puncto gelationis usque ad punctum ferventis aquae $= \frac{1}{55,5}$. Quantitas igitur β et duobus composita est factoribus B et T , quorum prior a sola Barometri altitudine, alter pendet a temperatura Barometri. Prior ille hic est:

$$B = \frac{b^0}{333,78} \cdot \frac{80+s.g}{80+13.s} \\ = \frac{b^{(1)}}{333,78} \cdot \frac{12}{1,065765} \cdot \frac{80+13.s}{80+8.s} \cdot \frac{180+18.g}{180+30.s} \\ = b^{(m)} \cdot \frac{443,296}{333,78} \cdot \frac{80+13.s}{80+8.s} \cdot \frac{100+10.g}{100}$$

alter

$$T = \frac{80+r's}{80+r'g} = \frac{180+(f'-32)s}{180+(f'-32)g} = \frac{100+c's}{100+c'g}$$

Tabula continet logarithmos duorum illorum factorum quantitatis β pro quoque Argumento, porro logarithmum continet ipsius

$$\gamma = \frac{180+16,75 \cdot 0,36438}{180+(f'-32) \cdot 0,36438} \\ = \frac{180+16,75 \cdot 0,36438}{180+\frac{1}{2}r \cdot 0,36438} \\ = \frac{180+16,75 \cdot 0,36438}{180+\frac{1}{2}c \cdot 0,36438}$$

pro tribus illis variorum Thermometrorum scalis. Loco logarithmi ipsius $(1+k) \delta \theta$ continet $\log \alpha$ ita sumptum, ut sit

$$\log [(1+k) \delta \theta] = \log \alpha + \log \text{tg Dist. a Vert.}$$

Ergo habebimus logarithmum Refractionis:

$$= l. \text{tg } \theta + l. \alpha + A \{ l. B + l. T \} + \lambda. l. \gamma.$$

Tabula hoc modo comparata usque ad distantiam zenithalem 85° continuata est. Usque ad hunc fere terminum ipsam examinavi observationibus meridianis, quas supra memoravi. Sed pro distantis maioribus a Vertice CL. ARGELANDER, qui nunc praepositus est speculae Aboensi, tunc temporis adjunctus erat Regiomontanae, annis 1820 et 1821 numerosas fecit circa stellas occidentes observationes, ex quibus Tabulae in „Fundamentis Astronomiae“ expositae errores pro di-

midio quoque gradu distantiae zenithalis sunt derivati. Observatas has Refractiones quasi supplementum Tabulae adjeci, cujus reductio ad alias Barometri altitudines aliasque temperaturas ope ejusdem formulae supra explicatae efficitur; valores quantitatum A et λ ad hanc reductionem accommodati e „Fund. Astr.“ deprompti sunt.

Neminem fugit, strata aeris inaequaliter esse calefacta et hanc ob causam eorum aequilibrium esse perturbatum. Cujus quoniam contrarium debet quaeque theoria supponere, apertum est, theorium non semper cum observationibus posse consentire, sed mediis tantum Refractionum valoribus se applicare. Ex quo perspicuum est, necessarium esse, verisimilem cujusque Refractionis computatae errorem ex inaequalitatibus, quae in observationum serie satis longa reperiantur, pro unaquaque distantia zenithali deducere, ut, quae sit Tabulae fides habenda in unoquoque casu, judicare possimus. Hujus rei disquisitio, quae Regiomontanis nitebatur observationibus, mihi haec suppeditavit.

Error verisimilis unius Refractionis ope Tabulae computatae.

D. a. V.	±	D. a. V.	±
45°	0,27	75°	0,66
60	0,34	80	0,92
65	0,37	81	1,00
70	0,46	82	1,11

D. a. V.	±	D. a. V.	±
83°	1,26	87° 0'	3,87
84	1,43	30	5,30
85 0'	1,71	88 0	7,74
30	2,00	30	10,58
86 0	2,40	89 0	16,84
30	2,63	30	20,01

Ex quo perspicuum est, inaequalitates e memoratis causis ortas, si temperatura et Barometri altitudo ad normam Tabulae meae ad calculos vocatae fuerint, in ultimis demum distantiae zenithalis gradibus valde sensibiles esse.

Exemplum. Quaeritur Refractio pro apparente distantia zenithali $\theta = 83^{\circ}13'20''$, pro Barometri altitudine 335,20 Linearum Paris., pro temperatura Barometri $= -18^{\circ}0\text{C}$, temperatura aeris $= -7^{\circ}0\text{F}$.

Tabula XIV suppeditat

$l\alpha =$	1,73062	$A = 1,0079$, $\lambda = 1,0794$
$\log \operatorname{tg} \theta$	0,92500	
$l.B = +254$		
$l.T = +126$		
$l\beta = +380$; $A l\beta$. . .	0,00383	
$l\gamma = +4545$; $2l\gamma$. . .	0,04906	
	2,70851	Refractio $= 8'31''10$.

[Vgl. auch die vorangehenden Aufsätze 29 u. 30.]

34. Sur la réfraction astronomique.*)

(Comptes rendus 1842. 2. Sem. p. 181.)

L'honneur de prononcer quelques mots dans ce lieu m'engage à demander la permission de communiquer quelques remarques sur la réfraction astronomique, sur un sujet qui, plus d'une fois, a reçu ici des améliorations capitales. Quelque peu importantes que soient mes remarques, je compte sur la même indulgence que l'illustre Académie m'a témoignée en me conférant le titre de son associé étranger, d'un titre qui est la plus grande récompense des travaux scientifiques.

La théorie des réfractions astronomiques, donnée dans l'immortel ouvrage de LAPLACE, étant applicable à chaque hypothèse sur la constitution de l'atmosphère,

suppose connus cette constitution et le pouvoir réfringent de l'air. Quand l'atmosphère est en équilibre, ses couches sont concentriques, et la loi de leur densité résulte de celle de leur chaleur. L'état de l'équilibre étant le seul qui puisse être supposé dans le calcul, la difficulté de la théorie des réfractions, telle qu'elle est accessible au calcul, retombe sur la loi de la chaleur. Mais cette loi est évidemment très-variable, les variations journalières et annuelles du thermomètre étant beaucoup plus grandes à la surface de la Terre que pour de grandes hauteurs. Jusqu'à ce qu'on ait réussi à exprimer cette loi en fonction du temps, il sera impossible de former une table qui représente parfaitement la réfraction pour chaque distance au zénith et pour chaque temps. Étant encore bien loin

* [355 d. a. Verz. — Von BESSEL der Academie vorgetragen am 1. August 1842.]

de cette perfection, il importe d'examiner jusqu'à quel degré la connaissance des réfractions à laquelle on peut atteindre jusqu'à présent suffit aux besoins de l'astronomie.

Il est bien connu des astronomes que les étoiles deviennent indistinctes à mesure qu'elles s'approchent de l'horizon. Cette confusion des images s'opposant à la précision des observations, il importe peu de connaître avec la dernière précision la réfraction pour de très-grandes distances au zénith. La question dont il s'agit est donc de comparer ensemble la valeur des erreurs inévitables des observations et de celles de la théorie des réfractions, rendue aussi parfaite que le permettent nos connaissances actuelles sur la loi des températures atmosphériques.

Une des causes de la confusion des images que

les étoiles présentent dans les lunettes peut être soumise au calcul: c'est la dispersion de la lumière dans l'atmosphère. Son existence est bien connue des astronomes, qui souvent voient près de l'horizon les étoiles présenter des spectres prismatiques, suffisamment étendus pour être bien vus quand les oscillations ordinaires ne sont pas trop grandes. Mais personne, que je sache, n'ayant mesuré la grandeur de ces spectres, le rapport entre la réfraction et la dispersion dans l'air atmosphérique paraît être encore inconnue. Je communiquerai donc quelques observations faites au mois de septembre 1838, les circonstances étant alors extraordinairement favorables, de manière qu'on voyait très-bien le spectre coloré que l'étoile α du Poisson austral présentait. Ces observations sont les suivantes:

1838.	Temps sidéral.	Étendue du spectre.	Baromètre et thermomètre attaché.	Thermomètre libre.	Hauteur vraie calculée.	Réfraction calculée.
Sept. 20	21 ^h 42 ^m 0 ^s	8 ^h 25	338 ^h 7 15 ^{Re}	63 ^{Op}	3° 36' 15"	11' 51 ^h 4
22	21 16 30	11,26	339,6 14	58,2	2 31 30	14 54,4
28	21 31 0	10,32	342,1 12	53	3 10 45	13 15,6
30	21 29 30	11,05	343,3 6	37,5	3 7 0	13 58,0

d'où il suit que, la réfraction étant supposée toujours égale à 10000, la dispersion observée est égale à 116, 126, 131, 130, ou moyennement égale à 126. En comparant le spectre visible dans la lunette de l'héliomètre à la figure donnée par feu FRAUNHOFER, il me semblait que la partie mesurée était celle comprise entre les lignes *B* et *G* de cette figure. J'ai vu encore une fois l'étoile bien tranquille; mais, quoique l'air parût être parfaitement clair, le rouge et le bleu du spectre étaient seuls visibles, de manière que l'étoile ressemblait en quelque sorte à une étoile double, composée d'une étoile rouge et d'une bleue. La distance des limbes extérieurs des deux espaces colorés était égale à 5^h 13, la réfraction étant de 11' 35^h 4. Ces deux nombres ayant le rapport de 10000 à 74, il paraît que l'espace visible du spectre a été celui compris entre les lignes *B* et *F* de FRAUNHOFER. On voit par ces observations que le rapport de la réfraction à la dispersion est beaucoup plus petit dans l'air que dans les autres corps jusqu'ici examinés.

La longueur du spectre d'une étoile étant à peu près un quatre-vingtième de sa réfraction, elle ne s'élève pas à une seconde à 45° de distance au zénith; elle est environ 14^h à 60°, 2^h à 70°, 4^h à 80°, 8^h à 85°, 11^h à 87°, 22^h à 89°. Si le spectre se voyait toujours bien net, on pourrait rapporter les observations à un certain de

ses points, et ce spectre n'aurait aucune influence sensible sur leur précision. Mais cela arrive très-rarement, au moins à Königsberg: au lieu d'un spectre net et tranquille, on voit ordinairement une masse confuse et ondulante de lumière, dont la couleur varie d'un moment à l'autre, ce qui doit évidemment s'opposer à la précision des observations. Quoique je ne connaisse pas de moyen pour évaluer exactement la partie de l'erreur probable des observations qui a son origine dans la confusion du spectre et dans ses oscillations, j'ai souvent cru, en faisant une observation, que la direction du fil du télescope pourrait être arbitraire jusqu'à la moitié de la grandeur apparente de l'étoile, ce qui me porterait à admettre une erreur probable d'un quart de cette valeur. Il paraît donc que des observations faites dans des distances au zénith plus grandes que 85° ne seraient que d'un très-petit poids pour l'astronomie, même si l'on pouvait exactement calculer les réfractions nécessaires pour les réduire.

En comparant à la théorie des réfractions une longue série d'observations faites dans toutes les distances au zénith de manière à obtenir la différence entre la théorie et chaque observation particulière, les milieux arithmétiques de celles de ces différences qui appartiennent à une même distance au zénith devront être attribués à la valeur du pouvoir réfringent sup-

posée dans la théorie et à la loi de la chaleur des couches, sur laquelle on l'a fondée. Mais ce qui reste de différence entre les observations particulières et la théorie, après en avoir soustrait les moyennes, aura son origine dans les variations inconnues de la loi de la chaleur des couches de l'air, que la théorie a dû négliger.

Si l'on réussit à trouver une loi de la chaleur qui représente toutes les observations moyennes, on la considérera comme la moyenne de toutes les modifications de la loi qui se sont présentées pendant le cours des observations. On l'emploiera à la construction d'une table qui, nonobstant qu'elle représente les réfractions moyennes, s'éloignera sensiblement des observations particulières toutes les fois que la loi variable de la chaleur diffère sensiblement de la loi constante supposée dans la table, et que l'influence de cette différence pour la réfraction devient sensible.

Quand il s'agit de fixer la limite des distances au zénith jusqu'à laquelle la table des réfractions, construite d'après l'hypothèse d'une loi constante de la chaleur, peut être censée suffisante pour les besoins de l'astronomie, il faut recourir aux observations, qui détermineront pour chaque distance au zénith l'erreur probable, telle qu'elle est produite par le concours des erreurs des observations et de celles de l'hypothèse. Quand on en sépare l'erreur probable des observations faites dans des parties du ciel où les étoiles paraissent bien terminées, on aura celle qui est l'effet inévitable de l'hypothèse d'une loi constante de la chaleur des couches de l'air, y compris l'erreur également inévitable qui provient de la confusion des images des étoiles. C'est cette erreur dont la valeur, pour chaque distance au zénith, doit déterminer la limite cherchée.

Ayant examiné de cette manière les erreurs probables des réfractions calculées d'après mes Tables [Tab. Regiomont.], j'ai reconnu qu'à des distances au zénith jusqu'au 85° degré elles ne s'élèvent guère à un quart de la grandeur du spectre, ce qui me fait croire que l'influence des variations de la loi de la chaleur des couches de l'air ne commence à être sensible qu'au delà du 85° degré. Quant à l'accord des moyennes réfractions observées avec celles calculées d'après les Tables, il me paraît être assez satisfaisant, car ces réfractions, déterminées, il y a vingt ans, d'après des observations faites à Königsberg, ont été trouvées en accord presque parfait avec une nouvelle série nom-

breuse d'observations faites pour les vérifier, cette série n'indiquant qu'une correction égale à un soixantième de seconde pour 45° de distance au zénith. Il paraît donc prouvé par les observations que nos connaissances actuelles des réfractions astronomiques sont suffisantes jusqu'à la même limite des distances au zénith, au delà de laquelle la précision des observations est tellement diminuée, par la confusion des images des étoiles, qu'elles ne seraient que d'un faible prix pour l'astronomie, même si l'on savait exactement calculer les réfractions nécessaires à leur réduction.

Au delà de cette limite, c'est-à-dire entre le 85° degré de distance au zénith et l'horizon, l'influence des variations de la loi de la chaleur des couches de l'air croît rapidement, ce que la théorie indique. Quoique on ne connaisse pas la fonction du temps qui exprime cette loi, on ne pourra pourtant douter que le décroissement de la chaleur est plus fort pendant le jour que pendant la nuit. On peut donc s'attendre à trouver les réfractions très-près de l'horizon généralement plus faibles pendant le jour que pendant la nuit, abstraction faite de la température au lieu de l'observateur. C'est ce que les observations confirment. A ma prière, M. ARGELANDER observait souvent à Königsberg le Soleil vers son coucher et les étoiles très-près de l'horizon pendant la nuit; les différences entre ces deux séries étaient de 6'' à 2° de hauteur, de 10'' à 14°, de 23'' à 1°, de 30'' à 1/2°. Il est évidemment impossible d'expliquer de telles différences sans connaître les variations de la loi de la chaleur des couches de l'air dépendantes du temps. C'est donc cette dépendance sur laquelle doivent se diriger les recherches de ceux qui voudront perfectionner encore la théorie des réfractions astronomiques. Mais cela serait un problème dont la solution, supposée possible, aurait plus de prix pour la météorologie que pour l'astronomie.

[Literatur der Astr. Nachr. über Refraction. — Zur Theorie von JYBRY (Bd. 12), BARFUS (15), BAYER (41), BAUKENFEIND (62, 67), ERMAN (70). — Beobachtungen über R. von HENDERSON, MACLEAR (14), BIANCHI (16, 17, 18), CARLINI, SANTINI, CALCIATORE (16). — Verschiedenes: GAUSS, UEBER BESSEL'S U. R. R. (7); PAUCKER, Ueber Refractions-Tafeln (7); PETERS, R. beim Kreismikrometer (8); UEBER R. bei Fixsterndistanzen von ROSENBERGER (9), MAIN (25); CLAUSEN, R. bei geodät. Höhenmessungen (31); SCHMIDT, Dämmerungsbeobachtungen in Athen (63); ERMAN, Zur terrestrischen R. (71); BAKHUIJZEN, R. im Meridianzimmer (72).]

35. Ueber Aberrations- und Nutationstafeln.*)

(Monatl. Corresp. XX. p. 80. Aus Briefen vom 17. Mai und 15. Juni 1809 an LINDEAC.)

..... Ich bin jetzt beschäftigt, sehr bequeme Tafeln für Aberration und Nutation zu entwerfen, die mir bei den BRADLEY'schen Beobachtungen gute Dienste leisten sollen. Diese Tafeln werden einen sonst mühsamen, und wenn er 30000 mal vorkommt, ermüdenden Calcul sehr abkürzen, allein selbst nicht ohne ansehnlichen Zeitaufwand construirt werden können; sie sind ein Mittelding zwischen speciellen und generellen Tafeln, auf alle Sterne, aber nicht auf alle Zeiten anwendbar.

..... Wenn ich ein paar Tage erübrigen kann, so werde ich Ihnen eine Abschrift meiner Aberrations- und Nutationstafeln überschicken; sie sind in der That sehr bequem, und ich habe sie so eingerichtet, dass sie völlig allgemein sind. Die Aberrationstafel ist mit doppelten Eingängen; ihre Argumente sind die Ascensionen der Sterne von 2 zu 2° und die Tage des Jahres von 5 zu 5. Eigentlich ist sie für 1750 eingerichtet, so dass sie die Aberration für die Mitternacht eines Tages in diesem Jahre richtig angibt, allein ein kleines Correctionstäfelchen gibt eine Anzahl Stunden, die man zur Zeit einer in einem andern Jahre gemachten Beobachtung addiren muss, um mit dieser verbesserten Zeit eine eben so richtige Aberration aus der Tafel zu nehmen, als wäre diese für das Jahr der Beobachtung

und die Zeit derselben construirt. Die Tafel gibt nun zwei Theile für die Declination und einen für die Ascension, die im Kopfe mit $\sin \delta$, $\cos \delta$, $\sec \delta$ multiplicirt werden können und unmittelbar die Aberration geben. Die Nutationstafel, die aber noch nicht fertig ist, hat auch doppelte Eingänge; die Argumente sind die Ascensionen der Sterne und die Jahre von 1750—1770; damit nimmt man die Nutation der Declination unmittelbar, die der AR nach einer Multiplication mit $\tan \delta$. Da der Knoten des Mondes innerhalb dieser 20 Jahre einen Umlauf vollbracht hat, so werden dieselben Zahlen, die für eins der berechneten Jahre gelten, auch für dieses + der Umlaufzeit des Mondsknotens passen, und fünf Reihen Argumente werden den Nutzen der Tafel bis 1850 ausdehnen; übrigens wird auch diese Tafel für so kleine Intervalle berechnet werden, dass man die Zahlen ohne Mühe aus ihr nehmen kann. Ich glaube, dass dieses die Hilfsmittel sind, die TOB. MAYER nach pag. 47 seiner von LICHTENBERG herausgegebenen Werke benutzte, denn ich sollte nicht denken, dass man noch bequemere Tafeln construiren könnte. Der Raum, den sie einnehmen, ist freilich etwas gross, doch lassen sie sich auf zwei Foliobogen zusammendrängen.

36. Ueber neue Aberrations- und Nutationstafeln.**)

(Monatl. Corresp. XXVIII. p. 481. Aus einem Brief vom 22. Nov. 1813 an LINDEAC.)

..... Es ist mir immer etwas sehr Unangenehmes gewesen, für die Fundamentalsterne Aberrations- und Nutationstafeln zu gebrauchen, die nicht so scharf oder so bequem sind, als sie sein könnten. Für BRADLEY's Zeiten habe ich daher vor fünf Jahren Tafeln construirt, die beides im höchsten Grade vereinigen, und die es vielleicht nützlich wäre, auch für die gegenwärtige Zeit zu berechnen. Da ich nun das Bedürfniss dieser Tafeln doppelt fühle, so würde ich es mir befriedigen, wenn meine anderweitigen Beschäftigungen mir jetzt einige Tage dazu übrig liessen. Vielleicht

kennen Sie einen Liebhaber der Astronomie, der Lust hat, den Astronomen solche Tafeln zu schenken; deshalb theile ich Ihnen hier die Idee davon mit:

Die Tafeln sollen die Aberration und Präcession vom Anfang des Jahres an gerechnet, mit Inbegriff der Solar-Nutation, unmittelbar mit dem Argumente des Beobachtungstages, und zwar für das Moment der Culmination, angeben, oder die Quantität:

$$\begin{aligned} \text{Var. annua} &\times \frac{\text{long. med. } \odot - \vartheta + 10^\circ}{360^\circ} \\ &- \frac{20''255}{\cos \delta} [\cos \vartheta \cos \alpha \cos \odot + \sin \alpha \sin \odot] \\ &- [0''3982 \sin \alpha \sin 2\odot + 0''434 \cos \alpha \cos 2\odot] \text{tg } \delta \\ &\quad - 0''9173 \sin 2\odot. \end{aligned}$$

*) [Ausz. aus 42 d. a. Verz.]

***) [Ausz. aus 92 d. a. Verz. — Vgl. den vorangehenden Aufsatz 35, sowie auch Tabulae Regiomont.]

Ich fingirte hierbei ein Jahr, für welches die Epoche der Sonnentafeln $= 9^{\circ}10'$ ist, und berechnete die Sonnenlänge für das Culminations-Moment eines Sterns nach der leicht zu findenden Formel (für dieses fingirte Jahr)

$$= 9^{\circ}9'14'' 7,74 + (\tau + \alpha) 58' 58'' 6417;$$

τ bedeutet hier den Tag des Jahres, und α die in Theilen des Tages ausgedrückte Rectascension; der Multiplicator von $\tau + \alpha$ ist die Bewegung der Sonne in einem Stermentage. Aus dieser Formel suchte ich für jeden Stern für Jan. 0, 5, 10, 15 oder $\tau = 0, 5, 10, 15, \dots$ die mittlere Sonnenlänge, und aus dieser für die Epoche 1755 die wahre elliptische; dann gab mir die oben angeführte Formel die an den mittlern Ort des Sterns am 1. Jan. (eigentlich zur Zeit der mittleren Sonnenlänge $= 9^{\circ}10'$) anzubringende Correction, für alle Tage des Jahres von 5 zu 5 genommen, bis zum 36. Decbr. (5. Jan. des folgenden Jahres). Aus dieser Tafel lässt sich nun mit grosser Leichtigkeit das Gesuchte nehmen. Man bringt nämlich an den beobachteten Tag τ die Correction

$$- 0,101642 + \frac{1}{4} [4M - t] + 0,00773603 t$$

— östl. Meridian-Differenz von Paris in Theilen des Tages ausgedrückt

an, in welcher Formel das Beobachtungsjahr $= 1800 + t$, und die Zahl der zwischen 1800 und der Beobachtungsjahr

zeit befindlichen Schalttage $= M$; überdies nimmt man statt des Tages τ den Tag $\tau + 1$, wenn von einem Sterne die Rede ist, dessen Rectascension kleiner ist, als die der Sonne, weil dieser alsdann vor dem Anfange des astronomischen Tages culminirt.

Die Rechnungen, die ich vorschlage, sind demnach folgende:

- 1) Eine Tafel für die sich immer ein Jahr über gleich bleibende Quantität

$$- 0,10164 + \frac{1}{4} [4M - t] + 0,00773603 t.$$
- 2) Eine Tafel für — östl. Meridian-Differenz von Paris in Theilen des Tages, für die berühmtesten Sternwarten.
- 3) Eine Tafel für alle Fundamentalsterne, enthaltend das Resultat der obigen Formel, für Zwischenzeiten von 5 Tagen.

Um diese Tafel für die jetzige Zeit genau zu machen, würde ich vorschlagen, die wahren Sonnenlängen mit der für 1820 statt findenden Länge des Perihels und Excentricität, und die Rectascensionen und Declinationen gleichfalls für 1820 zu nehmen. — Die Nutationstafeln würde ich für die Argumente 1810, 1810,5, 1811 etc. zu construiren vorschlagen, oder auch für Intervalle von 100 Tagen; die Zahlen, die sie enthalten, gelten dann allgemein für $1810 \pm n.18,6124$; $1810,5 \pm n.18,6124$ etc., wo n ganze Zahlen bedeutet.

37. Untersuchung der Grösse und des Einflusses des Vorrückens der Nachtgleichen.*)

(Eine von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften gekrönte Preisschrift. Berlin 1815.)

Non frustra signorum obitua specularum et ortus.

(Als die königliche Akademie der Wissenschaften das Vorrücken der Nachtgleichen zur Preisgabe für 1813 machte, glaubte ich, ihren Forderungen durch eine Vergleichung des grossen, aus BRADLEY'S Beobachtungen hergeleiteten Sternverzeichnisses, mit dem PIAZZI'Schen Genüge leisten zu können. Da mir der Preis ohne weitere Bewerber zu Theil wurde, so erlaubte die Akademie mir später, mit meiner Abhandlung noch Veränderungen vornehmen zu dürfen. Nach dem Erscheinen der neuen Auflage des PIAZZI'Schen Verzeichnisses benutzte ich diese Erlaubnis, indem ich die Hoffnung nährte, durch eine neue Vergleichung meiner Untersuchung einen grösseren Grad von Zuverlässigkeit aneignen zu können.)

*) [104 und Anzüge aus 130 des a. Verz. — Br. m. O. I. 346—350. 354. 357 (O.). 446. II. 66. — Vergl. die folgende Abhandlung 41. — Sectio XI der Fundam. astr. ist, bis auf weniges, hier abgedruckte, eine fast wörtliche Uebersetzung.]

Die Astronomen empfangen hier also die verbesserte Abhandlung. Indessen habe ich die Vergleichung mit dem älteren Verzeichnisse nicht unterdrückt; sondern auch die durch dieses erhaltenen Resultate angeführt. — Königsberg den 18. August 1815.)

1.

Die Bewegungen des Aequators und der Ekliptik umfassen theils Perioden von sehr langer Dauer, oder sind der Zeit proportional; theils erneuern sie sich in kürzeren Perioden. Jene machen den Gegenstand dieser Abhandlung aus; diese, die die Nutation und die Breite der Sonne erzeugen, gehören nicht hierher.

Um sich von den verschiedenen Bewegungen der beiden erwähnten Ebenen einen deutlichen Begriff zu machen, muss man sie auf eine feste Ebene beziehen;

am bequemsten ist es, dazu eine Ebene zu wählen, mit der die Ekliptik in irgend einem gegebenen Zeitpunkt zusammenfiel. Der Kürze wegen wollen wir diese Ebene durch E bezeichnen; die wahre Ebene der Ekliptik durch E' , und die Ebene des Aequators durch A .

Aus der Anziehung der sphäroidisch angenommenen Erde durch die Sonne und den Mond entsteht eine rückgängige Bewegung der Durchschnittspunkte von A und E auf der letzten Ebene, die Lunisolarpräcession. Aus der Anziehung der Erde durch die Planeten entsteht eine Bewegung von E' , die zur Folge hat, dass A durch E' an anderen Punkten und in anderen Winkeln geschnitten wird, als durch E , oder dass die allgemeine Präcession (das Zurückweichen der Durchschnittspunkte von A und E' , auf der Ebene E') von der Lunisolarpräcession verschieden ist, und dass die Schiefe der Ekliptik sich ändert. Endlich erzeugt die Veränderung der Lage der wahren Ekliptik gegen den Aequator eine Veränderung der Anziehung des Erdsphäroids durch die Sonne und den Mond, woraus eine Bewegung von A entsteht, die also eine Nutation von sehr langer Periode ist.

Von allen diesen Bewegungen hat der grosse LAPLACE die Gesetze entwickelt, und im III. Th. S. 158 der *Mécanique Céleste* Formeln gegeben, wonach man sie berechnen kann. Entwickelt man diese Formeln nach den Potenzen der Zeit, und vernachlässigt man dabei die 3^{ten} und höheren: so verwandeln sie sich in folgende:

$$\Psi = t \cdot 50''28760 - t^2 \cdot 0''0001217945$$

$$\Psi' = t \cdot 50''09915 + t^2 \cdot 0''0001221483$$

$$V = 23^\circ 28' 18'' + t^2 \cdot 0''00000984233$$

$$V' = 23^\circ 28' 18'' - t \cdot 0''52114 - t^2 \cdot 0''00000272295.$$

Die feste Ebene, auf welche sich diese Formeln beziehen, ist die Ebene der Ekliptik für 1750. Nimmt man diese Ebene für die oben durch E bezeichnete an, so ist Ψ die Bewegung von A auf E ; Ψ' die Bewegung von A auf E' von 1750 bis 1750 + t ; V der Winkel der Ebenen A und E ; V' der Winkel der Ebenen A und E' , die beiden letzteren für die Zeit 1750 + t .

Diese Formeln setzen die von DELAMBRE bestimmte Lunisolarpräcession und eine Schiefe der Ekliptik voraus, die mit der aus BRADLEY'S Beobachtungen bestimmten fast vollkommen übereinstimmt; ferner die Massen der Planeten, so wie sie *Méc. Céleste* III. S. 156 angegeben sind. Die Masse der Venus ausgenommen, sind die übrigen entweder so sicher bestimmt, oder haben so geringen Einfluss auf die Bewegungen der Ekliptik und des Aequators, dass die dabei etwa noch

übrig gebliebenen Fehler nur unmerklichen Einfluss haben können. Verbessert man jene aber in dem Verhältnis 1:1 + μ' , indem man sie $\frac{1+\mu'}{356632}$ der Sonnenmasse setzt, so sind die dadurch entstehenden Veränderungen von

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= -t \cdot 0''21350 \cdot \mu' \\ V &= -t \cdot 0''33298 \cdot \mu' \end{aligned} \right\} \text{(Méc. Céleste III. S. 92 et S. 156).}$$

Ausser der genauen Bestimmung der Venusmasse und der Lunisolarpräcession für 1750, die wir in der Folge = $50''28760 + \mathcal{A}c$ setzen wollen, bleibt daher, bei der Untersuchung der Präcession, nichts zu wünschen übrig.

2.

Es ist klar, dass die Länge und Breite eines an sich unbeweglichen Sterns, wenn man jene von einem festen Punkte von E' an rechnet, nur durch die Bewegung von E' geändert werden können. Eben so ist es klar, dass auf die gerade Aufsteigung und Abweichung dieses Sterns, die erste von einem festen Punkte der Ebene A an gerechnet, nur die Bewegung von A Einfluss haben kann. Rechnet man aber, wie es wirklich geschieht, die Längen und geraden Aufsteigungen von dem jedesmaligen Durchschnittspunkte der Ebenen A und E' , oder von dem Nachtgleichenpunkte, an: so erleiden sie noch die Veränderungen, die dieser Punkt selbst erleidet.

Um die Veränderungen der Länge, Breite, geraden Aufsteigung und Abweichung eines Sterns zu finden, wollen wir die Bewegungen der verschiedenen Ebenen unter eine Form bringen, die ihren Einfluss auf diese Veränderungen leichter übersehen lässt. Wir wollen uns ein sphärisches Dreieck durch die Ebenen A , E und E' gebildet vorstellen; für den Punkt, in welchem E und E' sich schneiden, nehmen wir den aufsteigenden Knoten von E' auf E , und bezeichnen den Winkel des Dreiecks an diesem Punkte, die Neigung von E' gegen E , durch π ; der andere an E anliegende Winkel wird V und der dritte an E' anliegende wird $180^\circ - V$, sein. Die beiden π einschliessenden Seiten sind, wenn die Länge des aufsteigenden Knotens von E auf E' , vom festen Nachtgleichenpunkte von 1750 an gerechnet, durch II bezeichnet wird, $II + \Psi$ und $II + \Psi'$; die dritte Seite ist die Verrückung des Anfangspunktes der geraden Aufsteigungen und wird durch λ bezeichnet werden.

In diesem Dreiecke ist, nach den Neper'schen Analogien,

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi \sin (II + \frac{1}{2} \Psi + \Psi_r) &= \sin \frac{1}{2} (\Psi - \Psi_r) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (V_r + V) \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi \cos (II + \frac{1}{2} \Psi + \Psi_r) &= \cos \frac{1}{2} (\Psi - \Psi_r) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (V_r - V) \\ \operatorname{tg} \lambda \cos \frac{1}{2} (V_r + V) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\Psi - \Psi_r) \cos \frac{1}{2} (V_r - V) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (a)$$

Die Zweideutigkeit von II fällt, durch die Bedingung dass π positiv ist, weg. Bezeichnet man nun die auf die feste Ekliptik und den Nachtgleichenpunkt von 1750 bezogene Länge und Breite des Sterns durch L und B ; die vom wahren Nachtgleichenpunkte an gerechnete, auf die wahre Ekliptik bezogene Länge und Breite durch l und b , so hat man

$$\left. \begin{aligned} \cos B \cos (L - II) &= \cos b \cos (l - II - \Psi_r) \\ \cos B \sin (L - II) &= \cos b \sin (l - II - \Psi_r) \cos \pi - \sin b \cdot \sin \pi \\ \sin B &= \cos b \sin (l - II - \Psi_r) \sin \pi + \sin b \cdot \cos \pi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (b)$$

Nimmt man den Stern als unbeweglich, oder L und B als unveränderlich an: so hat man für eine andere Epoche, für welche die veränderlichen Qualitäten durch (') bezeichnet werden

$$\left. \begin{aligned} \cos b' \cos (l' - II' - \Psi_r) &= \cos B \cos (L - II) \\ \cos b' \sin (l' - II' - \Psi_r) &= \cos B \sin (L - II) \cos \pi' + \sin B \sin \pi' \\ \sin b' &= -\cos B \sin (L - II) \sin \pi' + \sin B \cos \pi' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (c)$$

Eben so hat man, wenn man die wahre Rectascension und Declination durch α und δ , und die von dem Durchschnittspunkte von A und E an gerechnete Rectascension durch $\alpha + \lambda$ bezeichnet

$$\left. \begin{aligned} \cos B \cos (L + \Psi) &= \cos \delta \cos (\alpha + \lambda) \\ \cos B \sin (L + \Psi) &= \cos \delta \sin (\alpha + \lambda) \cos V + \sin \delta \sin V \\ \sin B &= -\cos \delta \sin (\alpha + \lambda) \sin V + \sin \delta \cos V \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (d)$$

und ferner, unter der Voraussetzung der Unveränderlichkeit von L und B ,

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta' \cos (\alpha' + \lambda') &= \cos B \cos (L + \Psi) \\ \cos \delta' \sin (\alpha' + \lambda') &= \cos B \sin (L + \Psi) \cos V' - \sin B \sin V' \\ \sin \delta' &= \cos B \sin (L + \Psi) \sin V' + \sin B \cos V' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (e)$$

Die in den Gleichungen (a) bis (e) enthaltenen Vorschriften lösen alle hierher gehörigen Probleme mit geometrischer Strenge auf. Man kann leicht L und B eliminiren, und folglich, ohne diese Hilfsgrößen, unmittelbar von 1750 + t zu 1750 + t' übergehen; auch kann man die Formeln zur Rechnung bequemer einrichten, worauf wir unten zurückkommen werden.

3.

Differenziert man die Gleichungen (d) oder (e), so erhält man nach einer leichten Reduction

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\Psi}{dt} (\cos V + \sin V \operatorname{tg} \delta \sin (\alpha + \lambda)) - \operatorname{tg} \delta \cos (\alpha + \lambda) \frac{dV}{dt} \\ \frac{d\delta}{dt} &= \frac{d\Psi}{dt} \sin V \cos (\alpha + \lambda) + \sin (\alpha + \lambda) \frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

Diese Differentialquotienten lassen sich leicht unmittelbar von der beobachteten Rectascension α abhängig machen, indem man das Quadrat und die höheren Potenzen des immer sehr kleinen λ vernachlässigt. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\Psi}{dt} (\cos V + \sin V \operatorname{tg} \delta \sin \alpha) + \left(\frac{d\Psi}{dt} \sin V \cdot \lambda - \frac{dV}{dt} \right) \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \\ \frac{d\delta}{dt} &= \frac{d\Psi}{dt} \sin V \cos \alpha - \left(\frac{d\Psi}{dt} \sin V \cdot \lambda - \frac{dV}{dt} \right) \sin \alpha \end{aligned}$$

Man kann sogar das letzte Glied ganz weglassen, indem es selbst die Rectascension des Polarsterns in einem Jahrhunderte nur um 0,04 ändern kann. Man hat nämlich nach den Potenzen der Zeit entwickelt.

$$\begin{aligned} \lambda &= + t [0,20544 + 0,23277 \mu'] - t^2 \cdot 0,00026606080 \\ \text{und} \\ \frac{dV}{dt} &= + t \cdot 0,00001968466, \end{aligned}$$

wodurch

$$\frac{d\psi}{dt} \sin V \cdot \lambda - \frac{dV}{dt} = + t \cdot 0,000000261$$

wird. Die Verbesserung der Venusmasse ist hier weglassen, indem sie bei den Gliedern der zweiten Ordnung überall nicht berücksichtigt wurde.

Setzt man daher

$$m = 45,92122 + t \cdot 0,0003086886 + 0,91726 \cdot \mathcal{A}c - 0,23277 m' \\ n = 20,02932 - t \cdot 0,0000370204 + 0,39830 \cdot \mathcal{A}c. *)$$

Hieraus folgt, dass die Astronomen, die ein von der Abnahme der Schiefe der Ekliptik abhängiges Glied in den Ausdrücken der jährlichen Veränderungen angebracht wissen wollten, irrten; dass sie dieses Glied fanden, lag aber darin, dass sie, zugleich mit der Schiefe der Ekliptik, nicht auch die Längen und Breiten der Sterne als veränderlich annahmen. Uebrigens sieht man aus der eben gegebenen Darstellung, dass es ein Umweg ist, wenn man die bewegliche Ebene der Ekliptik in die Rechnung bringt. LAPLACE'S Autorität, die man für jene irrigen Ausdrücke angeführt hat, ist gerade dagegen und wurde nur missverstanden.

4.

Durch zwei Sternverzeichnisse für verschiedene Epochen kann man eine doppelte Bestimmung der Präcession erhalten; indem man sie sowohl auf m als auf n gründet. Die Rectascensionen allein werden m , und sowohl diese als die Declinationen n geben. Kann man in beiden Bestimmungen eine genügende Sicher-

*) [In den Fundam. p. 288: $n = 20,02932 - t \cdot 0,0000970204$. — Statt der weiteren Bemerkungen bis zum Schluss von Art. 4 findet sich in den Fundam. das folgende:

Ad praecessionem e catalogo pro a. 1755 reperendam, triplicem viam ingressi sumus: m enim et n ex ascensionibus rectis, n autem et declinationibus derivatur. Primum editio catalogi PIAZZIANI prior, cujus ascensionibus rectis $4,0$ addebantur, huic comparationi adhibebatur; postmodo comparatio haec cum editioe secunda repetita est. In comparatione utraque praecessiones et pro a. 1755 et pro a. 1800 secundum has formulas

$$\frac{d\alpha}{dt} = 45,9335 + 20,0282 \cdot \text{tg } \delta \sin \alpha \\ \frac{d\delta}{dt} = 20,0282 \cos \alpha$$

computatae sunt, quae eadem a PIAZZIO (edit. I) adhibitae sunt; quare erroribus quibusdam exceptis, pro a. 1800 praecessiones a PIAZZIO inventae adhibitae fuerunt.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= m + n \text{tg } \delta \sin \alpha \\ \frac{d\delta}{dt} &= n \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (f)$$

so ist dieses die als vollständig anzunehmende Form der Differentialquotienten, und man hat die Zahlenwerthe von

heit erlangen, so wird man, aus ihrer Vergleichung, die Venusmasse herleiten, und dadurch die Untersuchung von allen fremden Voraussetzungen befreien können.

Das Problem hat aber eine grosse Schwierigkeit, indem die eigene Bewegung der Sterne sich auf keine Weise von der Präcession trennen lässt. Diese Schwierigkeit erscheint desto grösser, je weniger es bezweifelt werden kann, dass ein grosser Theil der eigenen Bewegungen von der Bewegung unseres Sonnensystems herrührt, welche die Sterne scheinbar nach einem Punkte rücken lässt, wodurch die Veränderungen in einer ganzen Hälfte der Sphäre in gleichem Sinne afficirt werden, so dass selbst das Mittel aus sehr vielen einzelnen Vergleichungen sich oft beträchtlicher von der Wahrheit entfernen wird, als allgemeine Betrachtungen über die Wahrscheinlichkeit der Fehler vermuthen lassen. Auch darf man, seitdem BRADLEY'S

Problema autem magna difficultate laborat, cum motus stellarum proprius nullo modo a praecessione possit separari. Unum remedium, hanc difficultatem, quantum fieri potest, vitandi, comparatio scilicet permultarum stellarum, per omnes coeli locos distributarum, hoc loco, cum prostant duo catalogi valde numerosi, adhiberi poterat. Stellae quarum motus proprius major est quam $0,3$ per annum, a comparatione excludebantur; ut etiam stellae quarum BRADLEYUS aut solam ascensionem rectam, aut declinationem observavit; postremo ascensionem rectae omnium stellarum, quarum distantia polaris minor est quam 30° , etsi certum est, has quam certissime observari posse. Excludebantur hae stellae, quia et a BRADLEYO et a PIAZZIO plerumque minus frequenter sunt observatae, quam ceterae, et quia haec in regione maxima exstant discrimina; ut videatur plerasque ascensionis rectas PIAZZII polo propiores minores esse vero; ceterum difficultas in definienda praecessione non tam in observationibus minus accuratis posita est, quam in motibus stellarum propriis, qui in propinquitate poli non minus vigent, quam in aliis locis sphaerae coelestis.]

Beobachtungen gezeigt haben, dass unter den kleineren Sternen sehr starke Bewegungen vorkommen, dieser Schwierigkeit durch die Ausschliessung der grösseren Sterne nicht mehr auszuweichen hoffen.

Es gibt hier nur ein Mittel: nämlich die Vergleichung sehr vieler, an allen Punkten des Himmels vertheilter Sterne, unter deren Zahl jedoch nur solche aufgenommen werden dürfen, von denen man überzeugt ist, dass sie keine sehr grosse eigene Bewegung haben. Die grosse Menge der Vergleichungen wird alsdann die von der eigenen Bewegung herrührende Unsicherheit so viel als möglich, und, wenn von so genauen Verzeichnissen, wie das Bradley'sche und Piazzische, die Rede ist, die kleinen Beobachtungsfehler bis zum Verschwinden verkleinern.

Da die durch die eigene Bewegung erzeugte Unsicherheit immer dieselbe bleibt, die Zwischenzeit der Epochen beider zu vergleichender Verzeichnisse mag so gross oder so klein sein als man will: so kann die Wahl dieser Verzeichnisse nur durch ihre, mit der Zwischenzeit verhältnissmässig grössere oder geringere Genauigkeit und durch ihre Vollständigkeit bestimmt werden. Es ist aber von den Astronomen längst mit Recht anerkannt, dass die, 100 Jahre von den Piazzischen entfernten Flamsteed'schen Beobachtungen weit mehr als die doppelte Unsicherheit der Bradley'schen, 50 Jahr entfernten, haben. Obgleich beide Verzeichnisse etwa gleich vollständig sind, so konnte daher nur das letztere zur Vergleichung gewählt werden, dessen Genauigkeit, nach meiner Reduction, wie ich zuversichtlich hoffe, nicht geringer ist, als die des Piazzischen. Jenes Verzeichniss gibt die Oerter von 3162 Sternen für 1755 an; allein es kommen mehrere darunter vor, die nur einseitig bestimmt sind, indem BRADLEY bei ihnen entweder die Rectascensionen oder Declinationen nicht beobachtete. Die übrigen Verzeichnisse aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts sind entweder zu unvollständig oder zu wenig genau, um, durch ihre Vergleichung, auf eine Vermehrung der durch das Bradley'sche allein gewährten Sicherheit hoffen zu dürfen.

5.

Bei der Bestimmung von n aus den Rectascensionen kommt alles auf die richtige Annahme der Fundamentalsterne an. Man muss dabei desto vorsichtiger sein, je warnender das neuerlich gegebene Beispiel der Maskelynschen Correction ist. Bei dem Verzeichnisse für 1755 scheint auch von dieser Seite nichts zu wünschen übrig zu bleiben, indem es sich auf 14

Hauptsterne gründet, deren Rectascensionen, unabhängig von einander, durch unmittelbare Vergleichungen mit der Sonne bestimmt werden, so dass wohl schwerlich ein merklicher mittlerer Fehler übrig geblieben sein kann. — Bei dem älteren Verzeichnisse von PIAZZI wurde die, von PIAZZI selbst und MASKELYNE gefundene, Verbesserung von $+4,0$ angebracht; das neuere, allein auf PIAZZI'S Beobachtungen gegründete, wurde ungeändert beibehalten.

Von einem möglichen beständigen Fehler dieser Art unabhängig ist die Bestimmung von n , sowohl aus den Rectascensionen als aus den Declinationen. Wegen der Möglichkeit, die Rectascensionen oder Circumpolarsterne mit grösserer Genauigkeit zu beobachten, würde sich aus diesen n mit vorzüglichem Vortheile ergeben, wenn die Schwierigkeit in den Fehlern der Beobachtung und nicht in der eigenen Bewegung läge. Dieser entgeht man aber durch die Circumpolarsterne eben so wenig als durch andere. Bei genauerer Untersuchung zeigte es sich sogar rathsamer, die Rectascensionen der weniger als 30° von dem Nordpol entfernten Sterne ganz zu vernachlässigen, indem sowohl BRADLEY als PIAZZI diese weniger häufig beobachteten, und indem, gerade in dieser Gegend, grosse eigene Bewegungen häufiger vorkommen scheinen. Die Zahl der in diesem Umkreise in beiden Verzeichnissen gemeinschaftlich vorkommenden Sterne ist übrigens nicht gross genug, um dadurch einen Ersatz der erwähnten Nachtheile erwarten zu können.

Die Bestimmung von n aus den Declinationen scheint ein sehr sicheres Mittel zur Bestimmung der Lunisolarpräcession darzubieten, indem alle beständige Fehler der Instrumente und Reductionen verschwinden, wenn man Sterne in den auf- und niedersteigenden Zeichen miteinander vergleicht. Man hat hierbei zwei Elemente zu bestimmen: nämlich n und den Unterschied der mittleren Fehler beider Verzeichnisse. Man würde aber nicht zweckmässig verfahren, wenn man Sterne von sehr verschiedenen Declinationen mit einander vergleichen wollte, indem alsdann die Voraussetzung des in dem Umfange dieses Declinationsunterschiedes völlig gleichbleibenden Fehlers der Reductionen und Instrumente die Zuverlässigkeit des Resultats aufheben würde.

Bei den folgenden Untersuchungen wurde daher die Himmelskugel in Zonen von 10° Declinationsunterschied getheilt; alle diese Zonen wurden absondert verglichen, und so der mittlere Fehler, für jede besonders, bestimmt.

Nach der schon oben gemachten Bemerkung wurden nur solche Sterne zum Resultate gezogen, von

denen man sich überzeugen konnte, dass sie keine sehr starke eigene Bewegung besitzen. Um aber die Zahl der Vergleichen nicht zu sehr zu verringern, wurden die Grenzen der jährlichen eigenen Bewegung $= 0,3$, im grössten Kreise, gesetzt. Man wird es hoffentlich nicht zu weit getriebene Consequenz nennen, dass auch alle nicht vollständig beobachtete Sterne ausgeschlossen wurden, indem von diesen nicht entschieden werden konnte, ob die mangelnde Rectascension oder Declination eine $0,3$ überschreitende eigene Bewegung verathen haben würde. Bei einer Untersuchung dieser Art, deren Endresultate man eine gewisse Sicherheit anzueignen hofft, obgleich die einzelnen ihr zum Grunde liegenden Bestimmungen oft sehr bedeutend von einander abweichen, sind feste Vorschriften dieser Art notwendig, und belohnen gewöhnlich durch einen guten Erfolg.

6.

Bei den folgenden Untersuchungen wird häufig die Herleitung der Unbekannten x und y aus einem Systeme von Gleichungen:

$$v = x + a y; \text{ Mittel aus } b \text{ einzelnen Bestimmungen}$$

$$v' = x + a' y; \quad \text{ " " } b' \quad \text{ " " " "}$$

$$v'' = x + a'' y; \quad \text{ " " } b'' \quad \text{ " " " "}$$

u. s. w.

vorkommen. Gibt man jeder einzelnen Bestimmung gleichen Werth, so sind die hieraus folgenden wahrscheinlichsten Werthe von x und y , nach der Methode der kleinsten Quadrate,

$$x = \frac{\Sigma b v - \Sigma a b v \cdot \frac{\Sigma a b}{\Sigma a a b}}{\Sigma b - \frac{(\Sigma a b)^2}{\Sigma a a b}}$$

$$y = \frac{\Sigma a b v - \Sigma b v \cdot \frac{\Sigma a b}{\Sigma b}}{\Sigma a a b - \frac{(\Sigma a b)^2}{\Sigma b}}$$

Die Sicherheit dieser Bestimmungen von x und y ist so gross, als wären sie arithmetische Mittel so vieler directer Bestimmungen, als die Nenner Einheiten enthalten, oder ihre wahrscheinlichen Fehler verhalten sich zu dem wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen directen Bestimmung, wie 1 zu den Quadratwurzeln von den Nennern.

Da es die Geduld des unermüdetsten Rechners erschöpfen würde, jede einzelne der unmittelbar erhaltenen Bestimmungen nach der Methode der kleinsten Quadrate zu behandeln, woraus man das Maximum der Sicherheit erhalten würde, so ist eine Eintheilung in

gewisse Classen notwendig. Es ist hier der Ort, zu untersuchen, wieviel man dadurch von der Sicherheit aufopfert, die man erlangen könnte, wenn man sich diese Eintheilung nicht erlaubte.

Augenscheinlich ist diese Aufopferung unbedeutend, wenn man die beobachteten Präcessionen in Rectascension, nach ihrer Grösse, in nicht zu weit begrenzte Classen theilt, und die arithmetischen Mittel dieser Classen, nach der Methode der kleinsten Quadrate, zum Resultate stimmen lässt. Hier wurden demzufolge fünf Classen gemacht, welche die Sterne enthalten, deren, bei der Annahme $m = 45,9335$ und $n = 20,0282$, berechnete Präcessionen in der

I. Classe kleiner als $30,9335$,

II. " " " $40,9335$ und grösser als $30,9335$

III. " " " $50,9335$ " " " $40,9335$

IV. " " " $60,9335$ " " " $50,9335$

V. " grösser " $60,9335$ sind.

Wenn eine Zone, so wie sie bei den Declinationen angenommen wurde, β Sterne enthält, so stimmen sie, unter vorausgesetzter gleichförmiger Vertheilung am Himmel, mit ihrer ganzen Zahl zur Erfindung des Unterschiedes der mittleren Fehler der Verzeichnisse; n ergeben sie, wenn man jeden einzelnen, nach der Methode der kleinsten Quadrate, zum Resultate stimmen lässt, so sicher, als wäre es ein arithmetisches Mittel aus $\frac{1}{2} \beta$ directen Bestimmungen. Man muss nun eine Eintheilung wählen, die, durch eine leichtere Rechnung, die Sicherheit des Resultats dieser Sicherheit so nahe bringt als möglich. Hier wurde eine Eintheilung in 6 Classen, von 0° bis 60° AR; von 60° bis 120° AR; von 120° bis 180° u. s. w. gemacht, für welche man die Sicherheit der Bestimmung des Unterschiedes der mittleren Fehler der Verzeichnisse, den wir durch $\mathcal{A}(\delta)$ bezeichnen wollen, $= \sqrt{\beta}$, und von $n = \frac{3}{\pi} \sqrt{\frac{\beta}{2}} = 0,955 \sqrt{\frac{\beta}{2}}$

findet, so dass in der ersten gar nichts, in der anderen sehr wenig aufgeopfert wird. Hätte man eine Eintheilung in 4 Classen, von 45° bis 135° AR; von 135° bis 225° u. s. w. gewählt, so würde die Sicherheit von $\mathcal{A}(\delta) = \sqrt{\beta}$, und von $n = \frac{4}{\pi \sqrt{3}} \sqrt{\frac{\beta}{2}} = 0,735 \sqrt{\frac{\beta}{2}}$, also weit geringer gewesen sein.

Hätte man nur die den Nachtgleichenpunkten, auf beiden Seiten, bis auf den Winkel a nahekommenen Sterne zum Resultate gezogen, so würde die dadurch erlangte Sicherheit, für verschiedene Werthe von a , folgende gewesen sein:

$$\begin{aligned}
 & \text{Sicherheit von } \dots \mathcal{A}(\delta) \dots n \\
 a = 30^\circ & \dots \dots \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\beta} \dots \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sqrt{\frac{\beta}{2}} \\
 a = 45^\circ & \dots \dots \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\beta} \dots \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{\frac{\beta}{2}} \\
 a = 60^\circ & \dots \dots \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\beta} \dots \frac{3}{\pi} \sqrt{\frac{\beta}{3}} \\
 a = 90^\circ & \dots \dots \sqrt{\beta} \dots \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{\frac{\beta}{2}}
 \end{aligned}$$

Obgleich also die alleinige Benutzung der Sterne zwischen 300° und 60° AR, und zwischen 120° und 240° AR, n mit der Sicherheit der hier gemachten Eintheilung gegeben haben würde, so würde sie doch $\mathcal{A}(\delta)$ mit einer geringeren gegeben haben. Ueberdies hat die hier gewählte Eintheilung den Vorzug, dass sie mehr Sterne zum Resultate stimmen lässt; also einen geringeren Einfluss der eigenen Bewegungen, in

so fern sie, wenigstens zum Theil, einem bestimmten Gesetze folgend angenommen werden, befrichtigen lässt.

7.

Bei der Vergleichung der Verzeichnisse wurden die jährlichen Präcessionen nach den Formeln

$$\frac{d\alpha}{dt} = 45'',9335 + 20'',0282 \operatorname{tg} \delta \sin \alpha$$

$$\frac{d\delta}{dt} = 20'',0282 \cos \alpha$$

für die Epochen 1755 und 1800 berechnet. Das Mittel aus beiden, von der beobachteten jährlichen Fortrückung abgezogen, gab dann die Summe des Fehlers der berechneten Präcession, der jährlichen eigenen Bewegung, und des 45^{ten} Theils des Unterschiedes der Fehler beider Verzeichnisse. Die Vergleichungen des älteren Piazzischen Verzeichnisses stellte ich hier mit denen des neueren zusammen, und bezeichne jene durch M , diese durch N . Auf diese Weise fand sich durch die

Rectascensionen.

Classe I.

		M .			N .		
		Anzahl der Sterne.	Berechnete Präcession.	Beobachtete Corr.	Anzahl der Sterne.	Berechnete Präcession.	Beobachtete Corr.
		56	25'',240	+ 0'',0429	63	25'',053	- 0'',0035
Classe II.							
zwischen	40°14' und 105°46'	50	38'',582	+ 0'',0350	51	38'',630	+ 0'',0772
"	106 18 " 231 22	50	36,963	+ 0,0142	50	37,181	- 0,0162
"	231 46 " 262 5	50	36,905	+ 0,0475	51	36,793	- 0,0313
"	263 33 " 290 27	50	36,312	+ 0,0477	50	36,315	+ 0,0031
"	290 53 " 306 19	50	36,728	+ 0,0528	49	36,793	+ 0,0396
"	306 39 " 346 57	57	37,358	+ 0,0543	65	37,453	+ 0,0344

Classe III.

zwischen	0°27' und 8°54'	50	46'',583	+ 0'',0584	50	46'',597	+ 0'',0525
"	9 2 " 16 24	50	47,055	+ 0,0526	54	46,996	+ 0,0774
"	16 35 " 29 35	50	46,938	+ 0,0492	53	46,995	+ 0,0747
"	29 39 " 41 38	50	47,468	+ 0,0573	50	47,468	+ 0,0573
"	41 57 " 62 23	50	46,745	+ 0,0655	52	46,716	+ 0,0953
"	62 56 " 74 38	50	47,010	+ 0,0764	51	47,080	+ 0,0934
"	75 25 " 88 44	50	45,357	+ 0,0568	53	45,448	+ 0,0778
"	90 49 " 119 3	50	46,560	+ 0,0421	53	46,642	+ 0,0567
"	119 21 " 136 27	50	45,944	- 0,0135	51	46,831	+ 0,0015
"	136 38 " 149 46	50	46,822	- 0,0303	49	46,818	- 0,0045
"	149 56 " 159 30	50	46,813	- 0,0253*)	49	46,801	+ 0,0160
"	159 40 " 169 31	50	46,666	- 0,0020	48	46,733	+ 0,0295
"	169 36 " 181 49	50	46,207	+ 0,0300	51	46,219	+ 0,0499
"	182 1 " 190 19	50	45,303	- 0,0359	48	45,312	- 0,0064
"	190 27 " 203 25	50	45,828	+ 0,0110	50	45,887	+ 0,0292
"	203 27 " 220 35	50	45,919	+ 0,0514	51	45,881	+ 0,0281

*) [In den Fundam. — 0,0258.]

Classe III.

	M.			N.		
	Anzahl der Sterne	Berechnete Präcession	Beobachtete Corr.	Anzahl der Sterne	Berechnete Präcession	Beobachtete Corr.
zwischen 221° 11' und 234° 55'	50	46,353	+ 0,0847	51	46,342	+ 0,0561
„ 234 56 „ 258 38	50	45,987	+ 0,0783	51	45,030	+ 0,0700
„ 258 52 „ 288 34	50	45,606	+ 0,0990	53	45,711	+ 0,0770
„ 288 35 „ 306 14	50	46,184	+ 0,1024	50	46,184	+ 0,0980
„ 306 17 „ 317 57	50	45,984	+ 0,0886	50	45,984	+ 0,1060
„ 318 0 „ 331 16	50	46,586	+ 0,0521	53	46,785	+ 0,1046
„ 331 22 „ 339 17*	50	46,593	+ 0,0662	49	46,547	+ 0,1021
„ 340 15 „ 347 49	50	45,745	+ 0,0646	49	45,747	+ 0,1035
„ 347 54 „ 355 18	50	45,294	+ 0,0460	50	45,294	+ 0,0731
„ 355 19 „ 359 59	27	45,609	+ 0,0637	27	45,609	+ 0,0402

Classe IV.

zwischen 10° 52' und 42° 13'	50	54,117	+ 0,1157	51	54,105	+ 0,0538
„ 42 45 „ 61 18	50	54,235	+ 0,1179	51	54,208	+ 0,0610
„ 61 30 „ 78 45	50	54,368	+ 0,1466	51	54,342	+ 0,1133
„ 78 54 „ 97 40	50	53,770	+ 0,0986**)	56	53,717	+ 0,0612
„ 99 15 „ 117 40	50	54,675	+ 0,0724	51	55,683	+ 0,0549
„ 118 16 „ 137 39	50	54,294	+ 0,0545	50	54,294	+ 0,0231
„ 137 47 „ 162 5	50	54,321	+ 0,0311	49	54,273	+ 0,0391
„ 162 27 „ 251 38	50	52,926	+ 0,0393	50	52,926	+ 0,0647
„ 252 13 „ 285 28	50	54,574	+ 0,1012	51	54,608	+ 0,1138
„ 286 9 „ 334 42	51	52,865	+ 0,1053	52	52,812	+ 0,1353

Classe V.

79	66,103	+ 0,1213	91	66,672	+ 0,0917
----	--------	----------	----	--------	----------

Die arithmetischen Mittel aus jeder Classe sind:

Classe I.	56	25,240	+ 0,0429	63	25,053	- 0,0035
„ II.	307	37,166	+ 0,0422	316	37,195	+ 0,0186
„ III.	1277	46,299	+ 0,0454	1296	46,310	+ 0,0096
„ IV.	501	54,012	+ 0,0881	512	54,099	+ 0,0723
„ V.	79	66,103	+ 0,1213	91	66,672	+ 0,0917

Durch die Auflösung der hieraus folgenden 5 Gleichungen von der Form

$$v = Am + aAn$$

erhält man, nach Art. 6:

	M.	N.
Am	= + 0,054505; $\gamma = 2174,7$	= + 0,054169; $\gamma = 2223,8$
An	= + 0,052785; 274,9	= + 0,052026; 304,5
Anzahl der Sterne = 2220 = 2278

Durch γ ist die Anzahl direkter Bestimmungen bezeichnet, deren Resultat für eben so sicher zu halten ist, als die hier herausgebrachten; dasselbe Zeichen wird in der Folge dieselbe Bedeutung haben.

8.

Die 6 Classen, in welche die Sterne jeder Zone der Declination, nach Art. 6, getheilt werden, enthalten

I. die Sterne deren AR. zwischen 270° und 330°	
II. „ „ „ „ „ 330° „ 30°	
III. „ „ „ „ „ 30° „ 90°	
IV. „ „ „ „ „ 90° „ 150°	
V. „ „ „ „ „ 150° „ 210°	
VI. „ „ „ „ „ 210° „ 270°	

Die Resultate der verschiedenen Zonen sind, nach dieser Eintheilung, folgende:

*) [Fundam. 339° 27'.]

***) [Fundam. + 0,0968.]

Zone von -35° bis -25° .

	M.			N.		
	Anz. der Sterne	Berechnete Präcession	Beobachtete Corr.	Anz. der Sterne	Berechnete Präcession	Beobachtete Corr.
I. Classe	27	+ 9",903	+ 0",1130	28	+ 10",055	+ 0",0560
II. "	9	+ 18,431	+ 0,1695	9	+ 18,431	+ 0,1231
III. "	3	+ 9,063	+ 0,0633	3	+ 9,063	- 0,1012
IV. "	10	- 5,272	+ 0,0722	12	- 4,906	+ 0,0416
V. "	13	- 19,105	+ 0,0458	14	- 19,151	- 0,0491
VI. "	26	- 10,991	+ 0,0318	26	- 10,991	- 0,0173
	88			92		

Zone von -25° bis -15° .

I. Classe	64	+ 9",273	+ 0",1312	70	+ 9",432	+ 0",0772
II. "	36	+ 19,022	+ 0,1084	37	+ 19,050	+ 0,0555
III. "	22	+ 9,099	+ 0,0849	24	+ 8,766	+ 0,0351
IV. "	23	- 5,543	+ 0,0814	25	- 5,682	+ 0,0303
V. "	32	- 19,148	+ 0,0806	32	- 19,148	+ 0,0042
VI. "	56	- 9,510	+ 0,0648	57	- 9,401	+ 0,0131
	233			245		

Zone von -15° bis -5° .

I. Classe	50	+ 11",271	+ 0",1315	50	+ 11",271	+ 0",0775
II. "	59	+ 19,114	+ 0,1199	59	+ 19,103	+ 0,0606
III. "	55	+ 7,607	+ 0,0756	57	+ 7,514	+ 0,0113
IV. "	41	- 11,733	+ 0,0804	40	- 11,810	+ 0,0209
V. "	37	- 18,891	+ 0,0847	37	- 18,891	+ 0,0091
VI. "	35	- 11,536	+ 0,0683	35	- 11,535	+ 0,0038
	277			278		

Zone von -5° bis $+5^{\circ}$.

