Berichte uber die verhandlungen

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ACHTUNDVIERZIGSTER BAND.

1896.

MIT NEUN FIGUREN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.

INHALT.

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Otto Ribbeck* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1898.
Geheimer Hofrath *Ernst Windisch* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1898.
Hugo Berger in Leipzig.
Professor *Adolf Birch-Hirschfeld* in Leipzig.
Geheimer Rath *Otto Böhtlingk* in Leipzig.
Professor *Friedrich Carl Brugmann* in Leipzig.
—— *Karl Bücher* in Leipzig.
—— *Berthold Delbrück* in Jena.
—— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
Oberbibliothekar Professor *Oscar v. Gebhardt* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Heinrich Gelzer* in Jena.
—— *Georg Götz* in Jena.
Professor *Albert Hauck* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.
Professor *Rudolf Hirzel* in Jena.
Oberschulrath *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden-Striesen.
Geheimer Hofrath *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
Professor *Carl Lamprecht* in Leipzig.
—— *August Leskien* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Hermann Lipsius* in Leipzig.

Professor *Richard Meister* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *August von Miaskowski* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Pertsch* in Gotha.
Professor *Friedrich Ratzel* in Leipzig.
—— *Wilhelm Roscher* in Wurzen.
—— *Sophus Ruge* in Dresden.
—— *August Schmarsow* in Leipzig.
Hofrath *Theodor Schreiber* in Leipzig.
Professor *Eduard Georg Sievers* in Leipzig.
—— *Albert Socin* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Rudolph Sohm* in Leipzig.
Professor *Franz Studniczka* in Leipzig.
—— *Moritz Voigt* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Curt Wachsmuth* in Leipzig.
Professor *Richard Paul Wülker* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Lujo Brentano* in München.
Professor *Friedrich Delitzsch* in Breslau.
—— *Georg Ebers* in München.
—— *Friedrich Kluge* in Freiburg i. B.
—— *Theodor Mommsen* in Berlin.
Geheimer Rath *Erwin Rohde* in Heidelberg.
Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Johannes Wislicenus* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1897.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1897.
Geheimer Medicinalrath *Rudolf Böhm* in Leipzig.
Professor *Heinrich Bruns* in Leipzig.
Geheimer Bergrath *Hermann Credner* in Leipzig.

Geheimer Medicinalrath *Paul Flechsig* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Hans Bruno Geinitz* in Dresden.
Geheimer Rath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Ewald Hering* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm His* in Leipzig.
Professor *Martin Krause* in Dresden.
Geheimer Rath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
Professor *Sophus Lie* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Müller* in Jena.
—— —— *Carl Neumann* in Leipzig.
Professor *Wilhelm Ostwald* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
Professor *Karl Rohn* in Dresden.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Geheimer Rath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
Geheimer Hofrath *Rudolf Wilhelm Schmitt* in Dresden.
Professor *Friedrich Stohmann* in Leipzig.
Hofrath *Johannes Thomae* in Jena.
Geheimer Hofrath *August Töpler* in Dresden.
—— —— *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
Geheimer Bergrath *Clemens Winkler* in Freiberg.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
Geheimer Rath *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.
Geheimer Bergrath *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Ausserordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Professor *Richard Altmann* in Leipzig.
—— *Hermann Ambronn* in Leipzig.
—— *Paul Drude* in Leipzig.
—— *Friedrich Engel* in Leipzig.
—— *Alfred Fischer* in Leipzig.
—— *Otto Fischer* in Leipzig.
—— *Max von Frey* in Leipzig.
—— *Emil Schmidt* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
Professor *Felix Klein* in Göttingen.
Geheimer Regierungsrath *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Berlin.

Archivar:

Ernst Robert Abendroth in Leipzig.

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Falkenstein, Johann Paul von, 1882.
Gerber, Carl Friedrich von, 1891.
Wietersheim, Karl August Wilhelm Eduard von, 1865.

Philologisch-historische Classe.

Albrecht, Eduard, 1876.
Ammon, Christoph Friedrich von, 1850.
Becker, Wilhelm Adolf, 1846.
Brockhaus, Hermann, 1877.
Bursian, Conrad, 1883.
Curtius, Georg, 1885.
Droysen, Johann Gustav, 1884.
Ebert, Adolf, 1890.
Fleischer, Heinrich Leberecht, 1888.
Flügel, Gustav, 1870.
Franke, Friedrich, 1871.
Gabelentz, Hans Conon von der, 1874.
Gabelentz, Hans Georg Conon von der, 1893.
Gersdorf, Ernst Gotthelf, 1874.
Göttling Carl, 1869.
Gutschmid, Hermann Alfred von, 1887.
Hänel, Gustav, 1878.
Hand, Ferdinand, 1851.
Hartenstein, Gustav, 1890.
Hasse, Friedrich Christian August, 1848.
Haupt, Moritz, 1874.
Hermann, Gottfried, 1848.
Jacobs, Friedrich, 1847.
Jahn, Otto, 1869.
Janitschek, Hubert, 1893.
Köhler, Reinhold, 1892.
Lange, Ludwig, 1885.
Marquardt, Carl Joachim, 1882.
Maurenbrecher, Wilhelm, 1892.
Michelsen, Andreas Ludwig Jacob, 1881.
Nipperdey, Carl, 1875.

Noorden, *Carl von*, 1883.
Overbeck, *Johannes Adolf*, 1895.
Peschel, *Oscar Ferdinand*, 1875.
Preller, *Ludwig*, 1861.
Ritschl, *Friedrich Wilhelm*, 1876.
Roscher, *Wilhelm*, 1894.
Sauppe, *Hermann*, 1893.
Schleicher, *August*, 1868.
Seidler, *August*, 1851.
Seyffarth, *Gustav*, 1885.
Springer, *Anton*, 1891.
Stark, *Carl Bernhard*, 1879.
Stobbe, *Johann Ernst Otto*, 1887.
Tuch, *Friedrich*, 1867.
Ukert, *Friedrich August*, 1851.
Voigt, *Georg*, 1891.
Wachsmuth, *Wilhelm*, 1866.
Wächter, *Carl Georg von*, 1880.
Westermann, *Anton*, 1869.
Zarncke, *Friedrich*, 1891.

Mathematisch-physische Classe.

d'Arrest, *Heinrich*, 1875.
Baltzer, *Heinrich Richard*, 1887.
Bezold, *Ludwig Albert Wilhelm von*, 1868.
Braune, *Christian Wilhelm*, 1892.
Bruhns, *Carl*, 1881.
Carus, *Carl Gustav*, 1869.
Cohnheim, *Julius*, 1884.
Döbereiner, *Johann Wolfgang*, 1849.
Drobisch, *Moritz Wilhelm*, 1896.
Erdmann, *Otto Linné*, 1869.
Fechner, *Gustav Theodor*, 1887.
Funke, *Otto*, 1879.
Hansen, *Peter Andreas*, 1874.
Harnack, *Axel*, 1888.
Hofmeister, *Wilhelm*, 1877.
Huschke, *Emil*, 1858.
Knop, *Johann August Ludwig Wilhelm*, 1891.
Kolbe, *Hermann*, 1884.
Krüger, *Adalbert*, 1896.
Kunze, *Gustav*, 1851.
Lehmann, *Carl Gotthelf*, 1863.
Lindenau, *Bernhard August von*, 1854.
Ludwig, *Carl*, 1895.
Marchand, *Richard Felix*, 1850.
Mettenius, *Georg*, 1866.
Möbius, *August Ferdinand*, 1868.
Naumann, *Carl Friedrich*, 1873.
Pöppig, *Eduard*, 1868.
Reich, *Ferdinand*, 1882.
Scheerer, *Theodor*, 1875.
Schenk, *August*, 1891.
Schleiden, *Matthias Jacob*, 1881.
Schwägrichen, *Christian Friedrich*, 1853.
Seebeck, *Ludwig Friedrich Wilhelm August*, 1849.
Stein, *Samuel Friedrich Nathanael von*, 1885.
Volkmann, *Alfred Wilhelm*, 1877.
Weber, *Eduard Friedrich*, 1871.
Weber, *Ernst Heinrich*, 1878.
Weber, *Wilhelm*, 1891.
Zöllner, *Johann Carl Friedrich*, 1882.

Leipzig, am 31. December 1896.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1896 eingegangenen Schriften.

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1895. Berlin d. J.

Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1895, No. 39—53. 1896, No. 1—39.

Acta Borussica. Denkmäler der Preuss. Staatsverwaltung im 18. Jahrh. Herausgeg. von der Kgl. Akad. d. Wissensch. Berlin 1896.

Politische Correspondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 22. Berlin 1895.

Die Venusdurchgänge 1874 und 1882. Bericht über die deutschen Beobachtungen. Im Auftrage der Commission für die Beobachtung des Venus-Durchganges hrsg. von *A. Auwers*. Bd. 6. Berlin 1896.

Pernice, Erich, Griechisches Pferdegeschirr im Antiquarium der Kgl. Museen. Sechsundfünfzigstes Programm zum Winkelmannsfeste der Archäolog. Gesellschaft. Berlin 1896.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin Jahrg. 28, No. 19. 20. Jahrg. 29, No. 1—17. Berlin 1895. 96.

Die Fortschritte der Physik im J. 1894. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 50. Abth. 1—3. Braunschweig 1896.

Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin i. J. 1895, No. 3—5. 1896. Nr. 1—5 (Jahrg. 14. 15). Berlin d. J.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Bd. 9 (Jahrg. 1895), No. 20—26. Bd. 10 (Jahrg. 1896), No. 1—19. Berlin d. J.

Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 21 (1895/96), No. 1—17. Berlin d. J.

Abhandlungen der Kgl. Preuss. geolog. Landesanstalt. N. F. H. 19 (mit Atlas). Berlin 1896.

Jahrbuch der Kgl. Preuss. geolog. Landesanstalt u. Bergakademie zu Berlin f. d. J. 1894. Bd. 15. Berlin 1895.

Die Thätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt i. d. Z. vom 1. April 1895 bis 1. Febr. 1896. S.-A. Berlin 1896.

Lampe, E., Rede bei der Feier des 25jährigen Gedenktages der Proklamirung des Deutschen Reiches am 18. Jan. 1896 in der Aula der Kgl. Technischen Hochschule. Berlin 1896.

Müller, Heinrich, Der Krieg hinter der Front 1870/71. Festvortrag in der Aula der Kgl. Technischen Hochschule. Breslau 1896.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 99. Bonn 1896.

Dreiundsiebzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1895. Breslau 1896.

Abhandlungen des Königl. Sächs. meteorologischen Instituts in Chemnitz. H. 1. Leipzig 1896.

Jahrbuch des Königl. Sächs. meteorologischen Institutes. Jahrg. 12 (1894). II. 13 (1895). I. Chemnitz 1896.

Vorläufige Mittheilungen der Beobachtungs-Ergebnisse von zwölf Stationen II. Ordnung in Sachsen. Nov. 1895—Aug. 1896.

Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N.F. Bd. 9, H. 1. Danzig 1896.

Codex diplomaticus Saxoniae Regiae. Im Auftrage der K. Sächs. Staatsregierung herausgeg. v. *O. Posse* und *E. Ermisch*. 2. Haupttheil, Bd. 16. Die Matrikel der Universität Leipzig. Hrsg. von *Georg Erler*. Bd. 1. Leipzig 1895.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. *V. Böhmert*. Jahrg. 41 (1895), No. 3. 4. Jahrg. 42. (1896), No. 1. 2. Dresden 1895. 96.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1895/96. Dresden 1896.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1895, Jul.—Dec. 1896, Jan.—Jun. Dresden d. J.

Verzeichniss der Vorlesungen und Übungen an der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule f. d. Sommersem. 1896. Für d. Wintersem. 1896/97. — Bericht über die Kgl. Sächs. Techn. Hochschule für 1895/96. — Die Bibliothek der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule i. J. 1895. Dresden 1896.

Mittheilungen der Pollichia eines naturwissenschaftlichen Vereins der Rheinpfalz. No. 8. 9. (Jahrg. 52. 53.) [Dürkheim a. d. H.]

Beiträge zur Geschichte des Niederrheins. Jahrbuch des Düsseldorfer Geschichtsvereins. Bd. 10. Düsseldorf 1895.

Mittheilungen des Vereins für die Geschichte und Alterthumskunde von Erfurt. H. 17. Erfurt 1895.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. H. 27 (1895). Erlangen d. J.

Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a./M. f. das Rechnungsjahr 1894/95. Frankfurt 1896. — Das Klima von Frankfurt a./M. bearb. v. *Jul. Ziegler* u. *Walter König*. Frankfurt 1896.

Helios. Abhandlungen u. monatliche Mittheilungen aus d. Gesammtgebiete der Naturwissenschaften. Organ des Naturwissensch. Vereins des Reg.-Bezirks Frankfurt. Herausgeg. von *Ernst Huth*. Jahrg. 13, No. 7—12. Berlin 1895/96.

Societatum litterae. Verzeichniss der in d. Publikationen der Akademien und Vereine aller Länder erscheinenden Einzelarbeiten auf d. Gebiete d. Naturwissenschaften. Im Auftrage des Naturwissenschaftl. Vereins für den Reg.-Bezirk Frankfurt herausgeg. von *M. Klittke.* Jahrg. 9 (1895), No. 10—12. Jahrg. 10 (1896), No. 1—6.

Jahrbuch für d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1896. Freiberg d. J.

Verzeichniss d. Vorlesungen auf der Grossherz. Hessischen Ludwigs-Univers. zu Giessen. Sommer 1896, Winter 1896/97; Personalbestand S. 1896.

Bose, Heinrich, Das Behring'sche Diphtherie-Heilserum und die Erfolge, welche mit demselben in der chirurgischen Klinik zu Giessen erzielt worden sind. (Programm.) — *Gaffky, Georg,* Die experimentelle Hygiene im Dienste der öffentlichen Gesundheitspflege. (Festrede.) — *Dietrich, J.,* Die Polenkriege Konrads II. und der Friede von Merseburg. (Habilitationsschrift.) — 40 Dissertationen a. d. J. 1895/96.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von *R. Jecht.* Bd. 72, H. 1, 2. (Festschrift zum 550. Gedenktage d. Oberlausitzer Städtebündnisses. Th. 1.) Görlitz 1896.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 40, vom Jahre 1894 und 1895. Göttingen 1895. Philologisch-historische Classe. N. F. Bd. 1. No. 1—3. Berlin 1896.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Cl. 1895, No. 4. 1896, No. 1—3. Philol.-hist. Cl. 1896, No. 1—3. Geschäftliche Mittheilungen. 1896, H. 1. 2. Göttingen d. J.

Plücker, Julius, Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrag der Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen hrsg. von *A. Schoenflies* und *Fr. Pockels.* Bd. 2. Leipzig 1896.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Grimma über d. Schuljahr 1895/96. — *Gilbert,* Ovidianae quaestiones criticae et exegeticae. Grimma 1896.

Nova Acta Academiae Caes. Leopoldino-Carolinae germanicae naturae curiosorum. Tom. 63. 64. Halis 1895. — Katalog der Bibliothek der Kais. Leop.-Carolin. deutschen Akademie der Naturforscher. Lief. 1. 6. Halle 1887. 95.

Leopoldina. Amtl. Organ d. Kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. H. 31, No. 23. 24. H. 32, No. 1—11. Halle 1895. 96.

Neue Heidelberger Jahrbücher. Herausg. vom Histor.-philosophischen Vereine zu Heidelberg. Jahrg. 6, Heft 1. 2. Heidelberg 1896.

Verhandlungen des Naturhist.-medicinischen Vereins zu Heidelberg. N. F. Bd. 5, H. 4. Heidelberg 1896.

Programm der Technischen Hochschule zu Karlsruhe f. d. J. 1896/97. — Lektionsplan der Technischen Hochschule f. d. Wintersem. 1896/97. — *Baumeister, R.,* Wirthschaftliche Aufgaben des Ingenieurs (Festrede). — *Haber, Fritz,* Experimental-Untersuchungen über Zersetzung und Verbrennung von Kohlenwasserstoffen (Habilitationsschrift). München 1896. — *Hausrath, Hans,* Die Waldwegbauten des Forstbezirks St. Blasien (desgl.). Langensalza 1895. — 8 Dissertationen vom Jahre 1895—96.

Chronik d. Universität zu Kiel f. d. J. 1895/96. — Verzeichniss der Vorlesungen. Winter 1895/96, Sommer 1896. — *Bruns, Ivo,* Die atticistischen Bestrebungen in der griechischen Literatur (Rede). — *Hänel, Albert,* Der 18. Januar 1871 (Rede). — *Milchhoefer, A.,* Rede zum Winkelmannstage am 9. Dec. 1895. Das archaeologische Sculpturen-Museum der Kieler Universität. — *Schlossmann, Siegmund,* Bürgerliches Gesetzbuch und akademischer Rechtsunterricht (Rede). — Plutarchi Solonis capita XII priora, apparatu critico instructa et recognita ab *A. Schöne* (Progr.). — 121 Dissertationen a. d. J. 1895/96.

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. Hrsg. von der Commission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Im Auftrage des Königl. Minist. für Landwirthschaft, Domänen u. s. w. N. F. Bd. 1, H. 2. Kiel und Leipzig 1896.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 36 (1895). Königsberg 1895.

Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft. Jahrg. 30, H. 4. — Generalregister d. Jahrg. 1—25. Leipzig 1895.

Zeitschrift des Vereins für Lübecker Geschichte u. Alterthumskunde. Bd. 7, H. 2. Lübeck 1895.

Jahresbericht und Abhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins zu Magdeburg. 1894. 2. Halbjahr. Magdeburg 1896.

Abhandlungen d. histor. Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 21 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 68. Bd.), Abth. 2. München 1896.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 19 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 69. Bd.). Abth. 1. München 1896.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1895, H. 3. 1896, H. 1. 2. München 1896.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1896, H. 1. 2. München 1896.

Wilibald Pirckheimers Schweizerkrieg. Hrsg. von *Karl Rück.* — *Bechmann, August,* Der churbrandenburgische Kanzler Alois Freiherr von Kreitmayr (Festrede). — *Chroust, Anton,* Abraham von Dohna. München 1895. 96.

23. Jahresbericht des Westfälischen Provinzial-Vereins f. Wissenschaft u. Kunst f. 1894/95. Münster 1895.

Abhandlungen d. Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. 10, H. 4. Nürnberg 1896.

Jahresbericht d. Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. 1895. Nürnberg 1896.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Jahrg. 1895. — Mittheilungen aus dem Germanischen Museum. Jahrg. 1895. — Atlas zum Katalog der im Germanischen Museum vorhandenen Holzstöcke vom 15.—18. Jahrh. Nürnberg 1896.

Mittheilungen des Alterthumsvereins zu Plauen i. V. 11. u. 12. Jahresber. (1894/95, 1895/96.) Plauen 1895. 96.

Sonderveröffentlichungen der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. III. Das Jahr 1793. Urkunden u. Aktenstücke zur Geschichte der Organisation Südpreussens. Posen 1895.

Zeitschrift der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 9, H. 3. 4. Jahrg. 11. 12, H. 1. 2. Posen 1894.

Jahresbericht des Direktors der Kgl. Geodätischen Instituts (zu Potsdam) 1886/87 bis 1895/96. Berlin 1887—1896.

Comptes rendus des séances de la Commission permanente de l'Association géodesique internationale 1887—1894. Berlin et Neuchatel 1888—95. — *Ferrero, A.*, Rapport sur les Triangulations. 1887. 1892.

Publication des Kgl. preuss. Geodätischen Instituts. Astronomisch-geodätische Arbeiten i. d. J. 1883 u. 1884. Berlin 1885.

Veröffentlichung des Kgl. preuss. Geodätischen Instituts. — Astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordnung. Telegraphische Längsbestimmungen i. d. J. 1885 u. 1886. Berlin 1893. Lothabweichungen H. 1. 1886. Lothabweichungen in der Umgebung von Berlin. 1889.

Veröffentlichung des Kgl. preuss. Geodätischen Instituts u. Centralbureaus der internationalen Erdmessung. Die Schwerkraft im Hochgebirge. Berlin 1890. Die europäische Gradmessung in 52° Breite 1893. Die europäische Längengradmessung in 52° Breite von Greenwich bis Warschau. H. 1. 2. 1893. 96. Zenithdistanzen zur Bestimmung der Höhenlage der Nordseeinseln Helgoland u. s. w. 1895. Bestimmung der Polhöhe aus der Intensität der Schwerkraft auf 22 Stationen von der Ostsee bei Kolberg bis zur Schneekoppe. 1896.

Annalen der Kais. Universitäts-Sternwarte in Strassburg. Bd. 1. Karlsruhe 1896.

Württembergische Vierteljahrsschrift für Landesgeschichte. Hsg. von der Württembergischen Kommission f. Landesgeschichte. N. F. Jahrg. 4 (1895), H. 1—4. Stuttgart 1895/96.

Tharander forstliches Jahrbuch. Bd. 45, 2. 46, 1. Dresden 1896.

Festgabe zum 25jährigen Regierungsjubiläum S. M. des Königs Karl von Württemberg. Die unter der Regierung Sr. M. an der Universität Tübingen errichteten und erweiterten Institute der naturwissenschaftlichen und der medicinischen Facultät. Tübingen 1889.

Mittheilungen des Vereins für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben. H. 5—8. Ulm 1896.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 49. Wiesbaden 1896.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft zu Würzburg. Jahrg. 1895, No. 3—9. Würzburg d. J.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft zu Würzburg. N. F. Bd. 29, No. 6. 7. Bd. 30, No. 1—5. Würzburg 1895. 96.

Oesterreich-Ungarn.

Djela Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti (Agram) 17. U Zagrebu 1896.

Ljetopis Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti. Svez. 10. 1895. U Zagrebu 1896.

Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium. Vol. 27. 28. Zagrabiae 1895, 96.

Rad Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti. Knija 123—126. U Zagrebu 1895. 96.

Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika. Izd. Jugoslav. Akad. znatosti i umjetnosti. Svez. 15. U Zagrebu 1895.

Starine na sviet izdaje Jugoslav. Akad. znatosti i umjetnosti. Knija 27. U Zagrebu 1895.

Viestnik Hrvatskoga arkeologičkoga Družtva. N.S. God. 1. (1895.) U Zagrebu 1895/96.

Gorganovic-Kramberger C., De piscibus fossilibus Comeni Mrzleci, Lesinae et M. Libanonis. Edit. Acad. scient. et art. Slavor. merid. Zagrabiae 1895.

Magyar. tudom. Akadémiai Almanach 1896. Budapest d. J.

Mathematische u. naturwiss. Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akad. d. Wissensch. herausgeg. Bd. 13 (1895), H. 1, Budapest 1895.

Értekezések a nyelv-és-széptudományok Köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 16, szám. 6. 7. Budapest 1895. 96.

Értekezések a társadalmi tudományok Köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 11, szám. 11. Budapest 1896.

Értekezések a történeti tudományok Köréből. Köt. 16. szám. 6. 7. Budapest 1895. 96.

Archaeologiai Értesitő. A M. T. Akad. arch. bizottságának és av Orsz. Régészeti s emb. Társulatnak Közlönye. Köt. 13, szám. 4. 5. Köt. 16, szám. 1. 2. Budapest 1895. 96.

Mathematikai és természettudományi Értesitő. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 13, füz. 3—5. Köt. 14, füz. 1. 2. Budapest 1895. 96.

Archaeologiai Közlemények. Kiadja a Magyar. tudom. Akad. archaeol. bizottsága. Köt. 18. 19. Budapest 1895. 96.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 26, szám 3—5. Budapest 1895.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 25, füz. 3. 4. Köt. 26, füz. 1. 2. Budapest 1895. 96.

Monumenta Hungariae Historica. Cl. II. Vol. 34. Budapest 1896.

Monumenta Hungarie juridico-historica. Corpus statutorum Hungariae municipalium. T. 4. P. 1. Budapest 1896.

Monumenta comitalia regni Transsylvaniae. Köt. 18. Budapest 1895.

Rapport sur l'activité de l'Académie Hongroise des sciences en 1895. Budapest 1895.

Ungarische Revue. Mit Unterstützung der Ungar. Akad. d. Wiss. hrsg. v. *P. Hunfalvy* u. *Gust. Heinrich*. Jahrg. 15 (1895), H. 5—10. Budapest 1895.

Régi Magyar költök tára. Köt. 6. Budapest 1896.

Török Magyarkori Történelmi Emlekek. Köt. 2. Budapest 1896.

A Magyar Tudom. Akad. Kiadásában megjelent munkak és folyóiratok czimjegyzéke 1831—1895. Budapest 1896.

Fraknói, Vilmos, Mátyás Király levelei II.

Heller, Aug., Katalog der Elischer'schen Goethe-Sammlung. Budapest 1896.

Körösi, Józ. A., Megyei Monografiak. Köt. 2. Budapest 1895.

Kont, J., La Hongrie littéraire et scientifique. Paris 1896.

Munkácsi, Bernat, Lexicon linguae votaicorom. Füz 4, Budapest 1896.

Verzeichniss d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Winter-Sem. 1896/97. — Uebersicht der akad. Behörden im Studienjahr 1896/97. — Die feierliche Inauguration des Rectors f. 1895/96.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Hsg. v. d. Histor. Vereine f. Steiermark. Jahrg. 27. Graz 1896.

Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereins f. Steiermark. H. 32. Graz 1896.

Zeitschrift des Ferdinandeums f. Tirol u. Vorarlberg. 3. Folge. H. 39. 40. Innsbruck 1895. 96.

Berichte des naturwiss.-medizin. Vereins in Innsbruck. Jahrg. 22. 1893—96. Innsbruck 1876.

Starohrvatska Prosvjeta. God 1, br. 4. God 2, br. 1, 2. Kninu 1895. 96.

Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. Jahrg. 1895, No. 29. 1896, No. 1—9. Krakau d. J.

Atlas geologiczny Galicyi. Zeszyt 5. 7. Kraków 1895.

Biblijoteca pisarzáw polskich (Wydanictwa Akad. umięj. w Krakowie). No. 31. W Krakowie 1896.

Material y antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne. Wydaw. starimiem komisyi antropolog. Akademii umiejet. T. 1. Kraków 1896.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia. T. 15. W Krakowie 1896.

Rocznik Akademii umięjetności w Krakowie. Rok 1894/95. W Krakowie 1895.

Rozprawy Akademii umięjetności. Wydziału filologicznego. T. 22. 24. (Ser. II. T. 7. 9.) — Wydz. histor. filoz. T. 32. (Ser. II. T. 7.) — Wydz. matemat.-przyrodn. T. 28. 29. (Ser. II. T. 8. 9.). W Krakowie 1895.

Sprawozdania komisyi fizograficznéj. T. 30. Kraków 1895.

Sprawozdania komisyi do badánia historyi szuli w Polsce. T. 5. sesz. 4. W Krakowie 1896.

Balfer, Oswald, Genealogia Piastów. Wydanie Akad. umiej. W Krakowie 1895.

Finkel, Ludw., Bibliografia historyi Polskiej. Czesć. 2, zes. 3. Kraków 1896.

Mittheilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 8. Abth. 1—6. Laibach 1895. 96.

Izvestija Muzejskega društva za Kranjsko. Letnik 5. V Ljubljani 1895.

Almanach Česke Akademie Cisaře Františka Josefa. Ročn. 6. 1896. V Praze d. J.

Historický Archiv. Čisl. 7. V Praze 1895.

Bulletin international. Résumés des travaux présentés. Classe des scienc. matémat. et naturelles. II. Prague 1895.

Codex juris municipalis Regni Bohemiae. T. 2. V Praze 1895.

Rozpravy Česke Akad. Cís. Františka Josefa. Tríd. I (pro vědy filos., právn. a histor.) Ročn. 4. — Tríd. II (mathemat.-přírodn.) Ročn. 4. — Tríd. III (Philolog.) Ročn. 4. V Praze 1895.

Věstnik Česke Akad. Cís. Františka Josefa. Ročn. 4, Čisl. 1—9. V Praze 1895.

Sbírka Pramenův ka Poznáni literárniho života. Skupina 1. Rada 2, Čisl. 2. Skup. 3. Čisl. 1. V Praze 1895.

Život církevní v čechách. Praze 1895.

Jahresbericht der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften für das Jahr 1895. Prag 1896.

Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Math.-naturw. Classe. Jahrg. 1895. I. II. — Philos.-histor.-philolog. Classe Jahrg. 1895. Prag 1896.

Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde. Hrg. von der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen. Bd. 1. H. 1. 2. Prag 1896.

Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Hsg. im Auftrage der Gesellschaft zur Förderung deutsch. Wissensch., Kunst und Lit. in Böhmen. Bd. 4. *Joh. Mathesius*, Ausgewählte Werke. Bd. 1. Leichenreden. Hsg. von *Geo. Löscher*. Bd. 5. *Rank, Josef*. Erinnerungen aus meinem Leben. Prag, Wien etc. 1896.

Erläuterungen zur geologischen Karte des Böhmischen Mittelgebirges. Bl. 1. Wien 1896.

Forschungen zur Kunstgeschichte Böhmens. Veröffentlicht v. d. Gesellsch. zur Förderung deutsch. Wissensch., Kunst und Lit. in Böhmen: *Neuwirth, Jac.*, Mittelalterliche Wandgemälde und Tafelbilder der Burg Karlstein in Böhmen. — Der Bildercyklus des Luxemburger Stammbaumes aus Karlstein. Prag 1896.

Mittheilung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen. No. 5. 6. Prag 1896.

Prager Studien auf dem Gebiete der classischen Alterthumswissenschaft. Hsg. mit Unterstützung des k. k. Ministeriums für Cultur und Unterricht. H. 5. Prag 1895.

Batka, Rich., Altnordische Stoffe und Studien in Deutschland. Hsg. mit Unterstützung der Gesellsch. f. Förderung deutsch. Wissensch. Kunst und Lit. in Böhmen. Abschn. 1. Bayreuth. 1896.

Gerber, W. J., Die hebräischen Verba denominativa. Gedruckt mit Unterstützung der Gesellsch. z. Förderung deutsch. Wissensch., Kunst u. Lit. in Böhmen. Leipzig 1896.

Lippert, Jul., Social-Geschichte Böhmens in vorhussitischer Zeit. Bd. 1. Mit Unterstützung der Gesellsch. z. Förderung deutsch. Wissensch., Kunst u. Lit. in Böhmen. Prag, Wien, Leipzig 1896.

Messner, Paul, Joseph Messner, ein Lebensbild. Gedruckt mit Unterstützung der Gesellsch. z. Förderung deutsch. Wissensch., Kunst u. Lit. in Böhmen. Lobzów o. J.

Wettstein, R. v., Monographie der Gattung Euphrasia. Hrsg. mit Unterstützung der Gesellsch. zur Förderung deutsch. Wissensch., Kunst u. Lit. in Böhmen, Leipzig 1896.

Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag über d. J. 1895. Prag 1896.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1895. Jahrg. 56. Prag 1896.

Personalstand der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag zu Anfang d. Studienjahres 1896/97. — Ordnung d. Vorlesungen im Wintersem. 1896/97.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrgang 34, No. 1—4. Prag 1895/96.

Abhandlungen des deutschen naturwissenschaftlich-medicinischen Vereins für Böhmen »Lotos«. Bd. 1. H. 1. Prag 1896.

Krok, časopis věnovaný veškerym potřebám středního školstva.Ročn. 10, Seš. 1—10. V Praze 1896.

Wissenschaftliche Mittheilungen aus Bosnien und der Hercegovina. Hrsg. vom bosnisch-hercegovinischen Landesmusseum in Sarajevo. Bd.3. Wien 1896.

Bullettino di archeologia e storia dalmata. Anno 17 (1894), No. 8—12. Anno 19 (1896), No. 1—9. Spalato d. J.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissenschaften in Wien. Math.-naturw. Cl. Jahrg. 1895, No. 19—27. Jahrg. 1896, No. 1—26.

Archiv f. österreichische Geschichte. Hrsg. v. der z. Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der Kais. Akad. d. Wissensch. Bd. 82, H. 1. 2. Bd. 83, H. 1. Wien 1895. 96.

Denkschriften der Kais. Akad. d. Wissenschaften. Mathem.-naturw. Classe, Bd. 62. Wien 1895.

Fontes rerum Austriacarum. Oesterreichische Geschichtsquellen hrsg. v. d. histor. Commission d. Kais. Akademie d. Wissensch. Bd. 48. 1. Hälfte. Wien 1896.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Math.-naturw. Classe. Abth. I, II^a, II^b, III. Bd. 104 (1895), H. 1—10. — Philos.-histor. Cl. Bd. 132. 133 (1894. 1896). Wien d. J.

Mittheilungen der k. u. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1895. Bd. 38 (N. F. Bd. 28). Wien d. J.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 45, H. 10. Bd. 46, H. 1—9. Wien 1895. 96.

Publicationen für die internationale Erdmessung. Astronomische Arbeiten der k. k. Gradmessungs-Commission. Bd. 7. Längenbestimmungen. Wien 1895.

Verhandlungen der österreich. Gradmessungs-Commission. Protokolle über die am 9. April und 24. Januar 1895 und 21. Juni 1896 abgehaltenen Sitzungen. Wien 1895. 96.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. 18, H. 1. Wien 1895.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums Bd. 10, No. 3. 4. Bd. 11, No 1. 2. Wien 1895. 1896.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 45 (1895), H. 2—4. Jahrg. 46 (1896), H. 1. Wien d. J.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1895, No. 10—18. Jahrg. 1896, No. 1—12. Wien d. J.

Mittheilungen der Section f. Naturkunde des Oesterreichischen Touristen-Club. Jahrg. 7. Wien 1895.

Publicationen der v. Kuffner'schen Sternwarte. Hrsg. von *Leo de Ball*. Bd. 4. Wien 1896.

Belgien.

Bulletin de l'Académie d'archéologie de Belgique (IV. Sér. des Annales), II. Partie. No. 24—27. Anvers 1895. 96.

Analecta Bollandiana. T. 15. Fasc. 1—4. Bruxelles 1896.

La Cellule. Recueil de cytologie et d'histologie générale. T. 11, Fasc. 2. Bruxelles 1896.

Dänemark.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1895, No. 3. 4. 1896, No. 1—5. Kjøbenhavn d. J.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Hist. og philos. Afd. 6. Række. Bd. 3, No. 4. — Naturv. og math. Afd. 6. Række. Bd. 8, No. 2. Kjøbenhavn 1896.

Regesta diplomatica historiae Danicae, cura Societatis Reg. scientiar. Danicae. Ser. II, T. 2, III. Kjøbenhavn 1895.

England.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 9, P. 1—3. Cambridge 1896.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 16, P. 1. Cambridge 1896.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. III. Vol. 3, No. 4. 5. Dublin 1895. 96.

Transactions of the R. Irish Academy. Vol. 30, P. 15—20. Dublin 1895. 96. List of the members of the R. Irish Academy 1895, 1896.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. N. S. Vol. 8, P. 3. 4. Dublin 1894. 95.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. Ser. II. Vol. 5, No. 5—12. Vol. 6, No. 1. Dublin 1894—96.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. 20, No. 7. Vol. 21. No. 1. 2. Edinburgh 1895/96.

Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. 37, P. 3. 4. Vol. 38, P. 1. 2. Edinburgh 1895. 96.

Proceedings of the R. Physical Society of Edinburgh. Vol. 13, P. 1. (Session 1894/95.) Edinburgh 1895.

Transactions of the Edinburgh. Geological Society. Vol. 7, P. 2. Edinburgh 1895.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. 14, P. 3 (No. 89). London 1896.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. 59. 60, No. 353—363. London 1895. 96.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1895. Vol. 186. P. I. II, A. B. London 1896.

Catalogue of scientific Papers, 1874—1883. Vol. 11. London 1896.

Memoirs of the R. Astronomical Society. Vol. 51. London 1895.

General-Index to Vol. 30—52 of the Monthly Notices of the R. Astronomical Society 1869—1892. London 1896.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 26, No. 528—534. Vol. 27, No. 535—568. London 1895. 96.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. 1896, No. 1—5. London d. J.

Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. IV. Ser. Vol. 10, No. 1—3. Vol. 11, P. 1. Manchester 1895. 96.

Complete List of the Members and Officers of the Manchester Literary and Philosophical Society from its institution on Febr. 1781 to April 1896. Manchester 1896.

Report of the Manchester museum Owens College for 1895/96. Manchester 1896

Frankreich.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. IV. Sér. T. 5. Paris 1895.

Mémoires de la Société nationale des sciences naturelles et mathémathiques de Cherbourg. T. 29. (= Ser. III, T. 9). Paris 1892—96.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. N. S. T. 41. 42 (1894. 95). Lyon et Paris d. J.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille. T. 4, Fasc. 4. T. 5—7.

Annales de l'Institut colonial de Marseille. Vol. 2. 1895. Lille d. J.

Inventaire sommaire des Archives du département des affaires étrangères. Supplément. Paris 1896.

Bulletin du Muséum d'histoire naturelle. Année 1895, No. 8. 1896. No. 1—5. Paris d. J.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1894. Paris 1895.

Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures, publ. sous l'autorité du Comité international. T. 10. 11. Paris 1894. 95.

Journal de l'École polytechnique. Ser. II. Cah. 1. Paris 1895.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 24, No. 1—7. Paris 1895.

Griechenland.

École française d'Athènes. Bulletin de correspondance hellénique. Année 19 (1895), No. 11—12. Année 20 (1896), No. 1—10. Athen, Paris d. J.

Mittheilungen des Kaiserl. Deutschen Archäologischen Instituts, Athenische Abtheilung. Bd. 20, H. 4. Bd. 21, H. 1. Athen 1895. 96.

Holland.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetenschappen gevestigt te Amsterdam, voor 1895. Amsterdam d. J.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. II. Reeks, Deel 1, No. 5. 6. — Afdeel. Natuurkunde. Sect. I. Deel 3, No. 5—9. Deel 4. 5, No. 1. 2. Sect. II. Deel 4, No. 7—9. Deel 5, No. 1—3. Amsterdam 1895. 96.

Verslagen der Zittingen van de Wis- en Natuurkund. Afdeel. d. Kon. Akad. v. Wetensch. van 25. Mai 1895 tot 18. Apr. 1896. Deel 4. Amsterdam 1896.

Programma certaminis poetici ab Acad. Reg. discipl. Neerlandica ex legato Hoeufftiano indicti in annum 1897. — *Pascoli, Joh.*, Cena in caudiano Nervae aliaque poemata. Amstelodami 1895.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Uitg. door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam. 2. Reeks. Deel 3, I. Amsterdam 1896.

Wiskundige opgaven met oplossingen door de leden van het Wiskundig Genootschap. Deel 7, Stuk 1. 2. Nieuwe opgaven. Deel 7, No. 76—95. Amsterdam 1896.

Revue semestrelle des publications mathématiques. T. 4, P. 1. 2. Amsterdam 1896.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. 29, Livr. 4. 5. T. 30, Livr. 1—3. Harlem 1896.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 5, P. 1. 2. Harlem 1896.

Handelingen en mededeelingen van de maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1894/95. 1895/96. — G. van der Schuerens Teuthonista of Duytschlender. Uitgeg. door *J. Verdam*. Leiden 1896.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1894/95. 1895/96. Leiden 1895. 96.

Tijdschrift voor Nederlandsche taal- en letterkunde, uitgeg. van wege de Maatsch. der Nederl. Letterkunde. Deel 15 (N. F. 7), Afl. 1—3. Leiden 1896.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en mededeelingen der Nederlandsche Botanische Vereeniging [Leiden]. Ser. III. Deel 1, Stuk 1. Nijmegen 1896. — Naamlijst der Nederlandsche Phanerogamen en vaatkryptogamen vorkomende in het Ned. kruidk. Arch. Ser. I, 1—5. II, 1—6. Nijmegen 1896.

Programme de la Société Batave de Philosophie expérimentale de Rotterdam 1896.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectië-vergaderingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., ter gelegenheid van de algem. vergad. gehouden den 25. Juni 1895. Utrecht d. J.

Verslag van het verhandelnde in de algem. vergad. van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 25. Juni 1895. Utrecht d. J.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 17. 's Gravenhage 1896.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. III. Ser. No. 9. La Haye, 's Gravenhage 1896.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. IV. Reeks. 4, I. Utrecht 1896.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. No. 241—264. Firenze 1896.

Memorie dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Ser. 5 T. 4. Bologna 1894.

Le Opere di Galileo Galilei. Edit. nazionale. Vol. 5. Firenze 1895.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze: *Faggi, Adolfo*, La filosofia dell' inconsciente. Firenze 1890. *Martinati, Cam.*, Notizie storico-biografiche intorno al conte Baldassare Castiglione. 1890. — Archivio di Anatomia normale e patologico. Diretto d. *Giorgio Pellizzari*. Vol. 5, Fasc. 1. 2. 1889—90. *Minuti, Alfonso*, Sol Lichen rosso. 1891. — *Marchi, Vittorio*, Sull' origine e decorso dei peduncoli cerebellari. 1891. *Ristori, Gius.*, Sopra i resti di un coccodrillo scoperti nelle ligniti mioceniche di Montebamboli. 1890.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze morali e polit. Vol. 20 (Ser. III, Vol. 11), Fasc. 2. 3. Milano 1896.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II, Vol. 28. Milano 1895.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena. Ser. II. Vol. 11. Modena 1895.

Società Reale di Napoli. Atti della R. Accad. di archeolog., lettere e belle arti. Vol. 17 (1893—96). Rendiconto delle tornate e dei lavori dell' Accad. di archeologia, lettere e belle arti. N. S. Anno 9 (1895). Giugn.-Diz. Anno 10 (1896). Genn.-Giugn. — Rendiconto delle tornate e dei lavori dell' Accad. di scienze morali e politiche. Anno 34 (1895). Napoli 1895. 96.

Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. N. S. Vol. 11. Padova 1895.

Annuario del circolo matematico di Palermo. Anno 13. Palermo 1896.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 10, Fasc. 1—5. Palermo 1896.

Atti e Rendiconti dell' Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. 7, Fasc. 4. Vol. 8, Fasc. 1. 2. Perugia 1895. 96.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Vol. 18 (Filosofia e Filologia, Vol. 11). Pisa 1896.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Memorie. Vol. 14. Pisa 1895.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 10, adunanza del Nov. 1895. Lugl. 1896.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Ser. V, P. II. (Notizie degli scavi), Vol. 3, Ottob.-Diz. 1895. Vol. 4, Genn.-Ottob. 1896. — Rendiconti. Ser. V. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. 4 (1895), II. Sem., Fasc. 11. 12. Vol. 5 (1896) [I. Sem.], Fasc. 1—12. II. Sem., Fasc. 1—11. — Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. 4 (1895), Fasc. 11. 12. Vol. 5 (1896), Fasc. 1—10. — Rendiconto dell' adunanza solenne del 7. Giugno 1896. Roma d. J.

Mittheilungen des Kais. Deutschen Archaeologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bollettino dell' Imp. Istituto Archeologico-Germanico. Sezione Romana). Bd. 10, H. 3. 4. Bd. 11, H. 1—3. Roma 1895. 96.

Ministerio di Agricoltura, Industria e Comercio. — Statistica delle biblioteche. P. 2. Roma 1896.

Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. Ser. IV. Vol. 6, Suppl. al Fasc. 10, P. 2. Vol. 7, Fasc. 9. 10. Vol. 8, Fasc. 1—3. Processi verbali delle adunanze 1895. No. 6. 1896, No. 1—4. Siena 1895. 96.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. 31, Disp. 1—15. Torino 1895/96.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Ser. II. T. 45. Torino 1896.

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1895 all' Osservatorio della R. Università di Torino. Torino 1896.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Ser. VII. T. 6, Disp. 4—10. T. 7, Disp. 1. 2. Venezia 1895. 96.

Memorie del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Vol. 25, No. 4—7. Venezia 1895/96.

Temi di premio proclamati dal R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti nella solenne adunanza del 24. Maggio 1896. Venezia d. J.

Luxemburg.

Publications de l'Institut R. Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles. T. 24. Luxembourg 1896.

Portugal.

R. Observatorio astronomico de Lisboa (Tapada). Observations méridiennes de la Mars pendant l'opposition de 1892. Lisbonne 1895.

Rumänien.

Buletinul Societăţii de sciinţe fizice (Fizica, Chimia si Mineralogia) din Bucaresci-România. Anul 4, No. 11. 12. Anul 5, No. 1—11. Bucarescĭ 1895. 96.

Russland.

Observations publiées par l'Institut méteorologique central de la Société des sciences de Finlande. Livr. 1. Observations météorologiques faites à Helsingfors en 1894. 95. Vol. 13. 14. Helsingfors 1895. 96. — Observations météorologiques publiées par l'Institut météorologique central. 1881—1890. T. supplém. Kuopio 1896.

Ofversigt af Finska Vetenskabs-Societetens Förhandlingar. 37 (1894—95). Helsingfors 1895.

Vetenskapliga Meddelanden af Geografiska Föreningen i Finland. 2 (1894/95). 3. (1896). Helsingfors.

Bulletin de la Commission géologique de la Finlande. No. 1—5. Helsingfors 1895. 96.

Finlands Geologiska Undersökning. Kartbladet 27—31, u. Beskrifning till Kartbl. 27—31. Kuopio 1895.

Mémoires de la Société finno-ougrienne. IX. *Schlegel, G.*, Die chinesische Inschrift auf dem Uigurischen Denkmale. Helsingfors 1896.

Universität Kazan. 4 Dissertationen a. d. J. 1895/96.

Universitetskija Izvěstija. God 35, No. 11. 12. God 36, No. 1—10. Kiev 1895. 96.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1895, No. 3. 4. 1896, No. 1. 2. Moscou d. J.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. Sér. VIII. Cl. phys.-mathém. Vol. 1, No. 9. Vol. 2. 3. 4, No. 1. Cl. hist.-philol. Vol. 1, No. 1. 2. St.-Pétersbourg 1895. 96.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausg. von *H. Wild*. Jahrg. 1894, Th. 1. 2. St.-Petersburg 1895.

Comité géologique, St. Pétersbourg. Bulletins. T. 14, No. 6—9 et Suppl. T. 15, No. 1—4. — Mémoires. Vol. 10, No. 4. Vol. 13, No. 2. Vol. 15, No. 2. St. Pétersbourg 1894—96.

Acta Horti Petropolitani. T. 14, Fasc. 1. T. 15, Fasc. 1. Petropoli 1895. 96.

Scripta botanica Horti Universitatis. Imp. Petropolitani. T. 4, Fasc. 2. T. 5, Fasc. 1. 2. T. 6. Petropoli 1895. 96.

Trudy S.-Peterburgskago Obščestva estestvoyspytatelej. — Travaux de la Société des naturalistes de St. Pétersbourg. T. 21, 2. Sect. de géologie et de minéralogie. T. 25, 2. Sect. de zoologie et de physiologie. Protokoly. 1895, 6—8. 1896, 1—4. St. Pétersbourg 1895. 96.

Godičnyi Akt Imp. S. Peterburgsk. Universiteta za 8. Feb. 1896. S. Peterburg.

Obozrěnie propodavanija nauk v Imp. S.-Peterburgsk. Universitetě na osenne i vesenne polugodie 1896/97. S. Peterburg 1896.

Zapiski istoriko-philologičeskago Fakulteta Imp. S. Petersburgskago Universiteta. Čast 35. 36. 38—40. S. Peterburg 1895. 96.

Vizantijskij vremennik (*Βυζαντινα Χρονικά*), izdavaemyi pri imp. Akad. nauk. T. 2. 3. Yyb. 1. S. Peterburg 1895. 96.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 38. Riga 1895.

Beobachtungen des Tifliser Physikalischen Observatoriums i. J. 1894. Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens i. J. 1890. Tiflis 1895. 96.

Schweden und Norwegen.

Bergens Museum. Aarbog for 1894/95. Afhandlinger och Aarberetning. Bergen 1896.

Sars, G. O. An Account of the crustacea of Norway. Vol. 2, p. 1. 2. Bergen 1896.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1894. Christiania 1894. 95.

Skrifter udgivne af Videnskabsselskabet i Christiania. Math.-naturvid. Kl. 1894, No. 1—6. Hist.-filos. Kl. 1894, No. 1—5. Kristiania 1894.

Jahrbuch des Norwegischen meteorologischen Instituts für 1892. Christiania 1894.

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bind 34 (4. R. Bd. 2), H. 2. Christiania 1893.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 31. I. II. Lund 1895.

Acta mathematica. Hsg. v. *G. Mittag-Leffler.* 20, 1. 2. Stockholm 1896.

Bihang till kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bd. 20. 21. Stockholm 1895. 96.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. 27. Stockholm 1895/96.

Meteorologiska Jakttagelser i Sverige utg. af kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 33 (Ser. II. Bd. 19). Jhrg. 1891. Stockholm 1895.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Årg. 52. (1895.) Stockholm 1896.

Entomologisk Tidskrift utg. af Entomologiska Föreningen i Stockholm. Arg. 16 (1895). Stockholm d. J.

Tromsø Museums Aarsberetning for 1893. Tromsø 1895.

Tromsø Museums Aarshefter. 17. Tromsø 1895.

Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala. Vol. 2, P. II, No. 4. Upsala 1896.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 27 (1895). Upsal 1895. 96.

Schweiz.

Argovia. Jahresschrift der Historischen Gesellschaft des Kantons Aargau. Bd. 26. Aarau 1895. — Taschenbuch der historischen Gesellschaft des Kantons Aargau f. 1896.

Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 10, H. 2. 3. Bd. 11, H. 2. Basel 1896.

Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Jahrgang 39 (1895/96). Chur 1896. — *Eblin, Bernh.* Ueber die Waldreste des Averser Oberthales. (Vortrag.)

Index lectionum in univers. Friburgensi per mens. aest. 1896 et per mens. hiem. 1896/97. Friburgi Helvet. — Université de Fribourg. Autorités, professeurs et étudiants. Sem. d'été 1896. Sem. d. d'hiv. 1896/97. *Savigny*, Lev. v. Rectoratsrede. Fribourg 1895. 96.

Collectanea Friburgensia. Fasc. 4. 5. Friburgi Helv. 1895. 96.

Vierteljahrsschrift d. Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 40, H. 3. 4. Jahrg. 41, H. 1. 2. Zürich 1895. 96.

8. Jahresbericht der physikalischen Gesellschaft in Zürich. Uster-Zürich 1895.

Serbien.

Srpska kralj. Akademija. Glas. 49. 50. Godišnjak. 8. (1894). — Nekolike Napomene. — Spomenik. No. 25. 30. Poslovnik 1895. Beograd 1895. 96.

Gorǵević, Vladan, Grčka i srpska prosveta. Beograd 1896.

Ruvarac, Ilarion, Odlomci o grofu Górǵu Brankoviću i Arseniju Crnojeviću. Beograd 1896.

Nordamerika.

Annual Report of the American Historical Association for the year 1894. Washington 1895.

Transactions of the American Philological Association. Vol. 26 (1895). Boston d. J.

Journal of the America Oriental Society. Vol. 17. New Haven 1896.

Bulletin of the Geological Society of America. Vol. 7. Rochester 1896.

El Instructor. Periódico científico y literario. Año 12, No. 5, 6. Aguascalientes 1895.

Johns Hopkins University Circulars. No. 123—127. Baltimore 1895. 96.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 17, No. 4. Vol. 18, No. 1. 2. Baltimore 1895. 96.

American Journal of Philology. Vol. 16, No. 2—4. Baltimore 1895.

American chemical Journal. Vol. 17, No. 8—10. Vol. 18, No. 1—6. Baltimore 1895. 96.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. Ser. XI, 11. 12. Ser. XIII, 9—12. Ser. XIV, 1—7. Baltimore 1895. 96.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. N. Ser. Vol. 22. (Whole Ser. Vol. 30.) Boston 1895.

Boston Journal of natural history. Vol. 1. 2. 4, No. 2. Vol. 5, No. 2. 4. Boston 1834—1847.

Memoirs of the Boston Society of natural history. Vol. 5, No 1. 2. Boston 1895.

Proceedings of the Boston Society of natural history. Vol. 26, P. 4. Vol. 27, p. 1—74. Boston 1895. 96.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 17, No. 7. Vol. 29, No. 1—6. Vol. 30, No. 1. Cambridge, Mass. 1895. 96.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass., for 1894/95. Cambridge, Mass. 1895.

Harvard Oriental Series. Vol. 3. *Warren, H. C.*, Buddhism in translations. Cambridge, Mass. 1896.

Bulletin of the Chicago Academy of sciences. Vol. 2, No. 2, Chicago 1895.

Chicago Academy of sciences. 38. Annual Report for 1895. Chicago 1896.

Terrestrial Magnetism. Vol. 1, No. 1. Chicago 1896.

Field Columbian Museum. Publications. No. 3—13. Chicago 1895. 96.

Yerkes Observatory, University of Chicago. Bulletin. No. 1. Chicago 1896.

Tufts College Studies. No. 4. [College Hill] 1895.

Jowa Geological Survey. Vol. 4. Des Moines 1895.

The Journal of comparative Neurology. Ed. by *C. L. Herrick.* Vol. 6, No. 1. 2. Granville 1896.

The Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of science. Ser. II. Vol. 1, P. 4. Vol. 2, P. 1. Halifax 1895. 96.

Annual Report of the Director of the Michigan Mining School. Houghton 1895.

The Journal of Physical Chemistry. Vol. 1, No. 1. Ithaca 1896.

The Kansas University Quarterly. Vol. 5, No. 1. Lawrence 1896.

University of Nebraska. Bulletin of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. Vol. 8, No. 44. 45. Lincoln 1896.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. 9, P. 1. 2. Madison 1896.

Transactions of the Wisconsin Academy of sciences, arts and letters. Vol. 10. Madison 1872—94.

Transactions of the Meriden Scientific Association. Vol. 7. Meriden 1895.

Boletin del Instituto geológico de México. No. 2. México 1895.

Memorias de la Sociedad científica »Antonio Alzate«. T. 8, Cuad. 5—8. T. 9, Cuad. 1—10. México 1895. 96.

Ramirez, Santiago, Datos para la historia del Colegio de Minería. Edicion de la Sociedad Alzate. México 1894.

13. annual Report of the Board of Trustees of the public Museum of the City of Milwaukee 1895. Milwaukee 1895.

Contributions from the Lick Observatory. [Mount Hamilton]. No. 5. Sacramento 1895.

Report for the year 1895/96, presented by the Board of Managers of the Observatory of Yale University to the President and Fellows. (New Haven o. J.)

Transactions of the Astronomical Observatory of Yale University. Vol. 1, P. 5. New Haven 1896.

Annals of the New York Academy of sciences. Vol. 8, No. 6—12. Vol. 9, No. 1—3. New York 1895. 96.

Memoirs of the New York Academy of sciences. 1. New York 1895.

Transactions of the New York Academy of sciences. Vol. 14. New York 1894/95.

Bulletin of the American Geographical Society. Vol. 27, No. 4. Vol. 28, No. 1—3. New York 1895. 96.

Bulletin of the American Museum of natural history. Vol. 1, No. 1—8. Vol. 2, No. 1—4. Vol. 3, No. 1. 2. Vol. 4—7. New York 1881—95.

Memoirs of the American Museum of natural history. Vol. 1, P. 1. 2. New York 1893. 95.

Annual Report of the American Museum of natural history 1870—1895.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada. Ser. II. Vol. 1. Ottawa 1895.

Geological Survey of Canada. Annual Report. N. S. Vol. 7 (1894). Maps No. 557. 561—563. 567—571. Ottawa 1896.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1895, P. 2. 3. 1896, P. 1. Philadelphia d. J.

Transactions of the Wagner Free Institute of science. Vol. 4, P. 1. Philadelphia 1896.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia. Vol. 34, No. 148. 149. Vol. 35, No. 150. Philadelphia 1895. 96.

Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia. N. S. Vol. 18, P. 2. Philadelphia 1896.

American Journal of Archaeology. 1895. Oct.-Dec. Vol. 11 (1896), No. 1—3. Princeton d. J.

Observatorio meteorológico del Colegio del Estado de Puebla. Resumen correspondiente á cada día. Agost. 1895—Marz. 1896. — Pronostico dado para el año de 1895.

Proceedings of the Rochester Academy of sciences. Vol. 3, Broch. 1. Rochester 1896.

Memoirs of the California Academy of sciences. Vol. 2, No. 5. San Francisco 1896.

Proceedings of the California Academy of sciences. Ser. II. Vol. 5, P. 1. 2. San Francisco 1895. 96.

Transactions of the Kansas Academy of science. Vol. 14 (1893/94). Topeka 1896.

Archaeological Report 1894—95. Appendix to the Report of the Minister of Education, Ontario. Toronto 1896.

Transactions of the Canadian Institute. No. 8 (Vol. 4, No. 2). Toronto 1895.

Memoirs of the National Academy of sciences. Vol. 7. Washington 1895.

Report of the National Academy of sciences for 1895. Washington 1896.

Bureau of Education. Report of the Commissioner of education for the year 1892/93. 1893/94. Vol. 1. 2. Washington 1895. 96.

13. annual Report of the Bureau of Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution. 1891/92. Washington 1896.

U. D. Department of Agriculture. Division of Ornithology and Mammology. Bulletin. No. 8. — North American Fauna. No. 10—12. Washington 1895. 96.

Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 1031. *Sherborn, Ch. D.,* An Index to the Genera and Species of the Foraminifera. Part II. No. 1037. *Berger, D. H.,* Methods for the determination of organic matter in air. Washington 1896.

Smithsonian Contributions to knowledge. Vol. 29, No. 980. 989. 1033. Vol. 30—32. Washington 1895. 96.

Report of the U. S. National Museum f. 1894.

Bulletin of the U. S. National Museum. No. 48. Washington 1895.

Proceedings of the U. S. National Museum. Vol. 17 (1894). Washington 1895.

Observations made during the year 1890 at the U. S. Naval Observatory. Washington 1895.

United States Coast and Geodetic Survey. Bulletin No. 35. Washington 1896.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, showing the progress during the fiscal year ending with June 1893, P. 1. 1894, P. 2. Washington 1895.

Bulletin of the U. S. Geological Survey (Department of the Interior). No. 123—126. 128. 129. 131—134. Washington 1895.

15. and 16. annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior. 1893/94. 1894/95. Washington.

Südamerika.

Anales de la Sociedad científica Argentina. T. 40, Entr. 5. 6. T. 41. 42, Entr. 1—5. Buenos Aires 1895. 96.

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la Republica Argentina. [Córdoba]. T. 14, Entr. 3. 4. Buenos Aires 1896.

Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1896. (Anno 12.) Rio de Janeiro 1895.

Actes de la Société scientifique du Chili. Tom. 5, Livr. 4. Santiago 1895.

Asien.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 33, Afl. 3. 4. Batavia 1895. 96.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 38, Afl. 6. Deel 39, Afl. 1. 2. Batavia 1895. 96.

Catalogus der numismatische verzameling van het Batav. Genootschap van kunst. en wetensch. door *J. A. van der Chijs*. 4. Druk. Batavia 1896.

Nederlandsch-Indie Plakatboek 1602—1811, door *J. A. van der Chijs*. Deel 14. Uitgegeven door het Batav. Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia, 's Hage 1895.

Dagh-Register, gehouden int Casteel Batavia vant passerendsdaer ter plaetse als over gehad Nederlands-India anno 1666/67. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch. med medemaking van de Nederlandsch-Indische Regeering en onder toetcht van J. A. van der Chijs. Batavia, 's Hage 1895.

Observations made at the magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 17 (1894). Batavia 1895.

Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie. Jaarg. 16 (1894). Batavia 1895.

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie, uitgeg. door de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie. Deel 55 (Ser. IX, Deel 4). Batavia 1895.

Supplement-Catalogus (1883—93) der Bibliothek van de kon. Natuurkundige Vereenigung in Nederl.-Indie. Batavia, s'Gravenhage 1895.

Memoirs of the Geological Survey of India Vol. 1—24. Calcutta 1856—1887. Contents and Index of Vol. 1—20. ibd. 1892.

Records of the Geological Survey of India. Vol. 1—27. Calcutta 1868—1894. Contents and Index of Vol. 1—20. ibd. 1891.

Medlicott, H. B. and *Blanford, W. F.*, A manual of the Geology of India. 2. edit. by *R. D. Oldham*. Calcutta 1893.

Journal of the College of science, Imperial University, Japan. Vol. 8, P. 2. Vol. 9, P. 1. Vol. 10, P. 1. Tōkyō 1895. 96.

Mittheilungen aus der Medicinischen Facultät der Kais. Japan. Universität. Bd. 3, No. 2. Tokio 1895.

Afrika.

Report on the Geodetic Survey of South Africa executed by Morris in the years 1883—1892. Cape Town 1896.

Australien.

Transactions of the R. Society of Victoria. Vol. 4. Melbourne 1895.

Exhibition buildings Melbourne. Illustrated official Handbook to the Aquarium, Picture Salon and Museum Collections. Melbourne.

Australian Museum. Report for the year 1895. Sydney d. J.

Report of the 6. Meeting of the Australian Association for the advancement of science. 1895. Sydney.

Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 29 (1895). Sydney d. J.

Kosmopolan. No. 29—31. Sydney 1896.

2. Einzelne Schriften.

Beck-Widmanstetter, Leop. v., Rechtskämpfe seit Beginn des Jahrhunderts, erlebt von der steierischen Familie Beck-Widmanstetter. Budapest 1896.

Bell, A. M., Englische sichtbare Sprache in 12 Lectionen o. O. u. J.

Cayley, Arthur, The collected mathematical papers. Vol. 10. 11. Cambridge 1896.

Gerassimoff, J. J., Über ein Verfahren, kernlose Zellen zu erhalten. Moskau 1896.

Hale, E., Organisation of the Yerkes Observatory. Chicago 1896.

Hirth, Friedr., Über fremde Einflüsse in der chinesischen Kunst. München und Leipzig 1896.

Kuhn, M., Unmittelbare und sinngemässe Aufstellung der Energie als mechanischen Hauptbegriffs. S.-A. Wien 1896.

Le Jolis, Aug., Remarques sur la Nomenclature bryologique. S.-A. 1895.

Pisco, Jul., Kurzgefasstes Handbuch der nordalbanesischen Sprache. Wien 1896.

Reuter, Enzio, Über die Palpen der Rhopaloceren (Act. Soc. scient. Fenn., T. 22, 1). Helsingfors 1896.

Riem, Joh., Über eine frühere Erscheinung des Kometen 1881 III Tebbut. Göttingen 1896.

Saint-Lager, Les nouvelles Flores de France. Paris 1894.

—— Les Gentianella du groupe Grandiflora. S.-A.

—— La vigne du Mont Ida et la Vaccinium. Paris 1896.

Schwickert, Joh. Jos., Ein Triptychon klassischer kritisch-exegetischer Philologie. Leipzig und Würzburg 1896.

—— Kritisch-exegetische Untersuchungen zu Pindars zweitem olympischen Siegesgesange. Trier 1891.

Tannert, A. C., Der Sonnenstoff als Zukunftslicht und Kraftquelle. Neisse 1896.

Very, Frank, Photometry of a lunar eclipse. S.-A. Chicago 1895.

Vogel, H. C., Über das Objectiv des grossen Refractors des Potsdamer Observatoriums. S.-A. 1896.

—— Über das Spectrum von Mira Ceti. S.-A. 1896.

Weingarten, Jul., Sur la deformation des surfaces. S.-A.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

SITZUNG VOM 13. JANUAR 1896.

Vorträge hielten:

1. Herr Ad. Mayer, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von Dr. **Emil Naetsch** in Dresden: »Untersuchungen über die Reduction und Integration von Picard'schen Differentialgleichungen«.
2. Herr H. Bruns, o. M., empfiehlt die Aufnahme der Abhandlung von **F. Hausdorff** über »infinitesimale Abbildungen der Optik«.
3. Herr **Drude**, ao. M.: »Ueber die anomale elektrische Dispersion von Flüssigkeiten«. (Siehe Abhandlungen.)
4. Herr **Sophus Lie**, o. M.: »Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Optik«.
5. Herr **Herm. Ambronn**, ao. M.: »Ueber Farbenerscheinungen an den Grenzen farbloser Objecte im Mikroskop«.

E. Naetsch, *Untersuchungen über die Reduction und Integration von Picard'schen Differentialgleichungen.* (Vorgelegt von Herrn Ad. Mayer, o. M.)

Die Lehre von den doppeltperiodischen Functionen zweiter Art ist geschichtlich durch ihre Entstehung, wie auch sachlich durch ihre Anwendungen aufs Engste verwachsen mit der Theorie einer gewissen Classe von homogenen linearen Differentialgleichungen. Herr Ch. Hermite, dem die Analysis den Begriff der doppeltperiodischen Function zweiter Art verdankt, wurde auf denselben bekanntlich geführt, als er es unternahm, die Lamé'sche Differentialgleichung

$$(1) \qquad y'' = [m(m+1)k^2 \operatorname{sn}^2 w + A]\, y\,,$$

in welcher m eine ganze Zahl ist, für beliebige Werthe der Constanten A zu integriren[1]; es stellte sich heraus, dass die vollständige Lösung dieser Differentialgleichung stets durch doppeltperiodische Functionen zweiter Art oder doch durch gewisse Abarten solcher Functionen dargestellt werden kann.

---

1) Hermite, Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. Paris 1885.

Wesentlich verallgemeinert wurde dieses Ergebniss durch Herrn Picard, welcher bald darauf zeigte, dass die angegebene Eigenschaft allen homogenen linearen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten zukommt, deren allgemeine Lösungen den Charakter rationaler Functionen besitzen[1]).

Die dieser Classe angehörigen Differentialgleichungen — man pflegt sie kurzweg die Picard'schen Differentialgleichungen zu nennen — sind seitdem in einer Reihe von Arbeiten behandelt worden, indem bald eine einzelne Differentialgleichung, bald eine mehr oder weniger umfassende Schaar solcher Gleichungen herausgegriffen wurde, um hinsichtlich ihrer Eigenschaften und der Beschaffenheit ihrer Lösungen untersucht zu werden. Ein Blick auf diese Arbeiten lehrt nun, dass sich die Aufmerksamkeit der Mathematiker hierbei in erster Linie solchen Differentialgleichungen zuwandte, welche, wie die oben angeführte Lamé'sche Gleichung, die Eigenschaft besitzen, sich nicht zu ändern, wenn $-w$ an Stelle von w substituirt wird. Insbesondere sind von den Herren Hermite[2]), Elliot[3]), Gyldén[4]), Picard[5]), Darboux[6]), de Sparre[7]) eine Reihe von Differentialgleichungen II. Ordnung betrachtet worden, welche mit der Lamé'schen das genannte Merkmal gemein haben; aber auch in den vereinzelten Untersuchungen, welche bisher über Differentialgleichungen höherer Ordnung mit doppeltperiodischen Coefficienten vorliegen, spielen Gleichungen, denen die obige Eigenschaft zukommt, eine wichtige Rolle[8]).

Die gegenwärtige Arbeit ist nun in erster Linie dem Problem gewidmet, die allgemeinste Picard'sche Differentialgleichung II. Ordnung aufzustellen und vollständig zu integriren, welche bei Aenderung des Vorzeichens der unabhängigen Variablen in sich selbst übergeht; daneben aber werden einige allgemeinere auf doppeltperiodische Functionen zweiter Art und auf Picard'sche Differentialgleichungen bezügliche Fragen er-

---

1) Émile Picard, Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. Crelle, 90. Band.

2) Crelle's Journal, 89. Band.

3) Acta mathematica, II. Band.

4) Comptes rendus, t. 88, p. 964.

5) Comptes rendus, t. 88, p. 74.

6) Comptes rendus, t. 94, p. 1645.

7) Acta mathematica, III. Band.

8) Vergleiche insbesondere die verdienstvolle Arbeit Halphén's: Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables [Mémoires des savants étrangers, t. 28].

örtert, zu deren Studium die Behandlung dieses Problems Anlass giebt.

Die erste dieser Fragen betrifft die Beziehungen, welche zwischen zwei conjugirten doppeltperiodischen Functionen zweiter Art stattfinden, d. h. zwischen zwei doppeltperiodischen Functionen zweiter Art, die sich nur durch das Vorzeichen der unabhängigen Veränderlichen w von einander unterscheiden. Von besonderer Bedeutung für diese Beziehungen erweist sich der bereits durch Herrn HERMITE [1]) bemerkte Umstand, dass zu je zwei solchen Functionen $F(w)$ und $F(-w)$, wenn dieselben nur die eine singuläre Stelle $w = iK'$ haben, immer drei ganze rationale Functionen des Arguments $\operatorname{sn}^2 w$ gehören, zwischen denen eine einfache identische Relation besteht. Aus dieser Identität folgen wichtige Beziehungen zwischen den Coefficienten L_1, L_2, L_3, ... der Reihe

$$(2) \qquad \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m \{1 + L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 + L_3\varepsilon^3 + \cdots\},$$

welche man durch Entwickelung des Ausdrucks $F(iK' + \varepsilon)$ nach steigenden Potenzen von ε erhält.

In zweiter Linie kommt die wichtige Frage in Betracht, ob es vortheilhafter ist, eine doppeltperiodische Function zweiter Art mit der einzigen singulären Stelle $w = iK'$, welche einer vorgelegten PICARD'schen Differentialgleichung Genüge leisten soll, in der Productform

$$\frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\cdots\vartheta_1(v+\nu_m)}{\vartheta_0(v)^m}\, e^{\lambda w - \sum_1^m{}_k \frac{\vartheta_0'(\nu_k)}{\vartheta_0(\nu_k)} v}$$

oder in der Summenform

$$\begin{cases} \dfrac{\psi^{(m-1)}(w)}{(m-1)!} + B_1 \cdot \dfrac{\psi^{(m-2)}(w)}{(m-2)!} + B_2 \cdot \dfrac{\psi^{(m-3)}(w)}{(m-3)!} + \cdots + B_{m-1} \cdot \psi(w), \\[2ex] \qquad \psi(w) \equiv \dfrac{\vartheta_1(v+\nu)}{\vartheta_0(v)}\, e^{Aw - \frac{\vartheta_0'(\nu)}{\vartheta_0(\nu)} v} \end{cases}$$

darzustellen. Es ergiebt sich das bemerkenswerthe Resultat, dass, sobald die Coefficienten

1) Comptes rendus, t. 94, p. 477 sequ.

$$L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}$$

der entsprechenden Reihenentwickelung (2) bekannt sind, die Berechnung der in der Productform enthaltenen Constanten

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m; \lambda$$

grössere algebraische Schwierigkeiten bietet, als die Bestimmung der in die Summenform eingehenden Constanten

$$B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}, A, \nu.$$

Ferner wird noch gezeigt, dass man jede beliebige Picard-sche Differentialgleichung durch Einführung einer neuen unbekannten Function auf eine gewisse *Normalform* bringen, d. h. auf eine andre Picard'sche Differentialgleichung von derselben Ordnung und mit denselben singulären Stellen zurückführen kann, welche so beschaffen ist, dass ihre vollständige Lösung nur eine singuläre Stelle besitzt und für keinen endlichen Werth der unabhängigen Veränderlichen verschwindet.

Dann wird unter Benutzung der gewonnenen Ergebnisse die allgemeine Form jeder Picard'schen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche sich durch Vertauschung von w mit $-w$ nicht ändert, festgestellt. Im Anschluss hieran zeigen wir, wie sich derartige Differentialgleichungen durch Einführung einer neuen unbekannten Function in einander überführen lassen, und wie sich die Zurückführung einer solchen Gleichung auf die Normalform gestaltet. Den Eigenschaften der auf die Normalform gebrachten Differentialgleichungen wird hierauf eine nähere Betrachtung gewidmet.

Dabei findet insbesondere der Fall eingehende Würdigung, wo die betrachtete Differentialgleichung nur die vier singulären Stellen

$$w = iK', \quad w = 0, \quad w = K, \quad w = K + iK'$$

besitzt; in diesem Falle ist dieselbe identisch mit der Gleichung, welche Herr de Sparre in seiner oben genannten Arbeit behandelt hat, und welche ihrerseits alle in den übrigen vorhin citirten Abhandlungen betrachteten Differentialgleichungen als specielle Fälle umfasst.

Zum Schluss wird ein auf den vorangehenden Entwickelungen beruhendes Verfahren zur vollständigen Integration der auf die Normalform gebrachten Differentialgleichungen angegeben und an einigen einfachen Beispielen erläutert. — Dieses Verfahren lässt sich übrigens — mutatis mutandis — auf alle Picard'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung anwenden, welche die Normalform besitzen.

Bei der vollständigen Integration der in Rede stehenden Differentialgleichungen setzen wir voraus, dass die vollständige Lösung die Form

$$A \cdot F(w) + B \cdot F_1(w)$$

erhalten kann, wobei $F(w)$ und $F_1(w)$ doppeltperiodische Functionen zweiter Art sind; der Ausnahmefall, in welchem diese Annahme nicht zutrifft, bleibt ausser Betracht.

§ 1.

Darstellungsformen unipolarer doppeltperiodischer Functionen zweiter Art.

Wenn für eine eindeutige analytische Function $R(w)$, welche im Endlichen nur ausserwesentlich singuläre Stellen besitzt, also — wie man zu sagen pflegt — den Charakter einer rationalen Function hat, zwei Functionalgleichungen von der Form

$$(1) \quad R(w + 2K) = M \cdot R(w), \quad R(w + 2iK') = N \cdot R(w)$$

stattfinden, in denen K und K' die in der Theorie der elliptischen Functionen übliche Bedeutung haben[1]), während M und N irgendwelche constante Grössen sind, so wird bekanntlich $R(w)$ eine *doppeltperiodische Function zweiter Art* genannt; die Grössen $2K$ und $2iK'$ bezeichnet man als die *Perioden*, die Constanten M und N als die denselben entsprechenden *Multiplicatoren*, die Gleichungen (1) als die *Periodicitätsgleichungen* dieser Function.

Hat man insbesondere

$$M = N = 1,$$

so ist $R(w)$ eine gewöhnliche doppeltperiodische Function, oder wie man der Unterscheidung halber sagt, eine *doppeltperiodische Function erster Art.*

---

1) Betreffs der in der Theorie der elliptischen Functionen vorkommenden Argumente, Perioden, Moduln, Functionalzeichen u. s. w. schliessen wir uns durchweg der von Herrn Krause in seinem kürzlich erschienenen Werke »Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veränderlichen Grösse« [Leipzig, 1895] adoptirten Bezeichnungsweise an.

Anmerkung. — Häufig empfiehlt es sich, den Begriff der doppeltperiodischen Function erster Art etwas allgemeiner zu fassen, indem man ihn auf alle diejenigen eindeutigen analytischen Functionen ausdehnt, für welche zwei Periodicitätsgleichungen (1) bestehen, in denen $M^2 = N^2 = 1$ ist. Die unter diesen erweiterten Begriff fallenden Functionen scheiden sich dann in vier Kategorien; und zwar wird

für die Functionen der 1. Kategorie: $R(w+2K) = +R(w)$, $R(w+2iK') = +R(w)$;

» » » » 2. » $R(w+2K) = -R(w)$, $R(w+2iK') = +R(w)$;

» » » » 3. » $R(w+2K) = -R(w)$, $R(w+2iK') = -R(w)$;

» » » » 4. » $R(w+2K) = +R(w)$, $R(w+2iK') = -R(w)$.[1])

In der Folge sollen jedoch, wo nicht ausdrücklich Anderes festgesetzt wird, unter doppeltperiodischen Functionen erster Art immer solche der ersten Kategorie verstanden werden.

Als die allgemeinste doppeltperiodische Function zweiter Art kann der Ausdruck

$$R(w) = \frac{\vartheta_0(v+a_1)\cdots\vartheta_0(v+a_n)}{\vartheta_0(v+b_1)\cdots\vartheta_0(v+b_n)}\,e^{cv}$$

angesehen werden, in welchem $a_1, \dots a_n, b_1, \dots b_n, c$ beliebige constante Grössen sind; das Argument v hängt mit w durch die bekannte Relation

$$w = 2K \,.\, v$$

zusammen. — Wenn insbesondere

$$c = 0\,, \quad a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$$

ist, so wird $R(w)$ eine doppeltperiodische Function erster Art, und umgekehrt lässt sich jede doppeltperiodische Function erster Art durch einen Ausdruck $R(w)$ von der obigen Form darstellen, für welchen diese beiden Bedingungen erfüllt sind. — Ist für

1) Als die einfachsten diesen vier Kategorien angehörenden Functionen können wir bez. die vier Ausdrücke $\mathrm{sn}^2 w$, $\mathrm{sn}\, w$, $\mathrm{cn}\, w$, $\mathrm{dn}\, w$ ansehen.

einen vorgelegten Ausdruck $R(w)$ nur die zweite Bedingung erfüllt, so gehört $R(w)$ der besonderen Classe von doppeltperiodischen Functionen zweiter Art an, auf welche sich die von Herrn MITTAG-LEFFLER in den Comptes rendus, t. 90, p. 177 gemachte Mittheilung bezieht.

Bei den folgenden Untersuchungen werden fast ausschliesslich solche doppeltperiodische Functionen zweiter Art in Betracht kommen, welche die einzige singuläre Stelle $w = iK'$ besitzen[1]. Jede derartige Function $F(w)$ kann nach dem oben Bemerkten in der Form

$$(2) \qquad \frac{\vartheta_0(v+a_1)\cdots\vartheta_0(v+a_m)}{\vartheta_0(v)^m}\, e^{cv}$$

geschrieben werden; sie lässt sich aber im Allgemeinen, d. h. wenn $a_1 + a_2 + \cdots + a_m \neq 0$ ist, noch in der zweiten Form

$$(3) \qquad \begin{cases} \psi^{(m-1)}(w) + A_1 \cdot \psi^{(m-2)}(w) + \cdots + A_{m-1} \cdot \psi(w), \\ \qquad \psi(w) \equiv \dfrac{\vartheta_0(v+a)}{\vartheta_0(v)}\, e^{cv} \end{cases}$$

schreiben, an deren Stelle auch die für manche Zwecke bequemere Darstellung

$$e^{cv}\left\{\left(\frac{d}{dw}\right)^{m-1}\frac{\vartheta_0(v+a)}{\vartheta_0(v)} + C_1\cdot\left(\frac{d}{dw}\right)^{m-2}\frac{\vartheta_0(v+a)}{\vartheta_0(v)} + \cdots + C_{m-1}\cdot\frac{\vartheta_0(v+a)}{\vartheta_0(v)}\right\}$$

treten kann.

Wie man sieht, enthält die allgemeinste doppeltperiodische Function zweiter Art, welche im Punkte $w = iK'$ von der m^{ten} Ordnung unendlich gross wird, für jeden andern endlichen Werth von w aber endlich bleibt, von einem unwesentlichen Factor abgesehen, $m+1$ willkürliche Constanten; bei der Darstellung (2) sind dies die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m, c$, bei der Darstellung (3) hingegen die Grössen $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, a, c$; im ersten Falle ist hierbei der Umstand von Bedeutung, dass die Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ in völlig symmetrischer Weise auftreten.

Die Form (2) — die sogenannte *Productdarstellung* unserer Function $F(w)$ — hat vor der Form (3) — der sogenannten

[1] In der Folge werden wir gelegentlich Functionen, welche nur eine singuläre Stelle haben, kurzweg als *unipolare* Functionen bezeichnen.

Summendarstellung — den wesentlichen Vorzug, dass sie gültig bleibt, auch wenn $F(w)$ eine Function der oben erwähnten Mittag-Leffler'schen Classe, oder eine doppeltperiodische Function erster Art ist; man hat nur im ersten Falle die Bedingung $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 0$ einzuführen und im zweiten Falle ausserdem noch $c = 0$ zu setzen. Die Darstellung (3) hingegen wird beidemal unmöglich; um einen Ersatz für dieselbe zu schaffen, muss man in beiden Fällen an Stelle des Quotienten $\frac{\vartheta_0(v+a)}{\vartheta_0(v)}$ den Ausdruck $\frac{\vartheta_0'(v)}{\vartheta_0(v)}$ einführen.

Bei einer vergleichenden Würdigung der beiden Darstellungsformen unserer Function $F(w)$ muss noch ein anderer Gesichtspunkt in Betracht gezogen werden.

Das Interesse, welches die Analysis an den doppeltperiodischen Functionen zweiter Art nimmt, beruht in erster Linie auf dem Umstande, dass sich mit ihrer Hülfe die bekannten Picard'schen Differentialgleichungen integriren lassen. Hat man nun etwa festgestellt, dass einer vorgelegten derartigen Differentialgleichung durch eine Function $F(w)$ von der obigen Beschaffenheit Genüge geleistet wird, so ist zur Ermittelung derselben erforderlich, dass man entweder die Grössen $a_1, \ldots a_m$, c oder die Grössen $A_1, \ldots A_{m-1}$, a, c berechnet, je nachdem die gesuchte Function in der Form (2) oder in der Form (3) dargestellt werden soll. Von diesen beiden Aufgaben ist nun, wie wir später ausführlich zeigen werden, die erste mit grösseren Schwierigkeiten verbunden als die zweite. Sobald es sich also darum handelt, eine vorgelegte Picard'sche Differentialgleichung wirklich zu integriren, d. h. die Werthe der in ihren Lösungen enthaltenen Constanten zu berechnen, ist es vortheilhaft, diese Lösungen in Summenform zu bringen. Bei allgemeinen Untersuchungen über derartige Differentialgleichungen, wie etwa bei Reduction derselben auf kanonische Formen, oder bei Ermittelung allgemeiner Eigenschaften ihrer Lösungen, empfiehlt es sich dagegen, die letzteren in Productform vorauszusetzen. Zu Gunsten der Productdarstellung spricht, abgesehen von ihrer übersichtlichen symmetrischen Form, insbesondere der Umstand, dass sie die Nullstellen der Function $F(w)$, d. h. die Werthe von w, für welche die letztere verschwindet, unmittelbar ersichtlich macht.

Mit der soeben berührten Frage verwandt ist die Aufgabe, eine Function $F(w)$, welche in Productform gegeben ist, in Summenform darzustellen, und umgekehrt, eine Aufgabe, welche wir offenbar folgendermassen formuliren können: Es sollen unter der Voraussetzung, dass die beiden Ausdrücke (2) und (3) eine und dieselbe Function $F(w)$ darstellen, die Constanten $A_1, \ldots A_{m-1}, a, c$ durch die Constanten $a_1, \ldots a_m, c$ ausgedrückt werden, und umgekehrt.

Bei allen diesen auf die Darstellungsformen unserer Function $F(w)$ bezüglichen Problemen, welche in § 6 eingehender behandelt werden sollen, spielen die Entwickelungen der Ausdrücke (2) und (3) nach steigenden Potenzen von $w - iK'$ eine wichtige Rolle. Die Coefficienten dieser Entwickelungen nehmen nun eine besonders einfache Gestalt an, wenn wir an Stelle von $a_1, \ldots, a_m, c$ und von $A_1, \ldots, A_{m-1}, a, c$ andere Constanten einführen, indem wir die Ausdrücke (2) und (3) bez. in der Form

$$(2^*)\qquad \frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\,\vartheta_1(v+\nu_2)\cdots\vartheta_1(v+\nu_m)}{\vartheta_0(v)^m}\, e^{\lambda w - \sum\limits_1^m{}_k \frac{\vartheta_0'(\nu_k)}{\vartheta_0(\nu_k)} v}$$

und

$$(3^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\psi^{(m-1)}(w)}{(m-1)!} + B_1\cdot\dfrac{\psi^{(m-2)}(w)}{(m-2)!} + B_2\cdot\dfrac{\psi^{(m-3)}(w)}{(m-3)!} + \cdots + B_{m-1}\cdot\psi(w), \\[2ex] \qquad\qquad \psi(w) \equiv \dfrac{\vartheta_1(v+\nu)}{\vartheta_0(v)}\, e^{Aw - \frac{\vartheta_0'(\nu)}{\vartheta_0(\nu)} v} \end{cases}$$

schreiben. Diese Form soll von jetzt an beibehalten werden. Die Quelle ihrer Vorzüge ist in den beiden folgenden Thatsachen zu suchen: Erstens enthalten die Entwickelungen der Ausdrücke

$$\frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\cdots\vartheta_1(v+\nu_m)}{\vartheta_0(v)^m}\, e^{-\sum\limits_1^m{}_k \frac{\vartheta_0'(\nu_k)}{\vartheta_0(\nu_k)} v} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_1(v+\nu)}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\frac{\vartheta_0'(\nu)}{\vartheta_0(\nu)} v}$$

nach steigenden Potenzen von $w - iK' = \varepsilon$ keine Glieder mit ε^{-m+1} bez. mit ε^0; und zweitens sind die Coefficienten dieser Entwickelungen in besonders einfacher Weise von den elliptischen Functionen der Argumente $\omega_1 = 2K\cdot\nu_1, \ldots, \omega_m = 2K\cdot\nu_m$, bez. des Arguments $\omega = 2K\cdot\nu$ abhängig. Aus dem ersteren Umstande folgt insbesondere, dass in der Entwickelung des Ausdrucks (2*), welche, von einem constanten Factor abgesehen,

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m \{1 + L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 + L_3\varepsilon^3 + \cdots\}$$

geschrieben werden kann, der erste Coefficient L_1 den Werth λ besitzt.

§ 2.

Darstellung gerader doppeltperiodischer Functionen erster Art.[1]

Es sei $\Phi(w)$ eine doppeltperiodische Function erster Art mit der einzigen singulären Stelle $w = iK'$. Dann kann, wie in § 1 bereits angedeutet wurde, $\Phi(v)$ erstens in der Form

$$(1) \qquad \frac{\vartheta_0(v + a_1) \cdots \vartheta_0(v + a_m)}{\vartheta_0(v)^m},$$

zweitens aber auch in der Form

$$(2) \quad \left(\frac{d}{dw}\right)^{m-1} \frac{\vartheta_0'(v)}{\vartheta_0(v)} + A_1 \cdot \left(\frac{d}{dw}\right)^{m-2} \frac{\vartheta_0'(v)}{\vartheta_0(v)} + \cdots + A_{m-2} \cdot \frac{d}{dw} \frac{\vartheta_0'(v)}{\vartheta_0(v)} + A_m$$

dargestellt werden; im ersten Falle hat man

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 0,$$

während im zweiten Falle die Grössen $A_1, A_2, \ldots, A_{m-2}, A_m$ keiner Beschränkung unterworfen sind. Die allgemeinste doppeltperiodische Function erster Art, die im Punkte $w = iK'$ von der m^{ten} Ordnung unendlich gross wird, für jeden andern endlichen Werth von w aber endlich bleibt, enthält also, von einem unwesentlichen Factor abgesehen, $m - 1$ willkürliche Constanten.

Die Darstellung (2) können wir nun in beachtenswerther Weise umformen, wenn wir von der bekannten Relation

$$\frac{d}{dw} \frac{\vartheta_0'(v)}{\vartheta_0(v)} = \frac{1}{2K} \cdot \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - 2K \cdot k^2 \operatorname{sn}^2 w$$

---

1) Betreffs der folgenden Entwickelungen vergleiche Krause, Doppeltperiodische Functionen, § 82.

Gebrauch machen; dann ergiebt sich nämlich

$$\Phi(w)$$
$$= \left(\frac{d}{dw}\right)^{m-2} \operatorname{sn}^2 w + B_1 \cdot \left(\frac{d}{dw}\right)^{m-3} \operatorname{sn}^2 w + \cdots + B_{m-2} \cdot \operatorname{sn}^2 w + B_m,$$

wobei $B_1, B_2, \ldots, B_{m-2}, B_m$ wiederum Constanten sind, deren Werthe keiner Beschränkung unterliegen. Nun hat aber bekanntlich jeder gerade Differentialquotient von $\operatorname{sn}^2 w$ die Form $G(\operatorname{sn}^2 w)$, jeder ungerade Differentialquotient hingegen die Form $\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w \cdot H(\operatorname{sn}^2 w)$, wobei G und H ganze rationale Functionen von $\operatorname{sn}^2 w$ bedeuten; wir können daher $\Phi(w)$ auch in die Form

(3) $$G_1(\operatorname{sn}^2 w) + \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w \cdot G_2(\operatorname{sn}^2 w)$$

bringen, wobei dann G_1 und G_2 ganze rationale Functionen von $\operatorname{sn}^2 w$ sind. — In der Folge wird uns besonders der Fall interessiren, wo $\Phi(w)$ eine *gerade* Function von w, wo also

$$\Phi(-w) \equiv \Phi(w)$$

ist. Wie man sich leicht überzeugt, tritt dieser Fall dann und nur dann ein, wenn in dem Ausdruck (3) die ganze rationale Function $G_2(\operatorname{sn}^2 w)$ identisch verschwindet; wir erhalten also den

Lehrsatz. *Jede gerade doppeltperiodische Function erster Art mit der einzigen singulären Stelle $w = iK'$ ist als ganze rationale Function von $\operatorname{sn}^2 w$ darstellbar.*

Es sei ferner $\Psi(w)$ eine beliebige doppeltperiodische Function erster Art. Nach dem im vorigen Paragraphen Bemerkten können wir

$$\Psi(w) = \frac{\vartheta_0(v+a_1)\cdots\vartheta_0(v+a_m)}{\vartheta_0(v+b_1)\cdots\vartheta_0(v+b_m)}$$

setzen, wobei $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ Constanten sind, zwischen denen die Beziehung

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$$

stattfinden muss. Setzen wir daher

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = A, \qquad b_1 + b_2 + \cdots + b_m = B,$$

so können wir

$$\Psi(w) = \frac{\vartheta_0(v+a_1)\cdots\vartheta_0(v+a_m)\,\vartheta_0(v-A)}{\vartheta_0(v+b_1)\cdots\vartheta_0(v+b_m)\,\vartheta_0(v-B)}$$

schreiben, also die Function $\Psi(w)$ als Quotienten der beiden Ausdrücke

$$\frac{\vartheta_0(v+a_1)\cdots\vartheta_0(v+a_m)\vartheta_0(v-A)}{\vartheta_0(v)^{m+1}} \text{ und } \frac{\vartheta_0(v+b_1)\cdots\vartheta_0(v+b_m)\vartheta_0(v-B)}{\vartheta_0(v)^{m+1}}$$

darstellen. Diese aber sind ihrerseits doppeltperiodische Functionen erster Art mit der einzigen singulären Stelle $w = iK'$; wir können sie daher beide in die Form (3) bringen und sind mithin berechtigt,

$$\Psi(w) = \frac{G_1(\mathrm{sn}^2 w) + \mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w \cdot G_2(\mathrm{sn}^2 w)}{H_1(\mathrm{sn}^2 w) + \mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w \cdot H_2(\mathrm{sn}^2 w)}$$

zu setzen, wobei G_1, G_2, H_1, H_2 ganze rationale Functionen von $\mathrm{sn}^2 w$ bedeuten. Die Form dieses Ausdrucks können wir aber noch vereinfachen, indem wir Zähler und Nenner desselben mit

$$H_1(\mathrm{sn}^2 w) - \mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w \cdot H_2(\mathrm{sn}^2 w)$$

multipliciren und von der Relation

$$\mathrm{sn}^2 w\, \mathrm{cn}^2 w\, \mathrm{dn}^2 w = \mathrm{sn}^2 w - (1 + k^2)\, \mathrm{sn}^4 w + k^2 \mathrm{sn}^6 w$$

Gebrauch machen. Wir erkennen dann, dass sich $\Psi(w)$ in die Form

$$(4) \qquad R_1(\mathrm{sn}^2 w) + \mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w \cdot R_2(\mathrm{sn}^2 w)$$

bringen lässt, wobei R_1 und R_2 rationale Functionen von $\mathrm{sn}^2 w$ sind[1]). — Damit der Ausdruck (4) eine *gerade* Function von w wird, ist, wie sich ohne Schwierigkeit zeigen lässt, nothwendig und hinreichend, dass $R_2(\mathrm{sn}^2 w)$ identisch verschwindet; oder also wir erhalten den

Lehrsatz. *Jede gerade doppeltperiodische Function erster Art von w kann als rationale Function von* $\mathrm{sn}^2 w$ *dargestellt werden.*

§ 3.

Conjugirte doppeltperiodische Functionen zweiter Art mit der einzigen singulären Stelle $w = iK'$. Die Polynome $\Pi(x)$, $\Pi_1(x)$ und $\Pi_2(x)$; Eigenschaften derselben.[2])

Es sei nun $F(w)$ irgend eine doppeltperiodische Function zweiter Art, die im Punkt $w = iK'$ von der m^{ten} Ordnung unendlich gross wird, für jeden andern endlichen Werth von w dagegen endlich bleibt. Dann ist der Ausdruck

1) Die obige Ableitung dieses bekannten Resultats ist dem citirten Werk des Herrn Krause entnommen. Vergl. daselbst § 82. — Siehe auch Halphén, Traité des fonctions elliptiques I, p. 213—215.

2) Der den folgenden Entwickelungen zu Grunde liegende Gedanke rührt von Herrn Hermite her [C. r., t. 94, p. 477—480].

$$F(-w),$$

den wir von jetzt an immer durch $F_1(w)$ bezeichnen wollen, offenbar ebenfalls eine doppeltperiodische Function zweiter Art mit der einzigen m-fachen singulären Stelle $w = iK'$; und wenn

$$F(w+2K) = M\cdot F(w), \quad F(w+2iK') = N\cdot F(w)$$

ist, so wird

$$F_1(w+2K) = \frac{1}{M}\cdot F_1(w), \quad F_1(w+2iK') = \frac{1}{N}\cdot F_1(w);$$

die Multiplicatoren der Function $F_1(w)$ sind also gleich den reciproken Werthen der entsprechenden Multiplicatoren der Function $F(w)$.

Wir werden $F_1(w)$ in der Folge *die zu $F(w)$ conjugirte Function* nennen und allgemein zwei doppeltperiodische Functionen zweiter Art, die sich nur durch das Vorzeichen der Variablen von einander unterscheiden, als zwei *conjugirte doppeltperiodische Functionen zweiter Art* bezeichnen.

Da der Punkt $w = iK'$ eine ausserwesentlich singuläre Stelle unserer beiden Functionen $F(w)$ und $F_1(w)$ ist, müssen sich beide nach steigenden Potenzen von $w - iK' = \varepsilon$ entwickeln lassen; zwischen den beiden hierbei erhaltenen Reihen besteht aber ein einfacher Zusammenhang.

Wir können jedenfalls

$$(1)\quad F(iK'+\varepsilon) = A\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m \{1 + L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 + L_3\varepsilon^3 + \cdots\}$$

setzen; und hierbei sind $L_1, L_2, L_3, \ldots$ constante Coefficienten, mit denen wir uns noch viel zu beschäftigen haben werden, während A ein für unsere Zwecke bedeutungsloser, ebenfalls constanter Factor ist. Nun hat man offenbar

$$F_1(iK'+\varepsilon) = F_1(-iK'+\varepsilon+2iK') = \frac{1}{N}F_1(-iK'+\varepsilon) = \frac{1}{N}F(iK'-\varepsilon),$$

und hieraus folgt, weil zufolge (1)

$$F(iK'-\varepsilon) = (-1)^m A\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m \{1 - L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 - L_3\varepsilon^3 \pm \cdots\}$$

wird,

$$F_1(iK'+\varepsilon) = (-1)^m \frac{A}{N}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m \{1 - L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 - L_3\varepsilon^3 \pm \cdots\}.$$

Wir wollen, um dieses Ergebniss in übersichtlicher Form aussprechen zu können, die Constante $(-1)^m \frac{A}{N}$ abkürzend durch B, und die beiden unendlichen Reihen

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m \{1 + L_2\varepsilon^2 + L_4\varepsilon^4 + \cdots\}, \quad \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{m-1} \{L_1 + L_3\varepsilon^2 + \cdots\}$$

bez. durch S_1 und S_2 bezeichnen. Dann können wir sagen;

Sind $F(w)$ und $F_1(w)$ zwei conjugirte doppeltperiodische Functionen zweiter Art mit der einzigen singulären Stelle $w = iK'$, so wird

$$(2)\quad F(iK' + \varepsilon) = A \cdot [S_1 + S_2], \quad F_1(iK' + \varepsilon) = B \cdot [S_1 - S_2],$$

wobei S_1 und S_2 unendliche Reihen von der Form

$$(3)\quad S_1 = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m \{1 + L_2\varepsilon^2 + L_4\varepsilon^4 + \cdots\}, \quad S_2 = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{m-1} \{L_1 + L_3\varepsilon^2 + \cdots\}$$

bedeuten, während A und B constante Factoren sind.

Wir wollen nunmehr die drei Ausdrücke

$$\Phi(w) = F(w) \cdot F_1(w), \quad \Phi_1(w) = F'(w) \cdot F_1'(w),$$
$$\Phi_2(w) = F(w) \cdot F_1'(w) - F'(w) \cdot F_1(w)$$

bilden, und das Verhalten derselben untersuchen.

Zunächst ist klar, dass alle drei Ausdrücke gerade Functionen von w sind, denn wir haben nach Annahme

$$F_1(w) \equiv F(-w),$$

und infolgedessen

$$F_1'(w) \equiv -F'(-w);$$

hieraus aber folgt, dass

$$\Phi(w) = F(w) \cdot F(-w), \quad \Phi_1(w) = -F'(w) \cdot F'(-w),$$
$$\Phi_2(w) = -F(w) \cdot F'(-w) - F'(w) \cdot F(-w),$$

also

$$\Phi(-w) \equiv \Phi(w), \quad \Phi_1(-w) \equiv \Phi_1(w), \quad \Phi_2(-w) \equiv \Phi_2(w)$$

ist. — Ferner sind unsere drei Ausdrücke doppeltperiodische Functionen erster Art; denn vermöge der oben hingeschriebenen Periodicitätsgleichungen der beiden Functionen $F(w)$ und $F_1(w)$, aus denen durch Differentiation noch die weiteren

$$F'(w+2K) = M \cdot F'(w)\,, \quad F'(w+2iK') = N \cdot F'(w),$$
$$F_1'(w+2K) = \frac{1}{M} \cdot F_1'(w)\,, \quad F_1'(w+2iK') = \frac{1}{N} \cdot F_1'(w)$$

folgen, wird

$$\Phi(w+2K) = \Phi(w)\,, \quad \Phi(w+2iK') = \Phi(w)\,,$$
$$\Phi_1(w+2K) = \Phi_1(w)\,, \quad \Phi_1(w+2iK') = \Phi_1(w)\,,$$
$$\Phi_2(w+2K) = \Phi_2(w)\,, \quad \Phi_2(w+2iK') = \Phi_2(w)\,.$$

Endlich können diese drei Functionen keine andere singuläre Stelle als den Punkt $w = iK'$ besitzen; und zwar überzeugt man sich leicht, dass in diesem Punkte $\Phi(w)$ von der $2m$-ten, $\Phi_1(w)$ von der $2m+2$-ten, und $\Phi_2(w)$ im Allgemeinen von der $2m$-ten Ordnung unendlich gross wird.

Aus dem Vorstehenden folgt nach § 2, dass sich $\Phi(w)$, $\Phi_1(w)$ und $\Phi_2(w)$ als ganze rationale Functionen von $\mathrm{sn}^2 w$ darstellen lassen müssen; und zwar werden diese Functionen im Allgemeinen bez. vom Grade m, $m+1$ und m sein. Wir sind infolgedessen berechtigt,

$$\Phi(w) = AB \cdot \{(k^2 \mathrm{sn}^2 w)^m + \alpha_1 \cdot (k^2 \mathrm{sn}^2 w)^{m-1} + \alpha_2 \cdot (k^2 \mathrm{sn}^2 w)^{m-2}$$
$$+ \cdots + \alpha_m\}\,,$$
$$\Phi_1(w) = AB \cdot \{m^2 (k^2 \mathrm{sn}^2 w)^{m+1} + \beta_1 \cdot (k^2 \mathrm{sn}^2 w)^m + \beta_2 \cdot (k^2 \mathrm{sn}^2 w)^{m-1}$$
$$+ \cdots + \beta_{m+1}\}\,,$$
$$\Phi_2(w) = 2AB \cdot \{\gamma_0 \cdot (k^2 \mathrm{sn}^2 w)^m + \gamma_1 \cdot (k^2 \mathrm{sn}^2 w)^{m-1} + \gamma_2 \cdot (k^2 \mathrm{sn}^2 w)^{m-2}$$
$$+ \cdots + \gamma_m\}$$

zu setzen; die besonderen Vortheile der gewählten Constantenbezeichnung werden sich sogleich herausstellen. Schreiben wir also, wie von jetzt an immer geschehen soll, x an Stelle von $\mathrm{sn}^2 w$, und setzen

$$(4)\quad \begin{cases} \Pi(x) = (k^2 x)^m + \alpha_1 \cdot (k^2 x)^{m-1} + \alpha_2 \cdot (k^2 x)^{m-2} + \cdots + \alpha_m\,, \\ \Pi_1(x) = m^2 (k^2 x)^{m+1} + \beta_1 \cdot (k^2 x)^m + \beta_2 \cdot (k^2 x)^{m-1} + \cdots + \beta_{m+1}\,, \\ \Pi_2(x) = \gamma_0 \cdot (k^2 x)^m + \gamma_1 \cdot (k^2 x)^{m-1} + \gamma_2 \cdot (k^2 x)^{m-2} + \cdots + \gamma_m\,, \end{cases}$$

so erhalten wir die Beziehungen

$$(5)\quad \Phi(w) = AB \cdot \Pi(\mathrm{sn}^2 w)\,, \quad \Phi_1(w) = AB \cdot \Pi_1(\mathrm{sn}^2 w)\,,$$
$$\Phi_2(w) = 2AB \cdot \Pi_2(\mathrm{sn}^2 w)\,.$$

Wir suchen nunmehr die Coefficienten α, β, γ der drei Polynome $\Pi(x)$, $\Pi_1(x)$, $\Pi_2(x)$ zu ermitteln.

Zu diesem Zwecke machen wir von den Entwickelungen unserer drei Functionen $\Phi(w)$, $\Phi_1(w)$, $\Phi_2(w)$ nach Potenzen von $w - iK' = \varepsilon$ Gebrauch. Infolge der Relationen (2) ergiebt sich offenbar

$$\Phi(iK'+\varepsilon) = AB\cdot[S_1^2 - S_2^2], \quad \Phi_1(iK'+\varepsilon) = AB\cdot[S_1'^2 - S_2'^2],$$
$$\Phi_2(iK'+\varepsilon) = -2AB\cdot[S_1 S_2' - S_1' S_2],$$

wir erhalten also die Gleichungen

$$(6)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\mathrm{sn}^2\varepsilon}\right)^m + \alpha_1\left(\dfrac{1}{\mathrm{sn}^2\varepsilon}\right)^{m-1} + \alpha_2\left(\dfrac{1}{\mathrm{sn}^2\varepsilon}\right)^{m-2} + \cdots + \alpha_m = S_1^2 - S_2^2, \\ m^2\left(\dfrac{1}{\mathrm{sn}^2\varepsilon}\right)^{m+1} + \beta_1\left(\dfrac{1}{\mathrm{sn}^2\varepsilon}\right)^{m} + \beta_2\left(\dfrac{1}{\mathrm{sn}^2\varepsilon}\right)^{m-1} + \cdots + \beta_{m+1} = S_1'^2 - S_2'^2, \\ \gamma_0\left(\dfrac{1}{\mathrm{sn}^2\varepsilon}\right)^m + \gamma_1\left(\dfrac{1}{\mathrm{sn}^2\varepsilon}\right)^{m-1} + \gamma_2\left(\dfrac{1}{\mathrm{sn}^2\varepsilon}\right)^{m-2} + \cdots + \gamma_m = S_1' S_2 - S_1 S_2'. \end{cases}$$

Diese aber setzen uns in den Stand, die gesuchten Grössen α, β, γ ganz und rational durch die Coefficienten L_1, L_2, $L_3 \ldots$ der Reihenentwickelung (1) darzustellen.

In der That, wenn wir beide Seiten der Relationen (6) nach Potenzen von ε entwickeln, so ergeben sich links Reihen, deren Coefficienten die Grössen α, resp. die β oder die γ linear enthalten und ausserdem nur von den — als bekannt anzusehenden — Coefficienten s_2, s_4, ... der Reihenentwickelung

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2\varepsilon} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \{1 + s_2\varepsilon^2 + s_4\varepsilon^4 + s_6\varepsilon^6 + \cdots\}$$

abhängen, während wir auf den rechten Seiten vermöge der Formeln (3) Reihen erhalten, deren Coefficienten sich ganz und rational aus L_1, L_2, L_3, ... zusammensetzen. Setzen wir daher die Coefficienten gleicher Potenzen von ε auf beiden Seiten einander gleich, so entstehen drei Systeme von linearen Gleichungen, aus denen sich $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$; $\beta_1, \ldots \beta_{m+1}$; $\gamma_0, \ldots \gamma_m$ bestimmen lassen; und zwar sind die für diese Grössen erhaltenen Werthe ganze rationale Functionen von L_1, L_2, L_3, ...

Wir haben demnach den folgenden

Lehrsatz. *Sind $F(w)$ und $F_1(w)$ zwei conjugirte doppelt-periodische Functionen zweiter Art mit der einzigen singulären Stelle $w = iK'$, so sind die drei Ausdrücke*

$$F(w)\cdot F_1(w)\,,\quad F'(w)\cdot F_1'(w)\,,\quad F(w)\cdot F_1'(w) - F'(w)\cdot F_1(w)\ ^{1)}$$

als ganze rationale Functionen von $\operatorname{sn}^2 w$ *darstellbar, indem*

$$F(w)\cdot F_1(w) = AB\cdot\{(k^2\operatorname{sn}^2 w)^m + \alpha_1(k^2\operatorname{sn}^2 w)^{m-1} + \cdots + \alpha_m\}\,,$$
$$F'(w)\cdot F_1'(w) = AB\cdot\{m^2(k^2\operatorname{sn}^2 w)^{m+1} + \beta_1(k^2\operatorname{sn}^2 w)^m + \cdots + \beta_{m+1}\}\,,$$
$$F(w)\cdot F_1'(w) - F'(w)\cdot F_1(w) = 2AB\cdot\{\gamma_0(k^2\operatorname{sn}^2 w)^m + \gamma_1(k^2\operatorname{sn}^2 w)^{m-1} + \cdots + \gamma_m\}$$

gesetzt werden kann; die Coefficienten $\alpha_1, \ldots \alpha_m$, $\beta_1 \ldots \beta_{m+1}$, $\gamma_0 \ldots \gamma_m$ dieser ganzen rationalen Functionen aber lassen sich ganz und rational durch die Coefficienten L_1, L_2, L_3, ... der Reihenentwickelung

$$F(iK'+\varepsilon) = A\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m\{1 + L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 + L_3\varepsilon^3 + \cdots\}$$

ausdrücken.

Betreffs der Form dieser Ausdrücke aber können wir auf Grund der Relationen (6) ohne Schwierigkeit noch Folgendes feststellen:

Die α, β und γ ergeben sich als Summen von Gliedern, welche sämmtlich die Form

$$C\cdot L_i\,L_k$$

besitzen, wobei die C ausschliesslich von $s_2, s_4, s_6, \ldots$ abhängen; dabei treten in den für die α und β erhaltenen Ausdrücken nur Glieder auf, für welche $i+k$ eine gerade, in den für die γ erhaltenen nur Glieder, für welche $i+k$ eine ungerade Zahl ist; ferner enthält der Ausdruck von α_h sowie der von β_h nur Glieder, in denen $i+k \lesseqgtr 2h$, der Ausdruck von γ_h hingegen nur solche Glieder, in denen $i+k \leqq 2h+1$ ist. — Hieraus folgt übrigens, dass der Ausdruck für γ_h in Bezug auf die Grössen $L_1, L_3, L_5, \ldots L_{2h+1}$ homogen wird.

Die letztere Bemerkung ermöglicht uns nun auch, zu entscheiden, ob und wann sich der Grad des Polynoms $\Pi_2(x)$, der, wie wir oben bemerkten, im Allgemeinen gleich m ist, ernied-

1) Den Ausdruck $F(w)\cdot F_1'(w) - F'(w)\cdot F_1(w)$ nennen wir gelegentlich die *Determinante* der beiden conjugirten Functionen $F(w)$ und $F_1(w)$.

rigen kann. Wie man sofort sieht, tritt dieser Fall dann und nur dann ein, wenn von den Grössen $L_1, L_3, L_5, \ldots$ die ersten gleich Null sind; und zwar gilt der

Lehrsatz. *Es seien $F(w)$ und $F_1(w)$ zwei conjugirte doppeltperiodische Functionen zweiter Art mit der einzigen m-fachen singulären Stelle $w = iK'$, und es mögen in der Reihenentwickelung*

$$F(iK' + \varepsilon) = A \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m \{1 + L_1 \varepsilon + L_2 \varepsilon^2 + L_3 \varepsilon^3 + L_4 \varepsilon^4 + \cdots\}$$

die Coefficienten

$$L_1, L_3, L_5, \ldots, L_{2h-1}$$

den Werth Null besitzen, während der Coefficient L_{2h+1} von Null verschieden sei; dann wird der Ausdruck

$$F(w) \cdot F_1'(w) - F'(w) \cdot F_1(w)$$

eine ganze rationale Function von $\operatorname{sn}^2 w$, deren Grad gleich $m - h$ ist.

§ 4.

Identische Relation zwischen den drei Polynomen $\Pi(x)$, $\Pi_1(x)$, $\Pi_2(x)$.

Zwischen den im vorigen Paragraphen eingeführten drei Polynomen $\Pi(x)$, $\Pi_1(x)$ und $\Pi_2(x)$ besteht eine einfache Relation, mit der wir uns im Folgenden beschäftigen wollen.

Zwischen je zwei Functionen $F(w)$ und $F_1(w)$ findet offenbar immer identisch die Beziehung

$$(FF_1' + F'F_1)^2 = (FF_1' - F'F_1)^2 + 4\,FF_1 \cdot F'F_1'$$

statt, welche wir, wenn

$$F(w)\,F_1(w) = \Phi(w), \quad F'(w)\,F_1'(w) = \Phi_1(w),$$
$$F(w)\,F_1'(w) - F'(w)\,F_1(w) = \Phi_2(w)$$

gesetzt wird,

$$\Phi'(w)^2 = \Phi_2(w)^2 + 4\,\Phi(w) \cdot \Phi_1(w)$$

schreiben können. Wenn nun unter $F(w)$ und $F_1(w)$ die beiden in § 3 betrachteten conjugirten doppeltperiodischen Functionen zweiter Art verstanden und auch sonst alle daselbst eingeführten Bezeichnungen beibehalten werden, so haben wir

$$\Phi(w) = AB \cdot \Pi(x), \quad \Phi_1(w) = AB \cdot \Pi_1(x), \quad \Phi_2(w) = 2AB \cdot \Pi_2(x),$$

also

$$\Phi'(w) = 2AB \cdot \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w \cdot \Pi'(x)$$

und infolgedessen

$$\Phi'(w)^2 = 4(AB)^2 \cdot x(1-x)(1-k^2x) \cdot \Pi'(x)^2 ;$$

aus der obigen Beziehung folgt also unter den gegenwärtigen Voraussetzungen die Relation

$$(1) \quad x(1-x)(1-k^2x) \cdot \Pi'(x)^2 = \Pi_2(x)^2 + \Pi(x) \cdot \Pi_1(x) ,$$

welche nunmehr ebenso für jeden beliebigen Werth von x gelten muss, wie die vorige für jeden beliebigen Werth von w richtig war.

Es gilt mithin der

Lehrsatz. *Wenn $F(w)$ und $F_1(w)$ zwei conjugirte doppeltperiodische Functionen zweiter Art mit der einzigen m-fachen singulären Stelle $w = iK'$ sind, so besteht zwischen den drei durch die Formeln*

$$F(w)F_1(w) = AB \cdot \Pi(\operatorname{sn}^2 w) , \quad F'(w)F_1'(w) = AB \cdot \Pi_1(\operatorname{sn}^2 w) ,$$
$$F(w)F_1'(w) - F'(w)F_1(w) = 2AB \cdot \Pi_2(\operatorname{sn}^2 w)$$

definirten Polynomen

$$\Pi(x) \equiv (k^2x)^m + \alpha_1(k^2x)^{m-1} + \alpha_2(k^2x)^{m-2} + \cdots + \alpha_m ,$$
$$\Pi_1(x) \equiv m^2(k^2x)^{m+1} + \beta_1(k^2x)^m + \beta_2(k^2x)^{m-1} + \cdots + \beta_{m+1} ,$$
$$\Pi_2(x) \equiv \gamma_0(k^2x)^m + \gamma_1(k^2x)^{m-1} + \gamma_2(k^2x)^{m-2} + \cdots + \gamma_m$$

identisch, d. h. für jeden beliebigen Werth der unabhängigen Veränderlichen x, die Gleichung

$$(1) \quad x(1-x)(1-k^2x) \cdot \Pi'(x)^2 = \Pi_2(x)^2 + \Pi(x) \cdot \Pi_1(x) .$$ [1]

Nun lautet die Gleichung (1), ausführlich geschrieben,

$$\begin{aligned}\{k^2x^3 - (1+k^2)x^2 + x\}\, k^4 \{ & m(k^2x)^{m-1} \\ & + (m-1)\alpha_1(k^2x)^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-1}\}^2 \\ & = \{\gamma_0(k^2x)^m + \gamma_1(k^2x)^{m-1} + \cdots + \gamma_m\}^2 \\ & + \{(k^2x)^m + \alpha_1(k^2x)^{m-1} + \cdots + \alpha_m\}\{m^2(k^2x)^{m+1} + \beta_1(k^2x)^m \\ & + \cdots + \beta_{m+1}\} ;\end{aligned}$$

---

1) Die Identität (1) hat Herr Hermite in den Comptes rendus, t. 94, p. 477—480, abgeleitet; seine Voraussetzungen waren dabei übrigens specieller, als die dem obigen Satze zu Grunde liegenden, indem er von vornherein unter $F(w)$ und $F_1(w)$ Lösungen einer Lamé'schen Differentialgleichung verstand; die ganze rationale Function $\Pi_2(x)$ reducirt sich dann, wie wir später sehen werden, auf ihr Absolutglied γ_m.

wir können ihr eine einfachere Gestalt geben, wenn wir an Stelle von x das Argument

$$y = k^2 x$$

einführen; sie erhält dann die Form

$$(2)\quad \{y^3-(1+k^2)y^2+k^2y\}\{my^{m-1}+(m-1)\alpha_1 y^{m-2}+\cdots+\alpha_{m-1}\}^2$$
$$= \{\gamma_0 y^m + \gamma_1 y^{m-1} + \cdots + \gamma_m\}^2$$
$$+ \{y^m + \alpha_1 y^{m-1} + \cdots + \alpha_m\}\{m^2 y^{m+1} + \beta_1 y^m + \cdots + \beta_{m+1}\}\,.$$

Bei der vollständigen Integration von Differentialgleichungen, denen durch doppeltperiodische Functionen zweiter Art mit der einzigen m-fachen singulären Stelle $w = iK'$ Genüge geleistet wird, ist der Umstand von Bedeutung, dass zwischen den Coefficienten der Potenzreihe

$$(3)\qquad F(iK'+\varepsilon) = A\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m \{1 + L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 + \cdots\}\,,$$

die man durch Entwickelung einer solchen Function $F(w)$ nach steigenden Potenzen von $w - iK' = \varepsilon$ erhält, gewisse algebraische Relationen stattfinden. In der That, unter diesen Coefficienten können ja, da die allgemeinste derartige Function, wie wir in § 1 bemerkt haben, nur $m+1$ willkürliche Constanten enthält, bloss $m+1$ von einander unabhängig sein; alle übrigen müssen sich durch diese $m+1$ ausdrücken lassen.

Die Bedeutung der Gleichung (1) oder (2) besteht nun darin, dass sie uns ein bequemes Mittel an die Hand giebt, solche Relationen zwischen den Coefficienten der Reihe (3) — und zwar kommen die Coefficienten $L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}, L_{2m+2}$ in Betracht — aufzustellen.

In der That, die Gleichung (2) liefert uns, da sie ausdrückt, dass zwei ganze rationale Functionen $2m+1$-ten Grades von y einander identisch gleich sind, $2m+2$ Relationen zwischen den Coefficienten dieser Functionen. Die erste derselben lautet $m^2 = m^2$, ist also eine blosse Identität, die übrigen $2m+1$ Relationen stellen Beziehungen dar, welche zwischen den Coefficienten

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m;\quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m;\quad \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$$

der drei Polynome $\Pi(x)$, $\Pi_1(x)$, $\Pi_2(x)$ stattfinden. Nun sind, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, die α, β, γ bestimmte ganze rationale Functionen von $L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}$; jede

Beziehung zwischen den ersteren Grössen führt also auf eine Gleichung zwischen den letzteren. Somit gehen aus der Relation (2) im Ganzen $2m+1$ Gleichungen zwischen $L_1, L_2, \ldots L_{2m+2}$ hervor; von diesen sind aber die m ersten blosse Identitäten, sodass wir schliesslich $m+1$ Beziehungen zwischen jenen $2m+2$ Grössen erhalten; und zwar sind diese Beziehungen, wie man sich leicht überzeugen kann, algebraische Gleichungen.

Wir erläutern unsere bisherigen Betrachtungen an einem Beispiel, indem wir $m = 1$ voraussetzen.

Es möge sich also um eine doppeltperiodische Function zweiter Art handeln, welche im Punkte $w = iK'$ von der ersten Ordnung unendlich gross wird, für jeden andern endlichen Werth von w hingegen endlich bleibt, welche also

$$\frac{\vartheta_1(v+\nu)}{\vartheta_0(v)}\, e^{\lambda w - \frac{\vartheta_0'(\nu)}{\vartheta_0(\nu)} v}$$

geschrieben werden kann; wir erhalten dann

$$S_1 = \frac{1}{\varepsilon}\{1 + L_2\varepsilon^2 + L_4\varepsilon^4 + \cdots\}, \quad S_2 = L_1 + L_3\varepsilon^2 + \cdots,$$

und infolgedessen

$$S_1^2 - S_2^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2\{1 + (2L_2 - L_1^2)\varepsilon^2 + \cdots\},$$

$$S_1'^2 - S_2'^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^4\{1 - 2L_2\varepsilon^2 + (-6L_4 + L_2^2)\varepsilon^4 + \cdots\},$$

$$S_1' S_2 - S_1 S_2' = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2\{-L_1 + (-3L_3 + L_1 L_2)\varepsilon^2 + \cdots\}.$$

Zu der fraglichen Function gehören nun drei Polynome

$$\Pi(x) \equiv (k^2x) + \alpha_1, \quad \Pi_1(x) \equiv (k^2x)^2 + \beta_1(k^2x) + \beta_2,$$
$$\Pi_2(x) \equiv \gamma_0(k^2x) + \gamma_1,$$

deren Coefficienten $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1$ auf Grund der Relationen

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2\varepsilon} + \alpha_1 = S_1^2 - S_2^2, \quad \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2\varepsilon}\right)^2 + \beta_1\left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2\varepsilon}\right) + \beta_2 = S_1'^2 - S_2'^2,$$

$$\gamma_0\frac{1}{\operatorname{sn}^2\varepsilon} + \gamma_1 = S_1' S_2 - S_1 S_2'.$$

zu bestimmen sind. Aus diesen aber folgt durch Reihenentwickelung und Coefficientenvergleichung

$$s_2 + \alpha_1 = 2L_2 - L_1^2\,;$$
$$2s_2 + \beta_1 = -2L_2\,, \quad 2s_4 + s_2^2 + s_2 \cdot \beta_1 + \beta_2 = -6L_4 + L_2^2\,;$$
$$\gamma_0 = -L_1\,, \quad s_2 \cdot \gamma_0 + \gamma_1 = -3L_3 + L_1 L_2\,;$$

also ergeben sich die Werthe

$$\alpha_1 = 2L_2 - L_1^2 - s_2\,;$$
$$\beta_1 = -2L_2 - 2s_2\,, \quad \beta_2 = -6L_4 + L_2^2 + 2s_2 \cdot L_2 + s_2^2 - 2s_4\,;$$
$$\gamma_0 = -L_1\,, \quad \gamma_1 = -3L_3 + L_1 L_2 + s_2 \cdot L_1\,.$$

Nun findet zwischen den obigen drei Polynomen die Relation statt

$$y^3 - (1 + k^2)y^2 + k^2 y = (\gamma_0 y + \gamma_1)^2 + (y + \alpha_1)(y^2 + \beta_1 y + \beta_2)\,,$$

welche uns, da sie identisch bestehen muss, die drei Gleichungen

$$-(1 + k^2) = \gamma_0^2 + \alpha_1 + \beta_1\,,$$
$$k^2 = 2\gamma_0\gamma_1 + \alpha_1\beta_1 + \beta_2\,,$$
$$0 = \gamma_1^2 + \alpha_1\beta_2$$

liefert. Substituirt man aber in diese Gleichungen die oben für $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1$ gefundenen Werthe, so geht die erste in eine Identität über, während sich aus den beiden anderen die Relationen

$$k^2 = 2L_1(3L_3 - L_1L_2 - s_2 \cdot L_1) - (2L_2 - L_1^2 - s_2)(2L_2 + 2s_2)$$
$$- 6L_4 + L_2^2 + 2s_2 \cdot L_2 + s_2^2 - 2s_4\,,$$
$$0 = (-3L_3 + L_1L_2 + s_2 \cdot L_1)^2$$
$$+ (2L_2 - L_1^2 - s_2)(-6L_4 + L_2^2 + 2s_2 \cdot L_2 + s_2^2 - 2s_4)$$

ergeben, also zwei algebraische Gleichungen zwischen L_1, L_2, L_3, L_4.

§ 5.

Zusammenhang der Polynome $\Pi(x)$ und $\Pi_2(x)$ mit den ganzen rationalen Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$.

Bei den Betrachtungen, welche wir in den beiden vorangehenden Paragraphen über die Polynome $\Pi(x)$, $\Pi_1(x)$, $\Pi_2(x)$ angestellt haben, ist die Darstellungsform der zu Grunde gelegten doppeltperiodischen Function zweiter Art $F(w)$ gar nicht in Betracht gekommen; im gegenwärtigen Paragraphen, welcher speciell dem Studium der beiden Polynome $\Pi(x)$ und $\Pi_2(x)$ gewidmet sein soll, verlassen wir diesen allgemeinen Standpunkt, indem wir ausdrücklich voraussetzen, dass die Function $F(u)$ in Productdarstellung vorgelegt, also in der Form

$$\frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\cdots\vartheta_1(v+\nu_m)}{\vartheta_0(v)^m}\, e^{\lambda w - \sum_1^m k \frac{\vartheta_0'(\nu_k)}{\vartheta_0(\nu_k)} v}$$

gegeben sei. Es soll sich vor allem darum handeln, die Coefficienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \gamma_0, \ldots \gamma_m$ der beiden fraglichen Polynome, die wir in § 3 durch die Grössen $L_1, L_2, \ldots L_{2m+1}$ auszudrücken gelernt haben, als Functionen von $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m, \lambda$ darzustellen. Dabei wird sich zeigen, dass die bisherigen Betrachtungen als eine Ergänzung von Untersuchungen angesehen werden können, welche der Verfasser in §§ 10—11 seiner Dissertation[1]) angestellt hat; insbesondere wird sich herausstellen, dass die Polynome $\Pi(x)$ und $\Pi_2(x)$ mit den daselbst eingeführten ganzen rationalen Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ im engsten Zusammenhange stehen.

Es sei also

$$F(w) \equiv \frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\cdots\vartheta_1(v+\nu_m)}{\vartheta_0(v)^m}\, e^{\lambda w - \sum_1^m k \frac{\vartheta_0'(\nu_k)}{\vartheta_0(\nu_k)} v},$$

$$F_1(w) \equiv F(-w);$$

dann haben wir, wenn alle in den §§ 3—4 eingeführten Bezeichnungen beibehalten werden,

$$(1) \qquad F(w)\,F_1(w) = A\,B\cdot\Pi(\mathrm{sn}^2 w),$$

$$(2) \qquad F(w)\,F_1'(w) - F'(w)\,F_1(w) = 2\,A\,B\cdot\Pi_2(\mathrm{sn}^2 w),$$

$$\Pi(x) \equiv (k^2x)^m + \alpha_1\cdot(k^2x)^{m-1} + \alpha_2\cdot(k^2x)^{m-2} + \cdots + \alpha_m,$$

$$\Pi_2(x) \equiv \gamma_0\cdot(k^2x)^m + \gamma_1\cdot(k^2x)^{m-1} + \gamma_2\cdot(k^2x)^{m-2} + \cdots + \gamma_m.$$

Andrerseits wollen wir die Function

$$\bar{F}(w) \equiv \frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\cdots\vartheta_1(v+\nu_m)}{\vartheta_0(v)^m}\, e^{-\sum_1^m k \frac{\vartheta_0'(\nu_k)}{\vartheta_0(\nu_k)} v},$$

---

1) Zur Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten. Leipzig 1894.

auf welche sich $F(w)$ für $\lambda = 0$ reducirt, in Betracht ziehen, und auf diese Function die in der citirten Arbeit angestellten Betrachtungen anwenden; d. h. wir wollen mit den m Constanten

$$\omega_1 = 2K' \cdot v_1, \quad \omega_2 = 2K' \cdot v_2, \ldots, \quad \omega_m = 2K' \cdot v_m$$

zunächst die $2m$ Ausdrücke

$$x_k = \operatorname{sn}^2 \omega_k, \quad u_k = \operatorname{sn}\omega_k \operatorname{cn}\omega_k \operatorname{dn}\omega_k \quad [k = 1, 2, \ldots, m]$$

bilden, sodann die m Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ durch die Identität

$$(3)\quad x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots + p_m \equiv (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m)$$

und die m Grössen $U_0, U_1, \ldots, U_{m-1}$ durch die Formeln

$$(4)\quad \begin{cases} U_0 = \sum_1^m {}^k\, u_k, \\ U_1 = \sum_1^m {}^k\, u_k (x_k + p_1), \\ U_2 = \sum_1^m {}^k\, u_k (x_k^2 + p_1 x_k + p_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_{m-1} = \sum_1^m {}^k\, u_k (x_k^{m-1} + p_1 x_k^{m-2} + \cdots + p_{m-1}) \end{cases}$$

definiren, um schliesslich mit diesen Grössen die beiden ganzen rationalen Functionen

$$f(x) \equiv x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots + p_m,$$
$$\varphi(x) \equiv U_0 x^{m-1} + U_1 x^{m-2} + \cdots + U_{m-1}$$

zu bilden. Dann bestehen, wie a. a. O. gezeigt worden ist, die m Relationen

$$\frac{\varphi(x_k)}{f'(x_k)} = u_k \quad [k = 1, 2, \ldots, m];$$

aus diesen aber folgt nach den bekannten Principien der Partialbruchzerlegung von echt gebrochenen rationalen Functionen die Formel

$$(5)\quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum_1^m {}^k\, \frac{u_k}{x - x_k}.$$

Auf Grund dieser Festsetzungen werden wir nunmehr zeigen, dass zwischen $\Pi(x)$, $\Pi_2(x)$ einerseits und $f(x)$, $\varphi(x)$ andrerseits die Relationen

$$\Pi(x) = k^{2m} \cdot f(x)\,, \tag{6}$$

$$\Pi_2(x) = k^{2m} \cdot [\varphi(x) - \lambda f(x)] \tag{7}$$

stattfinden, durch welche die im Anfang des gegenwärtigen Paragraphen gestellte Aufgabe ihre Erledigung findet.

Zu diesem Zwecke bedenken wir zunächst, dass

$$F(-\omega_k) = 0\,, \quad F_1(\omega_k) = 0 \quad [k = 1, 2, \ldots, m]$$

ist, dass also vermöge der Beziehung (1) die m Relationen

$$\Pi(\operatorname{sn}^2 \omega_k) = 0 \quad [k = 1, 2, \ldots, m]$$

bestehen; diese drücken zufolge der obigen Festsetzungen aus, dass die algebraische Gleichung m-ten Grades $\Pi(x) = 0$ die m Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_m$ besitzt, und hieraus folgt nach einem bekannten Fundamentalsatz der Algebra

$$\Pi(x) = k^{2m} \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)\,,$$

wofür wir kürzer

$$\Pi(x) = k^{2m} \cdot f(x) \tag{6}$$

schreiben können.

Um auch zu der Relation (7) zu gelangen, gehen wir von der bekannten für die Function $F(w)$ bestehenden Formel

$$\frac{F'(w)}{F(w)} = \lambda + \sum_1^m{}_k \frac{\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w - u_k}{\operatorname{sn}^2 w - x_k}$$

aus. Erinnern wir uns, dass $F_1(w) \equiv F(-w)$, und infolgedessen $F_1'(w) \equiv -F'(-w)$ ist, so erkennen wir, dass für die Function $F_1(w)$ die analoge Formel

$$\frac{F_1'(w)}{F_1(w)} = -\lambda + \sum_1^m{}_k \frac{\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w + u_k}{\operatorname{sn}^2 w - x_k}$$

gilt. Durch Subtraction ergiebt sich dann

$$\frac{F(w)\,F_1'(w) - F'(w)\,F_1(w)}{F(w)\,F_1(w)} = -2\lambda + \sum_1^m{}_k \frac{2 u_k}{\operatorname{sn}^2 w - x_k}\,,$$

und hieraus folgt wegen (2) die Gleichung

$$\frac{2\,\Pi_2(\operatorname{sn}^2 w)}{\Pi(\operatorname{sn}^2 w)} = -2\lambda + 2\sum_1^m{}_k \frac{u_k}{\operatorname{sn}^2 w - x_k}\,,$$

oder also

$$\frac{\Pi_2(x)}{\Pi(x)} = -\lambda + \sum_1^m {}_k \frac{u_k}{x - x_k}.$$

Die letztere Relation liefert uns, in Verbindung mit den oben aufgestellten Gleichungen (5), die Beziehung

$$\frac{\Pi_2(x)}{\Pi(x)} = -\lambda + \frac{\varphi(x)}{f(x)};$$

und aus dieser ergiebt sich mit Rücksicht auf die bereits bewiesene Formel (6) die Relation

$$(7) \qquad \Pi_2(x) = k^{2m} \cdot [\varphi(x) - \lambda f(x)].$$

Wir erhalten somit den

Lehrsatz. *Die den beiden conjugirten doppeltperiodischen Functionen zweiter Art*

$$F(w) \equiv \frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\cdots\vartheta_1(v+\nu_m)}{\vartheta_0(v)^m} e^{\lambda w - \sum_1^m {}_k \frac{\vartheta_0'(\nu_k)}{\vartheta_0(\nu_k)} v}, \quad F_1(w) \equiv F(-w)$$

durch die Relationen

$$(1) \qquad F(w)\, F_1(w) = AB \cdot \Pi(\mathrm{sn}^2 w),$$

$$(2) \qquad F(w)\, F_1'(w) - F'(w)\, F_1(w) = 2AB \cdot \Pi_2(\mathrm{sn}^2 w)$$

zugeordneten Polynome

$$\Pi(x) \equiv (k^2 x)^m + \alpha_1 (k^2 x)^{m-1} + \cdots + \alpha_m,$$
$$\Pi_2(x) \equiv \gamma_0 (k^2 x)^m + \gamma_1 (k^2 x)^{m-1} + \cdots + \gamma_m$$

hängen mit den beiden der doppeltperiodischen Function zweiter Art

$$\bar F(w) \equiv \frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\cdots\vartheta_1(v+\nu_m)}{\vartheta_0(v)^m} e^{- \sum_1^m {}_k \frac{\vartheta_0'(\nu_k)}{\vartheta_0(\nu_k)} v}, \quad \bar F_1(w) \equiv \bar F(-w)$$

vermöge der oben reproducirten Formeln zugeordneten ganzen rationalen Functionen

$$f(x) \equiv x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots + p_m,$$
$$\varphi(x) \equiv U_0 x^{m-1} + U_1 x^{m-2} + \cdots + U_{m-1}$$

durch die Relationen

$$(6) \qquad \Pi(x) = k^{2m} \cdot f(x),$$

$$(7) \qquad \Pi_2(x) = k^{2m} \cdot [\varphi(x) - \lambda f(x)]$$

zusammen.

Wir wollen bei diesem Satze, durch welchen das Studium der Ausdrücke $\Pi(x)$ und $\Pi_2(x)$ mit der Theorie der ganzen rationalen Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ in Verbindung gebracht wird, einen Augenblick stehen bleiben, um seine Bedeutung nach beiden Seiten hin genauer festzustellen.

Zu den Polynomen $\Pi(x)$ und $\Pi_2(x)$ waren wir gelangt, indem wir mit den beiden conjugirten doppeltperiodischen Functionen zweiter Art $F(w)$ und $F_1(w)$ die Ausdrücke

$$F(w)\,F_1(w) \quad \text{und} \quad F(w)\,F_1'(w) - F'(w)\,F_1(w)$$

bildeten und dieselben als Functionen von $x = \operatorname{sn}^2 w$ darstellten. Die Coefficienten

(A) $$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; \quad \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$$

dieser Polynome hatten wir zunächst [in § 3] durch die Coefficienten $L_1, L_2, L_3 \ldots L_{2m+1}$ der Reihenentwickelung

$$F(iK' + \varepsilon) = A \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m \{1 + L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 + \cdots\}$$

ausgedrückt; da aber die letzteren ihrerseits von den in der Function $F(w)$ enthaltenen Constanten

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \lambda$$

abhängen, so müssen sich auch die Grössen (A) durch diese $m+1$ Constanten darstellen lassen. *Unser Lehrsatz nun liefert uns unmittelbar diese Darstellung;* denn aus den Gleichungen (6) und (7) folgen die Relationen

(8) $$\alpha_1 = k^2 p_1, \quad \alpha_2 = k^4 p_2, \ldots, \quad \alpha_m = k^{2m} p_m,$$

(9) $$\gamma_0 = -\lambda, \quad \gamma_1 = k^2(U_0 - \lambda p_1), \quad \gamma_2 = k^4(U_1 - \lambda p_2), \ldots,$$
$$\gamma_m = k^{2m}(U_{m-1} - \lambda p_m),$$

und diese drücken, da $p_1, p_2, \ldots, p_m, U_0, U_1, \ldots, U_{m-1}$ bekannte Functionen von $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ sind[1]), die Grössen (A) durch $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \lambda$ aus. — Dabei ist der Umstand von Interesse, dass sich die Grössen (A) bequemer durch $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \lambda$ darstellen lassen, als die Coefficienten $L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}$ selbst; denn jene Grössen sind uns vermöge der Relationen (8) und (9) explicite als Functionen von $p_1, \ldots, p_m, \lambda, U_0, \ldots U_{m-1}$

1) Vergl. die auf S. 24 gegebene Definition dieser Functionen.

gegeben, während wir bezüglich dieser Coefficienten nicht viel mehr wissen, als dass sie ganz und rational von den letzteren Grössen abhängen [1]). — Noch ein weiterer Schluss lässt sich aus unseren Ergebnissen ziehen: In § 3 hatten wir gesehen, dass die $2m+1$ Grössen

$$\text{(A)} \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; \quad \gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_m$$

ganze rationale Functionen der $2m+1$ Grössen

$$\text{(B)} \qquad L_1, L_2, \ldots L_{2m}, L_{2m+1}$$

sind; jetzt können wir hinzufügen, dass sich auch umgekehrt die $2m+1$ Grössen (B) ganz und rational durch die $2m+1$ Grössen (A) ausdrücken lassen. Denn wir wissen, dass $L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}$ als ganze rationale Functionen von

$$\lambda, p_1, U_0, p_2, U_1, \ldots, p_m, U_{m-1}$$

darstellbar sind [2]); hieraus aber folgt, da vermöge (8) und (9)

$$\begin{aligned}
\lambda &= -\gamma_0, & p_1 &= \frac{\alpha_1}{k^2}, \\
U_0 &= \frac{\gamma_1 - \gamma_0 \cdot \alpha_1}{k^2}, & p_2 &= \frac{\alpha_2}{k^4}, \\
U_1 &= \frac{\gamma_2 - \gamma_0 \cdot \alpha_2}{k^4}, & &\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots, & p_m &= \frac{\alpha_m}{k^{2m}}, \\
U_{m-1} &= \frac{\gamma_m - \gamma_0 \cdot \alpha_m}{k^{2m}}
\end{aligned}$$

ist, die Richtigkeit der obigen Behauptung.

---

1) Aus den in der erwähnten Dissertation, Seite 48—50, angestellten Betrachtungen erhalten wir durch einige einfache Schlüsse den folgenden

Lehrsatz. *Bezeichnet man die Grössen* $\lambda, p_1, U_0, p_2, U_1, \ldots, p_m, U_{m-1}$ *der Reihe nach durch* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2m+1}$, *so wird*

L_1	*eine ganze rationale Function von*	σ_1,
L_2	» » » » »	σ_2 *und* σ_1,
L_3	» » » » »	$\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$,
. . .	. . . .	. . .
L_{2m+1}	» » » » »	$\sigma_{2m+1}, \sigma_{2m}, \ldots, \sigma_1$,

dabei kann aber die Grösse σ_h *in den Coefficienten* $L_h, \ldots, L_{2h-1}$ *nur linear vorkommen.*

2) Vergl. die vorige Fussnote.

Im Gegensatz zu den Polynomen $\Pi(x)$ und $\Pi_2(x)$ sind die beiden ganzen rationalen Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$, — namentlich aber die letztere, — in rein formaler Weise definirt worden. Unter $f(x)$ wurde der Ausdruck

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m),$$

unter $\varphi(x)$ hingegen dasjenige Polynom

$$U_0 x^{m-1} + U_1 x^{m-2} + \cdots + U_{m-1}$$

verstanden, dessen Coefficienten die durch die Formeln (4) in Verbindung mit der Identität (3) gegebenen Werthe besitzen[1].

Verstehen wir nun unter $\overline{F}_1(w)$ die zu $\overline{F}(w)$ conjugirte doppeltperiodische Function zweiter Art und bezeichnen die den beiden Functionen zugeordneten Polynome $\Pi(x)$ und $\Pi_2(x)$ bez. durch $\overline{\Pi}(x)$ und $\overline{\Pi}_2(x)$, so ist klar, dass die durch (1) und (2) definirten Polynome $\Pi(x)$ und $\Pi_2(x)$ bez. in $\overline{\Pi}(x)$ und $\overline{\Pi}_2(x)$ übergehen, wenn $\lambda = 0$ ist. Aus den Gleichungen (6) und (7) ergeben sich infolgedessen die Relationen

$$\overline{\Pi}(x) = k^{2m}\cdot f(x), \quad \overline{\Pi}_2(x) = k^{2m}\cdot\varphi(x),$$

oder also

---

1) Auf die Function $\varphi(x)$ war der Verfasser ursprünglich folgendermassen geführt worden: Es hatte sich gezeigt [vergl. a. a. O., Seite 48], dass die Coefficienten $K_2, K_3, \ldots$ der Reihenentwickelung

$$\overline{F}(iK' + \varepsilon) = C\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m\{1 + K_2\varepsilon^2 + K_3\varepsilon^3 + \cdots\}$$

die Constanten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ nur in den $2m$ Verbindungen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ und $q_0, q_1, \ldots, q_{m-1}$ enthalten, von denen die ersteren durch die Identität (3), die letzteren durch die Gleichungen

$$q_0 = \sum_1^m{}_k\, u_k, \quad q_1 = \sum_1^m{}_k\, u_k x_k, \ldots, \quad q_{m-1} = \sum_1^m{}_k\, u_k x_k^{m-1}$$

gegeben sind. Diese in Bezug auf die Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ linearen Gleichungen mussten nun nach denselben aufgelöst werden; dabei ergab sich u_k in Form eines Bruchs; der Nenner desselben war gleich $f'(x_k)$; der Zähler aber konnte nach einigen Umformungen gleichfalls als eine ganze rationale Function $m-1$-ten Grades von x_k dargestellt werden, deren Coefficienten unabhängig vom Index k waren; diese ganze rationale Function wurde durch $\varphi(x_k)$ bezeichnet. — Uebrigens können, wie oben hervorgehoben worden ist, die m Formeln $u_k f'(x_k) = \varphi(x_k)$ durch die eine Relation (5) ersetzt werden, welche wir somit als die eigentliche Definitionsgleichung der ganzen rationalen Function $\varphi(x)$ ansehen können.

$$(10) \qquad f(x) = \frac{1}{k^{2m}} \cdot \Pi(x)\,, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{k^{2m}} \cdot \overline{\Pi}_2(x)\,.$$

Demnach sind die beiden Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$, abgesehen von constanten Factoren, bez. gleich $\overline{F}(w)\overline{F}_1(w)$ und $\overline{F}(w)\overline{F}'_1(w) - \overline{F}'(w)\overline{F}_1(w)$.

Unser Lehrsatz bringt also einerseits das Studium der *auf begrifflichem Wege* eingeführten Polynome $\Pi(x)$ und $\Pi_2(x)$ zu einem gewissen *formalen* Abschluss, indem er es ermöglicht, die Coefficienten dieser Polynome durch die ursprünglichen Parameter $\nu_1, \nu_2 \ldots, \nu_m, \lambda$ auszudrücken; andrerseits aber liefert er für die zunächst in rein *formaler* Weise definirten ganzen rationalen Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ eine *begriffliche* Deutung, indem er zeigt, dass durch erstere das Product, durch letztere die Determinante der beiden conjugirten Functionen $\overline{F}(w)$ und $\overline{F}(-w)$ dargestellt wird.

Anmerkung. — Aus den Relationen $u_k \cdot f'(x_k) = \varphi(x_k)$ war a. a. O., Seite 55, der Schluss gezogen worden, dass der algebraischen Gleichung $2m+1$-ten Grades $x(1-x)(1-k^2x)\cdot f'(x)^2 - \varphi(x)^2 = 0$ durch die sämmtlichen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_m$ der algebraischen Gleichung m-ten Grades $f(x) = 0$ Genüge geleistet wird; daraus folgte dann weiter das Bestehen einer identischen Gleichung von der Form

$$x(1-x)(1-k^2x)\cdot f'(x)^2 = \varphi(x)^2 + f(x)\cdot f_1(x)\,,$$

in welcher $f_1(x)$ eine gewisse ganze rationale Function $m+1$-ten Grades von x bedeutet. Dieses Ergebniss erhält nach dem Aufschluss, den uns der obige Lehrsatz über die Bedeutung der Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ liefert, einen begrifflichen Inhalt; die obige Identität bringt nichts anderes, als den auf die Functionen $\overline{F}(w)$ und $\overline{F}_1(w)$ angewandten Lehrsatz des vorigen Paragraphen zum Ausdruck, und die Function $f_1(x)$ stellt, von einem constanten Factor abgesehen, das Product $\overline{F}'(w)\overline{F}'_1(w)$ dar.

§ 6.

Erledigung eines auf die Darstellungsformen der unipolaren doppeltperiodischen Functionen zweiter Art bezüglichen algebraischen Problems.

Es möge wiederum $F(w)$ eine doppeltperiodische Function zweiter Art sein, welche im Punkte $w = iK'$ von der m-ten

Ordnung unendlich gross wird, während sie für jeden andern endlichen Werth von w endlich bleibt. Dann kann $F(w)$ im Allgemeinen sowohl in die Form

$$(1)\qquad \frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\cdots\vartheta_1(v+\nu_m)}{\vartheta_0(v)^m}\, e^{\lambda w - \sum_1^m {}_k \frac{\vartheta_0'(\nu_k)}{\vartheta_0(\nu_k)} v},$$

als auch in die Form

$$(2)\left\{\begin{aligned} &\frac{\psi^{(m-1)}(w)}{(m-1)!}+B_1\cdot\frac{\psi^{(m-2)}(w)}{(m-2)!}+B_2\cdot\frac{\psi^{(m-3)}(w)}{(m-3)!}+\cdots+B_{m-1}\cdot\psi(w),\\ &\qquad\qquad \psi(w)\equiv\frac{\vartheta_1(v+\nu)}{\vartheta_0(v)}\, e^{Aw-\frac{\vartheta_0'(\nu)}{\vartheta_0(\nu)}v}\end{aligned}\right.$$

gebracht werden; in jedem Falle aber lässt sich der Ausdruck $F(iK'+\varepsilon)$, von einem constanten Factor abgesehen, durch eine unendliche Reihe von der Form

$$(3)\qquad \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m\{1+L_1\varepsilon+L_2\varepsilon^2+\cdots\}$$

darstellen.

Wir stellen nun die Frage, wie man, sobald eine genügende Anzahl der Coefficienten $L_1, L_2, \ldots$ bekannt ist, die Constanten

$$(\mathrm{I})\qquad \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \lambda$$

und die Constanten

$$(\mathrm{II})\qquad B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}, \nu, A$$

findet.

[Diese Frage ist bei der Integration von homogenen linearen Differentialgleichungen von grösster Bedeutung; denn sobald einer vorgelegten derartigen Differentialgleichung durch eine Function $F(w)$ von der obigen Beschaffenheit Genüge geleistet wird, können wir — durch blosse Auflösung linearer Gleichungen — von den entsprechenden Coefficienten $L_1, L_2, L_3, \ldots$ beliebig viele berechnen, und es entsteht dann die Aufgabe, aus diesen Coefficienten entweder die Werthe der Grössen (I) oder die Werthe der Grössen (II) zu finden.]

Es fragt sich nun, wie viele von den Coefficienten $L_1, L_2, L_3, \ldots$ wir als bekannt annehmen wollen bez. müssen.

Zur Bestimmung der Constanten (I) oder (II) sind $m+1$ Gleichungen erforderlich; von den obigen Coefficienten müssen daher notwendig entweder $m+1$ oder mehr als $m+1$ gegeben sein. Im ersten Falle können alle diese Coefficienten beliebige Werthe besitzen; im zweiten Falle dagegen dürfen höchstens $m+1$ Coefficienten willkürlich angenommen werden, während die Werthe der übrigen dann gewissen Bedingungen zu genügen haben[1]).

Wenn z. B. $L_1, L_2, \ldots, L_{m+1}$ gegeben sind, so liegt der erste Fall vor; es zeigt sich aber, dass die Bestimmung der Constanten (I) und (II) dann keine eindeutige ist, dass sich vielmehr für die fraglichen Constanten mehrere Werthsysteme ergeben, wie man am besten durch Betrachtung einfacher Specialfälle, wie $m=1$, $m=2$, erkennt.

Wenn hingegen etwa $L_1, L_2, \ldots L_{2m}, L_{2m+1}$ gegeben sind, so haben wir den zweiten Fall vor uns; die Werthe dieser Grössen sind also, falls die Bestimmung der Constanten (I) und (II) überhaupt möglich sein soll, gewissen Bedingungen unterworfen. Sind aber diese Bedingungen erfüllt, so ergiebt sich, wie wir sehen werden, sowohl für die Constanten (I), als auch für die Constanten (II) nur je ein Werthsystem; die einen wie die anderen sind also eindeutig bestimmt.

Mit diesem Fall wollen wir uns jetzt näher beschäftigen; wir setzen also voraus, dass ein den fraglichen Bedingungen Genüge leistendes System von Werthen der Coefficienten

$$L_1, L_2, L_3, \ldots, L_{2m+1}$$

gegeben sei, und suchen nun die zugehörigen Werthe der Constanten (I) und der Constanten (II) zu bestimmen; insbesondere werden wir unser Augenmerk auf den Umfang und die Schwierigkeit der zur Lösung dieser beiden Aufgaben erforderlichen *algebraischen Operationen* richten. Dabei sollen alle in den drei vorangehenden Paragraphen eingeführten Bezeichnungen beibehalten werden.

Wenn es sich darum handelt, die Werthe von

$$\text{(I)} \qquad \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \lambda$$

zu ermitteln, so erinnern wir uns, dass die m Grössen

$$x_k = \operatorname{sn}^2 \omega_k \quad [k = 1, 2, \ldots, m]$$

1) Vergl. betreffs dieser Bedingungen den § 4.

die Wurzeln der algebraischen Gleichung m-ten Grades

$$(4) \qquad f(x) \equiv x^m + p_1 x^{m-1} + \cdots + p_m = 0$$

sind, und dass die m Grössen

$$u_k = \operatorname{sn}\omega_k \operatorname{cn}\omega_k \operatorname{dn}\omega_k \quad [k = 1, 2, \ldots, m]$$

den Gleichungen

$$(5)\ u_k = \frac{U_0 x_k^{m-1} + U_1 x_k^{m-2} + \cdots + U_{m-1}}{f'(x_k)} \quad [k = 1, 2, \ldots, m]$$

Genüge leisten. Denn infolge § 5 sind $p_1, p_2, \ldots, p_m$ und $U_0, U_1, \ldots, U_{m-1}$ ganz und rational durch $L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}$ ausdrückbar, wir können also $x_1, x_2, \ldots, x_m$ durch Auflösung der Gleichung (4) finden und nachher die Vorzeichen von $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, welche ja durch Auffindung der Werthe von $\operatorname{sn}^2\omega_1, \operatorname{sn}^2\omega_2, \ldots, \operatorname{sn}^2\omega_m$ noch nicht bestimmt sind, auf Grund der Gleichungen (5) ermitteln. — Die Grösse λ endlich besitzt, wie wir wissen, den Werth L_1, ist also unmittelbar bekannt.

Wir haben mithin den

Lehrsatz: *Durch die Forderung, dass in der Reihe*

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m \{1 + L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 + L_3\varepsilon^3 + \cdots\},$$

welche man durch Entwickelung der Function

$$\frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\cdots\vartheta_1(v+\nu_m)}{\vartheta_0(v)^m}\, e^{\lambda w - \sum_k^m \frac{\vartheta_0'(\nu_k)}{\vartheta_0(\nu_k)} v}$$

nach steigenden Potenzen von $w - iK' = \varepsilon$ erhält, die Coefficienten

$$L_1, L_2, \ldots, L_{2m}, L_{2m+1}$$

vorgeschriebene Werthe besitzen sollen [die dann gewissen Bedingungen zu genügen haben], sind die in dieser Function enthaltenen Constanten

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \lambda$$

eindeutig bestimmt[1]). *Zur Ermittelung derselben ist u. a. die Auflösung einer algebraischen Gleichung m-ten Grades erforderlich.*

1) Dabei wird allerdings von derjenigen Vieldeutigkeit der Grössen ν_k, welche aus der Periodicität von $\operatorname{sn}^2 w$ und $\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w$ resultirt, abgesehen; dies kann aber um so eher geschehen, als die obige Function selbst, auf deren Bestimmung es ja schliesslich ankommt, von dieser Vieldeutigkeit nicht berührt wird, sondern thatsächlich eindeutig bestimmt ist.

Wesentlich anders gestaltet sich die Ermittelung der Constanten

(II) $$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{m-1},\ \nu,\ \Delta.$$

Die Bestimmung von $B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}$ bietet keinerlei Schwierigkeit; entwickelt man den Ausdruck (2) nach Potenzen von $w - iK' = \varepsilon$ und vergleicht die erhaltene Reihe mit (3), so ergeben sich die Werthe

(6) $$B_1 = -L_1,\quad B_2 = +L_2,\ \ldots\ B_{m-1} = (-1)^{m-1}\cdot L_{m-1}.$$

Um auch $\omega = 2K\cdot\nu$ und Δ zu finden, stellen wir zunächst eine Hilfsbetrachtung an[1]).

Die doppeltperiodische Function zweiter Art

$$\psi(w) \equiv \frac{\vartheta_1(v+\nu)}{\vartheta_0(v)}\, e^{\Delta w - \frac{\vartheta_0'(\nu)}{\vartheta_0(\nu)} v}$$

muss, da durch den Ausdruck

$$\frac{\psi^{(m-1)}(w)}{(m-1)!} + B_1\cdot\frac{\psi^{(m-2)}(w)}{(m-2)!} + \cdots + B_{m-2}\cdot\frac{\psi'(w)}{1!} + B_{m-1}\cdot\psi(w)$$

die Function $F(w)$ dargestellt werden soll, dieselben Multiplicatoren besitzen, wie die letztere. Infolge dessen ist der Ausdruck

$$F(-w)\cdot\psi(w)$$

eine doppeltperiodische Function erster Art, welche im Punkte $w = iK'$ von der $m+1$-ten Ordnung unendlich gross wird, für jeden andern endlichen Werth von w aber endlich bleibt. Wir sind daher berechtigt,

(7) $$F(-w)\cdot\psi(w) = \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w \cdot G(\operatorname{sn}^2 w) + H(\operatorname{sn}^2 w)$$

zu setzen, wobei G und H ganze rationale Functionen von $\operatorname{sn}^2 w$ bedeuten [vergl. § 2], und zwar wird

$$G \text{ vom } \frac{m-3}{2}\text{-ten und } H \text{ vom } \frac{m+1}{2}\text{-ten Grade},$$

wenn m eine ungerade, dagegen

$$G \text{ vom } \frac{m-2}{2}\text{-ten und } H \text{ vom } \frac{m}{2}\text{-ten Grade},$$

1) Vergl. hierzu Hermite, C. R., t. 94, p. 594; Sparre, Acta mathematica, Bd. III, und Halphén, Traité des fonctions elliptiques, t. II, p. 506.

wenn m eine gerade Zahl ist. In jedem Falle wird also die Summe der Grade von G und H gleich $m - 1$.

Die Coefficienten dieser beiden Polynome können aber leicht gefunden werden.

Der Ausdruck $F(-w)$ muss ja, da die Function $F(w)$ auch in der Form (1) darstellbar ist, für m Werthe von w, nämlich für $w = \omega_1$, $w = \omega_2$, ..., $w = \omega_m$ verschwinden; aus Gleichung (7) folgen also die Relationen

$$\operatorname{sn}\omega_k \operatorname{cn}\omega_k \operatorname{dn}\omega_k \cdot G(\operatorname{sn}^2\omega_k) + H(\operatorname{sn}^2\omega_k) = 0 \quad [k = 1, 2, \ldots, m],$$

welche wir, unter Benutzung unserer früheren Abkürzungen,

$$u_k \cdot G(x_k) + H(x_k) = 0 \qquad [k = 1, 2, \ldots, m]$$

schreiben wollen. Aus diesen Relationen aber können wir, da andrerseits

$$u_k \cdot f'(x_k) - \varphi(x_k) = 0 \quad [k = 1, 2, \ldots, m]$$

ist, schliessen, dass

$$G(x_k) \cdot \varphi(x_k) + H(x_k) \cdot f'(x_k) = 0 \quad [k = 1, 2, \ldots, m]$$

wird, dass also der algebraischen Gleichung

$$G(x) \cdot \varphi(x) + H(x) \cdot f'(x) = 0$$

die m Wurzeln der Gleichung

$$(4) \qquad f(x) = 0$$

Genüge leisten. Hieraus folgt weiter, dass zwischen den ganzen rationalen Functionen $G(x)$, $H(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$ identisch eine Relation von der Form

$$(8) \qquad G(x) \cdot \varphi(x) + H(x) \cdot f'(x) = W(x) \cdot f(x)$$

stattfinden muss, in welcher W eine ganze rationale Function von x bedeutet, deren Grad gleich $\frac{m-1}{2}$ oder gleich $\frac{m-2}{2}$ ist, je nachdem m eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

Die Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$, d. h. die Grössen p_1, ..., p_m und U_0, U_1, ..., U_{m-1} sind aber, da wir sie zufolge § 5 ganz und rational durch L_1, L_2, ..., L_{2m+1} ausdrücken können, als bekannt anzusehen; die Relation (8) liefert uns infolgedessen ein Mittel, die gesuchten Coefficienten von $G(x)$ und $H(x)$ zu finden. Denn diese Relation zerfällt, da sie identisch, d. h. für jeden Werth von x bestehen muss, in ein System von Gleichungen, welche in Bezug auf die unbekannten Coefficienten der drei Polynome $G(x)$, $H(x)$, $W(x)$ homogen und linear sind, und diese Coefficienten, wie man sofort sieht, bis auf einen ihnen allen gemeinschaftlichen Factor bestimmen.

Durch die Kenntniss der beiden Polynome G und H sind wir auch in den Stand gesetzt, die Grössen ν und Δ zu finden. Zu den Werthen derselben können wir z. B. gelangen, wenn wir beide Seiten der Gleichung (7) nach Potenzen von $w - iK' = \varepsilon$ entwickeln und nachher die Coefficienten entsprechender Potenzen vergleichen. Auf der rechten Seite erhalten wir, da die Polynome $G(\operatorname{sn}^2 w)$ und $H(\operatorname{sn}^2 w)$ bis auf einen gemeinschaftlichen constanten Factor bestimmt sind,

$$\begin{aligned}&\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w \cdot G(\operatorname{sn}^2 w) + H(\operatorname{sn}^2 w)\\ &= \frac{D}{\varepsilon^{m+1}}\{R_0 + R_1\varepsilon + R_2\varepsilon^2 + R_3\varepsilon^3 + \cdots\},\end{aligned}$$

wobei die Coefficienten $R_0, R_1, R_2, \ldots$ als bekannt angesehen werden können[1]), während D jenen constanten Factor bedeutet. Die Entwickelung der linken Seite ergiebt sich als Product der beiden Reihen

$$\frac{B}{\varepsilon^m}\{1 - L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 - L_3\varepsilon^3 \pm \cdots\}$$

und

$$\begin{aligned}&\frac{C}{\varepsilon}\Big\{1 + \Delta\varepsilon + \left(\frac{\Delta^2}{2} + \frac{1+k^2}{6} - \frac{1}{2}k^2\operatorname{sn}^2\omega\right)\varepsilon^2\\ &+\left(\frac{\Delta^3}{6} + \Delta\left[\frac{1+k^2}{6} - \frac{1}{2}k^2\operatorname{sn}^2\omega\right] - \frac{1}{3}k^2\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega\right)\varepsilon^3 + \cdots\Big\},\end{aligned}$$

in denen B und C constante Factoren sind. — Substituiren wir nun diese Entwickelungen in (7) und vergleichen die Coefficienten von ε^{-m-1}, ε^{-m}, ε^{-m+1}, ε^{-m+2}, so können wir aus den erhaltenen Relationen die Constanten B, C, D eliminiren und erhalten dann die drei Grössen Δ, $\operatorname{sn}^2\omega$ und $\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega$ rational durch $L_1, L_2, L_3, R_0, R_1, R_2, R_3$ ausgedrückt.

Damit sind wir am Ziel.

---

1) Wie man leicht übersieht, sind diese Coefficienten rational durch $L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}$ darstellbar; denn sie sind ganze rationale Functionen der Coefficienten von $G(x)$ und $H(x)$, und diese ergeben sich vermöge der Gleichung (8) rational durch $p_1, \ldots, p_m, U_0, \ldots, U_{m-1}$ ausgedrückt.

Anmerkung. — Herr de Sparre hat sich zur Bestimmung der Grössen ν und A eines andern, sehr eleganten Verfahrens bedient, bei welchem er ausser der Gleichung (7) noch die durch Vertauschung von w mit $-w$ aus dieser hervorgehende Relation

$$(7') \quad F(w)\cdot\psi(-w) = -\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w \cdot G(\operatorname{sn}^2 w) + H(\operatorname{sn}^2 w)$$

benutzt [1]. Durch Multiplication beider Gleichungen ergiebt sich die Beziehung

$$\begin{aligned} &A\cdot f(x)\cdot[x - \operatorname{sn}^2\omega] \\ &= -x(1-x)(1-k^2x)\cdot G(x)^2 + H(x)^2 \quad [A \text{ constant}], \end{aligned}$$

welche, da die Coefficienten der Polynome $f(x)$, $G(x)$, $H(x)$ bekannt sind, die Grösse $\operatorname{sn}^2\omega$ eindeutig bestimmt. Setzt man ferner in Gleichung (7) $w = -\omega$ oder in Gleichung (7') $w = +\omega$, so folgt die Relation

$$-\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega \cdot G(\operatorname{sn}^2\omega) + H(\operatorname{sn}^2\omega) = 0 ,$$

durch welche die Grösse $\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega$ eindeutig bestimmt ist. Wenn man schliesslich die beiden Gleichungen durch einander dividirt, sodann die entstehende Relation logarithmisch differenzirt und schliesslich in derselben $w = iK'$ setzt, so ergiebt sich auch λ rational durch die Coefficienten von $G(\operatorname{sn}^2 w)$ und $H(\operatorname{sn}^2 w)$ ausgedrückt.

Es gilt somit der

Lehrsatz. *Durch die Forderung, dass in der Reihe*

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m \{1 + L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 + L_3\varepsilon^3 + \cdots\} ,$$

welche man durch Entwickelung der Function

$$\frac{\psi^{(m-1)}(w)}{(m-1)!} + B_1\cdot\frac{\psi^{(m-2)}(w)}{(m-2)!} + B_2\cdot\frac{\psi^{(m-3)}(w)}{(m-3)!} + \cdots + B_{m-1}\cdot\psi(w),$$

$$\psi(w) \equiv \frac{\vartheta_1(v+\nu)}{\vartheta_0(v)}\, e^{Aw - \frac{\vartheta_0'(\nu)}{\vartheta_0(\nu)}v}$$

nach steigenden Potenzen von $w - iK' = \varepsilon$ erhält, die Coefficienten

$$L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}$$

vorgeschriebene Werthe besitzen sollen [die dann gewissen Bedingungen zu genügen haben], sind die in dieser Function ent-

---

[1] Acta mathematica, Bd. III, Seite 135—138.

haltenen Constanten $B_1, \ldots, B_{m-1}, \nu, \Delta$ *eindeutig bestimmt*[1]). *Die Ermittelung derselben erfordert keine andern algebraischen Operationen, als die Auflösung linearer Gleichungen.*

Wir sehen also, dass die Auffindung der Constanten $\nu_1, \ldots \nu_m, \lambda$, sobald $L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}$ bekannt sind, mit grösseren algebraischen Schwierigkeiten verbunden ist, als die Ermittelung von $B_1, B_2, \ldots B_{m-1}, \nu, \Delta$.

Anmerkung. — Auch noch in anderer Beziehung ist die erste Aufgabe schwieriger als die zweite. In der That, sobald die Grösse $\operatorname{sn} \omega_k$ gefunden ist, erfordert ja die Bestimmung von ω_k noch eine Quadratur. Diese Quadratur aber haben wir, um die Grössen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ zu finden, m-mal, um dagegen die Grösse ν zu bestimmen, nur einmal auszuführen.

Wie man eine doppeltperiodische Function zweiter Art $F(w)$, welche uns in der Productform (1) gegeben ist, in die Summenform (2) bringen kann, ist nun ebenfalls klar; in beiden Fällen hat man zunächst die Coefficienten $L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}$, welche sich stets eindeutig durch die gegebenen Constanten darstellen lassen, zu berechnen und nachher in der vorhin angegebenen Weise die gesuchten Constanten zu bestimmen. Es zeigt sich dabei, dass die erste Aufgabe, was algebraische Operationen anbetrifft, nur die Auflösung linearer Gleichungen verlangt, während die zweite auf eine Gleichung m-ten Grades führt.

§ 7.

Die Normalform der Picard'schen Differentialgleichungen.

Wir haben bereits gelegentlich bemerkt, dass die doppeltperiodischen Functionen zweiter Art ihre Bedeutung in erster Linie der Rolle verdanken, welche sie in der Theorie der Picard-schen Differentialgleichungen spielen. Die in den vorangehenden Paragraphen enthaltenen Untersuchungen bezogen sich ausschliesslich auf unipolare doppeltperiodische Functionen zweiter Art; und zwar hatten wir immer vorausgesetzt, dass die singuläre Stelle derselben in den Punkt $w = iK'$ fiel. Es lässt sich nun zeigen, dass die Integration einer beliebigen Picard'schen Differentialgleichung immer auf die speciellere Aufgabe zurückge-

1) In Bezug auf die Bestimmung der Grösse ν ist die vorhin über $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ gemachte Bemerkung zu wiederholen.

führt werden kann, eine PICARD'sche Differentialgleichung zu integriren, deren Lösungen nur die eine singuläre Stelle $w = iK'$ besitzen.

Zu diesem Zwecke leiten wir zunächst einen in die allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen gehörenden Satz ab.

Es sei die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$(1)\quad y^{(n)} + P_1(w)\cdot y^{(n-1)} + P_2(w)\cdot y^{(n-2)} + \cdots + P_n(w)\cdot y = 0$$

so beschaffen, dass ihre allgemeine Lösung den Charakter einer rationalen Function besitzt[1]; es sei ferner der Punkt $w = a$ eine singuläre Stelle dieser Differentialgleichung, d. h. ein Punkt, in welchem wenigstens einer der Coefficienten $P_1(w)$, $P_2(w), \ldots,$ $P_n(w)$ unendlich gross wird. Dann wissen wir, dass sich diese Coefficienten in der Form

$$P_h(w) = \left(\frac{1}{w-a}\right)^h \{p_0^{(h)} + p_1^{(h)}\cdot(w-a) + p_2^{(h)}\cdot(w-a)^2 + \cdots\}$$
$$[h = 1, 2, \ldots, n]$$

darstellen lassen, wobei die $p_0^{(h)}$, $p_1^{(h)}$, $p_2^{(h)}, \ldots$ constante Grössen sind, und dass der algebraischen Gleichung n-ten Grades

$$(2)\quad s(s-1)\cdots(s-n+1) + p_0^{(1)}\cdot s(s-1)\cdots(s-n+2)$$
$$+ p_0^{(2)}\cdot s(s-1)\cdots(s-n+3) + \cdots + p_0^{(n-1)}\cdot s + p_0^{(n)} = 0$$

n von einander verschiedene ganze Zahlen

$$s_1, s_2, \ldots, s_n$$

Genüge leisten; wir wollen annehmen, dass dieselben nach ihrer Grösse geordnet seien, also

$$s_1 < s_2 < s_3 < \cdots < s_n$$

voraussetzen. Die Gleichung (2) pflegt man bekanntlich als die zu der singulären Stelle $w = a$ gehörige *determinirende Gleichung* zu bezeichnen; ihre kleinste Wurzel s_1 giebt, je nachdem sie positiv oder negativ ist, an, von der wievielsten Ordnung im Punkte $w = a$ die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung (1) verschwindet oder unendlich gross wird. Denn es giebt bei den gemachten Voraussetzungen n Functionen

1) Unter einer Function rationalen Charakters wird eine eindeutige analytische Function verstanden, welche im Endlichen nur ausserwesentlich singuläre Stellen besitzt (also eine gebrochene transcendente Function).

$$F_1(w),\ F_2(w),\ \ldots,\ F_n(w),$$

welche der gegebenen Differentialgleichung (1) Genüge leisten, linear von einander unabhängig sind, und überdies die Eigenschaft besitzen, dass die n Ausdrücke

$$(w-\alpha)^{-s_1}\cdot F_1(w),\ (w-\alpha)^{-s_2}\cdot F_2(w),\ \ldots (w-\alpha)^{-s_n}\cdot F_n(w)$$

im Punkte $w=\alpha$ endliche von Null verschiedene Werthe erhalten; die allgemeine Lösung von (1) aber wird dann durch den Ausdruck

$$F(w)\equiv c_1\cdot F_1(w)+c_2\cdot F_2(w)+\cdots+c_n\cdot F_n(w)$$

dargestellt, in welchem $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ willkürliche Constanten bedeuten; und dieser ist offenbar so beschaffen, dass

$$(w-\alpha)^{-s_1}\cdot F(w)$$

im Punkte $w=\alpha$ weder verschwindet noch unendlich gross wird.

Führen wir nun in unsere Differentialgleichung (1) an Stelle von y durch die Substitution

$$(3)\qquad y=z\cdot\chi(w)$$

die neue unbekannte Function z ein, so wird die allgemeine Lösung der hierdurch erhaltenen neuen Differentialgleichung

$$(1')\qquad z^{(n)}+\overline{P}_1(w)\cdot z^{(n-1)}+\overline{P}_2(w)\cdot z^{(n-2)}+\cdots+\overline{P}_n(w)\cdot z=0$$

offenbar dann und nur dann den Charakter einer rationalen Function besitzen, wenn der Ausdruck $\chi(w)$ eine Function rationalen Charakters ist.

Es sei nun diese Bedingung erfüllt; und zwar möge sich durch Entwickelung der Function $\chi(w)$ im Punkte $w=\alpha$

$$\chi(w)=(w-\alpha)^{\sigma}\{A_0+A_1(w-\alpha)+A_2(w-\alpha)^2+\cdots\}$$

ergeben, wobei A_0 eine von Null verschiedene Constante bedeuten soll, während σ natürlich eine (positive oder negative) ganze Zahl sein muss.

Der Punkt $w=\alpha$ wird im Allgemeinen auch eine singuläre Stelle der Differentialgleichung (1′) sein; wir sind daher berechtigt, die Entwickelungen

$$\overline{P}_h(w)=\left(\frac{1}{w-\alpha}\right)^h\{\overline{P}_0^{(h)}+\overline{P}_1^{(h)}\cdot(w-\alpha)+\overline{P}_2^{(h)}\cdot(w-\alpha)^2+\cdots\}$$
$$[h=1,\ 2,\ \ldots,\ n]$$

anzusetzen und erhalten dann in

$$(2') \quad s(s-1)\cdots(s-n+1)+\bar{p}_0^{(1)}\cdot s(s-1)\cdots(s-n+2)$$
$$+\bar{p}_0^{(2)}\cdot s(s-1)\cdots(s-n+3)+\cdots+\bar{p}_0^{(n-1)}\cdot s+\bar{p}_0^{(n)}=0$$

die zugehörige determinirende Gleichung; die Wurzeln s_1', s_2', $\ldots$, s_n' derselben, die wir abermals ihrer Grösse nach geordnet voraussetzen wollen, müssen wieder ganze Zahlen sein. — Zwischen den Wurzeln der Gleichung (2') und denjenigen der Gleichung (2) besteht nun ein sehr einfacher Zusammenhang; es ist nämlich

$$s_1' = s_1 - \sigma, \quad s_2' = s_2 - \sigma, \quad \ldots, \quad s_n' = s_n - \sigma.$$

Der blosse Anblick der Relation (3), welche den Zusammenhang zwischen der allgemeinen Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (1) und derjenigen der transformirten Differentialgleichung (1') vermittelt, lehrt die Richtigkeit dieser Bemerkung, zu welcher man natürlich auch auf dem Wege directer Rechnung gelangen kann.

Ist nun insbesondere die Function $\chi(w)$ so gewählt, dass $\sigma = s_1$, dass also

$$\chi(w) = (w-a)^{s_1}\{A_0 + A_1(w-a) + A_2(w-a)^2 + \cdots\}$$

ist, so besitzt die determinirende Gleichung (2') die Wurzeln

$$0,\ s_2 - s_1,\ s_3 - s_1,\ \cdots,\ s_n - s_1,$$

und hieraus folgt nach dem was wir vorhin gesehen haben, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1') im Punkte $w = a$ weder verschwindet noch unendlich gross wird [1].

Mit andern Worten, es gilt der

Lehrsatz. *Es sei*

$$(1) \quad y^{(m)} + P_1(w)\cdot y^{(m-1)} + P_2(w)\cdot y^{(m-2)} + \cdots + P_m(w)\cdot y = 0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung den Charakter einer rationalen Function besitzt; es sei

1) Der letzte Schluss ist übrigens umkehrbar; d. h. wenn die allgemeine Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung den Charakter einer rationalen Function besitzt und für eine gewisse singuläre Stelle dieser Differentialgleichung weder verschwindet noch unendlich gross wird, so hat von den Wurzeln der zu dieser singulären Stelle gehörigen determinirenden Gleichung eine den Werth Null, während die übrigen sämmtlich positiv sind.

ferner der Punkt $w = a$ eine singuläre Stelle dieser Differentialgleichung, und es werde unter σ die kleinste Wurzel der zu dieser singulären Stelle gehörigen determinirenden Gleichung verstanden; wenn dann $\chi(w)$ eine Function rationalen Charakters ist, welche die Eigenschaft besitzt, dass der Ausdruck

$$(w - a)^{-\sigma} \cdot \chi(w)$$

im Punkte $w = a$ endlich und von Null verschieden ist, so geht die Differentialgleichung (1) durch die Substitution

$$y = z \cdot \chi(w) \tag{3}$$

in eine andre homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung über, deren allgemeine Lösung ebenfalls den Charakter einer rationalen Function hat, aber im Punkte $w = a$ weder verschwindet noch unendlich gross wird.

Für die transformirte Differentialgleichung ist also der Punkt $w = a$ nur eine *scheinbare singuläre Stelle*, auch wenn er für die ursprüngliche Differentialgleichung eine *wirkliche singuläre Stelle* war.

Dieses Ergebniss wenden wir nunmehr auf die Theorie der PICARD'schen Differentialgleichungen an.

Eine Differentialgleichung (1) von der in Rede stehenden Art nennt man bekanntlich eine *Picard'sche Differentialgleichung*, wenn ihre Coefficienten

$$P_1(w),\ P_2(w),\ \ldots,\ P_n(w)$$

doppeltperiodische Functionen erster Art sind. — Durch eine Substitution von der Form (3) geht eine PICARD'sche Differentialgleichung dann und nur dann wieder in eine PICARD'sche Differentialgleichung über, wenn $\chi(w)$ eine doppeltperiodische Function zweiter Art ist. Den Beweis hierfür erbringt man leicht mit Hilfe der Relationen, welche die Coefficienten $\overline{P}_1(w), \ldots, \overline{P}_n(w)$ von (1') durch die Coefficienten $P_1(w), \ldots, P_n(w)$ von (1) ausdrücken. — Wenn die angegebene Bedingung erfüllt ist, und überdies der Ausdruck $\psi'(w) : \psi(w)$ nur in den singulären Stellen der Differentialgleichung (1) unendlich gross wird, so sind diese auch die einzigen singulären Stellen der Differentialgleichung (1'), und umgekehrt.

Wir können nun, ohne dass die Allgemeinheit beschränkt wird, annehmen, dass die vorgelegte PICARD'sche Differentialgleichung (1) die singuläre Stelle $w = iK'$ hat [andernfalls könnten wir ja durch Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen eine singuläre Stelle der gegebenen Differentialgleichung in diesen Punkt verlegen]; ausserdem aber möge (1) noch die singulären Stellen $w = \alpha_1, = \alpha_2, \ldots, = \alpha_r$ besitzen. Dann ist nach dem Vorhergehenden die allgemeinste Substitution (3), durch welche (1) wiederum in eine Picard'sche Differentialgleichung mit den $r+1$ singulären Stellen $w = iK'$, $w = \alpha_1$, $\ldots\ w = \alpha_r$ übergeht, in der Formel

$$(4) \qquad y = z \cdot Ce^{\lambda w} \cdot \prod_1^r \left[\frac{\vartheta_1(v - a_\varrho)}{\vartheta_0(v)} e^{\frac{\vartheta_0'(a_\varrho)}{\vartheta_0(a_\varrho)} v} \right]^{\sigma_\varrho}$$

enthalten, wobei $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ positive oder negative ganze Zahlen sind, und C sowie λ beliebige Constanten sein können.

Wenn nun insbesondere die ganzen Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ bez. die kleinsten Wurzeln der zu den singulären Stellen $w = \alpha_1$, $w = \alpha_2, \ldots, w = \alpha_r$ gehörigen determinirenden Gleichungen sind, so erfüllt die Substitution (4) bezüglich dieser r singulären Stellen die Voraussetzungen des vorigen Lehrsatzes; die transformirte Differentialgleichung (1') ist also dann so beschaffen, dass ihre allgemeine Lösung nur im Punkte $w = iK'$ unendlich gross wird und für keinen endlichen Werth von w verschwindet. Bildet man für diese transformirte Differentialgleichung die zu den singulären Stellen $w = \alpha_1, w = \alpha_2, \ldots, w = \alpha_r$ gehörigen determinirenden Gleichungen, so zeigt sich, dass dieselben sämmtlich die Wurzel Null besitzen und dass ihre übrigen Wurzeln sämmtlich positiv sind, während die zu der singulären Stelle $w = iK'$ gehörige determinirende Gleichung wenigstens eine negative Wurzel hat.

Wir wollen, um uns kurz ausdrücken zu können, von jeder Picard'schen Differentialgleichung, welcher die soeben angegebenen Eigenschaften zukommen, sagen, dass sie *die Normalform besitze.* Dann können wir, da vermöge der Relation (4) die vollständige Lösung von (1) sofort hingeschrieben werden kann, sobald die vollständige Lösung von (1') gefunden ist, unser Ergebniss folgendermassen aussprechen:

Lehrsatz. *Die vollständige Integration einer jeden Picard'schen Differentialgleichung lässt sich auf die vollständige Integration einer anderen Picard'schen Differentialgleichung zurückführen, welche* *die Normalform besitzt. Ist nämlich eine Picard'sche Differentialgleichung n-ter Ordnung*

$$(1)\quad y^{(n)} + P_1(w)\cdot y^{(n-1)} + P_2(w)\cdot y^{(n-2)} + \cdots + P_n(w)\cdot y = 0$$

mit den singulären Stellen $w = iK'$, $w = a_1, \ldots, w = a_r$ *vorgelegt, und sind* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_r$ *bez. die kleinsten Wurzeln der zu den singulären Stellen* $w = a_1$, $w = a_2, \ldots, w = a_r$ *gehörenden determinirenden Gleichungen, so erhält man aus* (1) *durch die Substitution*

$$y = z\cdot e^{\lambda w}\cdot \prod_1^r \left[\frac{\vartheta_1(v-a_\varrho)}{\vartheta_0(v)}\, e^{\frac{\vartheta_0'(a_\varrho)}{\vartheta_0(a_\varrho)}v}\right]^{\sigma_\varrho}$$

eine andere Picard'sche Differentialgleichung n-ter Ordnung mit denselben singulären Stellen, welche die Normalform besitzt.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Zurückführung einer Picard'schen Differentialgleichung auf die Normalform immer auf unendlich viele Arten geschehen kann, da in der Substitution (4), durch welche diese Zurückführung bewirkt wird, die Constante λ jeden beliebigen Werth haben darf. Durch geeignete Wahl von λ lassen sich in der Regel noch besondere Vereinfachungen erzielen.

Aus dem vorhin charakterisirten Verhalten der vollständigen Lösung einer Picard'schen Differentialgleichung, welche die Normalform besitzt, können wir zwei wichtige Schlüsse ziehen: Jede doppeltperiodische Function zweiter Art, welche einer solchen Differentialgleichung Genüge leistet, muss sich in die Form

$$\frac{\vartheta_1(v+v_1)\cdots\vartheta_1(v+v_m)}{\vartheta_0(v)^m}\, e^{\lambda w - \sum_1^m{}_k \frac{\vartheta_0'(v_k)}{\vartheta_0(v_k)}v}$$

bringen lassen; und wenn einer derartigen Differentialgleichung durch n linear von einander unabhängige Functionen von obiger Form Genüge geleistet wird, so kann unmöglich eine der Grössen $v_1, v_2, \ldots, v_m$ für alle diese n Functionen denselben Werth besitzen.

§ 8.

Die geraden Picard'schen Differentialgleichungen II. Ordnung. Zurückführung derselben auf die Normalform.

Nachdem wir uns in den vorangehenden Paragraphen mit einigen wichtigen allgemeinen Eigenschaften der doppeltperiodischen Functionen zweiter Art und der Picard'schen Differentialgleichungen bekannt gemacht haben, wenden wir uns nunmehr zu der folgenden Aufgabe:

Es soll die allgemeinste Picard'sche Differentialgleichung II. Ordnung

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{d w^2} + P(w) \cdot \frac{d y}{d w} + Q(w) \cdot y = 0$$

aufgestellt und vollständig integrirt werden, welche bei Aenderung des Vorzeichens der unabhängigen Variablen wieder in sich selbst übergeht.

Die fragliche Differentialgleichung soll also die Eigenschaft besitzen, durch die Substitution $w = - w'$ überzugehen in die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d w'^2} + P(w') \cdot \frac{d y}{d w'} + Q(w') \cdot y = 0\,;$$

und hieraus folgt, dass, sobald $F(w)$ eine Lösung von (1) ist, auch die Function $F(-w)$ eine Lösung von (1) sein muss.

Wir wollen nun, um eine kürzere Ausdrucksweise zu ermöglichen, jede Picard'sche Differentialgleichung, welche die fragliche Eigenschaft besitzt, eine *gerade Picard'sche Differentialgleichung* nennen. Dann können wir die oben formulirte Aufgabe auch folgendermassen aussprechen:

Es soll die allgemeinste gerade Picard'sche Differentialgleichung II. Ordnung aufgestellt und vollständig integrirt werden.

Wenn die Gleichung

$$(1) \qquad y'' + P(w) \cdot y' + Q(w) \cdot y = 0 \text{ [1]}$$

eine Picard'sche Differentialgleichung sein soll, so müssen ihre Coefficienten P und Q doppeltperiodische Functionen erster Art von w sein; überdies kann — nach einem allgemeinen Satze über homogene lineare Differentialgleichungen, deren allgemeine

1) Durch die Accente werden stets Differentiationen nach der unabhängigen Veränderlichen w angedeutet; es ist also $y' = \frac{dy}{dw}$, $y'' = \frac{d^2y}{dw^2}$, u. s. w.

Lösungen den Charakter rationaler Functionen haben — die Function $P(w)$ nur ausserwesentlich singuläre Stellen erster Ordnung, die Function $Q(w)$ höchstens solche zweiter Ordnung besitzen. Soll nun überdies bei Vertauschung von w mit $-w$ die Differentialgleichung (1) in sich selbst übergehen, also ungeändert bleiben, so muss offenbar $P(w)$ eine ungerade und $Q(w)$ eine gerade Function von w sein.

Der Gleichung (1) kann — nach einem allgemeinen Satz über PICARD'sche Differentialgleichungen[1]) — auf jeden Fall durch eine gewisse doppeltperiodische Function zweiter Art, die wir $F(w)$ nennen wollen, Genüge geleistet werden. Dann ist aber — dem vorhin Bemerkten zufolge — auch die zu $F(w)$ conjugirte Function $F(-w)$, welche durch $F_1(w)$ bezeichnet werden möge, eine Lösung von (1).

Geht man umgekehrt von einer beliebigen doppeltperiodischen Function zweiter Art $F(w)$ aus, und bildet diejenige homogene lineare Differentialgleichung II. Ordnung, welcher die beiden Ausdrücke $F(w)$ und $F(-w)$ Genüge leisten, so ist klar, dass dieselbe stets die über die Gleichung (1) gemachten Voraussetzungen erfüllen, d. h. doppeltperiodische Coefficienten besitzen und durch Vertauschung von w mit $-w$ ungeändert bleiben wird.

Wir können demnach sagen:

Die allgemeinste gerade Picard'sche Differentialgleichung II. Ordnung

$$(1) \qquad y'' + P(w)\cdot y' + Q(w)\cdot y = 0$$

wird erhalten, wenn man

$$(2) \qquad P(w) = -\frac{FF_1'' - F''F_1}{FF_1' - F'F_1}, \quad Q(w) = \frac{F'F_1'' - F''F_1'}{FF_1' - F'F_1}$$

setzt und hierbei unter $F(w)$ die allgemeinste doppeltperiodische Function zweiter Art, unter $F_1(w)$ dagegen die zu $F(w)$ conjugirte Function $F(-w)$ versteht.

Auf Grund dieser Bemerkung werden wir zunächst die Form der allgemeinsten geraden PICARD'schen Differentialgleichung II. Ordnung ermitteln; dann soll gezeigt werden, wie man eine solche Differentialgleichung durch Einführung einer neuen unbekannten Function in eine Differentialgleichung

1) Vergl. die in der Einleitung citirte Arbeit des Herrn PICARD.

von derselben Art überführen kann; im Anschluss hieran werden wir die Reduction der in Rede stehenden Differentialgleichungen auf die Normalform darlegen.

Es sei also $F(w)$ die allgemeinste doppeltperiodische Function zweiter Art, und es möge unter $F_1(w)$ die zu $F(w)$ conjugirte Function $F(-w)$ verstanden werden. Ferner wollen wir die Ausdrücke

$$F(w)F_1'(w) - F'(w)F_1(w) \quad \text{und} \quad F'(w)F_1''(w) - F''(w)F_1'(w)$$

bez. durch $\Phi(w)$ und $\Psi(w)$ bezeichnen, so dass die fragliche Differentialgleichung

$$y'' - \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} \cdot y' + \frac{\Psi(w)}{\Phi(w)} \cdot y = 0$$

geschrieben werden kann.

Der Ausdruck $F(w)$ genügt — als doppeltperiodische Function zweiter Art — zwei Identitäten von der Form

$$F(w + 2K) = M \cdot F(w), \quad F(w + 2iK') = N \cdot F(w),$$

in denen M und N Constanten sind; die zu $F(w)$ conjugirte Function $F_1(w)$ befriedigt infolgedessen identisch die beiden Gleichungen

$$F_1(w + 2K) = \frac{1}{M} \cdot F_1(w), \quad F_1(w + 2iK') = \frac{1}{N} \cdot F_1(w).$$

Daraus folgt, dass

$$\Phi(w + 2K) = \Phi(w), \quad \Phi(w + 2iK') = \Phi(w),$$
$$\Psi(w + 2K) = \Psi(w), \quad \Psi(w + 2iK') = \Psi(w)$$

wird, dass also $\Phi(w)$ und $\Psi(w)$ doppeltperiodische Functionen erster Art sind; dasselbe gilt natürlich auch von $\Phi'(w)$.

Ferner zeigt sich, weil

$$F_1(w) = F(-w)$$

und infolgedessen

$$F_1'(w) = -F'(-w), \quad F_1''(w) = +F''(-w)$$

ist, dass

$$\Phi(-w) = \Phi(w), \quad \Phi'(w) = -\Phi'(w), \quad \Psi(-w) = \Psi(w)$$

wird; $\Phi(w)$ und $\Psi(w)$ sind also gerade Functionen von w, während $\Phi'(w)$ eine ungerade Function ist.

Die beiden Ausdrücke $\Phi(w)$ und $\Psi(w)$ sind demnach doppeltperiodische Functionen erster Art von w, die sich durch Vertauschung von w mit $-w$ nicht ändern. Beide Ausdrücke müssen infolgedessen als rationale Functionen von $\mathrm{sn}^2 w$ darstellbar sein.

Wir sind somit berechtigt,

$$(3)\quad \Phi(w) = C\cdot \mathrm{sn}^{2g_1} w\cdot \mathrm{cn}^{2g_2} w\cdot \mathrm{dn}^{2g_3} w\cdot \prod_{1}^{r}{}_{\varrho}(\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \alpha_\varrho)^{h_\varrho}$$

zu setzen; hierbei bedeuten $g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, \cdots, h_r$ ganze Zahlen, welche positiv oder negativ, eventuell auch zum Theil gleich Null sein können, während $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ constante Grössen sind, von denen keine die Form

$$m\cdot K + n\cdot iK' \quad (m \text{ und } n \text{ ganze Zahlen})$$

hat. Aus (3) aber folgt

$$\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = \frac{d}{dw}[\lg \Phi(w)] = 2g_1\frac{\mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w}{\mathrm{sn}\, w} - 2g_2\frac{\mathrm{sn}\, w\, \mathrm{dn}\, w}{\mathrm{cn}\, w}$$

$$-2g_3\frac{k^2\, \mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w}{\mathrm{dn}\, w} + 2\,\mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w\cdot \sum_{1}^{r}{}_{\varrho}\frac{h_\varrho}{\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \alpha_\varrho},$$

so dass sich für den ersten Coefficienten P unserer Differentialgleichung (1) die Form ergiebt

$$(4)\quad P(w) = -2g_1\frac{\mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w}{\mathrm{sn}\, w} + 2g_2\frac{\mathrm{sn}\, w\, \mathrm{dn}\, w}{\mathrm{cn}\, w} + 2g_3\frac{k^2\, \mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w}{\mathrm{dn}\, w}$$

$$-\sum_{1}^{r}{}_{\varrho}\frac{2h_\varrho\, \mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w}{\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \alpha_\varrho}.$$

Um auch die Form des zweiten Coefficienten Q zu ermitteln, der durch die Formel

$$Q(w) = \frac{\Psi(w)}{\Phi(w)}$$

gegeben ist, bedenken wir, dass $\Psi(w)$ ebenso wie $\Phi(w)$ rational durch $\mathrm{sn}^2 w$ darstellbar ist, und dass infolgedessen dasselbe auch von $Q(w)$ gilt. Setzen wir also $\mathrm{sn}^2 w = x$, so kann

$$Q(w) = R(x)$$

geschrieben werden, und hierbei wird R eine rationale, im Allgemeinen natürlich gebrochene Function von x. Der Nenner dieser Function kann die Factoren x, $1-x$, $1-k^2x$, ausserdem aber noch Factoren von der Form $x-\operatorname{sn}^2\alpha$ enthalten, wobei α jedenfalls nicht von der Form $m\cdot K+n\cdot iK'$ ist. — Entwickeln wir daher die Function $R(x)$ in Partialbrüche, und erinnern uns, dass $Q(w)$ keine ausserwesentlich singulären Stellen von höherer als der zweiten Ordnung besitzen kann, so finden wir für $R(x)$ eine Darstellung von der Form

$$R(x)=A_0x+A_1\frac{1}{x}$$
$$+\frac{A_2}{1-x}+\frac{A_3}{1-k^2x}+B+\sum_1^r{}_\varrho\frac{C_\varrho}{x-\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho}+\sum_1^r{}_\varrho\frac{D_\varrho}{(x-\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho)^2},$$

in welcher die A, B, C, D Constanten sind. Dieselbe kann offenbar, wenn die Bedeutung dieser Constanten entsprechend geändert wird, durch die andere Darstellung ersetzt werden

$$R(x)=A_0k^2x+\frac{A_1}{x}+A_2\frac{1-k^2x}{1-x}+A_3\frac{k^2(1-x)}{1-k^2x}+B$$
$$+\sum_1^r{}_\varrho\frac{2C_\varrho\operatorname{sn}\alpha_\varrho\operatorname{cn}\alpha_\varrho\operatorname{dn}\alpha_\varrho}{x-\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho}+\sum_1^r{}_\varrho\frac{4D_\varrho\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho\operatorname{cn}^2\alpha_\varrho\operatorname{dn}^2\alpha_\varrho}{(x-\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho)^2},$$

welche uns für Q den Ausdruck liefert:

$$(5)\quad Q(w)=A_0k^2\operatorname{sn}^2w+\frac{A_1}{\operatorname{sn}^2w}+A_2\frac{\operatorname{dn}^2w}{\operatorname{cn}^2w}+A_3\frac{k^2\operatorname{cn}^2w}{\operatorname{dn}^2w}+B$$
$$+\sum_1^r{}_\varrho\frac{2C_\varrho\operatorname{sn}\alpha_\varrho\operatorname{cn}\alpha_\varrho\operatorname{dn}\alpha_\varrho}{\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho}+\sum_1^r{}_\varrho\frac{4D_\varrho\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho\operatorname{cn}^2\alpha_\varrho\operatorname{dn}^2\alpha_\varrho}{(\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho)^2}.$$

Wir haben somit den folgenden

Lehrsatz. *Die allgemeinste gerade Picard'sche Differentialgleichung II. Ordnung kann*

$$(6)\quad y''+\Big\{-2g_1\frac{\operatorname{cn}w\operatorname{dn}w}{\operatorname{sn}w}+2g_2\frac{\operatorname{sn}w\operatorname{dn}w}{\operatorname{cn}w}+2g_3\frac{k^2\operatorname{sn}w\operatorname{cn}w}{\operatorname{dn}w}$$
$$-\sum_1^r{}_\varrho\frac{2h_\varrho\operatorname{sn}w\operatorname{cn}w\operatorname{dn}w}{\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho}\Big\}y'+\Big\{A_0k^2\operatorname{sn}^2w+\frac{A_1}{\operatorname{sn}^2w}+A_2\frac{\operatorname{dn}^2w}{\operatorname{cn}^2w}$$
$$+A_3\frac{k^2\operatorname{cn}^2w}{\operatorname{dn}^2w}+B+\sum_1^r{}_\varrho\frac{2C_\varrho\operatorname{sn}\alpha_\varrho\operatorname{cn}\alpha_\varrho\operatorname{dn}\alpha_\varrho}{\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho}$$
$$+\sum_1^r{}_\varrho\frac{4D_\varrho\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho\operatorname{cn}^2\alpha_\varrho\operatorname{dn}^2\alpha_\varrho}{(\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho)^2}\Big\}y=0$$

geschrieben werden, wobei $g_1, g_2, g_3, h_1, \ldots, h_r$ *(und übrigens auch* $A_0, A_1, A_2, A_3, D_1, \ldots D_r$*) ganze Zahlen — positiv oder negativ — sind.*

Die Differentialgleichung (6) geht bekanntlich durch die Substitution

$$(7) \qquad y = z \cdot \chi(w),$$

wenn $\chi(w)$ eine doppeltperiodische Function zweiter Art ist, wiederum in eine Picard'sche Differentialgleichung II. Ordnung über [vergl. den vorigen §]. Wir legen uns nunmehr die Frage vor, wie die Function $\chi(w)$ beschaffen sein muss, wenn die transformirte Differentialgleichung dieselbe Form wie die ursprüngliche besitzen, d. h. wenn sie durch Vertauschung von w mit $-w$ ungeändert bleiben und dieselben singulären Stellen wie (6) haben soll.

Bekanntlich sind die Coefficienten $\overline{P}$, $\overline{Q}$ der durch die Substitution (7) aus einer vorgelegten homogenen linearen Differentialgleichung II. Ordnung

$$(1) \qquad y'' + P(w) \cdot y' + Q(w) \cdot y = 0$$

hervorgehenden Differentialgleichung

$$z'' + \overline{P}(w) \cdot z' + \overline{Q}(w) \cdot z = 0$$

gegeben durch die Formeln

$$(8) \quad \overline{P}(w) = 2\frac{\chi'(w)}{\chi(w)} + P(w), \; \overline{Q}(w) = \frac{\chi''(w)}{\chi(w)} + P(w) \cdot \frac{\chi'(w)}{\chi(w)} + Q(w).$$

Nun soll gegenwärtig die ursprüngliche Differentialgleichung die Form (6) haben, die transformirte Differentialgleichung aber sich von der ursprünglichen nur dadurch unterscheiden, dass an Stelle von

$$g_1, g_2, g_3, h_\varrho, A_0, A_1, A_2, A_3, B, C_\varrho, D_\varrho$$

andere Constanten

$$g_1', g_2', g_3', h_\varrho', A_0', A_1', A_2', A_3', B', C_\varrho', D_\varrho'$$

getreten sind. Dann muss, zufolge der ersten Gleichung (8), der Ausdruck $\dfrac{\chi'(w)}{\chi(w)}$ die Form

$$m_1 \frac{\operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w} - m_2 \frac{\operatorname{sn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{cn} w} - m_3 \frac{k^2 \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w}$$

$$+ \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w \cdot \sum_1^r {}_\varrho \frac{n_\varrho}{\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \alpha_\varrho}$$

besitzen, wo $m_1, m_2, m_3, n_1, \ldots, n_r$ ganze Zahlen sind, und hieraus folgt

$$(9)\quad \chi(w) = C \cdot \operatorname{sn}^{m_1} w \cdot \operatorname{cn}^{m_2} w \cdot \operatorname{dn}^{m_3} w \cdot \prod_1^r {}_\varrho (\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2} n_\varrho},$$

wobei C eine beliebige Constante sein kann. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, denn wenn sie erfüllt ist, so hat vermöge der zweiten Formel (8) auch $\overline{Q}(w)$ die gewünschte Form, wie man sich leicht überzeugt, wenn man das Verhalten der Function $\frac{\chi''(w)}{\chi(w)}$ in ihren singulären Stellen berücksichtigt.