I. Classe	53	+ 9",228	+ 0",1432	53	+ 9",228	+ 0",0883
II. "	58	+ 19,132	+ 0,1001	58	+ 19,132	+ 0,0399
III. "	59	+ 8,813	+ 0,0664	61	+ 8,993	- 0,0001
IV. "	34	- 9,204	+ 0,0637	34	- 9,204	+ 0,0129
V. "	49	- 19,049	+ 0,0579	50	- 19,038	- 0,0170
VI. "	42	- 9,473	+ 0,0666	43	- 9,596	+ 0,0125
	295			299		

Zone von $+5^{\circ}$ bis $+15^{\circ}$.

I. Classe	49	+ 10",854	+ 0",1253	49	+ 10",854	+ 0",0723
II. "	51	+ 19,444	+ 0,0989	58	+ 19,427	+ 0,0507
III. "	61	+ 8,956	+ 0,0554	63	+ 8,961	+ 0,0017
IV. "	57	- 11,084	+ 0,0354	60	- 11,080	- 0,0127
V. "	40	- 19,158	+ 0,0598	41	- 19,078	- 0,0134
VI. "	41	- 8,977	+ 0,0834	41	- 8,977	+ 0,0346
	302			312		

Zone von $+15^{\circ}$ bis $+25^{\circ}$.

I. Classe	56	+ 9",498	+ 0",1247	55	+ 9",510	+ 0",0765
II. "	56	+ 19,056	+ 0,0794	58	+ 19,050	+ 0,0431
III. "	113	+ 9,118	+ 0,0787	118	+ 9,014	+ 0,0231
IV. "	77	- 8,208	+ 0,0451	79	- 8,325	- 0,0056
V. "	44	- 19,206	+ 0,0594	45	- 19,223	- 0,0172
VI. "	42	- 9,123	+ 0,1178	43	- 9,326	+ 0,0559
	388			398		

Zone von $+25^{\circ}$ bis $+35^{\circ}$.

	M.			N.		
	Anz. der Sterne	Berechnete Präcession	Beobachtete Corr.	Anz. der Sterne	Berechnete Präcession	Beobachtete Corr.
I. Classe	43	+ 9",263	+ 0",1127	44	+ 9",416	+ 0",0476
II. "	33	+ 19,137	+ 0,0718	34	+ 19,156	+ 0,0237
III. "	38	+ 10,743	+ 0,0374	41	+ 10,796	- 0,0100
IV. "	64	- 9,648	+ 0,0079	61	- 9,648	- 0,0340
V. "	37	- 18,718	+ 0,0305	39	- 18,716	- 0,0469
VI. "	44	- 8,733	+ 0,0844	46	- 8,787	+ 0,0396
	259			268		

Zone von $+35^{\circ}$ bis $+45^{\circ}$.

I. Classe	39	+ 9",768	+ 0",1205	40	+ 9",834	+ 0",0832
II. "	40	+ 19,087	+ 0,0577	42	+ 19,050	+ 0,0203
III. "	36	+ 8,841	+ 0,0120	38	+ 9,176	- 0,0266
IV. "	26	- 10,573	+ 0,0314	27	- 10,362	- 0,0012
V. "	33	- 18,929	+ 0,0062	35	- 18,992	- 0,0337
VI. "	15	- 9,834	+ 0,0981	18	- 9,063	+ 0,0528
	189			200		

Zone von $+45^{\circ}$ bis $+55^{\circ}$.

I. Classe	22	+ 11",025	+ 0",0830	22	+ 11",025	+ 0",0451
II. "	28	+ 19,118	+ 0,0286	32	+ 19,025	- 0,0040
III. "	30	+ 11,651	- 0,0190	30	+ 11,651	- 0,0589
IV. "	18	- 9,117	- 0,0511	18	- 9,117	- 0,0844
V. "	11	- 19,162	- 0,0241	11	- 19,162	- 0,0550
VI. "	18	- 8,395	+ 0,0474	18	- 8,351	+ 0,0122
	127			131		

Zone von $+55^{\circ}$ bis $+65^{\circ}$.

I. Classe	22	+ 10",345	+ 0",0102	22	+ 10",345	- 0",0129
II. "	27	+ 19,121	+ 0,0327	27	+ 19,121	+ 0,0058
III. "	14	+ 6,926	- 0,0244	15	+ 6,883	- 0,0213
IV. "	24	- 10,384	- 0,0402	24	- 10,384	- 0,0606
V. "	20	- 19,172	- 0,0380	22	- 19,153	- 0,0574
	107			110		

Von $+65^{\circ}$ bis zum Pole.

I. Classe	30	+ 9",365	+ 0",0104	27	+ 9",596	- 0",0020
II. "	36	+ 18,688	+ 0,0323	30	+ 18,909	+ 0,0118
III. "	-	-	-	3	+ 16,295	- 0,0123
IV. "	10	- 11,438	- 0,0097	12	- 12,011	- 0,0595
V. "	14	- 18,870	- 0,0273	13	- 19,008	- 0,0595
VI. "	10	- 5,358	+ 0,0840	11	- 5,175	+ 0,0122
	100			96		

Die Auflösung der aus diesen Vergleichen hervorgehenden Bedingungsgleichungen von der Form

$$r = \Delta(\delta) + a \Delta n$$

gibt, nach Art. 6, den mittleren Unterschied der Verzeichnisse für jede Zone und die Verbesserung des angenommenen. Den ersteren findet man:

	M.		N.		Zonen				
\mathcal{J} (- 30°)	+ 3,78	$\gamma = 86,8$	+ 1,54	$\gamma = 91,5$	- 35° - 25°	+ 0,06403	$\gamma = 33,4$	+ 0,07523	$\gamma = 35,3$
\mathcal{J} (- 20°)	+ 1,24	231,9	+ 1,67	243,1	- 25° - 15°	+ 0,02942	94,0	+ 0,04028	96,6
\mathcal{J} (- 10°)	+ 4,22	271,9	+ 1,39	272,6	- 15° - 5°	+ 0,02386	133,9	+ 0,03025	133,2
\mathcal{J} (0°)	+ 3,73	290,9	+ 1,06	295,9	- 5° + 5°	+ 0,02774	134,6	+ 0,02639	176,9
\mathcal{J} (+ 10°)	+ 3,32	300,3	+ 0,87	309,1	+ 5° + 15°	+ 0,02816	139,0	+ 0,03255	144,0
\mathcal{J} (+ 20°)	+ 3,56	378,1	+ 1,07	388,4	+ 15° + 25°	+ 0,01586	145,0	+ 0,02934	149,5
\mathcal{J} (+ 30°)	+ 2,49	257,5	+ 0,12	266,7	+ 25° + 35°	+ 0,02893	105,2	+ 0,03197	109,7
\mathcal{J} (+ 40°)	+ 2,24	184,4	+ 0,53	195,2	+ 35° + 45°	+ 0,02476	90,7	+ 0,02491	95,8
\mathcal{J} (+ 50°)	+ 0,29	106,4	- 1,24	112,9	+ 45° + 55°	+ 0,02558	49,9	+ 0,02404	54,0
\mathcal{J} (+ 60°)	- 0,30	105,1	- 1,35	109,8	+ 55° + 65°	+ 0,04161	55,9	+ 0,03348	58,7
\mathcal{J} (+ 77°30')	+ 0,44	88,0	- 0,86	87,2	+ 65° + 90°	+ 0,02179	49,5	+ 0,03510	46,9
					Mittel	+ 0,027173	103,1	+ 0,031916	1100,6
					Anzahl der Sterne	2365		2429	

Ferner die Verbesserung von $n = \mathcal{J}n$:

8.

Die in den beiden vorigen Artikeln geführte Untersuchung gibt daher für $\frac{1}{2}[1755 + 1800] = 1777,5$:

	M.	N.
AR. . .	$m = 45,9335 + 0,054505$; $\gamma = 2174,7$	+ 0,054169; $\gamma = 2223,8$
	$n = 20,0282 + 0,052785$ 274,9	+ 0,052026 304,5
Decl. . .	$n = 20,0282 + 0,027173$ 1031,1	+ 0,031916 1100,6

Nimmt man aus den beiden Bestimmungen von n das Mittel, mit gehöriger Rücksicht auf ihren Werth, so hat man hieraus:

M.	N.
$m = 45,988005$; $\gamma = 2174,7$	$45,987669$; $\gamma = 2223,8$
$n = 20,060764$ 1306,0	$20,064472$ 1405,1

Vergleicht man diese durch die Beobachtungen

M.	N.
$0,91726 \mathcal{J}c - 0,023277 \mu' = + 0,058295$;	$\gamma = 2174,7$ + 0,057959; $\gamma = 2223,8$
$0,39830 \mathcal{J}c = + 0,034112$ 1305,0	+ 0,037820 1405,1

Bestimmt man den Werth von $\mathcal{J}c$ aus jeder dieser Gleichungen, so hat man

M.	N.
$\mathcal{J}c = + 0,063553 + 0,25377 \mu'$	$0,063187 + 0,25377 \mu'$
$\mathcal{J}c = + 0,085644$	$0,094954$

Man würde also die Venusmasse nach der ersten Vergleichung um + 0,087, nach der andern um + 0,125 vergrößern müssen, um m und n in vollkommene Uebereinstimmung zu bringen.

Dieser Vermehrung widersprechen aber andere Bestimmungen der Venusmasse. Die angenommene Masse ist die, die DELAMBRE aus Greenwicher Beobachtungen der Sonnenlängen folgerte, und die LAPLACE bis auf den 15. Theil ihrer Grösse für sicher hielt (Méc. Cél. III. p. 156); früher war sie von LAPLACE kleiner angenommen, allein sowohl BRADLEY's als MASKELYNE's Beobachtungen forderten die Vermehrung im Verhältnisse 1 : 1,0743. Indessen wird diese Vermehrung durch die neuen Untersuchungen BURKHARDT's, wie es scheint, sehr unwahrscheinlich gemacht; denn er fand aus sechs-

gegebenen Werthe von m und n mit den (Art. 3) aus der Laplace'schen Theorie gefolgerten,

$$m = 45,929710 + 0,91726 \mathcal{J}c - 0,023277 \mu'$$

$$n = 20,026652 + 0,39830 \mathcal{J}c$$

so ergeben sich die beiden endlichen Bedingungengleichungen des Problems:

M.	N.
$\gamma = 2174,7$ + 0,057959; $\gamma = 2223,8$	
. 1305,0	+ 0,037820 1405,1

unddreissigjährigen Sonnenbeobachtungen (Conn. des Tems 1816. S. 343) eine Verminderung der angenommenen Delambrischen Masse, die grösser ist als die vorige Vermehrung. Nach diesen weitläufigen und gewiss sehr genauen Untersuchungen würde man $\mu' = - 0,1125$ setzen müssen.*) Die chinesischen Be-

*) [In den Fundam. p. 295 ff. hat BESSEL an Stelle von: „Die chinesischen Beobachtungen der Schiefe“ etc. bis zum Schluss von Art. 9 das Folgende:

LINDENAVIUS qui problema alia ratione tractavit, et eam massam Veneris quaerebat, qua utendum est, ut satisfiat quantum fieri potest omnibus transitibus Mercurii per Solem observatis, audaugendam contra massam invenit; veram scilicet Veneris massam = $\frac{1,22915}{383137}$, sive quod idem est $\mu' = + 0,1441$. [Vgl. Br. m. O. II. 26, 32 (0.), 37.]

Haec differentia ad maxime intricabiles res in Astronomia recentiori occurrentes pertinet, cum utriusque determinationis incertitudo admodum exigua videat-

obachtungen der Schiefe der Ekliptik stimmen vollkommen mit dieser Verminderung; die Beobachtungen seit BRADLEY'S Zeit erfordern sogar eine noch etwas

tur. De priore indicium invenimus in libro Conn. des Tems pour 1816, altera, de qua nihil jam publici juris factum est, et quam mecum communicatam amicitiae auctoris debeo, inusitata diligentia et constantia in ea adhibitis, peritorum plausum accipiet. Dijudicatio gravium illarum quaestionum, unde veniat differentia illa, et quaenam massa Veneris in disquisitionibus de praecessione adhibenda sit, futuris adhuc pervestigationibus relinquendum est. Tamen observandum duco, NICOLAÏUM examinasse et motum ecliptices a Venere productum, et mutationem elementorum orbitae Mercurii, secundum methodum quamdam GAUSSII, in qua etiam dignitates superiores excentricitatis et inclinationis non negliguntur, illumque hoc modo numeros invenisse pro motu ecliptices perparum a LAPLACIANIS diversos.

Quodsi $\mathcal{L}c$ ita ponimus ut sequitur ex n , et inde quaerimus m , datur

$$46^{\circ}008268 - 0^{\circ}23277 \mu' \mid 46^{\circ}016808 - 0^{\circ}23277 \mu'$$

per adensiones autem rectas observabatur

$$45^{\circ}988005 \mid 45^{\circ}987669$$

ita ut discrimen, per 45 multiplicatum

$$+ 0^{\circ}912 - 10^{\circ}475 \mu' \mid + 1^{\circ}311 - 10^{\circ}475 \mu'$$

id nobis praebet, quod addendum est adscensionibus rectis pro anno 1800, ut eas plane congruentes faciamus illis pro a. 1755 et ipso n ex observationibus concluso. Hoc est secundum determinationes massae

	$M.$	$N.$
DELABRII . . .	$+ 0^{\circ}912$	$+ 1^{\circ}311$
BURCKHARDTI . . .	$+ 2,090$	$+ 2,489$
LINDENAVH . . .	$- 0,601$	$- 0,202$

Si contra comparamus mutationem obliquitatis ecliptices, ductam ex observationibus (Sect. V), = $-0^{\circ}4570$ cum formula = $0^{\circ}52133 - 0,33298 \mu'$, quae pro allatis tribus massis dat $-0^{\circ}52133$; $-0^{\circ}48387$; $-0^{\circ}56941$: vidimus eundem valorem massae, qui ab una parte maximum consensum det, ab altera summam dare diversitatem.

Etsi certum videtur errorem medium utriusque catalogi perexiguum esse debere, cum et pro a. 1755 et pro a. 1800 determinatio adscensionum rectarum stellarum fundamentalium maxima certitudine facta sit; tamen credo has disquisitiones de praecessione, plane congruentes cum massa LINDENAVIANA, non plane insociabiles esse cum BURCKHARDTIANA. Nostrae enim determinationes pro m et n ipsae adhuc incertitudini

stärkere. Ich fand nämlich, aus BRADLEY'S Beobachtungen, die Schiefe der Ekliptik für 1755 = $23^{\circ} 28' 15,32''$; aus den meinigen, mit derselben Refraction reducirten,

subjectae sunt, quae ex motu stellarum proprio remanere potuit, et quam, ut jam supra notatum est, numquam omnino vitari posse videtur. Vestigia etiam hujus motus proprii apparent partim in singulis determinationibus, ductis ex adscensionibus rectis, ubi comparato novo catalogo PIAZZIANO in regione 135° maximae, et in opposita minimae occurrit praecessiones: partim in declinationibus, ubi observatum Maximum positivum correctionis praecessiois suppositae, fere in omnibus zonis non in secundam classem (a 330° usque ad 30° AR) cadit, sed in primam (a 270° usque ad 330° AR); deinde etiam n conclusum ex adscensionibus rectis, plus, quam sine motu proprio esset expectandum, ab illo et declinationibus constituto discedit. Facile praeterea demonstrari potest, discrimen, si aequabiliter inter m et n distribuatur, etiam si adhibeamus massam BURCKHARDTIANAM, tam exiguum esse, ut incertitudini et proprio stellarum motu orienti possit tribui. Tum enim habemus

$\mathcal{L}c = + 0^{\circ}070242 + 0^{\circ}17694 \mu' \mid + 0^{\circ}072804 + 0^{\circ}17694 \mu'$, unde differentia communis ab m et n hac in determinatione est:

$$\pm 0^{\circ}006135 \mp 0^{\circ}07047 \mu' \mid \pm 0^{\circ}008821 \mp 0^{\circ}07047 \mu';$$

quod per 45 multiplicatum, pro diversis massae determinationibus praebet:

DELABRII . . .	$\pm 0^{\circ}276$	$\pm 0^{\circ}397$
BURCKHARDTI . . .	$\pm 0,633$	$\pm 0,754$
LINDENAVH . . .	$\pm 0,182$	$\pm 0,061$

Inde credo, disquisitiones de praecessione solas non sufficere ad recte eligendam aliquam et diversis massis; tamen, si mutationem obliquitatis ecliptices secundum massam LINDENAVIANAM stateremus, discrimen reperiremus, longe excedens fines errorum in observationibus. Igitur hoc in loco, ubi de motu ecliptices sermo est, massam BURCKHARDTIANAM adseivi, nihil eo derogans LINDENAVIANAE, quae nimis accurate quaesita est, quin astronomorum mereatur attentionem.

Donec sequens tempus hoc respectu theoriae plus lucis praebet, pono $\mu' = -0,1125$, atque inde praecessionem lunisolarem pro 1750

$$50^{\circ}337936 \mid 50^{\circ}340499$$

quarum determinationum posteriori, utpote nisa novo PIAZZIANO catalogo, qui haud dubie praestat vetustiori, in sequentibus utar.]

mit vollkommener Uebereinstimmung beider Sonnenwenden, für 1815 ... $23^{\circ} 27' 47''.32$. Hieraus folgt die jährliche Veränderung für 1785 = $-0''.46667$, welche nach der Formel Art. 1 = $-0''.52133 - 0''.33298 \mu'$ ist, so dass man $\mu' = -0,146$ erhält. Mit der BURCKHARDT'schen Masse ist die Schiefe 1815: $1''.03$ grösser beobachtet als 1755. Da aber das aus einer sehr grossen Menge, einen Zeitraum von 36 Jahren umfassenden, Sonnenbeobachtungen gezogene Resultat mehr Sicherheit zu versprechen scheint, als das aus den Schiefen der Ekliptik hervorgehende, so ziehe ich BURCKHARDT's Bestimmung vor, und werde mich ihrer, bei den folgenden Untersuchungen der Präcession, bedienen.

Mit dem Werthe von $\mu' = -0,1125$ hat man aus den in diesem Art. gegebenen Bestimmungen, aus m ,

$$\Delta c = + 0''.035004 \quad + 0''.034638$$

Der Unterschied der auf m und n gegründeten Bestimmungen von Δc ist daher

$$0''.050640 \quad \dots \quad 0''.060316;$$

er würde verschwunden sein, wenn man die Rectascensionen des Verzeichnisses für 1755 um

$$0''.28 \quad \dots \quad 2.71$$

vermindert, oder die der Verzeichnisse für 1800 um eben so viel vermehrt hätte.

Indessen ist es kaum möglich, dass das Verzeichniss für 1755 einen so grossen mittleren Fehler haben sollte, indem es auf 7jährige, mit dem grössten Fleisse berechnete Bradley'sche Sonnenbeobachtungen gegründet wurde; eben so wenig aber kann man, bei der Bestimmung der Fundamentalsterne für 1800, einen so grossen Fehler argwöhnen, indem MASKELYNE und PIAZZI sie, jeder aus eigenen Beobachtungen, mit fast vollkommener Uebereinstimmung hergeleitet haben.

Dagegen scheint es aber, dass die Bestimmungen von m und n aus den Beobachtungen selbst einer Unsicherheit unterworfen sind, die gross genug ist, um diesen Unterschied daraus erklären zu können. Denn theils finden sich in den aus den Rectascensionen gezogenen Resultaten noch Abweichungen, die grösser sind als man erwarten sollte; theils zeigt sich bei den Declinationen eine auffallende Anomalie, indem das beobachtete positive Maximum der Verbesserung der angenommenen Präcession, fast bei allen Zonen, nicht in der zweiten Classe (von 330° bis 30° AR.), sondern in der ersten (von 270° bis 330° AR.) liegt; endlich weicht das aus den Rectascensionen gefolgerte n mehr als man erwarten sollte von dem durch die Declinationen bestimmten ab.

Die Ursache dieser Unterschiede ist ohne Zweifel die Regelmässigkeit der eigenen Bewegung der Sterne, deren Einflüsse wir durchaus nicht auszuweichen im Stande sind. Diese eigene Bewegung macht es auch unmöglich, den Grad der Sicherheit des Resultats aus den Abweichungen der einzelnen Bestimmungen unter sich zu schätzen, indem eine solche Schätzung immer nur zufällige Abweichungen voraussetzt, auf die beständige Einwirkungen keinen Einfluss haben. Uebrigens finden, bei dem im 7. Artikel angeführten Vergleichungen der Rectascensionen des neuen Piazzischen Verzeichnisses, in allen Classen die kleinsten Präcessionen in der Gegend von 135° und die grössten in der entgegengesetzten statt. Dieses widerspricht der von TRIESNECKER, aus einer Vergleichung einer weit geringeren Anzahl Sterne, gezogenen Bemerkung, dass die Präcession in 7° der Länge am kleinsten und in 2° am grössten ist; — eben so wenig ist es der Bewegung der Sonne, nach dem von HERSCHEL angegebenen Punkte, günstig. Allein es würde nicht zweckmässig sein, die Richtung der Sonnenbewegung aus einer Menge Sterne ohne Auswahl ausmitteln zu wollen, da doch viele Sterne am Himmel sind, deren verhältnissmässig geringere Entfernung durch ihre starke Ortsveränderung angedeutet wird. Indessen gehört die eigene Bewegung der Sonne immer zu den schwierigsten Problemen der theoretischen Astronomie, da wir sie von der wirklichen eigenen Bewegung der Sterne, die mit jener von einer Ordnung ist, nicht zu trennen vermögen.

Unter der Voraussetzung, dass der Unterschied der aus m und n geschlossenen Werthe der Lunisolarpräcession nur von den eigenen Ortsveränderungen der Sterne herrührt, wird man am wenigsten zu irren fürchten dürfen, wenn man Δc so annimmt, dass die Fehler auf m und n gleich vertheilt werden. Unter dieser Voraussetzung hat man

$$\Delta c \dots = + 0''.050336 \quad + 0''.052899$$

als das Resultat von 4585 verschiedenen Vergleichungen des älteren, und 4707 des neueren Piazzischen Verzeichnisses mit dem Bradley'schen. Die übrig bleibenden Fehler von m und n sind, mit dieser Bestimmung von Δc ,

$$0''.014063 \quad \dots \quad 0''.016751;$$

oder in 45 Jahren $0''.63 \quad \dots \quad 0''.75$;

diese scheinen aber keineswegs zu gross zu sein, um sie nicht der aus den eigenen Bewegungen erzeugten Unsicherheit von m und n zuschreiben zu können.

Da die aus dem neueren PIAZZI'schen Verzeichnisse gezogene Bestimmung grösseres Vertrauen verdient, indem dieses durch die Verbesserung des älteren entstanden ist, so werde ich den letzten Werth von $\mathcal{L}c$ annehmen, und demnach die Lunisolarpräcession für 1750

$$= 50,340499$$

als das Endresultat der Untersuchung betrachten.

10.

Mit den gefundenen Werthen der Lunisolarpräcession und der Venusmasse erhält man, aus den Formeln des 1., 2. und 3. Artikels, für die Zeit 1750 + t :

$$\Psi = t.50,340499 - t^2.0,0001217945$$

$$\Psi_r = t.50,176068 + t^2.0,0001221483$$

$$V = 23^\circ 28' 18,0'' + t^2.0,00000984233$$

$$V_r = 23^\circ 28' 18,0'' - t.0,48368 - t^2.0,00000272295$$

Jährliche Lunisolar-

$$\text{präcession} \dots = 50,340499 - t.0,0002435890.$$

— allgemeine Prä-

$$\text{cession} \dots = 50,176068 + t.0,0002442966$$

$$m \dots = 45,99592 + t.0,0003086450$$

$$n \dots = 20,05039 - t.0,0000970204$$

$$\lambda \dots = t.0,17926 - t^2.0,0002660394$$

$$\pi \dots = t.0,48892 - t^2.0,0000030719$$

$$H \dots = 171^\circ 36' 10'' - t.5,718$$

Für 1800 + t hat man hieraus

Jährliche Lunisolar-

$$\text{präcession} \dots = 50,32832 - t.0,0002435890$$

— allgemeine Prä-

$$\text{cession} \dots = 50,18828 + t.0,0002442966$$

$$m \dots = 46,01135 + t.0,0003086450$$

$$n \dots = 20,04554 - t.0,0000970204^*)$$

11.

Die mittleren Unterschiede der Declinationen der verglichenen Verzeichnisse, die im 8. Artikel bestimmt wurden, sind, wie es scheint, nicht die uninteressanteste Frucht dieser Arbeit. Das ältere Verzeichniss von PIAZZI gibt die Declinationen, vom Horizonte bis zu etwa + 50° Decl., immer mehrere Secunden nördlicher als das BRADLEY'sche. Als ich diese auffallende Erscheinung zuerst bemerkte, war ihre Erklärung mir noch unbekannt, indem selbst die von dem grossen PALMER Astronomen vorgenommene Verminderung der Polhöhe von 1,5' nur den geringeren Theil des Unter-

schiedes verschwinden liess. Indessen durfte ich nach der Sorgfalt, die auf die Untersuchung der Reductionselemente für BRADLEY's Beobachtungen gewandt war, hoffen, dass mit der Zeit die Rechtfertigung dieser Declinationen erscheinen werde. Das Verzeichniss von 220 Sternen, womit PIAZZI die Astronomen vor der neuen Ausgabe des grossen Verzeichnisses beschenkte, bestätigte diese Hoffnung, indem es zeigte, dass wahrscheinlich eine neue Untersuchung der Reductionselemente ihn bewogen hatte, seine früheren Declinationen mehrere Secunden südlicher zu setzen. Das Resultat der angestellten Vergleichung dieses Verzeichnisses mit dem älteren gebe ich hier:

Unterschiede des Verzeichnisses von 220 Sternen, mit dem Älteren von BRADLEY'schen

	PIAZZI	f. 1755
12 Sterne zw. — 35° und — 25° ..	— 2,96	.. + 0,82
24 " " — 25° " — 15° ..	— 2,74	.. + 1,50
26 " " — 15° " — 5° ..	— 2,94	.. + 1,28
28 " " — 5° " + 5° ..	— 2,86	.. + 0,87
32 " " + 5° " + 15° ..	— 2,74	.. + 0,58
27 " " + 15° " + 25° ..	— 3,38	.. + 0,18
24 " " + 25° " + 35° ..	— 2,17	.. + 0,32
12 " " + 35° " + 45° ..	— 1,99	.. + 0,25
9 " " + 45° " + 55° ..	— 1,26	.. — 0,97
11 " " + 55° " + 65° ..	— 2,08	.. — 2,38
3 " " + 65° " + 90° ..	+ 0,03	.. + 0,47

In dem Verzeichnisse von 220 Sternen sind also die Declinationen mit den BRADLEY'schen als genau übereinstimmend anzusehen, indem der mittlere Fehler nur in drei Zonen 1" übersteigt. Etwas häufiger sind die 1" übersteigenden Unterschiede nach Art. 8 in der neuen Ausgabe des grossen Verzeichnisses;*) allein auch dort

*) [In dem Fundam. p. 298 findet sich an Stelle des Folgenden bis Schluss von Art. 12 folgende Bemerkung:

Opus tamen mihi notatu videtur, PIAZZI declinationes stellarum, quae culminant in quadrante australi meridiani Panormitani, magis esse septentrionales quam meas, quae autem in quadrante septentrionali, australiores. Ceterum admodum foret difficile dijudicare, a quadam re hae exiguae differentiae ortae sint, sive an quadam ex parte ex incertitudine fluxerint, quam proprius stellarum motus adhuc reliquit. Ubi id quod ex observationibus astronomicis deductum est, ad unam secundam usque confirmandum est, eo quo res nunc sunt statu, in difficultates incidimus perraro cum certitudine satis magna superandas. Ad defendendas autem declinationes pro a. 1755 hoc adjicere possumus, declinationes inter — 15° et + 15° tamquam immediate

*) [Ueber Verbesserungen dieser Constanten durch BRASSI. s. Astr. Nachr. 4. p. 401 u. 531 (211 u. 212 d. a. Verz.), Tab. Region p V (Abb. 41)]

sind sie so klein, dass es sehr schwer sein möchte, zu entscheiden, auf wessen Rechnung sie kommen, oder ob sie zum Theil von der Unsicherheit herrühren, die die eigene Bewegung der Sterne noch übrig gelassen haben kann. Sobald das Resultat astronomischer Beobachtungen bis auf eine Secunde verbürgt werden soll, fällt man, bei dem heutigen Zustande der Sachen, auf Schwierigkeiten, die selten mit überzeugender Gewissheit überstiegen worden sind. Zur Rechtfertigung der Declinationen für 1755 könnte man aber anführen, dass die Declinationen zwischen -15° und $+15^\circ$ als unmittelbar beobachtet angesehen werden können, indem sie durch die Sonnenbeobachtungen verbessert wurden, also von der Bestimmung der Polhöhe und der Refraction und von den Fehlern des Quadranten selbst ganz unabhängig sind; ferner, dass diese Beobachtungen eine vollkommene Uebereinstimmung zwischen beiden Sonnenwenden gegeben haben.

Bekanntlich fand PIAZZI die Schiefe der Ekliptik aus den Winter Sonnenwenden $8''$ kleiner als aus den Sommer Sonnenwenden. Bringt man die im XVI. Bd. der Monatl. Correspondenz S. 126 angeführten Beobachtungen auf ihre mittlere Epoche, den 1. Jan. 1798, so ergeben:

$$\begin{aligned} 10 \text{ Sommer Sonnenwenden} & \dots 23^\circ 27' 58'',69 \\ 9 \text{ Winter Sonnenwenden} & \dots \dots \dots 50,51 \end{aligned}$$

Da diese Sonnenwenden mit denselben Elementen berechnet sind, die dem älteren Verzeichnisse zum Grunde liegen, so müssen sie mit den in diesem enthaltenen Declinationen eine gleiche Veränderung erleiden. Im 8. Art. haben wir aber gesehen, dass PIAZZI'S Declinationen des älteren Verzeichnisses, für $+23^\circ 28'$ und $-23^\circ 28'$ Decl., $3'',19$ und $4'',08$ nördlicher sind, als die Bradley'schen. Bringt man diese Unterschiede bei den Schiefen der Ekliptik an, so findet man aus

$$\left. \begin{aligned} l' &= l + (t' - t) [50'',176068 + (t' + t) 0'',0001221438] \\ &+ (t' - t) [0'',48892 - (t' + t) 0'',0000030719] \cos A \operatorname{tg} b \} \dots \dots \dots (g) \\ b' &= b - (t' - t) [0'',48892 - (t' + t) 0'',0000030719] \sin A \end{aligned} \right\}$$

wo, der Kürze wegen, A für $l - 171^\circ 36' 10'' - 50'',176 t + 5'',18 (t' + t)$ geschrieben ist.

observatas haberi posse, cum his in Zonis Solis observationibus sint correctae, atque adeo plane non pendeat a determinatione altitudinis poli et refractionis, neque a Quadrantis ipsius erroribus; deinde his observationibus utrumque solstitium planissime congruere. Ceterum Sectione V^{ta} vidimus, correctiones declinationum catalogi PIAZZIANI vetustioris etiam obliquitatis ecliptices, ab hoc astronomo observatis, confirmari.]

$$\begin{aligned} 10 \text{ Sommer Sonnenwenden} & \dots 23^\circ 27' 55'',50 \\ 9 \text{ Winter Sonnenwenden} & \dots \dots \dots 54,59 \end{aligned}$$

aus deren Uebereinstimmung unter der, nach BRADLEY'S und den neuesten Beobachtungen nicht mehr zweifelhaften Voraussetzung der wirklichen Gleichheit der Entfernungen beider Wendekreise vom Aequator, eine neue Bestätigung des Verzeichnisses für 1755 hervorgeht. Hätte man die Verbesserungen angebracht, die PIAZZI selbst im neueren Verzeichnisse anbrachte: so würde man einen Unterschied von $2''$ gefunden haben. Das Mittel = $23^\circ 27' 55'',05$ für 1798, entfernt sich nur $-0'',20$ von der Schiefe der Ekliptik, die man, nach Art. 9, aus der Vergleichung von BRADLEY'S Bestimmung mit der meinigen für 1815, folgern würde. — So viele Bestätigungen können uns theils über die Richtigkeit des Verzeichnisses für 1755 beruhigen, theils ein günstiges Vorurtheil für die andere aus diesen Untersuchungen gezogene Bestimmung, die der Präcession, erwecken.

12.

Es ist nun noch nöthig, dass wir den Einfluss der Präcession auf die Oerter der Sterne näher untersuchen und auf alle vorkommende Fälle anwendbare Vorschriften zu ihrer Berechnung geben.

Eine ansehnliche Verkürzung erleiden die für die Längen und Breiten gegebenen Grundgleichungen (b) und (c), wenn man dabei, wie es in allen vorkommenden Fällen erlaubt ist, die Quadrate und höheren Potenzen von π vernachlässigt. Man hat dann, durch eine leichte Umformung,

$$\begin{aligned} l' &= l + \Psi' - \Psi + \operatorname{tg} b [\pi' \cos(L - \Pi') - \pi \cos(L - \Pi)] \\ b' &= b - [\pi' \sin(L - \Pi') - \pi \sin(L - \Pi)] \end{aligned}$$

oder, wenn man die im 10. Art. gegebenen Zahlen substituirt,

Obleich man, bei der Uebertragung der Rectascension und Declination von einer Epoche auf eine andere, aus den Gleichungen (d) und (e) sehr leicht L und B eliminiren kann, so scheint dieses doch keinen Vortheil zu gewähren. Ich gebe daher hier, zur vollkommenen scharfen Auflösung des Problems, nur eine zur Rechnung bequemere Umformung jener Gleichungen. Diese Rechnung erfordert folgende Operationen:

$$V = 23^{\circ} 28' 18''.0 + t^2 \cdot 0''.00000984233$$

$$V' = 23^{\circ} 28' 18''.0 + t'^2 \cdot 0''.00000984233$$

$$\lambda = t \cdot 0''.17926 - t^2 \cdot 0''.0002660394$$

$$\lambda' = t' \cdot 0''.17926 - t'^2 \cdot 0''.0002660394$$

$$\Psi' - \Psi = (t' - t)[50''.340499 - (t' + t)0''.0001217945]$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \operatorname{cotg} \delta \sin(\alpha + \lambda) \\ \cos B \cos(L + \Psi) &= \cos \delta \cos(\alpha + \lambda) \\ \cos B \sin(L + \Psi) &= \frac{\sin \delta}{\cos x} \sin(V + x) \\ \sin B &= \frac{\sin \delta}{\cos x} \cos(V + x) \end{aligned} \right\} \dots (h)$$

Hieraus ergibt sich B und $L + \Psi$.

$$\left. \begin{aligned} L + \Psi' &= L + \Psi + (\Psi' - \Psi) \\ \operatorname{tg} y &= \operatorname{cotg} B \sin(L + \Psi') \\ \cos \delta' \cos(\alpha' + \lambda') &= \cos B \cos(L + \Psi') \\ \cos \delta' \sin(\alpha' + \lambda') &= \frac{\sin B}{\cos y} \sin(y - V') \\ \sin \delta' &= \frac{\sin B}{\cos y} \cos(y - V') \end{aligned} \right\}$$

woraus δ' und α' gefunden werden. Es versteht sich übrigens, dass man auch hier die eleganten Formeln benutzen kann, und oft mit Vortheil benutzen wird, die GAUSS für die Auflösung sphärischer Dreiecke gegeben hat.*)

*) Fundam. p. 299 ist hierauf die folgende Betrachtung eingeschaltet:

Per elegantem methodum, atque iisdem finibus adsequendis destinatum, BOHNENBERGERO debemus, qui illam in libro „Zeitschrift für Astronomie etc. I. p. 124“

$$\begin{aligned} \cos \delta' \cos(\alpha' + \lambda') &= \cos \delta \cos(\alpha + \lambda) \cos u & - \cos \delta \sin(\alpha + \lambda) \cos \omega \sin u & - \sin \delta \sin \omega \sin u \\ \cos \delta' \sin(\alpha' + \lambda') &= \cos \delta \cos(\alpha + \lambda) \cos \omega' \sin u + \cos \delta \sin(\alpha + \lambda) [\cos \omega \cos \omega' \cos u + \sin \omega \sin \omega'] \\ & & + \sin \delta & [\sin \omega \cos \omega' \cos u - \cos \omega \sin \omega'] \\ \sin \delta' &= \cos \delta \cos(\alpha + \lambda) \sin \omega' \sin u + \cos \delta \sin(\alpha + \lambda) [\cos \omega \sin \omega' \cos u - \sin \omega \cos \omega'] \\ & & + \sin \delta & [\sin \omega \sin \omega' \cos u + \cos \omega \cos \omega'] \end{aligned}$$

ubi u scriptum est pro $\psi' - \psi$. Si in triangulo sphaerico cujus basis est u et anguli adjacentes sunt ω' et $180^{\circ} - \omega$, latus ω' adjacens per $90^{\circ} + z'$, latus $180^{\circ} - \omega$

$$\begin{aligned} \cos \delta' \cos(\alpha' + \lambda') &= \cos \delta \cos(\alpha + \lambda) [\cos \vartheta \cos z \cos z' - \sin z \sin z'] \\ & - \cos \delta \sin(\alpha + \lambda) [\cos \vartheta \sin z \cos z' + \cos z \sin z'] - \sin \delta \sin \vartheta \cos z' \\ \cos \delta' \sin(\alpha' + \lambda') &= \cos \delta \cos(\alpha + \lambda) [\cos \vartheta \cos z \sin z' + \sin z \cos z'] \\ & - \cos \delta \sin(\alpha + \lambda) [\cos \vartheta \sin z \sin z' - \cos z \cos z'] - \sin \delta \sin \vartheta \sin z' \\ \sin \delta' &= \cos \delta \cos(\alpha + \lambda) \sin \vartheta \cos z - \cos \delta \sin(\alpha + \lambda) \sin \vartheta \sin z + \sin \delta \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Quodsi haec aequationes multiplicamus $\left. \begin{array}{l} 1 \text{ per } \dots - \sin z' \\ 2 \dots \dots + \cos z' \end{array} \right| \begin{array}{l} \cos z' \\ \sin z' \end{array}$

obtinemus

Gewöhnlich wird man aber die Mühe dieser scharfen trigonometrischen Rechnung sparen können. In unseren Sternverzeichnissen ist nur der erste Differentialquotient von α und δ angegeben, womit man, seltene Fälle ausgenommen, ausreicht; zumal wenn die Zahlenwerthe dieser Differentialquotienten für zwei verschiedene Epochen angesetzt sind, indem man dann die Präcession, ohne weitere Rechnung, bis auf Grössen der dritten Ordnung richtig erhält. Nichts destoweniger ist es wünschenswerth, eine schärfere Methode für die Fälle zu besitzen, in welchen es darauf ankömmt, die Oerter der den Polen sehr nahen Sterne mit aller erforderlichen Genauigkeit von einer Epoche auf eine beliebige Menge anderer zu übertragen, ohne jedesmal zu der trigonometrischen Rechnung zurückzukehren. Die folgende entspricht dieser Forderung.

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze hat man

$$\alpha' = \alpha + \frac{d\alpha}{dt}(t' - t) + \frac{d^2\alpha}{2dt^2}(t' - t)^2 + \frac{d^3\alpha}{6dt^3}(t' - t)^3 + \text{etc.} \dots$$

$$\delta' = \delta + \frac{d\delta}{dt}(t' - t) + \frac{d^2\delta}{2dt^2}(t' - t)^2 + \frac{d^3\delta}{6dt^3}(t' - t)^3 + \text{etc.} \dots$$

wofür wir

$$\alpha' = \alpha + U'(t' - t) + U''(t' - t)^2 + U'''(t' - t)^3 + \text{etc.} \quad (i)$$

$$\delta' = \delta + W'(t' - t) + W''(t' - t)^2 + W'''(t' - t)^3 + \text{etc.} \quad (i)$$

cum doctis communicavit. Si ex iisdem aequationibus fundamentalibus, quibus nostra disquisitio de praecessione nititur, deducere eam volumus, hoc sequenti modo potest fieri. Eliminatio longitudinis et latitudinis ex aequationibus (4) et (5) [(d) und (e)] praebet

adjacens per $90^{\circ} - z$, angulus tertius per ϑ designantur: functiones illorum ω, ω', u in aequationibus modo allatis occurrentes, per z, z', ϑ exprimi possunt. Unde invenitur

schreiben wollen. Bei der Entwicklung der Coefficienten dieser Reihen werden wir anfangs unveränderliche Werthe von m und n annehmen, die wir, so wie sie

zu der Zeit gehören, für welche α und δ gilt, zur Unterscheidung durch m' und n' bezeichnen wollen.

Unter dieser Voraussetzung hat man:

$$U' = \text{tg } \delta \cdot n' \sin \alpha + m'$$

$$U'' = \text{tg } \delta^2 \cdot \frac{n'^2}{2} \sin 2\alpha + \text{tg } \delta \cdot \frac{n' m'}{2} \cos \alpha + \frac{n'^2}{4} \sin 2\alpha$$

$$U''' = \text{tg } \delta^3 \cdot \frac{n'^3}{3} \sin 3\alpha + \text{tg } \delta^2 \cdot \frac{n'^2 m'}{2} \cos 2\alpha + \text{tg } \delta \cdot \left\{ \frac{n'^3}{4} \sin 3\alpha + \left(\frac{n'^2}{12} - \frac{m'^2 n'}{6} \right) \sin \alpha \right\} + \left\{ \frac{m' n'^2}{4} \cos 2\alpha + \frac{m' n'^2}{12} \right\}$$

$$U'''' = \text{tg } \delta^4 \cdot \frac{n'^4}{4} \sin 4\alpha + \text{tg } \delta^3 \cdot \frac{n'^3 m'}{3} \cos 3\alpha + \text{tg } \delta^2 \cdot \left\{ \frac{n'^4}{4} \sin 4\alpha + \left(\frac{n'^4}{12} - \frac{7 \cdot m'^2 n'^2}{24} \right) \sin 2\alpha \right\} \\ + \text{tg } \delta \cdot \left\{ \frac{3 m' n'^3}{8} \cos 3\alpha + \left(\frac{m' n'^2}{12} - \frac{m'^2 n'}{24} \right) \cos \alpha \right\} + \left\{ \frac{n'^4}{32} \sin 4\alpha + \left(\frac{n'^4}{24} - \frac{7 \cdot m'^2 n'^2}{48} \right) \sin 2\alpha \right\}$$

u. s. w.

$$W' = n' \cos \alpha$$

$$W'' = -\text{tg } \delta \cdot \frac{n'^2}{2} \sin \alpha^2 - \frac{m' n'}{2} \sin \alpha$$

$$W''' = -\text{tg } \delta^2 \cdot \frac{n'^3}{2} \sin \alpha^2 \cos \alpha - \text{tg } \delta \cdot \frac{m' n'^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - \left\{ \frac{n' (m'^2 + n'^2)}{6} \cos \alpha - \frac{n'^2}{6} \cos \alpha^3 \right\}$$

$$\cos \delta' \sin(\alpha' + \lambda' - z') = \cos \delta \sin(\alpha + \lambda + z)$$

$$\cos \delta' \cos(\alpha' + \lambda' - z') = \cos \delta \cos(\alpha + \lambda + z) \cos \vartheta - \sin \delta \sin \vartheta \dots \dots \dots (9)$$

$$\sin \delta' = \cos \delta \cos(\alpha + \lambda + z) \sin \vartheta + \sin \delta \cos \vartheta$$

sive secundum formulas GAUSSIANAS:

$$\cos \frac{1}{2} (90^\circ + \delta') \cos \frac{1}{2} (\alpha' + \lambda' - z' + C) = \cos \frac{1}{2} (90^\circ + \delta + \vartheta) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \lambda + z)$$

$$\cos \frac{1}{2} (90^\circ + \delta') \sin \frac{1}{2} (\alpha' + \lambda' - z' + C) = \cos \frac{1}{2} (90^\circ + \delta - \vartheta) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \lambda + z)$$

$$\sin \frac{1}{2} (90^\circ + \delta') \cos \frac{1}{2} (\alpha' + \lambda' - z' - C) = \sin \frac{1}{2} (90^\circ + \delta + \vartheta) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \lambda + z)$$

$$\sin \frac{1}{2} (90^\circ + \delta') \sin \frac{1}{2} (\alpha' + \lambda' - z' - C) = \sin \frac{1}{2} (90^\circ + \delta - \vartheta) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \lambda + z)$$

z, z', ϑ facillime secundum analogias NEPERIANAS repeririunt:

$$\text{tg } \frac{1}{2} (z' + z) = \frac{\cos \frac{1}{2} (\omega' + \omega)}{\cos \frac{1}{2} (\omega' - \omega)} \text{tg } \frac{1}{2} (\psi' - \psi)$$

$$\text{tg } \frac{1}{2} (z' - z) = \frac{\sin \frac{1}{2} (\omega' - \omega)}{\sin \frac{1}{2} (\omega' + \omega)} \cotg \frac{1}{2} (\psi' - \psi)$$

$$\text{tg } \frac{1}{2} \vartheta = \frac{\sin \frac{1}{2} (z' + z)}{\cos \frac{1}{2} (z' - z)} \text{tg } \frac{1}{2} (\omega' + \omega)$$

Ad calculi confirmationem adjungi poterit

$$\text{tg } \frac{1}{2} (\delta' - \delta) = \text{tg } \frac{1}{2} \vartheta \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha' + \lambda' - z' + \alpha + \lambda + z)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha' + \lambda' - z' - \alpha - \lambda - z)}$$

$$\cotg \frac{1}{2} (\delta' + \delta) = \text{tg } \frac{1}{2} \vartheta \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha' + \lambda' - z' + \alpha + \lambda + z)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha' + \lambda' - z' - \alpha - \lambda - z)} \quad (10)$$

quae aequationes etiam ad solutionem problematis indirectam adhiberi possunt.

Haec methodus prae illa priori maxime eo commendatur, quod z, z', ϑ in eam inducuntur, quae tantum a temporibus 1750 + t et 1750 + t' pendent, neque vero a stellarum locis, unde dimidia calculi pars non fit necessaria, ubi plures stellae una sunt reducendae. Ut ejus usum adhuc reddam commodiorem, tabellam hic addam, valores quantitatum in calculo occurrentium continentem, sicut ponendae sunt, si catalogum pro a. 1755 reducere volumus ad alias epochas, aut alias catalogos ad a. 1755.

	$z + \lambda$	$z' - \lambda'$	ϑ
1594 Epocha PRINC. HANSAE	- 1° 1' 42",3643	- 1° 1' 39",3770	1. 0° 53' 49",1209
1601 " TYCHONIS	- 0 59 1,3303	- 0 58 58,7502	- 0 51 28,6874
1661 " HEVELII	- 0 36 1,2986	- 0 36 1,1318	- 0 31 25,0874
1690 " FLAMSTEEDII	- 0 24 54,4414	- 0 24 54,7519	- 0 21 43,4381
1750 " LACAILLI	- 0 1 55,0531	- 0 1 54,9301	- 0 1 40,2507
1800 " PIAZZI et ZACHII	+ 0 17 14,1275	+ 0 17 16,0744	+ 0 15 2,1441
1810	+ 0 21 3,9296	+ 0 21 6,4041	+ 0 18 22,5917
1820	+ 0 24 53,7212	+ 0 24 56,7764	+ 0 21 43,0284
1830	+ 0 28 43,5036	+ 0 28 47,1901	+ 0 25 3,4536

[Vgl. Tab. Regio-
mont. p. VII (Abb. 41)
sowie auch den Auf-
satz von HANSEN, Astr.
Nachr. 10. p. 379.]

$$W'''' = + \operatorname{tg} \delta^3 \cdot \frac{n^4}{9} (\sin \alpha^4 - 4 \sin \alpha^2 \cos \alpha^2) + \operatorname{tg} \delta^2 \left\{ \frac{m' n^4}{4} \sin \alpha + \frac{3m' n^3}{4} \sin \alpha \cos \alpha \right\} \\ + \operatorname{tg} \delta \left\{ \frac{m'^2 n^2}{24} (7 \sin \alpha^2 - 3) + \frac{n^4}{24} (\sin \alpha^4 - 8 \sin \alpha^2 \cos \alpha^2) \right\} + \left\{ \frac{m' n' (m'^2 + n'^2)}{24} \sin \alpha - \frac{m' n'^3}{4} \sin \alpha \cos \alpha \right\}$$

u. s. w. [Ueber die Gröſsen U' und W' s. indessen Tab. Regiom. p. XI (Abb. 41).]

Die bequemste Art, diese und noch mehrere Coefficienten zu finden, scheint folgende zu sein: wenn

$$U^{(k-1)} = \operatorname{tg} \delta^{k-1} A^{(k-1)} + \operatorname{tg} \delta^{k-2} B^{(k-1)} + \dots + J^{(k-1)}$$

$$U^{(k)} = \operatorname{tg} \delta^k \cdot A^{(k)} + \operatorname{tg} \delta^{k-1} B^{(k)} + \dots + \operatorname{tg} \delta J^{(k)} + K^{(k)}$$

so werden $A, B, C \dots$ nur α , nicht δ enthalten. Durch die Differentiirung von $U^{(k-1)}$ wird man erhalten

$$U^{(k)} = \left(\frac{d\delta}{dt} \right) \left\{ \frac{k-1}{k} \operatorname{tg} \delta^{k-2} A^{(k-1)} + \frac{k-2}{k} \operatorname{tg} \delta^{k-3} B^{(k-1)} + \dots + \frac{1}{k} H^{(k-1)} \right\} (1 + \operatorname{tg} \delta^2) \\ + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) \left\{ \frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta^{k-1} \frac{dA^{(k-1)}}{d\alpha} + \frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta^{k-2} \frac{dB^{(k-1)}}{d\alpha} + \dots + \frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta \frac{dH^{(k-1)}}{d\alpha} + \frac{1}{k} \frac{dJ^{(k-1)}}{d\alpha} \right\}$$

Setzt man nun für $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ ihre Werthe (f), und vergleicht man das Resultat mit dem angenommenen Werthe von $U^{(k)}$, so hat man

$$A^{(k)} = \frac{1}{k} \left\{ * + n' \frac{dA^{(k-1)}}{d\alpha} \sin \alpha + * + n'(k-1) A^{(k-1)} \cos \alpha \right\}$$

$$B^{(k)} = \frac{1}{k} \left\{ \frac{dA^{(k-1)}}{d\alpha} m' + n' \cdot \frac{dB^{(k-1)}}{d\alpha} \sin \alpha + * + n'(k-2) B^{(k-1)} \cos \alpha \right\}$$

$$C^{(k)} = \frac{1}{k} \left\{ \frac{dB^{(k-1)}}{d\alpha} m' + n' \cdot \frac{dC^{(k-1)}}{d\alpha} \sin \alpha + n'(k-1) A^{(k-1)} \cos \alpha + n'(k-3) C^{(k-1)} \cos \alpha \right\}$$

$$D^{(k)} = \frac{1}{k} \left\{ \frac{dC^{(k-1)}}{d\alpha} m' + n' \cdot \frac{dD^{(k-1)}}{d\alpha} \sin \alpha + n'(k-2) B^{(k-1)} \cos \alpha + n'(k-4) D^{(k-1)} \cos \alpha \right\}$$

u. s. w.

wodurch man leicht von dem vorhergehenden Coefficienten zum folgenden übergehen kann. Indessen findet man hieraus leicht den directen Ausdruck von

$$A^{(k)} = \frac{n^k}{k} \sin k\alpha$$

$$B^{(k)} = \frac{n^{k-1} \cdot m'}{k} \cos(k-1)\alpha$$

und für $C^{(k)}$ folgenden bequemeren

$$C^{(k)} = \frac{n^k}{2k} \sin k\alpha + \frac{n^{k-2}}{2k} \left\{ n'^2 - (k-2)m'^2 \right\} \sin(k-2)\alpha \\ + n \frac{k-3}{k} C^{(k-1)} \cos \alpha + \frac{n' dC^{(k-1)}}{k d\alpha} \sin \alpha.$$

Die vollständige Entwicklung der Gesetze von $C^{(k)}$, $D^{(k)}$ u. s. w. würde aber zu zusammengesetzt ausfallen, um Vortheil gewähren zu können. Ihre Entwicklung ist auch desto weniger der Mühe werth, da man theils leicht den folgenden Coefficienten aus den vorhergehenden findet; theils in den Fällen, wo man mit den gegebenen 4 Coefficienten nicht ausreicht, entweder nur das erste oder die beiden ersten Glieder der höheren einigermassen merklich sein werden, oder es überall nicht mehr rathsam bleibt, diesen Weg länger zu verfolgen, da dann die Rechnungen (h) weit leichter zum Ziele führen. Offenbar leitet man eben so wie bei den

Rectascensionen den folgenden Coefficienten der Declinationen aus den vorhergehenden ab, wobei man jedoch nicht übersehen darf, dass alle $A^{(k)} = 0$ sind, indem $A' = 0$ ist. Allein ungleich bequemer ist es, die schon für die Rectascensionen berechneten Coefficienten zur Erfindung der Reihe der $W^{(k)}$ zu benutzen: man hat nämlich durch successive Differentiirungen

$$W'' = n' \cos \alpha$$

$$W''' = -\frac{n'}{2} \sin \alpha U'$$

$$W'''' = -\frac{n'}{6} \cos \alpha \cdot U'^2 - \frac{n'}{3} \sin \alpha \cdot U''$$

$$W''''' = +\frac{n'}{24} \sin \alpha \cdot U'^3 - \frac{n'}{4} \cos \alpha \cdot U' \cdot U'' - \frac{n'}{4} \sin \alpha \cdot U''' \\ \text{u. s. w.}$$

Diese Coefficienten bedürfen indessen noch der Verbesserung, die aus den Veränderungen von m' und n' entsteht. Vernachlässigt man auch hier, wegen ihrer Kleinheit, die Quadrate und höheren Potenzen dieser Veränderungen, so kann man ihren Einfluss sehr leicht entwickeln. Man erhält so, wenn man

$$m = m' + m''(t' - t)$$

$$n = n' + n''(t' - t)$$

setzt, die verbesserten Coefficienten der Reihen

$$\begin{aligned}
 U'' & \\
 U''' + \frac{1}{2} \left(\frac{dU''}{dm} \right) m'' + \frac{1}{2} \left(\frac{dU''}{dn} \right) n'' & \\
 U'''' + \frac{3}{2} \left(\frac{dU'''}{dm} \right) m'' + \frac{3}{2} \left(\frac{dU'''}{dn} \right) n'' & \\
 U'''' + \frac{3}{2} \left(\frac{dU''''}{dm} \right) m'' + \frac{3}{2} \left(\frac{dU''''}{dn} \right) n'' &
 \end{aligned}$$

u. s. w.

und eben so für die Declinationen. Entwickelt man diese Vorschrift weiter, so erhält man dadurch folgende Formeln zur Berechnung der Verbesserungen der gefundenen Coefficienten:

$$\left. \begin{aligned}
 U' & \dots 0 \\
 U'' & \dots \text{tg } \delta \sin \alpha \frac{n''}{2} + \frac{m''}{2} \\
 U''' & \dots \text{tg } \delta^2 \sin 2\alpha \frac{2n''n''}{3} + \text{tg } \delta \cos \alpha \left(\frac{n''m''}{3} + \frac{m''n''}{3} \right) \\
 & \quad + \sin 2\alpha \frac{n''n''}{3} \\
 U'''' & \dots \dots \dots \\
 W' & \dots 0 \\
 W'' & \dots + \cos \alpha \frac{n''}{2} \\
 W''' & \dots - \text{tg } \delta \cdot \sin \alpha^2 \frac{2n''n''}{3} - \sin \alpha \cdot \left(\frac{n''m''}{3} + \frac{m''n''}{3} \right) \\
 & \quad \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} (k)$$

u. s. w.

u. s. w.

*) [In den Fundam. sind die Nenner der Coefficienten irrtümlich stets 2 und entsprechend dann in den Formeln (k). Vgl. auch Tab. Regiom. p. XI. (Abb. 41 am Ende).]

**) [Fundam. p. 303 ist der Einfluss der Eigenbewegung in nachstehender Weise behandelt:

Designabimus motum proprium in ascensione recta et declinatione intra 1750 + t et 1750 + t', relatum ad locum stellae tempore 1750 + t, per Δα et Δδ; eundem motum relatum ad locum pro 1750 + t' per Δα' et Δδ'; mutationem longitudinis et latitudinis per ΔL et ΔB. Tum locum pro 1750 + t' geometrico inveni-

Selten wird der Einfluss der Veränderungen von m und n auf die höheren Coefficienten merklich sein; immer aber kann er leicht berechnet werden, wenn die Berechnung der Coefficienten selbst vorhergegangen ist.

14.

Obgleich man durch diese Reihen die Genauigkeit so weit treiben kann, als man will, wenn der Stern wirklich unbeweglich ist, so würde man doch, im Allgemeinen, vergebens erwarten, durch sie dieselbe Ortsveränderung zu finden, wenn man von dem zur Zeit 1750 + t beobachteten Orte zur Zeit 1750 + t' übergeht; und umgekehrt, von dem 1750 + t' beobachteten zu 1750 + t. Denn wenn der Stern eine eigene Bewegung hat, so wird sie sich nicht nur bei dem ersten Differentialquotienten zeigen, sondern auch auf die folgenden ihren Einfluss äussern; — wenn sie selbst gleichförmig ist, so wird ihr Einfluss auf α und δ es keineswegs sein; die Ungleichförmigkeit kann sogar sehr merklich werden, wenn der Stern dem Pole so nahe steht, dass die in die Quadrate und höheren Potenzen von (t' - t) multiplicirten Glieder der Reihen (i) einen bedeutenden Werth erhalten. Da aber fast alle Sterne eine eigene Bewegung verrathen, so wird es noch nöthig sein, die Reihenentwicklung dadurch zu vervollständigen, dass man sie mit aufnimmt.**)

mus rigore, si non reducimus α et δ sed α + Δα et δ + Δδ, respectu habito solius praecessionis, ad a. 1750 + t'; aut etiam, si reducimus α et δ ad 1750 + t' et addimus Δα' et Δδ' loco sic reperto. Si ponimus verum motum proprium tamquam aequabilem, tum erunt Δα, Δδ, Δα', Δδ' = h(t' - t), i(t' - t), h'(t' - t), i'(t' - t), ubi h, i et h', i' significant annuas mutationes e motu proprio ortas ascensionis rectae et declinationis pro 1750 + t et 1750 + t'.

Inter has quantitates sequentes habemus relationes:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta\alpha' & = \Delta L [\cos \omega' + \sin \omega' \text{tg } \delta' \sin \alpha'] - \frac{\Delta B}{\cos \delta'} \cdot \frac{\sin \omega' \cos \alpha'}{\cos \delta'} \\
 \Delta\delta' & = \Delta L \sin \omega' \cos \alpha' + \frac{\Delta B}{\cos \delta'} \cos \delta' [\cos \omega' + \sin \omega' \text{tg } \delta' \sin \alpha'] \\
 \Delta L & = \Delta\alpha' [\cos \omega' - \sin \omega' \text{tg } \delta \sin (L + \psi)] + \frac{\Delta\delta'}{\cos \delta} \cdot \frac{\sin \omega' \cos (L + \psi)}{\cos \delta} \\
 \Delta B & = -\Delta\alpha' \sin \omega' \cos (L + \psi) + \frac{\Delta\delta'}{\cos \delta} \cos B [\cos \omega' - \sin \omega' \text{tg } \delta \sin (L + \psi)]
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta\alpha' & = \Delta\alpha [\cos \vartheta + \sin \vartheta \text{tg } \delta' \cos (\alpha' + \lambda' - \varepsilon')] + \frac{\Delta\delta}{\cos \delta} \cdot \frac{\sin \vartheta \sin (\alpha' + \lambda' - \varepsilon')}{\cos \delta'} \\
 \Delta\delta' & = -\Delta\alpha \sin \vartheta \sin (\alpha' + \lambda' - \varepsilon') + \frac{\Delta\delta}{\cos \delta} \cos \delta' [\cos \vartheta + \sin \vartheta \text{tg } \delta' \cos (\alpha' + \lambda' - \varepsilon')]
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

et similes, si res ad 1750 + t relatas et ad 1750 + t' relatas permutamus. Porro

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta\alpha' & = \Delta\alpha [\cos \vartheta + \sin \vartheta \text{tg } \delta' \cos (\alpha' + \lambda' - \varepsilon')] + \frac{\Delta\delta}{\cos \delta} \cdot \frac{\sin \vartheta \sin (\alpha' + \lambda' - \varepsilon')}{\cos \delta'} \\
 \Delta\delta' & = -\Delta\alpha \sin \vartheta \sin (\alpha' + \lambda' - \varepsilon') + \frac{\Delta\delta}{\cos \delta} \cos \delta' [\cos \vartheta + \sin \vartheta \text{tg } \delta' \cos (\alpha' + \lambda' - \varepsilon')]
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Indem die eigene Bewegung so klein ist, dass man ihre Quadrate und höheren Potenzen vernachlässigen kann, so wird ihr Einfluss auf den Ort des Sterns, in Beziehung auf einen festen grössten Kreis der Sphäre genommen, als der Zeit proportional angesehen werden können. Nimmt man daher an, dass nach den Bezeichnungen des 3. Art., zur Zeit 1750 + t', L und B sich in L' und B' verwandelt haben, so wird man

$$\begin{aligned} \text{Rectasc.} &= \frac{dL}{dt} \left\{ \cos V' + \sin V' \operatorname{tg} \delta' \sin \alpha' \right\} (t' - t) - \frac{dB}{dt \cdot \cos B} \cdot \frac{\sin V' \cos \alpha'}{\cos \delta'} (t' - t) \\ \text{Declin.} &= \frac{dL}{dt} \sin V' \cos \alpha' (t' - t) + \frac{dB}{dt \cdot \cos B} \left\{ \cos V' \cos \delta' + \sin V' \sin \delta' \sin \alpha' \right\} (t' - t) \end{aligned}$$

oder sehr nahe,

$$\begin{aligned} \text{Rectasc.} &= \frac{dL}{d\psi} U'(t' - t) - \frac{dB}{d\psi \cos B} \cdot W' \sec \delta' (t' - t) \\ \text{Declin.} &= \frac{dL}{d\psi} W'(t' - t) + \frac{dB}{d\psi \cos B} \cdot U' \cos \delta' (t' - t) \end{aligned} \quad (I)$$

worin U' und W' für die Epoche 1750 + t' genommen werden müssen. Man kann diese Werthe von U' und W' erhalten, nachdem man durch die Reihen des vorigen Artikels den für 1750 + t' ohne die eigene Bewegung stattfindenden Ort gefunden hat; entweder durch directe Berechnung, oder durch die Reihen

$$\begin{aligned} U' + 2 U'' (t' - t) + 3 U''' (t' - t)^2 + \dots \\ W' + 2 W'' (t' - t) + 3 W''' (t' - t)^2 + \dots \end{aligned}$$

Sucht man sie auf beiden Wegen, so gibt ihre Uebereinstimmung einen Beweis der Richtigkeit der berechneten Coefficienten.