Wir haben somit den

Lehrsatz. *Die Differentialgleichung* (6) *geht durch die Substitution*

$$(7)\qquad y = z \cdot \chi(w)$$

dann und nur dann in eine Differentialgleichung von derselben Form über, wenn $\chi(w)$ die Form

$$\chi(w) = C \cdot \operatorname{sn}^{m_1} w \cdot \operatorname{cn}^{m_2} w \cdot \operatorname{dn}^{m_3} w \cdot \prod_1^r {}_\varrho (\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2} n_\varrho}$$

hat, wobei $m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, \ldots, n_r$ ganze Zahlen bedeuten, während C eine beliebige Constante sein kann.

Anmerkung. — Soll übrigens die allgemeine Lösung der transformirten Differentialgleichung ebenso wie diejenige der ursprünglichen den Charakter einer rationalen Function besitzen, so müssen die r ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_r$ sämmtlich *gerade* sein.

Die Differentialgleichung (6) besitzt die $2r + 4$ singulären Stellen

$$w = iK',\ w = 0,\ w = K,\ w = K + iK',\ w = \pm \alpha_\varrho\ [\varrho = 1, 2, \ldots, r];$$

die determinirenden Gleichungen, welche den drei singulären Stellen

$$w = 0, \quad w = K, \quad w = K + iK'$$

entsprechen, lauten bez.

$$(10)\qquad s(s-1) - 2g_k \cdot s + A_k = 0 \quad [k = 1, 2, 3],$$

während zu den beiden singulären Stellen $w = +\alpha_\varrho$ und $w = -\alpha_\varrho$ die nämliche determinirende Gleichung

$$s(s-1) - h_\varrho \cdot s + D_\varrho = 0 \tag{11}$$

gehört. Verstehen wir also unter μ_1, μ_2, μ_3 bez. die kleinsten Wurzeln der drei Gleichungen (10) und unter ν_ϱ die kleinere Wurzel der Gleichung (11), so ist nach § 7 klar, dass die verlangte Zurückführung der Differentialgleichung (6) auf die Normalform jedenfalls durch eine Substitution von der Form

$$y = z \cdot e^{\lambda w} \cdot \mathrm{sn}^{\mu_1} w \cdot \mathrm{cn}^{\mu_2} w \cdot \mathrm{dn}^{\mu_3} w \cdot \prod_1^r (\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \alpha_\varrho)^{\nu_\varrho} \tag{12}$$

erfolgen muss, wobei λ eine beliebige Constante sein kann; es empfiehlt sich aber, $\lambda = 0$ anzunehmen, weil dann — nach dem vorigen Lehrsatz — die transformirte Differentialgleichung ebenfalls die Form (6) erhält.

Wir haben somit den folgenden

Lehrsatz. *Führt man in eine Picard'sche Differentialgleichung II. Ordnung von der Form* (6) *eine neue unbekannte Function ein, indem man*

$$y = z \cdot \mathrm{sn}^{\mu_1} w \cdot \mathrm{cn}^{\mu_2} w \cdot \mathrm{dn}^{\mu_3} w \cdot \prod_1^r (\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \alpha_\varrho)^{\nu_\varrho}$$

setzt und hierbei unter μ_k und ν_ϱ die kleineren Wurzeln der $r+3$ quadratischen Gleichungen

$$s(s-1) - 2g_k \cdot s + A_k = 0 \quad [k = 1, 2, 3]$$

und

$$s(s-1) - h_\varrho \cdot s + D_\varrho = 0 \quad [\varrho = 1, 2, \dots r]$$

versteht, so erhält man eine Picard'sche Differentialgleichung von derselben Gestalt wie (6), *welche aber die Normalform besitzt.*

§ 9.

Allgemeine Eigenschaften gerader Picard'scher Differentialgleichungen II. Ordnung, welche die Normalform besitzen.

Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, kann jede gerade PICARD'sche Differentialgleichung II. Ordnung

$$(1)\quad y''+\left\{-2g_1\frac{\operatorname{cn}w\operatorname{dn}w}{\operatorname{sn}w}+2g_2\frac{\operatorname{sn}w\operatorname{dn}w}{\operatorname{cn}w}+2g_3\frac{k^2\operatorname{sn}w\operatorname{cn}w}{\operatorname{dn}^2w}\right.$$
$$\left.-\sum_1^r{}_\varrho\frac{2h_\varrho\operatorname{sn}w\operatorname{cn}w\operatorname{dn}w}{\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho}\right\}y'+\left\{A_0k^2\operatorname{sn}^2w+\frac{A_1}{\operatorname{sn}^2w}+A_2\frac{\operatorname{dn}^2w}{\operatorname{cn}^2w}\right.$$
$$+A_3\frac{k^2\operatorname{cn}^2w}{\operatorname{dn}^2w}+B+\sum_1^r{}_\varrho\frac{2C_\varrho\operatorname{sn}\alpha_\varrho\operatorname{cn}\alpha_\varrho\operatorname{dn}\alpha_\varrho}{\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho}$$
$$\left.+\sum_1^r{}_\varrho\frac{4D_\varrho\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho\operatorname{cn}^2\alpha_\varrho\operatorname{dn}^2\alpha_\varrho}{(\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho)^2}\right\}y=0$$

geschrieben werden. Wir wollen uns jetzt eingehender mit dem Fall beschäftigen, wo die Differentialgleichung (1) die Normalform besitzt; nach unseren letzten Ergebnissen sind wir ja berechtigt, uns auf diesen Fall zu beschränken.

Die Differentialgleichung (1) hat, wie wir wissen, ausser dem Punkte $w=iK'$ noch die singulären Stellen

$$w=0,\quad w=K,\quad w=K+iK',\quad w=\pm\alpha_\varrho\quad[\varrho=1,2,\ldots,r];$$

und zu diesen singulären Stellen gehören bez. die determinirenden Gleichungen

$$s(s-1)-2g_k\cdot s+A_k=0\quad[k=1,2,3],$$
$$s(s-1)-h_\varrho\cdot s+D_\varrho=0\quad[\varrho=1,2,\ldots r].$$

Da nun die genannte Differentialgleichung die Normalform besitzen soll, so muss jede einzelne von diesen $r+3$ quadratischen Gleichungen so beschaffen sein, dass die eine Wurzel den Werth Null hat, die andere Wurzel dagegen eine positive ganze Zahl ist; und hierzu ist erforderlich, dass die A_k, D_ϱ sämmtlich verschwinden, während von den $r+3$ ganzen Zahlen g_k, h_ϱ jedenfalls keine negativ sein darf.

Während die Punkte $w=0$, $w=K$, $w=K+iK'$, $w=\pm\alpha_1,\ldots,w=\pm\alpha_r$ nur scheinbare singuläre Stellen unserer Differentialgleichung sind, ist der Punkt $w=iK'$ eine wirkliche singuläre Stelle derselben; die zugehörige determinirende Gleichung hat also mindestens eine negative Wurzel. Diese Gleichung kann aber, wenn zur Abkürzung

$$g_1+g_2+g_3+\sum_1^r{}_\varrho h_\varrho=l$$

gesetzt wird,

$$s(s-1)+2l\cdot s+A_0=0 \tag{2}$$

geschrieben werden; bezeichnen wir also ihre kleinere Wurzel, welche nach dem soeben Bemerkten auf jeden Fall eine negative ganze Zahl sein muss, durch $-m$, so haben wir

$$m(m+1)-2l\cdot m+A_0=0\,,$$

also

$$A_0=(2l-m-1)m\,. \tag{3}$$

Die ganze Zahl l ist, infolge der oben festgestellten Beschaffenheit von $g_1, g_2, g_3, h_1, \ldots, h_r$, unmöglich negativ; sie kann überdies auch nicht grösser als m sein, da sonst — entgegen der gemachten Annahme — die zweite Wurzel der quadratischen Gleichung (2) kleiner als $-m$ wäre.

Wir erhalten demnach den

Lehrsatz. *Jede gerade Picard'sche Differentialgleichung II. Ordnung, welche die Normalform besitzt, kann*

$$\begin{aligned} y''+\Big\{&-2g_1\frac{\operatorname{cn}w\operatorname{dn}w}{\operatorname{sn}w}+2g_2\frac{\operatorname{sn}w\operatorname{dn}w}{\operatorname{cn}w}+2g_3\frac{k^2\operatorname{sn}w\operatorname{cn}w}{\operatorname{dn}w} \\ &-\sum_1^r{}_\varrho\frac{2h_\varrho\operatorname{sn}\alpha_\varrho\operatorname{cn}\alpha_\varrho\operatorname{dn}\alpha_\varrho}{\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho}\Big\}y'+\Big\{m(2l-m-1)k^2\operatorname{sn}^2w+B \\ &+\sum_1^r{}_\varrho\frac{2C_\varrho\operatorname{sn}\alpha_\varrho\operatorname{cn}\alpha_\varrho\operatorname{dn}\alpha_\varrho}{\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho}\Big\}y=0 \end{aligned} \tag{4}$$

geschrieben werden; dabei sind $g_1, g_2, g_3, h_1, \ldots, h_r$, l und m ganze Zahlen, und zwar ist

$$g_1\geqq 0\,,\quad g_2\geqq 0\,,\quad g_3\geqq 0\,,\quad h_\varrho\geqq 0\quad [\varrho=1, 2, \ldots, r]\,,$$
$$m>0\,,$$
$$l=g_1+g_2+g_3+\sum_1^r{}_\varrho h_\varrho\leqq m\,.$$

Uebrigens ist auch umgekehrt klar, dass jede Picard'sche Differentialgleichung von der soeben angegebenen Gestalt bei Vertauschung von $+w$ mit $-w$ ungeändert bleibt und ausserdem die Normalform besitzt.

Es sei nunmehr eine Picard'sche Differentialgleichung von der im vorigen Lehrsatz angegebenen Form (4) vorgelegt. Derselben wird, da der Punkt $w=iK'$ ihre einzige singuläre Stelle, und $-m$ die kleinere Wurzel der zugehörigen determinirenden Gleichung ist, auf jeden Fall durch eine doppeltperiodische Function zweiter Art Genüge geleistet, welche in dem genannten Punkte von der m-ten Ordnung unendlich gross wird, für jeden andern endlichen Werth von w hingegen endlich bleibt; dieser Function, welche wir $F(w)$ nennen wollen, können wir bekanntlich stets die Form

$$(5)\qquad \frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\cdots\vartheta_1(v+\nu_m)}{\vartheta_0(v)^m}\, e^{\lambda w - \sum_1^m {}_k \frac{\vartheta_0'(\nu_k)}{\vartheta_0(\nu_k)} v}$$

geben. Dann ist auch die zu $F(w)$ conjugirte Function, welche, wie früher, durch $F_1(w)$ bezeichnet werden möge, eine Lösung der Differentialgleichung (4), und zwar im Allgemeinen eine von $F(w)$ linear unabhängige Lösung.

Sind umgekehrt zwei linear unabhängige conjugirte doppeltperiodische Functionen zweiter Art $F(w)$ und $F_1(w)$ vorgelegt, und soll die homogene lineare Differentialgleichung II. Ordnung, welcher dieselben Genüge leisten, die Normalform besitzen, so dürfen diese Functionen nur im Punkte $w = iK'$ unendlich gross werden, müssen also jedenfalls die Form (5) haben. Diese Bedingung ist aber noch nicht hinreichend; es ist vielmehr noch erforderlich, dass die Functionen $F(w)$ und $F_1(w)$ für keinen endlichen Werth von w gleichzeitig verschwinden; und hieraus folgt, dass diese beiden Functionen keine Factoren von der Form

$$\frac{\vartheta_1(v+\nu)}{\vartheta_0(v)}\cdot\frac{\vartheta_1(v-\nu)}{\vartheta_0(v)},$$

oder, was dasselbe sagt, keine Factoren von der Form

$$\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \omega$$

enthalten dürfen[1]. [Insbesondere darf also keine der drei Functionen $\mathrm{sn}\, w$, $\mathrm{cn}\, w$, $\mathrm{dn}\, w$ als Factor in $F(w)$ und $F_1(w)$ vorkommen.]

Es gilt somit der

---

1) Wir sagen, dass eine doppeltperiodische Function zweiter Art $F(w)$, welche die einzige singuläre Stelle $w = iK'$ besitzt, eine andere Function $\psi(w)$ von derselben Art als Factor enthalte, wenn der Quotient $F(w):\psi(w)$ wiederum eine doppeltperiodische Function zweiter Art mit der einzigen singulären Stelle $w = iK'$ ist.

Lehrsatz. *Wenn eine gerade Picard'sche Differentialgleichung II. Ordnung die Normalform besitzt, so wird ihr Genüge geleistet durch zwei conjugirte doppeltperiodische Functionen zweiter Art, welche die Form* (5) *haben und keine Factoren von der Form*

$$\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \omega$$

enthalten; und umgekehrt sind je zwei derartige Functionen stets Lösungen einer geraden Picard'schen Differentialgleichung II. Ordnung, welche die Normalform besitzt.

Durch diesen Lehrsatz wird die Theorie der geraden Picard-schen Differentialgleichungen II. Ordnung im Wesentlichen zurückgeführt auf die Betrachtung conjugirter doppeltperiodischer Functionen zweiter Art von der Form (5), also auf den Gegenstand, welcher uns in den §§ 3—5 beschäftigt hat. Allerdings giebt es einen Fall, für welchen diese Zurückführung illusorisch wird; jeder Differentialgleichung von der in Rede stehenden Beschaffenheit genügt zwar eine doppeltperiodische Function zweiter Art $F(w)$; es kann aber vorkommen, dass die zu der letzteren conjugirte Function $F(-w)$ sich von $F(w)$ nur um einen constanten Factor unterscheidet[1]; dann sind die beiden Functionen $F(w)$ und $F(-w)$ nicht mehr linear von einander unabhängig, so dass der Ausdruck

$$A \cdot F(w) + B \cdot F(-w),$$

in welchem A und B willkürliche Constanten bedeuten, nicht mehr die vollständige Lösung der betreffenden Differentialgleichung darstellt. Dieser Ausnahmefall, den wir schon früher stillschweigend übergangen haben, soll auch in der Folge ausser Betracht gelassen werden.

Es sei nun $F(w)$ eine doppeltperiodische Function zweiter Art, welche die Form (5) besitzt, und keine Factoren von der Form $\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \omega$ enthält; dann ist die zu $F(w)$ conjugirte Function $F_1(w) = F(-w)$ sicherlich nicht bloss durch einen constanten Factor von $F(w)$ verschieden, so dass der Ausdruck

$$A \cdot F(w) + B \cdot F_1(w)$$

1) In diesem Falle müssen die beiden Functionen $F(w)$ und $F(-w)$ die nämlichen Multiplicatoren haben, und hieraus folgt, dass $F(w)$ eine doppeltperiodische Function erster Art im weiteren Sinne des Wortes [vergl. § 1] sein muss, und zwar nothwendig entweder eine gerade oder eine ungerade Function.

als vollständige Lösung einer völlig bestimmten homogenen linearen Differentialgleichung II. Ordnung angesehen werden kann, welche dann die im vorletzten Lehrsatz angegebene Gestalt besitzen muss; es sei (4) diese Differentialgleichung.

Wir wollen nun, um über die Beschaffenheit derselben weiteren Aufschluss zu erhalten, auf die Functionen $F(w)$ und $F_1(w)$ die in § 3 entwickelten Betrachtungen anwenden, und insbesondere die zu diesen beiden Functionen gehörenden Polynome $\Pi(x)$ und $\Pi_2(x)$ in Betracht ziehen. Dann können wir zunächst eine bemerkenswerthe, zwischen den in der Differentialgleichung (4) enthaltenen Constanten stattfindende Beziehung feststellen.

In der That, wenn wir (4) mit $\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \alpha_\varrho$ multipliciren und nachher $y = F(w)$ substituiren, so wird ja der entstehenden Gleichung durch jeden beliebigen Werth von w genügt; und wenn wir in dieser Gleichung $w = \alpha_\varrho$ setzen, so ergiebt sich die Relation

$$0 = -2h_\varrho \cdot \operatorname{sn}\alpha_\varrho \operatorname{cn}\alpha_\varrho \operatorname{dn}\alpha_\varrho \cdot F'(\alpha_\varrho) + 2C_\varrho \operatorname{sn}\alpha_\varrho \operatorname{cn}\alpha_\varrho \operatorname{dn}\alpha_\varrho \cdot F(\alpha_\varrho),$$

aus welcher wir, da $\operatorname{sn}\alpha_\varrho \operatorname{cn}\alpha_\varrho \operatorname{dn}\alpha_\varrho$ von Null verschieden ist,

$$C_\varrho = h_\varrho \frac{F'(\alpha_\varrho)}{F(\alpha_\varrho)}$$

schliessen können. Nun gilt aber bekanntlich identisch die Gleichung

$$\frac{F'(w)}{F(w)} = \lambda + \sum_1^m {}_k \frac{\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w - u_k}{\operatorname{sn}^2 w - x_k},$$

und diese kann, wie aus § 5 hervorgeht,

$$\frac{F'(w)}{F(w)} = \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w \cdot \frac{\Pi'(\operatorname{sn}^2 w)}{\Pi(\operatorname{sn}^2 w)} - \frac{\Pi_2(\operatorname{sn}^2 w)}{\Pi(\operatorname{sn}^2 w)}$$

geschrieben werden. Die ganze rationale Function $\Pi_2(x)$ verschwindet aber, sobald $x = \operatorname{sn}^2 \alpha_\varrho$ gesetzt wird [1]); wir erhalten also

$$\frac{F'(\alpha_\varrho)}{F(\alpha_\varrho)} = \operatorname{sn}\alpha_\varrho \operatorname{cn}\alpha_\varrho \operatorname{dn}\alpha_\varrho \cdot \frac{\Pi'(\operatorname{sn}^2 \alpha_\varrho)}{\Pi(\operatorname{sn}^2 \alpha_\varrho)},$$

---

1) Vergl. weiter unten die Relation (7).

und erkennen somit, dass in der Differentialgleichung (4) allgemein

$$(6)\quad C_\varrho = h_\varrho \cdot \operatorname{sn}\alpha_\varrho \operatorname{cn}\alpha_\varrho \operatorname{dn}\alpha_\varrho \cdot \frac{\Pi'(\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho)}{\Pi(\operatorname{sn}^2\alpha_\varrho)} \quad [\varrho = 1, 2, \ldots, r]$$

wird.

In besonders engem Zusammenhange mit der Differentialgleichung (4) steht das Polynom $\Pi_2(x)$. Da nämlich $F(w)$ und $F_1(w)$ linear unabhängige Lösungen dieser Differentialgleichung sind, kann dieselbe auch

$$\begin{vmatrix} y, & F, & F_1 \\ y', & F', & F_1' \\ y'', & F'', & F_1'' \end{vmatrix} = 0$$

oder also

$$y'' - \frac{FF_1'' - F''F_1}{FF_1' - F'F_1} \cdot y' + \frac{F'F_1'' - F''F_1'}{FF_1' - F'F_1} \cdot y = 0$$

geschrieben werden; es muss mithin identisch

$$2g_1 \frac{\operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w} - 2g_2 \frac{\operatorname{sn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{cn} w} - 2g_3 \frac{k^2 \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w}$$
$$+ 2\sum_1^r{}_\varrho \frac{h_\varrho \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2\alpha_\varrho} = \frac{FF_1'' - F''F_1}{FF_1' - F'F_1}$$

sein. Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber nichts anderes als die nach w genommene logarithmische Ableitung des Ausdrucks $FF_1' - F'F_1$, und dieser Ausdruck ist bekanntlich, von einem constanten Factor abgesehen, gleich $\Pi_2(\operatorname{sn}^2 w)$. Wir haben demnach

$$\frac{FF_1'' - F''F_1}{FF_1' - F'F_1} = 2 \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w \cdot \frac{\Pi_2'(\operatorname{sn}^2 w)}{\Pi_2(\operatorname{sn}^2 w)},$$

und erhalten somit die Relation

$$\frac{\Pi_2'(x)}{\Pi_2(x)} = \frac{g_1}{x} - \frac{g_2}{1-x} - \frac{g_3 k^2}{1-k^2x} + \sum_1^r{}_\varrho \frac{h_\varrho}{x - \operatorname{sn}^2\alpha_\varrho};$$

aus dieser aber folgt, dass

$$(7)\quad \Pi_2(x) = \Gamma \cdot x^{g_1} \cdot (1-x)^{g_2} \cdot (1-k^2x)^{g_3} \cdot \prod_1^r (x - \operatorname{sn}^2\alpha_\varrho)^{h_\varrho}$$

sein muss, wobei Γ einen constanten Factor bedeutet, dessen Werth leicht gefunden werden kann. — Früher hatten wir

$$(8)\qquad \Pi_2(x) = \gamma_0(k^2x)^m + \gamma_1(k^2x)^{m-1} + \cdots + \gamma_m$$

geschrieben, also die ganze rationale Function $\Pi_2(x)$ als Summe, als Polynom, dargestellt; jetzt haben wir für dieselbe Function eine Productdarstellung gefunden. — Gleichzeitig erkennen wir, dass die vorhin eingeführte ganze Zahl

$$l = g_1 + g_2 + g_3 + \sum_1^r {}^\varrho h_\varrho$$

den Grad angiebt, welchen die ganze rationale Function $\Pi_2(x)$ factisch besitzt, während bekanntlich m der Grad ist, den sie höchstens haben kann.

Wenn die Constanten $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m, \lambda$, welche in die der Betrachtung zu Grunde gelegte Function $F(w)$ eingehen, willkürlich angenommene Werthe besitzen, so ist klar, dass

I) das Product (7) keinen der drei Factoren x, $1-x$, $1-k^2x$ enthalten kann, also $g_1 = g_2 = g_3 = 0$ sein muss;

II) in diesem Producte kein einziger mehrfacher Factor von der Form $x - \operatorname{sn}^2\alpha$ vorkommen kann, also $h_1 = h_2 = \cdots = h_r = 1$ sein muss;

III) das Polynom (8) von keinem niedrigeren als dem m-ten Grade sein kann, also $\gamma_0 \gtrless 0$ und infolgedessen $l = r = m$ werden muss.

Denn sowohl das Verschwinden einzelner Coefficienten γ in dem Polynom (8), als auch das Auftreten mehrfacher Factoren in dem Product (7), als auch das Vorkommen der Factoren x, $1-x$, $1-k^2x$ in diesem Producte involvirt gewisse Bedingungen für die $m+1$ Coefficienten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$, also auch für die $m+1$ Constanten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \lambda$. Sobald wir also die Werthe dieser $m+1$ Constanten willkürlich annehmen, wird $\Pi_2(x)$ die Form

$$\Gamma \cdot (x - \operatorname{sn}^2\alpha_1)(x - \operatorname{sn}^2\alpha_2) \cdots (x - \operatorname{sn}^2\alpha_m)$$

erhalten, und die entsprechende Differentialgleichung (4) infolgedessen

$$y'' - 2\operatorname{sn}w\operatorname{cn}w\operatorname{dn}w \sum_1^m {}^k \frac{1}{\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2\alpha_k}\cdot y' + \Big\{ m(m-1)k^2\operatorname{sn}^2 w$$
$$+ B + 2\sum_1^m {}^k \frac{\Pi'(\operatorname{sn}^2\alpha_k)}{\Pi(\operatorname{sn}^2\alpha_k)} \cdot \frac{\operatorname{sn}^2\alpha_k\operatorname{cn}^2\alpha_k\operatorname{dn}^2\alpha_k}{\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2\alpha_k}\Big\} y = 0$$

lauten.

Aus der Reihe der Fälle, in denen — infolge besonderer zwischen den obigen $m+1$ Constanten stattfindender Beziehungen — die Differentialgleichung (4) eine andere als die zuletzt angegebene Gestalt hat, wollen wir jetzt nur den einen herausgreifen, wo von den $m+1$ Coefficienten des Polynoms (8) alle bis auf einen einzigen verschwinden. Es sei also etwa

$$(9)\quad \begin{cases} \gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{m-l-1} = \gamma_{m-l+1} = \cdots = \gamma_m = 0\,, \\ \qquad\qquad \gamma_{m-l} \gtrless 0\,. \end{cases}$$

Dann haben wir

$$\Pi_2(x) = \gamma_{m-l}\, x^l\,,$$

also $g_1 = l$, $g_2 = g_3 = 0$, $h_1 = h_2 = \cdots = h_r = 0$, und erhalten somit die Differentialgleichung

$$(10)\quad y'' - 2l\,\frac{\operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w}\cdot y' + \{m(2l-m-1)k^2 \operatorname{sn}^2 w + B\}\,y = 0\,.$$

Diese aber ist identisch mit der in Band II der Acta mathematica von Herrn Elliot betrachteten Differentialgleichung [1]; wenn insbesondere $l = 0$ ist, lautet sie

$$y'' + \{-m(m+1)k^2 \operatorname{sn}^2 w + B\}\,y = 0\,,$$

wird also identisch mit der Lamé'schen Differentialgleichung. — Die obigen Schlüsse lassen sich auch umkehren, sodass wir sagen können:

Damit zwei conjugirte doppeltperiodische Functionen zweiter Art, welche linear von einander unabhängig sind, einer Differentialgleichung II. Ordnung von der Form

$$(10)\quad y'' - 2l\,\frac{\operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w}\cdot y' + \{m(2l-m-1)\cdot k^2 \operatorname{sn}^2 w + B\}\cdot y = 0$$

Genüge leisten, ist nothwendig und hinreichend, dass diese Functionen die Form

$$(5)\qquad \frac{\vartheta_1(v+r_1)\cdots\vartheta_1(v+r_m)}{\vartheta_0(v)^m}\, e^{\lambda w - \sum_1^m k \frac{\vartheta_0'(r_k)}{\vartheta_0(r_k)} v}$$

besitzen, keine Factoren von der Form

$$\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \omega$$

---

1) Sur une équation linéaire du second ordre à coefficients doublement périodiques, Acta math., Bd. II, p. 233.

enthalten und so beschaffen sind, dass sich das zugehörige Polynom $\Pi_2(x) = \gamma_0 (k^2 x)^m + \gamma_1 (k^2 x)^{m-1} + \cdots + \gamma_m$ *auf das einzige Glied*

$$\gamma_{m-l}(k^2 x)^l$$

reducirt.

Damit übrigens die Bedingungen (9) erfüllt sind, ist — zufolge § 5 — nothwendig und hinreichend, dass

$$\lambda = 0\,,\quad U_0 = U_1 = \cdots = U_{m-l-2} = 0\,,\quad U_{m-l} = \cdots = U_{m-1} = 0\,,$$
$$U_{m-l-1} \gtreqless 0$$

wird. — Insbesondere sind zwei conjugirte doppeltperiodische Functionen zweiter Art dann und nur dann Lösungen einer Differentialgleichung von der Form der Lamé'schen

$$y'' + \{-m(m+1)k^2 \operatorname{sn}^2 w + B\}\, y = 0\,,$$

wenn sie die Form (5) besitzen, und die Constanten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$, λ den Bedingungen

$$\lambda = 0\,,\quad U_0 = U_1 = \cdots = U_{m-2} = 0$$

Genüge leisten. Diese beiden Lösungen sind übrigens linear von einander unabhängig oder nicht, je nachdem U_{m-1} von Null verschieden oder gleich Null ist.

§ 10.

Besondere Eigenschaften gerader Picard'scher Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit den einzigen singulären Stellen $w = iK'$, $w = 0$, $w = K$, $w = K + iK'$.

Wir haben gesehen, dass die Theorie der geraden Picard'schen Differentialgleichungen II. Ordnung in der Hauptsache auf die Untersuchung der speciellen Gleichungen hinausläuft, welche die Normalform besitzen. Im gegenwärtigen § wollen wir nun eine besondere Classe solcher Differentialgleichungen behandeln, indem wir ausschliesslich den Fall in Betracht ziehen, wo die betreffende Gleichung ausser der wirklichen singulären Stelle $w = iK'$ nur die drei scheinbaren singulären Stellen $w = 0$, $w = K$, $w = K + iK'$ besitzt. Dieser Fall ist einerseits historisch von besonderer Bedeutung, indem er allein bisher in der Litteratur behandelt worden ist, und er ist andrerseits sachlich von Interesse, indem die betreffenden Differentialgleichungen gegenüber gewissen einfachen Transformationen, welche in der gleichzeitigen Einführung einer neuen unbekannten Function und einer neuen unabhängigen Veränderlichen bestehen, ihre Form bewahren.

Nach unsern bisherigen Ergebnissen kann jede in die obige Classe gehörende Differentialgleichung

$$(1)\quad y'' + \left\{ -2g_1 \frac{\operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w} + 2g_2 \frac{\operatorname{sn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{cn} w} + 2g_3 \frac{k^2 \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w} \right\} y'$$
$$+ \{m(2g_1 + 2g_2 + 2g_3 - m - 1)k^2 \operatorname{sn}^2 w + B\} y = 0$$

geschrieben werden; und zwar bedeutet hierbei B eine constante Grösse, während g_1, g_2, g_3 und m ganze Zahlen sind, von denen keine negativ ist; insbesondere ist stets

$$m > 0 \quad \text{und} \quad g_1 + g_2 + g_3 \lesseqgtr m .$$

Bevor wir die Differentialgleichung (1) in ihrer vollen Allgemeinheit behandeln, wollen wir uns mit dem speciellen Fall beschäftigen, wo g_2 und g_3 gleich Null sind; dann liegt die bereits im vorigen § betrachtete Elliot'sche Differentialgleichung

$$(2)\quad y'' - 2g \frac{\operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w} y' + \{m(2g - m - 1)k^2 \operatorname{sn}^2 w + B\} y = 0$$

vor, in welcher m eine positive ganze Zahl ist und g einen der $m+1$ Werthe $0, 1, 2, \ldots, m$ besitzt.

Die vollständige Integration dieser Differentialgleichung, welche uns im folgenden Paragraphen näher beschäftigen wird, gestaltet sich nun besonders einfach, wenn $g \lesseqgtr \frac{m}{2}$ ist [der einfachste Fall liegt vor, wenn $g = 0$ ist; dann wird durch (2) die Lamé'sche Differentialgleichung dargestellt]; es ist daher als ein wesentlicher Vortheil zu begrüssen, dass man die Integration einer jeden Differentialgleichung (2), in welcher $g > \frac{m}{2}$ ist, auf die Integration einer Differentialgleichung von derselben Form zurückführen kann, in der $g < \frac{m}{2}$ ist.

Um die Möglichkeit dieser Reduction zu zeigen, führen wir zunächst in (2) an Stelle von y durch die Substitution

$$y = z \cdot \operatorname{sn}^m w$$

eine neue unbekannte Function z ein und erhalten hierdurch die Differentialgleichung

$$(2') \quad z'' - 2(g-m)\frac{\operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w} \cdot z' + \left\{\frac{m(m-2g-1)}{\operatorname{sn}^2 w} + B\right\} z = 0,$$

in welcher B eine Constante bedeutet, die man leicht durch B ausdrücken kann [es wird nämlich $B = B + 2gm(1+k^2) - m^2(1+k^2)$]; dann führen wir in (2') an Stelle von w durch die Substitution

$$w = iK' + \varepsilon$$

eine neue unabhängige Veränderliche ε ein, und gelangen hierdurch zu der Differentialgleichung

$$(2'') \quad z'' - 2(m-g)\frac{\operatorname{cn}\varepsilon \operatorname{dn}\varepsilon}{\operatorname{sn}\varepsilon} \cdot z' + \{m(2[m-g]-m-1)k^2 \operatorname{sn}^2\varepsilon + B\} z = 0.$$

Man kann also durch Einführung einer neuen unbekannten Function und einer neuen unabhängigen Veränderlichen jede Differentialgleichung (2) *in eine andere Differentialgleichung* (2'') *überführen, welche sich von ihr nur dadurch unter scheidet, dass an Stelle der ganzen Zahl g die ganze Zahl $m - g$ und an Stelle von B eine andere Constante B getreten ist.*

Damit aber ist bewiesen, dass man die vollständige Lösung einer jeden Differentialgleichung von der Form (2) sofort angeben kann, sobald die vollständige Integration aller derjenigen Differentialgleichungen (2) gelungen ist, in denen

$$g \leqq \frac{m}{2}$$

ist. — Insbesondere lässt sich auf diesem Wege, wenn $g = m$ ist, die Differentialgleichung (2) auf die Lamé'sche Gleichung zurückführen.

Wir wenden uns nunmehr zu der allgemeinen Differentialgleichung (1). Diese kann, wie man sich leicht überzeugt, auf drei verschiedene Arten durch gleichzeitige Einführung einer neuen unbekannten Function und einer neuen unabhängigen Veränderlichen in eine Differentialgleichung von derselben Form übergeführt werden.

Wenn man nämlich

$$(\mathrm{I}) \qquad y = z \cdot \operatorname{sn}^m w, \quad w = iK' + \varepsilon$$

setzt, so geht (1) in die Differentialgleichung

$$(1')\quad z''+\left\{-2g_1'\frac{\operatorname{cn}\varepsilon\operatorname{dn}\varepsilon}{\operatorname{sn}\varepsilon}+2g_2'\frac{\operatorname{sn}\varepsilon\operatorname{dn}\varepsilon}{\operatorname{cn}\varepsilon}+2g_3'\frac{k^2\operatorname{sn}\varepsilon\operatorname{cn}\varepsilon}{\operatorname{dn}\varepsilon}\right\}z'$$
$$+\{m(2g_1'+2g_2'+2g_3'-m-1)k^2\operatorname{sn}^2\varepsilon+B'\}z=0$$

über, in welcher

$$g_1'=m-(g_1+g_2+g_3),\quad g_2'=g_3,\quad g_3'=g_2,$$

also

$$g_1'+g_2'+g_3'=m-g_1$$

ist. — Wenn ferner

$$\text{(II)}\qquad y=z\cdot\operatorname{cn}^m w,\quad w=\varepsilon+K+iK'$$

gesetzt wird, so erhalten wir aus (1) die neue Differentialgleichung

$$(1'')\quad z''+\left\{-2g_1''\frac{\operatorname{cn}\varepsilon\operatorname{dn}\varepsilon}{\operatorname{sn}\varepsilon}+2g_2''\frac{\operatorname{sn}\varepsilon\operatorname{dn}\varepsilon}{\operatorname{cn}\varepsilon}+2g_3''\frac{k^2\operatorname{sn}\varepsilon\operatorname{cn}\varepsilon}{\operatorname{dn}\varepsilon}\right\}z'$$
$$+\{m(2g_1''+2g_2''+2g_3''-m-1)k^2\operatorname{sn}^2\varepsilon+B''\}z=0,$$

in welcher

$$g_1''=g_3,\quad g_2''=m-(g_1+g_2+g_3),\quad g_3''=g_1,$$

also

$$g_1''+g_2''+g_3''=m-g_2$$

ist. — Wenn schliesslich

$$\text{(III)}\qquad y=z\cdot\operatorname{dn}^m w,\quad w=\varepsilon+K$$

gesetzt wird, so geht aus (1) die Differentialgleichung

$$(1''')\quad z''+\left\{-2g_1'''\frac{\operatorname{cn}\varepsilon\operatorname{dn}\varepsilon}{\operatorname{sn}\varepsilon}+2g_2'''\frac{\operatorname{sn}\varepsilon\operatorname{dn}\varepsilon}{\operatorname{cn}\varepsilon}+2g_3'''\frac{k^2\operatorname{sn}\varepsilon\operatorname{cn}\varepsilon}{\operatorname{dn}\varepsilon}\right\}z'$$
$$+\{m(2g_1'''+2g_2'''+2g_3'''-m-1)k^2\operatorname{sn}^2\varepsilon+B'''\}z=0$$

hervor, in welcher

$$g_1'''=g_2,\quad g_2'''=g_1,\quad g_3'''=m-(g_1+g_2+g_3),$$

also

$$g_1'''+g_2'''+g_3'''=m-g_3$$

wird. — Die Grössen B', B'', B''' sind Constanten, ebenso wie B.

Für die vollständige Integration der Differentialgleichung (1) ist es nun vortheilhaft, wenn die Summe $g_1 + g_2 + g_3$ im Vergleich zu der ganzen Zahl m möglichst klein ist. Durch Anwendung der drei Transformationen (I), (II), (III) sind wir aber im Stande, die Integration jeder vorgelegten Differentialgleichung (1) auf die Integration einer Differentialgleichung von derselben Form zurückzuführen, in welcher die obige Summe einen gewissen Maximalwerth nicht überschreitet. Es gilt nämlich der folgende

Lehrsatz. *Zu jeder Differentialgleichung von der Form*

$$(1)\ y'' + \left\{-2g_1 \frac{\operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w} + 2g_2 \frac{\operatorname{sn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{cn} w} + 2g_3 \frac{k^2 \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w}\right\} y'$$
$$+ \{m(2g_1 + 2g_2 + 2g_3 - m - 1)k^2 \operatorname{sn}^2 w + B\} y = 0$$

gehören drei andere Differentialgleichungen von derselben Form [d.h. Differentialgleichungen, die sich von (1) *nur durch die numerischen Werthe von g_1, g_2, g_3 und B unterscheiden], welche so beschaffen sind, dass man jede der vier Gleichungen durch eine sofort angebbare einfache Transformation in jede der drei anderen überführen kann. — Unter diesen vier Differentialgleichungen nun befindet sich,*

A) wenn keine der drei Zahlen g_1, g_2, g_3 gleich Null ist, wenigstens eine, für welche $g_1 + g_2 + g_3 \leqq \frac{3}{4} m$ ist,

B) wenn eine der genannten drei Zahlen gleich Null ist, die beiden andern hingegen von Null verschieden sind, wenigstens eine, für welche $g_1 + g_2 + g_3 \leqq \frac{2}{3} m$, und

C) wenn nur eine der obigen drei Zahlen von Null verschieden ist, wenigstens eine, für welche $g_1 + g_2 + g_3 \leqq \frac{1}{2} m$ ist.

Der erste Theil dieses Lehrsatzes folgt unmittelbar aus den vorangehenden Bemerkungen. In Bezug auf den zweiten Theil begnügen wir uns damit, den Beweis für den Fall (A) zu geben.

Wir nehmen an, dass in den drei Differentialgleichungen (1′) (1″)(1‴) die Summen $g_1' + g_2' + g_3'$, $g_1'' + g_2'' + g_3''$, $g_1''' + g_2''' + g_3'''$ sämmtlich grösser als $\frac{3}{4} m$ seien, dass also

$$m - g_1 > \tfrac{3}{4} m\,, \quad m - g_2 > \tfrac{3}{4} m\,, \quad m - g_3 > \tfrac{3}{4} m$$

sei; dann brauchen wir, um den gewünschten Beweis zu führen, nur zu zeigen, dass nun in der Differentialgleichung (1) $g_1 + g_2 + g_3 \leqq \frac{3}{4} m$ wird. Aus obigen Annahmen folgt aber, dass

$$\tfrac{1}{4} m - g_1 > 0\,, \quad \tfrac{1}{4} m - g_2 > 0\,, \quad \tfrac{1}{4} m - g_3 > 0\,,$$

also

$$\tfrac{3}{4} m - (g_1 + g_2 + g_3) > 0,$$

und mithin

$$g_1 + g_2 + g_3 < \tfrac{3}{4} m$$

ist, w. z. b. w.

Die Beweise für die Fälle (B) und (C) sind ganz analog zu erbringen.

Wir wollen schliesslich die gefundenen Ergebnisse anwenden auf die von Herrn DE SPARRE[1]) behandelte Differentialgleichung

$$(3)\quad y'' + \left\{2\nu \frac{k^2 \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w} + 2\nu_1 \frac{\operatorname{sn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{cn} w} - 2\nu_2 \frac{\operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w}\right\} y'$$

$$+ \Big\{(\nu + \nu_1 + \nu_2 + n)(\nu + \nu_1 + \nu_2 - n - 1) k^2 \operatorname{sn}^2 w$$

$$+ (\nu - n_1)(\nu + n_1 + 1) \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 w}{\operatorname{dn}^2 w} + (\nu_1 - n_2)(\nu_1 + n_2 + 1) \frac{\operatorname{dn}^2 w}{\operatorname{cn}^2 w}$$

$$+ \frac{(\nu_2 - n_3)(\nu_2 + n_3 + 1)}{\operatorname{sn}^2 w} + A\Big\} y = 0\,,$$

in welcher n, n_1, n_2, n_3 positive ganze Zahlen sind, während A eine beliebige Constante bedeutet.

Diese Gleichung begreift einerseits alle in der bisherigen Litteratur betrachteten geraden PICARD'schen Differentialgleichungen II. Ordnung als specielle Fälle in sich, und kann andrerseits, sobald ν, ν_1, ν_2 ganze Zahlen sind[2]), als die allgemeinste

---

1) Acta mathematica, Band III.

2) Herr DE SPARRE führt diese Beschränkung nicht ein, versteht vielmehr unter ν, ν_1, ν_2 beliebige Constanten; die Differentialgleichung (3), deren Integration übrigens formal durch diese Annahme gar nicht beeinflusst wird, gehört dann, da ihre allgemeine Lösung aufhört, den Charakter einer rationalen Function zu besitzen, nicht mehr in das Gebiet der eigentlichen PICARD'schen Differentialgleichungen; sie ist vielmehr in diesem Falle jener Classe von homogenen linearen Differentialgleichungen zuzurechnen, für welche nicht die einzelnen Lösungen selbst, sondern erst deren *Quotienten* den Charakter rationaler Functionen besitzen. — Vergl. über diese Classe von Differentialgleichungen HALPHÉN, Mémoire sur la réduction etc. und HALPHÉN, Fonctions elliptiques, t. II.

gerade Picard'sche Differentialgleichung II. Ordnung mit den vier singulären Stellen $w = iK'$, $w = 0$, $w = K$, $w = K + iK'$ angesehen werden.

Wir beginnen mit der Zurückführung der Differentialgleichung (3) auf die Normalform.

Den drei singulären Stellen $w = 0$, $w = K$, $w = K + iK'$ dieser Differentialgleichung entsprechen der Reihe nach die determinirenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
s(s-1) - 2\nu_2 \cdot s + (\nu_2 - n_3)(\nu_2 + n_3 + 1) &= 0\,,\\
s(s-1) - 2\nu_1 \cdot s + (\nu_1 - n_2)(\nu_1 + n_2 + 1) &= 0\,,\\
s(s-1) - 2\nu \cdot s + (\nu - n_1)(\nu + n_1 + 1) &= 0\,,
\end{aligned}$$

welche bez. die Wurzeln

$$\begin{aligned}
&-n_3 + \nu_2\,, \quad n_3 + \nu_2 + 1\,,\\
&-n_2 + \nu_1\,, \quad n_2 + \nu_1 + 1\,,\\
&-n_1 + \nu\,, \quad n_1 + \nu + 1
\end{aligned}$$

haben. Um die Differentialgleichung (3) auf die Normalform zurückzuführen, werden wir also

$$y = z \cdot \mathrm{sn}^{\nu_2 - n_3} w \cdot \mathrm{cn}^{\nu_1 - n_2} w \cdot \mathrm{dn}^{\nu - n_1} w$$

setzen müssen; dann erhalten wir die Differentialgleichung

$$(4)\quad z'' + \left\{-2n_3 \frac{\mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w}{\mathrm{sn}\, w} + 2n_2 \frac{\mathrm{sn}\, w\, \mathrm{dn}\, w}{\mathrm{cn}\, w} + 2n_1 \frac{k^2 \mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w}{\mathrm{dn}\, w}\right\} z'$$
$$+ \{(n + n_1 + n_2 + n_3)(n_1 + n_2 + n_3 - n - 1)k^2 \mathrm{sn}^2 w + B\} z = 0\,,$$

welche offenbar die Form (1) besitzt, und auf welche infolgedessen der vorige Lehrsatz angewendet werden kann. Dabei verdienen zwei Fälle, in denen sich die Differentialgleichung beträchtlich vereinfacht, besondere Beachtung. Es gelten in Bezug auf dieselben die beiden folgenden Lehrsätze:

A) *Wenn von den vier ganzen Zahlen n, n_1, n_2, n_3 drei gleich Null sind, während die vierte von Null verschieden ist, so reducirt sich die Differentialgleichung* (4) — *und infolgedessen auch die Differentialgleichung* (3) — *auf die Lamé'sche, oder kann doch sofort auf diese zurückgeführt werden.*

B) *Wenn von den vier ganzen Zahlen n, n_1, n_2, n_3 zwei gleich Null, die beiden andern hingegen von Null verschieden sind, so* *kann die Differentialgleichung* (4) — *und infolgedessen auch die Differentialgleichung* (3) — *auf eine der drei Formen*

$$(5)\quad Z'' - 2l\frac{\lambda'(w)}{\lambda(w)}\cdot Z' + \{m(2l-m-1)k^2\,\mathrm{sn}^2 w + C\}\,Z = 0,$$

$$\lambda(w) \equiv \mathrm{sn}\,w\,,\quad \lambda(w) \equiv \mathrm{cn}\,w\,,\quad \lambda(w) \equiv \mathrm{dn}\,w$$

zurückgeführt werden [1]).

Beweis zu A. — Wenn wir $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ haben, so ist die Richtigkeit des Satzes evident; wenn dagegen $n = 0$ und etwa noch $n_1 = n_2 = 0$ ist, sodass die Gleichung (4)

$$z'' - 2n_3\frac{\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w}{\mathrm{sn}\,w}\cdot z' + \{n_3(n_3-1)k^2\mathrm{sn}^2 w + B\}\,z = 0$$

lautet, so geht dieselbe durch die Substitution

$$z = Z\cdot\mathrm{sn}^{n_3} w\,,\quad w = iK' + \varepsilon$$

in die Lamé'sche Differentialgleichung

$$Z'' - \{n_3(n_3+1)k^2\mathrm{sn}^2\varepsilon + C\}\,Z = 0$$

über. Analog in den beiden andern Fällen.

Beweis zu B. — Es sei zunächst $n_1 = n_2 = 0$, sodass die Differentialgleichung (4)

$$z'' - 2n_3\frac{\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w}{\mathrm{sn}\,w}\cdot z' + \{(n_3+n)(n_3-n-1)\cdot k^2\mathrm{sn}^2 w + B\}\,z = 0$$

lautet. Setzen wir dann $n_3 = l$, $n_3 + n = m$, so kann dieselbe

$$z'' - 2l\frac{\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w}{\mathrm{sn}\,w}\cdot z' + \{m(2l-m-1)\,k^2\mathrm{sn}^2 w + B\}\,z = 0$$

geschrieben werden, besitzt also unmittelbar die Form (5).

Es sei ferner $n_1 = n_3 = 0$ oder $n_2 = n_3 = 0$. Im ersten Falle hat man $n_2 = l$, $n_2 + n = m$, im zweiten hingegen $n_1 = l$, $n_1 + n = m$ zu setzen, um die Differentialgleichung bez. in der Form

$$z'' + 2l\frac{\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w}{\mathrm{cn}\,w}\cdot z' + \{m(2l-m-1)k^2\mathrm{sn}^2 w + B\}\,z = 0$$

oder in der Form

$$z'' + 2l\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w}{\mathrm{dn}\,w}\cdot z' + \{m(2l-m-1)k^2\mathrm{sn}^2 w + B\}\,z = 0$$

zu erhalten.

---

1) Vergl. betreffs dieser drei Differentialgleichungen Hermite, Sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé. Crelle, 89.

Wenn ferner $n = 0$, $n_3 = 0$ ist, also die Gleichung (4)

$$z'' + \left\{2n_1 \frac{k^2 \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w} + 2n_2 \frac{\operatorname{sn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{cn} w}\right\} z' +$$
$$\{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1) k^2 \operatorname{sn}^2 w + B\} z = 0$$

lautet, so kann man dieselbe entweder durch die Substitutionen

$$z = Z \cdot \operatorname{cn}^{n_1 + n_2} w, \quad w = \varepsilon + K + iK'$$

auf die Differentialgleichung

$$Z'' - 2n_1 \frac{\operatorname{cn} \varepsilon \operatorname{dn} \varepsilon}{\operatorname{sn} \varepsilon} Z' + \{(n_1 + n_2)(n_1 - n_2 - 1) k^2 \operatorname{sn}^2 w + C\} Z = 0$$

oder aber durch die Substitutionen

$$z = Z \cdot \operatorname{dn}^{n_1 + n_2} w, \quad w = \varepsilon + K$$

auf die Differentialgleichung

$$Z'' - 2n_2 \frac{\operatorname{cn} \varepsilon \operatorname{dn} \varepsilon}{\operatorname{sn} \varepsilon} \cdot Z' + \{(n_1 + n_2)(n_2 - n_1 - 1) k^2 \operatorname{sn}^2 \varepsilon + C\} Z = 0$$

zurückführen, also in jedem Falle auf eine Differentialgleichung von der Form (5). Zu bemerken ist hierbei, dass, wofern nicht gerade $n_1 = n_2$ ist, die eine der beiden Zahlen n_1 und n_2 nothwendig kleiner als $\frac{n_1 + n_2}{2}$ sein muss.

Analoge Resultate ergeben sich in den Fällen $n = n_1 = 0$ und $n = n_2 = 0$.

Im Falle $n = n_1 = 0$ würden wir durch die Substitutionen

$$z = Z \cdot \operatorname{sn}^{n_2 + n_3} w, \quad w = \varepsilon + iK'$$

zu der Differentialgleichung

$$Z'' + 2n_2 \frac{k^2 \operatorname{sn} \varepsilon \operatorname{cn} \varepsilon}{\operatorname{dn} \varepsilon} \cdot Z' + \{(n_2 + n_3)(n_2 - n_3 - 1) k^2 \operatorname{sn}^2 \varepsilon + C\} Z = 0,$$

und durch die Substitutionen

$$z = Z \cdot \operatorname{cn}^{n_2 + n_3} w, \quad w = \varepsilon + K + iK'$$

zu der Differentialgleichung

$$Z'' + 2n_3 \frac{k^2 \operatorname{sn} \varepsilon \operatorname{cn} \varepsilon}{\operatorname{dn} \varepsilon} \cdot Z' + \{(n_2 + n_3)(n_3 - n_2 - 1) k^2 \operatorname{sn}^2 \varepsilon + C\} Z = 0$$

gelangen. Man wird sich mit grösserem Vortheil der ersten oder der zweiten Transformation bedienen, je nachdem $n_2 \lesseqgtr n_3$ ist. [Falls $n_2 = n_3$ ist, sind offenbar die beiden transformirten Differentialgleichungen mit einander identisch.]

Wenn schliesslich $n = n_2 = 0$ ist, kann man sich der Substitutionen

$$z = Z \cdot \operatorname{sn}^{n_1 + n_3} w\,, \quad w = \varepsilon + iK'$$

oder aber auch der Substitutionen

$$z = Z \cdot \operatorname{dn}^{n_1 + n_3} w\,, \quad w = \varepsilon + K$$

bedienen; im ersten Falle kommt man zu der Differentialgleichung

$$Z'' + 2n_1 \frac{\operatorname{sn}\varepsilon \operatorname{dn}\varepsilon}{\operatorname{cn}\varepsilon} \cdot Z' + \{(n_1 + n_3)(n_1 - n_3 - 1)k^2 \operatorname{sn}^2\varepsilon + C\} Z = 0,$$

im zweiten zu der Differentialgleichung

$$Z'' + 2n_3 \frac{\operatorname{sn}\varepsilon \operatorname{dn}\varepsilon}{\operatorname{cn}\varepsilon} \cdot Z' + \{(n_1 + n_3)(n_3 - n_1 - 1)k^2 \operatorname{sn}^2\varepsilon + C\} Z = 0.$$

Die erste Transformation ist vortheilhafter, wenn $n_1 < n_3$, die zweite hingegen, wenn $n_1 > n_3$ ist. [Sobald $n_1 = n_3$ ist, fallen die beiden transformirten Differentialgleichungen zusammen.]

§ 11.

Vollständige Integration gerader Picard'scher Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Bei der vollständigen Integration der geraden Picard'schen Differentialgleichungen II. Ordnung können wir uns, früheren Ergebnissen zufolge, auf solche Differentialgleichungen beschränken, welche die Normalform besitzen, welche sich also

$$(1)\quad y'' + \Big\{-2g_1 \frac{\operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w} + 2g_2 \frac{\operatorname{sn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{cn} w} + 2g_3 \frac{k^2 \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w}$$
$$- \sum_1^r {}_\varrho \frac{2h_\varrho \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \alpha_\varrho}\Big\} y' + \Big\{m(2l - m - 1) \cdot k^2 \operatorname{sn}^2 w + B$$
$$+ \sum_1^r {}_\varrho \frac{2C_\varrho \operatorname{sn}\alpha_\varrho \operatorname{cn}\alpha_\varrho \operatorname{dn}\alpha_\varrho}{\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \alpha_\varrho}\Big\} y = 0$$

schreiben lassen. Mit der vollständigen Integration derartiger Picard'scher Differentialgleichungen wollen wir uns nunmehr beschäftigen. Dabei soll, wie schon bemerkt, von dem auf Seite 56 erwähnten Falle abgesehen werden.

Der Gleichung (1) kann, als einer Picard'schen Differentialgleichung, welche die Normalform besitzt, und deren allgemeine Lösung im Punkte $w = iK'$ von der m-ten Ordnung unendlich gross wird, stets durch eine doppeltperiodische Function zweiter Art $F(w)$ mit der einzigen m-fachen singulären Stelle $w = iK'$ Genüge geleistet werden, durch eine Function $F(w)$ also, welche man nach Belieben in einer der beiden Formen

$$\frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\cdots\vartheta_1(v+\nu_m)}{\vartheta_0(v)^m}\, e^{\lambda w - \sum\limits_1^m {}_k \frac{\vartheta_0'(\nu_k)}{\vartheta_0(\nu_k)} v}$$

oder

$$\frac{\psi^{(m-1)}(w)}{(m-1)!} + B_1 \cdot \frac{\psi^{(m-2)}(w)}{(m-2)!} + \cdots + B_{m-1}\cdot \psi(w),$$

$$\psi(w) \equiv \frac{\vartheta_1(v+\nu)}{\vartheta_0(v)}\, e^{Aw - \frac{\vartheta_0'(\nu)}{\vartheta_0(\nu)} v}$$

schreiben kann. Um diese Function $F(w)$ zu ermitteln, brauchen wir, wie uns aus § 6 bekannt ist, nur die $2m+1$ ersten Coefficienten $L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}$ der entsprechenden Reihenentwickelung

$$F(iK' + \varepsilon) = \frac{C}{\varepsilon^m}\{1 + L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 + L_3\varepsilon^3 + \cdots\}$$

zu berechnen; da übrigens durch diese Coefficienten die Function $F(w)$ eindeutig bestimmt ist, so werden sich für die letzteren im Allgemeinen zwei Werthsysteme ergeben müssen; denn der Differentialgleichung (1) kann ja, wenn nicht gerade der oben erwähnte Ausnahmefall vorliegt, durch zwei verschiedene Functionen von der in Rede stehenden Beschaffenheit Genüge geleistet werden [durch die Function $F(w)$ und die zu derselben conjugirte Function $F(-w)$].

Um aber $L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}$ zu berechnen, machen wir zunächst von der bekannten Methode der unbestimmten Coefficienten Gebrauch.

In der That, durch die Forderung, dass die Reihe

$$\text{(L)} \quad \left(\frac{1}{w - iK'}\right)^m \{1 + L_1(w - iK') + L_2(w - iK')^2 + \cdots\}$$

der Differentialgleichung (1) identisch Genüge leisten soll, werden von den Coefficienten L_1, L_2, L_3, ... dieser Reihe die $2m - 2l$ ersten eindeutig bestimmt, während sich alle übrigen als ganze lineare Functionen einer zunächst unbekannten Grösse, die wir ϱ nennen wollen, ergeben; mit anderen Worten, die fragliche Reihe ergiebt sich in der Form

$$\left(\frac{1}{w - iK'}\right)^m \{1 + \mathsf{A}_1(w - iK') + \cdots\}$$
$$+ \varrho \cdot (w - iK')^{m+1-2l} \cdot \{1 + \mathsf{B}_1(w - iK') + \cdots\},$$

wobei die A und B eindeutig bestimmt sind, die Grösse ϱ hingegen unbestimmt bleibt. Denn die obige Forderung führt auf ein System von Gleichungen

$$(2) \qquad R_0 = 0\,, \quad R_1 = 0\,, \quad R_2 = 0\,, \quad R_3 = 0\,, \; \ldots,$$

welche die Form

$$\begin{aligned} R_0 &\equiv A_{00} = 0\,, \\ R_1 &\equiv A_{01} \cdot L_1 + A_{11} = 0\,, \\ R_2 &\equiv A_{02} \cdot L_2 + A_{12} \cdot L_1 + A_{22} = 0\,, \\ R_3 &\equiv A_{03} \cdot L_3 + A_{13} \cdot L_2 + A_{23} \cdot L_1 + A_{33} = 0\,, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

besitzen, also in Bezug auf die Coefficienten L_1, L_2, ... linear sind; und zwar wird, weil die zu der singulären Stelle $w = iK'$ unserer Differentialgleichung gehörige determinirende Gleichung

$$s(s-1) + 2l \cdot s + m(2l - m - 1) = 0$$

lautet,

$$A_{0,k} = (2l - 2m - 1 + k)\,k\,,$$

also insbesondere

$$A_{00} = 0\,, \quad \text{und} \quad A_{0,2m+1-2l} = 0\,.$$

Es handelt sich nun bloss noch darum, jene Grösse ϱ so zu bestimmen, dass die Reihe (L), von einem constanten Factor abgesehen, einen Ausdruck von der Art der Function $F(w)$ darstellt.

Zu diesem Zwecke bedienen wir uns der in den §§ 3—4 entwickelten Hilfsmittel, indem wir die zur Function $F(w)$ gehörenden Polynome $\Pi(x)$, $\Pi_1(x)$, $\Pi_2(x)$ in Betracht ziehen. In der That, die Coefficienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{m+1}, \gamma_0, \ldots, \gamma_m$

dieser drei Polynome sind ja vermöge ihrer Abhängigkeit von den Grössen $L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}$ zum Theil eindeutig bestimmt, zum Theil ergeben sie sich als ganze rationale Functionen von ϱ; stellen wir also zwischen den genannten Polynomen die Gleichung

$$(3)\quad x(1-x)(1-k^2x)\cdot \Pi'(x)^2 = \Pi_2(x)^2 + \Pi(x)\cdot \Pi_1(x)$$

her und drücken aus, dass dieselbe identisch, d. h. für jeden beliebigen Werth von x, stattfinden soll, so erhalten wir [vgl. § 4] ein System von $2m+1$ Relationen, welche zum Theil Identitäten, zum Theil aber algebraische Gleichungen mit der Unbekannten ϱ sein werden. Diese algebraischen Gleichungen nun müssen zwei gemeinschaftliche Wurzeln, ϱ_1 und ϱ_2, haben; und zu jeder dieser beiden Wurzeln gehört nach unsern obigen Ergebnissen ein völlig bestimmtes System von Werthen der $2m+1$ Coefficienten $L_1, L_2, \ldots, L_{2m+1}$.

Das soeben skizzirte Verfahren zur vollständigen Integration der Differentialgleichung (1) lässt sich offenbar auf alle Picard-schen Differentialgleichungen II. Ordnung anwenden, welche die Normalform besitzen. In dem besonderen Falle der Differentialgleichung (1) vereinfacht sich dasselbe übrigens beträchtlich infolge des Umstandes, dass diese Differentialgleichung sich durch Vertauschung von w mit $-w$ nicht ändert.

In der That, aus diesem Umstande folgt, dass die Relationen $R_1=0$, $R_2=0$, $R_3=0$, $R_4=0$, ... die folgende Form besitzen:

$$R_1 \equiv (2l-2m)\cdot L_1 = 0\,,$$
$$R_2 \equiv (2l-2m+1)\cdot L_2 + A = 0\,,$$
$$R_3 \equiv (2l-2m+2)\cdot L_3 + B\cdot L_1 = 0\,,$$
$$R_4 \equiv (2l-2m+3)\cdot L_4 + C\cdot L_2 + D = 0\,,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

Diese Gleichungen aber liefern für die Coefficienten $L_1, L_3, L_5, \ldots$ $\ldots, L_{2m-2l-1}$ den gemeinschaftlichen Werth Null und bestimmen ausserdem sowohl die sämmtlichen Coefficienten mit geradem Index — $L_2, L_4, L_6, \ldots$ — als auch die Verhältnisse der weiteren Coefficienten mit ungeradem Index, — $L_{2m-2l+1}, L_{2m-2l+3}, \ldots$ — eindeutig. Schreiben wir also — im Anschluss an § 3 —

$$F(iK' + \varepsilon) = C \cdot [S_1 + S_2],$$

$$S_1 = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m \{1 + L_2\varepsilon^2 + L_4\varepsilon^4 + \cdots\},$$

$$S_2 = \varepsilon^{m-2l+1}\{L_{2m-2l+1} + L_{2m-2l+3}\varepsilon^2 + \cdots\},$$

so ist durch die Gleichungen (2) die unendliche Reihe S_1 eindeutig gegeben, die unendliche Reihe S_2 dagegen bis auf einen constanten Factor ϱ bestimmt. Berechnen wir daher die Coefficienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{m+1}, \gamma_0, \ldots, \gamma_m$, so zeigt sich vermöge der am Schluss des § 3 gemachten Bemerkungen, dass die α und β, soweit sie nicht eindeutig bestimmt sind, lineare Functionen von ϱ^2 werden, und dass sich die Grössen γ, soweit sie nicht den Werth Null erhalten, in der Form $\varrho^2 \cdot$ const. ergeben. Stellen wir dann zwischen $\Pi(x)$, $\Pi_1(x)$, $\Pi_2(x)$ die Gleichung (3) her und drücken aus, dass diese für jeden Werth von x bestehen soll, so gehen aus derselben u. a. mehrere nicht identische Relationen hervor, welche die Grösse ϱ nur in der 2. und in der 4. Potenz enthalten und infolgedessen als algebraische — zum Theil lineare, zum Theil quadratische — Gleichungen mit der Unbekannten ϱ^2 angesehen werden können. Es muss nun möglich sein, allen diesen Gleichungen durch einen bestimmten Werth von ϱ^2 Genüge zu leisten; und diesem entsprechen zwei nur durch das Vorzeichen von einander verschiedene Werthe von ϱ. Je nachdem wir den einen oder den andern der beiden Werthe nehmen, erhalten wir die Function $F(w)$ selbst oder die zu ihr conjugirte Function $F(-w)$ [vergl. § 3]. Gleichzeitig bemerken wir, dass der Ausnahmefall, in welchem $F(-w) : F(w)$ eine blosse Constante ist, dann und nur dann eintritt, wenn den obigen algebraischen Gleichungen durch den Werth $\varrho^2 = 0$ genügt wird.

Wir haben schliesslich, mit Rücksicht auf die Ergebnisse des § 6, den folgenden

Lehrsatz. *Es sei eine beliebige Picard'sche Differentialgleichung II. Ordnung vorgelegt, welche die Normalform besitzt, und zwar möge die allgemeine Lösung im Punkte $w = iK'$ von der m-ten Ordnung unendlich gross werden; dann muss man, um die beiden jener Differentialgleichung Genüge leistenden doppeltperiodischen Functionen zweiter Art zu ermitteln, ausser einer gewissen quadratischen Gleichung noch zwei algebraische Gleichungen m-ten*

Grades auflösen, falls diese Functionen in Productform dargestellt werden sollen; wünscht man sie dagegen in Summenform zu erhalten, so sind zu ihrer Auffindung ausser der Auflösung jener quadratischen Gleichung keine anderen algebraischen Operationen erforderlich als die Auflösung linearer Gleichungen[1]. — *Ist insbesondere die vorgelegte Picard'sche Differentialgleichung II. Ordnung eine gerade, so hat die erwähnte quadratische Gleichung die Form*

$$\varrho^2 = const.$$

Wir erläutern das Verfahren an einigen Beispielen.

Wenn die LAMÉ'sche Differentialgleichung

$$y'' + \{-m(m+1)k^2 \operatorname{sn}^2 u + B\} y = 0 \tag{1}$$

zur Integration vorgelegt ist, so werden durch die Gleichungen (2) die Coefficienten $L_1, L_2, \ldots, L_{2m}$ und L_{2m+2} eindeutig bestimmt, während L_{2m+1} unbestimmt bleibt und infolgedessen gleich ϱ gesetzt werden kann; insbesondere aber erhalten wir

$$L_1 = L_3 = L_5 = \cdots = L_{2m-1} = 0,$$

wogegen sich L_{2k} als ganze rationale Function k-ten Grades von B ergiebt. Setzen wir demgemäss

$$S_1 = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m \{1 + L_2\varepsilon^2 + L_4\varepsilon^4 + \cdots\},\quad S_2 = \varrho\cdot\varepsilon^{m+1}\{1 + L_{2m+2}\varepsilon^2 + \cdots\},$$

und berechnen die Coefficienten $\alpha_1 \ldots \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{m+1}, \gamma_0 \cdots \gamma_m$ auf Grund der in § 4 entwickelten Principien, so zeigt sich, dass dieselben mit alleiniger Ausnahme von γ_m eindeutig bestimmt sind, und zwar ergiebt sich $\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{m-1} = 0$, während α_k sowie β_k eine ganze rationale Function k-ten Grades von B wird; für γ_m dagegen erhalten wir die Formel

$$\gamma_m = (2m+1)\cdot\varrho^2.$$

Um nun ϱ zu bestimmen, bilden wir mit den für die α, β, γ gefundenen Werthen die Relation (3); von den $2m+1$ Gleichungen

---

[1] Herr HERMITE hatte die Freundlichkeit, den Verfasser darauf hinzuweisen, dass man im Stande sein müsse, jede PICARD'sche Differentialgleichung II. Ordnung vollständig zu integriren, ohne hierzu der Auflösung algebraischer Gleichungen von einem höheren als dem zweiten Grade zu bedürfen. Aus dem Bestreben, diesem Gesichtspunkte Rechnung zu tragen, gingen die in § 6 der gegenwärtigen Arbeit enthaltenen Betrachtungen hervor.

zwischen den α, β, γ, auf welche diese Relation führt, sind die $2m$ ersten frei von ϱ, müssen also nothwendig lauter Identitäten sein, nur die letzte Gleichung

$$0 = \gamma_m^2 + \alpha_m \cdot \beta_{m+1},$$

welche wir auch

$$0 = (2m+1) \cdot \varrho^2 + \alpha_m \cdot \beta_{m+1}$$

schreiben können, enthält die Grösse ϱ^2 und bestimmt dieselbe offenbar als ganze rationale Function $2m+1$-ten Grades von B. Soll bei der Lamé'schen Differentialgleichung (4) der Ausnahmefall eintreten, so muss demnach die Grösse B einer algebraischen Gleichung $2m+1$-ten Grades Genüge leisten.

Es möge ferner die schon mehrfach erwähnte Elliot'sche Differentialgleichung

$$(5)\quad y'' - 2g\frac{\operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w} \cdot y' + \{m(2g-m-1)k^2 \operatorname{sn}^2 w + B\}\, y = 0$$

vorgelegt sein; dann können wir uns bekanntlich auf den Fall beschränken, wo $g \leqq \frac{m}{2}$ ist.

Es sei zunächst $g < \frac{m}{2}$. Dann ist $m - 2g + 1 = m - 2l + 1 \geqq 2$; es enthält also sowohl die Reihe S_2 als auch die aus ihr durch Differentiation hervorgehende Reihe S_2' nur Glieder mit positiven Exponenten. Infolgedessen hängen die α und β nur von L_2, L_4, L_6, ... ab, sind also sämmtlich eindeutig bestimmt, wogegen sich $\gamma_{m-g} = (2m - 2g + 1)\varrho^2$ ergiebt; alle übrigen γ erhalten bekanntlich den Werth Null. Bilden wir nun die Relation (3), so bemerken wir, dass die $2m+1$ aus derselben hervorgehenden Gleichungen zwischen den α, β, γ sämmtlich Identitäten sein müssen, mit Ausnahme der einen, die man durch Vergleichung der Coefficienten von x^{2g} erhält; diese stellt ϱ^2 als ganze rationale Function $2m - 2g + 1$-ten Grades von B dar.

Es sei zweitens $g = \frac{m}{2}$. Dann ist $m - 2g + 1 = m - 2l + 1 = 1$, es besteht also die Reihe S_2 aus lauter Gliedern mit positiven Exponenten, wogegen die Reihe S_2' ausserdem ein von ε freies Glied enthält. Mithin sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ eindeutig bestimmt, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ ebenfalls, aber β_{m+1} ergiebt sich linear durch ϱ^2 ausgedrückt. Zur Bestimmung der Grösse ϱ^2 verwendet man in diesem Falle am besten die letzte unter den $2m+1$ Relationen, denen die Gleichung (3) äquivalent ist; diese Relation aber lautet

$$0=\gamma_m^2+\alpha_m\cdot\beta_{m+1}\,,$$

und hieraus ergiebt sich, da in unserem Falle $\gamma_m=0$, α_m aber unabhängig von ϱ und überdies verschieden von Null sein muss, zur Bestimmung von ϱ^2 die Gleichung

$$\beta_{m+1}=0\,,$$

welche diese Grösse als ganze rationale Function $m+1$-ten Grades von B darstellt.

Bei der Differentialgleichung (5) tritt, sowohl wenn $g<\frac{m}{2}$ als auch wenn $g=\frac{m}{2}$ ist, der Ausnahmefall dann und nur dann ein, wenn B einer gewissen algebraischen Gleichung $2m-2g+1$-ten Grades Genüge leistet.

In ähnlicher Weise, wie die Gleichung (5), lassen sich die analog gebauten Differentialgleichungen

$$y''+2g\frac{\operatorname{sn}w\operatorname{dn}w}{\operatorname{cn}w}\cdot y'+\{m(2g-m-1)k^2\operatorname{sn}^2w+B\}y=0,$$

$$y''+2g\frac{k^2\operatorname{sn}w\operatorname{cn}w}{\operatorname{dn}w}\cdot y'+\{m(2g-m-1)k^2\operatorname{sn}^2w+B\}y=0,$$

behandeln.

Als weiteres Beispiel nehmen wir den Fall, wo die betrachtete Differentialgleichung

$$(6)\quad y''-\frac{2\operatorname{sn}w\operatorname{cn}w\operatorname{dn}w}{\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\alpha}\cdot y'+\left\{B+\frac{2C\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^2w-\operatorname{sn}^2\alpha}\right\}y=0$$

lautet, wo also $m=1$, $l=1$ ist.

Die vollständige Lösung wird im Punkte $w=iK'$ von der ersten Ordnung unendlich gross und ergiebt sich, wenn $w=iK'+\varepsilon$ gesetzt wird, in der Form

$$S_1+S_2=\frac{1}{\varepsilon}\{1+L_2\varepsilon^2+L_4\varepsilon^4+\cdots\}+\{L_1+L_3\varepsilon^2+\cdots\},$$

wobei die Coefficienten $L_2, L_4, \ldots$ der Reihe S_1 eindeutig gegeben, die Coefficienten $L_1, L_3, \ldots$ der Reihe S_2 hingegen bis auf einen gemeinschaftlichen constanten Factor bestimmt sind;

es handelt sich nun darum, denjenigen Werth zu bestimmen, den dieser constante Factor ϱ erhalten muss, wenn durch

$$S_1 + S_2$$

eine doppeltperiodische Function zweiter Art

$$F(w) \equiv \frac{\vartheta_1(v+\nu)}{\vartheta_0(v)} e^{\lambda w - \frac{\vartheta_0'(\nu)}{\vartheta_0(\nu)} v}$$

dargestellt werden soll. Zu diesem Zwecke aber bedienen wir uns der in § 4 abgeleiteten algebraischen Relationen

$$\begin{aligned} k^2 = 2L_1(3L_3 - L_1L_2 - s_2 \cdot L_1) - (2L_2 - L_1^2 - s_2)(2L_2 + 2s_2) \\ - 6L_4 + L_2^2 + 2s_2 \cdot L_2 + s_2^2 - 2s_4, \\ 0 = (-3L_3 + L_1L_2 + s_2 \cdot L_1)^2 \\ + (2L_2 - L_1^2 - s_2)(-6L_4 + L_2^2 + 2s_2 \cdot L_2 + s_2^2 - 2s_4), \end{aligned}$$

welche vermöge der soeben ausgesprochenen Forderung zwischen L_1, L_2, L_3, L_4 stattfinden müssen; diese Relationen werden offenbar lineare Gleichungen mit der Unbekannten ϱ^2. Es sei ϱ ein denselben genügender Werth, und $F(w)$ die Function, die man vermöge § 6 aus den entsprechenden Werthen von L_1, L_2, L_3 erhält; dann befriedigt offenbar auch $-\varrho$ diese Gleichungen, und die zu den entsprechenden Grössen $-L_1$, $+L_2$, $-L_3$ gehörende Function $F_1(w) \equiv F(-w)$ wird ebenfalls eine Lösung unserer Differentialgleichung.

F. **Hausdorff**, *Infinitesimale Abbildungen der Optik.* (Vorgelegt von Herrn H. Bruns, o. M.)

1.

Ein Aufbau der geometrischen Optik auf breiterer mathematischer Grundlage, über die beschränkten Zwecke der praktischen und rechnenden Optik hinaus, ist erst neuerdings zu Stande gekommen. Nachdem bereits Abbe[1]) in strengerer Weise als seine Vorgänger den Antheil der Liniengeometrie aus den optischen Sätzen herausgearbeitet hatte, gab Bruns[2]) eine äusserst consequente und umfassende Darstellung, indem er alle Strahlenabbildungen zusammennahm, die dem Malus'schen Satze gehorchen. Dieser Satz, wonach flächennormale Büschel bei jeder Brechung (und Spiegelung) flächennormal bleiben, gilt für alle optischen Abbildungen in isotropen Medien (nicht auch für die Doppelbrechung in Krystallen); die umgekehrte Frage, ob jede Abbildung, die dem Malus'schen Satze genügt, durch optische Hülfsmittel zu verwirklichen sei, ist von Bruns gestellt, aber nicht beantwortet worden. Einen Beitrag hierzu will die folgende Arbeit liefern, und zwar mit Benutzung eines analytischen Verfahrens, zu dem die Anregung in der Bruns'schen Abhandlung selbst enthalten ist. Eine Strahlenabbildung, die dem Malus'schen Satze entspricht, ist nämlich nichts anderes als eine *Berührungstransformation* in fünf Variablen von specieller Form; das »Eikonal« der Abbildung ist seinem Hauptbestandtheil nach identisch mit der »erzeugenden Function« der Berührungstransformation. Beiläufig sei erwähnt, dass dieser Zusammenhang zwischen der Optik und den fruchtbaren Lie'schen Theorien

1) Czapski, Theorie der optischen Instrumente nach Abbe, Breslau 1893.
2) Das Eikonal, Abhandlungen der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, 1895.

nicht der einzige ist; auch die Bewegung des Lichtstrahls im elastischen Medium führt unter Vermittlung des HUYGENS'schen Princips auf eine gewisse Klasse von Berührungstransformationen [1]). Der grosse Vortheil nun, den das Rechnen mit *infinitesimalen* Berührungstransformationen gewährt, legt es nahe, auch *unendlich kleine* Strahlenabbildungen der Optik zur Untersuchung zu ziehen, d. h. solche, die jeden Strahl des Objectraumes in einen unendlich benachbarten Strahl des Bildraumes überführen. Das Ergebniss einer hiermit angestellten Probe fällt nicht ungünstig aus; u. a. lässt sich die wichtige Frage nach der *Existenz eines idealen Fernrohrobjectivs* auf diesem Wege, wenn auch nicht vollständig, entscheiden. Worin der Vortheil der Einführung infinitesimaler Abbildungen, gegenüber den endlichen, besteht, kann man im voraus abschätzen: gewisse Beziehungen lassen sich hier explicite, statt implicite, schreiben, und an Stelle successiver Ausführung zweier Operationen tritt im Gebiet des Unendlichkleinen die blosse Superposition. Beispielsweise erfordert das Eikonal einer zweifachen Brechung eine meist undurchführbare Elimination von Variablen; die entsprechende charakteristische Function für unendlich kleine Brechungen dagegen ist additiv aus zwei Einzelbestandtheilen zusammengesetzt (so lange man sich auf die Glieder niedrigster Ordnung beschränkt). Aber auch die Schwächen dieser Methode liegen auf der Hand: die infinitesimale Operation verhält sich zur endlichen, wie das erste Glied einer Reihenentwicklung zur ganzen Reihe, wie die nächste Umgebung eines Punktes zur ganzen Curve oder Fläche; Ergebnisse, die sich auf eine infinitesimale Operation beziehen, lassen sich nicht ohne weiteres auf die endliche übertragen, sondern geben höchstens einen heuristischen Fingerzeig; ausserdem — und hierin liegt für unser Vorhaben eine wirkliche Einschränkung — ist bereits die Annahme der Existenz infinitesimaler Operationen eine Specialisirung der endlichen, weil sie das Vorhandensein passend gewählter *willkürlicher Parameter* voraussetzt. Wenn zwischen den Variablen x und X eine Beziehung

$$X = f(x, a)$$

besteht, die den willkürlichen Parameter a enthält, so sprechen

1) LIE-SCHEFFERS, Geometrie der Berührungstransformationen I. (Leipzig 1896).

wir von einer Schar Transformationen zwischen x und X; jedem bestimmten Werthe a entspricht eine Transformation der Schar. Giebt es nun einen gewissen Werth, etwa $a = 0$, des Parameters, für den sich $f(x, a)$ identisch auf x reducirt, so heisst diese Transformation

$$X = f(x, 0) = x$$

die Identität der Schar, und jede ihr unendlich benachbarte eine infinitesimale Transformation; die Gleichung einer solchen ist, nach Potenzen von a entwickelt,

$$X = x + ax_1 + \frac{a^2}{2} x_2 + \cdots,$$

wo $x_1, x_2, \cdots$ Functionen von x sind. Dagegen kann man nicht von der infinitesimalen Transformation einer einzelnen Transformation $X = f(x)$ sprechen, die keinen willkürlichen Parameter enthält; ebenso wären Scharen von Transformationen auszuschliessen, denen die Identität nicht angehört. Dieselbe Erwägung gilt für Transformationen zwischen mehren Variablen mit mehren Parametern. Wenn wir daher im Folgenden die Existenz infinitesimaler Strahlenabbildungen voraussetzen, so beschränken wir uns auf solche endlichen Abbildungen, die mindestens ein willkürliches Element enthalten; isolirte Fälle, also Abbildungen mit ganz bestimmten Werthen der Brechungsexponenten und ganz bestimmter Anordnung der brechenden Flächen, bleiben von unserer Betrachtung ausgeschlossen. Eine noch weiter gehende Einschränkung, die wir erst im Lauf der Untersuchung begründen können, soll hier schon ausgesprochen werden. Denkt man sich eine *endliche* Abbildung optisch verwirklicht, durch ein System brechender Flächen $F_{12}, F_{23}, \ldots F_{\alpha-1,\alpha}$, welche die Medien $M_1, M_2, M_3 \ldots M_\alpha$ mit den Brechungsindices $n_1, n_2, \ldots n_\alpha$ von einander trennen, so leitet man daraus durch einzelne oder combinirte Anwendung folgender beiden Verfahren eine infinitesimale Abbildung ab:

entweder lässt man alle n_α bis auf kleine Grössen erster Ordnung einander gleich werden, *oder* man wählt alle brechenden Flächen unendlich benachbart und den ersten Brechungsexponenten gleich dem letzten.

Die erste Operation setzt voraus, dass die Verhältnisse der n_α (soweit sie von Eins verschieden sind) wirklich disponibel seien, während die brechenden Flächen ebenfalls disponibel oder von vornherein gegeben sein können. Bei dem zweiten Verfahren können umgekehrt die n_α gegeben sein, während in die F die nöthige Art und Anzahl verfügbarer Elemente eingehen muss. Wir werden uns aber künftig auf infinitesimale Abbildungen der ersten Art beschränken.

Mit Rücksicht auf das mehr optische als rein mathematische Interesse der Betrachtung soll im Folgenden dasjenige, was aus dem Gebiete der Berührungstransformationen des Raumes gebraucht wird, besonders abgeleitet werden; im Übrigen ist auf die ausführliche Theorie im zweiten Bande der Lie'schen Transformationsgruppen zu verweisen.

2.

Wir schreiben die Gleichungen eines Strahls σ in der Form

$$(1)\qquad \frac{x-0}{m} = \frac{y-h}{p} = \frac{z-k}{q}, \quad m^2 + p^2 + q^2 = 1,$$

wo m, p, q die Richtungscosinus von σ gegen die Coordinatenachsen, $0, h, k$ die Coordinaten seines Schnittpunkts mit der yz-Ebene (Grundebene) sind, und wählen h, k, p, q als die vier Bestimmungsstücke von σ (Strahlencoordinaten). Die aus (1) folgenden Gleichungen

$$(2)\qquad h = y - x\frac{p}{m}, \qquad k = z - x\frac{q}{m}$$

geben h, k, wenn die beiden anderen Coordinaten p, q und ein beliebiger Punkt x, y, z des Strahles gegeben ist. Neben diesen Grössen, die sich auf den Objectraum beziehen, sollen die entsprechenden Grössen für den Bildraum eingeführt und mit grossen Buchstaben bezeichnet werden. Die »Abbildung« des einen Raums auf den andern besteht in der Zuordnung eines Strahls Σ zu jedem Strahl σ, d. h. in vier Gleichungen, welche die Strahlencoordinaten H, K, P, Q als Functionen von h, k, p, q definiren und umgekehrt.

Eine Mannigfaltigkeit von ∞^2 Strahlen heisst ein Strahlenbüschel; man erhält ein solches, wenn man h, k, p, q als Functionen zweier Parameter, oder auch p, q als Functionen von h, k (resp. umgekehrt) ansieht. Ein flächennormales Büschel ist durch die Forderung definirt, dass

$$pdh + qdk$$

ein vollständiges Differential sei. (Vgl. Eikonal, p. 333.) Ist $\xi = \xi(\eta, \zeta)$ die Gleichung einer Fläche (Wellenfläche) und hat ihre durch den Punkt $\xi\eta\zeta$ gehende Normale die Strahlencoordinaten h, k, p, q, so ist $\left[\xi_\eta = \frac{\partial\xi}{\partial\eta}, \xi_\zeta = \frac{\partial\xi}{\partial\zeta}\right]$,

$$\frac{m}{-1} = \frac{p}{\xi_\eta} = \frac{q}{\xi_\zeta}, \quad h = \eta - \xi\frac{p}{m}, \quad k = \zeta - \xi\frac{q}{m},$$

womit h, k, p, q als Functionen von η, ζ bestimmt sind. Damit folgt

$$\begin{aligned} pdh + qdk &= p\left(d\eta - \frac{p}{m}d\xi - \xi\frac{mdp - pdm}{m^2}\right) \\ &\quad + q\left(d\zeta - \frac{q}{m}d\xi - \xi\frac{mdq - qdm}{m^2}\right) \\ &= pd\eta + qd\zeta - \frac{1 - m^2}{m}d\xi + \xi\frac{dm}{m^2} \\ &= -m(\xi_\eta d\eta + \xi_\zeta d\zeta) + md\xi - d\left(\frac{\xi}{m}\right) \\ &= -d\left(\frac{\xi}{m}\right) = dl \end{aligned}$$

Wenn also das Büschel flächennormal ist, so ist

(3) $$dl = pdh + qdk$$

ein vollständiges Differential, und die Gleichungen

(4) $$\xi = -ml, \quad \eta = h - pl, \quad \zeta = k - ql$$

stellen eine Wellenfläche dar, sobald man darin $l = l(h, k)$, $p = l_h$, $q = l_k$ setzt[1]).

Die hier angestellte Betrachtung führt darauf, den vier Strahlencoordinaten h, k, p, q eine fünfte Variable l zu adjungiren, derart, dass die Pfaff'sche Gleichung (3) oder

(5) $$dl - pdh - qdk = 0$$

die Bedingung der Flächennormalität angiebt. Allen optischen Abbildungen (die sich jetzt als fünf Gleichungen zwischen den h, k, l, p, q und H, K, L, P, Q darstellen) gemeinsam ist nun die

1) Wir bezeichnen durchweg partielle Differentialquotienten in dieser unmissverständlichen Weise.

Gültigkeit des Malus'schen Satzes oder die Erhaltung der Flächennormalität, eine Bedingung, die sich so ausspricht, dass die Pfaff'sche Gleichung

$$(6)\qquad dL - PdH - QdK = 0$$

eine Folge von (5) ist. Da die linke Seite von (6) bei Einsetzung der Functionen H, K, L, P, Q linear in den Differentialen der h, k, l, p, q wird, so besteht hiernach eine Identität von der Form

$$(7)\qquad dL - PdH - QdK = \varrho\,(dl - pdh - qdk).$$

Andererseits denke man sich die fünf Abbildungsgleichungen angesetzt und aus ihnen die vier Grössen P, Q, p, q eliminirt; es ergiebt sich dann im Allgemeinen eine Gleichung

$$\Omega\,(h, k, l, H, K, L) = 0$$

zwischen den h, k, l, H, K, L; wir nehmen an, es ergebe sich nur diese eine Gleichung[1]). Dann muss die Gleichung $d\Omega = 0$, die aus denselben Differentialen wie (7) gebildet ist, mit dieser identisch sein, da sonst zwischen den h, k, l, H, K, L mehr als eine Relation bestünde, es ist also

$$\frac{\Omega_L}{1} = -\frac{\Omega_H}{P} = -\frac{\Omega_K}{Q} = -\frac{\Omega_l}{\varrho} = \frac{\Omega_h}{\varrho p} = \frac{\Omega_k}{\varrho q},$$

mit andern Worten, das System der Abbildungsgleichungen ist gegeben durch

$$(8)\qquad \Omega = 0,\ p = -\frac{\Omega_h}{\Omega_l},\ q = -\frac{\Omega_k}{\Omega_l},\ P = -\frac{\Omega_H}{\Omega_L},\ Q = -\frac{\Omega_K}{\Omega_L}$$

und der Factor ϱ der Identität (7) durch

$$(9)\qquad \varrho = -\frac{\Omega_l}{\Omega_L}.$$

Die »erzeugende Function« Ω kann als Function ihrer sechs Argumente beliebig gewählt werden, nur muss sie alle sechs Variablen enthalten und das System der Gleichungen (8) muss sowohl nach den kleinen als nach den grossen Buchstaben auflösbar sein.

Deuten wir h, k, l als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes im dreifachen Raume und p, q als Richtungscoordinaten eines hindurchgehenden Flächenelementes, so haben wir den

1) Abbildungen, die auf zwei oder drei solcher Gleichungen führen, spielen in der Optik keine besondere Rolle.

Lie'schen Begriff einer Berührungstransformation des gewöhnlichen Raumes. Ist l Function von h, k, so spricht die Gleichung (3) aus, dass das Flächenelement h, k, l, p, q die Fläche $l = l(h, k)$ im Punkte h, k, l berührt; die ∞^2 Flächenelemente, die eine Fläche berühren, gehen bei einer Berührungstransformation in solche von gleicher Eigenschaft über. Die drei Gleichungen (4) definiren selbst eine Berührungstransformation zwischen den Variablen

$$l,\ h,\ k,\ p,\ q \quad \text{und}$$
$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \pi,\ \varkappa$$

mit der erzeugenden Function

$$\xi^2 + (\eta - h)^2 + (\zeta - k)^2 - l^2;$$

aus den noch fehlenden Gleichungen $\pi = -\frac{p}{m}$, $\varkappa = -\frac{q}{m}$ erhält man in der That eine Identität von der Form (7), nämlich

$$d\xi - \pi d\eta - \varkappa d\zeta = -\frac{1}{m}(dl - pdh - qdk).$$

Wenn die Gleichungen (8) eine Strahlenabbildung darstellen sollen, so dürfen die durch Auflösung nach H, K, P, Q erhaltenen Gleichungen keine der adjungirten Variablen l, L mehr enthalten, oder es muss jede der vier letzten Gleichungen (8) frei von l, L werden, wenn man eine dieser Variablen mit Hülfe von $\Omega = 0$ eliminirt. Es bestehen also die Gleichungen

$$\frac{\partial p}{\partial l} : \frac{\partial p}{\partial L} = \frac{\partial q}{\partial l} : \frac{\partial q}{\partial L} = \frac{\partial P}{\partial l} : \frac{\partial P}{\partial L} = \frac{\partial Q}{\partial l} : \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial \Omega}{\partial l} : \frac{\partial \Omega}{\partial L},$$

deren erste lautet

$$\Omega_l p_L = \Omega_L p_l, \quad \Omega_l(\Omega_l \Omega_{hL} - \Omega_h \Omega_{lL}) = \Omega_L(\Omega_l \Omega_{hl} - \Omega_h \Omega_{ll})$$

oder mit Einführung des Ausdrucks (9)

$$\Omega_l \varrho_h = \Omega_h \varrho_l.$$

Diese Gleichung, die erfüllt sein soll für die Variablenpaare

$$lh,\ hk,\ kl, \quad LH,\ HK,\ KL$$

wird befriedigt, wenn ϱ eine Function von Ω, oder Ω eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\Omega_l}{\Omega_L} = -\varrho(\Omega) = -\varrho$$

ist, deren allgemeine Lösung Ω gefunden wird, indem man eine beliebige Gleichung zwischen den sechs Argumenten

$$\Omega,\ L-\varrho l,\ h,\ k,\ H,\ K$$

(wo $\varrho = \varrho(\Omega)$) nach Ω auflöst. Denkt man sich diese Gleichung nach $L - \varrho l$ aufgelöst und schreibt

$$L - \varrho l = \Psi(h, k, H, K, \Omega), \tag{10}$$

so folgt durch Differentiation, wenn $\varrho' = \frac{d\varrho}{d\Omega}$ und u eine der vier Grössen h, k, H, K bedeutet:

$$1 - \varrho' l\,\Omega_L = \Psi_\Omega \Omega_L, \quad -\varrho - \varrho' l\,\Omega_l = \Psi_\Omega \Omega_l,$$
$$-\varrho' l\,\Omega_u = \Psi_u + \Psi_\Omega \Omega_u,$$

also

$$\Omega_L = \frac{1}{\Psi_\Omega + \varrho' l}, \quad \Omega_l = -\frac{\varrho}{\Psi_\Omega + \varrho' l}, \quad \Omega_u = -\frac{\Psi_u}{\Psi_\Omega + \varrho' l},$$

und nach (8)

$$p = -\frac{\Psi_h}{\varrho}, \quad q = -\frac{\Psi_k}{\varrho}, \quad P = \Psi_H, \quad Q = \Psi_K. \tag{11}$$

In diesen Gleichungen ist noch $\Omega = 0$ zu setzen, wodurch ϱ in eine Constante, Ψ in eine blosse Function von h, k, H, K übergeht; die Form der Gleichungen (11) zeigt, dass man diese Substitution gleich von vornherein vornehmen, also die erzeugende Gleichung in der Form

$$L - \varrho l - \Psi(h, k, H, K) = 0, \quad \varrho = \text{constans}$$

ansetzen kann. Wählt man, um auf den Fall der Optik zu kommen,

$$\Omega = NL - nl + E(h, k, H, K), \tag{12}$$

so wird $\varrho = \frac{n}{N}$, und die Abbildungsgleichungen (8) geben

$$np = E_h, \quad nq = E_k, \quad -NP = E_H, \quad -NQ = E_K; \tag{13}$$

n und N sind hier die Brechungsindices von Object- und Bildraum, E das Eikonal der Abbildung. Solcher Eikonale giebt es, wie man bei Bruns (a. a. O., p. 356) auseinandergesetzt findet, im allgemeinen Falle 16; wir wollen hier nur diejenigen vier Formen benutzen, in denen Richtungs- und Streckengrössen paarweise auftreten, d. h. die vier Eikonalformen

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E(p, q, P, Q),\\
E_2 &= E(p, q, H, K),\\
E_3 &= E(h, k, H, K),\\
E_4 &= E(h, k, P, Q).
\end{aligned}
$$

Das System der Abbildungsgleichungen ist in den zusammenfassenden Formeln

$$
(14) \qquad \begin{cases}
dE_1 = -n(hdp + kdq) + N(HdP + KdQ)\\
dE_2 = -n(hdp + kdq) - N(PdH + QdK)\\
dE_3 = +n(pdh + qdk) - N(PdH + QdK)\\
dE_4 = +n(pdh + qdk) + N(HdP + KdQ)
\end{cases}
$$

enthalten, die so zu lesen sind, wie es im Falle E_3 die Gleichungen (13) zeigen. Gehören alle vier Eikonale einer und derselben Abbildung an, so bestehen zwischen ihnen die Relationen

$$
(15) \qquad \begin{cases}
E_1 - E_2 = E_4 - E_3 = N(PH + QK),\\
E_3 - E_2 = E_4 - E_1 = n(ph + qk).
\end{cases}
$$

3.

Im Falle einer infinitesimalen Transformation sind die Abbildungsgleichungen von der Form

$$
(16) \qquad \begin{cases}
L = l + \nu l' + \frac{\nu^2}{2} l'' + \cdots\\
H = h + \nu h' + \frac{\nu^2}{2} h'' + \cdots\\
K = k + \nu k' + \frac{\nu^2}{2} k'' + \cdots\\
P = p + \nu p' + \frac{\nu^2}{2} p'' + \cdots\\
Q = q + \nu q' + \frac{\nu^2}{2} q'' + \cdots,
\end{cases}
$$

wo ν eine unendlich kleine constante Grösse ist, die sonst in den Gleichungen nicht vorkommt; die Grössen $l'\ h'\ k'\ p'\ q'$ u. s. w. sind Functionen von $l\,h\,k\,p\,q$. Stellen die Gleichungen (16) eine infinitesimale *Berührungstransformation* dar, so müssen sie die Identität (7) erfüllen, worin wir uns ϱ ebenfalls als Potenzreihe von ν entwickelt zu denken haben, deren erstes Glied offenbar $= 1$ ist. Setzen wir daher die Gleichungen (16) und

$$\varrho = 1 + \nu\varrho' + \frac{\nu^2}{2}\varrho'' + \cdots \tag{17}$$

in (7) ein und trennen die einzelnen Potenzen von ν, so entstehen die folgenden Identitäten:

$$dl' - pdh' - qdk' - p'dh - q'dk = \varrho'(dl - pdh - qdk), \tag{18}$$

$$\begin{aligned} dl'' - pdh'' - qdk'' - 2(p'dh' + q'dk') - p''dh - q''dk \\ = \varrho''(dl - pdh - qdk) \end{aligned} \tag{19}$$

u. s. w. Um zunächst (18) zu befriedigen, setzen wir

$$W = ph' + qk' - l' \tag{20}$$

und erhalten

$$dW = h'dp + k'dq - p'dh - q'dk - \varrho'(dl - pdh - qdk).$$

Ist daher $W = W(l, h, k, p, q)$ eine beliebige Function der fünf ursprünglichen Coordinaten, so zerfällt die letzte Gleichung in die fünf folgenden

$$\begin{gathered} -\varrho' = W_l, \quad -p' + \varrho'p = W_h, \quad -q' + \varrho'q = W_k, \\ h' = W_p, \quad k' = W_q, \end{gathered} \tag{21}$$

die mit (20) zusammen die fünf Grössen $l'\,h'\,k'\,p'\,q'$ und ϱ' explicite durch W und seine Ableitungen ausdrücken; W ist die erzeugende Function oder »charakteristische Function« der Berührungstransformation, genauer ausgedrückt, ihrer Glieder erster Ordnung.

In ähnlicher Weise wird mit

$$W' = ph'' + qk'' - l''$$

$$\begin{aligned} dW' = h''dp + k''dq - p''dh - q''dk - 2(p'dh' + q'dk') \\ - \varrho''(dl - pdh - qdk); \end{aligned}$$

die Zerlegung dieser Gleichung liefert die fünf neuen Grössen $l''\,h''\,k''\,p''\,q''$ und ϱ'' ausgedrückt durch Differentialoperationen an der willkürlichen Function W' (der charakteristischen Function der Glieder zweiter Ordnung) und den bereits bekannten h' und k'. In gleicher Weise ist mit den Gliedern höherer Ordnung fortzufahren.

Sollen die Abbildungsgleichungen für die vier eigentlichen Strahlencoordinaten $hkpq$ frei von l sein, so sind einzeln $h'k'p'q'$, $h''k''p''q''$, ... frei von l. Die vier Ausdrücke

$$h' = W_p, \quad k' = W_q, \quad p' = -W_h - pW_l, \quad q' = -W_k - qW_l$$

geben, nach l differentiirt,

$$0 = W_{pl} = W_{ql}, \quad 0 = W_{hl} + pW_{ll} = W_{kl} + qW_{ll},$$

und wenn man die letzten beiden Gleichungen nach p, resp. q differentiirt und die ersten berücksichtigt,

$$0 = W_{ll} = W_{lh} = W_{lk} = W_{lp} = W_{lq},$$

also ist $W_l = -\varrho'$ eine Constante. Dies vorauszusehende Resultat, das sich nach (17) durch $\varrho = \frac{n}{N} =$ constans ausdrücken lässt, liefert für die charakteristischen Functionen den Ansatz

(22) $$W = -\varrho' l + V(h, k, p, q)$$
$$W' = -\varrho'' l + V'(h, k, p, q)$$

u. s. w. Die Abbildungsgleichungen (21) gehen damit über in

(23) $$h' = V_p, \quad k' = V_q, \quad p' = \varrho' p - V_h, \quad q' = \varrho' q - V_k,$$

wo ϱ' eine Constante, V eine beliebige Function der Grössen h, k, p, q ist, die wir als die erzeugende oder charakteristische Function der infinitesimalen Strahlenabbildung bezeichnen wollen. Die Constante ϱ' kann $= 0$ sein, wenn erster und letzter Brechungsexponent einander gleich sind; ist sie von Null verschieden, so kann sie unbeschadet der Allgemeinheit durch einen bestimmten Werth, etwa $\varrho' = -1$, ersetzt werden, indem man die Bezeichnung des unendlich kleinen Increments ν ändert.

Ist eine infinitesimale Berührungstransformation vollständig, d. h. in allen fünf Variablen $lhkpq$, bekannt, so findet sich die charakteristische Function W einfach durch Anwendung der Gleichung (20). Ist hingegen nur eine infinitesimale Abbildung in den vier Variablen $hkpq$ vorgelegt, so verlangt die Aufsuchung der erzeugenden Function V eine Quadratur; man hat nämlich nach (23) die Constante ϱ' so zu wählen, dass

(24) $$dV = h'dp + k'dq + (\varrho' p - p')dh + (\varrho' q - q')dk$$

ein vollständiges Differential wird, dessen Integration die Function V liefert. Übrigens wird im Folgenden die additive willkürliche Constante, die man zu V hinzufügen kann, stets weggelassen werden.

Liegt die Abbildung in endlicher Form vor, so kann man V auch aus ihrem Eikonal herleiten. Besitzt die Abbildung z. B. das Eikonal $E_1 = E(p, q, P, Q)$, so ist

$$dE_1 = -n(hdp + kdq) + N(HdP + KdQ),$$

und mit

(25) $$E_1 - h(NP - np) - k(NQ - nq) = F,$$

$$dF = N(H-h)dP + N(K-k)dQ - (NP-np)dh - (NQ-nq)dk.$$

Setzen wir die Ausdrücke (16) und (17) ein, so wird

$$dF = N\nu dV + \cdots.$$

Man drückt also mit Hülfe der Abbildungsgleichungen F als Function von h, k, p, q aus, geht in der von Fall zu Fall vorgeschriebenen Weise zur infinitesimalen Abbildung über und dividirt durch $N\nu$. Den Zusammenhang von F mit einem der anderen Eikonale, falls E_1 nicht existirt, vermitteln die Gleichungen (15) und (25).

Die *Zusammensetzung* beliebig vieler infinitesimaler Abbildungen geschieht in den Gliedern erster Ordnung durch einfache Superposition, wobei auch die Reihenfolge der Componenten gleichgültig ist. Die Abbildungen mit den charakteristischen Grössen $\varrho_1' V_1$, $\varrho_2' V_2$ u. s. w. setzen sich also zusammen zu einer Abbildung mit den charakteristischen Grössen

$$\varrho' = \varrho_1' + \varrho_2' + \cdots, \quad V = V_1 + V_2 + \cdots.$$

4.

Als erstes Beispiel soll die charakteristische Function für diejenige infinitesimale Abbildung gesucht werden, die einer blossen Änderung des Coordinatensystems und des Linearmassstabs entspricht, oder wie man sich in der Regel ausdrückt: die erzeugende Function für infinitesimale Bewegung und Ähnlichkeitstransformation. Es versteht sich von selbst, dass diese Abbildung dem Malus'schen Satze genügt.

Die genannte Transformation führt jeden Punkt $\xi\eta\zeta$ des Raumes in einen benachbarten $\xi + \nu\xi'$, $\eta + \nu\eta'$, $\zeta + \nu\zeta'$ über, wo

$$\begin{aligned} \xi' &= a + \beta\zeta - \gamma\eta + \delta\xi, \\ \eta' &= b + \gamma\xi - \alpha\zeta + \delta\eta, \\ \zeta' &= c + \alpha\eta - \beta\xi + \delta\zeta, \end{aligned}$$

und lässt sich zerlegen in eine infinitesimale Translation um die Strecken νa, νb, νc, in eine infinitesimale Rotation um die Achse mit den Richtungscosinus α, β, γ und um den Winkel ν, endlich in eine constante Vergrösserung aller Raumdimensionen im Massstab $1 : (1 + \delta\nu)$.

Um daraus die Änderung der Strahlencoordinaten zu finden, transformire ich zwei Punkte mit den Coordinaten $\xi\eta\zeta$ und

$$\xi_1 = \xi + x, \quad \eta_1 = \eta + y, \quad \zeta_1 = \zeta + z.$$

Die hindurchgehende Gerade hat die Strahlencoordinaten h, k, p, q, wo

$$\frac{m}{x} = \frac{p}{y} = \frac{q}{z} = \frac{1}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$h = \eta - \xi\frac{p}{m}, \qquad k = \zeta - \xi\frac{q}{m}.$$

Die Änderungen von x, y, z, r ergeben sich zu

$$\begin{aligned} x' &= \beta z - \gamma y + \delta x, \\ y' &= \gamma x - \alpha z + \delta y, \\ z' &= \alpha y - \beta x + \delta z, \\ r' &= \delta r, \end{aligned}$$

daraus

$$m' = \left(\frac{x}{r}\right)' = \frac{rx' - xr'}{r^2} = \frac{\beta z - \gamma y}{r}$$

oder

(26) $$m' = \beta q - \gamma p, \quad p' = \gamma m - \alpha q, \quad q' = \alpha p - \beta m.$$

Für die Änderungen von h und k ergiebt sich nach einigen Zwischenrechnungen

(27) $$\left\{\begin{aligned} h' &= b - a\frac{p}{m} + \delta h - \alpha k + \frac{p}{m}(\gamma h - \beta k) \\ k' &= c - a\frac{q}{m} + \delta k + \alpha h + \frac{q}{m}(\gamma h - \beta k). \end{aligned}\right.$$

Setzt man damit das Differential (24) an, so folgt

$$dV = d[am + bp + cq - h(\gamma m - \alpha q) - k(\alpha p - \beta m)] + \delta(h\,dp + k\,dq) + \varrho'(p\,dh + q\,dk).$$

Die Constante ϱ' ist also $= \delta$, und die charakteristische Function

(28) $$V = am + bp + cq + \alpha(qh - pk) + \beta mk - \gamma mh + \delta(ph + qk).$$

Ein zweites Beispiel führt uns in das eigentliche Gebiet unserer Untersuchung: die charakteristische Function für die Brechung an einer Fläche.

Sind n und N die Brechungsindices der durch die Fläche getrennten Medien, so kann die Gleichung der Fläche, die wir uns vorläufig in der Form $x = x(y, z)$ geschrieben denken, auch das Verhältniss $\frac{n}{N}$ enthalten, wird also, nach Potenzen von ν entwickelt, die Form

$$x = \varphi(y, z) + \nu\psi(y, z) + \cdots$$

annehmen. Man übersieht sofort, dass für die Glieder erster Ordnung der infinitesimalen Abbildung nur das erste Glied

$$x = \varphi(y, z) \tag{29}$$

dieser Reihe in Betracht kommt; wenn wir also die Gleichung (29) kurzweg als die Gleichung der brechenden Fläche bezeichnen, so ist damit eigentlich gemeint, dass die brechende Fläche für $\lim \frac{n}{N} = 1$ die Gestalt (29) annimmt.

Beziehen sich die kleinen Buchstaben auf den einfallenden Strahl, die grossen auf den gebrochenen, so gelten die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{ll} h = y - x\dfrac{p}{m}, & k = z - x\dfrac{q}{m}, \\ H = y - x\dfrac{P}{M}, & K = z - x\dfrac{Q}{M}, \end{array}\right. \tag{30}$$

die besagen, dass sich beide Strahlen im Punkte x, y, z der Fläche schneiden; ausserdem liefert das Brechungsgesetz oder das Princip der kürzesten Lichtzeit die beiden Beziehungen

$$\frac{NM - nm}{-1} = \frac{NP - np}{\varphi_y} = \frac{NQ - nq}{\varphi_z}. \tag{31}$$

Die sechs erhaltenen Gleichungen, aus denen die Parameter y, z zu eliminiren sind, stellen die gesuchte Strahlenabbildung dar. Geht man zum Fall der infinitesimalen Abbildung über, so wird

$$\begin{aligned} NM - nm &= N(m + \nu m' + \cdots) - mN(1 + \nu\varrho' + \cdots) \\ &= N\nu(m' - \varrho' m) + \cdots \end{aligned}$$

und die Gleichungen (30) und (31) werden

$$\left\{\begin{array}{l} h' = -x\left(\dfrac{p}{m}\right)' = x\dfrac{pm' - mp'}{m^2}, \quad k' = x\dfrac{qm' - mq'}{m^2}, \\ \dfrac{m' - \varrho' m}{-1} = \dfrac{p' - \varrho' p}{\varphi_y} = \dfrac{q' - \varrho' q}{\varphi_z}, \end{array}\right. \tag{32}$$

wozu noch die ersten beiden Gleichungen (30) oder die Gleichungen (2) treten. Wegen

$$mm' + pp' + qq' = 0$$

folgt daraus

$$m' - \varrho' m = - \frac{\varrho'}{m - p\varphi_y - q\varphi_z},$$

$$h' dp + k' dq = - \frac{x}{m}(m' dm + p' dp + q' dq)$$

$$= - \frac{x}{m}(m' - \varrho' m)(dm - \varphi_y dp - \varphi_z dq);$$

bilden wir damit das Differential (24), so wird

$$dV = - \frac{x}{m}(m' - \varrho' m)(dm - \varphi_y dp - \varphi_z dq)$$

$$+ (m' - \varrho' m)(\varphi_y dh + \varphi_z dk),$$

$$\frac{dV}{m' - \varrho' m} = \varphi_y\left(dh + \frac{x}{m} dp\right) + \varphi_z\left(dk + \frac{x}{m} dq\right) - \frac{x}{m} dm.$$

Führen wir statt der Differentiale von h und k nach (2) diejenigen von y und z ein, setzen also

$$dh = dy - \frac{x}{m} dp - p d\left(\frac{x}{m}\right),$$

$$dk = dz - \frac{x}{m} dq - q d\left(\frac{x}{m}\right),$$

so wird

$$\frac{dV}{m' - \varrho' m} = \varphi_y\left(dy - p d\left(\frac{x}{m}\right)\right) + \varphi_z\left(dz - q d\left(\frac{x}{m}\right)\right) - \frac{x}{m} dm$$

$$= dx - \frac{x}{m} dm - p\varphi_y d\left(\frac{x}{m}\right) - q\varphi_z d\left(\frac{x}{m}\right)$$

$$= (m - p\varphi_y - q\varphi_z) d\left(\frac{x}{m}\right),$$

$$dV = - \varrho' d\left(\frac{x}{m}\right),$$

demnach

(33) $$V = - \varrho' v, \quad v = \frac{x}{m}.$$

Die erzeugende Function ist also ziemlich einfach, erscheint aber zunächst noch in p, q, y, z ausgedrückt; mit Hülfe der Gleichungen (2) sind statt dessen p, q, h, k einzuführen. Schreibt man

$$x = mv, \quad y = h + pv, \quad z = k + qv, \tag{34}$$

so erkennt man die geometrische Bedeutung von v; v ist die zwischen Grundebene und brechender Fläche enthaltene Strecke des Strahls (h, k, p, q). Geht man ferner von der vorhin zu Grunde gelegten Form der Gleichung (29) ab und schreibt die brechende Fläche in der Gestalt

$$\Phi(x, y, z) = 0, \tag{35}$$

so erhält man v als Function von h, k, p, q durch Auflösung der Gleichung

$$\Phi(mv, \ h + pv, \ k + qv) = 0 \tag{36}$$

nach v. Die Abbildungsgleichungen (23) werden

$$h' = -\varrho' v_p, \quad k' = -\varrho' v_q, \quad p' = \varrho'(p + v_h), \quad q' = \varrho'(q + v_k). \tag{37}$$

Für eine zusammengesetzte Brechung erhält man ebenso

$$\begin{gathered} h' = -\sum_\alpha \varrho'_\alpha v_{\alpha p}, \quad k' = -\sum_\alpha \varrho'_\alpha v_{\alpha q}, \\ p' = \sum_\alpha \varrho'_\alpha (p + v_{\alpha h}), \quad q' = \sum_\alpha \varrho'_\alpha (q + v_{\alpha k}), \end{gathered} \tag{38}$$

Gleichungen, die sich wieder in der Form (23) schreiben lassen, wenn man

$$\varrho' = \sum_\alpha \varrho'_\alpha, \quad V = -\sum_\alpha \varrho'_\alpha v_\alpha \tag{39}$$

setzt. Hierbei ist, den Objectraum mit dem Index n nicht mitgezählt, n_α der Index des α^{ten} Mediums, $\Phi_\alpha(xyz) = 0$ die Gleichung der α^{ten} brechenden Fläche, v_α die Auflösung der Gleichung

$$\Phi_\alpha(mv_\alpha, \ h + pv_\alpha, \ k + qv_\alpha) = 0$$

nach v_α und

$$\frac{n_{\alpha-1}}{n_\alpha} = 1 + \varrho'_\alpha \nu + \cdots,$$

wo ν eine allen Brechungen gemeinsame unendlich kleine Constante bedeutet. Die Reihenfolge der Brechungen ist offenbar gleichgültig.

Einige einfache Beispiele mögen den Gebrauch dieser Formeln erläutern. Bei einer einmaligen Brechung kann in den Gleichungen (37) $\varrho' = -1$ gesetzt werden.

Für die Brechung an der Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

wird

(40) $$v = \frac{\delta - \beta h - \gamma k}{\alpha m + \beta p + \gamma q}.$$

Für ein System brechender Ebenen (Prismensystem) wird nach (39) die charakteristische Function

(41) $$V = Bh + Ck - D,$$

wo

$$B = \sum_\lambda \frac{\varrho_\lambda' \beta_\lambda}{\alpha_\lambda m + \beta_\lambda p + \gamma_\lambda q}, \quad C = \sum_\lambda \frac{\varrho_\lambda' \gamma_\lambda}{\alpha_\lambda m + \beta_\lambda p + \gamma_\lambda q},$$

$$D = \sum_\lambda \frac{\varrho_\lambda' \delta_\lambda}{\alpha_\lambda m + \beta_\lambda p + \gamma_\lambda q},$$

also V linear in h und k.

Um für die Brechung an der Kugel

(42) $$(x - A)^2 + (y - B)^2 + (z - C)^2 = D^2$$

die charakteristische Function zu erhalten, ist die Gleichung

$$(mv - A)^2 + (pv + h - B)^2 + (qv + k - C)^2 = D^2$$

oder

$$v^2 - 2v(Am + Bp + Cq - ph - qk)$$
$$= D^2 - A^2 - (h - B)^2 - (k - C)^2$$

nach v aufzulösen; mit

(43) $$\begin{cases} u^2 = D^2 - A^2 - (h - B)^2 - (k - C)^2 \\ \qquad + (Am + Bp + Cq - ph - qk)^2 \\ v \ = Am + Bp + Cq - ph - qk \pm u. \end{cases}$$

wird

Die Zweideutigkeit bezieht sich auf die beiden Punkte, worin der Strahl (h, k, p, q) die Kugel schneidet. Unterscheiden wir beide Werthe durch v_1 und v_2 und setzen beide Brechungen zusammen mit den Coefficienten

$$\varrho_1' = \varrho_2' = \frac{\delta}{2},$$

so wird nach (39)

$$V = \delta(ph + qk - Am - Bp - Cq)$$
$$= \delta(ph + qk) + am + bp + cq,$$

wenn

$$A = -\frac{a}{\delta}, \quad B = -\frac{b}{\delta}, \quad C = -\frac{c}{\delta}. \tag{44}$$

Nach (28) erzeugt das erhaltene V eine Translation und eine Massstabsvergrösserung; diese beiden infinitesimalen Transformationen lassen sich also durch zweimalige Brechung an einer Kugeloberfläche ersetzen. Die Unübertragbarkeit dieses Satzes auf endliche Brechungen ist eine Erläuterung zu dem, was in der Einleitung über infinitesimale Abbildungen gesagt wurde.

Eine Translation ohne Massstabsänderung ($\delta = 0$) lässt sich durch viermalige Brechung an zwei Kugelflächen erzeugen. Sind A, B, C und A', B', C' die Coordinaten der beiden Kugelmittelpunkte, so kann man die beiden charakteristischen Functionen

$$V = \delta\,(ph + qk - Am - Bp - Cq) \quad \text{und}$$
$$V' = \delta\,(ph + qk - A'm - B'p - C'q)$$

mit den Factoren $+1$ und -1 zu

$$V - V' = \delta(A' - A)m + \delta(B' - B)p + \delta(C' - C)q$$
$$= am + bp + cq$$

zusammensetzen; sind hier a, b, c gegeben, so kann man $\delta(\neq 0)$, $A'B'C'$ beliebig wählen und findet daraus ABC. Mit $A' = B' = C' = 0$ gelten wieder die Gleichungen (44).

5.

Die bisher besprochene Herleitung einer infinitesimalen zusammengesetzten Brechung setzte voraus, dass die Brechungsexponenten unendlich wenig verschieden waren, dass man also über sie frei verfügen konnte. Wenn einige unter den n_α bestimmte Zahlenwerthe besitzen, ist diese Methode nicht mehr ausführbar; eine infinitesimale Abbildung kann dann nur dadurch zu Stande kommen, dass man disponible Flächen unendlich nahe zusammenrücken lässt. Alle Fälle dieser Art setzen sich durch Superposition aus dem einfachsten zusammen, den wir so formuliren:

Zwei unendlich benachbarte Flächen schliessen ein Medium vom Brechungsindex N ein, während der äussere Raum den Index $n = 1$ besitzt. Beim Durchgang durch die unendlich dünne Schicht wird der Strahl zweimal gebrochen, so dass seine dritte (End-)Lage sich unendlich wenig von seiner ersten (Anfangs-)Lage unterscheidet. Diese infinitesimale Abbildung ist in Strahlencoordinaten auszudrücken und ihre charakteristische Function zu suchen.

Die beiden brechenden Flächen heissen S, T; ihre Gleichungen seien

$$(S)\ x = \varphi(y, z) \quad \text{und} \quad (T)\ x = \varphi(y, z) + \nu\psi(y, z).$$

Der Lichtweg $ABCD$ schneide die Fläche S in B, die Fläche T in C; die Coordinaten von B seien x, y, z, die von C seien $x + \nu x', y + \nu y', z + \nu z'$, wobei offenbar

$$x + \nu x' = \varphi(y + \nu y', z + \nu z') + \nu\psi(y, z),$$

$$(45) \qquad x' = \varphi_y y' + \varphi_z z' + \psi.$$

Der Strahl nimmt drei Lagen an, von denen 1 und 3 untereinander nur um Grössen von der Ordnung ν, von 2 aber endlich verschieden sind; die Strahlencoordinaten seien, etwas anders als früher bezeichnet,

$$\begin{array}{lllll} (AB): & h, & k, & p, & q, \\ (BC): & H, & K, & P, & Q, \\ (CD): & h + \nu h', & k + \nu k', & p + \nu p', & q + \nu q'. \end{array}$$

Die erste Brechung liefert die Gleichungen (2) und (31), die mit einem Proportionalitätsfactor λ so geschrieben werden können:

$$(46) \qquad NM - m = -\lambda, \quad NP - p = \lambda\varphi_y, \quad NQ - q = \lambda\varphi_z.$$

Der Strahl BC liefert die beiden Gleichungssysteme

$$(47) \qquad H = y - x\frac{P}{M}, \quad K = z - x\frac{Q}{M}$$

und

$$0 = y' - x'\frac{P}{M}, \quad 0 = z' - x'\frac{Q}{M},$$

woraus nach (45) folgt

$$(48) \qquad \begin{cases} x' = rM, \quad y' = rP, \quad z' = rQ, \\ \qquad r = \dfrac{\psi}{M - P\varphi_y - Q\varphi_z}. \end{cases}$$

Die Richtungscosinus der Normalen zur Fläche T im Punkte C sind proportional mit

$$-1, \quad [\varphi_y + \nu\psi_y], \quad [\varphi_z + \nu\psi_z],$$

darin y und z durch $y+\nu y'$, $z+\nu z'$ ersetzt; die zweite Brechung im Punkte C liefert also die zu (46) analogen Gleichungen

$$m+\nu m'-NM=\lambda+\nu\mu\,,$$
$$p+\nu p'-NP=-(\lambda+\nu\mu)\,[\varphi_y+\nu(\varphi_{yy}y'+\varphi_{yz}z'+\psi_y)]\,,$$
$$q+\nu q'-NQ=-(\lambda+\nu\mu)\,[\varphi_z+\nu(\varphi_{zy}y'+\varphi_{zz}z'+\psi_z)]\,,$$

worin $\lambda+\nu\mu$ einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Die Verbindung dieser Gleichungen mit (46) giebt

$$m'=\mu\,,\quad p'=-\mu\varphi_y-\lambda\,(\varphi_{yy}y'+\varphi_{yz}z'+\psi_y)\,,$$
$$q'=-\mu\varphi_z-\lambda\,(\varphi_{zy}y'+\varphi_{zz}z'+\psi_z)\,.$$

Um diese Gleichungen etwas übersichtlicher auszudrücken, differentiire ich die aus (46) folgende Formel

$$(49)\qquad N^2-1=\lambda^2\,(1+\varphi_y^{\,2}+\varphi_z^{\,2})-2\lambda\,(m-p\varphi_y-q\varphi_z)\,,$$

wodurch λ als Function von p, q, y, z ausgedrückt wird, und erhalte für das totale Differential von λ

$$\begin{aligned}0=d\lambda\,&[\lambda(1+\varphi_y^{\,2}+\varphi_z^{\,2})-(m-p\varphi_y-q\varphi_z)]\\&+\lambda^2\,(\varphi_y\varphi_{yy}+\varphi_z\varphi_{zy})\,dy+\lambda^2\,(\varphi_y\varphi_{yz}+\varphi_z\varphi_{zz})\,dz\\&+\lambda\,(p\varphi_{yy}+q\varphi_{zy})\,dy+\lambda\,(p\varphi_{yz}+q\varphi_{zz})\,dz\\&-\lambda(dm-\varphi_y dp-\varphi_z dq)\,,\end{aligned}$$

eine Gleichung, die sich wegen

$$\begin{aligned}&\lambda(1+\varphi_y^{\,2}+\varphi_z^{\,2})-(m-p\varphi_y-q\varphi_z)\\&=-N(M-P\varphi_y-Q\varphi_z)=-\frac{N\psi}{r}\end{aligned}$$

einfacher schreibt

$$(50)\qquad \begin{aligned}\frac{N\psi}{r}\,d\lambda=N\lambda(P\varphi_{yy}+Q\varphi_{zy})\,dy+N\lambda\,(P\varphi_{yz}+Q\varphi_{zz})\,dz\\-\lambda\,(dm-\varphi_y dp-\varphi_z dq)\,.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\psi\lambda_y=\lambda r\,(P\varphi_{yy}+Q\varphi_{zy})=\lambda\,(\varphi_{yy}y'+\varphi_{yz}z')\,,$$
$$\psi\lambda_z=\lambda r\,(P\varphi_{yz}+Q\varphi_{zz})=\lambda\,(\varphi_{zy}y'+\varphi_{zz}z')\,,$$

womit die oben für $m'\,p'\,q'$ erhaltenen Ausdrücke übergehen in

$$(51)\qquad m'=\mu\,,\quad p'=-\mu\varphi_y-(\lambda\psi)_y\,,\quad q'=-\mu\varphi_z-(\lambda\psi)_z\,.$$

Für μ erhält man wegen $mm'+pp'+qq'=0$

$$(52)\qquad \mu=\frac{p(\lambda\psi)_y+q(\lambda\psi)_z}{m-p\varphi_y-q\varphi_z}\,.$$

Damit sind $m' p' q'$ gefunden, ausgedrückt in p, q, y, z; für h', k' ergeben sich zwei Gleichungen aus der Forderung, dass der Punkt $x + \nu x', \ldots$ auf dem Strahl $h + \nu h', \ldots$ liege, nämlich

$$(53)\quad h' = y' - x' \frac{p}{m} - x \left(\frac{p}{m}\right)', \qquad k' = z' - x' \frac{q}{m} - x \left(\frac{q}{m}\right)'.$$

Um die erzeugende Function dieser infinitesimalen Abbildung zu finden, setzen wir an

$$dV = h' dp + k' dq - p' dh - q' dk,$$

da wegen der Gleichheit der Brechungsindices in Object- und Bildraum die Constante ϱ' verschwindet. Statt der Differentiale von h und k führen wir wieder nach (2) die von y, z ein und erhalten zunächst

$$h' dp + k' dq = x' dm + y' dp + z' dq - \frac{x}{m}(m' dm + p' dp + q' dq),$$

$$\begin{aligned} p' dh + q' dk &= p' dy + q' dz - \frac{dx}{m}(pp' + qq') \\ &\quad - x\left[p' d\left(\frac{p}{m}\right) + q' d\left(\frac{q}{m}\right)\right] \\ &= m' dx + p' dy + q' dz - \frac{x}{m}(m' dm + p' dp + q' dq), \end{aligned}$$

also $\quad dV = x' dm + y' dp + z' dq - m' dx - p' dy - q' dz,$

und weiter nach (48), (46), (50)

$$\begin{aligned} x' dm + y' dp + z' dq &= r(M dm + P dp + Q dq) \\ &= \frac{r\lambda}{N}(-dm + \varphi_y dp + \varphi_z dq) \\ &= \psi(\lambda_p dp + \lambda_q dq), \end{aligned}$$

sowie nach (51)

$$\begin{aligned} m' dx + p' dy + q' dz &= \mu dx - \mu(\varphi_y dy + \varphi_z dz) - (\lambda\psi)_y dy \\ &\quad - (\lambda\psi)_z dz \\ &= -(\lambda\psi)_y dy - (\lambda\psi)_z dz. \end{aligned}$$

Demgemäss wird

$$dV = \psi(\lambda_p dp + \lambda_q dq) + (\lambda\psi)_y dy + (\lambda\psi)_z dz = d(\lambda\psi),$$

da λ von y, z, p, q, dagegen ψ nur von y, z abhängt.

Die erzeugende Function unserer infinitesimalen Transformation ist also

$$(54)\qquad V = \lambda\psi,$$

wo $\varphi(y, z)$ und $\psi(y, z)$ die gegebenen Functionen sind, die die beiden unendlich benachbarten Flächen

$$x = \varphi \quad \text{und} \quad x = \varphi + \nu\psi$$

definiren; N ist der Brechungsindex des zwischen ihnen enthaltenen Mediums gegen den äusseren Raum, λ die durch (49) definirte Function von y, z, p, q; V ist damit als Function von y, z, p, q und mit Hülfe der Gleichungen

$$h = y - \varphi\frac{p}{m}, \quad k = z - \varphi\frac{q}{m} \tag{55}$$

als Function von h, k, p, q bekannt.

Aus dem besprochenen einfachsten Fall — zwei benachbarte Flächen, die eine unendlich dünne Linse einschliessen — entsteht durch Superposition die Abbildung mit der charakteristischen Function

$$V = \sum_\alpha \lambda_\alpha \psi_\alpha,$$

wobei sowohl die Functionen φ und ψ, als auch der Brechungsindex N und die Variablen y, z mit der Nummer α zu versehen sind; aus jedem einzelnen Ausdruck $\lambda_\alpha \psi_\alpha$ sind die Grössen y_α, z_α mit Hülfe der Gleichungen

$$h = y_\alpha - \varphi_\alpha \frac{p}{m}, \quad k = z_\alpha - \varphi_\alpha \frac{q}{m}$$

zu eliminiren. Ein besonderer Fall hiervon ist der, dass die zweite Fläche der vorhergehenden Linse die erste Fläche der folgenden ist, dass wir also ein System unendlich benachbarter Flächen

$$x = \varphi, \quad x = \varphi + \nu\psi_1, \quad x = \varphi + \nu(\psi_1 + \psi_2), \ldots$$

vor uns haben; dann reduciren sich alle φ_α, von Gliedern höherer Ordnung abgesehen, auf φ, sowie $y_\alpha z_\alpha$ auf y, z; die verschiedenen Functionen λ_α unterscheiden sich nur durch den Brechungsindex N_α, ausserdem ist die Elimination der Grössen y, z für jeden Bestandtheil $\lambda_\alpha \psi_\alpha$ mit denselben Gleichungen (55) auszuführen, kann also auch an der ganzen Summe V vorgenommen werden.

Von hervorragendem Interesse ist der Fall der *Spiegelung* an zwei benachbarten Flächen. Setzen wir in (49) $N = -1$, so wird

$$\text{(56)} \qquad \lambda = 2\,\frac{m - p\varphi_y - q\varphi_z}{1 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}\,.$$

Als Beispiel hierzu möge die Aufgabe behandelt werden, für die Spiegelung an zwei Ebenen, die mit einander den Winkel $\frac{\nu}{2}$ bilden und durch den Coordinatenanfang gehen, die charakteristische Function zu suchen.

Die Gleichungen der beiden Ebenen lassen sich in der Form schreiben

$$Ax + By + Cz = 0,$$

$$\left(A + \frac{\nu}{2}A'\right)x + \left(B + \frac{\nu}{2}B'\right)y + \left(C + \frac{\nu}{2}C'\right)z = 0\,,$$

wenn wir festsetzen, dass

$$A^2 + B^2 + C^2 = A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1\,,$$
$$AA' + BB' + CC' = 0\,.$$

Die Schnittlinie beider Ebenen hat in diesem Fall die Richtungscosinus

$$\text{(57)} \quad \alpha = BC' - CB'\,, \quad \beta = CA' - AC'\,, \quad \gamma = AB' - BA'\,.$$

Für die Functionen φ und ψ erhält man

$$\varphi = -\frac{By + Cz}{A}\,,$$

$$\varphi + \nu\psi = -\frac{By + Cz + \frac{\nu}{2}(B'y + C'z)}{A + \frac{\nu}{2}A'}\,,$$

$$2\psi = -\frac{B'y + C'z}{A} + \frac{A'}{A^2}(By + Cz)\,,$$

und für λ aus (56)

$$\lambda = 2A(Am + Bp + Cq)\,.$$

Zur Elimination von y und z dienen die Gleichungen

$$h = y + \frac{p}{m}\,\frac{By + Cz}{A}\,, \quad k = z + \frac{q}{m}\,\frac{By + Cz}{A}\,,$$

aus denen folgt

$$By + Cz = Am \cdot \frac{Bh + Ck}{Am + Bp + Cq}\,,$$

$$B'y + C'z = B'h + C'k - (B'p + C'q)\frac{Bh + Ck}{Am + Bp + Cq},$$

$$2\psi = -\frac{B'h + C'k}{A} + \frac{Bh + Ck}{A}\,\frac{A'm + B'p + C'q}{Am + Bp + Cq}.$$

Daher wird

$$V = (Bh + Ck)(A'm + B'p + C'q) - (B'h + C'k)(Am + Bp + Cq)$$

und nach (57)

(58) $$V = \alpha(qh - pk) + \beta mk - \gamma mh.$$

Dies ist, nach (28), die charakteristische Function einer *Drehung* um die Achse α, β, γ (Schnittachse der beiden spiegelnden Ebenen) und um den Winkel ν (das Doppelte des spiegelnden Winkels); hier haben wir einen Fall vor uns, wo das infinitesimale Resultat auch auf endliche Abbildungen übertragbar ist.

6.

Die im vorigen Abschnitt aufgestellte charakteristische Function V wird, wenn man die Elimination von y und z wirklich ausführt oder ausgeführt denkt, im Allgemeinen keine einfache Form besitzen; ihrer Entstehungsart nach genügt sie, als Function von $hkpq$, gewissen partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung, deren Gestalt sich wohl schwer übersehen lässt. Wir gehen daher wieder zu dem ersten Verfahren zurück, nehmen also an, dass aus einer endlichen Abbildung, die mit optischen Mitteln zu verwirklichen ist, eine infinitesimale nicht durch unendlich benachbarte Lagen der (brechenden oder spiegelnden) Flächen, sondern durch unendlich benachbarte Werthe der Brechungsexponenten abgeleitet worden sei und nennen eine solche infinitesimale Abbildung *optisch erzeugbar* im engeren Sinne. Wie schon mehrfach bemerkt, setzt diese Auffassung der infinitesimalen Abbildungen voraus, dass in die Gleichungen der endlichen Abbildung die Werthe der Brechungsindices, soweit sie von einander verschieden sind, als *unbestimmte disponible* Constanten eingehen; damit sind z. B. Spiegelungen ausgeschlossen. Die charakteristische Function einer optisch erzeugbaren Abbildung ist

(59) $$V = \sum_{\alpha} \sigma_\alpha v_\alpha$$

und die Abbildungsgleichungen

(60) $h' = V_p,\quad k' = V_q,\quad p' = -\sigma p - V_h,\quad q' = -\sigma q - V_k,$

$$\sigma = \sum_\alpha \sigma_\alpha\,, \tag{61}$$

wo die Bezeichnung ein wenig geändert ist ($\sigma = -\varrho'$); die σ_α sind Constanten, die vom Verhältniss der Brechungsexponenten an der α^{ten} brechenden Fläche abhängen und sich schreiben lassen

$$\nu\sigma_\alpha = 1 - \frac{n_{\alpha-1}}{n_\alpha} = \delta \log n_\alpha\,; \tag{62}$$

unter v_α verstehen wir, wenn

$$\Phi_\alpha(x, y, z) = 0$$

die Gleichung der α^{ten} brechenden Fläche ist, die Auflösung der Gleichung

$$\Phi_\alpha(mv_\alpha\,,\quad h + pv_\alpha\,,\quad k + qv_\alpha) = 0$$

nach v_α.

Jedes einzelne v genügt, als Lösung einer Gleichung

$$\Phi(x, y, z) = 0 \tag{35}$$

mit den Substitutionen

$$x = mv\,,\quad y = h + pv\,,\quad z = k + qv\,, \tag{34}$$

zwei gewissen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die man folgendermassen findet. Durch vollständige Differentiation von (35) ergiebt sich

$$\begin{aligned}\Phi_x(m\,dv + v\,dm) + \Phi_y(dh + p\,dv + v\,dp)&\\ + \Phi_z(dk + q\,dv + v\,dq) &= 0\end{aligned}$$

oder, wenn für den Augenblick $m\Phi_x + p\Phi_y + q\Phi_z = \Phi'$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}-m\Phi' dv = m\Phi_y(dh + v\,dp) &+ m\Phi_z(dk + v\,dq)\\ &- v\Phi_x(p\,dp + q\,dq)\,,\end{aligned}$$

also

$$v_h = -\frac{\Phi_y}{\Phi'}\,,\qquad v_k = -\frac{\Phi_z}{\Phi'}\,,$$

$$v_p = \frac{v}{m\Phi'}(p\Phi_x - m\Phi_y)\,,\quad v_q = \frac{v}{m\Phi'}(q\Phi_x - m\Phi_z)\,.$$

Eliminirt man aus diesen vier Gleichungen die Verhältnisse $\Phi_x : \Phi_y : \Phi_z$, so folgen die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{cases}\dfrac{v_p}{v} = v_h + \dfrac{p}{m^2}(1 + pv_h + qv_k)\,,\\[2ex] \dfrac{v_q}{v} = v_k + \dfrac{q}{m^2}(1 + pv_h + qv_k)\,,\end{cases} \tag{63}$$

oder

$$(64)\qquad \begin{cases} v v_h = v_p - p(v + p v_p + q v_q)\,, \\ v v_k = v_q - q(v + p v_p + q v_q)\,. \end{cases}$$

Aus den letzten beiden folgt als Integrabilitätsbedingung

$$0 = \frac{\partial}{\partial k}\Big[v_p - p(v + p v_p + q v_q)\Big] - \frac{\partial}{\partial h}\Big[v_q - q(v + p v_p + q v_q)\Big]$$

oder

$$(65)\qquad 0 = \varDelta(v) = v_{pk} - p(v_k + p v_{pk} + q v_{qk}) \\ - v_{qh} + q(v_h + p v_{ph} + q v_{qh})\,;$$

diese letzte Gleichung zweiter Ordnung ist linear und homogen, wird also nicht nur von jedem einzelnen v_α, sondern auch von

$$V = \sum_\alpha \sigma_\alpha v_\alpha$$

erfüllt.

Die charakteristische Function V jeder optisch erzeugbaren Abbildung genügt der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\varDelta(V) = 0\,.$$

Damit ist die Frage, ob sich jede Strahlenabbildung, die dem Malus'schen Satze genügt, durch optische Hülfsmittel realisiren lässt, im verneinenden Sinne entschieden.

Wenden wir das erhaltene nothwendige (nicht auch hinreichende) Kriterium einer optisch erzeugbaren Abbildung beispielsweise auf die charakteristische Function (58) einer unendlich kleinen Rotation an, so folgt

$$\varDelta(qh - pk) = -2m^2, \quad \varDelta(mk) = -2mp\,, \quad \varDelta(-mh) = -2mq\,,$$

also

$$(66)\qquad \varDelta(V) = -2m(\alpha m + \beta p + \gamma q)\,,$$

d. h. eine infinitesimale Rotation ist (auf dem hier eingeschlagenen Wege) optisch nicht erzeugbar.

Hierzu eine beiläufige Bemerkung. Bisher legten wir für Objectraum und Bildraum dasselbe rechtwinklige Coordinatenachsensystem zu Grunde; daran hindert nichts, wenn die Gleichungen der Abbildung aus geometrischen oder physikalischen Daten selbst abzuleiten sind. Liegt umgekehrt eine gegebene

Abbildung vor, sei es als Eikonal oder charakteristische Function V oder als System von vier Gleichungen, so kommt auch die Möglichkeit in Betracht, dass der Bildraum auf ein anderes Achsensystem bezogen sei als der Objectraum. Zu den optischen Elementen der Abbildung tritt dann eine Translation, eine Rotation und eventuell eine Massstabsänderung hinzu, und die charakteristische Function V wird ausser dem optisch erzeugbaren Theil die Glieder (28) enthalten. Hiervon kann man nach (66) die Rotationsglieder mit Hülfe der Operation $\Delta(V)$ nachweisen, also nachträglich aus V entfernen, während Translation und Aehnlichkeit zu den optisch erzeugbaren (infinitesimalen) Abbildungen gehören.

Das Kriterium $\Delta(V) = 0$ ist, wie bemerkt, nothwendig, aber nicht hinreichend. Ein hinreichendes Kriterium dafür, ob eine gegebene Function $V(h, k, p, q)$ sich als lineare Verbindung von Functionen v_α darstellen lasse, deren jede den Gleichungen (64) genügt, dürfte sehr schwer zu finden sein und hätte für die Optik auch kein Interesse, weil die optische Erzeugbarkeit der infinitesimalen Abbildungen nicht die der endlichen nach sich zieht. Es liegt in der Natur der gegenwärtigen Untersuchung, hauptsächlich *negative* Resultate zu liefern. Das wichtigste dieser Art ist die *Unmöglichkeit eines idealen Fernrohrobjectivs*, zu deren Beweis (innerhalb der gedachten Beschränkung) wir jetzt übergehen.

7.

Ein Strahlenbüschel, d. h. eine zweifache Mannigfaltigkeit von Strahlen, heisse *centrisch*, wenn alle Strahlen durch einen gemeinsamen Punkt, die Spitze des Büschels, gehen. Ein centrisches Büschel des Objectraums, das in ein wiederum centrisches Büschel des Bildraums transformirt wird, bildet mit diesem ein *dicentrisches* Büschel von Lichtwegen; die Spitzen der beiden Strahlenbüschel bilden ein Paar *conjugirter dicentrischer Punkte*. Die dicentrischen Punkte können in endlicher oder unendlicher Anzahl vorhanden sein; im letzten Fall bilden sie je nach Umständen *dicentrische Linien*, *Flächen* oder *Körper*. Das Auftreten dicentrischer Flächen ohne dicentrische Körper ist der für die Optik wichtigste Fall und soll als *Aplanasie* bezeichnet werden;

die Abbildung, die Flächen und die Punkte der Flächen heissen *aplanatisch*[1]).

Ein besonderer Fall des centrischen Büschels ist das parallele Büschel; hier ist die Spitze ein unendlich ferner Punkt. Wird bei einer aplanatischen Abbildung jedes parallele Büschel des Objectraums in ein centrisches Büschel des Bildraums übergeführt, so ist die aplanatische Fläche des Objectraums die *unendlich ferne Ebene*; diese Abbildung kann als aplanatische Abbildung der unendlich fernen Ebene bezeichnet werden und ihre optische Verwirklichung wäre das *ideale Fernrohrobjectiv*. Der Fall, dass auch die aplanatische Bildfläche ins Unendliche rückt, dass also parallele Büschel in parallele Büschel übergehen, ist bei jedem Prismensatz realisirt. Liegt die aplanatische Objectfläche im Endlichen, die Bildfläche im Unendlichen, so haben wir den idealen Collimator, die Umkehrung des idealen Fernrohrs; liegen endlich beide aplanatische Flächen im Endlichen, so haben wir das ideale Mikroskop, wobei es für diese gröbere Classification unwesentlich ist, welche weiteren Forderungen (Bildebenheit, correcte Zeichnung u. s. w.) an jene optischen Instrumente gestellt werden. Der Kürze wegen sollen hiernach die verschiedenen Arten der Aplanasie als *mikroskopische* (Object und Bild im Endlichen), *teleskopische* (Object unendlich fern, Bild im Endlichen), und *prismatische Aplanasie* (Object und Bild unendlich fern) bezeichnet werden.

Wir suchen nun die charakteristischen Functionen der aplanatischen infinitesimalen Abbildungen, und zwar zunächst der mikroskopischen. Zwischen den Strahlencoordinaten eines centrischen Büschels mit der Spitze x, y, z bestehen die Gleichungen

$$h = y - x\frac{p}{m}, \quad k = z - x\frac{q}{m}. \tag{2}$$

Das Bild dieses Büschels habe die Strahlencoordinaten $h + \nu h', \cdots$ und sei ebenfalls centrisch; seine Spitze wird die von x, y, z

1) Diese von Bruns in seinen Vorlesungen über Optik durchgeführte Bezeichnung stimmt im Wesentlichen mit der Abbe'schen überein, weicht aber von der im »Eikonal« befolgten einigermassen ab. *Anastigmatisch* heisst jetzt ein *Büschelelement* (Elementarbüschel), das beiderseits centrisch ist, dicentrisch ein Büschel von beliebiger endlicher Oeffnung; in der Abhandlung über das Eikonal waren dicentrische und anastigmatische Gebilde unter der letzten Bezeichnung zusammengefasst.

unendlich wenig verschiedenen Coordinaten $x + \nu x'$, $y + \nu y'$, $z + \nu z'$ besitzen und es bestehen die Gleichungen

$$(53)\quad h' = y' - x'\frac{p}{m} - x\left(\frac{p}{m}\right)', \quad k' = z' - x'\frac{q}{m} - x\left(\frac{q}{m}\right)'.$$

Sollen die Punkte x, y, z und $x + \nu x'$, $y + \nu y'$, $z + \nu z'$ je eine Fläche bilden, so kann man sich x, y, z und x', y', z' als Functionen zweier Parameter β, γ dargestellt denken, die wir dann mit Hülfe der Gleichungen (2) statt h, k als Strahlencoordinaten einführen können. Das Differential der charakteristischen Function wird nach (60), wenn σ eine disponible Constante bedeutet:

$$dV = h'dp + k'dq - p'dh - q'dk - \sigma(pdh + qdk),$$

ferner

$$h'dp + k'dq = x'dm + y'dp + z'dq - \frac{x}{m}(m'dm + p'dp + q'dq),$$

$$p'dh + q'dk = m'dx + p'dy + q'dz - \frac{x}{m}(m'dm + p'dp + q'dq),$$

$$pdh + qdk = mdx + pdy + qdz - d\left(\frac{x}{m}\right),$$

demgemäss

$$dV = x'dm + y'dp + z'dq - m'dx - p'dy - q'dz + \sigma d\left(\frac{x}{m}\right) - \sigma(mdx + pdy + qdz).$$

Setzen wir daher

$$(67)\qquad V = \sigma\frac{x}{m} + x'm + y'p + z'q + \varphi,$$

so ist

$$-d\varphi = mdx' + pdy' + qdz' + m'dx + p'dy + q'dz + \sigma(mdx + pdy + qdz).$$

Denken wir uns für x, y, z, x', y', z' ihre Werthe in β, γ eingesetzt, so wird $d\varphi$ eine lineare Verbindung von $d\beta$ und $d\gamma$, also φ eine blosse Function von β und γ. Man erhält also die charakteristische Function der vorgelegten infinitesimalen mikroskopisch-aplanatischen Abbildung, indem man aus (67), wo φ eine *beliebige* Function von β, γ, und den Gleichungen (2) die Parameter β, γ eliminirt. Wegen der Willkürlichkeit von φ kann man also, selbst wenn die aplanatischen Flächen und die

Punktbeziehung zwischen den conjugirten Büschelspitzen vorgeschrieben ist, auf unendlich viele Arten die aplanatische Abbildung erzeugen.

Für die teleskopisch-aplanatischen Abbildungen ist der Ansatz in dieser Form unzulässig, da die xyz unendlich werden; die charakteristische Function einer solchen soll im nächsten § hergeleitet werden.

Fragen wir zuvor, welche mikroskopisch-aplanatischen Abbildungen optisch erzeugbar sind. Hierbei soll die aplanatische Objectfläche in der Form

$$x = x(y, z)$$

angenommen, also y, z als unabhängige Parameter β, γ gewählt werden; x, φ, x', y', z' werden damit Functionen von y, z. Im Falle einer optisch erzeugbaren Abbildung gelten die Gleichungen (59), (61), (64), die wir umformen wollen, indem wir y, z, p, q statt h, k, p, q als Strahlencoordinaten einführen. Setzen wir die Function v_α, die aus der Gleichung

$$\Phi_\alpha(m v_\alpha\,, \quad h + p v_\alpha\,, \quad k + q v_\alpha) = 0$$

zu ermitteln ist, gleich $\frac{x}{m} + w_\alpha$, so wird

$$v_\alpha = \frac{x}{m} + w_\alpha\,, \quad V = \sigma\frac{x}{m} + W\,, \quad \sigma = \sum_\alpha \sigma_\alpha\,, \tag{68}$$

$$W = \sum_\alpha \sigma_\alpha w_\alpha$$

und w_α ergiebt sich aus der Gleichung

$$\Phi_\alpha(x + m w_\alpha\,, \quad y + p w_\alpha\,, \quad z + q w_\alpha) = 0$$

unmittelbar als Function von p, q, y, z. Für die durch eine Gleichung

$$\Phi(x + m w\,, \quad y + p w\,, \quad z + q w) = 0 \tag{69}$$

definirte Function w [1]) existiren aber zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, die sich ähnlich wie (63) oder (64) ableiten, indem man (69) differentiirt und die Verhältnisse der Ableitungen von Φ eliminirt; das Resultat ist

$$\begin{cases} w w_y = w_p - (m x_y + p)(w + p w_p + q w_q)\,, \\ w w_z = w_q - (m x_z + q)(w + p w_p + q w_q)\,. \end{cases} \tag{70}$$

1) Geometrisch betrachtet ist w der zwischen brechender und aplanatischer Fläche enthaltene Theil des Strahles h, k, p, q.

Als Integrabilitätsbedingung folgt hieraus

$$E(w) = w_{pz} - (mx_y + p)(w_z + p\,w_{pz} + q\,w_{qz})$$
$$- w_{qy} + (mx_z + q)(w_y + p\,w_{py} + q\,w_{qy}) = 0\,,$$

eine lineare homogene Differentialgleichung, der neben w_α auch

$$W = \sum_\alpha \sigma_\alpha w_\alpha$$

genügt. Andererseits ist nach (67) und (68)

$$W = mx' + py' + qz' + \varphi\,,$$

$x' y' z' \varphi$ Functionen von y, z; die hierdurch definirte Function von y, z muss identisch der Gleichung $E(W) = 0$ genügen. Nun findet man

$$W_p = y' - x'\frac{p}{m}\,, \quad W_q = z' - x'\frac{q}{m}\,,$$

$$W + pW_p + qW_q = 2(mx' + py' + qz') + \varphi - \frac{x'}{m}\,,$$

$$W_p - (p + mx_y)(W + pW_p + qW_q) = y' + x'x_y - \varphi(mx_y + p)$$
$$- 2(mx_y + p)(mx' + py' + qz')\,,$$
$$W_q - (q + mx_z)(W + pW_p + qW_q) = z' + x'x_z - \varphi(mx_z + q)$$
$$- 2(mx_z + q)(mx' + py' + qz')\,.$$

Also muss sein

$$\begin{aligned} & y_z' + x_z' x_y - \varphi_z(mx_y + p) \\ & - 2(mx_y + p)(mx_z' + py_z' + qz_z') \\ (71) \qquad & = z_y' + x'_y x_z - \varphi_y(mx_z + q) \\ & - 2(mx_z + q)(mx_y' + py_y' + qz_y')\,. \end{aligned}$$

Eine Identität von der Form

(72) $\alpha m + \beta p + \gamma q + am^2 + bp^2 + cq^2 + Apq + Bqm + Cmp = d$

zerfällt aber in die einzelnen Gleichungen

$$\alpha = \beta = \gamma = 0\,, \quad a = b = c = d\,, \quad A = B = C = 0\,;$$

demnach erhalten wir aus (71) die folgenden Gleichungen, deren Herkunft die in Klammern beigesetzten Potenzen von m, p, q angeben:

$$(p) \quad \varphi_z = 0\,, \quad (q) \quad \varphi_y = 0\,, \quad \text{also} \quad \varphi = 0\,,$$

da auf eine additive Constante nichts ankommt.

$$(pq)\quad z_z' = y_y', \quad (qm)\quad x_y z_z' = x_z z_y' + x_y',$$
$$(mp)\quad x_y y_z' + x_z' = x_z y_y';$$

hieraus, wenn ψ eine Function von y, z bedeutet:

$$(73)\qquad y' = \psi_z, \quad z' = \psi_y, \quad x_y' = x_y \psi_{yz} - x_z \psi_{yy},$$
$$x_z' = x_z \psi_{yz} - x_y \psi_{zz}.$$

Endlich $(1, m^2, p^2, q^2)$:

$$y_z' + x_y x_z' - z_y' - x_z x_y' = +2(x_y x_z' - x_z x_y') = 2 y_z' = -2 z_y',$$

drei Gleichungen, die sich auf

$$y_z' = z_y' = x_y x_z' - x_z x_y' = 0,$$

nach (73) auf

$$\psi_{yy} = \psi_{zz} = 0$$

reduciren. Die Function ψ hat hiernach mit den Constanten β, γ, δ die Form

$$\psi = \gamma y + \beta z + \delta y z,$$

womit aus (73) folgt

$$y' = \beta + \delta y, \quad z' = \gamma + \delta z,$$
$$x_y' = \delta x_y, \quad x_z' = \delta x_z,$$

und mit einer neuen Constante α

$$x' = \alpha + \delta x.$$

Schreiben wir

$$\alpha = -\delta a, \quad \beta = -\delta b, \quad \gamma = -\delta c,$$

so besteht zwischen den conjugirten aplanatischen Punkten die Beziehung

$$(74)\qquad x' = \delta(x-a), \quad y' = \delta(y-b), \quad z' = \delta(z-c),$$

die eine constante Vergrösserung aller Radienvectoren vom Punkte a, b, c aus im Verhältniss $1 : (1 + \nu\delta)$ ausdrückt. Dieser für die praktische Optik belanglose Fall ist bei den concentrischen aplanatischen Kugeln verwirklicht, wobei die brechenden Flächen ebenfalls concentrische Kugeln sind mit gewissen, von den Brechungsexponenten abhängigen Radien. Im Fall einer Brechung sei ϱ der Radius der brechenden Kugel, dann erhält man als aplanatische Flächen die concentrischen Kugeln mit den Radien

$$r = \varrho \frac{N}{n} \quad \text{und} \quad R = \varrho \frac{n}{N}.$$

Ist die Brechung infinitesimal, so setzen wir

$$\frac{n}{N} = 1 - \sigma\nu + \cdots, \quad \frac{n^2}{N^2} = 1 - 2\sigma\nu + \cdots;$$

die Gleichung der aplanatischen Objectfläche ist hier, wenn a, b, c die Coordinaten des Kugelmittelpunkts,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0,$$

die Gleichung der brechenden Fläche

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2 - r^2(1 - 2\sigma\nu + \cdots) = 0$$

und da wir, um die Glieder erster Ordnung der infinitesimalen Abbildung zu erhalten, von der Gleichung der brechenden Fläche nur das Glied nullter Ordnung brauchen,

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2 - r^2 = 0.$$

Für die charakteristische Function ergiebt sich $W = \sigma w$, wenn w aus der Gleichung

$$\Phi(x + mw,\ y + pw,\ z + qw) = 0$$
$$= (mw + x - a)^2 + (pw + y - b)^2 + (qw + z - c)^2 - r^2$$

oder

$$w^2 + 2w\,[m(x-a) + p(y-b) + q(z-c)] = 0$$

bestimmt wird, deren beide Wurzeln $w = 0$ und

$$w = -2\,[m(x-a) + p(y-b) + q(z-c)]$$

sind. Da andererseits

$$W = \delta[m(x-a) + p(y-b) + q(z-c)],$$

so folgt $\delta = -2\sigma$, eine Relation, die mit (74) und der Gleichung

$$R = r + \nu r' = r\left(\frac{n}{N}\right)^2 = r(1 - 2\sigma\nu), \quad r' = -2\sigma r$$

übereinstimmt. Bei einer einzigen Brechung ist der Fall der aplanatischen Kugeln übrigens der einzige Fall von mikroskopischer Aplanasie, wie man durch Einsetzung der Formel

$$w = \frac{W}{\sigma} = \frac{\delta}{\sigma}\Big[m(x-a) + p(y-b) + q(z-c)\Big]$$

in die Gleichungen (70) erkennt, während bei einer Reihe von Brechungen nur die Beziehung (74) aus unseren Formeln direct hervorgeht.

8.

Führen wir statt der Coordinaten x, y, z der Büschelspitze die Grössen

$$\alpha = \frac{1}{x}, \quad \beta = \frac{y}{x}, \quad \gamma = \frac{z}{x}$$

ein, so gehen die Gleichungen (2) und (53) über in

$$(75) \quad \begin{cases} \frac{p}{m} = \beta - \alpha h, & \frac{q}{m} = \gamma - \alpha k, \\ \left(\frac{p}{m}\right)' = \beta' - \alpha' h - \alpha h', & \left(\frac{q}{m}\right)' = \gamma' - \alpha' k - \alpha k', \end{cases}$$

wo α, β, γ und $\alpha + \nu\alpha'$, $\beta + \nu\beta'$, $\gamma + \nu\gamma'$ die Bestimmungsstücke conjugirter Büschelspitzen sind. Ist Aplanasie vorhanden, so können α, α', β', γ' als Functionen von β, γ angesehen werden. Dieser Ansatz ist auch für *teleskopische Aplanasie* geeignet, wobei einfach $\alpha = 0$ zu setzen ist, während α' nicht identisch verschwindet; ist auch $\alpha' = 0$, so wird ein paralleles Büschel in ein paralleles übergeführt (prismatische Aplanasie). Für die teleskopische Aplanasie erhält man daher

$$(76) \quad \begin{cases} \frac{p}{m} = \beta, \quad \frac{q}{m} = \gamma, \\ \left(\frac{p}{m}\right)' = \beta' - \alpha' h, \quad \left(\frac{q}{m}\right)' = \gamma' - \alpha' k \end{cases}$$

und kann hierin α', β', γ' als beliebige Functionen von p, q (statt von β, γ) ansehen. Aus den Gleichungen (76) ergeben sich mit Rücksicht auf $mm' + pp' + qq' = 0$ die folgenden Werthe von p', q':

$$\frac{p'}{m} = \beta' - \alpha' h - p[(\beta' - \alpha' h)p + (\gamma' - \alpha' k)q],$$

$$\frac{q'}{m} = \gamma' - \alpha' k - q[(\beta' - \alpha' h)p + (\gamma' - \alpha' k)q].$$

Sucht man die charakteristische Function V und beachtet, dass

$$p' = -\sigma p - V_h, \quad q' = -\sigma q - V_k,$$

so folgt

$$(77) \quad \begin{cases} V_h = A[h - p(ph + qk)] + B, \\ V_k = A[k - q(ph + qk)] + C, \end{cases}$$

wo die drei Grössen

(78) $A = \alpha' m\,, \quad B = -\sigma p - \beta' m + pm(\beta' p + \gamma' q)\,,$

$$C = -\sigma q - \gamma' m + qm(\beta' p + \gamma' q)$$

Functionen von p, q allein sind. Durch Integration folgt aus (77)

(79) $V = \frac{A}{2}\,[h^2 + k^2 - (ph + qk)^2] + Bh + Ck + D\,,$

wo D eine vierte, willkürliche Function von p, q ist. Diese in h, k quadratische Form ist die charakteristische Function einer infinitesimalen teleskopisch-aplanatischen Abbildung.

Zur Controlle, und um auch diese Ableitungsart an einem Beispiel vorzuführen, soll die charakteristische Function (79) aus dem Eikonal der endlichen Abbildung entwickelt werden. Es seien X, Y, Z, F beliebige Functionen von p, q; wir setzen das Eikonal $E(p, q, P, Q)$ [also E_1 nach dem Schema (14)]

(80) $$E = N(MX + PY + QZ + F)$$

an mit den Abbildungsgleichungen

(81) $\begin{cases} -\frac{n}{N}\,h = MX_p + PY_p + QZ_p + F_p\,, \\ -\frac{n}{N}\,k = MX_q + PY_q + QZ_q + F_q\,, \end{cases}$ (82) $\begin{cases} H = Y - X\frac{Q}{M}\,, \\ K = Z - X\frac{Q}{M}\,, \end{cases}$

aus denen sich ergiebt, dass der Bildstrahl durch den Punkt X, Y, Z geht, dass also jedem parallelen Objectbüschel mit den Richtungscosinus m, p, q ein centrisches Bildbüschel mit der Spitze X, Y, Z zugeordnet, d. h. die unendlich ferne Ebene aplanatisch abgebildet wird. Soll die Abbildung eine unendlich kleine sein, so liegt der Punkt X, Y, Z bis auf Grössen von der Ordnung ν im Unendlichen, d. h. wir können ansetzen

(83) $$\begin{cases} \nu X = \xi + \nu\xi' + \frac{\nu^2}{2}\,\xi'' + \cdots \\ \nu Y = \eta + \nu\eta' + \frac{\nu^2}{2}\,\eta'' + \cdots \\ \nu Z = \zeta + \nu\zeta' + \frac{\nu^2}{2}\,\zeta'' + \cdots \\ \nu F = \varphi + \nu\varphi' + \frac{\nu^2}{2}\,\varphi'' + \cdots\,, \end{cases}$$

wo die $\xi\,\eta\,\zeta\,\varphi$, $\xi'\,\eta'\,\zeta'\,\varphi'$, $\cdots$ gewisse, theils willkürliche, theils zu bestimmende Functionen von p, q sind. Setzen wir diese Gleichungen, sowie die Entwicklungen (16) und (17) in das Eikonal (80) und bezeichnen zur Abkürzung eine Summe über die drei Coordinatenachsen durch S, so ergiebt sich

$$(84)\qquad \frac{\nu E}{N} = S\left(m + \nu m' + \frac{\nu^2}{2} m'' + \cdots\right)\left(\xi + \nu\xi' + \frac{\nu^2}{2}\xi'' + \cdots\right) + \varphi + \nu\varphi' + \frac{\nu^2}{2}\varphi'' + \cdots .$$

Nach (25) wird aber

$$(85)\qquad E - h(NP - np) - k(NQ - nq) = N\nu V + \cdots ,$$

woraus hervorgeht, dass E durch ν theilbar sein muss; die Entwickelung (84) darf rechter Hand also erst mit ν^2 beginnen und es bestehen die Identitäten

$$(86)\qquad Sm\xi + \varphi = 0\,, \quad S(m'\xi + m\xi') + \varphi' = 0\,,$$

$$(87)\qquad \frac{2E}{N\nu} = S\,(m''\xi + 2m'\xi' + m\xi'') + \varphi'' .$$

Ferner ergiebt sich durch Einsetzung der Reihen (16), (17), (83) in die ersten Abbildungsgleichungen (81)

$$-\nu h(1 + \varrho'\nu + \cdots) = \varphi_p + \nu\varphi_p' + \frac{\nu^2}{2}\varphi_p'' + \cdots$$
$$+ S\left(m + \nu m' + \frac{\nu^2}{2} m'' + \cdots\right)\left(\xi_p + \nu\xi_p' + \frac{\nu^2}{2}\xi_p'' + \cdots\right)$$

und die entsprechende zweite Gleichung; durch Trennung der Potenzen von ν entsteht

$$(88)\qquad 0 = Sm\xi_p + \varphi_p\,, \quad 0 = Sm\xi_q + \varphi_q\,,$$

$$(89)\qquad -h = S(m'\xi_p + m\xi_p') + \varphi_p'\,, \quad -k = S(m'\xi_q + m\xi_q') + \varphi_q'\,,$$

$$(90)\qquad \begin{cases} -2\varrho' h = S\,(m''\xi_p + 2m'\xi_p' + m\xi_p'') + \varphi_p''\,, \\ -2\varrho' k = S\,(m''\xi_q + 2m'\xi_q' + m\xi_q'') + \varphi_q''\,, \\ \qquad\cdots \qquad\qquad \cdots \end{cases}$$

Hiervon bestimmen die Gleichungen (88) φ, die Gleichungen (89) $m'\,p'\,q'$, die Gleichungen (90) $m''\,p''\,q''$, wenn man noch die Relationen

$$Smm' = 0\,, \quad Smm'' = -Sm'^2$$

berücksichtigt; die erhaltenen Werthe müssen noch den Gleichungen (86) genügen. — Endlich liefert das zweite Paar Abbildungsgleichungen (82) die Relationen

$$\nu(h+\nu h'+\cdots)=\eta+\nu\eta'+\frac{\nu^2}{2}\eta''+\cdots$$
$$-\left(\xi+\nu\xi'+\frac{\nu^2}{2}\xi''+\cdots\right)\left(\frac{p}{m}+\nu\left(\frac{p}{m}\right)'+\frac{\nu^2}{2}\left(\frac{p}{m}\right)''+\cdots\right),$$

die sich trennen in

(91) $$0=\eta-\xi\frac{p}{m},\quad 0=\zeta-\xi\frac{q}{m},$$

(92) $$h=\eta'-\xi'\frac{p}{m}-\xi\left(\frac{p}{m}\right)',\quad k=\zeta'-\xi'\frac{q}{m}-\xi\left(\frac{q}{m}\right)',$$

(93) $$\begin{cases} 2h'=\eta''-\xi''\frac{p}{m}-2\xi'\left(\frac{p}{m}\right)'-\xi\left(\frac{p}{m}\right)'', \\ 2k'=\zeta''-\xi''\frac{q}{m}-2\xi'\left(\frac{q}{m}\right)'-\xi\left(\frac{q}{m}\right)'', \end{cases}$$

$$\cdots \qquad\qquad \cdots$$

und ausser einigen weiteren Relationen die Werthe von $h', k', \cdots$ liefern.

Gleichungen (86) und (91) zusammen geben

(94) $$\xi=-m\varphi,\quad \eta=-p\varphi,\quad \zeta=-q\varphi,$$

womit zugleich (88) erfüllt sind. Ferner folgt aus (92) und (86)

$$ph+qk=m\xi'+p\eta'+q\zeta'-\frac{\xi'}{m}+\frac{\xi m'}{m^2}=-\varphi'-\frac{\xi'}{m}-\frac{\varphi m'}{m},$$

also

und damit weiter (95) $$\begin{cases} m'\varphi=-m(ph+qk+\varphi')-\xi' \\ p'\varphi=-p(ph+qk+\varphi')-\eta'+h \\ q'\varphi=-q(ph+qk+\varphi')-\zeta'+k, \end{cases}$$

Gleichungen, die zugleich (89) erfüllen. Es bleiben unausgenutzt noch die Gleichungen (90) und (93), die uns die hier nicht gebrauchten Werthe m'', p'', q'', h', k' liefern würden.

Für das Eikonal folgt nun aus (87) und (94)

$$\frac{2E}{N\nu}=-Smm''\varphi+2Sm'\xi'+Sm\xi''+\varphi''$$
$$=\varphi Sm'^2+2Sm'\xi'+Sm\xi''+\varphi''.$$

Nach (95) ist

$$\begin{aligned}\varphi^2 S m'^2 &= (ph+qk+\varphi')^2 + h^2 + k^2 + \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 \\ &\quad - 2\varphi'(ph+qk+\varphi') - 2(ph+qk)(ph+qk+\varphi') \\ &\quad - 2(\eta' h + \zeta' k) \\ &= -(ph+qk+\varphi')^2 + h^2 + k^2 - 2(\eta' h + \zeta' k) \\ &\quad + \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 ,\end{aligned}$$

$$\varphi S m' \xi' = \varphi'(ph+qk+\varphi') - \xi'^2 - \eta'^2 - \zeta'^2 + \eta' h + \zeta' k ,$$

$$\begin{aligned}\frac{2E\varphi}{N\nu} &= \varphi'^2 - (ph+qk)^2 + h^2 + k^2 - \xi'^2 - \eta'^2 - \zeta'^2 \\ &\quad + (m\xi'' + p\eta'' + q\zeta'' + \varphi'')\varphi\end{aligned}$$

oder

$$\frac{E}{N\nu} = \frac{1}{2\varphi}[h^2 + k^2 - (ph+qk)^2] + D ,$$

$$\begin{aligned}2\varphi D &= \varphi(\varphi'' + m\xi'' + p\eta'' + q\zeta'') + \varphi'^2 - \xi'^2 - \eta'^2 - \zeta'^2 \\ &= \varphi\varphi'' + \varphi'^2 - (\xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'') - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2),\end{aligned}$$

also D eine willkürliche Function von p, q.

Weiter wird nach (85)

$$V = \frac{E}{N\nu} - h(p' + \sigma p) - k(q' + \sigma q)$$

$$\begin{aligned}&= D + \frac{1}{2\varphi}[h^2 + k^2 - (ph+qk)^2] + \frac{ph+qk}{\varphi}(ph+qk+\varphi') \\ &\quad + \frac{(\eta' - h)h + (\zeta' - k)k}{\varphi} - \sigma(ph+qk) \\ &= \frac{A}{2}[h^2 + k^2 - (ph+qk)^2] + Bh + Ck + D ,\end{aligned}$$

$$(96) \quad A = -\frac{1}{\varphi}, \quad B = \frac{\eta' + p\varphi'}{\varphi} - \sigma p, \quad C = \frac{\zeta' + q\varphi'}{\varphi} - \sigma q,$$

übereinstimmend mit (78) und (79), wenn man beachtet, dass die dortigen Grössen α', β', γ' mit den hiesigen durch die Gleichungen

$$\nu\alpha' = \frac{1}{X} - \left(\frac{1}{X}\right)_0, \quad \nu\beta' = \frac{Y}{X} - \left(\frac{Y}{X}\right)_0, \quad \nu\gamma' = \frac{Z}{X} - \left(\frac{Z}{X}\right)_0$$

zusammenhängen, in denen der Index 0 die Substitution $\nu = 0$ bedeutet. In der That wird dann

$$\alpha' = \frac{1}{\xi}, \quad \beta' = \frac{\eta'}{\xi} - \frac{\eta\xi'}{\xi^2}, \quad \gamma' = \frac{\zeta'}{\xi} - \frac{\zeta\xi'}{\xi^2},$$

$$p\beta' + q\gamma' = -\frac{\varphi' + m\xi'}{\xi} + (\varphi + m\xi)\frac{\xi'}{\xi^2} = \frac{\xi'\varphi}{\xi^2} - \frac{\varphi'}{\xi},$$

woraus sich leicht die Identität der Werthe (78) und (96) ablesen lässt. —

Stellen wir die Frage nach der optischen Erzeugbarkeit der teleskopisch-aplanatischen Abbildung, so erhalten wir zunächst durch Anwendung des Kriteriums $\varDelta(V) = 0$ auf die Function (79) eine in Bezug auf h, k lineare Identität, die nach einigen Reductionen in die drei Gleichungen zerfällt:

$$A_p = 0, \quad A_q = 0,$$

(97) $$B_q - q(B + pB_p + qB_q) = C_p - p(C + pC_p + qC_q).$$

Hiernach wäre A constant, φ constant, und nach (94)

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varphi^2,$$

die anastigmatische Bildfläche eine Kugel mit dem Radius $\frac{\varphi}{\nu}$.

Aber eine genauere Betrachtung zeigt, dass ein Glied wie das mit A multiplicirte in einem optisch erzeugbaren V überhaupt nicht auftreten kann. V ist eine lineare Verbindung von Functionen v, deren jede den partiellen Differentialgleichungen (64) genügt. Bezüglich der Art und Weise, wie v die Variablen h und k enthält, folgt hieraus, dass für $\lim h = \infty$ v nicht von höherer Ordnung unendlich werden kann als h^1. Angenommen, es werde $\lim v = \infty$ von der Ordnung einer Function $\psi(h)$, so dass für grosse Werthe von h eine Entwicklung von der Form

$$v = v_0\psi(h) + \cdots, \quad v_0 = v_0(k, p, q)$$

gilt, wo der Rest im Verhältniss zu $\psi(h)$ mit wachsendem h unter jede Grenze sinkt, so ist einerseits

$$\frac{v}{h} = v_0\frac{\psi(h)}{h} + \cdots,$$

andererseits

$$\lim\frac{v}{h} = \lim v_h = \lim\frac{v_p - p(v + pv_p + qv_q)}{v}$$

$$= \lim\frac{v_{0p} - p(v_0 + pv_{0p} + qv_{0q}) + \cdots}{v_0 + \cdots},$$

sodass $\lim\frac{v}{h}$ sowohl endlich bleiben als verschwinden, aber nicht unendlich werden kann.

Es ist also für hinlänglich grosse Werthe von h und k jedes einzelne v und demnach auch V höchstens von der Dimension h^1, k^1, womit das in (79) mit A multiplicirte Glied ausgeschlossen ist. *Demgemäss ist teleskopische Aplanasie optisch unerzeugbar und das ideale Fernrohrobjectiv bei unbestimmt bleibenden Werthen der Brechungsexponenten durch keine Wahl der brechenden Flächen zu verwirklichen.*

Setzt man $A = 0$, so ist V die erzeugende Function für prismatische Aplanasie, wobei parallele Büschel durch parallele abgebildet werden; es bleibt dann noch die Bedingung (97) zu erfüllen. Nach (78) war, wenn für den Augenblick

$$\beta = m\beta', \quad \gamma = m\gamma'$$

gesetzt werden,

$$(98) \qquad \begin{cases} B = p(\beta p + \gamma q - \sigma) - \beta\,, \\ C = q(\beta p + \gamma q - \sigma) - \gamma\,. \end{cases}$$

Die Forderung (97) schreibt sich

$$\begin{aligned} C_p - B_q &= p(C + pC_p - qB_p) + q(-B + pC_q - qB_q) \\ &= p(pC - qB)_p + q(pC - qB)_q\,, \end{aligned}$$

woraus man mit Einsetzung von (98) erhält

$$m^2(\beta_q - \gamma_p) = 0\,,$$

d. h. es ist $\beta dp + \gamma dq$ ein vollständiges Differential, oder mit einer willkürlichen Function s,

$$\beta = s_p\,, \quad \gamma = s_q\,.$$

Beispielsweise entspricht die Annahme

$$s = \sigma \log (am + bp + cq)$$

einer Brechung an der Ebene

$$ax + by + cz = d\,.—$$

Hier bemerke ich nochmals, dass ich die Unvollständigkeit des gegebenen Beweises für die Nichtexistenz idealer Fernrohrobjective keineswegs verkenne. Wenn es auch unwahrscheinlich ist, dass ein optisches System für bestimmte Zahlenwerthe der Brechungsexponenten wesentliche Eigenschaften wie die Aplanasie besitzen solle, die es bei allgemeinen, disponiblen Werthen derselben nicht besitzt, so wäre eine Uebertragung des Beweisprincips auf endliche Abbildungen doch schon wünschenswerth, um einen tieferen Einblick in die Natur des Widerspruchs zwischen Aplanasie und optischer Erzeugbarkeit zu erhalten, als ihn der rein formelle Bau einer Function $V(h, k, p, q)$ gewährt. Noch fühlbarer ist vielleicht der Mangel, der in der Ausschliessung *katoptrischer* Systeme liegt. Um dem abzuhelfen, wären die Formeln des § 5 genauer zu discutiren, als es hier geschehen ist, wobei aber, wie es scheint, die Bedeutung der infinitesimalen Abbildungen merklich verblasst; denn es lassen sich, rein mathematisch betrachtet, aus Spiegelungen an benachbarten Flächen charakteristische Functionen zusammensetzen, die auch das kritische Glied der teleskopischen Aplanasie

$$h^2 + k^2 - (ph + qk)^2 \tag{99}$$

enthalten. Setzen wir z. B. in (54), (55), (56)

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \varphi = \sqrt{r^2 - y^2 - z^2}, \quad \psi = 1,$$

so dass die Spiegelung an zwei Kugeln vom Radius r vor sich geht, deren Mittelpunkte um die Strecke ν von einander entfernt auf der X-Achse liegen, so ist die charakteristische Function

$$V = 2\,\frac{m - p\varphi_y - q\varphi_z}{1 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2} = \frac{2x}{r^2}(mx + py + qz)$$

$$= \frac{2mv}{r^2}(v + ph + qk),$$

wo v aus der Gleichung

$$(mv)^2 + (h + pv)^2 + (k + qv)^2 = r^2$$

zu bestimmen ist. Mit

$$u^2 = r^2 - h^2 - k^2 + (ph + qk)^2$$

folgt hieraus

$$v = -ph - qk \pm u,$$

$$V = \frac{2m}{r^2}[u^2 \mp u(ph + qk)],$$

und wenn man aus

$$V_1 = \frac{2m}{r^2}\Big(u^2 + u(ph + qk)\Big) \text{ und } V_2 = \frac{2m}{r^2}\Big(u^2 - u(ph + qk)\Big)$$

eine erzeugende Function $V = V_1 + V_2$ zusammensetzt,

$$V = \frac{4m}{r^2}u^2 = 4m - \frac{4m}{r^2}[h^2 + k^2 - (ph + qk)^2].$$

Hiernach wäre durch viermalige Spiegelung an zwei benachbarten Kugeln teleskopische Aplanasie zu erreichen; eine infinitesimale Eigenschaft, zu der man kein endliches Analogon kennt. Immerhin darf hiernach die Unmöglichkeit des idealen Fernrohrobjectivs zunächst nur für die rein dioptrischen Systeme behauptet werden.

Die gedachten Ergänzungen vorbehalten, wird man auf teleskopische Aplanasie bei beliebiger Büschelöffnung auch theoretisch verzichten und sich auf die Untersuchung der Elementarbüschel beschränken müssen; d. h. an Stelle der dicentrischen treten die anastigmatischen Gebilde, und für die Abbildungsfunctionen resp. -gleichungen sind Reihenentwicklungen bis zu einer gewissen Ordnung heranzuziehen — Reihenentwicklungen, nicht, wie hier geschehen, nach den *Parametern* (Brechungsexponenten), sondern nach den *Variablen* (Strahlencoordinaten) der Abbildung. Dass gerade im Fall des idealen Fernrohrobjectivs die praktische Optik instinctiv das Richtige getroffen hat, indem sie eine Annäherung mit brechenden *Kugelflächen* versuchte, geht fast unmittelbar aus der Form (99) des kritischen Gliedes hervor. Für die Brechung an einer Kugel mit dem Radius r um den Coordinatenanfang existirt die charakteristische Function $V = \sigma v$,

$$v = -ph - qk + \sqrt{r^2 - h^2 - k^2 + (ph + qk)^2}\,.$$

Für hinlänglich kleine Werthe von h, k, d. h. für Strahlen, die hinlänglich nahe am Mittelpunkt der brechenden Fläche vorbeigehen, gilt demnach die Reihenentwicklung

$$v = r - ph - qk - \frac{1}{2r}[h^2 + k^2 - (ph + qk)^2] + \cdots,$$

woraus für ein centrirtes Linsensystem die Aplanasie paraxialer Strahlen folgt. Für die Beibehaltung sphärischer Flächen spricht also ausser den technischen Gründen der theoretische, dass in die zugehörigen charakteristischen Functionen gerade nur die Verbindung (99) der in Bezug auf h und k quadratischen Glieder eingeht.

9.

Anhangsweise soll noch der Fall der Doppelbrechung in ein- und zweiachsigen Krystallen behandelt werden. Hier gilt der MALUS'sche Satz nicht mehr und die Beziehung zu den Berührungstransformationen tritt zurück; immerhin besitzen die infinitesimalen Abbildungen dieser Gattung noch eine übersichtliche Gestalt und erlauben die Frage nach der teleskopischen Aplanasie zu beantworten, — auch hier im verneinenden Sinne.

Wir haben zunächst, den bekannten Sätzen der theoretischen Optik folgend, die Beziehung zwischen Strahl und Wellennormale im anisotropen Medium aufzustellen, wobei wir die optischen Symmetrieebenen des Mediums (Hauptebenen des Elasticitätsellipsoids) vorläufig zu Coordinatenebenen wählen. Die Gleichung der Wellenfläche, bezogen auf ihren Mittelpunkt, hat die Form

$$(100)\quad \begin{cases} \dfrac{a^2x^2}{a^2-u^2}+\dfrac{b^2y^2}{b^2-u^2}+\dfrac{c^2z^2}{c^2-u^2}=0 \quad \text{oder} \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2-u^2}+\dfrac{y^2}{b^2-u^2}+\dfrac{z^2}{c^2-u^2}+1=0, \end{cases}$$

$$u^2=x^2+y^2+z^2,$$

wo a, b, c die reciproken Halbachsen des FRESNEL'schen Elasticitätsellipsoides sind. Sind μ, π, $\varkappa$ die Richtungscosinus des Strahls, also

$$x=u\mu,\quad y=u\pi,\quad z=u\varkappa,$$

so folgt der zugehörige Radiusvector u der Wellenfläche aus einer der beiden Gleichungen

$$(101)\quad \begin{cases} \dfrac{a^2\mu^2}{a^2-u^2}+\dfrac{b^2\pi^2}{b^2-u^2}+\dfrac{c^2\varkappa^2}{c^2-u^2}=0 \quad \text{oder} \\[2ex] \dfrac{\mu^2}{a^2-u^2}+\dfrac{\pi^2}{b^2-u^2}+\dfrac{\varkappa^2}{c^2-u^2}+\dfrac{1}{u^2}=0, \end{cases}$$

die entwickelt in u^2 quadratisch werden, entsprechend den beiden Schalen der Wellenfläche. Elasticitätsellipsoid und Wellenfläche mögen sich auf die Zeiteinheit beziehen.

Wir legen im Punkte x, y, z die Tangentialebene an die Wellenfläche und fällen vom Mittelpunkt das Loth auf diese Ebene; die Länge des Lothes sei w, seine Richtungscosinus ϱ, σ, τ, sodass

$$(102)\quad w=x\varrho+y\sigma+z\tau=u(\mu\varrho+\pi\sigma+\varkappa\tau).$$

Die Grössen ϱ, σ, τ sind proportional mit den Ableitungen der

Gleichung (100) nach x, y, z; wählen wir die zweite Form, so können wir ansetzen

$$(103)\qquad \begin{cases} \varrho = \lambda x\left(\dfrac{1}{a^2-u^2}+\dfrac{1}{\vartheta^2}\right), \\ \sigma = \lambda y\left(\dfrac{1}{b^2-u^2}+\dfrac{1}{\vartheta^2}\right), \\ \tau = \lambda z\left(\dfrac{1}{c^2-u^2}+\dfrac{1}{\vartheta^2}\right), \end{cases}$$

$$(104)\qquad \frac{1}{\vartheta^2} = \left(\frac{x}{a^2-u^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2-u^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2-u^2}\right)^2.$$

Aus (103) folgt durch Quadriren und Addiren

$$1 = \lambda^2\left(\frac{1}{\vartheta^2} - \frac{2}{\vartheta^2} + \frac{u^2}{\vartheta^4}\right) = \lambda^2\frac{u^2-\vartheta^2}{\vartheta^4},$$

andrerseits aus (102)

$$w = \lambda\left(-1 + \frac{u^2}{\vartheta^2}\right) = \lambda\,\frac{u^2-\vartheta^2}{\vartheta^2},$$

daher

$$w\lambda = \vartheta^2 = u^2 - w^2.$$

Demnach folgt aus (103)

$$(105)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varrho w}{a^2-w^2} = \dfrac{\mu u}{a^2-u^2}, \\ \dfrac{\sigma w}{b^2-w^2} = \dfrac{\pi u}{b^2-u^2}, \\ \dfrac{\tau w}{c^2-w^2} = \dfrac{\varkappa u}{c^2-u^2}. \end{cases}$$

Die Grössen μ, π, $\varkappa$, u und ϱ, σ, τ, w treten hier symmetrisch auf. Um noch eine Gleichung zwischen ϱ, σ, τ, w allein zu finden, denken wir uns nach (105) geschrieben

$$(106)\qquad \mu\,\frac{u}{w} = \varrho\,\frac{a^2-u^2}{a^2-w^2} = \varrho\left(1 - \frac{\vartheta^2}{a^2-w^2}\right)$$

und die beiden entsprechenden; hieraus folgt nach (102)

$$1 = \frac{u}{w}(\mu\varrho + \pi\varkappa + \sigma\tau) = 1 - \vartheta^2\left(\frac{\varrho^2}{a^2-w^2} + \frac{\sigma^2}{b^2-w^2} + \frac{\tau^2}{c^2-w^2}\right)$$

oder

$$\frac{\varrho^2}{a^2-w^2} + \frac{\sigma^2}{b^2-w^2} + \frac{\tau^2}{c^2-w^2} = 0.$$

Stellen wir die einander entsprechenden Formeln zusammen, so erhalten wir ausser (105) die Gleichungen

$$
(107)\qquad \begin{cases} \dfrac{a^2\mu^2}{a^2-u^2}+\dfrac{b^2\pi^2}{b^2-u^2}+\dfrac{c^2\varkappa^2}{c^2-u^2}=0\,, \\[2ex] \dfrac{\varrho^2}{a^2-w^2}+\dfrac{\sigma^2}{b^2-w^2}+\dfrac{\tau^2}{c^2-w^2}=0\,, \end{cases}
$$

$$
(108)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\mu}{a^2-u^2}\right)^2+\left(\dfrac{\pi}{b^2-u^2}\right)^2+\left(\dfrac{\varkappa}{c^2-u^2}\right)^2=\dfrac{1}{u^2\vartheta^2}\,, \\[2ex] \left(\dfrac{\varrho}{a^2-w^2}\right)^2+\left(\dfrac{\sigma}{b^2-w^2}\right)^2+\left(\dfrac{\tau}{c^2-w^2}\right)^2=\dfrac{1}{w^2\vartheta^2}\,, \end{cases}
$$

$$
(109)\qquad u^2=w^2+\vartheta^2\,.
$$

Ist also μ, π, $\varkappa$ gegeben, so bestimmt man aus $(107)_1$ u, aus $(108)_1$ ϑ, aus (109) w, aus (105) ϱ, σ, τ. Ist umgekehrt ϱ, σ, τ gegeben, so findet man aus $(107)_2$ w, aus $(108)_2$ ϑ, aus (109) u, aus (105) μ, π, $\varkappa$. Die Gleichungen für u und w sind quadratisch; zu jedem Strahl μ, π, $\varkappa$ giebt es zwei Wellennormalen ϱ, σ, τ, umgekehrt zu jeder Wellennormale ϱ, σ, τ zwei Strahlen μ, π, $\varkappa$. Es ist übrigens im Folgenden unnöthig, die beiden Werthsysteme (das ordentliche und das ausserordentliche) getrennt zu behandeln.

Durch Differentiation von $(107)_2$, worin w als Function von ϱ, σ, τ anzusehen ist, ergiebt sich

$$
\frac{\varrho\,d\varrho}{a^2-w^2}+\frac{\sigma\,d\sigma}{b^2-w^2}+\frac{\tau\,d\tau}{c^2-w^2}+\frac{dw}{w\vartheta^2}=0\,.
$$

Damit folgt aus (106)

$$
\frac{u}{w}(\mu\,d\varrho+\pi\,d\sigma+\varkappa\,d\tau)
$$

$$
=-\vartheta^2\left(\frac{\varrho\,d\varrho}{a^2-w^2}+\frac{\sigma\,d\sigma}{b^2-w^2}+\frac{\tau\,d\tau}{c^2-w^2}\right)=\frac{dw}{w}\,,
$$

$$
(110)\qquad \begin{cases} \mu\,d\varrho+\pi\,d\sigma+\varkappa\,d\tau=\dfrac{1}{u}\,dw\,, \quad \text{und aus (102)} \\[2ex] \varrho\,d\mu+\sigma\,d\pi+\tau\,d\varkappa=w\,d\left(\dfrac{1}{u}\right). \end{cases}
$$

Diese Formeln, die die bekannte Enveloppenbeziehung zwischen Wellenebene und Wellenfläche darstellen, gelten unverändert bei beliebiger Wahl der Coordinatenachsen. Sind also, bezogen auf ein neues festes Achsensystem, m, p, q die Richtungscosinus des Strahles, r, s, t die der Wellennormale, so ist auch

$$(111)\qquad \begin{cases} m\,dr + p\,ds + q\,dt = \frac{1}{u}\,dw\,, \\ r\,dm + s\,dp + t\,dq = w\,d\left(\frac{1}{u}\right), \\ rm + sp + tq = \frac{w}{u}\,, \end{cases}$$

wobei u der zu mpq gehörige Radiusvector der Wellenfläche, w das auf die Wellenebene gefällte Loth und zugleich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle ist.

Bei der Brechung an der Grenze zweier anisotropen Medien folgen die Wellennormalen dem gewöhnlichen Brechungsgesetz, aber mit den variablen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten (reciproken Brechungsindices) w. Man geht also vom einfallenden Strahl nach den obigen Formeln zur einfallenden Wellennormale, von dieser nach dem Brechungsgesetz zur gebrochenen Wellennormale, von dieser zum gebrochenen Strahl über; da zwei dieser einzelnen Beziehungen zweideutig sind, ist die Gesammtbeziehung vierdeutig. Im isotropen Medium fällt der Strahl mit seiner Wellennormale zusammen; der Uebertritt aus isotropen in krystallinische Medien und umgekehrt ist zweideutig, der Uebertritt aus isotropen in isotrope eindeutig. Offenbar genügt es, den Uebergang zwischen isotropen und krystallinischen Medien zu betrachten, da man zwischen zwei krystallinische, die unmittelbar an einander grenzen, ein isotropes eingeschaltet denken kann.

Die Richtungscosinus des Strahles U im isotropen Medium, bezogen auf beliebige Achsen, bezeichnen wir mit M, P, Q, die des Strahles u im krystallinischen Medium mit m, p, q, die der Wellennormale w mit r, s, t; ferner seien wie bisher die Richtungscosinus von Strahl u und Wellennormale w, bezogen auf die Symmetrieebenen des Krystalls, $\mu, \pi, \varkappa$ und ϱ, σ, τ, und u, w, ϑ die oben definirten Grössen. Zwischen den Richtungscosinus in beiden Achsensystemen bestehen die orthogonalen Beziehungen mit constanten Coefficienten $\xi\,\eta\,\zeta\,\ldots$, die wir in Form der Täfelchen

	μ	π	$\varkappa$
m	ξ	ξ'	ξ''
p	η	η'	η''
q	ζ	ζ'	ζ''

	ϱ	σ	τ
r	ξ	ξ'	ξ''
s	η	η'	η''
t	ζ	ζ'	ζ''

schreiben können; die $\xi\,\eta\,\zeta\ldots$ sind die Richtungscosinus der optischen Symmetrieachsen gegen die Coordinatenachsen. Zu den oben abgeleiteten Relationen tritt zwischen Strahl U und Wellennormale w eine gewöhnliche Brechung mit den Indices $N = 1$ und $n = \frac{1}{w}$, es sind daher die Differenzen

$$M - \frac{r}{w}, \quad P - \frac{s}{w}, \quad Q - \frac{t}{w}$$

den Richtungscosinus des Einfallslothes proportional, also wenn $x = x(y, z)$ die Gleichung der brechenden Fläche ist,

$$(112)\quad M = \frac{r}{w} + f, \quad P = \frac{s}{w} - f x_y, \quad Q = \frac{t}{w} - f x_z .$$

Beim *Austritt* aus dem Krystall sind m, p, q gegeben; daraus findet man μ, π, $\varkappa$, ferner nach dem Früheren u, ϑ, w, ϱ, σ, τ, daraus r, s, t und mit Hülfe der Gleichungen (112) und der Relation

$$M^2 + P^2 + Q^2 = 1$$

die Unbekannten f, M, P, Q. Schwieriger ist der *Eintritt* in das krystallinische Medium; hier sind M, P, Q gegeben, und aus (112), worin aber w nach $(107)_2$ von ϱ, σ, τ oder r, s, t abhängt, sind unter Zuziehung von $r^2 + s^2 + t^2 = 1$ die Unbekannten r, s, t, f zu bestimmen, wonach die weitere Rechnung den umgekehrten Gang wie vorhin nimmt.

Gehen wir, im Fall des Austritts, zur infinitesimalen Abbildung über, indem wir a, b, c bis auf Grössen von der Ordnung der unendlich kleinen Constante ν gleich der Einheit, also

$$a = 1 + \alpha\nu, \quad b = 1 + \beta\nu, \quad c = 1 + \gamma\nu$$

setzen. Da u und w zwischen dem grössten und kleinsten der Werthe a, b, c liegen, so werden auch sie bis auf Grössen von der Ordnung ν gleich 1, also

$$u = 1 + \nu\varphi + \cdots, \quad w = 1 + \nu\psi + \cdots .$$

Die Gleichung $(107)_1$ giebt, wenn stets nur die niedrigsten Potenzen von ν beibehalten werden,

$$(113)\qquad \frac{\mu^2}{\alpha-\varphi}+\frac{\pi^2}{\beta-\varphi}+\frac{\varkappa^2}{\gamma-\varphi}=0,$$

die Gleichung $(108)_1$

$$\vartheta = 2\nu\varepsilon\,,\quad \text{wenn}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}=\left(\frac{\mu}{\alpha-\varphi}\right)^2+\left(\frac{\pi}{\beta-\varphi}\right)^2+\left(\frac{\varkappa}{\gamma-\varphi}\right)^2.$$

Danach folgt aus (109)

$$w^2 = u^2-\vartheta^2 = 1+2\nu\varphi+\cdots,$$

$$\psi=\varphi,$$

sodass u und w sich erst in den Gliedern mit ν^2 unterscheiden. Endlich liefert (105)

$$\varrho=\frac{u}{w}\mu\left(1+\frac{\vartheta^2}{a^2-u^2}\right)=\mu\left(1+2\nu\frac{\varepsilon^2}{\alpha-\varphi}\right)$$

oder

$$\varrho-\mu=2\nu\mu\frac{\varepsilon^2}{\alpha-\varphi},\quad \sigma-\pi=2\nu\pi\frac{\varepsilon^2}{\beta-\varphi},$$

$$\tau-\varkappa=2\nu\varkappa\frac{\varepsilon^2}{\gamma-\varphi}.$$

Der Strahl und seine zugehörige Wellennormale unterscheiden sich also nur um Glieder von der Ordnung ν; demgemäss gelten auch Formeln von der Gestalt

$$r=m-\nu m_1,\quad s=p-\nu p_1,\quad t=q-\nu q_1,$$

wo $m_1\ p_1\ q_1$ gewisse Functionen von $(m), p, q$ bezeichnen, für die sich aus (111) zwei Relationen ergeben. Einerseits ist nach $(111)_3$

$$\frac{w}{u}=1-\nu(mm_1+pp_1+qq_1),$$

also, da $\frac{w}{u}-1$ von der Ordnung ν^2 ist,

$$(114)\qquad 0=mm_1+pp_1+qq_1\,;$$

andererseits folgt aus $(111)_2$

$$wd\left(\frac{1}{u}\right)=-\nu(m_1dm+p_1dp+q_1dq)=-\nu d\varphi+\cdots,$$

also

$$(115) \qquad d\varphi = m_1\,dm + p_1\,dp + q_1\,dq\,,$$

sodass sich m_1 p_1 q_1 in einfacher Weise durch die Ableitungen der einzigen Function $\varphi = \varphi(p, q)$ nach p und q ausdrücken lassen. Nach (112) wird weiter

$$\begin{aligned} M &= m(1 - \nu\varphi) - \nu m_1 + f\,, \\ P &= p(1 - \nu\varphi) - \nu p_1 - f x_y\,, \\ Q &= q(1 - \nu\varphi) - \nu q_1 - f x_z\,, \end{aligned}$$

und da

$$Mm + Pp + Qq = 1 - \nu\varphi + f(m - p x_y - q x_z)$$

bis auf Glieder von der Ordnung ν^2 gleich der Einheit ist, so wird

$$f = \frac{\nu\varphi}{m - p x_y - q x_z}\,.$$

Setzen wir endlich wieder, wie früher

$$M = m + \nu m'\,, \quad P = p + \nu p'\,, \quad Q = q + \nu q'\,, \quad \text{so folgt}$$

$$(116) \qquad \begin{cases} m' = -\,m\varphi - m_1 + \dfrac{\varphi}{m - p x_y - q x_z}\,, \\[2ex] p' = -\,p\varphi - p_1 - \dfrac{\varphi x_y}{m - p x_y - q x_z}\,, \\[2ex] q' = -\,q\varphi - q_1 - \dfrac{\varphi x_z}{m - p x_y - q x_z}\,. \end{cases}$$

Auf genau dieselben Formeln hätte auch der Eintritt ins krystallinische Medium geführt, wenn immer MPQ den Strahl im isotropen, mpq den im krystallinischen Medium bedeutet. Soll hingegen, mit unserem ursprünglichen Gebrauch übereinstimmend, mpq den Strahl im vorangehenden, MPQ den im folgenden Medium bedeuten (vorangehend und folgend im Sinne der Lichtbewegung), so sind im Falle des Eintritts die Zeichen von (116) umzukehren. Tritt der Strahl aus einem anisotropen Medium 1 in ein anisotropes 2, so setzt sich die Gesammtänderung $\nu m'$ von m zusammen aus

$$\begin{aligned} m' &= m_1' + m_2'\,, \\ m_1' &= -\,\varphi_1\left(m - \frac{1}{m - p x_y - q x_z}\right) - m_1\,, \\ m_2' &= +\,\varphi_2\left(m - \frac{1}{m - p x_y - q x_z}\right) + m_2 \end{aligned}$$

wo jedes einzelne φ durch eine Gleichung von der Form (113) oder

$$\frac{(\xi m+\eta p+\zeta q)^2}{\alpha-\varphi}+\frac{(\xi' m+\eta' p+\zeta' q)^2}{\beta-\varphi}+\frac{(\xi'' m+\eta'' p+\zeta'' q)^2}{\gamma-\varphi}=0$$

definirt ist; die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta \ldots$ sind mit Indices 1, 2 zu versehen; für beide Indices gelten (114) und (115).

Man erkennt hieraus, dass *in jedem Fall einer einzigen Brechung* zwischen anisotropen oder isotropen Medien die Abbildungsgleichungen die Form haben

$$(117)\qquad \begin{cases} m'=\varphi(m-\lambda)+\xi\,, \\ p'=\varphi(p+\lambda x_y)+\eta\,, \\ q'=\varphi(q+\lambda x_z)+\zeta\,, \\ \lambda(m-px_y-qx_z)=1\,, \end{cases}$$

wo $\varphi, \xi, \eta, \zeta$ gewisse Functionen von p, q vorstellen, zwischen denen die Relationen

$$(118)\qquad \begin{cases} \xi m+\eta p+\zeta q=0\,, \\ \xi dm+\eta dp+\zeta dq=d\varphi \end{cases}$$

bestehen. Bei einer Brechung zwischen zwei isotropen Medien ist φ eine Constante, während $\xi\eta\zeta$ verschwinden. — Für die noch fehlenden Strahlencoordinaten h, k und ihre Incremente h', k' gelten wieder die Gleichungen

$$h=y-x\frac{p}{m}\,,\qquad k=z-x\frac{q}{m}\,,$$

$$h'=\frac{x}{m^2}(pm'-mp')\,,\quad k'=\frac{x}{m^2}(qm'-mq')\,,$$

die den Punkt xyz als Schnittpunkt des gebrochenen und des einfallenden Strahls definiren; das erste Paar dient, wie früher, zum Uebergang von den Coordinaten $p\ q\ y\ z$ zu den eigentlichen Strahlencoordinaten $pqhk$. In diesem Sinne hat man

$$p'dh+q'dk=m'dx+p'dy+q'dz-\frac{x}{m}(m'dm+p'dp+q'dq),$$

$$h'dp+k'dq=-\frac{x}{m}(m'dm+p'dp+q'dq)\,.$$

Bildet man den Differentialausdruck

$$(119)\quad D=p'dh+q'dk-h'dp-k'dq=m'dx+p'dy+q'dz\,,$$

so fällt in (117) das mit λ multiplicirte Glied fort und es bleibt

$$D = \varphi\,(m\,dx + p\,dy + q\,dz) + \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz\,.$$

Allgemein ist

$$\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz = \eta\,dh + \zeta\,dk + (\xi m + \eta p + \zeta q)\,d\left(\frac{x}{m}\right)$$
$$+ \frac{x}{m}(\xi\,dm + \eta\,dp + \zeta\,dq)\,,$$

also nach (118)

$$\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz = \frac{x}{m}\,d\varphi + \eta\,dh + \zeta\,dk\,,$$

ferner

$$m\,dx + p\,dy + q\,dz = d\left(\frac{x}{m}\right) + p\,dh + q\,dk\,,$$

also

$$D = d\left(\varphi\,\frac{x}{m}\right) + \varphi\,(p\,dh + q\,dk) + \eta\,dh + \zeta\,dk$$

(120) $$= d(\varphi v) + \varphi\,(p\,dh + q\,dk) + \eta\,dh + \zeta\,dk\,,$$

wo v wiederum die Lösung der Gleichung

$$\Phi(mv\,,\ h + pv\,,\ k + qv) = 0$$

und $\Phi(x, y, z) = 0$ die Gleichung der brechenden Fläche ist. Die Abbildungsgleichungen haben nach (119) und (120) daher die Form

(121) $$\begin{aligned} p' &= (\varphi v)_h + \varphi p + \eta\,, & h' &= -(\varphi v)_p\,,\\ q' &= (\varphi v)_k + \varphi q + \zeta\,, & k' &= -(\varphi v)_q\,, \end{aligned}$$

lassen sich also aus zwei charakteristischen Functionen φ und v durch Differentialoperationen bilden, da auch η, ζ nach (118) durch φ_p und φ_q ausdrückbar sind. Für eine Summe von Brechungen, deren einzelne charakteristische Grössen φ und $V = \varphi v$ sind, bestehen zu (121) analoge Gleichungen mit den charakteristischen Grössen

$$\varphi = \sum_\alpha \varphi_\alpha\,, \qquad V = \sum_\alpha \varphi_\alpha v_\alpha\,.$$

Die früher festgestellte Form von v entscheidet auch hier die Frage nach der Möglichkeit teleskopischer Aplanasie; da jedes einzelne v_α bei grossen Werthen von h, k höchstens von der Dimension h^1, k^1 ist und jedes φ_α nur von p, q abhängt, so ist V in Bezug auf die Grössen h, k von derselben Form wie v,

p', q' sind also höchstens von der Dimension h^0, k^0. Im Falle teleskopischer Aplanasie müssten aber p', q' die Grössen h, k in den Verbindungen

$$Ap(hp + kq) - Ah\,, \quad Aq(hp + kq) - Ak$$

enthalten, was für $A \neq 0$ dem eben gewonnenen Resultate widerspricht. Man wird also auf $A = 0$, auf den Fall der prismatischen Aplanasie geführt, und das ideale Fernrohrobjectiv ist selbst unter Zuhülfenahme anisotroper Medien eine Unmöglichkeit.