Die Quantitäten $\frac{dL}{d\psi}$ und $\frac{dB}{d\psi \cos B}$, die wir, der Kürze wegen, durch ϵ und ϵ' bezeichnen wollen, findet man aus der Vergleichung der beobachteten Rect-

$$L' = L + \frac{dL}{dt} (t' - t); \quad B' = B + \frac{dB}{dt} (t' - t)$$

haben. Setzt man L' und B' statt L und B in die Gleichungen (e), so hat man, unter Vernachlässigung der Quadrate und höheren Potenzen von L - L und B' - B, den Einfluss der eigenen Bewegung von 1750 + t bis 1750 + t', auf die

ascension und Declination zur Zeit 1750 + t', mit der von 1750 + t übertragenen. Da sie in den beiden Gleichungen, die die Rectascension und Declination angeben, mit einander vermischt sind, so ist es klar, dass zwei zu verschiedenen Epochen beobachtete Rectascensionen weder zu ihrer Bestimmung, noch zu der Erfindung einer Rectascension für eine dritte Epoche hinreichen. Dasselbe gilt von den Declinationen. Um den Ort für eine dritte Epoche zu finden, muss man daher, wenn man das Problem in aller Schärfe nimmt, von zwei vollständigen Oertern ausgehen. Der Grund hiervon ist, auch ohne die gegebene Analyse des Phänomens, leicht zu übersehen.

Nennt man das, was man zu der nach den Reihen (i), (k) gefundenen Rectascension zur Zeit 1750 + t' hinzufügen muss, um die beobachtete zu erhalten, α , und für die Declination α' , so hat man die erwähnten beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha &= (t' - t) [U' \epsilon - W' \sec \delta' \epsilon'] \\ \alpha' &= (t' - t) [W'' \epsilon + U' \cos \delta' \epsilon'] \end{aligned} \quad \dots (m)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \alpha &= \Delta \alpha' [\cos \vartheta - \sin \vartheta \operatorname{tg} \delta \cos (\alpha + \lambda + z)] - \frac{\Delta \delta'}{\cos \delta} \cdot \frac{\sin \vartheta \sin (\alpha + \lambda + z)}{\cos \delta} \\ \Delta \delta &= \Delta \alpha' \sin \vartheta \sin (\alpha + \lambda + z) + \frac{\Delta \delta'}{\cos \delta} \cos \delta [\cos \vartheta - \sin \vartheta \operatorname{tg} \delta \cos (\alpha + \lambda + z)] \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

ubi $\vartheta = n(t' - t)$; $z' - z = z + \lambda = \frac{1}{2} m(t' - t)$ sumi possunt.

Si motum proprium volumus evolvere in seriem secundum dignitates temporis progredientem: fiet hoc facillimum in modum per aequationes

$$\left. \begin{aligned} \Delta \alpha' &= (t' - t) h + (t' - t)^2 \left\{ h \cdot n' \operatorname{tg} \delta \cos \alpha + i \cdot n' \sec \delta^2 \sin \alpha \right. \\ &\quad \left. + (t' - t)^3 \left[h \left[n'^2 \operatorname{tg} \delta^2 \cos 2\alpha - \frac{n'' m'}{2} \operatorname{tg} \delta \sin \alpha + \frac{n''}{2} \cos 2\alpha \right] + i \cdot n' \cos \alpha \sec \delta^2 \left[2 n' \operatorname{tg} \delta \sin \alpha + \frac{m''}{2} \right] \right\} \\ &\quad \text{etc.} \\ \Delta \delta' &= (t' - t) i - (t' - t)^2 h \cdot n' \sin \alpha - (t' - t)^3 \left\{ h \cdot n' \cos \alpha \left[n' \operatorname{tg} \delta \sin \alpha + \frac{m''}{2} \right] + i \cdot \frac{n''}{2} \sec \delta^2 \sin \alpha^2 \right\} \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned} \right\} (17)$$

$$\begin{aligned} \Delta \alpha' &= \left\{ \left(\frac{d\alpha}{d\alpha} \right) h + \left(\frac{d\alpha}{d\delta} \right) i \right\} (t' - t) \\ \Delta \delta' &= \left\{ \left(\frac{d\delta}{d\alpha} \right) h + \left(\frac{d\delta}{d\delta} \right) i \right\} (t' - t) \end{aligned}$$

unde prodit, secundum (10) [p. 277],

deren Auflösung ε und ε' ergibt. Mit den gefundenen Werthen von ε und ε' wird man x und x' für jede beliebige 3. Epoche, die wir durch $1750 + T$ bezeichnen wollen, finden.

Wenn man will, kann man auch die eigene Be-

wegung mit in die Reihen aufnehmen, indem man x und x' nach den Potenzen der Zeit entwickelt. Man hat dann, aus den Gleichungen (m), die den Coefficienten der Reihen noch hinzuzufügenden Verbesserungen:

Rectascension.

$$\begin{aligned} (t'-t) & \dots U''\varepsilon - \varepsilon'W''\sec\delta \\ (t'-t)^2 & \dots 2U'''\varepsilon - 2\varepsilon'[W''' + \frac{1}{2}W''^2\operatorname{tg}\delta]\sec\delta \\ (t'-t)^3 & \dots 3U''''\varepsilon - 3\varepsilon'[W'''' + 3W''W'''\sin\delta + \frac{1}{2}W''^3\sec\delta^2]\sec\delta \\ & \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Declination.

$$\begin{aligned} (t'-t) & \dots W''\varepsilon + \varepsilon'U''\cos\delta \\ (t'-t)^2 & \dots 2W'''\varepsilon + 2\varepsilon'[U'''\cos\delta - \frac{1}{2}U''W''\sin\delta] \\ (t'-t)^3 & \dots 3W''''\varepsilon + 3\varepsilon'[U''''\cos\delta - \frac{3}{2}U''W'''\sin\delta - \frac{1}{2}U''W''^2\sin\delta - \frac{1}{2}U''W''^2\cos\delta] \\ & \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

... (n)

15.

Zur Erläuterung der gegebenen Methoden, die gerade Aufsteigung und Abweichung eines Sterns auf andere Epochen zu bringen, gebe ich ein vollständiges, in Zahlen ausgeführtes Beispiel. Ich wähle dazu den Polarstern, indem seine Nähe bei dem Pole den höheren Gliedern der Reihen merkliche Werthe gibt. Die Oerter für 1755 und 1815 nehme ich wie folgt:

$$\begin{aligned} 1755 \dots \alpha & = 10^{\circ}55'34''.38 & \delta & = 87^{\circ}59'41''.12 \\ 1815 \dots & 13 \ 57 \ 7.66 & & 88 \ 19 \ 17.21 \end{aligned}$$

und werde die Methoden auf die Uebertragung auf eine 3. Epoche $1750 + T$ anwenden. Die angenommenen Oerter beruhen übrigens für 1755 auf BRADLEY's Beobachtungen, für 1815 in AR. auf meinen eigenen, in Declination auf denen von POND.*)

Man hat aus (h)

$$\begin{aligned} V \dots & \overset{1755}{23^{\circ}28'18''.000} \dots \overset{1815}{23^{\circ}28'18''.042} \\ \lambda \dots & + 0',890 \dots + 10',528 \\ \Psi \dots & + 4'11',699 \dots + 54'31',618 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta & = + 20' 2',8113; & z + \lambda & = + 22' 58',8257; & z' - \lambda' & = + 23' 1',5854 \\ & \text{unde pro 1815} \dots & \alpha' & = 13^{\circ}55'43',568; & \delta' & = 88^{\circ}17'15',974 \\ & \text{ex observatione} \dots & \Delta\alpha' & = + 87,642; & \Delta\delta' & = + 1,326 \\ & \text{inde sec. (16) [p. 280]} & \Delta\alpha & = + 71,848; & \Delta\delta & = + 1,4252 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \overset{1755}{\alpha + \lambda} \dots 10^{\circ}55'35'',270 \dots \overset{1815}{13^{\circ}57'18'',188} [21,738] \\ L + \Psi & \dots 85 \ 8 \ 26,932 \dots 85 \ 58 \ 51,596 [51,886] \\ L & \dots 85 \ 4 \ 15,233 \dots 85 \ 4 \ 19,978 [20,268] \\ B & \dots 66 \ 4 \ 18,128 \dots 66 \ 4 \ 16,165 [16,082] \\ \frac{dL}{dt} & = + 0',07908; & \frac{dB}{dt} & = - 0',03272; \\ [\Delta L & = + 5',032; & \Delta B & = - 2',046] \end{aligned}$$

Für die dritte Epoche nehme ich $T = + 35$, oder $1750 + T = 1785$, und erhalte dadurch

$$\begin{aligned} L' & \dots 85^{\circ} \ 4' \ 17',606 [17,752] \\ L' + \Psi' & \dots 85 \ 33 \ 39,374 [39,521] \\ B' & \dots 66 \ 4 \ 17,147 [17,105] \\ \alpha' + \lambda' & \dots 12 \ 19 \ 25,127 [26,898] \\ \alpha' & \dots 19 \ 19 \ 19,178 [20,950] \\ \delta' & \dots 88 \ 9 \ 30,918 [30,963] \end{aligned}$$

[In den Fundam. folgt hierauf:

II. Secundum (9) [p. 277] reperitur pro 1755 et 1815:

*) [Vgl. den folgenden B. bei LINDENAU p. 285. — Die Zahlenwerthe der Fundam. p. 304 ff. des folgenden Beispiels sind zum Theil andere; sowohl wegen etwas verschiedener Annahme des Polarstern-Oertes für 1815 ($13^{\circ}57'11''.21$, $88^{\circ}19'17''.30$), als auch BESSEL's Abhandlungen. I. Bd.

wegen der veränderten (unrichtigen) Formeln für die Coefficienten L' , W' (p. 279 dieser Abhandlung) und für den Einfluss der Eigenbewegung (p. 279). Diese Werthe sind in [] beigefügt.]

Invenitur porro pro 1755 et 1785:

$$\begin{aligned} \theta &= + 10' 1,4528; & z + \lambda &= + 11' 29,4069; & z' - z' &= + 11' 30,6639 \\ & \alpha + 130 h &= 10^{\circ} 56' 10,304; & \delta + 30 i &= 87^{\circ} 59' 41,8326 \\ \text{unde pro 1785} \dots & \alpha' = 12' 19' 20,947; & \delta' &= 88' 9' 30,961 \end{aligned}$$

III. Supponendo (10) [p. 277] pro a. 1785 $\alpha' = 12^{\circ} 19' 20'' + x$, invenitur

$$\begin{aligned} \alpha' + \lambda' - z' &= 12^{\circ} 7' 49,3361 + x \\ \alpha + \lambda + z &= 11' 7' 39,7049 \\ \frac{1}{2} \text{ Summa} \dots &= 11^{\circ} 37' 44,5205 + \frac{1}{2} x \\ \frac{1}{2} \text{ Differentia} \dots &= 0' 30' 4,8156 + \frac{1}{2} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta &= 7,1637466,8 \\ \log \cos \frac{1}{2} S &= 9,9909925,6 - 2,15 x \\ \log \sec \frac{1}{2} D &= 0,0000166,0 + 0,1 x \\ \log \sin \frac{1}{2} S &= 9,3044351,4 + 51,15 x \\ \log \operatorname{cosec} \frac{1}{2} D &= 2,0579978,7 - 1203,0 x \\ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta' - \delta) &= 7,1547558,4 - 2,05 x; & \frac{1}{2} (\delta' - \delta) &= + 0^{\circ} 4' 54,5651 - 0,0001 x \\ \log \operatorname{cotg} \frac{1}{2} (\delta' + \delta) &= 8,5261796,9 - 1151,85 x; & \frac{1}{2} (\delta' + \delta) &= 88' 4' 34,6525 + 1,8371 x \\ & \delta = 87^{\circ} 59' 41,8326 = 87^{\circ} 59' 40,0874 + 1,8372 x \\ & \delta' = 88' 9' 29,2176 + 1,8370 x \end{aligned}$$

unde $x = + 0,9499$

$$\alpha' = 12^{\circ} 19' 20,950; \quad \delta' = 88^{\circ} 9' 30,963.]$$

$$\begin{array}{r} 1755 \qquad \qquad \qquad 1815 \\ m' \dots \dots \dots 45,99746 \dots \dots 46,01598 \\ n' \dots \dots \dots 20,04990 \dots \dots 20,04408 \end{array}$$

Nimmt man, der Vollständigkeit des Beispiels wegen, die Reihen auf beide Epochen an, so hat man, aus (i), mit

Rectascension.

$$\begin{array}{r} \qquad \qquad \qquad 1755 \qquad \qquad \qquad 1815 \\ U' \dots \dots + 154,754046 \dots \dots \dots + 210,93347 [94723] \\ U'' \dots \dots + 0,35875 92 \dots \dots \dots + 0,60591 77 [.. 506 90] \\ U''' \dots \dots + 0,00096 1130 \dots \dots \dots + 0,00189 6483 [.. 6657] \\ U^{iv} \dots \dots + 0,00000 25267 0 \dots \dots \dots + 0,00000 57753 1 [.. 759 1] \\ U^v \dots \dots + 0,00000 00065 446 \dots \dots \dots + 0,00000 00170 834 [.. 851] \\ U^vi \dots \dots + 0,00000 00000 1653 \dots \dots \dots + 0,00000 00000 4862 [.. 4863] \\ U^vii \dots \dots + 0,00000 00000 000408 \dots \dots \dots + 0,00000 00000 00132 [.. 132 1] \end{array}$$

Declination.

$$\begin{array}{r} W' \dots \dots + 19,68644 \dots \dots \dots + 19,745273 [45265] \\ W'' \dots \dots - 0,00142 37 \dots \dots \dots - 0,00247 12 [.. 7 14] \\ W''' \dots \dots - 0,00000 4045 \dots \dots \dots - 0,00000 8116 [.. 117] \\ W^{iv} \dots \dots - 0,00000 001077 \dots \dots \dots - 0,00000 00254 8 [.. 54 9] \end{array}$$

Die von der Veränderung von m' und n' herrührenden Glieder ergeben sich aus (k):

Rectascension.

$$\begin{array}{r} U' \dots \dots 0,0 \dots \dots \dots 0,0 \\ U'' \dots \dots - 0,00010 83 \dots \dots \dots - 0,00039 91 [.. 24 48] \\ U''' \dots \dots - 0,00000 1832 [2748] \dots \dots \dots - 0,00000 3334 [.. 5001] \\ U^{iv} \dots \dots - 0,00000 00087 [00180 4] \dots \dots \dots - 0,00000 00182 [.. 00374 3] \end{array}$$

Declination.

W'' 0,0 0,0
 W''' -0,00004 76 -0,00004 71
 W'''' +0,00000 0006 [... 0012] +0,00000 0013 [... 0019]

Für

$$(t' - t) = +60 \dots = -60$$

geben diese Entwicklungen

$\alpha' \dots 13^{\circ} 55' 43,78$ [47] $\dots 10^{\circ} 56' 42,62$ [46,18]
 $\delta' \dots 88 19 15,88$ [98] $\dots 87 59 42,48$ [42,56]*)

und die Vergleichung dieser Oerter mit den beobachteten ergibt

α und $\alpha' = +83,88$ und $+1,33 \dots -68,24$ und $-1,36$

Aus (m) erhält man

$\alpha \dots = +12646,8 \epsilon - 39849 \epsilon' \dots - 9278,4 \epsilon + 33752 \epsilon'$
 $\alpha' \dots = 1167,4 \epsilon + 370,5 \epsilon' \dots - 1180,9 \epsilon - 324,6 \epsilon'$

und aus der Auflösung dieser Gleichungen

$$\begin{aligned} \epsilon \dots &= +0,001642 \dots +0,001588 \\ \epsilon' \dots &= -0,001584 \dots -0,001585 \end{aligned}$$

Diese Werthe von ϵ und ϵ' sollten in beiden Bestimmungen vollkommen gleich sein; ihr kleiner Unterschied rührt von den kleinen vernachlässigten Gliedern her, die sich, wegen der langen Zwischenzeit, etwas anhäuften. Hat man, wie hier, die Reihen für beide Epochen, für welche die Oerter beobachtet wurden, berechnet, so ist es sicherer und bequemer, durch beide den Ort für die mittlere Epoche zu suchen und daraus ϵ und ϵ' zu bestimmen. Hier erhält man für 1785

$\alpha' \dots 12^{\circ} 18' 41,322 \dots 12^{\circ} 19' 56,979$
 $\delta' \dots 88 9 30,270 \dots 88 9 31,561$

Die Vergleichung beider gibt, nach (m),

$$\begin{aligned} 75,657 &= 10744,8 \epsilon - 36570 \epsilon' \\ 1,291 &= 1175,1 \epsilon + 345,3 \epsilon' \end{aligned}$$

woraus $\epsilon = +0,001561$; $\epsilon' = -0,001607$ folgt. Nach der Vergleichung durch die endlichen Formeln am Anfange dieses Artikels würde man $\epsilon = +0,001571$; $\epsilon' = -0,001603$ gefunden haben. Da jetzt die wahren Werthe von ϵ und ϵ' bestimmt sind, so kann man die Uebereinstimmung der Reihen für die äusseren Zeiten prüfen; man findet, durch die Substitution dieser Werthe in die Bedingungsgleichungen für α und α' , den Fehler der ersten Reihe für $t' - t = +60$, in AR. und Decl. = $+0,11$ und $-0,09$; der anderen, für $t' - t = -60$, in AR. und Decl. = $-0,57$ und $+0,03$. Diese kleinen Fehler sind, für eine so lange Zwischenzeit, unbedeutend; wenn es nicht darauf angekommen wäre, ein Beispiel zu geben, so würde es nicht vortheilhaft gewesen sein, den Gebrauch der Reihen über ein halbes Jahrhundert auszudehnen. Für 1785 findet man aus beiden Reihen, nothwendig vollkommen übereinstimmend,

$$\alpha = 12^{\circ} 19' 19,150 \text{ und } \delta = 88^{\circ} 9' 30,916$$

welche Bestimmung auch von der, durch die endliche trigonometrische Rechnung erhaltenen, weniger ab-

*) [Statt des folgenden bis zu den Werthen von W' und W'' für die Declination tritt in den Fundam. (p. 306):

et ex comparatione horum locorum cum observatis prodit

$$\Delta \alpha' = +87,74; \quad \Delta \delta' = +1,32 \dots \Delta \alpha = +71,80; \quad \Delta \delta = +1,44$$

quamproxime congruens cum eo quod supra inveniebatur. Secundum illam determinationem motus proprii reperitur ex (17) [p. 280]

$$\begin{aligned} \Delta \alpha' &= (t' - t) 1,19747 \dots \Delta \alpha' = (t' - t) 1,46070 \\ &+ (t' - t)^2 0,00362 16 \dots + (t' - t)^2 0,00530 44 \\ &+ (t' - t)^3 0,00001 0657 \dots + (t' - t)^3 0,00001 8226 \\ &+ (t' - t)^4 0,00000 00271 1 \dots + (t' - t)^4 0,00000 00518 7 \\ \Delta \delta' &= (t' - t) 0,02375 3 \dots \Delta \delta' = (t' - t) 0,02210 \\ &- (t' - t)^2 0,00002 21 \dots - (t' - t)^2 0,00003 42 \\ &- (t' - t)^3 0,00000 0076 \dots - (t' - t)^3 0,00000 0133 \end{aligned}$$

weicht, als bei dem Gebrauche nur 7ziffriger Logarithmen erforderlich gewesen wäre.*)

Die Formeln (n) geben endlich die Entwicklung der eigenen Bewegung. Setzt man $\epsilon = +0,001571$, $\epsilon' = -0,001607$, so sind ihre Zahlenwerthe

Rectascension.	
1755	1815
$U' \dots + 1,74693 \dots$	$+ 1,739860$
$U'' \dots + 0,00346 \ 09 \dots$	$+ 0,00506 \ 30$
$U''' \dots + 0,00001 \ 3887 \dots$	$+ 0,00001 \ 4104$

$\alpha' = 10^{\circ} 55' 34,38 \dots$	$= 13^{\circ} 57' 7,66 [11,21]$
$+ (T-5) 155,68749 [73793] \dots$	$+ (T-65) 212,33207 [40793]$
$+ (T-5)^2 0,36211 \ 18 [\dots 227 \ 25] \dots$	$+ (T-65)^2 0,60968 \ 16 [61012 \ 86]$
$+ (T-5)^3 0,00097 \ 3185 [\dots 96 \ 9039] \dots$	$+ (T-65)^3 0,00191 \ 5453 [\dots 90 \ 9882]$
$+ (T-5)^4 0,00000 \ 25180 \ 0 [\dots 5357 \ 7] \dots$	$+ (T-65)^4 0,00000 \ 57571 \ 1 [\dots 7903 \ 5]$
$+ (T-5)^5 0,00000 \ 00065 \ 446 \dots$	$+ (T-65)^5 0,00000 \ 00170 \ 834 [\dots 0 \ 891]$
$+ (T-5)^6 0,00000 \ 00000 \ 1653 \dots$	$+ (T-65)^6 0,00000 \ 00000 \ 4862 [\dots 863]$
$+ (T-5)^7 0,00000 \ 00000 \ 00040 \ 8 \dots$	$+ (T-65)^7 0,00000 \ 00000 \ 00132 \ 1$
$\delta' = 87^{\circ} 59' 41,12 \dots$	$= 88^{\circ} 19' 17,21 [30]$
$+ (T-5) 19,70868 [71019] \dots$	$+ (T-65) 19,47336 [\ 7475]$
$- (T-5)^2 0,00149 \ 26 [\dots 9 \ 34] \dots$	$- (T-65)^2 0,00255 \ 12 [\dots 5 \ 27]$
$- (T-5)^3 0,00000 \ 4039 [\dots 4109] \dots$	$- (T-65)^3 0,00000 \ 8103 [\dots 8231]$
$- (T-5)^4 0,00000 \ 001077 \dots$	$- (T-65)^4 0,00000 \ 00254 \ 8 [\dots 4 \ 91]$

Indem wir aber die Einwirkung der eigenen Bewegung nur bei den drei ersten Coefficienten in Rechnung brachten, werden diese Formeln für weit ent-

Declination.

$W' \dots + 0,02224 \dots$	$+ 0,02063$
$W'' \dots - 0,00002 \ 13 \dots$	$- 0,00003 \ 29$

Nach der Addition sämtlicher Theile der Coefficienten hat man endlich folgende Formeln für den mittlern Ort des Polarsterns, zur Zeit 1750 + T:

[Vergl. auch Bonn's Jahrb. f. 1818 p. 235 (98 d. allgem. Verzeichnisses).]

legene Zeiten etwas grössere Fehler geben, als wenn man die eigene Bewegung besonders berechnet.

[Die Fundam. enthalten noch (p. 307) die folgende Vergleichung der Beobachtungen mit den Formeln (vgl. auch Bonn's Jahrb. f. 1818 p. 237):]

	Adsc. recta in tempore observata.	Declinatio observata.	Differentia formulae		
			AR.	Decl.	
1755 BRADLEIUS	0 ^h 43 ^m 42 ^s .292	87° 59' 41,12	0,000	0,00	Sect. IX.
1756 LACAILLUS	—	88 0 1,30	—	- 0,47	DE ZACH Attr. d. mont. p. 444
1756 TOB. MAVERUS	—	87 50 59,30	—	+ 1,53	" " " " " p. 448
1790 DE ZACH	0 50 15,796	—	+ 2,511	—	" " " " " p. 451
1790 DUX MARLBOROUGH	—	88 11 8,68	—	+ 0,27	" " Mon. Corr. X. p. 24
1796 DELAMBRIUS	—	88 13 7,30	—	- 0,89	Conn. des tems an. VI. p. 375
1800 PLAZZII'S	0 52 25,300	88 14 24,30	- 0,220	+ 0,33	Catalogus stellarum, ed. II.
1804 DE ZACH	—	88 15 43,85	—	- 1,07	DE ZACH Mon. Cor. X. p. 24
1807 GROOMBRIDGIUS	—	88 16 41,20	—	+ 0,14	Philos. Transact. 1810. II.
1810 DE ZACH	—	88 17 39,75	—	+ 0,11	DE ZACH Attr. d. mont. p. 440

*) [In den Fundam. hierfür (p. 307):]

Pro $T = + 35$ ex duabus hisce seriebus reperimus

$$\alpha' = 12^{\circ} 19' 20,96 \dots \quad \alpha' = 12^{\circ} 19' 20,83$$

$$\delta' = 88 \ 9 \ 30,961 \dots \quad \delta' = 88 \ 9 \ 30,963$$

ubi perexigua discrimina forte proveniunt ex termino neglecto in primo quotiente differentiali (6) [Formel (f) p. 265].

	Adec. recta in tempore observata.	Declinatio observata.	Differentia formulae			
			AR.	Decl.		
1811	ORIANUS	—	88° 17' 59",48	—	— 0",12	DE ZACH Attr. d. mont. p. 440
1812	ARAGO et MATHIEU	0 ^h 55 ^m 5",500	88 18 18,98	+ 1",128	— 0,13	" " " " " p. 440
1813	PONDIUS	—	88 18 38,34	—	0,00	Philos. Transact. 1815. II.
1813	BRINKLEIUS	—	88 18 38,23	—	+ 0,11	Conn. des tems 1819. p. 337
1815	STRUVIUS	0 55 48,390	—	+ 0,357	—	Observ. Dorpatens. p. 4
1815	BESSELIUS	0 55 48,747	—	0,000	—	
1817	LITTRUVIUS	—	88 19 53,34	—	+ 0,90	Zeitschr. f. Astr. etc. III. p. 63.

38. Ueber die Constante der Aberration.*)

(Zeitschr. f. Astron. II. p. 123. — Brief an LISDENAU vom 13. Sept. 1815.)

Die Uebereinstimmung unserer für die Vergrößerung der Aberration aus den beobachteten geraden Aufsteigungen des Polaris erhaltenen Resultate freut mich sehr, und lässt mich ein vermehrtes Vertrauen auf die wirkliche Statthaftigkeit dieser Verbesserung legen. Auch ist dieses Vertrauen nöthig, weil wir mit starken Autoritäten dagegen zu kämpfen haben; mit so starken, dass ich in meiner Bearbeitung des BRADLEY vorgeschlagen habe, die Einführung dieser Verbesserung nicht zu übereilen. Nun gibt Ihre Untersuchung allerdings ein bedeutendes Gewicht in die Schale der Vermehrung und unbedenklich würde man diese annehmen können, wenn sich nicht mancherlei dagegen sagen liesse. Dass DELAMBRE die Lichtgleichung etwa $10''$ zu klein gefunden haben soll, ist schwer zu glauben, wenigstens wenn er seine Rechnung vollkommen consequent und zweckmässig führte, so kann der übrig gebliebene Fehler wohl kaum mehr als ein paar Secunden betragen. Also müsste, um beides zu vereinigen, eine neue physische Hypothese zu Rathe gezogen werden, wozu man sich wohl ungern gezwungen sehen wird. Dennoch würde ich das Zeugniß des 2 Trabanten weniger beachten, wenn BRADLEY nicht genau dasselbe Resultat aus seinen Sector-Beobachtungen gezogen hätte. Nur ist es unendlich zu bedauern, dass wir BRADLEY's Original-Beobachtungen nicht mehr besitzen, allein die Resultate, die er uns hinterlassen hat, werden sich schwer mit der Vermehrung vereinigen lassen. Ferner haben wir durch PIAZZI das Beispiel einer beobachteten höchst

wahrscheinlich irrigen Anomalie, nämlich der Parallaxe des Polarsterns. In einer Ergänzung meiner Abhandlung über den Polarstern im Jahrbuch 1818, welches jetzt bald ausgegeben werden wird, habe ich zwar eine Erklärung gegeben, die wohl die richtige sein wird,*) allein wer verbürgt es uns, dass die Polarstern-Beobachtungen nicht noch an gemeinschaftlichen Fehlern leiden, die immer zu fürchten sind, wenn es auf Decimalen einer Secunde ankömmt, obgleich wir ihnen Grund nicht errathen.

Nehmen Sie dazu, dass meine Beobachtungen von 1814 (die diesjährigen sind noch nicht berechnet) nur eine äusserst geringe Verbesserung der Aberration andeuten — und das Resultat von allem wird sein, dass wir uns noch nicht übereilen dürfen, diese Correction einzuführen, zumal da sie gering ist und unsere sonstigen Rechnungen nicht erheblich stört. Meine Meinung ist freilich, dass wir die Aberration vermehren müssen, und meine Gründe dafür sind nicht zu verachten. Die Beobachtungen des Polarsterns von BRADLEY geben $20',255 + 0',5001$ und der wahrscheinliche Fehler, nach einem eigenen Verfahren bestimmt, ist nur $0',0028$. Um dieses Resultat zu bestätigen, untersuchte ich die Culminationen von α Lyrae und α Can. maj. und von α Aquil. und α Can. minor., die mir

+ $0',6247$ wahrscheinl. Fehler $0',1417$ + $0,0466$ " " $0,1703$ geben. Ferner γ Dracon. von 1750 — 1754+ $0',5423$ wahrscheinl. Fehler $0',1103$

*) [Auszug aus 105 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 399 (O.). 407, 410 (O.). II. 2 (O.) 15, 99, 101, 150 (O.), 161 (O.). — Vgl. auch BUSCH, Astr. Nachr. 13. p. 329.]

*) [Vgl. den spätern Aufsatz 59 unter „Theorie der Instrumente“.]

Im Mittel aus allen Rectascensionsbeobachtungen, mit gehöriger Rücksicht auf ihren Werth genommen, gibt $+0,4530$ wahrscheinl. Fehler $0,07063$ so dass ich noch fast $0,1$ mehr finde als Sie.*)

Vielleicht lassen sich noch BRADLEY'S Original-Beobachtungen in Wanstead auffinden; diese müssten entweder alle Zweifel zerstreuen oder sie mehr begründen. Auf jeden Fall wird Ihnen diese Bestätigung. Die AR. des Polaris für 1785 folgt aus meinen neuesten Untersuchungen = $0^h 49^m 17,279$, was nur wenig von Ihrer Bestimmung abweicht. Es freut mich zu sehen, dass meine Position für 1815 so nahe richtig ist; an der BRADLEY'Schen konnte ich nie zweifeln. Ich habe mehrere Untersuchungen über den Polaris angestellt, wovon die neueste die beste ist. Zuerst verglich ich BRADLEY'S AR. mit der ZACH'Schen (Jahrbuch 1817), dann jene mit der MEINIGEN (Jahrbuch 1818), endlich diese beiden nach der letzten Verbesserung der Präcession. Diese Vergleichung wurde als Beispiel meiner Methoden, die Oerter zu reduciren, der Abhandlung über die Präcession beigefügt**), und bei dieser Gelegenheit wurde alles auf schärfste berechnet und noch ein kleiner Fehler der Reihenentwicklung der eigenen Bewegung etc. beigefügt. Sollten Sie von meinen Resultaten über die Präcession etwas gebraucht

haben, so wird die spätere Veränderung derselben doch nicht schaden, indem der eigenen Bewegung das hinzukömmt, was von der Präcession abgenommen wird.***)

POND'S Kreis ist allerdings ein vortreffliches Instrument und seine Polhöhe ($51^{\circ} 28' 38,5$) scheint grosses Vertrauen zu verdienen. Dennoch möchte ich meine BRADLEY'Sche Bestimmung nicht aufgeben, indem auch selbst bei den schönsten harmonirenden Beobachtungen doch oft noch allgemeine Fehler vorkommen, so dass man sich eigentlich nie eher von einem angenommenen Resultate entfernen sollte, ehe spätere Untersuchungen nicht nur ein anderes gegeben, sondern auch den Grund des Irrthums des vorigen gezeigt haben. Da dieses bei dem BRADLEY'Schen noch nicht der Fall ist, so halte ich es auch noch keineswegs für umgestossen. Auch werden Sie sich erinnern, dass POND früher, mit einem andern Kreise die Polhöhe von Greenwich $51^{\circ} 28' 39,6$ fand; er gab dieses Resultat vor etwa fünf Jahren in den Phil. Trans., was aber freilich nicht das Vertrauen seiner jetzigen Bestimmung verdienen kann. Dem sei indessen wie ihm wolle, für meine Beobachtungen darf keine andere Polhöhe angenommen werden, wenn nicht irgendwo constante Fehler übrig bleiben sollen.†)

39. De nutatione et aberratione. ††)

(Fundam. astr. Sect. IX. p. 125 — 132.)

... Monuimus supra†††), parvum negativum parallaxis valorem, in stella α Ursae minoris detectum, tibi posse levibus observationum erroribus: eamque opinionem non vanam esse, facile concedet, qui contulerit singulas observationes: ita ut ex ista negativa parallaxi

*) Aus meinen früheren, auf 800 Polaris-Beobachtungen beruhenden Untersuchungen folgt Aberrationsconstante = $20,6096$; MASKELYNE'S Sectorbeobachtungen von γ Dracon. geben die Vergrößerung der zeitherigen Constante noch etwas stärker. Da ich den Gegenstand mit Benutzung einer noch zahlreichern Reihe beobachteter AR. des Polaris von neuem bearbeitete, auch dabei POND'S Declinationsbeobachtungen benutze, so hoffe ich bald etwas weiteres über diesen interessanten Gegenstand unseren Lesern mittheilen zu können (vgl. BODE'S Jahrb. f. 1818 p. 249. 1818 p. 216. 1820 p. 209.) v. LINDENAC.

**) [Vgl. die vorangehende Abhandlung 37 Art. 15.]

***) Bei meinen Untersuchungen wurde für $1800 + t$ angenommen

$$m = 46,01058 + 0,0003590677 \cdot t \\ n = 20,04966 - 0,0002135621 \cdot t$$

nullo modo liqueat, addendam esse computatis ascensionibus rectis correctionem quandam periodicam, hucusque neglectam. Nihilominus hic observationum exitus dat ansam, denno executandarum correctionum, quibus utuntur astronomi in inquirendis apparentibus stellarum locis: et quae mihi suppeditaverit haec commentatio, hic afferre

die hierinnen durch den neuen Piazzischen Catalog eingeführten, und durch eine anderweite Correction der Venusmasse vielleicht noch einzuführenden Aenderungen sind nur sehr unbedeutend, und können auch selbst die allein davon abhängende eigene Bewegung des Polaris nur sehr wenig ändern. v. LINDENAC.

†) [Ueber die Polhöhe von Greenwich vgl. Fundam. astr. p. 22 ff., Mon. Corr. XXVII p. 80; Br. m. O. I. 410 (O.), 412. 414. II. 23 (O.). 27. 53 (O.). 58. 66. 202. S. auch Abh. 57 unter „Theorie der Instrumente“.]

††) [Auszug aus 130 d. a. Verz. — Vgl. die folgenden Abhandlungen 40 und 43. Br. m. O. II. 37—40. 43 (O.)]

†††) [Fundam. p. 121. — Vgl. auch Br. m. O. I. 383 (O.). 386. 391. 395 (O.) II. 13 (O.). 17.]

locum esse censeo, quoniam magis magisque inde sit percipuum, correctiones adhibitae solas esse cura dignas.

Incipiamus a motu axis terrestris, sive a nutatione. Problematis hujus aequationes fundamentales, quas LAPLACEUS affert in Mechanica Coel. libr. V. Prop. 1. transeunt, si ponimus δ et $\varphi = 0$ (I. 18) in has:

$$C \frac{dp}{dt} + (B - A)qr = \frac{dN}{dt}$$

$$A \frac{dq}{dt} + (C - B)pr = \frac{dN''}{dt}$$

$$B \frac{dr}{dt} + (A - C)pq = -\frac{dN'}{dt}$$

et si pro iis harum aequationum partibus quae sunt ad dextram signi aequalitatis, substituuntur vires turbantes (V. 3) habemus post levem transformationem:

$$C \frac{dp}{dt} + (B - A)qr = L S dm \cdot (yx' - xy') \left\{ \frac{1}{J^3} - \frac{1}{r^3} \right\}$$

$$A \frac{dq}{dt} + (C - B)pr = L S dm \cdot (zy' - yz') \left\{ \frac{1}{J^3} - \frac{1}{r^3} \right\}$$

$$B \frac{dr}{dt} + (A - C)pq = L S dm \cdot (xz' - zx') \left\{ \frac{1}{J^3} - \frac{1}{r^3} \right\}$$

Per x' , y' , z' designantur cujusdam particulae terrestris dm coordinatae, axibus gyrationis liberis parallelae; per x , y , z similes coordinatae corporis attractantis, cujus massam partibus massae terrestris expressam designamus per L ; per r , et A ejusdem corporis

$$\sin \omega \cdot \frac{d\psi}{dt} = \frac{L}{nC} S dm \left\{ (zy' - yz') \cos \varphi - (xz' - zx') \sin \varphi \right\} \left\{ \frac{1}{J^3} - \frac{1}{r^3} \right\}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{L}{nC} S dm \left\{ (zy' - yz') \sin \varphi + (xz' - zx') \cos \varphi \right\} \left\{ \frac{1}{J^3} - \frac{1}{r^3} \right\}$$

Jam si in evolvendo $\frac{1}{J^3} - \frac{1}{r^3}$ primi termini tantum rationem habemus atque adscensionem rectam corporis attractantis per α , declinationem per δ denotamus; unde Coordinatarum expressiones hae sunt:

$$x = r \cos \delta \cos(\alpha - \varphi); y = r \cos \delta \sin(\alpha - \varphi); z = r \sin \delta$$

inveniuntur haec:

$$\sin \omega \cdot \frac{d\psi}{dt} = \frac{3L}{r^3} \left(\frac{C-A}{Cn} \right) \sin \delta \cos \delta \sin \alpha$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{-3L}{r^3} \left(\frac{C-A}{Cn} \right) \sin \delta \cos \delta \cos \alpha$$

Quae aequationes facile mutantur in has:

$$\cos \delta \cos \alpha = \cos(v - \zeta) \cos \zeta - \sin(v - \zeta) \sin \zeta \cos \gamma$$

$$\cos \delta \sin \alpha = \cos(v - \zeta) \sin \zeta \cos \omega + \sin(v - \zeta) \cos \zeta \cos \gamma \sin \omega - \sin(v - \zeta) \sin \gamma \sin \omega$$

$$\sin \delta = \cos(v - \zeta) \sin \zeta \sin \omega + \sin(v - \zeta) \cos \zeta \cos \gamma \sin \omega + \sin(v - \zeta) \sin \gamma \cos \omega$$

Producta $\sin \delta \cos \delta \sin \alpha$ et $\sin \delta \cos \delta \cos \alpha$ induunt itaque hanc formam:

$$fv = U + U' \sin 2v + U'' \cos 2v$$

et habemus

distantiae quae sunt a terrae gravitatis centro atque particula dm ; per A , B , C momenta inertiae ad axes gyrationis liberis. Per S designatur integratio ad totam massam terrestrem extensa.

Designato per φ angulo axis cui coordinatae x parallelae sumuntur cum puncto aequinoctiali vernali; per ψ longitudine aequinoctii fixi, ad aequinoctium variabile relata; per ω obliquitate ecliptices, habetur

$$p = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt} \cos \omega$$

$$q = \frac{d\psi}{dt} \sin \omega \sin \varphi - \frac{d\omega}{dt} \cos \varphi$$

$$r = \frac{d\psi}{dt} \sin \omega \cos \varphi + \frac{d\omega}{dt} \sin \varphi.$$

Quodsi statuimus esse $A = B$, id quod licet, consequitur esse $p = n$, i. e. per celeritati qua gyatur terra: praeterea, neglectis Quadratis quantitatum q et r , quod etiam concessum est: ex aequationibus modo allatis haec derivantur:

$$\frac{dq}{dt} = rn; \quad \frac{dr}{dt} = -qn$$

item

$$q = \frac{-L}{nC} S dm (xz' - zx') \left\{ \frac{1}{J^3} - \frac{1}{r^3} \right\}$$

$$r = \frac{L}{nC} S dm (xy' - yz') \left\{ \frac{1}{J^3} - \frac{1}{r^3} \right\}$$

unde sequitur

$$\sin \omega \cdot d\psi = M \cdot \frac{de}{m} \left\{ \frac{1 + e \cos(r - \Gamma)}{(1 - ee)^3} \right\} \sin \delta \cos \delta \sin \alpha$$

$$d\omega = -M \cdot \frac{de}{m} \left\{ \frac{1 + e \cos(r - \Gamma)}{(1 - ee)^3} \right\} \sin \delta \cos \delta \cos \alpha$$

ubi e , v , Γ , km denotant excentricitatem, longitudinem veram in orbita, longitudinem perigei atque motum medium diurnum, partibus radii expressum. Compendii causa autem posuimus

$$M = 3 \left(\frac{C-A}{Cn} \right) \frac{L}{1+L} m m; \quad k = 0,01720209895.$$

Designantibus γ et ζ inclinationem orbitae atque longitudinem nodi adscendentis: obtinemus haec

$$2L' = f(0) + f(90^\circ); \quad 2L'' = f(45^\circ) - f(135^\circ); \quad 2L''' = f(0) - f(90^\circ)$$

unde facillime haec deducuntur formulae*):

$$\begin{aligned} \sin \delta \cos \delta \sin \alpha &= (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \gamma) \sin 2\omega + \frac{1}{4} \cos 2\omega \sin 2\gamma \cos \Omega - \frac{1}{2} \sin 2\omega \sin \gamma^2 \cos 2\Omega \\ &+ \sin 2v [-\frac{1}{4} \cos 2\omega \sin \gamma \cos \frac{1}{2} \gamma^2 \sin \Omega + \frac{1}{2} \sin 2\omega \sin \gamma^2 \sin 2\Omega + \frac{1}{2} \sin \gamma \sin \frac{1}{2} \gamma^2 \cos 2\omega \sin 3\Omega - \frac{1}{4} \sin 2\omega \sin \frac{1}{2} \gamma^4 \sin 4\Omega] \\ &+ \cos 2v [-\frac{1}{4} \sin 2\omega \cos \frac{1}{2} \gamma^4 - \frac{1}{4} \cos 2\omega \sin \gamma \cos \frac{1}{2} \gamma^2 \cos \Omega + \frac{1}{2} \sin 2\omega \sin \gamma^2 \cos 2\Omega \\ &\quad + \frac{1}{4} \cos 2\omega \sin \gamma \sin \frac{1}{2} \gamma^2 \cos 3\Omega - \frac{1}{4} \sin 2\omega \sin \frac{1}{2} \gamma^4 \cos 4\Omega] \\ \sin \delta \cos \delta \cos \alpha &= -\frac{1}{4} \cos \omega \sin 2\gamma \sin \Omega + \frac{1}{4} \sin \omega \sin \gamma^2 \sin 2\Omega \\ &+ \sin 2v [\frac{1}{4} \sin \omega \cos \frac{1}{2} \gamma^4 + \frac{1}{4} \cos \omega \sin \gamma \cos \frac{1}{2} \gamma^2 \cos \Omega + \frac{1}{4} \cos \omega \sin \frac{1}{2} \gamma^2 \sin \gamma \cos 3\Omega - \frac{1}{4} \sin \omega \sin \frac{1}{2} \gamma^4 \cos 4\Omega] \\ &+ \cos 2v [-\frac{1}{4} \cos \omega \sin \gamma \cos \frac{1}{2} \gamma^2 \sin \Omega - \frac{1}{4} \cos \omega \sin \gamma \sin \frac{1}{2} \gamma^2 \sin 3\Omega + \frac{1}{4} \sin \omega \sin \frac{1}{2} \gamma^4 \sin 4\Omega] \end{aligned}$$

Has aequationes accuratius intuentem non fugiet, solo graviore terminos esse a LAPLACIO allatos. Sed ratiocinatio, recentissimis elementorum determinationibus superstructa, suppeditat numeros aliquantulum diversos.

Si $M, L, e \dots$ referimus ad solem atque $M', L', e' \dots$ ad lunam ponimusque

$$= \frac{M}{\sin \omega} \left\{ \frac{1}{4} \frac{\sin 2\gamma \cos 2\omega}{f'(1-e'e')^{\frac{3}{2}}} \sin \Omega - \frac{1}{16} \frac{\sin \gamma^2 \sin 2\omega}{f'(1-e'e')^{\frac{3}{2}}} \sin 2\Omega - \frac{1}{8m} \frac{\cos \frac{1}{2} \gamma^4 \sin 2\omega}{(1-e'e')^{\frac{3}{2}}} \sin 2v - \frac{\sin 2\omega}{8m(1-e'e')^{\frac{3}{2}}} \sin 2v \right\}$$

Nutationem obliquitatis ecliptices*)

$$= M \left\{ \frac{-1 \sin 2\gamma \cos \omega}{4f'(1-e'e')^{\frac{3}{2}}} \cos \Omega + \frac{1 \sin \gamma^2 \sin \omega}{8f'(1-e'e')^{\frac{3}{2}}} \cos 2\Omega + \frac{1 \cos \frac{1}{2} \gamma^4 \sin \omega}{4m'(1-e'e')^{\frac{3}{2}}} \cos 2v + \frac{\sin \omega}{4m(1-e'e')^{\frac{3}{2}}} \cos 2v \right\}$$

Si ponimus

$$\begin{aligned} l &= 50^\circ 32' 32'' \text{ (Sect. XI); } \omega = 23^\circ 27' 54'' \cdot 8 \text{ (pro a. 1800)} \\ \gamma &= 0; \quad \gamma' = 5^\circ 8' 44'' \\ e &= 0,01685318; \quad e' = 0,0548553 \end{aligned}$$

$$= [-18',0377 \sin \Omega + 0',21720 \sin 2\Omega - 0',21633 \sin 2\Omega] (1+i) - [1'',13640 - 2'',86868 i] \sin 2\Omega$$

Nutationem obliquitatis ecliptices**)

$$= [+9'',6480 \cos \Omega - 0'',09428 \cos 2\Omega + 0'',09391 \cos 2\Omega] (1+i) + [0'',49330 - 1'',24527 i] \cos 2\Omega$$

Massam lunae

$$L' = \frac{1+i}{69,2376 - 178,2918 \cdot i}$$

sive si massa lunae pro cognita habetur

$$i = \frac{69,2376 L' - 1}{178,2918 L' + 1}$$

Differentia harum formularum a LAPLACIANIS gignere potest differentiam 0',5 temporis in adscensione recta stellae polaris, vel si esset $i = 0$.

$$\sin \omega \cdot \frac{d\psi}{dt} = \frac{Lr_r}{nC} S dm \cdot R \left\{ \sin \delta \cos \delta \sin (\varphi + a) - \cos \delta \sin \delta \sin \alpha \right\} \left\{ \frac{1}{j} - \frac{1}{r_r^2} \right\}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{-Lr_r}{nC} S dm \cdot R \left\{ \sin \delta \cos \delta \cos (\varphi + a) - \cos \delta \sin \delta \cos \alpha \right\} \left\{ \frac{1}{j} - \frac{1}{r_r^2} \right\}$$

Si pro $\frac{1}{j} - \frac{1}{r_r^2}$ ponimus secundum terminum: $\frac{3H^2}{2r_r^4} [5 (\cos \delta \cos \delta \cos (\alpha - a - \varphi) + \sin \delta \sin \delta)^2 - 1]$

$$\lambda = \frac{M'}{M} = \frac{L'(1+L)}{(1+L')L} \frac{m'm'}{mm}$$

obtinemus:

Præcessionem æquinoctiorum annuam

$$l = \frac{365,25 k \cdot \cos \omega}{2(1-e'e')^{\frac{3}{2}}} M \left\{ 1 + \lambda \left(\frac{1-e'e'}{1-e'e'} \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \gamma^2 \right) \right\},$$

Nutationem longitudinis**)

atque terminum primum nutationis obliquitatis ecliptices = 9'',6480 (1+i), invenimus

$$\lambda = \frac{2,54157 (1+i)}{1 - 2,52418 \cdot i}$$

Nutationem longitudinis**)

Praeterea termini ab altioribus quantitatibus $\frac{1}{r_r}$ dignitatibus pendentes propria digni sunt inquisitione. Quosdam particulae terrestres adscensionem rectam e centro terrestri visam ponimus = $\varphi + a$, declinationem = δ , $\sin \delta = \mu$, tenemus

$x' = R \cos \delta \cos \alpha$; $y' = R \cos \delta \sin \alpha$; $z' = R \sin \delta$
atque quotientes differentiales ad ψ et ω pertinentes, in has transeunt formulas:

*) [Verbessert nach BESSEL'S Angaben Astr. Nachr. 2. p. 159 169 d. a. Verz.]

***) [Verbessert nach BESSEL'S Angaben Astr. Nachr. 4. p. 183 (197 d. a. Verz.)]

$$\text{atque} \quad dm = \rho R^2 dR \cdot d\mu \quad da$$

ubi ρ denotat densitatem particulae dm ; habemus post integrationem ab $a = 0$ usque ad $a = 2\pi$ sumptam

$$\sin \omega \cdot \frac{d\psi}{dt} = \frac{3L}{2r^4} \left(\frac{C-A}{Cn} \right) K [5 \sin^2 \delta^2 - 1] \cos \delta \sin \alpha$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{-3L}{2r^4} \left(\frac{C-A}{Cn} \right) K [5 \sin^2 \delta^2 - 1] \cos \delta \cos \alpha$$

$$\sin \omega d\psi = \frac{1}{2} MK \sin p \cdot \frac{d\nu}{m} \cdot \frac{[1 + e \cos(\nu - \Gamma)]^3}{(1 - ee)^{\frac{3}{2}}} [5 \sin^2 \delta^2 - 1] \cos \delta \sin \alpha$$

$$d\omega = -\frac{1}{2} MK \sin p \cdot \frac{d\nu}{m} \cdot \frac{[1 + e \cos(\nu - \Gamma)]^3}{(1 - ee)^{\frac{3}{2}}} [5 \sin^2 \delta^2 - 1] \cos \delta \cos \alpha$$

ubi p denotat parallaxin mediam horizontalem. Iis tantum terminis servatis, qui multiplicati sunt per Sinus Cosinusve angulorum tarde crescentium, invenitur:

$$[1 + e \cos(\nu - \Gamma)]^3 [5 \sin^2 \delta^2 - 1] \cos \delta \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \gamma \cos 2\omega \cos \Omega + e \left[\frac{1}{2} \sin \omega^2 - 1 \right] \cos \omega \sin \Gamma$$

$$- \frac{1}{2} e \sin \gamma^2 \cos \omega \sin \omega^2 \sin(2\Omega + \Gamma)$$

$$[1 + e \cos(\nu - \Gamma)]^3 [5 \sin^2 \delta^2 - 1] \cos \delta \cos \alpha = -\frac{1}{2} \sin \gamma \cos \omega \sin \Omega + e \left[\frac{1}{2} \sin \omega^2 - 1 \right] \cos \Gamma$$

$$- \frac{1}{2} e \sin \gamma^2 \sin \omega^2 \cos(2\Omega + \Gamma)$$

Pro sole haec nutationis pars insensibilis est, sed pro luna obtinebis

Nutationem longitudinis

$$= \frac{M \Delta K \sin p'}{\sin \omega (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{5 \sin \gamma' \cos 2\omega}{4f'} \sin \Omega - \left(\frac{1}{2} \sin \omega^2 - 1 \right) \frac{e' \cos \omega}{2f'} \cos \Gamma + \frac{1}{2} e' \sin \gamma'^2 \cdot \frac{\cos \omega \sin \omega^2}{2f' + f''} \cos(2\Omega + \Gamma') \right\}$$

Nutationem obliquitatis ecliptices

$$= \frac{M \Delta K \sin p'}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{-5 \sin \gamma' \cos \omega}{4f'} \cos \Omega - \left(\frac{1}{2} \sin \omega^2 - 1 \right) \frac{e'}{2f'} \sin \Gamma + \frac{1}{2} e' \sin \gamma'^2 \cdot \frac{\sin \omega^2}{2f' + f''} \sin(2\Omega + \Gamma') \right\}$$

sive valores numerales

$$\text{prioris} = [-0,75079 \sin \Omega + 0,04779 \cos \Gamma + 0,00292 \cos(2\Omega + \Gamma')] (1 + i) K$$

$$\text{posterioris} = [+0,740158 \cos \Omega + 0,04103 \sin \Gamma + 0,00127 \sin(2\Omega + \Gamma')] (1 + i) K$$

Coefficiens K evanesceret si ambo hemisphaeria telluris paria essent. Hunc coefficientem numeris definire nonnihil difficultatis habet; verum insequenti disquisitione persuasum nobis esse potest, eum non satis magnum esse, ut ad terminorum nutationis quos modo dedimus valorem per eum multiplicatum, respici debeat.

Terram contemplati sumus ut sphaeroidem rotatione genitam; quam hypothesin non solum de superficie, sed etiam de stratis diversae densitatis posuimus. Haec strata in plano aequatoris circulos concentricos exsecabunt, quorum radium per a designamus. Densitas stratorum nihil erit nisi functio hujus a ; superficies eorum habebunt hos radios:

$$R = a [1 + \alpha A^0 u^0 + \alpha A^1 u^1 + \alpha A^2 u^2 + \dots]$$

$$2(C-A)K = f(3\mu - 5\mu^3) R^3 dm' = \frac{2\pi}{6} \int \rho \cdot dR^3 \cdot d\mu (3\mu - 5\mu^3)$$

in qua aequatione, si pro R seriem modo allatam substituimus atque primum a $\mu = -1$ usque ad $\mu = +1$ integramus, solus coefficientis A'' in calculo remanet, ceteri omnes evanescent (III. 12). Ita obtineamus

$$(C-A)K = -\frac{8\pi\alpha}{35} \int \rho \cdot d(a^4 A''')$$

ubi integrale a centro terrae usque ad ejus superficiem, sive ab $a = 0$ usque ad $a = 1$ sumi debet.

ubi brevitatis causa positum est

$$2(C-A)K = S(3\mu - 5\mu^3) R^3 \cdot dm'$$

dm' significante massam annuli cujus radius = $R \cos \theta$, latitudo $R d\theta$, altitudo dR , densitas ρ : sive

$$dm' = 2\pi \rho R^2 dR \cdot d\mu.$$

Aequationes hae mutantur in has:

$$u^0 = 1$$

$$u^1 = \mu$$

$$u^2 = \mu^2 - \frac{1}{3}$$

$$u^3 = \mu^3 - \frac{3}{5}\mu$$

$$u^4 = \mu^4 - \frac{6}{5}\mu^2 + \frac{3}{35}$$

$$u^5 = \mu^5 - \frac{10}{7}\mu^3 + \frac{5}{21}\mu$$

etc. etc.

Supra inveneramus

Periculum nunc faciamus inveniendi valoris numeralis quem K habet. Notum est LAPLACIUM (III. 33) formulam generalem dedisse longitudinem penduli in superficie terrae, quae formula, nostris signis substitutis, in sequentem transit, in qua longitudo penduli in aequatore = 1 sumpta est:

$$l = 1 + \alpha \left(\frac{1}{2} \varphi - h \right) \mu^2 + 2\alpha u'' A'' + 3\alpha u''' A''' + \text{etc.}$$

Si ex observatis penduli longitudinibus A'' erui posset, valor quem K haberet, ita numeris exprimi posset ut nihil deficeret. Verum si has observationes cum formula modo allata comparamus, observabimus, hanc seriẽm ita cito convergere ut terminus $2\alpha A'' u''$ vix ullius momenti sit, ceteri vero prorsus evanescentes haberi possint. Ponimus itaque

$$l = 1 + P\mu^2 + P'u''$$

ubi $2\alpha A'' = P'$ est.

Si P' notum est K statim inveniri potest. Propter aequilibrium superficiei terrae habetur (III. 29):

$$f\varphi \cdot d(\alpha^6 A'') = \frac{1}{3} A'' f\varphi \cdot da^3$$

unde obtinemus

$$(C-A)K = -\frac{8\pi\alpha}{15} A'' f\varphi \cdot da^3 = -\frac{4\pi}{15} P' f\varphi \cdot da^3.$$

Sed ex elementis supra allatis est

$$\frac{C-A}{C} = 0,002924501 - 0,00738198 \cdot i$$

atque secundum Mechanicam coelestem (V. 2)

$$C = \frac{8\pi}{15} f\varphi \cdot da^3 + \frac{1}{3} (C-A)$$

unde sequitur

$$K = -\frac{1}{2} \frac{f\varphi \cdot da^3 \cdot 0,9980503 + 0,00492132 \cdot i}{f\varphi \cdot da^3 \cdot 0,002924501 - 0,00738198 \cdot i} P'$$

Quodsi malueris, potes quoque ex III. 2,

$$C-A = \frac{2}{3} \alpha \pi (h - \frac{1}{2} \varphi) f\varphi \cdot da^3$$

ponere, unde

$$K = -\frac{1}{15} \frac{P'}{2\alpha\varphi - P} = \frac{3P'}{10P - 0,0692}$$

fit, quoniam $\alpha h = \frac{2}{3} \alpha \varphi - P$ est.

Ad P et P' definienda inquisivi in eas 15 observationes longitudinum penduli, quas LAPLACIUS in Mech. Coel. III. 42 affert; praeterea eas 16 quoque quas nautis Hispanis debemus, qui MALASPINA duce circum terram navigarunt. Posteriores has MATHIEU accepit

$$- \left[\frac{20; 255}{2 \cos \delta} \right] \left[(1 + \cos \omega^2) \sin 2\alpha \cos 2\odot - 2 \cos \omega \cos 2\alpha \sin 2\odot \right]$$

quae pro stella polari fit $0^{\circ} 0497$ temporis ideoque negligi potest. Minoris etiam putandus iste est error, qui in calculos irrepere videtur, quum aberrationem

fere, quae in Conn. des tems 1816 invenitur. Priores observationes praebuerunt

$$l = 1 + 0,0054800 \mu^2 + 0,0001155 (\mu^2 - \frac{1}{2} \mu)$$

posteriores vero

$$l = 1 + 0,0053929 \mu^2 + 0,0009149 (\mu^2 - \frac{1}{2} \mu)$$

Posterior determinatio praeferrri meretur priori ad P' quod attinet, quoniam observationes quibus nititur, in omnibus terrae zonis a $-51^{\circ} 21'$ latitudinis australis usque ad $59^{\circ} 34'$ latitudinis borealis institutae sunt. Ceterum error verisimilis in P' definiendo, ad errorem verisimilem unius observationis se habet ut 3,062:1 et ut 2,041:1; hunc vero unius observationis errorem verisimilem invenio = 0,0000924 et = 0,0001940; quam in numeris differentiam fortuitam habeo, quoniam Hispanorum observationes ceteris non deteriores fuisse videntur. Neglecta itaque hac differentia, invenimus:

$$P = 0,0054448; P' = 0,0006689$$

et ex secunda formula

$$K = -0,13603$$

Si hunc valorem hujus K in formulis mutationis supra allatis substituimus, ii termini quorum argumenta l' et $2\Omega + l'$ sunt, vix animadverti poterunt, ii vero qui a longitudine nodi pendent quique observationibus subtiliter et per longam haud interruptam temporis seriẽm institutis, aliqujus momenti fieri possent, prorsus cum termino primario nutationis se conjungunt, ut eam solam vim exerere possint, ut massam lunae in nutatione perparum differentem ab ea representent, qualis revera est.

Cum $\alpha A'' = \frac{1}{2} P'$ sit, pro radio terrae, si loco P et P' valores inventos substituimus, hanc formulam habebimus:

$$l = 1 - 0,0032052 \mu^2 + 0,0003345 (\mu^2 - \frac{1}{2} \mu)$$

unde sequitur, centrum gravitatis terrae remotius esse a polo boreali quam a polo australi. Sed desideramus adhuc hujus rei comprobationem, quae aut dimensionibus graduum aut theoria lunae obtineri poterit, atque ut verisimile est posteriore ratione prius obtinebitur.

Transimus nunc illuc ut exploremus, quatenus in stellis utriusque polo propinquis ad aberrationem computandam adhibere fas sit vulgatarum formularum, quae nonnisi primam aberrationis dignitatem intuetur, quare si etiam secundam adjungimus dignitatem, correctio ad adscensionem rectam addenda haec est:

computamus adhibitis mediis stellae locis, neque ut fieri debuit nutationis caussa correctis.

Neque minus inquiri meretur in illum errorem

qui inde oritur, quod in computanda aberratione, sola ratio habetur terrae motus ad solem relati, sed non motus absoluti, sive motus ipsius centri solaris qui simul cum illo motu relativo respiciendus erat. Haec quidem inquisitio haud difficilis est a nota lege initium deudentibus, qua e motu, qui circum solem per sectionem conicam fit, nasci praecipitur aberrationem, quae praeter terminos constantes omni ex parte vulgatam habeat formam: sed ejus argumentum non est vera solis longitudo sed e corpore moto visa; ejusdemque aberrationis absoluta magnitudo est $= \frac{20',252}{\sqrt{a(1-ee)}}$, ubi a denotat dimidiatum magnum axem orbitae corporis moti, e ejusdem excentricitatem. Solis igitur centrum circum quiescens systematis solaris punctum efficit ellipses, planetarum ellipsis similes sed ratione massarum minores. Hinc natae aberrationi igitur, si m denotat planetae massam, haec est constans:

$$\frac{m \cdot 20',252}{\sqrt{a(1-ee)}}$$

pro Jove ipso = 0,008 et ob eam causam vel in subtilissimis observationibus pro nihilo habenda. Idem cadit in aberrationem a perturbationibus periodicis partam.

Commemoratio alia denique res videtur digna, quae ad apparentes stellarum locos vim habere possit. Quodsi enim terra non vere circum liberorum axium

gyrationis unum volutaretur, sed circum alium in corpore terrestri mobilem: existeret inde stellarum locorum mutatio eaque inprimis in adscensionibus rectis stellarum polo proximarum gravis, etiamsi unam tantum Minutam secundam aequaret angulus, quem rotationis axis ab initio efficeret cum axi gyrationis libero. Sed hanc mutationem in adscensionibus rectis haud facile observemus: nam periodus ejus prorsus fere congruit cum uno die siderali, ita ut illa in binis deinceps sequentibus culminationibus eadem fere nobis appareat, sed signis contrariis. Praestabit fortasse adhibere meridiani directionem — quae potissimum e culminationibus stellarum circumpolarium deinceps sequentibus cognoscitur — eamque comparare cum meridiani signo ad solvendam hanc quaestionem: num terra circum alium axem a polari diversum volutetur. Undecim circiter menses faciunt periodam mutationis meridiani, ejusque ex observationibus petita determinatio doceret, utrum terra, ad formam massaeque distributionem quod attinet, sphaeroidis sit rotatione genita, necne. Quum autem ejusmodi rotationem circum axin a polari diversum fieri, neque ex observationibus neque e theoria probabile sit, quandoquidem terra non tota est solida; supervacaneum putavi hic apponere, quae dederit fusior hujus rei explicatio: phaenomenorum quidem inde exentium rationes afferantur in libro I Mechanicae coelestis.