Sophus Lie, *Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Optik.*

In den Jahren 1869 und 1870 erkannte ich (vgl. die Verh. d. G. d. W. zu Christiania), dass es zweckmässig ist, die Begriffe infinitesimale Punkttransformation und eingliedrige Gruppe von Punkttransformationen sowie den allgemeinen Begriff Berührungstransformation einzuführen und systematisch für Geometrie und Differentialgleichungen zu verwerthen. Durch Verknüpfung und Ausdehnung dieser Begriffe gingen sodann in den Jahren 1871 und 1872 (vgl. Gött. Nachrichten und Verh. d. G. d. W. zu Christiania) die allgemeinen Begriffe infinitesimale Berührungstransformation sowie *eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen* hervor; hiermit war die Grundlage sowohl für die Invariantentheorie der Berührungstransformationen (1872) wie für die Theorie der Transformationsgruppen gewonnen.

In meinen vieljährigen Vorlesungen[1]) über die von mir begründeten Theorien an den Universitäten Christiania (1872 bis 1885) und Leipzig pflege ich regelmässig die Aufmerksamkeit meiner Zuhörer darauf zu lenken, dass verschiedene Gebiete der Mechanik und Physik (insbesondere der Optik) in schönster Weise die Begriffe eingliedrige Gruppe von Punkt- bez. Berührungstransformationen *illustriren* und gleichzeitig durch explicite Einführung dieser Begriffe gefördert werden.

Auch durch Vorträge (u. a. in dieser Gesellschaft im Jahre 1893) sowie durch mündliche Mittheilungen an mehrere Mathematiker, Astronomen, Physiker und und Chemiker versuchte ich

1) Theorie der Trfgr. Bd. I, S. 58, Leipzig 1888; Bd. II, S. 250, 1890; Bd. III, Vorrede S. 7, 1893; Leipziger Berichte 1889, S. 145; vgl. auch mein Begleitwort zu der deutschen Uebersetzung von Goursat's Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordn., Leipzig 1893.

andere Forscher dazu zu veranlassen, meine Theorien für die Naturerklärung zu verwerthen.

Diese meine Bestrebungen sind nicht ganz ohne Erfolg geblieben. Da indess Vertreter der Astronomie, Physik und Chemie sich im Allgemeinen nur mit Mühe in neueren und höheren Zweigen der Mathematik orientiren können, halte ich es für richtig, in einer *besonderen*, allerdings knapp gefassten *Note* auf meine hier in Betracht kommenden Untersuchungen hinzuweisen.

Die sogenannten Wellenbewegungen geben das einfachste Bild einer eingliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen. Für isotrope Medien (deren *Wellenflächen* eo ipso Kugeln sind) wird diese Gruppe von einer infinitesimalen Berührungstransformation erzeugt, als deren Symbol ich den Ausdruck

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

benutze. Die Gruppeneigenschaft aller Dilatationen steht im genauesten Zusammenhange mit dem HUYGENS'schen Princip[1]).

Reflexionen sind Berührungstransformationen, die jene infinitesimale Berührungstransformation *invariant* lassen und mit ihr *vertauschbar* sind.

Refractionen bei Uebergang zu einem andern isotropen Medium sind Berührungstransformationen, die ebenfalls jene infinitesimale Berührungstransformation invariant lassen.

Dies folgt unmittelbar aus den Constructionen und Entwickelungen der Lehrbücher (z. B. JAMIN) über Reflexionen und Refractionen, verbunden mit meiner alten Bemerkung, dass jeder Flächencomplex f (oder Curvencomplex) eine Berührungstransformation definirt. (Alle ∞^2 Flächen f, die eine beliebige Fläche φ berühren, umhüllen nämlich im Allgemeinen noch eine andere Fläche Φ, und dabei ist der Uebergang von φ zu Φ eine Berührungstransformation.)

Ueberdies hebe ich hervor, dass alle infinitesimalen Berührungstransformationen, die mit einer gegebenen Berührungstransformatien vertauschbar sind, eine homogene Functionengruppe bilden. Ebenso erzeugen alle Berührungstransformationen, die eine solche infinitesimale Transformation invariant lassen, eine unendliche Gruppe.

---

1) In dieser Verbindung pflege ich darauf hinzuweisen, dass auch der Begriff *Dilatation* im Grunde auf HUYGENS zurückgeführt werden kann.

Diese meine allgemeinen Theorien dehnen sich, wie ich übrigens neuerdings in diesen Berichten (1895, S. 499) ausdrücklich hervorgehoben habe, selbstverständlich auf *alle* Wellenbewegungen aus, gleichgültig, ob die betreffenden Medien isotrop sind oder nicht.

In dieser Weise erhielt ich u. a. eine Verallgemeinerung des berühmten Satzes von Malus. Dabei benutzte ich eine Ausdehnung der gewöhnlichen Krümmungstheorie, die ich im Jahre 1872 im fünften Bande der Mathematischen Annalen, S. 196, entwickelte. Mit Benutzung dieser Terminologie lässt sich der verallgemeinerte Satz von Malus in folgender Weise formuliren: Lichtstrahlen, die ein Pseudonormalensystem bilden, gehen bei jeder Reflexion und Refraction in ein Pseudonormalensystem über. Sind bei einer solchen Refraction die beiden in Betracht kommenden Pseudokugeln (d. h. Wellenflächen) wesentlich verschieden, so bezieht sich jedes Pseudonormalensystem auf die Pseudokugel des betreffenden Raumes.

H. Ambronn, *Farbenerscheinungen an den Grenzen farbloser Objecte im Mikroskop.* **Mit einer Figur.**

Wird ein farbloses Object in einem farblosen Medium eingebettet, so kann man die Grenzen zwischen dem Object und dem umgebenden Medium nur dann wahrnehmen, wenn die Brechungsexponenten der beiden Körper für die bei der Beobachtung benutzten Lichtstrahlen verschieden sind. Diese Bedingung ist im Allgemeinen immer erfüllt, wenn man im weissen Lichte beobachtet. Die Gründe dafür, dass man unter diesen Umständen die Grenze deutlich sieht, selbst wenn keine für das Auge bemerkbare Verschiedenheit der Absorption vorliegt, sind durch die Abbe'sche Theorie der secundären Abbildung klargelegt worden. Nach dieser Theorie kann die Grenze nur dann in der dem Object conjugirten Ebene abgebildet werden, wenn von dem abgebeugten Licht, das durch die Nebeneinanderschichtung der beiden verschieden brechenden Körper erzeugt wird, wenigstens ein Theil in das Objectiv aufgenommen wird.

Legt man ein gewöhnliches Deckgläschen in eine farblose Flüssigkeit von erheblich anderem Brechungsvermögen, z. B. in Wasser oder Monobromnaphthalin, so sieht man die Grenze zwischen beiden Körpern vollkommen deutlich; sie erscheint bei Anwendung gut corrigirter Objective, besonders der Apochromate, unter Benutzung centraler Beleuchtung und bei genauer Einstellung vollständig farblos als dunkle Linie. Diese vollständige Farblosigkeit ist nun aber, wie im Nachstehenden gezeigt werden soll, selbst bei Anwendung apochromatischer Systeme von geringer numerischer Apertur und bei engen Beleuchtungskegeln durchaus nicht immer vorhanden. Sie ist vielmehr noch an eine weitere Bedingung geknüpft; sie tritt nur dann ein, wenn die Brechungsexponenten beider Körper *erheblich* von einander verschieden sind. Weichen hingegen die Werthe für die Brechungsexponenten nur um wenige Einheiten in der dritten Decimale von einander ab, so beobachtet man im weissen Lichte an der Grenze gewisse oft sehr lebhafte Farbenerscheinungen, die sowohl für die Theorie des Mikroskopes wie auch für manche praktische Zwecke von einigem Interesse sind.

Es ist eine Erfahrungsthatsache, dass farblose flüssige Körper und farblose feste Körper, deren Brechungsexponenten für eine mittlere Farbe, z. B. für die D-Linie übereinstimmen, eine beträchtliche Verschiedenheit in der Dispersion zeigen. Es ist nämlich unter diesen Umständen immer der Werth $n_F - n_C$ für die Flüssigkeit grösser als für den festen Körper. Infolge dessen ist n_C für die Flüssigkeit kleiner als für den festen Körper und n_F für die Flüssigkeit grösser als für den festen Körper.

Hieraus ergiebt sich für die Beobachtung im weissen Lichte eine eigenthümliche Ablenkung der mit streifender Incidenz an der Grenze beider Körper einfallenden Strahlen. Das gelbe Licht geht ohne jede Veränderung durch beide Körper hindurch und erleidet infolge dessen auch keine Beugung. Eine Abbildung der Grenze durch die gelben Strahlen ist also unmöglich, das Object verhält sich für diesen Bezirk des Spectrums wie eine homogene Schicht. Für die übrigen Strahlen ist das Object aber nicht homogen. Würde man z. B. im monochromatischen blauen Lichte beobachten, so müsste die Grenze in Folge der nun eintretenden Beugungserscheinungen wieder sichtbar sein, ebenso natürlich im rothen Lichte. Beobachtet man aber in weissem Lichte, so tritt ausser diesen Interferenzwirkungen für die einzelnen Strahlenbezirke, die sämmtlich nur die Sichtbarkeit der Grenze überhaupt ermöglichen, an Lamellen von grösserer Dicke noch eine andere Erscheinung auf. Die mit streifender Incidenz einfallenden Strahlenbüschel erfahren an der Grenze eine Veränderung, die mit jenen Beugungserscheinungen, wie sie besonders von Quincke [1]) an sehr dünnen Lamellen untersucht wurden, zunächst nichts zu thun haben. Die gelben Strahlen werden geradlinig fortgepflanzt, sie erzeugen in der hinteren Brennebene des Objectivs oder des ganzen Mikroskops ein directes Bild der Lichtquelle, eine Abbildung der Grenze

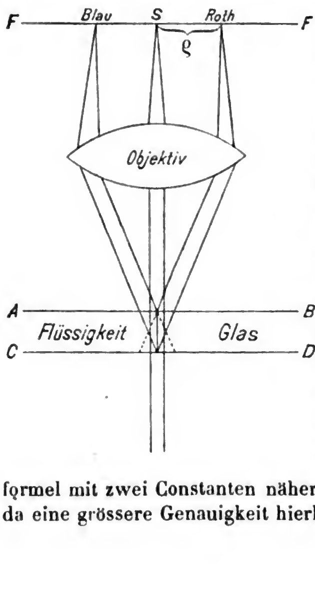
1) Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXII, vergl. auch Jochmann ebda. Bd. CXXXVI.

kann aber durch sie nirgends ermöglicht werden. Die übrigen Strahlen erfahren eine mehr oder minder beträchtliche Ablenkung, da gerade unter solchen Umständen schon geringe Verschiedenheiten in den Brechungsexponenten eine erhebliche Verschiedenheit in den zu den einzelnen Strahlen gehörenden Grenzwinkeln der Totalreflexion hervorrufen. Wird dieser Winkel mit e, die Brechungsexponenten der Flüssigkeit mit n, die des festen Körpers mit n' bezeichnet und geben die Indices C und F den zugehörigen Bezirk des Spectrums an, so gelten die Gleichungen:

$$\sin e_C = \frac{n_C}{n'_C}\,, \quad \sin e_F = \frac{n'_F}{n_F}\,,$$

wo also $n_C < n'_C$ und $n_F > n'_F$. Da die Sinus der Winkel in der Nähe von 90° nur sehr langsam sich verändern, so entspricht schon einer geringen Differenz der Brechungsexponenten eine nicht unbeträchtliche Aenderung des Grenzwinkels.

Die mit streifender Incidenz einfallenden rothen Strahlen werden also nach dem festen Körper hin, die blauen hingegen nach der Flüssigkeit hin abgelenkt, wie dies aus beistehender schematischer Zeichnung ersichtlich ist.



Für ein bestimmtes Beispiel sind die Brechungsexponenten sowie die Winkel α, unter denen die abgelenkten Strahlen die Axe des Mikroskops schneiden (Complement winkel d. Grenzwinkel d. Totalreflexion) für verschiedene Spectralbezirke zusammengestellt. Die beiden Körper sind Glas und eine Mischung von Monobromnaphthalin mit Xylol. Die Werthe für die Brechungsexponenten sind z. Th. nach der Cauchy'schen Dispersionsformel mit zwei Constanten näherungsweise berechnet worden, da eine grössere Genauigkeit hierbei kaum nöthig war.

	Glas	Flüssigkeit	α
n_B	1,5134	1,5097	4°
n_C	1,5144	1,5116	3° 30′
n_D	1,5170	1,5170	0°
n_E	1,5204	1,5236	3° 40′
n_F	1,5234	1,5296	5° 10′
n_G	1,5290	1,5406	7°
n_H	1,5335	1,5500	8° 20′

Für das Bild der Lichtquelle — eines weit entfernten Spaltes — in der hinteren Brennebene FF des Objectivs ergiebt sich hieraus (vgl. die Figur) Folgendes: In der Mitte bei S wird ein directes Bild des Spaltes entworfen, es wird erzeugt durch die mit streifender Incidenz einfallenden gelben und die nicht mit streifender Incidenz einfallenden weissen Strahlen. Die Vereinigung der abgelenkten Strahlen findet in derselben Ebene in bestimmter Entfernung von dem mittleren directen Bilde statt, da sie von den gleichfalls in weiter Entfernung liegenden virtuellen farbigen Spaltbildern ausgehen, die durch die Brechung an der Grenze entworfen werden. Es wird also in der hinteren Brennebene aus den verschiedenen nebeneinander liegenden reellen Bildern der Lichtquelle ein vollständiges Spectrum entstehen, wie dies ja in ähnlicher Weise auch bei dem Pulfrichschen Refractometer der Fall ist, wenn man statt mit monochromatischem mit weissem Lichte beobachtet.

In dem gewählten Beispiel, das durch die Figur schematisch dargestellt ist, liegen also Grün, Blau, Violett auf der linken Seite, Orange und Roth auf der rechten Seite von S. Die Entfernung der einzelnen Farben von S, die durch ϱ bezeichnet werden soll, hängt von der Brennweite des Objectivsystems und von dem Winkel ab, unter dem die aus dem ganzen Präparat austretenden Strahlen die Axe schneiden. Berücksichtigt man noch die weiteren Ablenkungen, die durch den Uebertritt in Luft erfolgen, so kann man aus der Brennweite und der Entfernung ϱ den Winkel, unter dem eine bestimmte Strahlengattung die Axe schneidet, berechnen; aus diesem erhält man dann leicht auch den Winkel der Totalreflexion und somit das Verhältniss der Brechungsexponenten beider Körper für die betreffende

Farbe. Wird der Winkel, unter dem die austretenden Strahlen die Axen schneiden, mit u bezeichnet, so gilt, wie Abbe gezeigt hat, die Beziehung:

$$\frac{\varrho}{\sin u} = f,$$

worin f die Brennweite des Objectivsystems ist. Die Grösse ϱ lässt sich leicht direct messen, wenn man ein sog. Hülfsmikroskop einschaltet, wie es zur Bestimmung der numerischen Apertur mit dem Abbe'schen Apertometer oder bei Beobachtung der Axenbilder doppelbrechender Krystalle benutzt wird.

Hat man nun die Dispersionsverhältnisse der angewandten Flüssigkeit genau bestimmt, so ergiebt eine einfache Rechnung, unter Berücksichtigung der Werthe ϱ für die einzelnen Farben, auch die Dispersion des zu untersuchenden festen Körpers.

Das directe Bild der Lichtquelle muss stets an *der* Stelle des in der Austrittspupille des Objectivs entworfenen Spectrums liegen, für die der Brechungsexponent der aneinander grenzenden Körper den gleichen Werth hat. Benutzt man ein Flüssigkeitsgemisch, wie das oben angegebene aus Monobromnaphthalin und Xylol, und schützt dieses nicht genügend vor Verdunsten, so lässt sich sehr gut beobachten, wie das Spectrum sich allmählich verschiebt und das directe Spaltbild in das Roth zu liegen kommt. Dies rührt daher, dass das Xylol schneller verdunstet als das Monobromnaphthalin, wodurch der Brechungsexponent der Flüssigkeit allmählich höher wird. Bei einem anderen Gemische, in dem der stärker brechende Körper schneller verdunstet, tritt natürlich die umgekehrte Verschiebung ein [1].

Es bleibt nun noch kurz zu erörtern, welche Wirkung diese Ablenkung der mit streifender Incidenz einfallenden Strahlen

1) Das in der hinteren Brennebene entworfene Spectrum zeigt übrigens an manchen Stellen Intensitätsunterschiede, die jedenfalls mit den ausserdem noch in derselben Ebene auftretenden Beugungsbildern für die einzelnen Strahlen in Zusammenhang stehen. Besonders deutlich beobachtet man eine Reihe dunklerer Streifen, wenn die Brechungsexponenten nicht für eine mittlere Farbe, sondern für Roth oder Violett übereinstimmen, oder wenn das ganze Spectrum auf der einen Seite des directen Spaltbildes liegt. Die von Quincke genauer studirten Beugungserscheinungen an sehr dünnen Lamellen müssen ja auch in ähnlicher Weise an dicken Lamellen auftreten, wenn die Brechungsexponenten der beiden Körper nur geringe Verschiedenheiten zeigen.

auf das eigentlich mikroskopische Bild des Objectes — in der dem Object conjugirten Ebene — ausüben wird. Eine eingehende theoretische Untersuchung dieser Frage vermag ich allerdings nicht zu geben, ich glaube aber, dass folgende einfache Ueberlegung den Sachverhalt richtig wiedergiebt. Stellt man auf die obere Ebene des Präparats (*AB* in der Figur) ein, so müssen die der Grenze zunächst liegenden Partieen — wie dies auch die Beobachtung bestätigt — farbig erscheinen, und zwar muss bei gleichem n_D der Rand des Glases röthlich, der Rand der Flüssigkeit bläulichgrün erscheinen, weil sie ja von den abgelenkten Strahlenbüscheln der betreffenden Farben beleuchtet werden; die Grenze selbst erscheint dabei als zarte dunkle Linie zwischen den beiden Farbenrändern. Stellt man dagegen auf die untere Ebene *CD* ein, so wird sich infolge der Richtung der abgelenkten Büschel die Farbenerscheinung gerade umkehren, jetzt muss der Rand des Glases blaugrün und der Rand der Flüssigkeit röthlich erscheinen, was ebenfalls die Beobachtung sofort bestätigt. Bei einer mittleren Einstellung zwischen *AB* und *CD* treten allerhand andere Färbungen auf und die Grenze selbst wird undeutlicher.

Die im Vorstehenden geschilderten Farbenerscheinungen sieht man am schönsten bei Anwendung von Systemen mit langer Brennweite, so z. B. mit dem Zeiss'schen Systeme *aa* und dem schwachen apochromatischen Systeme von 16 mm Brennweite. Dass sie gerade unter diesen Umständen so deutlich zu sehen sind, beweist auch, dass sie nicht etwa in der Construction der Objectivsysteme begründet sind. Die Reste der chromatischen Abweichungen, die ja ähnliche Erscheinungen hervorrufen könnten, sind bei den Apochromaten fast vollständig beseitigt und kommen auch bei dem System *aa* (Brennweite 26 mm) kaum in Betracht. Das Spectrum in der hinteren Brennebene und ebenso die Farbenränder in dem eigentlichen mikroskopischen Bilde müssen deshalb ihren Grund in dem Objecte selbst haben [1]).

Von praktischer Bedeutung sind diese Farbenerscheinungen für die Bestimmung der Brechungsexponenten mikroskopischer

---

1) Aehnliche Farbenerscheinungen sind übrigens auch schon an Gemischen von Pulvern und Flüssigkeiten von C. Christiansen beobachtet worden. Vgl. Wiedemann's Annalen XXIII S. 302 u. XXIV S. 444.

Objecte, an denen man keine ebenen Flächen anschleifen kann. Eine einfache Ueberlegung ergiebt, dass die Grenze beider Körper durchaus nicht eine ideale Ebene zu sein braucht, wenn die Farbenränder eintreten sollen; sie kann vielmehr ganz erheblich anders gestaltet sein, und trotzdem bleibt der Strahlengang nahezu derselbe, was auch die Beobachtung sofort bestätigt. Nach meinen bisherigen Erfahrungen lässt sich die Bestimmung der Brechungsexponenten mittels dieser Farbenerscheinungen bis zu einer Einheit in der dritten Decimale ausführen, was im Vergleich mit den bisher bei mikroskopischen Objecten angewandten Methoden als eine Verbesserung anzusehen ist. Man verfährt bei kleinen Objecten am besten in folgender Weise: Aus einer Reihe von Flüssigkeitsgemischen, deren Brechungsexponenten etwa um je fünf Einheiten in der dritten Decimale verschieden sind, sucht man sich diejenige heraus, in der die farbigen Ränder am deutlichsten auftreten; man ist dann sicher, dass der Werth für n_D in beiden Körpern nicht mehr sehr verschieden ist. Nunmehr beobachtet man in Natriumlicht, was bei den angewandten schwachen Systemen genügend helle Bilder liefert und variirt den Brechungsexponenten der Flüssigkeit noch innerhalb geringer Grenzen. Auf diese Weise findet man dann bald eine Mischung, in der die Grenzen vollständig verschwinden. Bei einiger Uebung lässt sich auf diese Weise die Bestimmung von n_D in verhältnissmässig kurzer Zeit ausführen. Hat man grössere Flächen zur Verfügung, z. B. Spaltungslamellen von Krystallen, so kann man durch Beobachtung des Spectrums in der hinteren Brennebene des Objectivs noch rascher zum Ziele kommen und zugleich in der oben angegebenen Weise die Werthe von n für verschiedene Strahlen berechnen.

Es lässt sich diese Methode auch bei anisotropen Körpern mit Erfolg anwenden, nur muss dann ein Nicol'sches Prisma in passender Weise eingeschaltet werden. So kann man z. B. an einer Kalkspathlamelle, die in Monobromnaphthalin eingebettet ist, diese Farbenerscheinungen sehr gut beobachten, da n_D für den ordentlichen Strahl des Kalkspaths und für die Flüssigkeit fast vollständig übereinstimmt, und die Werthe für n der Reihe nach mit guter Annäherung berechnen.

SITZUNG VOM 3. FEBRUAR 1896.

Vorträge hielten:

1. **W. Scheibner**, o. M., Ueber die Ausführung eines nach den im Band XI der Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe entwickelten Principien berechneten dreiflächigen Fernrohrobjectivs durch Dr. H. Schröder in London (veröffentlicht in Nr. 2751 und 3325 der Astronomischen Nachrichten).
2. **Sophus Lie**, o. M., Ueber die Theorie der Translationsflächen und das Abel'sche Theorem.
3. Sophus Lie, o. M., Vorlegung einer Arbeit von **E. Study**-Bonn unter dem Titel »Betrachtungen über Doppelverhältnisse«.

Sophus Lie, *Die Theorie der Translationsflächen und das Abel'sche Theorem.*

(Angemeldet in der Sitzung vom 21. Oct. 1895, eingeliefert den 3. Febr. 1896.)

In den Jahren 1869—1871 wurde ich dazu veranlasst, mich eingehend mit denjenigen Flächen zu beschäftigen, die durch drei Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} x &= A_1(t_1) + A_2(t_2) \\ y &= B_1(t_1) + B_2(t_2) \\ z &= C_1(t_1) + C_2(t_2) \end{aligned}$$

dargestellt werden. Diese Flächen, die naturgemäss als *Translationsflächen* bezeichnet werden können, enthalten zwei ausgezeichnete Curvenschaaren, nämlich die Schaaren $t_1 =$ Const. und $t_2 =$ Const., deren jede aus ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven besteht. Eine Translationsfläche lässt sich daher als eine Fläche definiren, die in *zwei* Weisen durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden kann. Hierbei ist aber zu bemerken, dass sobald eine Fläche in *einer* Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden kann, immer noch eine *zweite* derartige Erzeugung möglich ist; bei der ersten Erzeugung beschreiben ja alle Punkte der bewegten Curve congruente und gleichgestellte Bahncurven.

Eine Fläche heisst daher eine Translationsfläche, wenn sie eine Schaar congruenter und gleichgestellter Curven enthält. Dann enthält sie aber immer noch eine zweite derartige Curvenschaar. Diese beiden Curvenschaaren können allerdings in besonderen Fällen eine irreducibele Schaar bilden; dann aber gehen durch jeden Punkt der Fläche zwei Curven dieser irreducibelen Schaar, die überdies innerhalb eines passend gewählten Bereiches in zwei getrennte Schaaren zerfällt.

Es giebt nun aber Flächen, die in mehr als zwei Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden können. Für derartige Flächen gilt offenbar der Satz, dass die betreffenden Erzeugungen *paarweise* zusammengehören, so dass ihre Anzahl *grade* oder aber *unendlich* ist. Wenn insbesondere *vier* solche Erzeugungen möglich sind, wollen wir sagen, dass *die betreffende Fläche in zwei Weisen als Translationsfläche aufgefasst werden kann.*

Dem entsprechend sagen wir zuweilen, dass eine Fläche, die in unendlich vielen Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden kann, in unendlich vielen Weisen als Translationsfläche aufgefasst werden kann.

Im Laufe der fünfundzwanzig letzten Jahre beschäftigte ich mich bei vielen Gelegenheiten eingehend mit der Theorie der Translationsflächen, und ich glaube in dieser Weise Resultate von grosser, theilweise sogar von hervorragender Wichtigkeit erhalten zu haben. Unter diesen meinen Arbeiten sind wohl nur diejenigen, die sich auf Minimalflächen beziehen, allgemein bekannt geworden. Meine übrigen Untersuchungen über Translationsflächen sind, wahrscheinlicherweise weil sie grösstentheils in norwegischen Schriften, wenn auch in deutscher Sprache, veröffentlicht wurden, lange wenig beachtet worden. In neuerer Zeit fangen aber verschiedene Mathematiker an, sich auch mit diesen meinen Arbeiten zu beschäftigen.

Unter diesen Umständen sah ich mich neuerdings[1]) dazu veranlasst, diesen Gegenstand wieder aufzunehmen und zwar werde ich jetzt versuchen, in zwei Abhandlungen den *von mir entdeckten fundamentalen Zusammenhang zwischen der Theorie der Translationsflächen und dem Abel'schen Theorem* aus-

---

1) Diese Berichte 1892, S. 447 und 559.

führlicher als in meinen bisherigen Publicationen darzustellen und zu begründen.

Neuerdings hat sich auch Herr Poincaré in einer Note, die in der ersten Hälfte des Jahres 1895 in den Compt. rend. erschien, mit *dieser von mir begründeten Theorie* beschäftigt. Leider hatte der ausgezeichnete Verfasser, dessen Leistungen auf anderen Gebieten Niemand mehr als ich anerkenne, versäumt sich hinlänglich mit meinen Untersuchungen bekannt zu machen. Jedenfalls kann ich mir nicht in anderer Weise erklären, dass er sich *in seinen Untersuchungen über Translationsflächen* und Translationsmannigfaltigkeiten mit Resultaten begnügt, die sich als *ganz specielle Fälle unter meinen allgemeinen Sätzen unterordnen.*

Da es sich nun auch bei anderen Gelegenheiten gezeigt hat, dass meine Untersuchungen über Translationsgebilde nicht hinlänglich bekannt sind, so erlaube ich mir zunächst ein vollständiges Verzeichniss meiner ausführlicheren oder wichtigeren Publicationen auf diesem Gebiete einzuschalten.

1) Kurzes Resumé mehrerer meiner Theorien. Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, 1872 S. 27, Z. 1—4. In dieser Note wurde angedeutet, dass es mir gelungen war, alle Flächen zu bestimmen, die unendlich viele Schaaren congruenter und gleichgestellter Curven enthalten.

2) Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimalflächen. Archiv for Math. og Naturv., Band 2, Christiania 1877. Diese ziemlich ausführliche Arbeit enthält allgemeine Untersuchungen über Translationsflächen, über die Bestimmung der Ordnung und Classe derartiger Flächen, über ihre unendlich fernen Punkte u. s. w., die in den nachstehenden Arbeiten theilweise weitergeführt sind.

3) Weitere Untersuchungen über Minimalflächen, Archiv for Math. og Naturv., Band 4, Christiania 1879. Diese Abhandlung liefert eine *eingehende Bestimmung und Discussion aller Minimalflächen, die unendlich viele Translationserzeugungen gestatten.*

4) 5) Beiträge zur Theorie der Minimalflächen I, II, Math. Annalen, Bd. 14 und 15. Diese Abhandlungen nehmen ihren Ausgangspunkt in allgemeinen Sätzen über Translationsflächen.

6) Bestimmung aller in eine algebraische Developpable eingeschriebenen algebraischen Integralflächen der Differentialgleichung $s = 0$; Archiv for Math. og Naturv., Band 4, Christiania 1879.

7) *Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translation einer Curve erzeugt werden, Archiv for Math. og Naturv., Band* 7. *Diese wichtige Arbeit leistet durch grosse Rechnungen die vollständige Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefasst werden können; der Zusammenhang dieses Problems mit dem Abelschen Theorem war mir damals unbekannt*, während ich allerdings einen

bekannten *Satz über die Schnittpunkte* einer Geraden und einer Curve vierter Ordnung benutzte.

8) *Sur une interprétation nouvelle du théorème d'Abel, Comptes rendus* 1892, p. 277. *Diese wichtige Note enthält einerseits eine merkwürdige neue Deutung des Abel'schen Theorems, andererseits eine noch wichtigere Umkehrung des Abel'schen Theorems; es werden zum ersten Male allgemeine analytische Eigenschaften der Abel'schen Integrale angegeben, die keinen anderen analytischen Functionen zukommen.*

9) Sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions, Comptes rendus 1892, p. 334.

10) 11) Untersuchungen über Translationsflächen I, II; Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. W., Leipzig 1892. Die erste unter diesen Abhandlungen entwickelt eine sehr merkwürdige *pseudo-metrische Theorie der Translationsflächen*, die damit anfängt, den PONCELET'schen Kugelkreis durch eine beliebige ebene Curve zu ersetzen; in der zweiten Arbeit werden u. a. *alle* algebraischen Integralflächen der Gleichung $s = 0$ bestimmt, die durch eine beliebige algebraische Curve hindurchgehen.

Kapitel I.

Flächen, die in unendlich vielen Weisen als Translationsflächen aufgefasst werden können.

Im Winter 1869—1870 bemerkte ich zufälligerweise, dass die Ebenen und Cylinderflächen keineswegs die einzigen Flächen sind, die in unendlich vielen Weisen durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden können. In diesem Kapitel reproducire ich die an sich sehr lehrreichen Betrachtungen, die mich ursprünglich zu dieser Entdeckung führten.

Ich stellte eine Beziehung zwischen den Punkten xyz und $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ zweier dreidimensionalen Räume fest, indem ich dem Punkte xyz denjenigen Punkt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ zuordnete, dessen Coordinaten die Werthe

$$\text{(A)} \qquad \mathfrak{x} = \log x, \quad \mathfrak{y} = \log y, \quad \mathfrak{z} = \log z$$

besassen. Die hierdurch bestimmte transcendente Punkttransformation wandte ich auf die Ebenen

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

des Raumes xyz an und erhielt so die transcendenten Flächen

$$Ae^{\mathfrak{x}} + Be^{\mathfrak{y}} + Ce^{\mathfrak{z}} + D = 0.$$

Dabei konnte ich aus den mir schon damals bekannten Eigenschaften der logarithmischen Punkttransformation (A) den Schluss ziehen, dass die gefundenen transcendenten Flächen unendlich viele congruenter und gleichgestellter Curven enthalten. Wir werden auf diesen Schluss, der auch im folgenden Kapitel eine Rolle spielt, sogleich ausführlich eingehen.

Alle krummen Curven des Raumes $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ lassen sich derart in Schaaren anordnen, dass jede Schaar aus ∞^3 congruenten und gleichgestellten Curven besteht.

Denken wir uns nun eine Curve einer solchen Schaar durch die Gleichungen

$$\mathfrak{x} = \alpha(t), \quad \mathfrak{y} = \beta(t), \quad \mathfrak{z} = \gamma(t)$$

dargestellt, so bestimmen die Gleichungen

$$\mathfrak{x} = \alpha(t) + a, \quad \mathfrak{y} = \beta(t) + b, \quad \mathfrak{z} = \gamma(t) + c$$

mit den drei Parametern a, b, c eine Curvenschaar bestehend aus ∞^3 Curven, die mit der vorgelegten congruent und gleichgestellt sind; hiermit haben wir eine analytische Darstellung der vorgelegten Curvenschaar.

Unsere Punkttransformation (A) ordnet diesen ∞^3 Curven im Raume xyz ∞^3 Bildcurven zu, deren Gleichungen

$$\log x = \alpha(t) + a, \quad \log y = \beta(t) + b, \quad \log z = \gamma(t) + c$$

auf die Form

$$(1) \qquad x = e^a \cdot e^{\alpha(t)}, \quad y = e^b \cdot e^{\beta(t)}, \quad z = e^c \cdot e^{\gamma(t)}$$

gebracht werden können. Die hiermit erhaltene Schaar von ∞^3 Curven des Raumes xyz besitzt daher die folgende charakteristische Eigenschaft: Jede Curve der Schaar (1) geht aus einer bestimmten Curve der Schaar, etwa der Curve

$$x = e^{\alpha(t)}, \quad y = e^{\beta(t)}, \quad z = e^{\gamma(t)},$$

durch eine *projective* Transformation von der Form

$$x_1 = Ax, \quad y_1 = By, \quad z_1 = Cz$$

hervor.

Zwei Curven c_1, c_2 des Raumes xyz bilden sich daher dann und nur dann als congruente und gleichgestellte Curven des Raumes $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ ab, wenn c_1 und c_2 mit einander projectiv sind, und zwar vermöge einer linearen Transformation

$$x_1 = Ax, \quad y_1 = By, \quad z_1 = Cz,$$

die die Coordinatenebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und die unendlich ferne Ebene in Ruhe lässt.

Soll daher eine Fläche $\Omega(xyz) = 0$ sich im Raume $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ als eine Translationsfläche abbilden, so ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass die Fläche $\Omega(xyz) = 0$ unendlich viele Curven enthält, die unter einander projectiv sind, und zwar vermöge projectiven Transformationen, die die specielle Form $x_1 = Ax$, $y_1 = By$, $z_1 = Cz$ besitzen.

Um die Sprache zu erleichtern wollen wir, wie gelegentlich in älteren Arbeiten (Gött. Nachr., Januar 1870), sagen, dass ∞^3 Curven des Raumes xyz eine *Gattung* bilden, wenn sie unter einander vermöge Transformationen von der speciellen Form $x_1 = Ax$, $y_1 = By$, $z_1 = Cz$ projectiv sind.

Alsdann können wir uns kürzer so ausdrücken:

Bei der logarithmischen Abbildung

$$\mathfrak{x} = \log x, \quad \mathfrak{y} = \log y, \quad \mathfrak{z} = \log z$$

gehen Curven derselben Gattung des Raumes xyz in congruente und gleichgestellte Curven des Raumes $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ über.

Die Fläche $W(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = 0$ ist dann und nur dann eine Transformationsfläche, wenn die Gleichung

$$W(\log x, \log y, \log z) = 0$$

im Raume xyz eine Fläche darstellt, die ∞^1 Curven derselben Gattung enthält.

Als Corollar erhalten wir überdies unmittelbar den Satz:

Eine Fläche $\Omega(e^{\mathfrak{x}}, e^{\mathfrak{y}}, e^{\mathfrak{z}}) = 0$ lässt sich dann und nur dann in unendlich vielen Weisen durch Translationsbewegung einer Curve erzeugen, wenn die entsprechende Fläche $\Omega(xyz) = 0$ im Raume xyz ∞^1 Curvenschaaren enthält, deren jede aus ∞^1 Curven derselben Gattung besteht.

In dieser Lage befindet sich nun aber jede Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

des Raumes xyz; denn die ∞^2 Geraden, die in einer Ebene enthalten sind, ordnen sich, wie wir jetzt zeigen, in ∞^1 Schaaren, deren jede aus ∞^1 Geraden derselben Gattung besteht.

Sollen nämlich zwei Geraden des Raumes xyz derselben Gattung angehören, anders ausgesprochen, soll es möglich sein, die eine Gerade in die andere durch eine projective Transformation

$$x_1 = Ax, \quad y_1 = By, \quad z_1 = Cz$$

überzuführen, die die Coordinatenebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$ und die unendlich ferne Ebene $\infty=0$ in Ruhe lässt, so ist dazu erforderlich, dass diese beiden Geraden jene vier Ebenen in vier Punkten treffen, die in beiden Fällen dasselbe Doppelverhältniss bestimmen. Und diese nothwendige Bedingung ist auch, wie man leicht verificirt, hinreichend.

Hieraus folgt unmittelbar, dass die ∞^2 Geraden, die in einer beliebig gewählten Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

liegen, sich wirklich in ∞^1 Schaaren anordnen, deren jede aus ∞^1 Geraden derselben Gattung bestehen. Die Geraden jeder einzelnen Gattung, die offenbar mit vier festen *Geraden der Ebene* (2) dasselbe Doppelhältniss bestimmen, umhüllen einen Kegelschnitt, der die vier Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\infty=0$ berührt.

Hiermit ist nun das angekündigte Resultat abgeleitet, so dass wir den folgenden Satz aufstellen können:

Theorem I. *Die Fläche*

$$Ae^{\mathfrak{x}} + Be^{\mathfrak{y}} + Ce^{\mathfrak{z}} + D = 0$$

enthält, welche Werthe auch die Constanten A, B, C, D haben mögen, immer ∞^1 Curvenschaaren, deren jede aus ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven besteht. Die Fläche lässt sich daher in unendlich vielen Weisen durch Translationsbewegung einer Curve erzeugen. Bei jeder derartigen Erzeugung beschreiben die Punkte der bewegten Curve Bahncurven, die nicht allein unter einander, sondern auch mit der bewegten Curve congruent und gleichgestellt sind.

Die vier Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\infty=0$ bestimmen, können wir sagen, ein Tetraeder und jede Gerade des Raumes xyz schneidet die vier Flächen dieses Tetraeders in vier Punkten, deren Doppelverhältniss $\varkappa$ offenbar von der gegenseitigen Lage des Tetraeders und der betreffenden Geraden abhängt. Alle ∞^3 Geraden, die in dem angegebenen Sinne unser Tetraeder nach einem gegebenen Doppelverhältnisse $\varkappa$ schneiden, bilden einen Liniencomplex, einen sogenannten *tetraedralen Liniencomplex.* Zu unserem Tetraeder gehören offenbar ∞^1

verschiedene tetraedrale Liniencomplexe, und diese Complexe sind sämmtlich vom zweiten Grade, indem alle Geraden eines Complexes, die in einer beliebig gewählten Ebene liegen, einen Kegelschnitt umhüllen, der die vier Tetraederflächen berührt.

Bringt man nach Plücker die Gleichungen einer Geraden allgemeiner Lage auf die Form

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma$$

und betrachtet dementsprechend r, ϱ, s, σ als Liniencoordinaten, so erkennt man durch einfache Rechnungen, die wir hier nicht zu wiederholen brauchen, dass die besprochenen tetraedralen Liniencomplexe durch die Gleichung

$$r\sigma - \varkappa \cdot \varrho s = 0$$

dargestellt werden.

Alle ∞^1 *Geraden eines tetraedralen Liniencomplexes*

$$r\sigma - \varkappa \cdot \varrho s = 0,$$

die in einer Ebene liegen und dabei einen Complexkegelschnitt umhüllen, gehören — so können wir jetzt sagen — derselben Gattung an. Diese ∞^1 *Geraden bilden sich daher bei der logarithmischen Abbildung* $\mathfrak{x} = \log x$, $\mathfrak{y} = \log y$, $\mathfrak{z} = \log z$ *im Raume* $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ *als congruente und gleichgestellte Curven ab.*

Es ist dieser Satz nur eine andere Fassung unserer früheren Ergebnisse.

Die in diesem Kapitel dargestellten Entwickelungen stamman aus dem Winter 1869—70 (vgl. kurzes Resumé mehrerer neuer Theorien, Verh. der Ges. d. W. zu Christiania, 30. April 1872); eine ausführliche Darstellung dieser Betrachtungen findet sich in der Abhandlung: Weitere Untersuchungen über Minimalflächen im norwegischen Archiv, Bd. 4, 1879; in dieser letzten Arbeit werden u. a. auch die Ausartungen der Flächen

$$Ae^{\mathfrak{x}} + Be^{\mathfrak{y}} + Ce^{\mathfrak{z}} + D = 0$$

sorgfältig discutirt; hiermit waren, abgesehen von den Cylinderflächen und Ebenen, alle Flächen gefunden, die in unendlich vielen Weisen als Translationsflächen aufgefasst werden können.

Hier können wir uns auf die folgende Andeutung beschränken: Liegt irgend eine transitive Gruppe von vertauschbaren und projectiven Transformationen vor, etwa die Gruppe

$$x_1 = Ax, \ y_1 = By, \ z_1 = z + C,$$

so giebt es immer eine Transformation, in casu die Transformation

$$\mathfrak{x} = \log x, \ \mathfrak{y} = \log y, \ \mathfrak{z} = z,$$

die die vorgelegte Gruppe in die Gruppe aller Translationen des Raumes $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ verwandelt. Alsdann bilden sich *immer* die Ebenen des Raumes xyz:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

im Raume $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ als Flächen ab, die in unendlich vielen Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden können. Dies ist also insbesondere der Fall mit den Flächen:

$$Ae^{\mathfrak{x}} + Be^{\mathfrak{y}} + C\mathfrak{z} + D = 0.$$

Unter den hierdurch bestimmten Flächen finden sich u. a. die geradlinige Minimalfläche, sowie die Cayley'sche Regelfläche dritten Grades.

Kapitel II.

Flächen, die in vier Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden.

Wir sahen im vorigen Kapitel, dass die logarithmische Abbildung $\mathfrak{x} = \log x$, $\mathfrak{y} = \log y$, $\mathfrak{z} = \log z$, angewandt auf Ebenen des Raumes xyz, im Raume $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ Flächen liefert, die in unendlich vielen Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden können. In diesem Kapitel zeigen wir, dass eben diese Abbildung die ∞^5 Flächen zweiten Grades

$$(1) \qquad Axy + Byz + Czx + Dz + Ex + Fy = 0,$$
$$(A, B, C, D, E, F \neq 0),$$

die die Ecken des Tetraeders $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\infty = 0$ enthalten, in Flächen

$$(2) \qquad Ae^{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}} + Be^{\mathfrak{y}+\mathfrak{z}} + Ce^{\mathfrak{z}+\mathfrak{x}} + De^{\mathfrak{z}} + Ee^{\mathfrak{x}} + Fe^{\mathfrak{y}} = 0$$

überführt, die in *vier* Weisen durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden.

Zum Beweis dieses merkwürdigen Satzes erinnern wir zunächst an die längst bekannte Bemerkung, dass alle ∞^1 Geraden der einen Erzeugung einer Fläche zweiten Grades jedes Tetraeder, dessen vier Ecken auf der Fläche liegen, nach demselben Doppelverhältnisse schneiden.

Hieraus folgt, dass eine jede unter den beiden Geradenschaaren der Fläche zweiten Grades (1) aus Geraden derselben Gattung besteht. Dementsprechend enthält die transcendente

Bildfläche (2) jedenfalls *zwei* Schaaren congruenter und gleichgestellter Curven.

Um nun nachzuweisen, dass die Fläche zweiten Grades (1) *vier* Curvenschaaren enthält, die aus Curven derselben Gattung bestehen, führen wir auf diese Fläche eine involutorische Transformation von der Form

$$(J) \qquad x_1 = \frac{\lambda}{x}, \quad y_1 = \frac{\mu}{y}, \quad z_1 = \frac{\nu}{z}$$

aus und erhalten hierdurch wiederum eine Fläche zweiten Grades

$$D\nu xy + E\lambda yz + F\mu zx + A\lambda\mu z + B\mu\nu x + C\nu\lambda y = 0,$$

die um unser Tetraeder umschrieben ist. Setzen wir insbesondere voraus, dass alle sechs Coefficienten $A, B \dots F$ von Null verschieden sind, so können die Parameter $\lambda \mu \nu$ immer derart gewählt werden, dass die neue Fläche zweiten Grades mit der ursprünglichen Fläche (1) identisch ist; dies tritt nämlich ein dann und nur dann, wenn

$$\lambda = \frac{FD}{CA}, \quad \mu = \frac{DE}{AB}, \quad \nu = \frac{EF}{BC}$$

gesetzt wird.

Nun aber ist die involutorische Transformation J, wie man leicht verificirt, mit allen projectiven Transformationen

$$x_1 = mx, \; y_1 = py, \; z_1 = nz$$

vertauschbar, die unser Tetraeder invariant lassen. In Folge dessen verwandelt die Transformation J alle ∞^3 Curven einer beliebigen Gattung in ∞^3 Curven einer gewissen anderen Gattung. Insbesondere gehen alle ∞^3 Geraden eines tetraedralen Liniencomplexes $r\sigma - \varkappa \cdot \varrho s = 0$ in ∞^3 Curven dritter Ordnung über, die einer Gattung angehören.

Durch Zusammenfassung der hiermit erhaltenen Ergebnisse können wir nun den folgenden Satz aufstellen:

Theorem II. *Jede Fläche zweiten Grades*

$$Axy + Byz + Czx + Dz + Ex + Fy = 0$$
$$(A, B, C, D, E, F \neq 0),$$

die um das Tetraeder $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\infty = 0$ *umschrieben ist, enthält vier ausgezeichnete Curven-*

schaaren, deren jede aus ∞^1 Curven derselben Gattung besteht. Zwei unter diesen Curvenschaaren bestehen aus lauter Geraden, nämlich den geradlinigen Erzeugenden der Fläche. Die beiden anderen Curvenschaaren bestehen aus Curven dritter Ordnung, denjenigen Curven dritter Ordnung nämlich, die auf unserer Fläche liegen und durch die vier Tetraederecken gehen[1]).

Wenden wir nun die logarithmische Transformation

$$\mathfrak{x} = \log x, \quad \mathfrak{y} = \log y, \quad \mathfrak{z} = \log z$$

auf die Fläche zweiten Grades

$$Axy + Byz + Czx + Dz + Ex + Fy = 0$$

und die vier eben besprochenen auf ihr liegenden Curvenschaaren an, so erkennen wir unmittelbar, dass die hervorgehende transcendente Fläche wirklich, wie früher angekündigt, vier Schaaren congruenter und gleichgestellter Curven enthält, und somit in vier Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden kann. In dieser Weise erhalten wir den folgenden merkwürdigen Satz:

Theorem III. *Jede Fläche, deren Gleichung die Form*

$$Ae^{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}} + Be^{\mathfrak{y}+\mathfrak{z}} + Ce^{\mathfrak{z}+\mathfrak{x}} + De^{\mathfrak{z}} + Ee^{\mathfrak{x}} + Fe^{\mathfrak{y}} = 0$$

$$(A, B, C, D, E, F \neq 0)$$

besitzt, enthält vier Schaaren congruenter und gleichgestellter Curven, deren jede durch eine hinzutretende lineare Gleichung in den Grössen

$$e^{\mathfrak{x}}, \; e^{\mathfrak{y}}, \; e^{\mathfrak{z}}$$

oder aber eine ebensolche Gleichung in den inversen Grössen

$$e^{-\mathfrak{x}}, \; e^{-\mathfrak{y}}, \; e^{-\mathfrak{z}}$$

ausgeschieden wird. Diese Flächen können daher in vier verschiedenen Weisen durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden[2]).

---

1) Schon in meiner ersten mathematischen Arbeit (Repräsentation des Imaginären der Plangeometrie, Verh. d. G. d. W. zu Christiania, 1869, S. 122—130) beschäftigte ich mich zufälligerweise recht eingehend mit den vier im Texte besprochenen Curvenschaaren; den Satz des Textes entwickelte ich im Laufe des Winters 1869—70 in einem Seminarvortrage bei Professor Kummer.

2) Das Theorem fand ich, wenn ich nicht irre, schon im Winter

Es ist nun leicht weitere Flächen zu finden, die in *vier* Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden können. Zu diesem Zwecke verfahren wir etwa wie im Schlusse des vorigen Kapitels. Wir denken uns, dass das vorgelegte Tetraeder ausartet, was bekanntlich in mehreren Weisen geschehen kann. Sodann artet die projective Gruppe $x_1 = Ax$, $y_1 = By$, $z = Cz$ in eine andere projective Gruppe aus, die immer durch eine zweckmässige transcendente oder algebraische Transformation T in die Gruppe der Translationen übergeführt werden kann. Wenden wir nun diese Transformation T auf diejenigen Flächen zweiten Grades an, die um das ausgeartete Tetraeder umschrieben sind, so erhalten wir jedesmal Flächen, die in *vier* Weisen durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden können.

Es ist aber nicht nothwendig, diese Andeutung hier weiter auszuführen; später geben wir nämlich, wie in früheren Arbeiten, eine directe und allgemeine Bestimmung aller Flächen, die in vier Weisen durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden.

Der Begriff Translationsfläche dehnt sich, wie ich längst und bei vielen Gelegenheiten hervorgehoben habe, sogar in mehreren Weisen auf n Dimensionen aus[1]. Die nächstliegende Verallgemeinerung dieses Begriffes ist die folgende:

Eine q-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit des n-fachen Raumes $x_1, x_2 \dots x_n$ heisst eine Translationsmannigfaltigkeit, wenn die Coordinaten ihrer Punkte durch Gleichungen von der Form

$$x_\varkappa = \varphi_{\varkappa 1}(t_1) + \varphi_{\varkappa 2}(t_2) + \cdots + \varphi_{\varkappa q}(t_q)$$
$$(\varkappa = 1, 2 \dots n)$$

als Functionen von q Parametern ausgedrückt werden können.

In dieser und meiner folgenden Arbeit legen wir diese Definition zu Grunde und beschäftigen uns ganz besonders mit dem wichtigen Falle $q = n - 1$. *Wir stellen uns die Aufgabe, im n-fachen Raume alle $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten zu finden, die in mehrfacher Weise als Translationsmannigfaltig-*

1869—70; jedenfalls besass ich schon damals zwei Sätze, aus denen es ein unmittelbares Corollar ist. In meiner früher citirten Arbeit aus dem Jahre 1882, die *alle* Flächen mit mehrfacher Translationserzeugung bestimmt, ist das Theorem nicht erwähnt.

1) Vgl. insbesondere die beiden oben citirten Arbeiten: »Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translation einer Curve erzeugt werden können« (1882) und »Sur une interprétation nouvelle du théorème d'ABEL«, 1892.

keiten aufgefasst werden können[1]). Dieses ausserordentlich schwierige Problem, das in den beiden soeben citirten Arbeiten zum ersten Male gestellt und *vollständig* erledigt wurde, bildet den Gegenstand für diese und unsere nächste Arbeit. An dieser Stelle beschränken wir uns auf die vorläufige Bemerkung, dass die Gleichung

$$A_1 e^{x_1} + A_2 e^{x_2} + \cdots + A_n e^{x_n} + A = 0,$$

welche Werthe auch die Parameter $A, A_1 \ldots A_n$ haben mögen, immer eine Mannigfaltigkeit darstellt, die in ∞^{n-2} Weisen als Translationsmannigfaltigkeit aufgefasst werden kann.

In dieser ersten Abhandlung geben wir für den Fall $n = 3$ eine allgemeine Erledigung unseres Problems, die wesentlich einfachere Rechnungen verlangt, als unsere ursprüngliche im Jahre 1882 veröffentlichte Behandlung desselben Problems. In unserer nächsten Abhandlung geben wir eine ausgeführte Darstellung der früher (1892) von uns nur skizzirten Erledigung des allgemeinen Problems für beliebiges n. Da es meinen Nachfolgern, wie es scheint, nicht gelungen ist, die von mir skizzirte Methode zu reconstruiren, will ich die vollständige Darstellung meiner Theorie nicht länger zurückhalten. Ich kann hinzufügen, dass ich diese Theorie in meinen Vorlesungen an der Universität Leipzig wiederholt ausführlich dargestellt habe, sowie dass ich schon im Anfange des Jahres 1892 mehreren Mathematikern ausführliche Mittheilungen über diese meine Untersuchungen gemacht habe.

---

1) Es ist mir übrigens auch gelungen alle $(n-q)$-fachen Mannigfaltigkeiten des n-fachen Raumes zu finden, die sich in *mehrfacher* Weise als Translationsmannigfaltigkeiten auffassen lassen. Die weitergehende Frage nach allen Mannigfaltigkeiten, die in mehrfacher Weise die Darstellung

$$x_\varkappa = \sum_1^\nu{}_i\, \varphi_{\varkappa i}(t_1 \ldots t_{\mu i})$$
$$(\varkappa = 1 \ldots n),\ \mu_1 + \cdots + \mu_\nu < n$$

gestatten, habe ich ebenfalls mit Erfolg in Angriff genommen, wenn auch ihre allgemeine Erledigung meine Kräfte übersteigt.

Kapitel III.

Durch zweckmässige Verwerthung des Abel'schen Theorems findet man Flächen, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefasst werden können.

Durch die im Vorhergehenden dargestellten Entdeckungen[1]) wurde ich in den siebziger Jahren dazu veranlasst, mir das allgemeine Problem zu stellen: alle Flächen zu finden, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefasst werden können.

Ich sah bald, dass dieses Problem ausserordentliche Schwierigkeiten darbietet. Die directe Behandlung desselben führte auf sehr ausgedehnte Rechnungen, die jedenfalls bei dem ersten Anblicke vollständig undurchsichtig waren. Zufällige Umstände kamen mir indess zu Hülfe, und es gelang mir zu beweisen, dass es ∞^{18} nicht developpable Flächen giebt, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefasst werden können, ferner dass es möglich ist, alle diese Flächen durch Ausführung gewisser *Quadraturen* zu finden.

Diese Flächen waren im Allgemeinen *transcendent*. Es ergab sich aber merkwürdigerweise, dass jede derartige Fläche zu einer gewissen ebenen *algebraischen* Curve in einer eigenthümlichen Beziehung steht. Zu jeder irreducibeln Curve vierter Ordnung gehören nämlich ∞^4 ähnliche und gleichgestellte Flächen von der verlangten Eigenschaft. Ebenfalls gehören zu jeder Curve vierter Ordnung, die in eine irreducible Curve dritter Ordnung und eine Gerade zerfallen ist, ∞^4 ähnliche und gleichgestellte Flächen von der verlangten Beschaffenheit. Dagegen gehören zu jeder aus zwei irreducibeln Kegelschnitten oder aus einem irreducibeln und einem zerfallenen Kegel-

1) Meine im Jahre 1872 angedeutete Bestimmung aller Flächen, die sich in unendlich vielen Weisen als Translationsflächen auffassen lassen, nahm ihren Ausgangspunkt in einem beachtenswerthen Hülfssatz, dessen Beweis von mir nie veröffentlicht wurde. Dieser Hülfssatz besteht darin, dass ein Büschel von Kegelschnitten die einzige Schaar von ∞^1 Curven in der Ebene liefert, die auf jeder Geraden dieser Ebene eine Involution bestimmt. Mein Beweis dieses Hülfssatzes beruht auf der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und deckt sich wohl so ziemlich mit den Betrachtungen, durch welche Herr SCHEFFERS später die Richtigkeit meines Satzes bestätigt hat.

schnitte) bestehenden Curve vierter Ordnung *zwei* ganz verschiedene Flächenschaaren mit den verlangten Eigenschaften; jede Schaar besteht, wie in den früheren Fällen, aus ∞^4 ähnlichen und gleichgestellten Flächen. Endlich gehören zu jeder aus vier Geraden bestehenden Curve vierter Ordnung *drei getrennte* Flächenschaaren, unter denen jede aus ∞^4 ähnlichen und gleichgestellten Flächen mit unendlich vielen Erzeugungen besteht.

Der hiermit aufgedeckte *Zusammenhang zwischen einer hochinteressanten Kategorie transcendenter Flächen und allen ebenen algebraischen Curven vierter Ordnung interessirte mich lebhaft* (vgl. meine mehrmals citirte Arbeit im norwegischen Archiv 1882). Da ich aber selbst den inneren Grund dieses merkwürdigen Zusammenhanges nicht übersah, versuchte ich in den Jahren 1881—1889 wiederholt in schriftlichen oder mündlichen Mittheilungen die Aufmerksamkeit hervorragender Geometer (u. A. der Herrn Klein, Schwarz, Voss, Rohn) auf meine Publicationen über diesen Gegenstand zu lenken. Gegenüber einigen unter diesen Herren (insbesondere gegenüber Herrn Rohn) bemerkte ich sogar ausdrücklich, dass das von mir gelöste Problem gewiss mit »*dem Abel'schen Theorem*« in Verbindung stehen müsste. Niemand unter den genannten Mathematikern, die doch alle sowohl in der Geometrie wie in der Theorie der Abel'schen Integrale vollständig zu Hause sind, bemerkten mir gegenüber, dass es möglich ist, durch zweckmässige Verwerthung des Abel'schen Theorems, angewandt auf die Integrale erster Gattung einer algebraischen Curve vierter Ordnung, Translationsflächen mit vier Erzeugungen zu construiren.

Es war auch keineswegs leicht, aus meinen analytischen Entwickelungen den Zusammenhang des erledigten Problems mit dem Abel'schen Theorem herauszulesen; denn meine Entwickelungen zeigten nur, dass die gesuchten Flächen dadurch gefunden werden können, dass man zuerst ein vollständiges Differential integrirt, das die Irrationalität einer Curve vierter Ordnung enthält und sodann ein neues Differential integrirt, das von dem gefundenen Integral abhängt. Dass aber diese *successiven* Quadraturen durch eine einzige Quadratur (richtiger gesagt durch unabhängige Quadraturen) ersetzt werden können, entging damals meiner Aufmerksamkeit; dies *rechnerisch* zu constatiren, dürfte wohl auch kein Kinderspiel sein.

Ich sehe mich dazu veranlasst, auf diesen Punkt ausführlich einzugehen. Meine Untersuchungen aus dem Jahre 1882 zeigten, dass es, sobald eine beliebige algebraische Curve vierter Ordnung vorliegt, immer möglich ist, durch rein algebraische Operationen zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(1)\qquad \begin{cases} R_1(pq)r + S_1(pq)s + T_1(pq)t = 0 \\ R_2(pq)r + S_2(pq)s + T_2(pq)t = 0 \end{cases}$$

aufzustellen, die ∞^4 gemeinsame und nicht-cylindrische Integralflächen mit den verlangten Eigenschaften besitzen. Alle diese Integralflächen sind eo ipso ähnlich und gleichgestellt, indem das Gleichungssystem (1) bei allen Aehnlichkeitstransformationen von der Form

$$x_1 = mx + a,\ y_1 = my + b,\ z_1 = mz + c$$

invariant bleibt. Diese Gruppe mit den vier Parametern m, a, b und c ist *integrabel*. Sie enthält überdies eine invariante Untergruppe, nämlich die Gruppe aller Translationen, die aus *vertauschbaren* Transformationen besteht. Hieraus lässt sich nach meinen allgemeinen Theorien schliessen, dass die Bestimmung der gesuchten ∞^4 Flächen auf Quadraturen zurückgeführt werden kann; *aus der Zusammensetzung der viergliedrigen Gruppe lässt sich aber keineswegs schliessen, dass die betreffenden Quadraturen von einander unabhängig sind;* dass im vorliegenden Falle eine solche Unabhängigkeit in gewissem Sinne factisch stattfindet, beruht auf der besonderen Form der Coefficienten $R_\varkappa S_\varkappa T_\varkappa$. Diese Unabhängigkeit der Quadraturen aus meinen alten Formeln herauszulesen würde wahrscheinlicherweise auch zur Zeit ausgedehnte Rechnungen verlangen. Für mich liegt aber kein Grund vor, auf diese Rechnungen einzugehen.

Erst im Winter 1891—1892 bemerkte ich, dass das Abel'sche Theorem, angewandt auf Curven vierter Ordnung, *bei zweckmässiger Deutung* ∞^{18} im Allgemeinen transcendente Flächen liefert, die in zweifacher Weise als Translationsflächen aufgefasst werden können. Da nun meine Untersuchungen aus dem Jahre 1882 mir gezeigt hatten, dass es gerade ∞^{18} Flächen giebt, die diese Eigenschaft besitzen, so lag es nahe zu vermuthen, dass das Abel'sche Theorem bei der besprochenen Deutung *alle* Flächen liefert, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefasst werden können. Eine relativ einfache Discussion der Integrabilitätsbedingungen der beiden in Betracht kommenden partiellen Differentialgleichungen zeigte, dass diese Vermuthung richtig war.

Das hiermit gefundene Resultat hat sowohl für die Geometrie wie für die Functionentheorie ein hervorragendes Interesse. *Durch seine Ausdehnung auf n Dimensionen, die durch sehr beachtenswerthe Betrachtungen durchgeführt wurde, gelang es mir factisch zum ersten Male die Abel'schen Integrale durch* *allgemeine analytische Eigenschaften zu charakterisiren, die mit dem Begriffe algebraisch gar nichts zu thun haben.*

Dieses Ergebniss muss gewiss für die Theorie der Abel-schen Integrale und Abel'schen Functionen eine hervorragende Wichtigkeit besitzen. Haben auch fast alle meine mathematischen Untersuchungen sich auf ganz anderen Gebieten als der Functionentheorie bewegt, so glaube ich doch diese meine Auffassung aussprechen zu dürfen.

Wir wählen eine beliebige irreducible oder reducible Gleichung vierten Grades

$$F(\alpha\beta) = 0$$

in den Veränderlichen α und β. Deuten wir sodann diese Grössen als Cartesische Coordinaten in einer Ebene, so stellt $F = 0$ eine irreducible oder zerfallene Curve vierter Ordnung dar.

Setzen wir sodann

$$\int^{\alpha} \frac{\alpha\, d\alpha}{F_\beta} = \varphi(\alpha), \quad \int^{\alpha} \frac{\beta\, d\alpha}{F_\beta} = \psi(\alpha), \quad \int^{\alpha} \frac{d\alpha}{F_\beta} = \chi(\alpha)$$

und bezeichnen die Coordinaten der vier Schnittpunkte der Curve mit einer Geraden allgemeiner Lage durch

$$\alpha_1\beta_1;\ \alpha_2\beta_2;\ \alpha_3\beta_3;\ \alpha_4\beta_4,$$

so nimmt das Abel'sche Theorem, angewandt auf den vorliegenden Fall, die Form an:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) + \varphi(\alpha_3) + \varphi(\alpha_4) &= \text{Const.}\\
\psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2) + \psi(\alpha_3) + \psi(\alpha_4) &= \text{Const.}\\
\chi(\alpha_1) + \chi(\alpha_2) + \chi(\alpha_3) + \chi(\alpha_4) &= \text{Const.}
\end{aligned}$$

Hier können wir sogar bei passender Wahl der unteren Grenzen erreichen, dass die drei rechtsstehenden Constanten verschwinden, sodass das Abel'sche Theorem uns die noch einfacheren Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha_1) + \cdots\cdots + \varphi(\alpha_4) &= 0\\
\psi(\alpha_1) + \cdots\cdots + \psi(\alpha_4) &= 0\\
\chi(\alpha_1) + \cdots\cdots + \chi(\alpha_4) &= 0
\end{aligned}$$

liefert.

Bilden wir nun die drei Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) \\ y = \psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2) \\ z = \chi(\alpha_1) + \chi(\alpha_2) \end{cases}$$

und deuten dabei x, y, z als Cartesische Coordinaten eines Raumpunktes, α_1 und α_2 als unabhängige Parameter, so bestimmen diese Gleichungen eine Translationsfläche und diese Translationsfläche wird gleichzeitig durch die Gleichungen

$$(2') \qquad \begin{cases} -x = \varphi(\alpha_3) + \varphi(\alpha_4) \\ -y = \psi(\alpha_3) + \psi(\alpha_4) \\ -z = \chi(\alpha_3) + \chi(\alpha_4) \end{cases}$$

dargestellt, dabei vorausgesetzt, dass jetzt α_3 und α_4 als unabhängige Parameter gedacht werden.

Es ist dabei unmittelbar klar, dass eine *jede* unter den vier Gleichungen

$$\alpha_\varkappa = \text{Const.} \quad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

eine Schaar congruenter und gleichgestellter Curven auf unserer Fläche liefert. *Es lässt sich aber überdies nachweisen, dass diese vier Curvenschaaren paarweise von einander verschieden sind.* Wären nämlich z. B. die beiden Curvenschaaren $\alpha_1 = \text{Const.}$ und $\alpha_3 = \text{Const.}$ identisch, so müsste α_3 und α_1 offenbar durch eine Relation verknüpft sein, was aber nicht der Fall ist; bestände in der That eine Relation $\alpha_3 = \omega(\alpha_1)$, so bestimmte sie in der $\alpha\beta$-Ebene ∞^1 Geraden, und dann wären auch α_1 und α_2 durch eine Relation verbunden, während doch α_1 und α_2 unabhängige Parameter darstellen sollen. Hiermit ist in definitiver Weise erwiesen, dass die beiden Curvenschaaren $\alpha_1 = \text{Const.}$ und $\alpha_3 = \text{Const.}$ immer verschieden sind, und zwar bleibt dies wahr sowohl wenn wir unsere Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung betrachten, wie wenn wir uns innerhalb eines bestimmten Bereiches halten.

Wesentlich anders steht die Sache, wenn wir die beiden Curvenschaaren $\alpha_1 = \text{Const.}$ und $\alpha_2 = \text{Const.}$ in Betracht ziehen. Nach meiner allgemeinen Theorie der Translationsflächen, auf die ich hier verweise [1]), bilden nämlich diese beiden Curven-

1) Vgl. z. B. Math. Ann. Bd. XIV, S. 345—346.

schaaren eine *irreducible* Schaar, die aber unsere Fläche doppelt bedeckt. Wenn wir uns aber innerhalb eines passenden Bereiches halten, so zerfällt diese irreducible Schaar in dem Sinne in zwei verschiedene Schaaren, dass ein continuirlicher Uebergang von einer Curve der Schaar $\alpha_1 =$ Const. zu einer Curve der Schaar $\alpha_2 =$ Const. *nicht innerhalb des betreffenden Bereiches* möglich ist.

Um jeden Zweifel auszuschliessen wollen wir den Beweis des Satzes, dass eine jede unter den beiden Curvenschaaren $\alpha_1 =$ Const. und $\alpha_2 =$ Const. von einer jeden unter den beiden Schaaren $\alpha_3 =$ Const. und $\alpha_4 =$ Const. verschieden ist, rein analytisch führen.

Wir haben zwei verschiedene Parameterdarstellungen (2) und (2') für die Punkte unserer Fläche. Es liegt dann in der Natur der Sache, dass die beiden Parameter α_1 und α_2, die in die erste Darstellung eingehen, mit den beiden Parametern α_3 und α_4 der zweiten Darstellung durch *zwei* unabhängige Relationen verknüpft sein müssen. Unter den drei Relationen

$$\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_2)+\varphi(\alpha_3)+\varphi(\alpha_4)=0$$
$$\psi(\alpha_1)+\psi(\alpha_2)+\psi(\alpha_3)+\psi(\alpha_4)=0$$
$$\chi(\alpha_1)+\chi(\alpha_2)+\chi(\alpha_3)+\chi(\alpha_4)=0$$

können daher nur zwei unabhängig sein. Und durch Auflösung ergeben sich einerseits für α_3 und α_4 Ausdrücke

$$\alpha_3 = A_3(\alpha_1\alpha_2),\quad \alpha_4 = A_4(\alpha_1\alpha_2)$$

als Functionen von α_1 und α_2, andererseits für α_1 und α_2 Ausdrücke

$$\alpha_1 = B_1(\alpha_3\alpha_4),\quad \alpha_2 = B_2(\alpha_3\alpha_4).$$

Unsere Behauptung kommt nun darauf hinaus, dass ein jeder unter den Ausdrücken

$$A_3(\alpha_1\alpha_2),\; A_4(\alpha_1\alpha_2),\; B_1(\alpha_3\alpha_4),\; B_2(\alpha_3\alpha_4)$$

wirklich von *zwei* Argumenten abhängt, sodass die acht Differentialquotienten

$$\frac{\partial A_3}{\partial\alpha_1},\; \frac{\partial A_3}{\partial\alpha_2},\; \frac{\partial A_4}{\partial\alpha_1},\; \frac{\partial A_4}{\partial\alpha_2}$$
$$\frac{\partial B_3}{\partial\alpha_3},\; \frac{\partial B_3}{\partial\alpha_4},\; \frac{\partial B_4}{\partial\alpha_3},\; \frac{\partial B_4}{\partial\alpha_4}$$

sämmtlich von Null verschieden sind. Dass dies wirklich der Fall ist, folgt unmittelbar daraus, dass unter den *vier* Schnittpunkten einer Curve vierter Ordnung mit einer Geraden zwei ganz beliebig auf der Curve gewählt werden können.

Bei der vorangehenden Discussion betrachteten wir es als selbstverständlich, dass die Gleichungen (2) eine *Fläche* und *nicht* etwa eine *Curve* darstellen. Um die Richtigkeit dieser Voraussetzung wirklich zu beweisen, betrachten wir ganz allgemein drei Gleichungen von der Form

$$(3)\qquad \begin{cases} x = u + v, \\ y = \alpha(u) + \beta(v), \\ z = \gamma(u) + \delta(v). \end{cases}$$

Wären nun etwa x und y durch eine Relation verbunden, so bestände eine Functionalgleichung von der Form

$$\alpha(u) + \beta(v) = \Omega(u + v),$$

und diese Gleichung gäbe durch Differentiation nach u, wenn $u + v$ als Constante betrachtet wird,

$$\alpha'(u) - \beta'(v) = 0;$$

dann aber wären $\alpha'(u)$ und $\beta'(v)$ gleich derselben Constanten k und

$$\alpha(u) = ku + k_1, \quad \beta(v) = kv + k_2.$$

Stellten daher die Gleichungen (3) keine Fläche, sondern eine Curve dar, so wäre diese Curve eine Gerade.

Da nun aber die drei Integrale

$$\int \frac{d\alpha}{F_\beta}, \quad \int \frac{\alpha\, d\alpha}{F_\beta}, \quad \int \frac{\beta\, d\alpha}{F_\beta},$$

die zu der Curve vierter Ordnung $F(\alpha\beta) = 0$ gehören, keine lineare Relation mit constanten Coefficienten und noch weniger zwei solche Relationen erfüllen, so sehen wir, dass unsere frühere Annahme, dass die drei Gleichungen (2) eine Fläche und keine Curve darstellen, sich als richtig bewährt.

Unsere Fläche (2) *lässt sich in Folge dessen in zweifacher Weise als Translationsfläche auffassen.*

Die hiermit gefundene Fläche, deren ∞^2 Punkte als Repräsentanten der ∞^2 Geraden der $\alpha\beta$-Ebene auftreten, geniesst merkwürdige Eigenschaften. Hier beschränken wir uns auf die evidente Bemerkung, dass sie hinsichtlich des Coordinatenanfanges symmetrisch ist, sowie, dass sie *im Allgemeinen* sechsfach periodisch ist[1]).

Hiermit sind ∞^{18} Flächen gefunden, die in zweifacher Weise als Translationsflächen aufgefasst werden können. Wir werden später sehen, dass zwei mit einander *projective Curven* vierter Ordnung Flächen geben, die mit einander *affin* sind.

Es wird sich andererseits später zeigen, dass wir die in Kap. I betrachteten Flächen mit ∞^1 Translationserzeugungen dann erhalten, wenn die Curve *vierter* Ordnung in zwei Kegelschnitte zerfällt und dabei die beiden Punkte $\alpha_1\beta_1$ und $\alpha_2\beta_2$ auf demselben Kegelschnitte liegen. Dagegen finden wir die Flächen des Kap. II, wenn die Curve vierter Ordnung in zwei Kegelschnitte zerfällt und dabei die Punkte $\alpha_1\beta_1$ und $\alpha_2\beta_2$ nicht auf demselben Kegelschnitte liegen.

Die beiden soeben angekündigten Sätze lassen sich leicht verificiren; dagegen liegt nach meiner Ansicht die von mir erst mit grosser Mühe gemachte Entdeckung, dass die Formeln (2) *alle nicht developpabeln* Flächen mit vier oder noch mehr Translationserzeugungen liefern, tief genug.

Hierauf gehen wir in den folgenden Kapiteln dieser Abhandlung ausführlich ein. Vorläufig begnügen wir uns mit der Formulirung derjenigen Ergebnisse, die im Vorangehenden wirklich bewiesen sind.

Theorem IV. *Bildet man eine irreducible oder reducible Gleichung vierten Grades*

$$F(\alpha\beta) = 0$$

zwischen α und β und setzt sodann

$$\int^{\alpha} \frac{\alpha\, d\alpha}{F_\beta} = \varphi(\alpha), \quad \int^{\alpha} \frac{\beta\, d\alpha}{F_\beta} = \psi(\alpha), \quad \int^{\alpha} \frac{d\alpha}{F_\beta} = \chi(\alpha),$$

so liefern die Formeln

---

1) Die Gleichungen des Umkehrproblems

$$\mathfrak{x} = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z), \quad \mathfrak{y} = \psi(x) + \psi(y) + \psi(z), \quad \mathfrak{z} = \chi(x) + \chi(y) + \chi(z)$$

bestimmen eine Punkttransformation zwischen den Räumen xyz und $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, bei der die Ebenen $x =$ Const., $y =$ Const., $z =$ Const. in Translationsflächen des Textes übergehen. Diese Bemerkung, die sich auf n Dimensionen ausdehnt, zeigt schon, wie die Entwickelungen des Textes zur Illustration der von Abel und Riemann geschaffenen Theorien dienen können.

$$x = \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2)$$
$$y = \psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2)$$
$$z = \chi(\alpha_1) + \chi(\alpha_2),$$

sobald x, y, z als Cartesische Coordinaten gedeutet werden, immer eine Fläche, die in vier Weisen oder sogar in ∞^1 Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden kann.

Kapitel IV.

Analytische Formulirung des allgemeinen Problems.

Translationsfläche nenne ich, wie schon gesagt, jede Fläche, deren Punkte xyz durch drei Gleichungen von der Form

$$x = A_1(t_1) + A_2(t_2)$$
$$y = B_1(t_1) + B_2(t_2)$$
$$z = C_1(t_1) + C_2(t_2)$$

definirt werden. Ertheilt man dem Parameter t_2 nach und nach alle möglichen constanten Werthe, so erhält man eine Schaar congruenter und gleichgestellter Curven

$$x = A_1(t_1) + a_1, \; y = B_1(t_1) + b_1, \; z = C_1(t_1) + d_1,$$

die auf der Fläche gelegen sind und im Folgenden mit dem gemeinsamen Symbol c_1 bezeichnet werden. Ertheilt man andererseits dem Parameter t_1 constante Werthe, so erhält man eine andere Schaar congruenter und gleichgestellter Curven

$$x = A_2(t_2) + a_2, \; y = B_2(t_2) + b_2, \; z = C_2(t_2) + d_2,$$

die ebenfalls auf der Fläche liegen und im Folgenden als Curven c_2 bezeichnet werden.

Fassen wir die ∞^1 Curven c_1 als Rückkehrcurven von ∞^2 abwickelbaren Flächen auf, so sehen wir, dass alle diese Abwickelbaren die unendlich ferne Ebene nach einer gemeinsamen Curve C_1 schneiden. Ebenfalls sind die ∞^1 Curven c_2 Rückkehrcurven von ∞^1 Abwickelbaren, die die unendlich ferne Ebene nach einer gewissen anderen Curve C_2 schneiden. *Diese beiden unendlich fernen Curven spielen in den folgenden Untersuchungen eine fundamentale Rolle.*

Liegt eine bestimmte Translationsfläche vor, so sind die beiden zugehörigen Curvenschaaren c_1 und c_2, sowie die beiden unendlich fernen Curven C_1 und C_2 im Allgemeinen vollständig bestimmt; eine Unbestimmtheit tritt selbstverständlich nur dann ein, wenn die betreffende Fläche in mehrfacher Weise als Translationsfläche aufgefasst werden kann.

Denkt man sich dagegen, dass die beiden Curven C_1 und C_2 der unendlich fernen Ebene von vorne herein gegeben sind, so ist die zugehörige Translationsfläche keineswegs bestimmt; es giebt ja nämlich ∞^∞ viele Developpabeln, die die Curve C_1 enthalten und ebenfalls ∞^∞ Developpabeln, die die Curve C_2 enthalten; wählen wir eine beliebige Developpable aus jeder Schaar, und bezeichnen ihre Rückkehrcurven mit k_1 und k_2, so giebt es ∞^3 congruente und gleichgestellte Translationsflächen, deren erzeugenden Curven mit k_1 bez. k_2 congruent und gleichgestellt sind; und alle diese Flächen stehen eo ipso in der verlangten Beziehung zu den Curven C_1 und C_2.

Wir behaupten, dass alle Translationsflächen, die zu zwei gegebenen unendlich fernen Curven C_1 und C_2 in der angegebenen Beziehung stehen, als die Integralflächen einer gewissen *partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung* definirt werden können.

Differentiiren wir die drei Gleichungen

$$x = A_1(t_1) + A_2(t_2),\ y = B_1(t_1) + B_2(t_2),\ z = C_1(t_1) + C_2(t_2)$$

einer Translationsfläche nach t_1, so sind die drei hervorgehenden Ausdrücke

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt_1} = A_1'(t_1),\ \frac{dy}{dt_1} = B_1'(t_1),\ \frac{dz}{dt_1} = C_1'(t_1)$$

die gemeinsamen Richtungscoefficienten der Tangenten aller Curven c_1 im Punkte t_1. Diese drei Grössen erfüllen *eine homogene* Relation

$$F_1\left(\frac{dx}{dt_1},\ \frac{dy}{dt_1},\ \frac{dz}{dt_1}\right) = 0,$$

die durch Elimination von t_1 gefunden wird. Fassen wir, wie wir offenbar können, diese drei Richtungscoefficienten als *homogene* Coordinaten eines *unendlich fernen* Punktes auf, so ist $F_1 = 0$ gradezu die Gleichung der Curve C_1. Ganz analoge Betrachtungen geben eine homogene Gleichung

$$F_2\left(\frac{dx}{dt_2},\ \frac{dy}{dt_2},\ \frac{dz}{dt_2}\right) = 0,$$

die die Curve C_2 darstellt.

In den folgenden Rechnungen ist es im Allgemeinen zweckmässig, die homogenen Punktcoordinaten dx, dy, dz eines unendlich fernen Punktes durch ihre Verhältnisse

$$\frac{dx}{dz} = \xi, \quad \frac{dy}{dz} = \eta$$

zu ersetzen; wir setzen daher

$$\frac{dx}{dt_1} : \frac{dz}{dt_1} = A_1'(t_1) : C_1'(t_1) = \xi_1,$$
$$\frac{dy}{dt_1} : \frac{dz}{dt_1} = B_1'(t_1) : C_1'(t_1) = \eta_1,$$

und dementsprechend

$$\frac{dx}{dt_2} : \frac{dz}{dt_2} = A_2'(t_2) : C_2'(t_2) = \xi_2,$$
$$\frac{dy}{dt_2} : \frac{dz}{dt_2} = B_2'(t_2) : C_2'(t_2) = \eta_2.$$

Alsdann erfüllen die Punkte der Curve C_1 eine Gleichung von der Form

$$\eta_1 = \varphi_1(\xi_1),$$

und dementsprechend erhält die Gleichung der Curve C_2 die Form

$$\eta_2 = \varphi_2(\xi_2).$$

Wählen wir nun auf unserer Translationsfläche

$$x = A_1(t_1) + A_2(t_2), \quad y = B_1(t_1) + B_2(t_2), \quad z = C_1(t_1) + C_2(t_2)$$

einen Punkt allgemeiner Lage, so erfüllen alle ∞^1 von diesem Punkte ausgehenden Fortschreitungsrichtungen $dx:dy:dz$ der Fläche die bekannte Gleichung

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

Insbesondere besteht diese Gleichung für die Fortschreitungsrichtung

$$\frac{dx}{dt_1} = A_1'(t_1), \quad \frac{dy}{dt_1} = B_1'(t_1), \quad \frac{dz}{dt_1} = C_1'(t_1)$$

längs der durch den gewählten Punkt gehenden Curve c_1. In dieser Weise erhalten wir die Gleichung

$$C_1'(t_1) - pA_1'(t_1) - qB_1'(t_1) = 0,$$

die wir jetzt nach t_2 differentiiren. Nun ist

$$\frac{\partial p}{\partial t_2} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2} = rA_2'(t_2) + sB_2'(t_2),$$
$$\frac{\partial q}{\partial t_2} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2} = sA_2'(t_2) + tB_2'(t_2),$$

und also wird

$$0 = (rA_2'(t_2) + sB_2'(t_2))A_1'(t_1) + (sA_2'(t_2) + tB_2'(t_2))B_1'(t_1)$$

oder

$$0 = rA_1'(t_1)A_2'(t_2) + s(B_2't_2 \cdot A_1't_1 + A_2't_2 \cdot B_1't_1) + tB_1't_1 \cdot B_2't_2$$

oder endlich nach Einführung der Grössen $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$:

$$0 = r\xi_1\xi_2 + s(\eta_2\xi_1 + \eta_1\xi_2) + t\eta_1\eta_2.$$

Diese Gleichung lässt sich unmittelbar geometrisch deuten. Sie sagt aus, dass *die beiden Curvenschaaren c_1 und c_2 im Dupin-schen Sinne conjugirte Curvenschaaren auf unserer Translationsfläche sind*[1]).

Es bestimmen nun die Gleichungen

$$1 - p\xi_1 - q\eta_1 = 0, \quad \eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0$$

die Grössen ξ_1 und η_1 als Functionen von p und q; und dementsprechend bestimmen die Gleichungen

$$1 - p\xi_2 - q\eta_2 = 0, \quad \eta_2 - \varphi_2(\xi_2) = 0$$

die Grössen ξ_2 und η_2 als Functionen von p und q. Wir können daher die Gleichung

$$(2) \qquad \xi_1\xi_2 r + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)s + \eta_1\eta_2 t = 0$$

als eine *partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung* auffassen.

Hiermit ist bewiesen, dass jede Translationsfläche, deren erzeugenden Curven c_1 bez. c_2 die Monge'sche Gleichung

$$(3) \qquad \frac{dy}{dz} - \varphi_1\left(\frac{dx}{dz}\right) = 0,$$

bez.

$$(4) \qquad \frac{dy}{dz} - \varphi_2\left(\frac{dx}{dz}\right) = 0$$

---

1) Nichts ist leichter als durch directe *geometrische* Betrachtungen zu beweisen, den die Gleichungen $t_1 = \text{Const.}$ und $t_2 = \text{Const.}$ conjugirte Curvenschaaren liefern. Vgl. z. B. Math. Ann. Bd. XIV, S. 334. Die Entwickelungen des Textes haben indess einen selbständigen *formellen* Werth.

befriedigen, die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (2) erfüllen.

Wir wollen beweisen, dass umgekehrt jede nicht developpable Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (2) eine Translationsfläche ist, deren erzeugende Curven die eine unter den beiden Monge'schen Gleichungen (3) (4) erfüllen.

Bezeichnen wir nämlich die auf unserer Integralfläche gelegenen Ingralcurven der Monge'schen Gleichung

$$\frac{dy}{dz} - \varphi_1\left(\frac{dx}{dz}\right) = 0$$

mit k_1, und die von ihnen verschiedenen auf der Fläche gelegenen Integralcurven der Gleichung

$$\frac{dy}{dz} - \varphi_2\left(\frac{dx}{dz}\right) = 0$$

mit k_2, so müssen auf jeder Developpablen, die unsere Fläche längs einer beliebigen Curve k_2 berührt, die geraden Linien dieser Developpabeln die Curve C_1 treffen; und zwar treffen diese Geraden die Curve C_1 jedesmal in demselben Punkt, indem die betreffende Developpable, die ja mit der Curve k_2 variirt, nicht C_1 enthalten kann. Die längs einer Curve k_2 umgeschriebene Developpable, ist also jedesmal eine *Cylinderfläche*, deren unendlich ferne Spitze auf C_1 gelegen ist. Wählen wir nun auf unserer Integralfläche die Curven k_1 und k_2 als *Gaussische* Coordinatenlinien, deren zugeordnete Parameter etwa τ_1 und τ_2 heissen, so bestehen eo ipso Gleichungen von der Form

$$\frac{dx}{d\tau_1}:\frac{dy}{d\tau_1}:\frac{dz}{d\tau_1} = \alpha_1(\tau_1):\beta_1(\tau_1):\gamma_1(\tau_1)$$

$$\frac{dx}{d\tau_2}:\frac{dy}{d\tau_2}:\frac{dz}{d\tau_2} = \alpha_2(\tau_2):\beta_2(\tau_2):\gamma_2(\tau_2),$$

so dass die Fläche durch drei Gleichungen von der Form

$$x = \int\{\varrho_1\cdot\alpha_1(\tau_1)d\tau_1 + \varrho_2\cdot\alpha_2(\tau_2)d\tau_2\}$$

$$y = \int\{\varrho_1\cdot\beta_1(\tau_1)d\tau_1 + \varrho_2\cdot\beta_2(\tau_2)d\tau_2\}$$

$$z = \int\{\varrho_1\cdot\gamma_1(\tau_1)d\tau_1 + \varrho_2\cdot\gamma_2(\tau_2)d\tau_2\}$$

dargestellt wird. Dabei zeigen die Integrabilitätsbedingungen, dass ϱ_1 nur von τ_1, ϱ_2 nur von τ_2 abhängt.

Alle nicht developpablen Integralflächen der partiellen Differentialgleichung (2) *sind daher Translationsflächen.*

Wollen wir nun alle Flächen finden, die sich in mehrfacher Weise als Translationsflächen auffassen lassen, so können wir diesem Problem die folgende Form geben:

Es sollen in der unendlich fernen Ebene vier solche Curven

$$0=\eta_1-\varphi_1(\xi_1),\ 0=\eta_2-\varphi_2(\xi_2),\ 0=\eta_3-\varphi_3(\xi_3),\ 0=\eta_4-\varphi_4(\xi_4)$$

gefunden werden, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen, die man erhält, wenn man in den Gleichungen

$$\xi_1\xi_2 r+(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1)s+\eta_1\eta_2 t=0$$
$$\xi_3\xi_4 r+(\xi_3\eta_4+\xi_4\eta_3)s+\eta_3\eta_4 t=0$$

die Grössen $\xi_\varkappa \eta_\varkappa$ *vermöge der Relationen*

$$\eta_\varkappa-\varphi_\varkappa(\xi_\varkappa)=0,\ p\xi_\varkappa+q\eta_\varkappa-1=0$$
$$(\varkappa=1,2,3,4)$$

als Functionen von p *und* q *ausdrückt, gemeinsame, nicht developpable Integralflächen besitzen.*

In dieser Abhandlung erledigen wir das hiermit gestellte Problem vollständig. Wir zeigen, dass es *nothwendig* und *hinreichend* ist, *dass die vier Curven* $\eta_\varkappa-\varphi_\varkappa(\xi_\varkappa)=0$ *vier Zweige einer irreduciblen oder zerfallenen algebraischen Curve vierter Ordnung sind.*

Dass unsere beiden partiellen Differentialgleichungen wirklich gemeinsame Integralflächen haben, wenn die vier Curven $\eta_i-\varphi_i(\xi_i)=0$ Zweige einer unendlich fernen Curve vierter Ordnung sind, geht aus dem im vorigen Kapitel abgeleiteten Theorem unmittelbar hervor.

Denn die damals gefundenen Formeln

$$x=\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_2),\quad y=\psi(\alpha_1)+\psi(\alpha_2),\quad z=\chi(\alpha_1)+\chi(\alpha_2),$$

in denen die Symbole $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$, $\chi(\alpha)$ die Functionen:

$$\varphi(\alpha)=\int^\alpha\frac{\alpha\,d\alpha}{F_\beta},\quad \psi(\alpha)=\int^\alpha\frac{\beta\,d\alpha}{F_\beta},\quad \chi(\alpha)=\int^\alpha\frac{d\alpha}{F_\beta}$$

bezeichnen, während $F(\alpha\beta)=0$ eine beliebige Gleichung vierten Grades darstellt, geben unmittelbar

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} = \alpha_1 : \beta_1 : 1$$
$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_2} : \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} : \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} = \alpha_2 : \beta_2 : 1 .$$

Setzen wir daher, in Uebereinstimmung mit dem Früheren

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_\varkappa} : \frac{\partial y}{\partial \alpha_\varkappa} : \frac{\partial z}{\partial \alpha_\varkappa} = \xi_\varkappa : \eta_\varkappa : 1 ,$$

so sehen wir, dass sowohl ξ_1, η_1 wie ξ_2, η_2 die Gleichung vierten Grades

$$F(\xi\eta) = 0$$

erfüllen.

In ganz entsprechender Weise ergiebt sich auch, dass ξ_3 und η_3, sowie ξ_4 und η_4 diese Gleichung vierten Grades erfüllen.

Kapitel V.

Vorläufige Discussion des Problems.

Führt man auf die Punkte x, y, z des Raumes irgend eine lineare Transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= ax + by + cz + d \\ y_1 &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \\ z_1 &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \end{aligned}$$

aus, so gehen parallele Gerade offenbar in parallele Gerade über, indem ja die unendlich ferne Ebene in Ruhe bleibt. Eine solche Transformation führt also auch jedes Parallelogramm in ein Parallelogramm über. Wendet man daher eine lineare Transformation auf zwei congruente und gleichgestellte *Polygone* an, so erhält man wiederum zwei congruente und gleichgestellte Polygone. Ein Grenzübergang zeigt sodann, dass eine lineare Transformation congruente und gleichgestellte *Curven* in ebensolche überführt.

Hieraus folgt nun unmittelbar der folgende Satz:

Satz. *Alle mit einer Translationsfläche affinen Flächen sind selbst Translationsflächen*[1]).

---

1) Wir sahen früher, dass jede irreducible *Curve* vierter Ordnung $F(\alpha\beta) = 0$ ∞^4 unter einander ähnliche *Flächen* bestimmt, deren jede in zwei Weisen als Translationsfläche aufgefasst werden kann. Setzen wir

Nichts ist leichter als diesen Satz analytisch zu verificiren; man braucht nur rechts in den Gleichungen die Werthe

$$x = A_1 t_1 + A_2 t_2,\ y = B_1 t_1 + B_2 t_2,\ z = C_1 t_1 + C_2 t_2$$

einzuführen.

Der aufgestellte Satz kann übrigens auch folgendermassen formulirt werden:

Satz. *Die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung, die alle Translationsflächen definirt, gestattet alle linearen Transformationen des Raumes.*

Dieser letzte Satz zeigt, wie ich an anderer Stelle ausgeführt habe, dass zu jeder infinitesimalen linearen Transformation ∞^1 Translationsflächen gehören, die sämmtlich diese infinitesimale Transformation gestatten.

Die obenstehenden Betrachtungen geben endlich noch den Satz:

Satz. *Kann eine vorgelegte Fläche in zweifacher Weise als Translationsfläche aufgefasst werden, so geniessen alle affinen Flächen dieselbe Eigenschaft.*

Wir haben schon in der Einleitung darauf hingewiesen, dass die Anzahl der Erzeugungen einer Fläche durch Translationsbewegung einer Curve immer eine *gerade* Zahl ist. Dagegen darf man *nicht ohne weiteres* behaupten, dass die auf einer Translationsfläche gelegenen Schaaren congruenter und gleichgestellter Curven immer in grader Anzahl auftreten. Wir wollen auf diesen nicht unwichtigen Punkt ausführlich eingehen.

Wir betrachten eine Fläche, die dadurch erzeugt werden kann, dass die Curve c_1 in Translationsbewegung längs der Curve c_2 geführt wird, ferner dadurch, dass die Curve c_3 längs

---

nun z. B. voraus, dass die Curve $F = 0$ eine infinitesimale projective Transformation der unendlich fernen *Ebene* gestattet, so folgt aus dem Satze des Textes, dass jede unter den zugehörigen Flächen eine infinitesimale *lineare* Transformation des Raumes gestattet.

Besteht andererseits die Curve $F = 0$ aus vier getrennten Geraden, so lassen sich diese Geraden in drei Weisen in Paare zusammenordnen, und dementsprechend gehören zu einer solchen zerfallenen Curve *drei* verschiedene Flächenschaaren, deren jede ∞^1 ähnliche Flächen umfasst. Da nun *jede* Permutation von vier Geraden einer Ebene durch eine *projective* Transformation dieser Ebene geleistet werden kann, so schliessen wir, dass jene drei Flächenschaaren nicht wesentlich verschieden sind, indem Flächen, die zu zwei verschiedenen Schaaren gehören, unter einander *affin* sind.

der Curve c_4 geführt wird. Es ist dann selbstverständlich, dass unsere Fläche auch dadurch erzeugt werden kann, dass die Curve c_2 längs c_1 oder aber c_4 längs c_3 geführt wird. In den von uns früher betrachteten Fällen gehen durch jeden Punkt der Fläche *vier* verschiedene derartige Curven, unter denen eine mit c_1, eine mit c_2, eine mit c_3 und endlich eine mit c_4 congruent und gleichgestellt ist.

Es liegt nun in der Natur der Sache, dass die beiden durch einen allgemein gelegenen Punkt der Fläche gehenden Curven c_1 und c_2 *verschiedene* Curven sein müssen[1]); ebenfalls liegt es in der Natur der Sache, dass die durch einen Punkt der Fläche gehenden Curven c_3 und c_4 verschieden sein müssen. Dagegen ist es keineswegs ausgeschlossen, dass etwa die beiden durch einen Punkt gehenden Curven c_1 und c_3 identisch sind.

Betrachten wir zum Beispiel eine Cylinderfläche und bezeichnen wir zwei auf ihr gelegene krumme nicht aber congruente Curven mit c_2 und c_4, ferner eine beliebige Gerade der Fläche mit c_1, so lässt sich die Fläche durch Translationsbewegung der Geraden c_1 längs c_2 erzeugen, gleichzeitig aber durch Translationsbewegung der Geraden c_1 längs c_4. In diesem Beispiel fungiren daher die Geraden der Cylinderfläche nicht allein als Curven c_1, sondern zugleich als Curven c_3.

Wir behaupten nun, dass die Cylinderflächen (und Ebenen) die einzigen Flächen sind, die durch *zwei verschiedene Translationsbewegungen derselben Curve* c_1 erzeugt werden können.

Wir denken uns eine derartige Fläche vorgelegt und ziehen durch einen beliebig gewählten Punkt Tangenten an die hindurchgehenden Curven $c_1 \equiv c_3$, c_2 und c_4. Diese Tangenten bezeichnen wir mit $t_1 t_2 t_3 t_4$; dabei sind nach unserer Annahme die beiden Geraden t_1 und t_3 identisch, während t_2 und t_4 verschiedene Geraden sein sollen.

Nun aber sind t_1 und t_2 conjugirte Tangenten im Dupinschen Sinne; und ebenso sind t_3 und t_4 conjugirte Tangenten. In unserem Fall sind aber t_1 und t_3 dieselbe Gerade; diese Gerade ist somit eine *Haupttangente*.

---

1) Im Texte müssen wir uns vorsichtig ausdrücken, indem es nicht ausgeschlossen ist, dass die Curven c_1 und c_2 congruent und gleichgestellt sind; dies tritt ja auf den Flächen ein, die ich als Doppelflächen bezeichnet habe.

Unter den gemachten Voraussetzungen müssen daher die Curven c_1 Haupttangentencurven sein.

Da aber unsere Fläche in zwei Weisen durch Translationsbewegung der Curve c_1 erzeugt werden kann, nämlich sowohl durch eine Translationsbewegung längs c_2, wie durch eine Translationsbewegung längs der Curve c_4, so erkennen wir, dass nur zwei Möglichkeiten vorliegen, entweder enthält unsere Fläche ∞^2 verschiedene Haupttangentencurven, die mit c_1 congruent und gleichgestellt sind, oder aber die Curve c_1 gestattet unendlich viele Translationen und ist somit eine Gerade. Da aber die Ebene die einzige Fläche ist, die mehr als ∞^1 Haupttangentencurven enthält, und andererseits jede andere Fläche, die durch Translationsbewegung einer Geraden erzeugt wird, eine Cylinderfläche sein muss, so sehen wir, dass die gesuchten Flächen entweder Ebenen oder Cylinder sind. Dieses Resultat formuliren wir folgendermassen:

Satz. *Kann eine Fläche dadurch erzeugt werden, dass eine gewisse Curve c_1 in zwei verschiedene Translationsbewegungen, einmal längs einer Curve c_2, ein andermal längs einer Curve c_4, fortgeführt wird, so sind zwei Fälle möglich: entweder ist c_1 eine Gerade und die Fläche eine Cylinderfläche, oder aber es ist c_1 eine ebene Curve und die Fläche eine Ebene.*

Um die vorhergehenden Entwickelungen zu vervollständigen, stellen wir die Frage nach *allen developpablen Translationsflächen.*

Wird eine developpable Fläche durch Translationsbewegung einer Curve c_1 längs einer Curve c_2 erzeugt, so enthält die Fläche nach den vorhergehenden Betrachtungen zwei conjugirte Curvenschaaren, deren Curven mit c_1 bez. c_2 congruent und gleichgestellt sind. Wenn aber auf einer developpabeln und krummen Fläche zwei Curvenschaaren conjugirt sind, so besteht die eine Schaar aus den Geraden der Fläche, die somit durch Translationsbewegung einer Geraden erzeugt wird. Also

Satz. *Ist eine Translationsfläche developpabel, so ist sie eine Cylinderfläche.*

Da alle Translationsflächen, wie schon beiläufig bemerkt, als Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung $D_1 = 0$ definirt werden können, während die developpabeln Flächen bekanntlich die Integralflächen der Gleichung $rt - s^2 = 0$ sind, so liefern die soeben durchgeführten Betrachtungen factisch die Bestimmung der gemeinsamen

Integralflächen der beiden partiellen Differentialgleichungen $D_4 = 0$ und $rt - s^2 = 0$.

Man kann sich die Aufgabe stellen, alle *intermediären Integralgleichungen* der partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung $D_4 = 0$ zu finden. Indem ich mir vorbehalte, an anderer Stelle dieses besonders interessante Problem eingehend zu behandeln, erlaube ich mir hier die folgenden einfachen Bemerkungen einzuschalten. Nimmt man eine beliebige Curvenschaar, die aus ∞^2 congruenten und gleichgestellten Curven besteht, so ist diejenige lineare partielle Differentialgleichung, deren Charakteristiken diese Curven sind, immer eine intermediäre Integralgleichung von $D_4 = 0$. — Nimmt man andererseits eine Schaar bestehend aus ∞^3 congruenten und gleichgestellten Curven, so giebt es immer eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$r + 2N(pq)s + N^2 t + U(pq) = 0,$$

deren Integralflächen von den genannten Curven erzeugt sind. Hier hat man also eine ausgedehnte Kategorie von intermediären Integralgleichungen zweiter Ordnung. Es giebt aber, wie wir früher sahen, noch eine andere Kategorie von intermediären Integralgleichungen zweiter Ordnung, die die Form besitzen:

$$\xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) s + \eta_1 \eta_2 t = 0,$$

dabei vorausgesetzt, dass $\xi_1 \eta_1 \xi_2 \eta_2$ als Functionen von pq etwa durch die Gleichungen

$$\xi_1 p + \eta_1 q - 1 = 0, \quad \eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0$$
$$\xi_2 p + \eta_2 q - 1 = 0, \quad \eta_2 - \varphi_2(\xi_2) = 0$$

bestimmt sind.

Es ist nun aber auch möglich, beliebig viele intermediäre Integralgleichungen *dritter* Ordnung aufzustellen. Wählen wir nämlich eine ganz beliebige Monge'sche Gleichung von der Form

$$\frac{dy}{dz} - \varphi_1\left(\frac{dx}{dz}\right) = 0,$$

so giebt es ∞^∞ viele Translationsflächen, deren erzeugende Curven der einen Schaar diese Monge'sche Gleichung erfüllen, und diese Translationsflächen lassen sich definiren als die Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung, die wir aufstellen wollen.

Wir bilden die beiden Gleichungen

$$\eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0, \quad \eta_2 - \varphi_2(\xi_2) = 0,$$

in denen φ_1 eine bestimmte, φ_2 eine *willkürliche* Function des betreffenden Argumentes bezeichnen soll; drücken wir sodann in der Gleichung

$$\xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_1 \eta_2) s + \eta_1 \eta_2 t = 0$$

die Grössen $\xi_k \eta_k$ in bekannter Weise als Functionen von p und q aus, so erhalten wir ∞^∞ viele partielle Differentialgleichungen, deren Integralflächen Translationsflächen sind und dabei jedesmal ∞^1 congruente und gleichgestellte Curven enthalten, die die Monge'sche Gleichung

$$\eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0$$

erfüllen. Wir wollen zeigen, dass alle diese Flächen eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung erfüllen, deren allgemeines Integral sie bilden.

Aus der Gleichung

$$\xi_1 p + \eta_1 q - 1 = 0$$

folgt durch Differentiation und durch Berücksichtigung der Relation $\eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0$:

$$\xi_1 r + \eta_1 s + \frac{\partial \xi_1}{\partial x}(p + q\varphi_1'(\xi_1)) = 0$$

und

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = -\frac{\xi_1 r + \varphi_1(\xi_1)s}{p + q\varphi_1'(\xi_1)},$$

ferner in entsprechender Weise

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x} = -\frac{\xi_2 r + \eta_2 s}{p + q\eta_2'}$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial y} = -\frac{\xi_1 s + \varphi_1(\xi_1)t}{p + q\varphi_1'(\xi_1)}$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial y} = -\frac{\xi_2 s + \eta_2 t}{p + q\eta_2'}.$$

Differentiiren wir daher die Gleichung

$$\xi_1\xi_2 r + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)s + \eta_1\eta_2 t = 0$$

nach x bez. y und setzen sodann die eben gefundenen Werthe ein, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\xi_1\xi_2\alpha + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)\beta + \eta_1\eta_2\gamma \\
&-\{\xi_2 r + \eta_2 s + \varphi'(\xi_1)(\xi_2 s + \eta_2 t)\}\frac{\xi_1 r + \varphi(\xi_1)s}{p + q\varphi'(\xi_1)} \\
&-\{\xi_1 r + \eta_1 s + \eta_2'(\xi_1 s + \eta_1 t)\}\frac{\xi_2 r + \eta_2 s}{p + q\eta_2'} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\xi_1\xi_2\beta + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)\gamma + \eta_1\eta_2\delta \\
&-\{\xi_2 r + \eta_2 s + \varphi'(\xi_1)(\xi_2 s + \eta_2 t)\}\frac{\xi_1 s + \varphi_1(\xi_1)t}{p + q\varphi_1'(\xi_1)} \\
&-\{\xi_1 r + \eta_1 s + \eta_2'(\xi_1 s + \eta_1 t)\}\frac{\xi_2 s + \eta_2 t}{p + q\eta_2'} = 0,
\end{aligned}$$

in denen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Differentialquotienten dritter Ordnung von z bezeichnen. Zwischen diesen beiden Gleichungen und den früher aufgestellten Gleichungen

$$\xi_1\xi_2 r + (\varphi_1(\xi_1)\xi_2 + \eta_2\xi_1)s + \varphi_1(\xi_1)\eta_2 t = 0$$

$$p\xi_1 + q\varphi_1(\xi_1) = 1$$

$$p\xi_2 + q\eta_2 = 1$$

eliminiren wir die vier Grössen

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \eta_2,\ \eta_2'$$

und erhalten hierdurch eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\Omega(xyzpqrst\alpha\beta\gamma\delta) = 0,$$

deren Integralflächen Translationsflächen sind, die zu der vorgelegten Monge'schen Gleichung in der verlangten Beziehung stehen.

Wie schon gesagt, wollen wir an anderer Stelle versuchen, alle intermediären Integralgleichungen der Gleichungen $D_4 = 0$ zu finden. Das hiermit formulirte Problem deckt sich mit der Bestimmung *aller* partieller Differentialgleichungen, deren nichtsinguläre Integralflächen Translationsflächen sind.

Kapitel VI.

Flächen, die in drei Weisen durch Translation von ebenen Curven erzeugt werden.

In den vorangehenden Kapiteln führten wir unser allgemeines Problem darauf zurück, alle *integrablen* Systeme von zwei partiellen Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi_1\xi_2 r + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)s + \eta_1\eta_2 t = 0 \\ \xi_3\xi_4 r + (\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)s + \eta_3\eta_4 t = 0 \end{cases}$$

zu finden, in denen die ξ_k und η_k als Functionen von p und q durch Relationen bestimmt sind, die die Form

$$\eta_k - \varphi_k(\xi_k) = 0, \quad p\xi_k + q\eta_k - 1 = 0$$

besitzen.

Es leuchtet unmittelbar ein, dass, sobald zwei solche partielle Differentialgleichungen *eine* gemeinsame nicht cylindrische Integralfläche besitzen, sie dann immer gerade ∞^4 gemeinsame Integralflächen haben, die unter einander ähnlich und gleichgestellt sind.

Sind nun die vier Relationen $\eta_k - \varphi_k(\xi_k) = 0$ ganz beliebig gewählt, sind also die vier entsprechenden unendlich fernen Curven C_1, C_2, C_3, C_4 ganz beliebige Curven, so lässt sich voraussehen, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen (1) keine gemeinsamen Integralflächen besitzen. Um dies wirklich zu beweisen, wollen wir in diesem Kapitel annehmen, dass die drei Curven C_1, C_2 und C_3 gerade Linien sind; da wir finden werden, dass in diesem Falle auch die vierte Curve C_4 eine Gerade sein muss, so dürfen wir mit voller Sicherheit behaupten, dass das Gleichungssystem (1) nur dann integrabel ist, wenn die vier unendlich fernen Curven $C_1 \ldots C_4$ gewisse Bedingungen erfüllen.

Es wird sich ferner ergeben, dass diejenigen Integralflächen, die der Annahme entsprechen, dass die vier Curven C_k gerade Linien sind, mit den früher besprochenen Flächen

$$Ae^x + Be^y + Ce^z + D = 0$$

identisch oder, richtiger gesagt, *affin* sind.

Wir wollen also annehmen, dass die drei Curven C_1, C_2, C_3 drei gerade Linien sind, die ein wirkliches Dreieck bilden. Da wir wissen, dass die mit einer Translationsfläche affinen Flächen selbst Translationsflächen sind, so können wir ohne Beschränkung annehmen, dass die drei besprochenen Geraden die Axen der drei Ebenenbüschel $x =$ Const., $y =$ Const. und $z =$ Const. sind.

Ist insbesondere die Curve C_1 identisch mit der Axe des Ebenenbüschels $x =$ Const., so besitzt die entsprechende Relation zwischen ξ_1 und η_1 die einfache Form

$$\xi_1 = 0.$$

Ist andererseits die Curve C_2 identisch mit der Axe des Ebenenbüschels $y =$ Const., so erfüllen ξ_2 und η_2 die Gleichung

$$\eta_2 = 0.$$

Ist endlich die Curve C_3 identisch mit der Axe des Büschels $z =$ Const., so ergiebt sich aus den beiden Gleichungen

$$dz = 0, \quad dz - pdx - qdy = 0,$$

dass für C_3 die Gleichung

$$p\xi_3 + q\eta_3 = 0$$

besteht.

Die beiden partiellen Differentialgleichungen (1) zweiter Ordnung besitzen also unter den gemachten Voraussetzungen die Form

$$s = 0$$

$$q\xi_4 r + (q\eta_4 - p\xi_4)s - p\eta_4 t = 0$$

und können daher durch die noch einfacheren Gleichungen

$$s = 0, \quad q\xi_4 r - p\eta_4 t = 0$$

ersetzt werden.

Nun aber ist die Gleichung $s = 0$ unmittelbar integrabel; die zugehörigen Integralflächen besitzen die allgemeine Gleichung

$$z = X(x) - Y(y),$$

und durch Substitution dieses Werthes von z in die zweite partielle Differentialgleichung ergiebt sich die *Functionalgleichung*:

$$Y'X''\xi_4 - X'Y''\eta_4 = 0 .$$

Auf der gesuchten Fläche liegen ∞^1 congruente und gleichgestellte Curven c_4. Schneiden wir alle diese Curven mit einer beliebigen Ebene des Büschels $z =$ Const. und ziehen die zugehörigen Tangenten in den Schnittpunkten mit der gewählten Ebene des Büschels, so sind diese ∞^1 Tangenten jedesmal parallel. Wir können daher die Grössen ξ_4 und η_4 sowie ihr Verhältniss als Functionen von $z = X - Y$ auffassen und dementsprechend

$$\frac{Y'X''}{X'Y''} = Z(X - Y)$$

oder aber

$$\frac{X''}{X'} : \frac{Y''}{Y'} = Z(X - Y)$$

setzen.

Die unbekannte Function Z von $X - Y$ ist daher gleich einem Product von zwei Factoren, unter denen der eine, nämlich $\frac{X''}{X'}$, nur von x oder, was auf dasselbe herauskommt, nur von X abhängt, während der andere Factor nur von Y abhängt.

Wir können daher

$$\frac{X''}{X'} = \Phi(X), \quad \frac{Y''}{Y'} = \Psi(Y)$$

und dementsprechend

$$Z(X - Y) = \Phi(X) : \Psi(Y)$$

setzen, und finden sodann durch Differentiation nach X und Y die Gleichung

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{\Psi'}{\Psi},$$

die uns zeigt, dass sowohl die linke wie die rechte Seite constant sein muss. In dieser Weise erhalten wir für Φ, Ψ und Z Ausdrücke von der Form

$$\Phi = \alpha e^{kX}, \quad \Psi = \beta e^{kY}, \quad Z = \frac{\alpha}{\beta} e^{k(X-Y)},$$

in denen α, β und k Constante bezeichnen. Also sind X und Y bestimmt als Functionen von x bez. y durch die Gleichungen

$$\frac{X''}{X'} = \alpha e^{kX}, \quad \frac{Y''}{Y'} = \beta e^{kY}$$

oder aber durch die äquivalenten

$$\frac{dX'}{dX} = \alpha e^{kX}, \quad \frac{dY'}{dY} = \beta e^{kY},$$

die durch einmalige Integration[1]) geben:

$$X' = \frac{\alpha}{k} e^{kX} + \alpha_1, \quad Y' = \frac{\beta}{k} e^{kY} + \beta_1.$$

Diese Integralgleichungen können aber folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{d(e^{-kX})}{dx} = -\alpha_1 k e^{-kX} - \alpha,$$

$$\frac{d(e^{-kY})}{dx} = -\beta_1 k e^{-kY} - \beta,$$

und dementsprechend finden wir durch nochmalige Integration

---

1) Im Texte wird von dem Falle $k = 0$ abgesehen. Alsdann ist

$$\Phi = m, \quad \Psi = n, \quad Z = \frac{m}{n},$$

ferner

$$X = A e^{mx}, \quad Y = B e^{nx}$$

und, wenn m und n beide von Null verschieden sind,

$$X = \frac{A}{m} e^{mx} + A,$$

$$Y = \frac{B}{n} e^{ny} + B.$$

Die Gleichung der betreffenden Flächen besitzt dann die Form

$$z = \frac{A}{m} e^{mx} + \frac{B}{n} e^{ny} + C.$$

Von diesen speciellen Fällen können wir in *diesem Kapitel* absehen. Wäre eine unter den Constanten m, n gleich Null, so wären die zugehörigen Integralflächen Cylinderflächen.

$$e^{-kX} + \frac{\alpha}{\alpha_1 k} = A e^{-\alpha_1 k x}$$

$$e^{-kY} + \frac{\beta}{\beta_1 k} = B e^{-\beta_1 k y}.$$

Tragen wir diese Werthe in die Gleichung $z = X - Y$, oder aber in die äquivalente Gleichung

$$e^{kz} = \frac{e^{-kY}}{e^{-kX}}$$

ein, so erhalten wir als Gleichung der gesuchten Flächen

$$e^{kz} = \frac{B e^{-\beta_1 k y} - \dfrac{\beta}{\beta_1 k}}{A e^{-\alpha_1 k x} - \dfrac{\alpha}{\alpha_1 k}}$$

oder aber

$$A e^{k(z-\alpha_1 x)} - \frac{\alpha}{\alpha_1 k} e^{kz} - B e^{-\beta_1 k y} - \frac{\beta}{\beta_1 k} = 0.$$

Es ist leicht, diese Flächen durch die lineare Transformation

$$x_1 = z - \alpha_1 x, \quad y_1 = -\beta_1 y, \quad z_1 = z$$

auf die Form

$$(2) \qquad L e^{kx_1} + M e^{ky_1} + N e^{kz_1} + P = 0$$

zu bringen; und diese letzteren Flächen können nach den Ergebnissen des ersten Kapitels sogar in unendlich vielen Weisen als Translationsflächen aufgefasst werden.

Es ist nun eine directe Folge aus den früheren Entwickelungen, dass die gefundenen Flächen jedenfalls in drei Weisen durch Translation einer *ebenen* Curve erzeugt werden können. Wir haben ja nämlich ursprünglich an unsere Flächen grade die Forderung gestellt, dass ihre Schnittcurven mit den Ebenen $x =$ Const. congruente und gleichgestellte Curven sein sollen, ferner, dass auch die Schnittcurven mit den Ebenen $y =$ Const. (sowie mit den Ebenen $z =$ Const.) congruente und gleichgestellte Curven sein sollen.

Hieraus ergiebt sich zunächst, dass die Fläche

$$L e^{kx_1} + M e^{ky_1} + N e^{kz_1} + P = 0$$

von den Ebenen eines jeden unter den drei Büscheln

$$x_1 - z_1 = \text{Const.},\ y_1 = \text{Const.},\ z_1 = \text{Const.}$$

nach congruenten und gleichgestellten Curven geschnitten wird. Und da die Gleichung unserer Fläche hinsichtlich x_1, y_1 und z_1 symmetrisch ist, so sehen wir gleichzeitig, dass sie auch von den Ebenen eines jeden unter den drei Büscheln

$$y_1 - x_1 = \text{Const.},\ z_1 - y_1 = \text{Const.},\ x_1 = \text{Const.}$$

nach congruenten und gleichgestellten Curven geschnitten wird.

Die Fläche

$$(2) \qquad Le^{kx_1} + Me^{ky_1} + Ne^{kz_1} + P = 0$$

gestattet somit sechs verschiedene Erzeugungen durch Translation einer ebenen Curve.

Es lässt sich voraussehen, dass diese sechs Erzeugungen paarweise zusammengehören. Dass dem so ist, werden wir jetzt sogar in zwei verschiedenen Weisen constatiren. Kehren wir für einen Augenblick zu den ursprünglichen Coordinaten x, y, z zurück, so wissen wir, dass unsere Fläche die partielle Differentialgleichung $s = 0$ erfüllt und somit durch eine Gleichung von der Form $z = X(x) - Y(y)$ dargestellt wird. Daher lässt sich unsere Fläche dadurch erzeugen, dass eine in einer Ebene $x =$ Const. gelegene Curve in Translation längs einer anderen ebenen Curve geführt wird, die in einer Ebene $y =$ Const. gelegen ist. Kehren wir daher zu den Coordinaten x_1, y_1, z_1 zurück, so sehen wir, dass die beiden Schaaren congruenter Curven, die durch die Ebenen

$$x_1 - z_1 = \text{Const.},\ y_1 = \text{Const.}$$

ausgeschnitten werden, im Dupin'schen Sinne *conjugirte* Curvenschaaren sind.

Dementsprechend schneiden auch die Ebenen der beiden Büschel

$$y_1 - x_1 = \text{Const.},\ z_1 = \text{Const.}$$

unsere Fläche nach zwei conjugirten Schaaren congruenter Curven. Und ebenfalls schneiden die Ebenen der beiden Büschel

$$z_1 - y_1 = \text{Const.},\ x_1 = \text{Const.}$$

unsere Fläche nach zwei conjugirten Schaaren congruenter Curven.

Ehe wir nun in der Discussion unserer Flächen weiter gehen, wollen wir ein Resultat notiren, das für uns ein besonderes Interesse besitzt. Factisch zeigen nämlich die früheren Entwickelungen, *dass sobald die drei unendlich fernen Curven C_1, C_2 und C_3 gerade Linien sind, auch die vierte Curve C_4 eine Gerade sein muss*[1]).

Das System der beiden partiellen Differentialgleichungen (1) ist somit nur dann integrabel, wenn die vier Curven C_k in zweckmässiger Weise gewählt werden.

Zum Ueberfluss wollen wir auch rechnerisch constatiren, dass die Gleichung zwischen den Grössen ξ_4 und η_4, die die Curve C_4 darstellt, linear ist. Früher (S. 176) fanden wir ja die Gleichung

$$Y'X''\xi_4 - X'Y''\eta_4 = 0.$$

Andererseits erhalten wir aber durch Substitution des Werthes $z = X - Y$ in die Gleichung $p\xi_4 + q\eta_4 = 1$ die Relation

$$X'\xi_4 - Y'\eta_4 = 1;$$

daher erhalten wir für ξ_4 und η_4 die Ausdrücke:

$$\xi_4 = \frac{X'Y''}{X'^2Y'' - Y'^2X''}, \quad \eta_4 = \frac{Y'X''}{X'^2Y'' - Y'^2X''},$$

und durch Substitution der früher gefundenen Werthe

$$X' = \frac{\alpha}{k}e^{kX} + \alpha_1, \quad Y' = \frac{\beta}{k}e^{kY} + \beta_1$$

kommt

$$\xi_4 = \frac{\beta e^{kY}}{\alpha_1\beta e^{kY} - \beta_1\alpha e^{kX}}, \quad \eta_4 = -\frac{\alpha e^{kX}}{\alpha_1\beta e^{kY} - \beta_1\alpha e^{kX}}$$

und

$$\alpha_1\xi_4 + \beta_1\eta_4 - 1 = 0,$$

womit auch analytisch constatirt ist, dass auch C_4 eine gerade Linie sein muss, wenn alle drei Curven C_1, C_2, C_3 gerade Linien sind.

Wir wollen nun die bis jetzt erhaltenen Resultate zusammenfassen:

Satz. *Wird eine Fläche einerseits durch Verschieben einer ebenen Curve längs einer anderen ebenen Curve, andererseits*

1) Dies bleibt auch dann wahr, wenn die früher aufgetretene Constante k verschwindet. Der Leser kann es leicht verificiren.

durch Verschieben einer dritten ebenen Curve längs einer vierten Curve erzeugt, so ist auch diese vierte Curve eben. Dann lässt sich unsere Fläche auch durch Verschieben einer fünften ebenen Curve längs einer sechsten ebenen Curve erzeugen.

Immerhin ist zu beachten, dass der letzte Theil dieses Satzes nur dann gültig bleibt, wenn die Ebenen der vier ersten Curven die unendlich ferne Ebene nach vier Geraden schneiden, unter denen nicht drei einen Punkt gemein haben.

Im vorliegenden Falle gehören also zur Fläche nicht nur vier, sondern sechs Curven C in der unendlich fernen Ebene, die sämmtlich Geraden sind. Die Entwickelungen des ersten Kapitels haben uns überdies gezeigt, dass die betreffenden Flächen (2) in unendlich vielen Weisen durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden können, und dass somit die unendlich ferne Ebene unendlich viele Curven C enthält. Wir wollen jetzt den inneren Zusammenhang zwischen diesen verschiedenen Ergebnissen aufdecken.

Jene sechs Geraden werden als Axen der sechs Ebenenbüschel

$$x_1 = \text{Const.},\ y_1 = \text{Const.},\ z_1 = \text{Const.},$$
$$y_1 - z_1 = \text{Const.},\ z_1 - x_1 = \text{Const.},\ x_1 - y_1 = \text{Const.}$$

durch die Gleichungen

$$dx_1 = 0,\ dy_1 = 0,\ dz_1 = 0,$$
$$dy_1 - dz_1 = 0,\ dz_1 - dx_1 = 0,\ dx_1 - dy_1 = 0$$

dargestellt, wenn wir die drei Differentiale dx, dy, dz als homogene Punktcoordinaten in der unendlich fernen Ebene deuten. Diese sechs Geraden gehen zu je dreien durch einen gemeinsamen Punkt und bestimmen dadurch vier Punkte

$$dx_1 = 0,\ dy_1 = 0;\ dy_1 = 0,\ dz_1 = 0;\ dz_1 = 0,\ dx_1 = 0;$$
$$dx_1 = dy_1 = dz_1,$$

die Ecken eines unendlich fernen Vierecks sind.

Es giebt nun ∞^1 Kegelschnitte, die durch diese vier Punkte gehen und dementsprechend durch die Gleichung

$$(b-c)dy_1dz_1 + (c-a)dz_1dx_1 + (a-b)dx_1dy_1 = 0$$

dargestellt werden. In diesem Büschel von Kegelschnitten finden sich drei Geradenpaare, die hervorgehen, sobald zwei unter den Constanten a, b und c einander gleich gesetzt werden. Ist z. B. $a = b$, so erhalten wir das Geradenpaar

$$dz_1(dy_1 - dx_1) = 0.$$

Denken wir uns nun in einem allgemein gelegenen Punkte p unserer Fläche die Tangentenebene construirt. Sie schneidet die unendlich ferne Ebene nach einer Geraden G. Die beiden Haupttangenten im Punkte p mögen G in H_1 und H_2 treffen. Alsdann liegen H_1 und H_2 nach dem Früheren harmonisch zu dem Punktpaare, in dem G das Geradenpaar C_1C_2 unseres Kegelschnittsbüschels schneidet, und ebenfalls zu dem Punktpaare, in dem G das Geradenpaar C_3C_4 unseres Büschels trifft. Hieraus folgt nun nach dem Satze von DESARGUES, dass H_1 und H_2 zu jedem Punktpaare harmonisch liegen, in dem G irgend einen Kegelschnitt unseres Büschels schneidet.

Hieraus ergiebt sich, dass unsere Fläche zu jedem Kegelschnitt dieses Büschels conjugirt[1]) ist, und dass sie sich in Folge dessen jedesmal durch Translation einer Curve erzeugen lässt, deren Tangenten einen beliebigen Kegelschnitt unseres Büschels treffen.

Hieraus ergiebt sich ferner, dass es ∞^8 projective Transformationen giebt, die unsere Fläche in eine Minimalfläche umwandeln. Es genügt ja, irgend einen irreduciblen Kegelschnitt unseres Büschels durch eine projective Transformation in den PONCELET'schen Kugelkreis überzuführen.

Die Entwickelungen dieses Kapitels zeigen, dass das System der beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\xi_1\xi_2 r + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)s + \eta_1\eta_2 t = 0$$
$$\xi_3\xi_4 r + (\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)s + \eta_3\eta_4 t = 0$$

integrabel wird, sobald die vier Curven $\eta_k - \varphi_k(\xi_k) = 0$ vier Geraden von allgemeiner gegenseitiger Lage sind. Wir werden später sehen, dass dies noch wahr bleibt, wenn drei unter diesen vier Geraden durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Hierauf brauchen wir aber vorläufig nicht einzugehen.

---

1) Um die Sprache abzukürzen sage ich, wie in meinen älteren Arbeiten, dass eine *Fläche zu einem Kegelschnitt conjugirt* ist, wenn die beiden auf ihr gelegenen Curvenschaaren, deren Tangenten den Kegelschnitt treffen, im DUPIN'schen Sinne conjugirte Curvenschaaren sind. Alsdann ist die Fläche eine Translationfläche. Jede Fläche, die zu dem Kugelkreis conjugirt ist, stellt eine Minimalfläche dar.

Dagegen wollen wir schon jetzt beweisen, dass unser System von partiellen Differentialgleichungen auch dann integrabel ist, wenn C_1 und C_2 Zweige eines Kegelschnittes, C_3 und C_4 Zweige eines andern Kegelschnittes sind. Dabei können wir ohne Beschränkung annehmen, dass diese beiden Kegelschnitte vier getrennte Schnittpunkte haben.

Ist eine Fläche conjugirt zu zwei Kegelschnitten, so ist sie, wie wir früher zeigten, auch zu allen ∞^1 Kegelschnitten desjenigen Büschels conjugirt, das jene beiden Kegelschnitte enthält.

Wenn aber zwei Kegelschnitte vier getrennte Schnittpunkte haben, so enthält das zugehörige Kegelschnittsbüschel drei Geradenpaare, deren jedes aus zwei getrennten Geraden besteht.

Es giebt aber immer ∞^4 Flächen, die zu zwei in derselben Ebene gelegenen Geradenpaaren conjugirt sind, und diese Flächen sind überdies zu allen ∞^1 Kegelschnitten desjenigen Büschels conjugirt, das die beiden Geradenpaare enthält.

Die beiden partiellen Differentialgleichungen (1) zweiter Ordnung haben daher gemeinsame Integralflächen, wenn die beiden Gleichungen

$$(\eta_1 - \varphi_1(\xi_1))(\eta_2 - \varphi_2(\xi_2)) = 0$$
$$(\eta_3 - \varphi_3(\xi_3))(\eta_4 - \varphi_4(\xi_4)) = 0$$

zwei Kegelschnitte darstellen.

Kapitel VII.

Die Integrabilitätsbedingungen der beiden partiellen Differentialgleichungen.

Wir wählen in der unendlich fernen Ebene vier Curven, deren Gleichungen sind

$$\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

und bilden die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1)s + \eta_1 \eta_2 t = 0 \\ \xi_3 \xi_4 r + (\xi_3 \eta_4 + \xi_4 \eta_3)s + \eta_3 \eta_4 t = 0, \end{cases}$$

die nach den Ergebnissen des vorigen Kapitels im Allgemeinen keine gemeinsame nicht cylindrische Integralfläche besitzen. Sollen diese beiden Differentialgleichungen gemeinsame nicht cylindrische Integralflächen haben, so müssen also gewisse Integrabilitätsbedingungen erfüllt sein. Und es liegt in der

Natur der Sache, dass diese Integrabilitätsbedingungen nur in Beziehungen zwischen den vier unendlich fernen Curven

$$\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0$$

bestehen können.

Wir wollen in diesem Kapitel diese Integrabilitätsbedingungen ableiten und deuten. Zunächst aber schicken wir einige einfache Bemerkungen voraus.

Wir bemerken dann zunächst, dass unsere Differentialgleichungen (1) identisch erfüllt werden, sobald z eine beliebige lineare Function von x und y ist. Es sind daher alle ∞^3 Ebenen immer gemeinsame Integralflächen, die aber als *trivial* kein Interesse darbieten.

Es ist andererseits auch leicht zu erkennen, dass unter Umständen auch gemeinsame *developpable* Integralflächen vorhanden sind, die nach den früheren (S. 171) Entwickelungen sicher *Cylinderflächen* sind. Auch von derartigen Flächen können wir ohne weiteres absehen; denn jede nicht ebene Cylinderfläche gestattet ∞^∞ viele Translationserzeugungen; wählt man eine *beliebige* auf der Fläche gelegene krumme Curve c und eine Gerade g der Fläche, so sind jedesmal zwei zusammengehörende Translationserzeugungen der Fläche bestimmt, und andere derartige Erzeugungen giebt es nicht. Liegt andererseits eine Ebene vor, so ist die Zahl der möglichen Translationserzeugungen noch grösser, indem zwei ganz beliebig gewählte Curven der Ebene immer zwei zusammengehörende Erzeugungen definiren.

Da wir von allen developpablen Integralflächen des Gleichungssystems (1) absehen, so sind in einem Punkte p allgemeiner Lage einer nicht trivialen Integralfläche die vier Tangenten T_1, T_2, T_3, T_4 der vier hindurchgehenden Curven c_1, c_2, c_3 und c_4 sicher unter einander verschieden. Anders ausgesprochen: in einem Punkte allgemeiner Lage unserer Fläche sind die vier Verhältnisse

$$\frac{\eta_1}{\xi_1}, \quad \frac{\eta_2}{\xi_2}, \quad \frac{\eta_3}{\xi_3}, \quad \frac{\eta_4}{\xi_4}$$

sicher paarweise verschieden.

Construirt man daher in einem Punkte allgemeiner Lage einer Integralfläche des Gleichungssystems (1) die Tangentialebene, so trifft diese Ebene die vier Curven $\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0$ in vier *getrennten* Punkten. Diese vier Curven sind daher unter einander verschieden, wenn es auch keineswegs ausgeschlossen ist, dass einige unter ihnen Zweige derselben analytischen Curve sind.

Differentiiren wir die beiden Gleichungen (1) nach x und y und setzen dabei

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \alpha, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \beta, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \gamma, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \delta,$$

so erhalten wir zur Bestimmung der vier Ableitungen dritter Ordnung von z die vier linearen Gleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} \xi_1\xi_2\alpha + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)\beta + \eta_1\eta_2\gamma = \\ \quad -r\dfrac{\partial(\xi_1\xi_2)}{\partial x} - s\dfrac{\partial(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)}{\partial x} - t\dfrac{\partial(\eta_1\eta_2)}{\partial x} \\ \xi_1\xi_2\beta + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)\gamma + \eta_1\eta_2\delta = \\ \quad -r\dfrac{\partial(\xi_1\xi_2)}{\partial y} - s\dfrac{\partial(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)}{\partial y} - t\dfrac{\partial(\eta_1\eta_2)}{\partial y} \\ \xi_3\xi_4\alpha + (\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)\beta + \eta_3\eta_4\gamma = \\ \quad -r\dfrac{\partial(\xi_3\xi_4)}{\partial x} - s\dfrac{\partial(\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)}{\partial x} - t\dfrac{\partial(\eta_3\eta_4)}{\partial x} \\ \xi_3\xi_4\beta + (\xi_3\eta_4 + \eta_4\xi_3)\gamma + \eta_3\eta_4\delta = \\ \quad -r\dfrac{\partial(\xi_3\xi_4)}{\partial y} - s\dfrac{\partial(\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)}{\partial y} - t\dfrac{\partial(\eta_3\eta_4)}{\partial y}, \end{cases}$$

deren Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \xi_1\xi_2 & \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 & \eta_1\eta_2 & 0 \\ 0 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 & \eta_1\eta_2 \\ \xi_3\xi_4 & \xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3 & \eta_3\eta_4 & 0 \\ 0 & \xi_3\xi_4 & \xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3 & \eta_3\eta_4 \end{vmatrix}$$

durch Berechnung die Form

$$(\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3)(\xi_3\eta_2 - \xi_2\eta_3)(\xi_4\eta_1 - \xi_1\eta_4)(\xi_4\eta_2 - \xi_2\eta_4)$$

erhält.

Nun aber wissen wir, dass in einem Punkte allgemeiner Lage einer nicht developpablen Integralfläche die vier Verhältnisse $\eta_i : \xi_i$ paarweise verschieden sind. Daher ist auch die Determinante $\varDelta$ in Punkten allgemeiner Lage einer nicht developpablen Integralfläche von Null verschieden.

Wenn daher die beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (1) gemeinsame Integralflächen besitzen, die keine Cylinderflächen sind, so bestimmen sich für solche Flächen die Ableitungen dritter Ordnung α, β, γ, δ von z und ebenso die höheren Ableitungen als Functionen der acht Grössen x, y, z, p, q, r, s, t, die selbst die beiden Relationen (1) erfüllen. Die Taylor'sche Reihenentwickelung

$$z = z_0 + p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) + \cdots$$

einer solchen Fläche in der Umgebung einer beliebig gewählten Stelle $x_0 y_0$ enthält daher nur *vier* wesentliche Constante z_0, p_0, q_0, r_0. Daraus schliessen wir, dass die beiden Gleichungen (1) nie mehr als ∞^4 gemeinsame nicht cylindrische Integralflächen besitzen. Früher (S. 174) bemerkten wir schon, dass, sobald *eine* nicht cylindrische Integralfläche vorhanden ist, immer ∞^4 ähnliche und gleichgestellte Integralflächen existiren.

Hieraus schliessen wir, dass *die beiden Differentialgleichungen (1), sobald sie überhaupt gemeinsame nicht cylindrische Integralflächen zulassen, grade ∞^4 ähnliche und ähnlich gelegene gemeinsame Integralflächen besitzen.*

Lösen wir daher die vier aus den Gleichungen (1) durch Differentiation abgeleiteten Gleichungen dritter Ordnung nach den Ableitungen α, β, γ, δ auf:

$$\begin{aligned} \alpha &= A(pqrst) \\ \beta &= B(\ldots\ldots) \\ \gamma &= C(\ldots\ldots) \\ \delta &= D(\ldots\ldots), \end{aligned}$$

so haben die Differentialgleichungen (1) dann und nur dann gemeinsame nicht cylindrische Integralflächen, wenn die Bedingungsgleichungen

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x}$$

eine Folge der beiden Gleichungssysteme (1) und (2) sind.

Es liegt nun, wie wir früher sahen, in der Natur der Sache, dass diese Bedingungsgleichungen diejenigen Beziehungen definiren, die unter den vier unendlich fernen Curven

$$\begin{aligned} \eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0, \quad \eta_2 - \varphi_2(\xi_2) = 0, \\ \eta_3 - \varphi_3(\xi_3) = 0, \quad \eta_4 - \varphi_4(\xi_4) = 0 \end{aligned}$$

stattfinden müssen, wenn die beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (1) gemeinsame Integralflächen haben sollen. Es wird sich überdies zeigen, dass die drei soeben gefundenen Integrabilitätsbedingungen (3) sich auf eine einzige Gleichung zwischen den acht Grössen ξ_i, η_i und den acht Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung der η_i nach der entsprechenden ξ_i zurückführen lassen.

Um die hierzu erforderlichen, nicht ganz einfachen Rechnungen übersichtlicher zu machen, führen wir mit Legendre statt x, y, z die Grössen

$$p, \quad q, \quad \Theta = z - px - qy$$

als neue Veränderliche ein, und betrachten dabei Θ als Function von p und q. Dann ist bekanntlich

$$\frac{\partial \Theta}{\partial p} = -x, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial q} = -y,$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial p^2} = \frac{-t}{rt-s^2}, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial p \partial q} = \frac{s}{rt-s^2}, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial q^2} = \frac{-r}{rt-s^2}$$

und daher erhalten die beiden Gleichungen (1) in diesen neuen Veränderlichen die Form

$$(1) \quad \begin{cases} \xi_1 \xi_2 \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial q^2} - (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial p \partial q} + \eta_1 \eta_2 \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial p^2} = 0 \\ \xi_3 \xi_4 \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial q^2} - (\xi_3 \eta_4 + \xi_4 \eta_3) \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial p \partial q} + \eta_3 \eta_4 \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial p^2} = 0; \end{cases}$$

dabei sind die ξ_i, η_i Functionen von p und q, die vermöge der Gleichungen

$$\xi_i p + \eta_i q = 0, \quad \eta_i = \varphi_i(\xi)$$

berechnet werden sollen.

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \varphi_i(\xi_i)}{\partial \xi_i} = \eta_i',$$

so finden wir durch Differentiation der Gleichungen

$$p\xi_i + q\eta_i - 1 = 0$$

acht Gleichungen

$$(p + q\eta_i') \frac{\partial \xi_i}{\partial p} + \xi_i = 0, \quad (p + q\eta_i') \frac{\partial \xi_i}{\partial q} + \eta_i = 0,$$

die durch Auflösung

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p} = -\frac{\xi_i}{p + q\eta_i'}, \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial q} = -\frac{\eta_i}{p + q\eta_i'}$$

geben.

Differentiiren wir daher die erste Gleichung (4) nach p, so erhalten wir die Relation

$$\xi_1\xi_2 \frac{\partial^3\Theta}{\partial q^2 \partial p} - (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)\frac{\partial^3\Theta}{\partial q \partial p^2} + \eta_1\eta_2 \frac{\partial^3\Theta}{\partial p^3} =$$

$$\left[\xi_1 \frac{\partial^2\Theta}{\partial q^2} - (\eta_1 + \xi_1\eta_2')\frac{\partial^2\Theta}{\partial q\partial p} + \eta_1\eta_2'\frac{\partial^2\Theta}{\partial p^2}\right]\frac{\xi_2}{p + q\eta_2'}$$

$$+\left[\xi_2 \frac{\partial^2\Theta}{\partial q^2} - (\eta_2 + \xi_2\eta_1')\frac{\partial^2\Theta}{\partial q\partial p} + \eta_2\eta_1'\frac{\partial^2\Theta}{\partial p^2}\right]\frac{\xi_1}{p + q\eta_1'}.$$

Hier ersetzen wir rechts die beiden Ableitungen

$$(5) \qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial q^2}, \quad \frac{\partial^2\Theta}{\partial p^2}$$

durch ihre Werthe genommen aus den Gleichungen (4) und finden dadurch eine Relation von der Form

$$\xi_1\xi_2 \frac{\partial^3\Theta}{\partial q^2 \partial p} - (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)\frac{\partial^3\Theta}{\partial q \partial p^2} + \eta_1\eta_2 \frac{\partial^3\Theta}{\partial p^3} =$$

$$\left[\frac{\lambda_1 + \mu_1\eta_1'}{p + q\eta_1'} + \frac{\lambda_2 + \mu\eta_2'}{p + q\eta_2'}\right]\frac{\partial^2\Theta}{\partial q\partial p}.$$

Hier bedeuten λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 *rationale* Functionen der acht Grössen ξ, η.

Durch Differentiation der beiden Gleichungen (4) nach p und q erhält man drei ähnliche, in allem also vier Gleichungen, die in den Ableitungen dritter Ordnung von Θ linear sind. Und da die zugehörige Determinante, wie wir früher (S. 185) sahen, nicht identisch verschwindet, erhalten wir für die vier Ableitungen

$$(6) \qquad \frac{\partial^3\Theta}{\partial q^3}, \quad \frac{\partial^3\Theta}{\partial q^2\partial p}, \quad \frac{\partial^3\Theta}{\partial q\partial p^2}, \quad \frac{\partial^3\Theta}{\partial p^3}$$

Ausdrücke von der Form

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial p\partial q}\sum_1^4{}_k \frac{\sigma_k + \tau_k\eta_k'}{p + q\eta_k'},$$

in denen die acht Grössen σ und τ rationale Functionen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, η_1, η_2, η_3, η_4 darstellen.

Diese Werthe setzen wir in die drei Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^3\Theta}{\partial q^3}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial^3\Theta}{\partial q^2\,\partial p}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^3\Theta}{\partial q^2\,\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial^3\Theta}{\partial q\,\partial p^2}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^3\Theta}{\partial q\,\partial p^2}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial^3\Theta}{\partial p^3}\right)$$

ein und finden hierdurch, indem wir die Differentiationen ausführen und sodann nochmals die früher gefundenen Werthe der Differentialquotienten (5) und (6) einsetzen, drei Relationen von der Form

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial p\,\partial q}\,\{\omega_1\eta_1'' + \omega_2\eta_2'' + \omega_3\eta_3'' + \omega_4\eta_4'' + \psi\} = 0\,,$$

in denen ψ und ω_k *rationale* Functionen der zwölf Grössen ξ, η, η' bezeichnen, während η_k'' die zweite Ableitung von η_k nach ξ_k sein soll.

Hier können wir nun ohne weiteres annehmen, dass der links stehende Factor von Null verschieden ist, denn sonst beständen die drei Gleichungen

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial p^2} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial p\,\partial q} = \frac{\partial\Theta^2}{\partial q^2} = 0\,,$$

und also reducirten sich die gemeinsamen Integralflächen der ursprünglich vorgelegten partiellen Differentialgleichungen (1) oder (4) gegen unsere Voraussetzung auf die Punkte (und die Ebenen) des Raumes.

Die gesuchten Integrabilitätsbedingungen besitzen somit die Form

$$(7)\qquad \sum_1^4{}^k \varphi_k(\xi\,\eta\,\eta')\,\eta_k'' + \psi(\xi\,\eta\,\eta') = 0$$

und dabei sind die φ und ψ, wie schon gesagt, rationale Functionen der ξ, η und η'.

Hiermit ist zunächst analytisch bestätigt, dass sich die Integrabilitätsbedingungen wirklich nur auf die vier unendlich fernen Curven $\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0$ beziehen.

Eine *directe* Berechnung der Grössen φ_i und ψ als Functionen der ξ_k, η_k und η_k' würde ausgedehnte Rechnungen verlangen. Glücklicherweise können wir diese fast unausführbaren Rechnungen durch einfache begriffliche Betrachtungen ersetzen; gleichzeitig ergiebt sich, dass die *drei* Integrabilitätsbedingungen nicht unabhängig sind, sondern sich auf eine *einzige* Gleichung reduciren.

Wir erinnern dann zunächst daran, dass die Integrabilitätsbedingungen nach unseren früheren Ueberlegungen (S. 180) sicher erfüllt sind, wenn die vier unendlich fernen Curven C_k Geraden von allgemeiner gegenseitiger Lage sind. Setzen wir daher

$$\eta_i = a_i \xi_i + b_i$$

und verstehen dabei unter den a_i und b_i *acht* allgemein gewählte *Constanten*, so dürfen wir sicher behaupten, dass die drei Integrabilitätsbedingungen (7) bei der Substitution

$$\eta_i = a_i \xi + b_i, \quad \eta_i' = a_i, \quad \eta_i'' = 0$$

erfüllt werden, dass also die drei Ausdrücke

$$\psi(\xi, a\xi + b, a)$$

für alle Werthe der zwölf Grössen a_i, b_i, ξ_i identisch verschwinden. Daraus ergiebt sich aber, dass auch die Ausdrücke

$$\psi(\xi \eta \eta')$$

immer verschwinden, welche Zahlenwerthe auch die zwölf Argumente: ξ_i, η_i und η_i' besitzen mögen.

Die Integrabilitätsbedingungen (7) besitzen daher die Form

$$\sum^k \omega(\xi \eta \eta_k') \eta_k'' = 0$$

und dabei sind die ω_k *rationale* Functionen der zwölf Argumente ξ_i, η_i und η_i'.

Wir wissen ferner (S. 183), dass die Integrabilitätsbedingungen sämmtlich erfüllt sind, wenn unter den vier unendlich fernen Curven C_k zwei z. B. C_3 und C_4 gerade Linien sind, während C_1 und C_2 Zweige desselben Kegelschnittes sind.

Hieraus können wir zunächst schliessen, dass die η_k'' nur durch *eine* lineare Gleichung verbunden sein können; denn existirten zwei oder noch mehr unabhängige lineare homogene Relationen zwischen den η_k'', so liessen sich immer zwei Grössen z. B. η_1'' und η_2'' linear und homogen durch η_3'' und η_4'' ausdrücken;

dann aber müssten, sobald die Curven C_3 und C_4 Gerade wären, auch die Curven C_1 und C_2 Gerade sein. Da nun aber dies, wie soeben gesagt, mit unseren früheren Ergebnissen im Widerspruche steht, so sehen wir, dass *die Integrabilitätsbedingungen sich wirklich auf eine einzige in den η'' lineare und homogene Gleichung*

$$\omega_1 \eta_1'' + \cdots + \omega_4 \eta_4'' = 0$$

reduciren.

Unsere frühere Bemerkung, dass die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, wenn C_3 und C_4 beliebige Geraden darstellen, während C_1 und C_2 Zweige eines ganz *beliebigen* Kegelschnittes sind, giebt uns wichtige Aufschlüsse über die Form der ω_k. Obgleich die Bestimmung der Coefficienten φ_k als Functionen der Grössen ξ_i, η_i und η_i' im Grunde keineswegs nothwendig ist, indem es bei den folgenden Betrachtungen eigentlich nur darauf ankommt, dass die ω_k *rationale* Functionen ihrer Argumente sind, wollen wir doch jedenfalls andeuten, wie man ohne grössere Schwierigkeit diese Bestimmung direct durchführen kann.

Wir müssen dann an einen längst bekannten Satz erinnern, der sich auf die beiden Schnittpunkte eines beliebigen Kegelschnittes mit einer beliebig gewählten Geraden bezieht. In rein analytischer Fassung kann dieser Satz folgendermassen formulirt werden.

Liegen in den Veränderlichen ξ, η zwei algebraische Gleichungen vor, unter denen die eine vom zweiten Grade ist, während die andere die Form besitzt

$$p\xi + q\eta - 1 = 0$$

und somit vom ersten Grade ist, so findet man durch Auflösung nach ξ und η zwei Werthsysteme

$$\xi_1 \eta_1 \text{ und } \xi_2 \eta_2$$

ausgedrückt als Functionen von p und q. Auf der anderen Seite bestimmt die Gleichung zweiten Grades η_1 als Function von ξ_1 und ebenfalls η_2 als Function von ξ_2. Sind nun $\eta_1 = \varphi_1(\xi_1)$ und $\eta_2 = \varphi_2(\xi_2)$ diese Functionen, so besteht die Gleichung

$$\frac{\varphi_1''(\xi_1)}{(p+q\varphi_1'(\xi_1))^3}+\frac{\varphi_2''(\xi_2)}{(p+q\varphi_2'(\xi_2))^3}=0$$

identisch in ξ_1 und ξ_2, sobald p und q aus den Gleichungen

$$p\xi_1+q\eta_1-1=0,\quad p\xi_2+q\eta_2-1=0$$

bestimmt werden.

Diese Relation können wir, wenn wir wiederum die Differentialquotienten der η_k nach ξ_k mit η_k' und η_k'' bezeichnen, auch so schreiben:

$$\frac{\eta_1''}{(p+q\eta_1')^3}+\frac{\eta_2''}{(p+q\eta_2')^3}=0.$$

Kehren wir nun wiederum zu unserem räumlichen Problem zurück, so wissen wir, dass die Integrabilitätsbedingung

$$\omega_1\eta_1''+\omega_2\eta_2''+\omega_3\eta_3''+\omega_4\eta_4''=0$$

erfüllt wird, sobald η_3 und η_4 lineare Functionen

$$\eta_3=a_3\xi_3+b_3,\quad \eta_4=a_4\xi_4+b_4$$

von ξ_3 bez. ξ_4 sind, während sowohl η_1 und ξ_1 wie η_2 und ξ_2 eine Gleichung zweiten Grades und zwar dieselbe Gleichung zweiten Grades erfüllen. Bedenken wir dabei, dass die vier Constanten a_3, b_3, a_4, b_4 ganz beliebig gewählt werden können, so dürfen wir schliessen, dass die Gleichung

$$\omega_1\eta_1''+\omega_2\eta_2''=0$$

mit der früher aufgestellten Gleichung (8) identisch sein muss. Wir erkennen daher, dass das Verhältniss der Coefficienten ω_1, ω_2 durch die Gleichung

$$(p+q\eta_1')^3\omega_1=(p+q\eta_2')^3\omega_2$$

bestimmt ist, und dass wir daher

$$\omega_1=\frac{\varrho}{(p+q\eta_1')^3},\quad \omega_2=\frac{\varrho}{(p+q\eta_2')^3}$$

setzen dürfen.

Dementsprechend können wir

$$\omega_3=\frac{\sigma}{(p+q\eta_3')^3},\quad \omega_4=\frac{\sigma}{(p+q\eta_4')^3}$$

setzen.

Unsere Integrabilitätsbedingung besitzt daher die Form

$$0=\varrho\left(\frac{\eta_1''}{(p+q\eta_1')^3}+\frac{\eta_2''}{(p+q\eta_2')^3}\right)+\sigma\left(\frac{\eta_3''}{(p+q\eta_3')^3}+\frac{\eta_4''}{(p+q\eta_4')^3}\right),$$

wo jetzt nur noch das Verhältniss $\varrho:\sigma$ unbekannt ist.

Um dieses Verhältniss zu bestimmen schlug ich in meiner Abhandlung aus dem Jahre 1882 den folgenden Weg ein. Ich setzte voraus, dass die beiden unendlich fernen Curven $\eta_1-\varphi_1(\xi_1)=0$ und $\eta_3-\varphi_3(\xi_3)=0$ Geraden waren und erkannte, dass es dann nothwendig und hinreichend ist, dass die beiden Curven $\eta_2-\varphi_2(\xi_2)=0$, $\eta_4-\varphi_4(\xi_4)=0$ Zweige eines irreducibeln oder zerfallenen Kegelschnittes sind. Waren nämlich die beiden Geraden $\eta_1-\varphi_1=0$ und $\eta_3-\varphi_3=0$ die Axen der beiden Ebenenbüschel $x=a$ und $y=b$, so müssten die betreffenden Flächen, wie man leicht sieht, zwei lineare partielle Differentialgleichungen von der Form

$$p\,\xi_2(x)+q\eta_2(x)-1=0$$
$$p\xi_4(y)+q\eta_4(y)-1=0$$

erfüllen. Indem ich nun die Integrabilitätsbedingungen dieser beiden Gleichungen suchte, fand ich durch relativ einfache Rechnungen, die allerdings nicht ganz kurz waren, dass gemeinsame Integralflächen dann und nur dann vorhanden sind, wenn die Gleichung

$$\frac{\eta_2''}{(p+q\eta_2')^3}+\frac{\eta_4''}{(p+q\eta_4')^3}=0$$

besteht. Und hieraus zog ich den Schluss, dass das Verhältniss der früher betrachteten Grössen ϱ und σ gleich 1 ist.

In dieser Weise erkannte ich im Jahre 1882, dass unsere beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\xi_1\xi_2r+(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1)s+\eta_1\eta_2t=0,$$
$$\xi_3\xi_4r+(\xi_3\eta_4+\xi_4\eta_3)s+\eta_3\eta_4t=0$$

dann und nur dann gemeinsame nicht cylindrische Integralflächen haben, wenn die Bedingungsgleichung

$$\frac{\eta_1''}{(p+q\eta_1')^3}+\frac{\eta_2''}{(p+q\eta_2')^3}+\frac{\eta_3''}{(p+q\eta_3')^3}+\frac{\eta_4''}{(p+q\eta_4')^3}=0$$

besteht. Diese Bedingungsgleichung ist aber nach einem Satze, der zu verschiedenen Zeiten von mehreren Mathematikern, zuerst von Reiss, später von Haag, Holst und Anderen gefunden worden ist, dann erfüllt, wenn die vier unendlich fernen Curven $\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0$ Zweige derselben Curve vierter Ordnung sind.

Nachdem ich soweit gekommen war, kostete es mir keine grosse Mühe zu beweisen, dass der Satz von Reiss sich folgendermassen *umkehren* lässt.

Erfüllen die Schnittpunkte $\xi_1 \eta_1; \xi_2 \eta_2; \ldots \xi_m \eta_m$ der Geraden $p\xi + q\eta - 1 = 0$ und m Curven $\eta_1 - \omega_1(\xi_1) = 0 \ldots \eta_m - \omega_m(\xi_m) = 0$ die Bedingungsgleichung

$$\frac{\eta_1''}{(p + q\eta_1')^3} + \cdots + \frac{\eta_m''}{(p + q\eta_m')^3} = 0,$$

so sind diese m Curven Zweige einer irreducibeln oder zerfallenen algebraischen Curve vom Gerade m.

Also ergab es sich, dass unsere beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (1) *dann und nur dann nicht cylindrische gemeinsame Integralflächen haben, wenn die vier Curven* $\eta_i - \omega_i(\xi_i) = 0$ *Zweige einer algebraischen Curve vierter Ordnung sind.*

Nachdem ich durch diese Digression angedeutet habe, durch welche Betrachtungen ich zum ersten Male mein allgemeines Problem erledigte, werde ich jetzt zeigen, wie man durch Verwerthung und Deutung des Abel'schen Theorems leichter dasselbe Resultat ableiten kann.

Wir setzen also als bekannt voraus auf der einen Seite, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen (1) nur die einzige Integrabilitätsbedingung

$$\varphi_1\eta_1'' + \varphi_2\eta_2'' + \varphi_3\eta_3'' + \varphi_4\eta_4'' = 0$$

haben, deren Coefficienten ω_i *rationale* Functionen der zwölf Grössen ξ_k, η_k, η_k' sind; auf der andern Seite, dass vermöge des Abel'schen Theorems ∞^{18} verschiedene Flächen gefunden werden können, die die gestellten Forderungen erfüllen.

Die acht Grössen η_i, ξ_i sind verbunden durch die vier Relationen $\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0$ zusammen mit den beiden durch Elemination von p, q zwischen den vier Gleichungen

$$p\xi_k + q\eta_k - 1 = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

hervorgehenden Relationen

$$(\Omega)\qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_4 & \eta_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

die nur aussagen, dass die vier unendlich fernen Punkte ξ_k, η_k auf einer Geraden liegen.

Unter den acht Grössen ξ_k, η_k giebt es daher zwei unabhängige, und als solche wählen wir ξ_1 und ξ_2. Bei dieser Auffassung sind $\xi_3, \xi_4, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ Functionen von den beiden unabhängigen Veränderlichen ξ_1, ξ_2.

Dabei erhalten wir durch Differentiation der beiden Gleichungen

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_i & \varphi_i(\xi_i) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

eine Bestimmung der vier Ableitungen

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial \xi_4}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \xi_4}{\partial \xi_2}$$

als *rationale* Functionen der zwölf Grössen ξ_k, η_k und $\varphi_k' = \eta_k'$.

Auf der andern Seite erkennen wir durch Differentiation der vier Gleichungen $\eta_i = \varphi_i(\xi_i)$ nach ξ_1 und ξ_2, dass auch die acht Ableitungen der η_i nach ξ_1 und ξ_2 sich *rational* durch jene zwölf Grössen ξ, η, η' ausdrücken.

Nach diesen Vorbereitungen differentiiren wir die Integrabilitätsbedingung

$$\omega_1 \eta_1'' + \omega_2 \eta_2'' + \omega_3 \eta_3'' + \omega_4 \eta_4'' = 0$$

zuerst nach ξ_2 und sodann nach ξ_1. Hierdurch erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{gathered} A_1 \eta_1''' + A_3 \eta_3''' + A_4 \eta_4''' + A_0 \\ B_2 \eta_2''' + B_3 \eta_3''' + B_4 \eta_4''' + B_0, \end{gathered}$$

deren Coefficienten $A_1, A_3, A_4, B_2, B_3, B_4$ rationale Functionen der ξ, η, η' sind; während A_0, B_0 rationale Functionen der Grössen ξ, η, η', η'' sind, die überdies in den η'' linear sind. Diese beiden neuen Gleichungen sind offenbar unabhängig.

Durch wiederholte Differentiation nach ξ_1 und ξ_2 erhalten wir *drei* unabhängige lineare Relationen zwischen den vier Grössen $\eta^{(IV)}$; dabei sind die Coefficienten rationale Functionen der ξ, η, η', η'' und η'''.

Durch nochmalige Differentiation erhalten wir Gleichungen, die alle $\eta^{(V)}$, $\eta^{(VI)}$ u. s. w. als rationale Functionen der ξ, η, η', η'', η''' und $\eta^{(IV)}$ bestimmen.

Die 24 Grössen ξ, η, η', η'', η''', $\eta^{(IV)}$ erfüllen

$$1 + 2 + 3 = 6$$

unabhängige Differentialgleichungen, wozu noch die beiden Determinantengleichungen (Ω) kommen.

Daher enthalten die Reihenentwickelungen der Grössen η_1, η_2, η_3, η_4, ξ_3, ξ_4 nach den Potenzen von ξ_1 und ξ_2 höchstens $24 - 8 = 16$ unabhängige Anfangswerthe. Da nun aber die beiden Anfangswerthe ξ_1^0, ξ_2^0 keine wesentliche Bedeutung haben, so schliessen wir:

dass es jedenfalls nicht mehr als ∞^{14} verschiedene Curvensysteme $\eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0 \ldots \eta_4 - \varphi_4(\xi_4) = 0$ giebt, die unsere Bedingung

$$\omega_1 \eta_1'' + \omega_2 \eta_2'' + \omega_3 \eta_3'' + \omega_4 \eta_4'' = 0$$

erfüllen.

Auf Seite 167 fanden wir aber ∞^{14} Curvensysteme

$$\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0,$$

die alle unsere Forderungen erfüllen. Es giebt ja nämlich in der Ebene $\xi\eta$ gerade ∞^{14} verschiedene Curven vierter Ordnung und jede derartige Curve gab uns vier Curvenzweige, die unsere Forderungen erfüllten.

Da nun auf der anderen Seite in unseren Reihenentwickelungen alle Coefficienten sich *rational* durch vierzehn Constanten ausdrücken, so können wir mit voller Sicherheit schliessen, *dass unser Problem in allgemeinster Weise sich dadurch erledigt, dass wir als Curven $\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0$ vier verschiedene Zweige einer Curve vierter Ordnung wählen.* Diese Curve vierter Ordnung braucht nicht irreducibel zu sein; sie kann gern zerfallen, und zwar auf alle möglichen Weisen. *Ausgeschlossen sind nur die Fälle, bei denen die Curve in Theile zerfällt, die doppelt zählen.* Die Curve vierter Ordnung darf somit nicht ein doppeltzählender Kegelschnitt, oder eine vierfache Gerade sein, auch nicht in einem Kegelschnitt und eine doppeltzählende Gerade zerfallen.

Nur solche Ausartungen der Curve vierter Ordnung geben brauchbare Lösungen, bei denen die Summe der Ordnungen der auftretenden Theilcurven wirklich gleich vier ist.

Wir fassen unsere wichtigsten Resultate folgendermassen zusammen:

Theorem V. *Wenn eine developpable Fläche eine Translationsfläche ist, so ist sie eine Ebene oder Cylinderfläche und kann daher in unendlich vielen Weisen durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden. Es giebt ferner* ∞^{14} *nicht cylindrische Flächen, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefasst werden können. Man findet* **alle** *derartigen Flächen, indem man eine beliebige ebene algebraische Curve vierter Ordnung*

$$F(\alpha\beta) = 0$$

auswählt und sodann die Integrale

$$\varphi(\alpha) = \int^{\alpha} \frac{\alpha\, d\alpha}{F_\beta}, \quad \psi(\alpha) = \int^{\alpha} \frac{\beta\, d\alpha}{F_\beta}, \quad \chi(\alpha) = \int^{\alpha} \frac{d\alpha}{F_\beta}$$

bildet. Alsdann liefern die Formeln

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) \\ y &= \psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2) \\ z &= \chi(\alpha_1) + \chi(\alpha_2) \end{aligned}$$

alle Translationsflächen, die die erlangte Eigenschaft besitzen.

Noch schärfer tritt die analytische Bedeutung dieses Theorems durch die folgende Fassung hervor.

Liefern drei Gleichungen von der Form

$$f_{k1}(t_1) + f_{k2}(t_2) + f_{k3}(t_3) + f_{k4}(t_4) = 0$$

nur zwei unabhängige Relationen zwischen den vier Argumenten t_1, t_2, t_3, t_4 *und giebt es dabei unter diesen Relationen keine, die nur zwei Argumente enthält, so sind nur zwei Fälle möglich: Entweder geht die eine vorgelegte Gleichung dadurch aus den beiden anderen hervor, dass man sie mit Constanten multiplicirt und sodann addirt, oder aber die* f_{ki} *sind Abel'sche Integrale, die zu einer Curve vierter Ordnung gehören. Die drei ursprünglichen Gleichungen sind dann die bekannten Gleichungen des Abel'schen Theorems.*

In meinen Vorlesungen über Translationsflächen, die ich hoffentlich ziemlich bald in extenso veröffentlichen kann, *discutire ich eingehend alle* Flächen, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen betrachtet werden können, und stelle dabei u. a. alle derartige Flächen auf, die *algebraisch* sind.

Bei dieser Gelegenheit muss ich mich auf die folgenden weiteren Bemerkungen beschränken.

Die im Vorangehenden durchgeführten Betrachtungen geben sozusagen unmittelbar die Bestimmung als geradlinigen Translationsflächen; denn auch dieses Problem findet seinen analytischen Ausdruck in zwei partiellen Differentialgleichungen von der Form

$$\xi_1\xi_2 r + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)s + \eta_1\eta_2 t = 0$$
$$\xi_3\xi_4 r + (\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)s + \eta_3\eta_4 t = 0\,,$$

wozu aber jetzt die Gleichungen

$$\xi_3 = \xi_4\,, \quad \eta_3 = \eta_4$$

hinzukommen.

Untersucht man nun die Integrabilitätsbedingungen dieser partiellen Differentialgleichungen, so muss man genau solche Betrachtungen wie früher anstellen. Dabei ist zu beachten, dass die früher betrachtete Determinante Δ auch jetzt von Null verschieden ist. Auch jetzt giebt es nur *eine* Integrabilitätsbedingung, die ohne weitere Rechnung aufgestellt werden kann.

E. Study, *Betrachtungen über Doppelverhältnisse.* (Mit einer Figur.)

Die folgende Untersuchung wurde veranlasst durch die Mitwirkung des Verfassers bei der Herausgabe der gesammelten Werke Hermann Grassmann's. Es schien wünschenswerth, die von Grassmann schon im Jahre 1844 entdeckte liniengeometrische Invariante, das Doppelverhältniss von vier Geraden im Raume, näher zu untersuchen, und ihren Zusammenhang mit verwandten Bildungen zu ermitteln. In der schliesslich gewählten Darstellung ist allerdings das Grassmann'sche Doppelverhältniss etwas in den Hintergrund gerückt; es handelt sich mehr um verschiedene Auslegungen einer und derselben Formelgruppe, die auch schon früher hervorgetreten, und namentlich, allerdings nicht mit gleicher Vollständigkeit, von Möbius und Wedekind behandelt worden ist.

Alle die zu betrachtenden Ausdrücke haben ein gemeinsames Bildungsgesetz; sie alle lassen sich, auf mehrere Weisen, auf gewöhnliche Doppelverhältnisse von vier Elementen eines binären Gebietes zurückführen; und jeder von ihnen ist die einfachste (absolute) Invariante einer gewissen Transformationsgruppe, die ihrerseits durch den Ausdruck definirt ist. Da diese Gruppen gerade zu den für die Geometrie wichtigsten gehören, und unsere Resultate zum Theil sogar einen ganz elementargeometrischen Charakter haben, so dürfen wir vielleicht auf einiges Interesse der Geometer rechnen.

1.

Das Doppelverhältniss von vier Punkten auf einer Fläche 2. Ordnung.

Es sei vorgelegt eine irreducibele (nicht zerfallende) Fläche 2. Ordnung, symbolisch dargestellt durch die Gleichung $(LX)^2 = 0$ oder kürzer durch $(XX) = 0$, und auf dieser seien vier verschiedene Punkte A, B, C, D angenommen, von denen, im Falle die Fläche ein Kegel ist, keiner in den Scheitel fallen soll. Wir nennen dann »*Doppelverhältnisse der vier Punkte auf der Fläche 2. Ordnung*« die Quotienten aus den Polarenproducten

$$(1)\qquad (AB)\cdot(CD)\,,\quad (AC)\cdot(DB)\,,\quad (AD)\cdot(BC)$$

(wo z. B. (AB) zur Abkürzung steht für die Polare $(LA)(LB)$), also die durch die Identität $D_1 D_2 D_3 = 1$ verbundenen Grössen

$$(2)\qquad D_1 = \frac{(AC)(BD)}{(AD)(BC)}\,,\quad D_2 = \frac{(AD)(CB)}{(AB)(CD)}\,,\quad D_3 = \frac{(AB)(DC)}{(AC)(DB)}$$

und ihre reciproken Werthe D_1', D_2', D_3'. Von ihnen gilt der Satz:

Jedes der Doppelverhältnisse D_i, D_i' kann auf zwei Weisen aufgefasst werden als ein gewöhnliches Doppelverhältniss von vier Elementen eines binären Gebietes. Es ist nämlich z. B. D_1 gleich dem entsprechenden Doppelverhältniss der Punkte A, B und der Tangentialebenen der Fläche 2. O in den Punkten C, D; oder auch der Punkte C, D und der Tangentialebenen in A, B.

D. h. nennen wir C', D' die Schnittpunkte der Geraden $\widehat{AB}$ mit den Ebenen $(CX) = 0$, $(DX) = 0$, und A'', B'' die Schnittpunkte der Geraden $\widehat{CD}$ mit den Ebenen $(AX) = 0$, $(BX) = 0$, so ist

$$(3)\qquad D_1 = \frac{\{AC'\}\{BD'\}}{\{AD'\}\{BC'\}} = \frac{\{A''C\}\{B''D\}}{\{A''D\}\{B''C\}}\,,$$

sofern nämlich die geschweiften Klammern die binären simultanen Invarianten der Punkte A, B, C', D' oder A'', B'', C, D bedeuten.

Jedes unserer Doppelverhältnisse D_i kann aber, auf irrationale Weise, auch dargestellt werden als ein Product zweier gewöhnlicher Doppelverhältnisse d_i, δ_i.

In der That, bezeichnen wir mit a, b, c, d und α, β, γ, δ die Erzeugenden unserer Fläche, die durch die Punkte A, B, C, D hindurchlaufen, und verstehen wir unter (ab), $(\alpha\beta)$ u. s. w. die zugehörigen binären Invarianten, so bestehen Relationen der Form

$$(4)\qquad \begin{aligned} (AB)(CD) &= \varrho\cdot(ab)(cd)\cdot(\alpha\beta)(\gamma\delta)\,,\\ (AC)(DB) &= \varrho\cdot(ac)(db)\cdot(\alpha\gamma)(\delta\beta)\,,\\ (AD)(BC) &= \varrho\cdot(ad)(bc)\cdot(\alpha\delta)(\beta\gamma)\,,\end{aligned}$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfactor bedeutet, dessen Werth uns nicht weiter interessirt. Es ist also

$$(5)\qquad D_1 = d_1 \cdot \delta_1\,, \qquad D_2 = d_2 \cdot \delta_2\,, \qquad D_3 = d_3 \cdot \delta_3\,,$$

wo

$$(6)\qquad d_1 = \frac{(ac)(bd)}{(ad)(bc)}, \quad \delta_1 = \frac{(\alpha\gamma)(\beta\delta)}{(\alpha\delta)(\beta\gamma)}, \qquad \text{u. s. w.},$$

so dass

$$d_1 = 1 - \frac{1}{d_2} = \frac{1}{1-d_3}, \quad d_2 = 1 - \frac{1}{d_3} = \frac{1}{1-d_1}, \quad d_3 = 1 - \frac{1}{d_1} = \frac{1}{1-d_2}.$$

Die Bestimmung der binären Doppelverhältnisse d_i, δ_i bei gegebenen Werthen von D_1, D_2, D_3 verlangt die Auflösung einer Gleichung 2. Grades. *Man findet*:

$$(7)\qquad \left.\begin{matrix} d_1 \\ \delta_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{aligned} &= \frac{1 + D_1 - D_1 D_3 \pm \sqrt{(1 + D_1 - D_1 D_3)^2 - 4 D_1}}{2} = \\ &= \frac{2}{1 + D_1' - D_1' D_2' \mp \sqrt{(1 + D_1' - D_1' D_2')^2 - 4 D_1'}} = \\ &= \frac{-(AB)(CD) + (AC)(DB) + (AD)(BC) \pm \sqrt{\Delta}}{2(AD)(BC)} = \\ &= \frac{2(AC)(BD)}{-(AB)(CD) + (AC)(DB) + (AD)(BC) \mp \sqrt{\Delta}}, \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \sqrt{-d_1} \\ \sqrt{-\delta_1} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{S_2}\sqrt{S_3} \mp \sqrt{S_0}\sqrt{S_1}}{S_1 + S_2} = - \frac{\sqrt{S_2}\sqrt{S_3} \mp \sqrt{S_0}\sqrt{S_1}}{S_0 + S_3} = \\ &= \frac{S_3 + S_1}{\sqrt{S_2}\sqrt{S_3} \pm \sqrt{S_0}\sqrt{S_1}} = - \frac{S_0 + S_2}{\sqrt{S_2}\sqrt{S_3} \pm \sqrt{S_0}\sqrt{S_1}}, \end{aligned}\right.$$

$$\sqrt{-d_1}\,\sqrt{-d_2}\,\sqrt{-d_3} = -1 = \sqrt{-\delta_1}\,\sqrt{-\delta_2}\,\sqrt{-\delta_3};$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$(8)\qquad \begin{aligned} 2S_0 &= -\sqrt{(AB)(CD)} - \sqrt{(AC)(DB)} - \sqrt{(AD)(BC)}, \\ 2S_1 &= -\sqrt{(AB)(CD)} + \sqrt{(AC)(DB)} + \sqrt{(AD)(BC)}, \\ 2S_2 &= \sqrt{(AB)(CD)} - \sqrt{(AC)(DB)} + \sqrt{(AD)(BC)}, \\ 2S_3 &= \sqrt{(AB)(CD)} + \sqrt{(AC)(DB)} - \sqrt{(AD)(BC)}, \end{aligned}$$

und

$$(9)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & (AB) & (AC) & (AD) \\ (BA) & 0 & (BC) & (BD) \\ (CA) & (CB) & 0 & (CD) \\ (DA) & (DB) & (DC) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 16\, S_0 S_1 S_2 S_3 = (ABCD)^2 \cdot J\,.$$

Die Abhängigkeit der Quadratwurzeln ist hier zu erklären durch

$$(10)\qquad 4\sqrt{S_0}\sqrt{S_1}\sqrt{S_2}\sqrt{S_3} = \sqrt{\Delta} = (ABCD)\cdot\sqrt{J}\,;$$

J bedeutet die Discriminante der quadratischen Form (XX) *oder* $(LX)^2$:

$$(11)\qquad J = \frac{1}{24}(LL'L''L''')^2\,.$$ [1]

Nehmen wir zunächst an, dass J von Null verschieden ist, so kann Δ nur verschwinden, wenn die vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene liegen; und dies war vorauszusehen, denn es sind ja im Falle $(ABCD) = 0$ die beiden Erzeugendenschaaren unserer Fläche durch A, B, C, D projectiv auf einander bezogen,

1) Die Formeln des Textes haben sich dem Verfasser ergeben durch Weiterführung und Uebertragung der Untersuchung, die in den Anmerkungen von Grassmann's gesammelten Werken (I. Bd., 1. Theil, S. 109) über das Grassmann'sche Doppelverhältniss von vier Geraden im Raume angestellt worden ist. (Vgl. § 3, und Grassmann's Werke, I. Bd., 2. Theil, S. 508.) Es zeigte sich dann, dass die Formeln zum Theil übereinstimmen mit solchen, die (für den Fall einer reellen, nicht geradlinigen Fläche) schon vor längerer Zeit von Herrn Wedekind entwickelt worden sind. S. dessen interessante Abhandlungen Math. Annalen Bd. IX und Bd. XVII (Auszüge aus den Schriften: »Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen«, und »Studien im binären Werthgebiet«, Karlsruhe 1875 und 1876). Herr Wedekind verfolgt übrigens andere Zwecke; es fehlen bei ihm, wie es scheint, u. a. die Formeln (4), (5), auf die es in unserem Zusammenhang besonders ankommt.

Um mit dem genannten Autor und anderen neueren Mathematikern möglichst in Uebereinstimmung zu bleiben, haben wir im Texte die Bezeichnungen gegenüber denen der Grassmann-Ausgabe etwas abgeändert, derart, dass d_1 das gewöhnlich mit $(abcd)$ bezeichnete Doppelverhältniss wird, dass sich also d_1 für $d = a, b, c$ auf die Werthe ∞, 0, 1 reducirt.

Wegen mehrerer Einzelheiten, auf die wir hier nicht eingehen können, verweisen wir auf die erwähnten Abhandlungen.

so dass die entsprechenden binären Doppelverhältnisse einander gleich werden müssen. Wichtig ist zu bemerken, dass in diesem Falle die Grössen $d_i = \delta_i$, also die Verhältnisse der Quadratwurzeln

$$\sqrt{(AB)(CD)}\,, \quad \sqrt{(AC)(DB)}\,, \quad \sqrt{(AD)(BC)}$$

rational werden; und dasselbe gilt allgemein im Falle $J = 0$, in dem die Grössen D_i ebenfalls gleich den Quadraten der entsprechenden binären Doppelverhältnisse sind.

Man wird aus dem Gesagten leicht den folgenden Satz herleiten:

Die Figur von vier verschiedenen Punkten auf einer allgemeinen Fläche 2. O. ist den automorphen collineären Transformationen der Fläche gegenüber vollständig charakterisirt durch die Werthe der zugehörigen Doppelverhältnisse, so lange diese endlich sind, d. h. so lange keine zwei der Punkte auf einer Erzeugenden liegen.

Dagegen genügt bei einem Kegel die Gleichheit der entsprechenden Doppelverhältnisse von zwei Punktfiguren A, B, C, D und A', B', C', D' noch nicht zur Entscheidung darüber, ob diese Figuren durch eine automorphe collineare Transformation der Fläche in einander übergeführt werden können. Damit dies stattfinde, ist vielmehr nöthig, dass ausserdem die Invarianten $(ABCD)$ und $(A'B'C'D')$ beide von Null verschieden oder beide zugleich Null sind; d. h. dass keine der Figuren in einer Ebene enthalten ist, oder dass beide es sind.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Formel (10):

Die beiden Erzeugendenschaaren der Fläche 2. O. entsprechen danach den beiden Werthen der Quadratwurzel aus der Discriminante J. [1]) Sie sind also rational zu trennen, wenn J ein Quadrat ist. Allgemein hat man anzunehmen, dass $\sqrt{J}$ das Vorzeichen

---

1) Die Theorie der Flächen 2. Grades gestaltet sich sehr verschieden, je nach dem, was man als rational bekannt ansieht. Die Hauptunterschiede der verschiedenen Standpunkte können folgendermaassen charakterisirt werden: 1) Das Polarsystem der Fläche allein ist rational bekannt. 2) Die beiden Erzeugendenschaaren sind rational getrennt. 3) Es sind Punkte der Fläche rational bekannt, die Erzeugendenschaaren sind aber nicht getrennt. (Dies ist die Annahme des Textes.) 4) Es sind einzelne Erzeugende (und folglich auch Punkte der Fläche) rational bekannt.

Die hieraus sich ergebenden Behandlungsweisen der Theorie der Flächen 2. Grades sind principiell verschieden, und sollten in den Lehrbüchern gehörig auseinandergehalten werden.

wechselt bei einer uneigentlichen automorphen Transformation der quadratischen Form (XX), d. h. einer solchen, die (XX) ohne zutretenden Factor reproducirt und die Determinante -1 hat.

$\sqrt{\varDelta}$ ist nach Formel (10) rational bekannt für alle Figuren von vier Punkten, sobald es für eine einzige rational bekannt ist; unser Satz liefert uns also auch das Aequivalenzkriterium für zwei Figuren von vier Punkten gegenüber den *eigentlichen* automorphen Transformationen der Fläche, denen, die die Erzeugendenschaaren nicht vertauschen. Man muss natürlich bei der zweiten Punktfigur $\sqrt{\varDelta'}$ erklären durch

$$\frac{\sqrt{\varDelta'}}{\sqrt{\varDelta}} = \frac{(A'B'C'D')}{(ABCD)};$$

das Kriterium ist dann $d_i = d_i'$, $\delta_i = \delta_i'$ (vgl. § 4), während $d_i = \delta_i'$, $\delta_i = d_i'$ aussagt, dass beide Figuren zu einander »symmetrisch« sind.

Alle bisher angestellten Betrachtungen gelten ganz allgemein. Ein besonderes Interesse aber hat der von Wedekind behandelte Fall, wo die Fläche 2. O. reell und nicht-geradlinig ist, und auch die Punkte A, B, C, D als reell angenommen werden. J und $\varDelta$ sind dann *negativ*, und die Polarenproducte $(AB)(CD)$ u. s. w. haben alle dasselbe Vorzeichen, das man unbeschadet der Allgemeinheit als *positiv* voraussetzen darf. Man kann dann, nach Formel (9), immer ein reelles ebenes Dreieck construiren, das die Quadratwurzeln aus diesen Producten zu Seiten hat. $\frac{1}{4}\sqrt{-\varDelta} = \frac{1}{4}(ABCD)\sqrt{-J}$ ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks. Die Grössen d_i, δ_i sind natürlich jetzt conjugirt-imaginär; sie fallen reell aus, wenn die vier Punkte in einer Ebene liegen.

2.

Das Doppelverhältniss von vier Punkten im Euclidischen Raume.

Wir identificiren jetzt die in § 1 betrachtete Fläche 2. O. mit der Kugel, die durch vier Punkte A, B, C, D des Raumes gelegt werden kann, oder, wenn die Punkte auf einem Kreise liegen, mit einer der sie enthaltenden Kugeln.

Beachten wir, dass die automorphen collinearen Transformationen der Kugel sich nicht unterscheiden von den automorphen conformen Transformationen derselben Fläche, so weit nämlich nur die Punkte der Kugel selbst in Betracht kommen [1]), so können wir folgern, dass wir in den im § 1 betrachteleten Doppelverhältnissen nunmehr Invarianten der conformen Gruppe der reciproken Radien vor uns haben. Und zwar sind sie die einfachsten (absoluten) Invarianten dieser Gruppe, da weniger als vier Punkte (absolute) Invarianten überhaupt noch nicht haben. Unsere Invarianten haben nun eine elementargeometrische Bedeutung: Es bestehen Gleichungen der Form

$$
\begin{aligned}
(AB)(CD) &= \lambda \cdot \overline{AB}^2 \cdot \overline{CD}^2\,, \\
(AC)(DB) &= \lambda \cdot \overline{AC}^2 \cdot \overline{DB}^2\,, \\
(AD)(BC) &= \lambda \cdot \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC}^2\,,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

wo λ einen Proportionalitätsfactor bedeutet, und $\overline{AB}$ die Euclidische Entfernung der Punkte A und B vorstellt. Wir wollen die nach Anweisung der Formel (2) aus den Grössen rechts in Nr. (12) zu bildenden Quotienten D_i, D_i' »*Abstandsdoppelverhältnisse*« der vier Punkte nennen. Die Formel (12) sagt dann aus:

Die Doppelverhältnisse von vier Punkten auf einer Kugel sind gleich den entsprechenden Abstandsdoppelverhältnissen derselben Punkte.

Bezeichnen wir mit ∇ die Grösse, die aus dem Ausdruck von Δ (Nr. 9) dadurch hervorgeht, dass man an Stelle der Polaren (AB) die Entfernungsquadrate $\overline{AB}^2$ substituirt, und nennen wir R den Radius unserer Kugel, und $[ABCD]$ den sechsfachen Rauminhalt des Tetraeders $ABCD$, unter gehöriger Berücksichtigung des Vorzeichens, so ist bekanntlich

$$16R^2 \cdot [ABCD]^2 = -\nabla\,.$$

Es ist danach, bei beliebiger Lage der Punkte A, B, C, D, das Quadrat des Radius R, nicht aber dieser selbst eine rational bekannte Grösse. Wir unterscheiden die Kugel vom Radius R von der Kugel vom Radius $-R$, und erklären für alle Fälle die Vorzeichen von $\sqrt{\nabla}$ und $\sqrt{-\nabla}$ durch die Formel

$$\sqrt{\nabla} = \sqrt{-\nabla} \cdot i = 4[ABCD] \cdot R \cdot i\,; \tag{13}$$

---

1) Vgl. hier und im Folgenden Klein's Erlanger Programm, insbes. § 6 und § 7.

so dass bei festgehaltenen Punkten A, B, C, D dem Vorzeichenwechsel von $\sqrt{\nabla}$ oder $\sqrt{-\nabla}$ ein solcher von R entspricht. Wir wollen ferner, um den Realitätsverhältnissen der weiterhin zu entwickelnden Formeln Rechnung zu tragen, noch gleich eine Anzahl weiterer Wurzelzeichen einführen durch die Formel

$$(13^b) \quad \begin{aligned} \sqrt{\varDelta} &= 4\sqrt{S_0}\sqrt{S_1}\sqrt{S_2}\sqrt{S_3} = 4\sqrt{-S_0 S_1 S_2 S_3} \cdot i \\ &= \sqrt{-\varDelta} \cdot i = (ABCD) \cdot \sqrt{-J} \cdot i\,. \end{aligned}$$

Die Formel (7) nimmt nunmehr eine Gestalt an, in der alle vorkommenden Grössen einfache geometrische Bedeutungen haben:

$$(7^b) \quad \begin{matrix} d_1 \\ \delta_1 \end{matrix} \Bigg\} \begin{aligned} &= \frac{-\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD}^2 + \overline{AC}^2 \cdot \overline{DB}^2 + \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC}^2 \pm 4R \cdot [ABCD]i}{2\overline{AD}^2 \cdot \overline{BC}^2} \\ &= \frac{2\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD}^2}{-\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD}^2 + \overline{AC}^2 \cdot \overline{DB}^2 + \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC}^2 \mp 4R \cdot [ABCD]i}. \end{aligned}$$

Die wichtigsten Eigenschaften der Abstandsdoppelverhältnisse von vier Punkten im Raume erhalten wir durch Uebertragung aus den Sätzen des § 1; sie lassen sich aber auch leicht direct ermitteln:

Die Abstandsdoppelverhältnisse von vier Punkten des Raumes sind invariant bei Transformationen durch reciproke Radien.

Die invarianten Eigenschaften von vier Punkten A, B, C, D, gegenüber der conformen Gruppe, sind vollständig charakterisirt durch die Werthe ihrer Abstandsdoppelverhältnisse, so lange diese endlich sind, d. h. so lange keine zwei der vier Punkte auf einer sogenannten Nullgeraden (Minimalgeraden) liegen, und so lange nicht

$$\sqrt{\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD}^2} \pm \sqrt{\overline{AC}^2 \cdot \overline{DB}^2} \pm \sqrt{\overline{AD}^2 \cdot \overline{BC}^2} = 0$$

oder $\nabla = 0$ ist. Im letzten Falle liegen die Punkte entweder auf einer einzigen Punktkugel ($R = 0$, $[ABCD] \neq 0$) oder sie liegen auf einem Kreise (Ptolemäischer Lehrsatz, $[ABCD] = 0$); und man muss wissen, ob das Eine oder das Andere eintritt, um über die Aequivalenz zweier Punktfiguren entscheiden zu können.

In beiden Fällen reduciren sich, nach dem in § 1 Gesagten, die Abstandsdoppelverhältnisse auf die Quadrate gewöhnlicher Doppelverhältnisse.

Der obige Satz vereinfacht sich wesentlich, wenn man sich auf *reelle* Punkte und *reelle* Transformationen beschränkt, indem dann die Unterscheidung zweier Fälle in Wegfall kommt; die Gleichheit der Abstandsdoppelverhältnisse ist dann die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Aequivalenz der beiden Punktfiguren. In diesem Umfange ist der Satz schon von MÖBIUS aufgestellt worden, der in seinen Untersuchungen über die von ihm entdeckte Gruppe der Kreisverwandtschaften (die conforme Gruppe) das Abstandsdoppelverhältniss reeller Punkte, oder vielmehr die Quadratwurzel daraus, eingehend untersucht hat[1]. MÖBIUS war zur Bildung dieses Begriffs gelangt, indem er in dem Ausdruck des complexen Doppelverhältnisses von vier Punkten der GAUSS'schen Zahlenebene jeden Factor durch seinen absoluten Betrag, also durch den positiv genommenen Abstand der betreffenden Punkte ersetzte, und die Invarianz des Ausdrucks auch bei räumlichen Inversionen feststellte.

Nach Möbius kann man die Abstandsdoppelverhältnisse von vier Punkten auf mehrere Arten ausdrücken durch die Winkel gewisser Kreise, die auf der durch die Punkte gelegten Kugel gezogen sind.

Da die hierauf bezüglichen Sätze von MÖBIUS einiger Ergänzungen fähig sind, so wird es nicht überflüssig sein, sie hier im Zusammenhange darzustellen. Wir knüpfen dabei, um zu zweckmässigen Bestimmungen zu gelangen, am besten ebenfalls an die Figur von vier *reellen* Punkten an.

Wir setzen zunächt für die sämmtlichen Winkel auf einer Kugel einen gemeinsamen positiven Drehungssinn fest, und zwar für Kugeln von positivem Radius den einen, für Kugeln von negativem Radius den anderen. Die Zuordnung zwischen dem Vorzeichen des Radius und der Orientirung der Kugel soll aber nicht beliebig sein, sondern abhängig von der für die Tetraederinhalte gewählten Vorzeichenbestimmung: *Ist einer Kugel von positivem [negativem] Radius ein Tetraeder von positivem Inhalt* $\frac{1}{6}[ABCD]$ *eingeschrieben, so soll sich der positive [negative] Drehungssinn auf der Kugel aus dem durch die Folge B, C, D bestimmten Drehungssinn des Kreises* $(A) = (B, C, D)$ *dadurch ergeben, dass man diesen Kreis, ohne den Punkt A zu überschreiten, zu einem*

[1] Abhandlungen aus den Jahren 1852—1858, MÖBIUS' Ges. Werke. Bd. II, S. 190 u. ff. Vgl. auch DARBOUX, Éc. normale 1872 p. 323.

Punkt zusammenzieht. Wir setzen dann noch für die mit (A), (B), (C), (D) zu bezeichnenden Kreise positive Umlaufsrichtungen fest, und zwar derart, dass durch die Punktfolgen BCD — CDA — DAB — ABC der Reihe nach der positive — negative — positive — negative Sinn angegeben wird. *Unter dem Winkel CAB z. B. wird dann der mod. 2π bestimmte Winkel zu verstehen sein, um den man die positive Richtung des Kreises (C) im Punkte A drehen muss, um sie mit der positiven Richtung des Kreises (B) zur Deckung zu bringen.* Schliesslich wollen wir vorläufig die Bestimmung treffen, dass den Quadratwurzeln aus den als positiv vorausgesetzten Producten $(AB)(CD)$, und ebenso den Entfernungsproducten $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$ der positive Werth beigelegt werden soll, und dass das Vorzeichen von $\sqrt{-J}$ dem von R entsprechen soll (Nr. 13 und 13^b).

Nach diesen etwas umständlichen, aber unerlässlichen Vorbereitungen können wir behaupten:

Die vier Kreise, die je drei von vier Punkten einer Kugel verbinden, bilden mit einander nur drei verschiedene mod. 2π bestimmte Winkel:

$$\begin{aligned}\varphi &= DAC = CBD = BCA = ADB\,,\\ \psi &= BAD = ABC = DCB = CDA\,,\\ \chi &= CAB = DBA = ACD = BDC\,,\end{aligned}\tag{14}$$

deren Summe überdies $\equiv 0$ mod. 2π ist. Die einfachsten goniometrischen Functionen dieser Winkel haben die Werthe:

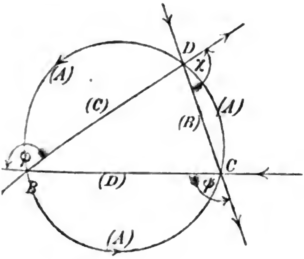
$$\cos\varphi = \begin{cases} = -\dfrac{-\overline{AB}^2\cdot\overline{CD}^2+\overline{AC}^2\cdot\overline{DB}^2+\overline{AD}^2\cdot\overline{BC}^2}{2\,\overline{AC}\cdot\overline{DB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BC}}\\[2ex] = -\dfrac{-(AB)(CD)+(AC)(DB)+(AD)(BC)}{2\sqrt{(AC)(DB)}\sqrt{(AD)(BC)}}\\[2ex] = \dfrac{S_2S_3+S_0S_1}{S_2S_3-S_0S_1} = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{d_1+\delta_1}{\sqrt{-d_1}\sqrt{-\delta_1}}\,,\end{cases}$$

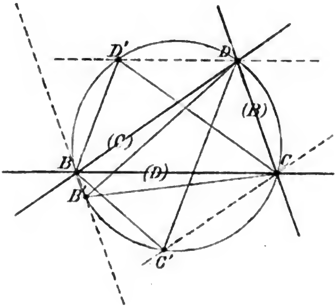
$$\sin\varphi = \begin{cases} = \dfrac{4[ABCD]\cdot R}{2\,\overline{AC}\cdot\overline{DB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BC}}\\[2ex] = \dfrac{(ABCD)\sqrt{-J}}{2\sqrt{(AB)(CD)}\sqrt{(AC)(DB)}\sqrt{(AD)(BC)}}\cdot\sqrt{(AB)(CD)}\\[2ex] = \dfrac{2\sqrt{-S_0S_1S_2S_3}}{S_2S_3-S_0S_1} = \dfrac{1}{2i}\,\dfrac{d_1-\delta_1}{\sqrt{-d_1}\sqrt{-\delta_1}}\,,\end{cases}\tag{15}$$

$$(15) \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{-S_0 S_1 S_2 S_3}}{S_2 S_3} = -\frac{S_0 S_1}{\sqrt{-S_0 S_1 S_2 S_3}},$$

u. s. w., mit cyklischer Vertauschung von B, C, D; φ, ψ, χ; d_1, d_2, d_3; δ_1, δ_2, δ_3.

Zum Beweise mögen wir etwa annehmen, dass *die* Tetraeder einen positiven Inhalt haben, bei denen die Punkte B, C, D von A aus gesehen im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers auf einander folgen. Halten wir dann bei einem solchen Tetraeder etwa die Punkte B, C, D fest, und lassen wir den Punkt A ins Unendliche rücken, so entsteht, falls auch der Radius der umschriebenen Kugel als positiv angenommen wurde, die folgende Figur links, und es ergeben sich die behaupteten Beziehungen zwischen obigen zwölf Winkeln, sammt den Ausdrücken für $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$.





Aus den gefundenen Formeln sind dann die Werthe von $\sin^2\varphi$ u. s. w. zu entnehmen. Um auch das Vorzeichen von $\sin\varphi$ zu bestimmen, mögen wir den genannten Grenzübergang etwa in der Weise ausführen, dass wir den Punkt A erst in einen endlich entfernten Punkt der Ebene BCD übergehen lassen. Dann muss, wenn A ausserhalb des dem Dreieck BCD umschriebenen Kreises zu liegen kommt,

$$(16^a) \qquad \lim 2[ABCD]\,R = \frac{1}{2}\sqrt{-\nabla} \qquad (\text{Nr. } 13)$$

positiv bleiben[1]); und es ergiebt sich der völlig bestimmte Werth

$$(16^b) \qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{-\nabla} =$$
$$= \overline{OA}^2 \cdot [BCD] - \overline{OB}^2 \cdot [CDA] + \overline{OC}^2 \cdot [DAB] - \overline{OD}^2 \cdot [ABC],$$

worin O einen ganz willkürlichen Punkt, und z. B. $[BCD]$ die doppelte Fläche des Dreiecks BCD bedeutet, die natürlich entsprechend unserer Annahme über den positiven Sinn der Winkel, einen *positiven* Werth hat. Lassen wir dann A in's Unendliche rücken, so folgt weiter

$$(17) \quad \lim \frac{\sqrt{-\nabla}}{2\overline{AC}\cdot\overline{DB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BC}} = \frac{[BCD]}{\overline{DB}\cdot\overline{BC}} = \sin(\overline{DB}, \overline{BC}).$$

Ein Blick auf die Figur zeigt nunmehr, dass auch das Vorzeichen von $\sin\varphi$ richtig angegeben ist.

Unsere Ableitung liefert zugleich den Möbius'schen Satz:

Die Winkel φ, ψ, χ sind die (Aussen-) Winkel des ebenen Dreiecks, dessen Seiten die Producte

$$AB \cdot CD, \quad AC \cdot DB, \quad AD \cdot BC$$

sind. Man kann nämlich durch eine (stets reelle) Transformation der conformen Gruppe die Punkte B, C, D in die entsprechenden Ecken dieses Dreiecks, und gleichzeitig den Punkt A in den unendlich fernen Punkt überführen.

Diese Betrachtung bezieht sich zunächst nur auf Tetraeder von positivem Inhalt, die Kugeln mit positivem Radius eingeschrieben sind, und ihre Grenzfälle. Nachdem aber auf diese Weise erst einmal die Verträglichkeit unserer Gleichungen nachgewiesen ist, können wir den Gedankengang umkehren, und nunmehr die Gleichungen (15), sogleich für complexe Argumente, als *Definition* der Winkel φ, ψ, χ der vier Kreise hinstellen. Die Formeln erlangen dann unbeschränkte Gültigkeit; nur muss man bei der analytischen Fortsetzung natürlich die gegenseitige Abhängigkeit der verschiedenen Irrationalitäten im Auge behalten.

---

1) Wenn man den Punkt A in das *Innere* des genannten Kreises rücken lässt, so kommt man zu dem entgegengesetzten Drehungssinn der Winkel in der Ebene BCD. Um den erst angenommenen Sinn — den Drehungssinn der Figur — wieder herzustellen, muss man dann das Vorzeichen von $\sqrt{-\nabla}$ umkehren, dieser Grösse also einen *negativen* Werth beilegen. Gleichzeitig wird dann auch die rechte Seite von (16^b) negativ.

Der bewiesene Satz lässt sich noch in eine zweite sehr bemerkenswerthe Form bringen.

Man denke sich die Punkte A, B, C, D wieder in eine *Ebene* verlegt, und durch gerade Linien verbunden. *Dann ist, nach Möbius, auch der sogenannte Doppelwinkel, die Winkeldifferenz*

$$(BC,\ BD) - (AC,\ AD),$$

eine Invariante der Gruppe der Kreisverwandtschaften.