40. Formeln zur genauen Berechnung der Nutation und Aberration.*)

(Zeitschrift für Astronomie VI. p. 216.)

Der Zweck dieses kleinen Aufsatzes ist die Angabe einiger Verbesserungen unserer gebräuchlichen Formeln für Nutation und Aberration. Theils entstehen sie aus Herrn VON LINDENAU'S neuer Bestimmung der halben grossen Axe der Nutationsellipse und der strengern Entwicklung der Theorie der Nutation, die ich in den Fundam. Astron. pro Anno 1755 gegeben habe; theils aus den bisher vernachlässigten Gliedern der zweiten Ordnung; endlich aus einem Fehler in der täglichen Aberration, die nach CAMERER'S, in mehrere spätere Werke ungeändert übergegangenen Formeln, mit dem verkehrten Zeichen in Rechnung gebracht wurde.

Die erste Verbesserung ist nothwendig, indem

sie die wahrscheinlichen Fehler vieler Beobachtungen weit überschreitet. Die ihr zum Grunde liegende Bestimmung hat eine so grosse Sicherheit, dass vor der Beendigung eines neuen Kreisumlaufs keine bedeutende Vermehrung dieser Sicherheit zu erwarten ist; sie hat vor früheren Versuchen den Vorzug, dass sie auf einer Untersuchung derjenigen Erscheinung beruht, die nicht nur zur Bestimmung der Nutation am vortheilhaftesten ist, sondern die auch die meisten und am anhaltendsten fortgesetzten Beobachtungen darbietet. Diese Bestimmung, deren ins Einzelne gehende Kenntniss wir noch entbehren, scheint eine von den wenigen für jetzt ganz abgeschlossenen und festgesetzten zu sein: es würde sehr unrecht sein, wenn man ihr nicht allgemein den Vorzug einräumen wollte.

Die andere Verbesserung ist weniger wesentlich,

37*

*) [128 d. a. Verz. — Vgl. die vorangehende Abhandlung 39, sowie die folgenden 43 und 44. Br. m. O. II. 37—40, 43 (0).]

indem sie so gering ist, dass sie bei dem jetzigen Zustande der practischen Astronomie wohl vernachlässigt werden könnte. Doch betragen die Glieder der zweiten Ordnung und einige bisher vernachlässigte der ersten für die AR. α Urs. minor. im Maxim. 0",54 in Zeit und für die Declin. 0",14; es scheint daher, als könne es oft den Astronomen angenehm sein, die Reductionen nach schärferen Formeln als die bisherigen zu machen, und die unvermeidlichen Fehler der Beobachtungen nicht durch vermeidliche der Rechnung zu vergrössern; wenigstens berechtigt der Gebrauch, selbst Hundert-

theile von Secunden in den Rechnungen aufzunehmen, zu der näheren Untersuchung der Veränderungen, die sich noch in Zehnthellen äussern.

Nutation.

Setzt man in der Theorie der Nutation Fundam Astr. p. Ao. 1755 [Abh. 39. p. 288] nach den von Lindenauschen Untersuchungen

$$i = -0,069541,$$

so hat man die Nutation der Länge und Schiefe der Ekliptik: *

$$\left. \begin{aligned} \Delta L &= -16''78332 \sin \Omega + 0''20209 \sin 2\Omega - 1''33589 \sin 2\odot - 0''20128 \sin 2\zeta \\ \Delta \omega &= + 8''97707 \cos \Omega - 0''08773 \cos 2\Omega + 0''57990 \cos 2\odot + 0''08738 \cos 2\zeta \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

Die Bestimmung des Einflusses dieser Veränderungen auf Rectascension und Declination α und δ beruht auf den Gleichungen (Fund. Astr. p. 287)

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos \alpha &= \cos B \cos L \\ \cos \delta \sin \alpha &= \cos B \sin L \cos \omega - \sin B \sin \omega \\ \sin \delta &= \cos B \sin L \sin \omega + \sin B \cos \omega \\ \cos \delta' \cos \alpha' &= \cos B \cos(L + \Delta L) \\ \cos \delta' \sin \alpha' &= \cos B \sin(L + \Delta L) \cos(\omega + \Delta \omega) \\ &\quad - \sin B \sin(\omega + \Delta \omega) \\ \sin \delta' &= \cos B \sin(L + \Delta L) \sin(\omega + \Delta \omega) \\ &\quad + \sin B \cos(\omega + \Delta \omega) \end{aligned}$$

Die Elimination von L und B aus diesen Gleichungen gibt eine vollständige und genaue Auflösung der Aufgabe; man kann diese daher am leichtesten durch dieselbe elegante Methode erhalten, die BOHNENBERGER für die Berechnung der Präcession gegeben hat. Da

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -15''39557 \sin \Omega - (8''97707 \cos \Omega \cos \alpha + 6''68299 \sin \Omega \sin \alpha) \operatorname{tg} \delta \\ &\quad + 0''14763 \sin 2\Omega + (0''06408 \sin 2\Omega \sin \alpha + 0''08768 \cos 2\Omega \cos \alpha) \operatorname{tg} \delta \\ &\quad - 1''22546 \sin 2\odot - (0''57992 \cos 2\odot \cos \alpha + 0''53196 \sin 2\odot \sin \alpha) \operatorname{tg} \delta \\ &\quad - 0''18463 \sin 2\zeta - (0''08737 \cos 2\zeta \cos \alpha + 0''08015 \sin 2\zeta \sin \alpha) \operatorname{tg} \delta \\ \delta' - \delta &= + 8''97707 \cos \Omega \sin \alpha - 6''68299 \sin \Omega \cos \alpha + 0''06408 \sin 2\Omega \cos \alpha - 0''08768 \cos 2\Omega \sin \alpha \\ &\quad + 0''57992 \cos 2\odot \sin \alpha - 0''53196 \sin 2\odot \cos \alpha + 0''08737 \cos 2\zeta \sin \alpha - 0''08015 \sin 2\zeta \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

In allgemeinen Nutationsstafeln, nach Art der Fund. Astr. p. 84 etc. gegebenen, kann das von 2Ω abhängige Glied aufgenommen werden, ohne dass es ihren Gebrauch erschwert.

Wenn man den grösseren Theil der Nutation, den von der einfachen Länge des Mondsknotens abhängigen allein berücksichtigt (woraus kein merklicher Fehler entstehen kann), und der Kürze wegen setzt:

$$\Delta \omega = 8''97707 \cos \Omega = a \cos \Omega$$

$$\Delta L \sin \omega = -6''68247 \sin \Omega = -b \sin \Omega$$

so findet man die Glieder der zweiten Ordnung:

man indessen in allen vorkommenden Fällen wohl mit den Gliedern der beiden ersten Ordnungen ausreichen wird, so darf man nur diese nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickeln, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= (\cos \omega + \sin \omega \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \Delta L - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta \Delta \omega \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha + \cot \omega \cos \alpha \operatorname{tg} \delta + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \delta^2 \right) \frac{1}{2} \Delta L^2 \sin \alpha^2 \\ &\quad - (\cos \alpha^2 - \cot \omega \sin \alpha \operatorname{tg} \delta + \cos 2\alpha \operatorname{tg} \delta^2) \Delta L \Delta \omega \sin \alpha \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \delta^2 \right) \frac{1}{2} \Delta \omega^2 \\ \delta' - \delta &= \sin \omega \cos \alpha \Delta L + \sin \alpha \Delta \omega \\ &\quad - \sin \alpha (\cot \omega + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \frac{1}{2} \Delta L^2 \sin \omega^2 \\ &\quad + \cos \alpha (\cot \omega + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \Delta L \Delta \omega \sin \omega \\ &\quad - \cos \alpha^2 \operatorname{tg} \delta \frac{1}{2} \Delta \omega^2. \end{aligned}$$

Nach der Substitution der Werthe von ΔL und $\Delta \omega$ aus (1) ergeben sich die Glieder der ersten Ordnung: **)

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \left\{ -\frac{a^2 + b^2}{4} \sin 2\alpha \operatorname{tg} \delta - \frac{b^2}{4} \cot \omega \cos \alpha \right\} \operatorname{tg} \delta \cos 2\Omega \\ &\quad + \left\{ \frac{ab}{2} \cos 2\alpha \operatorname{tg} \delta - \frac{ab}{2} \cot \omega \sin \alpha \right\} \operatorname{tg} \delta \sin 2\Omega \\ \delta' - \delta &= -\frac{1}{4} [(a^2 \cos \alpha^2 - b^2 \sin \alpha^2) \operatorname{tg} \delta^2 - b^2 \cot \omega \sin \alpha] \cos 2\Omega \\ &\quad - \frac{1}{4} (ab \sin 2\alpha \operatorname{tg} \delta + 2ab \cot \omega \cos \alpha) \sin 2\Omega \end{aligned} \right\}$$

oder in Zahlen:

*) [Verbessert nach BESSEL's Angaben Astr. Nachr. 2. p. 161 und 4. p. 185.]

***) [Verbessert nach Astr. Nachr. 2. p. 161 und 4. p. 185.]

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= (-0,00015180 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \delta - 0,00012469 \cos \alpha) \operatorname{tg} \delta \cos 2\Omega \\ &\quad + (+0,00014542 \cos 2\alpha \operatorname{tg} \delta - 0,00033502 \sin \alpha) \operatorname{tg} \delta \sin 2\Omega \\ \delta' - \delta &= [-(0,00002177 + 0,00007590 \cos 2\alpha) \operatorname{tg} \delta - 0,00012469 \sin \alpha] \cos 2\Omega \\ &\quad + (-0,00007271 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \delta - 0,00033502 \cos \alpha) \sin 2\Omega \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Aberration.

Die naturgemässeste und klarste Ansicht der Aberration hat GAUSS, *Theoria motus Corp. Coel.* pag. 68, gegeben, wo er sie als herrührend von der Bewegung des Fernrohrs in dem sehr kleinen Zeittheilen, welches das Licht gebraucht, um vom Objectivglase zu den Füßen im Brennpunkte zu gelangen, betrachtet. Meines Wissens hat noch Niemand die Entwicklung der Wirkung auf die Oerter der Sterne auf diese einfachste Ansicht der Sache gegründet, weshalb ich die vorhandene Gelegenheit dazu benutze.

Ich bezeichne die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes des Fadennetzes, in Beziehung auf drei auf einander senkrechte, durch den Mittelpunkt der Sonne gelegte, resp. dem Aequator und den Coluren parallele Ebenen, durch x, y, z ; die Coordinaten des Mittelpunktes des Objectivglases durch x', y', z' ; die Entfernung beider Punkte durch l . Dann ist das Fernrohr, unter Voraussetzung der ruhenden Erde, nach einem Punkt der Himmelskugel gerichtet, dessen Rectascension und Declination sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} l \cos \alpha \cos \delta &= x' - x \\ l \sin \alpha \cos \delta &= y' - y \\ l \sin \delta &= z' - z \end{aligned}$$

ergibt.

Die Zeit, die das Licht gebraucht, um von dem Objectivglase zu dem Fadennetze zu gelangen, ist $= lk$, wo k die Zeit bezeichnet, die das Licht gebraucht, um den Raum l zu durchdringen; in diesem Zeittheilchen verändern sich die Coordinaten x, y, z um

$$\frac{dx}{dt} lk; \quad \frac{dy}{dt} lk; \quad \frac{dz}{dt} lk;$$

soll daher der durch α und δ bezeichnete Punkt am Fadennetze erscheinen, so müssen x', y', z' in

$$x' + \frac{dx}{dt} lk; \quad y' + \frac{dy}{dt} lk; \quad z' + \frac{dz}{dt} lk$$

verändert werden, und man hat die Richtung gegen die drei Ebenen, der das Fernrohr nun entspricht, aus den Gleichungen:

$$l \cos \alpha' \cos \delta' = x' - x + \frac{dx}{dt} lk = l \cos \alpha \cos \delta + \frac{dx}{dt} lk$$

$$l \sin \alpha' \cos \delta' = y' - y + \frac{dy}{dt} lk = l \sin \alpha \cos \delta + \frac{dy}{dt} lk$$

$$l \sin \delta' = z' - z + \frac{dz}{dt} lk = l \sin \delta + \frac{dz}{dt} lk$$

wodurch also, wenn man für die Differentialquotienten ihre Werthe substituirt, die Aufgabe in vollkommener Schärfe aufgelöst wird.

Näherungsweise, bis zu den Gliedern von der zweiten Ordnung inclusive, geben diese Gleichungen durch eine leichte Entwicklung:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -k \sec \delta \left\{ \frac{dx}{dt} \sin \alpha - \frac{dy}{dt} \cos \alpha \right\} \\ &\quad + k^2 \sec \delta^2 \left\{ \frac{dx}{dt} \sin \alpha - \frac{dy}{dt} \cos \alpha \right\} \times \\ &\quad \left\{ \frac{dx}{dt} \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \sin \alpha \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta' - \delta &= -k \left\{ \frac{dx}{dt} \sin \delta \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \sin \delta \sin \alpha - \frac{dz}{dt} \cos \delta \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} k^2 \operatorname{tg} \delta \left\{ \frac{dx}{dt} \sin \alpha - \frac{dy}{dt} \cos \alpha \right\}^2 \\ &\quad + k^2 \left\{ \frac{dx}{dt} \sin \delta \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \sin \delta \sin \alpha - \frac{dz}{dt} \cos \delta \right\} \times \\ &\quad \left\{ \frac{dx}{dt} \cos \delta \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \cos \delta \sin \alpha + \frac{dz}{dt} \sin \delta \right\}. \end{aligned}$$

Die Coordinaten selbst haben folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x &= -r \cos \odot + \rho \cos \varphi \cos \mu \\ y &= -r \sin \odot \cos \omega + \rho \cos \varphi \sin \mu \\ z &= -r \sin \odot \sin \omega + \rho \sin \varphi, \end{aligned}$$

wo r und \odot die Entfernung und Länge der Sonne in Beziehung auf den Erdmittelpunkt, ρ, φ, μ den Radius der Erde, seine Neigung gegen den Aequator, und die in Grade verwandelte Sternzeit bedeuten. Wenn man diese Ausdrücke differentiirt, sich dabei an die Kepler'schen Gesetze erinnert, und die mittlere Entfernung der Sonne als Einheit annimmt, so hat man

$$\begin{aligned} k \frac{dx}{dt} &= \frac{kdm}{\sqrt{1-ee \cdot dt}} \left\{ \sin \odot + e \sin P \right\} - k \rho \frac{d\mu}{dt} \cos \varphi \sin \mu \\ k \frac{dy}{dt} &= \frac{-\cos \omega kdm}{\sqrt{1-ee \cdot dt}} \left\{ \cos \odot + e \cos P \right\} + k \rho \frac{d\mu}{dt} \cos \varphi \cos \mu \\ k \frac{dz}{dt} &= \frac{-\sin \omega kdm}{\sqrt{1-ee \cdot dt}} \left\{ \cos \odot + e \cos P \right\}, \end{aligned}$$

wo m die mittlere Länge der Sonne, P die Länge des Perigeums, und e die Excentricität der Erdbahn bedeuten.

Bei der Substitution dieser Differentialquotienten in die vorher entwickelten Formeln kann man ohne merklichen Fehler die von dm und $d\mu$ abhängigen Theile von einander trennen, wodurch man die jährliche

und tägliche Aberration abgesondert erhalten wird. Jene findet sich nach der Weglassung aller nicht periodischen Glieder und derer, die wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt werden können:

$$\alpha' - \alpha = \frac{-kdm}{\sqrt{1-cc.dt}} \sec \delta \left\{ \sin \odot \sin \alpha + \cos \odot \cos \alpha \cos \omega \right\} \\ - \left(\frac{kdm}{\sqrt{1-cc.dt}} \right)^2 \frac{\sec^2 \delta}{4} \left\{ \cos 2\odot \sin 2\alpha (1 + \cos \omega^2) \right. \\ \left. - 2 \cos \omega \sin 2\odot \cos 2\alpha \right\}$$

$$\delta' - \delta = \frac{-kdm}{\sqrt{1-cc.dt}} \left\{ (\sin \odot \cos \alpha - \cos \odot \sin \alpha \cos \omega) \sin \delta \right. \\ \left. + \cos \odot \sin \omega \cos \delta \right\} \\ - \left(\frac{kdm}{\sqrt{1-cc.dt}} \right)^2 \frac{1}{4} \operatorname{tg} \delta \left\{ \cos 2\odot [(1 + \cos \omega^2) \cos 2\alpha - \sin \omega^2] \right. \\ \left. + 2 \sin 2\odot \sin 2\alpha \cos \omega \right\}$$

oder in Zahlen, wenn man nach DELAMBRE'S Untersuchung der Finsternisse des ersten Jupiterstrabanten

$$\frac{kdm}{\sqrt{1-cc.dt}} = 20''.255$$

setzt, die Glieder der ersten Ordnung:

$$\alpha' - \alpha = -20''.255 \sec \delta (\sin \odot \sin \alpha + \cos \odot \cos \alpha \cos \omega) \\ \delta' - \delta = -20''.255 \left\{ (\sin \odot \cos \alpha - \cos \odot \sin \alpha \cos \omega) \sin \delta \right. \\ \left. + \cos \odot \sin \omega \cos \delta \right\} \quad (4)$$

die der zweiten Ordnung:

$$\alpha' - \alpha = \sec \delta^2 \left\{ \begin{array}{l} -0''.00091568 \cos 2\odot \sin 2\alpha \\ + 0''.00091228 \sin 2\odot \cos 2\alpha \end{array} \right\} \\ \delta' - \delta = \operatorname{tg} \delta \left\{ \begin{array}{l} + 0''.00063942 - 0''.00045784 \cos 2\omega \\ - 0''.00045614 \sin 2\omega \end{array} \right\} \quad (5)$$

In diesen Formeln habe ich die Delambre'sche Constante der Aberration ungeändert angenommen. In den Fundam. Astr. habe ich gezeigt, dass BRADLEY'S Beobachtungen des α Urs. min. und einiger anderen Sterne eine grössere Aberration andeuten; allein ich war (daselbst S. 124) der Meinung, dass man mit der Einführung dieser Vergrößerung nicht eilen müsse, theils wegen des geringen, oft durch die Kürze der Periode verminderten Einflusses auf die meisten Bestimmungen, theils wegen der durch neuere Beobachtungen zu erwartenden Prüfung des Resultates. Zwar haben nun die Lindenauschen Untersuchungen der Beobachtungen α Urs. min. mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit gleichfalls eine Vermehrung der Aberration gegeben (vgl. Abh. 38), allein ich halte demungeachtet die allgemeine Einführung dieser Vergrößerung noch nicht für hinlänglich begründet. Die neueren Erfahrungen haben uns gelehrt, wie äusserst schwierig es ist, sich kleiner Theile einer Secunde zu versichern; diese Schwierigkeit erscheint noch grösser, wenn die Periode der zu bestimmenden Quantität mit den Perioden des Sonnenstandes übereinstimmt, worüber directe Erfahrungen vorhanden sind. Ueberdies geben meine eigenen Be-

obachtungen desselben Sterns, die jetzt fast 5 Jahre umfassen, ungewöhnlich zahlreich und mit einem sehr guten Instrumente gemacht sind, die Vermehrung der Aberration nicht zu erkennen. So lange nicht gezeigt wird, inwiefern verschiedene Beobachter auf verschiedenen Sternwarten über diesen Punkt übereinstimmen, müssen wir, wie ich glaube, die Aberration nicht ändern; dazu möchte aber gegenwärtig die Anzahl der Beobachter des erwähnten Sterns noch zu gering sein; wir können desto eher der Zeit die Entscheidung überlassen, da gerade jetzt die Sternkunde durch die Vollendung der Göttinger Sternwarte und anderer neue Unterstützungen erhalten hat.

Produkte der Aberration und Nutation.

Die Aberration sollte eigentlich nicht für den mittleren, sondern für den durch die Nutation bereits veränderten Ort eines Sterns berechnet werden; berechnet man sie für jenen, so ist daher eine Verbesserung nöthig, die man leicht erhält, wenn man die Formeln (4) differentiirt, und dann aus (2)

$$d\alpha = -(\cot \omega + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) b \sin \Omega - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta . a \cos \Omega \\ d\delta = -\cos \alpha . b \sin \Omega + \sin \alpha . a \cos \Omega$$

setzt. Lässt man die immer unmerklich bleibenden Glieder weg, so erhält man die übrigen:

$$\alpha' - \alpha = \frac{\sin \delta}{\cos \delta^2} \frac{20''.255}{2} \left\{ \begin{array}{l} -(b + a \cos \omega) \cos (\odot + \Omega) \sin 2\alpha \\ + (b \cos \omega + a) \sin (\odot + \Omega) \cos 2\alpha \\ + (b - a \cos \omega) \cos (\odot - \Omega) \sin 2\alpha \\ - (b \cos \omega - a) \sin (\odot - \Omega) \cos 2\alpha \end{array} \right\} \\ \delta' - \delta = \frac{\sin \delta^2}{\cos \delta} \frac{20''.255}{4} \left\{ \begin{array}{l} + (b - a \cos \omega) \cos (\odot + \Omega) \sin 2\alpha \\ - (b \cos \omega + a) \sin (\odot + \Omega) \sin 2\alpha \\ - (b + a \cos \omega) \cos (\odot - \Omega) \sin 2\alpha \\ + (b \cos \omega - a) \sin (\odot - \Omega) \cos 2\alpha \\ - (b + a \cos \omega) \cos (\odot + \Omega) \\ + (b - a \cos \omega) \cos (\odot - \Omega) \end{array} \right\}$$

oder in Zahlen:

$$\alpha' - \alpha = \frac{\sin \delta}{\cos \delta^2} \left\{ \begin{array}{l} - 0''.00073242 \cos (\odot + \Omega) \sin 2\alpha \\ + 0''.000741735 \sin (\odot + \Omega) \cos 2\alpha \\ - 0''.00067622 \cos (\odot - \Omega) \sin 2\alpha \\ + 0''.00013979 \sin (\odot - \Omega) \cos 2\alpha \\ - 0''.00003811 \cos (\odot + \Omega) \cos 2\alpha \\ - 0''.00037087 \sin (\odot + \Omega) \sin 2\alpha \\ - 0''.00036621 \cos (\odot - \Omega) \cos 2\alpha \\ + 0''.00006990 \sin (\odot - \Omega) \sin 2\alpha \\ - 0''.00036621 \cos (\odot + \Omega) \\ - 0''.00003811 \cos (\odot - \Omega) \end{array} \right\} \quad (6)$$

Tägliche Aberration.

Diese erhält man, wenn man die von $d\mu$ abhängigen Theile der Differentialquotienten der Coordinaten in den allgemeinen Ausdruck der Aberration setzt. Er wird alsdann sehr einfach, nämlich:

$$\alpha' - \alpha = k \cdot \rho \frac{d\mu}{dt} \cos \varphi \cos(\mu - \alpha) \sec \delta$$

$$\delta' - \delta = k \cdot \rho \frac{d\mu}{dt} \cos \varphi \sin(\mu - \alpha) \sin \delta$$

Da wir nach DELAMBRE

$$\frac{k d\mu}{\sqrt{1 - e \cdot dt}} = 20''255$$

angenommen haben, und

$$\frac{d\mu}{dt} = (T + 1) \frac{d\mu}{dt}$$

ist, wo T die Länge des Sideraljahres in mittleren Tagen ausgedrückt bedeutet, so ist

$$k \cdot \rho \frac{d\mu}{dt} = \rho \sqrt{1 - e} (T + 1) 20''255.$$

Setzt man die mittlere Sonnenparallaxe = $8''7$, oder $\rho = \sin 8''7$, so erhält man die tägliche Aberration:

$$\alpha' - \alpha = 0''31289 \cos \varphi \cos(\mu - \alpha) \sec \delta \quad . . (7)$$

$$\delta' - \delta = 0''31289 \cos \varphi \sin(\mu - \alpha) \sin \delta$$

Obleich diese Aberration oft von den Beobachtungen nicht getrennt zu werden braucht, so würde man sie doch mit Unrecht ganz vernachlässigen. Indem sie für Rectascension in der obern Culmination im positiven, in der untern im negativen Maximo ist, für die Declination in beiden = 0, so trägt man am leichtesten von ihr Rechnung, wenn man sie den Fäden zwischenräumen des Mittagsfernrohrs hinzufügt; also die Beobachtungen nicht auf den mittleren Fäden, sondern auf einen $0''31289 \cos \varphi$ von ihm östlich gelegenen Punkt reducirt. Für das Königsberger Mittagsfernrohr sind z. B. jetzt die Fädenzwischenräume I = + 52;5651 sec δ ; II = 0; III = - 52;0760 sec δ ; $\frac{1}{2}$ $0''31289 \cos \varphi = 0''0121$; also würde man die Beobachtungen von der täglichen Aberration gänzlich befreien, wenn man annähme: I = + 52;5530 sec δ ; II = - 0;0121 sec δ ; III = - 52;0881 sec δ , oder dem Mittel aus den drei Fäden nicht + 0;163 sec δ , sondern + 0;1509 sec δ hinzufügte.

Wenn man die tägliche Aberration ganz vernachlässigt, so erhält man die Entfernung des Mittagsfernrohrs vom Pole, vorausgesetzt, dass man sie aus den

Beobachtungen von α Urs. min. bestimmt, nicht = $15''n$, wie sie wirklich ist, sondern = $15''(n + \mathcal{A}n)$, wo $\mathcal{A}n$ sehr nahe = $-0''02086 \cos \varphi$ ist. Man muss also den gefundenen Verbesserung der Durchgangszeit durch den Meridian, um sie von diesem Fehler zu befreien, für einen Stern, dessen Decl. = δ ist, hinzufügen:

$$+ 0''02086 \cos \varphi \operatorname{tg} \delta,$$

und um diese von der täglichen Aberration zu befreien, muss man

$$- 0''02086 \cos \varphi \sec \delta$$

hinzufügen, wodurch also die Culminationszeit, die man berechnet hat, die Verbesserung

$$+ 0''02086 \cos \varphi (\operatorname{tg} \delta \sec \delta) = - 0''02086 \cos \varphi \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2} \delta)$$

erhält. Für Culminationen unter dem Pole kann man dieselben Formeln gebrauchen, wenn man statt δ $180^\circ - \delta$ schreibt, also ist für diese die anzubringende Verbesserung

$$= + 0''02086 \cos \varphi \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2} \delta),$$

so dass man, wenn man die tägliche Aberration vernachlässigt, die Rectascensionen über dem Pole in Zeit $0''04172 \cos \varphi \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2} \delta)$ grösser beobachtet als unter dem Pole; für Königsberg beträgt dieses im Maximo $0''01247$ in Zeit = $0''181$ im Bogen, was freilich unmerklich ist.

Vollen Einfluss hat aber die tägliche Aberration auf die aus Beobachtungen der Circumpolarsterne mit dem Mittagsfernrohr bestimmte Richtung des Meridians. Berücksichtigt man sie nicht, so erhält man statt des Meridians einen Vertikalkreis, der $0''31289$ gegen Westen (von Süden) abweicht. Die Zenithdistanzen z und Azimuthe a der Sterne werden durch sie um

$$dz = - 0''31289 \cos \varphi \sin a \cos z,$$

$$da = - 0''31289 \cos \varphi \cos a \operatorname{cosec} z$$

geändert; es würde daher überflüssig sein, bei den Zenithdistanzen der dem Pole nahen Sterne von der täglichen Aberration Rechnung zu tragen, indem ihr Einfluss wegen des kleinen $\sin a$ unmerklich ist; bei den Azimutthen müsste sie, wenn man die Genauigkeit sonst bis auf Theile einer Secunde treiben könnte, berücksichtigt werden, zumal da sie hier eine sehr nahe constante Einwirkung äussert.

[Folgen noch die Verbesserungen für den Polarstern, sowie die nach den neuen Werthen von EXCKR abgeänderten GAUSS'schen Nutations- und Aberrations-Tafeln (s. Mon. Corresp. XVII.)]

41. De media Aequinoctiorum Praeessione.*)

(Tabb. Regiomon. Introd. p. III.)

Quum situs circularum maximorum, ad quos loca stellarum referuntur, in sphaera coelesti mutetur, mutantur etiam stellarum loca: motus Aequatoris Adscensionem rectam et Declinationem, motus Ecliptices Longitudinem mutabit et Latitudinem: quoniam vero Adscensio recta non a fixo Aequatoris puncto, neque Longitudo a fixo Ecliptices puncto, sed utraque a vernali Aequinoctiorum puncto numeratur, idque punctum motu utriusque circuli mutatur, inde fit, ut motus Ecliptices ad Adscensionem rectam, motus Aequatoris aliquid momenti habeat ad Longitudinem. Omnes ex hac fonte manantes motus Praeessionis tribuuntur, etsi verbum hoc arctiore sensu principio est usurpatum.

Primum necessarium est, Aequatoris et Ecliptices motus ad fixum maximum sphaerae coelestis circulum definire, quem LAPLACIO duce cum esse volumus, quocum Ecliptica initio anni 1750 coincidebat. Jam per indeterminato tempore $1750 + t$ designabimus Obliquitatem hujus fixae Ecliptices per ω , verae Ecliptices per ω , angulum unius cum altera per π , deinde motum ab anno 1750 numeratum punctorum, in quibus Aequator et fixa Ecliptica se invicem secant, i. e. Praeessionem lunisolarum per ψ , punctorum motum, in quibus Aequator a vera Ecliptica scinditur, i. e. Praeessionem generalem per ψ , Longitudinem Nodi adscendentis verae Ecliptices in fixa, numeratum a vernali anni 1750 Aequinoctiorum puncto per II ; postremo motum Ecliptices in Aequatore per λ . Si poli trium circularum, quos hic consideramus, ubi e polus sit Ecliptices fixae, e' verae, a polus Aequatoris, sphaerico triangulo connectantur, habebimus per introductas significationes:

latera	oppositos angulos
$ac = \omega$	$ac'e = II + \psi$,
$a'e = \omega$,	$e'ea = 180^\circ - II - \psi$
$ec' = \pi$	$ea'e = \lambda$

Septem hae quantitates, quibus et anguli et latera expressa sunt, tribus illis sphaerici trianguli aequationibus conjunguntur, ita ut tres earum per quatuor reliquas determinari possint. Itaque si data acceperimus ω , ω , ψ et ψ , habebimus secundum NEPPERIANAS analogias

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi \sin(II + \frac{1}{2} \psi + \frac{1}{2} \psi) &= \sin \frac{1}{2} (\psi - \psi) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\omega + \omega) \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi \cos(II + \frac{1}{2} \psi + \frac{1}{2} \psi) &= \cos \frac{1}{2} (\psi - \psi) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\omega - \omega) \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda \cos \frac{1}{2} (\omega + \omega) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\psi - \psi) \cos \frac{1}{2} (\omega - \omega) \end{aligned} \right\} (1)$$

His aequationibus inveniuntur π , II et λ .

III. LAPLACE formulas dedit**) quae ad potentias temporis evolutae suppeditant:

$$\begin{aligned} \psi &= t. 50,28760 - tt. 0,0001217945 \\ \psi &= t. 50,09915 + tt. 0,0001221483 \\ \omega &= 23^\circ 28' 18,0 + tt. 0,0000984233 \\ \omega &= 23 28 18,0 - t. 0,52114 \\ &= tt. 0,00000272295 \end{aligned}$$

Has formulas in eo mutavi**), ut ipsas seriori quam BURCKHARDTIO debemus determinationi massae Veneris accommodarem, deinde ut loco primi membri ipsius ψ eum ponere Praeessionis Lunisolaris valorem, quem exhibuerat catalogi Fundamentorum Astronomiae pro 1755 cum catalogo PIAZZIANO completa collatio. Serius autem quam absolutas Adscensiones rectas 36 stellarum fundamentalium bis, pro 1815 et 1825, ex propriis observationibus destinarem, eas conquisivi correctiones, quae Adscensionibus rectis catalogi PIAZZIANI universe admoventiae essent, ut earum cum iis, quae modo laudavi, fieret plana consensio. Ita formulae illae secundam mutationem passae†) in has sequentes abierunt

$$\left. \begin{aligned} \psi &= t. 50,37572 - tt. 0,0001217945 \\ \psi &= t. 50,21129 + tt. 0,0001221483 \\ \omega &= 23^\circ 28' 18,0 + tt. 0,0000984233 \\ \omega &= 23 28 18,0 - t. 0,48368 \\ &= tt. 0,00000272295 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Quae formulae, substitutae in (1) et evolutae ad potentias temporis suppeditant

$$\left. \begin{aligned} II &= 171^\circ 36' 10'' - t. 5,21 \\ \pi &= t. 0,48892 - tt. 0,0000030719 \\ \lambda &= t. 0,17926 - tt. 0,0002660394 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Nunc duo illa problemata, quibus locorum stellarum mutationes, ex Praeessione manantes, definiuntur, solvere licet, nempe

**) *Traité de mécanique céleste*. Vol. III. p. 158.

***) *Fundamenta Astronomiae*. Sect. XI. p. 297 [Abhandlung 37. p. 274].

†) *Astronomische Nachrichten*, Nr. 92. [4. p. 401.]

*) [Auszug aus 248 d. a. Verz. — Vergl. die vorangehende Abhandlung 37.]

Problema I. Data stellae Longitudine l , Latitudine b pro tempore $1750 + t$, invenire Longitudinem l' et Latitudinem b' pro tempore $1750 + t'$.

Sit stellae Longitudo et Latitudo, ad fixam Eclipticam et fixum punctum Aequinoctiale anni 1750 relata, L et B , sphaericum triangulum, quod polos e et e' cum stella connectit, nobis praebit

$$\left. \begin{aligned} \cos b' \cos (l' - \Pi' - \psi') &= \cos B \cos (L - \Pi') \\ \cos b' \sin (l' - \Pi' - \psi') &= \cos B \sin (L - \Pi') \cos \pi' + \sin B \sin \pi' \\ \sin b' &= -\cos B \sin (L - \Pi') \sin \pi' + \sin B \cos \pi' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

quibus formulis inveniuntur b' et l' .

Evitare poteris calculum ipsorum L et B , quum eliminaveris ea ex aequationibus (4) et (5), quod fieri potest ejusdem methodi usu, quae respectu Adscensionum rectarum et Declinationum infra explicabitur. Sed illis hic immorari, supervacaneum habeo, quia propter

$$\begin{aligned} l' &= l + \psi' - \psi + \text{tg } b \{ \pi' \cos (l - \Pi' - \psi) - \pi \cos (l - \Pi - \psi) \} \\ b' &= b - \pi' \sin (l - \Pi' - \psi) + \pi \sin (l - \Pi - \psi) \end{aligned}$$

pro quibus statuere licet

$$\begin{aligned} l' &= l + \psi' - \psi + a \cos \left(l - \frac{\Pi' + \Pi}{2} - \psi, -A \right) \text{tg } b \\ b' &= b - a \sin \left(l - \frac{\Pi' + \Pi}{2} - \psi, -A \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\pi' - \pi) \cos \frac{1}{2} (\Pi' - \Pi) &= (t' - t) \{ 0,48892 - (t' + t) 0,0000030719 \} \\ (\pi' + \pi) \sin \frac{1}{2} (\Pi' - \Pi) &= (t - t') 0,48892 \sin 2',605 \end{aligned}$$

ergo $a = (t' - t) \{ 0,48892 - (t' + t) 0,0000030719 \}$, $A = -(t' + t) 2',605$,

unde habebimus

$$\left. \begin{aligned} l' &= l + (t' - t) \{ 50'',21129 + (t' + t) 0,0001221483 \} \\ &\quad + (t' - t) \{ 0,48892 - (t' + t) 0,0000030719 \} \cos A \text{tg } b \\ b' &= b - (t' - t) \{ 0,48892 - (t' + t) 0,0000030719 \} \sin A \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

ubi A significat

$$l - 171^{\circ} 36' 10'' - t.50'',21 + (t' + t) 5'',21.$$

Quodsi t' tantum infinite parvo intervallo t distare supponitur, hae formulae Longitudinis et Latitudinis quotientes differentiales subministrant, qui, anno pro unitate temporis sumpto, variationes annuae vocantur. Itaque annuae variationes ad tempus $1750 + t$ pertinentes erunt haec:

$$\left. \begin{aligned} \text{Long.} &+ 50'',21129 + t.0,00002442966 \\ &\quad + \{ 0,48892 - t.0,0000061438 \} \cos (l - M) \text{tg } b \\ \text{Lat.} &- \{ 0,48892 - t.0,0000061438 \} \sin (l - M) \end{aligned} \right\} (7)$$

ubi $M = 171^{\circ} 36' 10'' + t.39'',79$.

$$\left. \begin{aligned} \cos B \cos (L - \Pi) &= \cos b \cos (l - \Pi - \psi) \\ \cos B \sin (L - \Pi) &= \cos b \sin (l - \Pi - \psi) \cos \pi - \sin b \sin \pi \\ \sin B &= \cos b \sin (l - \Pi - \psi) \sin \pi + \sin b \cos \pi \end{aligned} \right\} (4)$$

Harum formularum ope inveniuntur L et B , quae constantes habent valores, modo sit stella vera immobilis. Si valores ipsorum Π, π, ψ , pro tempore $1750 + t'$ significantur per Π', π', ψ' , sequitur ex eodem triangulo:

tardiorum Ecliptices motum, quadrata illorum π et π' poterunt negligi, etiam tum, quum t aut t' plura saecula amplecterentur. Qua de re approximatio hoc nixa sufficit in omnibus casibus, qui possunt revera occurrere. Neglectis igitur $\pi \pi$ et $\pi' \pi'$, ex aequationibus (4) et (5) habebimus

$$\begin{aligned} \text{positis} \\ a \cos A &= (\pi' - \pi) \cos \frac{1}{2} (\Pi' - \Pi) \\ a \sin A &= (\pi' + \pi) \sin \frac{1}{2} (\Pi' - \Pi). \end{aligned}$$

Ex formulis (3) sequitur, verum esse usque ad quadrata temporis incl.

Problema II. Data stellae Adscensione recta α et Declinatione δ pro tempore $1750 + t$, invenire Adscensionem rectam α' et Declinationem δ' pro tempore $1750 + t'$.

Si Longitudo et Latitudo, relata ad fixam Eclipticam et fixum punctum Aequinoctiale, eodem modo ut in priore problemate significabitur, triangulum, quod polos a et e cum stella conjungit, pro tempore $1750 + t$ suppedabit:

$$\left. \begin{aligned} \cos B \cos (L + \psi) &= \cos \delta \cos (\alpha + \lambda) \\ \cos B \sin (L + \psi) &= \cos \delta \sin (\alpha + \lambda) \cos \omega + \sin \delta \sin \omega \\ \sin B &= -\cos \delta \sin (\alpha + \lambda) \sin \omega + \sin \delta \cos \omega \end{aligned} \right\} (8)$$

Bessel's Abhandlungen. 1. Bd.

eodem modo, si valores ipsorum λ, ω, ψ , ad tempus $1750 + t'$ pertinentes, designantur per λ', ω', ψ'

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta' \cos(\alpha' + \lambda') &= \cos B \cos(L + \psi') \\ \cos \delta' \sin(\alpha' + \lambda') &= \cos B \sin(L + \psi') \cos \omega' - \sin B \sin \omega' \\ \sin \delta' &= \cos B \sin(L + \psi') \sin \omega' + \sin B \cos \omega' \end{aligned} \right\} (9)$$

Quodsi non lubet sciscitari neque Longitudinem nec Latitudinem, quae ad fixam Eclipticam pertinent, verum tantum ipsa α' et δ' , ad rem aptum erit, ex his

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta' \sin(\alpha' + \lambda' - z') &= \cos \delta \sin(\alpha + \lambda + z) \\ \cos \delta' \cos(\alpha' + \lambda' - z') &= \cos \delta \cos(\alpha + \lambda + z) \cos \vartheta - \sin \delta \sin \vartheta \\ \sin \delta' &= \cos \delta \cos(\alpha + \lambda + z) \sin \vartheta + \sin \delta \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Quibus formulis immediate inveniuntur α' et δ' , nec opus erit calculo ipsorum L et B . Quantitates vero z, z', ϑ , quae in illis formulis occurrant, facillimo calculo inveniuntur secundum NEPPERIANAS analogias

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(z' + z) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(\omega' + \omega)}{\cos \frac{1}{2}(\omega' - \omega)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\psi' - \psi) \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(z' - z) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega)}{\sin \frac{1}{2}(\omega' + \omega)} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\psi' - \psi) \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta &= \frac{\sin \frac{1}{2}(z' + z)}{\cos \frac{1}{2}(z' - z)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\omega' + \omega) \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

In locum secundae formulae licet hanc substituere, quae per plura saecula modice tantum ab ea discrepat:
 $\frac{1}{2}(z' - z) = (t' + t) 0''.1011804 + (t' + t)^2 \cdot 0''.0000002446$
 in prima vero et in tertia denominatorem cum unitate commutare.

Ad calculum numericum formularum (10) adhiberi poterunt formulae GAUSSIANAE, quae, quum brevitatis caussa pro $\alpha' + \lambda' - z'$ scriptum fuerit α' , pro $\alpha + \lambda + z$ autem α , in hoc casu suppeditant

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{1}{2}(90^\circ + \delta') \cos \frac{1}{2}(\alpha' + C) &= \cos \frac{1}{2}(90^\circ + \delta + \vartheta) \cos \frac{1}{2} \alpha \\ \cos \frac{1}{2}(90^\circ + \delta') \sin \frac{1}{2}(\alpha' + C) &= \cos \frac{1}{2}(90^\circ + \delta - \vartheta) \sin \frac{1}{2} \alpha \\ \sin \frac{1}{2}(90^\circ + \delta') \cos \frac{1}{2}(\alpha' - C) &= \sin \frac{1}{2}(90^\circ + \delta + \vartheta) \cos \frac{1}{2} \alpha \\ \sin \frac{1}{2}(90^\circ + \delta') \sin \frac{1}{2}(\alpha' - C) &= \sin \frac{1}{2}(90^\circ + \delta - \vartheta) \sin \frac{1}{2} \alpha \end{aligned} \right\} (12)$$

ubi C significat tertium angulum trianguli sphaerici, cujus quatuor sint tria latera $90^\circ - \delta', 90^\circ - \delta$ et ϑ , alteri lateri oppositus sit angulus α , alteri vero $180^\circ - \alpha'$. Sed eadem cura in conquirendis logarithmis adhibita, accuratior evadit calculus, si non ipsa α' et δ' , sed quaerantur $\alpha' - \alpha$ et $\delta' - \delta$. Facile est intellectu, aequationem primam et secundam (10) subministrare haec

$$\begin{aligned} \cos \delta' \sin(\alpha' - \alpha) &= \cos \delta \sin \alpha \sin \vartheta [\operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta \cos \alpha] \\ \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha) &= \cos \delta \cos \alpha \sin \vartheta [\operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta \cos \alpha] \end{aligned}$$

et si per secundam formulam dividetur prima, invenitur hoc

aequationibus eliminare illa L et B . Id quod fit methodo, Cl. BOHNENBERGERO (8ita,*) quam hic ex aequationibus fundamentalibus (8) et (9) derivare in animo est. Ut comprehendam brevi, pro $\alpha + \lambda, \alpha' + \lambda', \psi' - \psi$ ponam haec α, α', u .

[Diese Ableitung s. (Fund. astr. p. 299) Abhandlung 37 p. 276 Bemerkung.]

Reperitur

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{\sin \alpha \sin \vartheta [\operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta \cos \alpha]}{1 - \cos \alpha \sin \vartheta [\operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta \cos \alpha]}$$

Ex analogiis NEPPERIANIS derivatur

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta' - \delta) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta \\ \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\delta' + \delta) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

Inde sequuntur duae calculandi leges, quarum altera directa, altera erit indirecta. Scilicet ponendo

$$p = \sin \vartheta [\operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta \cdot \cos \alpha]$$

habebimus

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) &= \frac{p \sin \alpha}{1 - p \cos \alpha} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta' - \delta) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots (14)$$

Altera eaque indirecta, quae mihi omnium commodissima videtur, quaque in omnibus casibus, ubi stella esset polo proxima, saepissime usus sum (nam in his solis poterit sermo esse de calculo secundum finitas formulas instituendo), in formulis (13) nititur postulatumque approximativum valorem α ipsius α' , ita ut sit verus $= \alpha + x$, ubi x exiguo minorem secundorum numero circumscriptum sit. Quodsi variationes logarithmorum ipsorum $\cos \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha), \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha), \sin \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha), \sin \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$ pro uno secundo argumenti, quales immediate reperiantur in tabulis logarithmicis, designtur his litteris c, c', s, s' , invenientur variationes in hypothesisi $\alpha' = \alpha$ calculatorum logarithmorum ipsorum $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta' - \delta)$ et $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\delta' + \delta)$ resp. $= \frac{1}{2}(c - c')x$ et $\frac{1}{2}(s - s')x$, et dividendo variationes eas per variationes logarithmorum ipsius $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta' - \delta)$ et ipsius $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\delta' + \delta)$ pro minuto secundo argumenti erunt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\delta' - \delta) &= \alpha + \alpha x \\ \frac{1}{2}(\delta' + \delta) &= \alpha' + \beta x \end{aligned}$$

*) VON LINDENAU UND BOHNENBERGER, Zeitschrift für Astronomie etc. I. pag. 124. Tubingae 1816.

ubi d et d' valores significant ipsorum $\frac{1}{2}(\delta' - \delta)$ et $\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$ calculati pro $a' = A$. Habebimus igitur

$$\delta' = d' + d + (\beta + \alpha)x$$

$$\delta = d' - d + (\beta - \alpha)x$$

et, quum data sit δ , erit

$$x = \frac{\delta - (d' - d)}{\beta - \alpha}$$

unde a' inveniri potest et δ' .

Sed in casibus longe plurimis commodius erit, a' et δ' per series, quae ad potentias temporis progrediantur, evolvere, quaeque, nisi polo proxima erit stella, citissime convergant necesse est. Has series hoc modo designabimus

$$a' = \alpha + U'(t-t) + U''(t-t)^2 + \text{etc.}$$

$$\delta' = \delta + W'(t-t) + W''(t-t)^2 + \text{etc.}$$

ea autem non ultra tertium terminum hic prosequemur, quia commodius erit, si altiores termini non possunt negligi, finitas formulas supra traditas in calculo adhibere. Alio loco harum serierum altiores terminos consideravi,* sed si quaeratur, tabulam condere medio- rum locorum pro stella polo proxima, commodissime res expeditur, si haec loca secundum formulas (13) sive (14) calculantur pro certis annis, e. g. pro octavo quoque anno, singulorum vero annorum lacunae interpolatione explentur.

Formularum (8) et (9) completa differentiatio exhibet, ipsis L et B pro constantibus numeris sumtis,

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\psi}{dt} [\cos \omega + \sin \omega \operatorname{tg} \delta \sin(\alpha + \lambda)] - \frac{d\omega}{dt} \operatorname{tg} \delta \cos(\alpha + \lambda)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \sin \omega \cos(\alpha + \lambda) + \frac{d\omega}{dt} \sin(\alpha + \lambda)$$

sive, ipsius $\frac{d\omega}{dt}$ quadrato potentiisque altioribus neglectis,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \cos \omega - \frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \omega \operatorname{tg} \delta \sin\left(\alpha + \lambda - \frac{d\omega}{\sin \omega \cdot d\psi}\right)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \sin \omega \cos\left(\alpha + \lambda - \frac{d\omega}{\sin \omega \cdot d\psi}\right)$$

Quantitas $\lambda - \frac{d\omega}{\sin \omega \cdot d\psi}$,

quae reperitur ex formulis supra traditis pro λ , ω et $\psi = -t.0^{\circ}.0231$, secundum attractionis theori- am debet semper evanescere, ut evanescit pro $t=0$ sive pro 1750. Haec theoriae cum formulis dissensio vitium est formularum inde ortum, quia ea harum formularum membra, quae sunt temporum proportionalia, mutata sunt secundum novam determinationem massae Veneris, ea vero, quae quadrato temporis proportionalia sunt, va-

lores retinearunt desumptos ex Mechanica Coelesti, ubi non declaratur, quomodo haec membra mutentur mutatis planetarum massis. Sed vitium haud magni est du- cendum, etiam longe minus, quam incertitudo, orta in membris temporum proportionalibus ex imperfecta massa- rum planetarum cognitione. Quamobrem habebimus

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha \\ \frac{d\delta}{dt} &= n \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots (15)$$

ubi m et n posita sunt pro

$$\frac{d\psi}{dt} \cos \omega - \frac{d\lambda}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\psi}{dt} \sin \omega.$$

Ipsa inveniuntur ex formulis (2) et (3)

$$\left. \begin{aligned} m &= 46^{\circ}.02824 + t.0^{\circ}.0003086450 \\ n &= 20.06442 - t.0.0000970204 \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

Significatis valoribus ipsorum m et n , qui ad de- finitum tempus 1750 + t pertinent, per m' et n' , iis vero, qui ad indefinitum 1750 + t' , per

$$m' + m''(t-t) \quad \text{et} \quad n' + n''(t-t),$$

successiva differentiatione formularum (15) sumtisque valoribus quotientium differentialium pro $t'=t$, ha- bebuntur:

$$U' = \frac{d\alpha}{dt} = n' \operatorname{tg} \delta \sin \alpha + m'$$

$$U'' = \frac{1}{2} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \frac{n''}{2} \operatorname{tg} \delta^2 \sin^2 2\alpha + \frac{n''}{2} \operatorname{tg} \delta \cos \alpha$$

$$+ \frac{n''}{4} \sin 2\alpha + \frac{m''}{2} + \frac{n''}{2} \operatorname{tg} \delta \sin \alpha$$

$$U''' = \frac{1}{6} \frac{d^3 \alpha}{dt^3} = \frac{n'''}{3} \operatorname{tg} \delta^3 \sin^3 3\alpha + \frac{n'''}{2} \operatorname{tg} \delta^2 \cos 2\alpha$$

$$+ \operatorname{tg} \delta \left[\frac{n'''}{4} \sin 3\alpha + \left(\frac{n'''}{12} - \frac{n''m''}{6} \right) \sin \alpha \right]$$

$$+ \frac{n''m''}{12} [3 \cos 2\alpha + 1]$$

$$+ \frac{m''}{6} n' \operatorname{tg} \delta \cos \alpha$$

$$+ n'' \left[\frac{n''}{2} \operatorname{tg} \delta^2 \sin 2\alpha + \frac{m''}{3} \operatorname{tg} \delta \cos \alpha + \frac{n''}{4} \sin 2\alpha \right]$$

$$W' = \frac{d\delta}{dt} = n' \cos \alpha$$

$$W'' = \frac{1}{2} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = -\frac{n''}{2} \operatorname{tg} \delta \sin \alpha^2 - \frac{n''m''}{2} \sin \alpha + \frac{n''}{2} \cos \alpha$$

$$W''' = \frac{1}{6} \frac{d^3 \delta}{dt^3} = -\frac{n'''}{2} \operatorname{tg} \delta^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha - \frac{n''m''}{2} \operatorname{tg} \delta \sin \alpha \cos \alpha$$

$$- \left[\frac{n''m'' + n''^2}{6} \cos \alpha - \frac{n''}{6} \cos \alpha^2 \right]$$

$$- \frac{m''}{6} n' \sin \alpha$$

$$- n'' \left[\frac{n''}{2} \operatorname{tg} \delta \sin \alpha^2 + \frac{m''}{3} \sin \alpha \right]^{**}$$

** Formulas in „Fund. astr.“ p. 303, quae partem ipsorum U''' et W''' a m'' et n'' pendentes ostendunt, erroneas esse hic indicatum volo [s. Abhandlung 37 p. 279].

* Fundamenta Astronomiae pro Anno 1755. p. 301 etc. [Ab- handlung 37 p. 277].

42. De motu proprio Stellarum fixarum.*

(Tabb. Regiomont. Introd. p. XI.)

Si mutationes loci stellae fixae in observationibus inveniuntur diversas ab iis, quae ex Praecessione oriuntur, differentia tribuitur motui proprio. Jam ostendam, quomodo sit hic motus ex observationibus determinandus, et quomodo in reductione stellae loci pro indefinito tempore possit in calculum vocari.

Sumitur motum proprium uniformi confici velocitate et maximum circulum lustrare. Non est quidem dubium, quin hoc utrumque panlulum a veritate abhorreat. Sed quia stellae propter tardiores incessum per plura saecula tam exiguum orbitae suae spatium metiantur, in eo quod hucusque observatum est huius spatii, neque abnormitas potuit neque aufractus prodi.

Ut inveniatur motus proprius annuus ex observationibus locorum stellae tempore $1750 + T$ et tempore $1750 + T'$ institutis, locus unus sola Praecessione ad alterius tempus reducatur: hoc calculo aut secundus locus inveniatur pertinens ad Aequatorem temporis $1750 + T$, ergo $\alpha + \Delta\alpha$ et $\delta + \Delta\delta$, ubi α et δ eam Adscensionem rectam et Declinationem significant, quae sint tempore $1750 + T$ observatae, aut inveniatur primus locus relatus ad Aequatorem temporis $1750 + T'$, ergo $\alpha' + \Delta\alpha'$ et $\delta' + \Delta\delta'$, ubi α' et δ' erit Adscensio recta et Declinatio tempore $1750 + T'$ observata. Per α , δ , $\alpha + \Delta\alpha$, $\delta + \Delta\delta$ arcus circuli maximi illo temporis intervallo confectus et angulus, quem ille facit cum circulo Declinationis pro tempore $1750 + T$ de-

finiuntur, sive idem determinatur per α' , δ' , $\alpha' + \Delta\alpha'$, $\delta' + \Delta\delta'$ pro tempore $1750 + T'$. Invento motu proprio in temporis intervallo et inde annuo motu quoad magnitudinem et directionem, inveniatur arcus ab anno $1750 + T$ usque ad indefinitum tempus, quod per $1750 + t$ designabimus, confectus, et quoniam directio quoque cognita est, reperietur locus pro $1750 + t$, relatus ad Aequatorem anni $1750 + T$, qui locus sola Praecessione reductus ad annum $1750 + t$, quaesitum locum pro hoc tempore suppeditat.

Quum ea, quae hic de Aequatore sunt disputata, eodem jure valeant de Ecliptica, iis, quae diximus, continetur completa solutio problematum de mutatione locorum stellarum respectu motus proprii. Sed quia motus proprius valde exiguus est, ipsius quadratum poterit negligi. Itaque superfluum est, scrutari motum in circulo maximo atque angulum, quem ille faciat cum circulo Declinationis, quum variationes Adscensionis rectae et Declinationis relatae ad fixum Aequatorem nunc ipsi tempori sint proportionales. Jam formulas ad calculum aptas explicabo.

Usu methodi, quae formulis (10) continetur, habebimus locum pro $1750 + T'$ adjecto motu proprio, si loco ipsorum α et δ , $\alpha + \Delta\alpha$ et $\delta + \Delta\delta$ posuerimus in his formulis, sive neglectis potentiis ipsorum $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$, quae ultra primam egrediantur,

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha' &= \Delta\alpha [\cos \vartheta + \sin \vartheta \operatorname{tg} \delta' \cdot \cos (\alpha' + \lambda' - z')] + \frac{\Delta\delta}{\cos \delta} \sin \vartheta \frac{\sin (\alpha' + \lambda' - z')}{\cos \delta'} \\ \Delta\delta' &= -\Delta\alpha \sin \vartheta \sin (\alpha' + \lambda' - z') + \frac{\Delta\delta}{\cos \delta} \cos \delta' [\cos \vartheta + \sin \vartheta \operatorname{tg} \delta' \cos (\alpha' + \lambda' - z')] \\ \Delta\alpha &= \Delta\alpha' [\cos \vartheta - \sin \vartheta \operatorname{tg} \delta \cdot \cos (\alpha + \lambda + z)] - \frac{\Delta\delta'}{\cos \delta} \sin \vartheta \frac{\sin (\alpha + \lambda + z)}{\cos \delta} \\ \Delta\delta &= \Delta\alpha' \sin \vartheta \sin (\alpha + \lambda + z) + \frac{\Delta\delta'}{\cos \delta} \cos \delta [\cos \vartheta - \sin \vartheta \operatorname{tg} \delta \cos (\alpha + \lambda + z)] \end{aligned} \right\} \dots \dots (18)$$

quae formulae eadem valent, si $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, $\Delta\alpha'$, $\Delta\delta'$ totum et annum motum significant. Inde sequitur, motum proprium, quamvis uniformem suppositum respectu fixi Aequatoris, nequaquam Adscensionis rectae et Declinationis variationes proferre quae sint tempori proportionales. Neque minus ex eodem apparet, motum annum in Adscensione recta aut Declinatione pro determinato tempore cognitum separatim non sufficere, ad destinandum Adscensionem rectam aut Declinationem

pro indefinito tempore, potius non obscurum est, utrumque motum necessarium esse, ut sive Adscensio recta sive Declinatio plane inveniatur.

Ut exemplo utar, eos afferam numeros, ad quos constructae sunt Tabulae stellae polaris in hoc libro contentae:

$$\begin{aligned} 1755. \alpha &= 10^{\circ} 55' 44,955; & \delta &= 87^{\circ} 59' 41,12 \\ 1820. \alpha' &= 14 \ 15 \ 22,575; & \delta' &= 88 \ 20 \ 54,27. \end{aligned}$$

*) [Auszug aus 248 d. a. Verz. — Vgl. auch Fundam. astr. Sectio XII.]

Pro his temporibus inveniuntur ex formulis supra memoratis

$$\text{ex (3) } \lambda = + 0^{\circ}8897; \quad + 11^{\circ}2446$$

$$\text{ex (2) } \left\{ \begin{array}{l} \psi = + 4^{\circ}11^{\circ}8756; \quad + 58^{\circ}45^{\circ}7036 \\ \omega = 23^{\circ}28^{\circ}18^{\circ}0002; \quad 23^{\circ}28^{\circ}18^{\circ}0482. \end{array} \right.$$

His numeris pro transitu ab anno 1755 ad 1820 inveniuntur (11)

$$z = 24^{\circ}53^{\circ}8861; \quad z' = 25^{\circ}9^{\circ}0655; \quad \theta = 21^{\circ}43^{\circ}9394$$

Inde, secundum formulas (13) sive (14), habebimus locum pro 1755 ad 1820 reductum

$$\alpha' = 14^{\circ}13^{\circ}54^{\circ}703; \quad \delta' = 88^{\circ}20^{\circ}54^{\circ}052.$$

Qui locus collatus cum loco observato pro 1820 suppedabit

$$\Delta\alpha' = + 87^{\circ}872; \quad \Delta\delta' = + 0^{\circ}218,$$

sive motum proprium annum in Adscensione recta et Declinatione, relatum ad Aequatorem anni 1820, quem litteris h' et i' designabo,

$$h' = + 1^{\circ}351877; \quad i' = + 0^{\circ}0033538.$$

Ut possit per haec elementa locus inveniri pro alio tempore, e. g. pro 1850, incipimus ab anno 1820. Hoc modo inveniemus:

$$\alpha + \Delta\alpha = 14^{\circ}15^{\circ}22^{\circ}575 + 30.1^{\circ}351877 = 14^{\circ}16^{\circ}3^{\circ}1313$$

$$\delta + \Delta\delta = 88^{\circ}20^{\circ}54^{\circ}27 + 30.0^{\circ}0033538 = 88^{\circ}20^{\circ}54^{\circ}3706$$

$$z = 11^{\circ}15^{\circ}6173; \quad z' = 11^{\circ}50^{\circ}0325; \quad \theta = 10^{\circ}1^{\circ}6846$$

$$z + \lambda = 11^{\circ}26^{\circ}8619; \quad z' - \lambda' = 11^{\circ}34^{\circ}7669$$

locum vero pro anno 1850:

$$\text{ipsi } U' \dots\dots h$$

$$U'' \dots\dots h n' \text{tg } \delta \cos \alpha + i n' \sec \delta^2 \sin \alpha$$

$$U''' \dots\dots h \left[n'^2 \text{tg } \delta^2 \cos 2\alpha - \frac{n' m'}{2} \text{tg } \delta \sin \alpha + \frac{n'^2}{2} \cos 2\alpha \right] + i n' \sec \delta^2 \cos \alpha \left[2 n' \text{tg } \delta \sin \alpha + \frac{m'}{2} \right] \dots (19)$$

$$W' \dots\dots i$$

$$W'' \dots\dots - h n' \sin \alpha$$

$$W''' \dots\dots - h n' \cos \alpha \left[n' \text{tg } \delta \sin \alpha + \frac{m'}{2} \right] + i \frac{n'^2}{2} \sec \delta^2 \sin \alpha^2$$

Ex formulis (18) non minus, quam ex iis, quas modo dedimus, elucet, nisi tangens et secans Declinationis permagnae sint, eas quantitates in Adscensione recta et in Declinatione, quae a motu proprio dependant, fere tempore esse proportionales, quo in casu utraque independens possit considerari altera ab altera. Tum etiam series, in quibus variationes Adscensionis rectae et Declinationis explicatae sunt, tam cito convergant, ut, ipsas ultra quadratum temporis continuare, superfluum esse videatur. Id quum profecto saepissimè eveniat, jam formulas proferam tum adhibendas, quum locus stellae, cujus Adscensio recta et Declinatio datae sunt pro duobus epochis 1750 + T et 1750 + T' , erit ad tertium tempus 1750 + t reducendus. Si datas Ad-

$$\alpha' = 16^{\circ}15^{\circ}19^{\circ}527; \quad \delta' = 88^{\circ}30^{\circ}34^{\circ}898.$$

Alias etiam locum pro 1820 sine respectu motus proprii reducere potuissimus ad annum 1850, tum vero secundum formulas (18) calculare, quid motus proprius hic valuisset, quo in calculo posuissimus:

$$\Delta\alpha = 30.1^{\circ}351877 = + 40^{\circ}5563$$

$$\Delta\delta = 30.0^{\circ}0033538 = + 0,1006.$$

Postremo, ut usum declarem formularum (18), annum motum in Adscensione recta et Declinatione finiam pro anno 1755. Quum pro anno 1820 sit

$$h = + 1^{\circ}351877; \quad i = + 0^{\circ}0033538$$

habebimus, adhibitis insuper valoribus ipsorum z, λ, θ , secundum ultimas formulas (18), pro anno 1755,

$$h = + 1^{\circ}10839; \quad i = + 0^{\circ}005032.$$

Ex quo intelligitur, non modicum oriri vitium supponendo, variationes locorum stellae foae proximae a motu proprio pendentes tempore esse proportionales.