Dieser Satz lässt sich offenbar auch so ausdrücken:

Wenn man vier Punkte A, B, C, D einer Ebene oder Kugel zu je zweien mit einem ganz willkürlichen Punkt X der Ebene oder Kugel durch Kreise verbindet, und z. B. dem Kreise ABX den durch die Folge A, B, X bestimmten positiven Drehungssinn beilegt, so hat die Differenz der in den Punkten B und A gemessenen Winkel dieser Kreise

$$(BCX,\ BDX)_B - (ACX,\ ADX)_A$$

einen von der Lage des Punktes X unabhängigen Werth.

Lässt man nun den Punkt X mit dem Punkte A zusammenfallen, so zeigt sich, dass dieser Werth nichts Anderes ist als unser $\pi - \varphi$. *Es ergeben sich also die folgenden weiteren Ausdrücke der Winkel φ, ψ, χ:*

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\pi - \varphi = \\ &= (BCX,\ BDX)_B - (ACX,\ ADX)_A \\ &= (DAX,\ DBX)_D - (CAX,\ CBX)_C, \\ &\pi - \psi = \\ &= (CDX,\ CBX)_C - (ADX,\ ABX)_A \\ &= (BAX,\ BCX)_B - (DAX,\ DCX)_D, \\ &\pi - \chi = \\ &= (DBX,\ DCX)_D - (ABX,\ ACX)_A \\ &= (CAX,\ CDX)_C - (BAX,\ BDX)_B. \end{aligned}$$

Natürlich kann man auch alle Winkel in dem Punkte X messen. Man hat dann nur zu berücksichtigen, dass z. B.

$$(BCX,\ BDX)_B + (BCX,\ BDX)_X \equiv 0 \quad \text{mod. } 2\pi.$$

[Im Anschluss an die letzten Bestimmungen kann man eine Festsetzung über die Vorzeichen der Sehnen $\overline{AB}$ u. s. w. machen, die von unseren bisherigen verschieden ist, und die wir hier erwähnen wollen, weil auch sie sich unter Umständen als zweckmässig erweist: Man kann nämlich $\overline{AB}$ als positiv erklären, wenn es dem Kreise ABX, und als negativ, wenn es dem Kreise BAX angehört. Die Formeln (15) sind dann, mit Bezug auf die in (18) enthaltene Definition der Winkel φ, ψ, χ, folgendermassen abzuändern

$$
(15^*)\quad
\begin{aligned}
&\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot BC\cdot\overline{BD}\cdot\cos\varphi =\\
&= \tfrac{1}{2}\{\overline{AB}^2\cdot\overline{CD}^2-\overline{AC}^2\cdot\overline{DB}^2-\overline{AD}^2\cdot\overline{BC}^2\},\\
&\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\sin\varphi =\\
&= 2[ABCD]\cdot R = \tfrac{1}{2}\sqrt{-\nabla}\quad \text{(vgl. Nr. 16}^{\text{b}}\text{)}.
\end{aligned}
$$

Diese Formel unterscheidet sich also von der Formel (15) durch die abweichende Bedeutung des Zeichens $\overline{BD}$.]

Der obige Satz drückt die Verhältnisse der Grössen $\sqrt{(AB)(CD)}$ u. s. w., oder die Quadratwurzeln $\sqrt{D_1}=\sqrt{-d_1}\sqrt{-\delta_1}$ aus den Abstandsdoppelverhältnissen der vier Punkte aus durch die Sinus der Winkel φ, ψ, χ, und macht damit ihre Invarianz gegenüber der conformen Gruppe augenscheinlich. Diese Ausdrücke werden zwar unbrauchbar, wenn die vier Punkte auf einem Kreise liegen: Für diesen Fall haben wir aber das Abstandsdoppelverhältniss schon als Quadrat eines gewöhnlichen Doppelverhältnisses erkannt.

Wir wollen nun zeigen, wie sich das Abstandsdoppelverhältniss auch im allgemeinen Falle auf gewöhnliche Doppelverhältnisse zurückführen lässt.

Einen ersten Ausdruck dieser Art haben wir schon in § 1 kennen gelernt: Die dort angestellte Betrachtung lässt sich natürlich unmittelbar auf unseren jetzigen Fall anwenden. Man hat nur, um sie in gehöriger Allgemeinheit zu fassen, an Stelle der geraden Linien und Ebenen Kreise und Kugeln zu setzen, die durch einen willkürlichen Punkt des Raumes hindurchlaufen. Man kann aber auch eine Construction angeben, bei der man die den Punkten $ABCD$ umschriebene Kugel überhaupt nicht verlässt:

Man suche den zweiten Schnittpunkt B' des Kreises, der den Kreis (B) (den Kreis C, D, A) im Punkte A berührt und den Punkt B enthält, mit dem Kreise (A) (dem Kreise durch B, C, D), und construire analog die Punkte C', D'. (S. die Fig. rechts, S. 210.)

Dann sind die Abstandsdoppelverhältnisse D_1, D_2, D_3 gleich gewöhnlichen Doppelverhältnissen im binären Gebiete des Kreises (A):

$$(19)\quad D_1 = \frac{\{CD\}\{C'B\}}{\{CB\}\{C'D\}}, \quad D_2 = \frac{\{DB\}\{D'C\}}{\{DC\}\{D'B\}}, \quad D_3 = \frac{\{BC\}\{B'D\}}{\{BD\}\{B'C\}}.$$

In diesen Formeln können die binären Invarianten $\{CD\}$ u. s. w. auch durch die Euclidischen Abstände $\overline{CD}$ u. s. w. ersetzt werden, sofern man die Vorzeichen in geeigneter Weise bestimmt. (Vgl. Möbius, Werke, II, S. 307.) Natürlich lässt sich die angegebene Construction auch auf den Fall von vier Punkten auf einer beliebigen Fläche 2. O. übertragen.

Wir wollen schliesslich noch eine besondere Folgerung aus unseren Sätzen erwähnen. Man kann nämlich nicht nur aus den Producten $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$, $\overline{AC}\cdot\overline{DB}$, $\overline{AD}\cdot\overline{BC}$ ein Dreieck construiren, sondern in Folge dessen auch aus ihren Quadratwurzeln. *Man kann daher vier reelle Punkte des Raumes immer durch reelle conforme Transformationen in die Ecken eines Tetraeders von besonderer Gestalt überführen. Diese Gestalt ist dadurch gekennzeichnet, dass die gegenüberliegenden Kanten gleich lang, die Seitenflächen also unter einander congruent sind.* Bei einem solchen Tetraeder bilden bekanntlich die Verbindungslinien der Mitten gegenüberliegender Kanten mit diesen Kanten und unter einander rechte Winkel. Sie sind die Axen dreier Umwendungen, die das Tetraeder mit sich selbst zur Deckung bringen; und diese Umwendungen erzeugen, mit der Spiegelung an der umschriebenen Kugel verbunden, die Gruppe von acht conformen Transformationen, die das Tetraeder im Allgemeinen gestattet.

3.

Das Doppelverhältniss von vier geraden Linien im Raume.

Wir denken uns jetzt mit Grassmann auf vier geraden Linien im Raume Strecken von beliebiger Richtung und Länge $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ abgetragen, und bezeichnen mit $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ u. s. w. die sogenannten äusseren Producte der auf solche Art definirten Linientheile oder Stäbe, nämlich die sechsfachen Rauminhalte der Tetraeder, die jene Strecken zu gegenüberliegenden Kanten haben, unter gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen. Die nach Analogie der Formeln (2) aus den Producten $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\,[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ u. s. w.

gebildeten Quotienten D_i, D_i' sind nun, nach Grassmann, nicht nur unabhängig von der Länge und Richtung der angenommenen Strecken, sondern auch invariant gegenüber collinearen (und dualistischen) Transformationen. Sie sind zugleich die einfachsten liniengeometrischen (absoluten) Invarianten, die es giebt, wenn man nicht den linearen Complex — wie es allerdings in der Regel zweckmässig ist — sondern, mit Plücker, die gerade Linie selbst als Raumelement ansieht. Wir wollen jene Grössen die *Grassmann'schen Doppelverhältnisse* der vier Linien nennen.

Diese Doppelverhältnisse nun hängen mit den in § 1 und § 2 geschilderten auf eine sehr einfache Weise zusammen, auf Grund der bekannten Beziehung der Liniengeometrie zur Theorie einer quadratischen Form von sechs Veränderlichen. Wir können daher einen Theil unserer Betrachtungen auf die Liniengeometrie übertragen; z. B.:

Jedes der Grassmann'schen Doppelverhältnisse kann, auf zwei Weisen, aufgefasst werden als ein gewöhnliches Doppelverhältniss von vier linearen Complexen eines Büschels. Man construire in dem durch die Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ [$\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$] bestimmten Complexbüschel die beiden Complexe $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$, [$\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$], denen die Geraden $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ [$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$] als Leitstrahlen angehören. Dann ist

$$(3^b) \qquad D_1 = \frac{\{\mathfrak{A}\mathfrak{C}'\}\{\mathfrak{B}\mathfrak{D}'\}}{\{\mathfrak{A}\mathfrak{D}'\}\{\mathfrak{B}\mathfrak{C}'\}} = \frac{\{\mathfrak{A}''\mathfrak{C}\}\{\mathfrak{B}''\mathfrak{D}\}}{\{\mathfrak{A}''\mathfrak{D}\}\{\mathfrak{B}''\mathfrak{C}\}}\,.$$

Die binären Doppelverhältnisse sind hier die der Nullpunkte irgend einer Ebene Π (oder auch der Nullebenen eines Punktes) in Bezug auf die Nullsysteme, die mit den linearen Complexen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ oder $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ verbunden sind. Sie ergeben sich durch eine bekannte lineare Construction: Sind A, B, $\bar{C}$, $\bar{D}$ die Schnittpunkte von Π mit den Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, so ziehe man von $\bar{C}$ und $\bar{D}$ Secanten an $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und verbinde diese durch Ebenen mit $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$. Die Schnittpunkte C' und D' dieser Ebenen mit der Geraden $\widehat{AB}$ sind die gesuchten Punkte. In ähnlicher Weise kann man auch den Satz auf S. 213 übertragen: an Stelle der Kreise treten Regelflächen 2. Ordnung.

An Stelle der Formeln (4) treten jetzt analog gebaute Formeln,

$$(4^b) \qquad [\mathfrak{A}\mathfrak{B}][\mathfrak{C}\mathfrak{D}] = \varrho\cdot(ab)(cd)\cdot(\alpha\beta)(\gamma\delta)\,,$$

wo nun a, b, c, d und α, β, γ, δ entweder die Schnittpunkte oder die Verbindungsebenen der vier Geraden mit ihren gemeinsamen Secanten vorstellen. Die weiteren Entwickelungen sind so analog den früheren, dass sie nicht wiederholt zu werden brauchen[1]).

Es ergiebt sich aus den angeführten Sätzen:

Die Lage von vier Geraden im Raume ist, projectiven Transformationen gegenüber, vollständig charakterisirt durch die Werthe der Grassmann'schen Doppelverhältnisse, so lange diese alle endlich sind, d. h. so lange keine zwei der Geraden sich schneiden, und so lange keine Relation der Form

$$\sqrt{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}][\mathfrak{C}\mathfrak{D}]} + \sqrt{[\mathfrak{A}\mathfrak{C}][\mathfrak{D}\mathfrak{B}]} + \sqrt{[\mathfrak{A}\mathfrak{D}][\mathfrak{C}\mathfrak{B}]} = 0$$

besteht. Im letzten Fall hat man zu unterscheiden zwischen solchen Figuren von vier Geraden, die nur eine gemeinsame Secante haben, und solchen, die von allen Geraden einer Regelschaar getroffen werden.

Besonderes Interesse hat der Fall, wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ reell sind und conjugirte imaginäre Secanten haben. Die Invariante Δ ist dann wesentlich negativ, und die Producte $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\,[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ u. s. w. haben alle dasselbe, also etwa das positive Vorzeichen.

4.

Das complexe Doppelverhältniss der Functionentheorie.

Betrachten wir wieder eine reelle Kugel von positivem Radius, mit vier reellen Punkten A, B, C, D. Wir können dann nach einem vielfach benutzten Satze, der sich ohne Weiteres aus der Gauss'schen Darstellung der complexen Veränderlichen ergiebt (vgl. F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, S. 181) den Erzeugenden der Kugel, die sich in einem rellen Punkte treffen, conjugirt-imaginäre Parameter ertheilen, und damit die bekannte Abbildung der complexen Grössen auf die Punkte einer Kugel herstellen. Die Grössen d_1, δ_1 sind jetzt von vornherein conjugirt-imaginär, und es leuchtet ein, dass die eine von ihnen identisch ist mit dem gewöhnlichen complexen Doppelverhältniss der Punkte A, B, C, D. Welche dies ist, zeigt ein Blick auf die Figur S. 210, wo bei der angenommenen Lage des

1) Vgl. Grassmann's Werke, I, 1. Theil, S. 410.

Dreiecks BCD und dem als positiv vorausgesetzten Drehungssinn der imaginäre Bestandtheil des complexen Doppelverhältnisses positiv sein muss: es ist das Doppelverhältniss d_1.

Wir haben also durch unsere Untersuchung auch das gewöhnliche complexe Doppelverhältniss von vier Punkten der Zahlenkugel oder der Gauss'schen Ebene auf mehrere Arten durch reelle Grössen ausgedrückt, die unabhängig sind von jedem Coordinatensystem und leicht ermittelt werden können: durch lineare Construction im Raume (Nr. 3), oder durch Abgreifen auf der Kugel mittels des Zirkels (Nr. 7[b]), oder durch verschiedene Constructionen auf der Kugel selbst (Nr. 14, 15, 18, 19). Hervorzuheben sind die aus (15) fliessenden, von Wedekind angegebenen Ausdrücke

$$d_1 = -\frac{\sin\psi}{\sin\chi}\cdot e^{-i\sin\varphi}, \tag{20}$$

$$d_2 = -\frac{\sin\chi}{\sin\varphi}\cdot e^{-i\sin\psi},\quad d_3 = -\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\cdot e^{-i\sin\chi},$$

die unabhängig sind von jeder Festsetzung über die positiven Umlaufsrichtungen der Kreise (A), (B), (C), (D).[1]) —

Neben die Darstellung der complexen Grössen durch die Punkte einer Kugel stellt sich, in unserem Zusammenhange ganz ebenso ungezwungen, eine andere, bei der die complexen Grössen durch die Strahlen einer Congruenz 1. O. 1. Cl. der zu Schluss von § 3 erwähnten Art vertreten werden: *Man ordne die Werthe* ∞, 0, 1 *irgend drei reellen Strahlen* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *einer Congruenz mit conjugirt-imaginären Leitlinien zu; die zu irgend einem vierten reellen Strahl* $\mathfrak{D}$ *gehörige complexe Zahl* z *ist dann gegeben durch den Werth des Doppelverhältnisses* d_1 (Nr. 4[b], 6, 7, 13[b]). Die durch die complexen Grössen vermittelte Abbildung unserer Congruenz auf eine Kugel oder allgemeiner auf eine nicht-geradlinige Fläche 2. O. ist dieselbe, die man erhält, wenn man die zu den Leitstrahlen der Congruenz conjugirten linearen Liniencomplexe als Raumelemente einführt: Die speciellen Complexe, die Linien unserer Congruenz, werden aus dieser Mannigfaltigkeit durch eine quadratische Gleichung von negativer Discriminante abgeschieden.

1) Math. Annalen Bd. 9, S. 211 und Bd. 17, S. 9.

Das Charakteristische bei der Abbildung der Congruenz auf die Kugel besteht offenbar darin, dass den Linienflächen 2. Grades in der Congruenz die Kreise auf der Kugel entsprechen. Man kann daher die Abbildung auch so erhalten: Man projicire die Kugel stereographisch auf eine Ebene, und ordne dann jedem Punkte z der Ebene den ihn enthaltenden Strahl $\mathfrak{D}$ einer Congruenz 1. O. 1. Cl. zu, deren conjugirt-imaginäre Seitenstrahlen aus der Ebene die sogenannten unendlich fernen Kreispunkte ausschneiden; oder auch, man verbinde die entsprechenden Punkte z, z' von zwei eigentlich-ähnlichen, in parallelen Ebenen enthaltenen, aber nicht ähnlich liegenden Punktfeldern durch Gerade $\mathfrak{D}$; dann ist die Zuordnung $(z, \mathfrak{D})$ identisch mit der vorhin besprochenen.

Aus den letzten Bemerkungen geht hervor, dass unsere liniengeometrische Darstellung der complexen Zahlen vollkommen übereinstimmt mit der von S. Lie (in Crelle's Journal, Bd. 70) angegebenen. Nur fehlt bei Lie die liniengeometrische Deutung des reellen und des imaginären Bestandtheils der zu einem Congruenzstrahl $\mathfrak{D}$ gehörigen complexen Zahl.

Es ist leicht zu sehen, wie man auch die Betrachtungen des gegenwärtigen Paragraphen, ohne wesentliche Aenderung ihrer Form, so verallgemeinern kann, dass die Beschränkung auf reelle Linien und Punkte wegfällt: an Stelle der beiden Haupteinheiten 1, i der gewöhnlichen complexen Zahlen treten zwei andere ε_0, ε_1 mit denselben Multiplicationsregeln. Die Coefficienten von diesen können dann wieder gewöhnliche complexe Zahlen sein.

5.

Das Doppelverhältniss von vier Kugeln.

Wir wollen nunmehr die Sätze über das Grassmann'sche Doppelverhältniss von vier Linien auf die Lie'sche Kugelgeometrie übertragen. Dabei müssen wir im Auge behalten, dass in dieser Disciplin eine Kugel erst dann völlig bestimmt ist, wenn ihr Radius (nicht nur dessen Quadrat) bekannt ist, und dass das Uebereinanderliegen zweier Kugeln von entgegengesetzten Radien oder entgegengesetzter Orientirung (vgl. S. 208) im Raume den Lie'schen Kugeltransformationen gegenüber keine invariante Eigenschaft darstellt. Die Lie'schen Kugeltransformationen selbst bilden eine 15-gliedrige aus zwei getrennten continuirlichen Schaaren bestehende Gruppe von eindeutigen Transformationen der orientirten Kugeln oder der orientirten Flächenelemente.

Es ist nun bemerkenswerth, dass die Grösse, die in der Kugelgeometrie dem Doppelverhältniss von vier geraden Linien der projectiven Geometrie entspricht, auch wieder eine elementargeometrische Bedeutung hat. Zwei Kugeln A und B, mit den Radien r_a und r_b, haben nämlich eine gemeinsame Tangente von einer bis aufs Vorzeichen bestimmten Länge, die wir einfach durch $\overline{AB}$ bezeichnen wollen, und die durch die Formel

$$(21) \qquad \overline{AB}^2 = d_{ab}^2 - (r_a - r_b)^2 = 4\, r_a r_b \cdot \sin^2 \frac{(A, B)}{2}$$

definirt ist, worin d_{ab} den Abstand der Mittelpunkte und (A, B) den »Winkel« der Kugeln bedeutet. Wir nennen nun »*Doppelverhältnisse*« von vier Kugeln A, B, C, D die nach Analogie von Formel (2) zu bildenden Quotienten D_i, D_i' der Producte

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD}^2, \quad \overline{AC}^2 \cdot \overline{DB}^2, \quad \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC}^2.$$

Dann gilt der Satz:

Dem Doppelverhältniss von vier geraden Linien in der projectiven Geometrie entspricht in der Kugelgeometrie das Doppelverhältniss von vier Kugeln.

Diese Grösse, die das früher betrachtete Abstandsdoppelverhältniss von vier Punkten im Raume als besonderen Fall umfasst, ist also invariant gegenüber den Lie'schen Kugeltransformationen.

Die letztere Thatsache kann übrigens auch aus der Formel (21) selbst abgeleitet werden, da diese die Invarianz des Doppelverhältnisses von vier Kugeln bei Dilatationen und conformen Transformationen augenscheinlich macht.

Die Zurückführung des Doppelverhältnisses von vier Kugeln auf gewöhnliche Doppelverhältnisse kann auf verschiedene Arten geleistet werden. Wir heben den folgenden Satz hervor, der die Productzerlegung $D_i = d_i \cdot \delta_i$ enthält:

Vier Kugeln bestimmen auf jeder der beiden gemeinsamen Berührungskugeln, die ihnen in der Lie'schen Kugelgeometrie zukommen, solche vier Punkte, deren Abstandsdoppelverhältnisse gleich sind den entsprechenden Doppelverhältnissen der Kugeln selbst.

Es besteht also auch der ganz einfache und rein elementargeometrische Satz, dass die Doppelverhältnisse von vier Kugeln, die eine gegebene Kugel berühren, nur abhängig sind von der Lage der Berührungspunkte, nicht aber von der Grösse der Radien jener Kugeln. — Wenn die vier Kugeln A, B, C, D reell sind, so fallen die beiden Berührungskugeln reell aus oder conjugirt-imaginär, je nachdem der $\varDelta$ entsprechende, etwa mit Δ zu bezeichnende Ausdruck negativ oder positiv ist. Das Vorzeichen von Δ zeigt also hier das umgekehrte Verhalten wie bei der Liniengeometrie.

Zur Darstellung der complexen Grössen kann nun, nach Analogie von § 4, die Congruenz aller Kugeln benutzt werden, die dieselben beiden *reellen* Kugeln berühren, insbesondere auch das doppelt überdeckte Ebenenbündel. Im allgemeinen Falle entsprechen den Kreisen der Riemann'schen Zahlenkugel natürlich Dupin'sche Cycliden. Man wird die Beziehung am einfachsten dadurch herstellen, dass man die eine der beiden festen Kugeln mit der Zahlenkugel selbst identificirt. Jedem Punkte z entspricht dann die Kugel der Congruenz, die in z berührt.

Die gegenseitige Lage von vier Kugeln ist, gegenüber den Lie-schen Kugeltransformationen, vollständig charakterisirt durch die Werthe der zugehörigen Doppelverhältnisse, so lange diese endlich sind, d. h. so lange keine zwei der Kugeln sich berühren, und so lange keine Relation der Form

$$\sqrt{\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD}^2} + \sqrt{\overline{AC}^2 \cdot \overline{DB}^2} + \sqrt{\overline{AD}^2 \cdot \overline{BC}^2} = 0$$

besteht. Im letzten Falle hat man zu unterscheiden zwischen solchen Figuren von vier Kugeln, die nur von einer einzigen Kugel in Punkten eines Kreises berührt werden, und solchen, die einer Schaar von Krümmungskugeln einer Dupin'schen Cyclide angehören.

Wenn vier Kugeln eine fünfte in Punkten eines Kreises berühren, so kann man, etwa durch reciproke Radien, diesen Kreis in einen grössten Kreis transformiren, und dann die vier Kugeln durch ihre Schnittlinien mit der Ebene dieses Kreises ersetzen. So ergiebt sich, als besonderer Fall unseres Theorems, der Satz von Casey:

Die Bedingung dafür, dass vier Kreise einer Ebene von einem fünften berührt werden, ist

$$\sqrt{\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD}^2} + \sqrt{\overline{AC}^2 \cdot \overline{DB}^2} + \sqrt{\overline{AD}^2 \cdot \overline{BC}^2} = 0 .$$

Vgl. SALMON-FIEDLER, Geometrie der Kegelschnitte, Cap. IX, Nr. 152 u. ff. (S. 199 der 4. Auflage), wo der Satz auf die Apollonische Berührungsaufgabe angewendet wird.

Diese Betrachtungen liessen sich noch weiter fortsetzen. Wir hätten z. B. unsere geometrischen Deutungen auch im Nicht-Euclidischen Raume ausführen, sowie, nach dem Vorgange von MÖBIUS, Systeme von mehr als vier Elementargebilden (Punkten, Linien, Kugeln) auf ihre absoluten Invarianten hin untersuchen können; wir hätten, wie zum Theil auch schon MÖBIUS es gethan hat, specielle Werthe der Doppelverhältnisse, andrerseits aber auch noch andere und allgemeinere Arten von »Doppelverhältnissen« in Betracht ziehen können. Wichtiger ist wohl die viel umfassendere Frage nach einer algebraischen Invariantentheorie der Linien- und Kugelgeometrie überhaupt. Es ist dem Verfasser gelungen, dieses schon von anderer Seite, aber mit einem gänzlichen Misserfolg, in Angriff genommene wichtige Problem wenigstens in den Grundzügen zu erledigen. Die Frage nach den Invariantentypen beliebiger Linien- oder Kugelcomplexe lässt sich zurückführen auf die Frage nach den Invarianten in einem unbegrenzten System linearer Complexe. Solcher giebt es *zwei* Typen, eine symmetrische Invariante von zwei, und eine alternirende von sechs Complexen. Der sehr umfangreiche Gegenstand erfordert natürlich eine besondere Darstellung.

OEFFENTLICHE GESAMMTSITZUNG

VOM 23. APRIL 1896

ZUR FEIER DES GEBURTSTAGES SR. MAJESTÄT DES KÖNIGS.

Vorträge hielten:

1. Herr **C. Neumann**, o. M.: Ueber die elektrodynamischen Elementarwirkungen.
2. Herr **E. Hering**, o. M.: Ueber die Beziehungen der Lichtempfindlichkeit zum Purpurgehalte der Netzhaut.

C. Neumann, *Ueber die elektrodynamischen Elementarwirkungen.*

Häufig hört man die Ansicht aussprechen, dass in Wirklichkeit immer nur *geschlossene* elektrische Ströme vorkämen. Eine solche Ansicht dürfte jeder Begründung entbehren, und ziemlich bedenklich sein. Auch wird man in den Schriften wirklich hervorragender Physiker, wie z. B. in denen von W. Weber, F. Neumann, H. Helmholtz und G. Kirchhoff, vergeblich nach einer Stelle suchen, die einer solchen Vorstellung zur Stütze dienen könnte. Auch ist mir erzählt worden, dass Helmholtz, bei mündlicher Unterhaltung, gegen eine solche Vorstellung sich geradezu *ablehnend* verhalten habe.

Gesetzt aber, man wollte trotz alledem die in Rede stehende Vorstellung acceptiren, also annehmen, dass in der Natur nur allein *geschlossene* elektrische Ströme existiren, so würde hieraus noch keineswegs folgen, dass man nur die *Integral*wirkungen dieser Ströme ins Auge zu fassen habe, und dass man von der Erforschung ihrer *Elementar*wirkungen sich ohne Weiteres dispensiren dürfe.

Denn die geschlossenen elektrischen Ströme können ja z. B. in einer flüssigen Substanz, z. B. in Quecksilber circuliren. Alsdann wird das Quecksilber, vermöge der von jenen Strömen hervorgebrachten Kräfte, in Bewegung gerathen. Und diese Bewegung wird offenbar wesentlich abhängig sein von den auf die einzelnen *Elemente* der Quecksilbermasse ausgeübten Wirkungen; so dass also die Kenntniss dieser *Elementar*wirkungen bei einer näheren Untersuchung der in Rede stehenden Bewegung schlechterdings *unentbehrlich* sein dürfte.

Dieses einfache Beispiel zeigt in deutlicher Weise, dass die Erforschung der elektrodynamischen *Elementar*wirkungen eine Aufgabe ist, der man sich nimmermehr entziehen kann, eine Aufgabe, die unter allen Umständen bestehen bleibt, welche Vorstellungen oder Ansichten man im Uebrigen sich auch aneignen möge.

Auf diese Aufgabe gedenke ich hier näher einzugehen. Und zwar beabsichtige ich im vorliegenden Aufsatz, die *eigentlichen Grundlagen* meiner hierauf bezüglichen Untersuchungen, und zugleich auch die aus denselben sich ergebenden *Resultate* in möglichst anschaulicher Weise darzulegen, mit Uebergehung aller einigermassen beschwerlicher Zwischenrechnungen. Dabei sei sogleich bemerkt, dass diese Resultate zum grossen Theil identisch sein werden mit denjenigen, die von mir bereits im Jahre 1872 publicirt wurden, (in diesen Berichten, August 1872, Seite 163, 164).

Zur besonderen Genugthuung gereicht es mir, dass Helmholtz meine damaligen Untersuchungen als »sorgfältig und scharfsinnig« bezeichnet hat. Und wenn trotzdem ein gewisser Punkt meiner damaligen Untersuchungen von diesem grossen Naturforscher beanstandet worden ist, (vgl. Helmholtz, Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 710, 711), so dürfte das vielleicht darin seinen Grund haben, dass Helmholtz diejenige meiner Publicationen, in welcher gerade auf diesen besondern Punkt genauer eingegangen ist, nicht in Betracht gezogen hat. (Näheres hierüber findet man im vorliegenden Aufsatz in der Bemerkung zu Ende des § 14.)

Zum Theil wohl veranlasst durch meine damaligen Arbeiten aus den Jahren 1872, 1873, hat Helmholtz im Jahre 1874 eine schätzbare und tiefgehende Abhandlung über die in Rede stehenden Elementarwirkungen veröffentlicht, (Helmholtz' Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 702—762).

Der in dieser Abhandlung von Helmholtz eingeschlagene Weg hat seinen eigentlichen Ausgangspunkt in einer gewissen neuen Hypothese, die hier (ihrem Inhalt entsprechend) kurzweg als die *Helmholtz'sche Dilatationshypothese* bezeichnet werden mag. Auf diesem Wege gelangte nun Helmholtz zu gewissen

»*Endkräften*«, welche aber in Widerspruch standen mit den einige Zeit später von ihm selber angestellten experimentellen Untersuchungen. (Vgl. Helmholtz' Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 787.)

In Folge dieses Widerspruchs ist eine gewisse Einschränkung jener Dilatationshypothese, und hiermit Hand in Hand gehend eine gewisse Abänderung jenes von Helmholtz eingeschlagenen Weges erforderlich. Alsdann aber gelangt man, wie ich im vorliegenden Aufsatz näher darlegen werde, auf jenem Wege zu Resultaten, die völlig in Einklang sind mit dem *Ampère-schen ponderomotorischen Elementargesetz*, und andererseits mit dem *von mir im Jahre 1872 aufgestellten elektromotorischen Elementargesetz*.

Die in Rede stehenden Helmholtz'schen Untersuchungen sind also, falls man in ihnen die erforderlichen Abänderungen eintreten lässt, weit davon entfernt, die soeben genannten beiden Elementargesetze zu erschüttern. Vielmehr können sie denselben nur zur Bestätigung dienen.

Immerhin bleibt dabei noch ein gewisser anderer Einwand von Helmholtz übrig, der darin besteht, dass jene Gesetze für die in einem Conductor enthaltene Elektricität ein *labiles* Gleichgewicht ergeben würden. Hierauf gedenke ich am Schluss des vorliegenden Aufsatzes (nämlich in § 25) näher einzugehen.

§ 1.

Die ponderomotorischen Fundamentalgleichungen.

Bewegt sich ein ponderabler Massenpunkt $m(x, y, z)$ unter dem Einfluss einer ponderomotorischen Kraft (X, Y, Z), so gelten für die Bewegung des Punktes die bekannten Gleichungen:

(A) $$m\,dx' = X\,dt\,, \quad m\,dy' = Y\,dt\,, \quad m\,dz' = Z\,dt\,,$$

wo x', y', z' die Geschwindigkeitscomponenten des Punktes vorstellen. Multiplicirt man diese Gleichungen mit x', y', z' und addirt, so erhält man:

$$d\,\frac{m(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{2} = (Xx' + Yy' + Zz')\,dt\,,$$

d. i.

(B) $$dT = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\,,$$

wo alsdann

$$(C) \qquad T = \frac{m(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{2}$$

die sogenannte *lebendige Kraft* des Punktes m vorstellt. Auch ist bekannt, dass man das in (B) enthaltene Trinom

$$(D) \qquad X dx + Y dy + Z dz$$

zu bezeichnen pflegt als die auf den Punkt m während der Zeit dt ausgeübte *ponderomotorische Arbeit.*

All' diese Formeln bleiben auch dann noch in Gültigkeit, wenn auf den Punkt m beliebig viele ponderomotorische Kräfte (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), ... (X_n, Y_n, Z_n) einwirken. Nur werden alsdann X, Y, Z durch

$$\sum_{h=1}^{n} X_h\,, \quad \sum_{h=1}^{n} Y_h\,, \quad \sum_{h=1}^{n} Z_h$$

zu ersetzen sein; so dass also z. B. die Arbeit (D) in diesem Falle aus n Theilen bestehen wird, entsprechend der Formel:

$$(E) \qquad X dx + Y dy + Z dz = \sum_{h=1}^{n} (X_h dx + Y_h dy + Z_h dz)\,.$$

Bemerkung. — Die Formeln (A) sind gültig für ein *absolut ruhendes* Coordinatensystem, und sind daher (wie aus ihnen selbst durch Transformation sich ergiebt) *nicht* mehr gültig für ein in Bewegung begriffenes Coordinatensystem. Solches überträgt sich auf die aus (A) abgeleiteten Formeln.

§ 2.

Die elektromotorischen Fundamentalgleichungen.

Befindet sich die in einem Körper M enthaltene Elektricität in Bewegung unter dem Einfluss irgend welcher elektromotorischen Kräfte, so gelten bekanntlich für die in irgend einem Punkt (x, y, z) des Körpers vorhandenen elektrischen Strömungscomponenten u, v, w die Formeln:

$$(\mathfrak{A}) \qquad u = k\mathfrak{X}\,, \quad v = k\mathfrak{Y}\,, \quad w = k\mathfrak{Z}\,,$$

wo $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Componenten der auf den Punkt (x, y, z) einwirkenden elektromotorischen Kraft bezeichnen. Dabei repräsentirt k eine Constante, nämlich die Leitungsfähigkeit des betrachteten Körpers M.

Multiplicirt man diese Gleichungen ($\mathfrak{A}$) mit u, v, w, und addirt, so erhält man:

$$u^2 + v^2 + w^2 = k(\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\,.$$

Es sei nun $D\tau$ ein an der betrachteten Stelle (x, y, z) abgegrenztes unendlich kleines Volumelement. Multiplicirt man die letzte Formel mit

$$\frac{D\tau \cdot dt}{k}\,,$$

wo dt das auf den betrachteten Zeitaugenblick t folgende unendlich kleine Zeitelement sein soll, so erhält man:

$$\frac{(u^2 + v^2 + w^2)\,D\tau \cdot dt}{k} = (\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\,D\tau \cdot dt\,,$$

d. i.

($\mathfrak{B}$) $$dQ = (\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\,D\tau \cdot dt\,,$$

wo alsdann dQ die Bedeutung hat:

($\mathfrak{C}$) $$dQ = \frac{(u^2 + v^2 + w^2)\,D\tau \cdot dt}{k}\,.$$

Dieser Ausdruck dQ repräsentirt bekanntlich (nach den Joule-schen Gesetz) die in Folge der elektrischen Strömung (u, v, w) im Elemente $D\tau$ während der Zeit dt sich entwickelnde *Wärmemenge*.

Ueber die räumlichen, zeitlichen und elektrischen Maasseinheiten wollen wir nur eine einzige Voraussetzung machen. Diese mag darin bestehen, dass die für die elektrische Leitungsfähigkeit k zu wählende Maasseinheit den übrigen Maasseinheiten in solcher Weise adjungirt sein soll, dass der in ($\mathfrak{C}$) für die Wärmemenge dQ angegebene Werth diese Wärmemenge in *mechanischem* Maasse darstellt, also diejenige lebendige Kraft repräsentirt, welche dieser Wärmemenge äquivalent ist.

Solches festgesetzt, wird es in Anbetracht der Formel ($\mathfrak{B}$) erlaubt sein, den daselbst auf der rechten Seite stehenden Ausdruck:

($\mathfrak{D}$) $$(\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\,D\tau \cdot dt$$

als die während der Zeit dt auf das Element $D\tau$ ausgeübte *elektromotorische Arbeit* zu bezeichnen. Auch dürfte diese Bezeichnungsweise identisch sein mit der von den meisten Physikern schon seit langer Zeit benutzten.

Die vorstehenden Formeln bleiben gültig, wenn auf die betrachtete Stelle beliebig viele elektromotorische Kräfte $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1), (\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2) \dots (\mathfrak{X}_n, \mathfrak{Y}_n, \mathfrak{Z}_n)$ einwirken. Nur werden alsdann $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ zu ersetzen sein durch:

$$\sum_{h=1}^{n} \mathfrak{X}_h, \quad \sum_{h=1}^{n} \mathfrak{Y}_h, \quad \sum_{h=1}^{n} \mathfrak{Z}_h;$$

so dass alsdann die elektromotorische Arbeit ($\mathfrak{D}$) aus n Theilen besteht, entsprechend der Formel:

$$(\mathfrak{E}) \quad (\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w) D\tau \cdot dt = \sum_{h=1}^{n} (\mathfrak{X}_h u + \mathfrak{Y}_h v + \mathfrak{Z}_h w) D\tau \cdot dt.$$

Bemerkung. — Die Formeln ($\mathfrak{A}$) sind gültig für ein mit dem betrachteten Körper M fest verbundenes Coordinatensystem, und sind daher (wie aus ihnen selbst durch Transformation sich ergiebt) auch noch gültig für ein Coordinatensystem, dessen relative Lage zum Körper M von Augenblick zu Augenblick in beliebiger Weise sich ändert. Analoges gilt selbstverständlich von den aus ($\mathfrak{A}$) abgeleiteten Formeln.

§ 3.

Das F. Neumann'sche elektrodynamische Potential.

In einem in sich zurücklaufenden Draht M sei ein elektrischer Strom vorhanden, dessen Stromstärke J *eine blosse Function der Zeit* ist. Diesen Drahtring M denken wir uns durch aufeinanderfolgende senkrechte Querschnitte in lauter unendlich kleine Massenelemente DM zerlegt, und bezeichnen die Länge und das Volumen eines solchen Elementes DM respective mit Ds und $D\tau$; so dass also die Relation stattfindet:

$$(1) \qquad D\tau = q Ds,$$

wo q den senkrechten Querschnitt vorstellt.

Ueberdies wollen wir uns noch einen zweiten Drahtring M_1 gegeben denken, dessen elektrische Stromstärke J_1 ebenfalls *eine blosse Function der Zeit* ist. Auch wollen wir für diesen zweiten Drahtring analoge Bezeichnungen, wie für den ersten einführen; so dass z. B. die Formel zu notiren ist:

$$(2) \qquad D\tau_1 = q_1 Ds_1.$$

Das *F. Neumann'sche Potential* der beiden Ringe auf einander lautet alsdann:

$$(3)\quad P = -A^2 JJ_1 \sum\sum \frac{\cos\vartheta\cos\vartheta_1}{r} Ds\,Ds_1 = -A^2 JJ_1 \sum\sum \frac{\cos\varepsilon}{r} Ds\,Ds_1\,,$$

wo r, ϑ, ϑ_1, ε die den beiden Elementen Ds, Ds_1 entsprechenden *Ampère'schen Argumente* vorstellen. Es repräsentirt also r den gegenseitigen Abstand der beiden Elemente. Ferner sind ϑ und ϑ_1 die Winkel, unter denen die Richtung $r(Ds_1 \to Ds)$ gegen die beiden Elemente Ds und Ds_1 geneigt ist. Endlich bezeichnet ε den Neigungswinkel der beiden Elemente Ds, Ds_1 gegen einander. Ueberdies bezeichnet A^2 eine positive Constante, deren Werth abhängt von den der Betrachtung zu Grunde gelegten Maasseinheiten.

Wir können die Formel (3) auch so schreiben:

$$(4)\qquad P = JJ_1 Q\,,$$

wo alsdann Q die Bedeutung hat:

$$(5)\quad Q = -A^2 \sum\sum \frac{\cos\vartheta\cos\vartheta_1}{r} Ds\,Ds_1 = -A^2 \sum\sum \frac{\cos\varepsilon}{r} Ds\,Ds_1\,.$$

Demgemäss hängt P ab von J, von J_1 und von Q, während Q seinerseits nur noch von den *geometrischen Verhältnissen*, nämlich von der Gestalt und relativen Lage der beiden Ringe abhängt.

§ 4.

Das F. Neumann'sche ponderomotorische Integralgesetz.

Wir halten fest an unseren bisherigen Vorstellungen, denken uns aber die beiden Ringe M und M_1 in beliebigen Bewegungen begriffen, der Art, dass z. B. auch die Gestalt eines solchen Ringes von Augenblick zu Augenblick in beliebiger Weise sich ändern kann. Dabei aber sollen die Stromstärken J und J_1, nach wie vor, *blosse Functionen der Zeit* sein. Alsdann wird die vom ganzen Ringe M_1 auf irgend ein Element DM des Ringes M während der Zeit dt ausgeübte *ponderomotorische Arbeit* — wir bezeichnen sie mit $\left(dL\right)_{DM}^{M_1}$ — dargestellt sein durch folgendes Trinom:

$$(6)\qquad \left(dL\right)_{DM}^{M_1} = (X)\,dx + (Y)\,dy + (Z)\,dz\,,$$

wo (X), (Y), (Z) die Componenten der vom ganzen Ringe M_1 auf das einzelne Element DM ausgeübten ponderomotorischen Kraft bezeichnen; während dx, dy, dz die Zuwüchse der Coordinaten x, y, z des Elementes DM während der Zeit dt repräsentiren.

Folglich wird die vom ganzen Ringe M_1 auf den ganzen Ring M während der Zeit dt ausgeübte ponderomotorische Arbeit — wir bezeichnen sie mit $\left(dL\right)_M^{M_1}$ — dargestellt sein durch die Summe:

$$(7) \qquad \left(dL\right)_M^{M_1} = \sum \left[(X)\,dx + (Y)\,dy + (Z)\,dz\right],$$

die Summation ausgedehnt gedacht über alle Elemente DM des Ringes M.

Analog den Formeln (6), (7) werden, bei analoger Bezeichnungsweise, folgende Formeln zu notiren sein:

$$(8) \qquad \left(dL\right)_{DM_1}^{M} = \quad (X_1)\,dx_1 + (Y_1)\,dy_1 + (Z_1)\,dz_1,$$

$$(9) \qquad \left(dL\right)_{M_1}^{M} = \sum \left[(X_1)\,dx_1 + (Y_1)\,dy_1 + (Z_1)\,dz_1\right].$$

Die Summe der beiden Arbeiten (7), (9):

$$(10) \qquad \left(dL\right)_M^{M_1} + \left(dL\right)_{M_1}^{M}$$

pflegt man bekanntlich kurzweg zu bezeichnen als die ganze ponderomotorische Arbeit, welche die beiden Ringe M und M_1 während der Zeit dt auf einander ausüben.

Das F. Neumann'sche ponderomotorische Integralgesetz *sagt nun aus, dass diese Arbeit* (10) *stets* $= -[dP]$ *ist, wo* $[dP]$ *denjenigen* *virtuellen* *Zuwachs vorstellt, den das Potential* P *während der Zeit* dt *annehmen würde, falls man bei Bildung dieses Zuwachses die beiden Stromstärken* J *und* J_1 *(die in Wirklichkeit Functionen der Zeit sind) als* *constant* *ansehen wollte. Dieser virtuelle Zuwachs* $[dP]$ *ist daher, nach* (4), $= JJ_1\,dQ$, *wo* dQ *den* *wirklichen* *Zuwachs von* Q *vorstellt.*

Demgemäss ist das in Rede stehende Integralgesetz ausgedrückt durch die Formel:

$$(11) \qquad \left(dL\right)_M^{M_1} + \left(dL\right)_{M_1}^{M} = -JJ_1\,dQ.$$

Der dem Zeitelement dt entsprechende *wirkliche* Zuwachs dQ rührt her von der Lagenveränderung der beiden Ringe, und ist daher in zwei Theile zerlegbar:

(12) $$dQ = d_M Q + d_{M_1} Q\,,$$

wo $d_M Q$ von der Lagenveränderung des Ringes M, andererseits aber $d_{M_1} Q$ von der des Ringes M_1 herrührt. Demgemäss ist das Integralgesetz (11) auch so darstellbar:

(13) $$\left(dL\right)_M^{M_1} + \left(dL\right)_{M_1}^M = -JJ_1(d_M Q + d_{M_1} Q)\,.$$

Dieses Gesetz gilt aber für beliebige Bewegungen der beiden Ringe, also z. B. auch für den Fall, dass der Ring M_1 *gar keine* Lagenveränderung erleidet. In diesem besonderen Falle wird offenbar $d_{M_1} Q = 0$ sein. Und gleichzeitig werden in diesem Falle die Grössen dx_1, dy_1, dz_1, mithin [nach (9)] auch die Grösse $\left(dL\right)_{M_1}^M$ ebenfalls alle $= 0$ sein; so dass also alsdann die Formel (13) übergeht in:

(14) $$\left(dL\right)_M^{M_1} = -JJ_1 d_M Q\,.$$

Bringt man andererseits die allgemeine Formel (13) auf den besondern Fall in Anwendung, dass der Ring M keine Lagenveränderung erleidet, so erhält man:

(15) $$\left(dL\right)_{M_1}^M = -JJ_1 d_{M_1} Q\,.$$

§ 5.

Das F. Neumann'sche elektromotorische Integralgesetz.

Nach wie vor seien beide Ringe in beliebigen Bewegungen und Gestaltsveränderungen begriffen, und die Stromstärken J und J_1 blosse Functionen der Zeit. Alsdann wird die vom ganzen Ringe M_1 auf ein Element DM des Ringes M während der Zeit dt ausgeübte *elektromotorische Arbeit*[1]) — wir bezeichnen dieselbe mit $\left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{M_1}$ — dargestellt sein durch folgenden Ausdruck:

(16) $$\left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{M_1} = [(\mathfrak{X})\,u + (\mathfrak{Y})\,v + (\mathfrak{Z})\,w]\,D\tau \cdot dt\,,$$

wo $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Z})$ die Componenten der von M_1 in irgend einem Punkte des Elementes DM hervorgebrachten elektromotorischen Kraft, und u, v, w die im Element DM vorhandenen elektrischen Strömungscomponenten vorstellen. Bezeichnet man diese Strömung selber mit i, so ist bekanntlich $J = iq$ d. i.

1) Vergl. die in § 2 $(\mathfrak{D})$ gegebene Definition.

$$i = \frac{J}{q},$$

wo J die Stromstärke und q den Querschnitt bezeichnen. Demgemäss ist

$$u = Ai = A\frac{J}{q}, \quad v = Bi = B\frac{J}{q}, \quad w = Ci = C\frac{J}{q},$$

wo A, B, C die Richtungscosinus des (cylindrischen) Elementes DM d. i. die Richtungscosinus von Ds vorstellen. [Vgl. (1)].

Sind nun Dx, Dy, Dz die Componenten des Elementes Ds, so ist z. B. $A = \frac{Dx}{Ds}$; so dass man also erhält

$$u = \frac{Dx}{Ds}\frac{J}{q}, \quad v = \frac{Dy}{Ds}\frac{J}{q}, \quad w = \frac{Dz}{Ds}\frac{J}{q}.$$

Multiplicirt man diese Relationen mit der Relation (1):

$$D\tau = q\,Ds,$$

so erhält man:

$$\text{(16a)} \qquad u D\tau = JDx, \quad vD\tau = JDy, \quad wD\tau = JDz.$$

Und hierdurch geht die Formel (16) über in:

$$\text{(17)} \qquad \left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{M_1} = J dt \cdot [(\mathfrak{X})\,Dx + (\mathfrak{Y})\,Dy + (\mathfrak{Z})\,Dz].$$

Demgemäss wird die vom ganzen Ringe M_1 auf den ganzen Ring M während der Zeit dt ausgeübte elektromotorische Arbeit — wir bezeichnen dieselbe mit $\left(d\mathfrak{L}\right)_{M}^{M_1}$ — dargestellt sein durch die Summe:

$$\text{(18)} \qquad \left(d\mathfrak{L}\right)_{M}^{M_1} = J dt \cdot \sum [(\mathfrak{X})\,Dx + (\mathfrak{Y})\,Dy + (\mathfrak{Z})\,Dz],$$

die Summation ausgedehnt gedacht über alle Elemente DM oder Ds des Ringes M.

Das F. Neumann'sche elektromotorische Integralgesetz *sagt nun aus, dass diese Arbeit (18) stets $= [[dP]]$ ist, wo $[[dP]]$ denjenigen* ***virtuellen*** *Zuwachs vorstellt, den das Potential P während des Zeitelementes dt erfahren würde, falls man bei Bildung dieses Zuwachses die Stromstärke J (welche in Wirklichkeit, ebenso wie J_1, eine Function der Zeit ist), als* ***constant*** *ansehen wollte. Dieser* ***virtuelle*** *Zuwachs $[[dP]]$ ist mithin, nach (4), $= J\,d(J_1 Q)$, wo $d(J_1 Q)$ den* ***wirklichen*** *Zuwachs von $(J_1 Q)$ vorstellt.*

Demgemäss ist das in Rede stehende Integralgesetz ausdrückbar durch folgende Formel:

(19) $$\left(d\mathfrak{L}\right)_M^{M_1} = J \cdot d(J_1 Q)\,.$$

Analoges gilt selbstverständlich auch umgekehrt für die von M auf M_1 ausgeübte elektromotorische Arbeit; so dass also für diese letztere Arbeit die Formel zu notiren ist:

(20) $$\left(d\mathfrak{L}\right)_{M_1}^{M} = J_1 \cdot d(JQ)\,.$$

Nach (4) ist: $JJ_1 Q = P$, folglich:

$$Jd(J_1 Q) = dP - J_1 Q dJ\,,$$
$$J_1 d(JQ) = dP - JQdJ_1\,;$$

so dass also die Formeln (19), (20) auch so darstellbar sind:

(21) $$\left(d\mathfrak{L}\right)_M^{M_1} = dP - J_1 QdJ\,,$$

(22) $$\left(d\mathfrak{L}\right)_{M_1}^{M} = dP - JQdJ_1\,.$$

Nun war nach (11):

(23) $$\left(dL\right)_M^{M_1} + \left(dL\right)_{M_1}^{M} = -JJ_1 dQ\,.$$

Addirt man diese drei Formeln (21), (22), (23), so erhält man rechter Hand:

$$2dP - d(JJ_1 Q)\,,$$

d. i. $$2dP - dP = dP\,;$$

so dass man also durch jene Addition zu folgender Gleichung gelangt:

(24) $$\left(dL\right)_M^{M_1} + \left(dL\right)_{M_1}^{M} + \left(d\mathfrak{L}\right)_M^{M_1} + \left(d\mathfrak{L}\right)_{M_1}^{M} = dP\,.$$

(25) .... *Diese Gleichung (24) sagt aus, dass die Summe aller während der Zeit dt von den beiden Ringen auf einander ausgeübten ponderomotorischen und elektromotorischen Arbeiten ein vollständiges Differential ist, nämlich identisch ist mit demjenigen Zuwachs, den das gegenseitige Potential P der beiden Ringe während der Zeit dt erfährt.*

Bemerkung. — Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass die hier besprochenen beiden F. Neumann'schen Integralgesetze giltig sind für beliebige Bewegungen und Gestaltsveränderungen der beiden Ringe; nur ist dabei vorauszusetzen, dass jeder solcher Ring *inextensibel* sei.

Das elektromotorische Integralgesetz hat sich auch als richtig erwiesen für Ringe, die mit *Gleitstellen* behaftet sind. Dabei ist aber alsdann wiederum vorauszusetzen, dass die einzelnen Drähte, aus denen ein solcher mit Gleitstellen behafteter Ring zusammengesetzt ist, jeder für sich, *inextensibel* sind.

§ 6.

Die Grundeigenschaften der elektromotorischen Kräfte.

Nach wie vor mögen die beiden Drähte M und M_1 in beliebigen Bewegungen und Gestaltsveränderungen begriffen sein. Irgend zwei Elemente der beiden Drähte seien mit DM, DM_1, und die Längen dieser Elemente mit Ds, Ds_1 bezeichnet. Ob die beiden Drähte in sich zurücklaufende Ringe sind oder nicht, soll hier nicht weiter in Betracht kommen.

Es handelt sich nun um diejenige elektromotorische Kraft $\mathfrak{R}$, *welche das Element* DM_1 *oder* Ds_1 *in irgend einem Punkte* m *des Elementes* DM *oder* Ds *hervorbringt. Die Componenten dieser Kraft* $\mathfrak{R}$ *mögen mit* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ *bezeichnet sein.*

Ob diese Kraft $\mathfrak{R}$, in Uebereinstimmung mit der W. Weberschen Theorie, in die Verbindungslinie von DM_1 und m, respective in die Verlängerung derselben fällt, oder aber ob sie irgend welche andere Richtung besitzt, — darüber dürfte mit wirklicher Sicherheit wohl schwerlich irgend etwas Bestimmtes zu sagen sein. Wir stehen hier vor einer völlig offenen Frage.

Ebenso wie bisher betrachten wir beide Ringe als *linear*, d. h. ihre Querschnitte als unendlich klein; so dass also von jener Kraft $\mathfrak{R}$ immer nur die der Richtung des Ringes M entsprechende Componente zur Wirksamkeit gelangen kann. Diese Componente — sie mag $\mathfrak{E}$ heissen — hat den Werth:

$$(1.) \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{R} \cos w,$$

d. i. den Werth

$$(2.) \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B + \mathfrak{Z}C,$$

wo w den Winkel bezeichnet, unter welchem die Kraft $\mathfrak{R}$ gegen die Richtung des Ringes d. i. gegen Ds geneigt ist; während A, B, C die Richtungscosinus des Elementes Ds vorstellen.

Bezeichnet dt irgend ein Zeitelement, und $\mathfrak{E}$ den Werth der Kraft $\mathfrak{E}$ in irgend einem Augenblicke dieses Zeitelementes so pflegt man bekanntlich das Product $\mathfrak{E}dt$ *die während der Zeit* dt *hervorgebrachte elektromotorische Kraft* zu nennen. Die Stromstärken der beiden Elemente Ds und Ds_1 mögen im Augenblick t mit J und J_1, andererseits im Augenblick $t + dt$ mit $J + dJ$ und $J_1 + dJ_1$ bezeichnet sein.

Wenn man nun von den Vorstellungen, die im Laufe unseres Jahrhunderts über die Kraft $\mathfrak{E}dt$ entstanden sind, alles Zweifelhafte abscheidet, so bleiben gewisse Grundeigenschaften übrig, die man folgendermassen aussprechen kann:

Erste Grundeigenschaft. *Die Kraft $\mathfrak{E}dt$ ist die Summe zweier Kräfte, welche respective proportional sind mit*

$$J_1 Ds_1 \quad \text{und} \quad (dJ_1) Ds_1$$

und von denen also z. B. die erste in ihr Gegentheil umschlagen wird, falls man die in Ds_1 vorhandene Stromrichtung umkehrt.

Zweite Grundeigenschaft. *Die in Rede stehenden beiden Kräfte sind, abgesehen von den soeben genannten Factoren $J_1 Ds_1$ und $(dJ_1) Ds_1$, nur noch abhängig von der zwischen Ds und Ds_1 im Augenblick t vorhandenen relativen Lage, und von denjenigen Aenderungen, welche diese relative Lage während des Zeitelementes dt erfährt.*

Sind diese Aenderungen $= 0$, und ist dJ_1 ebenfalls $= 0$, so verschwinden die beiden Kräfte.

Dritte Grundeigenschaft. *Denkt man sich das Element Ds_1 in drei aufeinander senkrechte Componenten $D\lambda_1$, $D\mu_1$, $D\nu_1$ zerlegt, die mit Ds_1 starr verbunden, an der Bewegung von Ds_1 theilnehmen, so wird die in Rede stehende elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}dt$ identisch sein mit der Summe derjenigen elektromotorischen Kräfte, welche die Elemente $D\lambda_1$, $D\mu_1$, $D\nu_1$, einzeln genommen, in Ds in der Richtung von Ds hervorbringen würden.*

Dabei ist vorausgesetzt, dass man nicht nur J_1, sondern auch dJ_1 für all' jene drei Elemente $D\lambda_1$, $D\mu_1$, $D\nu_1$ ebenso gross sich denkt, wie für Ds_1 selber.

Aus diesen Grundeigenschaften folgt nun (was hier allerdings nicht weiter ausgeführt werden soll) mit mathematischer Consequenz, dass die Kraft $\mathfrak{E}dt$ einen Werth haben muss von folgender Gestalt:

$$(3)\quad \mathfrak{E}dt = J_1 Ds_1\{[\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^* E]dr + \lambda\Theta_1 d\Theta + \mu\Theta d\Theta_1 + \nu dE\} + (dJ_1)Ds_1[o\,\Theta\Theta_1 + o^* E],$$

wo $\varkappa$, $\varkappa^*$, λ, μ, ν, o, o^* unbekannte Functionen von r sind.

Dabei bezeichnen

$$(4)\quad r,\qquad \Theta = \cos\vartheta,\qquad \Theta_1 = \cos\vartheta_1,\qquad E = \cos\varepsilon$$

die Ampère'schen Argumente der beiden Elemente Ds, Ds_1. Es repräsentirt also r den gegenseitigen Abstand der beiden Elemente. Ferner sind ϑ und ϑ_1 die Winkel, unter denen die Richtung $r(Ds_1 \to Ds)$ gegen Ds und Ds_1 geneigt ist. Ferner bezeichnet ε den Neigungswinkel beider Elemente gegen einander.

Endlich bezeichnen dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, dE und dJ_1 die Zuwüchse der Grössen r, Θ, Θ_1, E und J_1 während des betrachteten Zeitelementes dt.

Die elektromotorische Arbeit. Nach unserer Definition sind Ds und Ds_1 die Längen der betrachteten beiden *linearen Stromelemente* DM und DM_1. Und dementsprechend haben wir die beiden Elemente, wie es gerade in jedem Augenblick am Bequemsten ist, bald mit DM, DM_1, bald mit Ds, Ds_1 bezeichnet. Ferner sind $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die rechtwinkligen Componenten der von DM_1 in einem Punkt des Elementes DM hervorgebrachten elektromotorischen Kraft $\mathfrak{R}$. Endlich soll $\mathfrak{E}$ die der Richtung des Elementes DM entsprechende Componente von $\mathfrak{R}$ sein, so dass also die schon in (2) genannte Relation stattfindet:

$$(5)\qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B + \mathfrak{Z}C.$$

Bezeichnet man nun die vom Elemente DM_1 d. i. von der Kraft $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) während der Zeit dt auf das Element DM ausgeübte *elektromotorische Arbeit* mit

$$(6)\qquad \left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{DM_1},$$

so ist nach § 2 ($\mathfrak{D}$):

$$(7)\qquad \left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{DM_1} = (\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\,D\tau\cdot dt,$$

wo $D\tau$ das Volumen des Elementes DM bezeichnet, während u, v, w die in DM vorhandenen elektrischen Strömungscomponenten vorstellen. Nun ist aber [vgl. § 5 (16a.)]:

(8) $u D\tau = J Dx, \qquad v D\tau = J Dy, \qquad w D\tau = J Dz$

d. i.

(9) $u D\tau = JADs, \qquad v D\tau = JBDs, \qquad w D\tau = JCDs,$

wo Dx, Dy, Dz die Componenten und A, B, C die Richtungscosinus des Elementes Ds vorstellen. Durch Substitution der Werthe (9) geht die Formel (7) über in

(10) $$\left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{DM_1} = J(\mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B + \mathfrak{Z}C)Ds \cdot dt;$$

und hieraus folgt mit Hinblick auf (5.) sofort:

(11) $$\left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{DM_1} = J\mathfrak{E}Ds \cdot dt.$$

Substituirt man nun endlich hier für die Componente $\mathfrak{E}$ ihren in (3.) angegebenen Werth, so erhält man:

(12) $$\left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{DM_1} = JJ_1 Ds Ds_1\{[\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^* E]dr + \lambda\Theta_1 d\Theta + \mu\Theta d\Theta_1 + \nu dE\} \\ + J(dJ_1)Ds Ds_1[o\Theta\Theta_1 + o^* E].$$

Und dementsprechend wird umgekehrt die von DM auf DM_1 während der Zeit dt ausgeübte elektromotorische Arbeit den Werth haben:

(13) $$\left(d\mathfrak{L}\right)_{DM_1}^{DM} = JJ_1 Ds Ds_1\{[\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^* E]dr + \lambda\Theta d\Theta_1 + \mu\Theta_1 d\Theta + \nu dE\} \\ + J_1(dJ)Ds Ds_1[o\Theta\Theta_1 + o^* E].$$

Bezeichnet man schliesslich die Summe der beiden Arbeiten (12), (13) kurzweg mit $d\mathfrak{L}$:

(14) $$d\mathfrak{L} = \left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{DM_1} + \left(d\mathfrak{L}\right)_{DM_1}^{DM},$$

so erhält man:

(15) $$d\mathfrak{L} = JJ_1 Ds Ds_1\{2[\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^* E]dr + (\lambda + \mu)d(\Theta\Theta_1) + 2\nu dE\} \\ + d(JJ_1)\cdot Ds Ds_1[o\Theta\Theta_1 + o^* E].$$

§ 7.

Die Grundeigenschaften der ponderomotorischen Kräfte.

Wenn auch hervorragende Physiker, wie z. B. W. Weber und F. Neumann ihr ganzes Leben hindurch am *Ampère'schen Gesetz* festgehalten haben, so ist doch die gegentheilige Behauptung, dass dieses Gesetz höchst unsicher, dass es eine »blosse Hypothese« sei, nicht ganz von der Hand zu weisen.

Grassmann und Clausius sind der Ansicht, dass die gegenseitige ponderomotorische Einwirkung zweier Stromelemente nicht in die Linie der Entfernung zu fallen brauche, sondern möglicherweise irgend welche andere Richtung besitzen könne. Dieser Ansicht ist auch Helmholtz beigetreten[1]).

Aber mit all' diesen Vorstellungen werden wir in Einklang sein, wenn wir die Richtung der ponderomotorischen Wirkung ganz dahingestellt sein lassen, und für die von zwei linearen Stromelementen DM und DM_1 während der Zeit auf einander ausgeübte *ponderomotorische Arbeit* dL einen Ausdruck von folgender Gestalt nehmen:

$$dL = F \cdot JJ_1 Ds Ds_1 , \tag{16}$$

wo F nur noch von der *relativen Lage* der beiden Elemente und der Aenderung dieser relativen Lage während der Zeit dt abhängen soll. Dabei ist unter der genannten Arbeit dL die Summe zu verstehen:

$$dL = \left(dL\right)_{DM}^{DM_1} + \left(dL\right)_{DM_1}^{DM} , \tag{17}$$

d. h. die Summe derjenigen ponderomotorischen Arbeiten, welche DM_1 auf DM und umgekehrt DM auf DM_1 ausübt. — Dass in der Formel (16) J, J_1 die Stromstärken und Ds, Ds_1 die Längen der beiden Elemente sein sollen, bedarf kaum noch der Erwähnung.

Demgemäss wollen wir bei unseren Untersuchungen, um denselben ein möglichst breites und sicheres Fundament zu geben, und keine der vorhin angedeuteten Vorstellungen ausser Acht zu lassen, von folgenden Grundeigenschaften ausgehen:

Erste Grundeigenschaft. *Die ponderomotorische Arbeit dL, welche zwei in beliebigen Bewegungen begriffene lineare elektrische Stromelemente Ds und Ds_1 während der Zeit dt auf einander ausüben, ist proportional mit*

$$JJ_1 Ds Ds_1 ,$$

wo J, J_1 die Stromstärken im Augenblick t bezeichnen.

Zweite Grundeigenschaft. *Abgesehen von diesem Factor $JJ_1 Ds Ds_1$ ist die in Rede stehende Arbeit nur noch abhängig von*

1) Dass Helmholtz überdies noch eigenthümliche und wenig ansprechende »Endkräfte« angenommen hat, kann hier wohl mit Stillschweigen übergangen werden, weil Helmholtz selbst im weiteren Verlauf seiner Untersuchungen von der Annahme solcher »Endkräfte« zurückgekommen ist. Vgl. Helmholtz' Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. 1, S. 787.

der zwischen Ds und Ds_1 im Augenblick t vorhandenen relativen Lage und von denjenigen Aenderungen, welche diese relative Lage während der Zeit dt erfährt.

Sind insbesondere diese Aenderungen $= 0$, so ist die Arbeit ebenfalls $= 0$.

Dritte Grundeigenschaft. — *Denkt man sich Ds_1 in drei rechtwinklige und mit Ds_1 starr verbundene Componenten $D\lambda_1$, $D\mu_1$, $D\nu_1$ zerlegt, so wird die in Rede stehende ponderomotorische Arbeit dL identisch sein mit der Summe derjenigen drei ponderomotorischen Arbeiten, welche Ds und $D\lambda_1$, ferner Ds und $D\mu_1$, endlich Ds und $D\nu_1$ während der Zeit dt auf einander ausüben würden.*

Dabei ist vorausgesetzt, dass J_1 für alle jene drei Elemente $D\lambda_1$, $D\mu_1$, $D\nu_1$ ebenso gross gedacht werde, wie für Ds_1 selber.

Aus diesen Grundeigenschaften ergiebt sich (was hier nicht weiter ausgeführt werden soll) mit mathematischer Consequenz, dass die Arbeit dL folgenden Werth haben muss

$$(18) \quad dL = JJ_1 Ds Ds_1 \{[\varrho \Theta \Theta_1 + \varrho^* E] dr + \varphi d(\Theta\Theta_1) + \chi dE\},$$

wo ϱ, ϱ^*, φ, χ unbekannte Functionen von r vorstellen.

Dabei bezeichnen r, Θ, Θ_1, E die Ampère'schen Argumente [vgl. (4)]. Ferner bezeichnen dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, dE die Zuwüchse der Grössen r, Θ, Θ_1, E während der Zeit dt.

§ 8.

Das Helmholtz'sche Princip des vollständigen Differentials.

In § 5 (24), (25) haben wir gesehen, dass die Summe der während der Zeit dt von zwei elektrischen Stromringen auf einander ausgeübten ponderomotorischen und elektromotorischen Arbeiten ein *vollständiges Differential* ist, nämlich identisch ist mit demjenigen Zuwachs, den eine gewisse nur vom augenblicklichen Zustande der beiden Ringe abhängende Function während der Zeit dt erfährt. Dass diese Function $= P$ ist, wollen wir augenblicklich nicht weiter betonen.

Helmholtz ist nun in seinen elektrodynamischen Untersuchungen von der Vorstellung ausgegangen, dass der eben genannte Satz nicht nur für zwei elektrische Stromringe, sondern ebenso auch für irgend zwei einzelne elektrische *Stromelemente* Gültigkeit besitze. Man vergleiche Helmholtz Wissenschaftl.

Abh. Bd. 1, Seite 562, namentlich die Stelle, welche mit den Worten schliesst:

»— — — Eine Function dieser Art muss offenbar auch »für eine einzelne oder zwei neben einander bestehende »*un*geschlossene Strömungen existiren. Es muss sich der »Werth des Arbeitsäquivalentes ihrer elektrischen Bewegung »angeben lassen.«

Ob man diese Function nun als Arbeitsäquivalent, oder mit irgend welchen andern Namen bezeichnet, ist für uns (wenigstens augenblicklich) von untergeordneter Bedeutung. Jedenfalls ist dieses HELMHOLTZ'sche Princip beachtenswerth genug. Und wir werden dasselbe, wenn wir die Herbeiziehung eines neuen Namens vermeiden wollen, seinem eigentlichen Kern nach, folgendermassen aussprechen können:

Das Helmholtz'sche Princip des vollständigen Differentials. — *Die Summe der während der Zeit dt von irgend zwei elektrischen Stromelementen auf einander ausgeübten ponderomotorischen und elektromotorischen Arbeiten ist ein vollständiges Differential, nämlich identisch mit demjenigen Zuwachs, den eine gewisse noch unbekannte, aber nur vom augenblicklichen Zustande der beiden Elemente abhängende Function während der Zeit dt erfährt.* Dabei ist unter dem augenblicklichen Zustande der beiden Elemente Alles zu verstehen, was der Augenblick darbietet, also sowohl die augenblickliche Beschaffenheit des einen und des andern Elementes, wie auch die augenblickliche relative Lage der beiden Elemente zu einander.

Zufolge dieses Princips muss der Ausdruck

$$(21)\qquad \left(dL\right)_{DM}^{DM_1} + \left(dL\right)_{DM_1}^{DM} + \left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{DM_1} + \left(d\mathfrak{L}\right)_{DM_1}^{DM}$$

ein vollständiges Differential sein. Diesen Ausdruck aber können wir, unter Anwendung der in (17) und (14) eingeführten Abbreviaturen, auch so schreiben

$$(22)\qquad dL + d\mathfrak{L}\,.$$

Substituiren wir nun endlich für dL und $d\mathfrak{L}$ die in (18) und (15) erhaltenen Werthe, so nimmt der Ausdruck folgende Gestalt an:

$$(23)\quad dL + d\mathfrak{L} = JJ_1\,Ds\,Ds_1 \left\{\begin{matrix}[(\varrho + 2\varkappa)\,\Theta\Theta_1 + (\varrho^* + 2\varkappa^*)\,E]\,dr \\ + (\varphi + \lambda + \mu)\,d(\Theta\Theta_1) + (\chi + 2\nu)\,dE\end{matrix}\right\}$$
$$+ d(JJ_1)\cdot Ds\,Ds_1\,[\sigma\,\Theta\Theta_1 + \sigma^*\,E]\,.$$

Zufolge des HELMHOLTZ'schen Princips soll nun dieser Ausdruck (21), (22) oder (23) ein *vollständiges Differential* sein. Folglich muss er die Gestalt besitzen:

$$Ds\,Ds_1\,d(JJ_1f)\,, \tag{24}$$

wo f irgendwelche noch unbekannte Function vorstellt. Hieraus ergeben sich die beiden Formeln:

$$\begin{aligned} f &= o\,\Theta\Theta_1 + o^*E\,, \\ df &= [(\varrho + 2\varkappa)\,\Theta\Theta_1 + (\varrho^* + 2\varkappa^*)\,E]\,dr \\ &\qquad + (\varphi + \lambda + \mu)\,d(\Theta\Theta_1) + (\chi + 2\nu)\,dE\,; \end{aligned} \tag{25}$$

und hieraus folgt weiter durch Elimination von f:

$$\begin{aligned} &[(\varrho+2\varkappa)\Theta\Theta_1+(\varrho^*+2\varkappa^*)E]dr+(\varphi+\lambda+\mu)d(\Theta\Theta_1)+(\chi+2\nu)dE \\ &\qquad = \left[\frac{do}{dr}\,\Theta\Theta_1 + \frac{do^*}{dr}\,E\right]dr + o\,d(\Theta\Theta_1) + o^*\,dE\,. \end{aligned}$$

Da nun diese Gleichung ganz allgemein stattfinden soll für beliebige Werthe von r, Θ, Θ_1, E und ebenso auch für beliebige Werthe von dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, dE, so gelangt man zu der Einsicht, dass jene unbekannten (blos von r abhängenden) Functionen ϱ, ϱ^*, $\varkappa$, $\varkappa^*$, φ, χ, λ, μ, ν, o, o^* mit einander verbunden sein müssen durch folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \varrho + 2\varkappa &= \frac{do}{dr}\,, & \varphi + \lambda + \mu &= o\,, \\ \varrho^* + 2\varkappa^* &= \frac{do^*}{dr}\,, & \chi + 2\nu &= o^*\,. \end{aligned} \tag{26}$$

§ 9.

Anwendung des elektromotorischen Integralgesetzes.

Es seien gegeben zwei in beliebigen Bewegungen und Gestaltsveränderung begriffene lineare Ringe M und M_1, deren Stromstärken J und J_1 blosse Functionen der Zeit sind. Denkt man sich diese Ringe in einzelne Elemente DM und DM_1 zerlegt, und die Längen dieser Elemente mit Ds und Ds_1 bezeichnet, so besitzt die von DM_1 auf DM während der Zeit dt ausgeübte elektromotorische Arbeit den in (12) angegebenen Werth:

$$\begin{aligned} \left(d\mathfrak{E}\right)_{DM}^{DM_1} &= JJ_1\,Ds\,Ds_1\{[\varkappa\Theta\Theta_1+\varkappa^*E]dr+\lambda\Theta_1 d\Theta+\mu\Theta d\Theta_1+\nu dE\} \\ &\qquad + J(dJ_1)\,Ds\,Ds_1\,[o\,\Theta\Theta_1 + o^*E]\,. \end{aligned}$$

Die vom ganzen Ringe M_1 auf den ganzen Ring M während der Zeit dt ausgeübte elektromotorische Arbeit wird daher ausgedrückt sein durch:

$$\text{(a)}\quad \left(d\mathfrak{L}\right)_M^{M_1} = JJ_1 \sum\sum Ds\,Ds_1 \{[\varkappa\,\Theta\Theta_1 + \varkappa^* E]\,dr + \lambda\,\Theta_1\,d\Theta + \mu\,\Theta\,d\Theta_1 + \nu\,dE\}$$
$$+ J(dJ_1) \sum\sum Ds\,Ds_1\,[o\,\Theta\Theta_1 + o^* E],$$

die Summationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente Ds des Ringes M und über alle Elemente Ds_1 des Ringes M_1.

Diese elektromotorische Arbeit (a) muss aber, nach dem elektromotorischen Integralgesetz [§ 5 (19)] den Werth haben:

$$\text{(b)}\qquad \left(d\mathfrak{L}\right)_M^{M_1} = J\,d(J_1\,Q),$$

wo Q [vgl. § 3 (5)] folgende Bedeutung besitzt:

$$\text{(c)}\qquad Q = -\,A^2 \sum\sum Ds\,Ds_1\,\frac{\Theta\Theta_1}{r}.$$

Setzt man nun die Ausdrücke (a) und (b) einander gleich, indem man dabei für Q seinen Werth (c) substituirt, so erhält man (unter Fortlassung des gemeinsamen Factors J):

$$J_1 \sum\sum Ds\,Ds_1 \{[\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^* E]\,dr + \lambda\,\Theta_1\,d\Theta + \mu\,\Theta\,d\Theta_1 + \nu dE\}$$
$$+ (dJ_1) \sum\sum Ds\,Ds_1 [o\,\Theta\,\Theta_1 + o^* E] =$$
$$= -\,A^2 d\left(J_1 \cdot \sum\sum Ds\,Ds_1\,\frac{\Theta\,\Theta_1}{r}\right).$$

Nun ist J_1 eine beliebige Function der Zeit; so dass also J_1 z. B. constant und $dJ_1 = 0$ sein kann. Aus dieser Ueberlegung folgt, dass in der vorstehenden Formel die Coefficienten von J_1 und dJ_1, einzeln genommen, auf beiden Seiten einander gleich sein müssen; so dass man also zu folgenden beiden Formeln gelangt:

$$\sum\sum Ds\,Ds_1 [o\Theta\Theta_1 + o^* E] = -\,A^2 \sum\sum Ds\,Ds_1\,\frac{\Theta\Theta_1}{r},$$

$$\sum\sum Ds\,Ds_1 \begin{Bmatrix} [\varkappa\,\Theta\Theta_1 + \varkappa^* E]\,dr \\ + \lambda\Theta_1\,d\Theta + \mu\Theta\,d\Theta_1 + \nu\,d\,E \end{Bmatrix} = -\,A^2 d\left(\sum\sum Ds\,Ds_1\,\frac{\Theta\Theta_1}{r}\right.$$

Diese beiden Formeln aber sind, falls man zur Abkürzung

$$(27)\qquad \omega = -\,\frac{A^2}{r}$$

setzt, auch so darstellbar:

$$(28)\qquad \begin{aligned} &\sum\sum Ds\,Ds_1[(o-\omega)\Theta\Theta_1 + o^* E] = 0,\\ &\sum\sum Ds\,Ds_1\left\{\left[\left(\varkappa - \frac{d\omega}{dr}\right)\Theta\Theta_1 + \varkappa^* E\right]dr + (\lambda-\omega)\,\Theta_1\,d\Theta\right.\\ &\qquad\qquad \left. + (\mu-\omega)\Theta\,d\Theta_1 + \nu dE\right\} = 0\,. \end{aligned}$$

Diese beiden Formeln (28) sollen nun stattfinden für zwei in ganz beliebigen Bewegungen und Gestaltsveränderungen begriffene Ringe. Hieraus aber ergiebt sich (was hier allerdings nicht weiter ausgeführt werden soll), dass zwischen den unbekannten Functionen o, o^*, $\varkappa$, $\varkappa^*$, λ, μ, ν folgende Relationen stattfinden müssen:

$$(29)\qquad \begin{aligned} o - \omega &= r\frac{do^*}{dr},\\ \varkappa + \varkappa^* &= \frac{d(\lambda+\mu-\omega)}{dr} - r\frac{d^2\nu}{dr^2},\\ r\varkappa^* &= (\lambda+\mu-2\omega) - r\frac{d\nu}{dr}, \end{aligned}$$

wo ω die in (27) angegebene Bedeutung hat.

Bemerkung. Wir haben die beiden Ringe bisher von gewöhnlicher Art, nämlich *ohne* Gleitstellen uns gedacht. Das angewendete elektromotorische Integralgesetz ist aber auch dann noch gültig, wenn Gleitstellen vorhanden sind. Und durch diese allgemeinere Betrachtung gelangt man zu dem Resultate, dass jene unbekannten Functionen o, o^*, ... nicht nur den Relationen (29), sondern gleichzeitig auch noch folgenden Relationen genügen müssen:

$$(29\text{g})\qquad \begin{aligned} r\frac{d\nu}{dr} + o - \mu &= r\frac{do^*}{dr},\\ r\frac{d\nu}{dr} - \lambda &= 0\,. \end{aligned}$$

§ 10.

Anwendung des ponderomotorischen Integralgesetzes.

Wir betrachten wiederum zwei lineare Stromringe M und M_1, die in beliebiger Bewegung und Gestaltsveränderung sich befinden, und deren Stromstärken J und J_1 blosse Functionen der Zeit sind.

Bezeichnet man nun [ebenso wie in (17)] die von den beiden Elementen DM und DM_1 während der Zeit dt aufeinander ausgeübte ponderometrische Arbeit mit dL:

$$dL = \left(dL\right)_{DM}^{DM_1} + \left(dL\right)_{DM_1}^{DM},$$

so wird für diese Arbeit der in (18) angegebene Ausdruck gelten:

$$\left(dL\right)_{DM}^{DM_1} + \left(dL\right)_{DM_1}^{DM} =$$
$$= JJ_1\, Ds\, Ds_1 \{[\varrho\Theta\Theta_1 + \varrho^* E]dr + \varphi d(\Theta\Theta_1) + \chi dE\}.$$

Die von den *ganzen* Ringen M und M_1 während der Zeit dt aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit:

$$\left(dL\right)_{M}^{M_1} + \left(dL\right)_{M_1}^{M}$$

wird daher lauten:

$$\left(dL\right)_{M}^{M_1} + \left(dL\right)_{M_1}^{M} = \tag{a}$$
$$= JJ_1 \sum\sum Ds\, Ds_1 \{[\varrho\Theta\Theta_1 + \varrho^* E]dr + \varphi d(\Theta\Theta_1) + \chi dE\},$$

die Summationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente des einen und des andern Ringes.

Diese Arbeit (a) muss aber, nach dem ponderomotorischen Integralgesetz [§ 4 (11)] den Werth haben:

$$\left(dL\right)_{M}^{M_1} + \left(dL\right)_{M_1}^{M} = -JJ_1\, dQ, \tag{b}$$

wo Q [vgl. § 3, (5)] die Bedeutung besitzt:

$$Q = -A^2 \sum\sum Ds\, Ds_1 \frac{\Theta\Theta_1}{r}. \tag{c}$$

Setzt man nun die beiden Ausdrücke (a) und (b) einander gleich, indem man dabei für Q seinen Werth (c) substituirt, so erhält man:

$$JJ_1 \cdot \sum\sum Ds\, Ds_1 \{[\varrho\Theta\Theta_1 + \varrho^* E]dr + \varphi d(\Theta\Theta_1) + \chi dE\} =$$
$$= A^2 JJ_1\, d\left(\sum\sum Ds\, Ds_1 \frac{\Theta\Theta_1}{r}\right),$$

oder falls man das Product der Stromstärken, d. i. den Factor JJ_1 auf beiden Seiten fortlässt:

$$\sum\sum Ds\,Ds_1 \{[\varrho\Theta\Theta_1 + \varrho^* E]dr + \varphi d(\Theta\Theta_1) + \chi dE\} =$$
$$= A^2 d\left(\sum\sum Ds\,Ds_1 \frac{\Theta\Theta_1}{r}\right).$$

Diese Formel aber ist falls man zur Abkürzung

(30) $$\omega = -\frac{A^2}{r}$$

setzt, auch so darstellbar:

(31) $$\sum\sum Ds\,Ds_1 \left\{\left[\left(\varrho + \frac{d\omega}{dr}\right)\Theta\Theta_1 + \varrho^* E\right]dr + (\varphi+\omega)d(\Theta\Theta_1) + \chi dE\right\} = 0.$$

Diese Formel soll nun stattfinden für beliebige Bewegungen der beiden Ringe. Hieraus aber ergiebt sich (was hier nicht weiter ausgeführt werden soll), dass zwischen den unbekannten Functionen ϱ, ϱ^*, φ, χ folgende Relationen stattfinden müssen:

(32)
$$\varrho + \varrho^* = 2\,\frac{d(\varphi + \omega)}{dr} - \frac{d\omega}{dr} - r\,\frac{d^2\chi}{dr^2},$$
$$r\varrho^* = 2(\varphi + \omega) \qquad - r\,\frac{d\chi}{dr},$$

wo ω die in (30) angegebene Bedeutung hat.

§ 11.

Die Zerlegung des zeitlichen Differentials d in zwei Theile: $d = \Delta + \delta$.

Es sei gegeben ein *starrer Körper* M und ein *rechtwinkliges Axensystem* x, y, z; und zwar mögen beide Objecte in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen sein. Innerhalb des Körpers M sei irgendwelche elektrische Bewegung vorhanden. Die in irgend einem Massenpunkt m des Körpers im Augenblick t vorhandene elektrische Strömung i mag ihrer Grösse und Richtung nach durch eine (von m ausgehende) gerade Linie dargestellt gedacht, und diese Linie ebenfalls mit i bezeichnet sein.

Im nächstfolgenden Augenblick $t + dt$ wird im Allgemeinen die im Punkte m vorhandene elektrische Strömung bereits eine etwas andere sein, etwa dargestellt sein durch eine Linie i', die von i ihrer Richtung und Länge nach verschieden ist. Die Oberfläche des Körpers wird mithin von der (verlängerten) Linie i

und von der (verlängerten) Linie i' im Allgemeinen in verschiedenen Punkten getroffen werden.

Bezeichnet man also die den Axen x, y, z entsprechenden Componenten der Linie i mit u, v, w, so werden diese u, v, w im Allgemeinen während der Zeit dt aus *doppeltem* Grunde sich ändern, nämlich erstens deswegen, weil die Richtung von i im Innern des Körpers sich ändert, und zweitens auch deswegen, weil die relative Lage des Körpers zu jenem Axensystem von Augenblick zu Augenblick eine andere wird.

Um auf diese Dinge genauer einzugehen, wollen wir neben jenem Axensystem x, y, z noch ein zweites rechtwinkliges Axensystem ξ, η, ζ einführen, und dieses letztere mit dem gegebenen Körper M *starr verbunden* uns denken. Die Richtungscosinus des einen Systems in Bezug auf das andere werden alsdann Functionen der Zeit sein. Sie seien bezeichnet mit

$$(1)\qquad \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline \xi & \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \eta & \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \zeta & \alpha''' & \beta''' & \gamma''' \end{array}$$

Die Aenderungen von α', β', ... während der Zeit dt mögen $d\alpha'$, $d\beta'$, ... heissen; zugleich werde gesetzt:

$$(2)\qquad \begin{aligned} d\mathfrak{a} &= \beta' d\gamma' + \beta'' d\gamma'' + \beta''' d\gamma''' \,, \\ d\mathfrak{b} &= \gamma' d\alpha' + \gamma'' d\alpha'' + \gamma''' d\alpha''' \,, \\ d\mathfrak{c} &= \alpha' d\beta' + \alpha'' d\beta'' + \alpha''' d\beta''' \,. \end{aligned}$$

Alsdann repräsentiren bekanntlich

$$(3)\qquad d\mathfrak{a}\,,\quad d\mathfrak{b}\,,\quad d\mathfrak{c}$$

die *Drehungen*, welche der betrachtete starre Körper M während der Zeit dt um die drei Axen x, y, z erleidet. Und zwar wird z. B. $d\mathfrak{a}$ denjenigen Winkel vorstellen, um welchen der Körper M um die x-Axe im Sinne yz während der Zeit dt sich dreht.

Ebenso wie die Componenten der Strömung i im Systeme x, y, z mit u, v, w bezeichnet sind, ebenso mögen die Componenten derselben im Systeme ξ, η, ζ mit $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ bezeichnet werden. Alsdann ist offenbar:

$$(4)\qquad \begin{aligned} u &= \alpha'\overline{u} + \alpha''\overline{v} + \alpha'''\overline{w} \,, \\ v &= \beta'\overline{u} + \beta''\overline{v} + \beta'''\overline{w} \,, \\ w &= \gamma'\overline{u} + \gamma''\overline{v} + \gamma'''\overline{w} \,. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich z. B. für den der Zeit dt entsprechenden Zuwachs von u die Formel:

$$du = (\alpha' d\bar{u} + \alpha'' d\bar{v} + \alpha''' d\bar{w}) + (\bar{u}\, d\alpha' + \bar{v}\, d\alpha'' + \bar{w}\, d\alpha''') .$$

Substituirt man hier im letzten Trinom für $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ die aus (4) entspringenden Werthe:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \alpha' u + \beta' v + \gamma' w , \\ \bar{v} &= \alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w , \\ \bar{w} &= \alpha''' u + \beta''' v + \gamma''' w , \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} du = (\alpha' d\bar{u} + \alpha'' d\bar{v} + \alpha''' d\bar{w}) + {} & v(\beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'' + \beta''' d\alpha''') \\ & + w(\gamma' d\alpha' + \gamma'' d\alpha'' + \gamma''' d\alpha''') . \end{aligned}$$

Diese Formel aber verwandelt sich, unter Anwendung der Drehungen $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ (2), in die erste Formel folgenden Systems:

$$(5) \quad \begin{aligned} du &= (\alpha' d\bar{u} + \alpha'' d\bar{v} + \alpha''' d\bar{w}) + (w\, d\mathfrak{b} - v\, d\mathfrak{c}), \\ dv &= (\beta' d\bar{u} + \beta'' d\bar{v} + \beta''' d\bar{w}) + (u\, d\mathfrak{c} - w\, d\mathfrak{a}), \\ dw &= (\gamma' d\bar{u} + \gamma'' d\bar{v} + \gamma''' d\bar{w}) + (v\, d\mathfrak{a} - u\, d\mathfrak{b}), \end{aligned}$$

dessen übrige Formeln in analoger Weise zu erhalten sind.

Schliesslich wollen wir diese Formeln (5) folgendermassen schreiben:

$$(6) \quad \begin{aligned} du &= \varDelta u + \delta u, \\ dv &= \varDelta v + \delta v, \\ dw &= \varDelta w + \delta w, \end{aligned}$$

wo alsdann die $\varDelta u$, $\varDelta v$, $\varDelta w$ und δu, δv, δw die Bedeutungen haben:

$$(7) \quad \begin{aligned} \varDelta u &= \alpha' d\bar{u} + \alpha'' d\bar{v} + \alpha''' d\bar{w}, & \delta u &= w\, d\mathfrak{b} - v\, d\mathfrak{c}, \\ \varDelta v &= \beta' d\bar{u} + \beta'' d\bar{v} + \beta''' d\bar{w}, & \delta v &= u\, d\mathfrak{c} - w\, d\mathfrak{a}, \\ \varDelta w &= \gamma' d\bar{u} + \gamma'' d\bar{v} + \gamma''' d\bar{w}, & \delta w &= v\, d\mathfrak{a} - u\, d\mathfrak{b}. \end{aligned}$$

Auf diese Weise sind die Zuwüchse du, dv, dw (6) in zwei Theile zerlegt, in die $\varDelta u$, $\varDelta v$, $\varDelta w$ und die δu, δv, δw. Die $\varDelta u$, $\varDelta v$, $\varDelta w$ (7) sind zusammengesetzt aus den $d\bar{u}$, $d\bar{v}$, $d\bar{w}$, und rühren also, ebenso wie diese, lediglich von der Veränderung her, die die elektrische Strömung im *Innern* des Körpers erleidet. Andrerseits sind die δu, δv, δw (7) zusammengesetzt aus den $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$, und rühren daher, ebenso wie diese, lediglich von der *Lagenveränderung* her, welche der Körper in Bezug auf das Axensystem x, y, z erleidet.

Verallgemeinerung. Es seien beliebig viele Körper gegeben, die in Bezug auf irgend ein Axensystem x, y, z in beliebigen Bewegungen begriffen sind. Und im Innern eines jeden solchen Körpers seien irgend welche elektrische Strömungen vorhanden; so dass also die Constitution des ganzen Systems aus *doppeltem* Grunde von Augenblick zu Augenblick sich ändert, einmal deswegen, weil die elektrischen Strömungen im *Innern* der einzelnen Körper sich ändern, und zweitens auch deswegen, weil die räumliche Lage der Körper in Bezug auf jenes Axensystem sich ändert.

Es sei nun $\mathfrak{F}$ irgend eine Function der augenblicklichen Constitution des betrachteten Systemes; ferner seien $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F} + d\mathfrak{F}$ die Werthe dieser Function in zwei aufeinander folgenden Zeitaugenblicken t und $t + dt$. Alsdann wird der Zuwachs $d\mathfrak{F}$ in zwei Theile zerlegbar sein:

$$d\mathfrak{F} = \varDelta\mathfrak{F} + \delta\mathfrak{F}, \tag{8}$$

derart, dass $\varDelta\mathfrak{F}$ nur von den Veränderungen im *Innern* der einzelnen Körper herrührt, andererseits aber $\delta\mathfrak{F}$ lediglich den *Lagenveränderungen der Körper* in Bezug auf das Axensystem x, y, z seine Entstehung verdankt.

Versteht man also z. B. unter p, q, ... irgend welche nur von der Lage der Körper und der Lage des Axensystems x, y, z abhängenden Parameter, und denkt man sich die Function $\mathfrak{F}$ als einen Ausdruck von der Gestalt:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(p, q, \ldots u, v, w, u_1, v_1, w_1, \ldots),$$

wo u, v, w, u_1, v_1, w_1, ... die in den einzelnen Körperelementen vorhandenen, auf die Axen x, y, z bezogenen Strömungscomponenten vorstellen sollen, so werden, bei der Zerlegung

$$d\mathfrak{F} = \varDelta\mathfrak{F} + \delta\mathfrak{F}$$

die Werthe von $\varDelta\mathfrak{F}$ und $\delta\mathfrak{F}$ folgendermassen lauten:

$$\varDelta\mathfrak{F} = \sum\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial u}\varDelta u + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial v}\varDelta v + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial w}\varDelta w\right),$$

$$\delta\mathfrak{F} = \left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial p}dp + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q}dq + \ldots\right) + \sum\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial v}\delta v + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial w}\delta w\right),$$

die Summationen ausgedehnt über alle u, v, w, u_1, v_1, w_1, ...

Um die Hauptsache zu betonen: In unserer Formel (6):

$$du = \Delta u + \delta u \tag{9}$$

rührt der Theil δu her von der Verschiebung der ponderablen Masse und der *Mitverschiebung* der in dieser Masse vorhandenen elektrischen Strömung; während andererseits der Theil Δu herstammt von der Veränderung der elektrischen Strömung *im Innern* der ponderablen Masse. Man könnte daher vielleicht δu als den *convectiven* Theil des Zuwachses du, und andrerseits Δu als den *endogenen* Theil dieses Zuwachses bezeichnen. — Und dem analog könnte man alsdann auch in der allgemeinen Formel (8):

$$d\mathfrak{F} = \Delta\mathfrak{F} + \delta\mathfrak{F} \tag{10}$$

den Theil $\delta\mathfrak{F}$ als den *convectiven* und den Theil $\Delta\mathfrak{F}$ als den *endogenen* Theil bezeichnen.

§ 12.

Uebergang von linearen zu körperlichen Stromelementen. Die Hypothese Delta.

In einem *starren Körper M* seien (in Folge irgend welcher Ursachen) elektrische Strömungen vorhanden, die von Augenblick zu Augenblick sich ändern. Bezeichnet man also z. B. die in einem unendlich kleinen Massenelement DM des Körpers vorhandene elektrische Strömung mit i, und die Componenten von i nach drei *in die ponderable Masse des Körpers eingefügten* d. h. mit dieser Masse fest verbundenen (auf einander senkrechten) Axen x, y, z mit u, v, w, so werden diese u, v, w Functionen der Zeit sein. Ein solches Element DM mit der in ihm enthaltenen elektrischen Strömung i (u, v, w) pflegt man kurzweg ein *körperliches Stromelement* zu nennen.

Vergleichen wir *körperliche* Stromelemente mit den bisher von uns betrachteten *linearen* Stromelementen, so haben wir offenbar ganz *heterogene Dinge* vor uns. Während nämlich die Strömung in einem *linearen* Element im Innern der ponderablen Masse fortdauernd ein und dieselbe Richtung hat (nämlich fortdauernd der Axe des Elementes parallel bleibt), wird die elektrische Strömung in einem *körperlichen* Stromelement ihre Richtung in Bezug auf die ponderable Masse dieses Elementes im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick ändern.

In Anbetracht dieser Heterogenität ist es *absolut unmöglich*, von den Elementen der einen Art auf die der andern Art schliessen zu wollen, also z. B. absolut unmöglich, die für lineare Elemente erhaltenen Sätze und Formeln ohne Weiteres auf körperliche Elemente übertragen zu wollen. Vielmehr bedarf es zu einer solchen Uebertragung irgend welcher Hypothese. Diese Hypothese mag folgendermassen lauten:

Hypothese Delta[1]. *Denkt man sich die in einem körperlichen Stromelement iDM enthaltene elektrische Strömung i in drei Componenten u, v, w zerlegt nach drei in die ponderable Masse des Elements eingefügten (auf einander senkrechten) Axen x, y, z, so soll angenommen werden, dass dieses Element iDM, was seine ponderomotorischen und elektromotorischen Wirkungen auf irgend welche Objecte betrifft, völlig* **äquivalent** *sei mit der Gesammtwirkung der drei idealen Stromelemente uDM, vDM, wDM.*

Ein solches ideales Stromelement uDM hat denselben Charakter wie ein gewöhnliches *lineares* Stromelement. Denn beim einen wie beim andern ist die Richtung der Strömung im Innern der ponderablen Masse fortdauernd dieselbe. Auch kann man leicht ein solches ideales Stromelement uDM in ein System von lauter linearen Stromelementen verwandeln. Zu diesem Zwecke braucht man nur jenes ideale Element uDM in unendlich kleine Elemente zweiter Ordnung, nämlich in Parallelepipeda zu zerlegen, deren eine Kante mit u parallel ist.

Soll also die ponderomotorische oder elektromotorische Wirkung eines *körperlichen* Stromelements iDM auf irgend ein gegebenes Object berechnet werden, so wird man, auf Grund der Hypothese Delta, für diese Wirkung zunächst die Gesammtwirkung der drei idealen Stromelemente uDM, vDM, wDM zu substituiren haben. Sodann aber wird man die Wirkung eines jeden solchen idealen Elementes dadurch erhalten, dass man dasselbe in lauter unendlich kleine Parallelepipeda, nämlich in lauter *lineare* Stromelemente zerlegt, und nun endlich die Wirkungen dieser linearen Elemente (nach den schon gefundenen Sätzen und Formeln) näher bestimmt.

So z. B. haben wir früher zwei *lineare* Stromelemente JDs und J_1Ds_1 betrachtet, und für die elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}$, welche J_1Ds_1 in irgend einem Punkte des Elementes JDs in der

[1] Vergl. die Bemerkung zu Ende dieses Paragraphs.

Richtung Ds hervorbringt, folgende Formel erhalten [vgl. § 6, (3)]:

$$(1)\quad \mathfrak{E}\,dt = J_1\,Ds_1\{[\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^* E]\,dr + \lambda\Theta_1\,d\Theta + \mu\Theta\,d\Theta_1 + \nu\,dE\} + (dJ_1)\,Ds_1[o\,\Theta\Theta_1 + o^* E],$$

wo $\varkappa$, $\varkappa^*$, λ, μ, ν, o, o^* unbekannte Functionen von r sind. Nehmen wir nun statt des linearen Elementes $J_1\,Ds_1$ ein *körperliches* Stromelement $i_1\,DM_1$ oder $i_1\,D\tau_1$, — es mag nämlich $D\tau_1$ das Volumen von DM_1 vorstellen —, so erhalten wir (was hier nicht weiter ausgeführt werden soll) mittelst der soeben angegebenen Methode für die elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}$, welche dieses *körperliche* Stromelement $i_1\,D\tau_1$ in irgend einem Punkte des *linearen* Elementes JDs in der Richtung Ds hervorbringt, folgende Formel:

$$(2)\quad \mathfrak{E}\,dt = D\tau_1 \begin{Bmatrix} [\varkappa(aA+\cdot\cdot)(au_1+\cdot\cdot) + \varkappa^*(Au_1+\cdot\cdot)]\,dr \\ +\lambda(au_1+\cdot\cdot)\,d(aA+\cdot\cdot) \\ +\mu(aA+\cdot\cdot)\delta(au_1+\cdot\cdot) + \nu\delta(Au_1+\cdot\cdot) \end{Bmatrix}$$
$$+ D\tau_1[o(aA+\cdot\cdot)\Delta(au_1+\cdot\cdot) + o^*\Delta(Au_1+\cdot\cdot)],$$

wo z. B. $(aA+\cdot\cdot)$ für $(aA+bB+cC)$ und $(au_1+\cdot\cdot)$ für $(au_1+bv_1+cw_1)$ steht. Dabei bezeichnen a, b, c die Richtungscosinus der Linie r, ferner A, B, C die Richtungscosinus von Ds, und u_1, v_1, w_1 die Componenten der Strömung i_1. Endlich haben Δ und δ die schon früher angegebenen Bedeutungen [vgl. § 11 (6), (8)].

Dabei ist, was die Herleitung der Formel (2) betrifft, ein *in die ponderable Masse des Elements $i_1\,D\tau_1$ eingefügtes* Axensystem x, y, z der Betrachtung zu Grunde gelegt worden. Doch werden offenbar die in (2) enthaltenen Trinome

$$(aA+bB+cC),\quad (au_1+bv_1+cw_1),\quad (Au_1+Bv_1+Cw_1)$$

beim Uebergang zu einem andern Coordinatensystem ihre Gestalt *nicht* ändern. Folglich ist die Formel (2) ganz allgemein gültig für jedes beliebige Axensystem. Die beiden Stromelemente JDs und $i_1\,D\tau_1$ und das Axensystem x, y, z repräsentiren also drei Objecte, die in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen sein dürfen —, stets wird die Formel (2) in Gültigkeit sein.

Bei dieser ganz allgemeinen Anschauungsweise haben alsdann z. B. dA, dB, dC, wie man leicht erkennt, die Werthe:

$$(3)\qquad \begin{aligned} dA &= C d\mathfrak{b} - B d\mathfrak{c}, \\ dB &= A d\mathfrak{c} - C d\mathfrak{a}, \\ dC &= B d\mathfrak{a} - A d\mathfrak{b}, \end{aligned}$$

wo $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ diejenigen Drehungen vorstellen, welche die ponderable Masse des Elementes JDs während der Zeit dt um die Axen x, y, z erleidet, der Art dass z. B. $d\mathfrak{a}$ den Drehungswinkel um die x-Axe im Sinne yz bezeichnet. Ferner werden alsdann, was das in (2) enthaltene $\delta(au_1 + bv_1 + cw_1)$ betrifft, unter δu_1, δv_1, δw_1 [vgl. § 11, (7)] die Ausdrücke zu verstehen sein:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \delta u_1 &= w_1 d\mathfrak{b}_1 - v_1 d\mathfrak{c}_1, \\ \delta v_1 &= u_1 d\mathfrak{c}_1 - w_1 d\mathfrak{a}_1, \\ \delta w_1 &= v_1 d\mathfrak{a}_1 - u_1 d\mathfrak{b}_1, \end{aligned}$$

wo $d\mathfrak{a}_1$, $d\mathfrak{b}_1$, $d\mathfrak{c}_1$ diejenigen Drehungen vorstellen, welche die ponderable Masse des Elementes $i_1 D\tau_1$ während der Zeit dt um die Axen x, y, z erfährt.

Das in (2) enthaltene $\mathfrak{E}$ ist nur eine *Componente* der eigentlich ausgeübten elektromorischen Kraft $\mathfrak{R}$, nämlich die Componente von $\mathfrak{R}$ nach der Richtung Ds, und hat daher den Werth

$$(5)\qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B + \mathfrak{Z}C, \quad \text{[vgl. § 6, (2)]},$$

wo A, B, C die Richtungscosinus von Ds, und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die rechtwinkligen Componenten der Kraft $\mathfrak{R}$ vorstellen. A, B, C können ganz beliebige Werthe haben[1]). Substituirt man daher den Ausdruck (5) in der Formel (2), so müssen in dieser Formel die Coefficienten von A, B, C auf beiden Seiten einander gleich sein. Demgemäss zerfällt die Formel (2) in *drei Formeln*, wobei Rücksicht zu nehmen ist auf die in (3) angegebenen Werthe von dA, dB, dC. Und von diesen drei Formeln wird z. B. die erste folgendermassen lauten:

$$(6)\qquad \mathfrak{X}\,dt = D\tau_1 \left\{ \begin{aligned} &[\varkappa a(au_1 + \cdots) + \varkappa^* u_1]dr + \lambda(au_1 + \cdots)(d\mathfrak{a} + bd\mathfrak{c} - cd\mathfrak{b}) \\ &+ \mu a\delta(au_1 + \cdots) + \nu(\delta u_1 + v_1 d\mathfrak{c} - w_1 d\mathfrak{b}) \end{aligned} \right\}$$
$$\qquad + D\tau_1 [o a \Delta(au_1 + \cdots) + o^* \Delta u_1].$$

Auch wird diese Formel (6), ebenso wie (2), ganz allgemeine Gültigkeit besitzen, welche Bewegungen die drei Objecte JDs, $i_1 D\tau_1$ und (x, y, z) auch immer besitzen mögen.

---

1) abgesehen von der Relation: $A^2 + B^2 + C^2 = 1$.

Wie also diese Bewegungen auch beschaffen sein mögen, stets wird die x-Componente der von $i_1 D\tau_1$ in einem Punkte des Elements JDs hervorgebrachten elektromotorischen Kraft $\mathfrak{R}$ den in (6) angegebenen Werth besitzen. Dass analoge Werthe für die y- und z-Componente der Kraft $\mathfrak{R}$ gelten, bedarf kaum noch der Erwähnung.

Nach einem ganz allgemeinen Grundsatz, den man, streng genommen, allerdings als eine Hypothese zu bezeichnen hätte, ist nun die elektromotorische Kraft nur allein vom Inducenten abhängig, nämlich unabhängig von der Beschaffenheit des inducirten Körpers. Folglich wird die Formel (6) auch dann noch gelten, wenn man statt des Elementes JDs das Element irgend eines beliebigen und von beliebigen elektrischen Strömungen durchflossenen Körpers M eintreten lässt. Somit gelangt man zu folgendem Satz:

Es seien gegeben zwei starre Körper M und M_1, und überdies ein rechtwinkliges Axensystem (x, y, z); und zwar seien all' diese drei Objecte in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen.

Ferner seien DM und DM_1 irgend zwei Massenelemente der beiden Körper. Das Volumen von DM_1 und die in DM_1 vorhandenen elektrischen Strömungscomponenten seien bezeichnet mit $D\tau_1$ und mit u_1, v_1, w_1.

Endlich seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Componenten der vom Elemente DM_1 in irgend einem Punkt des Elementes DM hervorgebrachten elektromotorischen Kraft. Alsdann wird z. B. $\mathfrak{X}$ den in (6) angegebenen Werth haben:

$$(7)\quad \mathfrak{X}\,dt = D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} [\varkappa a(au_1+\cdot\cdot)+\varkappa^* u_1]\,dr+\lambda(au_1+\cdot\cdot)(d\mathfrak{a}+b\,d\mathfrak{c}-c\,d\mathfrak{b}) \\ \quad +\mu a\delta(au_1+\cdot\cdot)+\nu(\delta u_1+v_1\,d\mathfrak{c}-w_1\,d\mathfrak{b}) \end{array} \right\}$$
$$+ D\tau_1\,[oa\Delta(au_1+\cdot\cdot)+o^*\Delta u_1].$$

Hier bezeichnet r den gegenseitigen Abstand der beiden Elemente DM, DM_1. Ferner bezeichnen a, b, c die Richtungscosinus von r. Ferner bezeichnen $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ die während der Zeit dt erfolgenden Drehungen des Körpers M um die Axen x, y, z respective im Sinne yz, zx, xy. Ueberdies haben Δ und δ die in § 11 angegebenen Bedeutungen.

Specialfall. Sind die Körper M und M_1 und das Axensystem (x, y, z) alle drei miteinander starr verbunden, so werden offenbar dr, da, db, dc, $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$, und ebenso auch δu_1,

δv_1, δw_1 und $\delta(au_1 + bv_1 + cw_1)$ alle $= 0$ sein; so dass also in diesem speciellen Fall die Formel (7) sich reducirt auf

$$(7\text{a}) \qquad \mathfrak{X} d\tau = D\tau_1 [o a \Delta (au_1 + bv_1 + cw_1) + o^* \Delta u_1].$$

Hieraus folgt beiläufig bemerkt, *dass die Function o^* keine von Null verschiedene Constante sein kann*; denn sonst würde ein Theil der von M_1 auf M ausgeübten elektrischen Kräfte unabhängig sein von der Entfernung, was anzunehmen offenbar absurd wäre. — Von dieser einfachen Bemerkung ist weiterhin Gebrauch zu machen.

Bemerkung. — Die hier besprochene Hypothese *Delta*, welche bereits in meiner ersten Publication über diese Gegenstände, nämlich in den Berichten unserer Ges. 1872 Seite 162, mit (δ) bezeichnet wurde, ist von Neuem von mir wiederholt worden in meinem Werk: »*Die elektrischen Kräfte*«, Leipzig b. Teubner, 1873, daselbst Seite 169.

Uebrigens repräsentirt die Hypothese Delta keineswegs etwas Neues, sondern vielmehr ein Axiom, welches stillschweigend (ohne dasselbe als Axiom oder Hypothese zu bezeichnen, gewissermassen als etwas sich von selber Verstehendes) schon vor mir von vielen Autoren angewendet ist, so z. B. von Kirchhoff und Helmholtz.

§ 13.

Fortsetzung.

Wir wenden uns zu den *ponderomotorischen* Wirkungen. Wir haben die ponderomotorische Arbeit, welche zwei *lineare* Stromelemente DM und DM_1 während der Zeit dt auf einander ausüben, mit

$$(8) \qquad dL = \left(dL\right)_{DM}^{DM_1} + \left(dL\right)_{DM_1}^{DM}$$

bezeichnet, [vgl. § 7, (17)], und für diese Arbeit folgenden Werth gefunden [vgl. § 7, (18)]:

$$(9) \quad dL = JJ_1 Ds\, Ds_1 \{[\varrho\Theta\Theta_1 + \varrho^* E]\, dr + \varphi d(\Theta\Theta_1) + \chi dE\},$$

wo ϱ, ϱ^*, φ, χ unbekannte Functionen von r sind. Dabei bezeichnen Ds, Ds_1 die Längen der beiden Elemente, und J, J_1 ihre Stromstärken.

Dieses Resultat ist nun, mittelst unserer (zu Anfang des vorigen Paragraphs angegebenen) Hypothese Delta leicht übertragbar auf den Fall, dass das eine der beiden Elemente ein *körperliches* ist, und sodann auch auf den Fall, dass *beide* Elemente körperlich sind. Man gelangt in solcher Weise (was hier nicht weiter ausgeführt werden soll) zu folgendem Satz:

Es seien gegeben zwei starre Körper M und M_1, und ein rechtwinkliges Axensystem (x, y, z); und zwar seien all' diese drei Objecte in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen.

Irgend zwei Massenelemente der beiden Körper seien bezeichnet mit DM und DM_1. Ferner seien $D\tau$ und $D\tau_1$ die Volumina dieser Massenelemente, und u, v, w und u_1, v_1, w_1 die in ihnen vorhandenen elektrischen Strömungscomponenten.

Alsdann wird die von diesen beiden Elementen DM und DM_1 während der Zeit dt auf einander ausgeübte ponderomotorische Arbeit dL den Werth haben:

$$(10) \quad dL = D\tau D\tau_1 \begin{Bmatrix} [\varrho(au + \cdot\cdot)(au_1 + \cdot\cdot) + \varrho^*(uu_1 + \cdot\cdot)]\, dr \\ + \varphi\delta[(au + \cdot\cdot)(au_1 + \cdot\cdot)] + \chi\delta(uu_1 + \cdot\cdot) \end{Bmatrix}.$$

Hier bezeichnet r den gegenseitigen Abstand der beiden Elemente. Ferner bezeichnen a, b, c die Richtungscosinus von r. Und überdies haben Δ, δ die in § 11 angegebenen Bedeutungen.

Man kann jetzt von Neuem das *Helmholtz'sche Princip des vollständigen Differentials* (§ 8) anwenden, nämlich auf die ponderomotorische Arbeit (10) und auf die aus (7) sich ergebende elektromotorische Arbeit. Mit andern Worten: Man kann jenes Princip, ebenso wie es früher auf *lineare* Stromelemente angewendet wurde, gegenwärtig auf zwei *körperliche* Stromelemente in Anwendung bringen. Dabei aber ergiebt sich nichts Neues. Vielmehr gelangt man in solcher Weise (was hier nicht weiter ausgeführt werden soll) zu gewissen Relationen, die völlig identisch sind mit den schon damals [in § 8, (26)] gefundenen Relationen.

§ 14.

Vereinfachung der erhaltenen Resultate. Die Hypothese Epsilon.

Ist irgendwo im Universum eine elektrische Strömung i vorhanden, die ihrer Stärke und Richtung nach von Augenblick zu Augenblick sich ändert, so werden durch diese Strömung i und durch die Aenderungen von i in allen übrigen Punkten des Universums bestimmte ponderomotorische und elektromotorische Wirkungen erzeugt. Es liegt der Gedanke nahe, dass diese Wirkungen unabhängig sein müssten von den *Ursachen*, durch welche i und die Aenderungen von i hervorgebracht werden.

Findet z. B. die Strömung i statt irgendwo im Innern eines starren Körpers M, so kann eine Richtungsänderung von i dadurch entstehen, dass die Strömung i im Innern der ponderablen Masse M sich dreht, ebenso gut aber auch dadurch, dass man der ganzen Masse M irgendwelche Drehung giebt, ohne dass dabei die Strömung i im Innern von M sich ändert, und ebenso gut endlich auch dadurch, dass beiderlei Processe gleichzeitig erfolgen. Und unser Gedanke geht nun dahin, dass die durch i und die Aenderung von i erzeugten Wirkungen in all' diesen drei Fällen *dieselben* seien, falls man nur dafür Sorge trägt, dass i und die Aenderung von i in allen drei Fällen *dieselben* sind.

So ansprechend ein solcher Gedanke vielleicht auch erscheinen mag, so wird er doch immer nur als eine Hypothese anzusehen sein. Und zwar wollen wir dieser Hypothese folgende ganz bestimmte Fassung geben (indem wir dabei die Buchstaben i, M durch i_1, M_1 ersetzen):

Hypothese Epsilon[1]). — *Es sei DM_1 ein Massenelement eines starren Körpers M_1. Ferner seien u_1, v_1, w_1 die Componenten der in DM_1 vorhandenen elektrischen Strömung i_1, die Componenten gebildet gedacht nach drei Axen x, y, z, die in die ponderable Masse irgend eines andern starren Körpers M fest eingefügt sind.*

Die beiden Körper M und M_1 mögen sich in ganz beliebigen, von einander unabhängigen Bewegungen befinden.

Während der Zeit dt mögen nun die in DM_1 vorhandenen Strömungscomponenten u_1, v_1, w_1 um du_1, dv_1, dw_1 anwachsen. Alsdann soll angenommen werden, dass die von DM_1 auf die einzelnen Punkte des Körpers M während der Zeit dt ausgeübten ponderomotorischen und elektromotorischen Wirkungen völlig unabhängig sind von den Ursachen, denen die Zuwüchse du_1, dv_1, dw_1 ihre Entstehung verdanken.

Oder mit andern Worten: *Sind x_1, y_1, z_1 und u_1, v_1, w_1 die Coordinaten und elektrischen Strömungscomponenten des Elementes DM_1, und sind ferner dx_1, dy_1, dz_1 und du_1, dv_1, dw_1 die Zuwüchse dieser Grössen während der Zeit dt, so soll angenommen werden, dass die von diesem Element DM_1 während der Zeit dt auf die einzelnen Punkte des Körpers M ausgeübten pon-*

1) Vergl. die Bemerkung zu Ende dieses Paragraphs.

deromotorischen und elektromotorischen Wirkungen durch Angabe der zwölf Argumente

$$x_1, \; y_1, \; z_1, \; dx_1, \; dy_1, \; dz_1,$$
$$u_1, \; v_1, \; w_1, \; du_1, \; dv_1, \; dw_1$$

bereits völlig bestimmt sind, ohne dass es dazu noch irgend welcher besondern Angaben über die Entstehungsweise der Zuwüchse dx_1, dy_1, dz_1, du_1, dv_1, dw_1 *bedürfte.*

Es sei DM irgend ein Element des Körpers M, und es seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Componenten der von DM_1 in irgend einem Punkte des Elementes DM hervorgebrachten elektromotorischen Kraft. Alsdann ist z. B. $\mathfrak{X}$ ohne Weiteres angebbar auf Grund der Formel § 12, (7); wobei zu beachten ist, dass nach unserer gegenwärtigen Festsetzung die Axen x, y, z *in die ponderable Masse von* M *eingefügt*, mithin die in jener Formel vorhandenen Drehungen $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ alle $= 0$ sind. Demgemäss erhalten wir, auf Grund jener Formel, für die in Rede stehende Componente $\mathfrak{X}$ folgenden Ausdruck:

$$(1) \quad \mathfrak{X}dt = D\tau_1 \begin{Bmatrix} [\varkappa a(au_1 + \cdot\cdot) + \varkappa^* u_1]\, dr + \lambda(au_1 + \cdot\cdot)\, da \\ + \mu a\, \delta(au_1 + \cdot\cdot) + \nu\, \delta u_1 \\ + o a \Delta(au_1 + \cdot\cdot) + o^* \Delta u_1 \end{Bmatrix}.$$

Nach der für Δ, δ gegebenen Definition (§ 11) ist allgemein $d = \Delta + \delta$, mithin $\Delta = d - \delta$, also z. B.:

$$\Delta u_1 = du_1 - \delta u_1,$$
$$\Delta(au_1 + \cdot\cdot) = d(au_1 + \cdot\cdot) - \delta(au_1 + \cdot\cdot);$$

so dass also die Formel (1) übergeht in:

$$(2) \quad \mathfrak{X}dt = D\tau_1 \begin{Bmatrix} [\varkappa a(au_1 + \cdot\cdot) + \varkappa^* u_1]\, dr + \lambda(au_1 + \cdot\cdot)\, da \\ + o a\, d(au_1 + \cdot\cdot) + o^* du_1 \\ + (\mu - o)\, a\, \delta(au_1 + \cdot\cdot) + (\nu - o^*)\, \delta u_1 \end{Bmatrix},$$

wo $D\tau_1$ das Volumen des Elementes DM_1 bezeichnet.

Nun ist offenbar:

$$\delta(au_1 + \cdot\cdot) = (u_1\, \delta a + \cdot\cdot) + (a\, \delta u_1 + \cdot\cdot).$$

Nach der Definition von δ (§ 11) sind aber δa, δb, δc identisch mit da, db, dc. Somit folgt:

$$\delta(au_1 + \cdot\cdot) = (u_1\, da + \cdot\cdot) + (a\, \delta u_1 + \cdot\cdot).$$

Dies in (2) substituirt, ergiebt sich sofort:

$$
(3)\quad \mathfrak{X}\,dt = D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} \quad [\varkappa a(au_1 + \cdots) + \varkappa^* u_1]\,dr + \lambda(au_1 + \cdots)\,da \\ + o a d(au_1 + \cdots) + o^* du_1 + (\mu - o) a(u_1 da + \cdots) \\ + (\mu - o) a(a\delta u_1 + b\delta v_1 + c\delta w_1) + (\nu - o^*)\delta u_1 \end{array} \right\}.
$$

Sind x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten der Elemente DM und DM_1, so werden offenbar x, y, z *constant*, d. h. von der Zeit unabhängig sein, weil das Axensystem (x, y, z) mit der ponderablen Masse des starren Körpers M fest verbunden sein soll. Somit ergiebt sich z. B.:

$$
(4)\quad \begin{aligned} r^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, \\ dr &= -\left(\frac{x - x_1}{r}\,dx_1 + \frac{y - y_1}{r}\,dy_1 + \frac{z - z_1}{r}\,dz_1\right), \end{aligned}
$$

und ferner:

$$
(5)\quad \begin{aligned} a &= \frac{x - x_1}{r}, \\ da &= -\frac{1}{r}\,dx_1 - \frac{x - x_1}{r^2}\,dr, \end{aligned}
$$

also mit Rücksicht auf (4):

$$
(6)\quad da = -\frac{1}{r}dx_1 + \frac{x - x_1}{r^2}\left(\frac{x - x_1}{r}\,dx_1 + \frac{y - y_1}{r}\,dy_1 + \frac{z - z_1}{r}\,dz_1\right).
$$

Denkt man sich nun diese Werthe von $r, a, b, c, dr, da, db, dc$ im Ausdrucke (3) substituirt, so erkennt man sofort, dass die *beiden ersten Zeilen* jenes Ausdruckes nur von den zwölf Argumenten

$$
(7)\quad \begin{array}{l} x_1,\ y_1,\ z_1,\ dx_1,\ dy_1,\ dz_1, \\ u_1,\ v_1,\ w_1,\ du_1,\ dv_1,\ dw_1 \end{array}
$$

abhängen, (nämlich, abgesehen von diesen zwölf Argumenten, nur noch die *constanten* Coordinaten des Elementes DM enthalten). Wesentlich andrer Art ist hingegen die *dritte Zeile* jenes Ausdruckes, insofern, als in dieser dritten Zeile auch noch gewisse *Theile* der Zuwüchse du_1, dv_1, dw_1, nämlich die Grössen

$$
(8)\quad \delta u_1,\ \delta v_1,\ \delta w_1
$$

enthalten sind.

Nach unserer Hypothese Epsilon soll nun aber die in Rede stehende elektromotorische Wirkung *nur allein von den zwölf Argumenten* (7) *abhängen.* D. h. die in jener dritten Zeile enthaltenen Functionen $\mu - o$ und $\nu - o^*$ müssen identisch $= 0$ sein.

Um diese Schlussfolgerung etwas durchsichtiger zu gestalten, sei bemerkt, dass jene dritte Zeile, falls man ihr für δu_1, δv_1, δw_1 die bekannten Werthe [vgl. § 11, (7)]:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \delta u_1 &= w_1 d\mathfrak{b}_1 - v_1 d\mathfrak{c}_1 , \\ \delta v_1 &= u_1 d\mathfrak{c}_1 - w_1 d\mathfrak{a}_1 , \\ \delta w_1 &= v_1 d\mathfrak{a}_1 - u_1 d\mathfrak{b}_1 \end{aligned}$$

substituirt, folgende Gestalt annimmt:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &(\mu - o)\, a[(cv_1 - bw_1)d\mathfrak{a}_1 + (aw_1 - cu_1)d\mathfrak{b}_1 + (bu_1 - av_1)d\mathfrak{c}_1] \\ &\quad + (\nu - o^*)(w_1 d\mathfrak{b}_1 - v_1 d\mathfrak{c}_1) \end{aligned}\right\},$$

wo $d\mathfrak{a}_1$, $d\mathfrak{b}_1$, $d\mathfrak{c}_1$ die der Zeit dt entsprechenden Drehungen des Körpers M_1 um die Axen x, y, z bezeichnen.

Diese dritte Zeile (10) darf nun, ebenso wie der ganze Ausdruck (3), nach unserer Hypothese Epsilon nur allein von den zwölf Argumenten (7) abhängen. Sie muss also z. B. *unabhängig* sein von jenen Drehungen $d\mathfrak{a}_1$, $d\mathfrak{b}_1$, $d\mathfrak{c}_1$. Folglich müssen in (10) die Coefficienten von $d\mathfrak{a}_1$, $d\mathfrak{b}_1$, $d\mathfrak{c}_1$ einzeln $= 0$ sein. Hieraus aber folgt — in Anbetracht der Willkürlichkeit von a, b, c, u_1, v_1, w_1 — sofort, dass die Functionen $\mu - o$ und $\nu - o^*$ identisch $= 0$ sein müssen. — *Q. e. d.*

Wir haben somit die Relationen zu notiren:

$$(11)\qquad \mu = o \quad \text{und} \quad \nu = o^* .$$

Wir halten fest an den zu Anfang dieses Paragraphen (in der Hypothese Epsilon) gemachten Bezeichnungen und Festsetzungen, überdies aber wollen wir gegenwärtig nicht nur in M_1, sondern ebenso auch in M irgendwelche elektrische Strömungen uns denken, und die im Element DM vorhandenen Strömungscomponenten mit u, v, w bezeichnen. Die während der Zeit dt von den beiden Elementen DM und DM_1 auf einander ausgeübte *ponderomotorische Arbeit* dL wird alsdann, nach § 13, (10), den Werth haben:

$$(12)\quad dL = D\tau\, D\tau_1 \left\{\begin{aligned} &[\varrho(au + \cdot\cdot)(au_1 + \cdot\cdot) + \varrho^*(uu_1 + \cdot\cdot)]\, dr \\ &+ \varphi\,\delta[(au + \cdot\cdot)(au_1 + \cdot\cdot)] + \chi\,\delta(uu_1 + \cdot\cdot) \end{aligned}\right\},$$

wo $D\tau$ und $D\tau_1$ die Volumina der Elemente DM und DM_1 vorstellen. Diese Formel:

$$(13)\quad dL = D\tau D\tau_1 \begin{Bmatrix} [\varrho(au+\cdot\cdot)(au_1+\cdot\cdot)+\varrho^*(uu_1+\cdot\cdot)]\,dr \\ +\,\varphi\delta[(au+\cdot\cdot)(au_1+\cdot\cdot)]+\chi\delta(uu_1+\cdot\cdot) \end{Bmatrix}$$

wollen wir nun einer genaueren Betrachtung unterwerfen.

Es ist [vgl. § 11, (7)]:

$$(14)\qquad \begin{aligned} \delta u &= w d\mathfrak{b} - v d\mathfrak{c}, \\ \delta v &= u d\mathfrak{c} - w d\mathfrak{a}, \\ \delta w &= v d\mathfrak{a} - u d\mathfrak{b}, \end{aligned}$$

wo $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ die der Zeit dt entsprechenden Drehungen des Körpers M um die Axen x, y, z vorstellen. Diese Drehungen aber sind $= 0$, weil das Axensystem x, y, z mit M fest verbunden gedacht wird. Folglich sind im hier betrachteten Falle die δu, δv, δw alle $= 0$. Aus diesen Formeln

$$(15)\qquad \delta u = 0,\quad \delta v = 0,\quad \delta w = 0,$$

folgt aber sofort: $\delta(au+\cdot\cdot) = (u\delta a+\cdot\cdot)$, oder, weil die δa, δb, δc [nach der Definition von δ (§ 11)] mit den da, db, dc identisch sind:

$$(16)\qquad \delta(au+\cdot\cdot) = (u\,da+\cdot\cdot).$$

Andererseits ist [wie schon beim Uebergange von (2) zu (3) bemerkt wurde]:

$$(17)\qquad \delta(au_1+\cdot\cdot) = (u_1 da+\cdot\cdot)+(a\delta u_1+\cdot\cdot).$$

Aus (15), (16), (17) ergiebt sich nun weiter:

$$(18)\qquad \delta(uu_1+\cdot\cdot) = (u\delta u_1+\cdot\cdot),$$

$$(19)\qquad \begin{aligned} \delta[(au+\cdot\cdot)(au_1+\cdot\cdot)] &= (au_1+\cdot\cdot)(u\,da+\cdot\cdot)+ \\ &+(au+\cdot\cdot)(u_1 da+\cdot\cdot)+(au+\cdot\cdot)(a\delta u_1+\cdot\cdot). \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe (17), (18), (19) in (13), so erhält man sofort:

$$(20)\quad dL = D\tau D\tau_1 \begin{Bmatrix} [\varrho(au+\cdot\cdot)(au_1+\cdot\cdot)+\varrho^*(uu_1+\cdot\cdot)]\,dr \\ +\,\varphi[(au+\cdot\cdot)(u_1 da+\cdot\cdot)+(au_1+\cdot\cdot)(u\,da+\cdot\cdot)] \\ +\,\varphi(au+\cdot\cdot)(a\delta u_1+\cdot\cdot)+\chi(u\delta u_1+\cdot\cdot) \end{Bmatrix}.$$

Nach unserer Hypothese Epsilon kann aber die ponderomotorische Arbeit dL wohl von du_1, dv_1, dw_1, nicht aber von

$\delta u_1, \delta v_1, \delta w_1$ abhängen. Denn die $\delta u_1, \delta v_1, \delta w_1$ repräsentiren gewisse Theile der du_1, dv_1, dw_1, und sind [vgl. (9)] ihren Werthen nach wesentlich bedingt durch die *Entstehungsweise* der Zuwüchse du_1, dv_1, dw_1.

Hieraus folgt, dass die dritte Zeile des Ausdrucks (20) verschwinden muss, und dass also die Functionen φ und χ identisch $= 0$ sein müssen. Dieses Resultat, mit dem früheren Resultate (11) zusammengefasst, können wir also sagen:

Aus der Hypothese Epsilon folgt, dass die Functionen μ, ν, φ, χ, o, o^* folgenden vier Relationen entsprechen müssen:

(21)
$$\begin{aligned} \mu &= o\,, & \varphi &= 0\,, \\ \nu &= o^*\,, & \chi &= 0\,. \end{aligned}$$

Bemerkung. Die in diesem Paragraph besprochene Hypothese *Epsilon*, welche schon in meiner ersten Publication über diese Gegenstände, nämlich in den Berichten unserer Ges. (1872, Seite 162) mit (ε) bezeichnet wurde, ist genauer von mir dargelegt worden in meinem Werke »*Die elektrischen Kräfte*«, Leipzig, bei Teubner 1873, daselbst Seite 187.

Später, nämlich in den Abhandlungen unserer Ges. vom Jahre 1873, ist dieselbe, der Kürze willen und um lästige Wiederholungen zu vermeiden, nur in verdeckter Weise von mir angegeben worden, nämlich verschmolzen mit einer gewissen anderen Voraussetzung [vgl. daselbst Seite 470 (γ) und Seite 481, 482]. Und leider hat Helmholtz bei seinen Betrachtungen über meine Untersuchungen die Hypothese Epsilon in dieser mehr oder weniger undeutlichen Fassung, nicht aber in ihrer ursprünglichen wahren Gestalt vor Augen gehabt. (Vgl. Helmholtz' Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 710, 711.)

Als beachtenswerth möchte ich noch diejenigen ausführlichen Darlegungen hervorheben, welche von mir über die Hypothese Epsilon in den Ber. unserer Ges. vom August 1874, Seite 137, 138 gemacht sind.

Schliesslich bitte ich noch Folgendes zu erwägen: Es ist ein bekannter und bis jetzt wohl niemals bezweifelter Satz, dass die von einem elektrischen Strom in einem gegebenen Conductor inducirten elektromotorischen Kräfte stets *Null* sind, falls die Intensität des Stromes, und ebenso auch seine relative Lage zum Conductor *constant* bleiben. Dieser Satz aber würde aufhören richtig zu sein, falls man jene Hypothese Epsilon fallen lassen wollte; — wie sich solches ergiebt aus einer von mir vor wenig Jahren angestellten Untersuchung (Abh. unserer Ges. 1892, Seite 67, 123 und 145).

§ 15.

Bestimmung der unbekannten Functionen. Die in solcher Weise für das elektromotorische und für das ponderomotorische Elementargesetz sich ergebenden einfachen Gestalten.

Wir haben in unsern Formeln im Ganzen *eilf* unbekannte Functionen, nämlich[1]:

$$o,\ o^*,\ \varkappa,\ \varkappa^*,\ \varrho,\ \varrho^*,$$
$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \varphi,\ \chi.$$

Und zur Bestimmung dieser Functionen haben wir im Ganzen *fünfzehn* Gleichungen erhalten, nämlich zuvörderst:

vier Gleichungen [§ 8, (26)], auf Grund des Helmholtz-schen Princips des vollständigen Differentials; ferner

fünf Gleichungen [§ 9, (29) und (29g)], auf Grund des F. Neumann'schen elektromotorischen Integralgesetzes; ferner:

zwei Gleichungen [§ 10, (32)], auf Grund des F. Neumann-schen ponderomotorischen Integralgesetzes; endlich:

vier Gleichungen [§ 14, (21)], auf Grund der vom Verfasser eingeführten Hypothese Epsilon.

Es ist wohl ein recht günstiges Zeichen für die Richtigkeit unserer Grundlagen, dass all' diese *fünfzehn* Gleichungen, in denen doch nur *eilf* Unbekannte enthalten sind, *untereinander in Einklang sich befinden*. Zuvörderst folgt aus diesen fünfzehn Gleichungen (was hier nicht weiter ausgeführt werden soll), dass die Function o^* eine *Constante* ist, und dass sie also nach einer früher [in § 12 bei (7a)] gemachten Bemerkung $= 0$ sein muss. Solches erkannt ergiebt sich alsdann (was hier ebenfalls nicht weiter ausgeführt werden soll), dass jene eilf unbekannten Functionen folgende Werthe haben:

$$(1)\qquad \begin{cases} o = \omega, & \varkappa = \dfrac{\omega}{r}, \qquad \varrho = \dfrac{d\omega}{dr} - \dfrac{2\omega}{r}, \\ o^* = 0 & \varkappa^* = -\dfrac{\omega}{r} \qquad \varrho^* = \dfrac{2\omega}{r}, \\ \multicolumn{2}{c}{\mu = \omega, \quad \text{und } \lambda = \nu = \varphi = \chi = 0.} \end{cases}$$

Oder genauer ausgedrückt: Ein *Theil* der in Rede stehenden fünfzehn Gleichungen führt zu den hier angegebenen Werthen,

1) Die Function ω gehört *nicht* zu den unbekannten Functionen. In der That ist ω eine gegebene Function. Vgl. § 9, (27).

und der *übrige Theil* der Gleichungen findet sich durch diese Werthe befriedigt.

Nun ist bekanntlich ω nur Abbreviatur für folgende Function:

$$(2) \qquad \omega = -\frac{A^2}{r}, \text{ [vgl. § 9 (27)].}$$

Demgemäss nehmen die Werthe (1) folgende Gestalt an:

$$(3) \qquad \begin{cases} o = -\dfrac{A^2}{r}, & \varkappa = -\dfrac{A^2}{r^2}, \qquad \varrho = +\dfrac{3A^2}{r^2}, \\ o^* = 0, & \varkappa^* = +\dfrac{A^2}{r^2}, \qquad \varrho^* = -\dfrac{2A^2}{r^2}, \\ \mu = -\dfrac{A^2}{r}, \text{ und } \lambda = \nu = \varphi = \chi = 0. \end{cases}$$

Substituirt man diese Werthe (3) in der Formel des Satzes § 12, (7), so erhält man sofort:

$$\mathfrak{X}\,dt = -A^2 D\tau_1 \left\{ \left[\frac{a(au_1 + \cdot\cdot)}{r^2} - \frac{u_1}{r^2} \right] dr + \frac{a\delta(au_1 + \cdot\cdot)}{r} \right\}$$

$$- A^2 D\tau_1 \frac{a\Delta(au_1 + \cdot\cdot)}{r},$$

also weil $\Delta + \delta = d$ ist:

$$(4) \qquad \mathfrak{X}\,dt = -A^2 D\tau_1 \left\{ \left[\frac{a(au_1 + \cdot\cdot)}{r^2} - \frac{u_1}{r^2} \right] dr + \frac{a\,d(au_1 + \cdot\cdot)}{r} \right\}.$$

Substituirt man ferner die Werthe (3) in der Formel des Satzes § 13, (10), so erhält man sofort:

$$(5) \qquad dL = A^2 D\tau D\tau_1 \left[\frac{3(au + \cdot\cdot)(au_1 + \cdot\cdot)}{r^2} - \frac{2(uu_1 + \cdot\cdot)}{r^2} \right] dr.$$

Demgemäss gewinnen die soeben citirten Sätze [§ 12 (7) und § 13, (10)] folgende einfache Gestalt:

Es seien gegeben zwei starre Körper M und M_1, und überdies ein rechtwinkliges Axensystem (x, y, z); und zwar seien all' diese drei Objecte in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen.

Irgend zwei Massenelemente der beiden Körper seien bezeichnet mit DM und DM_1. Ferner seien $D\tau$ und $D\tau_1$ die Volumina dieser Elemente, und u, v, w und u_1, v_1, w_1 die in ihnen vorhandenen elektrischen Strömungscomponenten.

Ferner seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Componenten der vom Elemente DM_1 in irgend einem Punkte des Elementes DM hervorgebrachten elektromotorischen Kraft. Alsdann werden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ [vgl. (4)] *die Werthe haben:*

$$(6)\quad\begin{cases} \mathfrak{X}\,dt = -A^2 D\tau_1 \left(\dfrac{a(au_1+bv_1+cw_1)-u_1}{r^2}\,dr + \dfrac{a\,d(au_1+bv_1+cw_1)}{r}\right), \\ \mathfrak{Y}\,dt = -A^2 D\tau_1 \left(\dfrac{b(au_1+bv_1+cw_1)-v_1}{r^2}\,dr + \dfrac{b\,d(au_1+bv_1+cw_1)}{r}\right), \\ \mathfrak{Z}\,dt = -A^2 D\tau_1 \left(\dfrac{c(au_1+bv_1+cw_1)-w_1}{r^2}\,dr + \dfrac{c\,d(au_1+bv_1+cw_1)}{r}\right). \end{cases}$$

Hier bezeichnet r den gegenseitigen Abstand der beiden Elemente DM, DM_1; ferner bezeichnen a, b, c die Richtungscosinus von r. Endlich deutet die Charakteristik d diejenigen Zuwüchse an, welche die betreffenden Grössen während des Zeitelements dt erfahren.

Andrerseits wird die von den beiden Elementen DM und DM_1 während der Zeit dt aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit dL [vgl. (5)] *folgenden Werth haben:*

$$(7)\quad dL = A^2 D\tau\, D\tau_1 \left(\frac{3(au+bv+cw)(au_1+bv_1+cw_1)-2(uu_1+vv_1+ww_1)}{r^2}\right) dr,$$

wo r, a, b, c und ebenso auch dr dieselben Bedeutungen haben wie in (6).

Nun ist offenbar:

$$dr = a(dx - dx_1) + b(dy - dy_1) + c(dz - dz_1),$$

falls man nämlich unter a, b, c die Cosinus der Richtung $r(DM_1 \rightarrow DM)$ versteht, und überdies die Coordinaten der beiden Elemente DM und DM_1 mit x, y, z und x_1, y_1, z_1 bezeichnet. Substituirt man diesen Werth von dr in (7), *so erkennt man sofort, dass die Componenten X, Y, Z der von DM_1 auf DM ausgeübten ponderomotorischen Kraft folgende Werthe haben:*

$$(7\text{a})\quad\begin{cases} X = A^2 D\tau\, D\tau_1 \left(\dfrac{3(au+\cdot\cdot)(au_1+\cdot\cdot)-2(uu_1+\cdot\cdot)}{r^2}\right) a, \\ Y = A^2 D\tau\, D\tau_1 \left(\dfrac{3(au+\cdot\cdot)(au_1+\cdot\cdot)-2(uu_1+\cdot\cdot)}{r^2}\right) b, \\ Z = A^2 D\tau\, D\tau_1 \left(\dfrac{3(au+\cdot\cdot)(au_1+\cdot\cdot)-2(uu_1+\cdot\cdot)}{r^2}\right) c. \end{cases}$$

Für die Componenten X_1, Y_1, Z_1 der umgekehrt von DM auf DM_1 ausgeübten ponderomotorischen Kraft ergeben sich genau dieselben Werthe, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen.

Ebenso wie früher [§ 6, (14)] mag die von den beiden Elementen DM und DM_1 während der Zeit dt aufeinander ausgeübte *elektromotorische Arbeit* bezeichnet werden mit

$$d\mathfrak{L} = \left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{DM_1} + \left(d\mathfrak{L}\right)_{DM_1}^{DM}. \tag{8}$$

Wir wollen jetzt diese Arbeit, und ebenso auch ihre beiden Theile, näher zu bestimmen suchen auf Grund der Formeln (6), indem wir dabei zur Abkürzung folgender Abkürzungen uns bedienen:

$$\begin{aligned} T &= au + bu + cw, \\ T_1 &= au_1 + bv_1 + cw_1, \\ S &= uu_1 + vv_1 + ww_1. \end{aligned} \tag{9}$$

Bekanntlich ist [vgl. § 2, ($\mathfrak{D}$) und § 6, (7)]:

$$\left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{DM_1} = (\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\,D\tau \cdot dt. \tag{10}$$

Substituirt man hier für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ ihre Werthe (6), und bedient man sich zugleich der Abkürzungen (9), so erhält man:

$$\left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{DM_1} = -A^2 D\tau D\tau_1 \left(\frac{TT_1 - S}{r^2}\,dr + \frac{T\,dT_1}{r}\right). \tag{11}$$

Desgleichen wird offenbar die analoge Formel stattfinden:

$$\left(d\mathfrak{L}\right)_{DM_1}^{DM} = -A^2 D\tau D\tau_1 \left(\frac{TT_1 - S}{r^2}\,dr + \frac{T_1\,dT}{r}\right). \tag{12}$$

Addirt man diese beiden Formeln (11), (12), so ergiebt sich mit Rücksicht auf (8)

$$d\mathfrak{L} = -A^2 D\tau D\tau_1 \left(\frac{2TT_1 - 2S}{r^2}\,dr + \frac{d(TT_1)}{r}\right); \tag{13}$$

und dies ist also die zu berechnende *elektromotorische Arbeit.*

Andrerseits hat die von den beiden Elementen DM und DM_1 während der Zeit dt aufeinander ausgeübte *ponderomotorische Arbeit* dL den Werth (7); und dieser ist, unter Anwendung der Abbreviaturen (9), folgendermassen darstellbar:

$$dL = -A^2 D\tau D\tau_1 \left(\frac{2S - 3TT_1}{r^2}\right) dr. \tag{14}$$

Aus (13), (14) folgt durch Addition:

$$dL + d\mathfrak{L} = -A^2 D\tau D\tau_1 \left(-\frac{TT_1}{r^2}dr + \frac{d(TT_1)}{r}\right)$$

d. i.

$$(15) \qquad dL + d\mathfrak{L} = -A^2 D\tau D\tau_1 \cdot d\left(\frac{TT_1}{r}\right),$$

also, falls man für T, T_1 ihre eigentlichen Bedeutungen (9) substituirt:

$$(16)\ dL + d\mathfrak{L} = -A^2 D\tau D\tau_1\, d\left(\frac{(au+bv+cw)(au_1+bv_1+cw_1)}{r}\right).$$

Und diese Formel zeigt, dass die Summe der während der Zeit dt von den beiden Stromelementen DM und DM_1 auf einander ausgeübten ponderomotorischen und elektromotorischen Arbeiten ein vollständiges Differential ist; was in vollem Einklang ist mit dem Helmholtz'schen Princip. [Vgl. die zweite Seite des §8].

In Betreff der gefundenen Gesetze (6) und (7) ist noch Folgendes hinzuzufügen.

Erstens: Das Gesetz (7) *oder* (7a) *ist, wie man bereits bemerkt haben wird, identisch mit dem Ampère'schen Gesetz.*

Zweitens: Das Gesetz (6) *ist identisch mit demjenigen, zu welchem der Verfasser schon vor langer Zeit auf wesentlich anderem Wege gelangte.* Vgl. des Verfassers »Theorie der elektrischen Kräfte«, Leipzig bei Teubner 1873, daselbst Seite 192 (17a).

Will man die erhaltenen Gesetze in ihrer einfachsten Gestalt vor Augen haben, so braucht man nur die betreffenden *Arbeiten*, d. i. die Formeln (7) und (11) hinzuschreiben:

$$(16\alpha) \qquad dL = A^2 D\tau D\tau_1 \left(\frac{3TT_1 - 2S}{r^2}dr\right),$$

$$(16\beta) \qquad \left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{DM_1} = -A^2 D\tau D\tau_1 \left(\frac{TT_1 - S}{r^2}dr + \frac{T\,dT_1}{r}\right).$$

Denn sobald diese Formeln vorliegen, sind aus ihnen die Werthe der betreffenden *Kräfte* X, Y, Z und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ ohne Weiteres ablesbar.

§ 16.

Anwendung der F. Neumann'schen Integralgesetze auf Systeme von Ringen.

Es seien gegeben zwei in beliebigen Bewegungen und Gestaltsveränderungen begriffene *inextensible* lineare Stromringe

M und M_1, deren Stromstärken J und J_1 blosse Functionen der Zeit sind. Ferner bezeichne

(1) $$P = JJ_1 Q, \quad \text{[vgl. § 3, (4)]},$$

das F. NEUMANN'sche Potential der beiden Ringe auf einander. Ueberdies mag, was den der Zeit dt entsprechenden Zuwachs von Q betrifft, ebenso wie früher gesetzt werden:

(2) $$dQ = d_M Q + d_{M_1} Q, \quad \text{[vgl. § 4, (12)]}.$$

Alsdann wird das F. NEUMANN'sche *ponderomotorische Integralgesetz* ausgedrückt sein durch die Formeln:

(3) $$\begin{cases} \left(dL\right)_M^{M_1} = -JJ_1 d_M Q, \\ \left(dL\right)_{M_1}^M = -JJ_1 d_{M_1} Q, \quad \text{[vgl. § 4, (14), (15)]}. \end{cases}$$

Und andererseits wird alsdann das F. NEUMANN'sche *elektromotorische Integralgesetz* dargestellt sein durch folgende Formeln:

(4) $$\begin{cases} \left(d\mathfrak{L}\right)_M^{M_1} = dP - J_1 Q dJ, \\ \left(d\mathfrak{L}\right)_{M_1}^M = dP - JQ dJ_1, \quad \text{[vgl. § 5, (21), (22)]}. \end{cases}$$

Eine etwas einfachere Gestalt erhalten diese Formeln durch Anwendung der früher (in § 11) von uns eingeführten Charakteristiken δ, Δ. Zufolge (1) ist nämlich

$$dP = JJ_1 dQ + Qd(JJ_1),$$

und von diesen beiden Theilen des Zuwachses dP wird (in Einklang mit den Festsetzungen des § 11) der erste mit δP, der zweite mit ΔP zu bezeichnen sein, so dass man also erhält:

(5) $$dP = \delta P + \Delta P,$$

wo alsdann also δP und ΔP die Bedeutungen haben:

(6) $$\delta P = JJ_1 dQ \quad \text{und} \quad \Delta P = Qd(JJ_1).$$

Dieses δP ist nach (2) auch so darstellbar:

$$\delta P = JJ_1\, d_M Q + JJ_1\, d_{M_1} Q;$$

und demgemäss mag gesetzt werden:

(7) $$\delta P = \delta_M P + \delta_{M_1} P,$$

nämlich:

(8) $$\delta_M P = J J_1 d_M Q \quad \text{und} \quad \delta_{M_1} P = J J_1 d_{M_1} Q\,;$$

so dass also $\delta_M P$ lediglich von der Lagenveränderung des Ringes M, und ebenso $\delta_{M_1} P$ lediglich von der des Ringes M_1 herrührt.

Andererseits ist das in (6) aufgeführte $\varDelta P$ ebenfalls in zwei Theile zerlegbar, nämlich so darstellbar:

$$\varDelta P = Q J_1 dJ + Q J dJ_1\,;$$

und von diesen beiden Theilen mag der erste mit $\varDelta_M P$, der zweite mit $\varDelta_{M_1} P$ bezeichnet werden. Alsdann ist also

(9) $$\varDelta P = \varDelta_M P + \varDelta_{M_1} P,$$

nämlich:

(10) $$\varDelta_M P = Q J_1 dJ \quad \text{und} \quad \varDelta_{M_1} P = Q J dJ_1\,;$$

so dass also $\varDelta_M P$ nur von der Stromstärkenänderung des Ringes M, und ebenso $\varDelta_{M_1} P$ nur von der des Ringes M_1 herrührt.

Die Formeln (3) des *ponderomotorischen Integralgesetzes* nehmen nun mit Rücksicht auf (8) die Gestalt an:

(11) $$\begin{cases} \left(dL\right)_M^{M_1} = -\,\delta_M P, \\ \left(dL\right)_{M_1}^{M} = -\,\delta_{M_1} P; \end{cases}$$

während andererseits die Formeln (4) des *elektromotorischen Integralgesetzes* mit Rücksicht auf (10) übergehen in:

(12) $$\begin{cases} \left(d\mathfrak{L}\right)_M^{M_1} = dP - \varDelta_M P, \\ \left(d\mathfrak{L}\right)_{M_1}^{M} = dP - \varDelta_{M_1} P. \end{cases}$$

Man übersieht nun sofort, dass diese Gesetze oder Formeln (11), (12) nicht nur auf zwei einzelne Ringe, sondern ebenso auch auf zwei *Systeme* von Ringen anwendbar sind. Dabei wird alsdann in diesen Formeln unter M das eine, unter M_1 das andere System, und unter P das Potential des einen Systems auf das andere zu verstehen sein. Natürlich ist dabei vorauszusetzen, dass in jedwedem Ringe die Stromstärke eine blosse Function der Zeit ist.

§ 17.

Anwendung der beiden Integralgesetze auf zwei starre Körper mit regulären Strömungszuständen.

Wir wollen den in einem gegebenen Körper M vorhandenen elektrischen Strömungszustand (u, v, w) *regulär* nennen, wenn derselbe folgenden Bedingungen entspricht:

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0, \text{ (innerhalb } M), \\ u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)=0, \text{ (an der Oberfläche von } M), \end{cases}$$

wo n die auf der Oberfläche errichtete innere Normale sein soll. Besitzt der Zustand diese Beschaffenheit, so wird offenbar der Körper M angesehen werden können als ein System von Stromfäden, deren jeder *geschlossen*, und seinem ganzen Laufe nach von *einerlei* Stromstärke ist.

Sind im Augenblick t die Regularitätsbedingungen (13) erfüllt, und lässt man nun die u, v, w während der Zeit dt um unendlich kleine Grössen du, dv, dw anwachsen, und nimmt man dabei an, dass diese du, dv, dw die Form haben:

$$(14)\qquad du=u\sigma,\qquad dv=v\sigma,\qquad dw=w\sigma,$$

wo $\sigma=\sigma\,(x, y, z)$ eine der partiellen Differentialgleichung

$$(15)\qquad u\frac{\partial\sigma}{\partial x}+v\frac{\partial\sigma}{\partial y}+w\frac{\partial\sigma}{\partial z}=0$$

entsprechende unendlich kleine Function sein soll, — so wird der elektrische Strömungszustand des Körpers, wie man leicht übersieht, im Augenblick $t+dt$ wiederum *regulär* sein. Auch wird alsdann jedweder Stromfaden des Körpers während der Zeit dt seiner ponderablen Masse nach ungeändert geblieben sein, und nur einen gewissen (positiven oder negativen) Zuwachs der Stromstärke erfahren haben.

(15a) .... Aus unserer Definition (13) folgt nun sofort, *dass die beiden Integralgesetze* (11), (12) *auch anwendbar sind auf zwei in Bewegung begriffene starre Körper M und M_1, mit Bezug auf irgend ein Zeitelement dt, falls man nur voraussetzt, dass die elektrischen Strömungszustände der beiden Körper während der Zeit dt regulär bleiben, und dass überdies jeder in einem der beiden Körper vorhandene Stromfaden seiner ponderablen Masse nach während der Zeit dt ungeändert bleibt.*

Denn alsdann wird jeder der beiden Körper angesehen werden können als ein System von Stromringen, deren Stromstärken blosse Functionen der Zeit sind. U. s. w. [Vgl. § 16].

Sind die Strömungszustände der beiden Körper M und M_1 *regulär*, so ist ihr gegenseitiges Potential P leicht näher angebbar. Zu diesem Zweck hat man zuvörderst zwei respective zu M und zu M_1 gehörige *Stromfäden* ins Auge zu fassen. Das gegenseitige Potential dieser beiden Fäden besitzt offenbar den Werth [vgl. § 3, (3)]:

$$(16)\qquad \begin{aligned} P &= -A^2 J J_1 \sum\sum \frac{\cos\vartheta \cos\vartheta_1}{r} Ds Ds_1 \\ &= -A^2 J J_1 \sum\sum \frac{\cos\varepsilon}{r} Ds Ds_1, \end{aligned}$$

d. i. den Werth:

$$(17)\qquad \begin{aligned} P &= -A^2 J J_1 \sum\sum \frac{(a Dx + b Dy + c Dz)(a Dx_1 + b Dy_1 + c Dz_1)}{r} \\ &= -A^2 J J_1 \sum\sum \frac{Dx Dx_1 + Dy Dy_1 + Dz Dz_1}{r}, \end{aligned}$$

wo Dx, Dy, Dz und Dx_1, Dy_1, Dz_1 die Componenten von Ds und Ds_1 vorstellen, während a, b, c die Richtungscosinus der Linie r bezeichnen.

Nun ist aber [vgl. § 5, (16a)]:

$$(18)\quad \begin{cases} J Dx = u D\tau, \\ J Dy = v D\tau, \\ J Dz = w D\tau, \end{cases} \qquad (19)\quad \begin{cases} J_1 Dx_1 = u_1 D\tau_1, \\ J_1 Dy_1 = v_1 D\tau_1, \\ J_1 Dz_1 = w_1 D\tau_1. \end{cases}$$

Hier bezeichnen $D\tau$ und $D\tau_1$ die *Volumina* jener beiden Stromfadenelemente, deren *Längen* in (16) mit Ds und Ds_1 bezeichnet worden sind. Ferner bezeichnen u, v, w und u_1, v_1, w_1 die in diesen Elementen vorhandenen Strömungscomponenten. — Durch (18), (19) geht nun die Formel (17) über in:

$$(20)\qquad \begin{aligned} P &= -A^2 \sum\sum \frac{(au + bv + cw)(au_1 + bv_1 + cw_1)}{r} D\tau D\tau_1 \\ &= -A^2 \sum\sum \frac{uu_1 + vv_1 + ww_1}{r} D\tau D\tau_1, \end{aligned}$$

die Summationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$, $D\tau_1$ der beiden betrachteten Stromfäden.

Denkt man sich jetzt endlich die Summationen ausgedehnt über *sämmtliche Stromfäden*, also über alle Volumelemente $D\tau$ des Körpers M und über alle Volumelemente $D\tau_1$ des Körpers M_1, so wird die Formel (20) das gegenseitige Potential *der beiden Körper* liefern.

§ 18.

Die Helmholtz'sche Dilatations-Hypothese.

Als experimentell constatirt dürfen die beiden F. Neumann-schen Integralgesetze wohl nur angesehen werden für *inextensible* lineare Ringe, und, falls Gleitstellen vorhanden sind, nur für solche Ringe, deren einzelne Theile *inextensibel* sind. Helmholtz hat angenommen, dass die genannten Gesetze auch für *extensible* Ringe gelten, nämlich für solche Ringe, deren ponderable Massen in beliebigen Dilatationen und Contractionen begriffen sind. Genauer ausgedrückt wird zu sagen sein:

Die Helmholtz'sche Dilatations-Hypothese *besteht darin, dass die beiden F. Neumann'schen Integralgesetze* (11), (12):

$$(21) \qquad \left(d\,L\right)_M^{M_1} = -\,\delta_M P,$$

$$(22) \qquad \left(d\,\mathfrak{L}\right)_M^{M_1} = d\,P - \varDelta_M P$$

auf zwei in beliebigen Bewegungen befindliche lineare Ringe M und M_1 auch dann noch anwendbar seien, wenn die ponderablen Massen der beiden Ringe in beliebigen Dilatationen oder Contractionen begriffen sind, immer vorausgesetzt, dass die Stromstärken J und J_1 der beiden Ringe blosse Functionen der Zeit sind. Dabei ist alsdann in Betreff der in (21), (22) *enthaltenen Zuwüchse hinzuzufügen:*

$\delta_M P$ *entsteht blos durch die räumlichen Verschiebungen der den Ring M constituirenden ponderablen Massenpunkte, und die hierdurch bewirkte Mitverschiebung des Stromes J.*

Andererseits entsteht $\varDelta_M P$ blos durch Aenderung der Intensität des Stromes, d. i. durch blosse Aenderung von J.

Von Hause aus ging die Helmholtz'sche Ansicht noch weiter, nämlich dahin, dass jene beiden Integralgesetze auch dann noch gültig seien, wenn die Stromstärken J und J_1 Functionen von *Zeit* und *Ort* sind, wenn also z. B. J an verschiedenen Stellen des Ringes M ganz verschiedene Werthe hat.

In dieser ursprünglichen Gestalt führte aber die Hypothese zu den Helmholtz'schen »*Endkräften*« [vgl. Helmholtz' Wissenschaftliche Abh., Bd. 1, Seite 723], d. i. zu Kräften, die, wie einige Zeit später von Helmholtz constatirt wurde, mit den inzwischen von ihm selber angestellten experimentellen Untersuchungen in Widerspruch standen. [Vgl. Helmholtz' Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 787].

Demgemäss habe ich die ursprüngliche allgemeinere Fassung der Helmholtz'schen Hypothese ganz fallen lassen. In der hier angegebenen beschränkteren Fassung aber dürfte die Hypothese des grossen Physikers und Mathematikers wohl zu acceptiren und eines näheren Eingehens werth sein.

Bemerkung. Ebenso wie wir früher (§ 16, § 17) von gewöhnlichen *inextensiblen* Ringen zu *starren* Körpern übergingen, ebenso wollen wir jetzt von den *extensiblen* Ringen aus zur Betrachtung solcher Körper uns hinwenden, die in irgend welchen *Dilatationen oder Contractionen* begriffen sind. Derartige Körper können nach Belieben als *elastisch* oder *weich* oder *flüssig* angesehen werden.

§ 19.

Anwendung der beiden Integralgesetze auf zwei Körper, die in irgend welchen Bewegungen und zugleich auch in irgend welchen Dilatationen oder Contractionen begriffen sind.

Es seien M und M_1 zwei *elastische* oder *weiche* oder *flüssige* Körper. Beide Körper seien in beliebigen Bewegungen, und zugleich auch in beliebigen *Dilatationen oder Contractionen* begriffen. Auch mögen in jedem der beiden Körper elektrische Strömungen stattfinden.

Im Augenblick t sei im Körper M ein *regulärer* Strömungszustand vorhanden:

$$(1)\qquad u = u(x, y, z)\,,\quad v = v(x, y, z)\,,\quad w = w(x, y, z)\,;$$

so dass also [vgl. § 17, (13)] die Gleichungen erfüllt sind:

$$(2)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0\,, & \text{(im Innern von } M),\\[2ex] u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z) = 0\,, & \text{(an d. Oberfl. von } M), \end{cases}$$

wo n die auf der Oberfläche errichtete innere Normale vorstellen soll. In diesem Augenblicke t wird alsdann der Körper

M anzusehen sein als ein System von Stromfäden, deren jeder geschlossen, und seinem ganzen Laufe nach von einerlei Stromstärke ist.

Während des nächstfolgenden Zeitelementes dt mögen nun die ponderablen Massenpunkte des Körpers beliebige Lagenveränderungen erleiden, der Art, dass die Coordinaten x, y, z eines solchen Massenpunktes während der Zeit dt um

$$(3)\quad dx = f = f(x, y, z),\quad dy = g = g(x, y, z),\quad dz = h = h(x, y, z)$$

anwachsen, wo f, g, h beliebig gegebene unendlich kleine Functionen vorstellen.

Betrachtet man also z. B. irgend ein *Massenelement* DM des gegebenen Körpers, und bezeichnet man die Volumina dieses Massenelementes DM in den Augenblicken t und $t + dt$ respective mit $D\tau$ und $D\tau + d(D\tau)$, so wird die Formel gelten:

$$(4)\qquad d(D\tau) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) D\tau .$$

Während nun die ponderablen Massenpunkte des Körpers die soeben genannten räumlichen Verschiebungen (3) erleiden, mögen jene im Körper enthaltenen elektrischen Stromfäden *mitverschoben* gedacht werden, — gleich, als ob die ponderable Masse eines solchen Fadens mit einer für die elektrische Materie undurchlässigen Hülle umkleidet wäre. — Und während dieser Verschiebung des Fadens mag seine Stromstärke *ungeändert* bleiben.

Alsdann werden die elektrischen Strömungscomponenten des Körpers im Augenblick $t + dt$ etwas andere Werthe haben, als im Augenblick t. Und zwar werden die betreffenden Unterschiede oder Zuwüchse — sie mögen δu, δv, δw heissen — die Werthe haben:

$$\delta u = \left(u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z}\right) - u\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right),$$

$$(5)\quad \delta v = \left(u\frac{\partial g}{\partial x} + v\frac{\partial g}{\partial y} + w\frac{\partial g}{\partial z}\right) - v\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right),$$

$$\delta w = \left(u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} + w\frac{\partial h}{\partial z}\right) - w\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right).$$

In Betreff der Ableitung dieser Formeln (5) kann ich auf Helmholtz verweisen: Helmholtz' Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 731, (3b).

Ueberdies mögen nun aber während der Zeit dt auch die *Stromstärken* der einzelnen Fäden geändert werden (selbstverständlich von Faden zu Faden in stetiger Weise). Die hierdurch bewirkten Zuwüchse der u, v, w — sie mögen bezeichnet sein mit $\varDelta u$, $\varDelta v$, $\varDelta w$ — werden alsdann, wie sich leicht ergiebt, die Werthe haben:

$$\begin{aligned} \varDelta u &= u \cdot \sigma = u \cdot \sigma(x, y, z), \\ \varDelta v &= v \cdot \sigma = v \cdot \sigma(x, y, z), \\ \varDelta w &= w \cdot \sigma = w \cdot \sigma(x, y, z), \end{aligned} \tag{6}$$

wo $\sigma = \sigma(x, y, z)$ eine *beliebige* unendlich kleine Function vorstellt.

Die *totalen* Zuwüchse der Strömungscomponenten u, v, w während der Zeit dt werden daher die Werthe haben:

$$\begin{aligned} du &= \delta u + \varDelta u, \\ dv &= \delta v + \varDelta v, \\ dw &= \delta w + \varDelta w. \end{aligned} \tag{7}$$

Auch werden wir, in vollem Einklang mit unsern früheren Bezeichnungen [vgl. § 11, (9), (10)] die δu, δv, δw als die *convectiven*, und die $\varDelta u$, $\varDelta v$, $\varDelta w$ als die *endogenen* Theile der Zuwüchse du, dv, dw bezeichnen dürfen.

Wir haben vorausgesetzt, dass der Strömungszustand (u, v, w) des Körpers M im Augenblick t *regulär* sei. Wir wollen jetzt die Dinge der Art einrichten, dass der im Augenblick $t + dt$ im Körper vorhandene Strömungszustand $(u + du, v + dv, w + dw)$ wiederum ein *regulärer* ist. Solches wird, wie man leicht übersieht [vgl. § 17, (14), (15)], dadurch erreicht, dass man jene unendlich kleine Function $\sigma = \sigma(x, y, z)$, die bis jetzt ganz beliebig war, nachträglich der Bedingung unterwirft:

$$u \frac{\partial \sigma}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma}{\partial y} + w \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

Alsdann wird also der Strömungszustand im Augenblick $t + dt$ ein *regulärer* sein. Folglich wird in diesem Augenblick $t + dt$ die Stromstärke eines jeden einzelnen Stromfadens seinem ganzen Laufe nach *ein und dieselbe* sein, — ebenso wie solches im Augenblick t der Fall war.

Beiläufig sei noch Folgendes bemerkt: Allgemein ist $d = \delta + \varDelta$ [vgl. § 11]. Demgemäss ist z. B.:

$$d(u D\tau) = \delta(u D\tau) + \varDelta(u D\tau). \tag{9}$$

Und zwar wird in dieser Formel der *convective* Zuwachs $\delta(u D\tau)$ den Werth haben:

$$\delta(u D\tau) = (\delta u) \cdot D\tau + u \cdot \delta(D\tau).$$

Nun ist aber offenbar $\delta(D\tau) = d(D\tau)$. Somit folgt:

$$\delta(u D\tau) = (\delta u) \cdot D\tau + u \cdot d(D\tau).$$

Substituirt man hier für δu und $d(D\tau)$ die Werthe (5) und (4), so erhält man sofort die erste Formel folgenden Systems:

$$\begin{aligned}
\delta(u D\tau) &= \left(u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z}\right) D\tau, \\
\delta(v D\tau) &= \left(u\frac{\partial g}{\partial x} + v\frac{\partial g}{\partial y} + w\frac{\partial g}{\partial z}\right) D\tau, \qquad (10)\\
\delta(w D\tau) &= \left(u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} + w\frac{\partial h}{\partial z}\right) D\tau,
\end{aligned}$$

dessen übrige Formeln in analoger Weise zu erhalten sind.

Andererseits wird der in (9) enthaltene *endogene* Zuwachs $\Delta(u D\tau)$ den Werth haben:

$$\Delta(u D\tau) = (\Delta u) \cdot D\tau + u \cdot \Delta(D\tau).$$

Offenbar ist aber $\Delta(D\tau) = 0$. Somit folgt:

$$(11) \qquad \Delta(u D\tau) = (\Delta u) \cdot D\tau = u\sigma D\tau, \quad \text{[vgl. (6)]}.$$

So weit der Körper M. — Was nun ferner den Körper M_1 betrifft, so wollen wir über diesen ganz *analoge* Vorstellungen und Bezeichnungen adoptiren. Und zwar wollen wir bei beiden Körpern der Betrachtung *ein und dasselbe* rechtwinklige Axensystem (x, y, z) zu Grunde legen. Das gegenseitige Potential P der beiden Körper wird alsdann im Augenblick t den Werth haben [vgl. § 17, (20)]:

$$\begin{aligned}
(12)\quad P &= -A^2\sum\sum\frac{(au+bv+cw)(au_1+bv_1+cw_1)}{r} D\tau D\tau_1 \\
&= -A^2\sum\sum\frac{uu_1+vv_1+ww_1}{r} D\tau D\tau_1,
\end{aligned}$$

die Summationen ausgedehnt gedacht über alle Massenelemente DM, DM_1 der beiden Körper. Dabei bezeichnen $D\tau$, $D\tau_1$ die Volumina dieser Massenelemente, und a, b, c die Richtungscosinus ihrer Verbindungslinie r.

Aus diesen Darlegungen [(1)—(12)] ergiebt sich, dass die beiden F. NEUMANN'schen Integralgesetze, auf Grund der HELMHOLTZ'schen Dilatationshypothese [§ 18, (21), (22)], anwendbar sind auf je zwei Stromfäden des einen und des andern Körpers. Folglich werden sie auch anwendbar sein auf alle Stromfäden zusammengenommen, d. i. auf die betrachteten beiden Körper. Somit ergeben sich für die vom Körper M_1 auf den Körper M während der Zeit dt ausgeübte ponderomotorische und elektromotorische Arbeit, d. i. für

$$\left(dL\right)_M^{M_1} \text{ und } \left(d\mathfrak{L}\right)_M^{M_1}$$

folgende Formeln [vgl. § 16, (11), (12)]:

$$\left(dL\right)_M^{M_1} = -\delta_M P, \tag{13}$$

$$\left(d\mathfrak{L}\right)_M^{M_1} = dP - \Delta_M P. \tag{14}$$

Hier bezeichnet dP den *totalen* Zuwachs des Potentials P (12) während der Zeit dt. Dieses dP ist zerlegt zu denken in seinen *convectiven* und in seinen *endogenen* Theil:

$$dP = \delta P + \Delta P. \tag{15}$$

Von diesen beiden Theilen ist jeder von Neuem in zwei Theile zerlegt zu denken:

$$\begin{aligned} \delta P &= \delta_M P + \delta_{M_1} P, \\ \Delta P &= \Delta_M P + \Delta_{M_1} P, \end{aligned} \tag{16}$$

der Art, dass die δ_M, Δ_M nur von den räumlichen und elektrischen Veränderungen des Körpers M, andrerseits aber die δ_{M_1}, Δ_{M_1} nur von denen des Körpers M_1 herrühren. Und die in solcher Weise definirten $\delta_M P$ und $\Delta_M P$ sind es, welche in den Formeln (13), (14) auftreten.

Bezeichnet man die vom Elemente DM_1 auf das Element DM ausgeübten ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte mit X, Y, Z und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, andererseits aber die vom *ganzen* Körper M_1 auf das *einzelne Element* DM ausgeübten Kräfte mit (X), (Y), (Z) und $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Z})$, so ist offenbar [vgl. § 1 (D) und § 2, $(\mathfrak{D})$]:

$$\left(dL\right)_{DM}^{M_1} = (X)dx + (Y)dy + (Z)dz, \tag{17}$$

$$\left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{M_1} = [(\mathfrak{X})u + (\mathfrak{Y})v + (\mathfrak{Z})w]D\tau \cdot dt, \tag{18}$$

wo $D\tau$ das Volumen des Elementes DM vorstellt. Demgemäss ergeben sich für die vom Körper M_1 auf den ganzen Körper M während der Zeit dt ausgeübten Arbeiten die Ausdrücke:

$$(19)\qquad \left(dL\right)_M^{M_1} = \sum[(X)dx + (Y)dy + (Z)dz],$$

$$(20)\qquad \left(d\mathfrak{L}\right)_M^{M_1} = (dt)\sum[(\mathfrak{X})u + (\mathfrak{Y})v + (\mathfrak{Z})w]\,D\tau,$$

die Summationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente DM des Körpers M. Substituirt man diese Ausdrücke (19), (20) in den beiden Formeln (13), (14), und lässt man dabei für dx, dy, dz ihre Werthe f, g, h (3) eintreten, so erhält man schliesslich:

$$(21)\qquad \sum[(X)f + (Y)g + (Z)h] = -\delta_M P,$$

$$(22)\qquad (dt)\cdot\sum[(\mathfrak{X})u + (\mathfrak{Y})v + (\mathfrak{Z})w]\,D\tau = dP - \varDelta_M P.$$

Bei Ableitung dieser beiden Formeln (21), (22) *ist nur zweierlei vorausgesetzt, nämlich erstens die Richtigkeit der beiden F. Neumann'schen Integralgesetze, und zweitens die Richtigkeit der Helmholtz'schen Dilatationshypothese. Wir wollen nun weiterhin sehen, welche Werthe aus diesen Formeln* (21), (22) *für die noch unbekannten Kräfte* (X), (Y), (Z) *und* $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Z})$ *sich ergeben.*

§ 20.

Fortsetzung.

Die Werthe von dP, $\delta_M P$, $\varDelta_M P$ können auf Grund des Ausdruckes (12) und auf Grund der Definitionen (15), (16) leicht berechnet werden, was hier nicht weiter ausgeführt werden soll. Substituirt man diese Werthe in den Formeln (21), (22), so erhält man:

$$(23)\qquad \sum[(X)f + (Y)g + (Z)h] =$$
$$= A^2\sum\sum\frac{(au+\cdot\cdot)(fu_1+\cdot\cdot) - (af+\cdot\cdot)(uu_1+\cdot\cdot)}{r^2}\,D\tau D\tau_1$$

und andrerseits:

$$(24)\qquad (dt)\cdot\sum[(\mathfrak{X})u + (\mathfrak{Y})v + (\mathfrak{Z})w]\,D\tau =$$
$$= A^2\sum\sum\left\{\begin{array}{c}\dfrac{(au_1+\cdot\cdot)(f_1u+\cdot\cdot) - (au+\cdot\cdot)(fu_1+\cdot\cdot)}{r^2} \\ + \dfrac{(uu_1+\cdot\cdot)\,dr}{r^2} - \dfrac{(u\varDelta u_1+\cdot\cdot)}{r}\end{array}\right\}D\tau D\tau_1,$$

die Doppelsummen ausgedehnt gedacht über alle Massenelemente DM, DM_1 der beiden Körper. Dabei bezeichnen $D\tau$, $D\tau_1$ die Volumina dieser Elemente. Ferner bezeichnet r ihren gegenseitigen Abstand und a, b, c sollen die Richtungscosinus von r sein.

Nun sind f, g, h [vgl. (3)] *ganz willkürliche* unendlich kleine Functionen. Folglich müssen in (23) die unter den Summenzeichen befindlichen Coefficienten von f, g, h auf beiden Seiten einander gleich sein. Somit ergiebt sich z. B.:

$$(25)\qquad (X) = A^2 D\tau \cdot \sum \left(\frac{u_1(au + \cdot\cdot) - a(uu_1 + \cdot\cdot)}{r^2} \right) D\tau_1\,;$$

und analoge Werthe ergeben sich für (Y) und (Z).

Was andrerseits die Formel (24) betrifft, so ist zuvörderst zu bemerken, dass dieselbe, was die in ihr enthaltenen u, v, w anbelangt, offenbar von folgender Gestalt ist:

$$(\alpha)\qquad \sum (Uu + Vv + Ww)\, D\tau = 0\,,$$

wo alsdann z. B. U die Bedeutung hat:

$$(\beta)\quad U = (\mathfrak{X})\,dt - A^2 \sum \left(\frac{f_1(au_1 + \cdot\cdot) - a(fu_1 + \cdot\cdot)}{r^2} + \frac{u_1\, dr}{r^2} - \frac{\Delta u_1}{r} \right) D\tau_1\,.$$

Wären u, v, w völlig willkürlich, so würde aus (α) folgen, dass U, V, W einzeln $= 0$ sind. Nun sind aber u, v, w den Bedingungen (2) unterworfen. Somit folgt aus (α), dass U, V, W die Form haben müssen:

$$(\gamma)\qquad U = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\,,\qquad V = \frac{\partial\lambda}{\partial y}\,,\qquad W = \frac{\partial\lambda}{\partial z}\,,$$

wo λ eine *völlig unbekannte* Function vorstellt. Substituirt man hier in (γ) für U seine eigentliche Bedeutung (β), so erhält man:

$$(26)\quad (\mathfrak{X})\,dt = A^2 \sum \left(\frac{f_1(au_1 + \cdot\cdot) - a(fu_1 + \cdot\cdot)}{r^2} + \frac{u_1\, dr}{r^2} - \frac{\Delta u_1}{r} \right) D\tau_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\,;$$

und analoge Werthe (mit *demselben* λ) ergeben sich für $(\mathfrak{Y})\,dt$ und $(\mathfrak{Z})\,dt$.

Transformation. Der in (25) unter dem Summenzeichen stehende Ausdruck kann in mannigfaltiger Weise abgeändert werden, ohne dass dadurch die Summe selbst eine Aenderung erleidet. Mittelst einer solchen Transformation (auf welche hier nicht näher eingegangen werden soll) verwandelt sich nun die Formel (25) in folgende:

$$(27)\quad (X) = A^2 D\tau \cdot \sum a \left(\frac{3(au+\cdot\cdot)(au_1+\cdot\cdot)-2(uu_1+\cdot\cdot)}{r^2}\right) D\tau_1 .$$

Selbstverständlich ergeben sich analoge Werthe für (Y) und (Z).

Einer ähnlichen Transformation ist andrerseits auch die Formel (26) fähig. Man erhält in solcher Weise (was hier ebenfalls nicht weiter ausgeführt werden soll) die Formel (26) in folgender Gestalt:

$$(28)\quad (\mathfrak{X})\,dt = -A^2 \sum \left(\frac{3a(au_1+\cdot\cdot)-2u_1}{r^2}\,dr + \frac{\Delta u_1}{r}\right) D\tau_1 + \frac{\partial \Lambda}{\partial x},$$

oder, falls es beliebt, auch in folgender Gestalt:

$$(28\,a)\quad (\mathfrak{X})\,dt = -A^2 \sum \left(\frac{a(au_1+\cdot\cdot)-u_1}{r^2}\,dr + \frac{a\,d(au_1+\cdot\cdot)}{r}\right) D\tau_1$$
$$- A^2 \sum \frac{a(au_1+\cdot\cdot)}{r}\, d(D\tau_1) + \frac{\partial \Lambda}{\partial x}.$$

Analoge Werthe ergeben sich für $(\mathfrak{Y})\,dt$ und $(\mathfrak{Z})\,dt$, alle behaftet mit *derselben* unbekannten Function Λ. Diese Function Λ steht zu der in (26) enthaltenen unbekannten Function λ in folgender Beziehung:

$$(29)\qquad \Lambda - \lambda = A^2 \sum \frac{(af_1+\cdot\cdot)(au_1+\cdot\cdot)}{r} D\tau_1 .$$

Die Gestalt (28 a) zeichnet sich dadurch aus, dass in ihr nur noch die *totalen* Zuwüchse d vorkommen, und verdient deswegen den Vorzug gegenüber den Gestalten (26) und (28), in denen ausser den totalen Zuwüchsen d auch noch gewisse partielle Zuwüchse Δ enthalten sind.

§ 21.

Die auf dem Helmholtz'schen Wege sich ergebenden Resultate.

In § 18 habe ich die Helmholtz'sche Dilatationshypothese angegeben in derjenigen Einschränkung, welche für sie auf Grund der von Helmholtz selbst angestellten experimentellen Untersuchungen geboten war. Sodann habe ich in § 19 und § 20 den von Helmholtz selber auf Grund jener Hypothese zur näheren Erforschung der elektrodynamischen Kräfte eingeschlagenen Weg verfolgt, nur mit denjenigen Abänderungen, welche die Einschränkung jener Hypothese erforderlich machte. — Die in solcher Weise erhaltenen Resultate lassen sich nun folgendermassen zusammenfassen:

Es seien gegeben zwei Körper M und M_1, die in beliebigen Bewegungen und zugleich in beliebigen Dilatationen oder Contractionen begriffen sind. Und in jedem der beiden Körper seien elektrische Strömungen vorhanden.

Die elektrischen Strömungen im Körper M_1 seien im Augenblick t regulär, und mögen auch regulär bleiben während des nächstfolgenden Zeitelementes dt. Auch mag vorausgesetzt sein, dass jedweder Stromfaden dieses Körpers M_1 während der Zeit dt, seiner ponderablen Masse nach, ein und derselbe bleibt; so dass also die in einem solchen Stromfaden liegenden ponderablen Massenpunkte in den Augenblicken t und $t + dt$ ein und dieselben sind.

Alsdann werden die im Augenblick t vom ganzen Körper M_1 auf irgend ein Massenelement DM des Körpers M ausgeübten ponderomotorischen Kräfte (X), (Y), (Z) die Werthe haben [vgl. § 20, (27)]:

$$(1)\quad \begin{cases} (X) = A^2 D\tau \cdot \sum a \left(\dfrac{3(au + \cdot\cdot)(au_1 + \cdot\cdot) - 2(uu_1 + \cdot\cdot)}{r^2} \right) D\tau_1, \\ (Y) = A^2 D\tau \cdot \sum b \left(\dfrac{3(au + \cdot\cdot)(au_1 + \cdot\cdot) - 2(uu_1 + \cdot\cdot)}{r^2} \right) D\tau_1, \\ (Z) = A^2 D\tau \cdot \sum c \left(\dfrac{3(au + \cdot\cdot)(au_1 + \cdot\cdot) - 2(uu_1 + \cdot\cdot)}{r^2} \right) D\tau_1, \end{cases}$$

die Summationen ausgedehnt gedacht über alle Massenelemente DM_1 des Körpers M_1. Dabei bezeichnet $D\tau_1$ das Volumen eines solchen Elementes DM_1, ebenso wie $D\tau$ das Volumen von DM sein soll. Ferner bezeichnet r den gegenseitigen Abstand der beiden Elemente DM, DM_1. Ferner sind a, b, c die Richtungscosinus der Linie $r(DM_1 \to DM)$. Endlich sind u, v, w und u_1, v_1, w_1 die in DM und DM_1 vorhandenen elektrischen Strömungscomponenten.

Selbstverständlich sollen $D\tau$, $D\tau_1$, r, a, b, c, u, v, w, u_1, v_1, w_1 die Werthe der genannten Grössen im Augenblick t vorstellen.

Unter Anwendung dieser Bezeichnungen werden nun ferner für die vom Körper M_1 während der Zeit dt in irgend einem Punkte des Elementes DM hervorgebrachten elektromotorischen Kräfte $(\mathfrak{X})dt$, $(\mathfrak{Y})dt$, $(\mathfrak{Z})dt$ *folgende Formeln gelten* [vgl. § 20, (28a)]:

$$(2)\quad\begin{cases} (\mathfrak{X})dt = -A^2\sum\left(\dfrac{a(au_1+\cdot\cdot)-u_1}{r^2}dr + \dfrac{ad(au_1+\cdot\cdot)}{r}\right)D\tau_1 \\ \qquad\qquad -A^2\sum\dfrac{a(au_1+\cdot\cdot)}{r}d(D\tau_1) + \dfrac{\partial\varDelta}{\partial x}, \\ (\mathfrak{Y})dt = -A^2\sum\left(\dfrac{b(au_1+\cdot\cdot)-v_1}{r^2}dr + \dfrac{bd(au_1+\cdot\cdot)}{r}\right)D\tau_1 \\ \qquad\qquad -A^2\sum\dfrac{b(au_1+\cdot\cdot)}{r}d(D\tau_1) + \dfrac{\partial\varDelta}{\partial y}, \\ (\mathfrak{Z})dt = -A^2\sum\left(\dfrac{c(au_1+\cdot\cdot)-w_1}{r^2}dr + \dfrac{cd(au_1+\cdot\cdot)}{r}\right)D\tau_1 \\ \qquad\qquad -A^2\sum\dfrac{c(au_1+\cdot\cdot)}{r}d(D\tau_1) + \dfrac{\partial\varDelta}{\partial z}, \end{cases}$$

wo $\varDelta$ eine noch unbekannte Function vorstellt.

In diesen Formeln (2) *sind durch die Charakteristik d diejenigen Zuwüchse angedeutet, welche die betreffenden Grössen während der Zeit dt erfahren. So z. B. bezeichnet $d(D\tau_1)$ den der Zeit dt entsprechenden Zuwachs des Volumens $D\tau_1$ des Massenelementes DM_1.*

Die Formeln (1), (2), gelten, wie aus ihrer Ableitung hervorgeht, für ein ganz beliebiges rechtwinkliges Axensystem (x, y, z), welches z. B. auch *in ganz beliebiger Bewegung* begriffen sein darf. Auch überzeugt man sich z. B. leicht davon, dass die Formeln bei ihrer Transformation von einem Axensystem auf ein anderes (welches gegen das erste in beliebiger relativer Bewegung begriffen ist) ihrer Gestalt nach völlig ungeändert bleiben.

§ 22.

Vergleichung der auf dem Helmholtz'schen Wege erhaltenen Resultate mit denen, welche nach der Methode des Verfassers gefunden wurden.

Zur Unterscheidung von den soeben auf dem Helmholtz-schen Wege erhaltenen Resultaten mögen die nach *meiner* Methode gefundenen Kräfte mit X^*, Y^*, Z^* und $\mathfrak{X}^*$, $\mathfrak{Y}^*$, $\mathfrak{Z}^*$ bezeichnet werden. Die Kräfte X^*, Y^*, Z^* repräsentiren diejenige ponderomotorische Wirkung, welche *ein einzelnes Element* DM_1 des Körpers M_1 auf das betrachtete Element DM ausübt. Und zwar lautet der z. B. für X^* gefundene Werth folgendermassen [vgl. § 15 (7 a)]:

$$(3)\qquad X^* = A^2\left(\frac{3(au+\cdot\cdot)(au_1+\cdot\cdot) - 2(uu_1+\cdot\cdot)}{r^2}\right) a\cdot D\tau D\tau_1.$$

Andrerseits sind $\mathfrak{X}^*$, $\mathfrak{Y}^*$, $\mathfrak{Z}^*$ die Componenten der von dem *einzelnen Element* DM_1 in irgend einem Punkte des Elementes DM hervorgebrachten elektromotorischen Kraft. Und zwar ist z. B. für $\mathfrak{X}^*$ folgende Formel gefunden [vgl. § 15, (6)]:

$$(4)\qquad \mathfrak{X}^*\,dt = -A^2\left(\frac{a(au_1+\cdot\cdot)-u_1}{r^2}\,dr + \frac{a\,d(au_1+\cdot\cdot)}{r}\right) D\tau_1.$$

Dabei ist zu beachten, dass diese Formeln (3), (4) von mir nur für *starre* Körper abgeleitet sind, während die auf dem Helmholtz'schen Wege gefundenen Formeln (1), (2) auf Körper sich beziehen, die in beliebigen *Dilatationen oder Contractionen* begriffen sind.

Zuvörderst bemerkt man sofort, dass mit Bezug auf die *ponderomotorischen* Wirkungen, nämlich zwischen den Formeln (1) und (3), völlige Uebereinstimmung stattfindet.

Was ferner die *elektromotorischen* Wirkungen, nämlich die Formeln (2) und (4) betrifft, so ist zwischen diesen Formeln ebenfalls Einklang vorhanden, falls man die unbekannte Function Λ gleich Null oder gleich einer Constanten sich denkt, vorausgesetzt dass man bei einem solchen Vergleich auf *starre* Körper sich beschränkt. Denn alsdann wird offenbar $d(D\tau_1) = 0$ sein.

Aber auch für *nicht* starre Körper sind diese Formeln (2) und (4) in Einklang, wie gegenwärtig gezeigt werden soll.

Vor Allem ist dabei von Neuem hervorzuheben, dass die Formel (4) nur für *starre* Körperelemente aufgestellt, mithin auf ein sich ausdehnendes Element DM_1, welches im Augenblick t das Volumen $D\tau_1$, im nächstfolgenden Augenblicke $t+dt$ das Volumen $D\tau_1 + d(D\tau_1)$ besitzt, nicht ohne Weiteres anwendbar ist. Um trotzdem eine solche Anwendung zu ermöglichen, müssen wir das Element DM_1 ansehen als ein Aggregat zweier Elemente, welche die während der Zeit dt

constant bleibenden Volumina $D\tau_1$ und $d(D\tau_1)$ besitzen, und deren elektrische Zustände der Art zu denken sind, dass während der Zeit dt die Strömungen des *ersten* von

$$u_1,\ v_1,\ w_1 \text{ auf } u_1 + du_1,\ v_1 + dv_1,\ w_1 + dw_1,$$

die des *zweiten* hingegen von

$$0,\ 0,\ 0 \text{ auf } u_1 + du_1,\ v_1 + dv_1,\ w_1 + dw_1$$

anwachsen.

Alsdann gilt für die vom *ersten* Element hervorgebrachte elektromotorische Kraft $\mathfrak{X}^*$ ohne Weiteres die Formel (4):

$$(\alpha) \quad \mathfrak{X}^* dt = -A^2\left(\frac{a(au_1 + \cdot\cdot) - u_1}{r^2} dr + \frac{a\,d(au_1 + \cdot\cdot)}{r}\right) D\tau_1,$$

eine Formel, die man offenbar auch so schreiben kann:

$$\mathfrak{X}^* dt = -A^2\left(\frac{a(au_1 + \cdot\cdot) - u_1}{r^2} dr + \frac{a(u_1\,da + \cdot\cdot)}{r} + \frac{a(a\,du_1 + \cdot\cdot)}{r}\right) D\tau_1.$$

Dementsprechend wird die vom *zweiten* Element hervorgebrachte elektromotorische Kraft $\mathfrak{X}^*$ folgenden Werth haben:

$$\mathfrak{X}^* dt = -A^2\left(\frac{a(a\bar{u}_1 + \cdot\cdot) - \bar{u}_1}{r^2} dr + \frac{a(\bar{u}_1\,da + \cdot\cdot)}{r} + \frac{a[a(u_1 + du_1) + \cdot\cdot]}{r}\right) d(D\tau_1).$$

Dabei ist, was z. B. das hier auftretende Trinom $(a\bar{u}_1 + \cdots)$ d. i. $(a\bar{u}_1 + b\bar{v}_1 + c\bar{w}_1)$ betrifft, unter $\bar{u}_1$ ein unbekannter Mittelwerth zwischen 0 und $(u_1 + du_1)$, ebenso unter $\bar{v}_1$ ein Mittelwerth zwischen 0 und $(v_1 + dv_1)$, ebenso unter $\bar{w}_1$ ein solcher zwischen 0 und $(w_1 + dw_1)$ zu verstehen. Unter Fortlassung von Gliedern höherer Ordnung reducirt sich nun aber die letzte Formel sofort auf

$$(\beta) \qquad \mathfrak{X}^* dt = -A^2\,\frac{a(au_1 + \cdot\cdot)}{r}\,d(D\tau_1).$$

Die vom *ganzen Element* DM_1 hervorgebrachte elektromotorische Kraft $\mathfrak{X}^*$ wird nun die Summe der beiden in (α) und (β) angegebenen Kräfte sein, mithin folgenden Werth besitzen:

$$(5) \quad \mathfrak{X}^* dt = -A^2\left(\frac{a(au_1 + \cdot\cdot) - u_1}{r^2} dr + \frac{a\,d(au_1 + \cdot\cdot)}{r}\right) D\tau_1 - A^2\,\frac{a(au_1 + \cdot\cdot)}{r}\,d(D\tau_1).$$

Summirt man aber diese Formel über alle Elemente DM_1, so erhält man für die vom *ganzen* Körper M_1 hervorgebrachte elektromotorische Kraft $(\mathfrak{X}^*)$ die Formel:

$$(6)\quad (\mathfrak{X}^*)dl = -A^2\sum\left(\frac{a(au_1+\cdot\cdot)-u_1}{r^2}dr + \frac{a\,d(au_1+\cdot\cdot)}{r}\right)D\tau_1$$

$$-A^2\sum\frac{a(au_1+\cdot\cdot)}{r}d(D\tau_1);$$

was mit (2) identisch ist, falls man nur die unbekannte Function Δ gleich Null oder gleich einer Constanten sich denkt. — *Q. e. d.*

§ 23.

Ueber eine eigenthümliche neue Form der beiden Elementargesetze.

Rückblick. Wir haben die beiden F. Neumann'schen Integralgesetze in die Gestalt gebracht:

$$(1)\qquad \left(dL\right)_M^{M_1} + \left(dL\right)_{M_1}^M = -\delta P,\ [\text{vgl. § 16, (11) und (7)}],$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \left(d\mathfrak{L}\right)_M^{M_1} = dP - \Delta_M P, \\ \left(d\mathfrak{L}\right)_{M_1}^M = dP - \Delta_{M_1} P,\ [\text{vgl. § 16, (12)}]. \end{cases}$$

Vollkommen sicher sind diese beiden Gesetze für dasjenige Gebiet, für welches sie von F. Neumann aufgestellt wurden, nämlich für *inextensible lineare Ringe*, deren Stromstärken blosse Functionen der Zeit sind. Und hieraus ergiebt sich sofort, dass dieselben unter gewissen Voraussetzungen [vgl. § 17 (15a)] auch noch für *Körper* gelten, und zwar für *starre Körper*.

Nach der Helmholtz'schen Dilatationshypothese [vgl. § 18, (21), (22)], sollen nun aber diese beiden Gesetzte auch noch gültig sein für *extensible* (d. h. für sich dilatirende oder contrahirende) lineare Ringe, — immer vorausgesetzt, dass die Stromstärken blosse Functionen der Zeit sind. Aus dieser Hypothese folgt [vgl. § 19, (13), (14)], dass die in Rede stehenden beiden Gesetze, unter gewissen Voraussetzungen, auch noch gültig sind für *zwei in beliebigen Dilatationen oder Contractionen begriffene Körper*. Und hieraus folgt alsdann weiter, dass für die Einwirkung eines Körpers M_1 auf das Element DM eines andern Körpers M gewisse Sätze gelten [§ 21, (1), (2)], die in vollem Einklang stehen einerseits zu dem Ampère'schen ponderomotorischen Elementargesetz, und andererseits zu dem vom Verf. aufgestellten elektromotorischen Elementargesetz [vgl. § 22].

All' diese Betrachtungen [§§ 16, 17, ... 22] repräsentiren in ihrer Gesammtheit einen einfach fortschreitenden und leicht zu übersehenden Gedankengang, welcher ausgeht von den beiden F. Neumann'schen Integralgesetzen, von diesen aus mit mathematischer Consequenz fortschreitet, und dabei nur *eine einzige* Hypothese in sich aufnimmt, nämlich jene Helmholtz'sche Dilatationshypothese.

Wir verlassen jetzt diesen Gedankengang, und wenden uns hin zu *andern* Betrachtungen. — Man denke sich zwei in beliebigen Bewegungen und zugleich in beliebigen Dilatationen oder Contractionen begriffene Körper, und nehme an, dass die in denselben vorhandenen elektrischen Strömungszustände (u, v, w) und (u_1, v_1, w_1) *ganz beliebige* und *ganz beliebig sich ändernde* seien. Ferner verstehe man unter M und M_1 entweder die Körper selbst, oder besser irgend zwei bestimmte *Theile* derselben.

Dass die Anwendung der beiden Integralgesetze (1), (2) auf zwei solche *Körpertheile* M und M_1 durchaus unstatthaft und unberechtigt sein würde, bedarf keiner näheren Darlegung. Wir stellen uns die Aufgabe, die *Fehler* zu untersuchen, welche eine solche Anwendung mit sich bringen würde.

Mit andern Worten: An Stelle der beiden Formeln (1), (2), werden für die betrachteten beiden *Körpertheile* M und M_1 folgende Formeln zu setzen sein:

$$(3) \qquad \left(dL\right)_M^{M_1} + \left(dL\right)_{M_1}^{M} = -\,\delta P + \varphi\,,$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \left(d\mathfrak{L}\right)_M^{M_1} = dP - \Delta_M P + \psi\,, \\ \left(d\mathfrak{L}\right)_{M_1}^{M} = dP - \Delta_{M_1} P + \chi\,, \end{cases}$$

wo alsdann φ, ψ, χ die soeben genannten Fehler vorstellen. Wir stellen uns die Aufgabe, diese Fehler oder Zusatzglieder φ, ψ, χ näher zu untersuchen. Dabei wollen wir die *linker Hand* stehenden Arbeiten berechnen auf Grund des Ampère'schen ponderomotorischen Elementargesetzes und auf Grund des vom Verf. aufgestellten elektromotorischen Elementargesetzes. Andererseits wollen wir uns dabei das *rechter Hand* auftretende P definirt denken durch einen der beiden bekannten Ausdrücke [§ 19, (12)], nämlich entweder durch den Ausdruck

$$(5)\qquad P = -A^2 \sum\sum \frac{(a u + \cdot\cdot)(a u_1 + \cdot\cdot)}{r} D\tau D\tau_1,$$

oder aber durch den Ausdruck:

$$(6)\qquad P = -A^2 \sum\sum \frac{(u u_1 + \cdot\cdot)}{r} D\tau D\tau_1.$$

In der That ist hier zwischen diesen beiden Ausdrücken zu *unterscheiden.* Denn es unterliegt keinem Zweifel, dass hier, wo über die Strömungen (u, v, w) und (u_1, v_1, w_1) keinerlei Voraussetzung gemacht ist, der Werth von P wesentlich *verschieden* sein wird, je nachdem man der Definition (5) oder der Definition (6) sich bedient.

Unter Zugrundelegung des Ausdruckes (5) findet man nun (was hier nicht weiter ausgeführt werden soll), dass $\varphi + \psi + \chi = 0$, mithin:

$$(7)\qquad \varphi = -(\psi + \chi)$$

ist, und ferner, dass ψ und χ folgende Werthe haben:

$$(8)\begin{cases} \psi = \sum\left(\frac{\partial p}{\partial x} u + \cdot\cdot\right) D\tau, \quad \text{wo } p = -A^2 \sum\left(\frac{\partial r}{\partial x_1} u_1 + \cdot\cdot\right)\frac{dr}{r} D\tau_1, \\ \chi = \sum\left(\frac{\partial q}{\partial x_1} u_1 + \cdot\cdot\right) D\tau_1, \quad \text{wo } q = -A^2 \sum\left(\frac{\partial r}{\partial x} u + \cdot\cdot\right)\frac{dr}{r} D\tau, \end{cases}$$

die Summationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente DM, DM_1 der betrachteten beiden Körpertheile M, M_1. Dabei sind unter $D\tau$ und $D\tau_1$ die Volumina dieser Elemente DM, DM_1 im Augenblick t zu verstehen. Selbstverständlich steht z. B.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} u + \cdot\cdot\right) \text{ als Abkürzung für } \left(\frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial y} v + \frac{\partial p}{\partial z} w\right),$$

ebenso

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x_1} u_1 + \cdot\cdot\right) \text{ als Abkürzung für } \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial r}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial r}{\partial z_1} w_1\right),$$

u. s. w. Endlich sind unter x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten der beiden Elemente DM und DM_1 im Augenblick t zu verstehen; so dass z. B.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = a\,, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = b\,, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = c$$

ist, falls a, b, c die Cosinus der Richtung r ($DM_1 \rightarrow DM$) vorstellen.

Statt der beiden Körpertheile M und M_1 kann man offenbar, weil dieselben ganz beliebig zu denken sind, auch zwei *unendlich kleine* Körpertheile, d. h. zwei Körper-*Elemente* nehmen. Und die Formeln (3), (4) werden alsdann, in ihnen für φ, ψ, χ die Werthe (7), (8) substituirt gedacht, die Gesetze repräsentiren, nach denen zwei solche Körper-*Elemente* auf einander einwirken. *Wir gelangen in solcher Weise zu einer eigenthümlichen und wohl beachtenswerthen Gestalt der Elementargesetze. Namentlich sehen wir, dass dieselben ausdrückbar sind mittelst der Function P* (5) *und der Functionen p, q,* (8). An diese eigenthümliche Form der Elementargesetze knüpfen sich mancherlei weitere Gedanken und Fragen, die vielleicht geeignet sein dürften, uns dem *eigentlichen Mittelpunkt der Elektrodynamik* ein wenig näher bringen könnten.

Hier mag nur noch bemerkt sein, dass die Werthe der Zusatzglieder φ, ψ, χ sich sehr viel complicirter gestalten würden, wenn man, statt des Ausdruckes (5), den Ausdruck (6) der Betrachtung zur Grunde legen wollte.

§ 24.

Einfacher Beweis eines Helmholtz'schen Satzes.

Man kann, was bis jetzt wohl noch niemals geschehen sein dürfte, folgenden Satz hinstellen:

Das Ipsopotential eines beliebig gegebenen materiellen Systems, dessen Massen theils positiv theils negativ sein können, ist, bei Zugrundelegung des Newton'schen Gesetzes, stets positiv. Oder mit andern Worten: Das Integral

$$(1) \qquad \sum\sum \frac{DM \cdot DM_1}{r}$$

ist stets positiv, falls man die eine Integration, bei festgehaltenem DM_1, über alle Elemente DM des Systems, sodann aber die andere Integration über sämmtliche Elemente DM_1 des Systems sich ausgedehnt denkt.