Reliquum est, ut correctiones memorem, quas subeunt coefficients (17) earum serierum, quibus exprimantur Adscensio recta et Declinatio. Ex iis, quae de mutatione locorum stellarum a motu proprio pendente disserui, elucet, illam plane calculo comprehendendi ponendo in coefficientibus (17) $\alpha + h(t' - t)$ et $\delta + i(t' - t)$ pro α et δ , sive neglectis quadratis ipsorum h et i , haec singulis coefficientibus addendo

scensiones rectas denotaverimus litteris α et α' , Praecessionem annum in Adscensione recta pro duobus illis temporibus litteris p et p' , annum ejus variationem littera Δp , sive

$$\Delta p = \frac{p' - p}{T' - T}$$

habebimus Adscensionem rectam pro auno 1750 + t

$$\alpha + (\alpha' - \alpha) \frac{t - T}{T' - T} + \frac{1}{2} \Delta p (t - T)(t - T'). \quad (20)$$

Formulam pro Declinatione plane similem fore, non obscurum est. Itaque ut e duobus datis locis inveniri possit tertius, necessarium quidem est, annum variationem Praecessionis annuae, non ipsam Praecessionem cognoscere.

43. De Nutatione.*)

(Tabl. Regiomont. Intro. p. XIV.)

Formulis supra datis pro motu Aequatoris in Ecliptica vera ea pars sola continetur, quae cum ipso tempore procedit, sed completeae expressiones illorum ψ , et ω , periodica etiam membra complectuntur, quae de Nodi Lunaris, Solis et Lunae Longitudine dependant. Quae periodica Praecessionis membra, quum essent a BRADLEIO inventa ex observationibus et Nutationi axis terrae adscripta, primus omnium D'ALEMBERTUS plane explicuit. Formulae autem pro

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -16,78332 \sin \Omega + 0,20209 \sin 2\Omega - 1,33589 \sin 2\odot - 0,20128 \sin 2\mathfrak{D} \\ \Delta\omega &= + 8,97707 \cos \Omega - 0,08773 \cos 2\Omega + 0,57990 \cos 2\odot + 0,08738 \cos 2\mathfrak{D} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (21)$$

ubi Ω mediam Longitudinem Nodi ascendentis orbitae Lunaris, \odot et \mathfrak{D} veras Solis et Lunae Longitudines significant. Phaenomenon illud, ex quo CL. DE LINDENAVIUS determinationem suam deduxit, videtur aptissimum ad determinandam massam Lunarem.

Quoniam expressiones illorum $\Delta\psi$ et $\Delta\omega$, quas supra memoravi, a Nutatione axis terrae, ergo ab Aequatoris motionem quadam oriuntur, Latitudines stellarum non mutantur ab illis, Longitudines autem in eo tantum mutantur, quod a puncto Aequinoctiorum vernali per Nutationem mutato numerantur, quam ob causam necesse est omnes communem adipiscantur correctionem $\Delta\psi$. Quantitas, quae ex Nutatione redundat in Adscensionibus rectas et Declinationibus, omni rigore potest

ipsorum ψ , et ω , variationibus, ab iis membris ortis, quas litteris $\Delta\psi$ et $\Delta\omega$ significatas esse volumus, varias passae sunt mutationes vel additis parvis membris in prioribus disquisitionibus omissis vel mutata Lunaris massae cognitione. Equidem hanc theoriam denuo tractavi,**) et quum massam Lunarem tantam posuissem, quantum ex effectu Nutationis in Adscensionibus rectas stellae polaris CL. DE LINDENAVIUS esse concluderet, inveni has formulas:

calculari, in formulis (11) et (14) positus ω , et $\frac{1}{2}\Delta\omega$, $\Delta\omega$, $\Delta\psi$, $\alpha' - z'$ et $\alpha + z$ pro $\frac{1}{2}(\omega' + \omega)$, $\omega' - \omega$, $\psi' - \psi$, a' et a . Quamquam usui astronomico in plurimis casibus formulae sufficient, quae solum $\Delta\psi$ et $\Delta\omega$ rationem habeant, neglectis quadratis potentiisque altioribus, tamen completar in explicatione statim instituenda quadrata, ut constet, quantum valeant, et, si ultima praecisio hoc ita desiderare videatur, ut possit in calculum vocari.

Designatis igitur stellae media Adscensione recta per α , Declinatione per δ , apparentibus vero i. e. Nutatione mutatis per α' et δ' , Longitudine media per l , Latitudine autem per b , media Obliquitate Ecliptices per ω , habebimus

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos \alpha &= \cos b \cos l \\ \cos \delta \sin \alpha &= \cos b \sin l \cos \omega - \sin b \sin \omega \\ \sin \delta &= \cos b \sin l \sin \omega + \sin b \cos \omega \\ \cos \delta' \cos \alpha' &= \cos b \cos(l + \Delta\psi) \\ \cos \delta' \sin \alpha' &= \cos b \sin(l + \Delta\psi) \cos(\omega + \Delta\omega) - \sin b \sin(\omega + \Delta\omega) \\ \sin \delta' &= \cos b \sin(l + \Delta\psi) \sin(\omega + \Delta\omega) + \sin b \cos(\omega + \Delta\omega) \end{aligned}$$

Ex his aequationibus quum fuerint eliminata l et b , habebimus

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \sin \omega \Delta\psi [\cotg \omega + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta] \\ &\quad - \Delta\omega \cos \alpha \operatorname{tg} \delta \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin \omega^2 \Delta\psi^2 \left[\frac{1}{2} \sin 2\alpha + \cotg \omega \cos \alpha \operatorname{tg} \delta + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \delta^2 \right] \\ &\quad - \sin \omega \Delta\psi \Delta\omega [\cos \alpha^2 - \cotg \omega \sin \alpha \operatorname{tg} \delta + \cos 2\alpha \operatorname{tg} \delta^2] \\ &\quad - \frac{1}{2} \Delta\omega^2 \left[\frac{1}{2} \sin 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \delta^2 \right] \\ \delta' - \delta &= \sin \omega \Delta\psi \cos \alpha + \Delta\omega \sin \alpha \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin \omega^2 \Delta\psi^2 \sin \alpha [\cotg \omega + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta] \\ &\quad + \sin \omega \Delta\psi \Delta\omega \cos \alpha [\cotg \omega + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta] \\ &\quad - \frac{1}{2} \Delta\omega^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \delta \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (22)$$

*) [Auszug aus 248 d. a. Verz. — Vgl. die vorangehenden Abhandlungen 39 u. 40.]

**) Fundamenta Astronomiae pro Anno 1755. p. 126, quibus correctiones quasdam adiecti in libro „SCHUMACHER, Astronomische Nachrichten“, Nr. 34 et 83 [vgl. Abhandlung 23 u. 39].

Substituendo in his expressionibus formulas (21) et anni 1800 = 23° 27' 54",8, inveniuntur primi ordinis ponendo pro ω Obliquitatem Ecliptices pro initio termini

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -15,39537 \sin \Omega - [6,68299 \sin \Omega \sin \alpha + 8,97707 \cos \Omega \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\ &+ 0,18538 \sin 2 \Omega + [0,08046 \sin 2 \Omega \sin \alpha + 0,08773 \cos 2 \Omega \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\ &- 1,22542 \sin 2 \odot - [0,53194 \sin 2 \odot \sin \alpha + 0,57990 \cos 2 \odot \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\ &- 0,18463 \sin 2 \mathcal{D} - [0,08015 \sin 2 \mathcal{D} \sin \alpha + 0,08738 \cos 2 \mathcal{D} \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\ \delta' - \delta &= -6,68299 \sin \Omega \cos \alpha + 8,97707 \cos \Omega \sin \alpha \\ &+ 0,08046 \sin 2 \Omega \cos \alpha - 0,08773 \cos 2 \Omega \sin \alpha \\ &- 0,53194 \sin 2 \odot \cos \alpha + 0,57990 \cos 2 \odot \sin \alpha \\ &- 0,08015 \sin 2 \mathcal{D} \cos \alpha + 0,08738 \cos 2 \mathcal{D} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots (23)$$

Terminorum secundi ordinis si tantum sunt attentione digni, qui e maximo formularum (21) membro a simplici Nodi Lunarum Longitudine dependente oriuntur. Quibus solis in calculo retentis, et brevitatis causa ponendo

$$\begin{aligned} \mathcal{J}\omega &= 8,97707 \cos \Omega = a \cos \Omega \\ -\sin \omega \cdot \mathcal{J}\psi &= 6,68299 \sin \Omega = b \sin \Omega \end{aligned}$$

invenimus terminos secundi ordinis

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \frac{bb - aa}{4} \sin 2\alpha \left[\operatorname{tg} \delta^2 + \frac{1}{4} \right] + \frac{bb}{4} \operatorname{tg} \delta \cdot \cos \alpha \cotg \omega \\ &+ \left[\operatorname{tg} \delta^2 \cos 2\alpha - \operatorname{tg} \delta \sin \alpha \cotg \omega + \cos \alpha^2 \right] \frac{ab}{2} \sin 2 \Omega \\ &- \left[\frac{bb + aa}{4} \operatorname{tg} \delta^2 \sin 2\alpha + \frac{bb}{4} \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \cotg \omega + \frac{bb + aa}{8} \sin 2\alpha \right] \cos 2 \Omega \\ \delta' - \delta &= -\frac{aa \cos \alpha^2 + bb \sin \alpha^2}{4} \operatorname{tg} \delta - \frac{bb}{4} \sin \alpha \cotg \omega \\ &- \left[\operatorname{tg} \delta \sin 2\alpha + 2 \cotg \omega \cos \alpha \right] \frac{ab}{4} \sin 2 \Omega \\ &- \left[\frac{aa \cos \alpha^2 - bb \sin \alpha^2}{4} \operatorname{tg} \delta - \frac{bb}{4} \sin \alpha \cotg \omega \right] \cos 2 \Omega \end{aligned}$$

Quum partes harum expressionum a 2Ω independentes medium tantum stellae locum mutant, eam ob causam omitti possunt, reliquae quum ex parte cum

formularum (23) membris a 2Ω dependentibus confluant, formulae (23) hanc formam induunt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= +0,18545 \sin 2 \Omega + [0,08012 \sin 2 \odot \sin \alpha + 0,08761 \cos 2 \odot \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\ \delta' - \delta &= +0,08012 \sin 2 \odot \cos \alpha - 0,08761 \cos 2 \odot \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots (23^*)$$

Quod residuum, hoc est

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= +0,0001454 \left[\operatorname{tg} \delta^2 + \frac{1}{4} \right] \cos 2\alpha \sin 2 \Omega \\ &- 0,0001518 \left[\operatorname{tg} \delta^2 + \frac{1}{4} \right] \sin 2\alpha \cos 2 \Omega \\ \delta' - \delta &= -0,0000727 \operatorname{tg} \delta \sin 2\alpha \sin 2 \Omega \\ &- [0,0000217 + 0,0000759 \cos 2\alpha] \operatorname{tg} \delta \cos 2 \Omega \end{aligned} \right\} \dots \dots (24)$$

Ex quo intelligitur, hanc correctionem pro Ascensione recta tum demum centesimam partem minuti secundi temporis implere, si Declinatio erit = 88° 10',

pro Declinatione autem centesimam partem minuti secundi arcualis aequare, si Declinatio erit = 89° 26'.

44. De Aberratione.*)

(Tabb. Regiomont. Introd. p. XVII.)

Directio, in qua stella fixa conspicitur, respectu oculi directio erit lineae immobilis, qua lumen moveatur illud, quod e stella profectum ad oculum perveniat. Quodsi hujus lineae directio praeter oculum a insuper determinatur per punctum b , ad quod lumen prius quam ad oculum perveniat, id quod temporibus $t - \theta$ et t evenire supponimus, si praeterea oculus hoc temporis intervallo viam aa' conficit, ubi a' punctum aliquod significat in directione moti oculi, haud difficile est intellectu, rectam ba' esse directionem, qua lumen in spatio moveatur, rectam vero ba directionem esse, in qua stella observetur. Erit igitur inter utramque directionem angulus aba' extensus, quem Aberrationem luminis Bradleyum appellavisse constat. Ea phaenomeni explicatio fere cum inventoris explanatione congruit.**). Cui superstructa est analysis haec.

Jam tria plana se invicem sub angulis rectis secent in immobili puncto spatii, quorum primum sit parallelum Aequatori, duo reliqua sint ad eundem perpendicularia. Illorum secundum transeat per puncta Aequinoctialia, tertium vero per puncta Solstitialia. Distantiae puncti ab his tribus planis designentur per x, y, z , sumto x positivo, si puncti Adscensio recta ex centro coordinatarum visa intra limites erit 270° et 90° , y positivo, si intra 0 et 180° , z positivo, si Declinatio erit aequilonia. Punctorum a' et b ab his planis distantias tempore t notabo litteris

$$x, y, z \text{ pro puncto } a' \\ x', y', z' \text{ pro puncto } b$$

Si oculus ad illa tria plana velocitatibus $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ fertur, puncti a coordinatae per eodem tempore t erunt

$$x - \frac{dx}{dt} \cdot \theta; \quad y - \frac{dy}{dt} \cdot \theta; \quad z - \frac{dz}{dt} \cdot \theta$$

quae expressiones, motu oculi per tempus θ uniformi posito, prorsus verae sunt. Rem subtilissimae perpendentes nos non fugiet, motu oculi posito inaequali,

$$\left. \begin{aligned} a' - a &= -k \sec \delta \left[\frac{dx}{dt} \sin \alpha - \frac{dy}{dt} \cos \alpha \right] \\ &+ kk \sec \delta^2 \left[\frac{dx}{dt} \sin \alpha - \frac{dy}{dt} \cos \alpha \right] \left[\frac{dx}{dt} \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \sin \alpha \right] \\ \delta' - \delta &= -k \left[\frac{dx}{dt} \sin \delta \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \sin \delta \sin \alpha - \frac{dz}{dt} \cos \delta \right] \\ &- \frac{1}{2} kk \operatorname{tg} \delta \left[\frac{dx}{dt} \sin \alpha - \frac{dy}{dt} \cos \alpha \right]^2 \\ &+ kk \left[\frac{dx}{dt} \sin \delta \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \sin \delta \sin \alpha - \frac{dz}{dt} \cos \delta \right] \left[\frac{dx}{dt} \cos \delta \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \cos \delta \sin \alpha + \frac{dz}{dt} \sin \delta \right] \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

*) [Auszug aus 248 d. a. Verz. — Die vorangehende Abhandlung 40 enthält die gleiche Ableitung.]

lineam illam respectu oculi immobilem non rectam sed curvam esse. Facile igitur est intellectu, aberrationem in Tubis longitudinis diversae diversam esse, sed insensibilem fore differentiam, non obscurum est, vel tum, quam differentia longitudinum Tuborum millies millies major esset, quam esse potest. Si veram stellae inerrantis directionem per Adscensionem rectam α , per Declinationem δ , apparentem vero per α' et δ' significaverimus, habebimus secundum explicationem supra memoratam

$$\lambda \cos \delta \cos \alpha = x' - x \\ \lambda \cos \delta \sin \alpha = y' - y \\ \lambda \sin \delta = z' - z$$

ubi λ distantiam $a'b$ exprimit, praeterea

$$\lambda' \cos \delta' \cos \alpha' = x' - x + \frac{dx}{dt} \cdot \theta \\ \lambda' \cos \delta' \sin \alpha' = y' - y + \frac{dy}{dt} \cdot \theta \\ \lambda' \sin \delta' = z' - z + \frac{dz}{dt} \cdot \theta$$

ubi λ' metitur distantiam ab . Sed θ per velocitatem, qua lumen moveatur, exprimi potest: signato ergo tempore, per quod lumen mediant distantiam terrae a Sole percurrit, littera k , erit $\theta = \lambda k$. Prioribus igitur aequationibus in posterioribus substitutis, dividendo per λ , scribendoque λL pro λ' , inveniemus

$$\left. \begin{aligned} L \cos \delta' \cos \alpha' &= \cos \delta \cos \alpha + \frac{dx}{dt} \cdot k \\ L \cos \delta' \sin \alpha' &= \cos \delta \sin \alpha + \frac{dy}{dt} \cdot k \\ L \sin \delta' &= \sin \delta + \frac{dz}{dt} \cdot k \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

quibus aequationibus, quum pro velocitatibus in directione trium illarum coordinatarum valores necessarii positi fuerint, problema solutum erit rigore geometrico. Approximatione usque ad membra secundi ordinis incl. illae aequationes suppediant

**) LALANDE, Astronomie § 2829. GAUSS, Theoria motus corp. coel. p. 68.

Reliquum est, ut velocitates oculi in directione trium illarum coordinatarum definiamus. Coordinatas igitur centri Solis significatis per X, Y, Z , distantia terrae a Sole per r , Longitudine Solis per \odot , Obliquitate Ecliptices per ω , distantia loci observationis a centro terrae per ρ , correcta Latitudine hujus loci per φ , Adscensione recta culminantis puncti aequatorialis per μ , invenietur

$$\begin{aligned}x &= X - r \cos \odot + \rho \cos \varphi' \cos \mu \\y &= Y - r \sin \odot \cos \omega + \rho \cos \varphi' \sin \mu \\z &= Z - r \sin \odot \sin \omega + \rho \sin \varphi'\end{aligned}$$

Harum expressionum completi quotientes differentiales substituendi sunt in formulis (25) et (26), ut completa Aberratio accipiat. Ex quo apparet, non modo motum oculi respectu Solis esse considerandum, verum etiam ipsum Solarem motum, qui vel ex progressivo Solis in spatio incesso vel e motione Solis circa commune centrum gravitatis totius systematis Solaris oriri possit. Motus autem progressivus, qui pro celeriore vel tardiore incesso majorem vel minorem Aberrationem excitat, hic relinqui poterit, quia Aberratio ex hac perfecta causa mediis stellarum locis se miscet necesse est; periodica vero pars motus Solaris minimas, ut alio loco*) exposui, profert Aberrationes, quae si essent receptae, formulas praeter necessitatem complicatas redderent. Quare solum motum ellipticum centri terrestris motumque terrae rotatum circa axin suam in computatione retinebo.

Differentiando igitur expressiones illorum x, y, z , curaue de legibus KEPLERIANIS rite adhibita, reperietur:

$$\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= -x \sec \delta [\cos \odot \cos \alpha \cos \omega + \sin \odot \sin \alpha] \\&\quad - \frac{1}{2} x x \sec \delta^2 [\cos 2\odot \sin 2\alpha (1 + \cos \omega^2) - 2 \sin 2\odot \cos 2\alpha \cos \omega] \\ \delta' - \delta &= +x [\cos \odot (\sin \alpha \sin \delta \cos \omega - \cos \delta \sin \omega) - \sin \odot \cos \alpha \sin \delta] \\&\quad - \frac{1}{2} x x \operatorname{tg} \delta [\cos 2\odot (\cos 2\alpha (1 + \cos \omega^2) - \sin \omega^2) + 2 \sin 2\odot \sin 2\alpha \cos \omega]\end{aligned}$$

ubi in ultima formula nonnulla membra, non multiplicata in $\operatorname{tg} \delta$, quippe nunquam millesimam partem minuti secundi adaequantia, omittere non dubitavi.

Valorem ipsius x secundum CL. DELAMBRE posui = 20',255, quod proxime accedit ad valorem e BRADLEII observationibus inventum. Non defuere, qui hunc valorem augendum esse arbitrarentur. Sed quum in eo stellarum maxime consulerent observationes Adscensio-

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dm}{\sqrt{1-ee} dt} \{ \sin \odot + e \sin P \} - \rho \frac{d\mu}{dt} \cos \varphi' \sin \mu \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{-\cos \omega \cdot dm}{\sqrt{1-ee} dt} \{ \cos \odot + e \cos P \} + \rho \frac{d\mu}{dt} \cos \varphi' \cos \mu \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{-\sin \omega \cdot dm}{\sqrt{1-ee} dt} \{ \cos \odot + e \cos P \}\end{aligned}$$

ubi $\frac{dm}{dt}$ significat medium Solis motum sidereum eadem, qua k metiamur, temporis unitate expressum, P Longitudinem Perigei, e orbitae terrestris Excentricitatem.

His expressionibus in formulis (26) substitutis et membra inveniuntur periodica, quae a \odot et μ dependant, et membra ab his iisdem quantitibus independentia, quae, quum confluant cum mediis stellarum locis, neque alius momenti esse videatur, ea segregare ab his, negligi poterunt. Sed periodica membra, quatenus a Solis Longitudine pendentia, annuam efficiunt Aberrationem, diurnam quatenus a tempore sidereo. In primo ordine duae illae Aberrationes sejunctae sunt, in secundo quidem mixtae, sed quod ex diurno motu in membra hujus ordinis redundat, ita parvi ducendum erit, ut prorsus omitti possit.

Igitur hanc utramque Aberrationem separatim examinabo, initiumque ducam ab annua Aberratione. Substitutione in formulis (26) facta, omissisque membris independentibus a Longitudine Solari et in secundo ordine Excentricitate orbitae terrestris neglecta, positoque x pro

$$\frac{k \cdot dm}{\sqrt{1-ee} dt}$$

invenietur

num rectarum, illud verendum esse duxi,**) ne Maximum Aberrationis in Adscensione recta se Maximo miscat effectus, quem in instrumenta exercent Astronomica diurnae caloris variationes. Quas quum non liceat directe ea qua par est praecisione definire, eas non sine pertractatione rei omnino abesse judicabimus. Itaque posito $x = 20',255$, formulae, quae annuam Aberrationem exhibent, erunt hae:

*) Fundam. Astronomiae pro Anno 1755. p. 132 [Abhandlung 39 p. 290].

BRADLEI'S Abhandlungen. 1. Bd.

**) Abhandlungen d. math. Classe d. Akad. v. Berlin, 1818 bis 1819, p. 26 [136 d. a. Verz., s. die betr. Abh. unter Stellar-astronomie].

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -20'',255 \sec \delta [\cos \odot \cos \alpha \cos \omega + \sin \odot \sin \alpha] \\ &\quad - 0'',0009157 \sec^2 \delta \cdot \sin 2\alpha \cos 2 \odot \\ &\quad + 0'',0009123 \sec^2 \delta \cdot \cos 2\alpha \sin 2 \odot \\ \delta' - \delta &= +20'',255 \cos \odot [\sin \alpha \sin \delta \cos \omega - \cos \delta \sin \omega] \\ &\quad - 20'',255 \sin \odot \cos \alpha \sin \delta \\ &\quad + [0'',0000394 - 0'',0004578 \cos 2\alpha] \operatorname{tg} \delta \cdot \cos 2 \odot \\ &\quad - 0'',0004561 \operatorname{tg} \delta \cdot \sin 2\alpha \sin 2 \odot \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

Pro stellis, quarum Declinatio minor erit quam 85° 31', membra secundi ordinis in Adscensione recta non centesimam partem minuti secundi temporalis amplecti poterunt, pro Declinationibus minoribus quam 87° 9' non ad centesimam partem secundi arcualis ascendere poterunt in Declinatione.

Quum stellae Adscensio recta et Declinatio, Longitudo Solaris et Obliquitas Ecliptices, quae in formulis (27) occurrunt, ad verum pertineant Nutatione jam mutatum Aequotorem, in calculo Aberrationis correctiones erunt addendae, a productis Aberrationis et Nutationis profectae, si quis valoribus a Nutatione non affectis uti velit. Illae correctiones inveniuntur differentiando formulas (27) respectu quantitatum α, δ, \odot et ω , et tum ponendo pro $d\alpha, d\delta, d\odot, d\omega$ effectum Nutationis in easdem quantitates. Quodsi ea sola membra retinentur, quae cum ipsa Declinatione plurimum crescunt i. e. pro Adscensione recta, quae sunt in $\operatorname{tg} \delta \sec \delta$ multiplicata, pro Declinatione, quae sunt in $\operatorname{tg} \delta \sin \delta$, quantitates $d\odot$ et $d\omega$ nullius momenti ducendae erunt, quare statueri licebit:

$$\begin{aligned} d\alpha &= -[b \sin \Omega \sin \alpha + a \cos \Omega \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\ d\delta &= -b \sin \Omega \cos \alpha + a \cos \Omega \sin \alpha \end{aligned}$$

quo facile inveniuntur

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \operatorname{tg} \delta \sec \delta \frac{20'',255}{2} \left\{ \begin{aligned} &-(b+a \cos \omega) \sin 2\alpha \cos(\odot + \Omega) \\ &+(b \cos \omega + a) \cos 2\alpha \sin(\odot + \Omega) \\ &+(b-a \cos \omega) \sin 2\alpha \cos(\odot - \Omega) \\ &-(b \cos \omega - a) \cos 2\alpha \sin(\odot - \Omega) \end{aligned} \right. \\ \delta' - \delta &= \operatorname{tg} \delta \sin \delta \frac{20'',255}{4} \left\{ \begin{aligned} &-(b+a \cos \omega) \cos 2\alpha \cos(\odot + \Omega) \\ &-(b \cos \omega + a) \sin 2\alpha \sin(\odot + \Omega) \\ &+(b-a \cos \omega) \cos 2\alpha \cos(\odot - \Omega) \\ &+(b \cos \omega - a) \sin 2\alpha \sin(\odot - \Omega) \\ &+(b-a \cos \omega) \cos(\odot + \Omega) \\ &-(b+a \cos \omega) \cos(\odot - \Omega) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

sive numeris expressum

$$\alpha' - \alpha = \operatorname{tg} \delta \sec \delta \left\{ \begin{aligned} &-0'',0007324 \sin 2\alpha \cos(\odot + \Omega) \\ &+0'',0007418 \cos 2\alpha \sin(\odot + \Omega) \\ &-0'',0000762 \sin 2\alpha \cos(\odot - \Omega) \\ &+0'',0001398 \cos 2\alpha \sin(\odot - \Omega) \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} &(-0'',0003662 \cos 2\alpha \cos(\odot + \Omega)) \\ &-0'',0003709 \sin 2\alpha \sin(\odot + \Omega) \\ &-0'',0000381 \cos 2\alpha \cos(\odot - \Omega) \\ &-0'',0000699 \sin 2\alpha \sin(\odot - \Omega) \\ &-0'',0000381 \cos(\odot + \Omega) \\ &-0'',0003662 \cos(\odot - \Omega) \end{aligned} \right\} (28)$$

$$\delta' - \delta = \operatorname{tg} \delta \sin \delta$$

Si Declinatio 85° 36' non excedit, haec correctio Adscensionis rectae non aequi poterit centesimam partem minuti secundi temporalis, pro Declinatione minore quam 85° 22' correctio Declinationis minor erit quam centesima pars minuti secundi arcualis.

Ponendo in formulis (26), ut diurna obtineatur Aberratio,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\rho \frac{d\mu}{dt} \cos \varphi' \sin \mu \\ \frac{dy}{dt} &= +\rho \frac{d\mu}{dt} \cos \varphi' \cos \mu \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

inveniuntur

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= k \rho \frac{d\mu}{dt} \cos \varphi' \cos(\mu - \alpha) \sec \delta \\ \delta' - \delta &= k \rho \frac{d\mu}{dt} \cos \varphi' \sin(\mu - \alpha) \sin \delta \end{aligned}$$

Ut harum formularum factorem a loco stellae independentem numeris exprimamus, habebimus ut supra

$$\frac{k d\mu}{\sqrt{1-ec} \cdot dt} = 20'',255$$

porro

$$\frac{d\mu}{dt} = (T+1) \frac{d\mu}{dt}$$

ubi T numerum repraesentat mediorum dierum, ergo $T+1$ numerum dierum sidereorum, quos annus sideralis complectitur; postremo erit, significando distantiam loci observationis a centro terrae partibus radii aequalitatis expressam per ρ'

$$\rho = \rho' \sin 8'',5776$$

ubi media parallaxis horizontalis Solis ea est, quam Cl. ENCKE *) derivavit ex diligentissima pervestigatione

*) J. F. ENCKE, Venusdurchgang von 1769, p. 108. Gothae, 1824.

transituum Veneris per discum Solis annis 1761 et 1769 observatorum. Hinc sequitur

$$k \varphi \frac{d\mu}{dt} = 0,30847 \cdot \varphi'$$

et si $\varphi' \cos \varphi'$ per observatam poli altitudinem φ et per eccentricitatem meridianorum terrestrium ε exprimitur,

$$k \varphi \frac{d\mu}{dt} \cos \varphi' = 0,30847 \frac{\cos \varphi'}{\sqrt{1 - \varepsilon \sin \varphi'}}$$

Habebimus igitur diurnam Aberrationem

$$(29) \cdot \begin{cases} \alpha' - \alpha = 0,30847 \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon \sin \varphi}} \cos t \sec \delta \\ \delta' - \delta = 0,30847 \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon \sin \varphi}} \sin t \sin \delta \end{cases}$$

ubi stellae angulus horarius $\mu - \alpha$ significatus est per t . Ex quibus formulis elucet, pro superiore culminatione stellae Adscensionem rectam per diurnam Aberrationem quantitate

$$0,30847 \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon \sin \varphi}} \sec \delta$$

augeri, pro inferiore eadem quantitate minui, in utraque vero culminatione Declinationem immutatam manere. In calculo igitur hujus Aberrationis completa ratio habebitur pro observationibus in meridiano institutis, si transitus stellarum per medium Tubi meridiani filum non formula *)

$$m + n \operatorname{tg} \delta + c \sec \delta$$

ad meridianum reducuntur, ubi deflexio instrumenti ab orbe meridiano in Aequatore per $m + c$, in polo per $n + c$, vitium collimationis per c (haec omnia tempore

expressa et in oriente coeli parte positive sumpta) nota sunt, sed potius formula reducitur hac

$$m + n \operatorname{tg} \delta + c' \sec \delta$$

ubi

$$c' = c - 0,020565 \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon \sin \varphi}}$$

Aberratio in Longitudine et Latitudine invenietur in formulis (27) ponendo $\omega = 0$, et pro α et δ Longitudine l et Latitudine b , ex quo reperietur

$$(30) \begin{cases} l' - l = -x \cos(\odot - l) \sec b + \frac{1}{2} x x \sin 2(\odot - l) \sec b^2 \\ b' - b = -x \sin(\odot - l) \sin b - \frac{1}{2} x x \cos 2(\odot - l) \operatorname{tg} b \end{cases}$$

Ea membra, quae a productis Aberrationis et Nutationis proficiscuntur, pro Longitudine et Latitudine evanescent.

Planetarum et Cometarum Aberratio erit

$$\alpha' - \alpha = -r' k \Delta \alpha$$

$$\delta' - \delta = -r' k \Delta \delta$$

ubi $\Delta \alpha$ et $\Delta \delta$ ipsorum motus significant medio die confectos, r' eorum distantiam ab observatore et

$$k = \frac{20',255 \cdot 365,25637 \sqrt{1 - e}}{1296000}$$

$$\log k = 7,75646$$

erunt.

Si quis in locis planetae sive cometae Aberrationem ea ratione velit calculo comprehendere, ut loco temporis, pro quo computandi sunt, id tempus assumat, quo lumen ab iisdem proficisceretur, a prior tempore adimenda erit quantitas $r'k$, ubi logarithmus quantitatis k , minutis secundis temporalibus expressae, erit = 2,69298.

45. Ueber die Aberration der Planeten und Cometen.**)

(Astr. Nachr. 12. p. 121.)

Ich beabsichtige, die Theorie der Aberration, unabhängig von der Voraussetzung, dass der Himmelskörper, welcher ihr unterworfen ist, unbeweglich sei, zu entwickeln. Obgleich GAUSS denselben Gegenstand erläutert hat (Theoria mot. C. C. p. 68), so komme ich doch darauf zurück, nur um diejenigen kleinen Unterschiede an den Tag zu legen, welche aus den verschiedenen Ansichten hervorgehen, denen man in Beziehung auf die Art der Fortpflanzung des Lichtes folgen kann.

*) Beobachtungen auf der Sternwarte in Königsberg. II. Abtheilung. [Vgl. Theorie der Instrumente, Abb. 61.]

**) [280 d. a. Verz.]

Ferner werde ich Formeln für die Aberration der Planeten und Cometen mittheilen, welche dann eine Anwendung finden können, wenn es aus irgend einem Grunde nicht angemessen ist, die in den meisten Fällen bequemste Art, die Aberration in Rechnung zu bringen, anzuwenden. Diese Art besteht bekanntlich in der Berechnung derjenigen Zeit, für welche ein berechneter wahrer Ort eines Himmelskörpers sein scheinbarer ist.

1.

Ich werde zuerst die Newton'sche Ansicht zum Grunde legen, nach welcher ein leuchtender Punkt da-

durch gesehen wird, dass er mit einer gewissen Geschwindigkeit Theilchen von sich stösst, welche, wenn sie in das Auge gelangen, das Dasein, und durch die Richtung der geraden Linie, auf welcher sie sich bewegen, auch die Richtung des Punktes fühlbar machen. Die Geschwindigkeit dieser sogenannten Lichttheilchen, die mittlere Zeitsecunde als Zeiteinheit und die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Maass-einheit angenommen, werde ich durch $\frac{1}{k}$, oder die Anzahl der mittleren Secunden, welche ein Lichttheilchen anwendet, um die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne zu durchlaufen, durch k bezeichnen.

Das bewegte Gestirn, dessen Aberration untersucht werden soll, werde ich als selbstleuchtend annehmen und seine auf ein festes Axensystem bezogenen Coordinaten durch x, y, z , so wie die des Auges durch X, Y, Z , die Zeit wozu beide gehören durch t bezeichnen. Ferner werde ich durch ρ die Entfernung des Gestirns vom Auge, durch δ den Winkel der von diesem nach jenem gezogenen geraden Linie mit der Ebene der xy , durch α den Winkel ihrer Projection auf diese Ebene mit der Axe der x andeuten, so dass man hat:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= x - X \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= y - Y \\ \rho \sin \delta &= z - Z \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

Wenn das Licht, welches zur Zeit t zum Auge gelangt, zur Zeit $t - \theta$ von dem Gestirne ausgegangen ist, so sind die Coordinaten des Gestirns zu dieser Zeit, unter der Voraussetzung der Gleichförmigkeit seiner Bewegung zwischen beiden Zeiten,

$$x - \theta \frac{dx}{dt}, \quad y - \theta \frac{dy}{dt}, \quad z - \theta \frac{dz}{dt}.$$

Von dem durch diese Coordinaten gegebenen Punkte des Raumes sendet das Gestirn Lichttheilchen nach allen Richtungen mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{k}$, und eins davon trifft das Auge zur Zeit t , also den Punkt des Raumes, dessen Coordinaten durch X, Y, Z bezeichnet worden sind.

Die Bewegung dieses Lichttheilchens im Raume ist aber verschieden von der Bewegung, welche es beziehungsweise auf das Gestirn von welchem es ausgeht besitzt. Die Bewegung dieses letzteren, welcher es vor seiner Abtossung gefolgt ist, bleibt ihm auch nach derselben und es gelangt zum Auge, indem es beiden Bewegungen zugleich folgt. Wenn das Lichttheilchen das Gestirn zur Zeit $t - \theta$ in dem Punkte d ver-

lässt, um sich in einer Richtung dd' zu bewegen, so dass es, wenn das Gestirn im Raume fest wäre, in der Zeit θ den Punkt d' erreichen würde, so gelangt es, wenn das Gestirn sich in derselben Zeit nach c bewegt, nicht nach d' , sondern nach dem vierten, das Parallelogramm ergänzenden Punkte a . Es durchläuft also während der Zeit θ wirklich die Diagonale da , und die Richtung derselben ist die Richtung, in welcher das Gestirn vom Punkte a zur Zeit t gesehen wird.



Nimmt man a für den Punkt, in welchem das Auge sich zur Zeit t befindet, bezeichnet man die Richtung der Linie ad durch die den oben angewandten analogen Zeichen δ , und α , ihre Länge durch ρ , so erhält man der eben gegebenen Darstellung gemäss diese drei Grössen aus den Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= x - X - \theta \frac{dx}{dt} \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= y - Y - \theta \frac{dy}{dt} \\ \rho \sin \delta &= z - Z - \theta \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

Eine Bewegung des Auges bringt aber eine Aenderung der durch δ , und α , angegebenen Richtung des Gestirns hervor, oder man sieht dasselbe nicht in seiner wahren, sondern in einer andern Richtung. Wenn das in der Richtung da sich bewegende Lichttheilchen zu einer Zeit $t - \theta'$ in b , das Auge zu derselben Zeit in a' ist, die Entfernungen ba und $a'a$, jene vom Lichttheilchen, diese vom Auge, während der Zeit θ' mit gleichbleibenden Geschwindigkeiten durchlaufen werden und wenn $a'b$ eine beziehungsweise zum Auge feste gerade Linie ist, so ist sie diejenige dieser Linien, welcher das Lichttheilchen während der Zeit θ' folgt, oder ihre Richtung ist die Richtung, in welcher das Gestirn gesehen wird. Bestimmt man diese Richtung, also den scheinbaren Ort des Gestirns, durch δ' und α' und bezeichnet man ba durch λ , ba' durch λ' , so hat man der Erklärung gemäss:



$$\left. \begin{aligned} \lambda' \cos \delta' \cos \alpha' &= \lambda \cos \delta \cos \alpha + \theta' \frac{dX}{dt} \\ \lambda' \cos \delta' \sin \alpha' &= \lambda \cos \delta \sin \alpha + \theta' \frac{dY}{dt} \\ \lambda' \sin \delta' &= \lambda \sin \delta + \theta' \frac{dZ}{dt} \end{aligned} \right\}$$

und wenn man aus diesen Formeln mittelst der vorigen δ , und α , wegschafft:

$$\left. \begin{aligned} \varrho, \frac{\lambda'}{\lambda} \cos \delta' \cos \alpha' &= \varrho \cos \delta \cos \alpha - \vartheta \frac{dx}{dt} + \vartheta' \frac{\varrho}{\lambda} \frac{dX}{dt} \\ \varrho, \frac{\lambda'}{\lambda} \cos \delta' \sin \alpha' &= \varrho \cos \delta \sin \alpha - \vartheta \frac{dy}{dt} + \vartheta' \frac{\varrho}{\lambda} \frac{dY}{dt} \\ \varrho, \frac{\lambda'}{\lambda} \sin \delta' &= \varrho \sin \delta - \vartheta \frac{dz}{dt} + \vartheta' \frac{\varrho}{\lambda} \frac{dZ}{dt} \end{aligned} \right\} (3)$$

Die in diesen Formeln vorkommende Zeit ϑ ist die, welche das Lichttheilchen gebraucht, um von d nach a (Fig. 1) zu gelangen, dieselbe welehe es, wenn der Punkt von welchem es ausgeht unbeweglich wäre, verwenden würde, um $dd' = ca = \varrho$ zu beschreiben, also $= k\varrho$; die Zeit ϑ' dagegen findet man aus der Proportion:

$$da : ba = \vartheta : \vartheta'$$

oder $\varrho : \lambda = \vartheta : \vartheta'$

woraus sich

$$\varrho, \frac{\vartheta'}{\lambda} = \vartheta = k\varrho$$

ergibt. Setzt man diese Werthe von ϑ und ϑ' in die Formeln (3), so verwandeln sie sich in

$$\left. \begin{aligned} \varrho, \frac{\lambda'}{\lambda} \cos \delta' \cos \alpha' &= \varrho \cos \delta \cos \alpha - k\varrho \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dX}{dt} \right) \\ \varrho, \frac{\lambda'}{\lambda} \cos \delta' \sin \alpha' &= \varrho \cos \delta \sin \alpha - k\varrho \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dY}{dt} \right) \\ \varrho, \frac{\lambda'}{\lambda} \sin \delta' &= \varrho \sin \delta - k\varrho \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dZ}{dt} \right) \end{aligned} \right\} (4)$$

Hierdurch ist die Richtung bestimmt, in welcher das Gestirn erscheint. Indem die ersten Theile dieser Formeln auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen nichts anderes sind als $x - X, y - Y, z - Z$, die Ausdrücke auf dieser Seite also die Unterschiede der Coordinaten des Gestirns und des Auges für die Zeit $t - k\varrho$ sind, so geht hervor, dass der scheinbare Ort des Gestirns zur Zeit t mit dem wahren zur Zeit $t - k\varrho$ übereinstimmt.

2.

In dem vorigen Art. ist der scheinbare Ort eines selbstleuchtenden Gestirns bestimmt worden, wie er der Newton'schen Ansicht von der Fortpflanzung des Lichtes gemäss ist. Ich werde dieselbe Ansicht jetzt bei der Untersuchung des scheinbaren Ortes eines Gestirns, welches durch zurückgeworfenes Sonnenlicht sichtbar wird, verfolgen.

Der Unterschied dieses Falles von dem vorigen besteht darin, dass das zurückgeworfene Licht im Allgemeinen eine andere Geschwindigkeit hat, als das von einem selbstleuchtenden Körper ausgehende. Dieses ist immer der Fall, wenn der das Licht zurückwerfende Körper seine Entfernung von der Sonne verändert.

Wenn die Geschwindigkeit dieser Entfernung durch $\frac{dr}{dt}$ bezeichnet wird, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher das Licht auf das Gestirn trifft

$$\frac{1}{k} - \frac{dr}{dt},$$

und da es mit derselben Geschwindigkeit wieder von ihm ausgeht, so erleiden die im vorigen Art. für den scheinbaren Ort eines selbstleuchtenden Gestirns gegebenen Formeln in dem gegenwärtigen Falle nur die Aenderung, dass

$$k' = \frac{k}{1 - k \frac{dr}{dt}}$$

statt k gesetzt wird.

3.

Die andere Ansicht von der Fortpflanzung des Lichtes, nämlich durch Wellen eines Lichtäthers, eignet den leuchtenden Körpern die Kraft an, diesen Aether in Bewegung zu setzen: die Bewegung desselben pflanzt sich im freien Raume so fort, dass sie in jedem Augenblicke auf der ganzen Oberfläche einer um den leuchtenden Punkt gelegten Kugel statt findet; die Geschwindigkeit, mit welcher die Bewegung von kleineren Kugeloberflächen zu grösseren gelangt, ist die des Lichtes $\left(= \frac{1}{k} \right)$; die Richtungen der Normalen der bewegten Oberflächen sind die Richtungen, in welchen der leuchtende Punkt gesehen wird; diese fallen also, wenn der Raum frei ist, in welchem Falle die bewegten Oberflächen Kugeloberflächen sind, mit den Radien derselben zusammen.

Dieser Ansicht gemäss hat die Ruhe oder Bewegung des leuchtenden oder lichtzurückwerfenden Körpers keinen Einfluss auf die Bewegung des Lichts; denn diese ist alleinige Folge einer Störung des Gleichgewichtes des Aethers, ohne dass die Ursache, welche diese Störung hervorbringt, dabei in Betracht kömmt. Da der leuchtende Punkt immer in der Normale auf die Oberfläche der Lichtwelle gesehen wird, so ist offenbar, dass das Gestirn von dem Punkte a (Fig. 1), zur Zeit t , in der Richtung erscheint, in welcher es zur Zeit $t - \vartheta$ wirklich stand, d. h. in der Richtung ad : die Formeln (2) sind also nach beiden Ansichten völlig übereinstimmend. Aber auch die Formeln (3) erleiden keine Aenderung. Denn wenn man sich $a'b$ (Fig. 2) als eine unendlich dünne, beziehungsweise auf das Auge feste Röhre denkt, in welche in dem Augenblicke des Durchganges ihrer Oeffnung b durch die Linie da eine Lichtwelle eintritt, so folgt diese Welle.

bei ihrer ferneren Bewegung, der Axe der Röhre, indem diese durch die Bewegung des Auges so geführt wird, dass ihre verschiedenen Punkte sich nach und nach in denselben Punkten des Raumes befinden, in welchen die Wellenbewegung vor sich geht. Beide Ansichten von der Fortpflanzung des Lichtes führen also auf die Formeln (3).

Allein die Zeiten δ und δ' enthalten nach der gegenwärtigen Ansicht Werthe, welche von den nach der früheren gefundenen verschieden sind. Beide sind nun die Zeiten, welche das Licht anwendet, um vermöge seiner eigenthümlichen Geschwindigkeit sich durch $da = \rho$, und durch $ba = \lambda$ zu bewegen, also

$$\delta = k\rho; \quad \delta' = k\lambda.$$

Durch die Substitution dieser Werthe in die Formeln (3) verwandeln sich dieselben in:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cdot \frac{1}{\lambda} \cos \delta' \cos \alpha' &= \rho \cos \delta \cos \alpha - k\rho \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dX}{dt} \right) \\ \rho \cdot \frac{1}{\lambda} \cos \delta' \sin \alpha' &= \rho \cos \delta \sin \alpha - k\rho \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dY}{dt} \right) \\ \rho \cdot \frac{1}{\lambda} \sin \delta' &= \rho \sin \delta - k\rho \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dZ}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Es geht also auf dieselbe Art wie das Aehnliche im 1. Art. hervor, dass der scheinbare Ort eines Gestirns zur Zeit t mit dem wahren zur Zeit $t - k\rho$, übereinstimmt. Ich bemerke noch, dass die Annahmen, welche ich der Kürze wegen gemacht habe, dass ein Lichttheilchen nach der einen, oder eine Welle nach der anderen Vorstellung den Eindruck des Lichtes im Auge hervorbringen, ohne Aenderung des Resultats mit den Annahmen vertauscht werden können, dass während jedes merklichen Zeittheilchens so viele Lichttheilchen oder so viele Wellen aufeinander folgen, als erforderlich sind, den Eindruck des Lichtes zu erzeugen.

4.

Man sieht aus den vorigen drei Artikeln, dass keine der verfolgten Ansichten von der Fortpflanzung des Lichtes, die gewöhnliche Art die Aberration bewegter Gestirne in Rechnung zu bringen, vollkommen rechtfertigt. Diese Art besteht darin, dass man für eine gewisse Zeit α , δ und ρ nach den Formeln (1) berechnet und dann die Zeit, für welche α und δ den scheinbaren Ort des Gestirns angeben, durch Hinzufügung von $k\rho$ zu der Zeit, für welche man gerechnet hat, bestimmt. Wenn man der Schärfe nichts vergeben wollte, so sollte man für ρ nicht den für die frühere

Zeit unmittelbar erhaltenen Werth, sondern den für die spätere Zeit stattfindenden setzen; so wie auch für ρ , die Entfernung des Punktes, welchen das Gestirn zur früheren Zeit einnahm, von dem Punkte, welchen das Auge zur späteren einnimmt. Die Unterschiede des gewöhnlichen Verfahrens, die Aberration in Rechnung zu bringen, von den für die drei untersuchten Fälle erhaltenen Formeln, zeigen sich aber nur in Grössen von der Ordnung kk und haben daher nur geringe oder keine praktische Erheblichkeit.

Nichtsdestoweniger werde ich hier angeben was der Zeit, für welche man gerechnet hat, hinzugefügt werden muss, um sie in die Zeit zu verwandeln, für welche der berechnete Ort der scheinbare ist. Wenn ρ den unmittelbar berechneten Werth der Entfernung bedeutet, so ist diese Verbesserung der Zeit nach der Voraussetzung des ersten Art. oder für die Anwendung der Newton'schen Ansicht auf ein selbstleuchtendes Gestirn

$$= k\rho \left[1 + k \left\{ \frac{d(x-X)}{dt} \cos \delta \cos \alpha + \frac{d(y-Y)}{dt} \cos \delta \sin \alpha + \frac{d(z-Z)}{dt} \sin \delta \right\} \right]$$

nach der Voraussetzung des zweiten Art. oder für die Anwendung derselben Ansicht auf ein durch zurückgeworfenes Licht sichtbares

$$= k\rho \left[1 + k \left\{ \frac{d(x-X)}{dt} \cos \delta \cos \alpha + \frac{d(y-Y)}{dt} \cos \delta \sin \alpha + \frac{d(z-Z)}{dt} \sin \delta + \frac{dr}{dt} \right\} \right]$$

endlich nach der Voraussetzung des dritten Art. oder für die Ansicht der Fortpflanzung des Lichtes durch Wellenbewegung

$$= k\rho \left[1 - k \left\{ \frac{dX}{dt} \cos \delta \cos \alpha + \frac{dY}{dt} \cos \delta \sin \alpha + \frac{dZ}{dt} \sin \delta \right\} \right]$$

Diese Angaben über die Ordnung kk hinaus fortzusetzen, würden kein Interesse gehabt haben. Die Ausdrücke der darin vorkommenden Differentialquotienten findet man unten.

5.

Ich werde jetzt Formeln entwickeln, nach welchen $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ unmittelbar berechnet werden können, sie aber nicht über die erste Potenz der Aberration hinaus fortsetzen. Durch diese Beschränkung werden die in den drei ersten Artikeln erhaltenen Gleichungen übereinstimmend miteinander und man kann

$$P \cos \delta' \cos \alpha' = \cos \delta \cos \alpha - k \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dX}{dt} \right)$$

$$P \cos \delta' \sin \alpha' = \cos \delta \sin \alpha - k \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dY}{dt} \right)$$

$$P \sin \delta' = \sin \delta - k \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dZ}{dt} \right)$$

dafür annehmen (P für $\frac{eX'}{q_1}$ gesetzt).

Die Multiplication der ersten mit $\cos \alpha$, der zweiten mit $\sin \alpha$ und die Addition der Producte ergibt:

$$P \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha)$$

$$= \cos \delta - k \left\{ \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dX}{dt} \right) \cos \alpha + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dY}{dt} \right) \sin \alpha \right\};$$

ferner ergibt die Multiplication der ersten mit $-\sin \alpha$, der zweiten mit $\cos \alpha$ und die Addition der Producte:

$$\delta' - \delta = \omega k \left\{ \frac{d(x-X)}{dt} \cos \alpha \sin \delta + \frac{d(y-Y)}{dt} \sin \alpha \sin \delta - \frac{d(z-Z)}{dt} \cos \delta \right\}$$

Beide Formeln kann man in zwei Theile zerlegen, deren einer nur die Differentialquotienten der Coordinaten des Gestirns, der andere nur die Differentialquotienten der Coordinaten des Auges enthält. Der letzte Theil ist offenbar nichts anderes als die von der Bewegung des Auges herrührende Aberration eines Gestirns, dessen Ort durch α und δ bestimmt wird; er ist den Planeten und Cometen und den Fixsternen gemein, so wie sein obiger Ausdruck auch nothwendig mit dem Ausdrucke der Aberration der Fixsterne übereinstimmt (z. B. Tab. Reg. p. XVIII [Abh. 44, p. 304]). Man darf aber nicht übersehen, dass die aus diesem Ausdrucke abgeleiteten Formeln für die Aberration der Fixsterne durch die Weglassung eines in die Excentricität der Erdbahn multiplicirten Gliedes abgekürzt worden sind, indem dieses von α und δ abhängige, aber von dem Orte der Sonne unabhängige Glied sich mit den mittleren Werthen von α und δ vereinigt, und es kein Interesse haben würde, diese davon zu befreien. Für ein bewegliches Gestirn ist aber dieses Glied nicht von beständiger, sondern von veränderlicher Grösse, indem α und δ veränderlich sind; man darf es also hier nicht weglassen, es sei denn, dass man es wegen seiner geringen Grösse vernachlässigen wollte. Indessen ist hierzu keine Veranlassung vorhanden, da man es, wie aus dem Folgenden hervorgeht, ohne Vermehrung der Rechnung vollständig berücksichtigen kann.

6.

Die Coordinaten werde ich jetzt auf den Aequator beziehen, also unter α die Geradeaufsteigung und unter

$$P \cos \delta' \sin (\alpha' - \alpha) = k \left\{ \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dX}{dt} \right) \sin \alpha - \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dY}{dt} \right) \cos \alpha \right\}$$

Dividirt man diese Formel durch jene, lässt man k und die höheren Glieder weg und schreibt man ($\omega = 206264''$;

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\omega} \text{ für } \operatorname{tg} (\alpha' - \alpha)$$

so erhält man:

$$\alpha' - \alpha = \omega k \left\{ \frac{d(x-X)}{dt} \sin \alpha - \frac{d(y-Y)}{dt} \cos \alpha \right\} \sin \delta$$

Durch eine ganz gleiche Behandlung der beiden Gleichungen:

$$P \cos \delta' = \cos \delta - k \left\{ \frac{d(x-X)}{dt} \cos \alpha + \frac{d(y-Y)}{dt} \sin \alpha \right\}$$

$$P \sin \delta' = \sin \delta - k \frac{d(z-Z)}{dt}$$

erhält man ferner:

$$\delta' - \delta = \omega k \left\{ \frac{d(y-Y)}{dt} \sin \alpha \sin \delta - \frac{d(z-Z)}{dt} \cos \delta \right\}$$

δ die Abweichung des Gestirns verstehen. Die Neigung seiner Bahn gegen den Aequator bezeichne ich durch I , die Länge des aufsteigenden Knotens derselben auf der dem Aequator parallel durch die Sonne gelegten Ebene durch N , die Entfernung des Perihels vom aufsteigenden Knoten durch Π , die wahre Anomalie und den Radiusvector des Gestirns durch v und r . Dadurch hat man

$$x = r [\cos N \cos (\Pi + v) - \sin N \sin (\Pi + v) \cos I]$$

$$y = r [\sin N \cos (\Pi + v) + \cos N \sin (\Pi + v) \cos I]$$

$$z = r \sin I \sin (\Pi + v).$$

Die in den Formeln für $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ vorkommenden Differentialquotienten von x, y, z hängen, wie diese Ausdrücke zeigen, von den Differentialquotienten von $r \cos (\Pi + v)$ und $r \sin (\Pi + v)$ ab; man darf nur den ersten Ausdruck des ersten von beiden suchen und, um den des zweiten zu erhalten, darin $\Pi - 90^\circ$ für Π setzen. Wenn man den halben Parameter der Bahn des Gestirns durch p und ihre Excentricität durch e bezeichnet, also

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

setzt, so erhält man

$$\frac{dr}{dv} = \frac{rre}{p} \sin v$$

und hiermit

$$\frac{d[r \cos (\Pi + v)]}{dt} = - [r \sin (\Pi + v) + \frac{dr}{dv} \cos (\Pi + v)] \frac{dv}{dt}$$

$$= - \frac{rr}{p} \frac{dv}{dt} [\sin (\Pi + v) + e \sin \Pi]$$

Wenn man die von GAUSS in seinem bewunderungswürdigen Werke über die Planetenbahnen (p. 2) eingeführte, daselbst durch k bezeichnete Zahl, hier, wo dasselbe Zeichen schon eine andere Bedeutung hat, durch K bezeichnet und unter μ die Masse des Gestirns, die der Sonne als Einheit angenommen, versteht, so hat man

$$r r' \frac{dr}{dt} = K \sqrt{p} \sqrt{1 + \mu}$$

$$\omega k \left(\frac{dx}{dt} \right) = -[(\sin(H + v) + e \sin H) \cos N + (\cos(H + v) + e \cos H) \sin N \cos I] \frac{\kappa \sqrt{1 + \mu}}{\sqrt{p}}$$

$$\omega k \left(\frac{dy}{dt} \right) = -[(\sin(H + v) + e \sin H) \sin N - (\cos(H + v) + e \cos H) \cos N \cos I] \frac{\kappa \sqrt{1 + \mu}}{\sqrt{p}}$$

$$\omega k \left(\frac{dz}{dt} \right) = [\cos(H + v) + e \cos H] \sin I \frac{\kappa \sqrt{1 + \mu}}{\sqrt{p}}$$

Wenn man in diesen Formeln statt $H + v$ die Länge der Erde $= 180^\circ + \odot$, statt H die Länge des Perihels der Erdbahn $= 180^\circ + P$, statt I die Schiefe der Ecliptik $= \omega$, $N = 0$ und statt e, p und μ die sich auf die Erdbahn beziehenden Werthe der ähnlichen Grössen $= e', p', \mu'$ setzt, so ergeben sie:

$$\omega k \left(\frac{dX}{dt} \right) = [\sin \odot + e' \sin P] \frac{\kappa \sqrt{1 + \mu'}}{\sqrt{p'}}$$

$$a = -[\sin(H + v) \cos N + \cos(H + v) \sin N \cos I + e (\sin H \cos N + \cos H \sin N \cos I)] \frac{\kappa \sqrt{1 + \mu}}{\sqrt{p}}$$

$$b = -[\sin(H + v) \sin N - \cos(H + v) \cos N \cos I + e (\sin H \sin N - \cos H \cos N \cos I)] \frac{\kappa \sqrt{1 + \mu}}{\sqrt{p}}$$

$$c = [\sin(H + v) \sin I + e \cos H \sin I] \frac{\kappa \sqrt{1 + \mu}}{\sqrt{p}}$$

für alle Werthe seiner Länge in der Bahn angibt, und wenn man ferner eine ähnliche Tafel für die Erde berechnet, welche

$$a' = -[\sin \odot + e \sin P] \frac{\kappa \sqrt{1 + \mu}}{\sqrt{p}}$$

$$b' = [\cos \odot + e \cos P] \cos \omega \frac{\kappa \sqrt{1 + \mu}}{\sqrt{p}}$$

$$c' = [\cos \odot + e \cos P] \sin \omega \frac{\kappa \sqrt{1 + \mu}}{\sqrt{p}}$$

für die Mittage des fingirten Jahrs (Tabb. Reg. p. XXIV) enthält. Wenn man die Aberration des Planeten für eine gegebene Zeit sucht, für welche man seine Länge in der Bahn berechnet hat, so nimmt man, indem man mit dieser Länge in die erste Tafel eingeht, aus derselben a, b, c , was ohne Mühe geschieht, wenn man der Tafel eine hinreichende Ausdehnung gegeben hat; ferner nimmt man aus der zweiten Tafel, indem man mit der verbesserten Zeit in sie eingeht (Tabb. Reg. Tabula I) die Werthe von a', b', c' . Bezeichnet man dann

und erhält dadurch

$$\frac{d[r \cos(H + v)]}{dt} = -[\sin(H + v) + e \sin H] \frac{K \sqrt{1 + \mu}}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{d[r \sin(H + v)]}{dt} = [\cos(H + v) + e \cos H] \frac{K \sqrt{1 + \mu}}{\sqrt{p}}$$

Wenn man κ für $\omega k K$ schreibt, so ergeben sich hieraus und aus den angeführten Ausdrücken von x, y, z die Ausdrücke ihrer Differentialquotienten, nämlich:

$$\omega k \left(\frac{dY}{dt} \right) = -[\cos \odot + e' \cos P] \cos \omega \frac{\kappa \sqrt{1 + \mu'}}{\sqrt{p'}}$$

$$\omega k \left(\frac{dZ}{dt} \right) = -[\cos \odot + e' \cos P] \sin \omega \frac{\kappa \sqrt{1 + \mu'}}{\sqrt{p'}}$$

7.

Die unmittelbare Berechnung der Aberration für einen Planeten wird sehr leicht, wenn man den Tafeln für denselben eine Tafel hinzufügt, welche die Werthe von

$a + a'$ durch A

$b + b'$ durch B

$c + c'$ durch C

so hat man die Aberration:

$$a' - a = A \sin \alpha \sec \delta - B \cos \alpha \sec \delta$$

$$\delta' - \delta = A \cos \alpha \sin \delta + B \sin \alpha \sin \delta - C \cos \delta$$

Dieselben Vorschriften, welche ich hier für die Berechnung der Aberration in Geradaufsteigung und Abweichung gegeben habe, können auch für die Länge und Breite angewandt werden. Wenn dieses geschehen soll, so werden nur I, N, H auf die Ecliptik bezogen, und statt ω wird 0 gesetzt, wodurch c' verschwindet; α und δ bedeuten dann Länge und Breite.

Der Werth der Constante κ ist $= 20,252$. So erhält man ihn, wenn man den Werth von $k = 493,15$, oder in Theilen des der Gaussischen Zahl K als Zeiteinheit zum Grunde liegenden Tages ausgedrückt,

$$= \frac{493,15}{86,400}$$

annimmt, nach welcher Annahme die Tabulae Regiomont. berechnet worden sind.

Ogleich man die Aberration eines Planeten oder Cometen nach diesen Vorschriften sehr leicht berechnen kann, so wird doch selten Veranlassung vorhanden sein, sie anzuwenden, denn die gebräuchliche Reduction der Zeit ist in der That noch leichter. Mir ist aber zuweilen der Fall vorgekommen, einen einzelnen Ort eines Planeten aus den Tafeln berechnen zu müssen, ohne die Entfernung desselben von der Erde, oder seine tägliche geocentrische Bewegung mit hinreichender Genauigkeit zu kennen. In einem solchen Falle sind Vorschriften zur unmittelbaren Berechnung der Aberration nothwendig; ich glaube daher, dass die Construction der vorgeschlagenen Hilfstafeln für die Planeten und die Erde nicht ganz überflüssig sein würde.

8.

Ich mache noch darauf aufmerksam, dass die Formeln sich für den Fall der parabolischen Bewegung zusammenziehen. Indem dann $\epsilon = 1$ ist, wird

$$\begin{aligned} \sin (II + v) + \epsilon \sin II &= 2 \sin (II + \frac{1}{2} v) \cos \frac{1}{2} v \\ \cos (II + v) + \epsilon \cos II &= 2 \cos (II + \frac{1}{2} v) \cos \frac{1}{2} v \end{aligned}$$

Wenn man $\mu = 0$ annimmt, so findet man leicht

$$a = -[\sin (II + \frac{1}{2} v) \cos N + \cos (II + \frac{1}{2} v) \sin N \cos I] \frac{\kappa \sqrt{2}}{V r}$$

$$b = -[\sin (II + \frac{1}{2} v) \sin N - \cos (II + \frac{1}{2} v) \cos N \cos I] \frac{\kappa \sqrt{2}}{V r}$$

$$c = \cos (II + \frac{1}{2} v) \sin I \frac{\kappa \sqrt{2}}{V r}.$$

Es wird aber kaum eine Veranlassung vorhanden sein, diese Formeln anzuwenden, indem man gewöhnlich eine Ephemeride des Cometen berechnen wird, welche die Entfernung desselben von der Erde und dadurch die bequemere Reduction der Zeit ergibt.

46. Einfluss der Präcession, Nutation und Aberration auf die Resultate mikrometrischer Messungen.*

(Astron. Untersuchungen I. p. 202)

Die Präcession und Nutation haben offenbar keinen Einfluss auf die Entfernung zweier Sterne, ändern aber die Richtungen ihrer Declinationskreise und damit die sich auf diese beziehenden Positionswinkel. Die Aberration erlangt Einfluss sowohl auf die Entfernung, als auch auf die Positionswinkel.