Ohne auf den Beweis dieses wichtigen und durch seine grosse Einfachheit ausgezeichneten Satzes hier näher einzugehen, will ich nur den Weg darlegen, auf welchem man von diesem Satze aus zu einem gewissen *Helmholtz'schen Satz* hinzugelangen im Stande ist.

Bezeichnet man die Volumina der Elemente DM, DM_1 mit $D\tau$, $D\tau_1$, und setzt man $DM = \varepsilon D\tau$ und $DM_1 = \varepsilon_1 D\tau_1$, so dass also ε und ε_1 die Dichtigkeiten vorstellen, so nimmt der Satz (1) die Gestalt an:

$$(2) \qquad \sum\sum \frac{\varepsilon\varepsilon_1 D\tau D\tau_1}{r} = \text{pos.}$$

Dabei kann die Function $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)$, deren Werthe für die Elemente $D\tau$, $D\tau_1$ mit ε, ε_1 bezeichnet, eine *ganz beliebig gegebene* sein.

Denkt man sich also z. B. in dem System irgend welche elektrische Strömungen vorhanden:

$$(3) \quad u = u(x, y, z), \qquad v = v(x, y, z), \qquad w = w(x, y, z),$$

so wird der Satz (2) ohne Weiteres anwendbar sein auf die Function $u = (x, y, z)$; und man erhält also die Formel:

$$\sum\sum \frac{uu_1 D\tau D\tau_1}{r} = \text{pos.}$$

Analoge Formeln ergeben sich für die Functionen $v = v(x,y,z)$ und $w = w(x, y, z)$. Und durch Addition dieser drei Formeln gelangt man sofort zu folgendem Satz:

Sind im Raume irgend welche elektrische Strömungen u, v, w vorhanden, so wird das Integral

$$(4) \qquad \sum\sum \frac{(uu_1 + vv_1 + ww_1) D\tau D\tau_1}{r}$$

stets positiv sein, falls man die eine Integration, bei festgehaltenem $D\tau_1$, über alle Volumelemente $D\tau$ des ganzen Raumes, sodann aber die zweite Integration über sämmtliche Volumelemente $D\tau_1$ des ganzen Raumes ausgedehnt sich denkt.

Dies aber ist der von HELMHOLTZ schon im Jahre 1870 aufgestellte Satz. (Vgl. HELMHOLTZ' Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 561). Der hier von mir zum Beweise des Satzes eingeschlagene Weg ist offenbar der eigentliche *Hauptweg*, während der von HELMHOLTZ eingeschlagene Weg als ein indirecter und recht mühsamer Weg bezeichnet werden muss.

§ 25.

Der Einwand des labilen Gleichgewichts.

Meine Untersuchungen beruhen auf drei Grundlagen resp. Hypothesen, nämlich:

(I.) auf den beiden F. Neumann'schen Integralgesetzen (§ 4 und § 5),

(II.) auf dem Helmholtz'schen Princip des vollständigen Differentials (§ 8),

(III.) auf den Hypothesen *Delta* (§ 12) und *Epsilon* (§ 14).

Und zwar habe ich absichtlich diese drei Quellen im gegenwärtigen Aufsatz nicht mit einander vermischt, sondern *einzeln* verfolgt. Hierdurch ist erreicht, dass man, falls etwa irgend eine dieser drei Quellen bedenklich erscheinen sollte, dieselbe ohne Weiteres ausschalten kann, ohne dass dadurch die aus den beiden andern Quellen geschöpften Resultate irgendwie berührt würden.

Mit grösster Sicherheit ausgestattet, und z. B. auch mit den Helmholtz'schen Ansichten und Arbeiten in völligem Einklang, sind die Grundlagen (I.) und (II.) und daneben auch die in (III.) genannte Hypothese *Delta*. Einigermassen unsicher, mehr oder weniger bedenklich dürfte also nur allein die in (III.) aufgeführte Hypothese *Epsilon* sein, obwohl dieselbe bisher von mir in Schutz genommen ist.

Lässt man diese Hypothese Epsilon fallen, so gelangt man, was die zu entdeckenden Elementargesetze betrifft, zu etwas anderen Resultaten. An Stelle der Formeln § 15, (16 α, β) treten nämlich (was hier nicht weiter ausgeführt werden soll) alsdann folgende Formeln:

$$(\alpha)\quad dL = A^2 D\tau D\tau_1 \left\{\left(\frac{3TT_1 - 2S}{r^2}\, dr\right) + G\delta\left(\frac{TT_1 - S}{r}\right)\right\},$$

$$(\beta)\quad \left(d\mathfrak{L}\right)_{DM}^{DM_1} = -A^2 D\tau D\tau_1 \left|\begin{aligned} &\left(\frac{TT_1 - S}{r^2}\, dr + \frac{TdT_1}{r}\right) \\ &+ \frac{C-G}{2}\left(\frac{TT_1 - S}{r^2}\, dr - \frac{\delta(TT_1 - S)}{r}\right) \\ &- C\,\frac{T\Delta T_1 - (u\Delta u_1 + v\Delta v_1 + w\Delta w_1)}{r} \end{aligned}\right|,$$

wo C und G *unbekannte Constanten* sind, während δ, Δ die in § 11 angegebenen Bedeutungen besitzen.

Gehören beide Elemente DM und DM_1 ein und demselben starren Conductor an, so wird offenbar $\delta = 0$ und $\varDelta = d$; auch wird alsdann z. B. $dr = 0$, so dass also für diesen besondern Fall die Formel (β) übergeht in:

$$(\gamma)\quad \left(d\Omega\right)_{DM}^{DM_1} = -A^2 D\tau D\tau_1 \left\{\frac{TdT_1}{r} - C\frac{TdT_1 - (udu_1 + vdv_1 + wdw_1)}{r}\right\}.$$

Beachtet man nun, dass die linke Seite dieser Formel den Ausdruck

$$(\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\, D\tau dt$$

repräsentirt, und dass ferner T und T_1 die Bedeutungen haben:

$$T = au + bv + cw\ ,$$
$$T_1 = au_1 + bv_1 + cw_1\ , \quad \text{[vgl. § 15, (9)]},$$

so ergeben sich aus (γ) sofort die Werthe der elektromotorischen Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$. Man erhält z. B.:

$$(\delta)\qquad \mathfrak{X}dt = -A^2 D\tau_1 \left\{\frac{adT_1}{r} - C\frac{adT_1 - du_1}{r}\right\},$$

oder, weil im gegenwärtigen Falle $dT_1 = adu_1 + bdv_1 + cdw_1$ ist:

$$(\varepsilon)\quad \mathfrak{X}dt = -A^2 D\tau_1 \left\{(1 - C)\frac{a(adu_1 + bdv_1 + cdw_1)}{r} + C\frac{du_1}{r}\right\},$$

oder, falls man durch das Zeitelement dt dividirt:

$$(\zeta)\quad \mathfrak{X} = -A^2 D\tau_1 \cdot \frac{d}{dt}\left\{(1 - C)\frac{a(au_1 + bv_1 + cw_1)}{r} + C\frac{u_1}{r}\right\}.$$

Die betreffende *Helmholtz'sche Formel* (Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 568) würde, wie man leicht übersieht, folgendermassen lauten:

$$(\zeta^*)\quad \mathfrak{X} = -A^2 D\tau_1 \cdot \frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{1-k}{2}\right)\frac{a(au_1 + bv_1 + cw_1)}{r} + \left(\frac{1+k}{2}\right)\frac{u_1}{r}\right\};$$

so dass also zwischen diesen beiden Formeln (ζ) und (ζ^*) völlige Uebereinstimmung vorhanden ist, falls man nur

$$(\eta)\qquad 1 - C = \frac{1-k}{2}\,, \qquad C = \frac{1+k}{2}$$

setzt.

Helmholtz hat bekanntlich gezeigt, dass jeder n e g a t i v e *Werth von k* l a b i l e s *Gleichgewicht ergeben würde, dass mithin k nothwendigerweise* p o s i t i v *sein muss.* Somit ergiebt sich aus (η), dass

$$(\vartheta) \qquad C \geqq \tfrac{1}{2}$$

sein muss.

Was andererseits die in (α), (β) enthaltene Constante G betrifft, so scheint sich vorläufig zur näheren Bestimmung von G kein irgendwie sicherer Weg zu eröffnen. Es könnte z. B. $G = 0$ sein. Alsdann würde die Formel (α) identisch sein mit unserer früheren Formel § 15, (16α), das ponderomotorische Elementargesetz also identisch bleiben mit dem *Ampère'schen.*

Man sieht, dass ich durch all' meine Untersuchungen immer wieder zum *Ampère'schen Gesetz* gelange. Ich werde hierdurch in meiner Vorstellung von der Richtigkeit dieses Gesetzes um so mehr bestärkt, als bekanntlich mein Vater sein ganzes Leben hindurch an demselben festgehalten hat, und der Ansicht war, dass dasselbe etwas mehr sei als eine »blosse Hypothese«.

Inhaltsübersicht.

SITZUNG VOM 4. MAI 1896.

Einen Vortrag hielt
Herr **Martin Krause**, o. M.: Zur Transformation der Thetafunctionen.

M. Krause, o. M.: *Zur Transformation der Thetafunctionen.* V.

In vier Abhandlungen gleichen Titels[1]) sind einige neue Additionstheoreme zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln entwickelt und eine Reihe von Anwendungen derselben auf die Theorie der Thetafunctionen gemacht worden, insbesondere auf deren Transformationstheorie für den Fall von einem und von zwei Argumenten. Diese Anwendungen gehen im Grossen und Ganzen dahin, für die Transformation 3^{ten} und 5^{ten} Grades Transformationsgleichungen — sei es Modular- oder Multiplicatorgleichungen — zu entwickeln, während die Sätze und Entwickelungen für allgemeine Transformationsgrade zurücktreten. Mit der folgenden Arbeit soll nun der Anfang für eine systematische Aufstellung allgemeiner Transformationsgleichungen gemacht werden, und zwar sollen in derselben alle irgendwie wichtigen Additionstheoreme aufgestellt werden, die zwischen Producten von je zwei und von je drei Factoren bestehen, vorausgesetzt, dass die Zahlen m der linken Seiten die Werthe annehmen 1, 2, n, $2n$, die Zahlen n der rechten Seite die Werthe 2^r, $2^s n$. Der Grund, warum diese Combinationen und nur diese gewählt sind, ist aus den früheren Betrachtungen klar.

§ 1.

Entwickelung von Additionstheoremen zwischen Producten von zwei Factoren.

Für den Fall von zwei Factoren besteht das Additionstheorem:

$$(1)\quad \vartheta_3(v_1, m_1\tau)\ \vartheta_3(v_2, m_2\tau) = \sum \vartheta_3[g_1](w_1, n_1\tau)\ \vartheta_3[g_2](w_2, n_2\tau)\,,$$

---

1) Siehe diese Berichte 6. Februar, 8. Mai, 31. Juli, 4. December 1893, daneben werde auf die früher citirten Arbeiten von SCHRÖTER verwiesen.

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

während zwischen den Zahlen a die Gleichungen bestehen:

$$m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{12}^2 = n_1 ,$$
$$m_1 a_{21}^2 + m_2 a_{22}^2 = n_2 ,$$
$$m_1 a_{11} a_{21} + m_2 a_{12} a_{22} = 0 .$$

Aus diesen Gleichungen folgen allgemein die weiteren:

$$m_1 n_1 a_{21}^2 - m_2 n_2 a_{12}^2 = 0 ,$$
$$m_1 n_2 a_{11}^2 - m_2 n_1 a_{22}^2 = 0 ,$$
$$m_1^2 a_{11}^2 a_{21}^2 - m_2^2 a_{22}^2 a_{12}^2 = 0 .$$

Wir wollen nun die folgenden Werthcombinationen der Zahlen m und n ins Auge fassen:

I) $$m_1 = 1 , \; m_2 = 1 , \; n_1 = 2^r n , \; n_2 = 2^s n .$$

In diesem Falle nehmen die vorhin aufgestellten Gleichungen die Form an:

$$n_1 a_{21}^2 - n_2 a_{12}^2 = 0 ,$$
$$n_2 a_{11}^2 - n_1 a_{22}^2 = 0 ,$$

oder also wir erhalten:

$$a_{21}^2 = 2^{s-r} a_{12}^2 , \quad a_{22}^2 = 2^{s-r} a_{11}^2 .$$

Daneben besteht dann die Gleichung:

$$2^r n = a_{11}^2 + a_{12}^2 .$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: *Leistet eine Zahl n der Gleichung Genüge:*

$$2^r n = \alpha^2 + \beta^2$$

und ist:

$$s \equiv r \bmod 2 ,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_2, \tau) = \sum \vartheta_3[g_1](w_1, 2^r n \tau)\, \vartheta_3[g_2](w_2, 2^s n \tau) ,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} \alpha & , & \beta \\ -2^{\frac{s-r}{2}} \beta & , & 2^{\frac{s-r}{2}} \alpha . \end{matrix}$$

Wir setzen jetzt

(II) $$m_1 = 1\,,\quad m_2 = 1\,,\quad n_1 = 2^r\,,\quad n_2 = 2^s n\,.$$

Wenn dann r eine ungerade Zahl bedeutet, so ist der Ansatz möglich:

$$2^r = a_{11}^2 + a_{12}^2\,,$$

wobei die Grössen a_{11} und a_{12} die Werthe haben:

$$a_{11} = a_{12} = 2^{\frac{r-1}{2}}\,.$$

Es müssen folglich die Gleichungen bestehen:

$$2^r a_{21}^2 - 2^{s+r-1} n = 0\,,$$
$$2^{s+r-1} n - 2^r a_{22}^2 = 0\,.$$

Mithin erhalten wir

$$a_{21}^2 = a_{22}^2 = 2^{s-1} n$$

und damit den

Lehrsatz: *Ist r eine ungerade, s eine gerade Zahl, ferner $n = 2\alpha^2$, so gilt das Additionstheorem:*

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, \tau) = \sum \vartheta_3[g_1](w_1, 2^r\tau)\,\vartheta_3[g_2](w_2, 2^s n\tau)\,,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{cc} 2^{\frac{r-1}{2}}\,, & 2^{\frac{r-1}{2}} \\[2ex] 2^{\frac{s}{2}}\alpha\,, & -2^{\frac{s}{2}}\alpha\,. \end{array}$$

Der Fall eines geraden r führt zu keinen irgendwie wichtigen Additionstheoremen, ebenso wenig wie der Fall:

$$m_1 = 1\,,\quad m_2 = 1\,,\quad n_1 = 2^r\,,\quad n_2 = 2^s\,.$$

Wir nehmen jetzt:

(III) $$m_1 = 1\,,\quad m_2 = 2\,,\quad n_1 = 2^r n\,,\quad n_2 = 2^s n\,.$$

Es muss dann die Zerlegung stattfinden:

$$2^r n = a_{11}^2 + 2a_{12}^2\,,$$

ferner folgt unmittelbar aus den aufgestellten Gleichungen:

$$a_{21}^2 = 2^{s-r+1} a_{12}^2\,,\quad a_{22} = 2^{s-r-1} a_{11}^2\,,$$

oder also wir erhalten den

Lehrsatz: *Leistet eine Zahl n der Gleichung Genüge:*

$$2^r n = \alpha^2 + 2\beta^2$$

und ist

$$s + 1 - r \equiv 0 \mod 2 ,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_2, 2\tau) = \sum{}' \vartheta_3[g_1](w_1, 2^r n\tau)\, \vartheta_3[g_2](w_2, 2^s n\tau),$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{cc} \alpha\,, & \beta \\ -2^{\frac{s+1-r}{2}}\beta\,, & 2^{\frac{s-1-r}{2}}\alpha\,. \end{array}$$

Hätten wir $m_2 = 2^\varrho$ gesetzt, so hätte sich wesentlich Neues nicht ergeben können, da wir die Quadratzahl, die in 2^ϱ enthalten ist, mit den Zahlen a_{12}^2 und a_{22}^2 zusammenziehen können. Wir nehmen jetzt:

(IV) $\quad m_1 = 1\,, \quad m_2 = 2\,, \quad n_1 = 2^r\,, \quad n_2 = 2^s n\,.$

Es müsste dann sein:

$$2^r = a_{11}^2 + 2a_{12}^2\,.$$

Nehmen wir an, dass r ungerade ist, so folgt:

$$a_{11} = 0\,, \quad a_{12} = 2^{\frac{r-1}{2}}\,,$$

ferner muss $a_{22} = 0$ sein oder also wir erhalten den

Lehrsatz: *Ist r eine ungerade Zahl und leistet n der Gleichung Genüge:*

$$2^s n = \alpha^2\,,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_2, 2\tau) = \sum \vartheta_3[g_1](w_1, 2^r\tau)\, \vartheta_3[g_2](w_2, 2^s n\tau),$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{cc} 0\,, & 2^{\frac{r-1}{2}} \\ \alpha\,, & 0\,. \end{array}$$

Analog wäre der Fall zu behandeln, wenn r eine gerade Zahl bedeutet, ferner führt der Fall:

$$m_1 = 1\,, \quad m_2 = 2\,, \quad n_1 = 2^r\,, \quad n_2 = 2^s$$

zu keinem irgendwie wichtigen Additionstheorem.

Wir setzen jetzt:

(V) $$m_1 = 1\,, \quad m_2 = n\,, \quad n_1 = 2^r\,, \quad n_2 = 2^s n\,,$$

dann gelten die Gleichungen:

$$2^r = a_{11}^2 + n a_{12}^2$$

$$2^s n = a_{21}^2 + n a_{22}^2\,,$$

$$a_{11} a_{21} + n a_{12} a_{22} = 0\,.$$

Sind die Zahlen a_{11} und a_{12} aus der ersten dieser drei Gleichungen bestimmt, so können wir

$$a_{21} = -2^{\frac{s-r}{2}} n a_{12}\,,$$

$$a_{22} = 2^{\frac{s-r}{2}} a_{11}$$

setzen, oder also wir erhalten den

Lehrsatz: *Leistet n der Gleichung Genüge:*

$$2^r = \alpha^2 + n\beta^2$$

und ist $s \equiv r$ mod 2, so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, n\tau) = \sum \vartheta_3[g_1](w_1, 2^r\tau)\,\vartheta_3[g_2](w_2, 2^s n\tau)\,,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} \alpha & , & \beta \\ -2^{\frac{s-r}{2}} n\beta\,, & & 2^{\frac{s-r}{2}}\alpha\,. \end{matrix}$$

Die beiden Fälle:

$$m_1 = 1\,, \quad m_2 = n\,, \quad n_1 = 2^r n\,, \quad n_2 = 2^s n$$

und

$$m_1 = 1\,, \quad m_2 = n\,, \quad n_1 = 2^r\,, \quad n_2 = 2^s\,,$$

führen zu keinen irgend wie wichtigen Additionstheoremen.

Ganz analog wie der Fall (V) ist der Fall zu behandeln:

(VI) $$m_1 = 1\,, \quad m_2 = 2n\,, \quad n_1 = 2^r\,, \quad n_2 = 2^s n\,.$$

Wir erhalten den

Lehrsatz: *Leistet n der Gleichung Genüge:*

$$2^r = \alpha^2 + 2n\beta^2,$$

ist ferner $s - r \equiv 1$ *mod 2, so gilt das Additionstheorem:*

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, 2n\tau) = \sum \vartheta_3[g_1](w_1, 2^r\tau)\,\vartheta_3[g_2](w_2, 2^s n\tau),$$

welches zu dem Schema gehört

$$\begin{array}{cc} \alpha\,, & \beta \\ -n\cdot 2^{\frac{s-r+1}{2}}\beta\,, & 2^{\frac{s-r-1}{2}}\alpha\,. \end{array}$$

Die weiteren möglichen Fälle führen zu keinem wichtigen Additionstheorem. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die Zahlen r und s so zu wählen sind, dass die Transformationszahlen ganze Zahlen werden.

§ 2.

Entwickelung von Additionstheoremen zwischen Producten von je drei Factoren.

Wir wenden uns nunmehr zu Additionstheoremen, die zwischen Producten von je drei Factoren bestehen. Hierbei können die Zahlen m die Werthe 1, 2, n, $2n$ annehmen, die Zahlen n die Werthe $2^r n$, 2^s.

Wir setzen nun:

(I) $$m_1 = m_2 = m_3 = 1\,,\quad n_1 = n_2 = n_3 = n\,.$$

Die Bedingungsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= n\,, & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0\,,\\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= n\,, & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0\,,\\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= n\,, & a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} &= 0\,. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen folgen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} a_{11} : a_{12} : a_{13} &= \delta_1 : \delta_2 : \delta_3\,,\\ \delta_1 &= a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\,,\\ \delta_2 &= a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\,,\\ \delta_3 &= a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\,. \end{aligned}$$

Unter solchen Umständen erhalten wir die Relation:

$$n\,a_{1\varrho}^2 = \delta_\varrho^2\,,$$

oder also es muss n eine Quadratzahl sein. Ist diese Eigenschaft erfüllt, so können wir leicht mit Hülfe bekannter Parameterdarstellungen entsprechende Additionstheoreme finden. In der That, setzen wir — was stets möglich ist:

$$\sqrt{n} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 ,$$

so können wir für die Zahlen a die folgenden Werthe wählen:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2, & a_{12} &= 2(\alpha\beta-\gamma\delta), & a_{13} &= 2(\alpha\gamma+\beta\delta), \\
a_{21} &= -2(\alpha\beta+\gamma\delta), & a_{22} &= \alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2, & a_{23} &= 2(\alpha\delta-\beta\gamma), \\
a_{31} &= -2(\alpha\gamma-\beta\delta), & a_{32} &= -2(\alpha\delta+\beta\gamma), & a_{33} &= \alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2.
\end{aligned}$$

Es möge dieses das Gleichungssystem (1) sein, dann können wir den folgenden Lehrsatz aussprechen:

Lehrsatz: *Ist n eine Quadratzahl, welche der Gleichung Genüge leistet:*

$$\sqrt{n} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 ,$$

so existirt das Additionstheorem:

$$\Pi \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) = \sum \Pi \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n\tau) , \quad \varepsilon = 1, 2, 3 ,$$

welches zu dem Gleichungssystem (1) *gehört.*

Wir setzen nunmehr:

(II) $\quad m_1 = m_2 = m_3 = 1 , \quad n_1 = 2^r n , \quad n_2 = 2^s n , \quad n_3 = 2^t .$

In diesem Falle müsste sein:

$$2^t = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 .$$

Ist $t = 1$, so ist nur eine Zerlegung möglich:

$$2 = 1 + 1 = 1^2 + (-1)^2 ;$$

ist $t = 2$, so ist ebenfalls nur eine Zerlegung möglich und zwar:

$$4 = 2^2 .$$

Auf diese beiden Fälle kann der allgemeine zurückgeführt werden.

In der That, ist $t > 2$, so müssen jedenfalls die drei Zahlen a_{31}, a_{32}, a_{33} gerade Zahlen sein. Setzen wir:

$$a_{3\varrho} = 2 a'_{3\varrho} ,$$

so würde folgen:

$$2^{t-2} = a'^2_{31} + a'^2_{32} + a'^2_{33}$$

und daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar. Nehmen wir nun an, dass t ungerade ist, so folgt als einzige Zerfällung:

$$2^t = \left(2^{\frac{t-1}{2}}\right)^2 + \left(2^{\frac{t-1}{2}}\right)^2,$$

nehmen wir an, dass t gerade ist, die einzige Zerfällung:

$$2^t = \left(2^{\frac{t}{2}}\right)^2.$$

Wir wollen nun lediglich den Fall ins Auge fassen, dass t ungerade ist, da der zweite Fall zu unwichtige Resultate ergiebt, dann können wir ohne der Allgemeinheit im Wesentlichen Abbruch zu thun annehmen, dass $t = 1$ ist und erhalten das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
2^r n &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2, \quad & a_{11} - a_{12} &= 0, \\
2^s n &= a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2, \quad & a_{21} - a_{22} &= 0, \\
2 &= 1^2 + (-1)^2 \quad , & 2a_{11}a_{21} + a_{13}a_{23} &= 0.
\end{aligned}$$

Den Gleichungen wird Genüge geleistet, wenn wir setzen:

$$a_{21} = 2^{\frac{s-r-1}{2}} a_{13}, \quad a_{23} = -2^{\frac{s-r+1}{2}} a_{11}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: *Lässt die Zahl $2^r n$ sich in die Form bringen:*

$$2^r n = 2\alpha^2 + \gamma^2$$

und ist $r \equiv s + 1 \mod 2$, so gilt das Additionstheorem:

$$\Pi \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) = \Sigma \Pi \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon \tau),$$

$$n_1 = 2^r n, \quad n_2 = 2^s n, \quad n_3 = 2.$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{ccc}
\alpha, & \alpha, & \gamma, \\
2^{\frac{s-r-1}{2}} \gamma, & 2^{\frac{s-r-1}{2}} \gamma, & -2^{\frac{s-r+1}{2}} \alpha, \\
1, & -1, & 0.
\end{array}$$

Der hieran sich anschliessende Fall:

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1, \quad n_1 = 2^r n, \quad n_2 = 2^s, \quad n_3 = 2^t$$

kann als zu unwichtig fortgelassen werden.

Wir nehmen jetzt:

(III) $$m_1 = m_2 = 1\,, \quad m_3 = 2\,, \quad n_1 = n_2 = n_3 = n\,.$$

Die Bedingungsgleichungen nehmen die Form an:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + 2a_{13}^2 &= n\,, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + 2_{13}a_{23} = 0\,,\\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + 2a_{23}^2 &= n\,, \quad a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + 2_{23}a_{33} = 0\,,\\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + 2a_{33}^2 &= n\,, \quad a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + 2_{33}a_{13} = 0\,. \end{aligned}$$

Jedenfalls ist soviel klar, dass n das Doppelte einer Quadratzahl sein muss. Ist dasselbe der Fall, so ergiebt sich unmittelbar die Richtigkeit der beiden Sätze:

Lehrsatz: *Ist n das Doppelte einer Quadratzahl und lässt es sich in die Form bringen:*

$$n = 2(\alpha^2 + \beta^2)\,,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, \tau)\,\vartheta_3(v_3, 2\tau) = \sum\prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n\tau)\,,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & -\alpha \\ \sqrt{\frac{n}{2}} & -\sqrt{\frac{n}{2}} & 0\,. \end{array}$$

Lehrsatz: *Ist n das Doppelte einer Quadratzahl und lässt es sich in die Form bringen:*

$$n = 2(\alpha^2 + 2\beta^2)\,,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, \tau)\,\vartheta_3(v_3, 2\tau) = \sum\prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n\tau)\,,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{\frac{n}{2}} & \alpha & \beta \\ -\sqrt{\frac{n}{2}} & \alpha & \beta \\ 0 & 2\beta & -\alpha\,. \end{array}$$

Diese beiden Sätze können aber bedeutend verallgemeinert werden.

In der That, wir wollen zunächst der einfacheren Bezeichnungsweise wegen setzen:

$$a_{11} = \alpha\,, \quad a_{12} = -\beta\,, \quad a_{13} = \gamma\,, \quad a_{23} = \alpha_1\,, \quad a_{33} = \beta_1\,,$$

so muss n sich in die Form bringen lassen:

$$n = \alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma^2 = 2(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma^2)\,.$$

Aus den Bedingungsgleichungen folgt:

$$a_{21} = \frac{\beta}{\alpha}\,a_{22} - \frac{2\gamma}{\alpha}\,\alpha_1\,,$$

so dass sich für a_{22} die quadratische Gleichung ergiebt:

$$(\alpha^2 + \beta^2)a_{22}^2 - 4\beta\gamma a_{22}\alpha_1 = \alpha^2 n - 2\alpha^2\alpha_1^2 - 4\alpha_1^2\gamma^2\,.$$

Durch Auflösung der quadratischen Gleichung nach a_{22} erhalten wir:

$$a_{22} = \frac{2\beta\gamma\alpha_1 \pm \alpha\beta_1\sqrt{2n}}{\alpha^2 + \beta^2}\,.$$

Die drei noch fehlenden Transformationszahlen sind genau so zu bestimmen — ihre Werthe werden im Lehrsatze angegeben werden. Die gefundenen Werthe sind nur dann brauchbar, wenn sie ganze Zahlen sind.

Wenn $\alpha^2 + \beta^2$ gleich dem Producte einer ungeraden Primzahl mit 2 resp. einer Potenz von 2 ist, so ist dasselbe bei einem Vorzeichen stets der Fall.

Unter solchen Umständen erhalten wir den Lehrsatz, der die beiden vorigen als specielle Fälle in sich fasst:

Lehrsatz: *Ist n das Doppelte einer Quadratzahl und lässt es sich in die Formen bringen:*

$$n = \alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma^2 = 2(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma^2)\,,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, \tau)\,\vartheta_3(v_3, 2\tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n\tau)\,,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{ccc}
\alpha\,, & -\beta\,, & \gamma\,, \\[1ex]
\dfrac{-2\alpha\alpha_1\gamma \pm \beta\beta_1\sqrt{2n}}{\alpha^2 + \beta^2}\,, & \dfrac{2\beta\gamma\alpha_1 \pm \alpha\beta_1\sqrt{2n}}{\alpha^2 + \beta^2}\,, & \alpha_1\,, \\[2ex]
\dfrac{-2\alpha\beta_1\gamma \pm \beta\alpha_1\sqrt{2n}}{\alpha^2 + \beta^2}\,, & \dfrac{2\beta\gamma\beta_1 \pm \alpha\alpha_1\sqrt{2n}}{\alpha^2 + \beta^2}\,, & \beta_1\,.
\end{array}$$

Ist z. B. $n = 98$, so ergiebt sich das Schema:

$$\begin{array}{ccc} 8 & -4 & 3 \\ -5 & -1 & 6 \\ 3 & 9 & 2\,. \end{array}$$

Der Fall, dass die rechten Seiten, oder anders ausgedrückt, dass die Moduln auf den rechten Seiten gleich $2^r n$ etc. sind, kann füglich fortgelassen werden.

Wir wollen ferner die Annahme machen:

$$\text{(IV)} \qquad m_1 = 1\,, \quad m_2 = 1\,, \quad m_3 = 2\,, \quad n_1 = 2^r n\,,$$
$$n_2 = 2^s n\,, \quad n_3 = 2^t\,.$$

In diesem Falle müsste die Gleichung bestehen:

$$2^t = a_{31}^2 + a_{32}^2 + 2a_{33}^2\,.$$

Nehmen wir an, dass $t > 2$ ist, so müssen die Zahlen a_{31}, a_{32}, a_{33} jedenfalls gerade sein. Dividiren wir daher die letzte Gleichung durch 4, so würden wir eine Gleichung von der Form erhalten:

$$2^{t-2} = a_{31}'^2 + a_{32}'^2 + 2a_{33}'^2\,.$$

Wir können demnach das Problem bis auf die Fälle $t = 1$, $t = 2$ reduciren. Wir wollen den Fall $t = 1$ als zu unwichtig ausser Auge lassen, so bleibt $t = 2$ übrig und zwar können wir dann schreiben:

$$4 = 1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1^2\,.$$

Auf diesen Fall wollen wir uns beschränken und demgemäss setzen:

$$a_{31} = a_{32} = a_{33} = 1\,.$$

Die Bedingungsgleichungen nehmen die Form an:

$$2^r n = a_{11}^2 + a_{12}^2 + 2a_{13}^2\,, \quad a_{11} + a_{12} + 2a_{13} = 0\,,$$
$$2^s n = a_{21}^2 + a_{22}^2 + 2a_{23}^2\,, \quad a_{21} + a_{22} + 2a_{23} = 0\,,$$
$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + 2a_{13}a_{23} = 0\,.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$2^{r-1} n = (a_{11} + a_{13})^2 + 2a_{13}^2\,,$$
$$2^{s-1} n = (a_{21} + a_{23})^2 + 2a_{23}^2\,,$$
$$(a_{11} + a_{13})(a_{21} + a_{23}) + 2a_{13}a_{23} = 0\,.$$

Unter solchen Umständen erhalten den

Lehrsatz: *Findet die Gleichung statt:*

$$2^{r-1}n = \alpha^2 + 2\beta^2 ,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_2, \tau)\, \vartheta_3(v_3, 2\tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon \tau) ,$$

$$n_1 = 2^r n , \quad n_2 = 2^s n , \quad n_3 = 4 ,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} \alpha - \beta & , & -\alpha - \beta & , & \beta \\ 2^\sigma(\alpha + 2\beta) & , & 2^\sigma(\alpha - 2\beta) & , & -2^\sigma \alpha \\ 1 & , & 1 & , & 1 \end{matrix}$$

$$\sigma = \frac{s - 1 - r}{2} .$$

Die Zahlen r und s sind so zu wählen, dass alles ganzzahlig wird.

Der Fall

$$m_1 = 1 \quad m_2 = 1 , \quad m_3 = 2 , \quad n_1 = 2^r n , \quad n_2 = 2^s , \quad n_3 = 2^t$$

führt zu keinen wichtigeren Resultaten, ebenso wie der Fall:

$$m_1 = 1 , \quad m_2 = 1 , \quad m_3 = 2 , \quad n_1 = 2^r , \quad n_2 = 2^s , \quad n_3 = 2^t .$$

Wir nehmen jetzt

(V) $\quad m_1 = 1, \; m_2 = 1, \; m_3 = n, \; n_1 = 2^r n, \; n_2 = 2^s n, \; n_3 = 2^t n .$

In diesem Falle müssen die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + n a_{13}^2 &= 2^r n , & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + n a_{13}a_{23} &= 0 , \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + n a_{23}^2 &= 2^s n , & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + n a_{23}a_{33} &= 0 , \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + n a_{33}^2 &= 2^t n , & a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + n a_{33}a_{13} &= 0 . \end{aligned}$$

Jedenfalls müssen die drei Ausdrücke:

$$n(2^r - a_{13}^2) , \quad n(2^s - a_{23}^2) , \quad n(2^t - a_{33}^2)$$

sich als Summen zweier Quadratzahlen darstellen lassen. Dasselbe würde von den drei Ausdrücken gelten:

$$n(2^r + 2^s - (a_{13} + a_{23})^2) , \quad n(2^s + 2^t - (a_{23} + a_{33})^2) ,$$
$$n(2^t + 2^r - (a_{33} + a_{13})^2) .$$

Dann aber folgt, dass $2^r - a_{13}^2$ einen Primfactor von der Form $4l + 3$ nicht eine ungrade Anzahl mal besitzen darf. In der That, wäre dasselbe der Fall, so müsste ihn n auch eine ungerade Zahl mal besitzen, denn sonst könnte $n(2^r - a_{13}^2)$ sich nicht als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen.

Dasselbe würde für

$$2^r - a_{23}^2\,,\quad 2^t - a_{33}^2\,,\quad 2^r + 2^s - (a_{13} + a_{23})^2 \text{ etc.}$$

gelten, also müssten auch die Producte:

$$a_{13}a_{23}\,,\quad a_{23}a_{33}\,,\quad a_{33}a_{13}$$

durch die Primzahl von der Form $4l + 3$ theilbar sein. Das führt zu einem Widerspruch, denn besässe z. B. a_{13} den definirten Primfactor, so könnte ihn $2^r - a_{13}^2$ nicht besitzen.

Unter solchen Umständen müssen die Ausdrücke:

$$2^r - a_{13}^2\,,\quad 2^s - a_{23}^2\,,\quad 2^t - a_{33}^2$$

die Form haben:

$$(4m + 1)2^{\mu}\,,$$

— den Fall, dass eine der drei Grössen gleich Null ist, wollen wir als zu unwichtig ausschliessen.

Unter solchen Umständen können die drei Grössen a_{13}, a_{23}, a_{33} nur die Werthe 0 oder $2^{\frac{r-1}{2}}$, $2^{\frac{s-1}{2}}$, $2^{\frac{t-1}{2}}$ annehmen. Alle drei Grössen können nicht von Null verschieden sein, denn es besteht ja die Gleichung:

$$\frac{a_{13}^2}{2^r} + \frac{a_{23}^2}{2^s} + \frac{a_{33}^2}{2^t} = 1$$

und diese würde im Falle, dass die Grössen a die Werthe besitzen:

$$a_{13} = 2^{\frac{r-1}{2}}\,,\quad a_{23} = 2^{\frac{s-1}{2}}\,,\quad a_{33} = 2^{\frac{t-1}{2}}$$

zu einem Widerspruch führen.

Ebenso wenig können zwei oder drei der Grössen a_{13}, a_{23}, a_{33} gleich Null sein — es bleibt also nur der Fall übrig, dass zwei von ihnen von Null verschieden, die dritte dagegen gleich Null sei. Wir nehmen an, es sei dieses a_{33}, so ergiebt sich:

$$a_{13} = 2^{\frac{r-1}{2}}\,,\quad a_{23} = 2^{\frac{s-1}{2}}\,,\quad a_{33} = 0\,.$$

Die Bedingungsgleichungen nehmen die Form an:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 2^{r-1} n\,, \quad a_{11} a_{31} + a_{12} a_{32} = 0\,,$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = 2^{s-1} n\,, \quad a_{21} a_{31} + a_{22} a_{32} = 0\,,$$
$$a_{31}^2 + a_{32}^2 = 2^{t} n\,, \quad a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} + n 2^{\frac{r+s-1}{2}} = 0\,.$$

Die Bestimmung der noch fehlenden Grössen aus diesen Gleichungen hat keine Schwierigkeiten. Wir erhalten den

Lehrsatz: *Lässt sich die Zahl n in die Form bringen:*

$$n = \alpha^2 + \beta^2\,,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_2, \tau)\, \vartheta_3(v_3, n\tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon \tau)\,,$$
$$n_1 = 2^r n\,, \quad n_2 = 2^s n\,, \quad n_3 = 2^t n\,,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{ccc} 2^{\frac{r-1}{2}} \alpha\,, & 2^{\frac{r-1}{2}} \beta\,, & 2^{\frac{r-1}{2}}\,, \\ 2^{\frac{s-1}{2}} \alpha\,, & 2^{\frac{s-1}{2}} \beta\,, & -2^{\frac{s-1}{2}}\,, \\ 2^{\frac{t}{2}} \beta\,, & -2^{\frac{t}{2}} \alpha\,, & 0\,. \end{array}$$

Die Zahlen r und s sind ungerade, t gerade.

Der Fall:

$$m_1 = 1\,, \; m_2 = 1\,, \; m_3 = n\,, \; n_1 = 2^r n\,, \; n_2 = 2^s n\,, \; n_3 = 2^t$$

kann wieder ausser Auge gelassen werden, da er nur unwichtigere Theoreme ergiebt.

Wir nehmen jetzt:

(VI) $m_1 = 1\,, \; m_2 = 1\,, \; m_3 = n\,, \; n_1 = 2^r n\,, \; n_2 = 2^s\,, \; n_3 = 2^t.$

Die Bedingungsgleichungen können geschrieben werden:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + n a_{13}^2 = 2^r n\,, \quad a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} + n a_{13} a_{23} = 0\,,$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + n a_{23}^2 = 2^s\,, \quad a_{21} a_{31} + a_{22} a_{32} + n a_{23} a_{33} = 0\,,$$
$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + n a_{33}^2 = 2^t\,, \quad a_{11} a_{31} + a_{12} a_{32} + n a_{13} a_{33} = 0\,.$$

Aus den Bedingungsgleichungen folgt, dass a_{11} und a_{12} abgesehen von Potenzen von 2 durch n theilbar sein müssen. Wir wollen setzen:

$$a_{11} = n\alpha\,, \quad a_{12} = -n\beta\,,$$

wir wollen ferner der Einfachheit halber a_{13} durch γ bezeichnen, dann folgt für n die Gleichung:

$$n(\alpha^2 + \beta^2) = 2^r - \gamma^2 .$$

Aus den Bedingungsgleichungen folgt:

$$a_{12} = \frac{\beta}{\alpha} a_{22} - \frac{\gamma}{\alpha} a_{23},$$

so dass wir für a_{22} die quadratische Gleichung erhalten:

$$(\alpha^2 + \beta^2) a_{22}^2 - 2\beta\gamma a_{22} a_{23} = \alpha^2 (2^s - n a_{23}^2) - \gamma^2 a_{23}^2 .$$

Hieraus folgt:

$$a_{22} = \frac{\beta\gamma a_{23}}{\alpha^2 + \beta^2} \pm \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)\, 2^s - 2^r a_{23}^2} .$$

Wir erhalten für a_{22} einen rationalen Ausdruck, wenn wir setzen:

$$s = r, \quad a_{23} = \alpha$$

und annehmen, dass r eine gerade Zahl ist. Unter diesen Voraussetzungen nämlich können wir schreiben:

$$a_{22} = \frac{\alpha\beta\gamma \pm \alpha\beta 2^{\frac{r}{2}}}{\alpha^2 + \beta^2} .$$

Ferner ist klar, dass wenn $\alpha^2 + \beta^2$ eine Primzahl ist, jedenfalls das Vorzeichen so gewählt werden kann, dass a_{22} eine ganze Zahl ist. Wir wollen der einfacheren Bezeichnung wegen setzen:

$$w = \frac{\gamma \pm 2^{\frac{r}{2}}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

dann kann der Werth von a_{22} geschrieben werden:

$$a_{22} = \alpha\beta w .$$

Hiermit sind alle Schwierigkeiten überwunden und wir erhalten den

Lehrsatz. *Leistet n der Gleichung Genüge:*

$$n(\alpha^2 + \beta^2) = 2^r - \gamma^2 ,$$

so existirt das Additionstheorem

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_2, \tau)\, \vartheta_3(v_3, n\tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon \tau),$$
$$n_1 = 2^r n, \quad n_2 = 2^r, \quad n_3 = 2^r,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{ccc} \alpha n\,, & -\beta n\,, & \gamma \\ -\gamma+\beta^2 w\,, & \alpha\beta w\,, & \alpha \\ \alpha\beta w\,, & -\gamma+\alpha^2 w\,, & -\beta\,, \end{array}$$

$$w = \frac{\gamma \pm 2^{\frac{r}{2}}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Das Vorzeichen bei w ist so zu wählen, dass w eine ganze Zahl wird, r ist als gerade Zahl anzunehmen.

Ein ähnliches Resultat würde sich ergeben, wenn wir die Bedingung fallen lassen, dass $r = s$ ist.

Der Fall:

$$m_1 = 1\,,\ m_2 = 1\,,\ m_3 = n,\ n_1 = 2^r,\ n_2 = 2^s,\ n_3 = 2^t,$$

führt zu keinen irgendwie wichtigen Theoremen, denn aus der Gleichung:

$$n\left[\frac{a_{13}^2}{2^r} + \frac{a_{23}^2}{2^s} + \frac{a_{33}^2}{2^t}\right] = 1$$

würde folgen, dass n eine Potenz von 2 sein müsste.

Wir kommen zu dem Fall:

(VII) $m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ m_3 = n,\ n_1 = 2^r n,\ n_2 = 2^s n,\ n_3 = 2^t n.$

In demselben nehmen die Bedingungsgleichungen die Form an:

$$a_{11}^2 + 2a_{12}^2 = n(2^r - a_{13}^2)\,,\quad a_{21}^2 + 2a_{22}^2 = n(2^s - a_{23}^2)\,,$$
$$a_{31}^2 + 2a_{32}^2 = n(2^t - a_{33}^2)\,,$$
$$a_{11}a_{21} + 2a_{12}a_{22} + n a_{13}a_{23} = 0,\quad a_{11}a_{31} + 2a_{12}a_{32} + n a_{13}a_{33} = 0,$$
$$a_{21}a_{31} + 2a_{22}a_{32} + n a_{23}a_{33} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich drei weitere, als deren Repräsentant wir die Gleichung ansehen wollen:

$$(a_{11} + a_{21})^2 + 2(a_{12} + a_{22})^2 + n(a_{13} + a_{23})^2 = (2^r + 2^s)n.$$

Aus unseren Gleichungen folgt, dass $2^r - a_{13}^2$ keinen Primfacto von der Form $8\varrho + 5$ oder $8\varrho + 7$ eine ungerade Anzahl mal haben kann, denn sonst müsste n und mit ihm $2^s - a_{23}^2$ und $2^t - a_{33}^2$ ihn auch besitzen. Dasselbe würde dann für die Ausdrücke:

$$2^r + 2^s - (a_{13} + a_{23})^2 \text{ etc.}$$

gelten, also müssten die Producte:

$$a_{13}a_{23},\ a_{23}a_{33},\ a_{33}a_{13}$$

durch eine Primzahl und zwar die vorhin definirte von der Form $8\varrho+5$ oder $8\varrho+7$ theilbar sein. Das führt zu einem Widerspruch, denn besässe z. B. a_{13} den definirten Primfactor, so könnte ihn $2^r - a_{13}^2$ nicht besitzen.

Unter solchen Umständen müssen die Ausdrücke:

$$2^r - a_{13}^2,\ 2^s - a_{23}^2,\ 2^t - a_{33}^2$$

die Form haben:

$$(8m+1)2^{\mu} \text{ oder } (8m+3)2^{\mu},$$

wobei wir den Fall, dass eine dieser Grössen Null ist, als zu unwichtig ausschliessen.

Mit Hülfe weniger Schlüsse folgt dann, dass die Grössen a_{13}, a_{23}, a_{33} die folgenden Werthe annehmen können

$$0,\ 2^{\frac{r-1}{2}},\ 2^{\frac{s-1}{2}},\ 2^{\frac{t-1}{2}},\ 2^{\frac{r-2}{2}},\ 2^{\frac{s-2}{2}},\ 2^{\frac{t-2}{2}}.$$

Nimmt man die Gleichung hinzu:

$$\frac{a_{13}^2}{2^r} + \frac{a_{23}^2}{2^s} + \frac{a_{33}^2}{2^t} = 1,$$

so folgt, dass zwei Fälle zu erwägen sind:

$$1)\quad a_{13} = 2^{\frac{r-1}{2}},\quad a_{23} = 2^{\frac{s-2}{2}},\quad a_{33} = 2^{\frac{t-2}{2}},$$

$$2)\quad a_{13} = 2^{\frac{r-1}{2}},\quad a_{23} = 2^{\frac{s-1}{2}},\quad a_{33} = 0.$$

Im ersten Falle wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass

$$r=1,\ s=2,\ t=2$$

sei, dann erhalten wir die Gleichungen:

$$a_{11}^2 + 2a_{12}^2 = n,\quad a_{21}^2 + 2a_{22}^2 = 3n,\quad a_{31}^2 + 2a_{32}^2 = 3n,$$

$$a_{11}a_{21} + 2a_{12}a_{22} + n = 0,$$

etc.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich für a_{22} die quadratische Gleichung:

$$a_{22}^2 + 2a_{12}a_{22} = \frac{3a_{12}^2 - n}{2},$$

oder also wir erhalten:

$$a_{22} = - a_{12} \pm a_{11} .$$

Die übrigen Grössen sind dann leicht bestimmt. Behalten wir das untere Zeichen bei, so ergiebt sich der

Lehrsatz. *Lässt n sich in die Form bringen:*

$$n = \alpha^2 + 2\beta^2 ,$$

so existirt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, 2\tau)\,\vartheta_3(v_3, n\tau) = \sum\prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon \tau) ,$$

$$n_1 = 2n , \quad n_2 = 4n , \quad n_3 = 4n ,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{ccc} \alpha , & \beta , & 1 \\ -\alpha + 2\beta , & -\alpha - \beta , & 1 \\ -\alpha - 2\beta , & \alpha - \beta , & 1 . \end{array}$$

Der Fall allgemeiner Werthe r, s, t ist ganz analog zu behandeln.

Wir nehmen zweitens an, dass die Gleichungen bestehen:

$$a_{13} = 2^{\frac{r-1}{2}} , \quad a_{23} = 2^{\frac{s-1}{2}} , \quad a_{33} = 0$$

und zwar möge wiederum der Einfachheit halber gesetzt werden:

$$r = 1 , \quad s = 1 ,$$

so erhalten wir den

Lehrsatz. *Lässt n sich in die Form bringen:*

$$n = \alpha^2 + 2\beta^2 ,$$

so existirt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, 2\tau)\,\vartheta_3(v_3, n\tau) = \sum\prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon \tau) ,$$

$$n_1 = 2n , \quad n_2 = 2n , \quad n_3 = 2n ,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha & \beta & -1 \\ 2\beta & -\alpha & 0 . \end{array}$$

Der Fall allgemeiner Werthe r, s, t ist ganz analog zu behandeln.

Den Fall $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = n$, $n_1 = 2^r n$, $n_2 = 2^s n$, $n_3 = 2^t$

können wir füglich wieder fortlassen und wenden uns sofort zu dem Falle:

$$m_1 = 1\,,\quad m_2 = 2\,,\quad m_3 = n\,,\quad n_1 = 2^r n\,,\quad n_2 = 2^s,\quad n_3 = 2^t.$$

Wir wollen der einfacheren Bezeichnungsweise wegen setzen:

$$a_{11} = \alpha n\,,\quad a_{12} = -\beta n\,,\quad a_{13} = \gamma\,,$$

wobei angenommen ist, dass a_{11} und a_{12} durch n theilbar sind. Es möge in Bezug hierauf auf einige frühere Bemerkungen verwiesen werden.

Dann folgt aus den Bedingungsgleichungen:

$$a_{21} = \frac{2\beta a_{22} - \gamma a_{23}}{\alpha}.$$

Setzen wir diesen Werth von a_{21} in die Gleichung ein:

$$a_{21}^2 + 2a_{22}^2 + n a_{23}^2 = 2^s,$$

so erhalten wir für a_{22} eine quadratische Gleichung, aus welcher das Resultat folgt:

$$a_{22} = \frac{\beta \cdot \gamma \cdot a_{23}}{\alpha^2 + 2\beta^2} \pm \frac{\alpha}{\alpha^2 + 2\beta^2} \sqrt{\frac{(\alpha^2 + 2\beta^2)\,2^s - a_{23}^2\,2^r}{2}}.$$

Es ergiebt sich für a_{22} ein rationaler Ausdruck, wenn wir setzen:

$$a_{23} = \alpha\,,\quad r = s$$

und zwar erhalten wir:

$$a_{22} = \alpha\beta w\qquad,$$

$$w = \frac{\gamma \pm 2^{\frac{r}{2}}}{\alpha^2 + 2\beta^2}.$$

Ist $\alpha^2 + 2\beta^2$ eine Primzahl, so kann das Zeichen stets so gewählt werden, dass w eine ganze Zahl ist, wobei vorauszusetzen ist, dass r eine gerade Zahl bedeutet.

Mit diesen Bemerkungen sind alle Schwierigkeiten überwunden. Wir erhalten den

Lehrsatz. *Leistet n der Gleichung Genüge:*

$$n(\alpha^2 + 2\beta^2) = 2^r - \gamma^2,$$

so gilt das Additionstheorem

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, 2\tau)\,\vartheta_3(v_3, n\tau) = \sum\prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon\tau),$$
$$n_1 = 2^r n\,,\quad n_2 = 2^r,\quad n_3 = 2^{r-1},$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{ccc} n\alpha , & -\beta n , & \gamma \\ -\gamma+2\beta^2 w , & \alpha\beta w , & \alpha \\ \alpha\beta w , & -\dfrac{\gamma}{2}+\dfrac{\alpha^2 w}{2} , & -\beta \end{array}$$

$$w=\frac{\gamma \pm 2^{\frac{r}{2}}}{\alpha^2+2\beta^2}.$$

Hiermit sind wir im Wesentlichen am Ziele. Die fehlenden Fälle können entweder auf die bisherigen zurückgeführt werden oder sind so einfach, dass von ihrer Aufstellung abgesehen werden kann.

SITZUNG VOM 1. JUNI 1896.

Vorträge hielten:

1. Herr **Wilh. Pfeffer**, o. M., Ueber die vorübergehende Aufhebung der Assimilationsfähigkeit von Chlorophyllkörpern.
2. Herr **Max v. Frey**, a. o. M., Untersuchungen über die Sinnesfunctionen der menschlichen Haut. 1. Abhandlung: Druckempfindung und Schmerz (siehe Abhandlungen).
3. Herr **Paul Drude**, a. o. M., Der elektrische Brechungsexponent von Wasser und wässrigen Lösungen.
4. Derselbe, Theorie der stehenden elektrischen Drahtwellen (siehe Abhandlungen).
5. Herr **Otto Fischer**, a. o. M., Beiträge zur Muskelstatik. Ueber das Gleichgewicht von Muskeln und Schwere an zweigliedrigen Körpersystemen (siehe Abhandlungen).

Wilh. Pfeffer sprach auf Grund der im botanischen Institut von Herrn Ewart ausgeführten Untersuchungen *über die vorübergehende Aufhebung der Assimilationsfähigkeit in Chlorophyllkörpern.*

Trotz der sehr zahlreichen Studien über die Abhängigkeit der Kohlensäurezersetzung von äusseren Einflüssen wurde bisher noch keinmal näher untersucht, ob und in wie weit den Chlorophyllkörpern die assimilatorische Fähigkeit zeitweise geraubt werden kann. Das ist aber thatsächlich möglich, wie die Untersuchungen des Herrn Ewart ergaben. Sehr gewöhnlich, ja wohl allgemein, werden nämlich die Chlorophyllkörper bei genügend langem Verweilen unter solchen Verhältnissen, die bei noch längerer Fortdauer endlich den Tod des Organismus herbeiführen, in einen Zustand versetzt, in welchem sie nunmehr unfähig sind, bei Wiederherstellung der besten Bedingungen Kohlensäure zu assimiliren. Diese Fähigkeit kehrt aber unter normalen Aussenbedingungen allmählich zurück, es war also unter der Ungunst der Verhältnisse keine dauernde, sondern eine wieder ausgleichbare Verschiebung der Eigenschaften herbeigeführt, die in keiner Weise durch das ganz normale Aussehen der Chlorophyllkörper verrathen wird.

Derartige Erfolge konnten durch Temperaturextreme, durch intensive Lichtwirkung, durch Austrocknen, durch Mangel von Sauerstoff, durch die Wirkung von Kohlensäure, durch Aether, Chloroform und Antipyrin herbeigeführt werden. Es handelt sich also dabei nicht um die specifische Wirkung eines bestimmten Agens, sondern um eine durch ungünstige Verhältnisse veranlasste Veränderung, welche unter Umständen längere Zeit ertragen werden kann, ohne zum Tode zu führen.

Natürlich hängt es von der Natur der Pflanze, sowie von der Art und der Dauer solcher äusseren Einwirkungen ab, ob dieser inactive Zustand in auffälliger Weise geschaffen wird. Hat z. B. eine geeignete Pflanze (Ilex, Buxus, Prunus u. s. w.) nur kurze Zeit bei 0 bis 4° C. verweilt, so wird mit Wiederherstellung der günstigen Temperatur die Chlorophyllfunction sofort wieder aufgenommen. Dauert aber ein solcher Aufenthalt einen bis einige Tage, dann erweisen sich die Chlorophyllkörper zunächst inactiv und gewinnen unter den normalen Bedingungen nur allmählich, je nach Umständen schon in kurzer Zeit oder auch erst nach mehr als 24 Stunden die asssimilatorische Fähigkeit wieder. Deshalb vermögen auch im Freien Pflanzen nach längerer Kälte nicht sogleich wieder zu assimiliren, wenn plötzlich warme Tage kommen. Doch scheint selbst bei den stark reagirenden Pflanzen lange Zeit zur Regeneration nicht nöthig zu sein, die z. B. in den geprüften Laubmoosen sich zumeist so schnell vollzieht, dass man überhaupt nur nach langer Kältewirkung eine gewisse Sistirung der Chlorophyllfunction zu constatiren vermag. Aber auch dann, wenn dieser inducirte inactive Zustand längere Zeit anhält, ist eine Veränderung der Gestaltung und Färbung der Chlorophyllkörper gewöhnlich nicht vorhanden, es liegt also nur ein specieller Fall vor, wenn beides in den winterlich sich verfärbenden Coniferen mit der Schaffung des inactiven Zustandes zusammenfällt.

An dieser Stelle soll nicht weiter auf die in principieller Hinsicht analoge Wirkung der anderen genannten Eingriffe eingegangen werden. Doch sei erwähnt, dass schon vor langer Zeit Boussingault eine Asphyxie der Blätter durch Kohlensäureeinfluss beobachtete, ohne indess den Gegenstand weiter zu verfolgen und in seiner generellen Bedeutung zu erkennen. Auch in den Versuchen Jumelle's, in welchen durch Erhitzen getrockneter Moose und Flechten die Kohlensäurezersetzung eliminirt wurde, handelt es sich nicht, wie der Autor annimmt, um eine permanente, sondern nur um transitorische Inactivirung der Chlorophyllkörper, und das gilt ebenso für die Versuche, in welchen Aether oder Chloroform zum Inactiviren benutzt wurde.

Bis dahin kam es in unseren Versuchen nicht vor, dass ohne Tödtung des Protoplasten die Chloroplasten getödtet oder derartig verändert waren, dass ihre assimilatorische Thätigkeit nicht zurückkehrte. Doch dürfte solches durch geeignete Einflüsse wohl noch gelingen und thatsächlich wird die bisherige Functionsfähigkeit auf die Dauer aufgehoben, wenn in der lebensthätigen Pflanze die Chloroplasten in andere Farbstoffkörper u. s. w. verwandelt werden. Ebenso gut könnten aber auch Chlorophyllkörper von normalem Aussehen permanent inactiv sein, obgleich jeder der von uns geprüften Chlorophyllkörper unter den zureichenden Bedingungen Sauerstoff producirte.

Die Eigenschaft der Chlorophyllkörper, ihre assimilatorische Befähigung ohne sichtbare Veränderung zeitweise einzubüssen und dann dieselbe wieder zu regeneriren, ist wohl verständlich, wenn man bedenkt, dass es sich um lebendige Organe handelt, in welchen nicht etwa allein der Chlorophyllfarbstoff, sondern der gesammte Aufbau und Zustand der lebendigen Substanz für die Thätigkeit entscheidend ist. Eine dem Absterben vorausgehende Schwächung der Befähigungen ist aber eine verbreitete Erscheinung, die z. B. darin zum Ausdruck kommt, dass in alten Samen zunächst die Keimschnelligkeit vermindert wird oder dass wachsende Organe nach längerem Aufenthalt in niedriger Temperatur unter günstigen Vegetationsbedingungen nur allmählich die normale Wachsthumsschnelligkeit wieder erreichen, während sie sogleich auf diese zurückkehren, wenn die Thätigkeit nur kurze Zeit durch niedrige Temperatur gehemmt worden war. Auch bedarf es gewisser Zeit zur Regeneration des normalen Zustandes, wenn die Structur des Protoplasten durch niedrige Temperatur oder durch andere Eingriffe in sichtbarer Weisse deformirt worden ist. Eben die Regeneration ist der Beweis, dass nur eine Störung, nicht aber eine Tödtung erzielt worden war. Und da solche Störungen nicht alle Functionen gleichzeitig treffen, so kann nur empirisch entschieden werden, ob mit der Sistirung der Kohlensäurezersetzung gleichzeitig auch die Fähigkeit der Stärkebildung aus vorhandenem Zucker zum Stillstand gebracht wird.

Im Grossen und Ganzen scheint die besprochene functionelle Störung in den Chlorophyllkörpern relativ leicht einzutreten, denn sie ist erreicht, wenn z. B. die Plasmaströmung nach der Rückkehr in normale Verhältnisse sogleich wieder aufgenommen wird. Mit der Sistirung der Chlorophyllfunction ist die Athmungsbefähigung nicht suspendirt und das muss auch so sein, da ohne diese Betriebskraft die zur Thätigkeit und damit zur Regeneration nothwendigen Bedingungen fehlen würden. Natürlich ist eine gewisse Beeinflussung der Athmung nicht ausgeschlossen und nach den Gesammterfahrungen dürfte diese, wenigstens nach gewissen hemmenden Eingriffen (z. B. nach Aufenthalt in tiefer Temperatur) zunächst deprimirt sein, dann sich aber allmählich für gewisse Zeit über das für die constante Bedingung giltige Maass erheben.

Da die Chlorophyllkörper lebendige Organe sind, welche in dem lebenden Protoplasten die Stätte ihres Bildens und Wirkens finden, so ist nicht zu verwundern, dass sie nach dem Isoliren, auch in isosmotischer Zuckerlösung, ihre Fähigkeiten verlieren. Wie aber der ausgeschnittene Muskel, obgleich er nicht auf die Dauer lebensfähig ist, noch einige Zeit zuckungsfähig ist, bewahren manche Chloroplasten nach der Ueberführung in Zuckerlösung noch einige Zeit die Fähigkeit im Lichte Sauerstoff zu produciren. Damit finden die nicht ganz einwandsfreien Beobachtungen von Engelmann und Haberlandt ihre Bestätigung und es ist also erwiesen, dass die Chlorophyllkörper Organe sind, welche ohne directe Mithilfe des übrigen Protoplasmas die Kohlensäureassimilation zu vollbringen vermögen.

Ohne auf die Methodik weiter einzugehen sei nur erwähnt, dass zum Nachweis der Kohlensäurezersetzung die Bacterienmethode benutzt wurde, welche einmal die geringste (den Athmungsbedarf übertreffende) Sauerstoffproduction anzeigt und zudem den unschätzbaren Vortheil gewährt, in jedem Augenblicke für eine einzelne Zelle die Assimilationsfähigkeit controliren zu können.

Paul Drude, *Der elektrische Brechungsexponent von Wasser und wässrigen Lösungen.* Mit einer Figur.

In der Arbeit: »Ueber anomale elektrische Dispersion von Flüssigkeiten« (Abhandl. d. königl. sächs. Ges. d. Wiss., mathem.-phys. Klasse, 23. Bd. S. 1, 1896) habe ich erwähnt, dass sich beim Wasser keine elektrische Dispersion nachweisen lässt, und dass sich wässrige, elektrolytisch leitende Lösungen selbst für sehr schnelle elektrische Schwingungen normal verhalten, d. h. in der Weise, wie es aus ihrem Verhalten für sehr langsame Schwingungen im voraus zu berechnen wäre. Hinsichtlich des Zahlenmaterials für diese Behauptungen und der genaueren Beschreibung dieser Versuche habe ich auf eine spätere Gelegenheit verwiesen. Ich will daher jetzt diese Versuche genauer mittheilen, wobei auch die Abhängigkeit des elektrischen Brechungsexponenten des Wassers von der Temperatur, sowie das interessante Verhalten von zuckerhaltigen Lösungen besprochen werden soll. — Eine genaue Kenntniss der Eigenschaften des Wassers und wässriger Lösungen ist deshalb von Wichtigkeit, weil dieselben bei Untersuchungen anderer Substanzen mit schnellen elektrischen Schwingungen sehr gut als Vergleichskörper gewählt werden können.

Hinsichtlich der Beschreibung der Methode verweise ich auf die anfangs genannte Arbeit. Ich will hier nur erwähnen, dass in einer Leitung von zwei parallelen Kupferdrähten stehende elektrische Wellen erregt wurden, indem ein die Drähte überbrückender Bügel B_1 fest liegen blieb, ein zweiter Bügel B_2 dahinter so verschoben wurde, dass sich stehende Wellen zwischen B_1 und B_2 bildeten. Im Folgenden sind diese Lagen von B_2 mitgetheilt, und zwar einmal, wenn die Drahtleitung ganz in Luft verlief, andrerseits wenn die Drahtleitung hinter dem ersten elektrischen Knoten in Wasser, bezw. wässriger Lösung lag. Die successiven Abstände der Brücke B_2 geben im ersten Falle die halbe Wellenlänge der Schwingungen in Luft ($\frac{1}{2}\lambda$), im zweiten Falle die halbe Wellenlänge der Schwingungen im Wasser, bezw. der Lösung ($\frac{1}{2}\lambda'$). Der elektrische Brechungsexponent n soll das Verhältniss beider Grössen genannt werden:

$$n = \frac{\frac{1}{2}\lambda}{\frac{1}{2}\lambda'} = \frac{\lambda}{\lambda'}.$$

Die Wellenlänge in Luft ($\frac{1}{2}\lambda$) ist vor und nach der Beobachtung der Schwingungen im Wasser bestimmt worden, um sicher zu sein, dass durch Auswechselung der Luftleitung mit der Leitung, welche den das Wasser enthaltenden Trog durchsetzt, am Erreger der Wellen durch etwaige Erschütterung keine Aenderung eingetreten ist. Die weitaus meisten Beobachtungen wurden mit einem Erreger gemacht, welcher $\frac{1}{2}\lambda$ zu etwa 37 cm ergab. Einige Beobachtungen wurden auch mit einem grösseren Erreger, der $\frac{1}{2}\lambda$ zu etwa 1 m ergab, angestellt. Sie sind im Folgenden durch die besondere Ueberschrift: »grosser Erreger« gekennzeichnet.

Um die Umstände möglichst zu variiren, ist bei verschiedener Dicke der Drahtleitung, bei verschiedenem gegenseitigem Abstand ihrer Drähte, und bei Benutzung verschiedener Flüssigkeitströge beobachtet worden. Ich habe deren fünf angewandt:

1) *Grosser Thontrog:* 48 cm lang, 21 cm breit, 35 cm hoch (im Lichten), 1,1 cm Wandstärke. Der Trog ist innen glasirt und wird bis 1 cm unter seinen Rand mit Wasser gefüllt. Die Drahtleitung verläuft 12 cm unter dem Rand des Troges.

2) *Kleiner Thontrog:* 31 cm lang, 11 cm breit, 11 cm hoch, 1,1 cm Wandstärke. Innen glasirt; Drahtleitung 6 cm unter dem Rand.

3) *Blechtrog*, mit 8 mm dicken Ebonit-Seitenwänden, durch welche die Drahtleitung tritt. 60 cm lang, 16 cm breit, 16 cm hoch. Drahtleitung 8 cm unter dem Rand.

4) *Grosser Glastrog*, 30 cm lang, 5 cm breit, 6 cm hoch, 0,2 cm Wandstärke. Drahtleitung $3\frac{1}{2}$ cm unter dem Rand.

5) *Kleiner Glastrog*, 30 cm lang, 3 cm breit, $3\frac{1}{2}$ cm hoch. Drahtleitung 2 cm unter dem Rand. Alle Maasse gelten im Lichten.

Die Innenseite der Vorderwand der Tröge, durch welche die Drahtleitung eintritt, d. h. der Flüssigkeitsanfang, lag sehr nahe (mindestens bis auf 1 mm) in dem ersten Knoten der elektrischen Kraft, welcher (vom Erreger ab gerechnet) hinter dem ersten Bügel B_1 liegt. Dieser (wahre) Knoten fällt nicht genau zusammen mit der Stellung des Bügels B_2, für welche die Drahtleitung zwischen B_1 und B_2 in der Resonanz des Unisono mit den vom Erreger vor B_1 erzeugten Schwingungen steht (erste Knotenlage von B_2), sondern liegt, falls die Länge des Bügels B_2 2 cm beträgt, um 8 mm dahinter, falls sie 1 cm beträgt um 4 mm dahinter[1]). Bei einigen Versuchen wurde der Flüssigkeitsanfang absichtlich nicht in den ersten wahren elektrischen Knoten gelegt, um die hierdurch bewirkte Aenderung zu constatiren. Für diese Versuche ist die Lage des Flüssigkeitsanfangs besonders angegeben.

Am Flüssigkeitsende (also noch hinter dem Bügel B_2) ist im Allgemeinen kein dritter Bügel B_3 aufgelegt; nur bei einigen Versuchen ist dies geschehen, bei denen es besonders angeführt ist. Für die Bestimmung der Wellenlänge in Luft wurde mehrfach constatirt, dass die Anwesenheit eines dritten Bügels B_3 hinter B_2 ohne Belang ist.

Für die Wellen in Luft bedeuten die mitgetheilten Zahlen die Knotenlagen des Bügels B_2, von einem willkürlichen Anfangspunkte an in cm gezählt, für die Wellen in Flüssigkeit bedeuten sie abwechselnd Bauch- und Knotenlagen, und zwar vom Flüssigkeitsanfang an in cm gerechnet. Die erste Zahl bedeutet einen Bauch, d. h. eine Lage von B_2, für welche das Zustandekommen elektrischer Schwingungen hinter dem Bügel B_1 am vollständigsten gehindert ist.

Die mitgetheilten Zahlen sind die Mittel aus meist vier Beobachtungen. Aus den Beobachtungen ist die halbe Wellenlänge nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet worden. Mit Benutzung der berechneten Wellenlänge erhält man die unter »ber.« angeführten Knoten-, bezw. Bauchlagen von B_2.

ϑ bedeutet die Temperatur in Cels. Sie wurde an zwei (oder drei) Thermometern abgelesen, von deren Gefässen sich das eine in Höhe der Drahtleitung in der Flüssigkeit, das andere 1 cm unter der Flüssigkeitsoberfläche befand. Die Thermometer sind mit einem Normalthermometer verglichen worden.

n^2_{17} bedeutet das Quadrat des elektrischen Brechungsexponenten, wenn man das bei der Temperatur ϑ beobachtete n^2

1) Vgl. dazu die citirte Arbeit, S. 31. (Diese Arbeit soll im Folgenden kurz mit »Abhandl.« citirt werden.)

auf die Temperatur 17° reducirt mit Hülfe des von HEERWAGEN[1] für die Dielektricitätsconstante ε des Wassers angegebenen Temperaturcoefficienten:

$$\varepsilon_{17} = \varepsilon + 0{,}362(\vartheta - 17),$$

d. h., da n_{17}^2 sehr nahe identisch ist mit ε_{17}:

$$n_{17}^2 = n^2 + 0{,}362(\vartheta - 17).$$

Die Beobachtungen wurden im Laufe mehrerer Monate mit vielen Unterbrechungen angestellt. Der Erreger wurde dazwischen öfter auseinandergenommen und wieder zusammengesetzt, das umspülende Petroleum häufig erneuert. Ich theile sämmtliche Beobachtungen mit, ohne irgend eine der überhaupt mit Sorgfalt angestellten auszuschliessen. Durch diese Ausführlichkeit möchte ich darstellen, in wie weit bei Einzelbeobachtungen Abweichungen vom richtigen Resultat nach dieser Methode im Maximum zu erwarten sind.

Destillirtes Wasser.

Die Leitfähigkeit des Wassers bei 17° schwankte, da es zum Theil längere Zeit benutzt wurde, zwischen $7 \cdot 10^{-10}$ bis $20 \cdot 10^{-10}$ bezogen auf Quecksilber. Da innerhalb dieser Grenzen die Resultate nicht irgend bemerkbar von der Leitfähigkeit beeinflusst werden, so unterdrücke ich nicht die Beobachtungen mit dem stärker verunreinigten Wasser. Für die weitaus meisten Beobachtungen lag übrigens die Leitfähigkeit zwischen $7 \cdot 10^{-10}$ und $9 \cdot 10^{-10}$.

Auch der Luftgehalt des Wassers scheint keinen merklichen Einfluss zu haben. Streng luftfreies Wasser ist allerdings nicht untersucht worden, sondern nur solches, welches mindestens 3 Stunden nach Erwärmung auf 60° mit der Luft in Berührung gestanden hatte.

1) *Grosser Thontrog.* Distanz der Drähte $a = 1{,}8$ cm, Dicke der Drähte $d = 1$ mm.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	8,4	46,2	83,7	121,1	158,2	
Ber.	8,6	46,1	83,5	121,0	158,4,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}45$

1) F. HEERWAGEN, Wied. Ann. **49**, S. 278. 1893.

Schluss:

Beob.	8,5	46,2	83,7	121,0	158,5	
Ber.	8,6	46,1	83,6	121,1	158,5,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,48$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 17,0$.

Beob.	1,53	3,58	5,72	7,76	9,88	11,97	14,01	16,21	18,24	20,34
Ber.	51	60	69	78	88	97	06	15	24	34

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,184$. $n = 8,953$; $n^2 = 80,16$; $n^2_{17} = 80,16$.

2) *Grosser Thontrog.* $a = 1$ cm, $d = 1$ mm.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	9,0	46,9	84,5	121,1	158,2	
Ber.	9,4	46,7	83,9	121,2	158,4,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,25$

Schluss:

Beob.	9,1	46,6	84,2	120,7	157,9	
Ber.	9,3	46,5	83,7	120,9	158,0,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,17$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 11,7$.

Beob.	1,72	3,80	5,82	7,86	9,94	12,00	14,01	16,07	18,14
Ber.	72	77	82	87	93	98	03	08	14
Beob.	20,19	22,25	24,25	26,35	28,40	30,52	32,46		
Ber.	19	24	29	34	40	45	50		

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,104$. $n = 9,067$; $n^2 = 82,21$; $n^2_{17} = 80,30$.

Dass in dieser zweiten Beobachtungsreihe für die Wellen in Luft die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Knotenlagen grösser sind, als in der ersten Beobachtungsreihe, rührt daher, dass bei 1 cm Drahtabstand kleine Störungen der Parallelität der Drähte stärkeren Einfluss gewinnen, als bei 1,8 cm Drahtabstand. Die gute Uebereinstimmung zwischen 1) und 2) im Resultat für n^2_{17} zeigt, dass die seitliche Begrenzung des Wassers keine Störung hervorruft bei den gewählten Drahtabständen. Denn wenn eine solche bemerkbar wäre, so müsste diese Störung für den Drahtabstand $a = 1,8$ cm weit stärker auftreten, als für den Drahtbestand 1 cm[1]).

1) Vgl. »Abhandl.« S. 26.

Im Folgenden theile ich Versuche mit, die mit halber Drahtdicke angestellt worden sind, zum Beweise dafür, dass der endliche galvanische Leitungswiderstand der Drähte keine bemerkbare Störung hervorruft[1]).

3) *Grosser Thontrog.* $a = 1{,}8$ cm, $d = \frac{1}{2}$ mm.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	8,3	45,6	83,3	120,2	157,2	
Ber.	8,4	45,7	82,9	120,2	157,4,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}24$

Schluss:

Beob.	8,4	45,8	83,5	120,4	157,2	
Ber.	8,6	45,8	83,1	120,3	157,5,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}22$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 11{,}2$.

Beob.	1,62	3,62	5,73	7,73	9,83	11,93	13,94	15,96	17,98	20,02	22,10
Ber.	62	67	72	76	81	86	91	96	00	05	10

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}096$. $n = 9{,}089$; $n^2 = 82{,}61$; $n_{17}^2 = 80{,}51$.

4) *Grosser Thontrog.* $a = 1$ cm, $d = \frac{1}{2}$ mm.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	9,1	45,8	83,2	120,1	156,8	
Ber.	9,1	46,0	83,0	120,0	156,9,	$\frac{1}{2}\lambda = 36{,}95$

Schluss:

Beob.	8,9	45,8	82,8	119,8	156,8	
Ber.	8,9	45,8	82,8	119,8	156,8,	$\frac{1}{2}\lambda = 36{,}99$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 12{,}7$.

Beob.	1,76	3,78	5,89	7,92	9,97	12,03	14,11	16,08	18,13	20,21	22,24
Ber.	77	82	87	92	96	01	06	10	15	20	25

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}096$. $n = 9{,}026$; $n^2 = 81{,}47$; $n_{17}^2 = 79{,}92$.

Um noch auf andere Weise, als durch Variirung des Drahtabstandes a nachzuweisen, dass die seitliche Begrenzung der Flüssigkeit keine Störungen hervorruft[2]), wurde eine Beobach-

1) Vgl. »Abhandl.« S. 28.
2) Vgl. »Abhandl.« S. 26.

tungsreihe gemacht, bei welcher der grosse Thonkasten ganz mit Staniol beklebt und mit einem Blechdeckel zugedeckt war. Auch die Schmalseiten des Troges, durch welche die Drahtleitung hindurch trat, waren mit Staniol beklebt, nur waren um die Eintrittspunkte der Drahtleitung zwei Kreise von je 2 cm Durchmesser frei gelassen. Weil der Flüssigkeitsanfang gerade wie bei den vorigen Versuchen in den ersten wahren elektrischen Knoten gelegt werden sollte, so wurden besondere Versuche darüber angestellt, ob die Lage des Knotens durch die Staniolbeklebung der Stirnseite nicht geändert war. Dies war aber nicht der Fall.

5) *Grosser Thontrog, beklebt.* $a = 1{,}8$ cm, $d = 1$ mm.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	8,5	46,1	83,2	120,2	157,9	
Ber.	8,6	45,9	83,2	120,5	157,8,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}29$

Schluss:

Beob.	8,5	46,3	83,3	120,6	158,0	
Ber.	8,7	46,0	83,3	120,7	158,0,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}33$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 12{,}9$.

Beob.	${}^{1,}50$	${}^{3,}56$	${}^{5,}59$	${}^{7,}62$	${}^{9,}67$	${}^{11,}82$	${}^{13,}84$	${}^{15,}90$	${}^{18,}00$	${}^{20,}02$
Ber.	48	54	60	66	72	78	84	91	97	03

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}123.$ $n = 9{,}050$; $n^2 = 81{,}90$; $n^2_{17} = 80{,}42$.

Bei den bisherigen Versuchen wurde der Flüssigkeitsanfang in den ersten wahren elektrischen Knoten, der hinter dem Bügel B_1 ist, gelegt. Um dies ausführen zu können, bedarf man der Kenntniss des Unterschiedes zwischen den Knotenlagen des Bügels B_2 und den wahren Knoten auf der Drahtleitung, d. h. der sogenannten Bügelverkürzung. Betreffs ihrer Bestimmung verweise ich auf die eingangs genannte Arbeit S. 32. Wie ich dort erwähnt habe, ruft die 1,1 cm dicke Vorderwand des Troges keine über 1,5 mm betragende Verschiebung der Knotenlagen hervor. Dies ergab sich aus Ermittelung der Knotenlagen auf der Drahtleitung, welche den leeren Thontrog durchsetzt. Es ist nun aber noch die Frage, ob dasselbe eintritt, wenn die

Vorderwand des Troges nicht beiderseitig an Luft angrenzt, sondern theils an Luft, theils an Wasser. Um diese Frage entscheiden zu können, habe ich eine Drahtleitung etwa 10 cm vor dem ersten elektrischen Knoten hinter B_1 rechtwinklig nach unten umgebogen, sodass sie vertical in ein grösseres Wassergefäss eintrat. Die Wasseroberfläche befand sich in dem ersten wahren elektrischen Knoten. Es wurden dann mit Hülfe eines an einem geeigneten Halter befestigten Bügels B_2 die erste Bauch- und Knotenlage dieses Bügels B_2 im Wasser bestimmt. Nun wurde eine 1 cm dicke Petroleumschicht auf das Wasser aufgegossen. Dadurch veränderten sich die Bauch- und Knotenlage von B_2 gar nicht. Wenn man also dieses Verhalten einer Petroleumschicht übertragen darf auf das Verhalten der Thontrogwand, so ist dieselbe ganz indifferent, d. h. die elektrischen Wellen vertheilen sich im Drahtsystem ebenso, als ob das Wasser direct an Luft angrenzte.

Im Folgenden theile ich Beobachtungen mit, bei denen absichtlich der Wasseranfang nicht genau in den wahren elektrischen Knoten gelegt wurde, sondern um eine Distanz b vor (negatives b) oder hinter (positives b) den wahren Knoten, um hieraus entstehende Unterschiede festzustellen.

6) *Grosser Thontrog.* $a = 1{,}8$ cm, $d = 1$ mm, $b = +5$ mm.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	7,8	44,6	80,8	117,9	155,2	
Ber.	7,6	44,5	81,3	118,1	154,9,	$\frac{1}{2}\lambda = 36{,}81$

Schluss:

Beob.	7,8	44,7	81,5	118,5	154,9	
Ber.	7,9	44,7	81,5	118,3	155,1,	$\frac{1}{2}\lambda = 36{,}80$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 13{,}7$.

Beob.	^{1},76	^{3},69	^{5},91	^{7},85	^{9},84	^{11},99	^{13},97	^{16},00	^{18},01
Ber.	73	77	81	85	88	92	96	00	04

Beob.	^{20},10	^{22},07	^{24},12	^{26},17	^{28},24	^{30},32	^{32},35
Ber.	08	12	16	19	23	27	31

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}077.$ $n = 9{,}027$; $n^2 = 81{,}48$; $n_{17}^2 = 80{,}29$.

7) *Grosser Thontrog.* $a = 1{,}8$ cm, $d = 1$ mm, $b = +6$ mm.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	8,1	45,6	82,5	119,1	156,4	
Ber.	8,3	45,3	82,3	119,3	156,4,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}02$

Schluss:

Beob.	8,2	45,4	82,6	119,2	156,1	
Ber.	8,3	45,3	82,3	119,3	156,2,	$\frac{1}{2}\lambda = 36{,}97$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 10{,}1$.

Beob.	$^{1,}53$	$^{3,}60$	$^{5,}62$	$^{7,}64$	$^{9,}72$	$^{11,}76$	$^{13,}76$	$^{15,}87$	$^{17,}85$
Ber.	55	59	63	66	70	74	78	82	85

Beob.	$^{19,}84$	$^{21,}91$	$^{23,}99$
Ber.	89	93	97

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}076$. $n = 9{,}078$; $n^2 = 82{,}41$; $n_{17}^2 = 79{,}91$.

8) *Grosser Thontrog.* $a = 1{,}8$ cm, $d = 1$ mm, $b = -9$ mm.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	7,0	44,4	80,5	117,8	153,4	
Ber.	7,4	44,0	80,6	117,2	153,8,	$\frac{1}{2}\lambda = 36{,}61$

Schluss:

Beob.	7,0	43,6	80,1	116,5	153,2	
Ber.	7,0	43,5	80,1	116,6	153,1,	$\frac{1}{2}\lambda = 36{,}52$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 12{,}3$.

Beob.	$^{2,}16$	$^{4,}09$	$^{6,}14$	$^{8,}18$	$^{10,}15$	$^{12,}21$	$^{14,}21$	$^{16,}20$	$^{18,}23$	$^{20,}21$	$^{22,}22$
Ber.	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}021$. $n = 9{,}092$; $n^2 = 82{,}66$; $n_{17}^2 = 80{,}96$.

Vergleicht man die Resultate der Beobachtungsreihen 6) 7), 8), so bemerkt man, dass ein positives b einen kleineren Brechungsexponenten, ein negatives b einen grösseren als den Normalwerth (für $b = 0$) liefert. Diese Thatsache ist theoretisch erklärbar, da aber diese Erklärung hier ziemlich viel Raum erfordern würde, so soll sie in einem theoretischen Theile (»Zur

Theorie elektrischer Drahtwellen«) gegeben werden. Dort wird auch streng abgeleitet, dass man für $b = 0$ die richtigen Werthe für n erhält.

Nach 6) 7) und 8) würde eine Verkleinerung von b um 10 mm eine scheinbare Vergrösserung des n_{17}^2 um etwa 0,6 verursachen.

Um den Einfluss der Lage des Flüssigkeitsanfangs noch directer zu constatiren, habe ich Beobachtungen gemacht, in welchen unmittelbar nach einander dem Flüssigkeitsanfang verschiedene Lagen gegeben wurden, während die Lage der Brücke B_1 und damit die Länge λ der benutzten Wellen in Luft unverändert blieb. Dies sind folgende beiden Beobachtungsreihen.

9) *Grosser Thontrog.* $a = 1,8$ cm, $d = 1$ mm, $b = +8$ mm.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	8,1	45,6	82,5	119,3	156,2	
Ber.	8,4	45,4	82,3	119,3	156,3,	$\frac{1}{2}\lambda = 36,99$

Schluss:

Beob.	8,1	45,7	82,5	118,9	155,8	
Ber.	8,5	45,3	82,2	119,1	155,9,	$\frac{1}{2}\lambda = 36,86$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 10,2$.

Beob.	1,55	3,58	5,65	7,64	9,74	11,80	13,77	15,81
Ber.	55	59	63	67	71	75	79	83

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,079$. $n = 9,054$; $n^2 = 81,97$; $n_{17}^2 = 79,51$.

10) *Grosser Thontrog.* $a = 1,8$ cm, $d = 1$ mm, $b = -7$ mm.

Wellen in Luft vgl. 9).

Wellen in Wasser, $\vartheta = 10,7$.

Beob.	1,80	3,85	5,88	7,88	9,96	11,99	13,86	16,01
Ber.	82	85	87	89	91	94	96	98

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,046$. $n = 9,127$; $n^2 = 83,30$; $n_{17}^2 = 81,02$.

Nach diesen beiden Beobachtungsreihen würde eine Verkleinerung des b um 15 mm eine Vergrösserung des n^2 um 1,5, also eine Veränderung des b um 10 mm eine Veränderung des n^2 um 1,0 bewirken.

Die bisher mitgetheilten Beobachtungsreihen 1) bis 10) zeigen eine sehr gute Uebereinstimmung. Reducirt man nämlich die Resultate der Reihen 1) bis 10) auf $b = 0$, indem man als Mittel annimmt, dass eine Verkleinerung des b um 10 mm eine scheinbare Vergrösserung des n_{17}^2 um 0,80 hervorruft, so sind die Resultate der Beobachtungsreihen für n_{17}^2 folgende:

	n_{17}^2:
1)	80,16
2)	80,30
3)	80,51
4)	79,92
5)	80,42
6)	80,69
7)	80,39
8)	80,24
9)	80,15
10)	80,46
Mittel	80,32

Hiernach würde der mittlere Fehler des Mittels 0,07 sein, d. h. n_{17}^2 wäre auf $1\,^0/_{00}$ genau bestimmt. Indess ergeben variirte Nebenumstände grössere Abweichungen, sodass obige Genauigkeit nicht als wirklich erreicht anzusehen ist.

Zunächst habe ich untersucht, ob Feuchtigkeit der Vorderwand des Troges Einfluss hätte. Durch eine Verletzung in der Glasur an der Eintrittsstelle der Drähte wurde nämlich etwas Wasser in die Trogwand eingesaugt. Wie die oben S. 322 genannten Versuche mit der vorgelagerten Petroleumschicht lehren, hat zwar die Vorlagerung einer 1 cm dicken Schicht, deren Dielektricitätsconstante keinen grossen Betrag besitzt, keinen Einfluss auf die Wellen im Wasser, indess ist doch die Frage, ob eine feuchte Thonwand nicht eine grosse Dielektricitätsconstante besitzt, und dementsprechend Einfluss gewinnen kann. Denn ein solcher muss ja offenbar vorhanden sein, wenn die Thonwand denselben Brechungsexponenten, wie das Wasser, besitzen sollte. Der Effect müsste dann derselbe sein, als ob der Wasseranfang um die Dicke der Wand näher an die Brücke

B_1 gerückt wäre, d. h. n müsste bei feuchter Thonwand grösser ausfallen, als bei trockener. — Dieser extreme Fall wird nun allerdings nie eintreten, und in Wirklichkeit scheint n durch die Feuchtigkeit der Thonwand gerade im entgegengesetzten Sinne etwas beeinflusst zu sein; jedenfalls muss aber dieser Umstand zur Erreichung der grössten Sicherheit einer Prüfung unterzogen werden.

Der Thontrog wurde mehrere Tage in der Nähe eines stark geheizten Ofens getrocknet, und sodann die schadhaften Stellen der (Innen-) Glasur mit Schellack überzogen. Es konnte dann, selbst wenn Wasser mehrere Tage lang im Trog gestanden hatte, keine Feuchtigkeit der Trogwand an der Aussenseite wahrgenommen werden.

11) *Grosser Thontrog*, getrocknet. $a = 1,8$ cm, $d = 1$ mm, $b = 0$.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	6,6	43,8	81,3	118,5	155,6	
Ber.	6,6	43,9	81,2	118,4	155,7,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,26$

Schluss:

Beob.	6,7	43,9	81,2	118,2	155,5	
Ber.	6,7	43,9	81,1	118,3	155,5,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,20$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 13,5$.

Beob.	1.65	3.63	5.74	7.82	9.84	11.86	13.91	15.96	17.97
Ber.	64	68	73	78	82	86	91	96	00

Beob.	20.03	22.05	24.19
Ber.	04	09	14

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,090.$ $n = 9,105$; $n^2 = 82,86$; $n_{17}^2 = 81,59$.

Nach Verlauf von mehreren Monaten wurde dieser Versuch mit destillirtem Wasser anderer Herkunft wiederholt.

12) *Grosser Thontrog*, getrocknet. $a = 1,8$ cm, $d = 1$ mm, $b = 0$.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	6,4	43,9	81,2	118,9	
Ber.	6,4	43,9	81,3	118,8,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,48$

Schluss:

Beob.	6,4	44,0	81,5	118,8	
Ber.	6,5	43,9	81,4	118,9,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,47$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 13,4$.

Beob.	^{1}·63	^{3}·73	^{5}·71	^{7}·77	^{9}·81	^{11}·92	^{13}·91	^{16}·01	^{18}·01	^{20}·08
Ber.	64	69	74	79	84	88	93	97	02	07

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,097$. $n = 9,147$; $n^2 = 83,67$; $n_{17}^2 = 82,57$.

Die Beobachtungen 12) für die Wellen im Wasser sind die Mittel aus drei Reihen, bei deren erster kein dritter Bügel B_3 auf den Drähten lag, während bei der zweiten ein Bügel B_3 um 2,4 cm vor dem Kastenende, d. h. um 45,6 cm vom Wasseranfang entfernt lag; bei der dritten Reihe lag ein Bügel B_3 um 47,6 cm vom Wasseranfang entfernt auf. Letztere Lage entspricht maximaler Resonanz der Drahtleitung zwischen den Bügeln B_2 und B_3 mit der Leitung zwischen B_1 und B_2, falls B_2 in einer Knotenlage ist; dagegen wird diese Resonanz bei der Entfernung $B_3 = 45,6$ cm vom Wasseranfang vollständig vernichtet. Indessen zeigte sich kein[1]) Einfluss der Lage oder des Vorhandenseins des Bügels B_3.

Die Resultate der Reihen 11) und 12) weichen erheblich ab von denen der vorigen Reihen. Ob die letzteren Resultate zuverlässiger sind, d. h. ob die Feuchtigkeit der Trogwand wirklich einen erheblichen Fehler verursacht, kann entschieden werden durch Versuche mit anderen Flüssigkeitsbehältern. In dieser Beziehung ist jedenfalls der Blechkasten einwandsfrei, da seine Vorderwand aus Ebonit bestand.

13) *Blechtrog.* $a = 1,8$ cm, $d = 1$ mm, $b = 0$.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	6,7	44,3	81,6	119,0	156,4	
Ber.	6,8	44,2	81,6	119,0	156,4,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,41$

1) Es liegt dies an der grossen Entfernung, welche B_3 von den beobachteten Knotenlagen des B_2 besitzt. Wenn B_3 dem B_2 bis auf wenige Centimeter genähert wird, so ist ein Einfluss erkennbar. Vgl. »Abhandl.« S. 33.

Schluss:

Beob.	6,7	44,1	81,3	118,5	155,8	
Ber.	6,7	44,0	81,3	118,5	155,8,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}27$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 10{,}2$.

Beob.	1,40	3,39	5,47	7,50	9,55	11,63	13,61	15,63	17,70	19,77
Ber.	38	42	46	50	54	59	63	67	71	75

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}081$. $n = 9{,}150$; $n^2 = 83{,}71$; $n^2_{17} = 81{,}25$.

14) *Blechtrog.* $a = 1{,}8$ cm, $d = 1$ mm, $b = 0$.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	6,7	44,7	82,2	120,0	
Ber.	6,8	44,5	82,3	120,0,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}74$

Schluss:

Beob.	6,7	44,5	82,1	119,9	
Ber.	6,7	44,4	82,2	119,9,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}72$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 14{,}2$.

Beob.	1,44	3,58	5,62	7,72	9,79	11,83	13,97	15,99	18,03
Ber.	47	55	62	70	77	85	92	99	07

Beob.	20,11	22,17	24,34
Ber.	14	22	29

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}148$. $n = 9{,}096$; $n^2 = 82{,}74$; $n^2_{17} = 81{,}75$.

Die Zahlen 14) für die Wellen in Wasser sind grade wie die Zahlen der Reihe 12) die Mittel aus drei Beobachtungsreihen, bei deren ersten kein Bügel B_3 auflag, während bei dem zweiten ein Bügel B_3 sich auf einer Knotenlage (56,4 cm vom Wasseranfang entfernt, maximale Resonanz), bei der dritten auf einer Bauchlage (58,4 cm vom Wasseranfang entfernt, minimale Resonanz) befand. Es war aber, grade wie bei der Reihe 12), kein Unterschied für diese drei Fälle zu constatiren.

Ich theile im Folgenden Beobachtungen mit, welche bei falscher Lage des Flüssigkeitsanfangs angestellt wurden. Derselbe befand sich vor dem ersten wahren elektrischen Knoten, b ist negativ, $(n^2_{17})_{\text{corr.}}$ bedeutet den für $b = 0$ reducirten Werth von n^2_{17}, wenn man nach S. 325 die Correction 0,80 für $b = 10$ mm anwendet.

15) *Blechtrog.* $a = 1,8$ cm, $d = 1$ mm, $b = -8$ mm.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	4,0	40,4	77,2	113,6	
Ber.	4,0	40,5	77,1	113,7,	$\frac{1}{2}\lambda = 36,56$

Schluss:

Beob.	4,0	40,5	77,2	113,9	
Ber.	4,0	40,6	77,2	113,8,	$\frac{1}{2}\lambda = 36,60$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 13,8$.

Beob.	—	$^{3,}62$	$^{5,}61$	$^{7,}74$	$^{9,}75$	$^{11,}67$	$^{13,}65$	$^{15,}68$	$^{17,}69$	$^{19,}67$
Ber.	—	65	66	67	67	68	69	69	70	71

Beob.	$^{21,}76$	$^{23,}76$
Ber.	72	73

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,015.$ $n = 9,111$; $n^2 = 83,00$; $n^2_{17} = 81,84$;
$(n^2_{17})_{corr.} = 81,20.$

16) *Blechtrog.* $a = 1,8$ cm, $d = 1$ mm, $b = -13$ mm.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	4,5	41,8	78,8	116,1	
Ber.	4,5	41,7	78,9	116,1,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,18$

Schluss:

Beob.	4,6	41,9	79,1	116,2	
Ber.	4,7	41,9	79,0	116,2,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,17$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 17,2$.

Beob.	—	$^{4,}02$	$^{6,}03$	$^{8,}18$	$^{10,}26$	$^{12,}28$	$^{14,}29$	$^{16,}30$	$^{18,}34$	$^{20,}43$	$^{22,}37$
Ber.	—	06	10	14	19	23	27	31	35	40	44

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,083.$ $n = 9,106$; $n^2 = 82,92$; $n^2_{17} = 82,99$;
$(n^2_{17})_{corr.} = 81,95.$

Wenn auch den Beobachtungen 15) und 16), namentlich der letzteren, kein sehr grosses Gewicht beizulegen ist wegen des ziemlich erheblichen Betrages der Correction der Lage b, so bestätigen sie doch durchaus das Resultat der Beobachtungen

13) und 14), dass die grossen Werthe von n^2_{17}, welche mit dem getrockneten Thontrog erhalten sind, die richtigen sein werden, und nicht die kleinen Werthe der S. 325. Dies wird auch bestätigt durch Versuche mit dem kleinen Thontrog. Die Glasur desselben war unverletzt, sodass seine Wände trocken blieben:

17) *Kleiner Thontrog.* $a = 1,8$ cm, $d = 1$ mm, $b = 0$.

Wellen in Luft, vgl. 14).

Wellen in Wasser, $\vartheta = 14,6$.

Beob.	^{1,}62	^{3,}87	^{5,}98	^{8,}03	^{9,}98	^{12,}12	^{14,}12	^{16,}27	^{18,}37	^{20,}32
Ber.	77	84	91	97	04	11	18	25	31	38

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,137$. $n = 9,120$; $n^2 = 83,17$; $n^2_{17} = 82,50$.

Bei diesen Beobachtungen ist ebenfalls mit und ohne hinteren Bügel B_3 beobachtet worden (in Distanz 27,6 cm hinter Wasseranfang). Ein Unterschied für die Knoten — bezw. Bauchlagen von B_2 war nicht zu constatiren. Nur für die hinter 20,32 liegenden Bäuche, bezw. Knoten trat sichtlich ein Einfluss von B_3 zu Tage, weil die Distanz zwischen B_2 und B_3 zu gering wurde. Daher sind diese Lagen von B_2 nicht zur Berechnung von $\frac{1}{2}\lambda$ herangezogen.

18) *Kleiner Thontrog.* $a = 1,8$ cm, $d = 1$ mm, $b = 0$.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	6,8	44,4	82,1	120,0	
Ber.	6,7	44,5	82,2	119,9,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,73$

Schluss:

Beob.	6,7	44,5	82,3	120,2	
Ber.	6,7	44,5	82,3	120,2,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,83$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 13,7$.

Beob.	^{1,}60	^{3,}90	^{5,}94	^{8,}04	^{10,}03	^{12,}13	^{14,}09	^{16,}37	^{18,}36	^{20,}45
Ber.	73	81	89	97	05	13	21	29	37	45

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,158$. $n = 9,086$; $n^2 = 82,56$; $n^2_{17} = 81,56$.

Diese Beobachtungen für Wasser sind wiederum das Mittel aus 3 Reihen, welche mit und ohne hinteren Bügel B_3 (bei 27,7, bezw. 29,7 cm Abstand vom Wasseranfang) angestellt worden sind. Ein deutlicher Unterschied in den Reihen war nicht zu constatiren.

19) *Kleiner Thontrog.* $a = 1{,}8$ cm, $d = 1$ mm, $b = +5$ mm.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	6,2	43,9	81,1	118,8	
Ber.	6,2	43,8	81,3	118,8,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}50$

Schluss:

Beob.	6,2	43,9	80,8	118,6	
Ber.	6,3	43,7	81,1	118,5,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}41$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 14{,}4$.

Beob.	1,56	3,68	5,84	7,90	9,95	11,95	14,00	16,12	18,12	20,32
Ber.	63	70	77	84	91	98	05	12	19	26

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}141$. $n = 9{,}046$; $n^2 = 81{,}83$; $n^2_{17} = 80{,}89$;

$(n^2_{17})_{corr.} = 81{,}29$.

Die Beobachtungen wurden ohne hinteren Bügel B_3 angestellt.

Im Folgenden sind die Resultate der Beobachtungen 11) bis 19) zusammengestellt. Für die Fälle, in welchen der Wasseranfang nicht genau in dem wahren elektrischen Knoten lag ($b \gtrless 0$), ist der auf $b = 0$ corrigirte Werth von n^2 benutzt.

Grosser Thontrog: $n^2_{17} =$	81,59	Mittel 81,98
	82,37	
Blechtrog:	81,25	Mittel 81,53
	81,73	
	81,20	
	81,95	
Kleiner Thontrog:	82,30	Mittel 81,65
	81,36	
	81,29	
	Mittel: *81,67* $\pm$ 0,10	

Der mittlere Fehler des Mittels ist nach diesen Beobachtungen 0,15, der wahrscheinliche Fehler 0,10. *Es erscheint daher n^2_{17} auf mindestens* $2^0/_{00}$, *d. h. der Brechungsexponent n selbst* *auf 1°/₀₀ genau bestimmt.* Indess halte ich es nicht für ausgeschlossen, dass durch die Anwesenheit der vorderen Trogwand, d. h. durch den Umstand, dass die Drahtleitung nicht direct von Luft in Wasser übertritt, kleine Fehler herbeigeführt werden, die den Betrag 2°/₀₀ für n^2 überschreiten. Wenn man nämlich die einzelnen Beobachtungsreihen betrachtet, so überrascht die Genauigkeit, mit welcher sich die beobachteten Bauch- resp. Knotenlagen im Allgemeinen den berechneten anschliessen. Infolge dessen müsste die Bestimmung von n schon bei einer einzelnen Reihe von sehr grosser Genauigkeit sein. Diese sehr grosse Genauigkeit der Einzelbestimmung wird aber illusorisch, wenn man die Resultate der verschiedenen Reihen untereinander vergleicht, die zum Theil Abweichungen von über 1°/₀ untereinander zeigen. Diese Abweichungen sind beim Blechtrog geringer als bei den Thontrögen, und ich kann mir nur denken, dass der verschiedene Feuchtigkeitszustand der Thontrogwände immer noch etwas Einfluss besitzen wird. Andere Ursachen für die Abweichung der verschiedenen Reihen von einander weiss ich wenigstens vorläufig nicht zu nennen. Auf die zeitliche Dämpfung der vom Erreger entsandten Wellen kommt es nicht an und zudem ändert sie sich nicht bemerkbar, die Drähte sind immer blank gehalten worden, und schliesslich kann eine geringe Abweichung der Eigenschwingungen der Zehnder'schen Röhre, welche zum Erkennen der stehenden Wellen benutzt wurde (vergl.» Abhandl.« p. 8), von der Schwingungsdauer der Erregerwellen keine systematischen Fehler veranlassen. Denn da stets dieselbe Zehnder'sche Röhre mit ganz constanter Resonatorleitung benutzt wurde, müssten sich systematische Abweichungen in den Resultaten je nach der benutzten Wellenlänge λ zeigen. Dies ist aber nicht der Fall, wie ein Blick auf die mitgetheilten Beobachtungen lehrt.

Denkbar wäre auch, dass der Brechungsexponent des Wassers vielleicht nicht unter allen Umständen derselbe ist. Dies halte ich aber für sehr unwahrscheinlich; irgend ein Einfluss der Leitfähigkeit hat sich jedenfalls nicht geltend gemacht, ebenso wenig etwaige Schwankungen des Luftgehaltes (vgl. oben S. 318).

Da das zuletzt gewonnene Mittel für n_{17}^2, nämlich 81,67, um 2°/₀ von dem Mittel abweicht, welches pag. 325 aus den Beobachtungen bei feuchter Trogwand abgeleitet worden ist (80,32), *so mag auch das letzte Resultat:* $n_{17}^2 = 81{,}67$, *wegen des Vorhandenseins einer Trogwand überhaupt etwa auf* $\frac{1}{2}\%$ *als sicher angesehen werden*[1]).

Vergleicht man die hier gewonnene Zahl für das Quadrat des elektrischen Brechungsexponenten des Wassers mit der von anderen Beobachtern für sehr viel langsamere Schwingungen abgeleiteten Dielektricitätsconstante ε des Wassers, so sind in erster Linie die Beobachtungen von Heerwagen[2]) heranzuziehen, welche wohl die sorgfältigsten sind. Nach Heerwagen ist

$$\varepsilon_{17} = 80{,}88 \pm 0{,}01.$$

Heerwagen sagt, dass der sehr geringe wahrscheinliche Fehler $\pm 0{,}01$ durch andere Fehlerquellen bedeutend überschritten werden kann.

Nach Franke[3]) ist

$$\varepsilon_{17} = 81{,}65.$$

Beide Forscher haben ponderomotorische elektrische Kräfte im Wasser mit den entsprechenden in Luft verglichen.

Nach Nernst[4]), welcher Capacitätsmessungen benutzte, ist

$$\varepsilon_{17} = 80{,}0.$$

Diese drei, auf verschiedenen Wegen erhaltenen Resultate stimmen nicht in der Weise überein, dass man mit völliger Sicherheit behaupten könnte, dass für die hier benutzten schnellen Schwingungen $n^2 > \varepsilon$ sei. Da aber den Beobachtungen von Heerwagen und Nernst wohl ein grösseres Gewicht, als den

1) In den »Abhandl.« habe ich $n_{17}^2 = 80{,}2$ für diese Schwingungen angegeben. (In der dortigen Tabelle S. 55 ist ein Druckfehler stehen geblieben, die Zahlen 80,2 und 79,7 müssen in ihren Colonnen vertauscht werden.) Wie ich schon dort bemerkte, sollte jene Zahl, die aus Beobachtungen bei feuchter Trogwand gewonnen war, keine definitive für Wasser sein. In der That ist sie nach den hier gemachten Angaben zu corrigiren. — Die dort für die anderen Substanzen angegebenen Zahlen bedürfen keiner Correctur, da sie im kleinen Thontrog untersucht wurden, dessen Wände trocken blieben. Auch das dort S. 37 ausgesprochene Resultat, dass die Dielektricitätsconstante des Wasser bis zur Schwingungszahl 400 Millionen pro Secunde *innerhalb 1%* constant ist, bedarf noch keiner Aenderung.

2) F. Heerwagen, Wied. Ann. **48**, S. 35, 1893, — **49**, S. 272, 1893.

3) A. Franke, Wied. Ann. **50**, S. 169, 1893.

4) W. Nernst, Zeitsch. f. phys. Chem. **14**, S. 622, 1894.

FRANKE'schen beizulegen ist, so scheint nach den bisherigen Beobachtungen *doch das Quadrat des elektrischen Brechungsexponenten des Wassers für schnelle Schwingungen etwas grösser, als die Dielektricitätsconstante des Wassers zu sein*, was für eine ganz schwach auftretende normale elektrische Dispersion des Wassers sprechen würde. Dieselbe ist theoretisch zu erwarten, da für elektrische Schwingungen bisher keine auswählende Absorptionsgebiete des Wassers beobachtet worden sind, während sie für noch kürzere Wellen (ultrarothe) entschieden auftreten müssen. — Benutzt man indess die HEERWAGEN'sche Zahl für ε, *so liegt die normale Dispersion des n^2 innerhalb 1%₀ bis zu den benutzten schnellen Schwingungen herauf.*

Ich habe noch Beobachtungen mit den oben S. 316 beschriebenen Glaskästen angestellt, welche wesentlich weniger Flüssigkeit erfordern (750 cm³, bezw. 270 cm³), um zu sehen, wie weit man die Dimensionen des Flüssigkeitsbehälters verringern kann, ohne merkliche Fehler zu begehen. Ich theile zunächst zwei Reihen mit, bei deren erster (I) kein Bügel B_3, während bei der zweiten Reihe (II) ein Bügel B_3 in einer Knotenlage (28 cm vom Wasseranfang) aufgelegt war. Das Flüssigkeitsende (30 cm) lag in einem elektrischen Bauch. Die Indices a) und b) beziehen sich darauf, dass beim Index a) alle Beobachtungen zur Berechnung benutzt, während beim Index b) die beiden letzten Beobachtungen ausgeschlossen worden sind.

20) *Grosser Glastrog.* $a = 1$ cm, $d = 1$ mm, $b = 0$.

Wellen in Luft.

Schluss:

Beob.	6,15	42,9	79,5	116,4	
Ber.	6,15	42,9	79,6	116,4,	$\frac{1}{2}\lambda = 36,75$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 16,2$.

Beob. I.	^{1,}75	^{3,}80	^{5,}89	^{7,}95	^{9,}95	^{11,}96	^{13,}98	^{16,}09	^{18,}27
Ber. a)	76	81	86	91	96	00	05	10	15
b)	75	80	85	91	96	01	06	11	17

Beob. I.	^{20,}22	^{22,}23	^{24,}25
Ber. a)	20	24	29
b)	22	27	32

Beob.	II.	1·78	3·82	5·82	7·96	9·94	12·00	14·09	16·13	18·29
Ber.	a)	76	82	87	92	97	03	08	13	18
	b)	75	81	86	92	98	04	09	15	20

Beob.	II.	20·24	22·30	24·29
Ber.	a)	24	29	34
	b)	26	32	38

$\frac{1}{2}\lambda'$: Ia = 4,096, IIa = 4,106, Ib = 4,104, IIb = 4,114.

Wie man sieht, differiren die Resultate I. und II., d. h. mit und ohne B_3, nur um $\frac{1}{4}$%. Ebenso ist der Unterschied zwischen den Resultaten a) und b) nur $\frac{1}{4}$%. Nimmt man (um den beiden letzten Beobachtungen nur das halbe Gewicht beizulegen) aus allen vier berechneten $\frac{1}{2}\lambda'$ das Mittel, so entsteht

$$\tfrac{1}{2}\lambda' = 4{,}105.$$

Daher

$$n = 8{,}953;\ n^2 = 80{,}15;\ n_{17}^2 = 79{,}86.$$

Dieser Werth von n_{17}^2 unterscheidet sich von dem wahrscheinlich richtigen Werthe 81,67 um etwas mehr als 2%. Durch die beschränkten Dimensionen des Glastroges wird also ein merklicher Fehler herbeigeführt, indess wird dieser Fehler für andere Substanzen mit geringerem elektrischen Brechungsexponenten wesentlich kleiner, und daher ein derartiger Trog noch brauchbar sein.

21) *Kleiner Glastrog.* $a = 1$ cm, $d = 1$ mm, $b = 0$.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	7,2	44,1	81,4	118,3	
Ber.	7,2	44,2	81,3	118,3,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}06$

Schluss:

Beob.	7,1	44,4	81,5	118,7	
Ber.	7,1	44,3	81,5	118,7,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}19$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 17{,}0$. (Ohne B_3.)

Beob.	1·73	3·82	5·99	8·14	10·23	12·30	14·42	16·53	18·62
Ber.	77	87	98	09	19	30	40	51	62

Beob.	20·75	22·78	24·91
Ber.	72	83	93

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}212.$ $n = 8{,}815;\ n_{17}^2 = 77{,}71.$

Dieser kleine Trog liefert also 5% zu kleine Werthe für n^2. Trotzdem wird er gute Dienste leisten können, wenn man Substanzen beobachten will, von denen grössere Mengen schwer zu beschaffen sind. Man kann dann in dem kleinen Troge die zu untersuchende Substanz mit einer anderen, deren elektrischer Brechungsexponent bekannt ist, und der von ungefähr gleicher Grösse sein muss, gut vergleichen.

Im Folgenden theile ich einige Beobachtungen mit, die mit einem grösseren Erreger, und dementsprechend grösseren Wellenlängen angestellt worden sind. Die Resultate für n sind nicht so genau, wie beim kleinen Erreger, weil einerseits weniger Wellen im Wasser wegen der beschränkten Länge der Tröge zu messen sind, und weil andererseits das Flüssigkeitsende und seine Begrenzung (Lage eines Bügels B_3) hier mehr Einfluss gewinnen kann.

Grosser Erreger.

22) *Grosser Thontrog* (getrocknet). $a = 1{,}8$ cm, $d = 1$ mm, $b = 0$.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	12,9	113,7	212,5	
Ber.	12,9	113,7	212,5,	$\frac{1}{2}\lambda = 99{,}80$

Schluss:

Beob.	13,0	113,0	212,5	
Ber.	13,1	112,9	212,5,	$\frac{1}{2}\lambda = 99{,}75$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 13{,}5$.

Beob. I.	5,14	10,16	16,14	21,32	27,09	32,32	38,05	
Ber.	4,96	10,46	15,96	21,46	26,96	32,46	37,96,	$\frac{1}{2}\lambda' = 11{,}00.$
Beob. II.	5,14	10,59	16,16	21,58	27,14	32,67	38,06	
Ber.	5,13	10,63	16,12	21,62	27,12	32,61	38,11,	$\frac{1}{2}\lambda' = 10{,}99.$

Bei der Reihe I lag kein Bügel B_3 auf den Drähten, das Flüssigkeitsende (welches wegen sehr starker Reflexion der Wellen ähnlich wie ein Metallbügel wirkt) lag bei 48,4, d. h. in einem elektrischen Bauche. — Bei der Reihe II lag ein Bügel B_3 auf 42,3, d. h. in einem elektrischen Knoten (für diese Lage ist die Bügelverkürzung mit zu berücksichtigen). Die Resultate der Reihen I und II unterscheiden sich nur unmerklich ($1^0/_{00}$), obwohl die Reihe II sich den Berechnungen viel besser anschliesst, als die Reihe I. Bei dieser tritt nämlich die Eigenthümlichkeit zu Tage, dass die Knoten nicht mitten zwischen die Bäuche fallen, sondern nach dem Flüssigkeitsanfang zu verschoben sind. Die Bäuche sind in beiden Reihen I und II übereinstimmend. Hält man daher die Knoten der Reihe I durch Beeinflussung des Flüssigkeitsendes für falsch, schliesst sie dementsprechend von der Berechnung aus, so folgt aus der Benutzung der Bäuche der Reihe I: $\frac{1}{2}\lambda' = 10{,}97$, also auch nur ein unbedeutend anderer Werth, als er oben bei Benutzung von Bäuchen und Knoten berechnet ist.

Es folgt so:

$$n = \frac{99{,}78}{10{,}99} = 9{,}079;\ n^2 = 82{,}43;\ n^2_{17} = 81{,}17.$$

23) *Blechtrog.* $a = 1{,}8$ cm, $d = 1$ mm, $b = 0$.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	13,5	113,5	212,8	
Ber.	13,6	113,3	212,9,	$\frac{1}{2}\lambda = 99{,}65$

Schluss:

Beob.	13,4	113,6	213,1	
Ber.	13,5	113,4	213,2,	$\frac{1}{2}\lambda = 99{,}85$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 13{,}8$.

Beob. I.	$^{5,}07$	$^{10,}40$	$^{16,}20$	$^{21,}95$	$^{27,}27$	$^{32,}53$	$^{38,}33$	
Ber.	06	60	14	68	22	76	30,	$\frac{1}{2}\lambda' = 11{,}08$
Beob. II.	$^{5,}16$	$^{10,}31$	$^{16,}13$	$^{21,}73$	$^{27,}17$	$^{32,}44$	$^{38,}33$	
Ber.	02	55	08	61	14	67	20,	$\frac{1}{2}\lambda' = 11{,}06.$

Bei der Reihe I lag kein Bügel B_3 auf den Drähten, das Flüssigkeitsende lag bei 60,0, d. h. in einem elektrischen Bauche. Die Störung, welche bei 22) zu Tage trat, dass die Knoten nicht mitten zwischen den Bäuchen liegen, ist hier nicht zu bemerken, vermuthlich weil der Trog länger, d. h. das Flüssigkeitsende weiter entfernt war. — Bei der Reihe II lag ein Bügel B_3 auf

54,0, d. h. in einem elektrischen Knoten. — Die Resultate der Reihen I und II unterscheiden sich nur um $2^0/_{00}$. Es folgt

$$n = \frac{99,75}{11,07} = 9,011, \quad n^2 = 81,20, \quad n_{17}^2 = 80,04.$$

24) *Kleiner Thontrog.* $a = 1,8$ cm, $d = 1$ mm, $b = 0$.

Wellen in Luft.

Anfang: 19,5 122,0, $\frac{1}{2}\lambda = 102,5$
Schluss: 19,5 122,5, $\frac{1}{2}\lambda = 103,0$.

Wellen in Wasser, $\vartheta = 11,6$.

Beob.	$^{5,}57$	$^{11,}23$	$^{16,}94$
Ber.	56	25	93.

$\frac{1}{2}\lambda' = 11,37$. $n = 9,051$; $n^2 = 81,59$; $n_{17}^2 = 79,64$.

Dies hier ermittelte n_{17}^2 ist auffällig klein. Bei der Kürze des Kastens kann das Flüssigkeitsende (bei 31 cm) störend eingewirkt haben. Einen Bügel B_3 auf einen Bauch oder Knoten aufzulegen verbot sich, weil dann schon bei der dritten Beobachtung (16,9) B_2 in ziemliche Nähe von B_3 kommt und dann ein Einfluss leicht eintreten kann. — Zur Evidenz kann man einen solchen Einfluss zeigen, wenn B_3 starr mit B_2 verbunden wird, sodass zwischen beiden 10 cm Distanz ist. Die Bauch- bezw. Knotenlagen sind dann folgende:

Beob.	$^{5,}52$	$^{11,}15$	$^{16,}73$
Ber.	53	13	74,

$\frac{1}{2}\lambda' = 11,21$.

$n = 9,162$; $n^2 = 83,93$; $n_{17}^2 = 81,98$.

Daher ist diesen Beobachtungen mit dem kleinen Thonkasten nicht dasselbe Gewicht beizulegen, wie den Beobachtungen mit dem grossen Thonkasten, bezw. Blechkasten. Das Mittel aus diesen letzteren Beobachtungen ist

$$n_{17}^2 = 80,60.$$

Dieser Werth ist über $1^0/_0$ kleiner, als das Mittel der mit dem kleinen Erreger gewonnenen Zahl 81,67 (cf. oben S. 331). Dies würde mit der Auffassung, dass geringe normale Dispersion auftritt (cf. oben S. 334), gut vereinbar sein. Indess halte ich die hier mitgetheilten Beobachtungen mit dem grossen Erreger nicht für genügend, um diesen Schluss mit voller Sicherheit ziehen zu können. Man müsste dazu noch längere Tröge anwenden.

Ich möchte die Beschreibung dieser Versuche nicht abbrechen, ohne noch den Einfluss, den eine falsche Lage des Flüssigkeitsanfangs ausübt ($b \gtreqless 0$), etwas näher besprochen zu haben. Wie schon oben S. 323 bei Beschreibung der Versuche mit dem kleinen Erreger gesagt ist, hat ein positives b, d. h. der Fall, dass der Flüssigkeitsanfang hinter dem ersten wahren elektrischen Knoten liegt, zur Folge, dass der elektrische Brechungsexponent zu klein ausfällt; umgekehrt bewirkt ein negatives b ein zu grosses n. — Neben dieser Erscheinung, d. h. eines geringen Einflusses des b auf die aus allen Beobachtungen zu berechnende Wellenlänge λ', geht noch eine andere nebenher, nämlich die unsymmetrische gegenseitige Lage von Knoten und Bauch. Sie wird bei Anwendung des kleinen Erregers erst bemerkbar, wenn die Lage des Flüssigkeitsanfangs erheblich falsch ist. So lag für $b = -25$ mm der erste Knoten im Wasser um 2,18 cm entfernt vom ersten Bauch, dagegen um 1,98 cm entfernt vom zweiten Bauch. Diese Erscheinung wird sehr bemerkbar beim grossen Erreger.

Ich lasse hier Beobachtungen folgen, welche mit dem grossen Thontrog (und grossen Erreger) angestellt wurden. Die Zahlen bedeuten die gegenseitigen Abstände aufeinander folgender Bäuche und Knoten im Wasser. Die erste Zahl ist der Abstand des ersten Bauches vom ersten (im Wasser liegenden) Knoten.

$b = 0$:

5,26 5,86 5,62 5,23 5,16

$b = -28$ mm:

7,81 3,43 7,60 3,71 7,45

$b = +32$ mm:

3,00 8,02 3,06 7,73 3,19.

Diese Erscheinung erschöpfend theoretisch zu berechnen, wird kaum überwindliche Schwierigkeiten verursachen. Es ist ausserdem zu bedenken, dass hierbei die Lage des Flüssigkeitsendes Einfluss auf die Erscheinung gewinnen kann, wie ein Blick auf die Beobachtungsreihe 22) lehrt, in welcher auch für $b = 0$

eine, allerdings nur geringe, Unsymmetrie der gegenseitigen Lage von Knoten und Bäuchen vorhanden ist, die bei geeigneter Lage eines hinteren Bügels B_3 verschwindet.

Der erste Bauch liegt, falls der Flüssigkeitsanfang in einen wahren elektrischen Knoten fällt, näher als $\frac{1}{4}\lambda'$ an diesen heran wegen der Bügelverkürzung. Dieselbe hat im Wasser einen kleineren Werth, als in Luft, sie beträgt für die Wellen des kleinen Erregers, wie die mitgetheilten Beobachtungen zeigen, etwa 5—6 mm, während sie in Luft 8 mm beträgt. Die Lage der Knoten und Bäuche relativ zum Flüssigkeitsanfang hängt natürlich auch von dem Werthe des b ab, bei positivem b rücken sie näher an den Flüssigkeitsanfang heran, bei negativem b entfernen sie sich von ihm. (Vgl. z. B. die Beobachtungsreihen 9) und 10).) Die Knoten und Bäuche machen aber die Bewegung des ganzen Flüssigkeitstroges stark mit, sodass sie nicht vollständig feste Lagen in Bezug auf den Erreger, oder den festen Bügel B_1, haben, sondern eher noch feste Lagen in Bezug auf den Flüssigkeitsanfang. (Vgl. 9) und 10).) Besonders zur Ermittelung dieser Verhältnisse angestellte Versuche haben ergeben, dass die relative Bewegung der Knoten und Bäuche zum Flüssigkeitsanfang nur den 0,22ten Theil des Werthes von b ausmacht. Dies gilt sowohl für den grossen, wie für den kleinen Erreger.

Zu einer befriedigenden Erklärung dieser Erscheinungen bedarf es des Eingehens auf ausführliche theoretische Erörterungen. Dies soll an anderer Stelle geschehen.

Temperaturcoefficient.

Die bisherigen Beobachtungen sind in der Nähe von 17° Cels. gemacht worden. Die Beobachtungen sind mit Hilfe des HEERWAGEN-schen Temperaturcoefficienten auf 17° reducirt, was gestattet ist, da derselbe sich sehr annähernd auch aus meinen Beobachtungen ergeben hat. Im Folgenden theile ich Beobachtungen mit, welche den Zweck haben, die Abhängigkeit des elektrischen Brechungsexponenten von der Temperatur in grösseren Intervallen festzustellen.

Es wurden der kleine Erreger und der grosse Thontrog verwendet. In seinen vier Ecken waren vier 32 cm lange, 2 cm im Durchmesser haltende Turbinen (mit je zwei Schraubenrädern) angebracht, welche durch einen schnell laufenden kleinen Elektromotor in rasche Rotation versetzt wurden. Die Turbinen reichten vom Grunde des Wassers bis nahe an seine Oberfläche, und bewirkten eine so vollständige Umrührung, dass die Abweichungen dreier Thermometer, welche in je 10 cm Verticalabständen in das Wasser eingetaucht waren, fast stets unter $\frac{1}{10}^{\circ}$ lagen. — Durch besondere Versuche wurde festgestellt, dass die Bewegung des Wasser keinerlei Einfluss auf die Knoten und Bäuche besitzt.

Die Erwärmung des Wassers geschah durch drei grosse Bunsenbrenner, welche unter den Trog gestellt wurden. Wenn eine Beobachtungsreihe gemacht werden sollte, so wurde die Temperatur durch successives Fortnehmen oder wieder Unterstellen der Brenner während der Beobachtungen innerhalb $\frac{2}{10}^{\circ}$ constant gehalten. Dieses machte bei der bedeutenden Wassermasse (35 Liter) keine Schwierigkeit.

Der Thontrog wurde ohne Lackschicht auf den schadhaften Stellen seiner Glasur benutzt. Dadurch können die absoluten Werthe für n kleine Fehler enthalten, für die Bestimmung des Temperaturcoefficienten ist dies aber belanglos. Zudem zeigt sich auch, dass in der Nähe von 17° die absoluten Werthe von n nicht wesentlich kleiner, als das oben S. 331 als wahrscheinlich richtig aufgestellte Mittel sind, was dadurch herbeigeführt sein mag, dass das Wasser nur wenige Stunden im Trog aufbewahrt wurde, während es bei den früheren Beobachtungen 1) bis 8) zuweilen tagelang im Trog gestanden hat. — Es wurde nur der kleine Erreger angewandt. Der Wasseranfang lag stets in dem wahren elektrischen Knoten ($b = 0$), ferner betrug bei allen Versuchen $a = 1{,}8$ cm, $d = 1$ mm.

25) Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	8,5	46,1	83,4	121,1	158,8	
Ber.	8,5	46,0	83,6	121,1	158,7,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}56$

Schluss:

Beob.	8,5	46,1	83,6	120,9	158,5	
Ber.	8,6	46,0	83,5	121,0	158,5,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}48$.

Wellen in Wasser, $\vartheta = 0{,}2$.

Beob.	$^{1,}49$	$^{3,}50$	$^{5,}44$	$^{7,}44$	$^{9,}50$	$^{11,}58$	$^{13,}51$	$^{15,}51$	$^{17,}51$	$^{19,}55$
Ber.	47	48	48	49	50	51	51	52	53	54

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}015$. $n = 9{,}345$; $n^2 = 87{,}33$. $\varepsilon_{II} = 86{,}96$.

ε_H bedeutet die Dielektricitätsconstante nach HEERWAGEN.

$\vartheta = 3{,}9.$

Beob.	$^{1,}50$	$^{3,}44$	$^{5,}48$	$^{7,}51$	$^{9,}51$	$^{11,}62$	$^{13,}57$	$^{15,}67$	$^{17,}70$	$^{19,}67$
Ber.	44	47	50	52	55	58	61	64	66	69

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}056.$ $n = 9{,}250;$ $n^2 = 85{,}57.$ $\varepsilon_H = 85{,}61.$

Bei der Berechnung dieser Reihe ist unwahrscheinlich, dass der erste berechnete Bauch um 0,6 mm abweicht von der Beobachtung, die eine sehr scharfe ist. Hält man die Beobachtung 1,50 für richtig, und berechnet $\frac{1}{2}\lambda'$ einfach aus der Differenz der ersten letzten und beobachteten Zahl (19,67), so folgt $\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}038$, $n^2 = 86{,}34$. Jedenfalls ist also wahrscheinlich, dass n^2 für $\vartheta = 3{,}9$ etwas grösser als 85,57 ist.

26) Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	8,5	45,8	83,2	120,5	157,7	
Ber.	8,5	45,8	83,1	120,5	157,8,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}31$

Schluss:

Beob.	8,4	45,8	82,9	120,5	157,7	
Ber.	8,4	45,7	83,1	120,4	157,7,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}33.$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 4{,}3.$

Beob.	$^{1,}51$	$^{3,}52$	$^{5,}48$	$^{7,}53$	$^{9,}58$	$^{11,}53$	$^{13,}54$	$^{15,}58$	$^{17,}58$	$^{19,}59$
Ber.	51	52	52	53	54	54	55	56	56	57

Beob.	$^{21,}55$	$^{23,}53$	$^{25,}62$
Ber.	58	58	59

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}013.$ $n = 9{,}300;$ $n^2 = 86{,}48.$ $\varepsilon_H = 85{,}48.$

27) Wellen in Luft vgl. 25.

Wellen in Wasser, $\vartheta = 7{,}9.$

Es ist ein Bauch bei 17,80, ein Knoten bei 19,93 beobachtet. Diese Beobachtungen sind schnell hinter den Beobachtungen 25) und 26) angestellt. Aus diesen beiden Beobachtungen folgt eine

Bügelverkürzung 5,3 mm im Wasser[1]). Deshalb ergiebt sich, wenn man diese Bügelverkürzung auch hier zu Grunde legt:

$$\tfrac{1}{4}\lambda' = \frac{17,80 + 0,53}{9} = 2,036$$

bezw.

$$\tfrac{1}{4}\lambda' = \frac{19,93 + 0,53}{10} = 2,046.$$

Im Mittel $\frac{1}{2}\lambda' = 4,082$. $n = 9,192$; $n^2 = 84,49$. $\varepsilon_H = 84,17$.

28) Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	8,4	46,2	83,4	121,1	158,6	
Ber.	8,5	46,0	83,5	121,1	158,6,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,53$

Schluss:

Beob.	8,5	46,3	83,8	121,5	158,8	
Ber.	8,6	46,2	83,8	121,4	158,9,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,58$.

Wellen in Wasser, $\vartheta = 11,6$.

Bauch bei 17,92, Knoten bei 20,01, Bügelverkürzung 0,57 cm nach der Beobachtungsreihe bei $\vartheta = 25,8$, welche für gleiche Lage der Messscala gilt.

Es folgt

$\frac{1}{4}\lambda' = 18,49 : 9 = 2,054$ bezw. $20,58 : 10 = 2,058$.

Mittel: $\frac{1}{2}\lambda' = 4,112$. $n = 9,135$; $n^2 = 83,41$. $\varepsilon_H = 82,83$.

$\vartheta = 16,9$.

Bauch: 18,20, Knoten: 20,25, Bügelverk: 0,57,

$\frac{1}{4}\lambda' = 18,77 : 9 = 2,085$ bezw. $20,82 : 10 = 2,082$.

Mittel: $\frac{1}{2}\lambda' = 4,168$. $n = 9,011$; $n^2 = 81,20$. $\varepsilon_H = 80,91$.

---

1) Dass die Bügelverkürzung bei den verschiedenen Beobachtungsreihen scheinbar etwas schwankt, liegt daran, dass die Scala, an welcher die Knotenlagen abgelesen wurden, eine zwar bei der einzelnen Beobachtungsreihe feste, aber für die verschiedenen Beobachtungsreihen unter Umständen verschiedene Lage zum Flüssigkeitsanfang hatte, und dass diese Lage nur auf etwa $\frac{1}{2}$ mm genau bestimmt wurde. Daher kann die Bügelverkürzung für eine Beobachtung nur dann mit Genauigkeit in Ansatz gebracht werden, wenn auch der erste Bauch bei derselben Lage der Scala wenigstens für eine Temperatur bestimmt worden ist.

$\vartheta = 25{,}8.$

Erster Bauch: 1,54. Fünfter Knoten: 20,68.

$\frac{1}{4}\lambda' = 20{,}68 - 1{,}54 : 9 = 2{,}126.$ (Daher Bügelverk. $= 2{,}13 - 1{,}54 = 0{,}59.$)

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}252.$ $n = 8{,}851;$ $n^2 = 77{,}99.$ $\varepsilon_{II} = 77{,}70.$

Bei dieser Temperatur muss man schon sehr darauf achten, dass kleine Luftbläschen, die sich aus dem Wasser ausscheiden und auf der Drahtleitung festsetzen, stets sorgfältig entfernt werden. Denn sie bewirken eine deutliche Vergrösserung der Wellenlänge λ' und daher ein zu kleines n. Die Blasen wurden mit einem dünnen Kupferdrahte beständig abgestrichen, unmittelbar vor einer Beobachtung. Ich lasse hier zwei Beobachtungsreihen folgen, in der ersten wurden die Bläschen entfernt, in der zweiten nicht.

Beob. I.	1,53	3,75	5,91	7,95	10,18	12,23	14,40	16,45	18,62	20,71
Beob. II.	55	73	90	97	20	31	49	62	68	85
Diff.	0,02	−0,02	−0,01	0,02	0,02	0,08	0,09	0,17	0,06	0,14

Der fünfte Knoten ist also durch Anwesenheit der Luftbläschen um 1,4 mm nach hinten verschoben. Dies würde schon einen merklichen Fehler in n^2 veranlassen. Berechnet man $\frac{1}{2}\lambda'$ nach der Methode der kleinsten Quadrate aus I, so folgt $\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}253$, $n^2 = 77{,}97$, d. h. der Werth, der oben aus Beobachtung des 5ten Knotens und 1ten Bauches allein gewonnen ist. Berechnet man dagegen $\frac{1}{2}\lambda'$ aus II, so folgt $\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}285$, d. h. $n^2 = 76{,}79$.

$\vartheta = 39{,}2.$

Beob.	1,63	3,79	6,06	8,26	10,42	12,62	14,87	17,06	19,19	21,40
Ber.	64	83	03	23	43	63	83	03	22	42

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}397.$ $n = 8{,}540;$ $n^2 = 72{,}93.$ $\varepsilon_{II} = 72{,}59.$

29) Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	8,5	46,2	83,9	121,5	158,5	
Ber.	8,7	46,2	83,7	121,3	158,8,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}53$

Schluss:

Beob.	8,5	46,2	83,5	121,3	159,0	
Ber.	8,5	46,1	83,7	121,3	158,9,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}61.$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 39,5$.

1. Bauch: 1,58; 5. Bauch: 19,04; 5. Knoten: 21,25.

$\frac{1}{4}\lambda' = 2,183$, bezw. 2,186.

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,369$. $n = 8,599$; $n^2 = 73,95$. $\varepsilon_H = 72,74$.

Bügelverk. 0,60 gemessen.

$\vartheta = 45,4$.

5. Knoten 21,66. Bügelverk. 0,59 angenommen.

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,450$. $n = 8,443$; $n^2 = 71,28$. $\varepsilon_H = 70,60$.

$\vartheta = 49,8$.

1. Bauch: 1,67; 5. Bauch: 19,58; 5. Knoten: 21,92.

$\frac{1}{4}\lambda' = 2,239$, bezw. 2,250.

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,490$. $n = 8,367$; $n^2 = 70,01$. $\varepsilon_H = 69,00$.

Bügelverk. 0,57 gemessen.

$\vartheta = 54,8$.

5. Knoten: 22,09. Bügelverk. 0,59 angen.

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,536$. $n = 8,283$; $n = 68,60$. $\varepsilon_H = 67,21$.

$\vartheta = 59,7$.

1. Bauch: 1,68; 5. Bauch: 20,00; 5. Knoten: 22,33.

$\frac{1}{4}\lambda' = 2,289$, bezw. 2,294.

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,584$. $n = 8,196$; $n^2 = 67,17$. $\varepsilon_H = 65,43$.

Bügelverk. 0,61 gemessen.

$\vartheta = 66,0$.

5. Knoten: 22,53. Bügelverk. 0,59 angen.

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,624$. $n = 8,125$; $n^2 = 66,02$. $\varepsilon_H = 63,14$.

$\vartheta = 70,1$.

1. Bauch: 1,76; 5. Knoten: 22,76.

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,666$. $n = 8,052$; $n^2 = 64,83$. $\varepsilon_H = 61,66$.

Bügelverk. 0,57 gemessen.

$\vartheta = 72{,}8.$

5. Knoten: 22,95. Bügelverk. 0,59 angen.

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}708. \quad n = 7{,}980; \; n^2 = 63{,}68. \quad \varepsilon_H = 60{,}66.$

$\vartheta = 76{,}3.$

5. Knoten: 23,11; Bügelverk. 0,59 angen.

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}740. \quad n = 7{,}926; \; n^2 = 62{,}82. \quad \varepsilon_H = 59{,}41.$

Die Temperatur weiter zu steigern verbot sich wegen der zu schnell sich bildenden Luft- bezw. Dampfblasen, welche sofort Einfluss auf die Knotenlagen haben und eine fehlerhafte, scheinbare Verkleinerung von n herbeiführen. So musste bei der letzten Beobachtung für $\vartheta = 76^\circ$ unmittelbar vor jeder Einstellung die Leitung durch Ueberstreichen mit einem Drahte von Blasen gesäubert werden. Wenn man 20 Sec. nach der frischen Einstellung eine zweite Einstellung wiederholte, ohne die Leitung zu säubern, so rückte der 5te Knoten um 2,4 mm nach hinten, sodass n^2 zu 61,57 sich ergeben würde. Da die erste Einstellung unter der Dauer von 6 Sec. kaum zu machen ist, so halte ich es für wahrscheinlich, dass auch die hier mitgetheilte Zahl $n^2 = 62{,}82$ durch Anwesenheit von Luftblasen zu klein sein wird. Nach einer gewissen Extrapolation ist aber 63,4 als oberer Grenzwerth von n^2 anzunehmen.

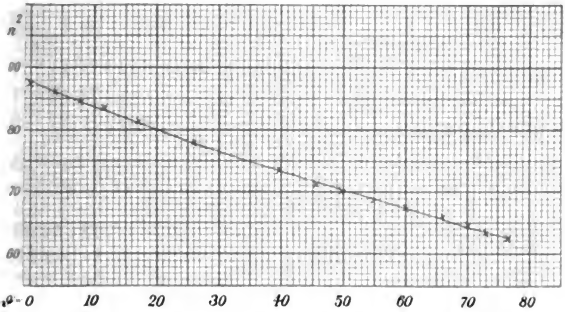
Im Folgenden stelle ich die Resultate 25) bis 29), geordnet nach steigenden Temperaturen, zusammen. Dabei habe ich die Beobachtungen 25) und 26), welche bei nahe benachbarten Temperaturen $\vartheta = 3{,}9$ und $\vartheta = 4{,}3$ angestellt worden sind, aber verhältnissmässig stark von einander abweichen, d. h. durch Fehler einzeln entstellt sind, zu einem Mittelwerth, geltend für die Mitteltemperatur 4,1, vereinigt, und ebenso die Beobachtungen 28) und 29) für $\vartheta = 39{,}9$ bezw. $\vartheta = 39{,}5$.

ϑ	0,2	4,1	7,9	11,6	16,9	25,8	39,7
n^2	87,33	86,02	84,49	83,41	81,20	77,99	73,44
ε_H	86,96	85,55	84,17	82,83	80,91	77,70	72,67
Diff.	0,37	0,47	0,32	0,58	0,29	0,29	0,77

ϑ	45,4	49,8	54,8	59,7	66,0	70,4	72,8	76,3
n^2	71,28	70,01	68,60	67,17	66,02	64,83	63,68	62,82
ε_H	70,60	69,00	67,21	65,43	63,14	61,66	60,66	59,41
Diff.	0,68	1,01	1,39	1,74	2,88	3,17	3,02	3,41

Die Differenz zwischen n^2 und ε_H (»Diff.«) hat bis zur Temperatur 25,8 einen nahezu constanten Werth. Bis zu dieser Temperatur ist daher der Heerwagen'sche Temperaturcoefficient, d. h. Abnahme des n^2 um 0,362 pro Grad, sehr gut bestätigt. Insbesondere ergiebt sich auch nach diesen Beobachtungen, in Uebereinstimmung mit Heerwagen und Franke, dagegen in Widerspruch mit Thwing[1]), *dass n^2 kein Maximum bei 4°, d. h. dem Dichtigkeitsmaximum des Wassers, besitzt.*

Oberhalb $\vartheta = 25,8$ wird die Differenz zwischen n^2 und ε_H grösser, d. h. der Temperaturcoefficient ist kleiner als der von Heerwagen (nur für das Temperaturintervall von 0° bis 21°) angegebene Werth, und die Aenderung des n^2 findet nicht mehr proportional mit der Temperatur statt, sondern langsamer.



Die Curve der Figur enthält die Beobachtungen graphisch und stellt den Verlauf der Aenderung des n^2 mit ϑ dar.

Berechnet man für die Temperaturen bis zu 25,8° n^2 nach

1) Ch. B. Thwing, Ztschft. f. phys. Chem. 14, p. 286, 1894.

einer linearen Formel aus den Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, so folgt

$$n^2 = n_0^2 - 0{,}367 \cdot \vartheta,$$

der Temperaturcoefficient ist also nur um $1\frac{1}{2}$% grösser als der Heerwagen'sche. Die Uebereinstimmung der Beobachtungen bis zu 25,8° mit der Rechnung nach der linearen Formel ist eine sehr gute, wie Folgendes zeigt:

ϑ	0,2	4,1	7,9	11,6	16,9	25,8
Beob.	87,33	86,02	84,49	83,41	81,20	77,99
Ber.	87,40	85,97	84,57	83,21	81,27	80,02

Die sämmtlichen Beobachtungen bis zu 76° kann man durch eine Formel der Gestalt:

$$n^2 = a + b\vartheta + c\vartheta^2$$

innerhalb der Beobachtungsfehler darstellen. Nach der Methode der kleinsten Quadrate folgt:

$$n^2 = 87{,}63 - 0{,}4016\,\vartheta + 0{,}001028\,\vartheta^2.$$

ϑ	0,2	4,1	7,9	11,6	16,9	25,8	39,7	45,1
Beob.	87,33	86,02	84,49	83,41	81,20	77,99	73,44	71,28
Ber.	87,55	86,00	84,52	83,10	81,13	77,95	73,32	71,53
Diff.	−0,22	+0,02	−0,03	+0,31	+0,07	+0,04	+0,12	−0,25

ϑ	49,8	54,8	59,7	66,0	70,1	72,8	76,3
Beob.	70,01	68,60	67,17	66,02	64,83	63,68	62,82
Ber.	70,24	68,70	67,32	65,59	64,54	63,84	62,97
Diff.	−0,23	−0,10	−0,15	+0,43	+0,29	−0,16	−0,15

Aus der letzten Formel würde folgen $n_{17}^2 = 81{,}11$. Da oben S. 331 $n_{17}^2 = 81{,}67$ als wahrscheinlichster absoluter Werth gewonnen ist, so erhält man durch Multiplication der letzten Formel mit $81{,}67 : 81{,}11 = 1{,}0069$ *als Formel für den wahrscheinlichsten Werth von n^2 innerhalb der Temperaturen 0° bis 76°:*

$$n^2 = 88{,}25 - 0{,}4044\,\vartheta + 0{,}001035\,\vartheta^2.$$

Aus dieser Formel würde für $\vartheta = 100^{\circ}$ folgen $n^2 = 58{,}14$, während nach der Heerwagen'schen linearen Formel, wenn man sie bis zu 100° ausdehnen wollte, folgen würde $n^2 = 50{,}80$.

Wässrige Lösungen.

Dieselben wurden im grossen Glastrog untersucht. Wenn derselbe auch etwas zu kleine absolute Werthe für n liefert, so ist er doch zum Vergleich der Brechungsexponenten von wässrigen Lösungen mit dem des reinen Wassers wohl geeignet, zumal da beide fast genau denselben Betrag haben. — Zunächst wurde an der Luftleitung (bei dem kleinen Erreger, $\frac{1}{2}\lambda = 37{,}5$) der erste wahre elektrische Knoten hinter dem Bügel B_1 ermittelt (Bügelverkürzung 4 mm, da Drahtabstand nur 1 cm betrug), sodann der grosse Glastrog vorsichtig an die Leitung so angesetzt, dass die Innenfläche seiner Vorderwand in dem wahren Knoten lag ($b = 0$). Der Trog wurde mit destillirtem Wasser gefüllt, die Wellenlänge $\frac{1}{2}\lambda'$ darin bestimmt, dann das Wasser durch einen Heber vollständig abgesaugt und die Lösung eingefüllt, ohne dass die Verbindung der Trogleitung mit der Luftleitung aufgehoben wurde. Nach der Bestimmung der Wellenlänge $\frac{1}{2}\lambda''$ in der Lösung wurde noch einmal destillirtes Wasser eingefüllt und einige Knotenlagen gemessen, um zu controliren, dass $\frac{1}{2}\lambda'$ völlig constant geblieben war. — K bedeutet die Leitfähigkeit, bezogen auf Quecksilber.

Kupfersulfatlösungen.

30) *Destillirtes Wasser*, $\vartheta = 15{,}2$. $K = 7.10^{-10}$.

Beob.	1.84	3.94	6.03	8.03	10.02	12.11	14.16	16.29	18.37
Ber.	86	92	97	03	09	14	20	26	31

Beob.	20.40	22.40	24.47
Ber.	37	43	48

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}113.$

$CuSO_4 + aq.$ $K = 500 \,.\, 10^{-10}$, $\vartheta = 16{,}5$.

Beob.	1.86	3.97	5.99	7.95	10.07	12.13	14.19	16.29	18.30
Ber.	85	91	97	03	09	14	20	26	32

Beob.	20.37	22.48	24.49
Ber.	38	43	49

$\frac{1}{2}\lambda'' = 4{,}116.$

Die Einstellungen liessen sich bei dieser Lösung, die 71 mal besser leitet, als das benutzte destillirte Wasser, ebenso gut machen, als bei letzterem. Auf gleiche Temperatur 16,5 bezogen wäre

$$\tfrac{1}{2}\lambda' = 4{,}125; \ \tfrac{1}{2}\lambda'' = 4{,}116.$$

Die Differenz von λ'' und λ', welche $2^0/_{00}$ beträgt, kann noch in den Beobachtungsfehlern dieser Einzelbestimmung liegen. Man kann jedenfalls sagen: *Innerhalb $\tfrac{1}{4}^0/_0$ ist der Brechungsexponent einer wässrigen Kupfersulfatlösung der Leitfähigkeit 5.10^{-8} für elektrische Schwingungen der Schwingungszahl 4.10^8 pro Secunde derselbe, wie der des reinen Wassers.*

$$CuSO_4 + aq. \quad K = 2500.10^{-10}, \quad \vartheta = 16{,}2.$$

Beob.	^{1}89	^{3}92	^{5}88	^{7}94	^{10}03	^{12}14
Ber.	85	90	94	99	04	09

$$\tfrac{1}{2}\lambda'' = 4{,}094.$$

Die Dämpfung der Wellen wegen der erhöhten Leitfähigkeit der Flüssigkeit wird hier bemerkbar; es liessen sich daher nur obige 3 Bäuche und 3 Knoten einstellbar ermitteln. Für die Temperatur 16,2 ist:

$$\tfrac{1}{2}\lambda' = 4{,}122; \ \tfrac{1}{2}\lambda'' = 4{,}094.$$

Die Differenz von λ' und λ'', die $\tfrac{3}{4}^0/_0$ beträgt, mag schon ausserhalb der Beobachtungsfehler fallen, welche übrigens hier deshalb höher sind, wie vorhin, weil wegen der grösseren Dämpfung der Wellen weniger Knoten-, bezw. Bauchlagen zur Berechnung von $\tfrac{1}{2}\lambda''$ herangezogen werden können. *Innerhalb $1^0/_0$ ist aber n dasselbe, wie bei reinem Wasser.*

31) *Destillirtes Wasser*, $\vartheta = 15{,}1$.

Beob.	1,83	3,88	5,96
Ber.	83	89	96

$$\tfrac{1}{2}\lambda' = 4{,}130.$$

Mehr Beobachtungen für Wasser zu machen, hat von nun an keinen Zweck, da für die stärker concentrirten Lösungen sich auch nicht mehr Einstellungen ermöglichen lassen.

$$CuSO_4 + aq. \quad K = 4800.10^{-10}, \quad \vartheta = 11{,}1.$$

Beob.	1,84	3,86	5,91
Ber.	85	88	92

$$\tfrac{1}{2}\lambda'' = 4{,}07. \quad \tfrac{1}{2}\lambda'_{11} = 4{,}093, \text{ Diff. } \tfrac{1}{2}{}^0/_0.$$

$$K = 7270.10^{-10}, \quad \vartheta = 13{,}3.$$

Beob. 1,82 3,85.

$$\tfrac{1}{2}\lambda'' = 4{,}06. \quad \tfrac{1}{2}\lambda'_{13} = 4{,}114, \text{ Diff. } 1^0/_0.$$

$K = 10600 \,.\, 10^{-10}$, $\vartheta = 14{,}0$.

Beob. 1,75 3,78.

$\frac{1}{2}\lambda'' = 4{,}06$. $\frac{1}{2}\lambda'_{14} = 4{,}120$, Diff. $1\frac{1}{2}$%.

$K = 13100 \,.\, 10^{-10}$, $\vartheta = 14{,}5$.

Beob. 1. Bauch: 1,67.

32) *Destillirtes Wasser*, $\vartheta = 14{,}3$.

1. Bauch: 1,83.

$CuSO_4 + aq.$ $K = 16000 \,.\, 10^{-10}$, $\vartheta = 12{,}2$.

1. Bauch 1,70.

$K = 19200 \,.\, 10^{-10}$, $\vartheta = 12{,}5$.

1. Bauch 1,63.

$K = 25000 \,.\, 10^{-10}$, $\vartheta = 12{,}8$.

1. Bauch 1,58.

$K = 38000 \,.\, 10^{-10}$, $\vartheta = 13{,}3$.

1. Bauch 1,54 (?).

Noch stärker concentrirte Lösungen liessen sich nicht untersuchen, weil die Einstellungen selbst des 1. Bauches zu unsicher wurden. Schon die letzte Zahl 1,54 ist recht unsicher; die Lösung ist aber auch schon sehr stark, nämlich etwa 15 Gewichtstheile wasserfreies Salz auf 100 Gewichtstheile Lösung.

Kochsalzlösungen.

33) *Destillirtes Wasser.*

Anfang, $\vartheta = 13{,}1$. 1. Bauch 1,83; 6. Bauch 22,39. $\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}112$

Schluss, $\vartheta = 16{,}0$. 1. Bauch 1,83; 6. Bauch 22,28. $\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}090$

d. h. für $\vartheta = 13{,}1$ wäre $\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}064$.

Daher Mittel aus Anfang- und Schluss-Beobachtung

$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}088$ für $\vartheta = 13{,}1$.

$NaCl + aq.$ $K = 586 \,.\, 10^{-10}$, $\vartheta = 15.9$

1. Bauch 1,84; 6. Bauch 22,33; 6. Knoten 24,46

$\frac{1}{2}\lambda'' = 4{,}098$ bezw 4,112.

Mittel $\frac{1}{2}\lambda'' = 4{,}105$. $\frac{1}{2}\lambda'_{16} = 4{,}103$. Diff. 0%.

$K = 2840 \,.\, 10^{-10}$, $\vartheta = 15{,}1$.

Beob.	1,84	3,87	5,95	8,02	10,10	12,14
Ber.	83	89	96	02	09	15

$\frac{1}{2}\lambda'' = 4{,}130$. $\frac{1}{2}\lambda'_{15} = 4{,}106$. Diff. $- \frac{1}{2}\,^0/_0$.

$K = 5310 \,.\, 10^{-10}$, $\vartheta = 13{,}7$.

Beob.	1,85	3,83	5,90
Ber.	83	86	89

$\frac{1}{2}\lambda'' = 4{,}05$. $\frac{1}{2}\lambda'_{13,7} = 4{,}09$. Diff. $+ 1\,^0/_0$.

$K = 7750 \,.\, 10^{-10}$, $\vartheta = 13{,}5$.

Beob. 1,81 3,82.

$\frac{1}{2}\lambda'' = 4{,}02$. $\frac{1}{2}\lambda'_{13,5} = 4{,}09$. Diff. $2\,^0/_0$.

$K = 11400 \,.\, 10^{-10}$, $\vartheta = 13{,}5$.

1. Bauch 1,76.

$K = 16500 \,.\, 10^{-10}$, $\vartheta = 13{,}5$.

1. Bauch 1,69.

$K = 25000 \,.\, 10^{-10}$, $\vartheta = 13{,}2$.

1. Bauch 1,54.

An dieser Stelle mag schliesslich erwähnt werden, dass aus der Wasserleitung entnommenes Wasser, dessen Leitfähigkeit $K = 140 \,.\, 10^{-10}$ betrug, innerhalb $\frac{1}{6}\,^0/_0$ dieselbe Wellenlänge, wie destillirtes Wasser, besass.

Die oben für $CuSO_4$ aus 30) gezogenen Schlüsse sehen wir hier bei den $NaCl$-Lösungen gleicher Leitfähigkeit bestätigt. Für $K = 2840 \,.\, 10^{-10}$ ist sogar hier der Brechungsexponent um $\frac{1}{2}\,^0/_0$ kleiner, während er oben beim $CuSO_4$ um $\frac{3}{4}\,^0/_0$ grösser bestimmt war. Aus diesem Unterschiede kann man nach der Genauigkeit der Beobachtungen noch nicht auf eine specifisch verschiedene Wirkung des $NaCl$ und das $CuSO_4$ schliessen, weil der Unterschied von λ'' und λ' unter $1\,^0/_0$ beträgt, und dieser sich bei der Leitfähigkeit $K = 2840 \,.\, 10^{-10}$ unter den Beobachtungsfehlern versteckt.

Aus den Beobachtungen für beide Salze folgt, *dass von der Leitfähigkeit* $K = 7000 \,.\, 10^{-10}$ *an eine Vergrösserung des elektrischen Brechungsexponenten der Lösung gegenüber dem des reinen*

Wassers bemerkbar wird, die allerdings verhältnissmässig sehr gering ist. *Eine Lösung, die über 1000 mal besser leitet, als destillirtes Wasser, hat einen um nur $1\frac{1}{2}$% grösseren Brechungsexponenten.* Zugleich erkennt man, *dass die Lage der Knoten und Bäuche nur von der Leitfähigkeit, nicht von der Natur des Salzes bestimmt wird.* Dies ist am besten aus folgender Zusammenstellung der Beobachtungsresultate 30) bis 33) zu ersehen, in welcher $\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}10$ für $\vartheta = 13^\circ$ als gemeinsamer Mittelwerth angenommen ist (die Einzelabweichungen sind nur $\frac{1}{4}$% und daher zu vernachlässigen). In der ersten Tabelle ist in den ersten beiden Reihen das beobachtete $\frac{1}{2}\lambda''$ (reducirt auf 13°) angegeben, in der zweiten (bei höherer Leitfähigkeit) die Differenz der Lage des 1. Bauches in der Lösung gegenüber der Lage des 1. Bauches im reinen Wasser (1,83) in mm. — Die Leitfähigkeiten K sind in der Tabelle als angenäherte zu betrachten.

Abhängigkeit der Wellenlänge von der Leitfähigkeit.

$K \cdot 10^{10}$	7	540	2700	5000	7500	11000
$CuSO_4$	4,10	4,09	4,07	4,09	4,06	4,05
$NaCl$	4,10	4,08	4,11	4,05	4,02	—
Mittel	4,10	4,09	4,09	4,07	4,04	4,05
Diff. in %		0,2	0,2	0,7	1,5	1,2
Theoret.		0,0	0,2	1,1	2,4	5,0

Abhängigkeit des ersten Bauches von der Leitfähigkeit.

$K \cdot 10^{10}$	11000	13000	16000	19000	25000	38000
$CuSO_4$	0,8 mm	1,6	1,3	2,0	2,5	2,9
$NaCl$	0,7	—	1,4	—	2,9	—
Mittel	0,8	1,6	1,4	2,0	2,7	2,9
Diff. in %	3,9	7,8	6,8	9,7	13,1	14,1
Theoret.	5,0	5,8	8,2	11,0	15,3	24,3

Die in den ersten beiden Reihen enthaltenen Resultate zeigen keine systematische Abweichung von einander. Ihre Mittelwerthe sind in der dritten Reihe angeführt. In der 4ten Reihe ist der Unterschied des Brechungsexponenten des reinen

Wassers in Procenten angegeben, d. h. wenn n'' der Brechungsexponent der Lösung, n der des reinen Wassers ist, die Zahl:

$$\text{»Diff. in }\%\text{«} = 100\,\frac{\frac{1}{2}\lambda' - \frac{1}{2}\lambda''}{\frac{1}{2}\lambda'} = 100\,\frac{1/n - 1/n''}{1/n} = 100\,\frac{n'' - n}{n''}.$$

Für diejenigen Beobachtungen (von $K = 11\,000$ an aufwärts), für welche $\frac{1}{2}\lambda''$ nicht direct beobachtet worden ist, sondern nur die Differenz δ der Lage des ersten Bauches in der Lösung gegenüber der Lage des ersten Bauches in reinem Wasser, ist $\frac{1}{2}\lambda''$ berechnet nach:

$$\tfrac{1}{2}\lambda'' = \tfrac{1}{2}\lambda' - 2\,\delta\ (\text{cm}).$$

Diese Berechnung ist allerdings nicht in aller Strenge gestattet. Denn bei grosser Leitfähigkeit muss nach theoretischen Gründen ausser der Verkürzung der Wellenlänge, d. h. der Verkleinerung des gegenseitigen Abstandes von Knoten und Bäuchen auch eine Phasenänderung beim Uebergang der Wellen von Luft in's Wasser eintreten, die eine Verschiebung der Knoten und Bäuche gegen den Wasseranfang zur Folge hat. Eine ausführliche theoretische und numerische Berechnung soll an anderer Stelle gegeben werden.

Wenn auch nach den mitgetheilten Beobachtungen eine Vergrösserung des elektrischen Brechungsexponenten bei sehr grosser Leitfähigkeit eintritt, *so ist es doch noch eine ganz andere Frage, ob die Dielektricitätsconstante der Lösung dieselbe, wie die des reinen Wassers ist, oder nicht.* Zunächst: Was ist die Dielektricitätsconstante eines gut leitenden Körpers? Man kann sie nur definiren, wenn man auf die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes in dem Körper eingeht. Bezeichnet man irgend eine für das Feld charakteristische Zustandsgrösse, z. B. die elektrische Kraft, mit P, so werden in einem sich selbst überlassenen leitenden Körper die zeitlichen und örtlichen Veränderungen dieses P der Erfahrung entsprechend durch die Differentialgleichung dargestellt[1]):

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\,\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + 4\pi\sigma\,\frac{\partial P}{\partial t} = \Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}.$$

σ ist die durch constante oder langsame Wechselströme zu messende Leitfähigkeit nach absolutem elektromagnetischem

1) Vgl. z. B. des Verf. Phys. d. Aethers, S. 550, Formel (8).

Maasse, c die Lichtgeschwindigkeit (Verhältniss der elektrostatisch gemessenen Elektricitätsmenge zur elektromagnetisch gemessenen). *Die Definition der Dielektricitätsconstante ist die als Coefficient ε in obiger Differentialgleichung.*

Falls $\sigma = 0$ ist, so wird das Quadrat des elektrischen Brechungsexponenten n^2 gleich dem Coefficienten ε. Wenn σ zunimmt, so lässt sich leicht nachweisen, dass auch bei constantem ε ein Wachsen von n eintritt, dass allerdings je nach der in Luft gemessenen Wellenlänge λ die Schwingung verschieden ist. Nennt man

$$s = \frac{c\sigma\lambda}{\varepsilon},$$

so lässt sich leicht ableiten, dass ist

$$n''^2 = \varepsilon\,\frac{1 + \sqrt{1 + 4s^2}}{2},$$

oder, da $\varepsilon = n^2$ ist, falls n den Brechungsexponenten für $\sigma = 0$ bezeichnet.

$$n''^2 : n^2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4s^2}}{2}.$$

Berechnet man nach dieser Formel den Brechungsexponenten der Lösungen, und sucht dann die procentische Differenz des Brechungsexponenten:

$$100 \,.\, \frac{n'' - n}{n''}$$

auf, so erhält man die in der letzten Reihe der obigen Tabellen auf S. 353, 354 unter »Theoret.« angeführten Werthe. Ein Vergleich dieser theoretischen Zahlen mit den in der Tabelle darüber stehenden experimentellen zeigt, dass erstere jedenfalls nicht kleiner, sondern sogar etwas grösser sind, als letztere. Wenn man nun auch die zweite jener Tabellen wegen Auftretens der Phasenänderung ausserhalb der Betrachtungen stellt, so scheint doch schon aus der ersten jener Tabellen zu folgen, dass nach der Beobachtung der Brechungsexponent einer Lösung mit zunehmender Leitfähigkeit in etwas geringerem Grade wächst, als er dies thun müsste, wenn die Dielektricitätsconstante in jeder Lösung dieselbe ist, wie die des reinen Wassers. *Man würde daher auf eine geringe Abnahme der Dielektricitätsconstante mit wechselndem Salzgehalt zu schliessen haben.* Wenn auch dieser Schluss wegen der Grösse der Beobachtungsfehler nicht mit voller Sicherheit vorläufig zu ziehen sein mag, *so geht doch aus den Beobachtungen zweifellos hervor, dass die Dielektricitätsconstante des Wassers durch Auflösung eines Elektrolyten selbst bis zu der Leitfähigkeit $K = 11 . 10^{-7}$ jedenfalls nicht vergrössert wird*[1]). — Ein Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und Dielektricitätsconstante besteht also nicht.

Wie gesagt, möchte ich den Schluss auf eine geringe Abnahme der Dielektricitätsconstante einer Lösung mit wachsendem Salzgehalt aus den Beobachtungen noch als einen durchaus unsicheren bezeichnen. Immerhin erscheint es mir sehr wahrscheinlich, dass sehr stark concentrirte Lösungen wirklich eine kleinere Dielektricitätsconstante, als reines Wasser haben werden, da die Dielektricitätsconstante des gelösten Körpers wohl immer kleiner, als die des Wassers sein wird. Man kennt zwar bisher die Dielektricitätsconstante eines gelösten elektrolytisch leitenden Salzes nicht, denn aus der Dielektricitätsconstante des festen, eventuell wasserhaltigen Krystalles kann man noch keinen Schluss auf die Dielekricitätsconstante dieses Körpers in Lösung ziehen, da schon mit der Aenderung des Aggregatzustandes meist eine bedeutende Aenderung der Dielektricitätsconstante verbunden ist. So ist die Dielektricitätsconstante des Eises verhältnissmässig klein, die des flüssigen Wassers sehr gross. Immerhin kann man über die im Maximum zu erwartende Aenderung der Dielektricitätsconstante durch Anwesenheit eines Salzes Aufschluss bekommen, wenn man die Dielektricitätsconstante der Lösung nach der Volummischungsregel[2]) berechnet, und als Dielektricitätsconstante des Salzes den im festen Zustand gemessenen nimmt. Da wahrscheinlich dem Salz in Lösung eine höhere Dielektricitätsconstante (die in beiden Jonen verschieden sein wird) zukommt, so ist die so berechnete Aenderung der Dielektricitätsconstanten der ganzen Lösung sehr wahrscheinlich zu gross.

---

1) Bisher ist ein Schluss auf die Dielektricitätsconstante einer Lösung bei einiger Leitfähigkeit nur von COHN in Wied. Ann. **45**, p. 375, 1892 gemacht, der für $K = 455 . 10^{-10}$ bei $\lambda = 585$ cm n'' um etwas über 3% grösser fand als n. Bei constantem ε sollte es nach der Theorie nur um $\frac{1}{2}$% grösser sein. — Ich zweifle nicht, dass bei einer Wiederholung dieser Beobachtungen, die COHN und ZEEMANN in Aussicht gestellt haben, eine geringere Aenderung des n als 3% sich herausstellen wird.

2) Diese wird jedenfalls bei Elektrolyten auch nicht mit Strenge anzuwenden sein, weil durch Auflösung eine Contraction eintritt.

Nun hat Thwing[1]) die Dielektricitätsconstante des (wasserhaltigen) krystallisirten Kupfersulfats zu 5,46 bestimmt. Für die Leitfähigkeit $K = 38000 \,.\, 10^{-10}$ sind in 100 g Lösung 14,5 g wasserfreies, daher 22,7 g wasserhaltiges Salz. Das spec. Gewicht des Kupfersulfats ist 2,25, also haben 22,7 g Salz das Volumen 10,1 cm³, während die 77,3 g Wasser das Volumen 77,3 cm³ besitzen. Daher ist nach der Mischungsregel die Dielektricitätsconstante der Lösung

$$\varepsilon = \frac{77{,}3 \,.\, 81 + 10{,}1 \,.\, 5{,}46}{87{,}4} = 72{,}5.$$

Der Unterschied gegen 81 beträgt 10%; für $K = 18000 \,.\, 10^{-10}$ würde folgen $\varepsilon = 78{,}7$; d. h. nur etwa 3% Unterschied, d. h. für den Brechungsexponenten $1\frac{1}{2}$% Unterschied. Da dies die maximal zu erwartenden Aenderungen sind, so sieht man, dass sie sich der Beobachtung entziehen werden (für $K = 38000 \,.\, 10^{-10}$ ist die Beobachtung unzuverlässig). — Dabei ist noch zu berücksichtigen, dass eine Kupfersulfatlösung eine geringere Leitfähigkeit hat, als die meisten anderen Lösungen gleicher Concentration, und dass daher die Erniedrigung der Dielektricitätsconstante bei Lösungen von anderen Elektrolyten für gleiche Leitfähigkeit K noch geringer sein wird, als bei $CuSO_4 + aq$.

Ueber diese Fragen erhält man einen besseren Aufschluss, wenn man einen stark löslichen Nicht-Elekrolyten untersucht. Die Beobachtung ist dann bei hoher Concentration nicht durch grosse Leitfähigkeit gehindert. Ich habe deshalb Rohrzuckerlösungen untersucht, und theile nun die Resultate mit. Es wurde wiederum der grosse Glastrog angewendet.

Rohrzuckerlösungen.

34) *Destillirtes Wasser*, $\vartheta = 17{,}3$.

1\. Bauch 1,83; 6. Bauch 22,78; 6. Knoten 24,87. $\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}190$.

Rohrzuckerlösung, spec. Gew. 1,174, $\vartheta = 17{,}3$.

Beob.	2,05	4,39	6,66	8,96	11,35	13,54	15,85	—	20,50
Ber.	07	37	68	98	28	58	89	19	49

$$\tfrac{1}{2}\lambda'' = 4{,}606.$$

$$\frac{\lambda''}{\lambda'} = \frac{n}{n''} = 1{,}10. \quad n''^2_{17} = n^2 : 1{,}21 = 67{,}5.$$

1\) Ch. B. Thwing, Ztschr. f. phys. Chem. **14**, p. 286, 1894.

Spec. Gew. 1,319 bei 20°, $\vartheta = 21,5$.

Beob.	2,74	5,40	8,47	11,40	13,97
Ber.	90	54	38	26	14

$$\tfrac{1}{2}\lambda'' = 5,68.$$

$$\left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)_{21} = \frac{5,68}{4,23} = 1,34. \quad n''^2_{17} = 45,3.$$

Hier ist in der That *eine ganz bedeutende Verkleinerung des Brechungsexponenten mit erhöhter Concentration zu bemerken,* welche nicht durch die (nicht vorhandene) Leitfähigkeit, sondern nur durch die Gegenwart des Zuckers herbeigeführt wird. Die Verkleinerung des n^2 ist aber viel geringer, als sie der Mischungsregel entspricht, falls man die Dielektricitätsconstante des festen Zuckers ($\varepsilon = 4,19$ nach THWING) für den gelösten Zustand in Ansatz bringt.

Für das spec. Gew. 1,174 ist die Lösung etwa 40°/₀, d. h. in 100 g Lösung sind 40 g Zucker, d. h. 60 gr. Wasser. Da also das Volumen des Wassers 60 cm³, das der Lösung 100 : 1,174 = 85 cm³ ist, so ist das des Zuckers 25 cm³, und nach der Mischungsregel müsste sein:

$$n''^2_{17} = \frac{81 \cdot 60 + 4,2 \cdot 25}{85} = 58,4,$$

d. h. kleiner, als es beobachtet ist ($n''^2_{17} = 67,5$).

Ebenso müsste bei der concentrirteren (65°/₀) Lösung n''^2_{17} nach der Mischungsregel zu 40,0 folgen, während es zu 45,3 beobachtet ist.

Es mag dies vielleicht nicht wunderbar erscheinen, weil für die Dielektricitätsconstante des gelösten Zuckers ein höherer Werth in Ansatz gebracht werden muss, als er für den festen Zucker gilt. In der That berechnet ihn THWING [1]) zu 52,0. Berechnet man auch nach diesen Versuchen die Dielektricitätsconstante ε_z des gelösten Zuckers in der Weise, dass das beobachtete n^2_{17} der Mischungsregel entspricht so folgt

$$\text{dünnere Lösung: } \varepsilon_z = 35,2$$
$$\text{stärkere Lösung: } \varepsilon_z = 14,3.$$

Hier tritt also das Merkwürdige ein, dass die Dielektricitätsconstante des gelösten Zuckers mit stärkerer Concentration

1) l. c. p. 293.

scheinbar abnimmt, wofür (bei dem Mangel an elektrolytischer Dissociation) kein Grund vorhanden zu sein scheint.

Dieses auffällige Verhalten hängt mit einer anderen Eigenthümlichkeit zusammen, die ich bisher nicht erwähnt habe: *die Rohrzuckerlösungen besitzen anomale elektrische Absorption.* Schon bei der dünneren Lösung ist deutlich zu constatiren, dass der 4^{te} und 5^{te} Knoten schlechter ausgebildet ist, als im reinen Wasser; bei der stärkeren Lösung ist die Absorption so bedeutend, dass überhaupt nur 2 Knoten und 3 Bäuche einstellbar werden. *Die Absorption ist also* (vgl. oben S. 350—352) *etwa so stark, wie die eines wässrigen Elektrolyten der Leitfähigkeit* $K = 3000 \, . \, 10^{-10}$, obwohl die direct gemessene Leitfähigkeit der Zuckerlösung unter $K < 6 \, . \, 10^{-10}$ lag.

Da nun, wie ich in der citirten Arbeit (»Abhandl.«) nachgewiesen habe, anomale Absorption auch stets mit anomaler Dispersion Hand in Hand geht, *so werden die Zuckerlösungen auch jedenfalls anomale elektrische Dispersion besitzen*, und zwar die stärker concentrirte in höherem Maasse, als die dünnere Lösung. In Folge dessen muss für dieselbe Schwingungsperiode der elektrische Brechungsexponent der stärkeren Lösung durch Vorhandensein der stärkeren anomalen Dispersion mehr verkleinert sein, als der der schwächeren Lösung, und daher erscheint auch die Dielektricitätsconstante ε_z des gelösten Zuckers für die stärkere Lösung weit kleiner als für die dünnere Lösung. Dass bedeutende anomale Dispersion vorhanden ist, erkennt man aus dem Vergleich mit den Beobachtungen THWING's welcher mit 16 mal langsameren Schwingungen $\varepsilon_z = 52$ fand.

Das Auftreten anomaler Absorption und Dispersion an Zuckerlösungen schliesst sich der früher (»Abhandl.«) besprochenen Thatsache an, dass Substanzen mit hohem Molekulargewicht vorzugsweise davon betroffen werden. Zucker hat ein sehr grosses Molekulargewicht, und eine Zuckerlösung verhält sich in elektrischer Hinsicht im Totaleffect wie eine Flüssigkeit, deren Molekulargewicht zwischen dem des reinen Wassers und dem des Zuckers liegt und sich dem letzteren umsomehr nähert, je höher die Concentration der Lösung ist.

Resultate.

Die Hauptresultate lauten folgendermassen:

1) *Für Schwingungen der Schwingungszahl* $4 \cdot 10^8$ *pro Secunde ist das Quadrat des elektrischen Brechungsexponenten des Wassers für* $17°$ *Cels.* $n_{17}^2 = 81,67$.

2) *Für Schwingungen der Schwingungszahl* $1,5 \cdot 10^8$ *pro Secunde ist* $n_{17}^2 = 80,60$ *bestimmt. Dieser Messung haftet aber eventuell* $1\,^0/_0$ *Unsicherheit an. Immerhin erscheint in Anbetracht der kleineren Zahlen für die Dielektricitätsconstante des Wassers bei sehr langsamen Schwingungen eine geringe (nicht mehr als* $1\,^0/_0$ *betragende) normale Dispersion des* n^2 *vorhanden zu sein.*

3) *Zwischen* $0°$ *und* $26°$ *ist die Aenderung des* n^2 *der Temperatur proportional;* n^2 *nimmt pro Grad Temperaturerhöhung um 0,367 ab. — Zwischen* $0°$ *und* $76°$ *kann die Abhängigkeit des* n^2 *von der Temperatur* ϑ *dargestellt werden durch:*

$$n^2 = 88,23 - 0,4044\,\vartheta + 0,001035\,\vartheta^2.$$

4) *Für das Verhalten wässriger elektrolytisch leitender Lösungen gegenüber elektrischen Wellen ist nur ihre Leitfähigkeit massgebend. Bis zur Leitfähigkeit* $K = 5 \cdot 10^{-7}$ (bezogen auf Quecksilber als Einheit) *ist der elektrische Brechungsexponent bei Wellen der Schwingungszahl* $4 \cdot 10^8$ *sec.*$^{-1}$ *innerhalb* $1\,^0/_0$ *derselbe, wie beim reinen Wasser. Mit höherer Leitfähigkeit wird der elektrische Brechungsexponent kleiner, bei* $K = 38 \cdot 10^{-7}$ *jedenfalls um mehr als* $10\,^0/_0$. *— Die Dielektricitätsconstante der Lösung ist jedenfalls bis zur Leitfähigkeit* $K = 11 \cdot 10^{-7}$, *wahrscheinlich sogar bis zur Leitfähigkeit* $K = 38 \cdot 10^{-7}$ *nicht grösser, als die des reinen Wassers.*

5) *In Rohrzuckerlösungen ist der elektrische Brechungsexponent bei höherer Concentration bedeutend kleiner, als in reinem Wasser. Die Lösungen zeigen anomale elektrische Absorption und anomale elektrische Dispersion, und zwar um so mehr, je höher die Concentration ist. Eine 65procentige Lösung absorbirt die Wellen wie eine elektrolytisch leitende wässrige Lösung der Leitfähigkeit* $K = 3 \cdot 10^{-7}$.

Leipzig, Mai 1896.

AUSSERORDENTLICHE SITZUNG VOM 6. JULI 1896.

Vorträge hielten:

1. Herr H. Bruns, o. M.: Vorlegung einer Arbeit von **Dr. Hartmann** über Mondfinsternisse. Zur Begutachtung über die Aufnahme in die »Abhandlungen« wird eine Commission, bestehend aus den Herren H. Bruns und W. Scheibner, niedergesetzt.
2. Herr Ad. Mayer, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von **G. Frege**-Jena: »Ueber die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene«, für die Berichte.

G. Frege, *Ueber die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene.*

In der mathematischen Section der Naturforscherversammlung in Lübeck habe ich einen Vortrag über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene gehalten. Die Kürze der verfügbaren Zeit hat mich jedoch verhindert, der Sache hinlänglich gerecht zu werden, so dass ich darauf verzichtet habe, den Vortrag so zu veröffentlichen, wie er gehalten ist. Ich habe mir jedoch eine etwas eingehendere Behandlung des Gegenstandes vorbehalten und versuche im Folgenden eine solche zu geben. Wegen der grossen Menge der hier auftauchenden Fragen muss ich es mir freilich auch hier versagen, den Gegenstand zu erschöpfen.

Es ist für mich schwierig, da ich selber Partei bin, der Begriffsschrift des Herrn Peano volle Gerechtigkeit wiederfahren zu lassen; und man wird vielleicht den Eindruck erhalten, dass ich zu ungünstig urtheile. Wenn ich wirklich in diesen Fehler verfallen sollte, so möge mir die Sachlage zur Entschuldigung dienen, die ihn schwer vermeidbar macht. Es ist natürlich, dass ich meine eigene Begriffsschrift besser verstehe als eine fremde und dass mir ihre Vorzüge mehr einleuchten als ihre Nachtheile. In einer ähnlichen Lage befand sich Herr Peano, als er meine

Grundgesetze der Arithmetik anzeigte[1]). Und ich habe in der That den Eindruck, dass er meiner Begriffsschrift nicht ganz gerecht geworden ist; auch sind augenscheinlich Missverständnisse dabei untergelaufen. Dies hindert mich jedoch nicht, diese Beurtheilung dankbar zu begrüssen als einen Ausgangspunkt für weitere Erörterungen, wodurch die Missverständnisse aufgeklärt und die Streitfragen ihrer Lösung näher gebracht werden können. Was ich hier darlege, ist jedoch nicht als Antwort auf jene Beurtheilung anzusehen. Eine solche gedenke ich in der Rivista di Matematica zu geben.

Wenn der Tadel im Folgenden vielleicht zu sehr die Anerkennung zu überwiegen scheint, so ist dabei auch die Verschiedenheit der Zwecke in Betracht zu ziehen, die wir verfolgt haben. Denn dieselbe Bezeichnungsweise oder Bestimmung kann zweckmässig oder unzweckmässig scheinen je nach der Absicht, die man dabei voraussetzt. Deshalb mögen die Absichten und Beweggründe zunächst etwas näher betrachtet werden.

Das Bedürfniss nach einer Begriffsschrift machte sich bei mir fühlbar, als ich nach den unbeweisbaren Grundsätzen oder Axiomen fragte, auf denen die ganze Mathematik beruht. Erst nach Beantwortung dieser Frage kann man mit Erfolg den Erkenntnissquellen nachzuspüren hoffen, aus denen diese Wissenschaft schöpft. Wenn diese letzte Frage nun auch mehr der Philosophie angehört, so muss man jene doch als mathematische anerkennen. Die Frage ist schon alt; denn schon Euklid scheint sie sich gestellt zu haben. Wenn sie trotzdem noch nicht genügend beantwortet ist, so ist der Grund in der logischen Unvollkommenheit unserer Sprachen zu sehen. Will man erproben, ob ein Verzeichniss von Axiomen vollständig sei, so muss man versuchen, aus ihnen alle Beweise des Zweiges der Wissenschaft zu führen, um den es sich handelt. Und hierbei muss man genau darauf achten, die Schlüsse nur nach rein logischen Gesetzen zu ziehen; denn sonst würde sich unmerklich etwas einmischen, was als Axiom hätte aufgestellt werden müssen. Der Grund, weshalb die Wortsprachen zu diesem Zwecke wenig geeignet sind, liegt nicht nur in der vorkommenden Vieldeutigkeit der Ausdrücke, sondern vor allem in dem Mangel fester Formen für das Schliessen. Wörter wie ‚also', ‚folglich', ‚weil' deuten zwar

1) Rivista di Matematica, Volume V, S. 122 ff.

darauf hin, dass geschlossen wird, sagen aber nichts über das Gesetz, nach dem geschlossen wird, und können ohne Sprachfehler auch gebraucht werden, wo gar kein logisch gerechtfertigter Schluss vorliegt. Bei einer Untersuchung, welche ich hier im Auge habe, kommt es aber nicht nur darauf an, dass man sich von der Wahrheit des Schlusssatzes überzeuge, womit man sich sonst in der Mathematik meistens begnügt; sondern man muss sich auch zum Bewusstsein bringen, wodurch diese Ueberzeugung gerechtfertigt ist, auf welchen Urgesetzen sie beruht. Dazu sind feste Geleise erforderlich, in denen sich das Schliessen bewegen muss, und solche sind in den Wortsprachen nicht ausgebildet. Wenn man die Gesetze, nach denen geschlossen wird, bei den in gewöhnlicher Weise geführten Beweisen aufzuzählen versucht, so findet man eine kaum übersehbare und anscheinend nicht bestimmt abgegrenzte Mannigfaltigkeit. Der Grund hiervon liegt offenbar darin, dass diese Schlüsse aus einfacheren zusammengesetzt sind. Und dabei kann leicht etwas einfliessen, was nicht logischer Natur ist und folglich als Axiom aufzuführen wäre. Darin besteht die Schwierigkeit, die Axiome rein herauszuschälen. Es sind demnach die Schlüsse in ihre einfachen Bestandtheile aufzulösen. So wird man wenige Schlussweisen auffinden, mit denen man dann überall durchzukommen suchen muss. Gelingt dies an einer Stelle nicht, so wird man zu fragen haben, ob man hier eine Wahrheit angetroffen habe, die aus einer nichtlogischen Erkenntnissquelle fliesse, oder ob man eine neue Schlussweise anerkennen müsse, oder ob vielleicht der beabsichtigte Schritt überhaupt nicht gethan werden dürfe. Aber eine solche Auflösung der zusammengesetzten Schlussweisen hat eine Verlängerung der Beweise zur nothwendigen Folge; und dabei bildet die Weitläufigkeit der Wortsprachen neben ihrer logischen Unvollkommenheit ein fast unüberwindliches Hinderniss, solange man sich nicht entschliesst, ein ganz neues Hülfsmittel des Gedankenausdruckes anzuwenden, bei dem logische Vollkommenheit mit möglichster Kürze vereinigt ist. Man wird dabei die Anzahl der Schlussweisen möglichst beschränken und diese als Regeln dieser neuen Sprache aufstellen. Dies ist der Grundgedanke meiner Begriffsschrift. Wie der Name andeutet sind ihre Urbestandtheile nicht Laute oder Silben, sondern Schriftzeichen; sie ist, um einen Leibnizischen Ausdruck zu gebrauchen, eine *lingua characterica*.

Dieser Unterschied von den Wortsprachen ist nicht ohne Belang. Er tritt hauptsächlich in zweifacher Weise hervor: die Schriftzeichen dauern, die Laute vergehen; die Schriftzeichen erscheinen auf der zweifach ausgedehnten Fläche, die Laute in der einfach ausgedehnten Zeit. Durch ihre Dauer sind die Schriftzeichen den Begriffen ähnlicher und so zum logischen Gebrauche geeigneter als die Laute. Sie sind auch bestimmter und nöthigen dadurch das Denken zu grösserer Bestimmtheit. Eine Gruppe von Schriftzeichen kann wiederholt und auf verschiedenen Wegen vom Auge überblickt werden; so kann ihr Sinn mit allen darin enthaltenen Beziehungen der Theile zu einander dem Geiste mehrfach vorgeführt werden, und es gelingt leichter das Ganze zu erfassen und gegenwärtig zu erhalten. Durch die zwiefache Ausdehnung der Schreibfläche wird eine Mannigfaltigkeit von Stellungen der Schriftzeichen zu einander möglich, und das kann für die Zwecke des Gedankenausdrucks benutzt werden. Bei einem gewöhnlichen geschriebenen oder gedruckten Texte ist es freilich ganz zufällig, welche Schriftzeichen unter einander zu stehen kommen; dagegen benutzt man bei tabellarischen Zusammenstellungen die zwiefache Ausdehnung, um Uebersichtlichkeit zu erzielen. In ähnlicher Weise suche ich das in meiner Begriffschrift zu thun. Indem ich die einzelnen Theilsätze — z. B. Folgesatz und Bedingungssätze — unter einander schreibe und links davon durch eine Verbindung von Strichen die logischen Beziehungen bezeichne, durch die das Ganze zusammengehalten wird, erreiche ich eine durchsichtige Gliederung des Satzes. Ich erwähne dies, weil jetzt Bestrebungen hervortreten, jede Formel in eine Zeile zu pressen. In der Peano'schen Begriffsschrift wird die Einzeiligkeit der Formeln, wie es scheint, grundsätzlich durchgeführt, was mir wie ein muthwilliger Verzicht auf einen Hauptvorzug des Geschriebenen vor dem Gesprochenen vorkommt. Die Bequemlichkeit des Setzers ist denn doch der Güter höchstes nicht. Aus physiologischen Gründen ist eine lange Zeile schwerer zu übersehen und ihre Gliederung schwerer aufzufassen als kürzere unter einander stehende Zeilen, die aus der Brechung jener entstanden sind, falls diese Theilung der Gliederung des Sinnes entspricht. Mir scheint, dass diese Einzeiligkeit der Peano'schen Begriffsschrift noch schwerere Nachtheile im Gefolge gehabt hat. Doch davon später! Das Schliessen geht nun in meiner Begriffsschrift nach

Art einer Rechnung vor sich. Ich meine dies nicht in dem engen Sinne, als ob dabei ein Algorithmus herrschte, gleich oder ähnlich dem des gewöhnlichen Addirens und Multiplicirens, sondern in dem Sinne, dass überhaupt ein Algorithmus da ist, d. h. ein Ganzes von Regeln, die den Uebergang von einem Satze oder von zweien zu einem neuen beherrschen, sodass nichts geschieht, was nicht diesen Regeln gemäss wäre.

Meine Absicht ist also auf lückenlose Strenge der Beweisführung und grösste logische Genauigkeit gerichtet, daneben auf Uebersichtlichkeit und Kürze.

Welchen Zweck Herr Peano mit seiner Begriffsschrift oder mathematischen Logik verfolgt, kann ich weniger bestimmt angeben; ich bin dabei mehr auf Vermuthungen angewiesen. Er hat eine kleine Schrift verfasst: *Notations de logique mathématique. Introduction au formulaire de mathématique publié par la »Rivista di Matematica«*, in der er seine Bezeichnungsweise darlegt, und aus der ich hauptsächlich meine Kenntniss geschöpft habe. Ich werde sie im Folgenden als »*Introduction*« anführen. Soviel glaube ich daraus entnehmen zu können, dass die Untersuchung der Grundlagen der Mathematik dabei nicht den Anstoss gegeben hat und für die Weise der Durchführung bestimmend gewesen ist. Denn gleich im § 2 dieser *Introduction* werden kurze Bezeichnungen der Klassen der ganzen reellen Zahlen, der Rationalzahlen, der Primzahlen u. s. w. eingeführt, wobei alle diese Begriffe als bekannt vorausgesetzt werden. Dasselbe geschieht auch mit den Bedeutungen der Rechnungszeichen ‚$+$', ‚$-$', ‚$\times$' ‚$\sqrt{\ }$' u. s. w., woraus zu entnehmen ist, dass eine Auflösung dieser logischen Gebilde in ihre einfachen Bestandtheile nicht beabsichtigt war. Und da ohne eine solche Auflösung eine Untersuchung, wie die von mir geplante, nicht möglich ist, so wird auch eine solche nicht in der Absicht des Herrn Peano gelegen haben. Wie der oben angeführte Titel angiebt, soll diese Schrift die Einleitung zu einem grössern Unternehmen sein, dem *Formulaire de mathématiques*[1]), zu dem sich mehrere Gelehrte vereinigt haben, und das die Gesammtheit des mathematischen Wissens enthalten soll, verzeichnet in der Peano'schen Begriffsschrift. Hiernach scheint die Absicht mehr auf die Aufspeicherung des Wissens als auf das Beweisen ge-

1) Turin, 1895, Bocca frères; Ch. Clausen.

richtet sein, mehr auf Kürze und Internationalität als auf logische Vollkommenheit. Allerdings sagt Herr Peano im Vorworte zum *Formulaire* S. VI:

»20. *Après avoir écrit une formule en symboles, il convient d'appliquer à la formule quelques transformations de logique. On verra ainsi, s'il est possible de la réduire à une forme plus simple; et l'on reconnaît facilement si la formule n'est pas bien écrite.*

21. *Car les notations de logique ne sont pas seulement une tachigraphie, pour représenter sous une forme abrégée les propositions de mathématiques; elles sont un instrument puissant pour analyser les propositions et les théories.*«

Hiernach hat der Verfasser offenbar auch eine logische Bearbeitung im Auge gehabt; aber mit den Worten »*analyser les propositions et les théories*« scheint er nur die Arbeit gemeint zu haben, die zu thun ist, um einen Satz möglichst einfach in Symbolen hinzuschreiben. Dazu ist allerdings oft eine genauere Fassung und eine Zerlegung in einfachere Bestandtheile erforderlich oder wünschenswerth; aber diese Zerlegung wird nicht bis zu den einfachsten Theilen fortzuschreiten brauchen. Jedenfalls ist hier auf die Strenge der Beweisführung und die logische Vollkommenheit weniger Gewicht gelegt als in meiner Begriffsschrift. Im Vorworte zum *Formulaire* heisst es auf S. VII:

»25. *On peut aussi publier les démonstrations des propositions, ou au moins les liens qui subsistent entre les propositions d'une suite. Mais la transformation en symboles d'une démonstration est en général plus difficile que l'énonciation d'un théorème.*«

Dass die Beweisführung hier mehr im Hintergrunde steht, geht auch aus dem Fehlen der Regeln für das Schliessen hervor; denn die Formeln im 1. Theile des *Formulaire* können keinen Ersatz dafür bieten. Es handelt sich eben darum, wie man aus einer dieser Formeln oder aus zweien eine neue bildet.

Die logische Vollkommenheit vermisse ich besonders in der Weise des Definirens. Dass dasselbe Urzeichen mehrfach erklärt wird, ist fast die Regel. Sehr häufig sind auch die bedingten Definitionen. Ich verlange dagegen, dass jedes Zeichen nur einmal und vollständig, nicht mehrfach und stückweise definirt werde, dass der definirende Ausdruck mit dem definirten unbedingt in der Bedeutung übereinstimme, dass die Rechtmässigkeit einer Definition nicht von einem zu beweisenden Satze abhängig sei. Das ist immer der Fall, wenn dasselbe Zeichen mehrfach erklärt wird; denn es ist dann der Nachweis erforderlich, dass diese Erklärungen vereinbar seien. Davon bemerke ich jedoch bei Herrn Peano keine Spur.

Wenn nun auch das Streben nach logischer Genauigkeit hier weniger hervortritt als in meiner Begriffsschrift, so ist es doch vorhanden und hat mehrfach zur Bestätigung meiner Aufstellungen geführt, was für mich besonders werthvoll ist, wo fast alle Logiker anderer Meinung zu sein scheinen. Ein solcher Fall liegt vor bei den particulär bejahenden Sätzen. Hier beruht die Peano'sche Bezeichnung auf derselben Auffassung, die auch meiner zu Grunde liegt, dass wir hier nämlich die Verneinung der Allgemeinheit einer Verneinung haben (*Introd.* § 9 am Ende), während die meisten Logiker in dem Satze »einige Zahlen sind Primzahlen«, durch die Sprache verleitet, die Worte »einige Zahlen« zusammenfassen und deren Bedeutung als logisches Subject behandeln, von dem die Eigenschaft, Primzahl zu sein, ebenso ausgesagt werde, wie etwa von der Zahl 2 in dem Satze »Zwei ist eine Primzahl«. Und wenn man nun nach der Bedeutung der Wortverbindung »einige Zahlen« fragt, bekommt man etwas zu hören wie »ein Theil des Inbegriffes aller Zahlen« oder »ein Theil aller Zahlen«, worauf man mit Recht fragen kann: welcher Theil? Und hierauf ist keine Antwort möglich, die für alle Sätze zuträfe, in denen diese Worte als grammatisches Subject vorkommen. So wären sie denn unendlich vieldeutig und also logisch durchaus verwerflich. Sie sind in Wahrheit gar nicht zusammenzufassen, und nach der Bedeutung dieser Verbindung darf gar nicht gefragt werden. Wir haben hier ein grammatisches Pseudosubject ähnlich wie »alle Menschen«, »kein Mensch«, »nichts«, Bildungen, in denen sich die Sprache gefallen zu haben scheint, um die Logiker irre zu führen. Auch Herr E. Schröder ist in seiner Algebra der Logik in diese Schlinge gefallen und selbst Herr Peano hat sie nicht ganz vermieden, indem er im § 33 der *Introduction* Bezeichnungen einführt, die ganz den Wortausdrücken nachgebildet und daher logisch falsch sind. Glücklicherweise macht er jedoch, wie es scheint, keinen Gebrauch davon. Den particulären Sätzen sind die Existentialsätze mit »es giebt« nahe verwandt. Man vergleiche die Sätze »es giebt Zahlen, die Primzahlen sind« und »einige Zahlen sind Primzahlen«. Diese Existenz wird noch oft mit Wirklichkeit und Objectivität vermengt. Auch hier weist die Bezeichnung des Herrn Peano auf die richtige Auffassung hin. Man vergleiche die *Introduction* S. 13 unten[1]).

Für meinen Satz, dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthält, kann ich eine Bestätigung in der Peanoschen Schreibweise

,num u'

sehen (*Introduction* § 19), wobei ,u' eine Klasse andeuten soll. Freilich kommt dabei alles darauf an, wie das Wort »Klasse« zu verstehen ist. Wenn man mit Herrn E. Schröder Klasse als collective Vereinigung auffasste, sodass die Beziehung einer Klasse zu einem ihr angehörenden Gegenstande die des Ganzen zu einem Theile wäre, so stimmte jene Bezeichnung allerdings nicht zu meiner Lehre. Welche Auffassung nun Herr Peano vertritt, kann zweifelhaft sein. Die Klasse erscheint bei ihm zunächst wie bei Boole als etwas Ursprüngliches, was nicht weiter zurückzuführen ist. Aber im § 17 der *Introduction* finde ich eine Bezeichnung ,$\overline{x\varepsilon}\, p_x$' einer Klasse von Gegenständen, die einer gewissen Bedingung genügen, gewisse Eigenschaften haben. Die Klasse erscheint hier also dem Begriffe gegenüber als das Abgeleitete, sie erscheint als Begriffsumfang, und damit kann ich mich ganz einverstanden erklären, wiewohl mir die Schreibweise ,$\overline{x\varepsilon}\, p_x$' nicht sehr gefällt.

In einem andern Falle ist meine Uebereinstimmung mit Herrn Peano mehr versteckt, indem es erst eines Schlusses bedarf, um sie deutlich hervortreten zu lassen. Dies betrifft meine Lehre vom Wahren und Falschen, nach der alle wahren Sätze dasselbe bedeuten, nämlich das Wahre, und nach der auch alle falschen Sätze dasselbe bedeuten: das Falsche. Da diese Lehre auf den ersten Blick etwas Befremdliches hat und in Gefahr ist, ohne genauere Prüfung kurzer Hand abgethan zu werden, so hat die Bestätigung durch Herrn Peano besondern Werth für mich, obgleich sich bei ihm wohl nur die Prämissen dazu vorfinden. Er führt nämlich (*Introduction* § 9) das Zeichen »Λ« ein, indem er sagt: »*Λ représente l'absurde*«. Ich sage dafür: »das Falsche«. Der Satz, dass 2 nicht grösser ist als 3, wird hiermit so geschrieben:

$$(2 > 3) = \Lambda$$

---

1) Die Existenzfragen spielen in der Mathematik eine gewisse Rolle. Darum ist es nicht einerlei, wie man sie versteht.

Wir sehen hieraus, dass alle falschen Sätze nach Herrn Peano dasselbe bedeuten müssen, sofern wenigstens das Gleichheitszeichen hier völliges Zusammenfallen, Identität bezeichnen soll. Nun heisst es in der That im § 40 der *Introduction*:

»*L'égalité* $a = b$ *a toujours la même signification: a et b sont identiques, ou a et b sont deux noms donnés à la même chose.*«

Danach haben wir in ‚$2 > 3$', ‚$7^2 = 0$', ‚$\varLambda$' Zeichen für dieselbe Sache; d. h.: die Bedeutungen dieser Zeichen fallen zusammen. Da nun Herr Peano ebenso zwischen je zwei wahren Sätzen das Gleichheitszeichen zulässt, so scheint er hiermit völlig meiner oben ausgesprochenen Lehre beizustimmen. Wenn er sie dennoch, soweit ich sehe, nirgends ausspricht, so hat ihn wahrscheinlich das Befremdliche meines Satzes davon abgehalten. Und ich bin nicht einmal sicher, ob er den Schluss aus seinen Prämissen billigt. Die Uebereinstimmung mit meiner Lehre ist darum nicht minder beachtenswerth, weil sie sich trotz dieses Widerstrebens geltend macht. Der Einwurf liegt ja nahe, dass wahre Sätze die verschiedensten Gedanken ausdrücken können. Die Sätze ‚$2 \cdot 2 = 4$' und ‚$3 > 2$' können nach Herrn Peano durch das Gleichheitszeichen verbunden werden: »$(2 \cdot 2 = 4) = (3 > 2)$«, und doch wird jeder zugestehen, dass sie gar nicht dasselbe besagen. Diese Schwierigkeit würde ohne meine Unterscheidung von Sinn und Bedeutung unüberwindlich sein. Daher wird diese Unterscheidung mittelbar durch das bekräftigt, was meine Lehre vom Wahren und Falschen stützt. Folgendes möge zur Erläuterung dienen. Wir bezeichnen zuweilen mit verschiedenen Namen denselben Gegenstand, ohne es zu wissen. Wir sprechen z. B. vom Kometen des Astronomen X und vom Kometen des Astronomen Y und überzeugen uns erst nachträglich, dass wir mit beiden Bezeichnungen denselben Himmelskörper benannt haben. Ich sage in solchem Falle: beide Bezeichnungen haben zwar dieselbe Bedeutung, bezeichnen oder bedeuten oder benennen dasselbe, aber sie haben verschiedenen Sinn, weil es einer besonderen Erkenntnissthat bedarf, um das Zusammenfallen einzusehen. So sage ich auch von den Bezeichnungen

$$‚3 + 1', \ ‚1 + 3', \ ‚2 + 2', \ ‚2 \cdot 2',$$

dass sie dasselbe *bedeuten*, aber verschiedenen *Sinn* haben, oder Verschiedenes *ausdrücken*. Wenn man nun in einer Zeichenverbindung ‚$\Phi(\Delta)$', die eine Bedeutung hat, ein Zeichen ‚Δ' durch ein anderes ‚Δ' von derselben Bedeutung ersetzt, so wird die neue Zeichenverbindung ‚$\Phi(\Delta)$' offenbar dasselbe bedeuten wie die ursprüngliche ‚$\Phi(\Delta)$'. Wenn aber der Sinn von ‚Δ' vom Sinne von ‚Δ' abweicht, so wird im Allgemeinen auch der Sinn von ‚$\Phi(\Delta)$' vom Sinne von ‚$\Phi(\Delta)$' abweichen. Wenden wir dies auf den Satz ‚$3 + 1 = 2 \cdot 2$' an, indem wir für ‚$3 + 1$' der Reihe nach die gleichbedeutenden Zeichen ‚$1 + 3$', ‚$2 + 2$', ‚$2 \cdot 2$' einsetzen. So erhalten wir die Sätze

‚$1 + 3 = 2 \cdot 2$'
‚$2 + 2 = 2 \cdot 2$'
‚$2 \cdot 2 = 2 \cdot 2$'

die alle dieselbe *Bedeutung* haben müssen, und diese nenne ich *das Wahre*, während sie Verschiedenes *ausdrücken*. Den Sinn eines Satzes nenne ich einen Gedanken. Diese Sätze drücken also verschiedene Gedanken aus. Wenn ein Satz überhaupt eine Bedeutung hat, so ist diese entweder das Wahre oder das Falsche. Es kommen aber in Dichtung und Sage auch Sätze vor, die keine Bedeutung, wohl aber einen Sinn haben, wie z. B. »die Skylla hat sechs Köpfe«. Dieser Satz ist weder wahr noch falsch, weil zu dem einen wie zu dem andern erforderlich wäre, dass er eine Bedeutung hätte; eine solche ist aber nicht vorhanden, weil der Eigenname ‚Skylla' nichts bezeichnet. In der Dichtung begnügt man sich eben mit dem Sinne, während die Wissenschaft auch nach der Bedeutung fragt[1]).

Ich gehe nun etwas näher auf das Wesen der Peano'schen Begriffsschrift ein. Sie stellt sich dar als ein Abkömmling von Boole's rechnender Logik, aber — man könnte sagen — als ein aus der Art geschlagener. Ich meine das nicht im tadelnden Sinne; im Gegentheile halte ich die Abweichungen von Boole im Ganzen für Verbesserungen. Aber der Grundgedanke ist ganz verändert. Boole's Logik ist Logik und nichts als dies. Nur auf die logische Form kommt es ihr an, gar nicht darauf, einen Inhalt in diese Form zu giessen, und das grade ist die Absicht des Herrn Peano. In dieser Hinsicht steht sein Unternehmen meiner Begriffsschrift näher als der Logik von Boole. In andrer Hinsicht kann man auch eine engere Verwandtschaft

1) Man vergleiche hierzu meinen Aufsatz über Sinn und Bedeutung im 100. Bd. der Zeitschrift f. Philos. u. phil. Kritik.

zwischen der Boole'schen Logik und meiner Begriffsschrift anerkennen, sofern nämlich der Hauptnachdruck auf das Schliessen fällt, was in der Peano'schen rechnenden Logik weniger betont wird. Mit Leibnizischen Ausdrücken kann man sagen: Boole's Logik ist ein *calculus ratiocinator*, aber keine *lingua characterica*, die Peano'sche mathematische Logik ist in der Hauptsache eine *lingua characterica*, daneben auch ein *calculus ratiocinator*, während meine Begriffsschrift beides mit gleichem Nachdrucke sein soll. Ganz unverändert durfte Herr Peano die Boole'sche Bezeichnungsweise nicht lassen; denn sie war zur Aufnahme eines Inhalts und besonders eines mathematischen, wenig geeignet. Störend scheint mir dabei nicht am wenigsten das Zerfallen in die Rechnung mit Klassen und in die Rechnung mit Urtheilen [1]), wie man zu sagen pflegt. Und diese Scheidung ist bei Herrn Peano schon weniger scharf. Das Zeichen ‚ε' z. B., das in ‚$A \varepsilon B$' einen Gegenstand A einer Klasse B zuweist, und das ich für eine wesentliche Bereicherung von Boole's Bezeichnungen ansehe, theilt nicht die Eigenthümlichkeit der andern Urzeichen, in doppelter Weise, man könnte fast sagen, in doppelter Bedeutung gebraucht zu werden, je nachdem es in der Rechnung mit Klassen oder in der mit Urtheilen vorkommt. Man vergleiche dazu *Introduction* § 9: »*on adopte entre propositions les signes déjà expliqués entre classes avec la signification suivante.*« Diese Zwiefachheit kann mir nun freilich wenig gefallen. Dagegen spricht derselbe Grund, der Herrn Peano abgehalten hat, das Pluszeichen nicht nur als arithmetisches, sondern auch wie Boole als logisches Zeichen zu gebrauchen [2]). Wenn daraus auch vielleicht keine Fehler entstehen, so leidet doch die Verständlichkeit der Formeln darunter, wenn man sich immer erst besinnen muss, wie ein Zeichen verstanden werden soll. Besonders störend ist es, wenn dasselbe Zeichen in derselben Formel mehrfach in verschiedener Gebrauchsweise vorkommt.

Solche zwiefache Gebrauchsweise haben wir auch bei dem Zeichen ‚$\supset$', das in der Rechnung mit Urtheilen Deductionszeichen genannt werden kann. Nur als solches mag es hier

---

1) Herr Peano sagt »*proposition*«, ich würde sagen »Wahrheitswerth«, indem ich das Wort »Satz« im Sinne einer Zeichenverbindung gebrauche, deren Sinn ein Gedanke und deren Bedeutung ein Wahrheitswerth — das Wahre oder das Falsche — ist.

2) Man vergleiche *Introduction* S. 28 oben.

etwas näher betrachtet werden. Was bedeutet also die Zeichenverbindung ‚$a \supset b$', wenn a und b Sätze vorstellen? Herr Peano antwortet darauf mit drei verschiedenen Erklärungen[1]). Diese Dreiheit scheint mir ein Ueberfluss und dieser Ueberfluss scheint mir ein Mangel zu sein. Denn es erheben sich sofort Fragen nach den Verhältnissen dieser Erklärungen zu einander: sind sie mit einander verträglich? ist die eine Folge einer andern? Sehen wir uns diese Erklärungen der Reihe nach an! In § 9 der *Introduction* heisst es: »*$a \supset b$ signifie ‚de la a on déduit la b' ou ‚la b est conséquence de la a'.*« Diese Erklärung befriedigt wenig, da sie uns gleich bei einigen Beispielen im Stiche lässt. Betrachten wir etwa

$$‚(2^2 = 4) \supset (3 + 7 = 10)'$$

Kann man sagen, dass man den Satz ‚$3 + 7 = 10$' ableite aus dem Satze ‚$2^2 = 4$'? Schwerlich! Ist ‚$3 + 7 = 10$' Folge von ‚$2^2 = 4$'? Es scheint nicht so; und doch ist hier das Deductionszeichen nach der Meinung des Herrn Peano richtig gesetzt, wie wir sehen werden. Betrachten wir ferner das Beispiel

$$‚(2 > 3) \supset (7^2 = 0)'$$

Man wird nicht sagen wollen, dass man den Satz ‚$7^2 = 0$' aus ‚$2 > 3$' ableite; denn man leitet ihn gar nicht ab, da er falsch ist. Auch wird man ‚$7^2 = 0$' nicht wohl Folge von ‚$2 > 3$' nennen. Nach unserer Erklärung sollte man also denken, dass das Deductionszeichen nicht gesetzt werden dürfte; aber die dritte Peano'sche Erklärung wird uns eines Bessern belehren.

Wenden wir uns zunächst zur zweiten! In § 14 der *Introduction* heist es:

»*Si a et b sont des propositions contenant des lettres indéterminées x, y, ... c'est-à-dire, sont des conditions entre ces lettres, la déduction $a \supset b$ signifie: ‚quelles que soient les valeurs de x, y, ... pourvu qu'elles satisfassent à la condition a, elles satisferont aussi à la condition b'.*«

Diese Erklärung bezieht sich nur auf den Fall, dass sogenannte unbestimmte Buchstaben vorkommen. Den entgegengesetzten sucht Herr Peano im § 15 auf diesen zurückzuführen,

1) Nehmen wir die Erklärung für die Verwendung des Zeichens in der Klassenrechnung hinzu, so haben wir vier Erklärungen.

indem er daran erinnert, dass man in der Analysis auch solche Ausdrücke als Functionen von x betrachte, die x nicht enthalten, oder aus denen man x wegheben könne. Demgemäss sagt er:

»*Si a et b sont des propositions qui ne contiennent pas de lettres indéterminées, la déduction $a \supset b$ signifie toujours ‚si a est vraie, b est aussi vraie'.*

Danach würde ‚$(2 > 3) \supset (7^2 = 0)$' wiederzugeben sein: »wenn es wahr ist, dass 2 grösser ist als 3, so ist es auch wahr, dass das Quadrat von 7 0 ist«, womit man jedoch kaum einen Sinn verbinden wird. Es ist daher nöthig, dass Herr Peano fortfährt:

»*c'est-à-dire, ou a est vraie et b est vraie, ou a est fausse et b est vraie ou a est fausse et b est fausse, et l'on exclut le seul cas ‚a est vraie et b est fausse'.*«

Dies ist die dritte Erklärung. Sie stimmt mit der überein, die ich im Jahre 1879 in meiner Begriffsschrift für das entsprechende Zeichen gegeben habe. Wir sehen daraus, dass in der That in unsern Beispielen ‚$(2^2 = 4) \supset (3 + 7 = 10)$' und ‚$(2 > 3) \supset (7^2 = 0)$' das Deductionszeichen richtig gesetzt ist.

Wie ist nun aber der Fall aufzufassen, wo unbestimmte Buchstaben vorkommen, wie Herr Peano sagt, oder unbestimmt andeutende, wie ich lieber sagen möchte? Wir nehmen als Beispiel den Satz

$$»(x > 2) \supset (x^2 > 2)«$$

den wir wohl übersetzen können: »wenn etwas grösser ist als 2, so ist auch sein Quadrat grösser als 2«. Wir haben hier ein hypothetisches Urtheil nach dem Sprachgebrauche der Logiker; und hierbei ist zweierlei zu unterscheiden: die Bedeutung des Zeichens ‚$\supset$' und die Allgemeinheit, die mit dem unbestimmt andeutenden Buchstaben ‚x' bezeichnet wird. In der vorhin angeführten zweiten Peano'schen Erklärung ist beides mit einander vermischt und das ist ein methodischer Fehler. Richtig wird es sein, erstens die Bedeutung des Deductionszeichens festzustellen und zweitens ganz unabhängig davon zu erklären, wie die Allgemeinheit mit unbestimmt andeutenden Buchstaben bezeichnet wird. Aus beiden zusammen muss sich dann von selbst ergeben, was eine Deduction besagt, wenn links und rechts unbestimmt andeutende Buchstaben vorkommen. Versuchen wir das in folgender Weise! Es stelle ‚$\Phi(x)$' einen Satz vor, in dem „x' vorkommt. Dann setzen wir fest, dass durch das Vorkommen des „x' gesagt sein solle, der Satz sei wahr, welche Bedeutung wir auch dem „x' beilegen mögen. In unserm Falle entspricht dem „$\Phi(x)$'

$$„(x > 2) \supset (x^2 > 2)'$$

In der That, geben wir dem „x' der Reihe nach die Bedeutung 1, 2, 3, so erhalten wir zuerst

$$„(1 > 2 \supset (1^2 > 2)'$$

was wahr ist, weil beide Seiten der Deduction falsch sind. Wir erhalten zweitens

$$„(2 > 2) \supset (2^2 > 2)'$$

was wahr ist, weil die linke Seite falsch, die rechte aber wahr ist. Drittens erhalten wir

$$„(3 > 2) \supset (3^2 > 2)'$$

was wahr ist, weil beide Seiten wahr sind. Was wir auch für „x' setzen mögen, nie tritt der Fall ein, dass die linke Seite der Deduction wahr und die rechte falsch ist; und das ist es, was wir sagen wollen. Man kann noch fragen: was wird aus der Sache, wenn gar kein Zahlzeichen, sondern etwa das Zeichen der Sonne „$\odot$' eingesetzt wird? Gewiss ist auch dieser Fall in Betracht zu ziehen. Der Satz „$\odot > 2$' ist falsch, weil die Sonne keine Zahl ist und nur Zahlen grösser als 2 sein können. Danach wäre der Satz

$$„(\odot > 2) \supset (\odot^2 > 2)'$$

wahr, einerlei ob die rechte Seite wahr oder falsch ist; aber eins von beiden müsste sie sein. Nach den üblichen Erklärungen der Zeichenverbindung „x^2' hat sie jedoch keine Bedeutung. Man muss hierbei also eine solche Erklärung von „x^2' voraussetzen, bei welcher sich immer eine Bedeutung ergiebt, welches Zeichen auch für „x' eingesetzt werden möge, wenn nur dieses selbst eine Bedeutung hat, nämlich einen Gegenstand bezeichnet. Hieraus erhellt die Nothwendigkeit meiner Forderung, die Functionen so zu erklären, dass sie für jedes Argument einen Werth erhalten. In unserm Falle könnte man z. B. festsetzen, dass die Bedeutung von „x^2' mit der von „x' zusammenfallen solle, wenn „x' einen Gegenstand bedeutet, der keine Zahl ist. Was man festsetzt, ist verhältnissmässig gleichgültig, wesentlich ist aber, dass für jede Bedeutung des ‚x' dem ‚x^2' eine Bedeutung gesichert werde. Herr Peano scheint die Nothwendigkeit dieser Forderung nicht anzuerkennen.

Auch auf ein anderes Bedenken muss etwas näher eingegangen werden. Wir haben die ganze Deduction

$$‚(x > 2) \supset (x^2 > 2)'$$

als dem ‚$\Phi(x)$' entsprechend aufgefasst; aber schon die linke Seite für sich ist ein Satz, der ‚x' enthält, und ebenso die rechte. Wenden wir nun auf ‚$x > 2$' unsere Erklärung der Allgemeinheitsbezeichnung an, so wird damit gesagt: ‚jeder Gegenstand ist grösser als 2', was offenbar falsch ist. Aehnliches haben wir auf der rechten Seite. Dadurch würde die ganze Deduction zwar wieder wahr, erhielte aber einen ganz andern Sinn: wenn jeder Gegenstand grösser als 2 wäre, so wäre das Quadrat jedes Gegenstandes grösser als 2.[1]) Wir sehen hieraus, dass noch eine Bestimmung über die Abgrenzung des Gebietes der Allgemeinheit getroffen werden muss. Das hat auch Herr Peano eingesehen. Ich will an einem Beispiele klar zu machen suchen, wie er dieser Anforderung genügt. Es mögen in

$$‚(\Phi(x) \supset \Psi(x, y)) \supset X(y)'$$

‚$\Phi(x)$', ‚$\Psi(x, y)$', ‚$X(y)$' Sätze vorstellen, in denen die in Klammern stehenden Buchstaben ‚x' und ‚y' vorkommen. Wir haben dann eine Deduction, deren linke Seite wieder ein Deductionszeichen enthält. Wenn nun Herr Peano die mittelst ‚x' zu bezeichnende Allgemeinheit auf die linke Seite des Hauptdeductionszeichens beschränken will, bringt er ‚x' als Index an dem Nebendeductionszeichen an, wie folgt:

$$‚(\Phi(x) \supset_x \Psi(x, y)) \supset X(y)'$$

Um anzuzeigen, dass die Allgemeinheit in Hinsicht auf ‚y' sich auf den Inhalt der ganzen Formel erstrecken solle, bringt er ‚y' als Index an dem Hauptdeductionszeichen an:

$$‚(\Phi(x) \supset_x \Psi(x, y)) \supset_y X(y)'$$

Wenn dies aber eine selbständige Formel ist, nicht Theil einer andern, so lässt er den Index ‚y' auch weg. Diese Indices

1) Auch hier muss wieder vorausgesetzt werden, dass die Worte »das Quadrat von x« oder die Zeichenverbindung »x^2« eine Bedeutung habe, welchen Gegenstand man auch unter »x« verstehen möge.

kommen ausser an dem Deductionszeichen auch an andern Beziehungszeichen, z. B. an dem Gleichheitszeichen vor. Ich finde diese Weise nicht besonders glücklich, weil dabei die Bezeichnung der Allgemeinheit mit der einer Beziehung verquickt wird, mit der sie nichts zu thun hat. Daraus entsteht der Nachtheil, dass man genöthigt werden kann, ein Beziehungszeichen eigens zu dem Zwecke in die Formel einzuführen, um die Indices anbringen zu können. Ferner erhält man dadurch neue Zeichen, nämlich neben den einfachen Beziehungszeichen solche mit einem oder mehren Indices, und diese müssen besonders erklärt werden. Herr Peano sagt im § 18 der *Introduction*:

»*Les indices au signe* $\supset$ *satisfont à des lois qu'on n'a pas encore suffisamment étudiées. Cette théorie déjà abstruse par elle-même, le devient encore plus si l'on n'accompagne pas ces règles par des exemples. Le mieux à faire, c'est d'examiner le rôle de ces signes et leur transformation dans les formules et les démonstrations de Mathématique.*«

In der That werden nur Beispiele gegeben. Wir sehen dabei, dass die Indices von einem Beziehungszeichen auf ein anderes übertragen werden, ohne dass die Gesetze angegeben wären, nach denen dies geschieht. In dieser Hinsicht ist meine Begriffsschrift vom Jahre 1879 der Peano'schen überlegen. Ich habe für meine Bezeichnung der Allgemeinheit schon damals alle Gesetze angegeben, die man braucht, sodass nichts Grundlegendes dabei zu untersuchen übrig bleibt. Diese Gesetze sind gering an Zahl, und ich wüsste auch nicht, warum sie abstrus zu nennen wären. Wenn dies in der Peano'schen Begriffsschrift anders ist, so liegt das an der unzweckmässigen Bezeichnung und diese hat wohl ihren tiefern Grund in der oben erwähnten Einzeiligkeit. Hierdurch wird es schwieriger zu machen, dass ein Zeichen seine Kraft auf einen Satz erstrecke. Es würden sich dabei wohl die Klammern zu sehr häufen. Und diese Schwierigkeit scheint auch durch die sinnreiche Punktirungsmethode nicht ganz überwunden zu sein, deren sich Herr Peano statt der Klammern zur Gliederung des Satzes bedient. Auf denselben Grund ist es wohl zurückzuführen, dass auch das Zeichen der Verneinung oft mit einem Beziehungszeichen verschmolzen wird, wodurch ebenfalls die Anzahl der nöthigen Festsetzungen vermehrt wird. Immerhin ist es Boole gegenüber als grosser Fortschritt anzusehen, dass hier überhaupt eine Allgemeinheitsbezeichnung da ist, und dass sie es möglich macht, die Allgemeinheit auf einen bestimmten Theil des Ganzen einzuschränken.

Ich füge einige Bemerkungen über meine Allgemeinheitsbezeichnung hinzu. Bei der vorhin betrachteten Formel

$$„(2 > 3) \supset (7^2 = 0)“$$

wird man zunächst ein Gefühl des Befremdens empfinden, das durch den ungewöhnlichen Gebrauch der Zeichen „$=$“ und „$>$“ veranlasst wird. Gewöhnlich nämlich dient ein solches Zeichen zu zwei verschiedenen Zwecken, indem es erstens eine Beziehung bezeichnen und zweitens das Stattfinden dieser Beziehung zwischen gewissen Gegenständen behaupten soll. Danach scheint es so, als ob in jener Formel etwas Falsches ($2 > 3$, $7^2 = 0$) behauptet werden solle, was gar nicht der Fall ist. Wir müssen nämlich den Beziehungszeichen die behauptende Kraft nehmen, die man unwillkürlich hineinlegt. Und das gilt ebenso für meine wie für die Peano'sche Begriffsschrift. Nun wollen wir aber doch zuweilen etwas behaupten, und ich habe deshalb ein eignes Zeichen mit behauptender Kraft eingeführt: den Urtheilsstrich. Dies ist eine Bethätigung meines Strebens, jeden sachlichen Unterschied sich in der Bezeichnung abspiegeln zu lassen. Mit diesem Urtheilsstriche nun schliesse ich einen Satz ab, sodass jede Bedingung, die zur Geltung nöthig ist, auch wirklich darin vorkommt; und den Inhalt des so abgeschlossenen Satzes behaupte ich mit demselben Zeichen als wahr. Herr Peano hat kein solches Zeichen, sondern er gebraucht seine Beziehungszeichen bald mit bald ohne behauptende Kraft, und zwar hat stets das Hauptbeziehungszeichen behauptende Kraft. Daraus folgt für Herrn Peano die Unmöglichkeit, einen Satz, der nicht als Theil in einem andern vorkommt, hinzuschreiben, ohne ihn als wahr hinzustellen. Auch entbehren dadurch seine Sätze der Geschlossenheit, und es finden sich nicht selten Bedingungen von der Hauptformel getrennt vor. Man sieht es so einem Peano'schen Satze nicht an, ob er vollständig ist.

Wenn sich nun das Gebiet der Allgemeinheit auf den ganzen durch den Urtheilsstrich abgeschlossenen Satz erstrecken soll, so bediene ich mich in der Regel der lateinischen Buchstaben, im Wesentlichen ebenso wie Herr Peano da, wo er keine Indices anbringt; nur sondere ich die Functionsbuchstaben von den Gegenstandsbuchstaben und bediene mich jener nur, um Functionen, dieser nur, um Gegenstände anzudeuten, gemäss meiner scharfen Unterscheidung von Functionen und Gegenständen, die Herr PEANO nicht kennt. Wenn aber die Allgemeinheit sich nur auf einen Theil des Satzes erstrecken soll, nehme ich deutsche Buchstaben, indem ich zugleich das Gebiet dieser Allgemeinheit abgrenze in einer Weise, die ich zuletzt im § 8 meiner Grundgesetze der Arithmetik angegeben habe. Dies entspricht der Peano'schen Bezeichnungsweise mit Index am Beziehungszeichen. Ich hätte hier ebenso wie Herr PEANO statt der deutschen lateinische Buchstaben wählen können. Aber für das Schliessen ist die Allgemeinheit, die sich auf den Inhalt des ganzen Satzes erstreckt, von wesentlich anderer Bedeutsamkeit als diejenige, deren Gebiet nur einen Theil des Satzes ausmacht. Daher trägt es zur Uebersichtlichkeit sehr bei, dass das Auge an dem verschiedenen Typus der lateinischen und deutschen Buchstaben sofort diese verschiedene Rolle erkennt. Eine ähnliche Verschiedenheit besteht in der Gebrauchsweise der Buchstaben ‚α' und ‚x' in der Formel

$$‚\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\alpha}\, d\alpha' ,$$

wobei α eigentlich als Rechnungszeichen dient. Auch Herr PEANO erkennt diesen Unterschied an, ohne ihm jedoch durch die Wahl verschiedenartiger Buchstaben Rechnung zu tragen. Man vergleiche hierzu *Introduction* § 13, und *Formulaire, préface* S. V unter 16 und S. VI unter 17, wo von *lettres apparentes* und *variables apparentes* die Rede ist.

Indem ich mir vorbehalte, unsere Begriffsschriften in Rücksicht auf andere Punkte später einmal zu vergleichen, bemerke ich nur noch, dass die Peano'sche Bezeichnungsweise ohne Zweifel für den Setzer bequemer ist und in vielen Fällen auch weniger Raum in Anspruch nimmt als meine eigene, dass diese Vortheile mir aber durch geringere Uebersichtlichkeit und logische Mängel zu theuer erkauft scheinen, wenigstens für die von mir verfolgten Zwecke.

SITZUNG VOM 27. JULI 1896.

Vorträge hielten:

1. Herr **W. Pfeffer**, o. M.: Ueber die lockere Bindung von Sauerstoff in gewissen Bacterien.
2. **Derselbe**: Ueber die Steigerung der Athmung und Wärmeproduction nach Verletzung lebenskräftiger Pflanzen.
3. Herr **Sophus Lie**, o. M.: Zur allgemeinen Transformationstheorie.
4. **Derselbe**: Ueber Pfaff'sche Ausdrücke und Gleichungen.
5. Herr A. Mayer, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung des Herrn **F. Engel**, a.o. M., über das Pfaff'sche Problem.
6. Herr **P. Drude**, a.o. M.: Ueber elektrische Anomalie und chemische Constitution.

Wilh. Pfeffer, o. M., berichtet *über die lockere Bindung von Sauerstoff in gewissen Bacterien*, welche von Herrn Ewart[1]) im botanischen Institut untersucht wurde.

Zumeist wird in den Pflanzen kein Sauerstoff durch lockere Bindung aufgespeichert, wie sich daraus ergiebt, dass die Protoplasmaströmung nach dem Verdrängen des Sauerstoffs durch Wasserstoff gewöhnlich sehr schnell zum Stillstand kommt. Auch ist mit Hilfe der Bacterienmethode zu erweisen, dass mit dem Verdunkeln sehr bald die Ausgabe von Sauerstoff aus assimilirenden grünen Zellen aufhört. Doch besitzen einzelne Bacterien, in analoger Weise wie das Blut (Hämoglobin) die Fähigkeit, ein erhebliches Quantum von Sauerstoff in der Art locker zu binden, dass die so aufgespeicherte Menge allmählich an einen sauerstofffreien Raum abgegeben wird. Bis dahin wurde diese Eigenschaft nur bei bestimmten Farbstoffbacterien beobachtet. Verhältnissmässig viel Sauerstoff fixiren u. A. Bacterium brunneum, B. cinnabareum, Micrococcus agilis, Staphylococcus citreus, Bacillus janthinus, während diese Fähigkeit u. a. bei

1) Die ausführlichen Mittheilungen wird eine Arbeit des Herrn Dr. Ewart bringen.

Diplococcus roseus, Sarcina rosea und lutea viel schwächer ausgebildet ist[1]).

Vermöge dieser Sauerstoffabgabe bleiben Bacterium termo, Spirillum undula, tenue etc. längere Zeit in Bewegung, wenn sie mit einer der genannten Arten unter Deckglas gebracht sind und der Zutritt der Luft abgeschlossen ist. Diese Beobachtung führte zunächst zum näherem Studium des Gegenstandes, doch wurde fernerhin die so überaus empfindliche Bacterienmethode zumeist in folgender Weise zum Nachweis der Sauerstoffausgabe verwandt. In dem kleinen Hängetropfen eines Deckglases, welches mit Vaselin luftdicht auf eine kleine Gaskammer gesetzt wurde, kam das als Reagens auf Sauerstoff benutzte Bacterium (Formen des Bacterium termo etc.), während auf den Boden der Kammer etwas von dem zu prüfenden Objecte gebracht wurde. Durch die Zu- und Ableitungsröhre wurde nun ein Strom von Wasserstoff getrieben und so das Bacterium termo bewegungslos gemacht. Dieser Zustand verblieb nach Sistirung des Wasserstoffstromes, sofern das eingebrachte Object keinen Sauerstoff abgab. Da aber die schon genannten Bacterien das Reagensbacterium nach Wiederholung der Wasserstoffdurchleitung immer wieder in Bewegung brachten, so war damit erwiesen, dass dieselben einen gasförmigen Körper abgaben, der durch den Luftraum der Kammer dem Hängetropfen zugeführt wurde und der ganzen Sachlage nach nur Sauerstoff sein konnte. Mit dieser Methode ist übrigens auch zu zeigen, dass Hämoglobin, Holzkohle etc. in analoger Weise Sauerstoff abgeben und bei fortgesetzter Wasserstoffdurchleitung lässt sich die Zeit ermitteln, in welcher die Gesammtmenge des locker gebundenen Sauerstoffs abgegeben wird.

Diese Sauerstoffabgabe wird mit der Zeit schwächer und schwächer, kann aber bei unseren Bacterien in Zimmertemperatur noch nach einigen Stunden, ja zuweilen selbst nach zwölf Stunden merklich sein. Noch länger hält diese Abgabe von Sauerstoff bei Hämoglobin an. Wie dieses nehmen auch die Bacterien an der Luft von Neuem Sauerstoff auf, und sind dann befähigt, im Wasserstoff wiederum Sauerstoff auszugeben. Diese

---

1) Die Nomenclatur nach Lehmann und Neumann, Atlas und Grundriss der Bacteriologie 1896. Ein Theil der Bacterien stammt übrigens aus dem von Lehmann dirigirten hygienischen Institut in Würzburg.

allmähliche Abspaltung geht, ebenso wie beim Hämoglobin, im Licht und im Dunkeln von statten und wird naturgemäss durch Erhöhung der Temperatur beschleunigt. Gleichzeitig mit dem Sauerstoff geben die Bacter en Kohlensäure aus, wie sich schon aus der Entfärbung einer Phenolphtaleinlösung ergiebt, welche an Stelle des Reagensbacteriums in den Hängetropfen gebracht ist. Ausserdem wurde auch makrochemisch die gleichzeitige Entwicklung von Kohlensäure festgestellt.

Ferner wurde das Vorhandensein des locker gebundenen Sauerstoffs makrochemisch nachgewiesen, indem aus einer flüssigen Cultur die Luft mittelst Wasserstoff ausgetrieben, das Culturgefässchen abgeschmolzen und dann einige Zeit auf 100° C. erhitzt wurde. Das Gasgemisch in dem kleinen Luftraum enthielt nunmehr viel, unter Umständen bis 30 % Sauerstoff, während bei gleicher Operation mit anderen Bacterien keine Spur von Sauerstoff nachzuweisen war. Nach Versuchen mit grösseren Mengen wurde z. B. auf diese Weise aus 1 g Bacterium brunneus 0,1—0,45 ccm Sauerstoff gewonnen. Real muss aber die gebundene Menge schon deshalb ansehnlicher sein, weil beim Durchleiten von Wasserstoff ein gewisses Quantum von Sauerstoff weggeführt wurde.

Eine solche Sauerstoffspeicherung wurde bisher bei keinem farblosen Bacterium beobachtet, kommt aber auch nicht allen farbigen Arten zu. So wurden (zumeist mit der Kammermethode) u. a. von farbigen Bacterien Bacterium cyanogenes, pyocyaneus, Micrococcus prodigiosus, Spirillum rubrum etc. mit negativem Resultat geprüft. Ebenso erwiesen sich im Dunkeln indifferent einige chlorophyllführende Bacterien, welche im Licht Sauerstoff erzeugen, sowie Chromatium Okenii u. a., die nach ENGELMANN noch im Ultraroth Sauerstoff produciren.

Bei den genannten wirksamen Arten ist aber die Bindung von Sauerstoff an die Existenz des Farbstoffes gekettet, denn diese Speicherung ging den Culturen von Bacterium brunneum u. s. w. ab, welche sich unter bestimmten Bedingungen farblos entwickelt hatten und bei nur geringer Färbung wurde auch nur wenig Sauerstoff gebunden. Ausserdem sprechen die Erfahrungen dafür, dass die färbende Substanz, im analogen Sinne wie Hämoglobin, der Sauerstoff bindende Körper ist. Denn diese Sauerstoffbindung ist noch vorhanden, wenn die Bacterien durch mehrtägige Einwirkung von Aether völlig getödtet sind. Auch nach dem Abtödten bei 80° C. war ebenfalls eine ansehnliche Bindung von Sauerstoff zu bemerken, deren Vernichtung bei längerem Erhitzen auf 100° C. auf eine Aenderung des massgebenden Körpers durch höhere Temperatur zu schieben ist. Einige Versuche lehrten auch bereits, dass das kalt bereitete alkoholische Extract ebenfalls in merklicher Weise Sauerstoff locker bindet. Es dürfte demnach gelingen, einen nicht in Wasser löslichen farbigen Körper zu isoliren, welchem speciell die Sauerstoffbindung ganz oder der Hauptsache nach zu verdanken ist.

Wenn dieses zutrifft, wird die bindende Substanz vielleicht sogar wirksamer sein als Hämoglobin, das nach Berührung mit Luft in 1 g ungefähr 1,2 ccm locker gebundenen Sauerstoff enthält. Denn aus 1 g frischer Bacterienmasse, in welcher der Farbstoff nur einen kleinen Bruchtheil ausmacht, wurde, wie schon erwähnt, gelegentlich bis zu 0,45 ccm Sauerstoff gewonnen.

Aller Wahrscheinlichkeit liegt hier, wie beim Hämoglobin, eine lockere und dissociirende chemische Bindung des Sauerstoffs vor. Doch ist eine bestimmte Abgrenzung zwischen solcher chemischer Bindung und Absorption gar nicht möglich, da beide eine Function der Partiärpressung sind, deshalb also Sauerstoff an den sauerstofffreien Raum abgegeben und demgemäss bei continuirlicher Erhaltung der Partiärpressung auf Null mit der Zeit die Gesammtmenge des locker gebundenen Sauerstoffs verloren wird. Unter solchen Umständen wird der Sauerstoff auch für das athmende Bacterium disponibel, gleichviel ob sich der bindende Körper innerhalb oder ausserhalb des Protoplasten befindet. Im abgeschlossenen Raume muss also auch der locker gebundene Sauerstoff durch die Athmungsthätigkeit dieser aëroben Organismen verbraucht werden, wie das auch in directen Versuchen gefunden wurde.

Offenbar besitzen also unsere aëroben Bacterien eine gewisse Sauerstoffreserve, welche ihnen gestattet, noch eine gewisse Zeit (vielleicht in schwächerem Maasse) die normale Athmung fortzusetzen, wenn ihnen einmal in ihrem Lebenslauf der freie Sauerstoff entzogen wird. Eine zu solchem Zwecke geeignete Sauerstoffreserve können aber nicht alle aëroben Bacterien aufspeichern. Doch wird näher zu prüfen sein, ob nicht mehrfach eine Bindung des Sauerstoffs in der obigen oder in anderer

Weise bei farbigen oder farblosen Bacterien vorkommt. An eine solche Möglichkeit wird man insbesondere bei solchen Organismen denken, welche nur begrenzte Zeit ein anaërobes Leben zu führen vermögen. Natürlich ist es nicht nöthig, dass der Sauerstoff immer in derselben Weise aufgespeichert ist. In ökonomischer und ökologischer Hinsicht würde es sogar vortheilhafter sein, wenn die gespeicherte und bei Luftzutritt regenerationsfähige Verbindung den Sauerstoff nicht an das Vacuum abgiebt, wohl aber die Athmung zu unterhalten vermag. Kommt solches vor, was ohne Frage der experimentellen Entscheidung zugänglich ist, so würden die obwaltenden Verhältnisse einigermassen den Vorstellungen Pasteur's entsprechen, welcher zuerst und begreiflicher Weise annahm, dass bei allem anaëroben Leben die Sauerstoffathmung fortbestehe, indem nunmehr der Sauerstoff der in der Gährung zerfallenden Verbindung entrissen werde. Ist diese Generalisirung auch nicht zulässig, so ist doch gewiss, dass auf diesem Gebiete eine Fülle von specifischen Eigenheiten und interessanten Problemen vorliegt, die in der That sehr wohl der empirischen Aufklärung zugänglich sind. Uebrigens lassen mich einige Erfahrungen vermuthen, dass die Speicherung einer gewissen Sauerstoffreserve auch in einzelnen höheren Pflanzen vorkommt, die in Bezug auf den Sauerstoff allerdings der Regel nach aus der Hand in den Mund leben.

Wilh. Pfeffer, o. M., spricht *über die Steigerung der Athmung und der Wärmeproduction nach Verletzung lebensthätiger Pflanzen;* traumatische Reactionen, welche von Dr. H. M. Richards im botanischen Institut näher studirt wurden.

Nach den ersten Beobachtungen Böhm's[1]) wurde die Steigerung der Athmung nach Verletzung von Stich[2]) als eine generelle Reaction nachgewiesen, jedoch in ihrem Verlaufe und in ihren Beziehungen nicht näher verfolgt. Die Studien von Richards bestätigen, dass alle Pflanzen, jedoch in einem sehr verschiedenen Grade, in besagtem Sinne reagiren. Die ansehnlichste Athmungssteigerung wurde im Allgemeinen bei fleischig und massig entwickelten Organen, bei Knollen, Zwiebeln, Wurzeln etc. gefunden, in welchen die zuvor schwache Athmung nach dem Zerschneiden gelegentlich selbst um das zwanzigfache zunehmen kann. Diese vermehrte Athmungsthätigkeit, deren Beginn schon bald nach dem Zerschneiden nachzuweisen ist, steigt bis zu einem Maximum, das bei Zimmertemperatur in ½ bis 2 Tagen erreicht wird. Alsdann beginnt ein allmählicher Abfall, durch welchen unter normalen Verhältnissen die ursprüngliche Athmungsenergie im Laufe von einigen Tagen ganz oder annähernd wieder hergestellt wird.

Von einer kleineren Kartoffelsorte gaben z. B. 300 g in einer Stunde 1,2—2 mg Kohlensäure ab. Nach dem Zerschneiden in vier gleiche Stücke wurden in der zweiten Stunde 9, in der fünften Stunde 14,4, in der neunten Stunde 16,8, in der 28. Stunde 18,6 mg Kohlensäure producirt. Nach 51 Stunden war die stündliche Production auf 13,6, nach vier Tagen auf 3,2, nach sechs Tagen auf 1,6 mg gesunken.

Die merkliche Reaction erstreckt sich von der Wundfläche

1) Bot. Ztg. 1887, p. 686.
2) Flora 1891, p. 15.

mit nachlassender Intensität nur auf eine gewisse Distanz, fällt also in Bezug auf die ganze Kartoffel mit einer leichten Verletzung geringer aus und wird mit der Grösse der Verwundung gesteigert. So wurde z. B. für dieselbe Kartoffelmenge die maximale Kohlensäurereproduction beim Halbiren mit 8,5, beim Zertheilen in zwölf Stücke mit 21,7 mg erreicht.

Aehnliche Resultate wurden mit gelben Rüben, Zuckerrüben etc. erhalten. Im gleichen Sinne reagiren überhaupt alle Pflanzen. Bei Blättern wird aber häufig nicht einmal eine Verdoppelung der Kohlensäureproduction und zumeist schon in einigen Stunden das Maximum der Reactionscurve erreicht. Natürlich muss auf die primäre Steigerung endlich eine Senkung der Athmungsthätigkeit unter das ursprüngliche Niveau folgen, wenn die traumatischen Eingriffe weiterhin eine Beeinträchtigung der Lebensthätigkeit zur Folge haben.

In massigen Organen ist eine reichliche Menge von Kohlensäure gelöst, die nach dem Zerschneiden bis zur Wiederherstellung des Gleichgewichts in Folge der erleichterten Diffusion exhalirt wird. Dieses hat natürlich in der ersten Stunde eine Anschwellung der Kohlensäureausgabe zur Folge, welche aber kaum bemerklich wird, wenn Blätter oder Pflanzentheile zum Versuche gewählt werden, in welchen der erleichterte Gasaustausch eine Anhäufung der Kohlensäure verhindert. Aber auch bei den Kartoffeln u. s. w. unterbleibt diese transitorische Ausgabe von Kohlensäure, wenn die Gasanhäufung sogleich nach dem Zerschneiden durch ein flüchtiges Evacuiren beseitigt wird. Wenn für Beseitigung dieser Abgabe von gelöster Kohlensäure gesorgt ist, erfährt das Verhältniss $CO_2 : O$ nach dem Verletzen keine wesentliche Veränderung, die aber von Stich beobachtet wurde, weil er den besagten Zuschuss von Kohlensäure mit in Rechnung zog.

Wie zur vollen Thätigkeit ist auch zur Entwicklung einer kräftigen traumatischen Reaction die Zufuhr von Sauerstoff nothwendig. Demgemäss tritt nur eine geringe Zunahme der Kohlensäureproduction in der intramolekularen Athmung ein, wenn die Kartoffeln sogleich nach dem Zerschneiden in reinen Wasserstoff gebracht werden. Geschieht dieses, nachdem durch den zuvorigen Genuss von Sauerstoff die traumatische Reaction in Scene gesetzt worden war, so ist nunmehr mit der Gesammtaction auch die intramolekulare Athmung gesteigert.

Die angestrebte Athmungsthätigkeit kann natürlich nur dann zur vollen Entfaltung kommen, wenn jederzeit die genügende Menge von Sauerstoff den Zellen zugeführt wird. Das gelingt nach der Verwundung, weil gleichzeitig an der Wundfläche die Sauerstoffzufuhr sehr erleichtert wird. Bedeckt man aber z. B. die Wundfläche einer Kartoffel mit Thon, so dringt der Sauerstoff durch diesen und durch die Schale nicht schnell genug, um die erheblich vermehrten Affinitäten voll zu befriedigen und dieserhalb kommt, wie es der Versuch lehrt, unter diesen Bedingungen eine geringere traumatische Steigerung der Athmung zu Stande.

Mit einer Zunahme der Athmung, gleichviel wodurch diese verursacht wird, ist unter sonst gleichen Verhältnissen unvermeidlich eine vermehrte Wärmeproduction verknüpft[1]) und eine solche fieberhafte Steigerung in Folge einer Verwundung liess sich auch empirisch nachweisen.

Es gelingt dieser Nachweis leicht, wenn man eine grössere Menge Kartoffeln etc. unter eine nicht zu grosse Glocke bringt und durch ein Thermometer die Lufttemperatur in dieser controlirt. Um einen höheren Effect zu erhalten, waren die Apparate mit einer dicken Baumwollenschicht umhüllt und war ausserdem dafür gesorgt, dass ohne unnöthigen Luftwechsel Sauerstoff genügend Zutritt fand, eine Kohlensäureanhäufung aber nicht zu Stande kam. Eine unveränderte Aussentemperatur war in dem constant temperirten Zimmer des botanischen Instituts geboten, in welchem diese und alle folgenden Versuche bei 24,1—24,3° C. angestellt wurden.

Waren zwei solcher Apparate in gleicher Weise mit Kartoffeln beschickt, so zeigten die Thermometer nach etwa zwölf Stunden in der folgenden Zeit dieselbe Temperatur und zwar eine Temperaturerhöhung von 0,4° C. an. Wurden dann die Kartoffeln der einen Glocke in zwei bis sechs Stücke zerschnitten, so begann die Temperatur zu steigen und erhob sich nach 1 bis 1¼ Tag bis zu 1° C. über die Temperatur der Vergleichsglocke, der sie sich im Laufe einiger Tage bis zur Wiederübereinstimmung näherte. Der Verlauf dieser Temperaturcurve stimmt also in allen Hauptzügen mit der nach dem Zerschneiden beobachteten Athmungscurve überein.

---

1) PFEFFER, Studien zur Energetik der Pflanze, 1892, p. 201.

Ausserdem wurde auch noch die durch die traumatische Reizung veranlasste Fiebertemperatur mit nadelförmigen Thermo-Elementen (Neusilber+Eisen) und Messung des thermoelektrischen Stromes mittelst eines empfindlichen Spiegelgalvanometer controlirt. Waren die beiden Nadeln in zwei gleichartige Kartoffeln eingeführt, die sich unter einer Glocke in dampfgesättigter Luft befanden, so war nach einiger Zeit überhaupt kein Temperaturunterschied zu bemerken. Wurde dann eine der beiden Kartoffeln nahezu in zwei Theile gespalten und die Nadel in den Schnittspalt gebracht, so ergaben die successiven Ablesungen wiederum in der Hauptsache eine mit der traumatischen Athmungscurve übereinstimmende Temperaturcurve. Das Maximum der Temperatursteigerung im Vergleich zu der unverletzten Kartoffel betrug etwa 0,3° C., während die intacte Kartoffel ungefähr 0,16° C. wärmer war, als die umgebende Luft.

Indem die Nadel in verschiedener Entfernung von der Schnittfläche eingesteckt wurde, liess sich ferner feststellen, dass die Temperatursteigerung bei der Kartoffel zumeist schon in einer Entfernung von 2 cm ausgeklungen war. Es stimmt dieses durchaus mit der Erfahrung, dass eine Vermehrung der Schnittflächen die Athmung und auch die Temperaturerhebung in dem Glockenversuch erheblich steigert.

Im Princip übereinstimmende Resultate wurden mit Kohlrabi, gelben Rüben, Gurken etc. erhalten. Ebenso mit den Zwiebeln von Allium Cepa, in welchen sich aber die Temperatursteigerung von der Wunde aus über die ganze Zwiebel ausbreitete und 4,5 cm von der Wunde entfernt zwar abgeschwächt, aber doch noch recht erheblich war. Entsprechend dieser ansehnlicheren Ausbreitung der Reaction wurde bei den Glockenversuchen mit den Zwiebeln eine ungefähr dreimal so grosse Temperaturerhöhung, als mit derselben Menge Kartoffeln erzielt.

Durch die in Kürze angedeuteten Thatsachen wird also klar erwiesen, dass eine Verletzung eine mit der Ausdehnung der Verwundung zunehmende und sich mehr oder minder weit ausbreitende Steigerung der Athmung und Hand in Hand damit eine Temperatursteigerung, ein Wundfieber erzeugt. Wir haben ferner gesehen, dass diese zunächst verhältnissmässig schnell anschwellende Wundreaction weiterhin allmählicher ausklingt. Es handelt sich dabei um eine traumatische Reizwirkung, welche eine gesteigerte Stoffwechselthätigkeit und damit die Bedingungen für eine Steigerung der Athmung hervorruft, die ja in allen Fällen durch die entwickelten Sauerstoffaffinitäten bestimmt und regulirt wird. In richtiger Würdigung dieses Verhältnisses ist selbstverständlich, dass nicht schlechthin etwa die Athmungsbeschleunigung die Folge einer durch die Wundfläche erleichterten Sauerstoffzufuhr ist und dieses wird ferner direct damit erwiesen, dass ohne Verwundung eine reichlichere Zufuhr von Sauerstoff keine derartige Beschleunigung der Athmung hervorruft.

Auf eine quantitative Bestimmung der Gesammtproduction von Wärme war es nicht abgesehen und eine solche ist auch zur Charakterisirung der Wundreaction nicht nothwendig. Die Eigentemperatur aber ist von verschiedenen Umständen, insbesondere auch von Ausstrahlung und Leitung abhängig[1]. Deshalb ist es nicht wunderbar, dass an der Wundfläche der Temperaturüberschuss in der Kartoffel nur von 0,16 auf 0,3, also ungefähr um das Doppelte steigt, während die Athmung nächst der Wundfläche sicher viel ansehnlicher, als es unsere Versuche für die ganze Masse der Kartoffel angeben, voraussichtlich mehr als um das zwanzigfache gesteigert wird. Wie man sieht, handelt es sich local um sehr energische Reactionen, die verhältnissmässig wohl nicht hinter denjenigen zurückstehen, welche an Wunden bei höheren Thieren zu Stande kommen.

Für alle Organismen und ebenso für die Oekonomie der Pflanze ist es ganz unerlässlich, dass Verletzungen eine Reaction hervorrufen, welche auf Ausgleichung oder Unschädlichmachung der Verwundung hinarbeitet. Solche Reactionen, die uns in der Bildung von Callus, Ueberwallungen, Wundkork u. s. w. in auffälliger Weise entgegentreten, legen in dieser sichtbaren Gestaltung zugleich dafür Zeugniss ab, dass gleichzeitig an der Wundstelle die Stoffwechselthätigkeit in der zum Betriebe geeigneten und den veränderten Verhältnissen entsprechenden Weise geregelt, also bei Vermehrung der Thätigkeit beschleunigt wurde. Bei der correlativen Verkettung des Getriebes im Gesammtorganismus können solche Reactionen gar nicht streng ocalisirt bleiben. Dem entspricht vollkommen die mehr oder minder weitgehende Ausbreitung der Athmungsbeschleunigung

1) Vgl. Pfeffer, Pflanzenphysiologie Bd. II, p. 404.

und der Wärmebildung und mit dem vermehrten Verbrauch von Nährstoffen wird ohne Frage auch in rückgreifender Weise die Lenkung von Nährstoffen zu den Consumsorten in einer dem gesteigerten Verbrauch entsprechenden Weise gefördert.

Die Stoffwechselprocesse treten aber im Allgemeinen dem Beobachter nicht so direct entgegen, wie die durch Bewegungen oder Gestaltungen markirten Erfolge der Reactionen. Zu diesen zählt auch die Beschleunigung der Protoplasmaströmung, welche in sehr vielen Fällen überhaupt erst in Folge der traumatischen oder einer anderen Reizung eine Bewegungsschnelligkeit erlangt, welche zur momentanen Wahrnehmung der Erscheinung ausreicht[1]. Uebrigens gehört ebenfalls das Austreiben von ruhenden Knospen nach dem Abschneiden der Frühjahrstriebe und das ganze Heer analoger Correlationsthätigkeiten zu denjenigen Erfolgen, für welche der gewaltsame Eingriff, in diesem Falle also die Verwundung, als der äussere Reiz anzusprechen ist.

1) Vgl. Hauptfleisch, Jahrb. f. wiss. Bot. 1892, p. 24, p. 173.

Sophus Lie, o. M., *Zur allgemeinen Transformationstheorie.*

Die nachstehende Note zerfällt in zwei Abschnitte, die verschiedene Gegenstände behandeln. In beiden Abschnitten spielen die Begriffe: Transformation und infinitesimale Transformation eine fundamentale Rolle.

I.

Ueber Differentialgleichungen, die eine continuirliche Gruppe gestatten.

Der leitende Gedanke bei allen meinen zahlreichen Untersuchungen über Differentialgleichungen ist das Bestreben gewesen, die Transformationstheorie für die Integrationstheorie zu verwerthen. Ist es nun auch nicht möglich, ein einziges Princip zu formuliren, aus dem alle meine Resultate fliessen, so kann man doch ohne Schwierigkeit einsehen, dass viele unter meinen Theorien im inneren Zusammenhange stehen und jedesmal als besondere Ausflüsse eines gemeinsamen Principes aufzufassen sind.

Ein solches allgemeines Princip, das in vielen unter meinen Arbeiten verwerthet worden ist, lässt sich in der folgenden trivialen Weise formuliren:

Gestattet ein System von Differentialgleichungen bez. Differentialausdrücken eine endliche oder infinitesimale Berührungstransformation (bez. Punkttransformation), so geht jedes andere System von Differentialgleichungen bez. Differentialausdrücken, das zu dem gegebenen Systeme in einer gewissen, durch Berührungstransformationen (bez. Punkttransformationen) invarianten Beziehung sich befindet, in ein ebensolches System über[1].

---

1) In einer geometrischen Note, die im Januar 1870 in den Göttinger Nachrichten veröffentlicht wurde, operirte ich systematisch mit einem analogen geometrischen Principe. Es ist selbstverständlich, dass sich ein analoges Princip für alle Gegenstände formuliren lässt, die überhaupt transformirt werden können.

Ich werde mir erlauben, zuerst an einige Anwendungen, die ich von diesem allgemeinen Principe gemacht habe, zu erinnern. Sodann entwickele ich weitergehende Anwendungen desselben Principes auf die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen.

1. Gestattet die lineare partielle Differentialgleichung:

$$0 = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \equiv Af$$

die infinitesimale Transformation

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

so führt diese Transformation jede Lösung φ (sowie jede Integralgleichung: $\psi = 0$) von $Af = 0$ in eine Lösung $\varphi + X\varphi \cdot \delta t$ (bez. Integralgleichung $\psi + X\psi \cdot \delta t = 0$) über.

2. Gestattet die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$W(x_1 \ldots x_n\, z\, p_1 \ldots p_n) = a$$

die infinitesimale Berührungstransformation

$$[\Phi f] - \Phi \frac{\partial f}{\partial z},$$

so führt diese Transformation jede andere Gleichung

$$\Psi(x_1 \ldots x_n\, z\, p_1 \ldots p_n) = b,$$

die mit $W = a$ in Involution liegt, in eine ebensolche Gleichung über. Dieser Satz umfasst das berühmte Poisson'sche Theorem als besonderen Fall.

3. Liegt eine bestimmte *Kategorie* von linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$0 = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = A'f$$

vor, für welche ein *Multiplicator* aufgestellt werden kann, und kennt man eine endliche oder infinitesimale Transformation, die eine gewisse Gleichung $A'f = 0$ in eine Gleichung derselben Kategorie überführt, so ist es immer möglich, eine Lösung von $A'f = 0$ aufzustellen, die sich allerdings unter Umständen auf eine Constante reduciren kann. Dieser Satz, der in meinen Untersuchungen über geodätische Curven eine Rolle gespielt hat, deckt u. a. den inneren Zusammenhang zwischen LIOUVILLE's und DINI's schönen Untersuchungen über geodätische Curven auf. Auch auf neuere Untersuchungen über geodätische Curven im n-dimensionalen Raume wirft diese Bemerkung Licht. (Vgl. meine Abhandlung: Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die eine continuirliche Gruppe gestatten, IV; Norwegisches Archiv Bd. VII, 1884.)

4. Gestattet eine MONGE-AMPÈRE'sche partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$

eine infinitesimale Berührungstransformation, so kann man, sobald eine intermediäre Integralgleichung:

$$\psi(xyzpq) = a$$

vorliegt, eine neue intermediäre Integralgleichung mit *zwei* arbiträren Constanten a und b aufstellen. Diese Bemerkung verwerthete ich nach verschiedenen Richtungen in der kurzgefassten Note »Kurzes Resumé mehrerer neuer Theorien«, April 1872, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania.

5. Jede Berührungstransformation, die eine vorgelegte partielle Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $F = 0$ in sich transformirt, führt jede Gleichung q^{ter} Ordnung $\Phi = 0$, die mit $F = 0$ Integralgebilde gemein hat, in eine ebensolche Gleichung über; bei Berührungstransformation bleibt die *Involutionsbeziehung* invariant.

6. Im Jahre 1882 (vgl. Verh. und Sitzungsberichte d. G. d. W. zu Christiania, Novbr. und Decbr. 1882) entwickelte ich einige andere Anwendungen meines allgemeinen Principes, die ich jetzt resumiren werde.

Deuten wir in den D'ALEMBERT'schen Gleichungen:

$$\frac{dx_k}{dz} = Z_{k1}(z)x_1 + Z_{k2}(z)x_2 + Z_{k3}(z)x_3 \tag{1}$$

die Grösse z als Coordinate einer Schaar paralleler Ebenen, ferner x_1, x_2, x_3 als homogene Punktcoordinaten in den Ebenen $z =$ Const., so wird jedes System von Lösungen:

$$x_1 = \varphi_1(z), \quad x_2 = \varphi_2(z), \quad x_3 = \varphi_3(z)$$

durch eine *Curve* im Raume dargestellt, und es giebt ∞^2 solche Integralcurven. Kennen wir nun eine Fläche:

$$\Omega\left(\frac{x_1}{x_3},\ \frac{x_2}{x_3},\ z\right) = 0\ ,$$

die von ∞^1 Integralcurven erzeugt ist, so schneidet diese Fläche die ∞^1 Ebenen: $z = \text{Const.}$ nach ∞^1 ebenen Curven, die unter einander *projectiv* sind. Hieraus zog ich den Schluss, dass die Integration des simultanen Systems (1) geleistet werden kann, wenn die ebene Schnittcurve der Fläche $\Omega = 0$ entweder keine infinitesimale projective Transformation oder auch nur *eine* solche gestattet. War dagegen diese ebene Schnittcurve ein Kegelschnitt oder eine Gerade, so müsste eine Riccati'sche Gleichung erster Ordnung integrirt werden.

Setzen wir andererseits voraus, dass ein System von der Form:

$$(2)\qquad \frac{dx_k}{dz} = Z_{k1}(z)\,x_1 + Z_{k2}(z)\,x_2 + Z_{k3}(z)\,x_3 + Z_k(z)$$

zur Integration vorgelegt ist, und dass eine Integralgleichung:

$$W(x_1\,x_2\,x_3\,z) = 0$$

gegeben ist, dass also die Gleichung

$$\sum\nolimits^k \frac{\partial W}{\partial x_k}\,(Z_{k1}\,x_1 + \cdots + Z_k) + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

vermöge $W = 0$ besteht, so gelten analoge Sätze. Deuten wir x_1, x_2, x_3 und z als Cartesische Coordinaten eines vierdimensionalen Raumes, so bestimmt das simultane System ∞^3 Integralcurven, und die Mannigfaltigkeit $W = 0$ ist von ∞^2 solchen Integralcurven erzeugt.

Die Gleichung: $z = \text{Const.}$ zerlegt den vierdimensionalen Raum in ∞^1 ebene und dreidimensionale Räume. Diese ∞^1 ebene Räume sind vermöge des simultanen Systems *projectiv*, ja *linear* auf einander bezogen. Die Mannigfaltigkeit $W = 0$ schneidet daher diese ebenen Räume nach Flächen, die unter einander projectiv und sogar *linear-projectiv* sind. Gestattet eine solche Fläche allgemeiner Lage keine infinitesimale lineare Transformation, so ist die Integration des simultanen Systems als geleistet zu betrachten. Sind die Flächen $W = 0$, $z = \text{Const.}$ im Endlichen gelegen, so verlangt die Integration des Systems (2) im ungünstigsten Falle die Erledigung einer RICCATI'schen Gleichung erster Ordnung.

Die Integrationsschwierigkeit beruht auf der *Zusammensetzung derjenigen linearen* Gruppe, die eine einzelne unter den besprochenen ∞^1 Flächen invariant lässt. Ist diese Gruppe integrabel, so sind nur Quadraturen erforderlich. Dieser Satz bleibt bestehen, wenn ein System von zwei Integralgleichungen

$$W_1(x_1 x_2 x_3 z) = 0\,, \quad W_2 = 0$$

vorgelegt ist; wenn also die zweidimensionale Mannigfaltigkeit $W_1 = 0$, $W_2 = 0$ von ∞^1 Integralcurven erzeugt ist. Schneidet diese Mannigfaltigkeit die ebenen Räume $z =$ Const. nach *gewundenen* Curven, so ist die lineare Gruppe einer solchen Curve immer integrabel und die Integration des simultanen Systems (2) verlangt dementsprechend nur Quadraturen.

In meinen oben citirten Arbeiten aus dem Jahre 1882 gab ich nun ausdrücklich an, dass diese Theorien sich unter mehreren Gesichtspunkten ausdehnen lassen. Auf der einen Seite übersieht man ohne weiteres, dass ähnliche Theorien für jedes simultane System

$$\frac{dx_k}{dz} = Z_{k1}(z)x_1 + \cdots + Z_{kn}(z)x_n + Z_k(z) \tag{3}$$
$$(k = 1, 2 \ldots . n)$$

gelten, wenn ein beliebiges System von Integralgleichungen

$$W_i(x_1 \ldots x_n z) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots q)$$

vorliegt. Gestattet jede einzelne unter den ∞^1 (mit einander projectiven) Mannigfaltigkeiten:

$$W_1 = 0, \ldots \quad W_q = 0\,, \quad z = a_0 = \text{Const.}$$

keine infinitesimale lineare Transformation der Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$, so ist die Integration des simultanen Systems (3) ausführbar, ebenso wenn solche infinitesimale Transformationen vorhanden sind, die eine integrable Gruppe erzeugen [1]).

In jedem einzelnen Falle beruht die Integrationsschwierigkeit auf der Zusammensetzung derjenigen linearen Gruppe, die eine allgemein gewählte Mannigfaltigkeit

1) Vgl. hier und im Folgenden Math. Annalen Bd. 25.

$$W_i(x_1 \dots x_n a_0) = 0\,, \quad (i = 1 \dots q)$$

invariant lässt.

In meinen beiden früher citirten Noten, die im Novbr. und Decbr. 1882 der Ges. d. W. zu Christiania vorgelegt wurden, gab ich ferner an, dass diese Theorien sich dadurch verallgemeinern lassen, dass die projective (bez. lineare) Gruppe durch eine ganz beliebige endliche continuirliche Gruppe ersetzt wird. Sind $X_1 f$, $X_2 f, \dots X_r f$

$$X_k f = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x_1 \dots x_n)\, \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \dots r)$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe, so betrachtete ich eine beliebige lineare partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial z} + Z_1(z) X_1 f + \cdots + Z_r(z) X_r f = 0\,,$$

die mit dem simultanen Systeme

$$(4) \quad \frac{dz}{1} = \frac{dx_1}{Z_1 \xi_{11} + \cdots + Z_r \xi_{r1}} = \cdots = \frac{dx_n}{Z_1 \xi_{1n} + \cdots + Z_r \xi_{rn}}$$

äquivalent ist. Kannte ich nun im Raume $x_1 \dots x_n$, z eine Mannigfaltigkeit

$$W_i(x_1 \dots x_n z) = 0\,, \quad (i = 1 \dots q)\,,$$

die von Integralcurven des simultanen Systems (4) erzeugt ist, so beruhte die Integrationsschwierigkeit auf der *Zusammensetzung* derjenigen Untergruppe der vorgelegten Gruppe $X_1 f \dots X_r f$, die eine beliebig gewählte Mannigfaltigkeit

$$W_i(x_1 \dots x_n a_0) = 0\,, \quad a_0 = \text{Const.}$$
$$(i = 1 \dots q)$$

invariant lässt. War diese Untergruppe integrabel, so liesse sich die Integration des simultanen Systems (4) durch Quadraturen leisten. War die Untergruppe einfach, so brauchte nur eine *einzige* Hülfsgleichung integrirt zu werden. War z. B. diese Untergruppe gleichzusammengesetzt mit der allgemeinen projectiven Gruppe des m-dimensionalen Raumes, so liesse sich die betreffende Hülfsgleichung auf eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung von $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückführen, u. s. w.

7. Liegt eine gewöhnliche lineare und homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(1) \qquad y^{(n)} + X_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + Xy = 0$$

vor, so lassen sich alle Lösungen nach D'ALEMBERT aus n particulären Lösungen $y_1 \ldots y_n$ durch die Formel

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \qquad (c = \text{const.})$$

ableiten. Weiss man nun zufälligerweise, dass die vorgelegte Gleichung n^{ter} Ordnung n unabhängige Lösungen besitzt, die m bekannte Differentialgleichungen von der Form

$$\Omega_k(x\, y_1 \ldots y_n\, y_1' \ldots y_n' \ldots y_1^{(\mu)} \ldots y_n^{(\mu)}) = 0$$
$$(k = 1 \ldots m)$$

erfüllen, so kann man diesen Umstand für die Integration der Gleichung (1) verwerthen. Man kann zunächst mit Benutzung der Gleichung (1) erreichen, dass $\mu \lesseqgtr n - 1$ wird. Man ersetzt alsdann die Gleichung (1) n^{ter} Ordnung durch das simultane System

$$(2) \qquad \frac{dx}{1} = \frac{dy_k}{y_k'} = \frac{dy_k'}{y_k''} = \cdots = \frac{dy_k^{n-1}}{-X_{n-1} y_k^{n-1} - \cdots - X y_k}$$
$$(k = 1 \ldots n),$$

das mit der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(3) \qquad Af \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^n {}^k\, y_k' \frac{\partial f}{\partial y_k} + \sum_1^n {}^k\, y_k'' \frac{\partial f}{\partial y_k'} + \cdots$$
$$- \sum_1^n {}^k\, (X_{n-1} y_k^{(n-1)} + \cdots + X y_k) \frac{\partial f}{\partial y_k^{(n-1)}} = 0$$

äquivalent ist. Diese lineare partielle Differentialgleichung in den $n^2 + 1$ unabhängen Veränderlichen

$$x,\ y_1 \ldots y_n,\ y_1' \ldots y_n' \ldots y_1^{(n-1)} \ldots y_n^{(n-1)}$$

gestattet nun die n^2 infinitesimalen Transformationen

$$(4) \qquad Y_{ik} f \equiv y_i \frac{\partial f}{\partial y_k} + y_i' \frac{\partial f}{\partial y_k'} + \cdots + y_i^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y_k^{(n-1)}}$$
$$(i = 1, 2 \ldots n,\ k = 1, 2 \ldots n),$$

die eine n^2-gliedrige, mit der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in den Veränderlichen $y_1 \dots y_n$ gleichzusammengesetzte Gruppe bilden. Man übersieht unmittelbar, dass zwischen den n^2+1 Ausdrücken Af, $Y_{11}f$, $Y_{12}f \dots Y_{nn}f$ keine lineare homogene Relation besteht, während *die Ausdrücke* (A, Y_{ik}) *identisch verschwinden.*

Nach unserer Voraussetzung ist nun die Mannigfaltigkeit:

$$\Omega_k(x\, y_1 \dots y_n\, y_1' \dots y_n' \dots ;\ y_1^{(n-1)} \dots y_n^{(n-1)}) = 0 \quad (k = 1 \dots m)$$

von Integralcurven des simultanen Systems (2) oder, was auf dasselbe hinauskommt, von Charakteristiken der linearen partiellen Differentialgleichung $Af = 0$ erzeugt, so zwar dass durch jeden Punkt der Mannigfaltigkeit $\Omega_k = 0$ eine Integralcurve hindurchgeht.

Jede infinitesimale Transformation der Gruppe $Y_{ik}f$ führt eo ipso die Mannigfaltigkeit $\Omega_k = 0$ in eine Mannigfaltigkeit $\Omega_k' = 0$ über, die ebenfalls von Integralcurven erzeugt ist. Da nun die ∞^{nn} Integralcurven von der Gruppe $Y_{ik}f$ transitiv transformirt werden, so kann man immer unter den Transformationen der Gruppe $Y_{ik}f$ eine finden, die eine beliebig gewählte Integralcurve der Mannigfaltigkeit $\Omega_k = 0$ in irgend eine andere Integralcurve dieser Mannigfaltigkeit überführt. Es sind dabei zwei Fälle möglich: Es ist denkbar, dass jede Transformation der Gruppe $Y_{ik}f$, die eine Integralcurve der Mannigfaltigkeit $\Omega_k = 0$ in eine andere Integralcurve dieser Mannigfaltigkeit überführt, gleichzeitig die Mannigfaltigkeit in sich transformirt. Es ist aber auch denkbar, dass einige Transformationen der Gruppe $Y_{ik}f$, die eine Integralcurve der Mannigfaltigkeit $\Omega_k = 0$ in eine andere Integralcurve dieser Mannigfaltigkeit überführen, die Mannigfaltigkeit $\Omega_k = 0$ in eine *neue* Mannigfaltigkeit $\Omega_k' = 0$ umwandeln, die dann ebenfalls von Integralcurven erzeugt ist. In diesem letzten Falle *schneiden* sich die Mannigfaltigkeiten: $\Omega_k = 0$ und $\Omega_k' = 0$ nach einer kleineren Mannigfaltigkeit

$$\Omega_1 = 0 \dots \Omega_m = 0,\ \Omega_{m+1} = 0 \ \dots \ \Omega_\mu = 0,$$

die wiederum von Integralcurven erzeugt ist. Indem man diese neue Mannigfaltigkeit in genau derselben Weise behandelt, findet man schliesslich eine von Integralcurven erzeugte Mannigfaltigkeit

$$\Omega_1 = 0 \ \dots \ \Omega_\nu = 0,$$

die so beschaffen ist, dass jede Transformation der Gruppe $Y_{ik}f$, die eine Integralcurve der Mannigfaltigkeit in eine andere Integralcurve der Mannigfaltigkeit überführt, diese Mannigfaltigkeit invariant lässt.

Die hiermit bestimmten Transformationen der Gruppe $Y_{ik}f$ erzeugen eine Untergruppe g. Ist diese Untergruppe integrabel, so verlangt die Bestimmung der Integralcurven der Mannigfaltigkeit $\Omega_1 = 0, \ldots \Omega_\nu = 0$ und gleichzeitig die Integration des simultanen Systems (2) nur Quadraturen. Ist die Untergruppe nicht integrabel, so bestimmt die Zusammensetzung dieser Untergruppe wie gewöhnlich die vorliegenden Integrationsschwierigkeiten [1]).

Es bilden die n^2+1 infinitesimalen Transformationen Af, $Y_{11}f \ldots Y_{nn}f$ eine einfach transitive Gruppe des (n^2+1)-dimensionalen Raumes $x\, y_1 \ldots y_n \ldots y_1^{(n-1)} \ldots y_n^{(n-1)}$. Um die zugehörige reciproke Gruppe zu finden, beachten wir, dass die n^2 Transformationen $Y_{ik}f$ eine einfach transitive Gruppe des Raumes: $y_1 \ldots y_n \ldots y_1^{(n-1)} \ldots y_n^{(n-1)}$ bilden, deren reciproke Gruppe die Form

$$Z_{i\mu}f = \sum_1^n {}_k\, y_k^{(i)}\, q_k^{(\mu)} \qquad \left(y_k^{(i)} = \frac{d^i y_k}{dx^{(i)}}, \quad q_k^{(\mu)} = \frac{\partial f}{\partial y_k^{(\mu)}}\right)$$

besitzt. Daraus folgt (Math. Ann. Bd. 25, S. 107 u. ff.), dass die Transformationen der gesuchten reciproken Gruppe des Raumes $x\, y_1 \ldots y_n^{(n-1)}$ die allgemeine Form

$$Af, \quad W_\nu f \equiv \sum_1^{n^2} {}_{i,\mu}\, \psi_{i\mu\nu}(x)\, Z_{i\mu}f \qquad (\nu = 1, 2 \ldots n^2)$$

besitzen. Die $\psi_{i\mu\nu}(x)$ sind unbekannte Functionen von x. Nach unseren alten Integrationstheorien sind die Integration der Gleichung $Af = 0$ und die Bestimmung der Functionen $\psi_{i\mu\nu}(x)$ äquivalente Probleme.

1) Die hier dargestellten Theorien unterordnen sich als besondere Fälle unter allgemeine Theorien, die ich in den Math. Ann. Bd. 25 (1884, 1885) entwickelt habe. Am Schlusse des Jahres 1885 entwickelte ich zur Illustration meiner allgemeinen Theorien die Integrationstheorie einer linearen Gleichung $y^{(n)} + X_{n-1} y^{n-1} + \cdots + Xy = 0$ unter der speciellen Voraussetzung, dass man weiss, dass n unabhängige Integrale $y_1 \ldots y_n$ durch gegebene Relationen verknüpft sind. Ich zeigte, dass meine Theorien diese von früheren Verfassern nur gestreifte Frage vollständig erledigen.

Jetzt setzen wir wiederum voraus, dass ein System von q Integralgleichungen

$$\Omega_k(x\, y_1 \dots y_n y_1' \dots y_n^{(n-1)}) = 0$$

vorliegt, das sich nicht durch Differentiation vervollständigen lässt, indem jede Transformation der Gruppe $Y_{ik}f$, die eine Integralcurve der Mannigfaltigkeit $\Omega_1 = 0 \dots \Omega_q = 0$ in eine andere Integralcurve dieser Mannigfaltigkeit überführt, gleichzeitig die Mannigfaltigkeit $\Omega_1 = 0 \dots \Omega_q = 0$ invariant lässt.

Alsdann giebt es $n^2 - q$ unabhängige infinitesimale Transformationen

$$\sum\nolimits^{ik} c_{ik} Y_{ik} ,$$

die eine Mannigfaltigkeit $\Omega_1 = 0 \dots \Omega_q = 0$, $x = x_0$ invariant lassen, und diese Transformationen bilden eine $(n^2 - q)$-gliedrige Gruppe g. Nach meinen allgemeinen Theorien giebt es dann auch unter den infinitesimalen Transformationen $W_\nu f$ der reciproken Gruppe $(n^2 - q)$ unabhängige Transformationen, die unsere Mannigfaltigkeit $\Omega_1 = 0 \dots \Omega_q = 0$, $x = x_0$ invariant lassen und diese $n^2 - q$ Transformationen erzeugen eine $(n^2 - q)$-gliedrige Gruppe γ. Um diese Gruppe γ zu finden, suchen wir alle infinitesimalen Transformationen von der Form

$$Uf = \sum \chi_{ik}(x)\, Z_{ik} f ,$$

die eine Mannigfaltigkeit

$$\Omega_1 = 0 \dots \Omega_q = 0 , \quad x = x$$

invariant lassen; es giebt $n^2 - q$ solche infinitesimale Transformationen

$$V_1 f, \quad V_2 f \dots V_{n^2-q} f ,$$

die durch ausführbare Operationen gefunden werden können. Alsdann wissen wir, dass die infinitesimalen Transformationen Uf der Gruppe γ die Form

$$U_k f = \vartheta_{k1}(x)\, V_{k1} f + \vartheta_{k2}(x)\, V_{k2} f + \cdots \vartheta_{k,n^2-q}(x)\, V_{k,n^2-q} f$$

besitzen; dabei sind die $\vartheta_{kj}(x)$ Functionen von x, *die wir nicht kennen.*

Denken wir uns jetzt auf die Mannigfaltigkeit $\Omega_1 = 0 \dots \Omega_q = 0$ alle *endlichen* Transformationen der Gruppe $Y_{11} f \dots Y_{nn} f$

ausgeführt, so erhalten wir im (n^2+1)-fachen Raume $xy_1 \ldots y_n^{(n-1)}$ unendlich viele und zwar ∞^q von Integralcurven erzeugte Mannigfaltigkeiten, die den Raum ausfüllen.

Die Schaar S dieser ∞^q Mannigfaltigkeiten bleibt bei allen Transformationen der Gruppe: Af, $Y_{11}f \ldots Y_{nn}f$ invariant; und *jede einzelne Mannigfaltigkeit dieser Schaar gestattet die früher bestimmte Untergruppe* $Uf \ldots U_{n^2-q}f$ *der reciproken Gruppe. Andererseits leuchtet ein, dass die Gruppe* $V_1 f \ldots V_{n^2-q}$, *die wir wirklich aufstellen können, jede einzelne unter den* ∞^q *Mannigfaltigkeiten der Schaar* S *invariant lässt.*

Es ist ferner klar, dass jede von Integralcurven erzeugte Mannigfaltigkeit des (n^2+1)*-dimensionalen Raumes, die bei der Gruppe* $V_1 f \ldots V_{n^2-q}f$ *invariant bleibt, aus Mannigfaltigkeiten zusammengesetzt ist, die der besprochenen Schaar* S *angehören.*

Die hier aufgestellten Sätze sind directe Consequenzen unserer allgemeinen Theorie der reciproken, einfach transitiven Gruppen, deren grundlegende Sätze wir der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania im November 1882 (vgl. die *Sitzungsberichte* dieser Gesellschaft für 1882, sowie Math. Ann. Bd. 25) mittheilten. Diese Theorien werfen Licht über eine Theorie, die in späteren Jahren von mehreren Verfassern behandelt wurde, nämlich die Integrationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen

$$y^{(n)} + X_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + Xy = 0$$

mit algebraischen Coefficienten.

Besitzt eine vorgelegte Gleichung dieser Form *eine* algebraische Integralcurve, so sind ihre Integralcurven sämmtlich algebraisch.

Sind die Integralcurven nicht algebraisch, so ist es doch denkbar, dass eine solche Curve auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit gelegen ist. Dann gilt dasselbe für alle ∞^{n^2} Integralcurven. In diesem Falle giebt es unter allen algebraischen Mannigfaltigkeiten, die eine bestimmte Integralcurve enthalten, sicher eine kleinste, und diese kleinste Mannigfaltigkeit ist dann immer von Integralcurven erzeugt; sie geniesst überdies offenbar die folgende Eigenschaft: sie bleibt invariant bei jeder Transformation der Gruppe $Y_{11}f \ldots Y_{nn}f$, die eine auf der Mannigfaltigkeit gelegene Integralcurve in eine andere Integralcurve dieser Mannigfaltigkeit überführt.

Es gelten daher *die folgenden Sätze, die neu sind, wenn sie auch mit* PICARD'S *und* VESSIOT'S *Sätzen in Zusammenhang gebracht werden können:*

I. *Jede von Integralcurven erzeugte algebraische Mannigfaltigkeit bleibt invariant bei der Gruppe* $V_1 f \ldots V_{n^2-q} f$.

II. *Jede von Integralcurven erzeugte Mannigfaltigkeit des Raumes* $x y_1 \ldots y_n y_1' \ldots y_n^{(n-1)}$, *die bei allen Transformationen der Gruppe* $V_1 f \ldots V_{n^2-q} f$ *invariant bleibt, ist entweder selbst algebraisch oder aus algebraischen Mannigfaltigkeiten zusammengesetzt, die sämmtlich von Integralcurven erzeugt sind.*

In den soeben citirten Untersuchungen, die ich allerdings nur oberflächlich kenne, tritt die Gruppe $V_1 f \ldots V_{n^2-q} f$ nicht auf. *Diese Gruppe bleibt immer dieselbe;* sie hängt nur von der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + X y = 0$$

und dem gewählten Rationalitätsbereiche ab. *Welche Integralcurve* (d. h. welches System particulärer Lösungen) *zu Grunde gelegt wird, kommt nicht in Betracht.* Unsere Gruppe $V_1 f \ldots V_{n^2-q} f$ ist linear in den n^2 Veränderlichen $y_1 \ldots y_n y_1' \ldots y_n^{(n-1)}$, *lässt sich aber nicht auffassen als eine (lineare) Gruppe in den Veränderlichen* $y_1 \ldots y_n$.

Bei einer anderen Gelegenheit werden wir auf diese Theorien etwas ausführlicher eingehen. Mag es auch für viele Leser bequem sein, wenn bei der Darstellung dieser Theorien möglichst wenig aus unserer allgemeinen Gruppentheorie als bekannt vorausgesetzt wird, so glauben wir doch, dass der Kern der Sache klarer hervortritt, wenn eine breitere Grundlage vorausgesetzt wird.

8. Setzen wir jetzt ganz allgemein voraus, dass n Grössen $y_1 \ldots y_n$ als Functionen der Veränderlichen x durch ein System von Differentialgleichungen

$$\Omega_k (x, y_1 \ldots y_n y_1' \ldots y_n', \ldots y_1^{(m)} \ldots y_n^{(m)}) = 0$$
$$(k = 1, 2 \ldots)$$

bestimmt sind, deren allgemeinste Lösungen $y_1 \ldots y_n$ als Functionen eines speciellen Lösungssystems $z_1 \ldots z_n$ durch Gleichungen

$$(1) \qquad y_k = f_k(z_1 \ldots z_n c_1 c_2 \ldots c_r)$$

bestimmt sind, die eine r-gliedrige Gruppe bilden. Ausgedrückt als Functionen der x hängen somit die allgemeinsten Lösungen des Systems $\Omega_k = 0$ nur von r willkürlichen Constanten $c_1 c_2 \dots c_r$ ab; wir setzen der Einfachheit wegen voraus, dass in diesen Ausdrücken

$$y_k = \varphi_k(x\ c_1\ c_2 \dots c_r)$$

die r Constanten wesentlich sind.

Ehe wir nun weiter gehen, wollen wir, um die Darstellung zu vereinfachen, die nicht wesentliche Beschränkung einführen, dass das Gleichungssystem $\Omega_k = 0$ aus n Gleichungen besteht, *die nach $y_1^{(m)} \dots y_n^{(m)}$ auflösbar sind*:

$$(2) \qquad y_k^{(m)} = \varphi_k(x\ y_1 \dots y_n\ y_1' \dots y_n' \dots y_1^{m-1} \dots y_n^{m-1}).$$

Alsdann lässt sich das Gleichungssystem $\Omega_k = 0$ durch die lineare partielle Differentialgleichung

$$Af \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^n{}^k y_k' + \cdots + \sum_1^n{}^k \varphi_k \frac{\partial f}{\partial y_k^{m-1}} = 0$$

in den $mn + 1$ unabhängigen Veränderlichen

$$r\ y_1 \dots y_n\ y_1' \dots y_n' \dots y_1^{m-1} \dots y_n^{m-1}$$

ersetzen. Unser Problem kommt darauf hinaus, die ∞^{mn} Charakteristiken von $Af = 0$ zu bestimmen.

Sind $Y_1 f \dots Y f_r$ r unabhängige infinitesimale Transformationen der r-gliedrigen Gruppe $Y_k = f_k$ und $Y_1^{(m-1)}f \dots Y_r^{(m-1)}f$ die zugehörigen erweiterten infinitesimalen Transformationen in den Veränderlichen $y_1 \dots y_n\ y_1' \dots y_n' \dots y_1^{(m-1)} \dots y_n^{(m-1)}$, so gestattet die Gleichung $Af = 0$ die r-gliedrige Gruppe $Y_1^{(m-1)}f \dots Y_r^{(m-1)}f$, und da die Schaar der Charakteristiken der Gleichung $Af = 0$ von der Gruppe $Y_1^{(m-1)}f \dots Y_r^{(m-1)}f$ einfach transitiv transformirt wird, so ist

$$r = nm.$$

Liegt nun irgend eine von solchen Charateristiken erzeugte Mannigfaltigkeit

$$\Omega_k(x\,y_1 \dots y_n\,y_1' \dots y_n' \dots y_n^{(m-1)} \dots y_n^{(m-1)}) = 0$$
$$(k = 1, 2 \dots)$$

vor, so erkennt man genau, wie im vorigen Beispiel, dass es immer möglich ist, durch Differentiation eine Mannigfaltigkeit

$$\Omega_1 = 0 \dots \Omega_q = 0 \dots \Omega_{q'} = 0$$

zu finden, die ebenfalls von Charakteristiken erzeugt ist und überdies die folgende Eigenschaft geniesst: die Schaar der Charakteristiken dieser neuen Mannigfaltigkeit wird von einer Untergruppe der Gruppe $Y_1^{(m-1)}f \dots Y_r^{(m-1)}f$ einfach transitiv transformirt.

(Allerdings übersieht man in diesem Fall nicht, ob auch jetzt die Auffindung *einer* Charakteristik immer die Erledigung des simultanen Systems (2) nach sich zieht. Dass dies eintritt, wenn die *endlichen* Gleichungen der Gruppe (1) bekannt sind, ist von vornherein klar.

Auf die hiermit gestreifte Frage wollen wir hier nicht eingehen, da unser jetziges Integrationsproblem des Systems (2) sich a priori auf die Integration eines Systems von der früher betrachteten Form zurückführen lässt [1].)

Betrachten wir jetzt ein simultanes System

$$\Omega_k(x\, y_1 \dots y_n\, y_1' \dots y_n' \dots y_1^m \dots y_n^m) = 0,$$

dessen allgemeinstes Lösungssystem wiederum nur von willkürlichen Constanten abhängt. Wir setzen voraus, dass das Gleichungssystem $\Omega_k = 0$ eine bekannte endliche continuirliche Gruppe: $Y_1 f \dots Y_r f$,

$$Y_k f = \eta_{k1}(y)\frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + \eta_{kn}(y)\frac{\partial f}{\partial y_n},$$

gestattet, die aber in dem Sinne *intransitiv* ist, dass sie nicht jede Integralcurve in jede andere überführt.

In einem solchen Falle ist es im Allgemeinen zweckmässig, die Differentialinvarianten der Gruppe $Y_k f$ als neue Veränderliche einzuführen. Hierdurch erhält man ein vereinfachtes System von Differentialgleichungen, das keine bekannte Gruppe gestattet. Ist dieses Gleichungssystem integrirt, so bleibt nur

---

1) Die Theorie des Textes dehnt sich ohne weiteres auf Systeme partieller Differentialgleichungen aus

$$W_k\left(x_1 \cdots x_n\, y_1 \cdots y_m\, \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_1^2}{\partial x_1^2} \cdots\right) = 0,$$

deren allgemeinstes Lösungssystem $y_1 \dots y_m$ aus einem speciellen Lösungssystem $z_1 \dots z_m$ durch Gleichungen

$$y_k = f_k(x_1 \dots x_n\, z_1 \dots z_m)$$

abgeleitet wird, die eine continuirliche *endliche* Gruppe bestimmen (Math. Ann. Bd. 25).

übrig, ein System von Differentialgleichungen zu integriren, dessen Gruppe transitiv ist.

Wir wenden uns nun zu unbeschränkt integrablen Systemen von partiellen Differentialgleichungen

$$\Omega_k(x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \dots) = 0,$$

deren allgemeinste Lösungen von unendlich vielen willkürlichen Constanten abhängen. Wir nehmen an, dass unser Gleichungssystem: $\Omega_k = 0$ eine bekannte unendliche Gruppe G gestattet, dass ferner diese Gruppe in dem Sinne transitiv ist, dass sie jedes allgemeine System von Lösungen $y_1 \dots y_m$ in jedes andere derartige System $z_1 \dots z_m$ überführt.

Liegt nun irgend ein anderes Gleichungssystem:

$$W_i(x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \dots) = 0$$

vor, das mit dem System $\Omega_k = 0$ Lösungen gemein hat, die nicht nur von willkürlichen Constanten abhängen, so sind zwei Fälle möglich. Es ist denkbar, dass jede Transformation S der Gruppe G, die ein Lösungssystem $y_1 \dots y_n$ des Gleichungssystems

$$\Omega_1 = 0 \dots \Omega_q = 0, \; W_1 = 0 \dots W_\mu = 0$$

in ein ebensolches Lösungssystem überführt, das Gleichungssystem $\Omega_k = 0$, $W_i = 0$ invariant lässt; in diesem Falle gestattet das Gleichungssystem $\Omega_k = 0$, $W_i = 0$ eine gewisse (unendliche) Untergruppe der Gruppe G. Es ist aber auch denkbar, dass einige unter den eben definirten Transformationen T der vorgelegten Gruppe G das Gleichungssystem $\Omega_k = 0$, $W_i = 0$ nicht invariant lassen. In diesem letzteren Falle ist es immer möglich, das Gleichungssystem $W_i = 0$ derart zu vervollständigen, dass das hervorgehende unbeschränkt integrable System

(3) $\Omega_1 = 0 \dots \Omega_q = 0, \; W_1 = 0 \dots W_\mu = 0 \dots W_{\mu+\nu} = 0$

eine solche Untergruppe der Gruppe G gestattet, deren Transformationen die Lösungssysteme des unbeschränkt integrablen Systems (3) *transitiv* transformiren.

Führt man nun auf das hiermit erhaltene System (3) alle Transformationen der Gruppe G aus, so erhält man unendlich viele analoge Systeme und dabei leuchtet ein, dass jedes Lösungssystem der ursprünglichen Gleichungen $\Omega_k = 0$ eins unter den soeben besprochenen Systemen befriedigt.

II.

Einige Bemerkungen über Pfaff'sche Ausdrücke und Gleichungen.

Durch geometrische Untersuchungen wurde ich schon in den Jahren 1871 und 1872 zur Betrachtung von Pfaff'schen Gleichungen und Ausdrücken geführt. So z. B. erkannte ich, dass mein Satz, dass auf jeder Regelfläche eines linearen Complexes eine Haupttangentencurve durch *Differentiation* und sodann die übrigen Haupttangentencurven durch Quadratur gefunden werden können, mit der Theorie der Pfaff'schen Gleichungen in Verbindung steht. Meine Bestimmung aller Curven eines linearen Complexes durch Differentiation ist ja sogar ein directes Corollar der Pfaff'schen Theorie.

Noch grösseren Eindruck machte auf mich die Entdeckung, dass die von mir durch geometrische Betrachtungen begründete Theorie der Berührungstransformationen mit der Transformationstheorie der Pfaff'schen Ausdrücke und Gleichungen verknüpft ist.

Durch diese letzten Untersuchungen und meine damit im Zusammenhange stehende allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wurde die grosse Wichtigkeit der Pfaff'schen Theorien in eine neue Beleuchtung gesetzt. In den Jahren 1872—1877 veröffentlichte ich in norwegischen Zeitschriften mehrere Arbeiten über das Pfaff'sche Problem. Leider ist von meiner letzten Arbeit über diesen Gegenstand nur die erste Hälfte erschienen (Theorie des Pfaff'schen Problems erste Abhandlung, Archiv for Math. og Naturv. Bd. 2). Die zweite Hälfte sollte eine neue Begründung und weitere Entwickelung dieser Theorie liefern, deren Grundlage die Betrachtung der *infinitesimalen Transformationen der Pfaff'schen Gleichungen und Ausdrücke sein würde.* Ich sehe mich dazu veranlasst, einige unter den grundlegenden Ideen dieser von mir angekündigten zweiten Abhandlung zu recapituliren; gleichzeitig erlaube ich mir aus meinen in den Jahren 1872—1877 erschienenen Abhandhandlungen einige Stellen in Noten unter den Text *wortlautend* zu referiren.

Liegt eine PFAFF'sche Gleichung:

$$U_1(x_1 \cdots u_m)\,dx_1 + \cdots + U_m\,dx_m = 0$$

in den Veränderlichen $x_1 \ldots x_m$ vor, so kann man sich die Aufgabe stellen, alle infinitesimalen Transformationen:

$$Xf = \sum_1^n{}^i\, \xi_k(x_1 \ldots x_n)\,\frac{\delta f}{\delta x_k} = \delta f$$

zu finden, die diese Gleichung invariant lassen. Diese Forderung findet ihren analytischen Ausdruck in der Bedingungsgleichung:

$$\sum{}^k X\,U_k \cdot dx_k + \sum{}^k U_k \cdot d(Xx_k) = \varrho \sum{}^j U_j\,dx_j\,,$$

die sich kürzer so schreiben lässt:

$$\sum{}^k \delta U_k \cdot dx_k + \sum{}^k U_k \cdot d\,\delta x_k = \varrho \sum{}^j U_j\,dx_j$$

oder noch kürzer

$$\delta\Big(\sum{}^k U_k\,dx_k\Big) = \varrho \sum{}^j U_j\,dx_j\,.$$

Ganz besonders beschäftigte ich mich mit denjenigen infinitesimalen Transformationen Xf, deren Incremente $\delta x_k = \xi_k \delta t$ die Bedingung

$$X_1\,\delta x_1 + \cdots + X_n\,\delta x_n = 0$$

erfüllen. Grade diese letzte Fragestellung war der Ausgangspunkt für alle meine Untersuchungen über infinitesimale Berührungstransformationen. Ich ersetzte nämlich mit PFAFF das Integrationsproblem der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$W(z\,x_1 \ldots x_n\,p_1 \ldots p_n) = 0\,,$$

---

1) In der Note: Zur Theorie der Differentialprobleme, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1872, lenkte ich zum ersten Male mit den folgenden Worten die Aufmerksamkeit auf die infinitesimalen Transformationen der PFAFF'schen Gleichungen: Es ist mir gelungen, meine Arbeiten über partielle Gleichungen mit infinitesimalen Transformationen nach verschiedenen Seiten hin zu erweitern, insbesondere auch auf PFAFF'sche und simultane Systeme gewöhnlicher Gleichungen auszudehnen.

die ich nach p_n auflöste:

$$p_n = f(x_1 \dots x_n\, z\, p_1 \dots p_{n-1})$$

durch das Problem, die PFAFF'sche Gleichung

$$\text{(A)} \qquad dz - p_1\,dx_1 - \cdots - p_{n-1}\,dx_{n-1} - f\,dx_n = 0$$

auf eine n-gliedrige Form zu bringen. Indem ich sodann alle infinitesimalen Transformationen der Gleichung (A) suchte, für welche die Gleichung

$$\delta z - p_1\,\delta x_1 - \cdots - p_{n-1}\,\delta x_{n-1} - f\,\delta x_n = 0$$

besteht, entdeckte ich, wie ich hier nicht näher ausführe, dass alle infinitesimalen Berührungstransformationen des Raumes $z\,x_1 \dots x_n$ die Form

$$\delta x_k = \frac{\partial W}{\partial p_k}\,\delta t, \qquad \delta z = \left(-W + \sum p_k \frac{\partial W}{\partial p_k}\right)\delta t,$$
$$\delta p_k = \left(-\frac{\partial W}{\partial x_k} - p_k \frac{\partial W}{\partial z}\right)\delta t$$

besitzen.

Bald sah ich aber, dass es nothwendig war, auch für *Pfaff-sche Ausdrücke* alle infinitesimalen Transformationen zu bestimmen.

Ich bestimmte daher alle infinitesimalen Transformationen Xf, die eine Relation von der Form

$$X\left(\sum U\,dx\right) = d\Omega$$

oder eine Gleichung von der Form

$$X\left(\sum U\,dx\right) = 0$$

erfüllen[1]).

---

1) Am Schluss der Abhandlung: »Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen« (Archiv for Math. Bd. 2, 1877) stellte ich die im Texte besprochene Aufgabe in den folgenden Worten: »Ist irgend ein PFAFF-scher Ausdruck $X_1\,dx_1 + \cdots + X_m\,dx_m = \sum X\,dx$ vorgelegt, so kann man sich die Aufgabe stellen, die allgemeinste infinitesimale Transformation

$$Af = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_m \frac{\partial f}{\partial x_m}$$

Ich werde mir erlauben kurz anzugeben, wie ich seinerzeit die angekündigten Bestimmungen durchführte.

Der Ausdruck $X\left(\sum U\,dx\right)$ lässt sich folgendermassen umformen:

$$X\left(\sum U_k\,dx_k\right) = \sum^k U_k\,d\xi_k + \sum^{ik} \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\,\xi_i\,dx_k$$

$$= d\left(\sum^k U_k\,\xi_k\right) + \sum\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)\xi_i\,dx_k,$$

woraus, wenn

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = a_{ki}$$

gesetzt wird, die Relation folgt:

$$X\left(\sum U\,dx\right) = d\left(\sum U_k\,\xi_k\right) + \sum^{ki} a_{ki}\,\xi_i\,dx_k\,.$$

Legen wir diese Formel zu Grunde, so nimmt die Bedingungsgleichung:

$$X\left(\sum_1^m{}^k\, U_k\,dx_k\right) = d\Omega$$

die Form an:

$$\sum^{ki} a_{ki}\,\xi_i\,dx_k = d\left(\Omega - \sum^k U_k\,\xi_k\right) = dW,$$

wo W wie Ω eine willkürliche Function der Argumente $x_1 \ldots x_m$ bedeutet. Unsere Forderung findet daher ihren analytischen Ausdruck in den m linearen Gleichungen:

$$a_{k1}\,\xi_1 + a_{k2}\,\xi_2 + \cdots + a_{km}\,\xi_m = \frac{\partial W}{\partial x_k}$$
$$(k = 1, 2 \ldots m)\,.$$

Hier stellt sich nun die Sache verschieden, je nachdem die Determinante

$$|\,a_{ki}\,| = R$$

von Null verschieden ist oder nicht ist. Ist insbesondere $R \neq 0$, so ergiebt sich

---

zu finden, welche eine Relation von der Form $A\left(\sum X\,dx\right) = d\Omega$ erfüllt, oder auch welche $A\left(\sum X\,dx\right) = 0$ giebt. Diese Aufgaben können immer erledigt werden. Ist insbesondere $m = 2n$, und ist dabei die Normalform von $\sum X\,dx$ n-gliedrig mit $2n$ unabhängigen Functionen, so verlangt die erste Aufgabe nur ausführbare Operationen« . . . .

$$\xi_i = \sum_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial W}{\partial x_k}$$

und

(a) $$Xf = \sum_{ik} \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial W}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Der hiermit gefundene Ausdruck spielt bekanntlich längst eine wichtige Rolle in der Theorie des Pfaff'schen Problems.

Die Bedingungsgleichung:

$$X\left(\sum U\,dx\right) = 0$$

nimmt in entsprechender Weise die Form an:

$$\sum_{ki} a_{ki} \xi_i dx_k = -d\left(\sum U_k \xi_k\right) = -dH,$$

und es wird

$$a_{k1}\xi_1 + \cdots + a_{km}\xi_m = -\frac{dH}{\partial x_k}$$

und wenn $|\,a_{ki}\,| \neq 0$ ist:

$$\xi_i = \sum_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial(-H)}{\partial x_k}.$$

Hier ist H keine willkürliche Function der x; es ist ja $\sum U_i \xi_i = H$ und in Folge dessen

$$\sum_{ik} U_i \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial H}{\partial x_k} + H = 0.$$

Ist H eine beliebige Lösung dieser linearen partiellen Differentialgleichung, so ist

(b) $$\sum_{ik} \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

der allgemeine Ausdruck der gesuchten infinitesimalen Transformationen.

Setzen wir insbesondere $m = 2n$ und

$$\sum_1^m{}_k U_k dx_k = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n,$$

so wird die Grösse W in der Formel (a) eine beliebige Function der x und p, und Xf erhält die Form

$$Xf = (\Phi f),$$

unter derselben Voraussetzung erhält Xf in der Formel (b die Gestalt

$$Xf = (Hf), \quad \text{wo} \quad \sum p \frac{\partial H}{\partial p} = H .$$

Diese beiden Formeln bilden bekanntlich die Grundlage für meine allgemeine Theorie der Berührungstransformationsgruppen.

Wenden wir uns jetzt zu den Bedingungsgleichungen:

$$X\left(\sum U dx\right) = \varrho \sum U dx ,$$
$$U_1 \xi_1 + \cdots + U_m \xi_m = 0 ,$$

die uns zur Bestimmung der Grössen $\xi_1 \ldots \xi_m$ und ϱ die Gleichungen

$$\begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1m}\xi_m - \varrho U_1 = 0 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\xi_1 + \cdots + a_{mm}\xi_m - \varrho U_m = 0 , \\ U_1\xi_1 + \cdots + U_m\xi_m = 0 \end{array}$$

liefern. Ist insbesondere die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1m} & U_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mm} & U_m \\ U_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & U_m & 0 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden, so verschwinden alle ξ. Ist dagegen diese Determinante gleich Null, während einige unter ihren grössten Unterdeterminanten von Null verschieden sind, so werden die *Verhältnisse* der ξ_i vollständig bestimmt. Das hiermit formulirte specielle Resultat, das in den obenstehenden Formeln enthalten ist, deckt sich mit meiner alten Bemerkung, dass eine infinitesimale Elementtransformation des Raumes $zx_1 \ldots x_n p_1 \ldots p_n$, die jedes Element einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$W(zx_1 \ldots x_n p_1 \ldots p_n) = 0$$

in sich verschiebt, immer jedes Element der Gleichung in ein benachbartes Element des zugehörigen charakteristischen Streifens überführt.

Was im Uebrigen den Inhalt meiner im Jahre 1877 angekündigten zweiten Abhandlung über das PFAFF'sche Problem betrifft, beschränke ich mich auf die folgenden Bemerkungen.

In meiner grossen Abhandlung »Theorie der Transformationsgruppen«, die im Bd. 16 der Math. Annalen (1879) erschien, findet sich die folgende Stelle: »Und zwar hat meine Theorie Bedeutung nicht allein für solche Differentialgleichungen, die eine Transformationsgruppe gestatten, sondern überhaupt für beliebige Differentialgleichungen. Dies beruht wesentlich auf den folgenden Bemerkungen. Die Frage, ob eine vorgelegte Diffentialgleichung $G = 0$ (oder ein System solcher Gleichungen) durch eine zweckmässige Punkt- oder Berührungstransformation auf eine gewisse Form $F = 0$ gebracht werden kann, verlangt zu ihrer Erledigung in jedem einzelnen Falle nur solche Operationen, die man in der Integralrechnung als ausführbar zu bezeichnen pflegt. Gestattet sowohl $G = 0$ wie $F = 0$ je eine Transformationsgruppe, so ist zunächst nothwendig, dass die eine Gruppe in die andere Gruppe überführt werden kann« u. s. w.

Handelt es sich um Pfaff'sche Gleichungen $\sum U du = 0$, oder aber um Pfaff'sche Ausdrücke, so ist nach meinen alten Untersuchungen die Aehnlichkeit der zugehörigen Transformationsgruppen ein hinreichendes Kriterium für die Aequivalenz.

Bei verschiedenen Gelegenheiten habe ich darauf hingewiesen, dass die Theorie der Functionengruppen mit der Theorie der Pfaff'schen Ausdrücke im Zusammenhang steht. Dieser Zusammenhang beruht auf der folgenden Bemerkung, die unmittelbar aus meinen alten Theorien hervorgeht, wenn sie auch möglicherweise nirgends von mir *explicite* formulirt wurde.

Ist $X_1 \dots X_q \dots X_{q+m}\, P_1 \dots P_q$ eine $(2q + m)$-gliedrige Functionengruppe, so finden wir die allgemeinste kanonische Form dieser Gruppe:

$$\begin{aligned} Y_k &= \Omega_k(X_1 \dots X_{q+m}\, P_1 \dots P_q)\,, \\ Q_i &= \Phi_i(\,.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\,)\,, \\ (k &= 1 \dots q + m\,;\; i = 1 \dots q)\,, \end{aligned}$$

indem wir die Gleichung

$$Q_1\, dY_1 + \dots + Q_q\, dY_q = P_1\, dx_1 + \dots + P_q\, dX_q + d\Pi$$

in allgemeinster Weise lösen und sodann $Y_{q+1} \dots Y_{q+m}$ gleich willkürlichen Functionen von $X_{q+1} \dots X_{q+m}$ setzen.

Dementsprechend wird, wenn die vorgelegte Gruppe homogen ist, ihre allgemeinste kanonische Form gefunden, indem das Transformationsproblem

$$\sum_1^q Q_k\, dY_k = \sum_1^q P_k\, dX_k$$

gelöst wird[1]).

1) Bei dieser Gelegenheit möchte ich ausdrücklich bemerken, dass diejenige neue Deutung des Integrationsproblems einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(z\ x\ y\ p\ q) = 0\ ,$$

die ich in den Math. Ann. Bd. 5 veröffentlichte, sich damit deckt, dass der Satz von Meussier über die Krümmung der Flächen sich auf Monge'sche Gleichungen ausdehnt.

Friedrich Engel, a. o. M., *Das Pfaffsche Problem.*

Schon PFAFF selbst hat das nach ihm benannte Problem auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt. Später ist es nach und nach gelungen, die Ordnung der erforderlichen Integrationen immer mehr herabzudrücken, aber nach den Untersuchungen von LIE hat man jetzt bereits das Aeusserste erreicht, was überhaupt geleistet werden kann, so lange die in einem PFAFFschen Probleme auftretenden Funktionen ganz allgemeiner Natur sind: so lange das der Fall ist, lässt sich die Ordnung der erforderlichen Integrationen nicht weiter herabdrücken, als es schon geschehen ist[1]. Es wäre daher vergebliches Bemühen, die Lösung des Problems noch weiter vereinfachen zu wollen, dagegen scheint mir, dass die Herleitung und die Darstellung der Lösung noch der Vereinfachung fähig ist, wenn man den von LIE mit so grossem Erfolge eingeführten Begriff der infinitesimalen Transformation möglichst ausnutzt. Zu zeigen, wie das geschehen kann, ist der Zweck dieser Zeilen.

§ 1.

Hat man einen beliebigen PFAFFschen Ausdruck:

$$\Delta = \sum_{\nu}^{1\ldots n} a_\nu(x_1, \ldots x_n)\, dx_\nu \tag{1}$$

---

1) Die Abhandlungen von LIE, die speciell das PFAFFsche Problem behandeln, sind folgende: »Neue Integrationsmethode eines $2n$-gliedrigen PFAFF'schen Problems«, Ges. d. W. zu Christiania 1873. »Theorie des PFAFFschen Problems (Erste — bisher einzige — Abhandlung)«. Archiv for Mathematik Bd. 2, Christiania 1876. Vgl. auch »Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen«, ebd.

und eine beliebige infinitesimale Transformation:

$$Xf = \sum_{\nu}^{1\dots n} \xi_\nu(x_1, \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu},$$

so ist der Ausdruck:

$$(2) \qquad \sum_{\nu}^{1\dots n} \alpha_\nu(x_1, \dots x_n)\, \xi_\nu$$

eine simultane Invariante von $\varDelta$ und Xf gegenüber allen Punkttransformationen in den Veränderlichen $x_1, \dots x_n$.

Ist nämlich:

$$(3) \qquad x_\nu' = F_\nu(x_1, \dots x_n) \qquad (\nu = 1, \dots n)$$

eine beliebige Punkttransformation, so erhält $\varDelta$ bei Einführung der neuen Veränderlichen $x_1', \dots x_n'$ eine neue Form:

$$(4) \qquad \varDelta = \sum_{\nu}^{1\dots n} \alpha_\nu\, dx_\nu = \sum_{\nu}^{1\dots n} \beta_\nu(x_1', \dots x_n')\, dx_\nu'$$

und zugleich erhält Xf eine neue Form:

$$Xf = \sum_{\nu}^{1\dots n} \overline{\xi}_\nu(x_1', \dots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_\nu'}.$$

Nun aber bestehen zwischen den Zuwachsen:

$$\delta x_\nu = \xi_\nu\, \delta t \qquad (\nu = 1, \dots n),$$

die Xf den alten Veränderlichen ertheilt, und den Zuwachsen:

$$\delta x_\nu' = \overline{\xi}_\nu\, \delta t \qquad (\nu = 1, \dots n),$$

die es den neuen Veränderlichen ertheilt, offenbar genau dieselben Beziehungen, wie zwischen den Differentialen dx_ν und dx_ν', demnach folgt aus (4) das Bestehen einer Gleichung von der Gestalt:

$$(5) \qquad \sum_{\nu}^{1\dots n} \alpha_\nu(x) \cdot \xi_\nu(x) = \sum_{\nu}^{1\dots n} \beta_\nu(x') \cdot \overline{\xi}_\nu(x'),$$

womit unsre Behauptung bewiesen ist.

Denkt man sich jetzt die infinitesimale Transformation Xf auf den PFAFFschen Ausdruck $\varDelta$ ausgeführt, so erhält $\varDelta$ einen unendlich kleinen Zuwachs $\delta\varDelta$, den wir nach LIE in der Form:

$$(6) \qquad \delta\varDelta = X(\varDelta) \cdot \delta t$$

schreiben können, und es liegt auf der Hand, dass auch der Ausdruck $X(\varDelta)$ eine simultane Invariante von $\varDelta$ und Xf ist. Für $X(\varDelta)$ ergiebt sich der Werth:

$$X(\varDelta) = \sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \xi_\mu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} dx_\nu + \sum_{\nu}^{1\ldots n} \alpha_\nu d\xi_\nu$$

$$= \sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \xi_\mu \left(\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x_\nu} \right) dx_\nu + d\sum_{\nu}^{1\ldots n} \alpha_\nu \xi_\nu,$$

der bei Benutzung der Abkürzungen:

(7) $$\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} = \alpha_{\mu\nu}$$

in der Gestalt:

(8) $$X(\varDelta) = \sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu dx_\mu + d\sum_{\nu}^{1\ldots n} \alpha_\nu \xi_\nu$$

erscheint, eine Formel, die wir häufig benutzen werden. Da übrigens $\sum \alpha_\nu \xi_\nu$ eine simultane Invariante von $\varDelta$ und Xf ist, so ist auch $d\sum \alpha_\nu \xi_\nu$ eine solche und damit zugleich:

$$X(\varDelta) - d\sum \alpha_\nu \xi_\nu = \sum_{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu dx_\mu .$$

Es ist das die bekannte Kovariante von $\varDelta$, die man gewöhnlich in der Form:

$$\sum_{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu} dx_\mu \delta x_\nu$$

schreibt.

§ 2.

Wir fragen jetzt nach solchen Schaaren von infinitesimalen Transformationen, die mit unserm Pfaffschen Ausdrucke (1) invariant verknüpft sind gegenüber allen Punkttransformationen.

Eine derartige Schaar bietet sich ganz von selbst dar, nämlich die Schaar aller infinitesimalen Transformationen Xf, die der Gleichung:

(9) $$\sum_{\nu}^{1\ldots n} \alpha_\nu \xi_\nu = 0$$

genügen. Eine zweite Schaar, die mit $\varDelta$ invariant verknüpft ist, bilden die infinitesimalen Transformationen Xf, bei denen der Ausdruck Δ invariant bleibt, für die also der Ausdruck $X(\Delta)$ identisch verschwindet; eine dritte Schaar dieser Art bilden endlich die infinitesimalen Transformationen Xf, die Δ bis auf ein hinzutretendes vollständiges Differential invariant lassen, für die also eine Gleichung von der Form $X(\Delta) = du$ besteht, unter u eine Funktion von $x_1, \dots x_n$ verstanden. Dass auch diese beiden Schaaren von infinitesimalen Transformationen mit Δ invariant verknüpft sind, folgt daraus, dass $X(\Delta)$ eine simultane Invariante von Xf und Δ ist, denn darin liegt, dass $X(\Delta)$, wenn es einmal verschwindet, auch nach Einführung neuer Veränderlicher den Werth Null behält, und wenn es einmal ein vollständiges Differential ist, auch bei Einführung neuer Veränderlicher ein vollständiges Differential bleibt.

Es liegt nun auf der Hand, dass auch alle die infinitesimalen Transformationen, die gleichzeitig der ersten und der zweiten Schaar angehören, eine mit Δ invariant verknüpfte Schaar bilden, und dasselbe gilt offenbar von dem Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen, die zugleich der ersten und der dritten Schaar angehören. Diese beiden neuen Schaaren von infinitesimalen Transformationen werden wir jetzt näher untersuchen.

§ 3.

Soll eine infinitesimale Transformation Xf die Gleichung: $\sum \alpha_\nu \xi_\nu = 0$ befriedigen und zugleich den Ausdruck Δ invariant lassen, also der Gleichung: $X(\Delta) = 0$ identisch genügen, so ist nach (8) nothwendig und hinreichend, dass die Gleichungen:

$$(10) \qquad \sum_\nu^{1\dots n} \alpha_\nu \xi_\nu = 0\,, \qquad \sum_\nu^{1\dots n} \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, \dots n)$$

bestehen.

Die Gleichungen (10) bestimmen also eine mit Δ invariant verknüpfte Schaar von infinitesimalen Transformationen. Verschwinden nun in der Matrix:

$$(11) \qquad \left|\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{array}\right|$$

der Gleichungen (10) alle $(m+1)$-reihigen Determinanten, nicht aber alle m-reihigen, so lassen sich die Gleichungen (10) nach m von den ξ_ν auflösen, während die $n-m$ übrigen der ξ_ν ganz willkürlich bleiben. Es giebt also gerade $n-m$ infinitesimale Transformationen:

$$(12)\quad X_k f = \sum_\nu^{1\dots n} \xi_{k\nu}(x_1, \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (k = 1, \dots n-m),$$

die den Gleichungen (10) genügen und zwischen denen keine Identität von der Form:

$$\varphi_1(x) X_1 f + \cdots + \varphi_{n-m}(x) X_{n-m} f \equiv 0$$

besteht, in der die Functionen $\varphi_1, \dots \varphi_{n-m}$ nicht alle verschwinden. Zugleich ist klar, dass der Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen Xf, die den Gleichungen (10) genügen, durch einen Ausdruck von der Form:

$$(13)\qquad \sum_k^{1\dots n-m} \chi_k(x_1, \dots x_n) X_k f$$

dargestellt wird, wo $\chi_1, \dots \chi_{n-m}$ willkürliche Functionen sind. Da nun die Schaar (13) mit Δ invariant verknüpft ist, so leuchtet ein, dass die Zahl m, die durch das Verhalten der Determinanten der Matrix (11) bestimmt ist, eine *Invariante* von Δ ist gegenüber allen Punkttransformationen in $x_1, \dots x_n$.

Es versteht sich von selbst, dass man auch umgekehrt sagen kann: weiss man aus irgend einem Grunde, dass es $n-m$ infinitesimale Transformationen: $X_1 f, \dots X_{n-m} f$ giebt, die der Gleichung: $\sum \alpha_\nu \xi_\nu = 0$ genügen, die durch keine Identität von der Form: $\varphi_1(x) \cdot X_1 f + \cdots + \varphi_{n-m}(x) \cdot X_{n-m} f \equiv 0$ verknüpft sind und die den Pfaff'schen Ausdruck: $\sum \alpha_\nu dx_\nu$ invariant lassen, so kann man schliessen, dass in der Matrix (11) mindestens alle Determinanten mit $n+1-(n-m) = m+1$ Reihen und Kolonnen verschwinden.

Da die Schaar (13) aus lauter infinitesimalen Transformationen besteht, die Δ invariant lassen, und da sie mit Δ invariant verknüpft ist, so liegt auf der Hand, dass sie bei jeder ihr angehörigen infinitesimalen Transformation invariant bleibt. Nun verwandelt sich aber die infinitesimale Transformation $X_k f$, wenn man auf sie die infinitesimale Transformation $X_j f$ oder

$x_\nu' = x_\nu + X_j x_\nu \cdot \delta t$ ausführt, in: $X_k f + \delta t (X_k X_j)$, also muss auch $(X_k X_j)$ der Schaar (13) angehören, d. h. es muss eine Relation von der Form:

$$(14) \qquad (X_k X_j) = \sum_s^{1\dots n-m} \varphi_{kjs}(x) X_s f \qquad (k, j = 1 \dots n-m)$$

bestehen. Mit andern Worten: die $n-m$ von einander unabhängigen Gleichungen:

$$(15) \qquad X_1 f = 0, \ \dots, \ X_{n-m} f = 0$$

bilden ein $(n-m)$-gliedriges vollständiges System und haben gerade m unabhängige Lösungen gemein.

Man kann diese Eigenschaft der Gleichungen (15) auch durch eine sehr einfache Rechnung beweisen. Aus $X_k(\Delta) \equiv 0$ und $X_j(\Delta) \equiv 0$ folgt nämlich:

$$X_k X_j \Delta - X_j X_k \Delta \equiv 0$$

oder, wenn man

$$X_k X_j f - X_j X_k f = (X_k X_j) = Zf$$

setzt:

$$Z(\Delta) \equiv 0,$$

also lässt auch Zf den Ausdruck Δ invariant. Demnach wird:

$$Zf = \sum_\nu^{1\dots n} \zeta_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = \sum_{\mu\nu}^{1\dots n} \left(\xi_{k\mu} \frac{\partial \xi_{j\nu}}{\partial x_\mu} - \xi_{j\mu} \frac{\partial \xi_{k\nu}}{\partial x_\mu} \right) \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

der Schaar (13) angehören, sobald $\sum \alpha_\nu \zeta_\nu = 0$ ist. Nun ist:

$$\sum_\nu \alpha_\nu \xi_{k\nu} = 0, \quad \sum_\nu \alpha_\nu \xi_{j\nu} = 0,$$

also auch:

$$X_k \left(\sum_\nu \alpha_\nu \xi_{j\nu} \right) - X_j \left(\sum_\nu \alpha_\nu \xi_{k\nu} \right) = 0$$

oder ausgerechnet:

$$\sum_\nu \alpha_\nu \zeta_\nu + \sum_{\mu\nu} \xi_{k\mu} \xi_{j\nu} \left(\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x_\nu} \right) = 0,$$

diese Gleichung reducirt sich aber, weil die $\xi_{k\mu}$ und die $\xi_{j\nu}$ den Gleichungen (10) genügen, auf:

$$\sum_\nu^{1\dots n} \alpha_\nu \zeta_\nu = 0.$$

§ 4.

Wir fragen nunmehr nach allen infinitesimalen Transformationen Zf, die der Bedingung: $\sum \alpha_\nu \zeta_\nu = 0$ genügen, und die den Ausdruck Δ bis auf ein hinzutretendes vollständiges Differential invariant lassen, für die also eine Gleichung von der Form: $Z(\Delta) = dU$ besteht, unter U eine gewisse Funktion von $x_1, \dots x_n$ verstanden. Giebt es solche infinitesimale Transformationen, so bilden sie sicher eine mit Δ invariant verknüpfte Schaar.

Es soll $Z\Delta = dU$ werden und: $\sum \alpha_\nu \zeta_\nu = 0$, also nach (8):

$$\sum_{\mu\nu}^{1\dots n} \alpha_{\mu\nu} \zeta_\nu dx_\mu = dU .$$

Wir erhalten demnach für $\zeta_1, \dots \zeta_n$ die Bedingungen:

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_\nu^{1\dots n} \alpha_\nu \zeta_\nu = 0 \\ &\sum_\nu^{1\dots n} \alpha_{\mu\nu} \zeta_\nu = \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \\ &\qquad (\mu = 1, \dots n) . \end{aligned} \right.$$

Durch Elimination der ζ_ν ergeben sich aus (16) gewisse Differentialgleichungen für U und es muss zunächst nachgewiesen werden, dass diese Differentialgleichungen Lösungen besitzen.

Die Differentialgleichungen, denen U genügen muss, sind in der Form:

$$\sum_\nu^{1\dots n} \eta_\nu \frac{\partial U}{\partial x_\nu} = 0$$

enthalten, wo $\eta_1, \dots \eta_n$ so beschaffen sein müssen, dass

$$\sum_\mu^{1\dots n} \eta_\mu \sum_\nu^{1\dots n} \alpha_{\mu\nu} \zeta_\nu + \varrho \sum_\nu^{1\dots n} \alpha_\nu \zeta_\nu = 0$$

wird für alle Werthe von $\zeta_1, \dots \zeta_n$. Mithin sind $\eta_1, \dots \eta_n$ die allgemeinsten Funktionen, vermöge deren n Gleichungen von der Form:

$$(17) \qquad \sum_\mu^{1\dots n} \alpha_{\mu\nu} \eta_\mu + \varrho \alpha_\nu = 0 \quad (\nu = 1 \dots n)$$

bestehen. Da $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ nicht sämmtlich verschwinden, so lassen sich die Gleichungen (17) unter den im § 3 über die Matrix (11) gemachten Voraussetzungen nach ϱ und nach $m-1$ von den Grössen η_μ auflösen, während die $n-m+1$ übrigen der η_μ vollkommen willkürlich bleiben. Demnach muss U gerade $n-m+1$ von einander unabhängige Gleichungen:

$$(18)\qquad Y_k f = \sum_{\nu}^{1\ldots n} \eta_{k\nu}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0 \quad (k = 1 \ldots, n-m+1)$$

erfüllen.

Ist insbesondere Xf eine infinitesimale Transformation, die der Gleichung $\sum \alpha_\nu \xi_\nu = 0$ genügt und die $\varDelta$ invariant lässt, für die also die Gleichungen (10) gelten, so folgt aus (16):

$$\sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu \xi_\mu = \sum_{\nu}^{1\ldots n} \xi_\mu \frac{\partial U}{\partial x_\mu},$$

wo die linke Seite wegen $\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}$ und wegen (10) verschwindet. Demnach sind unter den Gleichungen (18) auch die von einander unabhängigen Gleichungen (15) enthalten, und wir können daher das System (18) in der Form:

$$(18')\qquad \begin{cases} X_1 f = 0, \ \ldots, \ X_{n-m} f = 0 \\ Y_{n-m+1} f = \sum_{\nu}^{1\ldots n} \eta_{n-m+1,\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0 \end{cases}$$

darstellen, wo die Gleichung $Y_{n-m+1} f = 0$ von den $n-m$ übrigen unabhängig ist.

Die Gleichungen (18) oder (18') bilden ihrerseits ein $(n-m+1)$-gliedriges vollständiges System. Um das zu beweisen, bemerken wir, dass jede infinitesimale Transformation Yf, die den Gleichungen (17) genügt, nach (8) auch die Gleichung:

$$Y(\varDelta) = \sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \alpha_{\mu\nu} \eta_\nu \, dx_\mu + d \sum_{\nu}^{1\ldots n} \alpha_\nu \eta_\nu$$

erfüllt, also wegen (17) die Gleichung:

$$(19)\qquad Y(\varDelta) = \varrho \varDelta + d \sum_{\nu}^{1\ldots n} \alpha_\nu \eta_\nu,$$

und ebenso erfüllt umgekehrt jede infinitesimale Transformation Yf, für die eine Gleichung von der Form (19) besteht, die Relationen (17). Nun aber sind $\sum \alpha_\nu \eta_\nu$ und $Y(\varDelta)$ simultane Invarianten von $\varDelta$ und Yf, wenn daher für Yf eine Gleichung von der Form (19) besteht, so gilt das auch dann noch, wenn wir in $\varDelta$ und Yf durch eine beliebige Transformation neue Veränderliche einführen. Demnach ist die Schaar aller infinitesimalen Transformationen Yf, für die eine Gleichung von der Form (19) besteht, mit $\varDelta$ invariant verknüpft, und dasselbe gilt von der damit zusammenfallenden Schaar aller infinitesimalen Transformationen Yf, die Relationen von der Form (17) erfüllen.

Die eben beschriebene Schaar von infinitesimalen Transformationen kann aber nach dem Früheren in der Form:

$$(20)\qquad \sum_\mu^{1\dots n-m} \chi_\mu(x) X_\mu f + \chi_{n-m+1}(x)\, Y_{n-m+1} f$$

dargestellt werden, wo $\chi_1 \dots \chi_{n-m+1}$ willkürliche Funktionen von $x_1, \dots x_n$ sind. Da diese Schaar mit $\varDelta$ invariant verknüpft ist, so muss sie insbesondere bei Ausführung der infinitesimalen Transformationen $X_1 f, \dots X_{n-m} f$, die ja alle $\varDelta$ invariant lassen, ebenfalls invariant bleiben. Demnach müssen die $n-m$ infinitesimale Transformationen: $(X_\mu\, Y_{n-m+1})$ wieder der Schaar (19) angehören, das heisst es müssen Relationen von der Form

$$(21)\quad (X_\mu\, Y_{n-m+1}) = \sum_s^{1\dots n-m} \varphi_{\mu s}(x) X_s f + \varphi_{\mu, n-m+1}(x)\, Y_{n-m+1} f$$
$$(\mu = 1, \dots n-m)$$

bestehen, die in Verbindung mit (14) zeigen, dass die Gleichungen (18′) wirklich ein $(n-m+1)$-gliedriges vollständiges System bilden.

Man kann diese Eigenschaft der Gleichungen (18) oder (18′) auch durch Rechnung beweisen und braucht zu diesem Zwecke nur Folgendes zu zeigen: wenn zwei infinitesimale Transformationen:

$$Y_i f = \sum_\nu^{1\dots n} \eta_{i\nu}(x) \frac{\partial f}{\partial x_\nu}, \quad Y_k f = \sum_\nu^{1\dots n} \eta_{k\nu}(x) \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

Relationen von der Form:

$$(22)\qquad \begin{cases} Y_i(\varDelta) = \varrho_i \cdot \varDelta + d\left(\sum\limits_\nu \alpha_\nu \eta_{i\nu}\right) \\ Y_k(\varDelta) = \varrho_k \cdot \varDelta + d\left(\sum\limits_\nu \alpha_\nu \eta_{k\nu}\right) \end{cases}$$

erfüllen, so besteht für:

$$(Y_i Y_k) = \sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \left(\eta_{i\mu} \frac{\partial \eta_{k\nu}}{\partial x_\mu} - \eta_{k\mu} \frac{\partial \eta_{i\nu}}{\partial x_\mu}\right) \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$
$$= \sum_\nu^{1\ldots n} \omega_\nu(x) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = \Omega(f)$$

eine Relation von der Form:

$$\Omega(\varDelta) = \sigma \cdot \varDelta + d\left(\sum_\nu \alpha_\nu \omega_\nu\right).$$

Wir bemerken zunächst, dass die Gleichungen (22) mit den nachstehenden:

$$(23)\qquad \begin{cases} \sum\limits_\mu \alpha_{\mu\nu} \eta_{i\mu} + \varrho_i \alpha_\nu = 0 \\ \sum\limits_\mu \alpha_{\mu\nu} \eta_{k\mu} + \varrho_k \alpha_\nu = 0 \end{cases}$$

gleichbedeutend sind. Aus (23) aber folgt:

$$\sum_{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu} \eta_{i\mu} \eta_{k\nu} + \varrho_i \sum_\nu \alpha_\nu \eta_{k\nu} = 0,$$

was sich nach (23) auch in der Form:

$$(24)\qquad \varrho_i \sum_\nu \alpha_\nu \eta_{k\nu} + \varrho_k \sum_\mu \alpha_\mu \eta_{i\mu} = 0$$

schreiben lässt. Andrerseits folgt aus (23) auch noch:

$$(24')\qquad \varrho_i \sum_\nu \alpha_\nu \eta_{i\nu} = 0, \quad \varrho_k \sum_\nu \alpha_\nu \eta_{k\nu} = 0.$$

Wenn daher ϱ_i nicht gleich Null ist, so sind $\sum \alpha_\nu \eta_{i\nu}$ und $\sum \alpha_\nu \eta_{k\nu}$ beide gleich Null; wenn aber $\sum \alpha_\nu \eta_{i\nu}$ nicht gleich Null ist, so verschwinden ϱ_i und ϱ_k beide.

Nach diesen Vorbereitungen bilden wir mit Hülfe von (22) den Ausdruck:

$$Y_i Y_k(\varDelta) - Y_k Y_i(\varDelta) = \Omega(\varDelta)$$
$$= (Y_i(\varrho_k) - Y_k(\varrho_i))\varDelta +$$
$$+ \varrho_k d\Big(\sum_\nu \alpha_\nu \eta_{i\nu}\Big) - \varrho_i d\Big(\sum_\nu \alpha_\nu \eta_{k\nu}\Big)$$
$$+ dY_i\Big(\sum_\nu \alpha_\nu \eta_{k\nu}\Big) - dY_k\Big(\sum_\nu \alpha_\nu \eta_{i\nu}\Big).$$

Dem vorhin Gesagten zufolge verschwinden hier die Glieder in der zweiten Zeile und wir bekommen, wenn wir noch: $Y_i(\varrho_k) - Y_k(\varrho_i) = \sigma$ setzen:

$$\Omega(\varDelta) = \sigma \cdot \varDelta + d\sum_{\nu\mu} \alpha_\nu \left(\eta_{i\mu}\frac{\partial \eta_{k\nu}}{\partial x_\mu} - \eta_{k\mu}\frac{\partial \eta_{i\nu}}{\partial x_\mu}\right) +$$
$$+ d\sum_{\nu\mu} \alpha_{\nu\mu}\eta_{i\mu}\eta_{k\nu}\,.$$

Hier lässt sich das Differential in der zweiten Zeile nach (23) in der Form:

$$d\Big(\varrho_i \sum_\nu \alpha_\nu \eta_{k\nu}\Big)$$

darstellen und verschwindet daher sicher, es bleibt somit:

$$\Omega(\varDelta) = \sigma \cdot \varDelta + d\Big(\sum_\nu \alpha_\nu \omega_\nu\Big),$$

was eben zu beweisen war.

Da wir jetzt wissen, dass die Gleichungen (18) oder (18′) ein $(n - m + 1)$-gliedriges vollständiges System bilden, und da andrerseits $m \leqq n$ aber $\geqq 1$ ist, so sind wir sicher, dass für $m > 1$ die Gleichungen (18) oder (18′) immer Lösungen besitzen, dass es also für $m > 1$ immer solche infinitesimale Transformationen Zf giebt, wie wir sie im Anfange dieses Paragraphen gesucht haben. Um eine solche infinitesimale Transformation Zf zu finden, brauchen wir nämlich blos eine Lösung U des vollständigen Systems (18′) aufzusuchen, die sich nicht auf eine Konstante reducirt, und müssen dann noch $\zeta_1, \dots \zeta_n$ den Gleichungen (16) entsprechend bestimmen. Wegen der Beschaffenheit von U reduciren sich die Gleichungen (16) auf gerade m von einander unabhängige, aus denen man m von den ζ_ν durch die übrigen, die vollkommen willkürlich bleiben, ausdrücken kann.

Hat man $\zeta_1, \dots \zeta_n$ so bestimmt, dass die Gleichungen (16) befriedigt sind, so wird $Z(\Delta) = dU$ und zugleich, wie noch aus (16) folgt:

$$\sum_{\mu}^{1\dots m} \zeta_\mu \frac{\partial U}{\partial x_\mu} = Z(U) = 0\,.$$

Ausdrücklich möge noch bemerkt werden, dass Zf augenscheinlich nicht der Schaar der infinitesimalen Transformationen: $\chi_1(x) X_1 f + \cdots + \chi_{n-m}(x) X_{n-m}(f)$ angehört, weil ja für jede infinitesimale Transformation Xf dieser Schaar die Gleichung $X(\Delta) = 0$ gilt, während $Z(\Delta) = dU$ von Null verschieden ist Demnach kann zwischen $X_1 f, \dots X_{n-m} f$ und Zf keine lineare homogene Relation bestehen.

§ 5.

Nunmehr können wir zeigen, wie ein beliebiger vorgelegter PFAFFscher Ausdruck:

$$(1) \qquad \Delta = \sum_{\nu}^{1\dots n} \alpha_\nu(x_1, \dots x_n) dx_\nu$$

auf eine Normalform zurückführbar ist. Wir setzen dabei, wie bisher, voraus, dass in der zu (1) gehörigen Matrix (11) alle $(m+1)$-reihigen, nicht aber alle m-reihigen Determinanten verschwinden, $m \gtreqless n$.

Unter der gemachten Voraussetzung giebt es nach § 3 gerade $n - m$ infinitesimale Transformationen: $X_1 f, \dots X_{n-m} f$, die der Gleichung $\sum \alpha_\nu \xi_\nu = 0$ genügen, den Ausdruck Δ invariant lassen und durch keine lineare homogene Relation verknüpft sind. Wir denken uns diese infinitesimalen Transformationen aufgestellt. Ferner denken wir das $(n - m + 1)$-gliedrige vollständige System:

$$(18') \qquad X_1 f = 0\,, \;\dots,\; X_{n-m} f = 0\,, \quad Y_{n-m+1} f = 0$$

aufgestellt, dessen allgemeinste Gleichung $Yf = 0$ durch die Gleichungen (17) definirt ist, denken uns, unter der Voraussetzung, dass $m > 1$ ist, eine nicht konstante Lösung $U(x_1, \dots x_n)$ dieses vollständigen Systems berechnet und sodann eine infinitesimale Transformation $Z_1 f$ gebildet, die den Gleichungen (16) genügt, so dass also $Z_1(\Delta) = dU$ und $Z_1(U) = 0$ wird. Auch zwischen $X_1 f, \ldots X_{n-m} f$ und $Z_1 f$ besteht dann keine lineare homogene Relation.

Wir wollen annehmen, dass $x_1, \ldots, x_{n-1}$ und U von einander unabhängig sind, was offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, und wollen $x_1, \ldots x_{n-1}$ und $U = y_n$ als neue Veränderliche einführen. In den neuen Veränderlichen wird Δ eine neue Form:

$$(25)\quad \Delta = \sum^{1 \ldots n-1} \overline{\alpha}_\nu (x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n) dx_\nu + \overline{\alpha}_n (x_1, \ldots x_{n-1}, y_n) dy_n$$

erhalten, ferner werden die infinitesimalen Transformationen $X_1 f, \ldots X_{n-m} f$, $Z_1 f$ die Form:

$$X_k f = \sum_\nu^{1 \ldots n-1} \overline{\xi}_{k\nu} (x_1, \ldots x_{n-1}, y_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \ldots n - m)$$

$$Z_1 f = \sum_\nu^{1 \ldots n-1} \overline{\zeta}_{1\nu} (x_1 \ldots x_{n-1}, y_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

annehmen, sie werden also sämmtlich von

$$\frac{\partial f}{\partial y_n}$$

frei sein; da überdies der Ausdruck $\sum \alpha_\nu \xi_\nu$ nach § 1 eine simultane Invariante von Δ und Xf ist, so werden die Gleichungen:

$$(26)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_\nu^{1 \ldots n-1} \overline{\alpha}_\nu \overline{\xi}_{k\nu} = 0 \quad (k = 1 \ldots n - m) \\ \displaystyle\sum_\nu^{1 \ldots n-1} \overline{\alpha}_\nu \overline{\zeta}_{1\nu} = 0 \end{cases}$$

bestehen. Endlich wird:

$$(27)\quad Z_1(\Delta) = dy_n, \quad X_k(\Delta) = 0 \quad (k = 1, \ldots n - m)$$

sein.

Wir setzen nunmehr:

$$(28)\quad \sum_\nu^{1 \ldots n-1} \overline{\alpha}_\nu (x_1, \ldots x_{n-1}, y_n) dx_\nu = \Delta_1;$$

dann werden die Ausdrücke $X_k(\varDelta_1)$, $Z_1(\varDelta_1)$ offenbar von dy_n frei, und da andererseits

$$X_k(\varDelta) = X_k(\varDelta_1) + X_k(\overline{\alpha}_n)dy_n$$
$$Z_1(\varDelta) = Z_1(\varDelta_1) + Z_1(\overline{\alpha}_n)dy_n$$

ist, so ergiebt sich:

(29) $$Z_1(\varDelta_1) = 0\,,\; X_k(\varDelta_1) = 0 \quad (k = 1\,, \ldots n - m)\,.$$

Der PFAFFsche Ausdruck $\varDelta_1$, in dem y_n nur noch die Rolle eines Parameters spielt, hat daher die Eigenschaft, dass er bei den $n - m + 1$ infinitesimalen Transformationen: $X_1 f, \ldots X_{n-m} f$, $Z_1 f$ invariant bleibt, die sämmtlich der Gleichung:

$$\sum_{\nu}^{1\ldots n-1} \overline{\alpha}_\nu \xi_\nu = 0$$

genügen, und die durch keine lineare homogene Relation verknüpft sind. Betrachten wir daher $\varDelta_1$ als einen PFAFFschen Ausdruck in den Veränderlichen $x_1, \ldots x_{n-1}$, und setzen wir entsprechend dem Früheren:

(30) $$\frac{\partial \overline{\alpha}_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \overline{\alpha}_\nu}{\partial x_\mu} = \overline{\alpha}_{\mu\nu} \quad (\mu\,, \nu = 1\,, \ldots n - 1)\,,$$

so ist nach § 3 klar, dass in der zu $\varDelta_1$ gehörigen Matrix:

(31) $$\left|\begin{matrix} \overline{\alpha}_1 & \ldots & \overline{\alpha}_{n-1} \\ \overline{\alpha}_{11} & \ldots & \overline{\alpha}_{1\,n-1} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \overline{\alpha}_{n-1,1} & \ldots & \overline{\alpha}_{n-1,\,n-1} \end{matrix}\right|$$

alle Determinanten mit $n - 1 + 1 - (n - m + 1)$ Reihen und Kolonnen, das heisst alle $(m - 1)$-reihigen Determinanten, verschwinden. Dagegen lässt sich zeigen, dass in der Matrix (31) nicht alle $(m - 2)$-reihigen Determinanten verschwinden.

Setzen wir nämlich:

(32) $$\frac{\partial \overline{\alpha}_\mu}{\partial y_n} - \frac{\partial \overline{\alpha}_n}{\partial x_\mu} = \overline{\alpha}_{\mu n} \quad (\mu = 1\,, \ldots n - 1)$$

und $\overline{\alpha}_{nn} = 0$, so lautet die zu der neuen Form (25) von $\varDelta$ gehörige Matrix:

$$(33)\qquad \begin{vmatrix} \bar{\alpha}_1 & \dots \bar{\alpha}_{n-1} & \bar{\alpha}_n \\ \bar{\alpha}_{11} & \dots \bar{\alpha}_{1,n-1} & \bar{\alpha}_{1n} \\ \cdot & \dots \quad \cdot & \cdot \\ \bar{\alpha}_{n-11} & \dots \bar{\alpha}_{n-1,n-1} & \bar{\alpha}_{n-1,n} \\ \bar{\alpha}_{n1} & \dots \bar{\alpha}_{n,n-1} & \bar{\alpha}_{nn} \end{vmatrix}$$

und in dieser Matrix verschwinden zwar alle $(m+1)$-reihigen Determinanten, nicht aber alle m-reihigen, weil nach § 3 die Zahl m eine Invariante des Pfaffschen Ausdrucks Δ ist. Das ist aber nur möglich, wenn in der Matrix (31) nicht alle $(m-2)$-reihigen Determinanten verschwinden.

Durch das Vorstehende ist gezeigt, dass jeder Pfaffsche Ausdruck Δ in n Veränderlichen, in dessen Matrix (11) alle $(m+1)$-reihigen, nicht aber alle m-reihigen Determinanten verschwinden, auf eine solche Form:

$$(25)\quad \begin{cases} \Delta = \sum\limits_{\nu}^{1\dots n-1} \bar{\alpha}_\nu(x_1, \dots x_{n-1}, y_n)dx_\nu + \bar{\alpha}_n(x_1 \dots x_{n-1}, y_n)dy_n \\ \quad = \Delta_1 + \bar{\alpha}_n(x_1, \dots x_{n-1}, y_n)dy_n \end{cases}$$

gebracht werden kann, dass zu dem Ausdrucke Δ_1, wenn man diesen als einen Ausdruck in den $n-1$ Veränderlichen $x_1 \dots x_{n-1}$ betrachtet, eine Matrix gehört, in der alle $(m-1)$-reihigen, nicht aber alle $(m-2)$-reihigen Determinanten verschwinden. Erforderlich ist dazu nur die Aufsuchung einer einzigen Lösung eines $(n-m+1)$-gliedrigen vollständigen Systems in n Veränderlichen, also nach der von Lie angewendeten Ausdrucksweise eine Integrationsoperation von der Ordnung $m-1$.

Den Ausdruck Δ_1 können wir nun ebenso behandeln wie vorhin Δ, und es werden nur an die Stelle der Zahlen n und m die Zahlen $n-1$ und $m-2$ treten. Wir haben also eine einzige Lösung eines $(n-m+2)$-gliedrigen vollständigen Systems in den $n-1$ Veränderlichen $x_1, \dots x_{n-1}$ aufzusuchen, was eine Integrationsoperation von der Ordnung $m-3$ ist. Diese Lösung y_{n-1}, die etwa von $x_1, \dots x_{n-2}$ unabhängig sei, führen wir zusammen mit $x_1, \dots x_{n-2}$ als neue Veränderliche ein und erhalten:

$$(34)\qquad \Delta_1 = \Delta_2 + \bar{\bar{\alpha}}_{n-1}(x_1, \dots x_{n-2}, y_{n-1}, y_n)dy_{n-1},$$

wo Δ_2 von dy_{n-1} frei ist und als Pfaffscher Ausdruck in $x_1, \dots$

x_{n-2} betrachtet, eine Matrix besitzt, in der alle $(m-3)$-reihigen, nicht aber alle $(m-4)$-reihigen Determinanten verschwinden.

Wollen wir endlich wissen, welche Form der ursprüngliche Ausdruck $\varDelta$ in den neuen Veränderlichen $x_1, \dots x_{n-2}, y_{n-1}, y_n$ erhält, so müssen wir beachten, dass bei Bildung der Gleichung (34) y_n als constant betrachtet worden ist, demnach werden wir bekommen:

$$\varDelta = \varDelta_2 + \overline{\overline{\alpha}}_{n-1} dy_{n-1} + \{\overline{\alpha}_n(x_1, \dots x_{n-1}, y_n) + \\ + \beta(x_1, \dots x_{n-2}, y_{n-1}, y_n)\} dy_n ,$$

wo $\overline{\alpha}_n$ noch durch $x_1, \dots x_{n-2}, y_{n-1}\, y_n$ auszudrücken ist.

Behandeln wir jetzt $\varDelta_2$ wieder so wie ursprünglich $\varDelta$ und fahren wir in dieser Weise fort, so gelangen wir nach dem k-ten Schritte dazu, $\varDelta$ in der Form darzustellen:

$$\varDelta = \varDelta_k + \sum_{\tau}^{1\dots k} \alpha_{n-k+\tau}^{(k)} (x_1, \dots x_{n-k}, y_{n-k+1}, \dots y_n)\, dy_{n-k+\tau},$$

wo $\varDelta_k$ von $dy_{n-k+1}, \dots dy_n$ frei ist und als PFAFFscher Ausdruck in den $n-k$ Veränderlichen $x_1, \dots x_{n-k}$ eine Matrix besitzt, in der alle $(m-2k+1)$-reihigen Determinanten verschwinden. Erforderlich ist dazu der Reihe nach je eine Integrationsoperation von der Ordnung: $m-1$, $m-3$, $m-5$, $\dots$, $m-2k+1$.

Da m endlich ist, so kann das Verfahren nur eine bestimmte Anzahl von Malen wiederholt werden. Um über diesen Punkt ins Klare zu kommen, müssen wir unterscheiden, ob m gerade ist oder ungerade.

Ist m gerade, $=2l$, so kommen wir nach dem l-ten Schritte zu einem Ausdrucke $\varDelta_l$ in $n-2l$ Veränderlichen, in dessen Matrix alle einreihigen Determinanten verschwinden, der also selbst verschwindet. Demnach hat $\varDelta$ dann die Form:

$$(35) \quad \varDelta = \sum_{\tau}^{1\dots l} \alpha_{n-l+\tau}^{(l)} (x_1, \dots x_{n-l}, y_{n-l+1}, \dots y_n)\, dy_{n-l+\tau}$$

erhalten.

Ist aber m ungerade, $=2l+1$, so kommen wir nach dem l-ten Schritte auf einen Ausdruck:

$$\varDelta_l = \sum_{\mu}^{1\dots n-l} \alpha_{\mu}^{(l)} (x_1, \dots x_{n-l}, y_{n-l+1}, \dots y_n)\, dx_{\mu},$$

der als Ausdruck in $x_1, \dots x_{n-l}$ betrachtet eine Matrix besitzt, in der alle zweireihigen, nicht aber alle einreihigen Determinanten verschwinden. Demnach wird sein:

$$\frac{\partial \alpha_\mu^{(l)}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \alpha_\nu^{(l)}}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \dots n - l),$$

während $\alpha_1^{(l)}, \dots \alpha_{n-l}^{(l)}$ nicht alle verschwinden. Es ist also Δ_l ein vollständiges Differential in den $n - l$ Veränderlichen $x_1, \dots x_{n-l}$. Durch eine Quadratur bestimmt man jetzt eine Function y_{n-l} von $x_1, \dots x_{n-l}, y_{n-l+1}, \dots y_n$ so, dass $dy_{n-l} = \Delta_l$, so lange man $y_{n-l+1}, \dots y_n$ als konstant betrachtet. Führt man dann noch $x_1, \dots x_{n-l-1}, y_{n-l}, \dots y_n$ als neue Veränderliche ein, so wird:

$$(36) \quad \Delta = dy_{n-l} + \sum_\tau^{1\dots l} \alpha_{n-l+\tau}^{(l+1)}(x_1, \dots x_{n-l-1}, y_{n-l}, \dots y_n)\, dy_{n-l+\tau}.$$

Damit ist zugleich auch der auf S. 424 ausgeschlossene Fall $m = 1$ erledigt.

Die beiden Formen (35) und (36) können noch weiter vereinfacht werden. Von vornherein ist nämlich klar, dass Δ unmöglich durch Einführung neuer Veränderlicher $z_1, \dots z_n$ auf eine Form:

$$(37) \qquad \Delta = \sum_\mu^{1\dots m-1} \gamma_\mu(z_1, \dots z_{m-1})\, dz_\mu$$

gebracht werden kann, in der überhaupt blos $m - 1$ von den Veränderlichen $z_1, \dots z_n$ vorkommen. In der That, nach § 3 muss zu jeder Form von Δ, die durch Einführung neuer Veränderlicher erhalten werden kann, eine Matrix gehören, in der alle $(m + 1)$-reihigen, nicht aber alle m-reihigen Determinanten verschwinden. Zu der Form (37) von Δ würde aber offenbar eine Matrix gehören, in der alle m-reihigen Determinanten verschwinden, was ausgeschlossen ist.

Wir können hieraus schliessen, dass in dem Ausdrucke (35) die Grössen $\alpha_{n-l+1}^{(l)}, \dots \alpha_n^{(l)}$ in Bezug auf l von den Veränderlichen $x_1, \dots x_{n-l}$ von einander unabhängig sind und somit als neue Veränderliche neben $y_{n-l+1}, \dots y_n$ eingeführt werden können. Ebenso sind in (36) die Coefficienten $\alpha_{n-l+1}^{(l+1)}, \dots \alpha_n^{(l+1)}$ in Bezug auf l von den Veränderlichen $x_1, \dots x_{n-l-1}$ unabhängig und können als neue Veränderliche eingeführt werden.

Demnach sind wir nunmehr zu dem bekannten Satze gelangt:

Die einzige Invariante, die ein Pfaffscher Ausdruck

$$\Delta = \sum_{\nu}^{1\ldots n} \alpha_\nu(x_1, \ldots x_n)\, dx_\nu$$

in n Veränderlichen gegenüber allen Punkttransformationen besitzt, ist eine gewisse ganze Zahl m, die dadurch bestimmt ist, dass in der Matrix:

$$(38)\qquad \left|\begin{array}{c} \alpha_\mu \\ \dfrac{\partial \alpha_\mu}{\partial x_\nu} - \dfrac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} \\ (\mu, \nu = 1 \ldots n) \end{array}\right|$$

zwar alle $(m+1)$-reihigen Determinanten verschwinden, nicht aber alle m-reihigen. Ist m gerade, $= 2l$, so kann man statt $x_1, \ldots x_n$ solche neue Veränderliche einführen, dass Δ die Form:

$$(39)\qquad \Delta = \sum_{k}^{1\ldots l} \mathfrak{y}_k\, d\mathfrak{x}_k$$

erhält, wo die Veränderlichen $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{y}_1, \ldots \mathfrak{y}_l$ von einander unabhängig sind. Ist dagegen m ungerade, $= 2l + 1$, so kann man Δ auf die Form:

$$(40)\qquad \Delta = d\mathfrak{z} - \sum_{k}^{1\ldots l} \mathfrak{y}_k\, d\mathfrak{x}_k$$

bringen, wo die Veränderlichen $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{y}_1 \ldots \mathfrak{y}_l$ von einander unabhängig sind.

Schliesslich möge noch darauf hingewiesen werden, dass die Zurückführung auf die betreffende Normalform (39) oder (40) selbstverständlich nur dann möglich ist, wenn man sich auf Werthsysteme $x_1, \ldots x_n$ von allgemeiner Lage beschränkt, das heisst, auf solche Werthsysteme $x_1, \ldots x_n$, für die nicht alle m-reihigen Determinanten der Matrix (38) verschwinden.

P. Drude, *Elektrische Anomalie und chemische Constitution.*

Für gewisse Flüssigkeiten habe ich, wie ich früher[1]) mittheilte, gefunden, dass sie für schnelle elektrische Schwingungen anomale Absorption besitzen, d. h. eine viel grössere Absorption, als der elektrischen Leitungsfähigkeit der Flüssigkeit für constante Ströme entsprechen würde. So ist z. B. das Absorptionsvermögen des Amylalkohols für elektrische Schwingungen, deren Wellenlänge in Luft 75 cm beträgt, roh geschätzt eben so gross, als dasjenige einer wässrigen Kupfersulfatlösung von 20000 mal grösserer Leitfähigkeit. — Es hatte sich dabei herausgestellt, dass die Körper, welche anomale elektrische Absorption zeigen, auch anomale Dispersion ihres elektrischen Brechungsexponenten (worunter das Verhältniss der Wellenlänge der elektrischen Schwingung in der Luft zu der Wellenlänge in dem betreffenden Körper verstanden wird) besitzen, d. h. der elektrische Brechungsexponent variirt zum Theil sehr stark mit der Schwingungsdauer, und zwar in der Weise, dass er für schnellere Schwingungen kleiner ist, als für langsamere. Ich will dieses Verhalten kurz als *elektrische Anomalie* bezeichnen, und die betreffenden Flüssigkeiten als elektrisch anomal, im Gegensatz zu den elektrisch normalen Flüssigkeiten, welche jenes auffällige Verhalten nicht besitzen.

Ich habe nun die Beantwortung der Frage in Angriff genommen:

Welche Flüssigkeiten sind elektrisch anomal?

Zunächst bedarf die Frage noch einer präciseren Fassung. Es ist nämlich klar, dass für die verschiedenen Flüssigkeiten

1) Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Cl. 1895, p. 342, 348. — Abhandl. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Cl. Bd. 23, p. 1, 1896.

ihre elektrische Anomalie in ganz verschiedenen Schwingungsperioden eintreten kann. Dieselben können eventuell so klein werden, dass die zugehörigen Schwingungen eben so gut dem Gebiete der strahlenden Wärme, als dem der elektrischen Schwingungen zugerechnet werden können. Thut man das letztere, so ist die Zahl der anomalen Substanzen sehr gross. Denn nach dem Standpunkte der elektromagnetischen Lichttheorie ist eine Anomalie für Schwingungsperioden, die langsamer als die des sichtbaren Lichtes sind, bei allen denjenigen Substanzen zu erwarten, deren Dielektricitätsconstante (definirt durch das elektrische Verhalten der Substanz bei langsam wechselnden elektrischen Kräften) grösser als das Quadrat des optischen Brechungsindex ist. Man wird aber zweckmässig immer zwischen einer Absorption der strahlenden Wärme und einer Absorption von elektrischen Wellen unterscheiden, nur ist die Scheidungsgrenze nicht genau zu ziehen, was aber deshalb irrelevant ist, weil vorläufig Schwingungen der betreffenden Uebergangsperioden experimentell nicht herstellbar sind.

Im Folgenden ist nun näher untersucht, *welche Flüssigkeiten schon für elektrische Schwingungen, deren Wellenlänge (in Luft gemessen) grösser oder mindestens gleich 38 cm ist, Anomalie besitzen.*

Wenn ich auch bisher keine vollständige Lösung selbst dieser specielleren Aufgabe zu geben vermag, da die Mannigfaltigkeit der untersuchungsfähigen chemischen Substanzen fast unendlich ist, und andererseits genügende Mengen von vielen Substanzen schwer zu beschaffen sind[1]), so möchte ich doch schon ein allgemeineres Resultat im Folgenden mittheilen.

Was die Untersuchungsmethode anbelangt, so ist sie die in den eingangs citirten Arbeiten beschriebene. Ich habe zur Untersuchung drei verschieden grosse Erreger der elektrischen Wellen benutzt, für welche die Knotenabstände (halbe Wellenlängen) auf einer von Luft umgebenen Drahtleitung betrugen:

$$\tfrac{1}{2}\lambda = 98 \text{ cm} \quad \text{(grosser Erreger)},$$
$$\tfrac{1}{2}\lambda = 37 \text{ cm} \quad \text{(mittlerer Erreger)},$$
$$\tfrac{1}{2}\lambda = 19 \text{ cm} \quad \text{(kleiner Erreger)}.$$

1) Die hier untersuchten Substanzen sind von der Firma Kahlbaum in Berlin mir leihweise überlassen. Ich möchte an dieser Stelle der Firma meinen Dank für ihre bereitwillige Unterstützung aussprechen.

Die elektrische Anomalie ist besonders auffällig bei den Alkoholen hohen Molekulargewichtes. Die Complicirtheit des Molekülbaues bedingt aber die Anomalie noch nicht allein, denn Benzol und wohl überhaupt alle Kohlenwasserstoffe, sowohl die aromatischen als die der Methanreihe, sind elektrisch normal.

Man könnte deshalb vermuthen, dass die Gegenwart von Sauerstoff wesentlich zum Zustandekommen der elektrischen Anomalie ist. Dem aber steht entgegen, dass, wie ich schon früher angab, bei Aethyläther anomale elektrische Dispersion nicht besteht, und normale elektrische Absorption, wenn sie überhaupt besteht, jedenfalls sehr gering ist. Diese früher gemachte Angabe kann ich jetzt ergänzen. Sie war zweifelhaft, weil wegen Benutzung längerer Wellen bei der Kürze des Gefässes im Aethyläther nur ein Knoten beobachtet werden konnte. Mit dem kleinen Erreger ($\frac{1}{2}\lambda = 19$ cm) konnte ich jetzt zwei Knoten beobachten, und die unverminderte Deutlichkeit auch des zweiten Knotens zeigt, dass Aethyläther keine elektrische Absorption besitzt.

Nun wäre es ja denkbar, dass die Anomalie wenigstens bei den Aethern höheren Molekulargewichtes auftritt. Zu dem Zweck untersuchter *Amyläther* zeigte sich aber ebenfalls völlig absorptionsfrei, auch Dispersion ist jedenfalls nicht in beträchtlichem Grade vorhanden. (Das Quadrat seines elektrischen Brechungsexponenten ergab sich bei 16° C. zu $n^2 = 3,17$ beim mittleren Erreger, zu $n^2 = 3,12$ beim kleinen Erreger.)

Hiernach ist wahrscheinlich, dass die Aether überhaupt elektrisch normal sind. *Dies zeigt, dass nicht nur der Werth des elektrischen Brechungsexponenten, sondern auch das Auftreten der elektrischen Anomalie eine hervorragend constitutive*, d. h. von der chemischen Constitution abhängende *Eigenschaft ist*, da Alkohole und die mit ihnen isomeren Aether sich ganz verschieden verhalten. — Damit steht die schon länger bekannte Thatsache im Einklang, dass auch der optische Brechungsexponent von der Constitution, nicht nur von der Anwesenheit bestimmter Atome beeinflusst wird.

Ebenso wie die Aether sind auch die Ketone und Aldehyde (innerhalb des genannten Schwingungsintervalles) elektrisch normal. Von ersteren habe ich untersucht: *Aceton* ($n^2 = 21-22$) und *Diäthylketon* ($n^2 = 17-18$), von letzteren *Acetaldehyd* (n^2 etwa $= 23$) und *Benzaldehyd* ($n^2 = 18$ etwa). Diese vier

Substanzen waren völlig absorptionsfrei. Zum Theil besitzen sie merkliche normale Dispersion[1]) (n^2 wird grösser mit abnehmender Wellenlänge λ).

Die drei Gruppen: Aether, Ketone, Aldehyde enthalten sämmtlich Sauerstoff, aber im Gegensatz zu den Alkoholen keinen mit Wasserstoff zur Hydroxylgruppe verbundenen Sauerstoff.

Dagegen tritt elektrische Anomalie in der Reihe der Fettsäuren auf. Schon früher hatte ich sie an der *Essigsäure* nachgewiesen, anomale Absorption konnte ich jetzt, wenn auch zum Theil sehr schwach, an der *Ameisensäure* ($n^2 = 61$ etwa), *Propionsäure* ($n^2 = 3{,}3$), *Buttersäure* ($n^2 = 2{,}8$) und ziemlich bedeutend an der *Isovaleriansäure* ($n^2 = 2{,}5$) wahrnehmen. Diese Körper besitzen auch geringe anomale Dispersion. — Da in diesen Körpern die Hydroxylgruppe *O-H* vorhanden ist, so ist es sehr wahrscheinlich, *dass die Hydroxylgruppe wesentlich zum Zustandekommen der elektrischen Anomalie ist.*

Dieser Schluss wird noch deutlicher dadurch bewiesen, dass der anomale Aethylalkohol bei Ersetzung seiner Hydroxylgruppe durch Jod oder Brom in elektrisch normale Körper verwandelt wird: *Aethyljodid* ($n^2 = 7{,}7$) und *Aethylbromid* ($n^2 = 9{,}2$) sind völlig absorptionsfrei, — sowie dadurch, dass das elektrisch normale Benzol durch Einführung der Hydroxylgruppe in das elektrisch anomale *Phenol* ($n^2 = 10$) verwandelt wird, welches deutliche anomale Absorption (etwa in demselben Betrage, wie die Ameisensäure) besitzt.

In Uebereinstimmung mit dieser Auffassung von der Bedeutung der Hydroxylgruppe steht die früher[2]) erwähnte Thatsache, dass *Rohrzucker* (der Hydroxyl im Molekül enthält) im gelösten Zustande elektrische Anomalie besitzt, sowie die jetzt gemachte Beobachtung, dass stark concentrirte *Gelatine*-Lösungen elektrisch normal sind. Wenn man auch die chemische Constitution der Gelatine nicht genau kennt, so wird ihr doch die Anwesenheit der Hydroxylgruppe im Molekül nicht zugeschrieben.

Dass die Hydroxylgruppe elektrische Anomalie hervorruft, ist ein Zeichen dafür, dass sie eine verhältnissmässig sehr lang-

1) Die erhaltenen Zahlen werde ich demnächst im Zusammenhang mit den Resultaten für noch zahlreichere Körper veröffentlichen.

2) Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Cl. 1896, p. 359.

same Eigenschwingung besitzt, oder besser gesagt, dass ihre Anwesenheit im Molekül (vielleicht durch die lockere Bindung des H und O) eine langsame Eigenschwingung bedingt, die um so langsamer ist, je mehr Atome an die Gruppe HO sonst noch angekettet sind. Daher ist die anomale Absorption wachsend mit steigendem Molekulargewicht. Dass Wasser die elektrische Anomalie innerhalb des genannten Schwingungsgebietes nicht zeigt, wird (wie ich schon früher behauptete) an dem geringen Molekulargewicht liegen.

Vermuthlich wird es noch mehr Atomgruppen geben, die langsame Eigenschwingungen besitzen und daher elektrische Anomalie schon für verhältnissmässig langsame Schwingungszahlen hervorrufen. Vielleicht ist die Amidogruppe NH_2 eine solche, da, wie ich früher angab, Anilin elektrisch anomal ist. Ich kann die allgemeine Wirksamkeit von NH_2 aber noch nicht mit Sicherheit behaupten, da ich bisher nicht mehr Körper, die NH_2 enthalten, untersucht habe.

Zum Schluss möchte ich das Resultat noch einmal zusammenfassen:

Die elektrische Anomalie (innerhalb des genannten Schwingungsintervalls) *ist durch das Auftreten gewisser Atomgruppen im Molekül bedingt. Als solche hat sich bisher mit Sicherheit die Hydroxylgruppe OH nachweisen lassen durch Berücksichtigung des Umstandes, dass die Alkohole*[1]), *Fettsäuren und Phenol elektrische Anomalie besitzen, die Aether, Ketone, Aldehyde, Aethyljodid und Aethylbromid nicht.*

Leipzig, im August 1896.

---

1) Abgesehen vom Methylalkohol, für den elektrische Anomalie wegen seines geringeren Molekulargewichtes erst für Schwingungen auftreten wird, die schneller als die benutzten sind.

SITZUNG VOM 19. OCTOBER 1896.

Vorträge hielten:

1. Herr **Otto Fischer**, a. o. M.: Beiträge zur Muskeldynamik, 2. Abhandlung (siehe Abhandlungen).
2. Herr **A. Mayer**, o. M.: Die Kriterien des Minimums einfacher Integrale bei variabeln Grenzwerthen.

A. Mayer, *Die Kriterien des Minimums einfacher Integrale bei variabeln Grenzwerthen.*

Wie ich bereits in einer früheren Arbeit [1]) hervorgehoben habe, stehen sich in Betreff der Art, wie man zu den Kriterien des Minimums der einfachen Integrale in dem Falle gelangen könne, wo die Grenzwerthe der Variabeln nicht fest gegeben sind, zwei Ansichten gegenüber. Die Einen gehen davon aus, dass man in diesem Falle nach dem Vorgange von Poisson und Jacobi die Aufgabe nur in zwei Theile zu zerlegen brauche. Zuerst sieht man die Grenzwerthe als fest gegeben, aber unbestimmt an und sucht in dieser Auffassung den Minimalwerth des Integrales. Hat man denselben als Function der Grenzwerthe berechnet, so sind die letzteren nun weiter so zu bestimmen, dass diese Function selbst wieder ein Minimum erreicht. Auf diesem Wege ergeben sich also die gesuchten Kriterien einfach dadurch, dass man die bekannten Kriterien des Minimums der einfachen Integrale bei festen Grenzwerthen mit den gleichfalls bekannten Kriterien des gewöhnlichen Minimums combinirt. Die Anderen dagegen halten diesen Weg für unbefriedigend und verlangen, dass das ganze Problem ungetheilt in Angriff genommen werde. In dem citirten Aufsatze habe ich die Gründe auseinandergesetzt, die mir die erste Methode als selbstverständlich und eben daher

1) Zur Aufstellung der Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale bei variabeln Grenzwerthen. Diese Berichte 1884 p. 99.

gar keines besonderen Beweises bedürftig erscheinen lassen, und auch diese Auseinandersetzungen selbst waren nur veranlasst durch die Einwürfe, die namentlich ERDMANN[1]) gegen die Methode erhoben hatte.

Nun ist es aber mit der Selbstverständlichkeit in der Mathematik eine eigene Sache. Bei näherer Untersuchung findet man nicht selten, dass etwas, was zuerst ganz selbstverständlich aussah, in Wirklichkeit doch ganz und gar nicht selbstverständlich, ja vielleicht überhaupt nicht einmal richtig ist, und gerade in der Variationsrechnung sind mehrere eclatante Fälle solcher Täuschungen vorgekommen. So oft mich daher meine Vorlesungen wieder einmal zu den Kriterien des Minimums bei variabeln Grenzwerthen führten, war es mir ein unbehagliches Gefühl, diese Kriterien nur auf eine einzige, möglicherweise doch noch nicht ganz einwurfsfreie Art abgeleitet zu haben. Dem Wunsche, diese Zweifel endlich einmal zu beseitigen und Gewissheit darüber zu erhalten, ob sich nicht doch vielleicht bei ungetheilter Behandlung des Problems andere Resultate herausstellen könnten, als bei der Zerlegungsmethode, sind die folgenden Untersuchungen entsprungen, deren Ergebniss, wie ich von vornherein auch gar nicht anders erwartete, das ist, dass beide Methoden zu genau demselben Resultate führen und nicht etwa die zweite den Minimumsbedingungen, welche die erste auf weitaus einfacherem und klarerem Wege liefert, noch weitere neue Bedingungen hinzufügt.

In § 1 entwickle ich zunächst die Kriterien auf die JACOBIsche Art, diesmal jedoch ohne dabei von der HAMILTON'schen partiellen Differentialgleichung des Problems Gebrauch zu machen. Will man das Problem in seinem zweiten Theile unmittelbar auf eine Aufgabe des gewöhnlichen Minimums zurückführen, so muss man zunächst durch eine Quadratur den Werth, den das vorgelegte Integral für die vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen des Problems annimmt, wirklich berechnen. Diese Quadratur hat man aber eben bereits ausgeführt, so oft

1) G. ERDMANN, Zur Untersuchung der zweiten Variation einfacher Integrale. Zeitschrift für Mathematik und Physik XXIII, p. 362. ERDMANN behandelt nur das einfachste Problem der Variationsrechnung und seine Kriterien enthalten, was den Vergleich ausserordentlich erschwert, noch den ganzen, zur Reduction der zweiten Variation des Integrales auf ihre einfachste Form nöthigen Apparat.

man eine vollständige Lösung jener partiellen Differentialgleichung kennt, und zwar liefert jede solche Lösung, wie ich früher ausgeführt habe, den Integralwerth gleich in einer Form, die zur Untersuchung seiner Minima ganz besonders geeignet ist. Da es hierbei jedoch im Grunde gar nicht auf den Integralwerth selbst, sondern nur auf seine Variationen ankommt, so kann man sich diese Quadratur überhaupt immer ersparen und gelangt dann zu Formeln, die für die Anwendungen wohl noch bequemer sein dürften, als die in meiner ersten Arbeit abgeleiteten.

Der zweite Paragraph nimmt dann das Problem von Neuem auf, um es nunmehr ungetheilt zu lösen, wobei man aber natürlich die Benutzung der Kriterien des Minimums bei festen Grenzwerthen doch nicht ganz umgehen kann.

Auf beiden Wegen ergeben sich, abgesehen immer von solchen besonderen Ausnahmen, wie sie zufällige Unstetigkeiten zwischen den Grenzen bewirken können, dieselben drei Bedingungen als nothwendig und hinreichend für ein sicheres Minimum.

Zwischen zwei von diesen drei Bedingungen könnte indessen möglicher Weise ein gewisser innerer Connex bestehen. Daher schien es nicht überflüssig, im letzten Paragraphen an einem möglichst einfachen Beispiele zu zeigen, dass im Allgemeinen doch jedenfalls keine der beiden Bedingungen eine blosse Folge der anderen und der dritten Bedingung ist.

Ich muss noch hinzufügen, dass man zu den im Folgenden zu Grunde gelegten Kriterien des Minimums bei festen Grenzwerthen gelangt, wenn man die Betrachtungen, durch welche WEIERSTRASS in seinen, leider noch immer nicht veröffentlichten Vorlesungen über Variationsrechnung für geometrische Minimumsprobleme die endgiltigen Kriterien gewinnt, unter der Voraussetzung fester Grenzwerthe auf das rein analytische Problem anwendet:

Unter allen stetigen Functionen $y_1, \ldots, y_n$ der unabhängigen Variabeln x, die $r < n$ gegebene, nach r von den Differentialquotienten $y_1', \ldots, y_n'$ auflösbare Bedingungsgleichungen:

$$(1) \qquad \varphi_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0\,, \quad \varrho = 1, \ldots r\,,$$

erfüllen und deren Werthe an den beiden Grenzen x_0 und $x_1 > x_0$

überdies $q < 2n + 2$ *gegebenen, von einander unabhängigen Gleichungen:*

(2) $F_k(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, x_1, y_{11}, \ldots y_{n1}) = 0, \quad k = 1, \ldots q,$

unterworfen sind, diejenigen zu finden, durch welche das vorgelegte Integral

$$V \equiv \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots y_n')\, dx$$

einen kleinsten Werth erhält,

ein Problem, das aber in dieser Arbeit eben bei nicht mehr festen, sondern nur den Bedingungen (2) unterworfenen Grenzwerthen behandelt werden soll. Der Unterschied zwischen den hier und den früher benutzten Kriterien lässt sich, wenn man sich der Einfachheit halber auf den Fall beschränkt, wo keine Bedingungsgleichungen (1) vorgeschrieben sind, kurz so aussprechen: Die ersten fragen sich allgemein, wann das gegebene Integral für die Lösungen des Problems kleiner ist als für alle anderen stetigen Nachbarfunctionen $y_1, \ldots, y_n$, welche in den beiden festen Grenzen dieselben Werthe besitzen wie die Lösungen. Die letzten dagegen geben nur die Bedingungen an, unter denen das Integral für die Lösungen einen kleineren Werth annimmt, als für alle anderen solchen stetigen Functionen mit denselben Grenzwerthen, welche zwischen den Grenzen nicht nur selbst, sondern auch in ihren ersten Differentialquotienten überall nur sehr wenig von den Lösungen und deren ersten Differentialquotienten abweichen. Die ursprüngliche Ableitung dieser früheren Kriterien aber beruhte auf der trotz ihrer scheinbaren Selbstverständlichkeit von Scheeffer doch als unhaltbar erkannten Annahme, dass auch bei den Integralen das Minimum gesichert sei, so oft die erste Variation verschwindet und die zweite definit positiv ist[1]).

Dass ich immer nur den Fall des Minimums ins Auge fasse, geschieht natürlich nur, um mich kürzer ausdrücken zu können. Man braucht ja auch, um vom Minimum zum Maximum überzugehen, im Folgenden nur f mit $-f$ zu vertauschen, wobei man, um die Formeln nicht unnöthig zu ändern, gleichzeitig auch noch jedes φ_ϱ durch $-\varphi_\varrho$ ersetzen kann.

---

1) L. Scheeffer, Ueber die Bedeutung der Begriffe »Maximum und Minimum« in der Variationsrechnung. Diese Berichte 1885, p. 92, und Mathem. Annalen, Bd. 26, p. 197.

§ 1.

Erste Methode.

Betrachtet man zunächst die Grenzwerthe von $x, y_1, \dots, y_n$ sämmtlich als *fest gegeben*, aber *unbestimmt*, und setzt:

$$(3) \qquad \Omega \equiv f + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r ,$$

so führt, wie bekannt, das vorgelegte Problem auf die $n+r$ Differentialgleichungen:

$$(4) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}, \quad \varphi_\varrho = 0 .$$

Es seien

$$(5) \qquad y_i = \overline{y_i}(x, c_1, \dots, c_{2n}), \quad \lambda_\varrho = \overline{\lambda_\varrho}(x, c_1, \dots, c_{2n})$$

ihre vollständigen Lösungen; die Substitution dieser Lösungen werde immer durch einen oberen Strich angezeigt.

Aus ihnen ergeben sich unmittelbar die folgenden Ausdrücke der Grenzwerthe der Functionen y in den Grenzen x_0, x_1 und in den Integrationsconstanten $c_1, \dots, c_{2n}$:

$$(6) \quad y_{i0} = \overline{y_i}(x_0, c_1, \dots, c_{2n}) \equiv \overline{y_{i0}}, \quad y_{i1} = \overline{y_i}(x_1, c_1, \dots, c_{2n}) \equiv \overline{y_{i1}} .$$

Damit ferner für ein bestimmtes Werthsystem der Grenzen und Integrationsconstanten die Lösungen (5) dem Integrale V sicher einen kleineren Werth verschaffen, als alle anderen stetigen Nachbarfunctionen $y_1, \dots, y_n$, welche die Bedingungsgleichungen (1) erfüllen und gleichfalls die Grenzwerthe (6) besitzen, müssen die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sein:

I. Die Function:

$$(7) \qquad E \equiv f(x, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}, p_1, \dots, p_n)$$
$$- f(x, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}, \overline{y_1'}, \dots, \overline{y_n'}) - \sum_1^n \overline{\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}} (p_i - \overline{y_i'}) ,$$

deren n willkürliche Argumente $p_1, \dots, p_n$ den r Bedingungen unterworfen sind:

$$(8) \qquad \varphi_\varrho(x, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}, p_1, \dots, p_n) = 0 ,$$

muss, ausser für die Werthe $p_i = \overline{y_i'}$, im ganzen Intervalle x_0 bis x_1 beständig positiv bleiben.

II. Die obere Grenze x_1 darf die zunächst auf x_0 folgende Wurzel x der Grenzengleichung:

$$(9) \qquad \Delta(x, x_0) \equiv \sum \pm \frac{\partial \overline{y_1}}{\partial c_1} \cdots \frac{\partial \overline{y_n}}{\partial c_n} \frac{\partial \overline{y_{10}}}{\partial c_{n+1}} \cdots \frac{\partial \overline{y_{n0}}}{\partial c_{2n}} = 0$$

weder überschreiten, noch auch selbst erreichen.

Im vorgelegten Problem sind nun aber die Grenzwerthe nicht mehr fest gegeben, sondern nur an die q Bedingungen (2) gebunden, aus denen sich für die Grenzen und Integrationsconstanten die Bedingungsgleichungen ergeben:

$$(10) \quad \Phi_k(x_0, x_1, c_1, \ldots, c_{2n}) \equiv F_k(x_0, \overline{y_{10}}, \ldots, \overline{y_{n0}}, x_1, \overline{y_{11}}, \ldots, \overline{y_{n1}}) = 0.$$

Man hat also die Grenzen und Integrationsconstanten selbst erst so zu bestimmen, dass der Werth

$$\overline{V} = \int_{x_0}^{x_1} \overline{f}\, dx,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(11) \qquad \overline{V} = \int_{x_0}^{x_1} \overline{\Omega}\, dx,$$

den das gegebene Integral durch die Lösungen (5) erhält, auch seinerseits wieder ein Minimum wird.

Variirt man nun die Grenzen und Integrationsconstanten, so erhält dieser *Variationswerth* des Integrales die Variation:

$$\delta \overline{V} = \frac{\partial \overline{V}}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial \overline{V}}{\partial x_1} \delta x_1 + \sum_1^{2n}{}_h \frac{\partial \overline{V}}{\partial c_h} \delta c_h .$$

Nach (11) ist hierin, wenn man immer durch die Indices 0 und 1 die Substitutionen $x = x_0$ und $x = x_1$ anzeigt:

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial x_0} = - \overline{\Omega}_0, \quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial x_1} = + \overline{\Omega}_1,$$

und wegen der durch die Substitutionen (5) identischen Gleichungen (4):

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial c_h} = \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_1^{n}{}_i \left(\frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i} \frac{\partial \overline{y_i}}{\partial c_h} + \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i'} \frac{\partial^2 \overline{y_i}}{\partial x \partial c_h} \right) = \left[\sum_1^{n}{}_i \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i'} \frac{\partial \overline{y_i}}{\partial c_h} \right]_0^1;$$

also folgt:

$$\delta\overline{V}=\overline{\Omega}_1\delta x_1-\overline{\Omega}_0\delta x_0+\sum_1^n{}_i\left[\overline{\frac{\delta\Omega}{\delta y_i'}}\right]_1\sum_1^{2n}{}_h\frac{\delta\overline{y_{i1}}}{\delta c_h}\delta c_h-\sum_1^n{}_i\left[\overline{\frac{\delta\Omega}{\delta y_i'}}\right]_0\sum_1^{2n}{}_h\frac{\delta\overline{y_{i0}}}{\delta c_h}\delta c_h.$$

Es ist aber:

$$(12)\qquad\left\{\begin{aligned}\delta\overline{y_{i0}}&=\overline{y_{i0}'}\,\delta x_0+\sum_1^{2n}{}_h\frac{\delta\overline{y_{i0}}}{\delta c_h}\delta c_h,\\ \delta\overline{y_{i1}}&=\overline{y_{i1}'}\,\delta x_1+\sum_1^{2n}{}_h\frac{\delta\overline{y_{i1}}}{\delta c_h}\delta c_h.\end{aligned}\right.$$

Substituirt man die hieraus folgenden Werthe der Summen rechts und führt die Abkürzungen ein:

$$(13)\qquad P\equiv\overline{\Omega}-\sum_1^n{}_i\,\overline{y_i'\frac{\delta\Omega}{\delta y_i'}},\qquad Q_i\equiv\overline{\frac{\delta\Omega}{\delta y_i'}},$$

von denen die erste natürlich auch so geschrieben werden kann,

$$P\equiv\overline{f}-\sum_1^n{}_i\,\overline{y_i'\frac{\delta\Omega}{\delta y_i'}},$$

so erhält man schliesslich

$$(14)\qquad\delta\overline{V}=P_1\delta x_1-P_0\delta x_0+\sum_1^n{}_i\left(Q_{i1}\delta\overline{y_{i1}}-Q_{i0}\delta\overline{y_{i0}}\right).$$

Um also den Variationswerth $\overline{V}$ zu einem Minimum zu machen, hat man die Unbekannten $x_0, x_1, c_1, \ldots, c_{2n}$ so zu bestimmen dass der Ausdruck (14) für alle Werthe der Variationen

$$(\mathrm{a})\qquad\delta x_0,\ \delta x_1,\ \delta c_1,\ \ldots,\ \delta c_{2n}$$

verschwindet, welche die aus (10) folgenden Bedingungen erfüllen:

$$(15)\quad\overline{\delta F_k}\equiv\overline{\frac{\delta F_k}{\delta x_0}}\delta x_0+\overline{\frac{\delta F_k}{\delta x_1}}\delta x_1+\sum_1^n{}_i\left(\overline{\frac{\delta F_k}{\delta y_{i0}}}\delta\overline{y_{i0}}+\overline{\frac{\delta F_k}{\delta y_{i1}}}\delta\overline{y_{i1}}\right)=0.$$

Nach der Bedingung II darf aber im Besondern auch $\Delta(x_1, x_0)\neq 0$ sein. Will man also eine solche Lösung des Problems gewinnen, für welche sich die Frage des Minimums sicher entscheiden lässt, so muss man überdies von den Unbekannten verlangen, dass sie die Determinante $\Delta(x_1, x_0)$ nicht zum Verschwinden bringen sollen.

Dann aber drücken die Formeln (12) umgekehrt die δc_h durch die $\delta \overline{y_{i0}}$ und $\delta \overline{y_{i1}}$ aus; man kann daher die letzteren an Stelle der δc_h als neue, an sich unabhängige Variable einführen, und damit die Forderung, dass $\delta \overline{V}$ in Folge der Bedingungen (15) verschwinden soll, auch so aussprechen: Der Ausdruck (14) muss für alle Werthe der Variationen:

(b) $$\delta x_0,\ \delta x_1,\ \delta \overline{y_{10}},\ \ldots,\ \delta \overline{y_{n0}},\ \delta \overline{y_{11}},\ \ldots,\ \delta \overline{y_{n1}}$$

verschwinden, welche die Bedingungsgleichungen (15) erfüllen.

Schreibt man aber auf Grund dieser Gleichungen unter Einführung von q Multiplicatoren $l_1, \ldots, l_q$ die Formel (14) also:

$$(16)\quad \delta \overline{V} = P_1\, \delta x_1 - P_0\, \delta x_0 + \sum_1^n{}^i (Q_{i1}\, \delta \overline{y_{i1}} - Q_{i0}\, \delta \overline{y_{i0}}) + \sum_1^q{}^k l_k\, \delta \overline{F_k},$$

so kommt dies darauf zurück, dass hierin die Coefficienten aller $2n+2$ Variationen (b) einzeln verschwinden müssen. Man erhält somit die $2+2n$ Gleichungen:

$$(17)\quad \begin{cases} P_1 + \sum_1^q{}^k l_k \dfrac{\delta \overline{F_k}}{\delta x_1} = 0, & Q_{i1} + \sum_1^q{}^k l_k \dfrac{\delta \overline{F_k}}{\delta y_{i1}} = 0, \\[2ex] -P_0 + \sum_1^q{}^k l_k \dfrac{\delta \overline{F_k}}{\delta x_0} = 0, & -Q_{i0} + \sum_1^q{}^k l_k \dfrac{\delta \overline{F_k}}{\delta y_{i0}} = 0, \end{cases}$$

und hat demnach aus diesen und den q gegebenen Gleichungen (10) die $2+2n+q$ Unbekannten:

$$x_0,\ x_1,\ c_1,\ \ldots,\ c_{2n},\ l_1,\ \ldots,\ l_q$$

zu bestimmen.

Jedes solche System reeller Auflösungen dieser $2+2n+q$ Gleichungen, in welchem alle q Unbekannten $l_1, \ldots, l_q$ bestimmte Werthe erhalten haben, liefert in Verbindung mit den Gleichungen (5) eine Lösung des Problems. Der Einfachheit halber will ich nur den allgemeinen Fall ins Auge fassen, d. h. annehmen, dass die Gleichungen (10) und (17) alle ihre Unbekannten vollständig bestimmen.

Damit aber eine so erhaltene Lösung einem wirklichen Minimum des Problems entspreche, muss sie einerseits bei Festhaltung der gefundenen Werthe der Grenzen und Integrationsconstanten dem Integral V einen kleinsten Werth ertheilen und andererseits gleichzeitig auch seinen Variationswerth $\overline{V}$ ebenfalls zu einem Minimum machen.

Die erste Forderung wird gesichert durch die Erfüllung der Bedingungen I und II, und für die letztere ist hinreichend, und von besonderen Ausnahmefällen abgesehen, auch nothwendig, dass für das erhaltene System Auflösungen der Gleichungen (10) und (17) die durch nochmalige Variation der Grenzen und Integrationsconstanten aus (16) entstehende zweite Variation von $\overline{V}$, d. i., weil die zweiten Variationen der Grenzwerthe in Folge der Gleichungen (17) sich von selbst wegheben, die Summe:

$$(18)\quad \delta^2 \overline{V} = \delta P_1 \delta x_1 - \delta P_0 \delta x_0 + \sum_1^n {}^i (\delta Q_{i1} \delta \overline{y_{i1}} - \delta Q_{i0} \delta \overline{y_{i0}}) + \sum_1^q {}^k l_k \overline{\delta^2 F_k},$$

worin:

$$\overline{\delta^2 F_k} \equiv \delta \overline{\frac{\partial F_k}{\partial x_0}} \cdot \delta x_0 + \delta \overline{\frac{\partial F_k}{\partial x_1}} \cdot \delta x_1 + \sum_1^n {}^i \left(\delta \overline{\frac{\partial F_k}{\partial y_i^0}} \cdot \delta \overline{y_{i0}} + \delta \overline{\frac{\partial F_k}{\partial y_{i1}}} \cdot \delta \overline{y_{i1}} \right),$$

in Folge der Bedingungsgleichungen (15) definit positiv ausfalle.

In dieser Summe treten nun aber die δc_h nicht mehr bloss in den Variationen $\delta \overline{y_{i0}}$ und $\delta \overline{y_{i1}}$ auf. Denn nach den Definitionen (13) enthalten δP_1 und die δQ_{i1} ausser δx_1 und den $\delta \overline{y_{i1}}$ noch die Variationen $\delta \overline{y_{i1}'}$ und $\delta \overline{\lambda_{\varrho 1}}$, und ebenso kommen in δP_0 und den δQ_{i0} neben δx_0 und den $\delta \overline{y_{i0}}$ noch die Variationen $\delta \overline{y_{i0}'}$ und $\delta \overline{\lambda_{\varrho 0}}$ vor. Wollte man daher auch bei der Discussion der letzten Bedingung wiederum die Variationen (b) zu unabhängigen Variabeln nehmen, so müsste man erst mit Hülfe der $2n$ Gleichungen (12) die δc_h aus den Werthen

$$\delta \overline{y_{i1}'} = \overline{y''_{i1}} \delta x_1 + \sum_1^{2n} \frac{\partial^2 \overline{y_{i1}}}{\partial x_1 \partial c_h} \delta c_h, \ldots .$$

der Variationen $\delta \overline{y_{i1}'}$, $\delta \overline{\lambda_{\varrho 1}}$, $\delta \overline{y_{i0}'}$, $\delta \overline{\lambda_{\varrho 0}}$ eliminiren. Daher ist es jedenfalls ungleich bequemer, aus der Formel (18) $\delta^2 \overline{V}$ als

Function der Variationen (a) zu berechnen, die den Gleichungen (15), oder nach (10) den Gleichungen genügen müssen:

$$(15') \qquad \delta \Phi_k \equiv \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} \delta x_1 + \sum_1^{2n} {}^h \frac{\partial \Phi_k}{\partial c_h} \delta c_h = 0 .$$

Das Einfachste wird aber wohl immer sein, erst die Formel (16) nach den Variationen (a) zu ordnen, und wenn sie hierdurch die Form erhalten hat:

$$(16') \qquad \delta \overline{V} = X_0 \delta x_0 + X_1 \delta x_1 + \sum_1^{2n} {}^h C_h \delta c_h ,$$

die Formel (18) durch die, in Folge der Gleichungen (17) ihr äquivalente zu ersetzen:

$$(18') \qquad \delta^2 \overline{V} = \delta X_0 \delta x_0 + \delta X_1 \delta x_1 + \sum_1^{2n} {}^h \delta C_h \delta c_h .$$

Auf diesem Wege ergeben sich somit *für ein sicheres Minimum unseres Problems die folgenden Bedingungen*:

Das Problem wird gelöst durch die vollständigen Lösungen (5) seiner Differentialgleichungen (4), in denen die $2n$ Integrationsconstanten $c_1, \ldots, c_{2n}$ zusammen mit den weiteren $2 + q$ Unbekannten $x_0, x_1, l_1, \ldots, l_q$ aus den $q + 2 + 2n$ Gleichungen (10) und (17) zu bestimmen sind.

Damit aber die irgend einem bestimmten reellen System Auflösungen dieser Gleichungen zugehörigen Lösungen (5) einem sicheren Minimum des Problems entsprechen, müssen diese Lösungen und Auflösungen den folgenden drei Bedingungen genügen:

I. Die durch (7) *definirte Function E muss unter den Bedingungen* (8) *innerhalb der erhaltenen Grenzen x_0 und x_1 stets positiv bleiben, ausser für die Werthe $p_i = \overline{y}_i'$ ihrer n Argumente p.*

II. x_1 muss zwischen x_0 und der nächst grösseren Wurzel x der Grenzengleichung (9) *liegen.*

III. Die ganze homogene Function zweiten Grades (18) *oder* (18') *der Variabeln $\delta x_0, \delta x_1, \delta c_1, \ldots, \delta c_{2n}$ muss durch die Bedingungen* (15) *oder* (15') *definit positiv werden.*

Späterer Anwendung wegen schalte ich hier noch die folgende Bemerkung ein.

Wegen der Bedingungsgleichungen (1) und (8) kann man in der Definition (7) der Function E die Differenz

$$f(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n, p_1, \ldots, p_n) - f(x, \overline{y}_1, \ldots \overline{y}_n, \overline{y}_1', \ldots \overline{y}_n')$$

auch ersetzen durch:

$$\overline{\Omega_p} - \overline{\Omega},$$

wo $\overline{\Omega_p}$ aus $\overline{\Omega}$ entsteht, wenn man die $\overline{y}_i'$ durch die p_i ersetzt.

Nimmt man dann im Besondern jedes p_i nur sehr wenig von dem entsprechenden $\overline{y}_i'$ verschieden an, sodass also die Differenzen

$$\sigma_i \equiv p_i - \overline{y}_i'$$

sämmtlich sehr kleine absolute Werthe erhalten, und entwickelt nun sowohl die Function E als auch die Gleichungen (8) nach steigenden Potenzen dieser Differenzen, so verschwinden in der Entwicklung von E die in den σ_i linearen Glieder von selbst und das Vorzeichen von E wird im Allgemeinen durch die quadratischen Glieder entschieden. Sieht man also von besonderen Ausnahmefällen ab, so schliesst die Bedingung I. von selbst ein, *dass auch die ganze homogene Function zweiten Grades*:

$$(19) \qquad 2W \equiv \overline{\sum_1^n{}_h \sum{}_i} \overline{\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'}} \sigma_h \sigma_i ,$$

deren n Argumente $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ den r Bedingungen unterworfen sind:

$$(20) \qquad \sum_1^n{}_i \overline{\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_i'}} \sigma_i = 0 ,$$

im ganzen Integrationsintervalle definit positiv sein muss.

Und das ist die wohlbekannte Bedingung, die man früher direct aus der Clebsch'schen Reduction der zweiten Variation des Integrales V bei festen Grenzwerthen ableitete.

§ 2.

Zweite Methode.

Nimmt man nunmehr das Problem ungetheilt in Angriff, so macht es zwar gar keine besonderen Schwierigkeiten, wiederum zur Bedingung III zu gelangen[1]), aber es bedarf grösserer Vorbereitungen, um einzusehen, dass dieselbe zusammen mit den Bedingungen I und II sich auch auf diesem Wege als hinreichend erweist, und das ist doch eben das Einzige, worüber man Sicherheit zu gewinnen wünscht. Namentlich liegt darin, dass man abwechselnd immer mit Grenzwerthen von Variationen und mit Variationen von Grenzwerthen operiren und dabei auch auf die zweiten Variationen Rücksicht nehmen muss, eine grosse, aber, soweit ich sehen kann, nicht zu umgehende Unbequemlichkeit, die auch die Formeln ganz beträchtlich complicirt. Um daher die letzteren nicht gar zu lang und unbeholfen ausfallen zu lassen, wird es vor allem nöthig, abkürzende symbolische Bezeichnungen einzuführen.

Es möge im Folgenden durch die Charakteristik $\varDelta$ immer angezeigt werden, dass nur die Functionen y zu variiren sind, die unabhängige Variable x aber, auch wenn sie nur als obere oder untere Grenze auftritt, unverändert zu lassen ist. Dagegen soll die gewöhnliche Charakteristik δ ausdrücken, dass mit den y zugleich auch x, beziehentlich x_0 und x_1, zu variiren ist. Da wir zwischen den Grenzen die unabhängige Variable nicht mit variiren, so werden wir die letzte Charakteristik im Grunde immer nur auf die Variation von Grenzwerthen oder aber von solchen Ausdrücken anzuwenden haben, die ausser von den y auch noch von den Grenzen abhängen. Die gleichzeitige Benutzung beider Charakteristiken, verbunden eventuell mit dem gewohnten Zeichen:

$$[\psi(x)]_0^1 \equiv \psi(x_1) - \psi(x_0),$$

gestattet aber, je zwei entsprechende Formeln oder Glieder, die sich nur durch die Grenze x_0 oder x_1, an der sie auftreten, von einander unterscheiden, in eine Formel oder in ein Glied zusammenfassen, also z. B. die bekannten Relationen, welche zwischen den Grenzwerthen der Variation von y_i und den Va-

1) S. die Anmerkung am Schlusse dieses §.

riationen der Grenzwerthe y_{i0} und y_{i1} bestehen, durch die eine Formel auszudrücken:

(21) $$\delta y_i = \varDelta y_i + y_i' \, \delta x .$$

Aus derselben ergiebt sich durch nochmalige gleichzeitige Variation von x und von y_i zwischen den zweiten Variationen der Grenzwerthe von y_i und den Grenzwerthen der zweiten Variationen von y_i sofort die Relation:

$$\begin{aligned}\delta^2 y_i &= \delta(\varDelta y_i) + \delta(y_i' \, \delta x) \\ &= \left\{ \varDelta^2 y_i + \frac{d \varDelta y_i}{dx} \delta x \right\} + \{[\varDelta y_i' \delta x + y_i'' \delta x] \delta x + y_i' \delta^2 x\},\end{aligned}$$

oder:

(22) $$\delta^2 y_i = \varDelta^2 y_i + 2 \varDelta y_i' \delta x + y_i'' (\delta x)^2 + y_i' \, \delta^2 x .$$

Es liegt endlich in der Natur der beiden Charakteristiken $\varDelta$ und δ, dass man sie ohne Weiteres auch anwenden kann auf diejenigen Variationen der Lösungen (5), welche einer blossen Variation der Integrationsconstanten c, oder aber einer gleichzeitigen Variation der c und der Variabeln x entsprechen. —

Dies vorausgeschickt ergiebt sich aus der durch die Bedingungsgleichungen (1) berechtigten Formel:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \Omega \, dx,$$

wenn man sowohl die Functionen $y_1, \ldots, y_n$, als auch die Grenzen x_0 und x_1 variirt:

(23) $$\delta V = \int_{x_0}^{x_1} \varDelta \Omega \, dx + [\Omega \delta x]_0^1 .$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned}\varDelta \Omega &\equiv \sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} \varDelta y_i + \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} \varDelta y_i' \right) \\ &\equiv \sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} \right) \varDelta y_i + \frac{d}{dx} \sum_1^n{}_i \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} \varDelta y_i .\end{aligned}$$

Führt man daher gleich noch durch (21) an Stelle der Grenzwerthe der Variationen Δy_i die Variationen δy_{i0} und δy_{i1} der Grenzwerthe von y_i ein, so erhält man die bekannte Formel:

$$(24)\quad \delta V = \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_1^n {}^i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right) \Delta y_i$$
$$+ \left[\left(\Omega - \sum_1^n {}^i y_i' \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right)\delta x + \sum_1^n {}^i \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} \delta y_i\right]_0^1.$$

Für diejenigen Functionen $y_1, \ldots, y_n$, welche unser Problem lösen, muss daher die rechte Seite verschwinden in Folge einerseits der von den Variationen Δy_i zu erfüllenden Bedingungen:

$$(25)\qquad \Delta \varphi_\varrho \equiv \sum_1^n {}^i \left(\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_i}\Delta y_i + \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_i'}\Delta y_i'\right) = 0,$$

und andererseits der Bedingungen:

$$(26)\quad \delta F_k \equiv \frac{\partial F_k}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial F_k}{\partial x_1}\delta x_1 + \sum_1^n {}^i \left(\frac{\partial F_k}{\partial y_{i0}}\delta y_{i0} + \frac{\partial F_k}{\partial y_{i1}}\delta y_{i1}\right) = 0,$$

denen die Variationen der Grenzwerthe genügen müssen.

Den letzteren genügt man aber im Besondern immer dadurch, dass man sämmtliche Grenzwerthvariationen $= 0$ setzt, also die Grenzwerthe selbst als fest betrachtet. Daher muss das Integral in der Formel (24) für sich verschwinden für alle stetigen Variationen Δy_i, welche die Bedingungsgleichungen (25) erfüllen und in den beiden Grenzen x_0 und x_1 verschwinden. Und dies verlangt wieder, dass die gesuchten Functionen $y_1, \ldots, y_n$ zusammen mit den Lagrange'schen Multiplicatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die Differentialgleichungen (4) befriedigen müssen.

Die Substitution der vollständigen Lösungen (5) dieser Differentialgleichungen bringt nun das Integral in der Formel (24) zum Verschwinden und reducirt damit, wenn wir wieder die Abkürzungen (13) einführen, die Forderung $\delta V = 0$ darauf, dass die Gleichung:

$$P_1 \delta x_1 - P_0 \delta x_0 + \sum_1^n {}^i (Q_{i1}\delta y_{i1} - Q_{i0}\delta y_{i0}) = 0$$

eine Folge der Gleichungen (26) werden muss.

Man gelangt somit wieder zu den Gleichungen (17) und erhält die Lösungen der Aufgabe, indem man die Gleichungen (10) und (17) nach den Unbekannten x_0, x_1, $c_1, \ldots, c_{2n}$, $l_1, \ldots, l_q$ auflöst und die Auflösungen $c_1, \ldots, c_{2n}$ in die Gleichungen (5) substituirt.

Um nun weiter aber zu untersuchen, ob diese Lösungen in dem vorgelegten Problem auch wirklich ein Minimum hervorbringen, hat man für dieselben die zweite Variation des Integrales V zu bilden.

Durch nochmalige gleichzeitige Variation der Functionen y und der beiden Grenzen erhält man aus (23)

$$\delta^2 V = \delta \int_{x_0}^{x_1} \Delta \Omega \, dx + \delta [\Omega \delta x]_0^1 .$$

Man hat aber einerseits nach (21):

$$\delta(\Omega \delta x) = \left(\Delta \Omega + \frac{d\Omega}{dx} \delta x\right) \delta x + \Omega \delta^2 x ,$$

andererseits wiederum nach (23):

$$\delta \int_{x}^{x_1} \Delta \Omega \, dx = \int_{x_0}^{x_1} \Delta^2 \Omega \, dx + [\Delta \Omega \delta x]_0^1 ,$$

und erhält also:

$$\delta^2 V = \int_{x_0}^{x_1} \Delta^2 \Omega \, dx + \left[\Omega \delta^2 x + \frac{d\Omega}{dx} (\delta x)^2 + 2 \Delta \Omega \delta x\right]_0^1 . \tag{27}$$

[1]

1) Anstatt die Formel (27) durch nochmalige Variation aus der Formel (23) abzuleiten, kann man die Werthe von δV und $\delta^2 V$ auch gleichzeitig als Coëfficienten von α^1 und von $\frac{\alpha^2}{2}$ in der Entwicklung desjenigen Integrales berechnen, das aus

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \Omega \, dx$$

entsteht, wenn man

$$x_0 \text{ in } x_0 + \alpha \delta x_0 + \frac{\alpha^2}{2} \delta^2 x_0 ,$$

$$x_1 \text{ in } x_1 + \alpha \delta x_1 + \frac{\alpha^2}{2} \delta^2 x_1$$

und jedes

Sollen daher die erhaltenen Lösungen ein sicheres Minimum des Integrales V bewirken, so muss nach Substitution derselben der Werth (27) von $\delta^2 V > 0$ bleiben für alle im Problem zulässigen Variationen der Functionen y und der Grenzen x_0 und x_1.

Diese Bedingung ist aber noch nicht hinreichend. Denn zunächst kann man wieder die gefundenen Werthe der Grenzen x_0 und x_1 und der Grenzwerthe der y_i festhalten und nur die Functionen y_i selbst zwischen den Grenzen variiren und dann reicht die Forderung $\delta^2 V > 0$ allein noch nicht aus zur Sicherung des Minimums. Man muss derselben also wiederum die beiden früheren Bedingungen I und II hinzufügen.

Diese sichern aber umgekehrt das Positivbleiben von $\delta^2 V$ eben nur dann, wenn man sämmtliche Grenzwerthvariationen $= 0$ setzt. Es bleibt also übrig, die Bedingungen zu finden, unter denen $\delta^2 V$ auch für alle anderen zulässigen Werthe dieser Variationen > 0 bleibt.