Wenn der Ort eines Sterns, auf die feste Ekliptik und das feste Aequinoctium von 1750 bezogen, durch Länge L und Breite B angegeben wird, welche Angaben unveränderlich sind wenn der Stern keine eigene Bewegung am Himmel besitzt, und wenn der Ort des Aequinoctiums auf dieser festen Ekliptik, zu einer unbestimmten Zeit, durch ψ , der Winkel, in welchem der Aequator sie durchschneidet, durch ω bezeichnet werden, so findet man die Declination δ und den Winkel q des Declinationskreises des Sterns mit dem Breitenkreise der angenommenen Ekliptik, aus den zu dem Dreiecke zwischen ihrem Pole, dem Pole des Aequators und dem Sterne gehörigen Formeln:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \cos \omega \sin B + \sin \omega \cos B \sin (L + \psi) \\ \cos \delta \cos q &= \cos \omega \cos B - \sin \omega \sin B \sin (L + \psi) \\ \cos \delta \sin q &= \sin \omega \cos (L + \psi) \end{aligned}$$

Indem für eine andere Zeit ähnliche Formeln gelten, in welchen die dieser Zeit zugehörigen Werthe von ω und ψ angenommen werden, kann man B und L eliminiren und den Unterschied der Werthe von q für beide Zeiten endlich ausdrücken. Dieses ist bereits in der Einleitung der Tabulae Regiomont. p. VIII. Form. (12) [Abh. 41. p. 298] geschehen, wo der durch C bezeichnete Winkel die Veränderung von q bedeutet. Hier werde ich aber die Aenderungen von q aufsuchen, welche kleinen Aenderungen von ψ und ω entsprechen. — Differentiirt man die Ausdrücke von $\cos \delta \cos q$ und $\cos \delta \sin q$, so erhält man dadurch, nach der Elimination von $d\delta$:

$$\begin{aligned} \cos \delta^2 dq &= d\psi \cdot \sin \omega \{ \sin B \sin \omega - \cos B \cos \omega \sin (L + \psi) \} \\ &\quad + d\omega \cdot \cos B \cos (L + \psi) \end{aligned}$$

Wenn man die Geradaufsteigung des Sterns durch α , und die von dem Durchschnittspunkte des Aequators und der festen Ekliptik von 1750 anfangende durch $\alpha + \lambda$ bezeichnet, hat man

$$\begin{aligned} \sin B \sin \omega - \cos B \cos \omega \sin (L + \psi) &= -\cos \delta \sin (\alpha + \lambda) \\ \cos B \cos (L + \psi) &= \cos \delta \cos (\alpha + \lambda) \end{aligned}$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke:

$$\cos \delta^2 dq = -d\psi \sin \omega \cdot \sin (\alpha + \lambda) + d\omega \cdot \cos (\alpha + \lambda)$$

40

* [Auszug aus 350 d. n. Verz.]
FESSEL'S Abhandlungen. I. Bd.

Der Positionswinkel p eines anderen Sterns an dem gegenwärtig betrachteten wird durch Hinzufügung des Winkels q in den Winkel verwandelt, in welchem der beide Sterne verbindende grösste Kreis den festen Breitenkreis des ersten durchscheidet. Dieser Winkel ist unveränderlich, woraus hervorgeht, dass die Aenderungen von p denen von q gleich sind, aber das entgegengesetzte Zeichen besitzen. Man hat also

$$\cos \delta dp = d\psi \sin \omega \cdot \sin(\alpha + \lambda) - d\omega \cdot \cos(\alpha + \lambda)$$

Die Aenderungen $d\psi$ und $d\omega$ sind zum Theil mit der Zeit fortschreitend, zum Theil entstehen sie aus der Nutation. In jenem Theile derselben ist $d\omega$ sehr klein und

$$\lambda = \frac{d\omega}{\sin \omega \cdot d\psi} *$$

wodurch die eben gegebene Formel sich in

$$= [-6,68299 \sin \Omega + 0,08046 \sin 2 \Omega - 0,53194 \sin 2 \odot - 0,08015 \sin 2 \mathcal{D}] \sin \alpha \sec \delta \\ - [+8,97707 \cos \Omega - 0,08773 \cos 2 \Omega + 0,57990 \cos 2 \odot + 0,08738 \cos 2 \mathcal{D}] \cos \alpha \sec \delta$$

wird.

Die Aberration setzt den mittleren Geradenaufliegungen und Abweichungen der beiden Sterne, deren Entfernung und Positionswinkel durch eine Mikrometerbeobachtung bestimmt werden, $\Delta \alpha$, $\Delta \delta$ und $\Delta \alpha'$, $\Delta \delta'$ hinza, welche Grössen die Ausdrücke:

$$\Delta \alpha \cos \delta = -x \cos \omega \cos \alpha \cos \odot - x \sin \alpha \sin \odot \\ \Delta \delta = x [\cos \omega \sin \alpha \sin \delta - \sin \omega \cos \delta] \cos \odot \\ \quad - x \cos \alpha \sin \delta \sin \odot \\ \Delta \alpha' \cos \delta' = -x \cos \omega \cos \alpha' \cos \odot - x \sin \alpha' \sin \odot \\ \Delta \delta' = x [\cos \omega \sin \alpha' \sin \delta' - \sin \omega \cos \delta'] \cos \odot \\ \quad - x \cos \alpha' \sin \delta' \sin \odot$$

haben, worin $x = 20,255$ ist.

Die Einflüsse derselben auf die Entfernung s und die beiden Positionswinkel p und $p' + 180^\circ$ an beiden Sternen findet man durch die Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\Delta s = (\Delta \alpha' - \Delta \alpha) \cos \delta' \sin p' + \Delta \delta' \cos p' \\ \quad - \Delta \delta \cos p \\ \sin s \Delta p = (\Delta \alpha' - \Delta \alpha) \cos \delta' \cos p' - \Delta \delta' \sin p' \\ \quad + \Delta \delta \sin p \cos s \\ \sin s \Delta p' = (\Delta \alpha' - \Delta \alpha) \cos \delta \cos p + \Delta \delta \sin p \\ \quad - \Delta \delta' \sin p' \cos s$$

Allein, da man immer die halbe Summe von p und p' aus einer Beobachtung erkennt, hat nur die Verfolgung der halben Summe der beiden letzten Formeln ein Interesse, weshalb ich sie zu

*) Tabulae Regiomontanae p. X. [Abh. 41. p. 299.]

verwandelt, und den jährlichen Einfluss der Präcession auf den Positionswinkel

$$\frac{dp}{dt} = n \sin \alpha \sec \delta$$

ergibt, wo

$$n = \frac{d\psi}{dt} \sin \omega = 20,06442 - t.0,0000970204 **)$$

ist.

Die Nutation erfordert, dass man

$$d\psi \sin \omega = -6,68299 \sin \Omega + 0,08046 \sin 2 \Omega \\ \quad - 0,53194 \sin 2 \odot - 0,08015 \sin 2 \mathcal{D} \\ d\omega = +8,97707 \cos \Omega - 0,08773 \cos 2 \Omega \\ \quad + 0,57990 \cos 2 \odot + 0,08738 \cos 2 \mathcal{D}$$

und $\lambda = 0$ annehme**), wodurch ihr Einfluss auf den Positionswinkel

$$\sin s \cdot \frac{1}{2}(\Delta p + \Delta p') = (\Delta \alpha' - \Delta \alpha) \frac{1}{2} \{ \cos \delta' \cos p' + \cos \delta \cos p \} \\ \quad - \left\{ \Delta \delta' \sin p' - \Delta \delta \sin p \right\} \frac{1 + \cos s}{2}$$

vereinigen werde. — Man kann beide Ausdrücke, sowohl den von Δs , als auch den von $\frac{1}{2}(\Delta p + \Delta p')$, so schreiben, dass sie aus zwei Theilen zusammengesetzt erscheinen, deren jeder sich nur auf einen der Sterne beziehende Grössen enthält; dieses wird dadurch erlangt, dass

$$\cos \delta' \sin p' = \cos \delta \sin p \\ \cos \delta' \cos p' = \cos \delta \cos p \cos s - \sin \delta \sin s \\ \cos \delta \cos p = \cos \delta' \cos p' \cos s + \sin \delta' \sin s$$

also

$$\frac{1}{2} \{ \cos \delta' \cos p' + \cos \delta \cos p \} = \cos \delta \cos p \frac{1 + \cos s}{2} - \frac{1}{2} \sin \delta \sin s \\ = \cos \delta' \cos p' \frac{1 + \cos s}{2} + \frac{1}{2} \sin \delta' \sin s$$

geschrieben wird. Bezeichnet man

$$\Delta \alpha \cos \delta \sin p + \Delta \delta \cos p \dots \dots \dots \text{ durch } u \\ \Delta \alpha \cos \delta \cos p \frac{1 + \cos s}{2} - \Delta \alpha \sin \delta \frac{1}{2} \sin s \\ \quad - \Delta \delta \sin p \frac{1 + \cos s}{2} \dots \dots \dots v \\ \Delta \alpha' \cos \delta' \sin p' + \Delta \delta' \cos p' \dots \dots \dots u' \\ \Delta \alpha' \cos \delta' \cos p' \frac{1 + \cos s}{2} + \Delta \alpha' \sin \delta' \frac{1}{2} \sin s \\ \quad - \Delta \delta' \sin p' \frac{1 + \cos s}{2} \dots \dots \dots v'$$

**) Tabulae Regiomontanae Form. (16.) [Abh. 41. p. 299.]
***) Ebdenselbst Form. (23.) [Abh. 43. p. 303.]

so hat man also:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}s &= u' - v' \\ \sin s \frac{1}{2}(\mathcal{A}p + \mathcal{A}p') &= v' - v \end{aligned}$$

welche Formeln nun auf ihre einfachste Gestalt zu bringen sind. Diese Reduction erlangt man am leichtesten, wenn man die Lage des durch beide Sterne gehenden grössten Kreises in die Betrachtung einführt;

$$\begin{aligned} u &= -x \cos \odot \{ \cos \omega (\cos \alpha \sin p - \sin \alpha \cos p \sin \delta) + \sin \omega \cos p \cos \delta \} - x \sin \odot \{ \sin \alpha \sin p + \cos \alpha \cos p \sin \delta \} \\ v &= -x \cos \odot \left\{ \frac{1+\cos s}{2} \cos \omega (\cos \alpha \cos p + \sin \alpha \sin p \sin \delta) - \frac{1+\cos s}{2} \sin \omega \sin p \cos \delta - \frac{1}{2} \sin s \cos \omega \cos \alpha \operatorname{tg} \delta \right\} \\ &\quad - x \sin \odot \left\{ \frac{1+\cos s}{2} (\sin \alpha \cos p - \cos \alpha \sin p \sin \delta) - \frac{1}{2} \sin s \cdot \sin \alpha \operatorname{tg} \delta \right\} \end{aligned}$$

und für u' und v' erhält man ähnliche Ausdrücke, in welchen $\alpha', p', \delta', -s$ statt α, p, δ, s geschrieben werden. — Das Dreieck zwischen dem durch beide Sterne gehenden grössten Kreise, dem Declinationskreise und dem Aequator ergibt indessen:

nämlich seine Neigung i , die Geradaufsteigung n des Punktes wo er den Aequator durchschneidet, um von der südlichen Halbkugel in die nördliche überzugehen und die Entfernungen dieses Punktes von beiden Sternen $h - \frac{1}{2}s$ und $h + \frac{1}{2}s$.

Wenn man in den Ausdrücken von u und v die Ausdrücke von $\mathcal{A}s$ und $\mathcal{A}\delta$ substituirt, werden sie:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha-n) \sin p + \cos(\alpha-n) \cos p \sin \delta &= \sin(h - \frac{1}{2}s) \\ \cos(\alpha-n) \sin p - \sin(\alpha-n) \cos p \sin \delta &= \cos(h - \frac{1}{2}s) \cos i \\ \cos p \cos \delta &= \cos(h - \frac{1}{2}s) \sin i \\ \sin(\alpha-n) \cos p - \cos(\alpha-n) \sin p \sin \delta &= 0 \\ \cos(\alpha-n) \cos p + \sin(\alpha-n) \sin p \sin \delta &= \sin i \\ \sin p \cos \delta &= \cos i \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin p + \cos \alpha \cos p \sin \delta &= \sin(h - \frac{1}{2}s) \cos n + \cos(h - \frac{1}{2}s) \sin n \cos i \\ \cos \alpha \sin p - \sin \alpha \cos p \sin \delta &= -\sin(h - \frac{1}{2}s) \sin n + \cos(h - \frac{1}{2}s) \cos n \cos i \\ \sin \alpha \cos p - \cos \alpha \sin p \sin \delta &= \sin n \sin i \\ \cos \alpha \cos p + \sin \alpha \sin p \sin \delta &= \cos n \sin i \end{aligned}$$

folgen. Man hat also

$$\begin{aligned} u &= -x \cos \odot \{ \sin(h - \frac{1}{2}s) \cos \omega \sin n - \cos(h - \frac{1}{2}s) (\cos \omega \cos n \cos i + \sin \omega \sin i) \} \\ &\quad - x \sin \odot \{ \sin(h - \frac{1}{2}s) \cos n + \cos(h - \frac{1}{2}s) \sin n \cos i \} \\ v &= -x \cos \odot \left\{ \frac{1+\cos s}{2} (\cos \omega \cos n \sin i - \sin \omega \cos i) - \frac{1}{2} \sin s \cos \omega \cos \alpha \operatorname{tg} \delta \right\} \\ &\quad - x \sin \odot \left\{ \frac{1+\cos s}{2} \sin n \sin i - \frac{1}{2} \sin s \sin \alpha \operatorname{tg} \delta \right\} \end{aligned}$$

und durch die Subtraction dieser Ausdrücke von den ähnlichen für u' und v' ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}s &= 2x \sin \frac{1}{2}s \cos \odot \{ \cos \omega [\cos h \sin n + \sin h \cos n \cos i] + \sin \omega \sin h \sin i \} - 2x \sin \frac{1}{2}s \sin \odot \{ \cos h \cos n - \sin h \sin n \cos i \} \\ \sin s \frac{1}{2}(\mathcal{A}p + \mathcal{A}p') &= -x \sin s \cos \odot \cos \omega \frac{1}{2} [\cos \alpha \operatorname{tg} \delta + \cos \alpha' \operatorname{tg} \delta'] - x \sin s \sin \odot \frac{1}{2} [\sin \alpha \operatorname{tg} \delta + \sin \alpha' \operatorname{tg} \delta'] \end{aligned}$$

Wenn man die Geradaufsteigung und Abweichung des in der Mitte zwischen beiden Sternen liegenden Punktes durch α_0 und δ_0 bezeichnet, hat man

$$\begin{aligned} \cos h \cos n &= \cos \delta_0 \cos(\alpha_0 - n) \\ \sin h \cos i &= \cos \delta_0 \sin(\alpha_0 - n) \\ \sin h \sin i &= \sin \delta_0 \end{aligned}$$

wodurch die erste, den Einfluss der Aberration auf die Entfernung ergebende Formel, sich in

$$\mathcal{A}s = 2x \sin \frac{1}{2}s \cos \odot \{ \cos \omega \cos \delta_0 \sin \alpha_0 + \sin \omega \sin \delta_0 \} - 2x \sin \frac{1}{2}s \sin \odot \cos \delta_0 \cos \alpha_0$$

verwandelt. Die zweite ergibt den Einfluss der Aberration auf den Positionswinkel

$$\frac{1}{2}(\mathcal{A}p + \mathcal{A}p') = -x \cos \odot \cos \omega \frac{1}{2} [\cos \alpha \operatorname{tg} \delta + \cos \alpha' \operatorname{tg} \delta'] - x \sin \odot \frac{1}{2} [\sin \alpha \operatorname{tg} \delta + \sin \alpha' \operatorname{tg} \delta']$$

* Aus dem Ausdrucke von $\mathcal{A}s$ geht hervor, dass alle Durchmesser eines um einen beliebigen Punkt am Himmel beschriebenen Kreises, wie auch ihre Richtung sein mag, durch die Aberration in einem gleichen Verhältnisse verändert werden. Wenn die Entfernung s klein ist, so dass ihr Quadrat vernachlässigt werden kann, können auch α und δ mit α_0 und δ_0 verwechselt

werden, woraus hervorgeht, dass auch die Halbmesser des Kreises eine von ihrer Richtung unabhängige Veränderung erfahren; unter derselben Bedingung wird auch der Ausdruck des Einflusses der Aberration auf den Positionswinkel für alle Richtungen gleich. Ein um jeden beliebigen Punkt beschriebener Kreis von kleinem Halbmesser wird daher durch die Aberration

vergrößert oder verkleinert, ohne sich in eine andere Curve zu verwandeln; auch wird er dadurch um seinen Mittelpunkt gedreht, ohne dass der Winkel zweier beliebigen seiner Radien eine Aenderung erführe.*)

Die jetzt entwickelten Einflüsse der Präcession, Nutation und Aberration auf die beiden Resultate einer mikrometrischen Beobachtung können durch die Hilfe derselben Größen A, B, C, D , deren Logarithmen Tab. VIII der Tab. Regiom. für das mit 1750 anfangende und sich mit 1850 endigende Jahrhundert angibt, berechnet werden. Wenn man folgende Zeichnungen einführt:

$$\begin{aligned} \gamma &= -2 \sin \frac{1}{2} s \{ \cos \delta_0 \sin \alpha_0 + \operatorname{tg} \omega \sin \delta_0 \} \\ \delta &= 2 \sin \frac{1}{2} s \cos \delta_0 \cos \alpha_0 \\ \alpha' &= n \sec \delta_0 \sin \alpha_0 \\ \beta' &= \sec \delta_0 \cos \alpha_0 \\ \gamma' &= \operatorname{tg} \delta_0 \cos \alpha_0 \\ \delta' &= \operatorname{tg} \delta_0 \sin \alpha_0 \end{aligned}$$

so ist

1. die beobachtete Entfernung

$$= \text{der wahren} + C \cdot \gamma + D \cdot \delta,$$

2. der beobachtete Werth von $\frac{1}{2}(p + p') =$ dem wahren für den Anfang des Jahres

$$+ A \cdot \alpha' + B \cdot \beta' + C \cdot \gamma' + D \cdot \delta'$$

Die jährliche Veränderung von $\frac{1}{2}(p + p')$ ist $= n \sec \delta_0 \sin \alpha_0$; soll sie angewandt werden, um die Veränderung während eines längeren Zeitraums dadurch zu berechnen, so sind die Werthe von δ_0 und α_0 für seine Mitte zu nehmen.

[Literatur der Astr. Nachr. über Aberration, Nutation, Präcession. — TITTEL, Theoria ab. fixarum (Bd. 3); HELIOLIXSTEIN, Argumente der Ab. und Nut. für entfernte Zeiten (3); BAILY, Nut.-Taf. (3); BRINKLEY, Soli-Lunari-Præc. (4), über BESSEL's Præc., Eig.-Bew. des Polaris (5); SCHEMACHER, Anzeige der astron. Helftafeln (6); KNOBE, tägliche Ab. (7); HANSEN, AR. und Decl. aus der Zeit T für die $T + t$ (10); ARRY, Lage der Ekliptik (12); BÜSCH, Ab. und Nut. aus BRADLEY's Beob. (13) (zu BESSEL, Astr. Nachr. Nr. 34 und 83); STRUVE, Ab.-Constante (18); STRUVE und SCHIDLOFSKY, Nut.-Const. (18); HOUZEAT, Wirkung der Ab. in Doppelstern-Systemen (21); NICOLAI, Tafeln für Præc., Nut. und Ab. nach den Pulkowaer Constanten (21); STRUVE, Bericht über die Pulkowaer Constanten der Ab. und Præc., PETERS' Num. const. nut., LUNDHOLM's Bestimmungen aus Polaris (21); PETERS, Resultate aus Polarstern-Beob. am Pulkowaer Verticalkreis (22); D'ARREST, über ein Bessel'sches Problem, Ab. betr. (59) (zu Astr. Unterr. I. p. 207); LEHMANN, Præc. und Säcular-Aenderung der Schiefe (63); OPPOLZER, zur Berechnung der Ab. (65, 66); NEWCOMB, Bemerkung hierzu (67); OPPOLZER, Bemerkungen zu LEVIERER's Tafeln und Constanten (67); HOLK, über die Const. der Ab. (70, 73); KLIEBERG, über dieselbe (70); CHALLIS, zur Theorie der Ab. (74).]

47. Berechnung des Orts eines Gestirnes aus beobachteten Alignements mit 4 Sternen.**)

(BOVE, Jahrb. f. 1821, p. 170.)

Herr DELAMBRE hat in seiner an trigonometrischen Formeln so reichen Astronomie eine neue Auflösung dieser Aufgabe gegeben, indessen scheint die folgende noch etwas einfacher zu sein.

Wenn die Rectascensionen oder Längen zweier Sterne, mit welchen das zu bestimmende Gestirn in einem grössten Kreise steht, durch a und a' , ihre Declinationen oder Breiten durch b und b' bezeichnet werden; dieselben Angaben für zwei andere Sterne durch α und α' und β und β' , für das dem Orte nach unbekannte Gestirn durch A und B , so ist die Bedingung, dass das letztere in beiden grössten

Kreisen liegt, bekanntlich in folgenden beiden Gleichungen enthalten:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{tg} b \sin(a' - A) - \operatorname{tg} B \sin(a' - a) + \operatorname{tg} b' \sin(A - a) \\ 0 &= \operatorname{tg} \beta \sin(\alpha' - A) - \operatorname{tg} B \sin(\alpha' - \alpha) + \operatorname{tg} \beta' \sin(A - \alpha) \end{aligned}$$

Schreibt man um abzukürzen:

$$\begin{aligned} a' + a &= 2s; & a' - a &= 2d \\ \alpha' + \alpha &= 2\sigma; & \alpha' - \alpha &= 2\delta \end{aligned}$$

so verwandeln sich diese Gleichungen in folgende:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{tg} b \sin(s - A + d) - \operatorname{tg} B \sin 2d + \operatorname{tg} b' \sin(A - s + d) \\ 0 &= \operatorname{tg} \beta \sin(\sigma - A + \delta) - \operatorname{tg} B \sin 2\delta + \operatorname{tg} \beta' \sin(A - \sigma + \delta) \end{aligned}$$

und man erhält aus ihnen

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} B &= \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} b'}{2 \sin d} \sin(s - A) + \frac{\operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b'}{2 \cos d} \cos(s - A) \\ \operatorname{tg} B &= \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta'}{2 \sin \delta} \sin(\sigma - A) + \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta'}{2 \cos \delta} \sin(\sigma - A) \end{aligned}$$

*) [Vgl. den Aufsatz von D'ARREST, Astr. Nachr. 59, p. 231.]

***) [127 d. a. Verz. — Den 11. Aug. 1818 eingesandt. — Br. m. O. II. 108 (O.). — Vgl. auch WOLFFERS, ARen und Declinationen aus Sternabständen. Astr. Nachr. 13, p. 62.]

Setzt man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin(b-b')}{2 \sin \delta \cos \beta \cos b'} &= u \sin v \sin \alpha'; \\ \frac{\sin(b+b')}{2 \cos \delta \cos \beta \cos b'} &= u \sin v \cos \alpha'; \\ \frac{\sin(\beta-\beta')}{2 \sin \delta \cos \beta \cos \beta'} &= u \cos v \sin \alpha'; \\ \frac{\sin(\beta+\beta')}{2 \cos \delta \cos \beta \cos \beta'} &= u \cos v \cos \alpha' \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

so erhält man unmittelbar aus den beiden letzten Gleichungen,

$$\operatorname{tg} B = u \sin v \cos(A-s+\alpha) = u \cos v \cos(A-s+\alpha') (2)$$

und hieraus auf bekannte Art

$$\operatorname{tg}[A-\frac{1}{2}(s-w+\sigma-\alpha')] = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}[s-w-\sigma+\alpha'] \operatorname{tg}(45^\circ-v) (3)$$

Man wird daher am bequemsten rechnen, wenn man aus den vier Formeln (1) u , v , α , α' bestimmt dann

$$s - \alpha = h; \quad \sigma - \alpha' = h'$$

setzt und aus (3)

$$\operatorname{tg}[A - \frac{1}{2}(h+h')] = \operatorname{cot} \frac{1}{2}(h-h') \operatorname{tg}(45^\circ - v),$$

endlich aus (2)

$$\operatorname{tg} B = u \sin v \cos(A-h) = u \cos v \cos(A-h')$$

sucht. — Eine Zweideutigkeit kann nie stattfinden, da immer nur einer der beiden Durchschnitte der grössten Kreise über dem Horizonte liegt.

48. Ueber die Bestimmung der Polhöhe durch das Passagen-Instrument.*

(Astr. Nachr. 3, p. 9. — Aus einem Briefe an SCHUMACHER vom 2. Febr. 1824.)

Als ich Ihnen im Jahre 1819 in Lauenburg die Meinung äusserte, dass es vielleicht nicht unvortheilhaft sein würde, die Polhöhenunterschiede behufs der Gradmessungen durch ein Passagen-Instrument, welches sich etwa senkrecht auf den Meridian bewegt, zu bestimmen, da gründete sich diese Meinung auf die Schwierigkeit, welche man bei der richtigen Beobachtung der Zenithdistanzen oft gefunden hat. Diese Schwierigkeit ist nun allerdings gehoben, wenn man den Ramsden'schen Zenithsector anwenden kann, welcher zur Beobachtung der Polhöhenunterschiede bei der englischen Gradmessung diente, und welchen auch Sie und GAUSS bei Ihrer ähnlichen grossen Unternehmung benutzen; nicht minder ist sie gehoben, wenn man einen Reichenbach'schen Meridiankreis aufstellen kann, um die Zenithdistanzen von Sternen, welche dem Scheitelpunkte nahe vorbeigehen, zu messen, denn für solche Sterne gibt das Instrument, auch ohne die für grössere Zenithdistanzen nothwendigen Untersuchungen, die richtigen Resultate. Ich würde den durch solche Hilfsmittel erhaltenen Polhöhenunterschieden das unbedingteste Zutrauen nicht versagen und halte daher jeden anderen Vorschlag jetzt eigentlich für überflüssig.

Wollte man aber entweder mit weit geringerer Ausrüstung eine grosse Genauigkeit und Sicherheit

erreichen, oder bereits erhaltene Resultate auf eine gänzlich verschiedene Weise prüfen, so zweifle ich nicht, dass dieses durch das von mir vorgeschlagene Mittel geleistet werden könnte. Meine Absicht war, die Kreistheilungen ganz zu vermeiden und dagegen durch die Uhr zu messen. Dieses führe ich nun auf Ihren Wunsch weiter aus.

Ich nehme ein Passagen-Instrument an, dessen Axe horizontal und dessen Collimation berichtigt ist, so dass der mittlere Faden einen Verticalkreis beschreibt; die Axe desselben soll etwa im Meridian liegen, so dass der Verticalkreis etwa von Osten nach Westen geht, und daher die Parallelen aller Sterne, welche zwischen dem Aequator und dem Zenith culminiren, zweimal durchschneidet.

Die Beobachtung der beiden Zeiten T und T' , in welchen der Stern durch den Faden des Fernrohrs geht, wird die Polhöhe oder auch die Zenithdistanz des Sterns im Meridian geben, und aus der Wiederholung derselben Beobachtung an einem andern Orte wird man den Unterschied der Polhöhen oder Zenithdistanzen beinahe unabhängig von der angenommenen Declination des Sterns erhalten. Die Zeiten T und T' aber dürfen nur an einer der Sternzeit folgenden Uhr angemerkt werden; die Verbesserung dieser Uhrzeit, um sie auf Sternzeit zu bringen, braucht nicht bekannt zu sein.

Um inzwischen die Eigenthümlichkeiten dieser Methode im Allgemeinen zu zeigen, werde ich die

*) [180 d. a. Verz. — Vgl. die spätere Abb. „über den allgemeinen Gebrauch des Passageninstruments“ unter Theorie der Instrum. Ferner in den Astron. Nachr. von HANSEN Bd. 3, 6, 9; HANSTEN 6; STRUBE 17, 20; ÅSTRAND 6.]

Voraussetzung, dass der Verticalkreis, welchen das Instrument beschreibt, nahe von Osten nach Westen gerichtet ist, nicht gleich Anfangs in die Rechnung aufnehmen, sondern die Ausdrücke der Polhöhe und der Fehler, welche aus einigen Rechnungselementen hervorgehen können, unabhängig von dieser Voraussetzung angeben.

Die Verbesserungen der Uhrzeit bezeichne ich durch τ und τ' , und nehme sowohl diese, als die beobachteten Uhrzeiten selbst, in Graden, Minuten und Secunden; die gerade Aufsteigung und Abweichung des Sterns durch α und δ ; die Polhöhe durch φ . Nach diesen Bezeichnungen sind die beiden Stundenwinkel des Sterns (östlich negativ)

$$t = T + \tau - \alpha, \quad t' = T' + \tau' - \alpha$$

und die Cotangente des Azimuths ist

$$= \frac{\cos t \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi}{\cos \delta \sin t} = \frac{\cos t' \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi}{\cos \delta \sin t'}$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen das Azimuth, so erhält man

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \delta \frac{\cos \left(\frac{t'+t}{2} \right)}{\cos \left(\frac{t'-t}{2} \right)}$$

oder, wenn man die Ausdrücke von t' und t schreibt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \delta \frac{\cos \left(\frac{T'+\tau'+T+\tau-\alpha}{2} \right)}{\cos \left(\frac{T'+\tau'-T-\tau}{2} \right)}$$

Nimmt man nun an, dass δ , α , τ' , τ fehlerhaft bekannt sind und die Verbesserungen $d\delta$, $d\alpha$, $d\tau'$, $d\tau$ erfordern, so hat man die daraus entstehende Verbesserung des nach der eben gegebenen Formel berechneten φ :

$$d\varphi = d\delta \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta} + d\alpha \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi \operatorname{tg} \frac{1}{2}(t'+t) \\ - d\tau' \frac{\sin 2\varphi \sin t'}{2(\cos t' + \cos t)} - d\tau \frac{\sin 2\varphi \sin t}{2(\cos t' + \cos t)}$$

Setzt man nun voraus, dass das Instrument etwa bis auf eine Minute richtig sich von Osten nach Westen bewegt, so kann der Cosinus im Zähler des Ausdrucks von $\operatorname{tg} \varphi = 1$ gesetzt werden und dann erhält man

$$d\varphi = d\delta \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta} + \frac{1}{2}(d\tau' - d\tau) \sin 2\varphi \operatorname{tg} \frac{1}{2}(T'+\tau'-T-\tau)$$

woraus hervorgeht, dass ein Fehler im Unterschiede der Verbesserungen der Uhrzeit, welcher desto geringeren Einfluss hat, je kleiner $T'-T$ ist, für den Fall, in welchem diese Methode allein angewandt werden soll, nämlich wenn der Stern nicht sehr weit vom Scheitel-

punkte culminirt, als unbedeutend angesehen werden kann; ein solcher Fehler würde aus dem unrichtig angenommenen Gange der Uhr entstehen, allein man darf voraussetzen, dass dieser immer viel genauer bekannt ist, als bei dieser Beobachtungsart eigentlich nöthig wäre.

Es bleibt daher nur der Fehler der Declination übrig und dieser gibt

$$d\varphi = d\delta \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta};$$

für einen Stern, welcher durch das Zenith geht, hat die Polhöhe genau den Fehler der Declination; für jeden südlich vom Zenith culminirenden Stern hat sie, wenigstens in unseren Breiten, einen grösseren. Wenn diese Methode z. B. angewandt werden sollte, um den Unterschied der Polhöhen zweier Oerter unter 51° und 56° zu bestimmen und man einen Stern wählte, welcher an dem südlichsten Orte durch den Scheitelpunkt geht, so wäre der Fehler bei diesem $= d\delta$, bei dem nördlichen Orte $= 1,055 d\delta$, also der Fehler des Polhöhenunterschiedes $= 0,055 d\delta$, oder selbst für $d\delta = 2''$ nur $0,11$. Wenn beide Oerter nach Süden und Norden gleichweit vom 45 . Breitengrade abständen, so würde der Unterschied streng richtig gefunden werden. Es ist übrigens zu bezweifeln, ob man die absolute Grösse der Theilungen eines Zenithsectors so genau bestimmen kann, dass bei einem Bogen von 5° nicht eine grössere Unrichtigkeit als $0,11$ zu fürchten ist; wenigstens halte ich dieses für weit schwerer, als die Bestimmung der Declination eines Sternes bis auf $2''$.

Was dieser Methode zur besonderen Empfehlung gereichen könnte, ist ihre Unabhängigkeit von jedem möglichen Fehler des Instruments. Wenn die Collimation nicht gehörig berichtigt ist, wenn die beiden Cylinder der Axe ungleiche Durchmesser haben, wenn das Fernrohr oder die Axe sich biegt u.s.w., so erhält man dennoch ein ganz richtiges Resultat, falls man entweder zwischen den beiden Beobachtungen die Axe umlegt oder an einem Tage bei dieser, an einem andern bei jener Lage der Axe beobachtet und aus beiden das Mittel nimmt. Der Erfolg hängt allein von der Güte des Fernrohres und der Sorgfalt im Nivelliren der Axe ab. — Auch scheint es mir, dass diejenigen Liebhaber der Astronomie, welche mit mittelmässigen Winkelmessinstrumenten ausgerüstet sind, durch die Anwendung eines kleinen, etwa tragbaren Passagen-Instruments, selbst wenn es nicht stärker wäre als die gewöhnlichen Fernrohre an den kleinen Wiederholungskreisen, eine sicherere Bestimmung ihrer Polhöhe erlangen würden. — Die Anwendung derselben Methode zur Bestimmung

der Declinationen unter der Voraussetzung der bekannten Polhöhe gewährt den Vortheil, ganz unabhängig von der Strahlenbrechung zu sein; sie kann aber nur für Sterne nördlich vom Aequator stattfinden.

Was diesem Vorschlage für Sie noch mehr Interesse geben muss, ist, dass Ihr hochberühmter Landsmann OLAVS RÖMER, der in seinen Ideen über astronomische Beobachtung und Instrumente selbst den Späteren so oft und bedeutend voreilte, bereits vor 120 Jahren ein Passagen-Instrument von Osten nach Westen aufgestellt hat; HORREBOW beschreibt dasselbe im 3. Theile seiner Werke S. 228—240 und gibt die un-

vollkommene Ausführung des Instruments als den Grund an, weshalb es nicht wirklich zur Beobachtung der Declinationen, wozu es bestimmt war, angewandt wurde. Das eben genannte Werk (welches ich vor ein paar Wochen zu erhalten das Glück hatte) enthält so viel Treffliches von RÖMER, dass ich es als eins der wichtigsten und besten Werke der praktischen Astronomie ansehe, und diese Gelegenheit benutze, um darauf aufmerksam zu machen, wie viel in der Beobachtungskunst schon zu RÖMER'S Zeit hätte geleistet werden können, wenn man nicht den von ihm betretenen Weg wieder verlassen hätte.

49. Ueber die Neigung der Ebene des Saturnsringes.*

(BOON'S Jahrb. f. 1829, p. 176.)

1.

Bereits im Jahre 1812 habe ich zu zeigen gesucht,**) dass die bisher allgemeine Annahme der Neigung der Ebene des Saturnsringes gegen die Ekliptik = $31^{\circ} 20'$ mehr auf einer stillschweigenden Ueber-einkunft der Schriftsteller, als auf wirklichen Beobachtungen beruht und demnach eine neue Untersuchung erfordert. Ich war daher bemüht, im Jahre 1811, um die Zeit der grössten Oeffnung der Ellipse, beide Axen derselben zu messen, wodurch ich die Neigung gegen die Ekliptik = $28^{\circ} 34' 6''$ und gegen die Saturnsbahn = $27^{\circ} 12' 26''$ erhielt. Diese Messungen geschahen mit dem Objectivmikrometer eines nur 16zölligen, aber guten, Dollond'schen Fernrohres; wenn dieses schwache Hilfsmittel auch keine sehr genaue Bestimmung erwarten lässt, und ich daher, in meinem erwähnten Aufsätze, die Beobachtung des Winkels der Ringlinie mit dem Declinationskreise, um die Zeiten des Durchganges des Saturn durch den Knoten des Ringes, als ein sichereres Mittel, die Neigung zu bestimmen vorschlug, so konnte ich doch nicht zweifeln, dass die kleinere Neigung der Wahrheit weit näher sei, als die ältere Annahme, weshalb ich auch jene dem Versuche, die Bewegung des (älteren) IV. Trabanten den Beobachtungen näher anzupassen, zum Grunde legte.

Vor Kurzem habe ich das Vergnügen gehabt, aus Nr. 97 der Astr. Nachr. des Herrn Prof. und Ritters SCHUMACHER zu ersehen, dass Hr. Prof. STRUVE sein grosses und vortreffliches Fernrohr auch zur Messung des Axenverhältnisses des Saturnsringes angewandt, und daraus die Neigung gegen die Ekliptik = $28^{\circ} 59'$ berechnet hat, welche mit dem Resultate meiner Beobachtungen nahe genug stimmt, um uns zu versichern, dass die ältere Annahme viel zu gross ist. Obgleich nun hierdurch der Zweifel, welchen die geringe optische Stärke des von mir angewandten Fernrohres vielleicht übrig lassen könnte, als beseitigt angesehen werden kann, so glaube ich doch, dass es nicht unnütz sein wird, eine Reihe von Beobachtungen der Neigung des Ringes bekannt zu machen, welche ich 1818 anstellte, und welche auf der Messung des Winkels der Ringlinie mit dem Declinationskreise beruhen.

2.

Zu diesen Beobachtungen wurde dasselbe Dollond'sche Aequatorial-Instrument angewandt, auf welchem das oben erwähnte 16zöllige Fernrohr befindlich ist. In das stärkste Ocular desselben wurde ein Faden gespannt, und dieser, durch Drehung des Instruments um seine verschiedenen Axen, so bewegt, dass er der Ringlinie parallel wurde. Der Winkel des auf den Faden senkrechten grössten Kreises mit dem Vertikalkreise, welchen ich durch q bezeichnen und positiv annehmen werde, wenn dieser grösste Kreis auf der linken Seite bei dem Scheitelpunkte vorbei-

*) [215 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 270. 286 (O.). 291. — Messungen von STRUVE in Astron. Nachr. 5. p. 7 und 6. p. 392.]

**) Königsb. Arch. für Naturwiss. u. Mathem. II. Stück. — [Abb. 17. p. 110 ff.]

geht, wurde dann durch die Angaben der Nonien des Instruments bestimmt; und da er dem Winkel der kleinen Axe des Ringes mit dem Verticalkreise gleich ist, so konnte hieraus der Winkel dieser Axe mit dem Declinationskreise berechnet werden.

Bei der Beobachtung verfuhr ich folgendermassen: ich stellte den Declinationskreis des Instruments senkrecht auf den Meridian desselben, also so wie das gehörig aufgestellte Instrument steht, wenn es auf einen Stern gerichtet ist, dessen Stundenwinkel = 90° ; dann bewegte ich die Polaraxe des Instruments so lange, bis der Faden der Ringlinie parallel wurde und las die Angabe des Nonius an der Polaraxe = u ab, wo u die Höhe über dem Horizonte bezeichnet, nach welcher diese Axe gerichtet ist. Ferner beobachtete ich den Stand u' der Polaraxe, für welchen der Faden dem Horizonte parallel wurde; dieses geschah am Tage durch einen irdischen Gegenstand im Horizonte, über welchen der Faden durch Drehung des Instruments um seine Verticalaxe fortbewegt wurde. — Wenn man den Winkel des Fadens des auf den Stundenwinkel = 90° gestellten Fernrohrs, mit der Polaraxe, durch c bezeichnet, und die Höhen u und u' auf der linken Seite des Zeniths kleiner als 90° , auf der rechten grösser als 90° zählt, so hat man

$$\sin(q - c + 90^\circ) : \sin(90^\circ - u) = 1 : \sin z,$$

wo z die Zenithdistanz des Planeten bezeichnet; ferner

$$c = u', \text{ also } \sin z \cos(u' - q) = \cos u.$$

Bezeichnet man den parallaktischen Winkel des Planeten durch q' , den Winkel der kleinen Axe der Ringellipse mit dem Declinationskreise, positiv angenommen wenn der nördliche Theil der kleinen Axe sich östlich vom Declinationskreise entfernt, durch p , so ist $p = q + q'$, oder $q = p - q'$, und man hat, zur Erfindung von p , die Gleichung

$$\cos(u' - p + q') = \frac{\cos u}{\sin z}$$

wo z und q' aus den bekannten Formeln

$$\sin z \sin q' = \cos \varphi \sin t$$

$$\sin z \cos q' = \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t$$

gefunden worden, in welchen φ die Polhöhe, δ die Declination und t den westlichen Stundenwinkel bezeichnen.

3.

Auf diese Art habe ich folgende Beobachtungen gemacht:*)

*) [Die genaueren Angaben der Sternzeiten sowie die ihnen entsprechenden u , ferner die Winkel u' und die Einzelwerthe der p sind der Kürze wegen weggelassen.]

1818.	St.-Z.	p	Beob.	1818.	St.-Z.	p	Beob.
Aug. 13.	20,7	4' 46,0	4	Sept. 27.	23,6	6' 25,1	6
20.	20,5	4 42,2	5	29.	23,6	5 44,9	4
26.	20,9	5 52,6	4	30.	23,6	6 13,9	6
31.	20,3	5 40,7	6	Oct. 1.	23,4	5 23,3	6
Sept. 1.	23,6	5 4,6	5	3.	23,5	5 20,8	6
2.	23,5	5 18,0	6	7.	23,6	6 19,2	5
3.	23,6	5 36,0	6	8.	23,7	5 41,1	6
8.	23,6	5 40,3	5	16.	19,9	5 39,8	6
20.	23,6	5 50,3	5	17.	19,5	4 15,4	5
25.	23,6	6 38,9	6	17.	23,6	5 32,0	6
26.	23,7	6 47,0	6	18.	19,3	5 30,4	5

4.

Wenn man aus diesen beobachteten Winkeln der kleinen Axe der Ringellipse mit den Declinationskreisen die Neigung der Ebene des Ringes herleiten will, so muss der Ort des Knotens des Ringes auf der Saturnsbahn, nicht aber auf der Ekliptik als bekannt vorausgesetzt werden; denn jenen erhält man durch die Verschwindungen des Ringes unmittelbar, diesen nur, nachdem die Neigung schon bekannt ist.

Wäre der Ort des Knotens der Ringebene auf dem Erdäquator = N gegeben, so würde man die Neigung J dieser beiden Ebenen sehr leicht erhalten. Wenn man nämlich die Breite der Erde über der Ebene des Ringes durch l , den Winkel des nördlichen Theils der kleinen Axe der Ringellipse mit dem Declinationskreise durch p , die Geradeaufsteigung und Abweichung des Saturns durch α und δ bezeichnet, so hat man in dem nebenstehenden sphärischen Dreiecke, in welchem R den Pol des Ringes, P den Pol des Äquators und T den vom Saturn gesehenen Ort der Erde bedeutet:

$$\begin{aligned} RPT &= \alpha - N - 90^\circ & PT &= 90^\circ + \delta \\ PTR &= p & PR &= J \\ & & RT &= 90^\circ - l \end{aligned}$$

also: $\cos l \sin p = -\sin J \cos(\alpha - N)$

$$\cos l \cos p = \sin J \sin(\alpha - N) \sin \delta + \cos J \cos \delta$$

$$\sin l = \sin J \sin(\alpha - N) \cos \delta - \cos J \sin \delta$$

und wenn man aus den beiden ersten dieser Gleichungen l eliminiert

$$\begin{aligned} 0 &= \sin J \cos(\alpha - N) \cos p + \sin J \sin(\alpha - N) \sin \delta \sin p \\ &\quad + \cos J \cos \delta \sin p. \end{aligned}$$

Diese Gleichung erhält eine einfachere Form, wenn man Hälftswinkel a und A nach folgenden Formeln bestimmt:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos A &= \cos p \\ \cos \alpha \sin A &= \sin p \sin \delta \\ \sin \alpha &= \sin p \cos \delta \end{aligned}$$

dadurch wird sie nümlich

$$0 = \sin J \cos \alpha \cos(N + A - \alpha) + \cos J \sin \alpha. \quad (1)$$

Ich bezeichne nun die Länge des Knotens und die Neigung der Saturnsbahn auf dem Aequator durch n und i , des Aequators auf der Saturnsbahn durch n' und i' , der Ringebene auf der Saturnsbahn durch n'' und i'' und werde N und J in der Gleichung (1) durch n, n', i, n'', i' ausdrücken; die drei ersten dieser fünf Grössen sind durch die bekannte Lage der Saturnsbahn gegen die Ekliptik und durch die Schiefe der Ekliptik bekannt, die vierte ist durch die Verschwindungen des Ringes gegeben, die fünfte ist die unbekannt Grösse der Aufgabe.

In der begehenden Figur stellt A die Ebene des Aequators vor, B die des Ringes, S die der Saturnsbahn; man hat also

$$0 = \sin i' [\cos \alpha \sin(n - \alpha + A) \sin(n'' - n') - \cos \alpha \cos(n - \alpha + A) \cos(n'' - n') \cos i] + \sin \alpha \cos(n'' - n') \sin i + \cos i' [\cos \alpha \cos(n - \alpha + A) \sin i + \sin \alpha \cos i]$$

welche Gleichung sich, wenn man

$$\text{tg } B = \frac{\text{tg } \alpha}{\cos(n - \alpha + A)}, \quad \text{tg } C = \text{tg}(n - \alpha + A) \frac{\cos B}{\cos(B + i)}$$

setzt, in

$$0 = -\sin i' \frac{\cos(n'' - n' + C)}{\cos C} + \cos i' \text{tg}(B + i)$$

verwandelt, und

$$\text{tg } i' = \frac{\text{tg}(B + i) \cos C}{\cos(n'' - n' + C)}$$

ergibt. — Man hat also folgende Formeln zu berechnen, um i' aus p zu finden:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos A &= \cos p & \text{tg } B &= \frac{\text{tg } \alpha}{\cos(n - \alpha + A)} \\ \cos \alpha \sin A &= \sin p \sin \delta & \text{tg } C &= \text{tg}(n - \alpha + A) \frac{\cos B}{\cos(B + i)} \\ \sin \alpha &= \sin p \cos \delta & \text{tg } i' &= \text{tg}(B + i) \frac{\cos C}{\cos(n'' - n' + C)} \end{aligned}$$

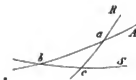
5.

Unter Voraussetzung der Neigung der Saturnsbahn = $29^{\circ} 47' 0'' - 0,08(t - 1800)$, Länge des aufsteigenden Knotens = $111^{\circ} 56' 40,0'' + 31,55(t - 1800)$, Schiefe der Ekliptik = $23^{\circ} 27' 54,8'' - 0,477(t - 1800)$ findet man

$$\begin{aligned} n' &= 185^{\circ} 32' 35,6'' - 0,980(t - 1800) \\ n &= 6 \quad 1 \quad 24,1 - 1,114(t - 1800) \\ i &= 22 \quad 38 \quad 39,4 - 1,766(t - 1800) \end{aligned}$$

ferner hat man, nach der Untersuchung in meiner oben angeführten Abhandlung,

$$\begin{aligned} ab &= N - n - 180^{\circ} \\ bc &= n'' - n' \\ bca &= 180^{\circ} - i' \\ bac &= J \\ abc &= i \end{aligned}$$



und aus dem sphärischen Dreiecke

$$\begin{aligned} \sin J \sin(N - n) &= -\sin i' \sin(n'' - n') \\ \sin J \cos(N - n) &= -\sin i' \cos(n'' - n') + \cos i' \sin i \\ \cos J &= \sin i' \sin i \cos(n'' - n') + \cos i' \cos i \end{aligned}$$

Wenn man für (1)

$$0 = \cos(N - n) \sin J \cos \alpha \cos(n - \alpha + A) - \sin(N - n) \sin J \cos \alpha \sin(n - \alpha + A) + \cos J \sin \alpha$$

schreibt, und die eben gefundenen Ausdrücke von $\sin J \cos(N - n)$, $\sin J \sin(N - n)$, $\cos J$ substituirt, so erhält man

$$\begin{aligned} n'' &= 170^{\circ} 49' 54'' + 41,700(t - 1800), \\ \text{also } n'' - n' &= 345^{\circ} 17' 18,4'' + 41,98(t - 1800). \end{aligned}$$

Legt man diese Werthe den in den Formeln am Ende des vierten Artikels vorkommenden Grössen zu Grunde, so erhält man als das Mittel aus den 22 im dritten Artikel angeführten Beobachtungen*) die Neigung des Ringes gegen die Saturnsbahn = $27^{\circ} 0' 9''$; der w. F. einer einzelnen Bestimmung ist = $\pm 24,1$, der des Mittels = $\pm 5,2$. — Nimmt man diese Neigung als unveränderlich an, so hat man also die Lage des Ringes gegen die Saturnsbahn:

$$\begin{aligned} \text{aufst. Knoten} &= 170^{\circ} 49' 54'' + 41,700(t - 1800) \\ \text{Neigung} &= 27 \quad 0 \quad 9 \end{aligned}$$

und gegen die Ekliptik:

$$\begin{aligned} \text{aufst. Knoten} &= 166^{\circ} 50' 41'' + 40,65(t - 1800) \\ \text{Neigung} &= 28 \quad 22 \quad 1 - 0,38(t - 1800). \end{aligned}$$

Aus der Vergleichung dieser Bestimmung mit meiner früheren und der des Hrn. Prof. STRUVE scheint hervorzugehen, dass die für das System des Saturns wichtige Lage der Ringebene mit ziemlich grosser Annäherung bestimmt ist; dass die ältere Annahme der Neigung etwa 3° zu gross ist, leidet keinen Zweifel.

*) [Die Einzelwerthe der α, δ, p und der daraus folgenden i' sind weggelassen.]

50. Reductio observationum Lunae [in meridiano].*)

(Tabb. Regiom. Intro. p. LI und p. 537.)

Quoniam Adseensio recta Lunae non immediate e transitu centri Lunarum per meridianum sed e temporibus appulsuum unius alteriusve limbi ad fila Tubi meridiani observatur, primum quaeram Adseensionem rectam α centri, quae unius horum Momentorum, nempe tempori sidereo μ , partibus arcus expresso, respondeat. Data supponuntur: Declinatio δ , radius disci geocentricus h , Parallax horizontalis aequatorialis π , Latitudo geocentrica loci observationis φ' ejusque distantia a centro terrestri ρ . Instrumenti porro collocatio vitiumque collimationis cognita supponuntur, nempe angulus horarius atque distantia polaris poli orientalis axis rotatorii instrumenti atque distantia circuli a medio filo in sphaera coelesti descripti ab hoc puncto. Has quantitates, ut fit in usitata formula pro reductione transituum observatorum ad meridianum, nempe

$$m + n \operatorname{tg} \delta + c \operatorname{sec} \delta$$

signabo per $-90^\circ - m, 90^\circ + n, 90^\circ - c.$

Si appulsus Lunae est ad filum, cujus distantia

$$A \cos \delta' \cos(\mu - \alpha') = \cos \delta \cos(\mu - \alpha) - \rho \sin \pi \cos \varphi'$$

$$A \cos \delta' \sin(\mu - \alpha') = \cos \delta \sin(\mu - \alpha)$$

$$A \sin \delta' = \sin \delta - \rho \sin \pi \sin \varphi'$$

$$A \sin h' = \sin h$$

$$A \cos h' = \sqrt{[\cos h^2 - 2 \rho \sin \pi (\sin \delta \sin \varphi' + \cos \delta \cos \varphi' \cos(\mu - \alpha))] + \rho^2 \sin^2 \pi^2}$$

Ex quo apparet, si problematis solutio summo rigore quaeratur, inventionem ipsius α a solutione aequationis quarti gradus pendere. Sed quoniam quantitates $c + f \pm h', n, m, \mu - \alpha$ tam exiguae semper sunt, ut sinus earum cum arcibus, cosinus vero cum unitate commutari possint, habebimus:

$$A(c + f \pm h') = -n A \sin \delta' - m A \cos \delta' - (\mu - \alpha) \cos \delta$$

$$\alpha = \mu \pm \frac{h}{\cos \delta} + \frac{fA}{\cos \delta} + \frac{A \cos \delta'}{\cos \delta} (m + n \operatorname{tg} \delta' + c \operatorname{sec} \delta').$$

Quam formulam si volumus totam per veram exprimere Declinationem, ponere possumus

$$A = 1 - \rho \sin \pi \cos(\varphi' - \delta)$$

neque verendum est, ne per hoc quantitas fA pro $f = 20'$ (haec enim maxima est in usitatibus Tubis meridianis distantia, qua fila lateralibus a medio filo distent) in majus vitium, quam $0,2$ arcualium incurrat, idque vitium e medio diversorum florum circa medium filum

a medio filo sit f , positive sumpta, si transitus per illud prius, negative, si serius, quam per medium filum e venerit, observata distantia limbi Lunarum ab orientali axis polo erit $= 90^\circ - c - f$, centrique $= 90^\circ - c - f \mp h'$, ubi h' apparentem significat radium, superiusque signum pro praecedente, inferius autem pro sequenti limbo valet. Haec distantia latus erit trianguli sphaerici, cujus duo reliqua latera, et distantia poli axis instrumenti et distantia Lunae a polo coelesti $90^\circ + n, 90^\circ - \delta'$, angulum comprehendunt $90^\circ + m + \mu - \alpha'$, ubi α' et δ' significant apparentem Lunae Adseensionem rectam et Declinationem. Igitur habemus

$$\begin{aligned} \sin(c + f \pm h') &= -\sin n \sin \delta' - \cos n \cos \delta' \sin(m + \mu - \alpha') \\ &= -\sin n \sin \delta' - \cos n \sin m \cos \delta' \cos(\mu - \alpha') \\ &\quad - \cos n \cos m \cos \delta' \sin(\mu - \alpha') \end{aligned}$$

Haec aequatio quam fuerit multiplicata per distantiam Lunae ab observatore $= \mathcal{A}$, quantitates, quae ab apparente Lunae loco dependent, per locum geocentricum poterunt exprimi, quod fit per usitatas formulas:

symmetrice collocatorum evanescere, neminem fugit. Majore etiam jure ponere licet

$$A \cos \delta' = \cos \delta - \rho \sin \pi \cos \varphi'$$

quo efficitur, ut sit

$$\alpha = \mu \pm \frac{h}{\cos \delta} + f \frac{1 - \rho \sin \pi \cos(\varphi' - \delta)}{\cos \delta} + m' + n' \operatorname{tg} \delta + c' \operatorname{sec} \delta$$

ubi

$$m' = m - c \cos \varphi' \rho \sin \pi$$

$$n' = n - c \sin \varphi' \rho \sin \pi$$

$$c' = c - (m \cos \varphi' + n \sin \varphi') \rho \sin \pi$$

Ultimum terminum si quis velit apparente Declinatione expressum retinere, quod commodius erit, si haec in indice instrumenti lecta fuerit, id quod semper cum certitudine paucorum minutorum primorum hic sufficiente fieri potest, erit

$$\begin{aligned} \alpha &= \mu \pm \frac{h}{\cos \delta} + f \frac{1 - \rho \sin \pi \cos(\varphi' - \delta)}{\cos \delta} \\ &\quad + \left(1 - \rho \sin \pi \frac{\cos \varphi'}{\cos \delta}\right) (m + n \operatorname{tg} \delta' + c \operatorname{sec} \delta') \end{aligned}$$

*) [Auszug aus 248 d. a. Verz.]

Vulgo tempus culminationis derivabitur e temporibus transituum per fila, sive quaeretur florum reductio ad meridianum. Quo in casu temporis observato tempus, quo Luna angulum horarium $\mu - \alpha$ lustrat, addendum est, sive angulus ille horarius, divisus per $1 - \lambda$, ubi λ variationem Adscensionis rectae tempore expressae per minutum secundum temporis siderici significat. Habebimus igitur reductionem ad meridianum, quantitate

$$\frac{1 - \rho \sin \pi \cos(\varphi' - \delta)}{(1 - \lambda) \cos \delta}$$

notata per F ,

$$= \pm \frac{h}{(1 - \lambda) \cos \delta} + fF + \frac{m + n \operatorname{tg} \delta + c \sec \delta}{1 - \lambda}$$

sive

$$= \pm \frac{h}{(1 - \lambda) \cos \delta} + fF + \frac{1 - \rho \sin \pi \cos \varphi' \sec \delta'}{1 - \lambda} (m + n \operatorname{tg} \delta' + c \sec \delta')$$

Primus terminus est negligendus, si non pro centro, sed pro observato limbo habere velis tempus Culminationis. Omisso divisore $1 - \lambda$, qui est in ultimo membro, tempus Culminationis hoc modo inventum Adscensionem rectam non pro ipso Culminationis momento sed pro momento transitus per medium filum suppeditat. Tum igitur, ut reductio fiat ad meridianum, expressio

$$fF + \left(1 - \rho \sin \pi \frac{\cos \varphi'}{\cos \delta'}\right) (m + n \operatorname{tg} \delta' + c \sec \delta')$$

est adhibenda, in qua ultimus terminus tantum in hoc discrepat a reductione pro stellis fixis adhibenda, quod in fractionem multiplicatus est, cujus minimus valor $\frac{1}{15}$, pro speculis Europaeis $\frac{1}{10}$ ab unitate diversus esse potest. Quam ob causam fractio, quum m, n, c vulgo exiguum habent valorem, cum unitate poterit computari.

Ut facilius reddatur calculus factoris F , in Tabula XIII logarithmum protuli quantitatis $1 - \rho \sin \pi \cos(\varphi' - \delta)$ sub nota $I. A$ cum Argumento $\log(\rho \sin \pi \cos(\varphi' - \delta))$, complementumque logarithmi ipsius $1 - \lambda$ notatum per $I. B$, cujus Argumentum, nempe variatio Adscensionis rectae 12 horis medii temporis et minutis primis arcualibus expressum est. Quem motum pro duodecim horis quum Ephemerides inde a meridie usque ad mediam noctem, et a media nocte usque ad succedentem meridiem suppeditent, momentaneus motus pro tempore observationis interpolando derivari poterit.*) Quodsi hic intervallum 12 horarum pro temporis unitate assuma-

mus, id quod commodissimum erit, motusque ad hanc unitatem relatus significetur per $\mathcal{A}\alpha$, habebimus

$$\lambda = \frac{\mathcal{A}\alpha}{15.721,971} = \frac{\mathcal{A}\alpha}{10830}$$

ergo quantitas B , cujus logarithmus Tabula continetur, erit

$$\frac{10830}{10830 - \mathcal{A}\alpha}$$

Ope hujus Tabulae habebimus

$$\log F = \log A + \log B + \log \sec \delta.$$

Caeterum factoris F computatio superflua est, si Luna ad omnia fila instrumenti observata, tempus transitus per medium filum, ex omnibus omnium florum transitibus collectum sciscitemur. Illud enim tempus habebitur, si medio arithmetico, quod ex omnibus temporibus observati collectum sit, correctio addatur, quae ab inaequalitate distantiarum florum oriatur. Ea semper cognita erit exiguaeque est pars temporis, quod Luna consumit transeundo ab uno extremo filo ad alterum extremum.

Quaeratur Declinatio pro eodem tempore, pro quo jam determinata sit Adscensio recta. Si unus alterve limbus Lunae ad filum, quod sit instrumenti axi parallelum, tempore sidereo μ observatus erit, Declinationemque esse δ instrumentum indicaverit, duo sunt ad inveniendum δ sphaerica triangula consideranda, quorum alterum aPl polum axis, polum mundi et centrum Lunae connectat, alterum lal' centrum Lunae, polum axis et punctum illud limbi Lunae, quod filum tangat, vicissim conjungat. In primo triangulo angulus P erit $= 90^\circ + m + \mu - \alpha$, latus $Pa = 90^\circ + n$, latus vero $Pl = 90^\circ - \delta'$; in altero triangulo angulus $l' = 90^\circ$, latus $ll' = k$. Observato limbo septentrionali, quantitas $90^\circ - \delta$, differentia erit angularum in puncto a sitorum utriusque trianguli, observato australi, quantitas illa summa erit; latus al utriusque triangulo commune est. Quoniam pro primo triangulo habemus

$$\sin al \cos(\delta, \mp lat') = \cos \delta' \cos(m + \mu - \alpha)$$

$$\sin al \sin(\delta, \mp lat') = \sin \delta' \cos n - \cos \delta' \sin n \sin(m + \mu - \alpha)$$

pro secundo

$$\sin al \sin lat' = \sin k$$

inde derivabimus, eliminando ipsa al et lat'

$$\begin{aligned} \pm \sin k &= \cos \delta' \cos(m + \mu - \alpha) \sin \delta, \\ &+ \cos \delta' \sin(m + \mu - \alpha) \cos \delta, \sin n \\ &- \sin \delta' \cos \delta, \cos n. \end{aligned}$$

Quae aequatio si multiplicata fuerit per \mathcal{A} , et quantitates α', δ', k' expressae fuerint per data geocentrica, invenietur:

*) SCHUMACHER, Astronomische Nachrichten Nr. 33. [Abh. 25. p. 206.]

$$\begin{aligned} \pm \sin h &= \cos \delta \{ \sin \delta, \cos(m + \mu - \alpha) + \cos \delta, \sin(m + \mu - \alpha) \sin n \} \\ &\quad - \sin \delta \cos \delta, \cos n \\ &\quad - \rho \sin \pi \{ \cos \varphi' \{ \sin \delta, \cos m + \cos \delta, \sin m \sin n \} \\ &\quad \quad \quad - \sin \varphi' \cos \delta, \cos n \} \end{aligned}$$

unde δ omni rigore definitur. Sed quoniam quantitates $\sin(m + \mu - \alpha) \sin n$, $\sin m \sin n$ semper negligi possunt, $\cos m$ vero et $\cos n$ ponere licet = 1, habebitur:

$$\begin{aligned} \pm \sin h - \rho \sin \pi \sin(\varphi' - \delta) &= \sin(\delta, -\delta) \\ &\quad - \cos \delta \sin \delta, (1 - \cos(m + \mu - \alpha)). \end{aligned}$$

Si μ' designabit tempus centri Lunae culminantis, erit

$$\mu - \alpha = (\mu - \mu')(1 - \lambda);$$

sed quia in quantitate $1 - \cos(m + \mu - \alpha)$ ipsum m poterit negligi, quum effectus ipsius tantum ordinis est $m \sin(\mu - \alpha)$, invenietur:

$$\begin{aligned} \sin(\delta - \delta) &= \rho \sin \pi \sin(\varphi' - \delta), \mp \sin h \\ &\quad - \cos \delta \sin \delta, (1 - \lambda)^2 (\mu - \mu')^2 \sin \frac{1}{2} \pi. \end{aligned}$$

Inde haec instituendi calculi norma, quae ad veritatem satis accedit, facile derivatur, ubi $\mu - \mu'$ expressum est minutis secundis temporis:

$$\begin{aligned} \sin p &= \rho \sin \pi \sin(\varphi' - \delta), \\ \delta &= \delta, + p \mp h \mp \left(\frac{p \mp h}{2} \right) \sin p \sin h \\ &\quad - \frac{225''}{4} \sin 1'' \cdot \sin 2\delta, (1 - \lambda)^2 (\mu - \mu')^2 \end{aligned}$$

Declinatio ita inventa ad temporis momentum μ'' reducitur, pro quo jam determinata est Ascensio recta, addendo variationem per temporis intervallum $\mu'' - \mu$. Ergo si momentanea Declinationis variatio, ad temporis unitatem duodecim horarum relata, minutisque primis expressa, significatur per $\Delta \delta$ poniturque

$$\lambda' = \frac{\Delta \delta}{721,971}$$

quaesita Declinatio erit = $\delta + (\mu'' - \mu)\lambda'$. Quantitas λ' invenitur in Tabula XIII.

Exemplum. Quaeritur Lunae et Ascensio recta et Declinatio, quae prodeant ex observatione Regiomontana in meridiano facta die 13. Jun. 1821.