Nun ist, wenn man

$$(28)\quad 2F \equiv \sum_1^n {}_h \sum {}_i \left(\overline{\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h \partial y_i}} \Delta y_h \Delta y_i + 2 \overline{\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h \partial y'_i}} \Delta y_h \Delta y'_i + \overline{\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_h \partial y'_i}} \Delta y'_h \Delta y'_i \right)$$

nimmt:

$$\overline{\Delta^2 \Omega} \equiv \sum_1^n {}_i \left(\overline{\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}} \Delta^2 y_i + \overline{\frac{\partial \Omega}{\partial y'_i}} \Delta^2 y'_i \right) + 2F,$$

wo der obere Strich wieder die Substitution der erhaltenen Lösungen (5) anzeigen soll. In Folge der Differentialgleichung (4) ist daher weiter:

$$\sum_1 {}_i \left(\overline{\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}} \Delta^2 y_i + \overline{\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_i}} \Delta^2 y'_i \right) \equiv \frac{d}{dx} \sum_1^n {}_i \overline{\frac{\partial \Omega}{\partial y'_i}} \Delta^2 y_i .$$

Nach Substitution der Lösungen ergiebt daher die Formel (27):

$$(29)\qquad \delta^2 V = \int_{x_0}^{x_1} 2F dx + [R]_0^1,$$

$$y_i \text{ in } y_i + \alpha \Delta y_i + \frac{\alpha^2}{2} \Delta^2 y_i$$

übergehen lässt.

worin:

$$R \equiv \bar{\Omega}\delta^2 x + \sum_1^n{}_i \overline{\frac{\delta \Omega}{\delta y_i'}} \Delta^2 y_i + \overline{\frac{d\Omega}{dx}} (\delta x)^2 + 2\,\overline{\Delta\Omega} \cdot \delta x,$$

ist. Setzt man die Werthe ein:

$$\overline{\frac{d\Omega}{dx}} \equiv \overline{\frac{\delta\Omega}{\delta x}} + \sum_1^n{}_i \left(\overline{\frac{\delta\Omega}{\delta y_i}} \bar{y}_i' + \overline{\frac{\delta\Omega}{\delta y_i'}} \bar{y}_i'' \right),$$

$$\overline{\Delta\Omega} \equiv \sum_1^n{}_i \left(\overline{\frac{\delta\Omega}{\delta y_i}} \Delta y_i + \overline{\frac{\delta\Omega}{\delta y_i'}} \Delta y_i' \right),$$

so folgt:

$$R \equiv \bar{\Omega}\delta^2 x + \sum_1^n{}_i \overline{\frac{\delta\Omega}{\delta y_i'}} (\Delta^2 y_i + 2\Delta y_i' \delta x + \bar{y}_i'' (\delta x)^2)$$

$$+ \delta x \sum_1^n{}_i \overline{\frac{\delta\Omega}{\delta y_i}} (\bar{y}_i' \delta x + 2\Delta y_i) + \overline{\frac{\delta\Omega}{\delta x}} (\delta x)^2.$$

Führt man aber mittelst der Formeln (21) und (22), in denen natürlich jetzt für y_i, y_i', y_i'' selbst die erhaltenen Werthe $\bar{y}_i$, $\bar{y}_i'$, $\bar{y}_i''$ einzusetzen sind, an Stelle der Grenzwerthe der Variationen die Variationen der Grenzwerthe in die Formel (29) ein, so sieht man, dass man darin R auch so schreiben kann:

$$30) \quad R = \left(\bar{\Omega} - \sum_1^n{}_i \bar{y}_i' \overline{\frac{\delta\Omega}{\delta y_i'}} \right) \delta^2 x + \sum_1^n{}_i \overline{\frac{\delta\Omega}{\delta y_i'}} \delta^2 y_i$$

$$= \left(\overline{\frac{\delta\Omega}{\delta x}} - \sum_1^n{}_i \overline{y_i' \frac{\delta\Omega}{\delta y_i}} \right) (\delta x)^2 + 2\delta x \sum_1^n{}_i \overline{\frac{\delta\Omega}{\delta y_i}} \delta y_i.$$

In der Formel (29) hängt hiernach das äussere Glied $[R]_0^1$ *nur ab von den Variationen der Grenzwerthe von* $x, y_1, \dots, y_n$, *ist aber ganz unabhängig davon, welche Werthe sonst die Variationen* Δy_i *zwischen den Grenzen erhalten mögen.*

Wenn daher K der kleinste Werth ist, den zwischen den festen Grenzen x_0 und x_1 genommen das Integral

$$\int_{x_1}^{x_0} 2F dx$$

unter den Bedingungen

(25') $$\overline{\varDelta\varphi_\varrho} \equiv \sum_1^n {}_i \left(\overline{\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_i}} \varDelta y_i + \overline{\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_i'}} \varDelta y_i' \right) = 0$$

bei festen aber unbestimmten Grenzwerthen der Variationen $\varDelta y_1, \ldots, \varDelta y_n$ anzunehmen vermag, so ist es, nachdem man auch diesen kleinsten Werth K durch die Variationen der Grenzwerthe ausgedrückt hat, für die Forderung $\delta^2 V > 0$ nothwendig und hinreichend, *dass für alle mit den Bedingungen* (26) *verträglichen Variationen der Grenzwerthe*:

(31) $$K + [R]_0^1 > 0$$

sei.

Setzt man nun:

(32) $$2\Omega_2 \equiv 2F + 2\sum_1^r {}_\varrho \varDelta\lambda_\varrho \overline{\varDelta\varphi_\varrho},$$

so wird die Aufgabe, unter allen stetigen Functionen $\varDelta y_1, \ldots, \varDelta y_n$, welche die Bedingungen (25') erfüllen und in den beiden gegebenen Grenzen x_0 und x_1 feste Grenzwerthe besitzen, diejenigen zu finden, welche

(33) $$\int_{x_0}^{x_1} 2F dx = \text{Min.}$$

machen, gelöst durch die Differentialgleichungen:

(34) $$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \varDelta y_i} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \varDelta y_i'}, \quad \overline{\varDelta\varphi_\varrho} = 0,$$

und man weiss, dass die vollständigen Lösungen dieser Differentialgleichungen sind:

(35) $$\varDelta y_i = \sum_1^{2n} {}_h \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial c_h} \delta c_h, \quad \varDelta\lambda_\varrho = \sum_1^{2n} {}_h \frac{\partial \bar{\lambda}_\varrho}{\partial c_h} \delta c_h.$$

Wegen der Bedingung II, die unsere Lösungen (5) erfüllen müssen, wenn sie ein sicheres Minimum erzeugen sollen, ist nun auch $\varDelta(x_1, x_0) \neq 0$. Nach der Definition (9) der Determinante $\varDelta(x, x_0)$ lassen sich folglich die $2n$ Integrationsconstanten δc_h stets und zwar nur auf Eine Weise so bestimmen, dass die n Lösungen:

$$\Delta y_i = \sum_1^{2n} {}_h \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial c_h} \delta c_h$$

für $x = x_0$ und $x = x_1$ die gegebenen Grenzwerthe erhalten.

Unser neues Problem (33) lässt somit stets nur eine einzige Lösung zu, deren Formeln:

$$(36) \qquad \Delta y_i = \Delta \bar{y}_i, \qquad \Delta \lambda_\varrho = \Delta \bar{\lambda}_\varrho$$

erhalten werden, wenn man die auf die eben genannte Art bestimmten Werthe der Constanten δc_h in die Gleichungen (35) einsetzt.

Ueberdies ist nach (35)

$$\frac{\partial \Delta \bar{y}_i}{\partial \delta c_h} \equiv \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial c_h}.$$

Das Problem (33) hat also wiederum die Gleichung (9) zur Grenzengleichung und endlich wird,

$$p_i = \Delta y_i' + \sigma_i$$

gesetzt, seine E-Function:

$$E = 2\overline{\Omega}_{2\sigma} - 2\overline{\Omega}_2 - 2\sum_1^n {}_i \overline{\frac{\partial \Omega_2}{\partial \Delta y_i'}} \sigma_i,$$

wo der obere Strich nunmehr die Substitution der Lösungen (36) markiren soll, und $2\overline{\Omega}_{2\sigma}$ aus $2\overline{\Omega}_2$ entsteht, wenn man jedes $\Delta \bar{y}_i'$ durch $\Delta \bar{y}_i' + \sigma_i$ ersetzt. Wegen der Bedingungsgleichungen (25') sind die Variabeln σ_i dieser E-Function den Bedingungen unterworfen:

$$\sum_1^n {}_i \left(\overline{\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_i}} \Delta \bar{y}_i + \overline{\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_i'}} (\Delta \bar{y}_i' + \sigma_i) \right) = 0.$$

Die Lösungen $\Delta y_i = \Delta \bar{y}_i$ des Problems (33) erfüllen aber identisch die Gleichungen (25'), also reduciren sich diese letzten Bedingungen einfach auf die früheren Gleichungen:

$$(20) \qquad \sum_1^n {}_i \overline{\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_i'}} \sigma_i = 0.$$

Da ferner nach ihrer Definition durch die Formeln (32) und

(28) $2\Omega_2$ eine ganze Function zweiten Grades der $\Delta y_i'$ ist, so hat man:

$$2\overline{\Omega}_{2\sigma} - 2\overline{\Omega}_2 \equiv 2\sum_1^n{}_i \overline{\frac{\partial \Omega_2}{\partial \Delta y_i'}} \sigma_i + \sum_1^n{}_h \sum{}_i \overline{\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial \Delta y_h' \partial \Delta y_i'}} \sigma_h \sigma_i ,$$

während nach denselben Formeln zu gleicher Zeit:

$$\overline{\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial \Delta y_h' \partial \Delta y_i'}} \equiv \overline{\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'}}$$

ist. Die neue Function E selbst reducirt sich also auf die bereits früher eingeführte Function:

$$(19) \qquad 2W \equiv \sum_1^n{}_h \sum{}_i \overline{\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'}} \sigma_h \sigma_i ,$$

und bleibt somit, da wir auch die Bedingung I als erfüllt voraussetzen müssen, nach der Schlussbemerkung des vorigen § definit positiv im Integrationsintervall.

Für jedes gegebene System von Grenzwerthen der Variationen $\Delta y_1, \ldots, \Delta y_n$ verschaffen daher die Lösungen (36) dem Integrale (33) wirklich den kleinsten Werth, den es unter den Bedingungen (25') anzunehmen vermag.

Nach (28) und (32) wird weiter durch diese Bedingungen einerseits

$$\int_{x_0}^{x_1} 2F dx = \int_{x_0}^{x_1} 2\Omega_2 dx$$

und andererseits:

$$2\Omega_2 \equiv \sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \Delta y_i} \Delta y_i + \frac{\partial \Omega_2}{\partial \Delta y_i'} \Delta y_i' \right) + \sum_1^r{}_\varrho \frac{\partial \Omega_2}{\partial \Delta \lambda_\varrho} \Delta \lambda_\varrho$$

$$= \sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \Delta y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \Delta y_i'} \right) \Delta y_i + \frac{d}{dx} \sum_1^n{}_i \frac{\partial \Omega_2}{\partial \Delta y_i'} \Delta y_i .$$

Nach (34) und (35) erhält man also den kleinsten Werth K des Integrales (33) aus der Formel:

$$(37) \qquad K = \left[\sum_1^n{}_i \frac{\partial \Omega_2}{\partial \Delta y_i'} \Delta y_i \right]_0^1 ,$$

wenn man:

$$(38)\quad \begin{cases} \Delta y_i = \sum_1^{2n} {}^h \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial c_h} \delta c_h, \text{ also} \\ \Delta y_i' = \sum_1^{2n} {}^h \frac{\partial^2 \bar{y}_i}{\partial x \partial c_h} \delta c_h, \text{ und} \\ \Delta \lambda_\varrho = \sum_1^{2n} {}^h \frac{\partial \overline{\lambda_\varrho}}{\partial c_h} \delta c_h \end{cases}$$

setzt, worin die Constanten δc_h aus den $2n$ Gleichungen:

$$\sum_1^{2n} {}^h \frac{\partial \overline{y_{i0}}}{\partial c_h} \delta c_h = \Delta y_{i0},$$

$$\sum_1^{2n} {}^h \frac{\partial \overline{y_{i1}}}{\partial c_h} \delta c_h = \Delta y_{i1}$$

zu bestimmen sind.

Um nun diesen Minimalwerth des Integrales (33) durch die Variationen der Grenzwerthe auszudrücken, benutze ich die Formeln:

$$\delta \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i'} \equiv \frac{\overline{\partial^2 \Omega}}{\partial y_i' \partial x} \delta x + \sum_1^n {}^h \left(\frac{\overline{\partial^2 \Omega}}{\partial y_i' \partial y_h} \delta y_h + \frac{\overline{\partial^2 \Omega}}{\partial y_i' \partial y_h'} \delta y_h' \right)$$
$$+ \sum_1^r {}^\varrho \frac{\overline{\partial \varphi_\varrho}}{\partial y_i'} \delta \lambda_\varrho,$$

$$\frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i} \equiv \frac{d}{dx} \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i'} \equiv \frac{\overline{\partial^2 \Omega}}{\partial y_i' \partial x} + \sum_1^n {}^h \left(\frac{\overline{\partial^2 \Omega}}{\partial y_i' \partial y_h} \bar{y}_h' + \frac{\overline{\partial^2 \Omega}}{\partial y_i' \partial y_h'} \bar{y}_h'' \right)$$
$$+ \sum_1^r {}^\varrho \frac{\overline{\partial \varphi_\varrho}}{\partial y_i'} \overline{\lambda_\varrho'}.$$

Verbindet man diese mit den aus (21) folgenden Formeln:

$$(39)\quad \Delta y_h = \delta y_h - \bar{y}_h' \delta x, \quad \Delta y_h' = \delta y_h' - \bar{y}_h'' \delta x, \quad \Delta \lambda_\varrho = \delta \lambda_\varrho - \overline{\lambda_\varrho'} \delta x,$$

so findet man:

$$\delta \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i'} - \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i} \delta x = \sum_1^n {}^h \left(\frac{\overline{\partial^2 \Omega}}{\partial y_i' \partial y_h} \Delta y_h + \frac{\overline{\partial^2 \Omega}}{\partial y_i' \partial y_h'} \Delta y_h' \right)$$
$$+ \sum_1^r {}^\varrho \frac{\overline{\partial \varphi_\varrho}}{\partial y_i'} \Delta \lambda_\varrho.$$

Nach (28) und (32) ist aber die rechte Seite dieser Relation nichts anderes als

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \Delta y_i'},$$

also ergiebt sich:

$$(40)\quad \sum_1^n{}^i \frac{\partial \Omega_2}{\partial \Delta y_i'} \Delta y_i = \sum_1^n{}^i \left(\delta \overline{\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}} - \overline{\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}} \delta x\right)(\delta y_i - \bar{y}_i' \delta x).$$

Nach (37), (38) und (39) erhält man daher K aus:

$$K = \left[\sum_1^n{}^i \delta \overline{\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}} \delta y_i - \delta x \sum_1^n{}^i \left(\overline{\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}} \delta y_i + \bar{y}_i' \delta \overline{\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}}\right) + (\delta x)^2 \sum_1^n{}^i \overline{y_i' \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}}\right]_0^1$$

durch die Substitutionen:

$$(41)\quad \begin{cases} \delta y_i = \bar{y}_i' \delta x + \sum_1^{2n}{}^h \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial c_h} \delta c_h, \\ \delta y_i' = \bar{y}_i'' \delta x + \sum_1^{2n}{}^h \frac{\partial^2 \bar{y}_i}{\partial x \partial c_h} \delta c_h, \\ \delta \lambda_\varrho = \bar{\lambda}_\varrho' \delta x + \sum_1^{2n}{}^h \frac{\partial \bar{\lambda}_\varrho}{\partial c_h} \delta c_h, \end{cases}$$

in denen die δc_h selbst aus den $2n$ Gleichungen zu bestimmen sind:

$$(42)\quad \begin{cases} \sum_1^{2n}{}^h \frac{\partial \overline{y_{i0}}}{\partial c_h} \delta c_h = \delta y_{i0} - \bar{y}_i \; \delta x_0, \\ \sum_1^{2n}{}^h \frac{\partial \overline{y_{i1}}}{\partial c_h} \delta c_h = \delta y_{i1} - \bar{y}_{i1}' \delta x_1. \end{cases}$$

In Folge dieser Bestimmungsart der δc_h sind aber, auf die Grenzen x_0 und x_1 bezogen, für welche ja die Gleichungen (41) überhaupt nur in Betracht kommen, die n ersten von diesen Gleichungen Identitäten, und nach (30) kommen in R die Variationen $\delta y_i'$ und $\delta \lambda_\varrho$ gar nicht vor. Man kann daher, ohne $[R]_0^1$ zu ändern, auch schon in R die Substitutionen (41) vornehmen und somit die linke Seite der Bedingung (31) in der Art berechnen, dass man unmittelbar den Werth (30) von R zur Formel (40) addirt, hierauf erst $x=x_1$, dann $x=x_0$ setzt und die Resultate von einander abzieht, und schliesslich in der ganzen resultirenden Formel die Substitutionen (41) unter den Bedingungen (42) ausführt.

Aus (30) und (40) aber folgt:

$$\sum_1^n{}_i \frac{\partial \Omega_2}{\partial \Delta y_i'} \Delta y_i + R = \left(\overline{\Omega} - \sum_1^n{}_i \bar{y}_i' \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i'}\right)\delta^2 x + \sum_1^n{}_i \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i'}\delta^2 y_i$$

$$+ \left\{\frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial x}\delta x + \sum_1^n{}_i \left(\frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i}\delta y_i - \bar{y}_i'\delta \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i'}\right)\right\}\delta x + \sum_1^n{}_i \delta \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i'}\delta y_i \,.$$

Nun ist:

$$\frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial x}\delta x + \sum_1^n{}_i \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i}\delta y_i \equiv \delta\overline{\Omega} - \sum_1^n{}_i \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i'}\delta y_i' \,.$$

Benutzt man also wieder die Abkürzungen:

$$(43) \qquad P \equiv \overline{\Omega} - \sum_1^n{}_i \bar{y}_i' \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i'}, \quad Q_i \equiv \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y_i'},$$

so erhält man schliesslich:

$$(43) \; K + [R]_0^1 = \left[P\delta^2 x + \sum_1^n{}_i Q_i \delta^2 y_i\right]_0^1 + \left[\delta P \delta x + \sum_1^n{}_i \delta Q_i \delta y_i\right]_0^1,$$

worin nun nach Bestimmung der δc_h aus den Gleichungen (42) die Substitutionen (41) auszuführen sind.

Erfüllt demnach die erhaltene Lösung des Problems $\delta V=0$ die Bedingungen I und II, so hat sie, um ein sicheres Minimum hervorzubringen, nur noch der Bedingung zu genügen, dass der so erhaltene Ausdruck (43) >0 bleibe für alle ersten und zweiten Variationen der Grenzwerthe $x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}, x_1, y_{11}, \dots, y_{n1}$, welche den $2q$ Bedingungen genügen:

$$\overline{\delta F_k} \equiv \frac{\overline{\partial F_k}}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\overline{\partial F_k}}{\partial x_1}\delta x_1 + \sum_1^n{}_i \left(\frac{\overline{\partial F_k}}{\partial y_{i0}}\delta y_{i0} + \frac{\overline{\partial F_k}}{\partial y_{i1}}\delta y_{i1}\right) = 0$$

und:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\delta^2 F_k} \equiv \overline{\frac{\partial F_k}{\partial x_0}}\delta^2 x_0 + \overline{\frac{\partial F_k}{\partial x_1}}\delta^2 x_1 + \sum_1^n{}^i\left(\overline{\frac{\partial F_k}{\partial y_{i0}}}\delta^2 y_{i0} + \overline{\frac{\partial F_k}{\partial y_{i1}}}\delta^2 y_{i1}\right)\\ \quad + \delta\overline{\frac{\partial F_k}{\partial x_0}}\delta x_0 + \delta\overline{\frac{\partial F_k}{\partial x_1}}\delta x_1 + \sum_1^n{}^i\left(\delta\overline{\frac{\partial F_k}{\partial y_{i0}}}\delta y_{i0} + \delta\overline{\frac{\partial F_k}{\partial y_{i1}}}\delta y_{i1}\right)\end{array}\right\} = 0.$$

Multiplicirt man aber die q letzten Bedingungen mit den aus den Gleichungen (10) und (17) erhaltenen Werthen der l_k und addirt sie dann zur Formel (43), so heben sich nach den Gleichungen (17) die zweiten Variationen der Grenzwerthe ganz weg und man findet:

$$(44)\quad K + [R]_0^1 = \delta P_1 \delta x_1 - \delta P_0 \delta x_0 + \sum_1^n{}^i(\delta Q_{i1}\delta y_{i1} - \delta Q_{i0}\delta y_{i0})$$

$$+ \sum_1^q{}^k l_k \left\{\delta\overline{\frac{\partial F_k}{\partial x_0}}\delta x_0 + \delta\overline{\frac{\partial F_k}{\partial x_1}}\delta x_1 + \sum_1^n{}^i\left(\delta\overline{\frac{\partial F_k}{\partial y_{i0}}}\delta y_{i0} + \delta\overline{\frac{\partial F_k}{\partial y_{i1}}}\delta y_{i1}\right)\right\}.$$

Mit Rücksicht darauf aber, dass hierin noch die Werthe (41) einzusetzen sind, sieht man, dass die rechte Seite dieser Formel vollständig übereinstimmt mit der rechten Seite der Formel (18). Und da man die Gleichungen (42), anstatt durch dieselben die δy_{i0} und δy_{i1} an Stelle der δc_h als Variable einzuführen, weit bequemer benutzen kann, um umgekehrt die δy_{i0} und δy_{i1} durch die δc_h auszudrücken, so erhellt unmittelbar, dass die Bedingung (31) eben nichts anderes ist als unsere frühere Bedingung III.

Beide Methoden führen also in der That zu genau demselben Resultate [1]).

---

1) Aus (24) ergiebt sich durch nochmalige Variation, jetzt jedoch nicht mehr bloss der Functionen y und der Grenzen, sondern zugleich auch der Multiplicatoren λ, wenn man die Charakteristik $\varDelta$ auch auf diese Variation bezieht und nach Ausführung derselben die Lösungen des Problems $\delta V = 0$ substituirt, unter Benutzung der Abkürzungen (13) die Formel:

$$\delta^2 V = \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_1^n{}^i\left(\varDelta\overline{\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}} - \frac{d}{dx}\varDelta\overline{\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}}\right)\varDelta y_i$$

$$+ \left[P\delta^2 x + \sum_1^n{}^i Q_i \delta^2 y_i\right]_0^1 + \left[\delta P \delta x + \sum_1^n{}^i \delta Q_i \delta y_i\right]_0^1,$$

§ 3.

Bemerkung und Beispiel.

Die zweite Variation des Integrals V im vorgelegten Probleme lässt sich, falls die übrigen Bedingungen des Minimums erfüllt sind, doch immer noch zum Verschwinden bringen, wenn entweder in der erhaltenen Lösung die obere Grenze x_1 die zunächst auf x_0 folgende Wurzel x der Grenzengleichung (9) gerade erreicht hat, oder aber für die Lösung der Werth (18) von $\delta^2 \overline{V}$ durch die Bedingungen (15) nur gerade semidefinit positiv geworden ist, und beide Male lässt dann die Forderung $\delta V = 0$ neben der betrachteten Lösung noch eine zweite unendlich benachbarte Lösung zu. Auch bin ich in solchen Beispielen, bei denen in Folge einer von vornherein im Problem auftretenden unbestimmten Constante die Lösung stetiger Aenderungen fähig ist, bisher noch nie dem Falle begegnet, dass die Bedingung III der Grenze x_1 einen grösseren Spielraum gestattet hätte, als die Bedingung II. Diese Bemerkungen lassen einen gewissen inneren Zusammenhang zwischen den beiden Bedingungen II und III von vornherein wenigstens nicht ganz unmöglich erscheinen. Wie es sich damit aber auch verhalten möge, jedenfalls geht dieser Zusammenhang doch nicht so weit, dass etwa die Bedingung II eo ipso schon in den Bedingungen I und III enthalten wäre. Im Allgemeinen ist vielmehr von den Bedingungen II und III sicher keine eine blosse Folge der anderen und der Bedingung I.

Dies zeigt sich sehr deutlich an dem folgenden einfachen Beispiele, welches die Bedingung I stets erfüllt, dagegen je nach der Grösse seiner unbestimmten Constanten a von den Bedingungen II und III beide, oder keine, oder nur die eine, resp. nur die andere befriedigt.

Das Beispiel gehört der einfachsten Problemgattung an:

Bei gegebenem x_0 und y_0 und unter der vorgeschriebenen Grenzbedingung

$$y_1 = \varphi(x_1)$$

die Function y aus der Forderung

---

welche sofort die Bedingung III auch auf dem zweiten Wege als nothwendig erkennen lässt.

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx = \text{Min.}$$

zu bestimmen.

Durch die Bedingungen $\delta x_0 = \delta y_0 = 0$ reducirt sich die Formel (14) hier auf die:

$$\delta \overline{V} = \left[\overline{f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}}\right]_1 \delta x_1 + \left[\overline{\frac{\partial f}{\partial y'}}\right]_1 \delta \bar{y}_1 ,$$

worin der obere Strich die Substitution der vollständigen Lösung:

$$(\alpha) \qquad y = \bar{y}(x, c_1, c_2)$$

der Differentialgleichung des Problems

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

anzeigt. Wegen der Grenzbedingung $y_1 = \varphi(x_1)$ muss aber weiter

$$\delta \bar{y}_1 = \varphi' x_1 \delta x_1$$

sein. Setzt man daher:

$$(\beta) \qquad \left[\overline{f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} + \varphi' x_1 \frac{\partial f}{\partial y'}}\right]_1 \equiv \Theta_1 (x_1, c_1, c_2),$$

so wird:

$$\delta \overline{V} = \Theta_1 \delta x_1$$

und die Forderung $\delta \overline{V} = 0$ verlangt demnach $\Theta_1 = 0$. Man hat also die beiden Integrationsconstanten c_1, c_2 und die obere Grenze x_1 aus den drei Gleichungen zu bestimmen:

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} \bar{y}(x_0, c_1, c_2) = y_0, \\ \bar{y}(x_1, c_1, c_2) = \varphi(x_1), \\ \Theta_1 (x_1, c_1, c_2) = 0. \end{cases}$$

Damit dann die irgend einem System reeller Auflösungen c_1, c_2, x_1 dieser drei Gleichungen zugehörige Lösung (α) ein sicheres Minimum des Integrales V bewirke, muss nach § 1:

I. Die Function der Variabeln p:

$$E \equiv f(x, \bar{y}, p) - f(x, \bar{y}, \bar{y}') - (p - \bar{y}')\overline{\frac{\partial f}{\partial y'}}$$

im Intervall x_0 bis x_1 stets > 0 bleiben, ausser für $p = \bar{y}'$;

II. x_1 zwischen x_0 und der nächstgrösseren Wurzel x der Gleichung liegen:

$$\Delta(x_1 x_0) = \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial c_2}\frac{\partial \bar{y}}{\partial c_1} - \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial c_1}\frac{\partial \bar{y}}{\partial c_2} = 0,$$

und endlich III. die ganze homogene Function zweiten Grades der Variabeln δx_1, δc_1, δc_2:

$$\delta^2 \overline{V} = \delta\Theta_1\, \delta x_1$$

in Folge der Bedingungen:

$$\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial c_1}\delta c_1 + \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial c_2}\delta c_2 = 0,$$

$$\bar{y}'_1 \delta x_1 + \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial c_1}\delta c_1 + \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial c_2}\delta c_2 = \varphi' x_1\, \delta x_1$$

definit positiv werden.

Kann man die beiden ersten Gleichungen (γ) nach den beiden Unbekannten c_1 und c_2 auflösen, so erhält man durch Substitution der Auflösungen

$$c_1 = \gamma_1(x_1), \quad c_2 = \gamma_2(x_1)$$

in die dritte Gleichung (γ) für x_1 die Gleichung:

$$(\delta) \qquad \Theta_1(x_1, \gamma_1(x_1), \gamma_2(x_1)) = 0$$

und $\delta^2 \overline{V}$ reducirt sich auf

$$\delta^2 \overline{V} = \frac{d\Theta_1}{dx_1}(\delta x_1)^2,$$

so dass dann die Bedingung III nur eine solche Wurzel x_1 der Gleichung (δ) zulässt, für welche:

$$(\varepsilon) \qquad \frac{d\Theta_1}{dx_1} > 0.$$

Nehmen wir nun, um zu unserem Beispiel zu kommen:

$$f \equiv \tfrac{1}{2}(y'^2 - y^2),$$

so wird:

$$y'' + y = 0$$

die Differentialgleichung des Problems.

Aus ihrer vollständigen Lösung:

$$(\alpha') \qquad y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

ergiebt sich:

$$\Delta(x, x_0) = \sin(x - x_0).$$

Die Bedingung II verlangt daher in diesem Falle:

$$(\zeta') \qquad x_0 < x_1 < x_0 + \pi .$$

Dagegen legt die Bedingung I der Lösung hier gar keine Beschränkung auf. Denn man erhält:

$$E = \frac{p^2}{2} - \frac{\bar{y}'^2}{2} - \bar{y}'(p - \bar{y}') \equiv \frac{(p - \bar{y}')^2}{2} .$$

Weiter wird nach (α')

$$\overline{f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}} \equiv - \overline{\frac{y'^2 + y^2}{2}} = - \frac{c_1{}^2 + c_2{}^2}{2}$$

und daher nach (β):

$$(\beta') \quad \Theta_1(x_1, c_1, c_2) \equiv -\tfrac{1}{2}\{c_1^2 + c_2^2 - 2\varphi' x_1 (c_1 \cos x_1 - c_2 \sin x_1)\}.$$

Für die drei Unbekannten c_1, c_2, x_1 ergeben sich somit die drei Gleichungen:

$$(\gamma') \quad \begin{cases} c_1 \sin x_0 + c_2 \cos x_0 = y_0 , \\ c_1 \sin x_1 + c_2 \cos x_1 = \varphi(x_1), \\ -2\Theta_1 \equiv c_1{}^2 + c_2{}^2 - 2\varphi' x_1 (c_1 \cos x_1 - c_2 \sin x_1) = 0 . \end{cases}$$

Sei jetzt im Besonderen gegeben:

$$x_0 = y_0 = 0, \quad \varphi(x_1) = (\alpha - x_1)^{1/3}, \quad \alpha > 0 ,$$

also die ganz specielle Aufgabe vorgelegt:

Unter den Festsetzungen:

$$y_0 = 0 , \quad y_1 = (\alpha - x_1)^{1/3}, \quad \alpha > 0$$

das Problem zu lösen:

$$V \equiv \tfrac{1}{2}\int_0^{x_1} (y'^2 - y^2)\, dx = \text{Min.}$$

Die Bedingung (ζ') erheischt dann:

$$(\text{II}') \qquad 0 < x_1 < \pi ,$$

und die beiden ersten Gleichungen (γ') geben sofort:

$$c_2 = 0 , \quad c_1 = \frac{(\alpha - x_1)^{1/3}}{\sin x_1} .$$

Hierdurch wird die dritte:

$$(\delta') \qquad \Theta_1 \equiv \frac{1}{6 \sin^2 x_1 (\alpha - x_1)^{1/3}} [3(x_1 - \alpha) - \sin 2x_1] = 0$$

und liefert also für x_1 die Gleichung:

$$(\eta') \qquad \psi(x_1) \equiv 3\,x_1 - \sin 2\,x_1 = 3\,\alpha.$$

Die Bedingung (ε) reducirt sich hiernach auf die:

$$\frac{1}{6\sin^2 x_1\,(\alpha - x_1)^{1/3}}\,\frac{d\psi(x_1)}{dx_1} > 0$$

und verlangt somit, da

$$\frac{d\varphi(x_1)}{dx_1} \equiv 3 - 2\cos 2\,x_1$$

stets > 0 bleibt, nur:

$$(\text{III}') \qquad x_1 < \alpha.$$

Nun wächst $\psi(x_1)$ beständig mit x_1 zugleich und verschwindet für $x_1 = 0$. Für jedes gegebene positive α besitzt daher die Gleichung (η') stets nur eine und zwar wiederum positive Wurzel x_1, und diese liegt zwischen a und b, so oft

$$\psi(a) < 3\,\alpha < \psi(b)$$

ist. Ueberdies ist:

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha) &< 3\,\alpha \text{ für } 0 < 2\,\alpha < \pi, \text{ und dann } \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) \equiv \frac{3\,\pi}{2} > 3\,\alpha,\\
&> 3\,\alpha \text{ für } \pi < 2\,\alpha < 2\,\pi,\\
&< 3\,\alpha \text{ für } 2\,\pi < 2\,\alpha < 3\,\pi,
\end{aligned}$$

und $> 3\,\alpha$ für $3\,\pi < 2\,\alpha < 4\,\pi$, und dann $\psi\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) \equiv \frac{9\,\pi}{2} < 3\alpha$.

Die eine Wurzel x_1 der Gleichung (η') ist daher:

$$\begin{array}{lll}
& > \alpha \text{ und } < \frac{\pi}{2} & \text{im Falle } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\\
& < \alpha & \quad » \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,\\
& > \alpha & \quad » \quad \pi < \alpha < \frac{3\,\pi}{2},\\
\text{und} & < \alpha \text{ und } > \frac{3\,\pi}{2} & \quad » \quad \frac{3\,\pi}{2} < \alpha < 2\,\pi.
\end{array}$$

Die zugehörige Lösung:

$$y = \frac{(\alpha - x_1)^{1/3}}{\sin x_1}\sin x$$

unserer Aufgabe ertheilt also dem Integrale V nur im Falle

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

einen kleinsten Werth. Denn nur dann genügt die Wurzel x_1 gleichzeitig beiden Bedingungen (II') und (III').

Im Falle:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

widerspricht die Wurzel der Bedingung (III'), erfüllt aber die Bedingung (II'); für:

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

erfüllt sie umgekehrt die Bedingung (III') und widerspricht der Bedingung (II'); und endlich im Falle

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

widerspricht sie beiden Bedingungen.

Es lag mir selbstverständlich daran, die Aufgabe als Beispiel zu der vorangehenden Theorie zu behandeln; an sich wäre es einfacher gewesen, unmittelbar die Quadratur

$$\overline{V} = \tfrac{1}{2}\int_0^{x_2} (\bar{y}'^2 - \bar{y}^2)\,dx$$

auszuführen und dann die Aufgabe $\overline{V} =$ Min. direct zu lösen.

SITZUNG VOM 2. NOVEMBER 1896.

Vorträge hielten:

1. Herr **Sophus Lie**, o. M.: Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen.
2. Herr **Sophus Lie**, o. M.: Vorlegung einer Arbeit von **Paul Stäckel**-Königsberg unter dem Titel: »Beiträge zur Flächentheorie«.

Sophus Lie, *Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen.*

Bei einer früheren Gelegenheit (diese Berichte 5. Juni 1893) sah ich mich dazu veranlasst, ausdrücklich zu betonen, dass meine allgemeine Theorie der Differentialinvarianten aller Transformationsgruppen, die durch Differentialgleichungen definirt werden können, angewandt auf die Gruppe aller Bewegungen, die Euler-Monge'sche Krümmungstheorie als ein specielles Kapitel umfasst. Ich entwickelte gleichzeitig eingehend ein neues Kapitel meiner Theorie dieser wichtigen Gruppe, indem ich nämlich für die Congruenz (im Euclid'schen Sinne) zweier *Raumcurven* nothwendige und hinreichende Kriterien angab, die auch dann gültig bleiben, wenn die betreffenden Curven imaginär sind oder gar die Länge Null haben. In dieser Weise erhielt ich insbesondere eine *Aequivalenztheorie der Minimalcurven*, die ein hervorragendes theoretisches Interesse darbietet und überdies auch für mehrere Gebiete der Geometrie der *reellen* Gebilde verwerthet werden kann.

In meinen Vorlesungen entwickele ich seit Jahren zugleich die allgemeinen Kriterien für die Congruenz zweier *Flächen*, die durch *beliebige* reelle oder *imaginäre* Gleichungen definirt sind. So einfach, ja selbstverständlich auch diese meine allgemeine *Aequivalenztheorie der Flächen* erscheinen mag, wohlbemerkt, wenn man meine allgemeine Invariantentheorie kennt, halte ich es doch für richtig, auch diese Betrachtungen einigermassen ausführlich darzustellen; sie geben in der That nicht allein schöne Illustrationen meiner allgemeinen Theorien, sondern sie haben überdies auch einen selbständigen theoretischen wie praktischen Werth.

Liegt eine Fläche F vor, die keine infinitesimale Bewegung des Raumes gestattet, so erhält diese Fläche bei Ausführung aller ∞^6 Bewegungen des Raumes sicher ∞^6 verschiedene Lagen. Die hiermit erhaltenen ∞^6 Flächen bilden eine bei allen Bewegungen invariante Flächenschaar, und es leuchtet unmittelbau ein, dass F in keiner kleineren Flächenschaar enthalten ist, die bei allen Bewegungen invariant bleibt.

Liegt dagegen eine Fläche Φ vor, die gewisse und zwar ω unabhängige infinitesimale Bewegungen gestattet, so gehört diese Fläche einer bei allen Bewegungen invarianten Flächenschaar, die nur $\infty^{6-\omega}$ Flächen umfasst; sie gehört andererseits keiner kleineren Flächenschaar, die alle Bewegungen gestattet.

Jede Flächenschaar, die ∞^ϱ Flächen umfasst, lässt sich nun definiren durch ein unbeschränkt integrables System von Differentialgleichungen, bestehend aus ν_1 Gleichungen erster Ordnung, ν_2 Gleichungen zweiter Ordnung, ... ν_{q-1} Gleichungen $(q-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und endlich ν_q Gleichungen q^{ter} Ordnung; die Zahlen $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_{q-1}, \nu_q$ erfüllen dabei die Bedingungen:

$$\nu_1 < 2,\ \nu_2 < 3 \dots \nu_{q-1} < q,\ \nu_q = q + 1\ ;$$

es ist ferner, können wir annehmen, unmöglich, durch Differentiation und Elimination weitere Differentialgleichungen abzuleiten, deren Ordnung kleiner als $q + 1$ ist, und es besteht überdies die Relation:

$$1 + (2 - \nu_1) + (3 - \nu_2) + \cdots + (q - \nu_{q-1}) = \varrho\ ,$$

sowie die äquivalente:

$$\frac{q(q+1)}{2} - (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{q-1}) = \varrho\ .$$

Nachdem wir diese allgemeinen Bemerkungen, die wir später verwerthen, vorausgeschickt haben, wenden wir uns insbesondere zu denjenigen unbeschränkt integrablen Systemen von Differentialgleichungen:

$$\Omega_k(xyzpq\dots) = 0\ , \quad k = 1, 2 \dots\ ,$$

die bei allen Bewegungen invariant bleiben, und überdies die Eigenschaft geniessen, dass *jede* Integralfläche von einer passend gewählten Bewegung in *jede andere* Integralfläche des betreffenden Gleichungssystems $\Omega_k = 0$ übergeführt werden kann. Anders ausgesprochen, wir suchen das allgemeinste unbeschränkt integrable System von Differentialgleichungen

$$\Omega_k(xyzpq\ldots) = 0\,, \quad (k = 1, 2, \ldots)\,,$$

dessen sämmtliche Integralflächen dadurch hervorgehen, dass alle Bewegungen des Raumes auf eine *beliebig* gewählte Integralfläche ausgeführt werden.

Liegt irgend ein derartiges unbeschränkt integrables System vor, das ν_1 Gleichungen erster Ordnung

$$\Omega_k^{(1)}(xyzpq) = 0\,, \quad (k = 1\ldots)$$

ν_2 davon unabhängige Gleichungen zweiter Ordnung

$$\Omega_k^{(2)}(xyzpqrst) = 0\,, \quad (k = 1\ldots)$$

u. s. w. und endlich $\nu_q = q + 1$ Gleichungen q^{ter} Ordnung umfasst, so dürfen wir immer behaupten, erstens, dass das System der Gleichungen *erster* Ordnung $\Omega_k^{(1)} = 0$ bei der Gruppe invariant bleibt, zweitens, dass das System der Gleichungen *erster und zweiter Ordnung*: $\Omega_k^{(1)} = 0$, $\Omega_k^{(2)} = 0$ bei der Gruppe invariant ist u. s. w.; auf die Frage, ob alle diese invarianten Systeme von Differentialgleichungen unbeschränkt integrabel sein müssen, brauchen wir hier gar nicht einzugehen.

Es liegt somit nahe, den folgenden Weg zu gehen: Wir bestimmen zunächst alle invarianten Gleichungssysteme in den fünf Veränderlichen x, y, z, p, q, sodann alle invarianten Gleichungssysteme in den Veränderlichen x, y, z, p, q, r, s, t u. s. w.

Zu diesem Zwecke nehmen wir die allgemeinste infinitesimale Bewegung und berechnen die entsprechenden Incremente der Grössen p und q, sodann die Incremente der Grössen r, s und t u. s. w.

Die gesuchten Gleichungssysteme in den Veränderlichen x, y, z, p, q sind dadurch bestimmt, dass sie die sechs, *einmal erweiterten* infinitesimalen Bewegungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial p} - p\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z} - pq\frac{\partial f}{\partial p} - (1+q^2)\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x} + (1+p^2)\frac{\partial f}{\partial p} + pq\frac{\partial f}{\partial q}$$

gestatten. Die drei ersten infinitesimalen Transformationen (Translationen) zeigen, dass jedes derartige Gleichungssystem von x, y, z frei sein muss und somit nur p und q enthalten kann; es muss dabei die drei Transformationen in p, q:

$$q\frac{\partial f}{\partial p} - p\frac{\partial f}{\partial q}, \quad -pq\frac{\partial f}{\partial p} - (1+q^2)\frac{\partial f}{\partial q}, \quad (1+p^2)\frac{\partial f}{\partial p} + pq\frac{\partial f}{\partial q}$$

gestatten. Nun aber verschwinden die zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} q & -p \\ -pq & -(1+q^2) \\ (1+p^2) & pq \end{vmatrix}$$

nämlich die Grössen

$$-q(1+p^2+q^2), \quad 1+p^2+q^2, \quad p(1+q^2+q^2)$$

nicht identisch, während sie dann und nur dann sämmtlich gleich Null werden, wenn p und q die Gleichung

$$0 = 1 + p^2 + q^2$$

erfüllen.

Es giebt somit nur ein einziges Gleichungssystem in den Veränderlichen x, y, z, p, q, nämlich die Gleichung:

$$1 + p^2 + q^2 = 0,$$

die alle Bewegungen gestattet.

Nichts ist leichter, als dieses erste Resultat auch durch einfache geometrische Betrachtungen abzuleiten, wohlbemerkt, wenn wir die Theorie des *Poncelet'schen*[1]) *Kreises* als bekannt voraussetzen. Liegen nämlich zwei Flächenelemente: $x_1\, y_1\, z_1\, p_1\, q_1$ und $x_2\, y_2\, z_2\, p_2\, q_2$ vor, deren Ebenen diesen Kreis in je zwei getrennten Punkten treffen, während die sechs *Punkt*coordinaten $x_1\, y_1\, z_1\, x_2\, y_2\, z_2$ sämmtlich endliche Werthe haben, so giebt es immer eine Bewegung (ja sogar einfach unendlich viele), die das erste Flächenelement in das zweite Element überführt. Liegen andererseits im endlichen Punktraume zwei Flächenelemente vor, deren Ebenen den PONCELET'schen Kreis berühren, so ist es ebenfalls immer möglich, das eine Element durch eine Bewegung in das andere Element überzuführen. Eine solche Ueberführung ist aber nicht mehr möglich, wenn die Ebene des einen Elements den PONCELET'schen Kreis berührt, die Ebene des zweiten Elements dagegen diesen Kreis schneidet. Diese geometrischen Betrachtungen zeigen, dass die Gleichung: $1 + p^2 + q^2 = 0$ die einzige invariante Elementschaar liefert, die nicht nur solche Elemente umfasst, deren Punkte in der unendlich fernen Ebene liegen. (Die hier angestellten Betrachtungen ermöglichen selbstverständlich auch die Bestimmung aller invarianten Elementschaaren, die nur solche Elemente enthalten, deren Punkte unendlich fern liegen; mit diesen letzten invarianten Elementschaaren brauchen wir uns aber bei dieser Gelegenheit nicht zu beschäftigen.

Wollen wir jetzt alle Gleichungssysteme in den Veränderlichen x, y, z, p, q, r, s und t bestimmen, die bei allen Bewegungen invariant bleiben, so bilden wir nach meinen allgemeinen Regeln die sechs *zweimal erweiterten* infinitesimalen Bewegungen:

---

1) Ich schlage vor, die unendlich fernen imaginären Kreispunkte einer Ebene als ihre *Poncelet'schen Punkte*, und dementsprechend den unendlich fernen imaginären Kugelkreis des Raumes als den *Poncelet'schen Kreis* zu bezeichnen. Die Einführung dieser Begriffe ist doch PONCELET's originellste Leistung, wenn auch dieser grösste Geometer unseres Jahrhunderts, der leider so früh von der Geometrie weggezogen wurde, nicht dazu Gelegenheit fand, die Tragweite dieser Begriffe nach allen Richtungen klar zu stellen.

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial p} - p\frac{\partial f}{\partial q} + 2s\frac{\partial f}{\partial r} + (t-r)\frac{\partial f}{\partial s} - 2s\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z} - pq\frac{\partial f}{\partial p} - (1+q^2)\frac{\partial f}{\partial q} - (2ps+qr)\frac{\partial f}{\partial r}$$
$$- (2qs+pt)\frac{\partial f}{\partial s} - 3qt\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x} + (1+p^2)\frac{\partial f}{\partial p} + pq\frac{\partial f}{\partial q} + 3pr\frac{\partial f}{\partial r} + (2ps+qr)\frac{\partial f}{\partial s}$$
$$+ (2qs+pt)\frac{\partial f}{\partial t},$$

unter denen die drei ersten zeigen, dass die gesuchten Gleichungssysteme von x, y, z frei sind und daher mit denjenigen Gleichungssystemen in p, q, r, s, t identisch sind, die gegenüber den drei Transformationen

$$q\frac{\partial f}{\partial p} - p\frac{\partial f}{\partial q} + 2s\frac{\partial f}{\partial r} + (t-r)\frac{\partial f}{\partial s} - 2s\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$-pq\frac{\partial f}{\partial p} - (1+q^2)\frac{\partial f}{\partial q} - (2ps+qr)\frac{\partial f}{\partial r} - (2qs+pt)\frac{\partial f}{\partial s} - 3qt\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$(1+p^2)\frac{\partial f}{\partial p} + pq\frac{\partial f}{\partial q} + 3pr\frac{\partial f}{\partial r} + (2ps+qr)\frac{\partial f}{\partial s} + (2qs+pt)\frac{\partial f}{\partial t}$$

invariant sind. Nach meinen allgemeinen Theorien zerfallen die betreffenden Systeme in zwei getrennte Kategorien, je nachdem die dreireihigen Determinanten der Matrix

$$(\mathrm{M}) \quad \left| \begin{array}{ccccc} q & -p & 2s & t-r & -2s \\ -pq & -(1+q^2) & -(2ps+qr) & -(2qs+pt) & -3qt \\ 1+p^2 & pq & 3pr & 2ps+qr & 2qs+pt \end{array} \right|$$

vermöge des Gleichungssystems verschwinden oder nicht.

Unter den Determinanten dieser Matrix brauchen wir nur die folgenden:

$$(1+p^2+q^2)\,[(1+p^2)s - pqr]$$
$$(1+p^2+q^2)\,[(1+p^2)t - (1+q^2)r]$$
$$(1+p^2+q^2)\,[(1+q^2)s - pqt]$$

hinzuschreiben. Sehen wir dabei vorläufig von allen imaginären Developpablen ab, die den PONCELET'schen Kugelkreis enthalten, anders ausgedrückt, schliessen wir alle Gleichungssysteme aus, unter deren Gleichungen sich die Gleichung erster Ordnung:

$$0 = 1 + p^2 + q^2 \equiv \Delta$$

findet, so sehen wir, dass jedes andere Gleichungssystem, für welches unsere Determinanten sämmtlich verschwinden, die beiden Gleichungen

$$\text{(N)} \qquad \frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}$$

enthält. Diese beiden Gleichungen bestimmen aber alle Elemente zweiter Ordnung $(x y z p q r s t)$, die man als *Nabelpunkte* zu bezeichnen pflegt. Darum leuchtet ohne weiteres ein, dass diese Elemente eine invariante Schaar bilden.

Um direct zu beweisen, dass die Gleichungen (N) das einzige invariante Gleichungssystem in unseren *acht* Veränderlichen liefern, das durch Determinantenbildung *unmittelbar* gefunden wird (und nicht die Gleichung $1 + p^2 + q^2 = 0$ umfasst), stellen wir am besten die folgenden *begrifflichen Betrachtungen* an. Die Determinanten der Matrix (M) verschwinden dann und nur dann sämmtlich, wenn das betreffende Element zweiter Ordnung $(x \ldots t)$ bei mindestens einer infinitesimalen Bewegung seine Lage behält. Diese Bedingung ist aber dann und nur dann erfüllt, wenn das betreffende Element *einer Kugel* angehört, das heisst, wenn es einen Nabelpunkt definirt.

Die beiden Gleichungen aller Nabelpunkte

$$\text{(N)} \qquad \frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}$$

liefern also das einzige bei allen Bewegungen invariante System von Differentialgleichungen z w e i t e r *Ordnung, das* u n m i t t e l b a r *bei Determinantenbildung gefunden wird.*

Dieses Gleichungssystem ist unbeschränkt integrabel und es sind die ∞^4 Kugeln die zugehörigen Integralflächen. Zwei Kugeln sind aber dann und nur dann congruent, wenn das Quadrat des Radius für beide Kugeln denselben Werth hat.

Ertheilen wir daher in der bekannten Gleichung der Hauptkrümmungsradien

$$\text{(R)}\quad (rt-s^2)R^2-[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]\sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,R \\ +(1+p^2+q^2)^2=0$$

der Grösse R einen beliebigen constanten Werth k und fügen die hervorgehende Gleichung zu den beiden Gleichungen (N) aller Nabelpunkte hinzu, so erhalten wir *das allgemeinste System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung:*

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}\,,$$

$$(rt-s^2)k^2-[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]\sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,k \\ +(1+p^2+q^2)^2=0\,,$$

das bei allen Bewegungen invariant bleibt, das ferner alle Determinanten der Matrix verschwinden lässt, und das endlich nur krumme Integralflächen besitzt, die unter einander congruent sind. Hierzu kommt das System: $r=s=t=0$.

Suchen wir jetzt alle invarianten Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnnng, für welche die Determinanten der Matrix (M) *nicht* sämmtlich verschwinden, so sollen wir nach meinen allgemeinen Regeln die Symbole (vgl. S. 471) der zweimal erweiterten infinitesimalen Bewegungen gleich Null setzen und die beiden Lösungen des erhaltenen vollständigen Systems suchen. Diese Lösungen, anders ausgedrückt, die *Differentialinvarianten zweiter Ordnung der Bewegungsgruppe*, sind aber grade die beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2, deren analytische Ausdrücke die beiden Wurzeln der Gleichung (R) sind.

Es giebt daher zweierlei invariante Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche die Determinanten der Matrix (M) *nicht sämmtlich verschwinden. Die Systeme der ersten Art bestehen jedesmal nur aus einer Gleichung zwischen den beiden Hauptkrümmungsradien:*

$$\Omega(R_1 R_2)=0\,.$$

Die Systeme der zweiten Art haben die Form:

$$R_1=a=\text{Const.},\quad R_2=b=\text{Const.},$$

sind aber nach bekannten Sätzen nur dann integrabel, wenn die beiden Constanten a und b denselben Werth haben, oder aber die eine unendlich gross ist.

Jede partielle Differentialgleichung von der Form $\Omega(R_1 R_2)=0$ hat ∞^∞ viele Integralflächen und zwar lauter Weingarten'sche Flächen; es ist selbstverständlich, dass diese ∞^∞ viele Integralflächen einer bestimmten Gleichung $\Omega(R_1\, R_2) = 0$ nicht sämmtlich congruent sind. Es ist aber ebenso selbstverständlich, dass jede Integralfläche einer solchen Gleichung von jeder Bewegung in eine Integralfläche übergeführt wird. Es ordnen sich also alle Integralflächen einer Gleichung $\Omega = 0$ in invariante Schaaren, deren jede aus lauter congruenten Flächen besteht. Eine solche Schaar enthält *höchstens* ∞^6 Flächen, kann aber auch aus einer geringeren Anzahl Flächen bestehen.

Zwei partielle Differentialgleichungen von der Form:

$$R_1 = a = \text{Const.}, \quad R_2 = b = \text{Const.}$$

haben nur dann gemeinsame *nicht-cylindrische* Integralflächen, wenn die Constanten a und b gleich gross sind. Das Gleichungssystem:

$$R_1 = a = \text{Const.}, \quad R_2 = a = \text{Const.}$$

ist unbeschränkt integrabel und ist überdies ein Involutionssystem, dessen ∞^∞ Integralflächen in der folgenden Weise gefunden werden: Man sucht die Umhüllungsfläche von ∞^1 Kugeln mit Radius a, deren Mittelpunkte eine beliebig gewählte Minimalcurve ausfüllen. Die Frage nach den Kriterien für die Congruenz zweier derartigen Umhüllungsflächen reducirt sich auf die früher von uns erledigte Frage nach den Congruenzkriterien zweier Minimalcurven.

Fragen wir nun ganz allgemein, wie man entscheidet, ob zwei *beliebig* vorgelegte Flächen congruent sind, so können wir diese Frage in der folgenden Weise erledigen.

Erfüllt die eine Fläche die Gleichung:

$$1 + p^2 + q^2 = 0\,,$$

so muss auch die zweite Fläche eine Minimaldeveloppable sein. Zwei solche Developpablen sind congruent, wenn ihre Rückkehrcurven, die alle beide Minimalcurven sind, mit einander congruent sind. Ist insbesondere die eine Fläche eine Minimalebene, so muss auch die andere Fläche eine Minimalebene sein.

Wir können fernerhin von den Minimaldeveloppablen absehen.

Ist die eine Fläche eine Kugel mit Radius a, so muss auch die andere Fläche eine Kugel mit Radius a sein. Diese nothwendige Bedingung ist auch hinreichend.

Nachdem hiermit die aufgestellte Frage für Minimaldevelop-pablen und Kugeln erledigt worden ist, *bleibt uns nur noch übrig, alle Flächen zu betrachten, für welche die Determinanten der Matrix nicht sämmtlich verschwinden.* Eine derartige Fläche zusammen mit allen mit ihr congruenten Flächen wird durch ein invariantes System von Differentialgleichungen bestimmt, das auf eine solche Form

$$J_1 = 0\,, J_2 = 0\,, \ldots J_m = 0$$

gebracht werden kann, dass alle Grössen J_1, J_2, ... J_m Differentialinvarianten der Bewegungsgruppe darstellen. Hier müssen nun wiederum mehrere Möglichkeiten berücksichtigt werden.

Findet sich unter den Gleichungen des unbeschränkt integrablen invarianten Systems keine, deren Ordnung kleiner als *drei* ist, so muss es, weil die Zahl der Integralflächen nicht grösser als ∞^6 sein darf, vier Gleichungen dritter Ordnung enthalten. Unsere Gruppe hat zwei Differentialinvarianten zweiter Ordnung R_1, R_2 und *vier* von dritter Ordnung, die Σ_1, Σ_2, Σ_3 und Σ_4 heissen mögen. Das betreffende unbeschränkt integrable System besteht aus vier Gleichungen von der Form

$$\Sigma_k = \varphi_k(R_1\,, R_2) \qquad (k = 1 \ldots 4)\,.$$

Zwei hierher gehörige Flächen sind dann und nur dann congruent, wenn die beiden Flächen *dieselben* Gleichungen $\Sigma_k = \varphi_k(R_1\,, R_2)$ erfüllen. Unter den hier gemachten Voraussetzungen gestatten die betreffenden Flächen keine infinitesimale Bewegung, denn sonst wären die Krümmungsradien durch eine Relation gebunden; unter den Congruenzkriterien fände sich somit mindestens eine Differentialgleichung *zweiter* Ordnung.

Setzen wir jetzt voraus, dass das betreffende unbeschränkt integrable System, das uns die Congruenzkriterien liefert, eine und nur eine Gleichung zweiter Ordnung enthält, die somit die Form

$$\Omega(R_1\,, R_2) = 0$$

besitzt. Hat nun dieses Gleichungssystem ∞^6 verschiedene

Integralflächen, anders ausgedrückt, gestattet nicht jede Integralfläche eine infinitesimale Bewegung, so finden sich unter den Gleichungen des Systems *drei* Gleichungen dritter Ordnung. In diesem Falle bestehen daher die Congruenzkriterien wiederum aus *vier* Gleichungen zwischen sechs Differentialinvarianten R_1, R_2, Σ_1, Σ_2, Σ_3 und Σ_4. Diese *vier* Gleichungen lassen sich aber jetzt nicht nach den vier Σ auflösen, indem R_1 und R_2 durch *eine* Relation gebunden sind. — Hat das unbeschränkt integrable Gleichungssystem, das die Congruenzkriterien liefert, nicht ∞^6, sondern nur ∞^5 verschiedene Integralflächen, und gestatten dementsprechend die beiden vorgelegten Flächen eine und nur eine infinitesimale Bewegung, so besteht das Gleichungssystem aus fünf Gleichungen, die R_2 und die vier Σ_k durch R_1 ausdrücken. Weitere Möglichkeiten treten hier nicht ein, indem ein unbeschränkt integrables System, das keine Gleichung erster Ordnung und nur eine Gleichung zweiter Ordnung enthält, mindestens ∞^5 verschiedene Integralflächen umfasst.

Jetzt kommen wir zu dem letzten Falle, der sich dadurch charakterisiren lässt, dass die Congruenzkriterien zwei und nur zwei Gleichungen zweiter Ordnung enthalten, die dann sicher die Form

$$R_1 = a\,,\ R_2 = b \qquad (a = \text{Const.},\ b = \text{Const.})$$

haben. Das betreffende unbeschränkt integrable System hat mindestens ∞^4 und selbstverständlich höchstens ∞^6 Integralflächen. Ist die Zahl der Integralflächen gleich ∞^4, so besteht das betreffende Gleichungssystem aus sechs Gleichungen zwischen den Grössen R und Σ, die somit sämmtlich ganz bestimmte Zahlenwerthe haben. In diesem Falle kann die Gleichung der betreffenden Flächen, wie meine Bestimmung aller zweigliedrigen Bewegungsgruppen zeigt, eine unter den Formen:

$$x^2 + y = k\,, \quad (x + iy)^2 = kz\,, \quad z = k \log (x + iy)$$

erhalten, und jedesmal entscheidet die Constante k die Frage der Aequivalenz. Ist die Zahl der Integralflächen gleich ∞^5 oder ∞^6, so kann durch jeden Punkt einer solchen Fläche nur *eine* Krümmungslinie gehen; denn sonst wäre sie eine Dupinsche Cyclide, ja ein Rotationscylinder mit zwei infinitesimalen

Bewegungen in sich, was ausgeschlossen ist. Unsere Flächen sind also jedesmal Umhüllungsflächen von ∞^1 gleichgrossen Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer Maximalcurve liegen. Für diesen Fall gaben wir schon auf Seite 474 die Congruenzkriterien. — Zu beachten bleibt immerhin, dass die Beweise meiner *Sätze* nur innerhalb passend gewählter Bereiche gelten, und dass dementsprechend in dieser Note *Symmetrie* als Congruenz aufgefasst wird.

Paul Stäckel in Königsberg i. P.: *Beiträge zur Flächentheorie.*

I.

Zur Theorie der Krümmungslinien.

1. Sophus Lie hat in seiner schönen Abhandlung: *Ueber geodätische Linien*[1]) darauf hingewiesen, dass es bei Untersuchungen in der Flächentheorie unerlässlich ist, zu unterscheiden, ob man sich auf *reelle* Grössen beschränkt, oder ob man auch *complexe* Grössen zulassen und damit die volle Allgemeinheit der Ergebnisse erreichen will, und er hat später hervorgehoben[2]), dass »die Untersuchungen über imaginäre Gebilde, obgleich sie an sich wichtig genug sind, häufig auch für reelle Gebilde nutzbringend verwerthet werden können«; wofür seine Entdeckungen in der Theorie der Minimalflächen ein schlagendes Beispiel waren.

Trotz dieser wiederholten Hinweise Lie's ist meines Wissens noch nicht genauer untersucht worden, welche Modificationen die klassische Theorie der *Krümmung der Flächen* erfährt, wenn man die Voraussetzung der Realität fallen lässt, und es scheint mir daher an der Zeit zu sein, dass diese Lücke ausgefüllt wird.

2. Einer der wichtigsten Sätze der Krümmungstheorie besteht darin, dass die *Krümmungslinien* ein *Orthogonalsystem* auf der Fläche bilden. Ausgenommen ist nur die Kugel, auf der jede Curve als Krümmungslinie angesehen werden darf. Man überzeugt sich leicht, dass im complexen Gebiete noch andere

---

1) Note I: Ueber die allgemeinste geodätische Abbildung einer reellen oder imaginären Fläche. Mathematische Annalen, Bd. 20. 1880. S. 419.

2) Lie, Vorlesungen über continuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen. Bearbeitet und herausgeg. von G. Scheffers. Leipzig 1893. S. 667.

Ausnahmefälle hinzutreten. Es lässt sich das am einfachsten übersehen, wenn die *Asymptotenlinien* als Parametercurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ eingeführt werden, und das ist erlaubt, sobald die betrachtete Fläche ein von Null verschiedenes Krümmungsmaass besitzt. Unter dieser Voraussetzung wird die Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$Edu^2 - Gdv^2 = 0\text{ [1]},$$

und hieraus folgt, dass die Krümmungslinien in der That ein Orthogonalsystem bilden, so lange die Determinante EG von Null verschieden ist.

Hat man $E = G = 0$, so wird die Fläche eine Kugel, denn der Krümmungsradius ϱ des Normalschnittes, der durch die Punkte u, v und $u + du$, $v + dv$ geht, wird allgemein durch die Gleichung:

$$\varrho = \frac{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}$$

gegeben. Ist also gleichzeitig $L = 0$, $N = 0$, weil die Asymptotenlinien Parametercurven sind, und $E = 0$, $G = 0$, so wird

$$\varrho = \frac{F}{M},$$

und es besitzen alle Normalschnitte im Punkte u, v dieselbe Krümmung.

Lässt man jedoch auch imaginäre Flächen zu, so darf man annehmen, dass E verschwindet, während G nicht identisch gleich Null ist, und dann giebt es auf der Fläche nur *eine* Schaar von *Krümmungslinien*, nämlich die Curven $v = \text{const.}$, die zugleich *Asymptotenlinien* und, wegen $E = 0$, *Minimalcurven* sind. Fällt umgekehrt bei einer Fläche die eine Schaar der Asymptotenlinien mit der einen Schaar der Minimalcurven zusammen, so wird bei Einführung der Asymptotenlinien als Parametercurven

$$L = 0,\ N = 0,\ E = 0,$$

und hieraus folgt, dass die Fläche nur *eine* Schaar von Krümmungslinien, nämlich gerade die betreffende Schaar der Minimal-

1) Leider sind die Bezeichnungen in der Flächentheorie von einer verwirrenden Mannigfaltigkeit. Ich schliesse mich im Folgenden an die recht zweckmässigen Bezeichnungen von J. Knoblauch an (Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen. Leipzig 1888).

linien, besitzt. *Zwischen die allgemeinen Flächen, bei denen die Krümmungslinien ein Orthogonalsystem bilden, und die Kugeln, bei denen jede Flächencurve Krümmungslinie ist, schieben sich mithin im complexen Gebiete die Flächen ein, die durch das Zusammenfallen der einen Schaar von Minimallinien mit der einen Schaar von Asymptotenlinien charakterisirt sind, und bei denen nur e i n e Schaar von Krümmungslinien existirt.*

3. Die soeben definirten Ausnahmeflächen sollen jetzt genauer untersucht werden. Als Gleichung für die Hauptkrümmungsradien erhält man zunächst:

$$\left(R - \frac{F}{M}\right)^2 = 0\,,$$

es wird also

$$R_1 = R_2 = \frac{F}{M}\,.$$

Hieraus folgt für das GAUSS'sche Krümmungsmaass:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{M^2}{F^2}\,.$$

Zu weiteren Eigenschaften gelangt man vermöge der drei Fundamentalgleichungen, die zwischen den sechs Fundamentalgrössen E, F, G; L, M, N bestehen, und die unter Benutzung der CHRISTOFFEL'schen Symbole folgendermaassen lauten:

$$\text{I)}\quad \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K,$$

$$\text{II)}\quad \frac{\partial L}{\partial v} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} M + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} N = \frac{\partial M}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} L + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} N,$$

$$\text{III)}\quad \frac{\partial N}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} L + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} M = \frac{\partial M}{\partial v} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} M + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} N\,^{1)}.$$

Werden im Besonderen die Asymptotenlinien als Parametercurven gewählt, so ist

$$L = 0 \quad \text{und} \quad N = 0\,.$$

Führt man ferner an Stelle von M die Grösse:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{\sqrt{EG - F^2}}$$

1) KNOBLAUCH, a. a. O. S. 81. Den Ausdruck für K findet man S. 74.

ein und beachtet die Relationen:

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \sqrt{EG-F^2}}{\partial u},$$

$$\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \sqrt{EG-F^2}}{\partial v},$$

so erhalten die Fundamentalgleichungen die einfache Gestalt:

$$\text{I}')\quad \mathfrak{M} = i\sqrt{K},$$

$$\text{II}')\quad \frac{\partial \log \mathfrak{M}}{\partial u} = -2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix},$$

$$\text{III}')\quad \frac{\partial \log \mathfrak{M}}{\partial v} = -2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}.$$

Setzt man in diesen Gleichungen $E = 0$, so wird $\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0$, und es ist daher nach II') $\mathfrak{M}$ eine Function von v allein:

$$(1)\qquad \mathfrak{M} = i e^{-\mu(v)}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Linien $v =$ const. auch die *Linien constanten Krümmungsmaasses* sind, denn es wird

$$(2)\qquad K = e^{-2\mu(v)}.$$

Die Gleichung III') geht nunmehr über in:

$$(3)\qquad \frac{\partial G}{\partial u} = \mu'(v) F,$$

und bildet man jetzt K unter der Annahme:

$$E = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial G}{\partial u} = \mu'(v) F,$$

so liefert (1) die Gleichung

$$-e^{-2\mu(v)} F = \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v}.\ ^{1)}$$

1) Bekanntlich gilt für $E = G = 0$ die Formel $K = \frac{-1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v}$. Hier erkennt man, dass diese Formel richtig bleibt, wenn allgemeiner $E = 0$ und $F\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} = 0$ ist.

Nach LIOUVILLE ist das allgemeine Integral dieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F = -\frac{2\varphi'(u)\psi'(v)}{(\varphi(u) + \psi(v))^2} e^{-2\mu(v)}, \tag{4}$$

und mit F ist durch (1) und (3) auch M und G gegeben.

Führt man schliesslich, was erlaubt ist, an Stelle von u und v als GAUSS'sche Coordinaten φ und ψ ein und schreibt nachträglich für φ und ψ wieder u und v, so ergiebt sich, dass für die betrachteten Flächen die Fundamentalgleichungen in allgemeinster Weise durch:

$$\left\{\begin{array}{l} E = 0, \quad F = \dfrac{-2e^{2m(v)}}{(u+v)^2}, \; G = \dfrac{2m'(v)^{2m(v)}}{u+v} + n(v), \\ L = 0, \quad M = \dfrac{-2e^{m(v)}}{(u+v)^2}, \; N = 0 \end{array}\right. \tag{5}$$

befriedigt werden; $m(v)$ und $n(v)$ sind dabei willkürliche Functionen ihrer Argumente.

4. Nach einem Satze von OSSIAN BONNET[1]) ist durch die Angabe von sechs Functionen $E, F, G; L, M, N$, die den drei Fundamentalgleichungen I), II), III) genügen, eine Fläche bis auf ihre Lage im Raume und die Spiegelung an einer Ebene eindeutig festgelegt. Zu jedem Paare von Functionen $m(v)$ und $n(v)$ gehört daher eine Fläche, bei der die eine Schaar der Asymptotenlinien mit der einen Schaar der Minimalflächen zusammenfällt, und es lässt sich mithin die Gesammtheit dieser Flächen durch eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung charakterisiren.

Um von den sechs Fundamentalgrössen $E, F, G; L, M, N$ zu der Darstellung der Cartesischen Coordinaten x, y, z eines Punktes der Fläche als Functionen von u und v zu gelangen, hat man die folgenden Gleichungen zu integriren, in denen X, Y, Z die Richtungscosinus der Normale bedeuten[2]):

---

1) Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. Journal de l'École polytechnique. Cahier 42. 1867. S. 31.

2) Man vergleiche darüber etwa STAHL und KOMMERELL, Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie. Leipzig 1893. § 8.

$$
(A)\begin{cases}
\text{a)}\ (EG-F^2)\dfrac{\partial X}{\partial u}=(FM-GL)\dfrac{\partial x}{\partial u}+(FL-GM)\dfrac{\partial x}{\partial v}, \\
\text{b)}\ (EG-F^2)\dfrac{\partial X}{\partial v}=(FN-GM)\dfrac{\partial x}{\partial u}+(FM-EN)\dfrac{\partial x}{\partial v}; \\
\text{c)}\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}=LX+\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial x}{\partial v}, \\
\text{d)}\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=MX+\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial x}{\partial v}, \\
\text{e)}\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}=NX+\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial x}{\partial v},
\end{cases}
$$

und die entsprechenden Gleichungen gelten für Y und y, Z und z.

Für den vorliegenden Fall genügt es, die Gleichung c) zu bilden, die in

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\frac{-2}{u+v}\frac{\partial x}{\partial u}$$

übergeht. Es ist daher

$$(B)\quad x=\frac{\varphi_1(v)}{u+v}+\psi_1(v),\ y=\frac{\varphi_2(v)}{u+v}+\psi_2(v),\ z=\frac{\varphi_3(v)}{u+v}+\psi_3(v),$$

und hieraus erschliesst man sofort, dass die Curven $v=$ const. gerade Linien sind. *Mithin sind die Flächen, bei denen die Krümmungslinien in eine Schaar zusammenfallen, geradlinig, und die erzeugenden Geraden sind Minimalgeraden.* Wird umgekehrt eine Fläche durch die Bewegung einer Minimalgeraden erzeugt[1]), so erhält man bei Einführung der Asymptotenlien als Parametercurven:

$$L=0,\quad N=0,\quad E=0,$$

und es fallen daher die Krümmungslinien in *eine* Schaar zusammen. Hiermit ist der Lehrsatz gewonnen:

Die Krümmungslinien einer Fläche, deren Krümmungsmaass von Null verschieden ist, bilden im Allgemeinen ein Orthogonalsystem. Ausgenommen sind nur die geradlinigen Flächen, die durch Bewegung einer Minimalgeraden

1) Diese Ausdrucksweise ist erlaubt, da alle Minimalgeraden einander congruent sind; vergleiche LIE, Vorlesungen über continuirliche Gruppen. Leipzig 1893. S. 704.

entstehen. Bei diesen Flächen fallen die Krümmungslinien in eine Schaar zusammen, es sei denn, dass die Fläche noch eine zweite Erzeugung durch Minimalgeraden zulässt. Sie ist dann eine Kugel, und jede Flächencurve darf als Krümmungslinie angesehen werden.

Aus diesem Lehrsatze ergiebt sich sofort die allgemeinste Darstellung von x, y, z durch GAUSS'sche Coordinaten. Setzt man nämlich:

$$(\mathrm{B}') \quad x = f_1(q)p + g_1(q), \quad y = f_2(q)p + g_2(q); \quad z = f_3(q)p + g_3(q),$$

so wird für $q = \text{const.}$:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)dp^2 ,$$

und man hat daher in (B′) die Functionen f_1, f_2, f_3 nur der Bedingung zu unterwerfen, dass

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 0$$

wird. Die Curven $q = \text{const.}$ sind alsdann die Minimalgeraden.

Lässt man die Voraussetzung fallen, dass das Krümmungsmaass der Fläche von Null verschieden ist, so ergeben sich die *Developpablen.* Auch bei ihnen bilden die Krümmungslinien im Allgemeinen ein Orthogonalsystem. Ausgenommen sind nur die Developpabeln, die durch Bewegung einer Minimalgeraden entstehen. Diese Flächen theilen mit der Kugel die Eigenschaft, dass eine jede Flächencurve als Krümmungslinie angesehen werden kann.

Diese Ergänznng des vorher bewiesenen Lehrsatzes verdanke ich einer freundlichen Mittheilung von SOPHUS LIE, dem die Ergebnisse dieser Nummer schon vor 25 Jahren bekannt gewesen sind.

5. Unter den Flächen, die durch die Bewegung einer Minimalgeraden erzeugt werden, stehen der *Kugel* am nächsten die *Flächen von constantem Krümmungsmaasse.* Setzt man, was unbeschadet der Allgemeinheit geschehen darf:

$$K = 1 ,$$

so wird $m(v) = 0$ und die Fundamentalgrössen haben die Werthe:

$$E = 0\,, \quad F = \frac{-2}{(u+v)^2}\,, \quad G = n(v)\,;$$

$$L = 0\,, \quad M = \frac{-2}{(u+v)^2}\,, \quad N = 0\,.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen:

$$\text{(A)} \left\{ \begin{array}{ll} \text{a}')\ \dfrac{\partial X}{\partial u} = -\dfrac{\partial x}{\partial u}\,, & \text{b}')\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = -\dfrac{\partial x}{\partial v} - \tfrac{1}{2} n(v)(u+v)^2 \dfrac{\partial x}{\partial u}\,; \\ \text{c}')\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \dfrac{-2}{u+v}\dfrac{\partial x}{\partial u}\,, & \text{d}')\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \dfrac{-2}{(u+v)^2} X\,, \\ \multicolumn{2}{l}{\text{e}')\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \dfrac{-2}{u+v}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \left(n(v) + \tfrac{1}{4} n'(v)(u+v)\right)(u+v)\dfrac{\partial x}{\partial u}\,,} \end{array} \right.$$

deren Integration ohne Mühe durchgeführt werden kann.

Aus c') folgt wieder:

$$x = \frac{\varphi(v)}{u+v} + \psi(v)\,,$$

und daher wird nach a') und b'):

$$X = -\frac{\varphi(v)}{u+v} - \psi(v) + \tfrac{1}{2}\int n(v)\varphi(v)\,dv\,.$$

Die Gleichungen d') und e') werden alsdann:

$$\psi(v) = \tfrac{1}{2}\int n(v)\varphi(v)\,dv - \tfrac{1}{2}\varphi'(v)\,, \quad \psi''(v) = \tfrac{1}{4}n'(v)\,\varphi(v)\,,$$

sodass $\varphi(v)$ durch die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\varphi''' + n\varphi' + \tfrac{1}{2}n'\varphi = 0$$

bestimmt wird. Kennt man aber φ, so ist es leicht x, y und z zu erhalten.

II.

Ueber die Fundamentalgrössen der Flächentheorie.

1. Einer der wichtigsten Sätze der Flächentheorie ist der Satz von Ossian Bonnet, der besagt, dass durch jedes System von sechs Functionen E, F, G; L, M, N, die den drei Fundamentalgleichungen:

$$\text{I)}\quad \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K,$$

$$\text{II)}\quad \frac{\partial L}{\partial v} + \left\{ {11 \atop 1} \right\} M + \left\{ {11 \atop 2} \right\} N = \frac{\partial M}{\partial u} + \left\{ {12 \atop 1} \right\} L + \left\{ {12 \atop 2} \right\} M,$$

$$\text{III)}\quad \frac{\partial N}{\partial u} + \left\{ {22 \atop 1} \right\} L + \left\{ {22 \atop 2} \right\} M = \frac{\partial M}{\partial v} + \left\{ {12 \atop 1} \right\} M + \left\{ {12 \atop 2} \right\} N$$

genügen, eine Fläche bis auf ihre Lage im Raume und die Spiegelung an einer Ebene eindeutig festgelegt ist[1]). Werden daher zwei Flächen S und S_1 auf einander abgebildet und stellt es sich heraus, dass zu entsprechenden Punkten von S und S_1 dieselben Werthe der Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung gehören, dass also

$$(1)\quad E_1 = E,\ F_1 = F,\ G_1 = G;\quad L_1 = L,\ M_1 = M,\ N_1 = N$$

ist, so lässt sich die eine Fläche in die andere durch eine Bewegung überführen, der nöthigenfalls eine Spiegelung an einer Ebene hinzuzufügen ist, und bei dieser Transformation gehen die Bildpunkte in einander über.

Der Zweck dieser Abhandlung ist zu zeigen, dass der Satz von BONNET folgende bemerkenswerthe Verallgemeinerung zulässt. Werden zwei Flächen S und S_1 auf einander abgebildet, und stellt es sich heraus, dass in entsprechenden Punkten von S und S_1 die Verhältnisse der Fundamentalgrössen erster Ordnung und die Verhältnisse der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung übereinstimmen, dass also

$$(2)\qquad \frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G},\quad \frac{L_1}{L} = \frac{M_1}{M} = \frac{N_1}{N}$$

ist, so lässt sich im Allgemeinen die eine Fläche in die andere durch eine Aehnlichkeitstransformation überführen, und dabei gehen die Bildpunkte in einander über. *Im Allgemeinen* bedeutet, dass dieser Satz versagen kann, wenn die Flächen S und

1) OSSIAN BONNET, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. Journal de l'École polytechnique. Cahier 42. 1867. S. 31. Man vergleiche auch: C. RUNGE, Ueber die Krümmung, Torsion und geodätische Krümmung der auf einer Fläche gezogenen Curven. Dissertation. Berlin 1880, und R. LIPSCHITZ, Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck der Linearelemente. Sitzungsberichte der Berliner Akademie. Jahrgang 1883. S. 541.

S_1 einer durch bestimmte partielle Differentialgleichungen charakterisirten Klasse von Flächen angehören, die ich der Kürze wegen im Folgenden als *C-Flächen* bezeichnen will; zu den *C*-Flächen gehören zum Beispiel die Kugeln und die Minimalflächen [1]).

2. Stehen zwei Flächen S und S_1 in der eben angegebenen Beziehung, so haben die *Minimalcurven* der ersten Fläche die Minimalcurven der zweiten Fläche und gleichzeitig die *Asymptotenlinien* der ersten die Asymptotenlinien der zweiten zu Bildern, die Abbildung ist also nach einer von mir vorgeschlagenen Ausdrucksweise zugleich *conform* und *conjunctiv*. Es wird daher vortheilhaft sein, bei der folgenden Untersuchung eins dieser beiden Curvensysteme zu Parametercurven zu machen, und zwar sollen die Asymptotenlinien gewählt werden; das ist erlaubt, sobald das Gauss'sche Krümmungsmaass K nicht identisch verschwindet. Unter dieser Voraussetzung gelten zunächst die Gleichungen:

$$L = 0\,, \quad N = 0\,; \qquad L_1 = 0\,, \quad N_1 = 0\,.$$

Setzt man ferner

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{\sqrt{EG - F^2}}\,, \qquad \mathfrak{M}_1 = \frac{M_1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}\,,$$

so lauten die Fundamentalgleichungen für S und S_1:

$$\left\{\begin{array}{llll}
\text{A)} & \mathfrak{M} = i\sqrt{K}\,, & \text{A}_1) & \mathfrak{M}_1 = i\sqrt{K_1}\,, \\[2mm]
\text{B)} & \dfrac{\partial \log \mathfrak{M}}{\partial u} = -2 \left\{ {12 \atop 2} \right\}\,, & \text{B}_1) & \dfrac{\partial \log \mathfrak{M}_1}{\partial u} = - \left\{ {12 \atop 2} \right\}_1\,, \\[2mm]
\text{C)} & \dfrac{\partial \log \mathfrak{M}}{\partial v} = -2 \left\{ {12 \atop 1} \right\}\,, & \text{C}_1) & \dfrac{\partial \log \mathfrak{M}_1}{\partial v} = - \left\{ {12 \atop 1} \right\}_1\,.
\end{array}\right.$$

Sollen auch die Minimalcurven von S und S_1 einander entsprechen, so müssen die Gleichungen:

---

1) Diese Verallgemeinerung des Bonnet'schen Satzes habe ich bereits in meiner Abhandlung: *Ueber Abbildungen* (Mathematische Annalen, Bd. 44. 1894. S. 560) als Vermuthung ausgesprochen. Ferner möge noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass sehr wohl die Flächen S und S_1 mit einander identisch sein können, und dass zum Beispiel die Kugel conform-conjunctiv *auf sich selbst* abgebildet werden kann, ohne dass die entsprechenden Punkte sich durch eine Aehnlichkeitstransformation in einander überführen lassen.

$$(3) \qquad E_1 = e^w . E\,, \quad F_1 = e^w . F\,, \quad G_1 = e^w . G$$

bestehen. Setzt man diese Werthe in die Gleichungen A_1), B_1) und C_1) ein, so ergeben sich im Ganzen sechs Gleichungen zwischen den sechs Grössen:

$$E,\ F,\ G;\ \mathfrak{M}_1,\ \mathfrak{M}_2;\ w\,,$$

auf deren genauere Untersuchung alles ankommen wird.

3. Es ist leicht aus den Gleichungen, um die es sich handelt, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_1$ zu eliminiren. Man erhält die Relationen:

$$\begin{cases} \text{D)} \quad \dfrac{\partial \log K}{\partial u} = -4 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}, \qquad \text{D}_1\text{)} \quad \dfrac{\partial \log K_1}{\partial u} = -4 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_1, \\ \text{E)} \quad \dfrac{\partial \log K}{\partial v} = -4 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}; \qquad \text{E}_1\text{)} \quad \dfrac{\partial \log K_1}{\partial v} = -4 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1. \end{cases}$$

Die Gleichungen D) und E) müssen bei jeder Fläche S zwischen den Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F, G bestehen, wenn die Parametercurven $u =$ const. und $v =$ const. die Asymptotenlinien sein sollen. Die entsprechenden Gleichungen D_1) und E_1) für S_1 werden vermöge der Gleichungen (3) zwei partielle Differentialgleichungen dritter Ordnung für w, deren Coefficienten von E, F, G nebst deren Ableitungen nach u und v abhängen. Es fragt sich jetzt, *was für gemeinschaftliche Lösungen diese beiden partiellen Differentialgleichungen unter der Voraussetzung besitzen, dass E, F, G durch die beiden Relationen* D) *und* E) *mit einander verknüpft sind.*

Man überzeugt sich leicht, dass unter allen Umständen

$$w = \text{const.} = 2k$$

eine gemeinschaftliche Lösung der Gleichungen D_1) und E_1) ist. Setzt man nämlich

$$E_1 = e^{2k} E\,, \quad F_1 = e^{2k} F\,, \qquad G_1 = e^{2k} G\,;$$
$$L_1 = 0\,, \qquad M_1 = \pm\, e^k M\,, \quad N_1 = 0\,,$$

so werden der Reihe nach die Gleichungen A_1), B_1), C_1) mit den Gleichungen A), B), C) identisch. Hierdurch aber wird bedingt, dass die Flächen S und S_1 durch eine Aehnlichkeitstransformation in einander übergeführt werden können, und zwar so, dass die entsprechenden Punkte u, v in einander übergehen. Es kommt daher alles darauf an zu zeigen, dass die Gleichungen D_1) und E_1) ausser $w =$ const. keine gemeinsame Lösung besitzen, es sei denn, dass E, F, G noch durch eine dritte Relation

F) verknüpft sind. Ist das richtig, so werden durch die Gleichungen D), E) und F) die *C-Flächen* definirt, die ausser den Aehnlichkeitstransformationen noch andere conform-conjugirte Abbildungen zulassen.

Die wirkliche Aufstellung der Gleichung F) und die Durchführung des Beweises, dass F) keine Folge von D) und E) ist, scheitert an der Verwickelung der Formeln, und man ist daher genöthigt, einen anderen Weg einzuschlagen. Wäre F) eine Folge von D) und E), so würden zu jeder Fläche S Flächen S_1 gehören, die eine conform-conjugirte Abbildung auf S gestatten und doch durch keine Aehnlichkeitstransformation mit Erhaltung der entsprechenden Punkte in einander eingeführt werden können. Gelingt es also, in einem einzigen besonderen Falle nachzuweisen, dass *alle* Flächen S_1, die auf eine Fläche S conform-conjunctiv abgebildet werden können, aus S durch eine Aehnlichkeitstransformation mit Erhaltung der entsprechenden Punkte hervorgehen, so ist damit gezeigt, dass F) keine Folge von D) und E) sein kann.

4. Einen besondern Fall der verlangten Art liefern die *Flächen constanten Krümmungsmaasses, die durch die Bewegung einer Minimalgeraden erzeugt werden.* Führt man die Asymptotenlinien als Parametercurven ein, so werden (vergl. S. 484) die Fundamentalgrössen von S:

$$(4)\qquad \begin{cases} E = 0\,, \quad F = \dfrac{-2}{(u+v)^2}\,, \quad G = n(v)\,; \\[2mm] L = 0\,, \quad M = \dfrac{-2}{(u+v)^2}\,, \quad N = 0\,. \end{cases}$$

Soll S eine conform-conjunctive Abbildung auf eine Fläche S_1 gestatten, so müssen die Fundamentalgrössen von S_1 den Gleichungen genügen:

$$(5)\qquad \begin{cases} E_1 = 0\,, \quad F_1 = \dfrac{-2e^w}{(u+v)^2}\,, \quad G_1 = n(v)\,e^w\,; \\[2mm] L_1 = 0\,, \quad M_1 = M_1\,, \qquad N_1 = 0\,. \end{cases}$$

Da $E_1 = 0$ ist, so wird (vergl. Nr. 3 der ersten Abhandlung):

$$\mathfrak{M}_1 = i e^{-\mu_1(v)}$$

und

$$\frac{\partial G_1}{\partial u} = \mu_1'(v) F_1 = \frac{-2\mu_1'(v) e^w}{(u+v)^2},$$

mithin wird, sobald $n(v)$ nicht identisch verschwindet, das heisst, sobald die Fläche S keine Kugel ist:

$$(6) \qquad \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{-2\mu_1'(v)}{n(v)(u+v)^2}.$$

Weiter erhält man:

$$-F_1 e^{-2\mu_1(v)} = \frac{\partial^2 \log F_1}{\partial u \partial v}$$

oder:

$$\frac{2e^{-2\mu_1(v)}}{(u+v)^2} e^w = \frac{2}{(u+v)^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}.$$

Setzt man hierin für $\frac{\partial w}{\partial u}$ den vorher erhaltenen Werth ein, so kommt:

$$e^w = e^{2\mu_1(v)}\left(1 - \frac{d}{dv}\frac{\mu_1'(v)}{n(v)} + \frac{2\mu_1'(v)}{n(v)(u+v)}\right),$$

und hieraus ergiebt sich:

$$(7) \qquad \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{-2\mu_1'(v)}{n(v)(u+v)^2} : \left(1 - \frac{d}{dv}\frac{\mu_1'(v)}{u(v)} + \frac{2\mu_1'(v)}{n(v)(u+v)}\right).$$

Die Vergleichung der beiden Werthe von $\frac{\partial w}{\partial u}$ in (6) und (7) lehrt, dass

$$-\frac{d}{dv}\frac{\mu_1'(v)}{n(v)} + \frac{2\mu_1'(v)}{n(v)(u+v)} = 0$$

sein muss, und das ist nur möglich, wenn $\mu_1'(v)$ identisch verschwindet, wenn also $\mu_1(v)$ eine Constante ist. Dann ist auch $w = 2\mu_1(v)$ eine Constante, und hieraus folgt, dass die betrachteten Flächen S ausser den Aehnlichkeitstransformationen keine anderen conform-conjunctiven Abbildungen gestatten. Damit ist aber die Behauptung vollständig bewiesen.

III.

Zur Theorie der Minimalflächen.

1. Bekanntlich besitzen die *Minimalflächen* die charakteristische Eigenschaft, durch die beiden Schaaren ihrer *Asymptotenlinien* in *Quadrate* getheilt zu werden. Man wird daher vermuthen, dass sich eine Verallgemeinerung der Minimalflächen ergiebt, wenn man nach den Flächen fragt, die durch ihre Asymptotenlinien in *Rauten mit constantem Winkel* ϑ getheilt werden. Eine genauere Untersuchung ergiebt indessen die überraschende Thatsache, dass dies nicht der Fall ist. So lange nämlich der Winkel ϑ von einem Rechten verschieden ist, gehört zu ihm, von den Aehnlichkeitstransformationen abgesehen, eine einzige ganz bestimmte Fläche der verlangten Eigenschaft, die mit R_ϑ bezeichnet werden möge. Lässt man aber ϑ in einen Rechten übergehen, so geht R_ϑ in das *Catenoid* über, und alle anderen Minimalflächen haben für $\vartheta < \frac{1}{2}\pi$ kein Analogon.

2. Zum Beweise sei zunächst an einige allgemeine Formeln der Flächentheorie erinnert. Die Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F, G und die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung L, M, N sind durch die drei Fundamentalgleichungen mit einander verbunden, die unter Benutzung der CHRISTOFFEL'schen Symbole folgendermassen lauten:

$$\text{I)}\quad \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = K,$$

$$\text{II)}\quad \frac{\partial L}{\partial v} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} M + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} N = \frac{\partial M}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} L + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} M,$$

$$\text{III)}\quad \frac{\partial N}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} L + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} M = \frac{\partial M}{\partial v} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} M + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} N.$$

K bedeutet das GAUSS'sche Krümmungsmaass, das bei Einführung des Winkels ϑ zwischen den Curven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ durch die Gleichung:

$$-\sqrt{EG-F^2}\,.\,K = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)$$

gegeben wird [1]).

---

1) STAHL und KOMMERELL, Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie. Leipzig 1893. S. 32, Formel (12).

Werden im Besonderen die Asymptotenlinien als Parametercurven der Fläche gewählt, so ist zunächst:

$$L = 0\,, \quad N = 0\,.$$

Führt man ferner an Stelle von M die Grösse

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{\sqrt{EG - F^2}}$$

ein, so erhalten die Fundamentalgleichungen die einfache Gestalt:

$$\text{I}')\quad \sqrt{EG - F^2}\,.\,\mathfrak{M}^2$$
$$= \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right),$$

$$\text{II}')\quad \frac{\partial \log \mathfrak{M}}{\partial u} = -\,2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix},$$

$$\text{III}')\quad \frac{\partial \log \mathfrak{M}}{\partial v} = -\,2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}.$$

Man kann daher aus II') und III') $\log \mathfrak{M}$ mittelst einer Quadratur berechnen, wenn die Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}$$

erfüllt ist, und zu dieser ersten Relation zwischen E, F, G kommt eine zweite, wenn man den so erhaltenen Werth von $\mathfrak{M}$ in I') einträgt.

3. Soll die betrachtete Fläche durch ihre Asymptotenlinien in Rauten mit constantem Winkel ϑ getheilt werden, so muss das Quadrat ihres Linienelementes ds durch Einführung dieser Linien als Parametercurven auf die Form:

$$ds^2 = e^w(du^2 + 2\cos\vartheta\, du dv + dv^2)$$

gebracht werden können, und es ist daher in dem vorliegenden Falle:

$$E = e^w\,, \quad F = \cos\vartheta\,.\,e^w\,, \quad G = e^w\,.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{1}{2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial w}{\partial v} - \cos\vartheta\,\frac{\partial w}{\partial u}\right),$$

$$\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{1}{2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial w}{\partial u} - \cos\vartheta\,\frac{\partial w}{\partial v}\right),$$

sodass man als Integrabilitätsbedingung:

$$\cos\vartheta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)=0$$

erhält. Ist ϑ von einem Rechten verschieden, so muss w der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$$

genügen, deren allgemeine Lösung

$$w=f(u+v)+g(u-v)$$

ist. Vortheilhafter schreibt man diese Lösung in der Form

$$w=\sin^2\vartheta[\varphi(u+v)+\psi(u-v)],$$

denn alsdann wird:

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\cdot\varphi'(u+v)-\cos^2\tfrac{1}{2}\vartheta\cdot\psi'(u-v),$$

$$\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\cdot\varphi'(u+v)+\cos^2\tfrac{1}{2}\vartheta\cdot\psi'(u-v)$$

und daher

$$\mathfrak{M}=Ae^{-2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\,\varphi(u+v)-2\cos^2\frac{1}{2}\vartheta\,\psi(u-v)};$$

A bedeutet eine willkürliche Constante, die nothwendig von Null verschieden ist.

4. Setzt man diese Werthe von w und $\mathfrak{M}$ in I') ein, so kommt:

$$A^2e^{-4\sin^4\frac{1}{2}\vartheta\,\varphi(u+v)-4\cos^4\frac{1}{2}\vartheta\,\psi(u-v)}$$
$$=2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\,\varphi''(u+v)+2\cos^2\tfrac{1}{2}\vartheta\,\psi''(u-v).$$

Werden daher als unabhängige Veränderliche statt u und v: σ und τ durch die Gleichungen:

$$u+v=\sigma,\quad u-v=\tau$$

eingeführt, so folgt durch Differentiation zuerst nach σ und darauf nach τ:

$$\varphi'(\sigma)\,.\,\psi'(\tau)=0.$$

Man darf unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass diese Gleichung durch

$$\psi = 0$$

erfüllt wird, und erhält alsdann für $\varphi(\sigma)$ die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$A^2 e^{-4 \sin^4 \frac{1}{2} \vartheta \, \varphi(\sigma)} = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \vartheta \, \varphi''(\sigma) ,$$

deren allgemeines Integral:

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{2 \sin^4 \frac{1}{2} \vartheta} \log \left(\frac{1}{a} A \sin \tfrac{1}{2} \vartheta \, Ch(a\sigma + b) \right)$$

ist; a und b sind die beiden Integrationsconstanten.

Der Ausdruck für $\varphi(\sigma)$ lässt sich erheblich vereinfachen, wenn man berücksichtigt, dass die Gestalt von ds^2 bei der Substitution:

$$a u + b' = u_1 , \quad a v + b'' = v_1$$

ungeändert bleibt. Hieraus folgt, dass unbeschadet der Allgemeinheit:

$$a = 1 , \quad b = 0$$

angenommen werden darf. Setzt man noch zur Abkürzung:

$$\cot^2 \tfrac{1}{2} \vartheta = \mu , \quad (A \sin \tfrac{1}{2} \vartheta)^{\mu} = \varkappa ,$$

so wird jetzt:

$$e^{w} = \varkappa^2 \, Ch(u+v)^{2\mu} , \quad M = 2\varkappa \cos \tfrac{1}{2} \vartheta \, Ch(u+v)^{\mu-1} .$$

Nun werden bei einer Aehnlichkeitstransformation mit dem Modul k die Fundamentalgrössen erster Ordnung mit k^2, die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung mit k multiplicirt. Sieht man also von einer solchen Transformation ab, so werden die Fundamentalgleichungen I'), II'), III') in allgemeinster Weise durch:

$$E = Ch(u+v)^{2\mu}, \quad F = \cos \vartheta \, . \, Ch(u+v)^{2\mu}, \quad G = Ch(u+v)^{2\mu},$$
$$L = 0 , \qquad M = 2 \cos \tfrac{1}{2} \vartheta \, Ch(u+v)^{\mu-1}, \quad N = 0$$

befriedigt[1]).

1) Den Ausdruck für e^w habe ich bereits ohne Beweis in meiner Abhandlung: *Ueber Abbildungen* (Mathematische Annalen, Bd. 44. 1894. S. 561) angegeben, nur muss es dort $2 \cot^2 \frac{1}{2} w$ statt $2:(1 - \cos w)$ heissen, und der Ausnahmefall $\cos w = \pm \frac{1}{2}$ fällt dann fort.

In diesen Gleichungen tritt keine willkürliche Constante auf, und da nach einem Satze von Ossian Bonnet durch die Angabe der sechs Fundamentalgrössen $E, F, G; L, M, N$ jede Fläche bis auf ihre Lage im Raume und die Spiegelung an einer Ebene eindeutig bestimmt ist, *so ist hiermit bewiesen, dass zu jedem Werthe von ϑ, der von einem Rechten verschieden ist, abgesehen von den Aehnlichkeitstransformationen, eine einzige Fläche R_ϑ der verlangten Eigenschaft gehört.*

Für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ wird $\mu = 1$. Setzt man in diesem Falle $k = \sqrt{2}$, so wird

$$E = 2\,Ch(u+v)^2\,, \quad F = 0\,, \quad G = 2\,Ch(u+v)^2\,,$$
$$L = 0\,, \qquad M = 2\,, \quad N = 0\,,$$

und genau diese Fundamentalgrössen besitzt das *Catenoid:*

$$x = Ch(u+v)\cos(u-v)\,,$$
$$y = Ch(u+v)\sin(u-v)\,,$$
$$z = u+v\,,$$

das demnach als Fläche $R_{\frac{\pi}{2}}$ gewählt werden darf. Alle anderen Minimalflächen ergeben sich, wenn man von vorn herein $\cos\vartheta = 0$ setzt; doch hat es kein Interesse, die Rechnung durchzuführen, da das Ergebniss schon bekannt ist.

5. Zum Schlusse sollen noch einige Eigenschaften der Flächen R_ϑ entwickelt werden, die den Minimalflächen in vielen Beziehungen nahe stehen.

Nach Dupin[1]) hängt die Grösse des Winkels ϑ zwischen den Asymptotenlinien nur von dem Verhältnisse der beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 ab, es ist nämlich

$$\cos\vartheta = \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}\,.$$

Hat der Winkel ϑ eine constante Grösse, so gilt dasselbe von dem Quotienten:

$$\frac{R_1}{R_2} = -\cot^2\tfrac{1}{2}\vartheta = -\mu\,,$$

demnach bleibt die Eigenschaft der Minimalflächen, dass das Ver-

1) Développements de Géométrie. Paris 1813. S. 189.

hältniss der beiden Hauptkrümmungsradien constant ist, bei den Flächen R_ϑ *erhalten.*

Ferner wird die Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$du^2 - dv^2 = 0 .$$

Setzt man also

$$p = u + v , \quad q = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\vartheta . (u - v) ,$$

so stellen die Curven $p =$ const. und $q =$ const. die Krümmungslinien der Flächen R_ϑ dar. Führt man p und q statt u und v ein und setzt

$$k = \cos \tfrac{1}{2}\vartheta ,$$

so wird:

$$ds^2 = Ch(p)^{2\mu}(dp^2 + dq^2) ,$$

und hieraus folgt erstens, dass *die Flächen* R_ϑ *durch ihre Krümmungslinien in Quadrate getheilt werden*, wodurch eine neue Analogie dieser Flächen mit den Minimalflächen gewonnen ist, und zweitens, dass die Fläche R_ϑ auf die *Rotationsfläche*:

$$\begin{aligned} x &= Ch(p)^\mu . \cos q , \\ y &= Ch(p)^\mu . \sin q , \\ z &= \int Ch(p)^{\mu - 1} \sqrt{Ch^2(p) - \mu^2 Sh^2(p)} . dp \end{aligned}$$

abwickelbar ist. Jedoch ist R_ϑ nicht etwa mit dieser Rotationsfläche identisch, deren Asymptotenlinien, wie man sich leicht überzeugt, nur dann einen constanten Winkel mit einander bilden, wenn $\mu = 1$, also $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ ist.

6. Die Fläche R_ϑ theilt endlich eine vierte Eigenschaft mit den Minimalflächen. Bei Einführung des Asymptotenlinien als Parametercurven lässt sich das Quadrat des Linienelementes einer jeden Minimalfläche auf die Form:

$$ds^2 = e^w(du^2 + dv^2)$$

bringen. Bildet man also zwei Minimalflächen in der Weise auf einander ab, dass Punkte, die zu demselben Werthsysteme u, v gehören, einander entsprechen, so haben die Asymptotenlinien der ersten Fläche die Asymptotenlinien der zweiten Fläche und gleichzeitig die Minimallinien $u \pm iv =$ const. der ersten Fläche die Minimallinien der zweiten zu Bildern, das heisst, jedem conjugirten Systeme auf der ersten Fläche entspricht ein conjugirtes System auf der zweiten, und jedem Orthogonalsysteme auf der ersten ein ebenso beschaffenes System auf der zweiten. Diese interessante Art der Abbildung, die, von den Aehnlichkeitstransformationen abgesehen, nur bei besonderen Flächen möglich ist, habe ich als *conform-conjunctiv* bezeichnet.

Es ist leicht zu zeigen, dass die Fläche R_ϑ *conform-conjunctiv* auf sich selbst abgebildet werden kann, und zwar auf ∞^3 Arten. Setzt man nämlich:

$$u = a u_1 + b', \qquad v = a v_1 + b'',$$

wo a, b', b'' willkürliche Constanten bedeuten, so stellen auch die Curven $u_1 =$ const. und $v_1 =$ const. die Asymptotenlinien dar, und gleichzeitig wird:

$$ds^2 = a^2 Ch[a(u_1 + v_1) + b' + b'']^{2\mu} (du_1^2 + 2\cos\vartheta . du_1 dv_1 + dv_1^2),$$

man braucht also nur die Punkte u, v und $au + b'$, $av + b''$ als Bilder aufzufassen, um eine solche Abbildung zu erhalten. Man überzeugt sich auch ohne Mühe, dass nur diese ∞^3 Abbildungen von R_ϑ auf sich selbst conform-conjunctiv sind und dass sie nicht durch Aehnlichkeitstransformationen ersetzt werden können.

IV.

Abbildungen und Normalschnitte.

1. Zwei krumme Oberflächen S_1 und S_2 mögen durch eine Abbildung auf einander bezogen sein. Will man eine solche Abbildung genauer untersuchen, so wird man zunächst die *Büschel der Flächentangenten* in zwei Bildpunkten P_1 und P_2 betrachten, die als reguläre Punkte vorausgesetzt werden. Neben diese Beziehungen erster Ordnung, die ich in meiner Abhandlung: *Ueber Abbildungen* betrachtet habe[1]), treten Beziehungen höherer Ordnung, wenn man zu Gebilden höherer Ordnung übergeht, die zu entsprechenden Punkten gehören, und da wird man vor allem die *Krümmungskreise der Normalschnitte* oder kürzer die *Normalkrümmungen* heranziehen.

1) Mathematische Annalen, Bd. 44. 1894. S. 551—564.

Als erste Frage bietet sich hier die dar, welchen Krümmungskreisen in P_1 eben so grosse Krümmungskreise in P_2 entsprechen. Werden die Radien dieser Kreise, die in üblicher Weise mit einem Vorzeichen behaftet sind, durch ϱ_1 und ϱ_2 bezeichnet, so wird diese Forderung analytisch durch die Gleichung ausgedrückt:

$$(1)\qquad \frac{1}{\varrho_1^2}=\frac{1}{\varrho_2^2}\,.$$

Setzt man hierin für ϱ_1 und ϱ_2 ihre Werthe ein:

$$(2)\qquad \varrho_1=\frac{E_1\,du^2+2\,F_1\,du\,dv+G_1\,dv^2}{L_1\,du^2+2\,M_1\,du\,dv+N_1\,dv^2}\,,$$

und

$$(3)\qquad \varrho_2=\frac{E_2\,du^2+2\,F_2\,du\,dv+G_2\,dv^2}{L_2\,du^2+2\,M_2\,du\,dv+N_2\,dv^2}\,,$$

so erhält man eine Gleichung *achten* Grades für $\frac{du}{dv}$, es giebt also im Allgemeinen acht verschiedene, reelle oder imaginäre Richtungen der verlangten Art.

Eine Vereinfachung entsteht, wenn in den Ausdrücken für ϱ_1 und ϱ_2 entweder die Zähler oder die Nenner einander proportional sind, wenn also die Abbildung entweder *conform* oder *conjunctiv* ist.

2. Ist die Abbildung *conform*, so hat man

$$(4)\qquad E_2=\varkappa E_1\,,\quad F_2=\varkappa F_1\,,\quad G_2=\varkappa G_1\,,$$

und erhält daher eine Gleichung *vierten* Grades, die sich sofort in die zwei Gleichungen zweiten Grades spaltet:

$$(5)\quad (L_2\pm\varkappa L_1)du^2+2(M_2\pm\varkappa M_1)du\,dv+(N_2\pm\varkappa N_1)dv^2=0.$$

Diese Gleichungen definiren zwei Paare von Flächentangenten, bei denen die Normalkrümmung invariant ist. Die scheinbar verschwundenen zwei Paare sind zusammengefallen mit den Tangenten der Minimalcurven durch die betreffenden Punkte, die ja einander vermöge der conformen Abbildung entsprechen.

Naturgemäss wird man den Fall auszeichnen, dass die beiden durch (5) definirten Tangentenpaare eine *harmonische Gruppe* bilden. Bedingung hierfür ist das Bestehen der Gleichung:

$$(6)\quad (L_2+\varkappa L_1)(N_2-\varkappa N_1)-2(M_2+\varkappa M_1)(M_2-\varkappa M_1)$$
$$+(L_2-\varkappa L_1)(N_2+\varkappa N_1)=0\,,$$

aus der sofort:

$$L_2 N_2 - M_2^2 = \varkappa^2 (L_1 N_1 - M_1^2) \tag{7}$$

folgt. Andererseits ist in Folge von (4):

$$E_2 G_2 - F_2^2 = \varkappa^2 (E_1 G_1 - F_1^2), \tag{8}$$

mithin muss:

$$\frac{L_2 N_2 - M_2^2}{E_2 G_2 - F_2^2} = \frac{L_1 N_1 - M_1^2}{E_1 G_1 - F_1^2} \tag{9}$$

sein, das heisst, die Flächen S_1 und S_2 müssen in entsprechenden Punkten dasselbe Gauss'sche Krümmungsmaass K besitzen. Bestehen aber umgekehrt die Gleichungen (4) und (9), so folgt aus ihnen die Gleichung (6), das heisst, die durch (5) definirten Tangentenpaare bilden eine harmonische Gruppe. Man hat daher den **Lehrsatz:**

Gestatten zwei Flächen S_1 und S_2 eine conforme Abbildung auf einander, bei der entsprechende Punkte dasselbe Gauss'*sche Krümmungsmaass besitzen, so bilden in jedem Punkte von S_1 und S_2 diejenigen Flächentangenten, bei denen der Krümmungskreis des zugehörigen Normalschnittes für beide Flächen gleich gross ausfällt, eine harmonische Gruppe und umgekehrt.*

Die beiden durch (5) definirten Tangentenpaare stehen in einer interessanten Beziehung zu den Flächentangenten, die das *gemeinschaftliche conjugirte System* von S_1 und S_2 liefert: *sie gehören der Involution an, deren Doppelelemente gerade diese Flächentangenten sind.* Zum Beweise genügt es zu bemerken, dass das gemeinschaftliche conjugirte System durch die Differentialgleichung:

$$\begin{vmatrix} du^2 & -du\,dv & dv^2 \\ N_1 & M_1 & L_1 \\ N_2 & M_2 & L_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

gegeben wird[1]).

3. Die conformen Abbildungen mit Erhaltung des Krümmungsmaasses bilden ein bemerkenswerthes Mittelglied zwischen den conformen Abbildungen überhaupt und den *Biegungen*, die

1) Vergleiche meine Abhandlung: *Ueber Abbildungen* S. 558. Später hat Darboux dieselbe Gleichung gegeben (Leçons sur la théorie générale des surfaces. t. IV. Paris 1895. S. 121).

sie als besonderen Fall in sich enthalten. Durch diese Bemerkung wird zugleich der Zusammenhang aufgedeckt, in dem die vorliegende, bereits im Sommer 1893 verfasste Abhandlung zu Untersuchungen steht, die A. Voss vor Kurzem veröffentlicht hat[1]), und es wird ein Theorem in das rechte Licht gesetzt, auf das Voss Gewicht legt. Handelt es sich nämlich um zwei *reelle* Biegungsflächen, so beweist er, dass *von den beiden Tangentenpaaren, für welche die Quadrate der Normalkrümmungen einander gleich sind, mindestens das eine stets reell ist.* Diese Thatsache erklärt sich in einfachster Weise daraus, dass diese beiden Tangentenpaare bei einer Abbildung durch Biegung im Besonderen, wie überhaupt bei einer conformen Abbildung mit Erhaltung des Krümmungsmaasses, eine *harmonische Gruppe* bilden und dass alle Paare von Elementen, die zu conjugirt imaginären harmonisch sind, nothwendig reell ausfallen.

Die Theorie der conformen Abbildungen mit Erhaltung des Krümmungsmaasses giebt Gelegenheit zu einer Anwendung der schönen Sätze, die MOUTARD über die Differentialgleichungen der Form:

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda(x, y)$$

angestellt hat[2]). Führt man nämlich als Parametercurven $u =$ const. und $v =$ const. die Minimalcurven ein, die einander bei der conformen Abbildung entsprechen, so wird

$$(11) \qquad E_1 = E_2 = 0\,, \quad G_1 = G_2 = 0$$

und

$$(12) \qquad K_1 = -\frac{1}{F_1}\frac{\partial^2 \log F_1}{\partial u \partial v}\,, \quad K_2 = -\frac{1}{F_2}\frac{\partial^2 \log F_2}{\partial u \partial v}\,.$$

Soll also das GAUSS'sche Krümmungsmaass erhalten bleiben, so muss F_2 der Differentialgleichung

1) *Ueber isometrische Flächen.* Mathematische Annalen. Bd. 46. S. 97 bis 132. Die Arbeit ist datirt vom Juli 1894.

2) Sur la construction des équations de la forme:

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda(x, y)\,,$$

qui admettent une intégrale générale explicite. Journal de l'École polytechnique. Cahier 45. 1878. S. 1. Man vergleiche auch DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. II. Paris 1889. S. 144—163.

$$(13)\qquad \frac{1}{F_2}\frac{\partial^2 F_2}{\partial u \partial v} = \frac{1}{F_1}\frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial v}$$

genügen. Sieht man also S_1 als gegeben an, so erhält man alle Flächen S_2, die auf S_1 mit Erhaltung des Krümmungsmaasses conform abgebildet werden können, wenn man zuerst die Differentialgleichung (13) integrirt und alsdann alle *Biegungsflächen* ermittelt, deren Linienelement ds durch die Gleichung

$$(14)\qquad ds^2 = 2F_2 du dv$$

gegeben wird.

Demnach sind jeder Fläche S_1 ganz bestimmte, durch eine partielle Differentialgleichung charakterisirte Flächen S_2 zugeordnet, die sich auf S_1 conform mit Erhaltung des Krümmungsmaasses abbilden lassen, und jedem Integrale F_2 der Gleichung (13) gehört eine Klasse solcher Flächen zu. Ist im Besonderen $F_2 = F_1$, so besteht diese Klasse aus den Biegungsflächen von S_1.

Die Sätze von Moutard ermöglichen es, in beliebiger Anzahl Linienelemente aufzustellen, bei denen das allgemeine Integral der Gleichung (13) sich ermitteln lässt; doch möge es einer späteren Abhandlung vorbehalten bleiben, hierauf des Näheren einzugehen.

4. Ist die Abbildung *conjunctiv*, so hat man

$$(4')\qquad L_2 = \lambda L_1, \quad M_2 = \lambda M_1, \quad N_2 = \lambda N_1$$

und erhält wiederum eine Gleichung vierten Grades, die sich sofort in die zwei Gleichungen zweiten Grades spaltet.:

$$(5')\qquad (E_2 \pm \lambda E_1) du^2 + 2(F_2 \pm \lambda F_1) du dv + (N_2 \pm \lambda N_1) dv^2 = 0.$$

Diese Gleichungen definiren zwei Paare von Tangenten der verlangten Art. Die scheinbar verschwundenen zwei Paare sind zusammengefallen mit den asymptotischen Tangenten in dem betreffenden Punkte, die ja einander vermöge der conjunctiven Abbildung entsprechen.

Auch hier wird man den Fall auszeichnen, dass die beiden durch (5') definirten Tangentenpaare eine *harmonische Gruppe* bilden. Bedingung hierfür ist das Bestehen der Gleichung:

$$(6')\qquad (E_2 + \lambda E_1)(G_2 - \lambda G_1) - 2(F_2 + \lambda F_1)(F_2 - \lambda F_1) \\ + (E_2 - \lambda E_1)(G_2 + \lambda G_1) = 0,$$

aus der sofort:

$$E_2 G_2 - F_2^2 = \lambda^2 (E_1 G_1 - F_1^2) \tag{7'}$$

folgt. Andererseits ist in Folge von (4'):

$$L_2 N_2 - M_2^2 = \lambda^2 (L_1 N_1 - M_1^2)\,, \tag{8'}$$

mithin muss:

$$\frac{L_2 N_2 - M_2^2}{E_2 G_2 - F_2^2} = \frac{L_1 N_1 - M_1^2}{E_1 G_1 - F_1^2} \tag{9'}$$

sein, das heisst, die Flächen S_1 und S_2 müssen, wie vorhin, in entsprechenden Punkten dasselbe GAUSS'sche Krümmungsmaass besitzen. Der dort ausgesprochene Lehrsatz behält also seine Gültigkeit, wenn man das Wort *conform* durch *conjunctiv* ersetzt.

Die beiden durch (5') definirten Tangentenpaare gehören jetzt der Involution an, deren Doppelelemente die Flächentangenten des gemeinsamen Orthogonalsystems von S_1 und S_2 sind, denn dieses System wird durch die Differentialgleichung:

$$\begin{vmatrix} du^2 & -du\,dv & dv^2 \\ G_1 & F_1 & E_1 \\ G_2 & F_2 & E_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{10'}$$

gegeben.

5. Ist endlich die Abbildung gleichzeitig *conform* und *conjunctiv*, so wird:

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\varkappa}{\lambda}\,, \tag{15}$$

die Krümmungsradien entsprechender Normalschnitte in den Bildpunkten P_2 und P_1 haben also ein constantes Verhältniss. Ist die Abbildung eine Aehnlichkeitstransformation, so hat diese Constante für alle Punkte von S_1 denselben Werth; bei den *C-Flächen* (vergl. S. 487) kann sie sich jedoch von Punkt zu Punkt ändern.

Von besonderem Interesse ist der Fall, dass

$$\varrho_2 = \varrho_1$$

wird. Soll dies eintreten, so muss $\varkappa = \lambda$ sein. Führt man die Asymptotenlinien als Parametercurven ein, so wird für S_1:

(16) $$L_1 = 0\,, \quad N_1 = 0$$

und für S_2:

(17) $$\begin{cases} E_2 = \varkappa E_1\,, & F_2 = \varkappa F_1\,, \quad G_2 = \varkappa G_1\,, \\ L_2 = 0\,, & M_2 = \varkappa M_1\,, \quad N_2 = 0\,. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst, dass das Gauss'sche Krümmungsmaass von S_1 und S_2 in entsprechenden Punkten denselben Werth haben muss, was wegen der Gleichung $\varrho_1 = \varrho_2$ von vorn herein zu erwarten war. Ferner wird (vergl. S. 487)

(18) $$\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1\,,$$

und die Fundamentalgleichungen (B) und (C) für S_1 und S_2 liefern die Relationen:

(19) $$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_2\,, \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_2\,.$$

Setzt man hierin für E_2, F_2, G_2 ihre Werthe aus (17) ein, so kommt:

(20) $$\begin{cases} E_1 G_1 \dfrac{\partial \varkappa}{\partial v} - F_1 G_1 \dfrac{\partial \varkappa}{\partial u} = 0\,, \\[2ex] E_1 G_1 \dfrac{\partial \varkappa}{\partial u} - E_1 F_1 \dfrac{\partial \varkappa}{\partial v} = 0\,. \end{cases}$$

Ist die Determinante dieser Gleichungen

$$\varDelta = E_1 G_1 (E_1 G_1 - F_1^2)$$

von Null verschieden, so muss $\varkappa$ eine Constante sein, und dann ist klar, dass S_1 in S_2 durch eine Bewegung übergeführt werden kann, der nöthigenfalls eine Spiegelung an einer Ebene hinzuzufügen ist.

Verschwindet $\varDelta$, indem $E_1 = 0$, aber F_1 und $G_1 \neq 0$ oder $G_1 = 0$, aber E_1 und $F_1 \neq 0$ ist[1]), so wird S_1 durch die Bewegung einer Minimalgeraden erzeugt (vergl. S. 483) und indem man das S. 489 für $K = 1$ benutzte Verfahren verallgemeinert, erkennt man, dass auch hier die conjunctiv-conforme Abbildung nur eine Bewegung sein kann, der eine Spiegelung an einer Ebene hinzugefügt werden darf.

Ist endlich gleichzeitig $E_1 = 0$ und $G_1 = 0$, so werden S_1 und S_2 Kugeln, deren Halbmesser wegen der Gleichheit des Krümmungsmaasses einander gleich sein müssen.

1) Dass $EG - F^2$ verschwindet, wird hier immer ausgeschlossen.

Hiermit ist schliesslich der **Lehrsatz** gewonnen:

Gestatten zwei Flächen eine conform-conjunctive Abbildung, bei der die Krümmungsradien der entsprechenden Normalschnitte invariant sind, so lässt sich entweder die eine Fläche in die andere durch eine Bewegung überführen, der nöthigenfalls eine Spiegelung an einer Ebene hinzuzufügen ist, und dabei gehen die entsprechenden Punkte in einander über, oder die Flächen sind Kugeln von gleichem Radius, die auf irgend eine Art conform auf einander abgebildet sind.

Zur Erläuterung sei noch bemerkt, dass auch die beiden Kugeln durch eine Bewegung in einander übergeführt werden können, dabei gehen jedoch im Allgemeinen entsprechende Punkte nicht in einander über.

SITZUNG VOM 7. DECEMBER 1896.

Vorträge hielten:

1. Herr **W. Pfeffer**, o. M.: Ueber den Einfluss des Zellkerns auf die Bildung der Zellhaut.
2. Derselbe: Ueber die regulatorische Bildung der Diastase.
3. Herr **A. Mayer**, o. M.: Ueber die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentials.
4. Derselbe: Vorlegung einer Abhandlung von **J. Thomae** in Jena, o. M.: Ueber die durch die leuchtende Sonnenkugel und den Saturnring erzeugte Schattenfläche.
5. Herr **P. Drude**, a. o. M.: Ueber Messung der Dielektricitätsconstanten kleiner Substanzmengen vermittelst elektrischer Drahtwellen.
6. Herr **H. Ambronn**, a. o. M.: Ueber Pleochroismus pflanzlicher und thierischer Fasern, die mit Silber- und Goldsalzen gefärbt sind.
7. Herr C. Neumann, o. M.: Vorlegung einer Mittheilung von Prof. **Lange** in Berlin: Ueber einen elementaren Beweis des Reciprocitätssatzes.
8. Derselbe: Vorlegung einer Abhandlung von **Ernst Neumann**: Ein Beitrag zur Elektrostatik.
9. Herr S. Lie, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von **E. Study** in Bonn: Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie.
10. Derselbe: Vorlegung einer Abhandlung von **O. Biermann** in Brünn: Zur Lie'schen Theorie von den partiellen Differentialgleichungen.

W. Pfeffer, o. M., berichtet über die im botanischen Institut ausgeführten Untersuchungen des Herrn Townsend *über den Einfluss des Zellkerns auf die Bildung der Zellhaut.*

Während nach Klebs[1]) eine isolirte Cytoplasmamasse keine Zellhaut bildet, soll diese nach Palla[2]) ohne Mitwirkung des Zellkerns entstehen. Zu diesem irrigen Schlusse kam aber Palla, weil er die plasmatischen Verbindungsfäden übersah, die es, wie sich in den Studien Townsend's ergab, ermöglichen, dass Cytoplasmamassen durch kernhaltige Protoplaste zur Haut-

1) Untersuchung. a. d. Botan. Institut in Tübingen 1888, Bd. II, p. 500
2) Flora 1890, p. 314.

bildung angeregt werden. Durch eine solche fadenförmig ausgezogene Plasmamasse bleiben bekanntlich der Regel nach die Theilstücke verbunden, in welche der Protoplast einer langgestreckten Zelle bei der Plasmolyse zu zerfallen pflegt, und ebenso bleiben solche Fäden zwischen Zellwand und Protoplast ausgespannt. Zunächst wenigstens sind solche Verbindungsfäden immer vorhanden und wenn ein Theil derselben mit der Zeit eingezogen wird, so erhalten sich doch andere, wie sich aus dem Folgenden ergiebt, so lange, als die Zelle lebendig bleibt. Dabei können sie aber so fein sein, dass sie ohne eine kritische Prüfung leicht der Beobachtung entgehen.

Da nun factisch auch die feinsten Verbindungsfäden den die Hautbildung veranlassenden Reiz übermitteln, so musste für eine unbedingt sichere Separation der kernfreien Cytoplasmaportionen gesorgt werden. Dieses wurde erreicht, indem die zuvor plasmolysirten Zellen entweder an passender Stelle zerschnitten oder indem durch mechanischen Druck oder durch localisirt angewandte Inductionsschläge[1]) die Verbindungsfäden zerstört wurden. Ausserdem wurden auch kernfreie und kernhaltige Plasmamassen untersucht, welche aus den künstlich oder spontan geöffneten Zellen in die umgebende Flüssigkeit hervorgetreten und entweder total abgetrennt oder mit dem restirenden Zellinhalt in Verbindung geblieben waren. In diesem Falle war es möglich, auch isotonische Zuckerlösungen zu verwenden, während ausserdem in der Versuchszeit durch eine hyperisotonische Zuckerlösung ein plasmolytischer Zustand erhalten werden musste.

Zu den Untersuchungen dienten verschiedene Pflanzen und Pflanzentheile, z. B. Rhizoiden von Moosen, Prothallien, Chara, Blätter von Moosen, Elodea, Blatt- und Wurzelhaare von Cucurbita etc., ferner Pollenschläuche und darunter auch solche, die Palla zu seinen Studien verwandte. Naturgemäss wurden nur Objecte verwandt, in denen der Zellkern leicht zu controliren war und deren separirte Plasmamassen längere Zeit lebendig und gut zur Zellhautbildung befähigt blieben. Je nach der Natur der Pflanze wird auch um den intacten Protoplasten sowie um dessen Theilstücke eine neue Wandung entweder schon nach zwei Stunden oder erst nach einigen Tagen gebildet.

---

1) Vgl. Klemm, Jahrb. f. wiss. Bot. 1895, Bd. 28, p. 647.

In keinem der zahlreichen Versuche kam um eine wirklich isolirte Cytoplasmamasse eine Zellhaut zu Stande, und wo eine solche auftrat, konnte immer ein Verbindungsfaden nachgewiesen werden. Bei Vorhandensein dieser lebendigen Continuität bildete sich unter guten Verhältnissen zumeist eine Zellhaut, die auch um alle grösseren und kleineren Plasmaportionen entstehen kann, in welche der Protoplast einer langgestreckten Zelle bei der Plasmolyse zerfällt. Hierbei handelt es sich also um eine Reizwirkung, die unter Umständen auf eine grössere Strecke und wiederholt durch sehr feine Plasmafäden übermittelt wird. In unseren Versuchen war im höchsten Falle die isolirte Cytoplasmaportion 3,7 mm von dem Nucleus entfernt, der indes gewiss auch auf grössere Distanzen durch die Plasmafäden hindurch den zellhautbildenden Reiz auszuüben vermag.

Allerdings wird zuweilen um eine normal aussehende Cytoplasmamasse eine Wandung nicht formirt. Aber dasselbe wird auch an kernhaltigem Cytoplasma beobachtet und ist als eine Folge der störenden und nicht immer gleichen experimentellen Eingriffe sehr wohl zu verstehen. Deshalb kann es nicht überraschen, dass in einer durch Plasmolyse gewonnenen Kette die Zellwand zuweilen etwas später um die kernhaltige Partie, als um die kernfreien Portionen gebildet wird und dass in Bezug auf diese die Hautbildung zuweilen sprungweise fortschreitet, oder wohl gar einmal an einer zwischenliegenden Portion ganz unterbleibt. Im Grossen und Ganzen scheint aber doch die Hautproduction vom Kerne aus centrifugal fortzurücken, also in den fernsten Cytoplasmaportionen etwas später einzutreten. Diese zeitliche Differenz war freilich in unseren Versuchen jedenfalls nur gering, wird aber gewiss mit Verlängerung der reizleitenden Bahn ansehnlicher ausfallen.

Zur sicheren Erkennung der neugebildeten Zellhaut muss man im Allgemeinen durch verstärkte Plasmolyse eine Abhebung des Protoplasten herbeiführen. Um den so contrahirten Protoplasten wird dann oft wiederum eine neue Wandung formirt und zwar ebenfalls um kernfreie Stücke, deren lebendige Continuität aber nachweislich durch Plasmaverbindungen erhalten ist, welche die zuerst gebildete Wandung durchsetzen. Uebrigens hüllen sich auch die Plasmaverbindungen oft, vielleicht der Regel nach in Zellwandung ein. Eine solche ist an den dickeren Plasmaverbindungen mit Sicherheit nachzuweisen und zuweilen konnte eine Cellulosereaction an sehr dünnen Plasmafäden erhalten werden. Jedenfalls werden diese späterhin durch Kalilauge etc. nicht mehr zum Verschwinden gebracht und so liegt die Annahme nahe, dass diese höhere Solidität und Resistenz allgemein durch die Umkleidung mit einer zarten Zellwand gewonnen wird.

Diese zur Hautbildung führende Reizwirkung wird nur durch die lebendige Continuität, nicht aber durch eine innige Berührung ermöglicht. Denn wenn die aus der Wandung hervorgetretenen Plasmaportionen sich berührten, so brachte es doch immer nur der kernhaltige Theil zu einer Zellwand. Dasselbe traf zu, als in einer Haarzelle von Cucurbita die Verbindungsfäden durch Inductionsschläge zerstört und darauf durch allmähliche Aufhebung der Plasmolyse erreicht worden war, dass die isolirten Portionen sich eng aneinander pressten. In diesem Falle entstand nur an der Grenzfläche des kernhaltigen Stückes Zellhaut, welche also nicht zwischen den folgenden kernfreien Theilstücken gebildet wurde.

Nach den mitgetheilten Erfahrungen konnte es kaum noch zweifelhaft sein, dass der zur Hautbildung nöthige Reiz auch durch die überaus feinen Plasmafäden vermittelt wird, welche die Zellwand durchsetzen und so die lebendige Continuität zwischen den benachbarten Protoplasten herstellen. Diese Erwartung fand durch das Experiment ihre volle Bestätigung. Denn wenn ein Haar, ein Moosprotonema u. s. w. derart präparirt wurde, dass eine völlig isolirte Cytoplasmamasse der einen Zelle durch diese plasmatischen Wandfäden mit dem kernführenden Protoplast der Nachbarzelle in Verbindung blieb, so bildete sich um jenes kernfreie Stück Zellwand. Diese trat aber nicht auf, wenn in dieser Nachbarzelle die trennende Querwand ebenfalls nur mit isolirtem, kernfreiem Cytoplasma in Verbindung stand. Damit wird also nur bestätigt, dass schon sehr feine Plasmafäden zur Uebermittlung des fraglichen Reizes ausreichen, der in den vorhin beschriebenen Versuchen auf viel weitere Strecken durch die künstlich erzeugten und zum Theil schon sehr zarten Plasmafäden übertragen wurde.

Konnte es auch nie zweifelhaft sein, dass durch diese plasmatischen Wandfäden sehr mannigfache Reize übermittelt werden[1],

1) Vgl. Pfeffer, Die Reizbarkeit der Pflanzen, 1893, p. 28.

so ist es doch wichtig, dass hier für eine bestimmte Partialfunction eine klare und unzweideutige Demonstration gelang. Ohne Frage wird eine solche auch noch für andere Functionen geliefert werden können. In der That erstreckt sich der so vermittelte Einfluss auf das generelle Lebensgetriebe, wie sich daraus ergibt, dass bekanntlich das völlig isolirte Cytoplasma endlich zu Grunde geht, während es, sobald durch feine Plasmafäden eine Verbindung mit kernhaltigem Plasma hergestellt ist, ebenso wie letzteres am Leben bleibt. Somit kann sehr wohl in einem Gewebeverband ein kernfreier Cytoplast dauernd leben und wirken, wie das für die Siebröhren zutrifft, die nach übereinstimmenden Angaben keinen Zellkern besitzen[1]). Unsere Versuche ergaben übrigens, dass die plasmolytisch getrennten Plasmaportionen der Siebröhren von Cucurbita sich ebenfalls mit Zellhaut umkleiden, wenn sie der Wandung anliegen, wenn also ihr Zusammenhang mit den von den Nachbarzellen ausgehenden Plasmafäden bewahrt wird, während die völlig isolirten Plasmaportionen nie Zellhaut formiren.

Beiläufig bemerkt, sind die Kerne verschiedenwerthiger Zellen zur Ausübung dieses Reizeinflusses befähigt und speciell im Pollenschlauche wird die Hautbildung in gleicher Weise durch den vegetativen und generativen Zellkern veranlasst. In dieser Reizwirkung handelt es sich aber nicht um eine längere Zeit nachklingende Induction, wie schon aus dem negativen Erfolg mit den separirten Cytoplasmamassen zu entnehmen ist. Zudem tritt um diese auch dann keine Hautbildung ein, wenn man die Plasmafäden thunlichst lange bestehen lässt und erst einige Zeit vor dem Termine durchschneidet, an welchem erfahrungsgemäss der Beginn der Zellhautbildung zu constatiren ist.

Wie im näheren die Zellhautbildung durch Uebermittelung angeregt wird, muss vorläufig unentschieden bleiben, doch dürfte es durch fernere Studien wohl möglich werden, einige Aufklärung zu schaffen. Soviel ist wenigstens gewiss, dass das Cytoplasma während seines normalen Zusammenwirkens mit dem Nucleus die Gesammtheit der Bedingungen nicht derart erwirbt, dass es sich nach der Separation selbstthätig eine Zellhaut zu bauen vermag. Auch sprechen die zuletzt erwähnten Versuche dagegen, dass etwa in der durch die Plasmolyse geschaf-

---

1) Zacharias, Flora, Ergänzungsband 1895, p. 247.

fenen Nothlage materielle Theile durch die Verbindungsfäden überwandern, durch die nunmehr die Möglichkeit geboten ist, ohne fernere Mitwirkung des Zellkerns die Zellhaut zu formiren. In solcher Erwägung wird man vorläufig zu dem Glauben geneigt sein, dass es zur Production der Zellhaut der continuirlichen Uebermittelung und Mitwirkung von bestimmten Bewegungs- und Schwingungszuständen bedarf, welche vom Zellkern ausstrahlen oder vielmehr aus dem Zusammenwirken von Zellkern und Cytoplasma ihren Ursprung ableiten. Wenn man bedenkt, dass auch die Schwingungen einer Saite sich weithin fortpflanzen und Mittönen erzielen, dass mit Hilfe des Telephons Mittheilungen und Befehle in weiter Ferne wiederhallen, so kann es in der That nicht überraschen, wenn auch durch bestimmte specifische Bewegungszustände in den den Nerven vergleichbaren Plasmafädchen Reizwirkung selbst bis auf weite Ferne übertragen werden. Ja es ist denkbar, dass durch Combination von Schwingungen, analog wie durch Combination der Lautschwingungen im Telephon, mit Hilfe derselben Verbindungsbahn eine schier unbegrenzte Mannigfaltigkeit von Auslösungen erreichbar ist. Damit soll aber durchaus nicht gesagt sein, dass die Plasmafäden ihre einzige Aufgabe in der Uebermittelung von Reizen finden. Denn abgesehen davon, dass es sich schon bei gewissen Reizübertragungen fraglos um die Ueberführung materieller Körper dreht, werden die Plasmafäden unter Umständen wohl auch als Transportwege für Nährstoffe dienstbar gemacht sein[1]).

Wissen wir auch nicht, bis auf welche Entfernung gerade der zur Hautbildung führende Reiz wirkt, so reichen doch die mitgetheilten Thatsachen in Uebereinstimmung mit anderen Erfahrungen aus, um zu zeigen, dass es gerade in dieser Function nicht allzusehr auf die unmittelbare Nachbarschaft des Zellkerns ankommt[2]). Wenn man also im allgemeinen die ausgesprochene Tendenz findet, die Areale, über welche sich die Herrschaft und Wechselwirkung eines einzelnen Zellkernes zu erstrecken hat, nicht allzusehr zu vergrössern, so dürfte das in erster Linie auf andere Functionen und Ziele berechnet sein.

Zur richtigen Beurtheilung der Sachlage sei daran erinnert, dass es zum Gedeihen und Bestehen des Organismus, des Zusam-

1) Vgl. Pfeffer, Studien zur Energetik, 1892, p. 272.

2) Für solche Nahewirkung ist Haberlandt eingetreten in: Function und Lage des Zellkerns, 1887.

menwirkens von Zellkern und Cytoplasma, überhaupt aller nothwendigen Organe und Glieder bedarf. Doch so gut wie der ausgeschnittene Muskel noch zu Zuckungen befähigt ist, vermögen auch isolirte und für sich nicht existenzfähige Theilstücke des Protoplasten einzelne Thätigkeiten für gewisse Zeit fortzusetzen oder schlummernde potentielle Fähigkeiten zur Geltung zu bringen. So hält in dem isolirten Cytoplasma stunden- oder tagelang die Strömung an, durch welche zugleich die Fortdauer von Athmungs- und Stoffwechselprocessen angezeigt wird. Das Gleiche gilt auch für den Nucleus, der nach der Separirung sogar eine begonnene Theilung bis zu einem gewissen Grade durchzuführen vermag (Demoor). In allen diesen und anderen Fällen kann man, wenn es beliebt, mit vollem Rechte von einer Nachwirkung reden, die, wie die ganze Existenz des Organismus, durch das vorausgegangene normale Zusammenwirken aller constituirenden Theile ermöglicht und bedingt ist.

Mit der Separirung werden aber immer nur einzelne Partialfunctionen fortgesetzt, denn im Protoplast ist sicherlich, ebenso wie in den höchsten Organismen, die Realisirung anderer Functionen derart an die Wechselwirkung und an das Zusammengreifen der constituirenden Theile gekettet, dass gerade wichtige und entscheidende Functionen mit der Lösung des Verbandes sogleich oder bald zum Stillstand kommen. Zu diesen Operationen zählt auch schon die Formation der Zellhaut, wenigstens nach den bisherigen Erfahrungen, die natürlich nicht ausschliessen, dass diese specielle Leistung bei anderen Organismen oder unter anderen Versuchsbedingungen von dem isolirten Cytoplasma vollbracht wird. Das ist völlig verträglich mit den obigen, auf breitester Basis stehenden Betrachtungen und Forderungen, die auch zu vollem Rechte bestehen bleiben, wenn Organismen bekannt werden sollten, in welchen die Differenzirung in Zellkern, Cytoplasma u. s. w. unterblieb. Denn da, wo diese Differenzirung erreicht ist, hängt die zureichende Thätigkeit und der Fortbestand des Organismus ebenso gut von dem Zusammenwirken dieser Theile ab, wie bei den höchst entwickelten Thieren von dem Zusammengreifen des Gehirns, des Herzens u. s. w., Organen, die in den niedersten Thieren nicht zur Ausbildung kamen.

In richtiger und voller Würdigung des Gesammtzusammenhanges ist es selbstverständlich, dass die mitgetheilten Erfahrungen in keiner Weise berechtigen, die Zellhautbildung ganz oder auch nur der Hauptsache nach dem Zellkern zuzuschieben. Denn wir wissen schlechterdings nicht, in welcher Weise zur Erreichung des besagten Zieles Cytoplasma und Zellkern zusammenwirken, der, soviel bekannt, weder innerhalb des Protoplasten, noch im isolirten Zustand Zellhaut formirt. Ueberhaupt kann aus der Nothwendigkeit und der Gesammtheit unserer Erfahrungen durchaus nicht gefolgert werden, dass gerade der für sich ebenfalls nicht existenzfähige Nucleus der befehlende und bestimmende Herrscher, das Cytoplasma aber nur das gehorchende und dienende Glied ist. Vielmehr besteht offenbar im Protoplasten, analog wie in höchst entwickelten Organismen, eine auf Arbeitstheilung und gegenseitige Unterstützung basirte Genossenschaft und dementsprechend wird je nach den in das Auge gefassten Specialfunctionen bald die Thätigkeit und die Bedeutung des Zellkerns, bald die des Cytoplasmas (oder eines Organs in diesem) in den Vordergrund treten.

W. Pfeffer, o. M., *Ueber regulatorische Bildung von Diastase auf Grund der von Herrn Dr. Katz im Botanischen Institut angestellten Untersuchungen.*

Da das ganze Stoffwechselgetriebe selbstregulatorisch gelenkt wird, so muss nothwendigerweise die Thätigkeit des Organismus in mannigfacher Weise durch die Ernährungsbedingungen und die eigenen Producte beeinflusst werden. Dass Gleiches auch für die Enzyme gilt, wird durch die nicht genügend kritischen Studien von Fermi[1]) wahrscheinlichst gemacht, nach welchen die Bacterien nicht unter allen Bedingungen proteolytische Enzyme produciren. Ferner beobachtete Wortmann[2]) ein Unterbleiben der Diastasewirkung bei Gegenwart einer genügenden Menge von Zucker. Doch kann auf diese Experimente nicht viel Gewicht gelegt werden, weil bei dem Operiren mit einem Gemisch zahlreicher Bacterienarten nicht abzusehen ist, in wie weit die besagten Resultate dadurch herbeigeführt wurden, dass mit der Veränderung der Nährflüssigkeit andere Arten obsiegten. Uebrigens sprechen auch die Beobachtungen von Brown und Morris[3]) dafür, dass in den Keimlingen der Gräser die Production von Diastase durch die Anhäufung von Zucker reducirt wird.

Jedenfalls liegen bis dahin keine klaren und unanfechtbaren Belege über die regulatorische Production von Enzymen vor. Um aber zunächst in principieller Hinsicht einen sicheren Boden zu gewinnen, veranlasste ich Herrn Dr. Katz, das Thema an einigen Organismen (Penicillium glaucum, Aspergillus niger und Bacterium megatherium) zu studiren.

---

1) Centralblatt f. Bacteriol. 1891, X, p. 405; 1892, XII, p. 714.
2) Zeitschr. f. physiol. Chem. 1882, Bd. 6, p. 287.
3) Botan. Zeitung 1892, p. 464.

Unserer Aufgabe entsprechend wurden diese Organismen in Reincultur in flüssigem Nährboden cultivirt, in welchem ihnen viel oder wenig Zucker, oder an Stelle dieses eine andere Kohlenstoffverbindung als Nahrung zur Verfügung stand. Als Reagens auf die Diastase diente ihre Wirkung auf Stärke, die zumeist in der Form der nach Lintner[1]) dargestellten löslichen Stärke in Anwendung kam. Dabei genügte es für unsere vergleichenden Untersuchungen mit Hülfe der Jodreaction zu verfolgen, ob und in welcher Zeit die kleine und gleiche Menge der zugefügten Stärke zum Verschwinden kam. Neben der Kohlenstoffquelle enthielt die wässerige Lösung die nöthigen anorganischen Salze und mit diesen Ammoniumnitrat; doch wurde für bestimmte Zwecke in einzelnen Versuchen etwas Pepton oder Asparagin zugefügt. Zumeist wurde Rohrzucker angewandt, doch lehrten einige Versuche, dass dieser ebenso wie Glucose wirkt, was schon deshalb zu erwarten ist, weil die besagten Versuchspflanzen kräftig invertiren.

Die drei genannten Organismen besitzen die Fähigkeit, neben anderen Enzymen[2]) reichlich Diastase zu produciren. Demgemäss wachsen sie auch auf Stärkekleister, doch kommt viel schnelleres Gedeihen und damit schnellere Diastasewirkung zu Wege, wenn durch eine ganz geringe Zugabe von Zucker das Keimen und damit der Beginn der Entwicklung beschleunigt wird.

Eine Zunahme des Zuckergehaltes hat immer eine Depression der Diastaseproduction zur Folge, doch reagiren die genannten Versuchsobjecte in graduell ungleichem Grade. In Penicillium glaucum wird Diastase überhaupt nicht mehr gebildet, wenn der Pilz auf einer 15- oder 10 procent. Lösung von Rohrzucker cultivirt wird und schon bei einem Gehalt von 1,5 Proc. wurde die Stärke nicht merklich angegriffen. Real wird solche Deckung schon durch eine geringere Menge von Zucker erreicht, da dieser ja mit der Entwicklung des Pilzes und der Nährflüssigkeit abnimmt. Ein gleiches Resultat und ein ähnlicher Grenzwerth wurde auch in den Versuchen mit Bacterium megatherium erhalten. Aspergillus niger erzeugt indess Diastase noch bei 30 Proc.

1) Journal f. pract. Chem., Bd. 34, p. 378.

2) Bourquelot, Compt. rend. d. l. soc. d. Biol. 1893, p. 653; Hansen, Flora 1889, p. 88.

Rohrzucker, jedoch in etwas geringerem Grade. Denn in der 30proc. Lösung hatte die eher mächtiger entwickelte Pilzmasse erst nach 6—7 Tagen dieselbe Stärkemenge zum Verschwinden gebracht, welche in der 1,5proc. Lösung schon nach zwei Tagen völlig umgewandelt war.

Eine maximale Wirkung haben Rohrzucker und Dextrose, resp. Invertzucker. Denn wenn auch Maltose die Diastasebildung in Penicillium entschieden hemmt, so war doch selbst bei Darbietung einer 10proc. Lösung von Maltose, allerdings erst nach 14 Tagen, die Stärke völlig verschwunden, während Bact. megatherium schon in einer 3proc. Lösung von Maltose die Production von Diastase einstellte. Auf dieses Bacterium scheint aber Milchzucker etwas weniger zu wirken als auf Penicillium, in dem die Diastasebildung in ähnlicher Weise beeinflusst wird, wie durch Maltose. Eine genaue Fixirung der Grenzwerthe war indess zunächst nicht beabsichtigt, und zur näheren Aufhellung würde ohnedies zu verfolgen sein, ob und in wie weit Milchzucker und Maltose durch diese Organismen hydrolytisch gespalten werden.

Wird unseren Pilzen anstatt einer Zuckerart eine andere Kohlenstoffverbindung dargeboten, so wurde wenigstens eine auffällige Beeinflussung der Diastasebildung in den von uns ausgeführten Versuchen nicht bemerklich. So bringt Penicillium die Jodreaction bald zum Schwinden, wenn es ungefähr ebenso üppig wie auf Zucker auf einer neutralisirten Lösung wächst, die 3 Proc. Chinasäure enthält. Aber auch dann, wenn auf einer 10proc. Chinasäure nur kleine Pilzrasen entstehen, ist die Stärke doch bald nicht mehr nachzuweisen. Ebenso wurde bei Ernährung mit Glycerin oder Weinsäure eine auffällige Hemmung der Diastasebildung in Penicillium nicht beobachtet. Dasselbe Resultat kam in den Versuchen mit Aspergillus niger heraus, in welchem ohnehin die Diastaseproduction in weit geringerem Grade durch die Qualität und Quantität der Nahrung beeinflusst wird.

Die mitgetheilten Erfahrungen beziehen sich zunächst auf die eiweissfreien Nährlösungen, in welchen der Stickstoff in Form von Ammoniumnitrat zur Verfügung stand. Doch wurden bei Zugabe von etwas Pepton oder Asparagin im wesentlichen dieselben Resultate erhalten. Nur scheint bei Darbietung von Pepton der Zuckergehalt ein wenig gesteigert werden zu müssen, um in Penicillium die Diastasebildung zu sistiren.

Wenn die Grenzwerthe in unseren Versuchen nicht ganz genau präcisirt wurden, so wird doch durch dieselben das graduell verschiedene Reactionsvermögen differenter Organismen bewiesen, unter denen bei Aspergillus nur eine Einschränkung, nicht aber eine Sistirung der Diastasebildung erzielt wurde. Hiernach ist es nicht zu bezweifeln, dass bei Ausdehnung der Studien auf eine grössere Zahl von Organismen alle möglichen Abstufungen gefunden werden. Auch werden sicherlich die Fähigkeiten und die Actionen und somit die Grenzwerthe je nach den übrigen Ernährungs- und Culturbedingungen mehr oder minder weitgehende Verschiebungen erfahren.

Die besprochenen Erfolge werden aber thatsächlich durch eine verminderte Production, nicht etwa durch eine Hemmung der Secretion der Diastase erzielt. Darüber können schon die mitgetheilten Erfahrungen keinen Zweifel lassen und ausserdem ergab ein directer Versuch, dass Penicillium, wenn es auf einer 2 proc. Zuckerlösung erwächst, keine Diastase enthält.

Zugleich geht aus den mitgetheilten Versuchen schlagend hervor, dass nicht schlechthin jedwelche ausreichende Befriedigung des Nahrungsbedürfnisses die Depression der Diastasebildung bedingt. Denn diese wird in Penicillium auf das beste betrieben, während es bei Ernährung mit Chinasäure so gut wie mit Zucker wächst, und steht ebenso nicht still, wenn der Pilz auf der concentrirteren Chinasäure nur kümmerlich fortkommt. Die regulirende Wirkung hängt also in erster Linie von der chemischen Qualität des influirenden Körpers ab. Beachtenswerth ist dabei, dass gerade Zuckerarten, die bei der hydrolytischen Spaltung der Stärke durch Diastase entstehen, eine energische, ja vielleicht die intensivste Wirkung haben. Ob in dieser Hinsicht eine weitgehende Anpassung besteht, ist aus unseren Versuchen nicht sicher zu entnehmen. Denn es wurde nicht untersucht, ob die von den Versuchsobjecten secernirte Diastaseart die Stärke in Dextrose oder Maltose verwandelt, und es ist nicht unmöglich, dass die benutzten Pflanzen verschiedene Arten von Diastase produciren[1]). Vorläufig muss es dahingestellt bleiben, ob mit einer solchen Differenz die grössere Reactionsfähigkeit von Bact. megatherium gegen Maltose in einem Zusammenhang steht. Sollte indess der Milchzucker nicht gespalten werden, so

1) Vgl. Beyerinck, Centralbl. f. Bact., II. Abth., 1895, Bd. I, p. 229.

würde daraus zu entnehmen sein, dass die Production der Diastase, wie es ohnehin wahrscheinlich ist, auch durch solche Körper beeinflusst werden kann, welche bei der Wirkung dieses Enzyms auf Stärke nicht gebildet werden. Vielleicht wirkt also der Rohrzucker direct, der allerdings in unseren Experimenten wohl zumeist ziemlich bald invertirt war. Ob dann Dextrose und Laevulose die Enzymproduction in gleichem oder verschiedenem Grade hemmen, wurde nicht untersucht.

Jedenfalls wird aber durch die Erfolge eine von der chemischen Qualität und der Menge des Körpers abhängige Reizwirkung angezeigt, durch welche in dem Organismus eine solche Umstimmung veranlasst wird, dass er nach Maassgabe seiner specifischen Sensibilität und nach der Intensität des Reizes die Production von Diastase theilweise oder ganz einstellt[1]). Aus den mitgetheilten Thatsachen ergibt sich unmittelbar, dass nicht etwa in rein chemisch-physikalischer Weise die Action der Diastase unterdrückt wird und zudem ist längst bekannt, dass erst bei einem hohen Zuckergehalt eine erhebliche Retardirung der Diastasewirkung eintritt[2]). Zu solcher chemischer Reizung muss sich mit zunehmender Concentration die osmotische Leistung gesellen und es ist selbstverständlich, dass durch genügende Steigerung dieser, endlich durch jeden Körper die Gesammtthätigkeit des Organismus und so sicherlich auch die Production von Diastase eingeengt wird.

Unter normalen Verhältnissen bedarf es aber der Anregung durch Zucker oder Stärke nicht, um die Production von Diastase in Gang zu setzen, die eben auch bei Ernährung mit anderen Kohlenstoffverbindungen entsteht. Da aber solche Productionen immer regulatorisch gelenkt werden, so wird sicherlich auch Diastase nur so lange formirt, bis die Anhäufung einen bestimmten Grenzwerth erreicht hat. Eine dauernde Fortführung oder Beschlagnahme muss dann eine vermehrte Totalproduction zur Folge haben und diese Vorraussetzung fand in Versuchen mit Aspergillus niger ihre Bestätigung.

In diesen Experimenten wurde Aspergillus auf einer Lösung cultivirt, die 10 Proc. Rohrzucker, 0,5 Proc. lösliche Stärke und 0,5 Proc. Tannin enthielt. Dieses letztere hemmt die Entwicklung des Pilzes nicht, beschlagnahmt aber dauernd die secernirte Diastase,

1) Vgl. Pfeffer, Jahrb. f. wiss. Bot., 1895, Bd. 28, p. 237 ff.

2) Nach den Untersuchungen von Kjeldahl u. A.

mit der es eine fast unlösliche Verbindung eingeht. Aus dem gesammelten Niederschlag wird durch Alkohol ein ansehnlicher Theil des Tannins gelöst und nunmehr lässt sich die so in Freiheit gesetzte Diastase mit Wasser ausziehen. Da aus dem Residuum Alkohol wiederum einen ansehnlichen Theil des Tannins auszieht, so gewinnt man bei wiederholter Behandlung fast die gesammte Menge in durchaus wirksamer Form. Um einen Vergleich anstellen zu können, wurde Aspergillus auf derselben Lösung, jedoch ohne den Zusatz von Tannin cultivirt, das jetzt erst nach Abschluss des Versuches hinzugefügt wurde. Aus dem so gewonnenen Niederschlag wurde in genau derselben Weise die Diastase in Freiheit gesetzt und bei Einhaltung ganz identischer Operationen konnte nunmehr aus der diastatischen Wirkung der Lösungen, d. h. aus der Menge des reducirenden Zuckers, welcher in derselben Zeit aus Stärke gebildet wurde, auf die Ausgiebigkeit der Diastaseproduction mit und ohne Festlegung durch Tannin geschlossen werden. Im letzteren Falle lieferte das ausgeschiedene Kupferoxydul 0,06 g Cu, während bei Festlegung mit Tannin 0,1 g Cu gewonnen wurde. Das ist immer eine ansehnliche Steigerung der Diastase, die auch in einem anderen Versuche in fast gleichem Maasse gefunden wurde. Infolge der regulatorischen Nachbildung wird aber auch die Inanspruchnahme durch Stärkeumsatz eine gewisse Vermehrung der Totalproduction an Diastase herbeiführen, von der mit diesem Wirken ein gewisses Quantum abgenutzt wird.

Aehnliche Verhältnisse werden wohl vielfach auch in Bezug auf die regulatorische Production anderer Enzyme obwalten. Doch ist anzunehmen, dass neben der hemmenden Wirkung der Producte auch Fälle vorkommen, in welchen die Production und Secretion eines Enzymes durch bestimmte Körper erst veranlasst oder doch beschleunigt wird. Thatsächlich ist solches für eine Anzahl der fleischverdauenden Phanerogamen bekannt. Uebrigens lassen unsere Untersuchungen unentschieden, ob nicht etwa eine geringe Menge von Zucker eine absolute Beschleunigung der Formation von Diastase hervorruft, während allerdings nicht zu erwarten ist, dass eine solche Reizwirkung direct durch die unlösliche Stärke zu Stande kommt. Wenn ein Organismus verschiedene Enzyme erzeugt, so dürfte wohl häufig die Production eines jeden einzelnen Enzyms in mehr oder minder unabhängiger Weise regulirt und beeinflusst werden.

A. Mayer, o. M., *Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentiales.*

In der Abhandlung »Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkungen« hat HELMHOLTZ hervorgehoben [1]), dass für die Bewegung eines Systems materieller Punkte mit den unabhängigen Bestimmungsstücken $p_1, \dots p_n$ stets ein *kinetisches Potential* H existirt, so oft die LAGRANGE'schen Ausdrücke der bewegenden Kräfte $P_1, \dots, P_n$ des Systems solche, in den p'' lineare Functionen der p, p' und p'', d. h. der Variabeln $p_1, \dots, p_n$ und ihrer ersten und zweiten Differentialquotienten nach der Zeit t sind, zwischen denen die Relationen identisch bestehen:

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_k''} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i''}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial p_k'} + \frac{\partial P_k}{\partial p_i'} = 2\frac{d}{dt}\frac{\partial P_k}{\partial p_i''},$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_k} - \frac{\partial P_k}{\partial p_i} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_k'} - \frac{\partial P_k}{\partial p_i'}\right),$$

oder also, dass es unter diesen Voraussetzungen immer eine Function H der p und p' giebt, welche die n Gleichungen identisch erfüllt:

$$-\frac{\partial H}{\partial p_\lambda} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda'} = P_\lambda.$$

HELMHOLTZ deutet zugleich an, dass sich diese Behauptung beweisen lasse durch Ausdehnung gewisser Sätze aus der Theorie der Potentialfunctionen auf den Raum von n Dimensionen, fügt aber hinzu: Da der Beweis eine Sache von selbständigem Interesse sei, so scheine es ihm nicht passend, sie nur nebensächlich abzuthun, und er zöge deshalb vor, den Beweis bei einer andern Gelegenheit zu geben.

---

1) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 100, p. 165 u. 166.

In der ungemein anregenden Arbeit »Ueber die Principien der Mechanik« hat nun kürzlich Koenigsberger einen anderen Weg angegeben[1]), auf dem man den Helmholtz'schen Satz beweisen und die Untersuchung sogar erstrecken könne auf die Frage nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass n Functionen $P_1, \ldots, P_n$ der Variabeln $p_1, \ldots, p_n$ und ihrer Differentialquotienten nach t bis zur Ordnung 2ν sich durch eine einzige Function H der p und ihrer Differentialquotienten bis zur Ordnung ν in der Form ausdrücken lassen:

$$P_\lambda = -\left\{\frac{\partial H}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(\nu)}}\right\}.$$

Wirklich durchgeführt wird der Beweis jedoch nur für den Fall $n = 2$, $\nu = 1$.[2])

Im Folgenden theile ich einen anderen, kürzeren und ganz directen Beweis der Helmholtz'schen Bemerkung mit, der überdies völlig unabhängig davon ist, ob in den P_λ auch die Zeit selbst auftritt oder nicht, und richte diesen Beweis von allem Anfang an so ein, dass man ohne Weiteres sieht, wie man auch bei der Beantwortung jener allgemeineren, von Koenigsberger aufgeworfenen Frage mit einem Minimum von Rechnung muss auskommen können. Diesem letzteren Zwecke zu Liebe nehme ich das Princip, durch welches Jacobi gelehrt hat, die partiellen Ableitungen von vollständigen Differentialquotienten durch blosse Variation zu berechnen[3]), zum Ausgangspunkt, obgleich in dem vorliegenden einfachen Falle die directe Rechnung fast ebenso rasch zu den gewünschten Formeln führt. Dies fruchtbare Princip gestattet aber, wenn man es nur noch ein wenig

---

1) Sitzungsberichte der Kgl. Preuss. Akademie d. Wiss. zu Berlin, 30. Juli 1896, p. 932—935.

2) Dabei hat sich ein kleines Versehen eingeschlichen. Auf p. 932 sind nämlich die beiden Bedingungen ausgelassen worden:

$$\frac{\partial f_{01}}{\partial p_1'} = \frac{\partial f_{11}}{\partial p_1} p_1' + \frac{\partial f_{11}}{\partial p_2} p_2',$$

$$\frac{\partial f_{02}}{\partial p_2'} = \frac{\partial f_{22}}{\partial p_1} p_1' + \frac{\partial f_{22}}{\partial p_2} p_2'.$$

Erst diese aber ermöglichen die Bestimmung der Function ω aus den Gleichungen (121) von p. 934, indem sie lehren, dass R_1 und R_2 frei von p_1' und p_2' sein müssen.

3) Jacobi, Werke Bd. IV p. 496.

weiter ausbildet, überhaupt die interessanten Formeln der Koenigsberger'schen Abhandlung mit grösster Leichtigkeit abzuleiten.

Nach dem Vorhergehenden handelt es sich um vollständige Beantwortung der Frage:

Welche Bedingungen müssen n gegebene Functionen $P_1, \ldots, P_n$ der n Variabeln $p_1, \ldots, p_n$, ihrer ersten und zweiten Differentialquotienten nach t und eventuell auch noch der unabhängigen Variabeln t selbst erfüllen, damit eine Function H von $t, p_1, \ldots, p_n, p'_1, \ldots, p'_n$ existire, welche die n Gleichungen:

$$(1) \qquad -\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_i'} = P_i$$

identisch befriedigt?

Bezeichnet man allgemein durch δV die Variation, welche irgend eine Function von t, den p und ihren Differentialquotienten nach t erfährt, wenn man den Variabeln p die willkürlichen Variationen δp ertheilt, so hat man stets:

$$\delta\frac{dV}{dt} \equiv \frac{d\delta V}{dt},$$

im Besonderen also, wenn V keine höheren Differentialquotienten der p als die ersten enthält:

$$\sum_1^n{}_\lambda \left\{ \frac{\partial\frac{dV}{dt}}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda + \frac{\partial\frac{dV}{dt}}{\partial p'_\lambda}\frac{d\delta p_\lambda}{dt} + \frac{\partial\frac{dV}{dt}}{\partial p''_\lambda}\frac{d^2\delta p_\lambda}{dt^2} \right\}$$

$$\equiv \frac{d}{dt}\sum_1^n{}_\lambda \left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda + \frac{\partial V}{\partial p'_\lambda}\frac{d\delta p_\lambda}{dt} \right)$$

$$\equiv \sum_1^n{}_\lambda \left\{ \frac{d\frac{\partial V}{\partial p_\lambda}}{dt}\delta p_\lambda + \left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda} + \frac{d\frac{\partial V}{\partial p'_\lambda}}{dt} \right)\frac{d\delta p_\lambda}{dt} + \frac{\partial V}{\partial p'_\lambda}\frac{d^2\delta p_\lambda}{dt^2} \right\},$$

und hieraus fliessen durch Vergleichung der Coefficienten von δp_λ und seiner Differentialquotienten auf beiden Seiten unmittelbar die Relationen:

$$(A) \qquad \frac{\partial}{\partial p_\lambda}\frac{dV}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial p_\lambda},$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\frac{dV}{dt} \equiv \frac{\partial V}{\partial p_\lambda} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial p'_\lambda},$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial}{\partial p''_\lambda}\frac{dV}{dt} \equiv \frac{\partial V}{\partial p'_\lambda}.$$

Dies festgestellt führe ich durch die n Substitutionen:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i'} = \psi_i$$

die n Gleichungen (1) zurück auf die $2n$ folgenden:

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i'} = \psi_i, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{d\psi_i}{dt} - P_i.$$

Da H frei ist von den p'', so verlangen diese Gleichungen zunächst nach (C):

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial \psi_i}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_i}{\partial p''_\varkappa} = 0$$

und damit zugleich, was auch schon die Gleichungen (1) lehren, dass die P_i linear sein müssen in den zweiten Differentialquotienten der p.

Bildet man weiter an der Hand der Formeln (A) und (B) aus den Werthen (2) die Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_i'}}{\partial p'_\varkappa} = \frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p'_\varkappa}}{\partial p_i'}, \quad \frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p'_\varkappa}}{\partial p_i} = \frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_i}}{\partial p'_\varkappa}, \quad \frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_i}}{\partial p_\varkappa} = \frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa}}{\partial p_i},$$

so erkennt man: Zur Existenz einer Function H, die allen $2n$ Gleichungen (2) identisch genügt, ist ausserdem noch nothwendig, aber zugleich auch hinreichend das identische Bestehen der

$$\frac{n(n-1)}{2} + n^2 + \frac{n(n-1)}{2}$$

Bedingungen:

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial \psi_i}{\partial p'_\varkappa} = \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_i'},$$

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_i} = \frac{\partial \psi_i}{\partial p_\varkappa} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \psi_i}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_i}{\partial p'_\varkappa},$$

$$\text{(6)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \psi_i}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_i}{\partial p_\varkappa} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_i} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_i}.$$

Aus (3) und (4) folgt aber:

$$\frac{\partial P_i}{\partial p''_\varkappa} = \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p''_i}, \tag{7}$$

und aus (5) erhält man die beiden, zusammen den n^2 Gleichungen (5) äquivalenten Systeme:

$$\frac{\partial P_i}{\partial p'_\varkappa} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial p'_\varkappa} + \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p'_i}\right), \tag{5a}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_i} = 2\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_i}\right), \tag{5b}$$

von denen das erste, das auch für $\varkappa = i$ zu erfüllen ist, nach (3) sich so schreiben lässt:

$$\frac{\partial P_i}{\partial p'_\varkappa} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p''_\varkappa} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p''_i}\right). \tag{8}$$ [1]

Endlich giebt (6):

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_i}\right)$$

und damit nach (5b):

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_i} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_i}\right). \tag{9}$$

Zur Existenz einer, die Forderungen (1) erfüllenden Function H ist somit jedenfalls *nothwendig, dass $P_1, \ldots, P_n$ solche in den p'' lineare Functionen seien, zwischen denen die*

$$\frac{n(n-1)}{2} + n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Relationen (7), (8), (9) *identisch bestehen.*

Umgekehrt gehen aus den Gleichungen (7), (8), (9), sobald man ihnen noch die Gleichungen (3) und (5b) hinzufügt, wiederum die Gleichungen (4), (5a) und (6), also eben die ursprünglichen Integrabilitätsbedingungen (4), (5), (6) hervor.

Jene nothwendigen Bedingungen werden daher zugleich auch *hinreichend* sein, *wenn sich, so oft sie erfüllt sind, die n Functionen $\psi_1, \ldots, \psi_n$ stets so bestimmen lassen*, dass die Glei-

1) Wegen (7) ist das eben die zweite HELMHOLTZ'sche Bedingung.

chungen (3) und (5b), oder, was nach (7) dasselbe ist, *dass die* $n^2 + \frac{n(n-1)}{2}$ *Gleichungen*:

$$(10) \qquad \frac{\partial \psi_i}{\partial p'_\varkappa} = \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p''_i},$$

$$(11) \qquad \frac{\partial \psi_i}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_i}\right)$$

identisch befriedigt werden.

Um dies zu zeigen, setze ich demnach jetzt voraus, dass die n Functionen $P_1, \ldots, P_n$ die oben angegebenen nothwendigen Bedingungen erfüllen, und ziehe nun vor allem aus den Identitäten (9) weitere identische Relationen.

Zunächst fordern diese Identitäten, da links dritte Differentialquotienten der p nicht vorkommen:

$$(12) \qquad \frac{\partial}{\partial p''_\lambda}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_i}\right) \equiv 0 .$$

Weiter folgt aus ihnen durch Anwendung der Formeln (C) und (B):

$$(13) \qquad \frac{\partial}{\partial p''_\lambda}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_i}\right) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_i}\right)$$

und:

$$\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_i}\right) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_i}\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_i}\right).$$

Vertauscht man in der letzten Formel successive die Indices λ, i, $\varkappa$ mit i, $\varkappa$, λ und $\varkappa$, λ, i, addirt die so entstehenden drei Formeln und bedenkt, dass einerseits:

$$\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial}{\partial p'_i}\left(\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\varkappa}\right) + \frac{\partial}{\partial p'_\varkappa}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_i} - \frac{\partial P_i}{\partial p_\lambda}\right)$$

$$\equiv - \left\{\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_i}\right) + \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\varkappa}\right) + \frac{\partial}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_i} - \frac{\partial P_i}{\partial p'_\lambda}\right)\right\}$$

ist und andererseits diese Summe identisch verschwindet, wenn man in ihr die partiellen Differentialquotienten nach $p_\varkappa$, p_i, p_λ durch solche nach $p'_\varkappa$, p'_i, p'_λ ersetzt, so findet man:

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_i}\right) + \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\varkappa}\right) + \frac{\partial}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_i} - \frac{\partial P_i}{\partial p'_\lambda}\right) \equiv 0.$$

Nun verlangen zunächst die Gleichungen (10), dass die Function ψ_λ eine gemeinsame Lösung der n partiellen Differentialgleichungen sei:

$$(10') \qquad \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial p_1'} = \frac{\partial P_1}{\partial p_\lambda''}, \quad \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial p_2'} = \frac{\partial P_2}{\partial p_\lambda''}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial p_n'} = \frac{\partial P_n}{\partial p_\lambda''} .$$

Diese sind frei von den p'' und nach (12) ist:

$$\frac{\partial \dfrac{\partial P_i}{\partial p_\lambda''}}{\partial p_\varkappa'} \equiv \frac{\partial \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\lambda''}}{\partial p_i'} .$$

Die Gleichungen (10′) erfüllen mithin die Integrabilitätsbedingungen; man kann daher aus ihnen ψ_λ durch eine blosse Quadratur bestimmen, und wenn diese

$$\psi_\lambda = \chi_\lambda(t, p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n')$$

als eine gemeinsame Lösung der n Gleichungen (10′) ergiebt, so ist:

$$(15) \quad \psi_\lambda = \chi_\lambda(t, p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n') + \omega_\lambda(t, p_1, \ldots, p_n),$$

wo ω_λ eine willkürliche Function, ihre allgemeine Lösung.

Substituirt man diese Werthe der ψ_λ in die Gleichungen (11) und führt die Abkürzungen ein:

$$(16) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\varkappa'} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_i'}\right) - \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial \chi_\varkappa}{\partial p_i}\right) \equiv \Omega_{i\varkappa},$$

sodass also $\Omega_{\varkappa i} \equiv -\Omega_{i\varkappa}$, so gehen diese Gleichungen über in:

$$(17) \qquad \frac{\partial \omega_i}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial \omega_\varkappa}{\partial p_i} = \Omega_{i\varkappa} .$$

Hierin sind die rechten Seiten nach (12) zunächst frei von den p''. Sie sind aber auch frei von den p'. Denn nach (10) und (7) ist:

$$\frac{\partial \chi_\mu}{\partial p_\lambda'} \equiv \frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\mu''} \equiv \frac{\partial P_\mu}{\partial p_\lambda''},$$

folglich wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{i\varkappa}}{\partial p_\lambda'} &\equiv \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda'}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\varkappa'} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_i'}\right) - \left(\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial p_\varkappa \partial p_\lambda'} - \frac{\partial^2 \chi_\varkappa}{\partial p_i \partial p_\lambda'}\right) \\ &\equiv \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda'}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\varkappa'} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_i'}\right) - \frac{\partial}{\partial p_\lambda''}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_i}\right) \end{aligned}$$

und das ist Null nach (13).

Die $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen (17) enthalten demnach neben eventuell dem Parameter t nur noch die Variabeln $p_1, \ldots, p_n$ selbst.

Nach (16) und (14) bestehen überdies zwischen ihren rechten Seiten die Relationen:

$$\frac{\partial \Omega_{i\varkappa}}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial \Omega_{\varkappa\lambda}}{\partial p_i} + \frac{\partial \Omega_{\lambda i}}{\partial p_\varkappa} \equiv 0\,. \tag{18}$$

Ordnet man nun die Gleichungen (17) also an:

$$\tag{17'} \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} = \frac{\partial \omega_2}{\partial p_1} + \Omega_{12}, \; \frac{\partial \omega_1}{\partial p_3} = \frac{\partial \omega_3}{\partial p_1} + \Omega_{13}, \ldots, \frac{\partial \omega_1}{\partial p_n} = \frac{\partial \omega_n}{\partial p_1} + \Omega_{1n}, \\ \qquad\qquad\qquad \frac{\partial \omega_2}{\partial p_3} = \frac{\partial \omega_3}{\partial p_2} + \Omega_{23}, \ldots, \frac{\partial \omega_2}{\partial p_n} = \frac{\partial \omega_n}{\partial p_2} + \Omega_{2n}, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial p_n} = \frac{\partial \omega_n}{\partial p_{n-1}} + \Omega_{n-1,n}, \end{array}\right.$$

und setzt voraus, dass man bereits solche Functionen $\omega_n, \omega_{n-1}, \ldots, \omega_{\lambda+1}$ habe finden können, welche die $n-\lambda-1$ letzten Reihen (17') identisch erfüllen, so erhält man zur Bestimmung von ω_λ die Gleichungen:

$$\tag{17''} \left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial p_{\lambda+1}} = \frac{\partial \omega_{\lambda+1}}{\partial p_\lambda} + \Omega_{\lambda,\lambda+1}, \\ \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial p_{\lambda+2}} = \frac{\partial \omega_{\lambda+2}}{\partial p_\lambda} + \Omega_{\lambda,\lambda+2}, \ldots, \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial p_n} = \frac{\partial \omega_n}{\partial p_\lambda} + \Omega_{\lambda n}. \end{array}\right.$$

Damit diese $n-\lambda$ Gleichungen erfüllbar seien, ist nothwendig und hinreichend, dass für $\lambda + 1 \leqq \mu < \nu \leqq n$:

$$\frac{\partial^2 \omega_\mu}{\partial p_\lambda \partial p_\nu} + \frac{\partial \Omega_{\lambda\mu}}{\partial p_\nu} \equiv \frac{\partial^2 \omega_\nu}{\partial p_\lambda \partial p_\mu} + \frac{\partial \Omega_{\lambda\nu}}{\partial p_\mu}$$

sei. In Folge derjenigen Gleichungen (17'), die nach Voraussetzung bereits befriedigt worden sind, ist aber für alle diese Werthe von μ und ν

$$\frac{\partial \omega_\mu}{\partial p_\nu} \equiv \frac{\partial \omega_\nu}{\partial p_\mu} + \Omega_{\mu\nu}$$

und damit auch:

$$\frac{\partial^2 \omega_\mu}{\partial p_\nu \partial p_\lambda} \equiv \frac{\partial^2 \omega_\nu}{\partial p_\mu \partial p_\lambda} + \frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial p_\lambda}.$$

Wegen $\Omega_{\lambda\nu} \equiv - \Omega_{\nu\lambda}$ lassen sich daher die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (17″) so schreiben:

$$\frac{\partial \Omega_{\lambda\mu}}{\partial p_\nu} + \frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial \Omega_{\nu\lambda}}{\partial p_\mu} \equiv 0$$

und sind nach (18) also in der That erfüllt.

Man kann somit, nachdem man ω_n willkürlich als Function von $t, p_1, \ldots, p_n$ gewählt hat, zuerst ω_{n-1} aus der letzten Gleichung (17′), hierauf ω_{n-2} aus den beiden vorletzten Gleichungen, u. s. f., schliesslich ω_1 aus den $n-1$ ersten Gleichungen (17′) bestimmen, und zwar erhält man jede neue Function ω aus den bereits gewonnenen immer durch eine blosse Quadratur.

Die Einsetzung der so erhaltenen Werthe der ω_λ in die bereits gefundenen Gleichungen (15) liefert n solche Functionen $\psi_1, \ldots, \psi_n$, welche allen Gleichungen (10) und (11) identisch genügen. Für diese Functionen werden, in Folge unsrer Voraussetzungen über die P, die Integrabilitätsbedingungen (4), (5), (6) der Gleichungen (2) identisch erfüllt, und man erhält aus diesen $2n$ Gleichungen daher schliesslich auch H selbst durch eine blosse Quadratur.

Damit ist die aufgeworfene Frage beantwortet und gezeigt:

Zur Existenz einer Function H, welche die n Forderungen (1) *befriedigt, ist nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend, dass $P_1, \ldots, P_n$ solche, in den p'' lineare Functionen der p, p', p'' seien, welche, gleichviel ob sie auch noch t selbst enthalten oder nicht, den Bedingungen* (7), (8), (9) *identisch genügen.*

Um aber keinerlei Unklarheiten zurückzulassen, dürfte vielleicht noch die folgende Bemerkung nicht ganz überflüssig sein, bei der selbstverständlich vorausgesetzt wird, dass die Functionen P den angegebenen Bedingungen gehorchen.

Ist $H = H_1$ irgend eine Lösung der n Gleichungen (1), so gehen diese durch die Substitution:

$$H = H_1 + H_2$$

über in die Gleichungen:

$$-\frac{\partial H_2}{\partial p_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H_2}{\partial p_i'} = 0.$$

Diese n partiellen Differentialgleichungen aber lassen sich nicht anders befriedigen, als durch die Annahme:

$$H_2 = \frac{d\Phi(t, p_1, \ldots, p_n)}{dt},$$

in der die Function Φ willkürlich bleibt. Die allgemeine Lösung der Gleichungen (1) ist daher nothwendig von der Form:

$$(19) \qquad H = H_1 + \frac{d\Phi(t, p_1, \ldots, p_n)}{dt}.$$

Es müssen daher auch diejenigen willkürlichen Functionen, die bei der allgemeinen Integration des Systems partieller Differentialgleichungen (17) in den Werthen der einzelnen Functionen ω hinzutreten, sich schliesslich zu einer einzigen willkürlichen Function zusammensetzen.

Nun kann man aber, wenn man die Integration dieses Systems in der oben angegebenen Weise durch successive Quadraturen ausführt, zunächst die Function ω_n ganz willkürlich wählen und hierauf nach (17'') auch noch jeder anderen Function ω_λ eine willkürliche Function von $t, p_1, \ldots, p_\lambda$ allein hinzufügen, und man übersieht nicht sogleich, wie sich alle diese n willkürlichen Functionen zu einer einzigen willkürlichen Function vereinigen lassen.

Es ist daher sehr angenehm, dass man sich um diese einzelnen willkürlichen Functionen gar nicht weiter zu kümmern braucht, weil die Gleichungen (17) auch ihrerseits wieder von ganz analoger Natur sind wie die Gleichungen (1). Liefern nämlich die n Gleichungen:

$$\omega_\lambda = u_\lambda(t, p_1, \ldots, p_n)$$

irgend ein bestimmtes System von Functionen ω, das den $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen (17) genügt, und setzt man dann jedes

$$\omega_\lambda = u_\lambda + v_\lambda,$$

so reduciren sich diese Gleichungen auf:

$$\frac{\partial v_i}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial v_\varkappa}{\partial p_i} = 0$$

und verlangen also, dass jedes v_λ die Gestalt habe:

$$v_\lambda = \frac{\partial \Phi(t, p_1, \ldots, p_n)}{\partial p_\lambda},$$

wo Φ für jedes λ eine und dieselbe willkürliche Function ist.

Die allgemeinsten Werthe der Functionen ω_λ, welche die Gleichungen (17) befriedigen, sind hiernach von der Form:

$$\omega_\lambda = u_\lambda(t, p_1, \ldots, p_n) + \frac{\partial \Phi(t, p_1, \ldots, p_n)}{\partial p_\lambda}.$$

Nach (15) haben folglich die allgemeinen Lösungen ψ_λ der Gleichungen (10) und (11) die Gestalt:

$$\psi_\lambda = \chi_\lambda(t, p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n') + u_\lambda + \frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda}.$$

Für diese Lösungen werden die Gleichungen (2):

$$\frac{\partial H}{\partial p_i'} = \chi_i + u_i + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{d(\chi_i + u_i)}{dt} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} - P_i.$$

Ist daher, unter der Annahme $\Phi \equiv 0$, $H = H_1$ irgend eine bestimmte Lösung dieser $2n$ Gleichungen, so ergiebt sich in voller Uebereinstimmung mit dem von vornherein erkannten Resultate (19):

$$H = H_1 + \frac{d\Phi(t, p_1, \ldots, p_n)}{dt}$$

als der allgemeinste Werth von H, welcher die n Gleichungen (1) erfüllt.

Sind im Besonderen die P_i solche, von t freie und in den p'' lineare Functionen der p, p', p'', welche die Bedingungen (7), (8), (9) identisch erfüllen, so kommt t auch in den Gleichungen (10) und (11) gar nicht vor, es giebt daher stets Lösungen

$$\psi_\lambda = \chi_\lambda + u_\lambda$$

dieser Gleichungen, die gleichfalls frei von t sind, und daher existiren in diesem Falle auch stets von t freie Functionen H, welche die n Gleichungen (1) befriedigen.

J. **Thomae**, o. M., *Ueber die durch die leuchtende Sonnenkugel und den Saturnring erzeugte Schattenfläche.* Mit zwei Figuren.

Durch die von Herrn Barnard beobachtete Verfinsterung des Saturnmondes Japetus und ihre astronomische Verwerthung ist die Aufmerksamkeit auf das schon von Laplace behandelte Schattenproblem von neuem gelenkt worden. Es gilt die Fläche nebst ihrer Fortsetzung zu bestimmen, die den Halbschatten einerseits vom Ganzschatten und andererseits vom ganz erleuchteten Raume trennt, die also den Halbschatten einhüllt. In dem Falle, der in der Astronomie gerade vorliegt, und der auch der einfachste ist, dass der leuchtende und der Schatten gebende Körper von Oberflächen zweiten Grades begrenzt werden, hat G. Salmon die Eliminationen, die das Problem erfordert, ausgeführt und die Gleichung der Fläche vollständig, allerdings unter Anwendung zusammenfassender Abkürzungen, aufgestellt. Abgesehen von der Auffindung der vier Doppelkegelschnitte, die die Fläche enthält, scheinen die Eigenschaften dieser Schattenfläche noch nicht näher untersucht zu sein, was darin seinen Grund haben mag, dass die praktische Astronomie sich an einer genäherten Lösung des Problems genügen lässt, in der an Stelle der wahren Fläche vom achten Grade eine vom vierten Grade gesetzt wird. Die wahre Schattenfläche ist aber zweifellos einer genaueren Untersuchung werth. Hierzu soll hier ein Anfang gemacht werden, und zwar unter besonderer Berücksichtigung des Falles, dass die leuchtende Fläche eine Kugel und der Schatten gebende Körper eine sehr dünne kreisförmige Platte, also kurz gesagt ein Kreis ist, welcher Fall in grosser Annäherung am Himmel in der leuchtenden Sonne und dem Schatten gebenden Saturnringe ein Beispiel findet. Uebrigens liegt in dieser Specialisirung keine wesentliche Beschränkung der

Allgemeinheit, wenn man das Problem vom Standpunkte der projectiven Geometrie ansieht.

Das was hier über die Schattenfläche beigebracht wird, ist so zu sagen etwas hausbackener Natur; ich übergebe es aber der Oeffentlichkeit, weil es, wie ich glaube, einer Vertiefung der Untersuchung voraufgehen muss und zu ihr Anregung geben kann.

§ 1.

Formulirung des Problems.

Es seien $x\ y\ z$ rechtwinkelige Coordinaten und $u\ v\ w$ auf dieselben Axen bezogene Ebenencoordinaten. In der xy-Ebene liege ein Kreis, dessen Gleichung in Ebenencoordinaten

$$R(u, v, w) = r^2u^2 + r^2v^2 - 1 = 0$$

ist, der als der äussere Rand des Saturnringes angesehen werden kann.

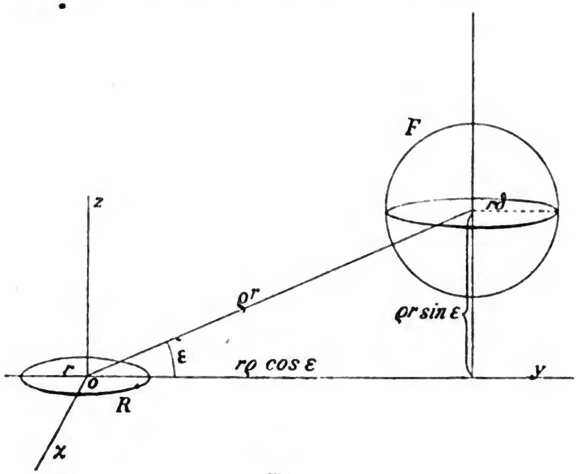


Fig. 1.

Eine Kugel, die Sonnenkugel, habe den Radius $r\delta$ und die Coordinaten ihres Mittelpunktes seien $x = 0$, $y = r\beta$, $z = r\gamma$ so dass also die yz-Ebene durch ihren Mittelpunkt geht. Wird die Entfernung des Kreis- und Kugelmittelpunktes gleich $r\varrho$, $\beta = \varrho \cos \varepsilon$, $\gamma = \varrho \sin \varepsilon$ gesetzt, so ist ε die Elevation des Sonnenmittelpunktes über der Ringebene, sie kann in Maximo ungefähr 28° erreichen. Die Gleichung der Kugel F in Ebenencoordinaten ist

$$F(u\,v\,w) = (r\beta v + r\gamma w + 1)^2 - r^2\delta^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$
$$= -r^2\delta^2 u^2 + r^2 v^2(\beta^2 - \delta^2) + r^2 w^2(\gamma^2 - \delta^2) + 2r^2\beta\gamma v w$$
$$+ 2r\beta v + 2r\gamma w + 1\,.$$

Die Gleichung

$$H^* = R\delta^2 + F = 0$$
$$= r^2v^2\beta^2 + r^2 w^2(\gamma^2 - \delta^2) + 2r^2\beta\gamma v w + 2r\beta v + 2r\gamma w + 1 - \delta^2$$

bedeutet, da u in ihr nicht vorkommt, die Gleichung eines in der yz-Ebene liegenden Kegelschnittes in Ebenencoordinaten.

Die gemeinsamen Ebenen der Bündel $R = 0$, $F = 0$, oder was dasselbe ist, der Ebenenbündel $R = 0$ und $H^* = 0$ bilden einen Ebenenbüschel, dessen Gleichungen die Gleichungen einer geradlinigen abwickelbaren Fläche S, der Schattenfläche die hier untersucht werden soll, in Ebenencoordinaten sind.

Durch eine Tangente des Kreises R lassen sich zwei Tangentialebenen an die Kugel F oder den Kegelschnitt H (dessen Gleichung $H^* = 0$ ist) legen, von denen die eine dann eine beständige ist, wenn die Kreisebene die Kugel berührt. — Diesen *singulären* Fall schliessen wir hier von der Betrachtung aus. — Die Verbindungslinie der Punkte, welche die Tangentialebene auf R und F oder R und H bestimmt, ist eine Erzeugende von S. Es gehen daher durch jeden Punkt von R zwei Erzeugende von S, die auf dem Kegelschnitte H zwei Punkte bestimmen, und es gehen durch jeden Punkt von H zwei Erzeugende von S, die auf R zwei Punkte bestimmen. Die Erzeugenden von S bestimmen daher auf R und H eine zweizweideutige Verwandtschaft, auf die wir später zurückkommen.

Die beiden Erzeugenden durch einen Punkt von R liegen nicht zugleich in einer S in ihm berührenden Ebene. Jeder Punkt von R ist demnach ein Doppelpunkt von S und zwar ein biplanarer. Es giebt vier Tangenten an R, die die Kugel F zugleich berühren. Durch die Berührungspunkte dieser Tangenten mit R giebt es nur je eine Erzeugende von S. Diese vier Punkte von R sind uniplanare Doppelpunkte von S. Der Kreis R und in gleicher Weise der Kegelschnitt H sind demnach Doppellinien der Fläche S.

§ 2.

Discussion des Kegelschnittes H.

Der Mittelpunkt des Kegelschnittes H hat die Coordinaten

$$x = 0, \qquad y_{hm} = \frac{r\varrho \cos\varepsilon}{1-\delta^2}, \qquad z_{hm} = \frac{r\varrho \sin\varepsilon}{1-\delta^2},$$

er liegt auf der Verbindungslinie des Saturn- und Sonnenmittelpunktes, die wir die Centrale nennen wollen und ist vom Saturnmittelpunkte um die Strecke $r\varrho : (1 - \delta^2)$ entfernt und liegt auf der von der Sonne abgewendeten Seite des Saturnringes, wenn $\delta > 1$ ist.

Um die Gleichung des Kegelschnittes H in rechtwinkeligen Coordinaten zu erhalten, setzen wir

$$r^2\beta^2 = \alpha_{11}, \quad r^2\beta\gamma = \alpha_{12}, \quad r\beta = \alpha_{13}, \quad r^2(\gamma^2 - \delta^2) = \alpha_{22},$$
$$r\gamma = \alpha_{23}, \quad 1 - \delta^2 = \alpha_{33},$$
$$H^* = \alpha_{11}v^2 + 2\alpha_{12}vw + \alpha_{22}w^2 + 2\alpha_{13}v + 2\alpha_{23}w + \alpha_{33} = 0,$$

und bemerken nebenbei, dass $\alpha_{12} = \alpha_{13}\alpha_{23}$ ist. Die Adjuncten (Minoren) der α in der Determinante $|\alpha|$ mögen mit $a_{11} a_{12} \ldots$ bezeichnet werden, so ist

$$a_{11} = r^2\delta^2(\gamma^2 - \delta^2 - 1), \quad a_{12} = r^2\beta\gamma\delta^2, \quad a_{13} = r^3\beta\delta^2,$$
$$a_{22} = -r^2\beta^2\delta^2, \quad a_{23} = 0, \quad a_{33} = -r^4\beta^2\delta^2, \quad |\alpha| = r^4\beta^2\delta^4,$$
$$|a| = r^8\beta^4\delta^8.$$

Sieht man von trivialen Fällen ab, so kann von den Grössen $r\ \beta\ \delta$ nur β verschwinden, es kann also $|\alpha|$ nur verschwinden, wenn β gleich Null ist, und nur in diesem Falle stellt $H^* = 0$ ein Punktpaar in der yz-Ebene dar. Dies findet dann statt, wenn die Elevation der Sonne über der Ringebene 90° beträgt, was astronomisch nicht eintreten kann. Von diesem Falle, in dem die Schattenfläche in zwei gewöhnliche Kegel zerfällt, sehen wir ab.

Die Gleichung des Kegelschnittes H in rechtwinkeligen Coordinaten ist nun

$$y^2(\delta^2 - \gamma^2 - 1) + 2yz\beta\gamma - z^2\beta^2 + 2yr\beta - r^2\beta^2 = 0.$$

Die Determinante des quadratischen Theiles dieser Form ist $-\beta^2(\delta^2-1)$, der Kegelschnitt H ist demnach eine Hyperbel, so lange $\delta > 1$ ist, eine Parabel oder Ellipse, wenn $\delta \overline{\gtreqless} 1$ ist. Hier mag wie bei Sonne und Saturnring $\delta > 1$ sein, also $H^* = 0$ eine Hyperbel bedeuten. Wir geben ihrer Gleichung in Punktcoordinaten die Formen:

$$\left(y-\frac{r\beta}{1-\delta^2}\right)^2(\delta^2-\gamma^2-1)+2\left(y-\frac{r\beta}{1-\delta^2}\right)\left(z-\frac{r\gamma}{1-\delta^2}\right)\beta\gamma$$
$$-\left(z-\frac{r\beta}{1-\delta^2}\right)^2-\frac{r^2\beta^2\delta^2}{\delta^2-1}=0,$$

$$\left(y-\frac{r\beta}{1-\delta^2}\right)^2(\delta^2-1)$$
$$-\varrho^2\left(\left(y-\frac{r\beta}{1-\delta^2}\right)\sin\varepsilon-\left(z-\frac{r\gamma}{1-\delta^2}\right)\cos\varepsilon\right)^2-\frac{r^2\beta^2\delta^2}{\delta^2-1}=0.$$

Aus der letzten Gleichung geht hervor, dass die z-Axe und die Centrale für H conjugirte gerade Linien sind.

Die Centrale $y = s\cos\varepsilon$, $z = s\sin\varepsilon$ trifft die Hyperbel in Punkten $s_1 s_2$, die Wurzeln der Gleichung

$$s^2(\delta^2-1)+2sr\varrho-r^2\varrho^2=0$$

sind. Ihre Discriminante $r^2\varrho^2+r^2\varrho^2(\delta^2-1)=r^2\varrho^2\delta^2$ ist ein vollständiges Quadrat, die Grössen $s_1 s_2$ haben die Werthe

$$s_1=\frac{r\varrho}{1-\delta},\quad s_2=\frac{r\varrho}{1+\delta}.$$

Zieht man durch den Sonnenmittelpunkt einen Radius parallel zur y-Axe, und verbindet den Endpunkt mit den beiden Punkten, die der Kreis R mit der y-Axe gemein hat, so bestimmen die Verbindungslinien auf der Centrale die beiden Punkte $s_1 s_2$, sie sind die Aehnlichkeitspunkte des Sonnenkreises der yz-Ebene und des Saturnringkreises, wenn letzterer um seinen Mittelpunkt in die yz-Ebene gedreht wird. Die Mitte zwischen diesen beiden Punkten ist der Hyperbelmittelpunkt.

Die z-Axe wird von der Hyperbel nicht reell getroffen, die y-Axe in den beiden Punkten

$$z=0,\quad x=0,\quad y=(-r\beta\pm r\beta\sqrt{\delta^2-\gamma^2}):(\delta^2-\gamma^2-1),$$

also nur dann reell, wenn die Ringebene durch die Sonne geht. —Die Asymptoten von H haben die Gleichung:

$$((y-y_{hm})(\sqrt{\delta^2-1}+\gamma)-\beta(z-z_{hm}))((y-y_{hm})(\sqrt{\delta^2-1}-\gamma)$$
$$+\beta(z-z_{hm}))=0\,.$$

Sind $A_1 A_2$ die beiden Asymptoten und zugleich die Winkel, die sie mit der y-Axe bilden, $A_2 - A_1$ der Asymptotenwinkel, so ist

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{\gamma-\sqrt{\delta^2-1}}{\beta}\,,\quad \operatorname{tg} A_2 = \frac{\gamma+\sqrt{\delta^2-1}}{\beta}\,,$$
$$\operatorname{tg}(A_2-A_1) = \beta\sqrt{\delta^2-1} : (1+\varrho^2-\delta^2).$$

Der Asymptotenwinkel ist für die Saturnringschattenfläche sehr spitz und die Hyperbel ist sehr flach im spitzen Winkel gelegen. Durch die Asymptoten und einen der Punkte $s_1 s_2$ ist die Hyperbel schon bestimmt und mittelst des Pascal'schen Satzes construirbar. Es lassen sich aber noch einige andere Punkte von H unmittelbar bestimmen. Die beiden Punkte der yz-Ebene

$$y = r\beta,\ z = r(\gamma+\delta);\quad y = r\beta,\ z = r(\gamma-\delta),$$

die wir den höchsten und tiefsten Punkt der Sonne nennen wollen, liegen auf der Hyperbel, ebenso die in Bezug auf den Hyperbelmittelpunkt symmetrisch zu ihnen gelegenen. Endlich sind durch die Asymptoten auch die Axen gegeben und die Symmetrie in Bezug auf sie liefert noch weitere Punkte.

Die beiden von den Punkten $y = \pm r$, $z = 0$ an den in der yz-Ebene gelegenen Sonnenkreis gezogenen Tangentenpaare gehören ebenso wie die Hyperbel H der Schattenfläche S an, sie haben die Gleichungen:

$$(\gamma^2-\delta^2)(y-r)^2+z^2((1-\beta)^2-\delta^2)+2(y-r)z(1-\beta)\gamma=0,$$
$$(\gamma^2-\delta^2)(y+r)^2+z^2((1+\beta)^2-\delta^2)-2(y+r)z(1+\beta)\gamma=0.$$

Sie sind zugleich Tangenten an die Hyperbel, so dass neben den Asymptoten noch vier Tangenten von H unmittelbar gegeben sind, wodurch die Construction derselben und die Vorstellung von ihrer Lage erleichtert wird. Man würde sich nun leicht eine Zeichnung des Schnittes von S mit der yz-Ebene, der Hyperbel H und vier gerader Linien anfertigen können, wenn dem nicht die gerade für diesen Zweck ausserordentlich ungünstigen Verhältnisse der Dimensionen entgegenstünden. Aus diesem Grunde habe ich mir eine Zeichnung angefertigt, in der die Entfernung der beiden Körper verkürzt auftritt, die aber schematisch immer noch eine gute Vorstellung von dem Schnitte der Fläche liefert. Nach den gemachten Angaben kann sich ein Jeder diese Zeichnung leicht herstellen.

Die Gleichung der Schnittcurve S_x der Schattenfläche mit der yz-Ebene ist

$$\begin{aligned} S_x = \\ \text{Const.}\,&((\gamma^2-\delta^2)(y-r)^2+z^2[(1-\beta)^2-\delta^2]+2(y-r)z\gamma(1-\beta)) \\ &\times((\gamma^2-\delta^2)(y+r)^2+z^2[(1+\beta)^2-\delta^2]-2(y+r)z\gamma(1+\beta)) \\ &\times(y^2(\delta^2-\gamma^2-1)+2yz\beta\gamma-z^2\beta^2+2yr\beta-r^2\beta^2)^2=0. \end{aligned}$$

Es kann sogleich bemerkt werden, dass die Hyperbel H nur zum Theil in der Fläche liegt, d. h. von reellen Flächengebieten umgeben ist, zum Theil isolirt verläuft. Die Grenzpunkte zwischen diesen Curventheilen sind die Punkte, deren Tangenten die Sonne berühren und den Kreis R treffen, die Berührungspunkte der eben besprochenen Tangenten. Sie theilen die (im Unendlichen als geschlossen gedachte) Hyperbel in vier Stücke, von denen zwei isolirt verlaufende sind. Zu den letzteren gehören die Theile der Hyperbel, die innerhalb der Sonne liegen.

Ist $\varepsilon = 0$, also $\gamma = 0$, $\beta = \varrho$, so nimmt die Hyperbelgleichung die Form an:

$$y^2(\delta^2-1)-z^2\varrho^2+2yr\varrho-r^2\varrho^2=0,$$

die y-Axe ist Axe der Hyperbel und ihr Mittelpunkt hat die Abscisse $y = r\varrho:(\delta^2-1)$.

Ist $\gamma = \delta$, $\sin\varepsilon = \delta:\varrho$, berührt die Ringebene die Sonne, so ist

$$(y-r\sqrt{\varrho^2-\delta^2})^2-2yz\delta\sqrt{\varrho^2-\delta^2}-z^2(\varrho^2-\delta^2)=0$$

die Hyperbelgleichung. H berührt die xy-Ebene und die Sonne in ihrem tiefsten Punkte. Von den vier Geraden des Schnittes S_x fallen zwei mit der y-Axe zusammen.

§ 3.

Der Schnitt S_z der Schattenfläche mit der xy-Ebene.

Der Schnitt der xy-Ebene mit der Schattenfläche S ist der Saturnring R doppelt gezählt. Dazu kommen die vier Geraden, die den Kreis R und die Sonne zugleich berühren. Da die Sonne in der Ringebene nur dann eine reelle Spur besitzt, wenn die Ringebene die Sonne schneidet, so sind die vier Geraden nur in diesem Falle reell, aber imaginär, wenn die Ringebene die Sonne nicht trifft. Diese beiden Fälle unterscheiden sich auch dadurch, dass im ersten die vier Berührungspunkte der Tangenten den Saturnring in vier Stücke zerlegen, von denen zwei symmetrisch zur y-Axe gelegene isolirte Linien von S bilden, die beiden andern aber von reellen Flächentheilen umgeben sind. Im andern Falle liegt der Kreis ganz in der Fläche. Die vier Erzeugenden von S schneiden sich paarweise in den Punkten, die die Hyperbel H mit der xy-Ebene gemein hat, sie haben die Coordinaten

$$x = 0, \quad y_1 = -r\beta : (\sqrt{\delta^2 - \gamma^2} - 1);$$
$$x = 0, \quad y_2 = r\beta : (\sqrt{\delta^2 - \gamma^2} + 1).$$

Daraus ergeben sich als Gleichungen unserer Geradenpaare:

$$x^2(y_1^2 - r^2) - y^2 r^2 + 2yy_1 r - y_1^2 r^2 = x^2(y_1^2 - r^2) - (y - y_1)^2 r^2 = 0,$$
$$x^2(y_2^2 - r^2) - (y - y_2)^2 r^2 = 0,$$

und als Gleichung des Schnittes der Schattenfläche mit der xy-Ebene findet man

$$\text{Const.}'\,(x^2 + y^2 - r^2)^2\,(x^2(y_1^2 - r^2) - (y - y_1)^2 r^2)$$
$$\times\,(x^2(y_2^2 - r^2) - (y - y_2)^2 r^2) = 0.$$

Das von den Coordinaten freie Glied darin hat den Werth

$$r^8 y_1^2 y_2^2 = r^2\beta^2 : (1 + \gamma^2 - \delta^2).$$

Das von den Coordinaten freie Glied in der Gleichung des Schnittes S_x hat den Werth $r^8\beta^4(\gamma^2 - \delta^2)$, man muss deshalb

$$\text{Const.}' = \text{Const.}\ \beta^2(\gamma^2 - \delta^2)^2(1 + \gamma^2 - \delta^2) : r^4$$

setzen, wenn die beiden Gleichungen $S_x = 0$, $S_z = 0$ aus derselben Gleichung $S = 0$ abgeleitet werden sollen, indem man bez. $x = 0$ oder $z = 0$ setzt.