1. Appulsus praecedentis limbi ad quinque fila instrumenti meridiani observati sunt:

49° 2'8" | 49° 19'8" | 15° 49' 36'7" | 49° 53'2" | 50° 9'8".
Per distantias florum a medio filo, in Aequatore

20;4225; 14;6386; 14;3144; 28;7773

notum est, medio arithmetico ex omnibus ad quinque fila observatis appulsibus intervallum temporis duorum extremorum florum multiplicatum per 0,00333 addendum esse, quod pro hoc exemplo tempus transitus per medium filum suppediat

$$= 15^{\text{h}} 49^{\text{m}} 36;46 + 67;0.0,00333 = 15^{\text{h}} 49^{\text{m}} 36;683.$$

Quodsi scire avemus, quid unumquodque suppediet filum, e Tabula XIII quaerendus est factor F' . Ex ephemeridibus Gallicis invenietur pro vero tempore Parisino = 9^h 10^m, quod proxime accedit ad tempus observationis:

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= 6^{\circ} 39'0 \\ \delta &= -25^{\circ} 14'7 \\ \pi &= 55^{\circ} 7'0 \end{aligned}$$

Compressione sphaeroidis terrestris posita = 0,00324, pro Regiomonto erit

$$\begin{aligned} \log \rho &= 9,9990640, \quad \varphi' = 54^{\circ} 32' 18,4 \\ \text{unde invenietur } \log \{ \rho \sin \pi \cos(\varphi' - \delta) \} &= 7,45293. \end{aligned}$$

Atqui Tabula XIII suppediat:

$$\begin{aligned} l.A &= 9,99876 \\ l.B &= 0,1630 \\ l.\text{sec } \delta &= 0,04359 \\ l.F' &= 0,05865 \end{aligned}$$

cujus ope reductio singulorum florum ad filum medium obtinetur:

$\log f$	$f F'$	Temp. transit.
1,46868	+ 33,677	15 ^h 49 ^m 36,177
1,16549	+ 16,755	86,555
		36,700
1,15577n	-- 16,884	36,816
1,45905n	-- 32,938	36,862
		Medium 15 49 36,682

ubi exigua differentia 0,001 ex eo oritur, quod in priori calculo intervallum temporis extremorum florum 0;38 majus sumptum est, quam fuisset pro distantia filorum.

Instrumenti deflexiones a meridiano quum essent

$$m = + 0;03; \quad n = - 0;207; \quad c = - 0;017$$

invenietur cum $\delta' = - 26^{\circ} 9'$

$$\left\{ 1 - \rho \sin \pi \frac{\cos \varphi'}{\cos \delta} \right\} (m + n \operatorname{tg} \delta' + c \sec \delta') = + 0;155$$

sive tempus transitus ad meridianum reductum erit

$$15^{\text{h}} 49^{\text{m}} 36;837.$$

Eodem die status horologii observabatur per 5 stellas fundamentales:

	in filio medio	Reduct.	A. R. appar.	Corr. hor.
β Virginis . . .	11 ^h 41 ^m 21;97	+ 0;002	11 ^h 41 ^m 24;071	+ 2;099
α Bootis . . .	14 7 30,69	- 0,097	14 7 32,585	+ 2,092
γ Librae . . .	14 40 48,92	+ 0,093	14 40 50,943	+ 1,930
α Coronae . . .	15 27 7,86	- 0,143	15 27 9,564	+ 1,847
α Scorpii . . .	16 18 28,30	+ 0,156	16 18 30,254	+ 1,798
	Medium 14 ^h 27 ^m			+ 1;953

quod cum diurna horologii correctionis variatione — 0,46 ad tempus observationis Lunae reductum suppeditat

$$15^h 49^m 36,837 + 1,927 = 15^h 49^m 38,764$$

ergo Ascensionem rectam praecedentis limbi Lunae
= 237° 24' 41,746

quae determinatio ad tempus transitus per medium filum = 15^h 49^m 38,61 temporis sideralis = 10^h 22^m 17,29 vero temporis medii solaris pertinet. Radius Lunae, qui pertinet ad parallaxin 55' 7,0, est = 15' 1,10, quod multiplicatum per sec δ subministrat 16' 36,23, et Ascensionem rectam centri quaesitam:

$$\alpha = 237^\circ 41' 17,77.$$

2. Septentrionalis Lunae limbus tempore horologii 15^h 50^m 55^s observabatur per instrumenti Circulum, qui indicaverat 277° 55' 42,71; correctio propter instrumenti flexionem et vitia divisionis est = — 1,21, propter Refractionem vero = 5' 40,72; locus Aequatoris in Circulo instrumenti erat 303° 44' 4,35. Unde sequitur δ, = — 25° 54' 4,18.

E numeris supra datis sequitur

$$\begin{aligned} p &= 54' 14,05 \\ p - h &= 39' 12,95 \\ -\frac{p-h}{2} \sin p \sin h &= -0,03 \end{aligned}$$

et membrum a $\mu - \mu' = + 11,8$ dependens = + 0,03. Ex quo colligitur esse

$$\delta = -25^\circ 14' 51,28.$$

Quoniam determinatio haec valet pro 15^h 50^m 55^s temporis horologici, Ascensionis vero determinatio pro 15^h 49^m 36,68 ejusdem temporis, variatio Declinationis per — 1' 18,32 est addenda. Ex ephemeridibus laudatis sequitur $\mathcal{A}\delta = -1^\circ 22,94$, quocum Tab. XIII suppe-

ditat $\lambda' = -0,1149$. Cum hoc $(\mu'' - \mu)\lambda'$ erit = + 9,00, et postremo quaesitus Lunae locus

1821 Jun. 13. 10^h 22^m 17,29 temp. med.

$$\text{AR.} = 237^\circ 41' 17,77; \text{Decl.} = -25^\circ 14' 42,73.$$

Formulas etiam dabo pro eo casu, ubi Declinationem Lunae non ope instrumenti collocati in meridiano sed ope instrumenti circa verticalem axem rotantis, metiendi plures distantias a vertice ante et post culminationem observemus.

Apparentem distantiam a vertice, quae pertineat ad tempus sidereum μ , notabo per \mathcal{A} , distantiam vero, quae sit momento culminationis μ' , per Z : tum $Z - \mathcal{A}$ exprimenda est per $\mu - \mu'$.

Quoniam habemus

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta' + \cos \varphi \cos \delta' \cos(\mu - \alpha')$$

quum fuerit multiplicata per \mathcal{A} apparensque Lunae locus expressus per locum geocentricum, erit

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cos z &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(\mu - \alpha) \\ &\quad - \rho \sin \pi \cos(\varphi - \varphi'); \end{aligned}$$

pari modo, valoribus ipsorum \mathcal{A} et δ pro momento culminationis per \mathcal{A}' et d designatis, erit

$$\mathcal{A}' \cos Z = \cos(\varphi - d) - \rho \sin \pi \cos(\varphi - \varphi').$$

Quodsi brevitatis gratia ponatur

$$\begin{aligned} \cos(\varphi - d) + u &\text{ pro } \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(\mu - \alpha) \\ p &\text{ pro } \rho \sin \pi \cos(\varphi - \varphi'), \end{aligned}$$

habebimus

$$\cos z - \cos Z = \frac{u}{\mathcal{A}} + [\cos(\varphi - d) - p] \frac{\mathcal{A}' - \mathcal{A}}{\mathcal{A}\mathcal{A}'}$$

et quadrato ipsius $Z - z$ neglecto

$$Z - z = \frac{u}{\mathcal{A} \sin Z} + [\cos(\varphi - d) - p] \frac{\mathcal{A}' - \mathcal{A}}{\mathcal{A}\mathcal{A}' \sin Z}.$$

Si in expressione

$$\mathcal{A} = \sqrt{1 - 2\rho \sin \pi [\sin \varphi' \sin \delta + \cos \varphi' \cos \delta \cos(\mu - \alpha)] + \rho^2 \sin \pi^2}$$

in locum quantitatum $\rho \sin \varphi'$ et $\rho \cos \varphi'$ earum expressiones per altitudinem poli φ substitutae erunt, habebimus

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sqrt{1 - \frac{2 \sin \pi}{\sqrt{1 - \varepsilon \varepsilon \sin \varphi^2}} [\sin \varphi \sin \delta (1 - \varepsilon \varepsilon) + \cos \varphi \cos \delta \cos(\mu - \alpha)] + \rho^2 \sin \pi^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{2 \sin \pi}{\sqrt{1 - \varepsilon \varepsilon \sin \varphi^2}} [\cos(\varphi - d) - \varepsilon \varepsilon \sin \varphi \sin \delta + u] + \rho^2 \sin \pi^2} \end{aligned}$$

ideoque

$$\mathcal{A}' = \sqrt{1 - \frac{2 \sin \pi}{\sqrt{1 - \varepsilon \varepsilon \sin \varphi^2}} [\cos(\varphi - d) - \varepsilon \varepsilon \sin \varphi \sin d] + \rho^2 \sin \pi^2}$$

unde reperitur sufficiente approximatione

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 1 - \sin \pi \cos Z \\ [\cos(\varphi - d) - p] \frac{\mathcal{A}' - \mathcal{A}}{\mathcal{A}\mathcal{A}'} &= \sin \pi \cos Z \cdot u \end{aligned}$$

quibus in expressione ipsius $Z - z$ substitutis prodit

$$Z - z = \frac{u}{(1 - \sin \pi \cos Z)^2 \sin Z}.$$

Ad inventionem ipsius u habebimus, quantitate $\mu - \mu'$ minutis secundis temporis siderici expressa,

$$\begin{aligned} \mu - \alpha &= 15(\mu - \mu') (1 - \lambda) \\ \delta &= d + (\mu - \mu') \lambda' \end{aligned}$$

unde sequitur

$$u = \lambda' \sin Z (\mu - \mu') - \frac{225}{2} \sin 1'' (1 - \lambda)^2 \cos \varphi \cos d (\mu - \mu')^2$$

sive

$$n = -\frac{225}{2} \sin 1'' \cdot (1-\lambda)^2 \cos \varphi \cos d \{(\mu - \mu' - b)^2 - bb\}$$

ubi, ut brevi comprehendatur, scriptum est

$$b \text{ pro } \frac{\lambda' \sin Z}{225 \cdot \sin 1'' (1-\lambda)^2 \cos \varphi \cos d}$$

Si adhibentur quae sunt in Tabula XIII quantitates A et B , quibus jam supra usi sumus, habebimus formulas has:

$$a = \frac{225}{2} \sin 1'' \cdot \frac{\cos \varphi \cos d}{B^2 \cdot \sin(\varphi - d)}$$

$$b = \frac{\lambda'}{2a}$$

$$M = \mu' + b$$

$$Z - z = -\frac{a}{A^2} (\mu - M)^2 + \frac{a}{A^2} \cdot bb$$

Has formulas in tertia Sectione observationum nearum promulgavi, quia Lunae in specula Regionum tanta frequentes factae sunt observationes per distantias zenithales easque circummeridianas.

Tabula XIII.

Arg. = $\log \{ \varrho \sin \pi \cos(\varphi' - \delta) \}$				Arg. = $\log A$				Arg. = $\log B$				Arg. = $\log \delta$			
Arg.	$\log A$	Arg.	$\log A$	Arg.	$\log B$	Arg.	$\log B$	Arg.	$\log B$	Arg.	$\log B$	Arg.	$\log \delta$	Arg.	$\log \delta$
7,00	9,99957	6	7,85	9,99691	7	5°10'	0,01261	42	0°10'	0,0139					
7,05	9,99951	6	7,86	9,99684	7	20	0,01303	41	20	0,0277					
7,10	9,99945	6	7,87	9,99677	7	30	0,01344	41	30	0,0416					
7,15	9,99939	6	7,88	9,99669	8	40	0,01385	41	40	0,0554					
7,20	9,99931	8	7,89	9,99662	7	50	0,01427	42	50	0,0693					
7,25	9,99923	10	7,90	9,99654	8	6 0	0,01468	41	1 0	0,0831					
7,30	9,99913	10	7,91	9,99646	9	10	0,01510	42	10	0,0970					
7,35	9,99903	12	7,92	9,99637	9	20	0,01551	41	20	0,1108					
7,40	9,99891	12	7,93	9,99629	8	30	0,01593	42	30	0,1247					
7,45	9,99877	14	7,94	9,99620	9	40	0,01634	41	40	0,1385					
7,50	9,99862	15	7,95	9,99611	9	50	0,01676	42	50	0,1524					
7,55	9,99846	16	7,96	9,99602	9	7 0	0,01718	42	2 0	0,1662					
7,56	9,99842	4	7,97	9,99593	10	10	0,01760	42	10	0,1801					
7,57	9,99838	4	7,98	9,99583	10	20	0,01801	41	20	0,1939					
7,58	9,99834	4	7,99	9,99574	9	30	0,01843	42	30	0,2078					
7,59	9,99831	3	8,00	9,99564	10	40	0,01885	42	40	0,2216					
7,60	9,99827	4	8,01	9,99553	11	50	0,01927	42	50	0,2355					
7,61	9,99823	4	8,02	9,99543	10	8 0	0,01969	42	3 0	0,2493					
7,62	9,99819	4	8,03	9,99532	11	10	0,02011	42	10	0,2632					
7,63	9,99814	5	8,04	9,99521	11	20	0,02053	42	20	0,2770					
7,64	9,99810	4	8,05	9,99510	11	30	0,02095	42	30	0,2909					
7,65	9,99806	4	8,06	9,99498	12										
7,66	9,99801	5	8,07	9,99487	11										
7,67	9,99796	5	8,08	9,99475	12										
7,68	9,99792	4	8,09	9,99462	13										
7,69	9,99787	-5	8,10	9,99450	12										
7,70	9,99782	5	8,11	9,99437	13										
7,71	9,99777	5	8,12	9,99424	13										
7,72	9,99771	5	8,13	9,99410	14										
7,73	9,99766	5	8,14	9,99396	14										
7,74	9,99761	5	8,15	9,99382	14										
7,75	9,99755	6	8,16	9,99368	14										
7,76	9,99749	6	8,17	9,99353	15										
7,77	9,99744	5	8,18	9,99338	15										
7,78	9,99738	6	8,19	9,99322	16										
7,79	9,99731	6	8,20	9,99306	16										
7,80	9,99725	6	8,21	9,99290	16										
7,81	9,99719	6	8,22	9,99273	17										
7,82	9,99712	7	8,23	9,99256	17										
7,83	9,99705	7	8,24	9,99239	17										
7,84	9,99699	7	8,25	9,99221	18										
7,85	9,99691	8	8,26	9,99202	19										

51. Ueber die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe.*)

(Astron. Untersuchungen I. p. 239.)

Die Figur, in welcher wir einen Planeten sehen, der ein Rotationsphäroid ist, ist nur dann die Figur seiner Meridiane, wenn das Auge sich in der Ebene seines Aequators und die Sonne sich auf der das Auge und den Planeten verbindenden geraden Linie befinden; sie ist eine Projection dieser Figur, wenn das letztere, nicht aber das erstere stattfindet. Im Allgemeinen zeigt aber der Planet eine aus zwei verschiedenen Curven zusammengesetzte Figur, deren nähere Untersuchung von der Zeit an nothwendig geworden ist, von welcher an genauere Messungen des Planeten selbst und der relativen Lage seiner Satelliten möglich geworden sind. Instrumente wie das grosse Heliometer der Königsberger Sternwarte geben solchen Messungen einen Grad von Sicherheit, von welchem etwas Wesentliches verloren gehen würde, wenn, z. B. im Falle sie den Jupiter betreffen, ihre Berechnung auf die Verwechslung der Figur, welche er wirklich zeigt, mit der welche er zeigen würde, wenn er vollständig erleuchtet wäre, gegründet werden sollte; man muss also, um Messungen dieser Art, sie mögen die Bestimmung der beiden Axen des Sphäroids eines Planeten, oder die Bestimmung der Lage seines Aequators, oder die relative Lage seiner Satelliten zum Zwecke haben, mit der erforderlichen Richtigkeit berechnen zu können, die Figur des Planeten, so wie sie sich wirklich zeigt, kennen. Die Bestimmung dieser Figur und die Berechnungsart der Beobachtungen, welche sich auf Punkte des Randes derselben beziehen, sind daher die Gegenstände dieser Abhandlung.

1.

Ich werde damit anfangen, den scheinbaren Ort eines Punktes auf der Oberfläche des Planeten anzugeben, dessen Entfernung von drei aufeinander senkrechten, durch den Mittelpunkt des Planeten gelegten Ebenen durch x, y, z , so wie die Entfernungen des

$$\left. \begin{aligned} \phi' \sin s \sin(p - P) &= -x \sin \lambda + y \cos \lambda \\ \phi' \sin s \cos(p - P) &= -x \sin \beta \cos \lambda - y \sin \beta \sin \lambda + z \cos \beta \\ \phi' \cos s &= x \cos \beta \cos \lambda + y \cos \beta \sin \lambda + z \sin \beta + \phi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Da aber die Entfernung eines Punktes auf der Oberfläche eines Planeten von dem Mittelpunkte desselben, vergleichungsweise mit ϕ , so klein ist, dass

*) [Auszug aus 350 d. n. Verz. — Vgl. auch Beobachtungen auf der Sternwarte Böhkamp Heft II (Leipzig 1873) p. 51 ff.]

Auges von denselben Ebenen durch ξ, η, ζ bezeichnet werden. Die Axe der x soll mit der Drehungsaxe des Planeten zusammenfallen.

Gesichtslinien nach dem Mittelpunkte des Planeten und nach dem Punkte auf seiner Oberfläche gelegt, bestimmen die Oerter beider an der Himmelskugel. Bezieht man diese Oerter auf den grössten Kreis, welcher der Ebene des Aequators des Planeten entspricht, und bezeichnet man die von der Axe der x an auf diesem grössten Kreise gezählten Längen des Mittelpunktes des Planeten und des Punktes auf seiner Oberfläche durch λ und λ' , ihre auf denselben grössten Kreis bezogenen Breiten durch β und β' , ihre Entfernungen von dem Auge durch ϕ und ϕ' , so hat man:

$$\left. \begin{aligned} \phi \cos \beta \cos \lambda &= -\xi \\ \phi \cos \beta \sin \lambda &= -\eta \\ \phi \sin \beta &= -\zeta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \phi' \cos \beta' \cos \lambda' &= x - \xi \\ \phi' \cos \beta' \sin \lambda' &= y - \eta \\ \phi' \sin \beta' &= z - \zeta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Die scheinbare Entfernung des Punktes von dem Mittelpunkte des Planeten = s und der Winkel des durch beide gelegten grössten Kreises mit dem Declinationskreise des letzteren = p , werden durch $\lambda, \beta, \lambda', \beta'$ durch die Formeln:

$$\begin{aligned} \sin s \sin(p - P) &= \cos \beta' \sin(\lambda' - \lambda) \\ \sin s \cos(p - P) &= \cos \beta \sin \beta' - \sin \beta \cos \beta' \cos(\lambda' - \lambda) \\ \cos s &= \sin \beta \sin \beta' + \cos \beta \cos \beta' \cos(\lambda' - \lambda) \end{aligned}$$

ausgedrückt, in welchen P den Positionswinkel des Poles des Aequators des Planeten bezeichnet. Multipliziert man sie mit ϕ' und substituirt man rechts von den Gleichheitszeichen die Ausdrücke (1) und (2), so verwandeln sie sich in:

Grössen von der Ordnung $\frac{x\xi}{\phi}, \frac{xy}{\phi}$, u. s. w. unmerklich werden, so kann man diese Formeln durch Vernachlässigung der Grössen dieser Ordnung und höherer Ordnungen abkürzen und sie

$$\left. \begin{aligned} s \sin(p-P) &= \frac{\omega}{\varphi} (-x \sin \lambda + y \cos \lambda) \\ s \cos(p-P) &= \frac{\omega}{\varphi} (-x \sin \beta \cos \lambda - y \sin \beta \sin \lambda + z \cos \beta) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

schreiben ($\omega = 206264''8$).

Indem der Punkt auf der Oberfläche des Planeten liegt, findet zwischen x, y, z die Gleichung statt, welcher diese Oberfläche entspricht; oder man kann für x, y, z ihre der Gleichung genügende Ausdrücke durch zwei neue veränderliche Grössen setzen. Wenn die Oberfläche durch Drehung einer Ellipse, deren Axen $2a$ und $2b$ sind, um die letztere erzeugt wird, so dass ihre Gleichung

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \dots \dots \dots (5)$$

ist, so kann man offenbar

$$\begin{aligned} x &= a \cos B \cos A \\ y &= a \cos B \sin A \\ z &= b \sin B \end{aligned}$$

setzen, wo A den Winkel einer durch die Drehungsaxe und durch den zu bestimmenden Punkt gelegten Ebene mit einer durch die erstere und die Axe der x gelegten, und B die auf die eingeschriebene oder umbeschriebene Kugel reducirte Breite des Punktes bedeuten. Setzt man diese Ausdrücke von x, y, z in die Formeln (4) und schreibt man a' und b' für $\frac{\omega a}{\varphi}$ und $\frac{\omega b}{\varphi}$,

$$\left. \begin{aligned} \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\beta) \cos(45^\circ + \frac{1}{2}P) &= \cos(45^\circ + \frac{\delta+i}{2}) \cos(45^\circ + \frac{\alpha-n}{2}) \\ \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\beta) \sin(45^\circ + \frac{1}{2}P) &= \cos(45^\circ + \frac{\delta-i}{2}) \sin(45^\circ + \frac{\alpha-n}{2}) \\ \sin(45^\circ + \frac{1}{2}\beta) \cos(45^\circ + \frac{1}{2}P) &= \sin(45^\circ + \frac{\delta+i}{2}) \cos(45^\circ + \frac{\alpha-n}{2}) \\ \sin(45^\circ + \frac{1}{2}\beta) \sin(45^\circ + \frac{1}{2}P) &= \sin(45^\circ + \frac{\delta-i}{2}) \sin(45^\circ + \frac{\alpha-n}{2}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Wenn der Punkt auf der Oberfläche des Planeten fest ist, also der Drehung desselben folgt, so wächst A der Zeit proportional, oder man hat:

$$A = \varepsilon + mt \dots \dots \dots (9)$$

wo also ε die Entfernung des Punktes von dem aufsteigenden Knoten des Aequators des Planeten auf dem Aequator der Erde, für den Augenblick von welchem die Zeit t an gerechnet wird, und m die Grösse der Drehung in der angenommenen Zeiteinheit bedeuten.

2.

Wenn man in die Formeln (4) für x, y, z die Coordinaten von Punkten der Planetenoberfläche setzt, welche durch Gesichtslinien berührt werden, so be-

oder versteht man unter a' und b' die in Secunden ausgedrückten Winkel, unter welchen die beiden halben Axen des Sphäroids in der Entfernung φ erscheinen, so verwandeln die Formeln sich in:

$$\left. \begin{aligned} s \sin(p-P) &= a' \cos B \sin(A-\lambda) \\ s \cos(p-P) &= b' \cos \beta \sin B - a' \sin \beta \cos B \cos(A-\lambda) \end{aligned} \right\} (6)$$

Die hier vorkommenden β, λ, P sind durch den geocentrischen Ort des Planeten und die Lage der Ebene seines Aequators gegeben. Da das Berliner astronomische Jahrbuch von ENCKE und der Nautical Almanac den ersteren nur durch Geradeaufsteigung und Abweichung angeben, so werde ich durch diese (α und δ bezeichnet), verbunden mit der auf den Aequator bezogenen Länge des aufsteigenden Knotens des Planetenäquators ($=n$) und seiner Neigung ($=i$), β, λ, P ausdrücken. Legt man die Axe der x in diesen aufsteigenden Knoten, oder zählt man λ und A von denselben an, so hat man:

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta &= \cos i \sin \delta - \sin i \cos \delta \sin(\alpha-n) \\ \cos \beta \sin \lambda &= \sin i \sin \delta + \cos i \cos \delta \sin(\alpha-n) \\ \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos(\alpha-n) \\ \cos \beta \cos P &= \cos i \cos \delta + \sin i \sin \delta \sin(\alpha-n) \\ \cos \beta \sin P &= \sin i \cos(\alpha-n) \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

oder, alle drei gesuchten Grössen zugleich durch die Gaussischen Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\beta) \cos(45^\circ + \frac{1}{2}P) &= \cos(45^\circ + \frac{\delta+i}{2}) \cos(45^\circ + \frac{\alpha-n}{2}) \\ \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\beta) \sin(45^\circ + \frac{1}{2}P) &= \cos(45^\circ + \frac{\delta-i}{2}) \sin(45^\circ + \frac{\alpha-n}{2}) \\ \sin(45^\circ + \frac{1}{2}\beta) \cos(45^\circ + \frac{1}{2}P) &= \sin(45^\circ + \frac{\delta+i}{2}) \cos(45^\circ + \frac{\alpha-n}{2}) \\ \sin(45^\circ + \frac{1}{2}\beta) \sin(45^\circ + \frac{1}{2}P) &= \sin(45^\circ + \frac{\delta-i}{2}) \sin(45^\circ + \frac{\alpha-n}{2}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

stimmen diese Formeln Punkte der krummen Linie, welche die Projection des Sphäroids des Planeten auf eine Ebene ist, welche senkrecht auf der die Mittelpunkte der Erde und des Planeten verbindenden geraden Linie steht. Ich werde jetzt die Gleichung dieser krummen Linie aufsuchen.

Wenn $\text{Const.} = V$ die Gleichung einer Oberfläche ist, so ist bekanntlich die Bedingung, dass eine durch einen Punkt, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, gehende gerade Linie sie berühre, in der Gleichung

$$0 = \frac{dV}{dx}(x-\xi) + \frac{dV}{dy}(y-\eta) + \frac{dV}{dz}(z-\zeta)$$

enthalten. Für das angenommene Sphäroid des Planeten (5) wird diese Gleichung:

$$0 = \frac{x(x-\xi)}{aa} + \frac{y(y-\eta)}{aa} + \frac{z(z-\zeta)}{bb},$$

und sie verwandelt sich durch ihre Verbindung mit (5) in:

$$1 = \frac{x\xi}{aa} + \frac{y\eta}{aa} + \frac{z\zeta}{bb} \dots \dots \dots (10)$$

Wenn man für ξ, η, ζ ihre Ausdrücke (1) setzt und die oben schon vernachlässigten Grössen auch hier nicht berücksichtigt, so verwandelt sie sich ferner in:

$$0 = \frac{x \cos \beta \cos \lambda}{aa} + \frac{y \cos \beta \sin \lambda}{aa} + \frac{z \sin \beta}{bb} \dots (11)$$

Durch diese Gleichung und durch die Gleichungen (4) werden x, y, z durch die Coordinaten $u' = s' \sin(p' - P)$ und $v' = s' \cos(p' - P)$ am Rande des Planeten liegender Punkte ausgedrückt. Man erhält daraus ($\frac{bb}{aa} = 1 - ee$ gesetzt):

$$-x \sin \lambda + y \cos \lambda = \varrho u'$$

$$x \cos \lambda + y \sin \lambda = \varrho v' \frac{\sin \beta}{1 - ee \cos \beta^2}$$

$$z = \varrho v' \frac{(1 - ee) \cos \beta}{1 - ee \cos \beta^2}$$

welche Ausdrücke, indem sie der Gleichung der Oberfläche entsprechen müssen, durch ihre Substitution in (5) die Gleichung der gesuchten krummen Linie

$$a'a' = u'u' + \frac{v'v'}{1 - ee \cos \beta^2} \dots \dots \dots (12)$$

ergeben. Die Projection des Sphäroids ist also eine Ellipse, deren grosse Axe $= 2a'$, die kleine $= 2a' \sqrt{1 - ee \cos \beta^2}$ ist.

3.

Diese Figur sieht man nur dann vollständig, wenn sie ganz erleuchtet ist; in allen anderen Fällen ist die sichtbare Figur des Planeten nur zur Hälfte durch die Ellipse (12), zur anderen Hälfte aber durch eine andere Ellipse, nämlich durch die Projection der Licht-

$$-x \sin \lambda + y \cos \lambda = \varrho u'$$

$$N(x \cos \lambda + y \sin \lambda) = \varrho u' \cos \beta \cos \beta' \sin(\lambda - \lambda') - \frac{a}{b} \mathcal{A} \varrho v' \sin \beta'$$

$$N \frac{a}{b} z = \varrho u' \sin \beta \cos \beta' \sin(\lambda - \lambda') + \frac{a}{b} \mathcal{A} \varrho v' \cos \beta' \cos(\lambda - \lambda')$$

wo N für $\sin \beta, \sin \beta' + \cos \beta, \cos \beta' \cos(\lambda - \lambda')$ geschrieben ist. Oder, wenn man d und w nach den Formeln:

$$\cos d \{-x \sin \lambda + y \cos \lambda\} = \varrho u' \cos d$$

$$\left. \begin{aligned} \cos d \{x \cos \lambda + y \sin \lambda\} &= -\varrho u' \sin d \sin w \cos \beta, -\frac{a}{b} \mathcal{A} \varrho v' \{ \cos d \sin \beta, + \sin d \cos \beta, \cos w \} \\ \cos d \frac{a}{b} z &= -\varrho u' \sin d \sin w \sin \beta, + \frac{a}{b} \mathcal{A} \varrho v' \{ \cos d \cos \beta, - \sin d \sin \beta, \cos w \} \end{aligned} \right\} \dots \dots (14)$$

grenze auf die Ebene, welche von der Gesichtslinie senkrecht durchschnitten wird, begrenzt. Ich werde diese zweite Ellipse jetzt bestimmen.

Wenn man die Sonne als einen Punkt ansieht, welches ich hier thun werde, so findet zwischen den Coordinaten der Punkte des Sphäroids, durch welche die Lichtgrenze geht, offenbar eine der Gleichung (10) ganz ähnliche Bedingungsgleichung statt, welche nur dadurch von jener verschieden ist, dass sie statt ξ, η, ζ ähnliche, den Ort der Sonne bestimmende Coordinaten ξ', η', ζ' enthält. Bezeichnet man die heliocentrische Länge und Breite des Planeten, auf seinen Aequator bezogen, durch λ' und β' , so verwandelt sich die aus (10) abgeleitete Gleichung (11) in die zur Bestimmung der Lichtgrenze notwendige:

$$0 = \frac{x \cos \beta' \cos \lambda'}{aa} + \frac{y \cos \beta' \sin \lambda'}{aa} + \frac{z \sin \beta'}{bb} \dots (13)$$

Diese Gleichung und die Gleichungen (4) bestimmen die Coordinaten in der Lichtgrenze liegender Punkte durch ihnen zugehörige u' und v' ; die Substitution der Ausdrücke derselben durch diese Grössen in die Gleichung der Oberfläche ergibt die Gleichung zwischen u' und v' .

Führt man, statt β und β' , davon abhängige β , und β' , in die Rechnung ein, indem man

$$\frac{1}{\mathcal{J}} \cos \beta = \cos \beta \quad \frac{1}{\mathcal{J}} \cos \beta' = \cos \beta'$$

$$\frac{1}{\mathcal{J}} \sin \beta = \frac{a}{b} \sin \beta \quad \frac{1}{\mathcal{J}} \sin \beta' = \frac{a}{b} \sin \beta'$$

setzt, so verwandelt sich die drei Gleichungen, durch welche x, y, z bestimmt werden sollen, in:

$$0 = x \cos \beta' \cos \lambda' + y \cos \beta' \sin \lambda' + \frac{a}{b} z \sin \beta'$$

$$\varrho u' = -x \sin \lambda + y \cos \lambda$$

$$\frac{a}{b} \mathcal{A} \varrho v' = -x \sin \beta \cos \lambda - y \sin \beta \sin \lambda + \frac{a}{b} z \cos \beta,$$

Durch Auflösung derselben findet man

$$\cos d = \sin \beta, \sin \beta' + \cos \beta, \cos \beta' \cos(\lambda' - \lambda)$$

$$\sin d \cos w = \cos \beta, \sin \beta' - \sin \beta, \cos \beta' \cos(\lambda' - \lambda)$$

$$\sin d \sin w = \cos \beta, \sin(\lambda' - \lambda)$$

welche Ausdrücke, in (5) gesetzt,

$$\cos d^2 \frac{a^2}{\rho^2} = u' u' \cos d^2 + \left\{ (u' \sin w + \frac{a}{b} \mathcal{A}' v' \cos w) \sin d \cos \beta + \frac{a}{b} \mathcal{A}' v' \cos d \sin \beta \right\}^2 + \left\{ (u' \sin w + \frac{a}{b} \mathcal{A}' v' \cos w) \sin d \sin \beta - \frac{a}{b} \mathcal{A}' v' \cos d \cos \beta \right\}^2$$

oder, wenn man $\rho a'$ für a schreibt, die drei Quadrate in zwei zusammenzieht und

$$a' a' = \left\{ u' \cos w - \frac{v' \sin w}{\sqrt{1 - e e \cos^2 \beta}} \right\}^2 + \left\{ u' \sin w + \frac{v' \cos w}{\sqrt{1 - e e \cos^2 \beta}} \right\}^2 \sec^2 d^2 \dots \dots \dots (15)$$

ergeben. Dieses ist also die Gleichung der Ellipse, welche die Figur des Planeten an den Stellen begrenzt, an welchen der Rand der Projection des Sphäroids nicht erleuchtet ist.

Man bemerkt leicht die geometrische Bedeutung der hier in die Rechnung gebrachten Grössen. Zieht man gerade Linien von dem Mittelpunkt des Planeten nach der Erde und nach der Sonne, und füllet man von den Punkten, in welchen sie die Oberfläche des Planeten durchschneiden, Perpendikel entweder auf seine Drehungsaxe oder auf die Ebene seines Aequators, so sind $-\beta$, und $-\beta'$, die Breiten der dadurch auf die einbeschriebene oder umbeschriebene Kugel projectirten Punkte; \mathcal{A} und \mathcal{A}' sind die Radien des Sphäroids an diesen Punkten; d ist die Entfernung der Punkte auf der einen oder anderen Kugel von einander; w der Winkel des durch beide gelegten grössten Kreises mit dem Meridiane des ersteren.

Die hier bestimmte Ellipse kann übrigens von der, welche die wirkliche Begrenzung einer Planetenscheibe ist, etwas abweichen. Die Sonne ist in der Rechnung als ein Punkt angenommen, während sie in den Entfernungen des Mars und des Jupiters noch von erheblicher Grösse erscheint; auch hat auf die Strahlenbrechung auf dem Planeten, so wie auf die Lichtschwächung, welche nahe an der Lichtgrenze, auf der der Sonne zugewandten Seite des Planeten liegende Punkte wahrscheinlich unsichtbar macht, nicht Rücksicht genommen werden können. Es ist indessen nicht zu erwarten, dass die Entfernung der wahren Lichtgrenze von der der Annahme zufolge hier bestimmten so beträchtlich ist, dass sie in der sie verkürzenden Projection, in welcher sie uns bei den oberen Planeten erscheint, noch bemerkbar sein sollte.

4.

Es ist noch nöthig zu bestimmen, welcher Theil der sichtbaren Figur des Planeten durch die Projection des Sphäroids, und welcher durch die Lichtgrenze begrenzt wird. Der Unterschied wird dadurch erzeugt,

setzt, $\sqrt{1 - e e \cos^2 \beta}$ statt $\frac{b}{a \mathcal{J}}$

dass in der Ausdehnung des ersten Theils die Lichtgrenze auf der von der Erde unsichtbaren Seite des Planeten liegt, in der Ausdehnung des andern auf der von der Erde sichtbaren. Zieht man eine gerade Linie von der Erde nach einem Punkte der Lichtgrenze, so durchschneidet sie entweder die Oberfläche des Planeten nicht nur an diesem Punkte, sondern noch an einem andern, oder sie berührt dieselbe. Die Punkte an welchen das letztere stattfindet sind offenbar die, welche beiden Ellipsen gemeinschaftlich sind; liegt, an anderen Punkten, der zweite Durchschnitt der geraden Linie zwischen dem ersten und der Erde, so ist die Lichtgrenze unsichtbar; liegt er über den ersten hinaus, so ist sie sichtbar, und begrenzt also die Figur des Planeten.

Wenu eine gerade Linie von der Erde nach einem Punkte der Planetenoberfläche, dessen Coordinaten x, y, z sind, gelegt und die Entfernung dieses Punktes von der Erde durch ρ bezeichnet wird, für den zweiten Durchschnittspunkt derselben geraden Linie mit der Oberfläche des Planeten aber die Bezeichnungen x', y', z', ρ' angewandt werden, so ist

$$\begin{aligned} (x' - \xi) \rho &= (x - \xi) \rho' \\ (y' - \eta) \rho &= (y - \eta) \rho' \\ (z' - \zeta) \rho &= (z - \zeta) \rho' \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{\rho' - \rho}{\rho} (\xi - x) \\ y' &= y - \frac{\rho' - \rho}{\rho} (\eta - y) \\ z' &= z - \frac{\rho' - \rho}{\rho} (\zeta - z) \end{aligned}$$

welche Ausdrücke der Gleichung der Oberfläche des Sphäroids Genüge leisten müssen und dadurch ρ' — ρ bestimmen. Setzt man sie in (5), so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{2(\rho' - \rho)}{\rho} \left\{ \frac{x(\xi - x)}{aa} + \frac{y(\eta - y)}{aa} + \frac{z(\zeta - z)}{bb} \right\} \\ &+ \frac{(\rho' - \rho)^2}{\rho^2} \left\{ \frac{(\xi - x)^2}{aa} + \frac{(\eta - y)^2}{aa} + \frac{(\zeta - z)^2}{bb} \right\} \end{aligned}$$

Da das zweite Glied dieser Gleichung positiv ist, so muss das erste negativ sein, oder $q' - \rho$ und der andere Factor dieses Gliedes müssen immer gleiche Zeichen haben. Der Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, ist also sichtbar oder unsichtbar, je nachdem

$$\frac{x(\xi - x)}{aa} + \frac{y(\eta - y)}{aa} + \frac{z(\zeta - z)}{bb}$$

positiv oder negativ ist. Die Sichtbarkeit eines Punktes auf der Planetenscheibe erfordert also, dass das erstere stattfindet, oder dass

$$\frac{x\xi}{aa} + \frac{y\eta}{aa} + \frac{z\zeta}{bb} > 1$$

sei; welche Bedingung, in den Bezeichnungen des vorigen §'s, nämlich:

$$\xi = -\frac{\rho}{J} \cos \beta, \cos \lambda$$

$$(x \cos \lambda + y \sin \lambda) \cos \beta + \frac{\alpha}{b} z \sin \beta = -\rho \operatorname{tg} d \left\{ u' \sin \pi + \frac{v' \cos \pi}{\sqrt{1 - \epsilon \epsilon \cos^2 \beta}} \right\}$$

und es folgt daraus, dass die Lichtgrenze für die Werthe von u' und v' sichtbar ist, für welche dieser Ausdruck negativ, oder

$$\operatorname{tg} d \left\{ u' \sin \pi + \frac{v' \cos \pi}{\sqrt{1 - \epsilon \epsilon \cos^2 \beta}} \right\}$$

positiv ist.

Drückt man u' und v' durch die Entfernung vom Mittelpunkt des Planeten und den Positionswinkel aus, oder setzt man

$$u' = s' \sin(p' - P), \quad v' = s' \cos(p' - P)$$

und ferner

$$\frac{\cos \pi}{\sqrt{1 - \epsilon \epsilon \cos^2 \beta}} = \delta \cos \pi'$$

$$\sin \pi = \delta \sin \pi'$$

so verwandelt der Ausdruck sich in:

$$s' \delta \operatorname{tg} d \cos(p' - P - \pi')$$

Wenn d kleiner ist als 90° , so ist also die Lichtgrenze sichtbar für Werthe von p' zwischen $P + \pi' - 90^\circ$ und $P + \pi' + 90^\circ$; wenn d grösser ist als 90° , so fängt sie bei der zweiten Grenze an sichtbar zu werden und hört bei der ersten auf. In dem ersten Falle ist der Planet mehr, in dem zweiten weniger als halb erleuchtet.

5.

Die in den vorigen Paragraphen gegebene Bestimmung der scheinbaren Figur des Planeten setzt uns in den Stand, die Berechnungsart aller Beobachtungen, welche auf Punkte an dem Rande des Planeten bezogen werden, aufsuchen zu können.

Ich werde zuerst die Grösse des Durchmessers untersuchen, welche man mit einem Heliometer, oder

$$\eta = -\frac{\rho}{J} \cos \beta, \sin \lambda$$

$$\xi = -\frac{b}{a} \frac{\rho}{J} \sin \beta,$$

ausgedrückt, die Form:

$$(x \cos \lambda + y \sin \lambda) \cos \beta + \frac{\alpha}{b} z \sin \beta < \frac{Jaa}{\rho}$$

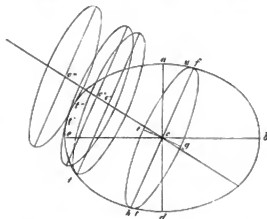
annimmt. Indem Grössen von der Ordnung des zweiten Gliedes hier als unmerklich betrachtet werden, so wird die Sichtbarkeit eines Punktes auf dem Planeten dadurch bedingt, dass das erste Glied negativ ist.

Liegt der Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, in der Lichtgrenze, so haben diese Coordinaten die Ausdrücke (14). Multiplicirt man den zweiten derselben in $\cos \beta, \sec d$, den dritten in $\sin \beta, \sec d$, so ist die Summe der Produkte:

$$\left(x \cos \lambda + y \sin \lambda \right) \cos \beta + \frac{\alpha}{b} z \sin \beta = -\rho \operatorname{tg} d \left\{ u' \sin \pi + \frac{v' \cos \pi}{\sqrt{1 - \epsilon \epsilon \cos^2 \beta}} \right\}$$

einem anderen doppelte Bilder gewährenden Instrumente, in einer gegebenen Richtung misst. Diese Messungsart beruht darauf, dass eins der doppelten Bilder so weit verschoben wird, dass ein Punkt an seinem Rande eines anderen Punkt am Rande des nicht verschobenen Bildes berührt: die Grösse der Verschiebung $= \sigma$ ist der gemessene Durchmesser in der Richtung der Verschiebung, welche ich durch den Positionswinkel π angeben werde. Die aufzulösende Aufgabe ist also, die Relation zwischen σ, π und den Axen des Sphäroids zu finden.

Die Natur dieser Aufgabe wird durch die beigedruckte Zeichnung anschaulich werden. Diese zeigt die Projection des Sphäroids $abde$, die Erleuchtungscurve



$fghi$, und auch Verschiebungen der letzteren. Jenachdem die Hälfte ngt , oder die Hälfte tiu der Erleuchtungscurve die sichtbare ist, ist $ngte$ oder $uite$ die

sichtbare Figur des Planeten. Die Verschiebung des Mittelpunkts der Erleuchtungcurve auf der willkürlich gelegten Linie c, c', c'', \dots bringt eine Berührung der Ränder f' hervor, wenn der Mittelpunkt in c' ist; eine zweite f'' und eine dritte f''' , wenn er in c'' und c''' ist. Offenbar entstehen aus gleichen Verschiebungen nach der entgegengesetzten Richtung Berührungen, welche den vorigen symmetrisch sind. Der Bedingung, dass die Ränder beider Ellipsen sich durch eine Verschiebung in gegebener Richtung berühren, muss also durch 6 Werthe von σ Genüge geleistet werden können, welche paarweise von gleicher Grösse, aber im Zeichen verschieden sind. Dass alle diese Werthe in jedem gegebenen Falle möglich seien, ist weder nöthig noch findet es statt.

Die beiden Gleichungen (12) und (15), welche die hier in Betracht kommenden Ellipsen bestimmen, verlegen den Mittelpunkt der Coordinaten u' und v' in den Mittelpunkt der Projectionen, sowohl des Sphäroids, als seiner Erleuchtungcurve; wird eine dieser Ellipsen nach der dem Positionswinkel π entsprechenden Richtung um die Grösse σ verschoben, so ist die daraus entstehende Veränderung des Ortes ihres Mittelpunkts in der Richtung der Axe der $u = \sigma \sin(\pi - P)$, in der Richtung der Axe der $v = \sigma \cos(\pi - P)$. Die Gleichung der so verschobenen ersten Ellipse, auf die unveränderten Coordinatenachsen bezogen, ist also:

$$a'a' = \left\{ u' - \sigma \sin(\pi - P) \right\}^2 + \left\{ \frac{v' - \sigma \cos(\pi - P)}{1 - \epsilon \epsilon \cos \beta^2} \right\}^2$$

Um indessen die Gleichungen beider Ellipsen zu vereinfachen, werde ich

$$\frac{\epsilon'}{\sqrt{1 - \epsilon \epsilon \cos \beta^2}} = v',$$

$$\sigma, \sigma, -2\sigma, \left\{ \sin x \sin(\psi - w) + \cos x \cos(\psi - w) \cos d \right\} = a' a' \sin^2 \cos x^2$$

$$\sigma, \left\{ \cos x \sin(\psi - w) - \sin x \cos(\psi - w) \cos d \right\} = a' \sin^2 \cos x \sin x$$

Zieht man das Product der zweiten in $a' \cotg x$ von der ersten ab und dividirt man den Rest durch σ , so erhält man:

$$\sigma = a' \left\{ \frac{1 + \sin x^2}{\sin x} \sin(\psi - w) + \cos x \cos(\psi - w) \cos d \right\} \quad (18)$$

und wenn man diesen Ausdruck in die letzte Gleichung setzt,

$$\sin(\psi - w)^2 \{ \cos x - a' \sin x \} \{ \cos x - a' \sin x \} \{ \cos x - a' \sin x \}$$

angesehen werden; die in demselben vorkommenden a, a', a'' sind die Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$0 = \sin(\psi - w)^2 x^3 + \{ 2 \sin(\psi - w)^2 - \cos(\psi - w)^2 \cos d^2 - \sin d^2 \} x^2 - 2 \sin(\psi - w) \cos(\psi - w) \cos d \dots \quad (20)$$

und diese Wurzeln ergeben, wenn $\sin(\psi - w)$ nicht verschwindet, drei der Gleichung entsprechende Werthe von $\cotg x$, nämlich:

$$\cotg x = a, \quad \cotg x = a', \quad \cotg x = a'',$$

$$\frac{\sigma \cos(\pi - P)}{\sqrt{1 - \epsilon \epsilon \cos \beta^2}} = \sigma, \cos \psi$$

$$\sigma \sin(\pi - P) = \sigma, \sin \psi$$

setzen, also die beiden Gleichungen

$$a'a' = \left\{ u' \cos w - v' \sin w \right\}^2 + \left\{ u' \sin w + v' \cos w \right\}^2 \sec^2 d^2 \quad (16)$$

$$a'a' = \left\{ u' - \sigma, \sin \psi \right\}^2 + \left\{ v' - \sigma, \cos \psi \right\}^2$$

schreiben.

Die Bedingung der Aufgabe, dass beide Ellipsen sich berühren sollen, fordert, dass sie an einem ihnen gemeinschaftlichen Punkte auch eine gemeinschaftliche Tangente haben, oder dass $\frac{d\epsilon'}{d\alpha^2}$ an diesem Punkte in beiden Ellipsen einen gleichen Werth erhalte. Differentirt man demzufolge die beiden Gleichungen (16), so erhält man, durch die Gleichsetzung des Differentialquotienten, die dritte, zur Bestimmung der Aufgabe erforderliche Gleichung:

$$0 = (u' \cos w - v' \sin w) (u' \sin w + v' \cos w) \sin d^2$$

$$+ \sigma, \cos(\psi - w) (u' \cos w - v' \sin w) \cos d^2$$

$$- \sigma, \sin(\psi - w) (u' \sin w + v' \cos w) \dots \dots \dots (17)$$

Wenn man u' und v' aus diesen drei Gleichungen eliminiert, so bleibt eine Gleichung übrig, welche σ bestimmt. Ich werde, um durch eine einfache Rechnung zu diesem Ziele zu gelangen, eine neue unbekannte Grösse x einführen, welche mit u' und v' durch die Formeln:

$$u' \cos w - v' \sin w = a' \sin x$$

$$u' \sin w + v' \cos w = a' \cos x \cos d$$

verbunden ist. Hierdurch wird die erste Gleichung erfüllt. Indem

$$u' = a' \left\{ \sin x \cos w + \cos x \sin w \cos d \right\}$$

$$v' = a' \left\{ -\sin x \sin w + \cos x \cos w \cos d \right\}$$

ist, verwandeln die beiden anderen Gleichungen sich in:

$$0 = \sin(\psi - w)^2 \cos x^2$$

$$+ \{ 2 \sin(\psi - w)^2 - \cos(\psi - w)^2 \cos d^2 - \sin d^2 \} \cos x \sin x^2$$

$$- 2 \sin(\psi - w) \cos(\psi - w) \cos d \sin x^2 \dots \dots \dots (19)$$

In dieser Gleichung und in dem Ausdruck von σ , (18) ist die Auflösung der Aufgabe enthalten. Der Ausdruck, dessen Verschwinden die Gleichung bedingt, kann als das Product der Factoren:

also, da jede Tangente zweien um 180° von einander verschiedenen Winkeln zugehört, 6 Werthe von x , welche, in den Ausdruck (18) von σ , gesetzt, die 6 erforderlichen Auflösungen der Aufgabe, oder 3 Werthe von $\pm \sigma$, hervorbringen.

$0 = \{x \sin(\psi - \omega)\}^2 + \{2 \sin(\psi - \omega)^2 - \cos(\psi - \omega)^2 \cos^2 d - \sin^2 d\} x \sin(\psi - \omega) - 2 \sin(\psi - \omega)^2 \cos(\psi - \omega) \cos d$
 schreiben, und daraus folgern, dass die 3 Werthe von $x \sin(\psi - \omega)$ sich den Wurzeln der Gleichung

$$0 = y^2 - y$$

desto mehr nähern, je kleiner $\sin(\psi - \omega)$ ist. Diese Wurzeln sind 0, 1, -1 , und es folgt hieraus, dass die beiden Wurzeln, welche die Gleichung (20) in diesem Falle unbestimmt lässt, desto näher

$$\alpha' = \frac{1}{\sin(\psi - \omega)}, \quad \alpha'' = \frac{-1}{\sin(\psi - \omega)}$$

sind, je kleiner $\sin(\psi - \omega)$ ist. Man also, da diese Wurzeln die Cotangenten der der Gleichung genügenden Werthe von x sind, desto näher, je kleiner $\sin(\psi - \omega)$ ist,

$\operatorname{tg} x = \infty$, $\operatorname{tg} x = \sin(\psi - \omega)$, $\operatorname{tg} x = -\sin(\psi - \omega)$.
 Setzt man diese Werthe in den Ausdruck von σ , (18), so erhält man, für den Fall $\sin(\psi - \omega) = 0$,

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 0 \\ \sigma &= \pm a'(1 + \cos d) \\ \sigma &= \pm a'(1 - \cos d) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

Es geht hieraus auch hervor, dass es, immer wenn $\sin(\psi - \omega)$ eine kleine Grösse ist, zweckmässig ist, $x \sin(\psi - \omega)$ zur unbekanntenen Grösse der Gleichung zu machen.

6.

Wenn die cubische Gleichung (20) nur eine mögliche Wurzel hat, oder wenn nur ein Werth von $\operatorname{tg} x$, also auch nur einer von $\pm \sigma$, möglich ist, so gehört dieser zu der äusseren Berührung beider Ellipsen, indem diese offenbar immer möglich ist. Wenn auch die beiden anderen Wurzeln möglich sind, so gehören sie, da nur eine äussere Berührung auf jeder Seite des Mittelpunkts stattfinden kann, inneren Berührungen zu, welche also beide zugleich möglich, oder beide zugleich unmöglich sind. Damit aber eine Berührung beobachtet werden könne, ist ausser ihrer Möglichkeit noch erforderlich, dass die Punkte der Ellipsen, an welchen sie stattfindet, sichtbar seien.

Für den Fall $d < 90^\circ$, welcher für die oberen Planeten allein vorkommen kann, liegen die sichtbaren Begrenzungen beider Ellipsen auf verschiedenen Seiten des Mittelpunkts des Planeten. Dann ist die Erhaben-

heit der Begrenzungen allenthalben nach aussen gewandt und die Figur kann, bei ihrer Verschiebung, keine innere Berührung zeigen, wogegen die äussere immer sichtbar ist. Wenn also in diesem Falle auch drei Berührungen möglich sind, so findet in der Wahl derselben doch keine Zweideutigkeit statt, indem die allein sichtbare Berührung, die äussere, dem grössten Werthe von σ , zugehört.

Für den Fall $d > 90^\circ$, welcher, so wie auch der vorige, bei den unteren Planeten vorkommt, liegen die sichtbaren Begrenzungen beider Ellipsen auf einer Seite des Mittelpunkts. Die Erhabenheit der Lichtgrenze ist nach innen gewandt und es können nur innere Berührungen sichtbar werden. Ist daher nur eine Wurzel der Gleichung möglich, so ist keine Berührung der Ellipsen sichtbar, denn die allein mögliche Wurzel gehört zu der äusseren Berührung, welche in diesem Falle unsichtbar ist. Sind aber auch die beiden anderen Wurzeln der Gleichung möglich, so sind die ihnen entsprechenden inneren Berührungen auch immer sichtbar. Um sie von einander unterscheiden zu können, muss angegeben sein, ob die durch die Verschiebung des einen Bildes über das andere hervorgebrachte Berührung der Ränder die nähere oder die entferntere ist.

7.

Für Jupiter und Saturn ist d immer ein kleiner Winkel; für Mars wächst er zwar in den Quadraturen bis über 45° , jedoch werden die Beobachtungen, welche nach der hier entwickelten Theorie berechnet werden müssen, auch bei diesem Planeten meistens in der Nähe des Gegenseins angestellt werden, wo d keine beträchtliche Grösse besitzt. Es fehlt also nicht an Veranlassung, die Abkürzungen der Rechnung aufzusuchen, welche sich aus der Bedingung, dass d ein kleiner Winkel sei, ziehen lassen. Ich werde demnach jetzt untersuchen, auf welche Formeln die Auflösung der in den beiden letzten §§ behandelten Aufgabe zurückkommt, wenn d so klein ist, dass man Grössen von der Ordnung von $\sin^2 d$ vernachlässigen kann.

Man leistet der cubischen Gleichung (20) bis auf Grössen der zweiten Ordnung Genüge durch

$$z = \cot g(\psi - \omega);$$

dieser Werth ist also eine Näherung an eine Wurzel der Gleichung, und zwar, den gemachten Bemerkungen zufolge, an die der äusseren Berührung entsprechende. Indem man seine Verbesserung durch s' bezeichnet, also

$$s = \cotg(\psi - \varepsilon) + s'$$

in die Gleichung setzt, wird sie

$$0 = \sin(\psi - \varepsilon) \cos(\psi - \varepsilon) (1 - \cos d)^2 + \{2 - \sin^2 d \sin(\psi - \varepsilon)\} s' + \text{etc.}$$

und es geht hieraus hervor, dass der angenommene Näherungswert von s auch noch in den Grössen der zweiten Ordnung richtig ist. Da man $s = \cotg x$, für die hier gesuchte Annäherung also $= \cotg(\psi - \varepsilon)$ hat, so ist auch

$$\sin x = \pm \sin(\psi - \varepsilon), \quad \cos x = \pm \cos(\psi - \varepsilon)$$

und diese Ausdrücke, in (18) gesetzt, ergeben:

$$\sigma = \pm a' \{1 - 2 \sin \frac{1}{2} d^2 \cos(\psi - \varepsilon)\} \dots (22)$$

Besonders einfache Ausdrücke haben die beiden Durchmesser des Planeten, welche den Winkeln $\psi - \varepsilon = 0$ und $= 90^\circ$ entsprechen. Der erstere ist schon am Ende des 5. §, für die äussere Berührung,

$$\sigma = \pm a' (1 + \cos d)$$

gefunden. Für den anderen wird die Gleichung (20):

$$0 = s^2 + (1 + \cos d) s;$$

sie hat nur eine mögliche Wurzel, nämlich $s = 0$, welcher $x = \pm 90^\circ$ und $\sigma = \pm 2 a'$ entspricht. — Statt der von der Grösse der Verschiebung des einen Bildes des Planeten über das andere und von dem Positionswinkel, in welchem dieselbe vorgenommen ist, abhängigen σ , werde ich ihre Ausdrücke in die eben gefundenen Formeln einführen. Bezeichnet man den Positionswinkel, welcher $\psi - \varepsilon = 0$ gibt, durch (p) ; die Grösse der Verschiebung, welche die äussere Berührung (σ) , so hat man

$$(\sigma) \cos((p) - P) = \sigma, \cos \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon \varepsilon \cos \beta^2}$$

$$(\sigma) \sin((p) - P) = \sigma, \sin \varepsilon$$

woraus

$$\text{tg}((p) - P) = \frac{\text{tg} \varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon \varepsilon \cos \beta^2}} \dots (23)$$

und

$$\sigma = \frac{(\sigma)}{\sqrt{1 - \varepsilon \varepsilon \cos \beta^2 \cos^2 \varepsilon}}$$

also (21):

$$a' \sqrt{1 - \varepsilon \varepsilon \cos \beta^2 \cos^2 \varepsilon} = \frac{(\sigma)}{1 + \cos d} \dots (24)$$

hervorgehen. Bezeichnet man ferner die zu $\psi - \varepsilon = 90^\circ$ gehörigen Werthe von p und σ durch (p_1) und (σ_1) , so hat man

$$(\sigma_1) \cos((p_1) - P) = -\sigma_1, \sin \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon \varepsilon \cos \beta^2}$$

$$(\sigma_1) \sin((p_1) - P) = \sigma_1, \cos \varepsilon$$

und erhält dadurch

$$\text{tg}((p_1) - P) = -\frac{\text{ctg} \varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon \varepsilon \cos \beta^2}} \dots (25)$$

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_1)}{\sqrt{1 - \varepsilon \varepsilon \cos \beta^2 \sin^2 \varepsilon}}$$

und

$$a' \sqrt{1 - \varepsilon \varepsilon \cos \beta^2 \sin^2 \varepsilon} = \frac{(\sigma_1)}{2} \dots (26)$$

Wenn man Beobachtungen zu machen beabsichtigt, aus welchen die Bestimmung der Axen des Sphäroids hervorgehen soll, so kann man, wenn man anders der grösseren Leichtigkeit der Rechnung einiges Gewicht beilegen will, (p) und (p_1) nach den Formeln (23) und (25) vorher berechnen, und, statt in willkürlichen Richtungen, in den so bestimmten messen. Diese Wahl der Richtungen ist jedoch nur dann vorteilhaft für die Bestimmung der Axen des Sphäroids, wenn sie mit der Richtung der Axen der Projection desselben nahe zusammentrifft.

8.

Eine der hier aufgelösten nahe verwandte Aufgabe betrifft die Bestimmung der Lage eines auf der Scheibe des Planeten sichtbaren Punktes gegen seinen Mittelpunkt, durch Messungen, welche sich auf die Ränder seiner Figur beziehen. Ich werde sie hier nicht übergehen, weil ihre Auflösung bei der Untersuchung der Drehungselemente des Planeten nicht entbehrt werden kann, wenn diese auf die Bewegung von Punkten, welche auf seiner Oberfläche sichtbar sind, gegründet werden soll.

Man kann weder die Entfernung eines Punktes O von dem Mittelpunkte eines Planeten, noch den Winkel des durch beide gelegten grössten Kreises mit dem Declinationskreise des ersten unmittelbar messen, indem der Mittelpunkt des Planeten nicht von anderen Punkten der Planetenscheibe unterschieden werden kann; dagegen kann man die Entfernung des Punktes O von einem in beliebiger Richtung liegenden Punkte des Randes messen; auch statt des sich auf den Mittelpunkt beziehenden Positionswinkels einen anderen beobachten, welcher, mit der Messung der Entfernung zusammengekommen, die vollständige Bestimmung der Lage des Punktes ergibt. Wenn ein Heliometer, oder ein anderes, auf die Verdoppelung der Bilder gegründetes Instrument angewandt wird, so scheint es mir am zweckmässigsten zu sein, denjenigen Positionswinkel zu beobachten, bei welchem der gemeinschaftliche Punkt

der zur Berührung gebrachten Bilder des Planeten in gerader Linie zwischen beiden Bildern des Punktes O erscheint. Diese Beobachtungsart würde, wenn die scheinbare Figur des Planeten ein Kreis oder eine Ellipse wäre, unmittelbar den Positionswinkel des Punktes O , bezogen auf den Mittelpunkt, ergeben; wenn man die Messung der Entfernung des Punktes O von den Rändern hinzufügt, auch unmittelbar seine Entfernung von dem Mittelpunkte. Wenn diese Figur aber, bei unvollständiger Beleuchtung, aus zwei verschiedenen Ellipsen zusammengesetzt ist, so ergibt die Beobachtung nicht unmittelbar die Lage von O in Beziehung auf den Mittelpunkt, steht jedoch mit derselben in einem Zusammenhange, welchen ich jetzt untersuchen werde.

Bezeichnet man die Coordinaten des zu bestimmten Punktes O durch u und v und drückt man sie durch seine Entfernung von dem Mittelpunkte des Planeten $= s$ und durch den Winkel des durch beide gelegten grössten Kreises mit dem Declinationskreise des letzteren $= p$ aus, nämlich:

$$\begin{aligned} u &= s \sin(p - P) \\ v &= s \cos(p - P); \end{aligned}$$

bezeichnet man ferner durch π , wie vorher, den Positionswinkel, unter welchem das eine Bild über das andere verschoben worden ist und durch t und t' die Entfernungen des nicht verschobenen und des verschobenen Bildes von O von dem Berührungspunkte, so hat man die Ausdrücke der Coordinaten des Berührungspunktes:

$$\begin{aligned} u' &= s \sin(p - P) + t \sin(\pi - P) \\ v' &= s \cos(p - P) + t \cos(\pi - P) \end{aligned}$$

oder die daraus folgenden:

$$\left. \begin{aligned} s \sin(p - \pi) &= u' \cos(\pi - P) - v' \sin(\pi - P) \\ s \cos(p - \pi) &= u' \sin(\pi - P) + v' \cos(\pi - P) - t \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

Die hier vorkommenden Coordinaten des Berührungspunktes u' und v' werden, wenn derselbe sich an der Lichtgrenze des nicht verschobenen Bildes befindet, dem 5. § zufolge durch x gegeben, nämlich durch den Winkel, dessen Cotangente eine Wurzel der cubischen Gleichung (20) ist. Man hat dadurch:

$$\begin{aligned} u' &= a' \{ \sin x \cos w + \cos x \sin w \cos d \} \\ v' &= a' \{ -\sin x \sin w + \cos x \cos w \cos d \} \sqrt{1 - \text{eccos}^2 \beta}; \end{aligned}$$

welche Formeln, so wie auch (27), sich zusammenziehen, wenn man

$$\begin{aligned} \cos x \cos d &= m \cos M \\ \sin x &= m \sin M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \text{eccos}^2 \beta} \cos(M + w) &= m' \cos M' \\ \sin(M + w) &= m' \sin M' \end{aligned}$$

einführt. Dadurch erhält man nämlich:

$$\begin{aligned} u' &= a' m' m' \sin M' \\ v' &= a' m' m' \cos M' \end{aligned}$$

und

$$\left. \begin{aligned} s \sin(p - \pi) &= a' m' m' \sin(M' - \pi + P) \\ s \cos(p - \pi) &= a' m' m' \cos(M' - \pi + P) - t \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

Es ist indessen noch über zwei Zweideutigkeiten zu entscheiden. Die eine entsteht durch eine Zweideutigkeit von x , welches durch seine Cotangente gegeben wird, wofür also zwei, 180° von einander verschiedene Werthe genommen werden können. In dem vorausgesetzten Falle, in welchem der Berührungspunkt beider Bilder des Planeten sich an dem Theile des Randes des nicht verschobenen Bildes befindet, welcher durch die Erleuchtungscurve begrenzt wird, muss aber x im ersten oder letzten Quadranten angenommen werden; denn da daselbst die Lichtgrenze sichtbar ist, so muss (§ 4)

$$\text{tg } d \left\{ u' \sin w + \frac{v' \cos w}{\sqrt{1 - \text{eccos}^2 \beta}} \right\}$$

positiv sein, welcher Ausdruck durch die Einführung von x (§ 5) in $a' \sin d \cos x$ verwandelt wird, und, da $\sin d$ immer positiv ist, einen positiven Werth von $\cos x$ fordert. — Der entgegengesetzte Fall, in welchem der Berührungspunkt beider Bilder des Planeten sich an dem Theile des Randes des nichtverschobenen Bildes befindet, welcher durch die Projection des Sphäroids begrenzt wird, wird durch die Verschiebung t' , in der π entgegengesetzter Richtung, d. h. in dem Positionswinkel $\pi + 180^\circ$, in jenen verwandelt, wodurch man, statt der Formeln (28), in diesem Falle:

$$\left. \begin{aligned} s \sin(p - \pi) &= a' m' m' \sin(M' - \pi + P) \\ s \cos(p - \pi) &= a' m' m' \cos(M' - \pi + P) + t' \end{aligned} \right\} \dots (28^*)$$

erhält. — Die Entscheidung, welcher von beiden Fällen der vorhandene ist, wird durch das § 4 entwickelte Unterscheidungszeichen der Lichtgrenze und des Randes der Projection des Sphäroids gegeben: jene begrenzt die Figur des Planeten (für $d < 90^\circ$) an Punkten, deren zugehörige Positionswinkel p' zwischen $P + w' - 90^\circ$ und $P + w' + 90^\circ$ fallen. Diese Positionswinkel sind mit u' und v' durch die Formeln

$$u' = s' \sin(p' - P), \quad v' = s' \cos(p' - P)$$

verbunden, während die obigen Ausdrücke derselben Coordinaten

$$u' = a' m' m' \sin M', \quad v' = a' m' m' \cos M'$$

sind und also $p' = M' + P$ ergeben. Fällt also M' zwischen $\epsilon' - 90^\circ$ und $\epsilon' + 90^\circ$, so ist der erste, die Anwendung der Formeln (28) erfordernde Fall vorhanden; fällt es zwischen $\epsilon' + 90^\circ$ und $\epsilon' + 270^\circ$, so ist es der andere, die Anwendung der Formeln (28*) erfordernde Fall.

9.

Die Berechnungsart der Beobachtungen der Satelliten eines Planeten kann man aus dem Vorhergehenden gleichfalls ableiten. Da ihre Ableitung vielleicht die wichtigste Anwendung dieser Theorie ist, auch der Reduction meiner mit dem Helimeter gemachten Beobachtungen der Satelliten des Jupiters zum Grunde gelegt werden muss, so werde ich ihre Mittheilung nicht unterlassen.

Man kann durch verschiedene Beobachtungsarten zu der Bestimmung der Lage eines Satelliten gegen den Planeten gelangen. Die von mir angewandte setzt voraus, dass das Bild des Satelliten, welches eine Hälfte des Objectivs macht, nach und nach an vier verschiedene Punkte des Randes der Figur des Planeten gebracht werde, welche von der anderen Hälfte dargestellt wird. Die Richtung der Verschiebung der Objectivhüllen wird zuerst so gestellt, dass sie den Satelliten durch die Figur des Planeten führt; in dieser Stellung, welche durch den abzulesenden Positionswinkel $= (p)$ bekannt wird, werden die Entfernungen des Satelliten von beiden Rändern der sichtbaren Figur des Planeten $= \sigma$ und σ' gemessen; ferner wird das Bild des Satelliten, während man den Axen der Objectivhüllen eine am Instrumente abzulesende Entfernung $= (s)$ gibt, durch Drehung des Objectivs um die Helimeteraxe an beide Ränder der Figur des Planeten gebracht, und die Positionswinkel π und π' , welche dieses leisten, werden beobachtet. — Augenscheinlich werden durch diese Beobachtungen sowohl die Entfernung $= s$ des Satelliten von dem Mittelpunkt des Planeten, als auch sein Positionswinkel an diesem Mittelpunkte $= p$ bestimmt. Die Genauigkeit des Resultats und die Leichtigkeit der Rechnung werden vermehrt, wenn man (p) und (s) so wählt, dass dadurch der Satellit sehr nahe in den Mittelpunkt des Planeten gebracht werden kann.

Ich werde zuerst die Relation zwischen den gemessenen Entfernungen σ und σ' und der gesuchten Entfernung s ableiten, unter der nothwendigen Voraussetzung, dass (p) und p bekannt sind. Bezeichnet man die Coordinaten des Punktes des Randes der Figur des Planeten, an welchem das Bild des Satelliten sich befindet, während die Entfernung σ und der Positionswinkel (p) ist, durch u' und r' (§ 2), so hat man:

$$\left. \begin{aligned} u' &= s \sin(p - P) - \sigma \sin((p) - P) \\ v' &= s \cos(p - P) - \sigma \cos((p) - P) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Setzt man diese Ausdrücke, nachdem man, wie oben:

$$s, \sin \psi = s \sin(p - P)$$

$$s, \cos \psi = \frac{s \cos(p - P)}{\sqrt{1 - \epsilon \epsilon \cos^2 \beta}}$$

und

$$\sigma, \sin \psi' = \sigma \sin((p) - P)$$

$$\sigma, \cos \psi' = \frac{\sigma \cos((p) - P)}{\sqrt{1 - \epsilon \epsilon \cos^2 \beta}}$$

in dieselben eingeführt hat, in die Gleichung der Projection des Sphäroids des Planeten (12), so erhält man die zur Bestimmung der Entfernung des Satelliten von dem Rande dieser Ellipse erforderliche Gleichung:

$$a'a' = (s, \sin \psi - \sigma, \sin \psi')^2 + (s, \cos \psi - \sigma, \cos \psi')^2 \quad (30)$$

und durch Auflösung derselben:

$$\sigma = s, \cos(\psi' - \psi) \pm \sqrt{a'a' - s, s, \sin(\psi' - \psi)^2} \quad (31)$$

Man erhält ferner, durch Substitution derselben Ausdrücke (29) von u' und v' in die Gleichung der Projection der Lichtgrenze (15), die zur Bestimmung der Entfernung des Satelliten von dem Rande dieser Ellipse erforderliche Gleichung. Man hat nämlich:

$$u' \cos \epsilon - \frac{r' \sin \epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon \epsilon \cos^2 \beta}} = s, \sin(\psi - \epsilon) - \sigma, \sin(\psi' - \epsilon)$$

$$u' \sin \epsilon + \frac{r' \cos \epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon \epsilon \cos^2 \beta}} = s, \cos(\psi - \epsilon) - \sigma, \cos(\psi' - \epsilon)$$

wodurch (15) sich in:

$$\begin{aligned} a'a' &= \{s, \sin(\psi - \epsilon) - \sigma, \sin(\psi' - \epsilon)\}^2 \\ &+ \{s, \cos(\psi - \epsilon) - \sigma, \cos(\psi' - \epsilon)\}^2 \sec^2 \delta^2 \quad (32) \end{aligned}$$

verwandelt, und durch Auflösung:

$$\begin{aligned} \sigma &= s, \cos(\psi' - \psi) + \frac{s, \sin^2 \delta \sin(\psi' - \psi) \cos(\psi' - \epsilon) \sin(\psi' - \epsilon)}{1 - \sin^2 \delta \sin^2(\psi' - \epsilon)} \\ &+ \cos \delta \sqrt{a'a' [1 - \sin^2 \delta \sin^2(\psi' - \epsilon)] - s, s, \sin(\psi' - \psi)^2} \quad (33) \end{aligned}$$

ergibt. Versteht man unter σ die Entfernung des Satelliten von dem sichtbaren Rande der Lichtgrenze, unter σ' die Entfernung desselben von dem erleuchteten Rande der Projection des Sphäroids, so ist unter der Voraussetzung $\delta < 90^\circ$ (welche bei den oberen Planeten allein vorkommen kann) der irrationale Theil beider Formeln mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen. Man hat also:

$$\begin{aligned} \sigma' &= s, \cos(\psi' - \psi) \pm \sqrt{a'a' - s, s, \sin(\psi' - \psi)^2} \\ \sigma &= s, \cos(\psi' - \psi) + \frac{s, \sin^2 \delta \sin(\psi' - \psi) \cos(\psi' - \epsilon) \sin(\psi' - \epsilon)}{1 - \sin^2 \delta \sin^2(\psi' - \epsilon)} \\ &+ \cos \delta \sqrt{a'a' [1 - \sin^2 \delta \sin^2(\psi' - \epsilon)] - s, s, \sin(\psi' - \psi)^2} \end{aligned}$$

wo das untere oder das obere Zeichen anzuwenden ist, je nachdem der erleuchtete Rand der Projection des Sphäroids, in Beziehung auf den Satelliten, der nähere oder der entferntere ist.

Man kann aber diese Formeln beträchtlich vereinfachen, wenn man die besonderen Umstände, welche bei den Beobachtungen der Jupiters-Satelliten, und noch mehr der Saturns-Satelliten, immer vorhanden sind, berücksichtigt. In beiden Fällen ist nämlich d immer so klein, dass $\sin d^2$ vernachlässigt werden kann (§ 7); wenn man überdies (p) so wählt, dass die Bewegung der Bilder des Satelliten sehr nahe durch den Mittelpunkt der Figur des Planeten geht, in welchem Falle $s, \sin(\psi' - \psi)$ von der Ordnung von $\sin d^2$, also das zweite Glied der zweiten Formel von der Ordnung $\sin d^4$ wird, so vereinfachen sich die Formeln in:

$$\begin{aligned}\sigma' &= s, \pm a' \\ \sigma &= s, \mp a' \pm \frac{1}{2} a' \sin d^2 \cos(\psi' - \psi)^2\end{aligned}$$

Sie ergeben, bis auf Grössen von der Ordnung $\sin d^4$ (excl.) richtig:

$$s, = \frac{1}{2}(\sigma' + \sigma) - \frac{1}{2}(\sigma' - \sigma) \sin d^2 \cos(\psi' - \psi)^2$$

Wenn man für s, σ', σ , ihre Ausdrücke durch s, σ', σ schreibt, nämlich:

$$\begin{aligned}s, &= \frac{s}{\sqrt{1 - \epsilon\epsilon \cos \beta^2 \cos \psi^2}} \\ \sigma' &= \frac{\sigma'}{\sqrt{1 - \epsilon\epsilon \cos \beta^2 \cos \psi^2}} \\ \sigma &= \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \epsilon\epsilon \cos \beta^2 \cos \psi^2}}\end{aligned}$$

so erhält man hieraus:

$$s = \sqrt{\frac{1 - \epsilon\epsilon \cos \beta^2 \cos \psi^2}{1 - \epsilon\epsilon \cos \beta^2 \cos \psi^2}} \left\{ \frac{1}{2}(\sigma' + \sigma) - \frac{1}{2}(\sigma' - \sigma) \sin d^2 \cos(\psi' - \psi)^2 \right\}$$

und wenn man auch Grössen von der Ordnung $\epsilon\epsilon \sin d^2$ als unbedeutend betrachtet und daher $\psi' = \psi = p - P$ setzt:

$$s = \frac{1}{2}(\sigma' + \sigma) - \frac{1}{2}(\sigma' - \sigma) \sin d^2 \cos(p - P - \epsilon)^2. \quad (34)$$

Ehe man diese Formel anwenden kann, muss man wissen, welcher der beiden Ränder der Figur des Planeten die Lichtgrenze, und welcher die erleuchtete Projection des Sphäroids ist. Im 4. § ist gezeigt worden, dass die Lichtgrenze (in dem gegenwärtig allein in Betracht kommenden Falle $d < 90^\circ$) an einem durch u' und v' bestimmten Punkte des Randes der Figur des Planeten sichtbar ist, wenn

$$u' \sin \epsilon + \frac{v' \cos \epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon\epsilon \cos \beta^2}}$$

positiv ist; diese Grösse ist aber

BRUNN'S Abhandlungen. 1. Bd.

$$= s, \cos(\psi - \epsilon) - \sigma, \cos(\psi' - \epsilon),$$

welcher Ausdruck derselben die verlangte Entscheidung gibt. In dem Falle der zuletzt verfolgten Näherung kann man, ohne sich dadurch aus ihren festgesetzten Grenzen zu entfernen, einen positiven Werth des Ausdrucks $(s - \sigma) \cos(p - P - \epsilon)$ als Bedingung der Sichtbarkeit der Lichtgrenze an dem Punkte des Randes, auf welchen σ sich bezieht, annehmen. Wenn daher $p - P$ zwischen $\epsilon - 90^\circ$ und $\epsilon + 90^\circ$ ist, so ist $s - \sigma$ positiv oder die Lichtgrenze liegt in der Richtung des Satelliten, der erleuchtete Rand der Projection des Sphäroids also in der entgegengesetzten; oder die kleinere der beiden gemessenen Entfernungen des Satelliten ist σ , die grössere σ' und die der halben Summe beider anzubringende Verbesserung ist negativ. Wenn dagegen $p - P$ zwischen $\epsilon + 90^\circ$ und $\epsilon + 270^\circ$ ist, so ist diese Verbesserung positiv zu nehmen. — Die hinreichend genäherte Reduction der Beobachtungen dieser Art setzt, wie aus dem Verschwinden von $\psi' - \psi$ aus der Endformel hervorgeht, die Ablesung des Positionswinkels (p), bei welchem σ und σ' gemessen worden sind, nicht voraus, falls er nur nahe $= p$ gemacht, oder die Bewegungslinie des Bildes des Satelliten nahe durch den Mittelpunkt der Figur des Planeten gelegt wird.

10.

Der andere Theil der hier aufzulösenden Aufgabe fordert, dass der Positionswinkel p des Satelliten an dem Mittelpunkte des Planeten aus den ähnlichen Winkeln π und π' , welche sein um die Entfernung s' verschobenes Bild an die Ränder der Figur des Planeten bringen, abgeleitet werde.

Indem die Auflösung dieses Theils der Aufgabe die Bestimmung der Durchschnittspunkte einer gegebenen Ellipse und eines gegebenen Kreises fordert, und indem vier solcher Durchschnittspunkte vorhanden sein können, führt sie nothwendig auf eine Gleichung des vierten Grades. Man wird sehen, dass diese in der Form:

$$\begin{aligned}0 &= a + 2b \cos v + 2c \sin v \\ &\quad + d \cos v^2 + 2e \cos v \sin v + f \sin v^2\end{aligned}$$

hervortritt, und daher zu einem häufig und bei interessanten Veranlassungen vorkommenden Ausdrucke der Gleichungen des 4. Grades gehört. Aus diesem Grunde benutze ich die gegenwärtige Veranlassung, die Auflösung dieser Gleichung, abgesondert von der Aufgabe, welche hier auf sie führt, abzuhandeln.

Ich werde die Function

$$V = a + 2b \cos v + 2c \sin v \\ + d \cos v^2 + 2e \cos v \sin v + f \sin v^2$$

betrachten und darauf ausgehen, sie in die beiden Factoren:

$$\{\alpha + \beta \cos v + \gamma \sin v\} \{\alpha' + \beta' \cos v + \gamma' \sin v\}$$

zu zerlegen, deren Product:

$$\alpha\alpha' + (\alpha\beta' + \alpha'\beta) \cos v + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) \sin v \\ + \beta\beta' \cos v^2 + (\beta\gamma' + \beta'\gamma) \cos v \sin v + \gamma\gamma' \sin v^2$$

ist. Da es nicht geändert wird, wenn das Product von $-1 + \cos v^2 + \sin v^2$ in einen unbestimmten Factor z hinzugefügt wird, so ist nur nach dieser Hinzufügung zu fordern, dass seine einzelnen Glieder den ähnlichen Gliedern von V identisch seien. Durch die Vergleichung derselben erhält man:

$$\begin{aligned} a &= \alpha\alpha' - z \\ 2b &= \alpha\beta' + \alpha'\beta \\ 2c &= \alpha\gamma' + \alpha'\gamma \\ d &= \beta\beta' + z \\ 2e &= \beta\gamma' + \beta'\gamma \\ f &= \gamma\gamma' + z \end{aligned}$$

Diese sechs Gleichungen lassen eine der Grössen $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$ unbestimmt, wie auch nothwendig ist, indem man den einen Factor mit einer beliebigen Grösse multipliciren, den anderen damit dividiren kann, ohne dass ihr Product sich ändert. Die 1., 4. und 6. ergeben:

$$V = \frac{1}{a+z} \{a+z + (b+R) \cos v + (c+R') \sin v\} \{a+z + (b-R) \cos v + (c-R') \sin v\}$$

oder, gleichgültig damit,

$$V(a+z) = \{a+z + b \cos v + c \sin v\}^2 \\ - \{R \cos v + R' \sin v\}^2$$

Ob R und R' gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, wird durch die letzte Gleichung entschieden: ist $bc - e(a+z)$ positiv, so findet das erstere statt, ist es negativ das andere. Das Zeichen eines der beiden R bleibt offenbar willkürlich, indem durch entgegengesetzte Annahmen desselben nur der erste der beiden Factoren von V in den anderen, und der andere in den ersten verwandelt wird. Aufmerksamkeit auf die Zeichen wird daher ganz unnöthig, wenn man nur eins der beiden R aus ihren oben gegebenen Aus-

$$0 = z^2 - (d+f-a)z^2 + [bb+cc-ee - a(d+f) + df]z - [bbf+ccd+eea - adf - 2bce]$$

Die jetzt in zwei Factoren zerlegte Function V wird, wenn man $\sin v$ und $\cos v$ durch $\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \vartheta$ ausdrückt, ein Bruch dessen Zähler vom 4. Grade und dessen Nenner $= (1 + \vartheta^2)^2$ ist. Sie kann also immer

$$\alpha' = \frac{a+z}{\alpha}$$

$$\beta' = \frac{d-z}{\beta}$$

$$\gamma' = \frac{f-z}{\gamma}$$

wodurch die 2. und 3. sich in:

$$2b = \frac{\alpha}{\beta} (d-z) + \frac{\beta}{\alpha} (a+z)$$

$$2c = \frac{\alpha}{\gamma} (f-z) + \frac{\gamma}{\alpha} (a+z)$$

verwandeln und durch ihre Auflösung:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b+R}{a+z} \dots \dots R R = bb - (a+z)(d-z)$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{c+R'}{a+z} \dots \dots R' R' = cc - (a+z)(f-z)$$

ergeben. Aus den Ausdrücken von β' und γ' durch β und γ erhält man, wenn man für diese letzteren das eben Gefundene setzt:

$$\alpha\beta' = \frac{(a+z)(d-z)}{b+R} = b - R$$

$$\alpha\gamma' = \frac{(a+z)(f-z)}{c+R'} = c - R'$$

Hierdurch verwandelt die noch zu erfüllende 5. Gleichung sich in:

$$R R' = bc - e(a+z).$$

Nimmt man z so, dass es dieser Gleichung genügeleistet, so hat man also:

drücken berechnet, das andere aber aus

$$R R' = bc - e(a+z)$$

folgt.

Erhebt man diese Gleichung zum Quadrate, um sie rational zu machen, setzt man für $R R$ und $R' R'$ ihre Ausdrücke, lässt man bb cc auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens weg und dividirt man den Rest durch $a+z$, so erhält man, zur Bestimmung von z , die cubische Gleichung:

$$0 = 2bce - bb(f-z) - cc(d-z) \\ - ee(a+z) + (a+z)(d-z)f - z$$

oder:

in zwei Factoren vom 2. Grade:

$$\frac{\delta + \epsilon\vartheta + \zeta\vartheta\vartheta}{1 + \vartheta\vartheta} \frac{\delta' + \epsilon'\vartheta + \zeta'\vartheta\vartheta}{1 + \vartheta\vartheta}$$

zerlegt werden, deren Coefficienten reell sind; jeder von

diesen kann wieder in zwei einfache Factoren

$$\frac{p+q\phi}{\sqrt{1+\phi^2}} \quad \text{und} \quad \frac{p'+q'\phi}{\sqrt{1+\phi^2}}$$

oder

$$p \cos \frac{1}{2} v + q \sin \frac{1}{2} v \quad \text{und} \quad p' \cos \frac{1}{2} v + q' \sin \frac{1}{2} v$$

zerlegt werden, deren jeder, wenn man ihn = 0 setzt, einen Werth von v , welcher der Gleichung $V = 0$ entspricht, ergibt. Offenbar muss man durch jede der Wurzeln der cubischen Gleichung eine der drei Combinationen der vier einfachen Factoren zu zwei Paaren erlangen, wovon eine in jedem Falle reell ist. Wenn alle vier Werthe von v , welche der Gleichung $V = 0$ genügeleisten, oder alle vier einfachen Factoren von V , reell sind, so ist jede Combination derselben reell und die cubische Gleichung muss nicht nur drei reelle Wurzeln haben, sondern auch jede derselben muss einen reellen Werth von R (also auch von R') ergeben.

Indessen ist es nöthig, die Kennzeichen der verschiedenen Fälle, welche die Zerlegung der Function V in ihre einfachen Factoren darbieten kann, aufzusuchen. Aus dem eben Gesagten folgt, dass die Bedingungen, welche erfüllt werden müssen, damit alle vier einfachen Factoren von V reell seien, die Bedingung enthalten müssen, dass die cubische Gleichung drei reelle Wurzeln habe. Ich werde jetzt jene Bedingungen vollständig aufsuchen. Wenn alle vier einfachen Factoren von V reell sind, so muss sowohl $(b+R)^2 + (c+R')^2$, als auch $(b-R)^2 + (c-R')^2$ grösser sein als $(a+g)^2$, welche Wurzel der cubischen Gleichung g auch bedeuten möge. Indem man diese Forderung auch:

$$bb + cc + RR + R'R - (a+g)^2 > \pm 2(bR + cR')$$

schreiben kann und die Grösse auf der rechten Seite des Ungleichheitszeichens durch die Anwendung eines ihrer beiden Zeichen nothwendig positiv wird, so wird nöthig, nicht nur, dass auch die Grösse auf der linken Seite positiv, sondern auch, dass

$$\{bb + cc + RR + R'R - (a+g)^2\}^2 > 4\{bR + cR'\}^2$$

sei. Diese Bedingungen kommen, indem man hier für R und R' ihre Ausdrücke durch g schreibt, darauf zurück, dass sowohl

$$2(bb + cc) - (a+g)(d+f+a-g), \dots (I)$$

als auch

$$(a+g)^2 [d+f+a-g]^2$$

$-4(a+g)\{bb(f+a) + cc(d+a) - 2bcc\} \dots (II)$ positiv seien. Wenn man die cubische Gleichung abgekürzt:

$$0 = x^3 - Ax^2 + Bx - C$$

schreibt, also

$$A = d + f - a$$

$$B = bb + cc - ce - a(d+f) + df$$

$$C = bbf + ccd + cea - adf - 2bcc$$

annimmt, so bemerkt man leicht, dass die im zweiten Gliede der letzten Formel enthaltene Grösse $bb(f+a) + cc(d+a) - 2bcc$

$$= a^2 + Aa^2 + Ba + C,$$

oder, wenn die drei Wurzeln der cubischen Gleichung durch g, g', g'' bezeichnet werden,

$$= (a+g)(a+g')(a+g'')$$

ist. Hierdurch wird der Ausdruck der Grösse, welche der Bedingung (II) zufolge positiv sein soll,

$$= a+g)^2 \{(d+f+a-g)^2 - 4(a+g')(a+g'')\},$$

oder da $g+g'+g'' = d+f-a$, also $d+f+a-g = 2a+g'+g''$ ist,

$$= (a+g)^2 \{(2a+g'+g'')^2 - 4(a+g')(a+g'')\}$$

$$= (a+g)^2 (g'-g'')^2.$$

Er kann nur positiv sein, wenn g' und g'' reell sind. Damit V vier reelle Factoren habe, ist also erforderlich, dass die cubische Gleichung drei reelle Wurzeln habe, und dass für jede derselben der Ausdruck (I) positiv sei.

Wenn dagegen alle vier einfachen Factoren von V imaginär sind, müssen sowohl $(b+R)^2 + (c+R')^2$, als auch $(b-R)^2 + (c-R')^2$ kleiner sein als $(a+g)^2$, oder

$$bb + cc + RR + R'R - (a+g)^2 < \pm 2(bR + cR');$$

woraus, wie vorher, gefolgert wird, dass die links vom Ungleichheitszeichen stehende, oben durch (I) bezeichnete Grösse negativ ist, die durch (II) bezeichnete aber positiv bleibt. Das letztere ist, wie ich schon gezeigt habe, die Bedingung dreier reellen Wurzeln der cubischen Gleichung; das erstere muss stattfinden, falls unter g diejenige von ihnen verstanden wird, welche die Combination der vier imaginären Factoren zu zwei reellen Paaren ergibt. — Sowohl vier reelle als auch vier imaginäre Factoren von V fordern also drei reelle Wurzeln der cubischen Gleichung; der erste Fall fordert ferner, dass $2(bb + cc) - (a+g)(d+f+a-g)$ für jeden der drei Werthe von g positiv, der andere, dass wenigstens für einen von ihnen negativ sei; nämlich für den, welcher die reelle Zerfällung von V in zwei Factorenpaare ergibt.

Es ist noch der Fall zu verfolgen, in welchem zwei der einfachen Factoren von V reell und zwei imaginär sind. Bezeichnet man durch g diejenige Wurzel der cubischen Gleichung, welche die Combination dieser vier Factoren zu zwei reellen Paaren ergibt, so muss durch die Anwendung derselben eine der Grössen

$(b + R)^2 + (c + K)^2$ und $(b - R)^2 + (c - K)^2$ grösser, die andere kleiner sein als $(a + g)^2$; also

$$bb + cc + RR + KK - (a + g)^2$$

grösser als $2(bR + cR)$ negativ genommen und kleiner als dieselbe Grösse positiv genommen, oder

$$\{bb + cc + RR + KK - (a + g)^2\} < 4(bR + cR)^2;$$

welches, auf dem bei den vorigen Fällen verfolgten Wege zu der Forderung führt, dass $(a + g)^2 (g' - g'')^2$ negativ sei. Dieser Forderung kann nur durch einen $\sqrt{-1}$ zum Factor habenden Werth von $g' - g''$ genügt geleistet werden: der gegenwärtige Fall kann also nur stattfinden, wenn die cubische Gleichung zwei imaginäre Wurzeln hat und unter g die reelle verstanden wird. Dass die Bedingungen, deren Erfüllung jeder der drei abgesonderten Fälle fordert, ihn auch zur nothwendigen Folge haben, geht aus der Erschöpfung aller Fälle durch jene drei hervor.

11.

Ich kehre nun zur Auflösung der am Anfange des vorigen §'s ausgesprochenen Aufgabe zurück. Zuerst werde ich den Positionswinkel p am Mittelpunkte des

$$0 = k + 2a's' [\sin(\pi - P) \sin x + \cos(\pi - P) \cos x \cdot \Delta] + a'a' [\sin^2 x + \Delta \Delta \cos x^2] \dots \dots (36)$$

wo k für $s's' - ss$ und Δ für $\sqrt{1 - ee \cos^2 \beta}$ geschrieben ist. Ich werde überdies noch e' für $e \cos \beta$ schreiben.

Vergleicht man diese Gleichung mit der im vorigen § aufgelösten, so hat man:

$$a = k \\ b = a's' \cos(\pi - P) \cdot \Delta$$

$$0 = x^2 - (a'a' + a'a' \Delta \Delta - k)zx + [a'a's's'(1 - e'e' \cos(\pi - P)^2) + a'^4 \Delta \Delta - k a'a'(1 + \Delta \Delta)]z - a'^4 \Delta \Delta (s's' - k) \quad (37)$$

hervorgeht.

Wenn die Beobachtung wirklich gemacht ist, also x möglich sein muss, der Satellit aber ausser dem Umfange der Figur des Planeten steht, also nur zwei Werthe von x möglich sein können, so hat diese Gleichung, dem vorigen § zufolge, nur eine reelle Wurzel. Diese ist, bis auf Grössen von der Ordnung von $e'e'$ und k , $= a'a'$ und kann, da man diesen Näherungswerth derselben kennt, leicht bestimmt werden. Ihre Annahme in dem $= 0$ zu setzenden Ausdrucke:

$$a + x + (b + R) \cos x + (c + R) \sin x$$

bestimmt zwei Werthe von x , deren Substitution in (35) die beiden Werthe von p ergibt, welche der Forderung Genüge leisten. Um über diese Zweideutigkeit in der Bestimmung von p entscheiden zu können, muss man wissen, ob der beobachtete Werth von

Planetens aufsehen, welcher dem am Rande der Projection seines Sphäroids stattfindenden Positionswinkel π des um die Entfernung s' verschobenen Bildes des Satelliten entspricht.

Indem man die Coordinaten des Punktes am Rande, wo das Bild des Satelliten sich befindet, wie vorher, durch u' und v' bezeichnet, hat man:

$$s \sin(p - P) = s' \sin(\pi - P) + u' \\ s \cos(p - P) = s' \cos(\pi - P) + v'$$

u' und v' können durch eine neue unbekannt Grösse x ausgedrückt werden, so dass ihre Ausdrücke die Gleichung (12), nämlich:

$$a'a' = u'u' + \frac{v'v'}{(1 - ee \cos \beta^2)}$$

erfüllen. Diese Ausdrücke sind:

$$u' = a' \sin x; \quad v' = a' \cos x \sqrt{1 - ee \cos \beta^2}$$

und man erhält dadurch:

$$s \sin(p - P) = s' \sin(\pi - P) + a' \sin x \\ s \cos(p - P) = s' \cos(\pi - P) + a' \cos x \sqrt{1 - ee \cos \beta^2} \quad (35)$$

woraus man, sobald x bekannt ist, das gesuchte p berechnen kann. Die zur Bestimmung von x nöthige Gleichung erhält man durch die Summe der Quadrate beider Grössen, nämlich:

$$c = a's' \sin(\pi - P)$$

$$d = a'a' \Delta \Delta$$

$$e = 0$$

$$f = a'a'$$

woraus die cubische Gleichung:

π der grössere oder der kleinere der beiden möglichen ist.

Wenn dagegen der Punkt des Randes der Figur des Planeten, auf welchen π sich bezieht, zu der Lichtgrenze gehört, seine Coordinaten also der Gleichung (15):

$$a'a' = \left[u' \cos w - \frac{v'}{d} \sin w \right]^2 \\ + \left[u' \sin w + \frac{v'}{d} \cos w \right]^2 \sec^2 d$$

entsprechen müssen, so können sie (wie § 5) durch eine neue veränderliche Grösse, welche mit ihnen durch die Formeln:

$$u' \cos w - \frac{v'}{d} \sin w = a' \sin x$$

$$u' \sin w + \frac{v'}{d} \cos w = a' \cos x \cos d$$

verbunden ist und welche:

$$\begin{aligned} u' &= a' \{ \sin x \cos w + \cos x \sin w \cos d \} \\ v' &= a' \{ -\sin x \sin w + \cos x \cos w \cos d \} \mathcal{A} \\ &\quad s \sin (p-P) = s' \sin (\pi-P) + a' \{ \sin x \cos w + \cos x \sin w \cos d \} \\ &\quad s \cos (p-P) = s' \cos (\pi-P) + a' \{ -\sin x \sin w + \cos x \cos w \cos d \} \mathcal{A} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ergibt, ausgedrückt werden. Durch die Substitution} \\ \text{dieser Ausdrücke erhält man:} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

und durch die Summe der Quadrate:

$$\begin{aligned} 0 &= k + 2a's' \{ \sin (\pi-P) \cos w - \cos (\pi-P) \sin w \cdot \mathcal{A} \} \sin x \\ &\quad + 2a's' \{ \sin (\pi-P) \sin w + \cos (\pi-P) \cos w \cdot \mathcal{A} \} \cos d \cdot \cos x + a'a' \{ \cos w^2 + \sin w^2 \mathcal{A} \mathcal{A} \} \sin x^2 \\ &\quad + 2a'a' \sin w \cos w \cos d (1-\mathcal{A} \mathcal{A}) \sin x \cos x + a'a' \{ \sin w^2 + \cos w^2 \mathcal{A} \mathcal{A} \} \cos d^2 \cos x^2 \dots \dots \dots (39) \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Gleichung mit der im 10. § aufgelösten ergibt:

$$\begin{aligned} a &= k \\ b &= a's' \{ \sin (\pi-P) \sin w + \cos (\pi-P) \cos w \cdot \mathcal{A} \} \cos d \\ c &= a's' \{ \sin (\pi-P) \cos w - \cos (\pi-P) \sin w \cdot \mathcal{A} \} \\ d &= a'a' \{ \sin w^2 + \cos w^2 \mathcal{A} \mathcal{A} \} \cos d^2 \\ e &= a'a' \sin w \cos w \cos d (1-\mathcal{A} \mathcal{A}) \\ f &= a'a' \{ \cos w^2 + \sin w^2 \mathcal{A} \mathcal{A} \} \end{aligned}$$

wodurch man die Coefficienten der cubischen Gleichung:

$$0 = x^3 - Ax^2 + Bx - C \dots \dots \dots (40)$$

erhält. Von dem gegenwärtigen Falle gelten auch die Bemerkungen, welche ich zu dem vorigen gemacht habe.

In dem 8. § ist gezeigt worden, dass die Lichtgrenze an allen Punkten des Randes des Planeten sichtbar ist, für welche der Cosinus des dort und hier durch x bezeichneten Winkels positiv ist. Hieraus kann beurtheilt werden, ob die Punkte des Randes, auf welche man die Beobachtung des Satelliten bezogen hat, der Lichtgrenze oder der Projection des Sphäroids zugehören. Es ist offenbar möglich, dass beide in der einen oder in der anderen Curve liegen, oder der eine in der einen, der andere in der anderen. Wenn k sehr klein und die Entfernung des Satelliten weit grösser ist als a' , wird gewöhnlich der letztere der drei möglichen Fälle eintreten.

12.

Bei der Berechnung von Beobachtungen der Satelliten der Planeten, für welche $e'e'$ ein ziemlich kleiner Bruch, so wie auch d ein kleiner Winkel ist, kann man die Anwendung dieser directen Auflösung der Aufgabe vermeiden und dagegen durch aufeinanderfolgende Annäherungen zum Ziele gelangen, welche so schnell fortschreiten, dass sie leichter zu dem erforderlichen Grade von Genauigkeit führen, als man ihn durch die eben gegebene Auflösung würde erlangen können. Ich werde daher auch diese zweite Auflösung mittheilen.

Ich werde annehmen, dass die Entfernung s' des Satelliten von den beiden Punkten des Randes des Pla-

neten, auf welche die beobachteten Positionswinkel π und π' (§ 9) sich beziehen, seiner Entfernung von dem Mittelpunkte so nahe gleich ist, dass $s's' - ss = k$ eine sehr kleine Grösse ist, deren Quadrat man vernachlässigen kann; ich werde sie durch $2a's'\alpha$ bezeichnen, wo also $a'\alpha$ sehr nahe $= s' - s$ ist. Wenn man

$$\begin{aligned} \rho \sin \varphi &= \mathcal{A} \cos (\pi-P) \\ \rho \cos \varphi &= -\sin (\pi-P) \end{aligned}$$

setzt, so verwandelt sich die Gleichung (36), welche sich auf den Rand der Projection des Sphäroids bezieht, in:

$$\sin (x - \varphi) = \frac{a'}{2s'\rho} (1 - e'e' \cos x^2) + \frac{\alpha}{\rho}$$

Setzt man, um eine erste Annäherung an x zu erhalten,

$$\sin (x' - \varphi) = \frac{a'}{2s'\rho}$$

so kann man einen der daraus hervorgehenden zwei Werthe von x' anwenden, um $1 - e'e' \cos x^2$ näherungsweise zu berechnen. Man erhält dann aus der Formel:

$$\sin (x'' - \varphi) = \frac{a'}{2s'\rho} (1 - e'e' \cos x'^2)$$

eine zweite Annäherung, welche der Wahrheit schon sehr nahe sein wird, welche man aber auch noch weiter treiben kann, wenn man es für angemessen hält. Hat man die beabsichtigte Annäherung erreicht und setzt man:

$$\sin \varepsilon = \frac{a'}{2s'\rho} (1 - e'e' \cos x^2) \dots \dots \dots (41)$$

so ist

$$\sin (x - \varphi) = \sin \varepsilon + \frac{\alpha}{\rho}$$

und

$$x = \varphi + \varepsilon + \frac{\alpha}{\rho \cos \varepsilon}$$

Man gelangt offenbar zu der einen oder der anderen Wurzel der Gleichung, je nachdem man für $x' - \varphi$, $x'' - \varphi$, ... ε spitze oder stumpfe Winkel nimmt. Mit dem gefundenen Werthe von x erhält man:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin (\varphi + \varepsilon) + \frac{\cos (\varphi + \varepsilon)}{\rho \cos \varepsilon} \\ \cos x &= \cos (\varphi + \varepsilon) - \frac{\sin (\varphi + \varepsilon)}{\rho \cos \varepsilon} \end{aligned}$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in (35):

$$\sin(p - P) = s' \sin(\pi - P) + a' \sin(\varphi + \varepsilon) + a' a' \frac{\cos(\varphi + \varepsilon)}{\varrho \cos \varepsilon}$$

$$\sin(p - \pi) = \frac{a'}{s} \left\{ \cos(\pi - P) \sin(\varphi + \varepsilon) - \mathcal{A} \sin(\pi - P) \cos(\varphi + \varepsilon) \right\} + \frac{a' a'}{\varrho s \cos \varepsilon} \left\{ \cos(\pi - P) \cos(\varphi + \varepsilon) + \mathcal{A} \sin(\pi - P) \sin(\varphi + \varepsilon) \right\}$$

welcher Ausdruck sich durch die Substitution der Ausdrücke von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ durch $\pi - P$ in

$$\sin(p - \pi) = \frac{a'}{s \varrho} \left\{ \mathcal{A} \cos \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon' \varepsilon' \sin \varepsilon \sin 2(\pi - P) \right\} - \frac{a' a'}{s \varrho \varepsilon} \left\{ \mathcal{A} \operatorname{tg} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon' \varepsilon' \sin 2(\pi - P) \right\} \quad (42)$$

verwandelt.

Wenn dagegen der beobachtete Positionswinkel π sich auf einen Punkt an der Lichtgrenze bezieht, also x aus der Gleichung (39) abzuleiten ist, so kann dieses gleichfalls durch aufeinanderfolgende Annäherungen geschehen, welchen aber, wenn sie leicht zum Ziele führen sollen, eine Umformung der Gleichung vorangehen muss. Durch die Einführung von ϱ und φ verwandelt sich diese Gleichung zunächst in:

$$0 = 2s'a'\alpha - 2s'\alpha'\varrho \left\{ \cos(\varphi - \varepsilon) \sin x - \sin(\varphi - \varepsilon) \cos x \cos d \right\} + a'a' \left\{ \cos \varepsilon \sin x + \sin \varepsilon \cos x \cos d \right\}^2 + a'a' \mathcal{A} \left\{ \sin \varepsilon \sin x - \cos \varepsilon \cos x \cos d \right\}^2$$

und ferner durch

$$m \cos \xi = \cos x \cos d \\ m \sin \xi = \sin x$$

in:

$$0 = 2s'\alpha - 2s'\varrho' m \sin(\xi - \varphi + \varepsilon) + a' m m (1 - \varepsilon' \varepsilon' \cos(\xi + \varepsilon)^2)$$

oder in:

$$\sin(\xi - \varphi + \varepsilon) = \frac{a' m}{2s' \varrho'} (1 - \varepsilon' \varepsilon' \cos(\xi + \varepsilon)^2) + \frac{\alpha}{\varrho' m}$$

Da m durch ξ ausgedrückt werden kann, nämlich:

$$m = \frac{\cos d}{\sqrt{1 - \sin^2 d' \sin^2 \xi}}$$

so enthält diese Gleichung, ausser gegebenen Grössen, nur ξ , und zwar in einer Art, welche sie zur Erfindung dieser unbekanntenen Grösse durch aufeinanderfolgende Näherungen eignet. Man setzt zuerst:

$$\sin(\xi' - \varphi + \varepsilon) = \frac{a' \cos d}{2s' \varrho'}$$

und sucht, mit einem der daraus hervorgehenden Werthe von ξ'

$$\frac{1 - \varepsilon' \varepsilon' \cos(\xi' + \varepsilon)^2}{\sqrt{1 - \sin^2 d' \sin^2 \xi'^2}}$$

wodurch man ferner

$$s \cos(p - P) = s' \cos(\pi - P) + \mathcal{A} a' \cos(\varphi + \varepsilon) - a' a' \frac{\sin(\varphi + \varepsilon)}{\varrho \cos \varepsilon}$$

Hieraus folgt, durch Multiplication in $\cos(\pi - P)$ und $-\sin(\pi - P)$:

$$\sin(\xi'' - \varphi + \varepsilon) = \frac{a' \cos d}{2s' \varrho'} \cdot \frac{1 - \varepsilon' \varepsilon' \cos(\xi' + \varepsilon)^2}{\sqrt{1 - \sin^2 d' \sin^2 \xi'^2}}$$

erhält u. s. w. Nach der Erreichung des beabsichtigten Grades von Genauigkeit setzt man:

$$\sin(\varepsilon) = \frac{a' \cos d}{2s' \varrho'} \cdot \frac{1 - \varepsilon' \varepsilon' \cos(\xi + \varepsilon)^2}{\sqrt{1 - \sin^2 d' \sin^2 \xi^2}} \dots \quad (43)$$

und erhält dadurch

$$\sin(\xi - \varphi + \varepsilon) = \sin(\varepsilon) + \frac{\alpha}{\varrho' m}$$

oder:

$$\xi = \varphi - \varepsilon + (\varepsilon) + \frac{\alpha}{\varrho' m \cos(\varepsilon)}$$

Offenbar erhält man die eine oder die andere Wurzel der Gleichung, je nachdem man Anfangs den einen oder den anderen der beiden durch ihren Sinus bestimmten Werthe von $\xi - \varphi + \varepsilon$ annimmt. Wenn ξ gefunden ist, hat man:

$$u' = a' m \sin(\xi + \varepsilon) = a' m \sin(\varphi + (\varepsilon)) + \frac{a' \alpha \cos(\varphi + (\varepsilon))}{\varrho \cos(\varepsilon)} \\ \frac{r'}{j} = a' m \cos(\xi + \varepsilon) = a' m \cos(\varphi + (\varepsilon)) - \frac{a' \alpha \sin(\varphi + (\varepsilon))}{\varrho \cos(\varepsilon)}$$

und erlangt, durch die Substitution dieser Ausdrücke in die Formeln:

$$s \sin(p - P) = s' \sin(\pi - P) + u' \\ s \cos(p - P) = s' \cos(\pi - P) + r'$$

und durch eine Rechnung, welche mit der übereinstimmt, die auf (42) geführt hat:

$$\sin(p - \pi) = \frac{a' m}{s \varrho} \left\{ \mathcal{A} \cos(\varepsilon) - \frac{1}{2} \varepsilon' \varepsilon' \sin(\varepsilon) \sin 2(\pi - P) \right\} - \frac{a' \alpha}{s \varrho \varepsilon} \left\{ \mathcal{A} \operatorname{tg}(\varepsilon) + \frac{1}{2} \varepsilon' \varepsilon' \sin 2(\pi - P) \right\} \quad (44)$$

Es muss noch über die Zweideutigkeiten entschieden werden, welche die Formeln (42) und (44) einschliessen, indem ε und (ε) sowohl kleiner, als grösser als 90° angenommen werden können. Da die Bedingung der Sichtbarkeit eines durch x bestimmten Punktes der Lichtgrenze ist, dass $\cos x$ einen positiven Werth habe, und da $\cos x$ und $\cos \xi$ gleiches Zeichen haben, so muss, für jeden sichtbaren Punkt der Lichtgrenze, auch $\xi = \varphi - \varepsilon + (\varepsilon)$ in den ersten oder vierten Quadranten

fallen, oder $< \mp 90^\circ$, also $(\varepsilon) > \omega - \varphi - 90^\circ < \omega - \varphi + 90^\circ$ sein. Ferner muss der Ausdruck (42) positiv sein, wenn $\pi < p$, negativ, wenn $\pi > p$, welche Bedingungen (wenigstens mit der Ausnahme der Fälle, in welchen (ε) sehr nahe $= 90^\circ$ wäre, welche aber in der Anwendung nicht vorkommen können) damit übereinkommen, dass (ε) im ersten Falle ein spitzer, im zweiten ein stumpfer Winkel ist. Wenn man also den kleineren der beiden beobachteten Positionswinkel als sich auf die Lichtgrenze beziehend annimmt, folglich für das ihm zugehörige (ε) den spitzen Winkel, welcher der obigen Gleichung genügt, wählt, so muss dieser zwischen $\omega - \varphi - 90^\circ$ und $\omega - \varphi + 90^\circ$ fallen, wenn die Annahme richtig ist; wenn man den grösseren der beiden Positionswinkel als sich auf die Lichtgrenze beziehend annimmt, also für (ε) den stumpfen, der Gleichung entsprechenden Winkel wählt, so fordert die Richtigkeit der Annahme, dass dieser zwischen $\omega - \varphi - 90^\circ$ und $\omega - \varphi + 90^\circ$ falle. — Hierdurch wird in allen Fällen vollständig entschieden. Es ist schon erinnert worden, dass beide beobachtete Positionswinkel sich entweder auf die Lichtgrenze, oder auf den erleuchteten Rand der Projection des Sphäroids beziehen können; oder der eine von beiden auf die erstere, der andere auf die letztere Begrenzungscurve der Figur des Planeten.

13.

Ich werde jetzt den Fall weiter verfolgen, in welchem man beide Positionswinkel π und π' beobachtet hat und p aus der halben Summe beider ableiten will. Beobachtungen, durch welche p bestimmt werden soll, müssen immer in diesem Falle sein, wenn ihr Resultat nicht von einer Annahme für die Grösse des Halbmessers des Planeten abhängig bleiben soll. Unter π werde ich den kleineren, unter π' den grösseren der beiden Positionswinkel verstehen.

Indem die Werthe von $\sin \varepsilon$ oder $\sin(\varepsilon)$ in beiden Fällen, auf welche der beiden Begrenzungscurven der Figur des Planeten sich auch jeder von ihnen beziehen mag, nur in Grössen von der Ordnung von $\sin^2 \alpha$ und $e'e'$ von einander verschieden sein können, das eine ε aber ein spitzer, das andere ein stumpfer Winkel ist, so sind die in die kleine Grösse α multiplicirten Glieder der Formeln (42) und (44) von nahe gleicher Grösse, aber von entgegengesetzten Zeichen und verschwinden daher nahe aus der Summe beider Formeln. Hieraus folgt (so wie das Aehnliche am Ende von § 9), dass es nicht nöthig ist, s' abzulesen, sondern dass es hinreicht, dasselbe sehr nahe $= s$ zu machen.

Zuerst muss entschieden werden, an welcher der Begrenzungscurven jeder der Positionswinkel beobachtet worden ist. Indem man die Formel (43) zuerst auf π anwendet und, weil dieses der kleinere Positionswinkel ist, den Werth von (ε) dadurch sucht, welcher $< 90^\circ$ ist, so erkennt man, ob diese Beobachtung sich auf die Lichtgrenze bezieht oder nicht; das erstere ist der Fall, wenn (ε) zwischen $\omega - \varphi - 90^\circ$ und $\omega - \varphi + 90^\circ$, das letztere, wenn es ausser dieser Begrenzung liegt. Indem man ferner dieselbe Formel auf π' anwendet und, weil dieses der grössere Positionswinkel ist, für (ε) den Werth sucht, welcher $> 90^\circ$ ist, so gibt dasselbe Kennzeichen auch an, ob die zweite Beobachtung sich auf die Lichtgrenze bezieht oder nicht. Indem hierdurch bekannt wird, welche der beiden Formeln (42) und (44) man zur Berechnung jeder der beiden Beobachtungen anzuwenden hat, bedarf es nur noch der Zusammenstellung der verschiedenen möglichen Fälle. Dabei werde ich die sich auf den grösseren Positionswinkel π' beziehenden, oben eingeführten Grössen ϱ , m , ε , (ε) von den sich auf den kleineren beziehenden durch die Bezeichnungen ϱ' , m' , ε' , (ε') unterscheiden; ε und (ε) sind also immer die spitzen Winkel, wodurch man den Gleichungen (41) und (43) genüge leisten kann, ε' und (ε') die stumpfen.

1) π und π' beziehen sich auf den erleuchteten Rand der Projection des Sphäroids.

Die anzuwendende Formel (42) ergibt:

$$\sin(p - \pi) = \frac{\alpha'}{s\varrho} \left\{ \mathcal{A} \cos \varepsilon - \frac{1}{2} e'e' \sin \varepsilon \sin 2(\pi - P) \right\}$$

$$\sin(p - \pi') = \frac{\alpha'}{s\varrho'} \left\{ \mathcal{A} \cos \varepsilon' - \frac{1}{2} e'e' \sin \varepsilon' \sin 2(\pi' - P) \right\}$$

und man erhält dadurch:

$$\begin{aligned} \sin\left(p - \frac{\pi' + \pi}{2}\right) &= \frac{\alpha'}{2s \cos \frac{\pi' - \pi}{2}} \left\{ \mathcal{A} \left(\frac{\cos \varepsilon}{\varrho} + \frac{\cos \varepsilon'}{\varrho'} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} e'e' \left(\frac{\sin \varepsilon}{\varrho} + \frac{\sin \varepsilon'}{\varrho'} \right) \cos(\pi' - \pi) \sin(\pi' + \pi - 2P) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} e'e' \left(\frac{\sin \varepsilon}{\varrho} - \frac{\sin \varepsilon'}{\varrho'} \right) \sin(\pi' - \pi) \cos(\pi' + \pi - 2P) \right\} \quad (45) \end{aligned}$$

2) π und π' beziehen sich auf die Lichtgrenze.

Die anzuwendende Formel (44) ergibt:

$$\sin(p - \pi) = \frac{\alpha'}{s} \cdot \frac{m}{\varrho} \left\{ \mathcal{A} \cos(\varepsilon) - \frac{1}{2} e'e' \sin(\varepsilon) \sin 2(\pi - P) \right\}$$

$$\sin(p - \pi') = \frac{\alpha'}{s} \cdot \frac{m'}{\varrho'} \left\{ \mathcal{A} \cos(\varepsilon') - \frac{1}{2} e'e' \sin(\varepsilon') \sin 2(\pi' - P) \right\}$$

und man erhält dadurch:

$$\begin{aligned} \sin\left(p - \frac{\pi' + \pi}{2}\right) &= \frac{a'}{2s \cos \frac{\pi' - \pi}{2}} \left\{ \mathcal{A} \left(\frac{m}{\varphi} \cos(\varepsilon) + \frac{m'}{\varphi'} \cos(\varepsilon') \right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \varepsilon' \varepsilon \left(\frac{m}{\varphi} \sin(\varepsilon) + \frac{m'}{\varphi'} \sin(\varepsilon') \right) \cos(\pi' - \pi) \sin(\pi' + \pi - 2P) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon' \varepsilon \left(\frac{m}{\varphi} \sin(\varepsilon) - \frac{m'}{\varphi'} \sin(\varepsilon') \right) \sin(\pi' - \pi) \cos(\pi' + \pi - 2P) \right\} \dots \dots \dots (46) \end{aligned}$$

3^a) π bezieht sich auf den erleuchteten Rand, π' auf die Lichtgrenze.

Auf π ist die Formel (42), auf π' die Formel (44) anzuwenden, und man erhält dadurch:

$$\begin{aligned} \sin\left(p - \frac{\pi' + \pi}{2}\right) &= \frac{a'}{2s \cos \frac{\pi' - \pi}{2}} \left\{ \mathcal{A} \left(\frac{1}{\varphi} \cos \varepsilon + \frac{m'}{\varphi'} \cos(\varepsilon') \right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \varepsilon' \varepsilon \left(\frac{1}{\varphi} \sin \varepsilon + \frac{m'}{\varphi'} \sin(\varepsilon') \right) \cos(\pi' - \pi) \sin(\pi' + \pi - 2P) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon' \varepsilon \left(\frac{1}{\varphi} \sin \varepsilon - \frac{m'}{\varphi'} \sin(\varepsilon') \right) \sin(\pi' - \pi) \cos(\pi' + \pi - 2P) \right\} \dots \dots \dots (47^a) \end{aligned}$$

3^b) π bezieht sich auf die Lichtgrenze, π' auf den erleuchteten Rand.

Auf π ist die Formel (44), auf π' die Formel (42) anzuwenden, und man erhält dadurch:

$$\begin{aligned} \sin\left(p - \frac{\pi' + \pi}{2}\right) &= \frac{a'}{2s \cos \frac{\pi' - \pi}{2}} \left\{ \mathcal{A} \left(\frac{m}{\varphi} \cos(\varepsilon) + \frac{1}{\varphi} \cos \varepsilon \right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \varepsilon' \varepsilon \left(\frac{m}{\varphi} \sin(\varepsilon) + \frac{1}{\varphi} \sin \varepsilon \right) \cos(\pi' - \pi) \sin(\pi' + \pi - 2P) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon' \varepsilon \left(\frac{m}{\varphi} \sin(\varepsilon) - \frac{1}{\varphi} \sin \varepsilon \right) \sin(\pi' - \pi) \cos(\pi' + \pi - 2P) \right\} \dots \dots \dots (47^b) \end{aligned}$$

Zur Anwendung auf die Beobachtungen der Satelliten der Planeten reichen indessen Näherungsformeln hin, in welchen ε^4 , $\varepsilon' \varepsilon \sin^2 \delta$, $\sin^4 \delta$ vernachlässigt werden. Setzt man

$$\frac{a'}{2s} = \sin \delta$$

so darf man, in den in $\varepsilon' \varepsilon$ multiplicirten Gliedern der eben angeführten Formeln,

$$\frac{1}{\varphi} \sin \varepsilon = \frac{1}{\varphi'} \sin \varepsilon' = \frac{m}{\varphi} \sin(\varepsilon) = \frac{m'}{\varphi'} \sin(\varepsilon') = \sin \delta$$

$$\frac{1}{2}(\pi' - \pi) = 2\delta; \quad \frac{1}{2}(\pi' + \pi) = p$$

annehmen; und ferner hat man, bis zu $\varepsilon' \varepsilon$ und $\sin^2 \delta$ incl. richtig:

$$\frac{1}{\varphi} \cos \varepsilon = \cos \delta \left\{ 1 + \frac{\varepsilon' \varepsilon \cos 2\delta}{2 \cos^2 \delta^2} \cos(\pi - P)^2 + \varepsilon' \varepsilon \operatorname{tg} \delta^2 \sin(\pi - P + \delta)^2 \right\}$$

$$\frac{1}{\varphi} \cos \varepsilon' = -\cos \delta \left\{ 1 + \frac{\varepsilon' \varepsilon \cos 2\delta}{2 \cos^2 \delta^2} \cos(\pi' - P)^2 + \varepsilon' \varepsilon \operatorname{tg} \delta^2 \sin(\pi' - P - \delta)^2 \right\}$$

$$\frac{m}{\varphi} \cos(\varepsilon) = \cos \delta \left\{ 1 + \frac{\varepsilon' \varepsilon \cos 2\delta}{2 \cos^2 \delta^2} \cos(\pi - P)^2 + \varepsilon' \varepsilon \operatorname{tg} \delta^2 \sin(\pi - P + \delta)^2 - \frac{\sin^2 \delta^2 \cos 2\delta}{2 \cos^2 \delta^2} \sin(\pi - P - \nu + \delta)^2 \right\}$$

$$\frac{m'}{\varphi} \cos(\varepsilon') = -\cos \delta \left\{ 1 + \frac{\varepsilon' \varepsilon \cos 2\delta}{2 \cos^2 \delta^2} \cos(\pi' - P)^2 + \varepsilon' \varepsilon \operatorname{tg} \delta^2 \sin(\pi' - P + \delta)^2 - \frac{\sin^2 \delta^2 \cos 2\delta}{2 \cos^2 \delta^2} \sin(\pi' - P - \nu - \delta)^2 \right\}$$

Setzt man dieses in die Formeln (45) bis (47^b), so verwandeln sie sich in:

$$\text{Fall 1} \dots p = \frac{1}{2}(\pi' + \pi) + \varepsilon' \varepsilon \sin^2 \delta \sin 2(p - P) \dots \dots \dots (48)$$

$$,, \quad 2 \dots p = \frac{1}{2}(\pi' + \pi) + \varepsilon' \varepsilon \sin^2 \delta \sin 2(p - P) + \sin^2 \delta \sin^2 \delta \sin 2(p - P - \nu) \dots \dots \dots (49)$$

$$,, \quad 3^a \dots p = \frac{1}{2}(\pi' + \pi) + \varepsilon' \varepsilon \sin^2 \delta \sin 2(p - P) + \sin^2 \delta \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta \sin(p - P - \nu + \delta)^2 \dots \dots \dots (50^a)$$

$$,, \quad 3^b \dots p = \frac{1}{2}(\pi' + \pi) + \varepsilon' \varepsilon \sin^2 \delta \sin 2(p - P) - \sin^2 \delta \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta \sin(p - P - \nu - \delta)^2 \dots \dots \dots (50^b)$$

Welcher von diesen Fällen bei einer gemachten Beobachtung vorhanden ist, geht zwar schon aus den oben gegebenen Regeln hervor; allein da diese von den Winkeln φ und ε abhängig gemacht sind, welche in den Näherungsformeln nicht mehr vorkommen, so ist

es bequemer, neue, unmittelbar von δ , π , π' , P abhängige Ausdrücke dafür zu besitzen. Setzt man, mit hier erlaubter Näherung,

$$\text{für } \pi \dots \varphi = 90^\circ + \pi - P; \quad \varepsilon = (\varepsilon) = \delta$$

$$\text{für } \pi' \dots \varphi = 90^\circ + \pi' - P; \quad \varepsilon' = (\varepsilon') = 180^\circ - \delta$$

so kann man die Bedingungen, dass die beobachteten Positionswinkel sich auf die Lichtgrenze beziehen, so aussprechen, dass

$$\pi > P + \omega - \delta - 180^\circ \text{ und } < P + \omega - \delta$$

$$\pi' > P + \omega + \delta \quad \text{und } < P + \omega + \delta + 180^\circ$$

sein müssen. Hieraus folgt, dass π an der Lichtgrenze

Fall 1 . . . p zwischen $P + \omega - \delta$ und $P + \omega + \delta$

" 2 . . . " $P + \omega + 180^\circ - \delta$ und $P + \omega + 180^\circ + \delta$

" 3^a . . . " $P + \omega - \delta$ und $P + \omega - \delta + 180^\circ$; u. zwisch. $P + \omega + \delta$ und $P + \omega + \delta + 180^\circ$

" 3^b . . . " $P + \omega - \delta - 180^\circ$ und $P + \omega - \delta$; " " $P + \omega + \delta - 180^\circ$ und $P + \omega + \delta$

Indem die hier angegebenen Begrenzungen der verschiedenen Fälle durch die Anwendung von Näherungswerten für φ und ε erlangt worden sind, sind sie der Wahrheit nur nahe, nicht völlig entsprechend; wovon die Folge sein muss, dass sie, wenn p einer dieser Begrenzungen sehr nahe kommt, eine Beobachtung als zu einem der Fälle gehörend angeben können, während sie wirklich zu einem anderen gehört. Hieraus entsteht indessen kein Fehler, welcher die Richtigkeit der

beobachtet ist, wenn

$$p > P + \omega + \delta - 180^\circ \text{ und } < P + \omega + \delta$$

und π' ebenfalls, wenn

$$p > P + \omega - \delta \text{ und } < P + \omega - \delta + 180^\circ.$$

Beides zusammengenommen gibt die Kennzeichen der vier abgesonderten Fälle:

Rechnung, in Grössen der Ordnung bis zu welcher sie eine Näherung sein soll, beeinträchtigt; innerhalb des Umfanges der Unvollkommenheit der Begrenzungen kommen die beiden Curven, deren Verschiedenheit in dieser Abhandlung verfolgt worden ist, sich einander so nahe, dass die Näherung, durch Annahme der einen statt der anderen, nicht im Wesentlichen beeinträchtigt wird.

Berichtigungen.

pag.	Spalte	Zelle		
189	1	letzte v. u.	statt: $a'b''c d''$	ist zu lesen: $a'b'''c d''$
222	—	" " "	" Abh. 38 u. 39	" " " Abh. 37 u. 39
235	—	5 " o.	" VII	" " " VIII
—	—	8 " "	" wenigeren	" " " wenigeren
—	—	9 " "	ist: hier zu streichen	
—	—	10 " "	" meiner Tafel vor: in den Fundamentis einzuschalten	
—	—	2 18 " "	" das Komma zu streichen	
248	—	1 " "	statt: et	ist zu lesen: e
—	—	4 " "	$\left(\frac{dQ'}{d\beta}\right)$	" " " $\left(\frac{dQ}{d\beta}\right)$
—	—	5 " "	praeber	" " " praebet
—	—	6 " "	cotg Φ^2 im 1. Gld.	" " " cotg Φ^2
—	—	— " "	cotg Φ^2 „ 2. „	" " " cotg Φ
—	—	8 " "	$\frac{x}{(1-x)^2}$	" " " $\frac{x}{(1-x)^2}$
—	—	11 " u.	$\frac{\beta}{2}$ im 1. Gld. der {	" " " $\frac{\beta}{4}$
—	—	4 " "	$(1-x)\left(\frac{2g-l}{g-l}\right)^2$ in der {	" " " $(1-x) - \left(\frac{2g-l}{g-l}\right)^2$
284	2	15 " o.	" 0 891	" " " 0 851
286	1	6 " u.	" 1818	" " " 1819
299	—	17 " o.	" negligi	" " " negligi

This book should be returned to
the Library on or before the last date
stamped below.

A fine is incurred by retaining it
beyond the specified time.

Please return promptly.