§ 4.

Die beiden andern Doppelkegelschnitte von S in Ebenencoordinaten.

Es werde

$$H = (\delta^2 - \gamma^2)\,H^* : \beta^2\delta^2$$

gesetzt, so dass die Gleichung des Kegelschnittes H in Ebenencoordinaten die Form gewinnt:

$$H(u, v, w) =$$
$$H = -\left(\frac{r\gamma v}{\delta} + \frac{r(\gamma^2 - \delta^2)w}{\beta\delta} + \frac{\gamma}{\beta\delta}\right)^2 + r^2v^2 + \frac{2rv}{\beta} + \frac{1+\gamma^2-\delta^2}{\beta^2} = 0.$$

Um zu den weiteren Doppelkegelschnitten der Fläche S zu gelangen ist es nützlich, R und H gleichzeitig durch ein Quadrat von je vier Quadraten linearer Grundformen auszudrücken, oder was dasselbe ist, das gemeinsame Polartetraeder der Bündel R und H (oder R und F) zu bestimmen. Da in jeder der Formen R und H ein Quadrat schon vorkommt, das die andere nicht enthält, so gelangt man zur Lösung dieser Aufgabe, wenn man die beiden Ausdrücke

$$r^2v^2 - 1, \quad r^2v^2 + \frac{2rv}{\beta} + \frac{1+\gamma^2-\delta^2}{\beta^2} \quad .$$

durch Aggregate von je zwei Quadraten linearer Grundformen darstellt. — Unter der Annahme $\varkappa + \varkappa' = 1$, $\mu + \mu' = 1$ setzen wir

$$r^2v^2 - 1 = \varkappa(rv + \lambda_1)^2 + \varkappa'(rv + \lambda_2)^2,$$
$$r^2v^2 + \frac{2rv}{\beta} + \frac{1+\gamma^2-\delta^2}{\beta^2} = \mu(rv + \lambda_1)^2 + \mu'(rv + \lambda_2)^2.$$

Dann ergeben sich die Gleichungen

$$\varkappa\lambda_1 + \varkappa'\lambda_2 = 0, \quad \varkappa_1\lambda_1^2 + \varkappa'\lambda_2^2 = -1,$$

oder

$$\varkappa(\lambda_1 - \lambda_2) = -\lambda_2, \quad \varkappa(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = -1 - \lambda_2^2; \quad \lambda_1\lambda_2 = 1,$$

und

$$\mu\lambda_1 + \mu'\lambda_2 = \frac{1}{\beta}, \quad \mu\lambda_1^2 + \mu'\lambda_2^2 = \frac{1+\gamma^2-\delta^2}{\beta^2},$$

$$\beta(\lambda_1 + \lambda_2) = 1 + \varrho^2 - \delta^2, \quad \beta(\lambda_1 - \lambda_2) = \sqrt{(1+\varrho^2-\delta^2)^2 - 4\beta^2},$$

$$\lambda_1 = \frac{1 + \varrho^2 - \delta^2 + \sqrt{(1+\varrho^2-\delta^2)^2 - 4\beta^2}}{2\beta},$$

$$\lambda_2 = \frac{1 + \varrho^2 - \delta^2 - \sqrt{(1+\varrho^2-\delta^2)^2 - 4\beta^2}}{2\beta},$$

$$\frac{\mu}{\varkappa} = 1 - \frac{1}{\beta\lambda_2} = 1 - \frac{\lambda_1}{\beta}, \quad \frac{\mu'}{\varkappa'} = 1 - \frac{\lambda_2}{\beta},$$

$$\frac{\varkappa\mu'-\mu\varkappa'}{\varkappa}=\frac{\lambda_1}{\beta}, \quad \frac{\varkappa\mu'-\mu\varkappa'}{\varkappa'}=-\frac{\lambda_2}{\beta}.$$

Berührt die Ringebene die Sonne, ist $\gamma=\delta$, so wäre einfacher

$$\lambda_1=\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\varrho^2-\delta^2}}, \quad \lambda_2=\beta=\sqrt{\varrho^2-\delta^2}, \quad \mu'=0;$$

diese Specialisirung ist indessen wohl an H^*, nicht aber an H zulässig, weil diese letztere Form für $\gamma=\delta$ identisch verschwindet. Für $\gamma=0$ aber erhält man

$$\lambda_1=\frac{1+\varrho^2-\delta^2+\sqrt{(1-\varrho^2-\delta^2)(1+3\varrho^2-\delta^2)}}{2\varrho},$$

$$\lambda_2=\frac{1+\varrho^2-\delta^2-\sqrt{(1-\varrho^2-\delta^2)(1+3\varrho^2-\delta^2)}}{2\varrho}.$$

Die Schaar von Bündeln zweiter Ordnung

$$H+\lambda R=-\left(\frac{r\gamma v}{\delta}+\frac{rw(\gamma^2-\delta^2)}{\beta\delta}+\frac{\gamma}{\beta\delta}\right)^2+\lambda^2r^2u^2$$
$$+\mu(rv+\lambda_1)^2+\mu'(rv+\lambda_2)^2+\lambda\varkappa(rv+\lambda_1)^2+\lambda\varkappa'(rv+\lambda_2)^2=0,$$

deren gemeinsame Ebenen die Tangentialebenen der Schattenfläche S bilden, dient Salmon dazu, die Gleichung derselben aufzustellen. Er bildet die der Gleichung $H+\lambda R=0$ adjungirte Gleichung, die in λ vom dritten Grade ist, sie stellt für jedes λ eine die Schattenfläche berührende Oberfläche zweiten Grades dar. Bildet man die Adjuncte für zwei unendlich nahe benachbarte Werthe von λ, für λ und $\lambda+d\lambda$ und eliminirt dann λ, oder was dasselbe ist, bildet man die Discriminante jener Adjuncte als einer Gleichung dritten Grades in λ, so erhält man in einfacher Weise die Gleichung der Schattenfläche S in Punktcoordinaten, die vom *achten* Grade ist.

Diejenigen Werthe von λ, für die $H+\lambda R$ ein Aggregat von drei Quadraten linearer Grundgrössen wird, liefern die Doppelkegelschnitte der Fläche in Ebenencoordinaten. Die Werthe $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$ geben die schon discutirte Hyperbel H und den Kreis R als zwei dieser Kegelschnitte. Die Werthe $\lambda=-\mu:\varkappa$ und $\lambda=-\mu':\varkappa'$ ergeben die beiden andern Kegelschnitte, die wir mit L und N bezeichnen wollen. Setzt man für $\varkappa$ und μ die oben gefundenen Ausdrücke ein, so findet man für diese Kegelschnitte die Gleichungen:

$$L = -\left(\frac{\gamma r v}{\delta} + \frac{(\gamma^2 - \delta^2) r w}{\beta\delta} + \frac{\gamma}{\beta\delta}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\beta} - 1\right) r^2 u^2$$
$$+ \frac{\lambda_1}{\beta}(r v + \lambda_2)^2 = 0\,,$$
$$N = -\left(\frac{\gamma r v}{\delta} + \frac{(\gamma^2 - \delta^2) r w}{\beta\delta} + \frac{\gamma}{\beta\delta}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\beta} - 1\right) r^2 u^2$$
$$+ \frac{\lambda_2}{\beta}(r v + \lambda_1)^2 = 0\,.$$

Die Ebenen der Kegelschnitte $RHLN$ bilden das der Schaar $H + \lambda R = 0$ conjugirte Tetraeder. Davon werde die xy-Ebene E_r die *Ringebene*, die yz-Ebene E_h die *Symmetrieebene*, die N enthaltende Ebene E_n die *innere*, die L enthaltende Ebene E_l die *äussere* conjugirte Ebene genannt.

Die Ebene E_l hat die Coordinaten

$$u = 0,\ \ v = -\lambda_2 : r,\ \ w = \gamma(\beta\lambda_2 - 1) : (\gamma^2 - \delta^2) r,$$

sie trifft die y-Axe im Punkte $y = r\lambda_1$ und ist der x-Axe parallel. Bei den hier in Betracht kommenden Grössenverhältnissen ist $\lambda_1 > 1$, die Ebene E_l trifft deshalb den Ring nicht reell, aus diesem Grunde soll sie die äussere conjugirte Ebene heissen.

Die Ebene E_n des Kegelschnittes N hat die Coordinaten

$$u = 0,\ \ v = -\lambda_1 : r,\ \ w = \gamma(\beta\lambda_1 - 1) : (\gamma^2 - \delta^2) r,$$

sie ist der x-Axe ebenfalls parallel und trifft die y-Axe im Punkte

$$y = r\lambda_2 = 2 r \varrho \cos\varepsilon : (1 + \varrho^2 - \delta^2) + \sqrt{(1 + \varrho^2 - \delta^2)^2 - 4\varrho^2 \cos^2\varepsilon}\,,$$

also im Innern des Ringes und zwar für grosse ϱ nahe dem Mittelpunkte. Deshalb nennen wir sie die innere conjugirte Ebene.

Hierdurch sind unmittelbar die Coordinaten der drei Ecken des conjugirten Tetraeders bestimmt, die in der xy-Ebene liegen. Sie sind

$$\begin{aligned} z &= 0, & x &= \infty, & y &= 0, \\ z &= 0, & x &= 0, & y &= r\lambda_2, \\ z &= 0, & x &= 0, & y &= r\lambda_1, \end{aligned}$$

und sind einander sowohl in Bezug auf den Ring als auch in Bezug auf die Sonnenkugel conjugirt. Die äussere Ebene ist die Polarebene des Punktes $z = 0$, $x = 0$, $y = r\lambda_2$, sie geht, da dieser Punkt ausserhalb der Sonne liegt, durch die Sonne und zwar für grosse Werthe von ϱ nahe am Mittelpunkte derselben vorüber und ist nahezu senkrecht zur Centrale.

§ 5.

Ueberschlag einiger Grössen- und Lagenverhältnisse.

Die Grösse r des äusseren Saturnringes wird in Kilometern auf 139115, $r\varrho$ im Mittel auf 1417800000, $r\delta$ auf 693345 angegeben, so dass $\varrho > 10000$ und δ ein wenig kleiner als 5 ist. Die scheinbare Grösse von 1000 Kilometer des Sonnenradius vom Saturn aus gesehen ist 0,″145. Bei einer der Wahrheit angenäherten Beurtheilung der Grössen- und Lagenverhältnisse mag $1:\varrho$ als eine kleine Grösse erster Ordnung angesehen werden, und es mag $[\varrho^{-2}]$, $[\varrho^{-3}]$ ... eine kleine Grösse zweiter, dritter ... Ordnung bedeuten. — Es ist

$$\begin{aligned}2r\lambda_1 \cos\varepsilon &= \varrho^2+1-\delta^2+\varrho^2\sqrt{1-\frac{2}{\varrho^2}(1+\delta^2-2\sin^2\varepsilon)+\frac{(1-\delta^2)^2}{\varrho^4}}\\ &= 2\varrho^2-2\delta^2+2\sin^2\varepsilon+[\varrho^{-2}],\end{aligned}$$

und wenn wir die kleine Grösse zweiter Ordnung $\frac{1}{2}[\varrho^{-2}]$, dessen Anfangsglied oder dessen Bestandtheil zweiter Ordnung den Werth $-\cos^2\varepsilon(\delta^2-\sin^2\varepsilon):\varrho^2$ hat, mit τ bezeichnen,

$$\lambda_1=\frac{\varrho}{\cos\varepsilon}-\frac{\delta^2-\sin^2\varepsilon}{\varrho\cos\varepsilon}+\frac{\tau}{\varrho\cos\varepsilon},\quad \lambda_2=\frac{\cos\varepsilon}{\varrho}-\frac{\tau}{\varrho\cos\varepsilon}.$$

In vielen Fällen der Abschätzung ist es wichtig, besonders aber wenn $\gamma^2-\delta^2$ eine kleine Grösse ist, diesen Werthen eine andere Form zu geben, nämlich:

$$\begin{aligned}\sqrt{(1+\varrho^2-\delta^2)^2-4\varrho^2\cos^2\varepsilon} &= \sqrt{(1-\varrho^2+\delta^2)^2+4(\varrho^2\sin^2\varepsilon-\delta^2)}\\ &= (\varrho^2-1-\delta^2)\left(1+\frac{2(\gamma^2-\delta^2)(1+\sigma)}{(1-\varrho^2+\delta^2)^2}\right)\end{aligned}$$

zu setzen, worin σ eine kleine Grösse zweiter Ordnung ist. Alsdann ist

$$\beta\lambda_1=\varrho^2-\delta^2+\frac{(\gamma^2-\delta^2)(1+\sigma)}{\varrho^2-1-\delta^2},$$

$$\beta\lambda_2=1-\frac{(\gamma^2-\delta^2)(1+\sigma)}{\varrho^2-1-\delta^2},\quad \beta\lambda_2-1=\frac{(\delta^2-\gamma^2)(1+\sigma)}{\varrho^2-\delta^2-1},$$

$$\beta\lambda_2\delta^2-\gamma^2 = (\beta\lambda_2-1)\delta^2+\delta^2-\gamma^2 = (\delta^2-\gamma^2)\left(1+\frac{\delta^2(1+\sigma)}{\varrho^2-1-\delta^2}\right),$$

$$\frac{(\beta\lambda_2-1)\beta\lambda_1}{\beta\lambda_2\delta^2-\gamma^2}$$

$$=\frac{(1+\sigma)}{\varrho^2-1-\delta^2}\left(\varrho^2-\delta^2+\frac{(\gamma^2-\delta^2)(1+\sigma)}{\varrho^2-1-\delta^2}\right):\left(1+\frac{\delta^2(1+\sigma)}{\varrho^2-1-\delta^2}\right)$$

$$=(1+\sigma)\left(1+\frac{1}{\varrho^2-1-\delta^2}+\frac{(\gamma^2-\delta^2)(1+\sigma)}{(\varrho^2-1-\delta^2)^2}\right):\left(1+\frac{\delta^2(1+\sigma)}{\varrho^2-1-\delta^2}\right)$$

$$=1+\sigma',$$

und es ist σ' eine kleine Grösse zweiter Ordnung. Ebenso ist die Grösse

$$(\beta\lambda_2-1):(\lambda_2\beta\delta^2-\gamma^2) = (1+\sigma):(\varrho^2-1-\delta^2\sigma) = \sigma''$$

eine kleine Grösse zweiter Ordnung.

Die Ebene E_l hat in Punktcoordinaten die Gleichung

$$-y\lambda_2+\frac{z\gamma(\beta\lambda_2-1)}{\gamma^2-\delta^2}+r$$

$$=-y\left(\frac{\cos\varepsilon}{\varrho}-\frac{r}{\varrho\cos\varepsilon}\right)+\frac{z\gamma(1+\sigma)}{\varrho^2-1-\delta^2}+r=0,$$

woraus für die Neigung (E_lE_r) der äusseren conjugirten Ebene gegen die Ringebene sich ergiebt:

$$tg(E_lE_r) = \frac{\lambda_2(\gamma^2-\delta^2)}{\gamma(\beta\lambda_2-1)} = -\frac{\lambda_2}{\gamma}\,\frac{\varrho^2-1-\delta^2}{1+\sigma}$$

$$=-\left(\frac{\cos\varepsilon}{\varrho^2\sin\varepsilon}-\frac{r}{\varrho^2\cos\varepsilon\sin\varepsilon}\right)\frac{\varrho^2-1-\delta^2}{1+\sigma}$$

$$=-ctg\,\varepsilon\left(1-\frac{r}{\cos^2\varepsilon}\right)\left(1-\frac{1+\delta^2}{\varrho^2}\right):(1+\sigma).$$

Diese Formel lässt erkennen, dass (E_lE_r) von $\frac{1}{2}\pi+\varepsilon$ nur wenig abweicht. Eine geometrische Betrachtung führt indessen unmittelbarer zu dieser Erkenntniss.

Wir legen eine zu E_l parallele Ebene E_l' durch den Sonnenmittelpunkt F_m, sie steht senkrecht auf der Geraden $\lambda_2 r\ldots F_m$, die unter dem Winkel ε' gegen die Ringebene geneigt ist, weil E_l die Polarebene von $\lambda_2 r$ in Bezug auf die Sonnenkugel F ist. Folglich ist $(E_lE_r)=\frac{1}{2}\pi+\varepsilon'$, $\varepsilon'=\varepsilon+\varphi$, wenn φ die scheinbare Grösse der Linie $\lambda_2 r\ldots P=\lambda_2 r\sin\varepsilon$ von der Sonne gesehen ist. Nun ist $\lambda_2 r \sin \varepsilon$ nahezu gleich $r \sin 2\varepsilon : 2\varrho$ eine Grösse, die noch nicht sieben Kilometer beträgt. Die scheinbare Grösse eines Kilometers beträgt etwa 0,″00015 und es ist deshalb

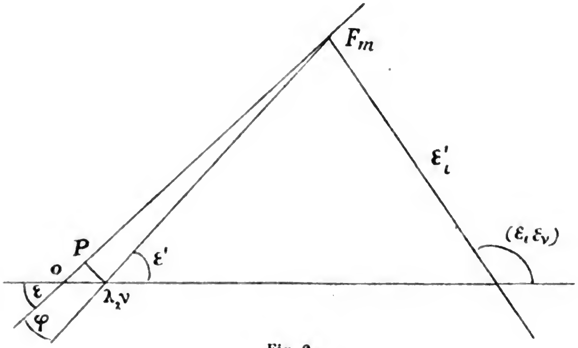


Fig. 2.

$\varphi < 0,''00105$. Es dürfte deshalb, wenn es sich um praktische Rechnungen handelt, ohne Weiteres ε für ε' gesetzt werden. Ist $\varepsilon = 0$, so ist E_l genau senkrecht auf der Centrale.

Die Gleichung der Ebene E_n ist

$$-y\lambda_1 + \frac{z\gamma(\beta\lambda_1 - 1)}{\gamma^2 - \delta^2} + r = 0,$$

sie trifft die Sonnenkugel, wenn $\varepsilon < \arcsin(\delta : \varrho)$ ist, im andern Falle trifft sie sie nicht, sie wird der Centrale um so näher parallel, je grösser γ ist, für $\gamma = 0$ aber ist sie E_l parallel und steht senkrecht auf der Centrale.

§ 6.

Der Kegelschnitt L.

Setzt man in der Ebenencoordinatengleichung des Kegelschnittes L

$$-\left(\frac{\gamma r v}{\delta} + \frac{r(\gamma^2 - \delta^2)}{\beta\delta} + \frac{\gamma}{\beta\delta}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\beta} - 1\right) r^2 u^2 + \frac{\lambda_1}{\beta}(r v + \lambda_2)^2 = 0,$$

$w = 0$, so erhält man die orthogonale Projection L_z des

Kegelschnittes L in der xy-Ebene in Liniencoordinaten. Im Falle $\gamma = 0$ artet L_z in eine Gerade aus, und es muss dann eine andere Projection untersucht werden. Die Liniengleichung von L_z ist

$$r^2 u^2\left(\frac{\lambda_1}{\beta} - 1\right) + r^2 v^2\left(\frac{\lambda_1}{\beta} - \frac{\gamma^2}{\delta^2}\right) + 2rv\left(\frac{1}{\beta} - \frac{\gamma^2}{\beta\delta^2}\right)$$
$$+\left(\frac{\lambda_2}{\beta} - \frac{\gamma^2}{\beta^2\delta^2}\right) = 0.$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes von L_z sind

$$x_{lm} = 0,\ y_{lm} = \beta(\delta^2 - \gamma^2) : (\lambda_2\beta\delta^2 - \gamma^2),$$

sie sind zugleich die beiden ersten Coordinaten des Mittelpunktes von L. Die dritte Coordinate z_{lm} desselben ergiebt sich aus der Gleichung der Ebene E_l des vorigen Paragraphen:

$$z_{lm}\frac{\gamma(\beta\lambda_2 - 1)}{\gamma^2 - \delta^2} = y_{lm}\lambda_2 - r = \frac{r\beta(\delta^2 - \gamma^2)}{\beta\delta^2 - \gamma^2\lambda_1} - r = \frac{r\gamma^2(1 - \beta\lambda_2)}{\beta\delta^2\lambda_2 - \gamma^2},$$
$$z_{lm} = r\gamma(\delta^2 - \gamma^2) : (\beta\delta^2\lambda_2 - \gamma^2) = y_{lm}\, tg\, \varepsilon.$$

Der Mittelpunkt von L liegt auf der Centrale. Dies folgt schon aus dem bekannten Satze, dass die Mittelpunkte einer linearen Schaar von Flächen zweiter Ordnung auf einer Geraden liegen. Die eine Axe des Kegelschnittes L ist die durch den Mittelpunkt zur x-Axe parallel gezogene Grade, die andere ist der Schnitt der Symmetrieebene mit E_l. Um die Grössen dieser Axen zu finden, stellen wir zunächst die Gleichung des Kegelschnittes L_z in Punktcoordinaten auf. Dazu setzen wir die Liniengleichung dieses Kegelschnittes in die Form:

$$\pi_{11}u^2 + 2\pi_{12}uv + \pi_{22}v^2 + 2\pi_{13}v + 2\pi_{23}w + \pi_{33} = 0,$$

und es ist

$$\pi_{11} = r^2\left(\frac{\lambda_1}{\beta} - 1\right),\ \pi_{12} = 0,\ \pi_{13} = 0,\ \pi_{22} = r^2\left(\frac{\lambda_1}{\beta} - \frac{\gamma^2}{\delta^2}\right),$$
$$\pi_{23} = r\left(\frac{1}{\beta} - \frac{\gamma^2}{\beta\delta^2}\right),\ \pi_{33} = \frac{\lambda_1}{\beta} - \frac{\gamma^2}{\beta\delta^2}.$$

Die Adjuncte von $\pi_{\mu\nu}$ in der Determinante $|\pi|$ werde mit $p_{\mu\nu}$ bezeichnet, so ist

$$p_{11} = \pi_{22}\pi_{33} - \pi_{23}\pi_{32} = \frac{r^2\gamma^2}{\beta^2\delta^2}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\beta}\right)(1 - \lambda_2\beta) = \frac{\pi_{11}\gamma^2}{\beta^2\delta^2}(\lambda_2\beta - 1),$$

$$p_{12} = p_{13} = 0,\; p_{22} = r^2\left(\frac{\lambda_1}{\beta} - 1\right)\left(\frac{\lambda_2}{\beta} - \frac{\gamma^2}{\beta^2\delta^2}\right) = \pi_{11}\pi_{33},$$

$$p_{23} = \pi_{12}\pi_{31} - \pi_{11}\pi_{23} = -\pi_{11}\pi_{23},\; p_{23} = \pi_{11}\pi_{22}.$$

Die Grössen p haben den gemeinsamen Factor π_{11}, mit Unterdrückung desselben erhält man daher für L_z in Punktcoordinaten die Gleichung:

$$\frac{x^2\gamma^2}{\beta^2\delta^2}(\lambda_2\beta - 1) + \pi_{33}\left(y - \frac{\pi_{23}}{\pi_{33}}\right)^2 + \frac{p_{11}}{\pi_{33}}$$

$$= \frac{x^2\gamma^2}{\beta^2\delta^2}(\lambda_2\beta - 1) + (y - y_{lm})^2\frac{\lambda_2\beta\delta^2 - \gamma^2}{\beta^2\delta^2}$$

$$+ \frac{r^2\gamma^2\left(1 - \frac{\lambda_1}{\beta}\right)(1 - \lambda_2\beta)}{\lambda_2\beta\delta^2 - \gamma^2} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung noch mit $\beta^2 : r^2\gamma^2(\lambda_2\beta - 1)$, so nimmt sie die Gestalt an:

$$\frac{x^2}{r^2\delta^2} + (y - y_{lm})^2\frac{\lambda_2\beta\delta^2 - \gamma^2}{r^2\gamma^2\delta^2(\lambda_2\beta - 1)} = \frac{\beta(\beta - \lambda_2)}{\lambda_2\beta\delta^2 - \gamma^2} = \psi^2.$$

Die Grösse $\psi^2 = \beta(\beta - \lambda_2) : (\lambda_2\beta\delta^2 - \gamma^2)$ ist bereits auf Seite 542 einer Schätzung unterworfen worden, sie unterscheidet sich von Eins nur um eine kleine Grösse zweiter Ordnung. Die der x-Axe parallele Halbaxe von L_z oder von L ist gleich $r\delta\psi$, also nahe $r\delta$, d. h. sie ist dem Sonnenhalbmesser nahezu gleich. Das Quadrat der zweiten Halbaxe von L_z hat den Werth:

$$r^2\psi^2\gamma^2\delta^2(\lambda_2\beta - 1) : (\lambda_2\beta\delta^2 - \gamma^2) = r^2\psi^4\gamma^2\delta^2(\lambda_2\beta - 1) : \beta(\beta - \lambda_1)$$

$$= \frac{r^2\psi^4\gamma^2\delta^2}{\beta\lambda_1} = r^2\delta^2 \sin^2\varepsilon \cdot \psi^4 : \left(1 - \frac{\delta^2 - \sin^2\varepsilon}{\varrho^2} + \frac{\tau}{\varrho^2}\right).$$

Die zweite Halbaxe von L_z ist demnach von $r\delta \sin\varepsilon$ nur um eine kleine Grösse zweiter Ordnung verschieden, und da sie die orthogonale Projection der zweiten Axe von L ist, so ist diese von $r\delta$ nur um eine kleine Grösse zweiter Ordnung verschieden. Der Kegelschnitt L, den wir den leuchtenden Kegelschnitt nennen wollen, weil er mit dem Saturnring dieselbe Schattenfläche erzeugt als die Sonne, wenn er als leuchtend angenommen wird, dieser Kegelschnitt L ist nahezu ein Kreis mit demselben Durchmesser als die Sonne und steht nahezu senkrecht auf der Centrale. Bei praktischen Anwendungen wird er unmittelbar durch die (scheinbare) Sonnenscheibe ersetzt werden können. Dies soll jedoch hier nicht geschehen, es soll vielmehr L als eine Ellipse mit den Halbaxen $r\delta_1$, $r\delta_2$ angenommen, und ihre Ebene soll nicht als senkrecht zur xy-Ebene betrachtet werden, es soll vielmehr das Problem allgemeiner weiter durchgeführt werden.

Ist $\gamma = 0$, so kann man die Projection in die xy-Ebene zur Untersuchung von L nicht benutzen, sondern muss dazu die dem Original congruente Projection L_y in die xz-Ebene verwenden. Die Gleichung von L_y in Liniencoordinaten ist für $y = 0$:

$$u^2 r^2 (\lambda_1 - \beta) - \frac{r^2 \delta^2 w^2}{\beta} + \lambda_2 = 0,$$

und in Punktcoordinaten ($\beta = \varrho$):

$$\frac{x^2 \lambda_2}{\varrho - \lambda_1} + \frac{z^2 \lambda_2 \varrho}{\delta^2} - r^2 = 0,$$

mit der Ebenengleichung $y = \lambda_2 r$ zusammen ist dies der Kegelschnitt L selbst. Entwickelt man

$$\sqrt{1 - \frac{2}{\varrho^2}(1 + \delta^2) + \frac{(1 - \delta^2)^2}{\varrho^4}}$$

nach Potenzen von $1 : \varrho$ bis auf kleine Grössen vierter Ordnung, so ergiebt sich für diese Wurzel der Werth:

$$1 - \frac{1 + \delta^2}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho^4}\left((1 + \delta^2) - \tfrac{1}{2}(1 - \delta^2)^2\right) = 1 - \frac{1 + \delta^2}{\varrho^2} - \frac{[\varrho^{-2}]}{\varrho^2},$$

und es ist $[\varrho^{-2}]$ eine positive Grösse. Ferner ist

$$\varrho - \lambda_1 = (\delta^2 + \tfrac{1}{2}[\varrho^{-2}]) : \varrho$$

und das Verhältniss der Quadrate der beiden Axen unserer Ellipse ist

$$\frac{r^2 \delta_1^2}{r^2 \delta_2^2} = \frac{\varrho - \lambda_2}{\lambda_2} : \frac{\delta^2}{\lambda_2 \varrho} = \frac{\varrho(\varrho - \lambda_1)}{\delta^2} = 1 + \frac{[\varrho^{-2}]}{2\delta^2}.$$

Die in der Ringebene gelegene Axe ist demnach die grössere. Dass dies auch sonst so der Fall ist, wird sich weiter unten ergeben.

In der Ebene E_l liegen noch vier Erzeugende von S, die Tangenten an L von den beiden Punkten, in denen die Hyperbel H die Ebene E_l trifft, oder was dasselbe ist, die Tangenten an L von den beiden Punkten, in denen der Kreis R die Ebene E_l trifft. Die Punkte (RE_l) sind imaginär, die Punkte (HE_l) sind reell, liegen aber im Innern von L, so dass die Tangenten, also die vier Erzeugenden in E_l, imaginär sind.

§ 7.

Der Kegelschnitt N.

Setzt man in der Ebenencoordinatengleichung des Kegelschnittes N

$$-\left(\frac{\gamma r v}{\delta}+\frac{(\gamma^2-\delta^2) r w}{\beta\delta}+\frac{\gamma}{\beta\delta}\right)^2+\left(\frac{\lambda_2}{\beta}-1\right)r^2u^2$$
$$+\frac{\lambda_2}{\beta}(rv+\lambda_1)^2=0$$

$w=0$, so erhält man die Projection N_z dieses Kegelschnittes in der xy-Ebene in Liniencoordinaten. Sie lautet:

$$\left(\frac{\lambda_2}{\beta}-1\right)r^2u^2+\left(\frac{\lambda_2}{\beta}-\frac{\gamma^2}{\delta^2}\right)r^2v^2+2rv\left(\frac{1}{\beta}-\frac{\gamma^2}{\beta\delta^2}\right)+\frac{\lambda_1}{\beta}-\frac{\gamma^2}{\beta^2\delta^2}=0.$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes dieses Kegelschnittes sind:

$$x_{nm}=0,\quad y_{nm}=r\beta(\delta^2-\gamma^2):(\lambda_1\beta\delta^2-\gamma^2),$$

sie sind zugleich die beiden ersten Coordinaten des Mittelpunktes des Kegelschnittes N. Die dritte Coordinate z_{nm} ergiebt sich aus der Gleichung der Ebene E_n des § 5 als die Grösse

$$z_{nm}=r\gamma(\delta^2-\gamma^2):(\beta\delta^2\lambda_1-\gamma^2)=y_{nm}\,tg\,\varepsilon.$$

Der Mittelpunkt von N liegt, wie sich schon von selbst versteht, auf der Centrale, und y_{nm} ist negativ, wenn die Ringebene die Sonne nicht trifft. Da sich die Gleichungen der Kegelschnitte LN und ebenso die von L_zN_z in Liniencoordinaten nur dadurch von einander unterscheiden, dass $\lambda_1\lambda_2$ vertauscht auftreten, so muss dies auch für die Gleichungen in Punktcoordinaten der Fall sein. Somit ist die Gleichung von N_z:

$$\frac{x^2}{\delta^2}+(y-y_{nm})^2\frac{\lambda_1\beta\delta^2-\gamma^2}{\gamma^2\delta^2(\lambda_1\beta-1)}=\frac{r^2\beta(\beta-\lambda_2)}{\lambda_1\beta\delta^2-\gamma^2},$$

sie bedeutet eine Ellipse und es ist also N eine Ellipse. Die der x-Axe parallele Axe von N_z ist der Grösse nach zugleich die Axe von N und hat in der Annäherung $\lambda_1 = \varrho : \cos \varepsilon$, $\lambda_2 = 0$ den Werth:

$$r\delta\beta : \varrho \sqrt{\delta^2 - \sin^2 \varepsilon} = r\delta \cos \varepsilon : \sqrt{\delta^2 - \sin^2 \varepsilon}\,.$$

Die andere Axe von N_z ist in derselben Annäherung:

$$\varrho r \gamma \delta \beta : \varrho^2 (\delta^2 - \sin^2 \varepsilon) = r \varrho \delta \cos \varepsilon \sin \varepsilon : (\delta^2 - \sin^2 \varepsilon).$$

Ist $\gamma = 0$, so ist E_n der xz-Ebene parallel, und es muss die Projection N_y von N in die xz-Ebene untersucht werden. Die Gleichung von N_y in Liniencoordinaten ist für $\gamma = 0$:

$$u^2 r^2 (\lambda_2 - \beta) - \frac{r^2 \delta^2 w^2}{\beta} + \lambda_1 = 0,$$

und in Punktcoordinaten:

$$\frac{x^2 \lambda_1}{\varrho - \lambda_2} + \frac{z^2 \varrho \lambda_1}{\delta^2} = r^2.$$

Die Halbaxen sind angenähert r und $r\delta : \varrho$, die erste ein wenig grösser als r; die Ellipse ist sehr flach und wird durch die Ringebene gehälftet. Da im Falle $\gamma = 0$ reelle Erzeugende in der xy-Ebene vorhanden sind, durch deren Schnittpunkte die Ellipse geht, so sieht man auch geometrisch ein, dass die Ellipse die Ringebene ausserhalb des Kreises, jedoch nahe dem Rande trifft. Die je vier Erzeugenden, die in den Ebenen der Doppelkegelschnitte liegen und die Doppelkegelschnitte berühren, schneiden sich in jeder dieser Ebenen in sechs Punkten, es sind die Punkte, in denen die drei andern Doppelkegelschnitte die Ebene des ersten treffen.

Ist $\gamma > \delta$, so trifft die Ebene E_n die Sonne, und es giebt reelle Erzeugende in ihr. Es muss deshalb alsdann der Ring R die Ebene der Ellipse N ausserhalb N treffen. Die von den vier Treffpunkten an die Ellipse gezogenen Tangenten sind die vier Erzeugenden in E_n, ihre weiteren Schnittpunkte sind die Punkte, in denen E_n von H und L getroffen wird.

Ist $\gamma < \delta$, so giebt es keine reellen Erzeugenden in E_n. Der Kreis R trifft die Ebene E_n im Innern der Ellipse N, und der Schnitt SE_n besteht aus der Ellipse N und zwei isolirten Punkten im Innern derselben.

Die vierte Ecke des S conjugirten Tetraeders ist der Pol der Ringebene in Bezug auf die Sonne, sie hat die Coordinaten:

$$x = 0, \quad y = r\beta, \quad z = r\frac{\gamma^2 - \delta^2}{\gamma}.$$

§ 8.

Die Axen des leuchtenden Kegelschnittes.

Um uns über die Axen von L genauer zu unterrichten, formen wir den Ausdruck ψ^2 des § 6 etwas um. Es ist

$$\beta\lambda_2 - 1 = \frac{(\beta\lambda_2 - 1)(\beta\lambda_1 - 1)}{\beta\lambda_1 - 1} = \frac{\beta^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\beta + 1}{\beta\lambda_1 - 1} = \frac{\delta^2 - \gamma^2}{\beta\lambda_1 - 1},$$

$$\lambda_2\beta\delta^2 - \gamma^2 = (\lambda_2\beta - 1)\delta^2 + \delta^2 - \gamma^2 = (\delta^2 - \gamma^2)\left(1 + \frac{\delta^2}{\beta\lambda_1 - 1}\right)$$
$$= \frac{(\delta^2 - \gamma^2)(\beta\lambda_1 + \delta^2 - 1)}{(\beta\lambda_1 - 1)},$$

$$\psi^2 = \frac{(\beta\lambda_2 - 1)\beta\lambda_1}{\lambda_2\beta\delta^2 - \gamma^2} = \frac{\beta\lambda_1}{\beta\lambda_1 + \delta^2 - 1} = \frac{1}{1 + \frac{(\delta^2 - 1)\lambda_2}{\beta}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\delta^2 - 1}{\varrho^2} - \frac{(\delta^2 - 1)\iota}{\varrho^2 \cos^2 \varepsilon}} = 1 - \frac{(\delta^2 - 1)\lambda_2}{\beta + (\delta^2 - 1)\lambda_2}.$$

Es ist demnach ψ^2 ein wenig kleiner als Eins und die der x-Axe parallele Halbaxe von L ist:

$$r\delta\sqrt{\left(1 - \frac{(\delta^2 - 1)\lambda_2}{\beta + (\delta^2 - 1)\lambda_2}\right)},$$

sie ist von dem Sonnenradius erst in der sechsten Decimale verschieden, wenn $\varrho = 10\,000$ angenommen wird. Im Mittel ist ϱ noch etwas grösser als $10\,000$, im Perihel etwas kleiner. Der Werth

$$\psi^2 = 1 - \frac{\delta^2 - 1}{\varrho^2}$$

ist von einer Genauigkeit, dessen Fehler sich jeder möglichen Beobachtung entziehen dürfte.

Auf dieselbe Weise ergiebt sich:

$$tg\,(E_l E_r) = \frac{\lambda_2(\gamma^2 - \delta^2)}{\gamma(\beta\lambda_2 - 1)} = -\frac{\beta - \lambda_2}{\gamma} = -ctg\,\varepsilon + \frac{\lambda_2}{\gamma}$$

$$= -ctg\,\varepsilon\left(1 - \frac{1}{\varrho^2}\right) - \frac{\tau}{\varrho\cos\varepsilon\sin\varepsilon},$$

$$\cos^2(E_l E_r) = \gamma^2 : (\varrho^2 - 2\beta\lambda_2 + \lambda_2^2).$$

Das Quadrat der zweiten Halbaxe von L hat den Werth:

$$r\delta_2^2 = \frac{r^2\psi^4\delta^2\gamma^2}{\beta\lambda_1\cos^2(E_l E_r)} = \frac{r^2\psi^4\delta^2(\varrho^2 - 2\beta\lambda_2 + \lambda_2^2)}{\beta\lambda_1}$$

$$= r^2\delta^2\psi^4\frac{\varrho^2 - 2\beta\lambda_2 + \lambda_2^2}{\varrho^2 - \delta^2 + \sin^2\varepsilon + \tau} = r^2\delta^2\psi^4\left(1 + \frac{\delta^2 - 1 - \cos^2\varepsilon + \tau}{\varrho^2 - \delta^2 + \sin^2\varepsilon + \tau}\right).$$

Es ist also auch diese Axe nur wenig kleiner als $r\delta$. Ferner ist mit Vernachlässigung sehr kleiner Grössen

$$\psi^2\left(1 + \frac{\delta^2 - 1 - \cos^2\varepsilon + \tau}{\varrho^2 - \delta^2 + \sin^2\varepsilon + \tau}\right) = 1 - \frac{\cos^2\varepsilon}{\varrho^2 - \delta^2 + \sin^2\varepsilon}$$

etwas kleiner als Eins und

$$r^2\delta_2^2 = r^2\delta_1^2\psi^2\left(1 + \frac{\delta^2 - 1 - \cos^2\varepsilon}{\varrho^2 - \delta^2 + \sin^2\varepsilon}\right)$$

etwas kleiner als $r^2\delta_1^2$, was schon oben ausgesprochen wurde.

§ 9.

Allgemeines über den Schattenriss.

Die Schattenfigur des Saturnringes in irgend einer nicht singulären Ebene E ist eine Curve vierter Klasse mit zwei Doppeltangenten, also eine Curve achter Ordnung mit zwanzig Doppelpunkten. Acht von diesen Doppelpunkten sind natürlich die Schnittpunkte von E mit den vier Doppelkegelschnitten, die übrigen zwölf sind die Schnittpunkte von E mit der Rückkehrkante der Fläche, es sind Rückkehrpunkte.

Der Parameter λ lässt sich stets so einrichten, dass die gegebene Ebene E dem Bündel $H + \lambda R = 0$ angehört, der mit $\varLambda$ bezeichnet werden mag und dessen Gleichung mit $\varLambda = 0$ angesetzt werden kann. Die Fläche $\varLambda$ sei die dem Bündel $\varLambda$ adjungirte Fläche zweiter Ordnung. — Durch eine Gerade p der Ringebene E_r lassen sich zwei Tangentialebenen an $\varLambda$ legen, sie bestimmen in E zwei Strahlen $a\,a'$, die wir ein *Paar* nennen wollen, jeder Geraden in E_r entsprechen so zwei einander gepaarte gerade Linien in E. Ist p Tangente an den Kegelschnitt Ξ_r, den E_r aus $\varDelta$ schneidet, so geht nur eine Tangentialebene durch p, und die Gesammtheit der Tangentialebenen, wenn p die Tangenten von Ξ_r durchläuft, bilden einen Kegel zweiter Ordnung, dessen Spitze der Pol von E_r in Bezug auf $\varDelta$ ist. Den Tangenten von Ξ_r entsprechen daher in E die Tangenten eines Kegelschnittes Ξ, der in ein Geradenpaar ausartet, wenn der Pol von E_r auf E fällt. Der Geraden q, in der sich E_r und E schneiden, entspricht zuerst die Gerade q selbst, indem die eine durch q an $\varDelta$ gelegte Tangentialebene E eben in q trifft. Die zweite Tangentialebene ist aber E selbst, und die q gepaarte Gerade ist deshalb unbestimmt. Legt man aber durch einen Punkt Q auf q einen Strahl p, so gehen die beiden ihm entsprechenden Strahlen $\pi\,\pi'$ durch Q — die Geraden eines beliebigen Paares $\pi\,\pi'$ schneiden sich auf q —; dreht man p stetig in die Lage von q, so rückt der Berührungspunkt der einen Tangentialebene auf $\varDelta$ stetig an den Punkt T heran, in dem E $\varDelta$ berührt, und der Schnitt dieser Tangentialebene mit E nähert sich immer mehr der Geraden QT. Die den Geraden q in E_r entsprechenden Geraden der Ebene E sind also die Gerade q und alle durch T gehenden geraden Linien, so dass q nicht blos einem Paare, sondern unendlich vielen Geraden entspricht. Denkt man sich die Gerade q durch Drehung um einen ihrer Punkte Q erhalten, so findet man als die ihr entsprechende zweite Gerade in E die Gerade QT.

Der Kegelschnitt Ξ_r trifft die Gerade q in denselben Punkten $R\,R'$, in denen q die beiden sich in T treffenden Geraden $TR \equiv r$, $TR' \equiv r'$, die E aus $\varDelta$ schneidet, durchkreuzt. Geht p durch R oder R', so ist von den entsprechenden Strahlen $\pi\,\pi'$ einer ein beständiger, nämlich r bez. r', denn die Ebene pr ist eine Tangentialebene an $\varDelta$, weil sie eine Gerade von $\varDelta$ enthält.

Wird ein Büschel n^{ter} Ordnung in E_r durch die in Rede stehende Beziehung auf E abgebildet, so besitzt das Bild die Strahlen $r\,r'$ als n-fache Strahlen, weil der Büschel n^{ter} Ordnung n Strahlen durch R und n Strahlen durch R' sendet. Die Ordnung des Bildbüschels aber ist $2n$, denn ein linearer Büschel in E bildet sich auf einen quadratischen in E_r ab, und dieser hat mit dem Originalbüschel $2n$ Strahlen gemein, also hat ein linearer Büschel in E mit dem Bildbüschel $2n$ Strahlen gemein.

Das Bild des Saturnringes, sein Schattenriss in der Ebene E, ist demnach eine Curve vierter Klasse, und $r r'$ sind Doppelstrahlen derselben. Die bekannten Plücker'schen Relationen führen hieraus dazu, dass die Curve von der achten Ordnung ist und zwanzig Doppelpunkte hat.

Die Polaren aller Geraden p in E_r durch einen Punkt Q auf q in Bezug auf $\varDelta$ gehen durch einen Punkt, den Pol von E_r und liegen in einer Ebene, sie bestimmen auf dem Kegelschnitte, den die Polarebene von Q aus $\varDelta$ schneidet, eine Involution. Die Tangentialebenen an $\varDelta$ durch die Geraden p bestimmen daher auf einer unter ihnen, also auch auf E eine Involution, die Paare $\pi \pi'$ sind in Involution, die doppelten Strahlen der Involution sind die von Q an $\varXi$ gezogenen Tangenten. Die Strahlenpaare in E sind für den Kegelschnitt $\varXi$ conjugirte Strahlen, deshalb ist der eine durch den andern mittels linearer Constructionen in der Ebene E erhältlich, sobald an $\varXi$ wenigstens fünf Tangenten construirt sind.

Die Strahlen des Büschels vierter Ordnung, der den Schattenriss umhüllt, bestimmen auf den beiden Doppelstrahlen $r r'$ eine zweizweideutige Verwandtschaft, die durch acht Paare bestimmt ist. Die weiteren Strahlen lassen sich dann durch zwei projective lineare Schaaren von Büscheln zweiter Ordnung bestimmen, die $r r'$ und noch je zwei von den acht Strahlen zu Grundstrahlen haben (vgl. meine Untersuchungen über zweizweideutige Verwandtschaften in den Abhandlungen der königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Bd. XXI, S. 439), und die Strahlen des Büschels zweiter Ordnung können daher, wenn r und r' und acht Strahlen gezeichnet sind, durch Constructionen in der Ebene E gefunden werden.

Besondere Fälle sind die, in denen der Pol von E_r in Bezug auf $\varDelta$ auf die Linie q fällt, oder wenn die Ebene E nicht blos $\varDelta$, sondern auch R berührt. (Man vgl. H. Liebmann: Die ein-zweideutigen Punktverwandtschaften der Ebene. Jena 1895.)

§ 10.

Drei S conjugirte Ebenen als Coordinatenebenen.

Wir ändern jetzt das Coordinatensystem ab. Die x-Axe sei der Schnitt der Ebenen $E_r E_l$, auf ihr senkrecht durch die Centrale gehend stehe die $y z$-Ebene, die Symmetrieebene. Die

xy-Ebene ist die Ringebene, die xz-Ebene die des leuchtenden Kegelschnittes. Die beiden Ebenen stehen schief zu einander, jedoch so wenig, dass sie beim Saturnringschattenprobleme wohl ohne Weiteres als rechtwinklig angesehen werden dürften. Die Ebenencoordinaten $u\ v\ w$ sollen auf dieselben Axen bezogen sein.

Die Gleichungen des Ringes und der leuchtenden Scheibe sind alsdann in Punktcoordinaten, wenn der Ring auf der Seite der positiven x gedacht wird:

$$x^2 + (y - r\nu_1)^2 - r^2 = 0\,, \quad \frac{x^2}{\delta_1^2} + \frac{(z - r\nu_2)^2}{\delta_2^2} - r^2 = 0\,.$$

In Ebenencoordinaten sind sie bez.

$$\begin{aligned} R &= r^2u^2 + r^2v^2(r - \nu_1^2) - 2rv\nu_1 - 1 \\ &= r^2u^2 + r^2\left(v - \frac{\nu_1}{r(1-\nu_1^2)}\right)^2(1 - \nu_1^2) - \frac{1}{1-\nu_1^2} = 0\,, \\ L &= r^2\delta_1^2u^2 + r^2(\delta_2^2 - \nu_2^2)w^2 - 2rw\nu_2 - 1 \\ &= r^2\delta_1^2u^2 + r^2(\delta_2^2 - \nu_2^2)\left(w - \frac{\nu_2}{r(\delta_2^2 - \nu_2^2)}\right)^2 - \frac{\delta_2^2}{\delta^2 - \nu_2^2} = 0\,. \end{aligned}$$

In diesem Coordinatensystem kann der analytische Ausdruck für die einzweideutige Verwandtschaft des vorigen Paragraphen leicht erbracht werden. Wir begnügen uns mit dem Falle, dass die Ebene E, deren Coordinaten $u'\ v'\ w'$ sein mögen, parallel zur xz-Ebene liegt, also die Gleichung $yv' + 1 = 0$ hat, so dass $u' = 0$, $w' = 0$ ist. Wird mit $R'\ L'$ der Werth von R bez. L für $u = u'$, $v = v'$, $w = w'$ bezeichnet, so enthält der Bündel

$$\varDelta = RL' - LR' = 0$$

die Ebene $u'\ v'\ w'$. Legt man durch die Gerade $u\,v$ der Ringebene die beiden Ebenen des Bündels, so ist w eine zweiwerthige Function von u und v, und zwar ist

$$w - \frac{\nu_2}{r(\delta_2^2 - \nu_2^2)} = \frac{1}{r\sqrt{\delta_2^2 - \nu_2^2}}\sqrt{\left(R\frac{L'}{R'} - r^2\delta_1^2u^2 + 1\right)}\,,$$
$$L' = -1\,,\quad R' = r^2v'^2(1 - \nu_1^2) - 2rv'\nu_1 - 1\,.$$

Setzt man die negativen reciproken Werthe der Abschnitte, die die Ebenen $u\ v\ w$ in der Ebene $u'\ v'\ w'$ auf der x- und z-Axe bestimmen, bez. gleich U und W, so findet man

$$U = \frac{uv'}{v' - v}, \quad W = \frac{wv'}{v' - v},$$

worin w die oben bestimmte zweiwerthige Function von uv ist, so dass jedem Werthe uv zwei Werthe UW entsprechen. — Umgekehrt aber sind uv rationale Functionen von UW.

§ 11.

Vorschrift zur Modellirung.

Die Erzeugenden der Schattenfläche S bestimmen auf zwei von den Doppelkegelschnitten einander zweizweideutig zugeordnete Punktreihen, und zwar ist die zweizweideutige Verwandtschaft insofern eine specielle, als die den Punkten der einen Reihe entsprechenden Paare der andern Reihe eine (quadratische) Involution bilden, und umgekehrt die den Punkten der zweiten Reihe entsprechenden Paare ebenfalls eine Involution bilden. Legt man durch einen Punkt der x-Axe, des Schnittes von E_r und E_l je eine Tangente an R und L, so bestimmen sie eine Ebene, die beide Kegelschnitte berührt, die Verbindungslinie der Berührungspunkte ist eine Erzeugende. Um also die beiden durch einen Punkt P_r von R gehenden Erzeugenden von S zu construiren, ziehe man durch ihn eine Tangente an R, die die x-Axe in einem Punkte P trifft. Die Polare des Punktes P in Bezug auf L trifft L in zwei Punkten $P_l\,P_l'$ und die Geraden $P_r P_l$, $P_r P_l'$ sind das Paar Erzeugender durch P_r. Den Punkten P_r auf R entsprechen auf L die Paare der Involution, deren Axe die x-Axe, deren Centrum der Pol L_x der x-Axe in Bezug auf L ist. L_x ist eine Ecke des S conjugirten Tetraeders.

Die Tangente des Punktes P_l an L trifft die x-Axe in P, und die Polare dieses Punktes in Bezug auf R trifft R in $P_r P_r'$, diese Punkte sind Paare der Involution auf R, die die x-Axe zur Axe und den Pol R_x derselben in Bezug auf R, eine zweite Ecke des conjugirten Tetraeders, zum Centrum hat. Den Punkten $P_r\,P_r'$ entsprechen also die Punkte $P_l\,P_l'$ und umgekehrt, und die $P_r\,P_r'$ sind Paare einer Involution, $P_l\,P_l'$ Paare einer andern, und beide Involutionen sind einander projectiv zugeordnet. Die Construction entsprechender Paare ist sehr einfach, verbindet man dieselben durch Fäden, die man geradlinig über R und L hinaus verlängert, so erhält man ein Modell der Schattenfläche S.

Einem Punkte der x-Axe ist ein Quadrupel von Erzeugenden, die ein windschiefes Vierseit bilden, eindeutig zugeordnet und das Quadrupel ist durch eine Erzeugende bestimmt. — Nach einer Mittheilung des Herrn Seeliger in den Sitzungsberichten der k. b. Akademie zu München 1894, Heft IV, S. 423 besitzt man Modelle von Schattenflächen, mir ist jedoch noch keins zu Gesicht gekommen.

§ 12.

Vier Kegel vierter Klasse.

Die Ebenen durch P_r und die ihnen zugeordneten Punkte $P_l\,P_l'$ umhüllen einen Kegel, dessen Spitze L_x ist, sie sind den Punkten P auf x einzweideutig zugeordnet. Durch jede L_x treffende Gerade der Ebene E_l gehen zwei Tangentialebenen des Kegels, die Ebene E_l gehört aber selbst zweimal zu den Tangentialebenen des Kegels, sie ist Doppeltangentialebene, weil durch die beiden Schnittpunkte von E_l mit R je zwei in E_l liegende Erzeugende von S gehen. Der Kegel ist daher von der vierten Klasse. Der unendlich ferne Punkt der x-Axe und der Coordinatenanfang, die beiden letzten Ecken des S conjugirten Tetraeders haben in Bezug auf L und R Polaren, die sich schneiden. Die Ebenen dieser Polaren gehören dem Kegel an, es sind die beiden Ebenen des conjugirten Tetraeders, in denen R und L nicht liegen. Ausser den vier Tetraederebenen giebt es weiter keine Ebenen, in denen *vier* Erzeugende von S zugleich liegen.

Durch die z-Axe giebt es nur eine Ebene des Kegels (L_x), die Symmetrieebene E_h, und da die z-Axe keine Erzeugende des Kegels ist, so ist E_h eine Doppeltangentialebene des Kegels, Ebenso ist E_n eine Doppeltangentialebene desselben.

Die Tangentialebenen des Kegels (L_x) bestimmen auf R eine eindreideutige Verwandtschaft. Legt man durch einen Punkt P auf R die beiden Erzeugenden, so ist durch sie eine Tangentialebene des Kegels (L_x) gegeben, die auf R einen P entsprechenden Punkt P' bestimmt. Legt man aber durch einen Punkt P' auf R eine Gerade $P'H$ in E_r, so bestimmt sie mit L_x eine Ebene und durch sie eine Gerade durch L_x. Diese Geraden bestimmen durch ihre Pole auf der x-Axe eine ihnen projective Punktreihe (x), und diese Punkte wiederum bestimmen durch ihre Polaren in Bezug auf R Punktpaare H_1H_2 auf R einer (x)

projectiven Involution. Variirt Π auf R, so sind die Punkte Π den Paaren der Involution $\Pi_1 \Pi_2$ projectiv zugeordnet, und dreimal fallen entsprechende Elemente zusammen. Es giebt also drei Punkte $P\ P_1\ P_2$, deren durch sie gehende Ebenen von Erzeugendenpaaren auch durch P' gehen, es entsprechen P' drei Punkte. Der Directionsbüschel der eindreideutigen Verwandtschaft wird gebildet von den Spuren der Tangentialebenen des Kegels (L_x) in der Ringebene. Die Schnitte der drei andern Tetraederebenen mit R liefern die drei involutorischen Paare der eindreideutigen Verwandtschaft und also die Doppeltangentialebenen des Kegels (L_x). — Da der Kegel drei Doppeltangentialebenen hat, so lässt er sich mittels einer Steiner'schen Verwandtschaft auf einen Kegel zweiter Klasse (zweiter Ordnung) abbilden.

Nennen wir die Erzeugenden durch einen Punkt eines Doppelkegelschnittes ein *Paar*, und die sie enthaltenden Ebenen *Paarebenen*, so erzeugen die Paarebenen den vier Doppelkegelschnitten entsprechend vier Kegel vierter Klasse mit je drei Doppelebenen. Je zwei der Kegel haben zwei der Doppeltangentialebenen gemein, und die Spitzen der Kegel sind die Ecken des S conjugirten Tetraeders.

§ 13.

Darstellung der Ebenencoordinaten der Schattenfläche durch einen Parameter.

Der Tangentialebenenbüschel der Schattenfläche ist das dualistische Gegenstück zu der Raumcurve vierter Ordnung erster Species. Deshalb lassen sich hier die Ebenencoordinaten wie dort die Punktcoordinaten eindeutig durch doppeltperiodische Functionen eines Parameters darstellen. Setzen wir

$$u = U, \quad v - \frac{\nu_1}{r(1-\nu_1^2)} = V, \quad w - \frac{\nu_2}{r(\delta_2^2-\nu_2^2)} = W,$$

so werden die Ebenengleichungen der Schattenfläche in diesen neuen Coordinaten

$$R = r^2U^2 + r^2V^2(1-\nu_1^2) - \frac{1}{1-\nu_1^2} = 0,$$

$$L = r^2\delta_1^2U^2 + r^2W^2(\delta_2^2-\nu_2^2) - \frac{\delta_2^2}{\delta_2^2-\nu_2^2} = 0,$$

und wenn $U_0 V_0 W_0$ ein den Gleichungen genügendes Werthsystem, z. B. wenn

$$U_0 = 0, \quad V_0 = \frac{1}{r(\nu_1^2 - 1)}, \quad W_0 = \frac{\delta_2}{r(\delta_2^2 - \nu_2^2)}$$

ist, und wenn ϑ ein veränderlicher Parameter ist, so drücken sich $U V W$ durch diesen in der Form aus:

$$U = \varphi_1(\vartheta) = \sqrt{U_0^2 + A\vartheta}, \quad V = \varphi_2(\vartheta) = \sqrt{V_0^2 + B\vartheta},$$
$$W = \varphi_3(\vartheta) = \sqrt{W_0^2 + C\vartheta},$$

worin A beliebig,

$$B = \frac{A}{\nu_1^2 - 1}, \quad C = \frac{A\delta_1^2}{\nu_2^2 - \delta_2^2}$$

ist. Will man elliptische Functionen einführen, so empfiehlt es sich, wenn die Ringebene die Sonne nicht trifft, $A = 1 : r^2(\nu_1^2 - 1)$ zu setzen. Dann ist

$$U = \sqrt{A}\sqrt{\vartheta} = \frac{\sqrt{\vartheta}}{r\sqrt{\nu_1^2 - 1}}, \quad V = V_0\sqrt{1 + \vartheta} = \frac{\sqrt{1 + \vartheta}}{r(\nu_1^2 - 1)},$$

$$W = W_0\sqrt{1 + \varkappa'\vartheta} = \frac{\delta_2\sqrt{1 + \varkappa'\vartheta}}{r(\nu_2^2 - \delta_2^2)}, \quad \varkappa' = \frac{\nu_2^2 - \delta_2^2}{\nu_1^2 - 1} \cdot \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}.$$

Setzt man

$$\varkappa = k^2 = 1 - \varkappa' = \frac{\delta_2^2(\nu_1^2 - 1) - \delta_1^2(\nu_2^2 - \delta_2^2)}{\delta_2^2(\nu_1^2 - 1)},$$
$$\vartheta = tga\ t \text{ (modulo } k),$$

so ergiebt sich

$$U = \sqrt{A}\, tga\ t, \quad V = V_0 \frac{1}{ca\ t}, \quad W = W_0 \frac{da\ t}{ca\ t}.$$

Ist $\nu_1^2 < \nu_1^2 + \delta_2^2 - \nu_2^2$, $\nu_2^2 < \delta_2^2$, trifft die Ringebene die leuchtende Scheibe, so ist $k^2 > 1$, und es würde sich die Einführung andrer elliptischer Functionen empfehlen. Für $\delta_2^2(\nu_1^2 - 1) = \delta_1^2(\nu_1^2 - \delta_2^2)$ ist $\varkappa = 0$, für $\nu_2 = \delta_2$ ist $\varkappa = 1$, und die Ebenencoordinaten lassen sich rational durch einen Parameter ausdrücken. Der erste Fall liefert einen Kegel, weil bei ihm L und R zwei Punkte gemein haben. Im zweiten Falle berührt die Ringebene die leuchtende Ebene, die Schattenfläche wird von der sechsten Ordnung. Wir sehen von diesen Fällen hier ab.

Die drei elliptischen Functionen $tga\,t$, $ca\,t$, $da\,t$ haben (in Jacobi's Bezeichnung) die gemeinsamen Perioden $4K$, $4iK'$ und werden unendlich gross für

$$t = K,\quad 3K,\quad K + 2iK',\quad 3K + 2iK',$$

sind also im gemeinsamen Periodenparallelogramme doppeltperiodische Functionen *vierter* Ordnung. Die Summe der Argumentwerthe von vier Ebenen durch einen Punkt ist nach dem Periodicitätsmodulsystem congruent Null. Die vier Ebenen fallen in eine zusammen, wenn

$$t = mK + niK'$$

ist, und wenn m, n die Werthe 0, 1, 2, 3, annehmen. Es giebt 16 solcher Ebenen und ihre Berührungspunkte mit S sind die stationären Punkte der Cuspidalkante von S. Die Sätze, welche Harnack und Herr Lange (Schlömilch's Zeitschrift XVIII) über die Wendeberührungspunkte einer Curve vierter Ordnung aufgestellt haben, finden auf der Fläche S ihr dualistisches Gegenstück in den Tangentialebenen derjenigen uniplanaren Doppelpunkte der Fläche S, die in den Ebenen des conjugirten Tetraeders liegen. Das Interessante aber dabei ist, dass auch die Berührungspunkte[1]), die stationären Punkte der Rückkehrkante selbst zu einer solchen Configuration Anlass geben, worauf wir zurückkommen.

Ist $\nu_2 = 0$, so ist

$$U = \frac{\sqrt{\vartheta}}{r\sqrt{\nu_1^2 - 1}},\quad V = \frac{\sqrt{1+\vartheta}}{r(\nu_1^2 - 1)},\quad W = \frac{1}{r\delta_2}\sqrt{1 - \frac{\delta_1^2}{\nu_1^2 - 1}\vartheta}$$

und man kann nun $\vartheta = -sa^2\,it$

$$U = \frac{i^{\frac{1}{2}} sa\,it}{r\sqrt{\nu_1^2 - 1}},\quad V = \frac{ca\,it}{r(\nu_1^2 - 1)},\quad W = \frac{1}{r\delta_2}\,da\,it,$$
$$k^2 = \delta_1^2 : (\nu_1^2 - 1)$$

setzen. Wegen der Kleinheit des Moduls sind diese Functionen trotz des imaginären Argumentes für numerische Rechnungen wohl brauchbar.

Definirt man XYZ als Coordinaten des Punktes der Träger des linearen Büschels

[1]) Diese Ebenen berühren allerdings S längs einer Erzeugenden, aber in den hier genannten Punkten ist die Berührung am innigsten.

$$XU + YV + ZW + 1 = 0$$

so erhält man in ihnen für die Erzeugenden die Gleichungen:

$$X\sqrt{U_0^2 + A\vartheta} + Y\sqrt{V_0^2 + B\vartheta} + Z\sqrt{W_0^2 + C\vartheta} + 1 = 0\,,$$

$$\frac{XA}{\sqrt{U_0^2 + A\vartheta}} + \frac{YB}{\sqrt{V_0^2 + B\vartheta}} + \frac{ZC}{\sqrt{W_0^2 + C\vartheta}} = 0\,.$$

Die Coordinaten der Schnittpunkte einer derselben mit den Ebenen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ mögen bez. mit X_x, Y_x, Z_x; X_y, Y_y, Z_y; X_z, Y_z, Z_z bezeichnet werden, dann fliessen aus den beiden angesetzten Gleichungen für diese Coordinaten die Werthe:

$$X_x = 0\,, \quad Y_x = \frac{C\sqrt{V_0^2 + B\vartheta}}{BW_0^2 - CV_0^2}\,, \quad Z_x = \frac{B\sqrt{W_0^2 + C\vartheta}}{V_0^2C - W_0^2B}\,,$$

$$X_y = \frac{C\sqrt{U_0^2 + A\vartheta}}{AW_0^2 - CU_0^2}\,, \quad Y_x = 0\,, \quad Z_x = \frac{A\sqrt{W_0^2 + C\vartheta}}{CU_0^2 - AW_0^2}\,,$$

$$X_z = \frac{B\sqrt{U_0^2 + A\vartheta}}{AV_0^2 - BU_0^2}\,, \quad Y_z = \frac{A\sqrt{V_0^2 + B\vartheta}}{BU_0^2 - AV_0^2}\,, \quad Z_z = 0\,.$$

Bildet man das Doppelverhältniss des Schnittes einer Erzeugenden mit den Ebenen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ und der in diesem Coordinatensystem unendlich fernen Ebene, also die Grösse

$$\frac{\infty - Z_x}{Z_y - \infty} : \frac{Z_z - Z_x}{Z_y - Z_z} = \frac{Z_y}{Z_x} = \frac{A(V_0^2C - W_0^2B)}{B(CU_0^2 - AW_0^2)}\,,$$

so findet man, dass dieses Doppelverhältniss von ϑ unabhängig ist. Durch die Grössen $\nu_1\ \nu_2\ \delta_2$ ausgedrückt, unter Annahme der obigen Werthe $U_0 = 0$ u.s.w., hat es den Werth $(BW_0^2 - CV_0^2) : BW_0^2$ gleich

$$k^2 = \varkappa = (\delta_2^2(\nu_1^2 - 1) - \delta_1^2(\nu_2^2 - \delta_2^2)) : (\nu_1^2 - 1)$$

und ist also der Modul der oben eingeführten elliptischen Functionen.

Die Grössen $X\ Y\ Z$ hängen mit $x\ y\ z$ durch die Gleichungen zusammen:

$$x = \frac{X}{1 + \frac{\nu_1}{r(\nu_1^2 - 1)}Y + \frac{\nu_2}{r(\nu_2^2 - \delta_2^2)}Z}\,,$$

$$y = \frac{Y}{1 + \frac{\nu_1}{r(\nu_1^2 - 1)} Y + \frac{\nu_2}{r(\nu_2^2 - \delta_2^2)} Z},$$

$$z = \frac{Z}{1 + \frac{\nu_1}{r(\nu_1^2 - 1)} Y + \frac{\nu_2}{r(\nu_2^2 - \delta_2^2)} Z},$$

$$X = \frac{x}{1 + \frac{\nu_1 y}{r(1 - \nu_1^2)} + \frac{\nu_2 z}{r(\delta_2^2 - \nu_2^2)}},$$

$$Y = \frac{y}{1 + \frac{\nu_1 y}{r(1 - \nu_1^2)} + \frac{\nu_2 z}{r(\delta_2^2 - \nu_2^2)}},$$

$$Z = \frac{z}{1 + \frac{\nu_1 y}{r(1 - \nu_1^2)} + \frac{\nu_2 z}{r(\delta_2^2 - \nu_2^2)}}.$$

Der Nenner der letzten drei Ausdrücke gleich Null gesetzt giebt die Gleichung der Ebene E_n. Die Ebenen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ stimmen bez. mit den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ überein, aber die unendlich ferne Ebene des Systems $X\,Y\,Z$ ist die Ebene E_n. Es lässt sich demnach die Einführung der Grössen $X\,Y\,Z$ als eine Collineation deuten, durch welche die Ebenen des S conjugirten Tetraeders auf die drei Coordinatenebenen und die unendlich ferne Ebene abgebildet werden. $U = 0$ bedeutet alle Ebenen durch den unendlich fernen Punkt der x-Axe, $V = 0$ die Ebenen durch den Punkt

$$x = 0, \quad y = r(\nu_1^2 - 1) : \nu_1, \quad z = 0,$$

und $W = 0$ bedeutet die Ebenen durch den Punkt

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = r(\nu_2^2 - \delta_2^2) : \nu_2,$$

und unendlich grosse Werthe von $U\,V\,W$ bedeuten Ebenen durch den Coordinatenanfang. Diese vier Punkte sind die Ecken des S conjugirten Tetraeders.

Der Modul $\varkappa$ der elliptischen Functionen, durch welche die Ebenencoordinaten der Fläche S dargestellt sind, gewinnt demnach die Bedeutung, dass er das Doppelverhältniss des Schnittes einer beliebigen Erzeugenden mit den Ebenen des conjugirten Tetraeders ist. Da in den Schnittpunkten die Erzeugende viermal von einer andern Erzeugenden getroffen wird, so kann man auch sagen, der Modul sei das Doppelverhältniss der vier Punkte, in denen eine Erzeugende der Fläche S von andern Erzeugenden getroffen wird, und dieses Doppelverhältniss ist von der Wahl jener Erzeugenden unabhängig.

In den Coordinaten $X\,Y\,Z$ sind die Gleichungen der Kegelschnitte $R\,L\,H\,N$ bez.

$$R = X^2 + \frac{Y^2}{1-\nu_1^2} - r^2(1-\nu_1^2) = 0,$$

$$L = \frac{X^2}{\delta_1^2} + \frac{Y^2}{\delta_2^2-\nu_2^2} - \frac{\nu^2(\delta_2^2-\nu_2^2)}{\delta_2^2} = 0,$$

$$H = \frac{Y^2}{\delta_1^2(1-\nu_1^2)} + \frac{Z^2}{\nu_2^2-\delta_2^2} - \frac{r^2(1-\nu_1^2)(\delta_2^2-\nu_2^2)}{\delta_1^2(\delta_2^2-\nu_2^2)-\delta_2^2(1-\nu_1^2)} = 0,$$

$$N = \frac{X^2(1-\nu_1^2)(\delta_2^2-\nu_2^2)}{\delta_2^2(1-\nu_1^2)-\delta_1^2(\delta_2^2-\nu_2^2)} + \frac{Y^2(\delta_2^2-\nu_2^2)}{\delta_2^2(1-\nu_1^2)} + \frac{Z^2(1-\nu_1^2)}{\nu_2^2-\delta_2^2} = 0.$$

Es werde

$$BW_0^2 - CV_0^2 = M_1, \quad CU_0^2 - AW_0^2 = M_2, \quad AV_0^2 - BU_0^2 = M_3$$

gesetzt, so ist

$$X_y = -\frac{C\varphi_1(\vartheta)}{M_2}, \quad X_z = \frac{B\varphi_1(\vartheta)}{M_3}, \quad Y_x = \frac{C\varphi_2(\vartheta)}{M_1},$$

$$Y_z = -\frac{A\varphi_2(\vartheta)}{M_3}, \quad Z_x = -\frac{B\varphi_3(\vartheta)}{M_1}, \quad Z_y = \frac{A\varphi_3(\vartheta)}{M_2},$$

$$AM_1 + BM_2 + CM_3 = 0.$$

Die Gleichungen einer Erzeugenden sind dann:

$$\begin{aligned} X : Y - Y_x : Z - Z_x &= X_y : - Y_x : Z_y - Z_x \\ &= \varphi_1(\vartheta)M_1 : \varphi_2(\vartheta)M_2 : \varphi_3(\vartheta)M_3 \end{aligned}$$

oder mit Anwendung eines Proportionalitätsfactors

$$X = \sigma M_1\varphi_1(\vartheta), \quad Y - Y_x = \sigma M_2\varphi_2(\vartheta), \quad Z - Z_x = \sigma M_3\varphi_3(\vartheta).$$

Es folgt daraus, dass die Lage der Erzeugenden mittels doppeltperiodischer Functionen eindeutig durch einen Parameter bestimmt ist. Betrachtet man die Grössen $X_y\,Y_z$, $Y_x\,Y_z$ als die Coordinaten eines Strahles, so sind die Liniencoordinaten der Schattenfläche als einer Regelschaar unmittelbar durch elliptische Functionen eindeutig bestimmt.

§ 14.

Herleitung der Gleichung der Schattenfläche nach Salmon's Methode.

Die einem Individuum des Bündels $R + \lambda L = 0$ adjungirte Fläche zweiter Ordnung berührt die Schattenfläche. Dasselbe gilt auch von der ihr unendlich nahe benachbarten Fläche, die $R + (\lambda + d\lambda) L = 0$ adjungirt ist, und es schneiden sich diese benachbarten Flächen in einer S angehörenden Curve. Eliminirt man λ aus den Gleichungen der unendlich nahe benachbarten Flächen, so erhält man die Gleichung der Schattenfläche S. Die Adjuncte von $R + \lambda L$ enthält λ im dritten Grade. Setzt man darin $\lambda + d\lambda$ und subtrahirt die ursprüngliche Adjuncte, oder bildet man den Differentialquotienten der Adjuncte nach λ und eliminirt dann λ, d. h. bildet man die Discriminante der Gleichung dritten Grades, so erhält man die Gleichung der Schattenfläche. Setzen wir

$$R = A_{11} U^2 + A_{22} V^2 + A_{44}; \quad L = B_{11} U^2 + B_{33} W^2 + B_{44},$$

so ist die Gleichung der dem Bündel $R + \lambda L = 0$ adjungirten Fläche

$$- \begin{vmatrix} 0 & X & Y & Z & 1 \\ X & A_{11} + \lambda B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ Y & 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ Z & 0 & 0 & \lambda B_{33} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & A_{44} + \lambda B_{44} \end{vmatrix} =$$

$$X^2 A_{22} B_{33} (A_{44} + \lambda B_{44}) \lambda + Y^2 (A_{44} + \lambda B_{44}) \lambda B_{33} (A_{11} + \lambda B_{11})$$
$$+ Z^2 A_{22} (A_{44} + \lambda B_{44})(A_{11} + \lambda B_{11}) - A_{22} \lambda B_{33} (A_{11} + \lambda B_{11}) = 0,$$

oder nach Potenzen von λ geordnet

$$\begin{aligned} 0 = \lambda^3 \; & B_{11} B_{33} B_{44} Y^2 + A_{11} A_{22} A_{44} Z^2 \\ & + \lambda^2 (A_{22} B_{33} B_{44} X^2 + (A_{11} B_{33} B_{44} + A_{44} B_{11} B_{33}) Y^2 \\ & \qquad\qquad + A_{22} B_{11} B_{44} Z^2 + A_{22} B_{11} B_{33}) \\ & + \lambda (A_{22} A_{44} B_{33} X^2 + A_{11} A_{44} B_{33} Y^2 \\ & \qquad\qquad + (A_{22} A_{44} B_{11} + A_{11} A_{22} B_{44}) Z^2 + A_{11} A_{22} B_{33}) \\ & \qquad\qquad + Z^2 A_{11} A_{22} A_{44}, \end{aligned}$$

$$A_{11} = r^2 \qquad A_{22} = r^2 (1 - \nu_1^2) \qquad A_{44} = 1 : (\nu_1^2 - 1$$
$$B_{11} = r^2 \delta_1^2 \qquad B_{33} = r^2 (\delta_2^2 - \nu_2^2) \qquad B_{44} = \delta_2^2 : (\nu_2^2 - \delta_2^2)$$

zu setzen ist. Zur Abkürzung schreiben wir

$$\lambda^3 C_{32} Y^2 + \lambda^2 (C_{21} X^2 + C_{22} Y^2 + C_{23} Z^2 + C_{24})$$
$$+ \lambda (C_{11} X^2 + C_{12} Y^2 + C_{13} Z^2 + C_{14}) + C_{03} Z^2 = 0 .$$

Die Gleichung der Schattenfläche ist alsdann

$$\begin{aligned}(9\, C_{32} C_{03} Y^2 Z^2 - (C_{21} X^2 + C_{22} Y^2 + C_{23} Z^2 + C_{24}) \\ \times (C_{11} X^2 + C_{12} Y^2 + C_{13} Z^2 + C_{14}))^2 \\ + 4\, ((C_{21} X^2 + C_{22} Y^2 + C_{23} Z^2 + C_{24})^2 \\ - 3\, C_{32} Y^2 (C_{11} X^2 + C_{12} Y^2 + C_{13} Z^2 + C_{14})) \\ \times (3\, C_{03} Z^2 (C_{21} X^2 + C_{22} Y^2 + C_{23} Z^2 + C_{24}) \\ - (C_{11} X^2 + C_{12} Y^2 + C_{13} Z^2 + C_{14})^2) = 0 .\end{aligned}$$

Setzt man $Z = 0$, so ergiebt sich die Gleichung der Schnittcurve mit der XY-Ebene, sie lautet

$$(C_{11} X^2 + C_{12} Y^2 + C_{14})^2$$
$$\times (12\, C_{32} Y^2 (C_{11} X^2 + C_{12} Y^2 + C_{14}) - 3 (C_{21} X^2 + C_{22} Y^2 + C_{24})^2) = 0 ,$$
$$C_{11} = - B_{33} r^2 , \quad C_{12} = - B_{33} r^2 : (1 - \nu_1^2) ,$$
$$C_{14} = B_{33} r^4 (1 - \nu_1^2) .$$

Der erste im Quadrat stehende Factor ist von einem constanten Multiplicator abgesehen gleich

$$\left(X^2 + \frac{Y^2}{1 - \nu_1^2} - r^2 (1 - \nu_1^2) \right)^2$$

und bedeutet gleich Null gesetzt den Kegelschnitt R doppelt gezählt. Dass sich der andre in vier lineare Factoren spalten lässt, ist schon von SALMON ausgesprochen worden. Das von XYZ freie Glied hat den Werth

$$C_{14}^2 C_{24}^2 - 4\, C_{14}^3 C_{24}^2 = - 3\, A_{11}^2 B_{11}^2 A_{22}^4 B_{33}^4 ,$$

der Coefficient von X^2 ist multiplicirt mit

$$C_{11}^2 C_{21}^2 - 4\, C_{11}^3 C_{24}^2 = - 3\, A_{11}^2 B_{14}^2 A_{22}^4 B_{22}^4 .$$

Am complicirtesten ist der Coefficient von $X^2 Y^2 Z^2$. Uebrigens hat SALMON die Gleichung nach Potenzen von XYZ geordnet vollständig ausgeschrieben für den Fall angegeben, dass der unendlich ferne Kegelschnitt der absolute Kugelkreis ist. Man könnte daraus leicht zum allgemeinen Fall gelangen, wenn man für die Coordinaten ihnen proportionale einführte, allerdings mit Zulassung imaginärer Proportionalitätsfactoren. Wir wollen jedoch zur Erlangung der Gleichung einen andern Weg einschlagen, der auf directer Elimination des Parameters aus der Gleichung einer Erzeugenden beruht.

§ 15.

Zweite Methode zur Herleitung der Schattenflächengleichung.

Um die Gleichung der Fläche unmittelbar aus den Gleichungen einer Erzeugenden zu erlangen, lassen wir die Kegelschnitte RL allgemeine sein, wodurch eine cyklische Schreibweise ermöglicht wird, was eine willkommene Abkürzung gestattet.

Wir fanden

$$U = \sqrt{U_0^2 + A\vartheta} = \varphi_1(\vartheta)\,, \quad V = \sqrt{V_0^2 + B\vartheta} = \varphi_2(\vartheta)\,,$$
$$W = \sqrt{W_0^2 + C\vartheta} = \varphi_3(\vartheta)\,,$$

und setzen jetzt für $U_0\, V_0\, W_0\; ABC$ nicht ihre aus den Gleichungen $R = 0$, $L = 0$ hervorgehenden Werthe ein, sondern lassen sie allgemein sein. Die Grössenbezeichnung

$$M_1 = BW_0^2 - CV_0^2\,, \quad M_2 = CU_0^2 - AW_0^2\,, \quad M_3 = AV_0^2 - BU_0^2$$

behalten wir bei. Unter $C_s f(A,\, U,\, M_1,\, X)$ verstehen wir eine cyklische Summe, in der $f(A,\, U,\, M_1,\, X)$ Anfangsglied ist, aus dem die übrigen durch gleichzeitige cyklische Vertauschung von ABC, von $U_0\, V_0\, W_0$, $M_1\, M_2\, M_3$ und von XYZ hervorgehen, so dass z. B. $C_s A Y^2 = AY^2 + BZ^2 + CX^2$ ist.

Die Gleichungen einer Erzeugenden sind

$$E(\vartheta) = 1 + C_s X\varphi_1(\vartheta) = X\varphi_1(\vartheta) + Y\varphi_2(\vartheta) + Z\varphi_3(\vartheta) + 1 = 0\,,$$
$$E'(\vartheta) = C_s \frac{XA}{\varphi_1(\vartheta)} = \frac{AX}{\varphi_1(\vartheta)} + \frac{BY}{\varphi_2(\vartheta)} + \frac{CZ}{\varphi_3(\vartheta)} = 0\,.$$

Durch Elimination von je einer Coordinate fliessen aus ihnen die drei Gleichungen

$$\frac{YM_3}{\varphi_2(\vartheta)} - \frac{ZM_2}{\varphi_3(\vartheta)} + A = 0\,, \quad \frac{ZM_1}{\varphi_3(\vartheta)} - \frac{XM_3}{\varphi_1(\vartheta)} + B = 0\,,$$
$$\frac{XM_2}{\varphi_1(\vartheta)} - \frac{YM_1}{\varphi_2(\vartheta)} + C = 0\,,$$

von denen die eine eine Folge der andern ist. Denn multiplicirt man ihre linken Seiten bez. mit $M_1\, M_2\, M_3$ und addirt, so ergiebt die Summe identisch Null. Mittels dieser Gleichungen drücken wir $X\,Y$ durch Z aus, quadriren die so erhaltenen Ausdrücke und gewinnen die Relationen

$$Y^2 M_3^2 = A^2 \varphi_2^2(\vartheta) + \frac{Z^2 M_2^2 \varphi_2^2(\vartheta)}{\varphi_3^2(\vartheta)} - \frac{2 A M_2 Z \varphi_2^2(\vartheta)}{\varphi_3(\vartheta)},$$

$$X^2 M_3^2 = B^2 \varphi_1^2(\vartheta) + \frac{Z^2 M_1^2 \varphi_1^2(\vartheta)}{\varphi_3^2(\vartheta)} + \frac{2 B M_1 Z \varphi_1^2(\vartheta)}{\varphi_3(\vartheta)}.$$

Um aus diesen Gleichungen den Parameter ϑ zu eliminiren, setzen wir erst $\varphi_3^2(\vartheta) = W_0^2 + C\vartheta = s^2$, $\vartheta = (s^2 - W_0^2) : C$, so erhalten wir

$$X^2 M_3^2 =$$

$$\frac{B^2 (U_0^2 C - W_0^2 A)}{C} + \frac{A B^2 s^2}{C} + \frac{Z^2 M_1^2}{s^2}\left(\frac{U_0^2 C - W_0^2 A}{C} + \frac{A^2 s^2}{C}\right)$$

$$+ \frac{2 B M_1 Z}{s}\left(\frac{U_0^2 C - W_0^2 A}{C} + \frac{A s^2}{C}\right),$$

$$X^2 M_3^2 C s^2 = B^2 M_2 s^2 + A B^2 s^4 + M_1^2 M_2 Z^2 + A M_1^2 Z^2 s^2 +$$
$$2 M_1 M_2 B Z s + 2 Z A B M_1 s^3$$

oder

$$\text{I)}\quad M_1^2 M_2^2 Z^2 + 2 B M_1 M_2 Z s + (B^2 M_2 + A M_1^2 Z^2 - C M_3^2 X^2) s^2$$
$$+ 2 A B M_1 Z s^3 + A B^2 s^4 = 0,$$

und

$$\text{II)}\quad - M_1 M_2^2 Z^2 + 2 A M_1 M_2 Z s + (B M_2^2 Z^2 - C M_3^2 Y^2 - A^2 M_1) s^2$$
$$- 2 A B M_2 Z s^2 + A^2 B s^4 = 0.$$

Mittels der Combination I. A — II. B entfernen wir s^4 und erhalten

$$(A B (B M_2 + A M_1) + Z^2 (A^2 M_1^2 - B^2 M_2^2) - X^2 A C M_3^2 - Y^2 B C M_3^2) s^2$$
$$+ M_1 M_2 (A M_1 + B M_2) Z^2 + 2 A B Z (A M_1 + B M_2) s^3$$
$$= - C M_1 M_2 M_3 Z^2 - 2 A B C M_3 Z s^3$$
$$- (A B C M_3 + C (A M_1 - B M_2) M_3 Z^2 + A C M_3^2 X^2 + B C M_3^2 Y^2) s^2$$
$$= 0.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$Q = (A M_1 - B M_2) Z^2 + (A X^2 - B Y^2) M_3$$

und dividiren die Gleichung mit $- C M_3$, so erhalten wir

$$\text{III)}\qquad M_1 M_2 Z^2 + (A B + Q) s^2 + 2 A B Z s^3 = 0.$$

Die Combination I. M_2 + II. M_1 giebt weiter

$$2M_1M_2(AM_1+BM_2)Zs + AB(AM_1+BM_2)s^4$$
$$+ (B^2M_2 - A^2M_1 + M_1M_2(AM_1+BM_2)Z^2 - CM_2M_3^2X^2$$
$$- CM_1M_3^2Y^2)s^2 \, .$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$P = M_2M_3X^2 + M_1M_3Y^2 + M_1M_2Z^2 = C_sM_2M_3X^2$$

und dividiren die Gleichung mit $-CM_3s$, so erhalten wir

IV) $$2M_1M_2Z + (BM_1 - AM_2 + P)s + ABs^3 = 0 \, .$$

Die Gleichungen III) und IV) bedeuten Hyperboloidschaaren, die sich in Erzeugenden von S schneiden. Es seien

$$D_1 = BM_2 - CM_3 \, , \quad D_2 = CM_3 - AM_1 \, , \quad D_3 = AM_1 - BM_2$$

weitere Abkürzungen, zwischen ihnen besteht die Gleichung

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0 \, .$$

Eliminirt man aus III) und IV) den Parameter s, so erhält man die Gleichung der Schattenfläche S.

§ 16.

Elimination nach der Bézout'schen Methode.

Sind die beiden Gleichungen gegeben

$$a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 = 0$$
$$b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3 = 0$$

und wird $d_{ik} = a_ib_k - a_kb_i$ gesetzt, so ist nach Bézout die Resultante der beiden Gleichungen

$$\begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} & d_{03} \\ d_{02} & d_{03}+d_{12} & d_{13} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} \end{vmatrix} = d_{01}d_{03}d_{23} + d_{01}d_{12}d_{23} + 2d_{02}d_{03}d_{13}$$
$$- d_{01}d_{13}^2 - d_{23}d_{02}^2 - d_{12}d_{03}^2 - d_{03}^3 \, .$$

Mittels der Identität

$$d_{01}d_{23} + d_{12}d_{03} - d_{02}d_{13} = 0$$

lassen sich die drei Glieder

$$d_{03}(d_{01}d_{02} + 2d_{02}d_{13} - d_{12}d_{03})$$

in $$d_{03}(2d_{01}d_{23} + d_{02}d_{13})$$

zusammenziehen, so dass die Resultante die Form gewinnt

$$d_{03}(2d_{01}d_{23} + d_{02}d_{13}) + d_{01}d_{12}d_{23} - d_{01}d_{13}^2 - d_{23}d_{02}^2 - d_{03}^3 \, ,$$

in unserem Falle, wo $a_1 = 0$, $b_2 = 0$ ist, wird

$$d_{01} = M_1 M_2^2 Z^2 (P - D_3)\,, \qquad d_{02} = 2 M_1 M_2 Z (AB + Q)\,,$$
$$d_{03} = -3 ABM_1 M_2 Z^2\,, \qquad d_{12} = -(AB + Q)(P - D_3)\,,$$
$$d_{13} = -2 ABZ(P - D_3)\,, \qquad d_{23} = AB(AB + Q)\,,$$
$$d_{01} d_{23} = ABM_1 M_2 Z^2 (AB + Q)(P - D_3)\,,$$
$$d_{02} d_{13} = 4 ABM_1 M_2 Z^2 (AB + Q)(P - D_3)\,.$$

Nun ist die Resultante leicht zu bilden. Sie hat den Factor Z^2, den wir unterdrücken, und um den Ausdruck cyklisch zu machen, multipliciren wir ihn noch mit $-M_1 M_2 : AB$, so finden wir als Gleichung der Fläche

$$18 ABM_1^3 M_2^3 Z^2 (AB + Q)(P - D_3) + M_1^2 M_2^2 (P - D_3)^2 (AB + Q)$$
$$+ 4 M_1^2 M_2^2 ABZ^2 (P - D_3)^3 + 4 M_1^3 M_2^3 (AB + Q)^3$$
$$- 27 A^2 B^2 M_1^4 M_2^4 Z^2 = 0\,.$$

Das von XYZ freie Glied ist

$$A^2 B^2 M_1^2 M_2^2 D_3^2 + 4 M_1^3 M_2^3 A^3 B^3 = A^2 B^2 M_1^2 M_2^2 (4 ABM_1 M_2 + D_3^2)$$
$$= A^2 B^2 M_1^2 M_2^2 (AM_1 + BM_2)^2 = A^2 B^2 C^2 M_1^2 M_2^2 M_3^2\,.$$

Es bleibt ungeändert bei cyklischer Vertauschung, dies muss, weil die erzeugende Ebene die Coordinaten und die Grössen ABC und $U_0 V_0 W_0$ cyklisch enthält, für die ganze Flächengleichung stattfinden. Uebrigens ändert sich die erzeugende Ebene nicht, wenn man X mit Y, A mit B, U_0 mit V_0 vertauscht, es wird sich also bei diesen Vertauschungen auch die Flächengleichung nicht ändern, wobei zu beachten ist, dass bei dieser Vertauschung M_1 in $-M_2$, M_2 in $-M_1$, M_3 in $-M_3$ übergeht, D_0 aber bleibt ungeändert. Da in der Gleichung der Schattenfläche die Coordinaten nur als Quadrate vorkommen, so enthält sie 35 Glieder, von denen das freie und das $X^2 Y^2 Z^2$ enthaltende Glied bei cyklischer Vertauschung in sich selbst übergehen. Die übrigen ordnen sich in elf dreigliedrige Gruppen, deren Glieder aus dem ersten durch cyklische Vertauschung erhalten werden. Die Anfangsglieder dieser Gruppen enthalten die Coordinatenpotenzen

$$X^2,\quad X^4,\quad X^2 Y^2,\quad X^6,\quad X^4 Y^2,\quad X^4 Z^2,\quad X^8,\quad X^6 Y^2,$$
$$X^6 Z^2,\quad X^4 Y^4,\quad X^4 Y^2 Z^2\,;$$

die zu $X^4 Y^2$, $X^4 Z^2$ gehörenden Gruppen, ebenso die zu $X^6 Y^2$

$X^6 Z^2$ gehörenden gehen noch aus einander durch eine nichtcyklische Vertauschung hervor.

§ 17.

Die Gleichung der Schattenfläche S in den Coordinaten XYZ.

Die Glieder achter Dimension der Gleichung für S werden von dem Ausdrucke gebildet

$$M_1^2 M_2^2 P^2 (Q^2 + 4ABPZ^2) =$$

$$M_1^2 M_2^2 P^2 \begin{Bmatrix} M_3^2(A^2X^4 - 2ABX^2Y^2 + B^2Y^4) + 2M_3 D_3 Z^2(AX^2 - BY^2) \\ + D_3 Z^4 + 4ABZ^2(X^2 M_2 M_3 + Y^2 M_3 M_1 + Z^2 M_1 M_2) \end{Bmatrix}$$

$$= M_1^2 M_2^2 M_3^2 P^2 (A^2X^4 + B^2Y^4 + C^2Z^4 - 2ABX^2Y^2 - 2BCY^2Z^2 - 2ACX^2Z^2).$$

Der geklammerte Ausdruck zerfällt in vier lineare Factoren von der Form

$$X\sqrt{A} \pm Y\sqrt{B} \pm Z\sqrt{C}.$$

Die im System XYZ unendlich ferne Ebene schneidet aus der Fläche einen doppelt zu zählenden Kegelschnitt und vier gerade Linien aus. Der Schnitt ist das Bild des Kegelschnittes N und der in der Ebene E_u oben bestimmten vier Geraden in der zwischen xyz und XYZ bestehenden collinearen Verwandtschaft. Will man die Glieder achter Dimension nach Potenzen und Producten von XYZ ordnen, so erhält man fünfzehn Glieder, die man in der Form anschreiben kann

$$M_1^2 M_2^2 M_3^2 C_s \begin{Bmatrix} A^2 M_2^2 M_3^2 X^8 + 2AM_2 M_3^2 D_3 X^6 Y^2 \\ - 4ABM_1 M_2 M_3^2 X^4 Y^4 - 2AM_2^2 M_3 D_2 X^6 Z^2 \\ - 2BCM_2^2 M_3^2 X^4 Y^2 Z^2 \end{Bmatrix}.$$

Ist zur augenblicklichen Abkürzung $Q^0\, P^0$ das, was aus Q und P für $Z = 0$ wird, so erhalten wir die Gleichung des Schnittes mit der XY-Ebene in dem Ausdrucke

$$0 = M_1^2 M_2^2 (AB + Q^0)^2 (C^2 M_3^2 - 2D_3 P^0 + P^0 P^0 + 4M_1 M_2 Q^0)$$

$$= M_1^2 M_2^2 M_3^2 (AB + Q^0)^2$$

$$\times (X^4 M_2^2 + Y^4 M_1^2 + 2X^2 Y^2 M_1 M_2 + C^2 - 2CM_2 X^2 + 2CM_1 Y^2).$$

Der geklammerte Ausdruck lässt sich in vier lineare Factoren von der Form zerlegen

$$X\sqrt{-M_2} \pm Y\sqrt{M_1} \pm \sqrt{-C},$$

und bedeutet vier gerade Linien. Setzt man in $AB+Q^0$ für ABU_0V_0 die Werthe des § 13 ein, so folgt

$$AB+Q^0 = AB + M_3(AX^2 - BY^2)$$

$$= \frac{A^2}{r^2(\nu_1^2-1)^2}\left(r^2(\nu_1^2-1)+X^2-\frac{Y^2}{\nu_1^2-1}\right)$$

$$= A^2\left(\frac{1}{\nu_1^2-1}+\frac{X^2}{r^2(\nu_1^2-1)^2}-\frac{Y^2}{r^2(\nu_1^2-1)^3}\right),$$

gleich Null gesetzt ist dies die Gleichung des Ringes R.

Der Coefficient von X^6 ist

$$2M_1^2M_2^2M_3^2(A^2BM_2^2M_3 - A^2CM_3^2M_1) = 2A^2M_1^2M_2^3M_3^3D_1,$$

der Coefficient von $2X^4Y^2M_1^2M_2^2M_3^2$ ist

$$M_3(A^2CM_1M_3 + 2ABCM_2M_3 + 2A^2BM_1M_2 - AB^2M_2^2$$
$$= M_3(A^2CM_1M_3 - 3AB^2M_2^2).$$

Um das zu erhalten, was mit X^4Z^2 multiplicirt ist, vertauscht man B mit C, M_2 mit $-M_3$, M_3 mit $-M_2$, M_1 mit $-M_1$ und findet so den Coefficienten

$$-2M_2(A^2BM_1M_2 - 3AC^2M_3^2)M_1^2M_2^2M_3^2.$$

So lassen sich die Glieder sechster Dimension, von dem sich selbst cyklischen abgesehen, in der Form anschreiben

$$2M_1^2M_2^2M_3^2C_s\begin{Bmatrix} A^2D_1X^6 + AM_3(ACM_1M_3 - 3B^2M_2^2)X^4Y^2 \\ -AM_2(ABM_1M_2 - 3C^2M_3^2)X^4Z^2 \end{Bmatrix}.$$

Der Coefficient von $X^4M_1^2M_2^2M_3^2$ ist

$$A^2B^2M_2^2 - 4A^2BCM_2M_3 + A^2C^2M_3^2$$
$$= A^2(B^2M_2^2 + C^2M_3^2 - 4BCM_2M_3)$$
$$= A^2((BM_2+CM_3)^2 - 6BCM_2M_3) = A^2(A^2M_1^2 - 6BCM_2M_3).$$

Der Coefficient von $2X^2Y^2M_1^2M_2^2M_3^2$ ist

$$-ABC^2M_3^2 + 2A^2BCM_1M_3 + AB^2CM_2M_3 + A^2B^2M_1M_2$$
$$= -3ABC^2M_3^2 + A^2B^2M_1M_2 = AB(ABM_1M_2 - 3C^2M_3^2).$$

Die Glieder vierter Ordnung der Flächengleichung sind demnach

$$M_1^2M_2^2M_3^2 \times$$
$$C_s(A^2(A^2M_1^2 - 6BCM_2M_3)X^4 + 2AB(ABM_1M_2 - 3C^2M_3^2)X^2Y^2).$$

Die Glieder zweiter Dimension sind

$$-2 M_1^2 M_2^2 M_3^2 C_s A^2 B C X^2 .$$

Der Coefficient von $X^2 Y^2 Z^2$ wird von den Gliedern

$$18 A B M_1^3 M_2^3 P Q Z^2 + 2 M_1^2 M_2^2 P Q (A B P - D_3 Q)$$
$$- 12 M_1^2 M_2^2 A B D_3 P^2 Z^2 - 24 A B M_1^3 M_2^3 D_3 M_3^2 X^2 Y^2 Z^2$$

der Flächengleichung geliefert, und zwar geben das erste, dritte und letzte Glied den Beitrag $-30 A B M_1^3 M_2^3 M_3^2 D_3$, das zweite Glied aber giebt dazu einen Beitrag, dessen einer Factor $M_1^2 M_2^2 M_3^2$ ist, der andere ist gleich

$$2 M_2 (A M_1 + D_3)^2 B + 2 D_3 (A B M_1 M_2 - D_3^2) - 2 A M_1 (D_3 - B M_2)^2$$
$$= 2 A^2 B M_1^2 M_2 - 2 A B^2 M_1 M_2^2 + 10 A B M_1 M_2$$
$$+ 2 (B M_2 - A M_1) D_3^2 - 2 D_3^3 = 12 A B M_1 M_2 D_3 - 4 D_3^2 .$$

Wenn man darin D_3^3 durch $D_3 (A^2 M_1^2 + B^2 M_2^2 - 2 A B M_1 M_2)$ ersetzt, so findet man für den Coefficienten von

$$2 M_1^2 M_2^2 M_3^2 X^2 Y^2 Z^2$$

den Werth

$$-5 A B M_1 M_2 D_3 - 2 D_3 (A^2 M_1^2 + B^2 M_2^2)$$
$$= - D_3 (A B M_1 M_2 + 2 C^2 M_3^2) .$$

Nun ist $D_1 D_2 = (B M_2 - C M_3)(C M_3 - A M_2)$

$$= - C^2 M_3^2 + A C M_1 M_3 + B C M_2 M_3 - A B M_1 M_2$$
$$= - 2 C^2 M_3^2 - A B M_1 M_2 ,$$

und folglich ist der Coefficient von $X^2 Y^2 Z^2$ in der Flächengleichung gleich $2 M_1^2 M_2^2 M_3^2 D_1 D_2 D_3$.

Nachdem nun alle Coefficienten erbracht sind, erkennt man, dass in der gefundenen Flächengleichung noch der Factor $M_1^2 M_2^2 M_3^2$ sich vorfindet. Mit Unterdrückung desselben lautet die Gleichung für S

$$S = 0 =$$

$$C_s \left\{ \begin{array}{l} A^2 M_2^2 M_3^2 X^8 + 2 A M_2 M_3^2 D_3 X^6 Y^2 - 4 A B M_1 M_2 M_3^2 X^4 Y^4 \\ \quad - 2 A M_2^2 M_3 D_2 X^6 Z^2 - 2 B C M_2^2 M_3^2 X^4 Y^2 Z^2 \end{array} \right\}$$
$$+ 2 C_s \left\{ \begin{array}{l} A^2 M_2 M_3 D_1 X^6 + A M_3 (A C M_1 M_3 - 3 B^2 M_2^2) X^4 Y^2 \\ \quad - A M_2 (A B M_1 M_2 - 3 C^2 M_3^2) X^4 Z^2 \end{array} \right\}$$
$$+ C_s (A^2 (A^2 M_1^2 - 6 B C M_2 M_3) X^4 + 2 A B (A B M_1 M_2 - 3 C^2 M_3^2) X^2 Y^2)$$
$$- 2 C_s A^2 B C D_1 X^2 + 2 D_1 D_2 D_3 X^2 Y^2 Z^2 + A^2 B^2 C^2 .$$

Verfügt man über die Grössen $U_0 V_0 W_0$ so, dass $M_1 = M_2 = M_3 = 1$, $D_1 = B - C$, $D_2 = C - A$, $D_3 = A - B$ wird (womit man natürlich das eigentliche Sonne-Saturnringschattenproblem verlässt), so wird der im System XYZ unendlich ferne Doppelkegelschnitt der Fläche S der absolute Kugelkreis, und man gelangt dadurch zu dem von Salmon bereits gegebenen Falle. Es ist eine willkommene Controle für unsere Rechnung, dass dann die Gleichung $S = 0$ mit der von Salmon (Salmon-Fiedler, Geometrie der Curven und Flächen im Raume, Leipzig 1865, pag. 619) für diesen Fall gegebenen Gleichung völlig übereinstimmt.

Das Umsetzen dieser Gleichung in die Coordinaten xyz mittels der Gleichungen des § 13 ist natürlich etwas mühsam, aber bei einiger Geduld, wenn es sich als nöthig erweisen sollte, durchführbar. Diese Coordinaten sind beim Schattenproblem des Saturnringes so nahe rechtwinklige, dass die Abweichung des Winkels xz von einem Rechten wohl unter den astronomisch messbaren Grössen bleibt. Sollten genau rechtwinklige Coordinaten verwendet werden, wozu ein Zwang sich wohl kaum je ergeben dürfte, so würde das Anordnen der Schattenflächengleichung nach Potenzen und nach Producten dieser Coordinaten sich natürlich noch etwas mehr compliciren. In einer Abhandlung über das Saturnringschattenproblem in den Sitzungsberichten der k. k. Academie der Wissenschaften in Wien (math.-naturwissenschaftliche Classe Band CIV Abtheilung II, 1895) hat Herr Buchholz es sich gerade zur Aufgabe gemacht, die wie er sagt strenge, das will nach ihm sagen die nach Potenzen und Producten geordnete Gleichung der Schattenfläche in rechtwinkligen Coordinaten aufzustellen. Zu der Ansicht gelangend, dass die vollständige Berechnung der Coefficienten theils sehr mühsam, theils ohne Nutzen sei, begnügt sich Herr Buchholz damit, wenigstens einige derselben auszurechnen. Da er aber den Radius des Saturnringes sowohl, als auch die eine Coordinate des Sonnenmittelpunktes mit demselben Buchstaben r bezeichnet hat, und da diese im wörtlichen Sinne himmelweit von einander verschiedenen Grössen in den Rechnungsresultaten nicht von einander unterschieden sind, so dass es sogar den Anschein hat, als ob Producte derselben zu Potenzen zusammengezogen seien, so sind deshalb die Rechnungsresultate unbrauchbar. Wenn Herr Buchholz den Werth seiner Arbeit darin findet, dass sie einen Einblick in die complicirte Natur des Problems gewähre, so darf das nicht dahin missverstanden werden, als ob die Arbeit die Einsicht in das complicirte Problem fördere, sondern vielmehr dahin, dass der Verfasser nur zu der Einsicht gelangt ist, dass das Problem ein complicirtes sei.

§ 18.

Die Constanten der Schattenfläche S.

Von den Grössen $U_0\, V_0\, W_0$, ABC ist je eine willkürlich. Wir setzten schon oben $U_0 = 0$, $B = V_0^2$, so ist

$$U_0 = 0\,, \quad V_0 = \frac{1}{r(\nu_1^2 - 1)}\,, \quad W_0 = \frac{\delta_2}{r(\nu_2^2 - \delta_2^2)}\,,$$

$$A = \frac{1}{r^2(\nu_1^2 - 1)}\,, \quad B = \frac{1}{r^2(\nu_1^2 - 1)^2} = V_0^2\,,$$

$$C = \frac{\delta_1^2}{r^2(\nu_1^2 - 1)(\nu_2^2 - \delta_2^2)} = \varkappa' W_0^2\,,$$

$$\frac{C}{W_0^2} = \varkappa' = \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}\,\frac{\nu_2^2 - \delta_2^2}{\nu_1^2 - 1}\,, \quad \varkappa = \frac{\delta_2^2(\nu_2^2 - 1) - \delta_1^2(\nu_2^2 - \delta_2^2)}{\delta_2^2(\nu_1^2 - 1)}\,,$$

$$M_1 = V_0^2 W_0^2 \varkappa\,, \quad M_2 = -A W_0^2\,, \quad M_3 = A V_0^2\,,$$

$$D_1 = -ABW_0^2 - ACV_0^2 = -AV_0^2W_0^2(1+\varkappa)\,,$$

$$D_2 = CM_3 - AM_1 = \varkappa' A V_0^2 W_0^2 - AV_0^2W_0^2\varkappa = AV_0^2W_0^2(1-2\varkappa)\,,$$

$$D_3 = AM_1 - BM_2 = AV_0^2W_0^2\varkappa + AV_0^2W_0^2 = AV_0^2W_0^2(1+\varkappa)\,.$$

$1:\sqrt{A}$, $1:V_0$, $1:W_0$ sind Linienstrecken, ABC sind von der 2ten, $M_1\,M_2\,M_3$ von der 4ten, $D_1\,D_2\,D_3$ von der 6ten Dimension. Ersetzt man AX^2, $V_0^2Y^2$, $W_0^2Z^2$ bez. durch $\mathfrak{x}^2$, $\mathfrak{y}^2$, $\mathfrak{z}^2$ so erhält man die Gleichung einer Fläche, deren Coefficienten einzig von $\varkappa$ abhängen, und diese Fläche ist S collinear. Nach Unterdrückung des Factors $A^2V_0^4W_0^4$ ergiebt sich für sie die Gleichung

$$\begin{aligned}
&(-\mathfrak{x}^2 + \varkappa\mathfrak{y}^2 - \varkappa\mathfrak{z}^2)^2(\mathfrak{x}^4 + \mathfrak{y}^4 + \varkappa'^2\mathfrak{z}^4 - 2\varkappa'\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2 - 2\varkappa'\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2 - 2\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}^2)\\
&+ 2\mathfrak{x}^6(1+\varkappa') + 2\varkappa(1-2\varkappa)\mathfrak{y}^6 - 2\varkappa'^2\varkappa(1+\varkappa)\mathfrak{z}^6 + 2\mathfrak{x}^4\mathfrak{y}^2(\varkappa\varkappa'-3)\\
&- 2\mathfrak{y}^4\mathfrak{z}^2(\varkappa+3\varkappa'^2) + 2\varkappa'(\varkappa'+3\varkappa^2)\mathfrak{z}^4\mathfrak{x}^2 - 2\mathfrak{x}^4\mathfrak{z}^2(\varkappa+3\varkappa'^2) + 2\mathfrak{y}^4\mathfrak{x}^2(\varkappa'+3\varkappa^2)\\
&+ 2\mathfrak{z}^4\mathfrak{y}^2\varkappa'(\varkappa\varkappa'-3) - 2\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2(1+\varkappa)(2\varkappa-1)(1+\varkappa') + \mathfrak{x}^4(\varkappa'^2+6\varkappa')\\
&+ \mathfrak{y}^4(1-6\varkappa\varkappa') + \mathfrak{z}^4\varkappa'^2(\varkappa'^2+6\varkappa) - 2\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2(\varkappa+3\varkappa'^2) - 2\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2\varkappa'(\varkappa'+3\varkappa^2)\\
&+ 2\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2(\varkappa\varkappa'-3) + 2\mathfrak{x}^2\varkappa'(1+\varkappa') + 2\mathfrak{y}^2\varkappa'(2\varkappa-1) + 2\mathfrak{z}^2\varkappa'(1+\varkappa) + \varkappa'\\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

§ 19.

Eine der Schattenfläche verwandte abwickelbare Fläche.

Die Gleichung der Fläche S enthält die Coordinaten XYZ nur in deren Quadraten. Ersetzt man in ihnen $X^2 Y^2 Z^2$ bez. durch $\xi\eta\zeta$, so erhält man eine Fläche $F^{(4)}$ vierter Ordnung, die man als eine S verwandte Fläche bezeichnen darf, und die selbst eine abwickelbare Fläche ist, nämlich die Tangentenfläche einer Raumcurve dritter Ordnung. Mach der Salmon'schen Methode wurde die Gleichung der Fläche S gefunden durch Elimination von λ aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0 & X & Y & Z & 1 \\ X & A_{11}+\lambda B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ Y & 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ Z & 0 & 0 & \lambda B_{33} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & A_{44}+\lambda B_{44} \end{vmatrix} = 0$$

und ihrer Ableitung nach λ. Nach Einführung der $\xi\eta\zeta$ kann diese Gleichung geschrieben werden

$$\frac{\xi}{A_{11}+\lambda B_{11}} + \frac{\eta}{A_{22}} + \frac{\zeta}{\lambda B_{33}} + \frac{1}{A_{44}+\lambda B_{44}} = 0 .$$

Dies ist die Gleichung eines Ebenenbüschels dritter Ordnung. Eliminirt man aus ihr und ihrer Ableitung den Parameter λ, so erhält man die Tangentenfläche $F^{(4)}$ einer Raumcurve dritter Ordnung, deren Schmiegungsebenen unsern Büschel dritter Ordnung bilden. In dieser Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$, der Rückkehrkante der Fläche $F^{(4)}$, schneiden sich in jedem Punkte zwei unendlich nahe benachbarte Erzeugende von $F^{(4)}$. Ersetzt man die $\xi\eta\zeta$ wieder durch $X^2 Y^2 Z^2$, so gehen diese Erzeugenden in Raumcurven vierter Ordnung über, und ein Punkt von $C^{(3)}$ geht in einen Punkt der Rückkehrkante von S über, die mit $R^{(12)}$ bezeichnet werden mag. Da sich nun $\xi\eta\zeta$ als ganze Functionen dritten Grades des Parameters λ darstellen lassen, so lassen sich die Coordinaten XYZ der Rückkehrkante von S als Quadratwurzeln von Ausdrücken dritten Grades darstellen, woraus folgt, dass $R^{(12)}$ von der zwölften Ordnung ist. Es werden sich nachher für die Coordinaten der Rückkehrkante von S sehr einfache Ausdrücke ergeben.

Die Ebenen des S conjugirten Tetraeders schneiden aus S

einen doppelt zu zählenden Kegelschnitt und vier gerade Linien heraus. Die entsprechenden Ebenen, die $\xi\eta$-, $\eta\zeta$-, $\zeta\xi$-Ebene und die unendlich ferne Ebene schneiden aus $F^{(4)}$ eine doppelt zu zählende Gerade und einen Kegelschnitt heraus, sie sind also Tangentialebenen von $F^{(4)}$ oder Schmiegungsebenen von $C^{(3)}$. Dem Werthe $\lambda = 0$ entspricht z. B. die Ebene $\eta = 0$.

Die Raumcurve $C^{(3)}$ wird erzeugt durch drei projective Ebenenbüschel, die Rückkehrkante von S kann folglich durch drei projective Flächenbüschel zweiter Ordnung erzeugt werden, und das S conjugirte Tetraeder ist auch jedem der drei erzeugenden Flächenbüschel conjugirt.

§ 20.

Die Rückkehrkante von S.

Neben der im vorigen Paragraphen besprochenen Methode, die Rückkehrkante zu finden, kann man dieselbe auch noch durch Elimination von ϑ aus den drei Gleichungen bestimmen

$$X\sqrt{U_0^2 + A\vartheta} + Y\sqrt{V_0^2 + B\vartheta} + Z\sqrt{W_0^2 + C\vartheta} + 1 = 0\,,$$

$$\frac{XA}{\sqrt{U_0^2 + A\vartheta}} + \frac{YB}{\sqrt{V_0^2 + B\vartheta}} + \frac{ZC}{\sqrt{W_0^2 + C\vartheta}} = 0\,,$$

$$\frac{XA^2}{\sqrt{(U_0^2 + A\vartheta)^3}} + \frac{YB^2}{\sqrt{(V_0^2 + B\vartheta)^3}} + \frac{ZC^2}{\sqrt{(W_0^2 + C\vartheta)^3}} = 0\,.$$

Aus ihnen folgt (mit Unterdrückung des Parameters ϑ hinter dem Zeichen φ)

$$X : Y : 1 =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{B}{\varphi_2}, & \frac{C}{\varphi_3} \\ \frac{B^2}{\varphi_2^3}, & \frac{C^2}{\varphi_3^3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{C}{\varphi_3}, & \frac{A}{\varphi_1} \\ \frac{C^2}{\varphi_3^3}, & \frac{A^2}{\varphi_1^3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{A}{\varphi_1}, & \frac{B}{\varphi_2} \\ \frac{A^2}{\varphi_1^3}, & \frac{B^2}{\varphi_2^3} \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \frac{A}{\varphi_1} & \frac{B}{\varphi_2} & \frac{C}{\varphi_3} \\ \frac{A^2}{\varphi_1^3} & \frac{B^2}{\varphi_2^3} & \frac{C^2}{\varphi_3^3} \end{vmatrix}$$

$$= BCM_1\varphi_1^3 : CAM_2\varphi_2^3 : ABM_3\varphi_3^3 : -C_s BCM_4\varphi_1^4\,.$$

Der Nenner in diesen Ausdrücken für die Coordinaten lässt sich von ϑ befreien. Er ist

$$C_s\varphi_1^4 BCM_4 = C_s(U_0^4 + 2U_0^2 A\vartheta + A^2\vartheta^2)BCM_4 = C_s U_0^4 BCM_4\,,$$

weil $C_s U_0^2 M_1 = C_s A M_1 = 0$ ist. Schreibt man zur Abkürzung

$$-\frac{BCM_1}{C_s U_0^4 BCM_1} = \mathfrak{A}, \quad -\frac{CAM_2}{C_s U_0^4 BCM_1} = \mathfrak{B},$$

$$-\frac{ABM_3}{C_s U_0^4 BCM_1} = \mathfrak{C},$$

so sind die Coordinaten der Rückkehrkante

$$X = \mathfrak{A}\sqrt{(U_0^2 + A\vartheta)^3}, \quad Y = \mathfrak{B}\sqrt{(V_0^2 + B\vartheta)^3},$$

$$Z = \mathfrak{C}\sqrt{(W_0^2 + C\vartheta)^3}.$$

Durch das Doppelverhältniss und die Grössen $A\, V_0 W_0$ ausgedrückt ist

$$C_s U_0^4 BCM_1 = A^2 V_0^4 W_0^4 \varkappa,$$

$$\mathfrak{A} = -\frac{\varkappa'}{A^2}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{\varkappa'}{V_0^4 \varkappa}, \qquad \mathfrak{C} = \frac{1}{W_0^4 \varkappa},$$

$$X^2 = -\varkappa'\varkappa'\vartheta^3 : A_3, \quad Y^2 = \varkappa'\varkappa'(1+\vartheta)^3 : V_0^2 \varkappa^2,$$

$$Z^2 = (1 + \varkappa'\vartheta)^3 : W_0^2 \varkappa^2.$$

Setzt man wieder $X^2 = \xi$, $Y^2 = \eta$, $Z^2 = \zeta$, so folgt

$$\xi = \mathfrak{A}^2 \varphi_1^6(\vartheta), \qquad \eta = \mathfrak{B}^2 \varphi_2^6(\vartheta), \qquad \zeta = \mathfrak{C}^2 \varphi_3^6(\vartheta),$$

und es verwandelt sich dadurch die Rückkehrkante in die Curve dritter Ordnung des vorigen Paragraphen, deren Coordinaten hier sehr einfach, nämlich als dritte Potenzen linearer Ausdrücke auftreten. Nach § 13 lassen sich nun die Coordinaten eindeutig durch elliptische Functionen eines Parameters ausdrücken, die Curve ist vom Geschlechte Eins. Entnimmt man die doppelt periodischen Functionen dem § 13, so erhält man

$$X = \mathfrak{A}\sqrt{A^3}\, tga^3 t, \quad Y = \mathfrak{B}\, V_0^3 : ca^3 t, \quad Z = \mathfrak{C}\, W_0^3\, da^3 t : ca^3 t,$$

worin der Modul $\varkappa = k^2$ das bekannte Doppelverhältniss ist. Durch Differentiation nach t, die durch einen Lagrange'schen Strich angedeutet wird, erhält man weiter

$$X' = 3\mathfrak{A}\frac{\sqrt{A^3}\, tga^2 da\, t}{ca^2 t}, \quad Y' = 3\mathfrak{B}\frac{V_0^3 \sqrt{\varkappa}\, sa\, t\, da\, t}{ca^6 t},$$

$$Z' = \frac{3\mathfrak{C}\, W_0^3 \varkappa'\, sa\, t\, da^2 t}{ca^6 t}.$$

Diese Ausdrücke verschwinden gleichzeitig für die Argumente

$$\begin{array}{llll} t=0, & 2K, & 2iK', & 2K+2iK', \\ K+iK', & 3K+iK', & K+2iK', & 3K+2iK', \\ iK', & 3iK', & 2K+iK', & 2K+3iK', \end{array}$$

sie entsprechen zwölf stationären Punkten der Rückkehrkante. Es ist leicht zu erkennen, dass die Argumentwerthe

$$t=K,\ 3K,\ K+2iK',\ 3K+2iK',$$

noch vier unendlich ferne Cuspidalpunkte der Rückkehrkante liefern. Diese sechzehn Punkte liegen zu je vieren in den Ebenen des S conjugirten Tetraeders. Es sind die Punkte, in denen die vier in jeder dieser Ebenen liegenden Erzeugenden den ebendarin liegenden Doppelkegelschnitt berühren. Diese Argumentwerthe sind dieselben als diejenigen, die bei der Bestimmung der Wendeberührungspunkte einer durch elliptische Functionen dargestellten Curve vierter Ordnung, z. B. der Curve auftreten, die man erhält, wenn man für die dritten Wurzeln der Coordinaten unserer Rückkehrkante einfache Coordinaten, etwa $\xi\ \eta\ \zeta$ einführt, so dass

$$\xi^3=X,\ \eta^3=Y,\ \zeta^3=Z$$

ist. Die sechzehn Punkte geben zu derselben Configuration Anlass, als die Wendepunkte einer Curve vierter Ordnung, so dass, wie schon oben bemerkt wurde, an der Fläche S diese Configuration zugleich mit ihrem dualistischen Gegenstück auftritt. Die Ebenen, die die dualistische Configuration bilden, sind je durch eine Tetraederecke und eine in der gegenüberliegenden Tetraederebene liegende Erzeugende bestimmt.

Projicirt man die Rückkehrkante durch Strahlen, die der Z-Achse parallel sind in die XY-Ebene, so gewinnt man die Gleichung der Projection wie folgt

$$X^2=\mathfrak{A}^2(U_0^2+A\vartheta)^3,\quad Y^2=\mathfrak{B}^2(V_0^2+B\vartheta)^3,$$

$$\left(\frac{X^2}{\mathfrak{A}^2}\right)^{\frac{1}{3}}=U_0^2+A\vartheta,\quad \left(\frac{Y^2}{\mathfrak{B}^2}\right)^{\frac{1}{3}}=V_0^2+B\vartheta,$$

$$\left(\frac{X}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{2}{3}}B-\left(\frac{Y}{\mathfrak{B}}\right)^{\frac{2}{3}}A=U_0^2B-V_0^2A=-M_3.$$

Die Projection würde also die Evolute einer Ellipse oder Hyperbel sein, wenn XYZ rechtwinklige Coordinaten wären. Jedenfalls aber sind die zu den Kanten des conjugirten Tetraeders parallelen Projectionen der Rückkehrkante in die Coordinatenebenen solchen Evoluten collinear.

Die Gleichungen einer Tangente der Rückkehrkante sind:

$$X = \mathfrak{A}\sqrt{(U_0^2 + A\vartheta)^3} + \lambda\,\mathfrak{A}\sqrt{(U_0^2 + A\vartheta)},$$
$$Y = \mathfrak{B}\sqrt{(V_0^2 + B\vartheta)^3} + \lambda\,\mathfrak{B}\sqrt{(V_0^2 + A\vartheta)},$$
$$Z = \mathfrak{C}\sqrt{(W_0^2 + C\vartheta)^3} + \lambda\,\mathfrak{C}\sqrt{(W_0^2 + C\vartheta)},$$

sie stellen zugleich die Coordinaten der Fläche S durch zwei Parameter dar.

§ 21.

Schattenrisse.

Die Gleichung der Schattenfläche wurde gefunden durch Elimination von λ aus der Gleichung

$$\frac{X^2}{A_{11} + \lambda B_{11}} + \frac{Y^2}{A_{22}} + \frac{Z^2}{\lambda B_{33}} + \frac{1}{A_{44} + \lambda B_{44}} = 0$$

und ihrer Ableitung. Der Schnitt der Ebene $Y = c$ wird daher gefunden aus der Gleichung

$$\frac{X^2}{A_{11} + \lambda B_{11}} + \frac{Z^2}{\lambda B_{33}} = -\frac{c^2}{A_{22}} - \frac{1}{A_{44} + \lambda B_{44}}$$

und ihrer Ableitung. Das Resultat der Elimination von λ liefert die Parallelprojection dieses Schnittes in die XY-Ebene. Setzen wir

$$A_{44} + \lambda B_{44} = \mu, \quad \lambda = (\mu - A_{44}) : B_{44},$$

so geht der Ausdruck über in

$$\frac{X^2 B_{44}}{A_{11} B_{44} - B_{11} A_{44} + \mu B_{11}} + \frac{Z^2 B_{44} : B_{33}}{-A_{44} + \mu} = \frac{-c^2}{A_{11}} - \frac{1}{\mu},$$

oder

$$\frac{X^2(-B_{44} A_{22} : c^2 B_{11})}{\frac{A_{11} B_{44} - A_{44} B_{11}}{B_{11}} + \mu} + \frac{Z^2(-B_{44} A_{11} : c^2 B_{33})}{-A_{44} + \mu} = 1 + \frac{A_{22} : c^2}{\mu},$$

oder wenn man

$$X\sqrt{-B_{44} A_{22} : c^2 B_{11}} = \mathfrak{X}, \quad Z\sqrt{\frac{-B_{44} A_{22}}{c^2 B_{33}}} = \mathfrak{Z}$$

setzt, in

$$\frac{\mathfrak{X}^2}{\frac{A_{11}B_{44}-A_{44}B_{11}}{B_{11}}+\mu}+\frac{\mathfrak{Z}^2}{-A_{44}+\mu}=1+\frac{A_{22}:c^2}{\mu}.$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung und ihrer Ableitung nach μ den Parameter μ, so erhält man eine Parallelcurve des Kegelschnittes

$$\frac{\mathfrak{X}^2 B_{11}}{A_{11}B_{44}-A_{44}B_{11}}-\frac{\mathfrak{Z}^2}{A_{44}}=1,$$

d. h. eine Curve die entsteht, wenn man auf allen Normalen dieses Kegelschnittes nach beiden Seiten die Strecken $\sqrt{A_{22}:c^2}$ abträgt. Dabei sind $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{Z}$ als rechtwinklige Coordinaten gedacht. Es geht daraus hervor, dass der Schattenriss in der Ebene $Y=c$ einer Parallelcurve collinear ist.

Setzt man $Z=c$, so erhält man

$$\frac{X^2}{A_{11}\frac{1}{\lambda}+B_{11}}+\frac{Y^2}{A_{22}\frac{1}{\lambda}}=\frac{-c^2}{B_{33}}-\frac{1}{B_{44}+\frac{1}{\lambda}A_{44}}$$

und setzt man weiter $B_{11}+\frac{1}{\lambda}A_{44}=\mu$ und verfährt wie vorhin, so findet man, dass auch die der XY-Ebene parallelen Ebenen die Fläche S in Curven treffen, die Kegelschnittparallelcurven (wenigstens analytisch) collinear sind. Geht man zu den Coordinaten xyz über, so folgt aus unsern Betrachtungen, dass die Ebenen, die durch die Kanten des S conjugirten Tetraeders gehen, Curven aus S heraus schneiden, die Kegelschnittparallelcurven collinear sind. Diese Curven, die geeignet scheinen, von den Schattenrissen des Saturnringes eine Vorstellung zu geben, müssen weiter untersucht werden, woran ich jedoch zur Zeit durch Berufsgeschäfte behindert bin, weshalb ich mich mit der Untersuchung eines speciellen Falles im folgenden Paragraphen begnüge. — Die Schattenrisse in beliebigen nicht singulären Ebenen sind wie die Kegelschnittparallelcurven Curven achter Ordnung mit zwanzig Doppelpunkten, also Curven vom Geschlechte Eins.

§ 22.

Schattenrisse in einem besonderen Falle.

Geht die Ringebene durch den Sonnenmittelpunkt, so ist eine Kante des conjugirten Tetraeders die unendlich ferne Gerade der xz-Ebene, die Coordinaten xyz sind genau rechtwinklig, und die Schattenrisse des Ringes in Ebenen durch die unendlich ferne Tetraederakante sind ihren Projectionen in der xz-Ebene congruent. Dieser Fall ist deshalb ein besonders einfacher. — Die Ebene E_n hat die Gleichung

$$E_n = 1 - \frac{\nu_1 y}{r(\nu_1^2 - 1)} = 0\,, \quad y = \frac{r(\nu_1^2 - 1)}{\nu_1}\,,$$

sie ist der xz-Ebene parallel, und der Schatten gebende Ring kann ersetzt werden durch die Ellipse N. Zur weitern Vereinfachung nehmen wir $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ und $r = 1$ an, so ist

$$A_{11} = 1\,,\ A_{22} = 1 - \nu_1^2\,,\ A_{44} = 1 : (\nu_1^2 - 1),\ B_{44} = -1\,,$$
$$B_{11} = \delta^2 = B_{33} = \delta^2,\ A_{11} B_{44} - A_{44} B_{11} = -(\nu_1^2 + \delta^2 - 1) : (\nu_1^2 - 1).$$

Die Gleichung der Schattenfläche wird gefunden durch Elimination von λ aus der Gleichung

$$\frac{x^2}{A_{11} + \lambda B_{11}} + \frac{y^2}{A_{22}} + \frac{z^2}{\lambda B_{33}} + \frac{E_n^2}{A_{44} + \lambda B_{44}} = 0$$

und ihrer Ableitung nach λ. Um den Schattenriss in einer der xz-Ebene parallelen Ebene zu finden, haben wir y und folglich E_n als constant anzunehmen, wir wollen aber diese Buchstaben beibehalten. Setzen wir $A_{44} + \lambda B_{44} = -\mu$, so folgt

$$\frac{x^2 B_{44}}{A_{11} B_{44} - A_{44} B_{11} - \mu B_{11}} + \frac{z^2 B_{44}}{(-A_{44} - \mu) B_{33}} = \frac{-y^2}{A_{22}} + \frac{E_n^2}{\mu}$$

oder

$$\frac{x^2 B_{44} A_{22} : y^2 B_{11}}{B_{11} A_{44} - A_{11} B_{44} + \mu} + \frac{z^2 B_{44} A_{22}^2 : y^2 B_{33}}{A_{44} + \mu} = 1 - \frac{E_n^2 A_{22} : y^2}{\mu}\,,$$

$$\frac{x^2 (\nu_1^2 - 1) : y^2 \delta^2}{\dfrac{\nu_1^2 + \delta^2 - 1}{\delta^2 (\nu_1^2 - 1)} + \mu} + \frac{z^2 (\nu_1^2 - 1) : y^2 \delta^2}{\dfrac{1}{\nu_1^2 - 1} + \mu} = 1 + \frac{E_n^2 (\nu_1^2 - 1) : y^2}{\mu}.$$

Aus dieser Gleichung und ihrer Ableitung ergeben sich die Schattenrisse. Für $E_n = 0$, $y = (\nu_1^2 - 1) : \nu_1$ erhält man die Curve

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\nu_1^2+\delta^2-1}{\nu_1^2}\right)}+\frac{z^2}{\left(\frac{\delta^2}{\nu_1^2}\right)}=1,$$

also den Kegelschnitt N selbst, wie zu erwarten war.

Für andere Werte von y setzt man zunächst

$$\frac{x\sqrt{\nu_1^2-1}}{y\delta}=\xi,\quad \frac{z\sqrt{\nu_1^2-1}}{y\delta}=\zeta.$$

In diesem Coordinatensystem ist der Schattenriss die Parallelcurve zu dem Kegelschnitt

$$\frac{\xi^2\delta^2\nu_1^2}{\nu_1^2+\delta^2-1}+\zeta^2(\nu_1^2-1)=1,$$

die der Mittelpunkt eines auf ihm abrollenden Kreises beschreibt, der den Radius

$$\frac{E_n\sqrt{\nu_1^2-1}}{y}=\frac{\sqrt{\nu_1^2-1}}{y}-\frac{\nu_1}{\sqrt{\nu_1^2-1}},$$

diese Grösse absolut genommen, besitzt. Im Coordinatensystem $\xi\,\eta$ unterscheiden sich diese Curven für wachsende y immer weniger von einander, sie sind aber den wahren Curven ähnlich, weil

$$x=\frac{y\delta\xi}{\sqrt{\nu_1^2-1}},\qquad z=\frac{y\delta\zeta}{\sqrt{\nu_1^2-1}}$$

ist, sie vergrössern sich thatsächlich mit wachsenden y.

Die Parallelcurven bestehen aus zwei getrennten Zügen, der äussere hat unter allen Umständen eine der Ellipse ähnelnde Gestalt, der innere in den meisten Fällen auch, in andern jedoch besitzt er Knotenpunkte. Für $y=\nu_1+1$ z. B. ist im Coordinatensystem $\xi\,\zeta$ der Radius des abrollenden Kreises gleich

$$\operatorname{abs}\frac{1}{\sqrt{\nu_1^2-1}}\left(\frac{\nu_1^2-1}{\nu_1+1}-\nu_1\right)=\frac{1}{\sqrt{\nu_1^2-1}}$$

und die kleine Achse des Kegelschnittes, auf dem der Kreis abrollt, ist ebenfalls $1:\sqrt{\nu_1^2-1}$. Den Scheiteln der kleinen Achse entspricht daher in der Parallelcurve der Coordinatenanfang, der ein Knotenpunkt derselben ist. Der innere Zug hat daher in diesem Falle ein lemniscatenartiges Aussehen.

Inhalt.

Im § 1 wird das Problem formulirt, die Gleichungen der Schattenfläche S werden in Ebenencoordinaten aufgestellt und es wird zugleich neben dem schattengebenden Kreise R ein weiterer in der Symmetrieebene liegender Doppelkegelschnitt der Fläche gefunden, der im § 2 genauer discutirt wird. Dort werden auch die Mittel zu seiner elementaren Construction gefunden, die Gleichung des Schnittes mit der Ebene dieses Kegelschnittes H wird aufgestellt, und die vier in ihr noch liegenden Erzeugenden werden bestimmt. Im § 3 wird der Schnitt der Schattenfläche mit der Ringebene untersucht, und die in ihr neben dem Saturnkreis noch liegenden vier Geraden werden aufgefunden. Im § 4 werden die beiden andern in S noch vorhandenen Doppelkegelschnitte zunächst in Liniencoordinaten dargestellt, das S conjugirte Tetraeder wird ermittelt, und die Coordinaten der Ecken dieses Tetraeders werden berechnet. Im § 5 werden einige Schätzungen von Grössenverhältnissen vorgenommen. Die Sonne lässt sich durch eine leuchtende Scheibe ersetzen, die sich von einem Kreise wenig unterscheidet. Im § 6 wird der leuchtende Kegelschnitt L genauer untersucht, und die in seiner Ebene liegenden vier Erzeugenden werden bestimmt. Der vierte Doppelkegelschnitt, der mit N bezeichnet wird und die in seiner Ebene noch liegenden Geraden behandelt der § 7. Im § 8 werden die Achsen des leuchtenden Kegelschnittes L noch genauer geprüft, die der Ringebene parallele ist die grössere. Im § 9 werden die Schattenfiguren des Ringes im Allgemeinen behandelt, und eine einzweideutige Verwandtschaft führt zur Erzeugung der Tangentenbüschel dieser Figuren durch projective Büschel zweiter Ordnung. Von nun ab (§ 10) werden drei der Ebenen des conjugirten Tetraeders als Coordinaten xyz eingeführt, und es werden auch die Ebenencoordinaten uvw auf dieselbe Achse bezogen. Der § 11 enthält eine Vorschrift zur Anfertigung eines Modelles. Im § 12 werden vier Kegel vierter Klasse, die mit der Fläche S verbunden sind, besprochen, sie haben ihre Spitzen in den Ecken des conjugirten Tetraeders. Im § 13 werden die Ebenencoordinaten eindeutig mittels elliptischer Functionen eines Parameters dargestellt. Der Modul der Functionen ist das constante Doppelverhältniss welches die Ebenen des conjugirten Tetraeders auf einer Erzeugenden bestimmen. Eine Configuration wird besprochen. Im § 14 wird die Gleichung der Schattenfläche nach Salmon's Methode aufgestellt; in den §§ 15 und 16 wird dasselbe erreicht durch directe Elimination des Parameters aus den Gleichungen der Erzeugenden, und die Gleichung wird in Tetraedercoordinaten im § 17 vollständig ausgeschrieben aufgestellt. § 18 drückt die Constanten der Schattenfläche durch das zu S gehörende Doppelverhältniss aus, und giebt eine Gleichung von S, in deren Coefficienten nur dies Doppelverhältniss vorkommt. Der § 19 macht auf die Verwandtschaft von S mit einer abwickelbaren Fläche vierter Ordnung aufmerksam. Im § 20 wird die Rückkehrkante durch einen Parameter eindeutig dargestellt, sie ist vom zwölften Grade und giebt zu einer Configuration Anlass, die das dualistische Gegenstück zu der weiter oben besprochenen ist. Der § 21 deckt die Beziehung gewisser Schattenrisse zu Kegelschnittparallelcurven auf, und der § 22 verfolgt diese Beziehung in einem speciellen Falle weiter.

Jena, im October 1896.

J. Thomae.

P. Drude, a. o. M.: *Ueber Messung der Dielektricitätsconstanten kleiner Substanzmengen vermittelst elektrischer Drahtwellen.* (Mit drei Figuren.)

In früheren Arbeiten[1] habe ich eine Methode beschrieben und verwerthet, um den elektrischen Brechungsexponenten (dessen Quadrat bei fehlender Absorption gleich der Dielektricitätsconstante ist) von Flüssigkeiten mit Hülfe elektrischer Drahtwellen bequem und exact zu messen.

Da es wegen der Beziehungen der hierbei auftretenden Erscheinungen zur chemischen Constitution[2] der Körper von Interesse ist, die Untersuchung auf möglichst viele Flüssigkeiten ausdehnen zu können, so habe ich es als einen Uebelstand der Methode empfunden, dass sie verhältnissmässig noch grosse Substanzmengen (270 cm^3) erfordert. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, möchte ich hier eine andere Methode beschreiben, welche nur sehr geringe Substanzmengen ($\frac{1}{4}$ cm^3) erfordert und welche die Dielektricitätsconstante im Allgemeinen auf etwa 1—2% Fehler zu bestimmen erlaubt. Die Bestimmungen sind allerdings, wofern wenigstens der Fehler 2% nicht überschreiten soll, keine absoluten, sondern nur relative, indem die Dielektricitätsconstanten verschiedener Flüssigkeiten unter einander verglichen werden können. Aber hier tritt die früher beschriebene Methode, welche absolute Zahlen liefert, als willkommene Ergänzung hinzu, indem sie beliebig viele Vergleichsflüssigkeiten (Aichflüssigkeiten) liefern kann. Nach einmaliger Ermittelung solcher Aichflüssigkeiten genügt dann schon diese neue Methode allein, wobei ich allerdings hervorheben möchte, dass die früher beschriebene Methode auf eine grössere Genauigkeit getrieben werden kann, als diese neue.

---

1) Diese Berichte 1895, p. 329. — 1896, p. 315. — Abhandlungen d. k. sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Cl. Bd. 23, p. 1, 1896.

2) Vgl. P. Drude, diese Berichte 1896.

Der Vortheil der neuen Methode beruht in dem geringen Bedarf an Substanzmenge, und in ihrer Einfachheit, vermöge deren an Hand einer für den Apparat einmal ermittelten Curve die Dielektricitätsconstante einer Flüssigkeit aus der Einstellung am Apparat sofort abgelesen werden kann. Zudem lässt dieselbe sofort das Auftreten selbst geringer Absorption der elektrischen Schwingungen in der Flüssigkeit erkennen, sowie dieselbe wenigstens annähernd quantitativ messen.

Wegen der Schnelligkeit der angewandten elektrischen Schwingungen (halbe Wellenlänge in Luft 36 cm) gewinnt die Leitfähigkeit der Flüssigkeiten erst bei ziemlich hohen Werthen (bei wässrigen Lösungen Leitfähigkeit K bezogen auf Quecksilber $K > 20 \cdot 10^{-8}$) Einfluss.

Beschreibung der Methode.

Das Wesentliche der Methode liegt darin, dass die Capacität eines kleinen Condensators, welcher mit der zu untersuchenden Flüssigkeit beschickt wird, gemessen wird durch den Einfluss, welchen derselbe auf die Länge der elektrischen Drahtwellen ausübt. Dieses Princip liegt schon der Lecher'schen Methode zu Grunde[1], nach welcher am Ende eines Drahtsystems DD, in welchem elektrische Schwingungen erregt werden, ein Condensator angehängt wird, und ein Drahtbügel B so über den Drähten DD verschoben wird, dass Resonanz des Drahtsystems vor der Brücke B mit dem hinter B stattfindet. Resonanz wird erkannt durch das Aufleuchten einer Vacuumröhre, welche entweder einfach über die Condensatorplatten gelegt wird, oder deren Elektroden mit letzteren metallisch verbunden sind. Nun ist aber das Ansprechen der Vacuumröhre um so weniger intensiv, je grösser die Capacität des Condensators ist, aus dem leicht ersichtlichen Grunde, dass mit wachsender Capacität die Potentialdifferenz der Condensatorplatten abnimmt. Eine unendlich grosse Capacität würde ja wie eine metallische Ueberbrückung wirken, und in der Nähe einer Brücke ist die elektrische Kraft zwischen den Drähten DD äusserst klein, daher spricht eine Vacuumröhre dort nicht an. Man ist also bei dieser Methode, zumal bei den geringeren Intensitäten, welche handliche, d. h.

1) E. Lecher, Wien. Ber. **99**, p. 480, 1890. — Wied. Ann. **42**, p. 142, 1891.

kürzere Drahtwellen besitzen, auf geringe Capacitäten angewiesen, wenn die Vacuumröhre, oder irgend ein anderer Wellenindicator, gut ansprechen soll, und damit verlässt man die Bedingungen, welche die genaueste Messung der Dielektricitätsconstanten erlauben, wie weiter unten im theoretischen Theil gezeigt wird.

Daher bin ich so verfahren, dass der Wellenindicator (Zehnder'sche Röhre) hinter der stets festliegenden Brücke B an einem Bauch der elektrischen Kräfte, d. h. eine Viertelwellenlänge hinter B, über die Drähte DD übergelegt wurde, und nun die Länge des hinter B liegenden Drahtsystems, welches durch einen kleinen Condensator abgeschlossen wurde, in der Weise variirt wurde, dass die Vacuumröhre maximal leuchtete. Sie spricht dann stets mit gleicher Stärke an, unabhängig von der Capacität des Endcondensators. Denn die Vacuumröhre reagirt jetzt nicht mehr auf die Potentialdifferenzen an den Enden des Condensators, sondern es wird durch die Anordnung nur die Phasendifferenz gemessen, mit welcher elektrische Drahtwellen, die sich zum Condensator hin längs DD fortpflanzen, an ihm reflectirt werden. Diese Reflexion ist, wenn man von geringem Strahlungsverlust und etwaiger Absorption in der Substanz des Condensators absieht, eine totale, da das Drahtsystem durch den Condensator *begrenzt* wird. Sie würde nicht total sein, wenn die Drähte DD beliebig lang fortliefen, und ein Condensator nur längs ihnen verschoben würde, denn derselbe würde dann um so weniger reflectiren, je kleiner seine Capacität ist. — Ist die Capacität des Condensators unendlich gross, so wirkt er wie eine metallische Ueberbrückung, d. h. bei maximalem Leuchten der Röhren muss der Condensator ein ganzes Multiplum von $\frac{1}{2}\lambda$ (λ = Wellenlänge) von der Brücke B entfernt sein. Nehmen wir z. B. an, er läge um $\frac{1}{2}\lambda$ hinter B (erster Knoten hinter B). Wird nun seine Capacität verringert, so muss man, um die Röhre im Leuchten zu erhalten[1]), das Drahtsystem hinter B um l cm verlängern, bis dass bei der Capacität Null das Ende des Drahtsystems $\frac{3}{4}\lambda$ hinter B liegt d. h. $l = \frac{1}{4}\lambda$ ist. Wie die Länge l, die kurz die »Einstellung« genannt werden soll, mit der Capacität

1) Die Erscheinungen lassen sich im Hellen mit Hülfe eines Elektroskops in der von mir früher (diese Ber. 1895, p. 329. — Wied. Ann. **55**, p. 633) beschriebenen Weise demonstriren.

variirt, wird unten berechnet werden. Jedenfalls ist schon ohne Theorie klar, dass zwei Flüssigkeiten dann gleiche Dielektricitätsconstante besitzen, wenn derselbe Condensator, mit beiden Flüssigkeiten beschickt, gleiche Einstellungen l liefert, vorausgesetzt, dass die Periode der Schwingung in beiden Fällen dieselbe ist. Um letzteres zu erzielen, bleibt der Drahtbügel B stets fest liegen.

Wenn man bei Beschickung des Condensators mit mehreren Aichflüssigkeiten in einer Tafel die Einstellungen l des Apparates als Function der Dielektricitätsconstante einträgt, so kann die dadurch erhaltene Curve (»Condensatorcurve«) dazu dienen, aus jeder beliebigen Einstellung die Dielektricitätsconstante sofort aus der Tafel zu entnehmen. Etwas rationeller verfährt man, wenn man empirisch die Abhängigkeit des $\operatorname{cotg} 2\pi \frac{l}{\lambda}$ von der Dielektricitätsconstante ε an einigen Aichflüssigkeiten bestimmt, da nach der Theorie (und auch nach der Erfahrung) die so erhaltene Curve nahezu eine gerade Linie ist. Wie man zu verfahren hat, um bei einer absorbirenden Flüssigkeit sowohl Dielektricitätsconstante als Absorptionsindex zu ermitteln, soll im theoretischen Theil besprochen werden.

Die speciellere Anordnung des Apparates ist folgende (vgl. Figur 1). Der Blondlot'sche Erreger (E, E) und Empfänger (D, D)

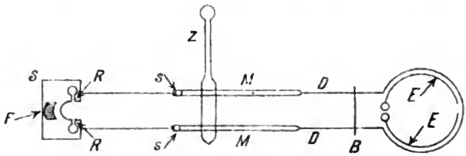


Fig. 1.

haben die von mir auch in den früheren Arbeiten meist benutzten Dimensionen. Die Erregerdrähte EE umschliessen einen Kreis von 5 cm Durchmesser. Die 1 mm starken Empfängerdrähte DD, welche 1,8 cm gegenseitigen Abstand besitzen, setzen sich in etwa 17 cm Abstand vom Erreger in 2 mm starke, 20 cm lange Messingröhrchen MM fort, in welchen zwei durch das Ebonitstück S starr verbundene, $1\frac{1}{2}$ mm dicke, 21 cm lange Kupferdrähte leicht verschieblich sind. Die Kupferdrähte enden in zwei kleinen, im Ebonitstück S angebrachten Vertiefungen, welche je einen Quecksilbertropfen enthalten. Quer in S angebrachte Rillen RR nehmen die Condensatordrähte auf, welche ebenfalls in die Quecksilbertropfen tauchen, und dadurch guten metallischen Contact mit den Kupferdrähten besitzen. Etwa 6 cm hinter dem Erreger liegt die Brücke B über den Drähten DD, 17 cm hinter B die Vacuumröhre Z. Am Ende der Messingröhrchen sind sehr kleine Schrauben s, s angebracht, um eventuell eine längere Kupferdrahtleitung dort einsetzen zu können.

Der Condensator darf nur kleine Capacität haben, wenn er bei der Kürze der Wellenlänge λ ($\lambda = 73$ cm) nicht nahezu wie eine metallische Ueberbrückung wirken soll. Die Theorie ergiebt, dass der procentische Fehler in der Bestimmung der Dielektricitätsconstante ε am geringsten ist, wenn $l = \frac{1}{8}\lambda$ ist. Aber auch innerhalb der Grenzen $\frac{1}{12}\lambda < l < \frac{1}{6}\lambda$ ist der Fehler zur Bestimmung von ε nicht wesentlich grösser. Um diese Bedingung bei Füllung mit den verschiedensten Flüssigkeiten, deren ε von 2 bis 88 variiren, erfüllen zu können, braucht man mindestens zwei Condensatoren verschiedener (Luft-) Capacität. In den Figuren 2 und 3 sind sie in natürlicher Grösse dargestellt. Sie sind kleine Glaskölbchen, in welche Platindrähte eingeschmolzen sind, die entweder in 4 mm Abstand ohne Endcapacitäten gegenüberstehen, oder welche zwei 4 mm im Durchmesser haltende Platinplatten tragen, die 3 mm von einander entfernt sind. Erstere Form dient zur Messung grosser Dielektricitätsconstanten (über $\varepsilon = 11$), letztere zur Messung kleiner. Die Capacität hängt von der Höhe des Standes der Flüssigkeit im Kolbenhalse nicht ab. Der Kolbenhals wird durch einen Korkstopfen geschlossen. Zur Temperaturmessung kann (nicht während der Einstellung!) ein kleines Thermometer in den Kolbenhals eingeführt werden. Es ist übrigens wegen der kleinen Substanzmenge ($\frac{1}{4}$ cm^3) darauf zu achten, dass das Thermometer vorher nahezu auf gleiche Temperatur, wie die Flüssigkeit, gebracht wird.

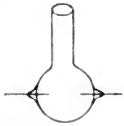


Fig. 2.

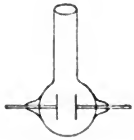


Fig. 3.

Die Handhabung des Apparates ist nun folgende: Zunächst wird in die Rillen RR des Ebonitstückes S ein Metalldraht eingelegt, und durch Verschiebung von S die Lage des 1. Knotens hinter der Brücke B bestimmt. (Die Einstellungen können an einer seitlich befestigten mm Scala abgelesen werden.) Dann wird der mit Flüssigkeit beschickte Condensator in die Rillen eingelegt, der Hals des Kolbens steht schräg nach oben und lehnt sich gegen eine kleine Stütze F, welche auf dem Ebonitstück S befestigt ist. Durch Verschiebung von S erhält man jetzt die »Einstellung« l und kann dann an Hand der durch Aichflüssigkeiten[1]) hergestellten Curve sofort die Constante ε der im Condensator befindlichen Flüssigkeit entnehmen. Für jeden Condensator muss man natürlich eine besondere Curve herstellen. — Die Aufsuchung des 1. Knotens ist übrigens nur selten nothwendig, da bei fester Lage der Brücke B, falls der Apparat keine Stösse erhält, derselbe sehr constant seine Lage beibehält.

Wie schon oben hervorgehoben, ist die Einstellung l für einen bestimmten Condensator bei Füllung mit einem bestimmten ε nur constant, falls die Periode, d. h. auch die Wellenlänge der Schwingung, constant bleibt. Um dies controliren zu können, kann man von Zeit zu Zeit durch Einsetzen einer längeren (1 m langen) Drahtleitung in die Messingröhrchen die Wellenlänge messen, indem ein zweiter Metallbügel B' über den Drähten verschoben wird. Bei fester Lage des ersten Bügels B ändert sich aber diese Wellenlänge monatelang nur sehr wenig; die für ein bestimmte Wellenlänge entworfene Tafel zur Bestimmung von ε kann man auch benutzen, wenn die Wellenlänge etwas abweichen sollte. Es muss dann nur eine Correction angebracht werden, die im theoretischen Theil berechnet wird.

Bei einigen Flüssigkeiten, z. B. Aethylalkohol, Ameisensäure, bemerkt man, dass die Vacuumröhre schlecht oder gar nicht anspricht. Es ist dies ein Zeichen dafür, dass die elektrischen

1) Als Aichflüssigkeiten zwischen den Werthen 33 und 88 (Wasser bei 0°) empfehlen sich Mischungen von Methylalkohol und Wasser. Die Absorption der Wellen ist gering. Die Dielektricitätsconstante berechnet sich fast genau aus dem Procentgehalt nach der Mischungsregel (die von Thwing in der Ztschr. f. phys. Chem. **14**, p. 294, 1894 beschriebenen Unregelmässigkeiten habe ich durchaus nicht bestätigt gefunden). — Für kleinere Werthe der Dielektricitätsconstanten sind Mischungen von Propionsäure mit Wasser geeignet. Ich werde demnächst die numerischen Resultate, auch die empirisch gefundenen »Condensatorcurven« im Zusammenhange mittheilen.

Schwingungen in der Condensatorflüssigkeit absorbirt werden, d. h. dass sich ihre Energie dort theilweise in Wärme umsetzt, sodass die Wellen am Condensator mit Verlust reflectirt werden. Diese Methode ist sogar sehr empfindlich, um bei geeigneter Capacität des Condensators (cf. theoret. Theil) schon geringe Absorptionen nachweisen zu können. Die früher[1]) besprochene Beziehung der anomalen Absorption mit der chemischen Constitution habe ich in dieser Weise bequem bestätigt gefunden: alle bisher vor mir untersuchten, die *O-H*-Gruppe enthaltenden Flüssigkeiten (auch Methylalkohol), abgesehen von Wasser, schwächen die Wellen. Es lohnte sich der Mühe, zu untersuchen, *in wiefern diese Methode als wirklich bei allen Substanzen verwendbares Reagenz auf die O-H-Gruppe oder vielleicht auch auf bestimmte andere Gruppen* (NH_2) *zu verwerthen ist.* Wenn das Absorptionsvermögen nicht sehr gross ist, so gelingt es meist, durch Anwendung eines längeren (4 cm langen) gebogenen Bügels *B* die Vacuumröhre wieder zum Ansprechen zu bringen, da dann die Intensität der Wellen gesteigert wird[2]). Es ist bei Anwendung eines längeren Bügels aber die Knotenlage und die Wellenlängenänderung zu messen. Wenn die Absorption sehr bedeutend ist, so wird die Einstellung l schlechter. Was dann durch l gemessen wird, soll die Theorie unten lehren. Dort wird auch gezeigt werden, wie man das Absorptionsvermögen der Flüssigkeit bestimmen kann. Die Leitfähigkeit wässriger Lösungen macht sich natürlich in gleicher Weise bemerklich, sie muss aber, wie schon oben gesagt ist, wegen der Kleinheit der Wellenlänge λ verhältnissmässig hoch sein (cf. oben), sodass z. B. Wasser, selbst wenn es der Wasserleitung entnommen ist, als vollkommener Isolator wirkt. Mit wachsender Concentration einer wässrigen Lösung nimmt natürlich zunächst die Absorption der Wellen zu, jedoch muss dies eine Grenze erreichen, denn eine sehr gut leitende Flüssigkeit wirkt wie eine metallische Ueberbrückung der Drähte *DD*, sie reflectirt also die Wellen wieder ohne Verlust. Es erhebt sich also die theoretisch interessante Frage, *bei welcher Leitfähigkeit ein maximaler Antheil der elektrischen Energie in Joule'sche Wärme umgesetzt wird.* Die Theorie beantwortet diese Frage ohne Schwierigkeit und

1) Diese Berichte 1896.
2) Vgl. diese Berichte 1895, p. 333.

zeigt zugleich, wie der Umsatz der Energie nicht nur von der Leitfähigkeit, sondern auch von der Capacität des Condensators und der Wellenlänge abhängt.

Ich möchte schliesslich hervorheben, dass die Methode *auch zur Messung der Dielektricitätsconstante kleiner Mengen fester Körper* bei schnellen Schwingungen geeignet zu sein scheint, was zur Untersuchung zahlreicher *Krystalle* von Wichtigkeit ist, auch besonders derjenigen, bei welchen eine geringe oberflächliche Leitfähigkeit die Anwendung langsamer Wechselzahlen ausschliesst. Die Elektroden des Condensators müssen sich zu dem Zwecke federnd an die, als dünne kleine Platte geschliffene feste Substanz anlegen, ihre Dielektricitätsconstante kann durch Vergleichung mit der von Aichflüssigkeiten gefunden werden, welche bei derselben Elektrodendistanz des Condensators als Flüssigkeitsplatten beobachtet werden. Um solche Flüssigkeitsplatten herstellen zu können, brauchen nur die Elektroden des Condensators mit isolirenden Platten eines Isolators, z. B. Glas, umgeben zu sein, die genau mit den Elektrodenflächen zu einer Ebene abgeschliffen sind. Ueber diese Anwendung der Methode für feste Körper habe ich aber bisher noch keine Versuche gemacht, während ich für Flüssigkeiten die Brauchbarkeit erprobt habe. Ausgedehnteres Zahlenmaterial hoffe ich demnächst geben zu können.

Theorie.

Wenn ein Lecher'sches Drahtsystem (zwei Paralleldrähte) von einem Condensator begrenzt ist, so werden einfallende elektrische Wellen an dem Condensator mit einer Amplituden- und Phasenänderung reflectirt, die aus der am Condensator stattfindenden Grenzbedingung zu berechnen sind. Bezeichnet man die Capacität des (im Allgemeinen mit Flüssigkeit gefüllten) Condensators nach elektromagnetischem Maasse mit C, die Potentialdifferenz seiner Belegungen mit $V_1 - V_2$, ferner mit w den galvanischen Widerstand, welchen die Füllflüssigkeit dem Stromdurchgange zwischen den Condensatorelektroden bietet, so ist die Stromstärke, nach elektromagnetischem Maasse im Condensator:

$$i = C\frac{\partial(V_1 - V_2)}{\partial t} + \frac{V_1 - V_2}{w}. \tag{1}$$

Ersteres Glied ist der Verschiebungsstrom (nach Maxwell'scher Bezeichnung), letzteres der Leitungsstrom. Man kann nun $V_2 = - V_1$ setzen, da bei symmetrischer Anordnung die Potentiale in gegenüberliegenden Punkten des Drahtsystems entgegengesetzt gleich sind. Ist ferner e die elektrische Ladung der Längeneinheit eines Drahtes des Lecher'schen Systemes an einer beliebigen Stelle desselben nach elektrostatischem Maasse, so wäre, falls das Drahtsystem von Luft umgeben ist, $2e \lg \frac{d}{R}$ das elektrostatisch gemessene Potential auf dem Drahte an jener Stelle, falls die Paralleldrähte den gegenseitigen Abstand d und die halbe Dicke R besitzen. Das elektromagnetisch gemessene Potential V ist $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm. sec^{-1} mal so gross. Daher ist

$$V = 2c \lg \frac{d}{R} \cdot e. \tag{2}$$

Zwischen e und i besteht nun an jeder Stelle des Drahtsystems die Beziehung[1]):

$$\frac{\partial i}{\partial z} = - \frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t}, \tag{3}$$

falls t die Zeit, z die Axenrichtung der Paralleldrähte bezeichnet. Die Gleichung (3) kann man auch auf das Ende des Drahtsystems, an welchem der Condensator liegt, anwenden; die Gleichung (2) näherungsweise ebenfalls. Jedenfalls ist V auch dort zu e proportional, der Factor ist von $2c \lg \frac{d}{R}$ ein wenig abweichend, es kommt aber auf eine genaue Kenntniss dieses Factors für unseren Zweck nicht an. Am Ende des Drahtes ist das Potential V identisch mit dem Potential V_1 auf der einen Condensatorbelegung, falls dieselbe durch ein sehr kurzes Drahtstück mit den Paralleldrähten verbunden sind, was (vgl. Fig. 2 u. 3) der Fall war. Ferner ist wenigstens sehr näherungsweise der Strom im Condensator derselbe, wie der Strom am Ende der Paralleldrähte. Eine geringe Differenz besteht allerdings, weil die Drähte am Ende auch ins Unendliche elektrische Energie hinausstrahlen, und zwar um so mehr, je mehr relativen Abstand die Condensatorbelegungen besitzen. Von diesem Strahlungsverlust wollen wir aber in der Rechnung absehen. — Daher er-

1) Vgl. Kirchhoff, ges. Abhandl. p. 131, 154. 182. — Drude, Phys. d. Aethers, p. 376.

giebt nun die Anwendung der Gleichungen (1), (2), (3), wenn man (1) nach t differenzirt, als Grenzbedingung am Ende der Drähte:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = -4c^2 \lg \frac{d}{R}\left(C\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} + \frac{1}{w}\frac{\partial i}{\partial z}\right). \tag{4}$$

Es mögen nun vom Erreger die Wellen:

$$e_e = e^{-\gamma\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)$$

in das Drahtsystem gesandt werden. Dabei ist $\lambda = cT$ die Wellenlänge der Schwingung. Man kann e_e als den reellen Theil einer complexen Grösse schreiben. Wir wollen e_e dieser complexen Grösse selbst gleichsetzen und am Schluss der Rechnung zu dem reellen Theil wieder übergehen. Es sei also

$$e_e = e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)}, \quad \alpha = -\gamma + 2\pi\sqrt{-1}. \tag{5}$$

Am Condensator, der bei $z = \beta\lambda$ liege, wird diese einfallende Ladungswelle reflectirt zu:

$$e_r = r \,.\, e^{\alpha\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda}\right)}, \tag{6}$$

wobei r (*der Reflexionsfactor*) im Allgemeinen eine complexe Grösse ist; diese erlaubt die Amplitude und die Phase der reflectirten Welle zu berechnen. — Aus (3), (5) und (6) folgen die Stromwellen:

$$i_e = e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)}, \quad i_r = -r \,.\, e^{\alpha\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda}\right)}.$$

Da nun in (4) zu setzen ist $i = i_e + i_r$, $z = \beta\lambda$, so folgt durch einfache Rechnung:

$$r = e^{-2\alpha\beta}\frac{1-p}{1+p}, \tag{7}$$

$$p = 4\lg\frac{d}{R}\left(c^2 C\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{c}{w}\right). \tag{8}$$

Setzt man nun

$$\frac{p-1}{p+1} = \varrho \,.\, e^{4\pi\varphi\sqrt{-1}}, \tag{9}$$

so wird

$$r = -\varrho \,.\, e^{2\gamma\beta} \,.\, e^{4\pi(\varphi-\beta)\sqrt{-1}}. \tag{10}$$

Liegt nun bei $z = 0$ eine Metallbrücke B über den Paralleldrähten, so werden an ihr die vom Condensator reflectirten Wellen e_r bezw. i_r wiederum reflectirt, und zwar e_r sehr angenähert[1]) einfach mit Umkehr des Vorzeichens. Sämmtliche zwischen dem Condensator und der Brücke hin- und hergehenden Wellen unterstützen sich nun in ihrer Wirkung, wenn der Reflexionsfactor r eine negative reelle Grösse ist[2]), d. h. falls ist

$$\beta = \varphi + \frac{k}{2}, \tag{11}$$

wobei k eine ganze Zahl (oder Null) ist. Diese Werthe von β bestimmen diejenigen Längen $\beta\lambda$ der Drahtleitung, von der Brücke B ab gerechnet, welche maximales Leuchten einer hinter B angebrachten Vacuumröhre veranlassen, d. h. bei welchen Resonanz der Drahtleitung hinter B mit den Schwingungen vor B besteht. Bei der eingangs beschriebenen Methode ist $k = 1$ gewählt. Die sogenannte »Einstellung« l des Apparates ist gegeben durch

$$\frac{l}{\lambda} = \beta - \tfrac{1}{2} = \varphi. \tag{12}$$

Um nun l zu berechnen, müssen in (8) und (9) die reellen und imaginären Bestandtheile von einander getrennt werden. Setzt man

$$p = a + b\sqrt{-1},$$

wobei a und b reelle Grössen sind, so wird nach (8) und (5), falls man für $c^2 C$ schreibt C' (die *elektrostatisch* gemessene Capacität):

$$\begin{aligned} a &= 4 \lg \frac{d}{R}\left(\frac{c}{w} - \gamma\frac{C'}{\lambda}\right), \\ b &= 4 \lg \frac{d}{R} \cdot 2\pi \frac{C'}{\lambda}. \end{aligned} \tag{13}$$

Aus (9) folgt nun:

$$\varrho^2 = \frac{a^2 + b^2 + 1 - 2a}{a^2 + b^2 + 1 + 2a}, \tag{14}$$

---

1) Wie weit diese Annäherung geht, habe ich in den Abhandl. d. k. sächs. Ges. Bd. 23, math.-phys. Cl. 1896, p. 71 berechnet.

2) Vgl. Abhandl. d. k. sächs. Ges. l. c. p. 76.

$$(15)\qquad \operatorname{tg} 4\pi\varphi = \frac{2b}{a^2+b^2-1}\,,\quad 0<\varphi<\tfrac{1}{4}\,.$$

Nach (12) und (15) ist also die »Einstellung« des Apparates gegegeben durch:

$$(16)\qquad \operatorname{tg} 4\pi\frac{l}{\lambda} = \frac{2b}{a^2+b^2-1}\,,\quad 0<l<\frac{\lambda}{4}.$$

Die Einstellung l liegt also, wie es auch die Versuche bestätigen, stets zwischen 0 und $\frac{1}{4}\lambda$, und zwar, wenn man zunächst von der Grösse a, d. h. dem Einfluss der Leitfähigkeit, absieht, ist $l=0$ für unendlich grosse Capacität, dagegen $l=\frac{1}{4}\lambda$ für $C'=0$. ϱ bedeutet das Verhältniss der reflectirten Amplitude zur einfallenden, wie man aus (10) ersieht, falls man dort $\beta=0$ setzt. (Der dortige Factor $e^{2\gamma\beta}$ bedeutet keine wirkliche Amplitudenverstärkung.) Für $a=0$ ist $\varrho=1$, d. h. die einfallenden Wellen werden total reflectirt.

Wenn die Grösse a nur einen geringen Betrag hat, d. h. der Widerstand w sehr erheblich ist (die Dämpfungsconstante γ ist stets klein neben 2π), so hat w nur sehr wenig Einfluss auf die Einstellung l, da nach (16) $\operatorname{tg} 4\pi\frac{l}{\lambda}$ nur von a^2 abhängt. Dagegen ist der Einfluss des w auf die Amplitudenschwächung ϱ nach Formel (14) bedeutender, da ϱ^2 auch von der ersten Potenz des a abhängt; ϱ nimmt mit abnehmendem w ebenfalls ab. — Ist dagegen w sehr klein, d. h. a sehr gross, so wird die Einstellung l erheblich durch w modificirt, indem sie sich dem Werthe Null nähert. Die reflectirte Amplitude nimmt wieder an Betrag zu, um den Werth 1 zu erreichen, falls $w=0$, d. h. $a=\infty$ wird. Letzteres Resultat ergiebt ja auch ohne Weiteres die oben angestellte Ueberlegung, dass eine sehr gut leitende Condensatorflüssigkeit dem Condensator einfach die Rolle einer metallischen Brücke zuertheilt.

I. Betrachten wir jetzt zunächst den Fall $w=\infty$ genauer, *d. h. nehmen wir zunächst an, der Condensator sei mit einem Isolator ohne Leitfähigkeit erfüllt.* In (16) kann man dann a^2 neben b^2 vernachlässigen, da γ^2 stets neben $4\pi^2$ zu vernachlässigen ist (bei meinem Erreger ist $\gamma^2<0{,}03$). Die Formel (16) vereinfacht sich dann zu

$$(17)\qquad \operatorname{cotg} 2\pi\frac{l}{\lambda} = b\,.$$

Die in b auftretende Capacität C' des Condensators setzt sich nun additiv aus zwei Gliedern zusammen, von denen das eine annähernd für jeden speciell gewählten Condensator constant ist, während das zweite proportional mit der Dielektricitätsconstante ε der Füllflüssigkeit ist, d. h. es ist *annähernd:*

$$C' = k_0 + \varepsilon k\,; \tag{18}$$

denn die gewählte Form der Condensatoren entspricht zweien im Nebenschluss liegenden Capacitäten, von denen die erste (k_0) die Capacität derjenigen Stücke der Condensatordrähte ist, welche im äusseren Luftraume und in der Glaswandung des Kölbchens liegen, während die zweite Capacität (εk) die der im Innenraum des Kölbchens liegenden Metalltheile ist, die proportional zur Dielektricitätsconstante der Füllflüssigkeit zunimmt.

Die Gleichung (18) ist aber nur eine angenäherte, da die Capacität irgend welcher Metalltheile dann streng proportional der Dielektricitätsconstante ε ihrer Umgebung ist, wenn sich dieselbe homogen in die Unendlichkeit erstreckt, oder allgemeiner stets dann, wenn die Richtung der elektrischen Kraftlinien bei Variirung des ε unverändert bleibt.

Letzteres würde nun auch bei der von uns gewählten Form der Condensatoren der Fall sein, falls die Innenfläche der Glaswand des Kölbchens überall parallel den elektrischen Kraftlinien des Condensators im ungefüllten Zustande verliefe. Sowie aber diese Innenfläche von elektrischen Kraftlinien geschnitten wird, so erfahren sie bei Füllung des Condensators mit verschiedenem ε ganz verschiedene Knicke an der Innenwand, d. h. der Verlauf der Kraftlinien wird im Allgemeinen mit ε variiren, und deshalb ist die Formel (18) nicht streng richtig. Angenähert wird sie allerdings gelten, da näherungsweise die Glaswand des Kölbchens den elektrischen Kraftlinien parallel verläuft, und letztere auch vorzugsweise an den einander zugewandten Seiten der Metalltheile des Condensators haften.

Wenn man die Formel (18) zu Grunde legte, so würde nach (17) und (13) sein:

$$\operatorname{cotg} 2\pi \frac{l}{\lambda} = b = 8\mu \lg \frac{d}{R} \cdot \frac{k_0 + \varepsilon k}{\lambda} = \delta_0 + \varepsilon \delta\,, \tag{19}$$

wobei δ_0 und δ die Factoren $\lg \frac{d}{R}$ und $\frac{1}{\lambda}$ mit enthalten.

Wenn die Formel (19) streng gültig wäre, so müsste $\operatorname{cotg} 2\pi \frac{l}{\lambda}$, als Function von ε in eine Tafel eingezeichnet, eine Grade darstellen. Thatsächlich ist diese Linie nach den Versuchen besonders bei grösseren ε sehr annähernd eine Gerade, jedoch wird sie bei kleinen ε mit wachsendem ε etwas steiler gegen die ε-Axe, d. h. mit wachsendem ε nimmt das Verhältniss $\delta : \delta_0$ etwas zu[1].

Die Formel (19) würde ein sehr bequemes Mittel bieten, um ε entweder mit einem bekanntem ε' zu vergleichen, indem man mit demselben Condensator bei Füllung mit Luft, Aichflüssigkeit, Untersuchungsflüssigkeit drei Einstellungen macht, oder um ε absolut zu bestimmen durch Anwendung zweier verschiedener Condensatoren von gleichem δ_0 aber verschiedenem δ, indem man vier Einstellungen macht, zwei bei Luftfüllung, zwei bei Füllung mit ε. Diese beiden Wege sind ganz dieselben, wie sie Nernst[2]) bei seiner Methode eingeschlagen hat, es gelten auch hier dieselben von Nernst entwickelten Formeln, wenn man die Nernst'schen Einstellungsgrössen s, s_0, S etc. ersetzt durch unsere Einstellungsgrössen $\operatorname{cotg} 2\pi \frac{l}{\lambda}$. Bei diesen Wegen ist die Kenntniss der Grösse $\lg \frac{d}{R}$ natürlich nicht nothwendig, die Wellenlänge λ muss allerdings gemessen werden, um $l : \lambda$ zu kennen.

Nährungsweise kann man diesen Weg zur Messung von ε also auch hier betreten, aber genaue Bestimmungen würden zumal bei kleinen ε dadurch nicht geliefert[3]). Letztere sind vielmehr so zu erhalten, dass durch Anwendung einiger Aichflüssigkeiten, deren ε (für dieselbe Wellenlänge λ) man durch andere Messung, z. B. die früher von mir beschriebene Methode, genau

1) Dass die Formel (19) nicht streng gültig ist, liegt ausser an dem angeführten Grunde auch daran, dass die Brückenverkürzung der festen Brücke B (vgl. Abhandl. l. c. p. 72) und die des Condensators nicht streng gleich sein werden; letztere wird sich mit zunehmender Capacität der von der Metallbrücke hervorgebrachten Brückenverkürzung nähern.

2) W. Nernst, Ztschr. f. phys. Chem. **14**, p. 622, 1894.

3) Derartige Fehler sind bei der von Nernst angewandten Condensatorform nicht zu befürchten, da bei ihr die Richtung der elektrischen Kraftlinien durch Füllung mit verschiedenen ε nicht verändert wird. — Eine gleiche Form konnte hier nicht angewandt werden, weil die Capacität des Condensators sehr klein sein muss.

kennt, $\operatorname{cotg} 2\pi \frac{l}{\lambda}$ als Function von ε ermittelt wird. Dass diese Function sehr nahe eine lineare ist, macht sie zur graphischen oder rechnerischen Interpolation geeigneter, als wenn die Abhängigkeit der Einstellungen l selber von ε ermittelt wird.

Für die Praxis ist es bequem, die für ein bestimmtes λ erhaltene Curve des $\operatorname{cotg} 2\pi \frac{l}{\lambda}$ auch direct verwenden zu können, wenn λ sich etwas geändert haben sollte, sagen wir in $\lambda(1+\zeta)$, wobei ζ so klein gegen 1 ist, dass ζ^2 zu vernachlässigen ist. Durch Uebergang des λ in $\lambda(1+\zeta)$ gehe l über in $l(1+\chi)$. Um die kleine Aenderungsgrösse χ zu berechnen, ist die Näherungsformel (19) wohl anwendbar. Sie liefert:

$$\operatorname{cotg}\left(2\pi \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{1+\chi}{1+\zeta}\right) = \operatorname{cotg} 2\pi \frac{l}{\lambda} \cdot (1-\zeta),$$

d. h.

$$l\chi = \lambda\zeta\left(\frac{l}{\lambda} + \frac{\sin 4\pi \frac{l}{\lambda}}{4\pi}\right). \tag{20}$$

Wenn also bei einer Beobachtung die Wellenlänge um $\lambda\zeta$ grösser ist, als die Normalwellenlänge des Apparates, so ist von der Einstellung die nach der Formel (20) bestimmte Grösse $l\chi$ abzuziehen, um direct die für die Normalwellenlänge entworfene Tafel zum Finden des ε benutzen zu können. Wie wir gleich ableiten werden, wählt man zu den Beobachtungen $l : \lambda$ praktisch zwischen den Grenzen $0{,}05 < \frac{l}{\lambda} < 0{,}18$. Der Correctionsfactor in (20) wird dann:

$\frac{l}{\lambda}$	$\frac{l}{\lambda} + \frac{\sin 4\pi \frac{l}{\lambda}}{4\pi}$
0,05	0,10
0,07	0,13
0,09	0,16
0,11	0,19
0,13	0,21
0,15	0,23
0,18	0,24

Zur Beurtheilung der Genauigkeit der Beobachtungen kann man die Näherungsformel (19) ebenfalls verwenden. Einer kleinen Aenderung $d\varepsilon$ von ε entspricht entspricht eine kleine Einstellungsänderung dl nach:

$$\frac{2\pi}{\lambda} dl = - d\varepsilon \,.\, \delta \sin^2 2\pi \frac{l}{\lambda}\,,$$

oder da nach (19)

$$\delta = \frac{\operatorname{cotg} 2\pi \frac{l}{\lambda} - \delta_0}{\varepsilon}\,,$$

so ist:

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = - \frac{4\pi}{\sin 4\pi \frac{l}{\lambda} - 2\delta_0 \sin^2 2\pi \frac{l}{\lambda}} \cdot \frac{dl}{\lambda}\,. \tag{21}$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht die procentische Unsicherheit von ε, falls die Einstellungen um dl unsicher sind. Die Resultate zur Messung von ε sind also am genauesten, wenn $\sin 4\pi \frac{l}{\lambda} - 2\delta_0 \sin^2 2\pi \frac{l}{\lambda}$ möglichst gross ist. Wäre δ_0 verschwindend klein, so würde $l:\lambda = \frac{1}{8}$ die günstigste Beobachtungsbedingung sein. Da bei $\lambda = 72$ cm der Einstellungsfehler dl (als Mittel mehrerer Beobachtungen) kleiner als 1 mm ist, so würde für $dl = 1$ mm bei $\delta_0 = 0$ aus (21) folgen:

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = 0{,}0174\,;$$

ε könnte also bei 1 mm Einstellungfehler auf etwa 2% genau bestimmt werden.

Das Vorhandensein des Werthes δ_0 bewirkt, dass der procentische Fehler für ε grösser wird und dass die genauesten Resultate bei Einstellungen l erhalten werden, die etwas kleiner als $\frac{1}{8}\lambda$ sind. δ_0, welches nach (19) proportional zu der Capacität derjenigen Drahtstücke des Condensators ist, die in der Glaswand und im Aussenraume desselben liegen, ist (bei festem λ) für die verschiedenen angewandten Condensatoren nicht sehr verschieden, jedoch variirt es etwas mit dem absoluten Werthe von ε, indem aus dem oben p. 595 angeführten Grunde bei grösserem ε der Werth von δ_0 kleiner wird. Mit Benzolfüllung, d. h. bei $\varepsilon = 2{,}26$, ist für $\lambda = 72$ cm (näherungsweise) $\delta_0 = 0{,}25$;

bei Wasserfüllung $\varepsilon = 81$ ist etwa $\delta_0 = 0{,}1$. Mit Zugrundelegung dieser beiden Werthe ergiebt sich, falls $dl = 1$ mm und $\lambda = 72$ cm angenommen wird, folgende Unsicherheiten $d\varepsilon : \varepsilon$ für verschiedene Einstellungsgebiete l:

$\frac{l}{\lambda}$	$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$ (ε klein)	$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$ (ε gross)
0,05	3,2%	3,1%
0,06	2,8	2,7
0,07	2,6	2,4
0,08	2,4	2,3
0,09	2,3	2,1
0,10	2,3	2,0
0,11	2,2	1,9
0,12	2,3	1,9
0,13	2,4	2,0
0,14	2,6	2,0
0,15	2,8	2,1
0,16	3,2	2,3
0,17	3,8	2,5
0,18	4,8	2,8
0,19	6,9	3,4
0,20	12,8	4,3

Man erkennt aus dieser Tabelle, dass man den Spielraum der Einstellungen l ziemlich weit wählen kann, ohne an Genauigkeit wesentlich einzubüssen, dass dieser Spielraum aber für grosse ε etwas weiter ist, als für kleine.

Wenn die Wellenlänge λ der Schwingungen grösser gewählt wird, so lässt sich dadurch die Genauigkeit etwas steigern. $dl : \lambda$ behält zwar, wie ich mich durch Versuche überzeugt habe, etwa denselben Werth, jedoch ist nach (19) δ_0 umgekehrt perportional zu λ. Man erkennt aber zugleich, dass der Gewinn au Genauigkeit durch Steigerung von λ nicht erheblich ist. Denn wählt man λ $2\frac{1}{2}$ mal so gross, d. h. $\lambda = 2\frac{1}{2} \cdot 72 = 180$ cm, so würde δ_0 vom Werthe 0,25 auf 0,1 sinken, d. h. man würde mit den grossen Wellen bei kleinem ε dieselbe Genauigkeit erreichen, wie mit den 72 cm Wellen bei grossem ε; wie aber die vorige Tabelle lehrt, ist dieser Unterschied, abgesehen bei grossem Werthe des l, nicht bedeutend, sodass dieser Vortheil nicht die Unbequemlichkeit, welche der Messung längerer Wellen anhaftet, aufwiegt.

An der Hand obiger Tabelle können wir jetzt die Frage beantworten, *mit wieviel verschiedenen Condensatoren man innerhalb guter Genauigkeit sämmtliche vorkommenden Dielelektricitätsconstanten bestimmen kann.* Wählt man nach obiger Tabelle für kleine ε die Grenzen:

$$0{,}055 < \frac{l}{\lambda} < 0{,}155 ,$$

für grössere ε die Grenzen:

$$0{,}055 < \frac{l}{\lambda} < 0{,}183 ,$$

und setzt man für ε die Grenzen 2 (Petroleum) und 87 (kaltes Wasser) fest, so lässt sich mit einem Condensator, dessen $\delta_0 = 0{,}25$; $\delta = 0{,}215$ beträgt, von $\varepsilon = 2$ bis $\varepsilon = 11{,}7$ messen. Mit einem Condensator, dessen $\delta_0 = 0{,}20$; $\delta = 0{,}03$ beträgt, lässt sich von $\varepsilon = 11{,}7$ bis $\varepsilon = 85{,}5$ messen. *Bei geeigneter Wahl kann man daher mit Hülfe zweier Condensatoren sämmtliche vorkommenden Dielektricitätsconstanten ε bestimmen*, wobei ein Einstellungsfehler von 1 mm bei $\lambda = 72$ cm höchstens 3% Fehler in ε bedingt. Durch Häufung zahlreicher Beobachtungen lässt sich mindestens $\frac{1}{2}$ mm Einstellungsgenauigkeit erreichen, *die Leistungsfähigkeit der Methode kann also* (bei nicht absorbirenden Substanzen) *wenigstens auf $1\frac{1}{2}$% getrieben werden.*

Knüpfen wir nun noch einige Bemerkungen an *den Reflexionsfactor ϱ der Amplitude.* Die Formeln (13) und (14) ergeben das merkwürdige Resultat, dass für $w = \infty$, da dann die Grösse $a < 0$ ist, $\varrho > 1$ wird. Wenn auch bei den in praxi vorkommenden Werthen der zeitlichen Dämpfung γ der Ueberschuss des ϱ über 1 immer nur sehr gering ist, so ist es doch widersinnig, dass die reflectirte Welle stärker sein sollte, als die einfallende. Es ist aber zu berücksichtigen, dass wegen der Vernachlässigung des Strahlungsverlustes (cf. oben pag. 591) nach unseren Rechnungen die reflectirte Amplitude zu gross ausfallen muss, und zwar um so mehr, je kleiner die Capacität C' ist. Für sehr grosses C' nähert sich auch ϱ^2 nach (14) für jeden Werth von γ dem Betrage 1. — Bei diesen angenäherten Betrachtungen kann man also dieser theoretischen Amplitudenvergrösserung bei der Reflexion am Condensator kein Gewicht beilegen. Um der Wahrheit näher zu kommen, werden wir jetzt einfach das mit γ proportionale Glied für a in (13) fortlassen, so dass wir haben:

$$a = 4 \lg \frac{d}{R} \frac{c}{w} \,. \tag{22}$$

Dann wird für $w = \infty$ stets $\varrho = 1$ nach (14). Bei der Kleinheit von γ werden auch bei endlichem w die Resultate durch Umänderung der ersten der Formeln (13) in die Formel (22) nur sehr wenig beeinflusst.

II. *Wir wollen jetzt annehmen, dass der Condensator mit einer Substanz von endlicher Leitfähigkeit erfüllt sei*, d. h. wir wollen w endlich annehmen. Das Hauptinteresse knüpft sich zunächst an die Formel (14), aus der sich ergiebt, dass durch endliche Leitfähigkeit allemal eine Amplituden*schwächung* bei der Reflexion eintritt. Zur näheren Untersuchung ihres Betrages kann man zwei Fragen stellen:

1) Wenn die Dielektricitätsconstante ε der Füllflüssigkeit einen festen Werth hat, dagegen ihre Leitfähigkeit beliebig variirt werden kann, bei welchem Betrage der letzteren ist die Amplitudenschwächung ein Maximum, und wie gross ist dieselbe?

2) Wenn Dielektricitätsconstante und Leitfähigkeit der Flüssigkeit gegeben sind, wie hängt dann die Amplitudenschwächung vom Betrage der Capacität, oder der Einstellung l ab?

1. Die Beantwortung der *ersten Frage*, auf die zunächst eingegangen werden soll, kann zur Beurtheilung des Ansprechens der Vacuumröhre bei der beschriebenen Anordnung dienen, falls man einen bestimmten Condensator wählt, der mit wässrigen Lösungen verschiedener Concentration beschickt wird. Bei welcher Leitfähigkeit spricht die Vacuumröhre am schlechtesten an?

Da in diesem Falle nach (13) b constant ist, so muss man in (14) ϱ^2 nach der variabelen Grösse a differenziren und $\frac{\partial \varrho}{\partial a} = 0$ setzen. Diese Operation liefert als Bedingung des Minimums von ϱ^2:

$$a^2 = 1 + b^2 , \quad \varrho^2_{\text{Min}} = \frac{\sqrt{1 + b^2} - 1}{\sqrt{1 + b^2} + 1} \,. \tag{23}$$

Wie man hieraus erkennt, ist die maximale Amplitudenschwächung um so bedeutender, je kleiner b, d. h. die Capacität des

Condensators ist. — Man kann das Resultat in eine bequeme und anschauliche Form bringen, wenn man die Einstellung l' einführt, welche der Condensator bei Füllung mit reinem Wasser d. h. bei $a = 0$, herbeiführt. Da nach (17) ist:

$$\operatorname{cotg} 2\pi \frac{l'}{\lambda} = b,$$

so folgt aus (23):

$$a = \frac{1}{\sin 2\pi \frac{l'}{\lambda}}, \quad \varrho_{\mathrm{Min}} = \operatorname{tg} \pi \left(\tfrac{1}{4} - \frac{l'}{\lambda}\right). \tag{23'}$$

Aus (16) folgt, dass die Einstellung l bei diesem ungünstigsten Werthe a die Hälfte von l' beträgt.

Um die Leitfähigkeit σ (nach absolutem elektromagnetischem Maasse definirt) der Flüssigkeit einzuführen, ist zu berücksichtigen, dass der galvanische Widerstand, den der elektrische Strom beim Uebergang zwischen zwei Elektroden in einer Flüssigkeit erfährt, in einem gewissen, nur von der Natur der Flüssigkeit abhängendem Verhältniss zu der Capacität der Elektroden in der Flüssigkeit steht, *falls die Richtung der elektrischen Kraftlinien und die der Strömungslinien überall zusammenfallen.* Letzteres ist der Fall, wenn die, die Elektroden umspülende Flüssigkeit unbegrenzt wäre oder falls wenigstens ihre (nicht an die Elektroden stossenden) Grenzen überall elektrischen Kraftlinien parallel wären. Näherungsweise ist das nun bei den von uns angewandten Condensatoren der Fall, da ja (cf. oben pag. 13) grade bei dieser Voraussetzung die Formeln (18), (19) bestehen, und diese nach den Versuchen wenigstens sehr annähernd gelten. Wir können also für den Innenraum der Condensatoren voraussetzen, dass Kraftlinien und Stromlinien zusammenfallen.

Wenn wir nun eine unendlich dünne Kraftröhre oder Stromröhre ins Auge fassen, welche von einer Stelle der Elektrode 1 ausgeht und an einer Stelle der Elektrode 2 endet, so ist ihr galvanischer Widerstand

$$w' = \frac{1}{\sigma} \int \frac{ds}{q},$$

falls ds ein Längselement der Röhre, q ihren Querschnitt an beliebiger Stelle bedeutet. Ebenso kann man den dielektrischen Widerstand der Kraftröhre einführen[1]) durch

[1]) Vgl. P. Drude, Wied. Ann. 57, p. 223, 1896.

$$\mathfrak{w}' = \frac{1}{\varepsilon}\int\frac{ds}{q}\,.$$

Sämmtliche Kraft-, bezw. Stromröhren sind nun parallel geschaltet, und ihr Gesammtwiderstand w bezw. $\mathfrak{w}$ folgt aus:

$$\frac{1}{w} = \sum\frac{1}{w'} = \sigma\sum\frac{1}{\int\frac{ds}{q}}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{w}} = \sum\frac{1}{\mathfrak{w}'} = \varepsilon\sum\frac{1}{\int\frac{ds}{q}}\,.$$

Da nun[1]) die Capacität zweier Elektroden gleich dem reciproken dielektrischen Gesammtwiderstande dividirt durch 4π ist und wir nach (18) mit εk die Capacität der in den Innenraum des Condensators ragenden Metalltheile bezeichnet haben, so ist

$$\varepsilon k = \frac{1}{4\pi\mathfrak{w}}\,,$$

und

(24) $$\frac{1}{w} = 4\pi\sigma k.^{2)}$$

Nach (13) ist also

$$a = 8\pi \lg\frac{d}{R}k\,.\,2c\sigma\,.$$

Da wir nun nach (19) $8\pi\lg\frac{d}{R}\cdot\frac{k}{\lambda}$ mit δ abgekürzt bezeichnet haben, so folgt

(25) $$\begin{aligned} a &= 2c\sigma\lambda\,.\,\delta\,,\\ b &= \delta_0 + \varepsilon\delta\,. \end{aligned}$$

Nach (23) ist also die Amplitudenschwächung (durch Umsetzung in Joule'sche Wärme) am bedeutendsten, falls ist:

$$(2c\sigma\lambda\delta)^2 = 1 + (\delta_0 + \varepsilon\delta^2)\,,$$

oder nach (23'):

(26) $$\frac{2c\sigma\lambda}{\varepsilon} = \frac{1}{\cos 2\pi\frac{l'}{\lambda} - \delta_0\sin 2\pi\frac{l'}{\lambda}}\,,$$

---

1) P. Drude, l. c. p. 227.

2) Diese Beziehung ist z. B. an dem Beispiele eines Plattencondensators sofort zu verificiren.

die ungünstigste Leitfähigkeit hängt also von l', d. h. der Condensatorcapacität ab.

Wählt man einen Condensator, dessen Einstellung l' mit reinem Wasser $\frac{1}{8}\lambda$ beträgt (nahezu grösste Genauigkeit, cf. oben pag. 599), so ist die ungünstigste Leitfähigkeit nach (26):

$$2\,\frac{c\sigma\lambda}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{1-\delta_0},$$

d. h. bei $\lambda = 72$ cm, $\varepsilon = 81$, $\delta_0 = 0{,}1$:

$$\sigma = 0{,}294.10^{-10}\,; \qquad K = 276.10^{-8}\,.$$

K bedeutet das Leitvermögen bezogen auf Quecksilber. Nimmt man das Leitvermögen des gewöhnlichen destillirten Wassers zu $K = 7.10^{-10}$ an, so würde also eine wässrige Lösung von 4000-mal höherer Leitfähigkeit am meisten die elektrische Energie der 72 cm langen Wellen in Joule'sche Wärme verwandeln, d. h. besser oder schlechter leitende Lösungen würden die Wellen besser reflectiren.

Für diesen Werth des l' würde die maximale Amplitudenschwächung so bedeutend sein, dass eine Einstellung des Condensators am Apparat gar nicht mehr möglich wäre. Denn nach (23') ist für $l' = \frac{1}{8}\lambda$:

$$\varrho_{\text{Min}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = 0{,}414\,.$$

Will man bei jeder Leitfähigkeit Einstellungen des Condensators ermöglichen, so muss man dessen Capacität grösser wählen, d. h. l' kleiner. Es muss z. B., falls $\varrho_{\text{Min}} = 0{,}8$ sein soll, welcher Werth etwa die Grenze guter Einstellungsfähigkeit am Apparat entspricht, $\dfrac{l}{\lambda} = 0{,}035$ sein. Durch verkleinertes l' nimmt nach (26) die ungünstigste Leitfähigkeit ab. Für den kleinsten möglichen Werth, $l' = 0$, folgt aus (26)

$$K = 175.10^{-8}.$$

2. Zur Beantwortung der *zweiten Frage*, die oben pag. 601 aufgeworfen wurde, wollen wir zur Abkürzung die schon vorhin auftretende Grösse [1])

[1]) In den Abhandlungen d. k. sächs. Ges. Bd. 23, p. 109 ist dieselbe Abkürzung gebraucht.

(27) $$\frac{c\sigma\lambda}{\varepsilon} = s$$

setzen. Nach (25) ist dann

(28) $$a = 2s(b - \delta_0).$$

Setzt man diesen Werth in (14) ein, so erhält man durch Differentiation des ϱ^2 nach b, dass ϱ^2 ein Minimum erreicht, falls ist:

(29) $$b^2 + 4s^2(b - \delta_0)^2 = 1 + 2\delta_0 b,$$

d. h. falls nach (16) ist:

(30) $$\operatorname{tg} 4\pi \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{\delta_0},$$

und zwar ist dann

(31) $$\varrho^2_{\mathrm{Min}} = \frac{1 + b\delta_0 - 2s(b - \delta_0)}{1 + b\delta_0 + 2s(b - \delta_0)}.$$

Die Resultate werden besonders einfach, wenn man den meist kleinen Betrag δ_0 vernachlässigt. Es wird dann

(28') $$a = 2sb.$$

Die stärkste Schwächung tritt ein für

(29') $$b^2(1 + 4s^2) = 1,$$

d. h.

(30') $$\operatorname{tg} 4\pi \frac{l}{\lambda} = \infty, \quad l = \tfrac{1}{8}\lambda,$$

und zwar ist

(31') $$\varrho^2_{\mathrm{Min}} = \frac{1 - 2sb}{1 + 2sb} = \frac{\sqrt{1 + 4s^2} - 2s}{\sqrt{1 + 4s^2} + 2s}.$$

Für beliebiges δ, d. h. l, ergeben die Formeln (14) und (16), *falls s so klein ist, dass man $4s^2$ neben 1 vernachlässigen kann:*

(32) $$\varrho = 1 - 2s \sin 4\pi \frac{l}{\lambda}.$$

Für die genauesten Einstellungen l, die nach pag. 599 in der Nähe von $l = \frac{1}{8}\lambda$ liegen, folgt nach (32):

(32') $$\varrho = 1 - 2s.$$

Da man schon ziemlich geringe Unterschiede von ϱ gegen 1 am Apparat erkennen kann (z. B. sicher $\varrho = 0{,}95$), so kann man verhältnissmässig geringe Werthe von s erkennen (z. B. $s = 0{,}025$).

Hat s bedeutendere Beträge, so erhält man gute Einstellungen des Apparates nur für kleine[1]) Werthe l, d. h. grosse Werthe b, da sonst nach Formel (14) ϱ zu klein wird. Man kann dann in (14) und (16) 1 neben a^2+b^2 vernachlässigen, ebenso die Näherungsformel (28′) anwenden, da in (28) δ_0 klein neben dem grossen b ist. Es ergiebt sich daher aus (16):

$$(33) \qquad 4\pi\frac{l}{\lambda} = \frac{2}{b(1+4s^2)},$$

und aus (14):

$$(34) \qquad \varrho^2 = \frac{b^2(1+4s^2) - 4sb}{b^2(1+4s^2) + 4sb} = \frac{1 - s\,.\,8\pi\frac{l}{\lambda}}{1 + s\,.\,8\pi\frac{l}{\lambda}}.$$

Ist $s\,.\,8\pi\frac{l}{\lambda}$ klein gegen 1, so folgt

$$(34') \qquad \varrho = 1 - s\,.\,8\pi\frac{l}{\lambda}.$$

Die Beobachtungen bestätigen diese theoretischen Schlüsse insofern, als die Capacitäten der Condensatoren um so grösser, die Einstellungen l um so kleiner zu wählen sind, falls man gutes Ansprechen der Vacuumröhre erzielen will, je höher die Leitfähigkeit der Flüssigkeit ist. So ergab eine concentrirte wässrige Kupfersulfatlösung der Leitfähigkeit $K = 39.10^{-7}$, d. h. $\sigma = 41{,}5.\,10^{-12}$, kein Ansprechen bei $l = 2$ cm, $\lambda = 72$ cm, aber schon schwaches Ansprechen bei $l = 1$ cm, und gutes bei $l = \frac{1}{2}$ cm. Da für $\lambda = 72$ cm s nach (27) folgt zu $s = 1{,}1$ so ist bei $l = 1$ cm: $8\pi\frac{l}{\lambda}s = 0{,}38$, d. h. nach (34) $\varrho = 0{,}67$. Für $l = 2$ cm folgt $\varrho = 0{,}37$; für $l = \frac{1}{2}$ cm $\varrho = 0{,}82$.

Alle diese Absorptionserscheinungen hängen, gerade wie bei der früher beschriebenen Methode zur Messung des elek-

1) Werthe von l, die nahezu $\frac{1}{4}\lambda$ sind, d. h. sehr kleine Werthe von δ, ergeben ebenfalls geringe Amplitudenschwächung. Zur Untersuchung der Natur der Flüssigkeit ist dies aber weniger zu empfehlen.

trischen Brechungsexponenten, nur von der Grösse s ab[1]). Bei Verkleinerung der Wellenlänge um die Hälfte muss daher die Leitfähigkeit bei gleichem ε doppelt so gross sein, um gleiche Absorption hervorzurufen.

Was die Einstellungen l anbelangt, so zeigt die Formel (16), dass durch erhebliche Werthe von s die Werthe l kleiner werden. Das Resultat ist aus (16) sofort abzulesen, wenn man für a den Werth nach (28) oder den Nährungswerth (28') einsetzt. Letzterer liefert:

$$\text{(35)} \qquad \operatorname{tg} 4\pi \frac{l}{\lambda} = \frac{2b}{b^2(1+4s^2)-1}\,.$$

Es erhebt sich nun die Frage, *wie man aus der Einstellung l auf die Constanten ε und σ der Condensatorflüssigkeit schliessen kann*. Da offenbar zwei, von einander unabhängige Beobachtungen gemacht werden müssen, so kann man in folgender Weise verfahren: Bei Anwendung eines Condensators (δ_0, δ_1) erhalte man die Einstellung l_1, der die (aus der experimentell ermittelten Curve entnommene) Dielektricitätsconstante ε_1 entsprechen möge, falls die Condensatorflüssigkeit ein vollkommener Isolator wäre.

Man hat dann nach (16), (25) und (35):

$$\text{(36)} \quad \operatorname{tg} 4\pi \frac{l_1}{\lambda} = \frac{2(\delta_0+\varepsilon_1\delta_1)}{(\delta_0+\varepsilon_1\delta)^2-1} = \frac{2(\delta_0+\varepsilon\delta_1)}{(\delta_0+\varepsilon\delta_1)^2(1+4s^2)-1}\,.$$

Bei Anwendung eines zweiten Condensators anderer Capacität (δ_0, δ_2) finde man die Einstellung l_2, der die Dielektricitätsconstante ε_2 eines vollkommenen Isolators entspreche.

---

1) Dass diese Grösse s eine entscheidende Rolle spielt bei allen Fragen, in denen es sich handelt um den Einfluss der Leitfähigkeit auf Messungen, welche die dielektrischen Eigenschaften der Substanz erschliessen wollen, ist direct aus den Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes im Innern der Substanz zu entnehmen. Vgl. die Physik des Aethers vom Verf. p. 549. Man kann sagen, dass die Leitfähigkeit allemal die Genauigkeit derartiger Messungen zerstört, falls die Grösse s den Werth 1 wesentlich überschreitet. So ist z.B. bei Messungen mit Rhumkorff-Schwingungen und Telephon 16000 als obere Grenze der Schwingungszahl anzunehmen. In (27) wird für $\varepsilon = 81$ und $\lambda = c:16000$, $s = 1$ bei $K = 1{,}4 \,.\, 10^{-10}$. Diese Leitfähigkeit entspricht etwa gut destillirtem Wasser. Wässrige Lösungen von höherer Leitfähigkeit, als $K = 14 \,.\, 10^{-10}$ ($s = 10$) wird man jedenfalls nach dieser Methode nicht mehr genau untersuchen können. Diese Zahl entspricht der von Heydweiller (Wied. Ann. **57**, p. 698, 1896) auf anderem Wege berechneten Grenze.

Dann ist, analog wie in (36):

$$(37)\quad \operatorname{tg} 4\pi \frac{l_2}{\lambda} = \frac{2(\delta_0 + \varepsilon_2 \delta_2)}{(\delta_0 + \varepsilon_2 \delta_2)^2 - 1} = \frac{2(\delta_0 + \varepsilon \delta_2)}{(\delta_0 + \varepsilon \delta_2)^2 (1 + 4 s^2) - 1}.$$

Aus (36) und (37) ergiebt sich, dass der Einfluss von s, d. h. der Leitfähigkeit, dann bemerklich ist, wenn ε_1 verschieden gefunden wird von ε_2. Beide Constanten ε und s können aus (36) und (37) berechnet werden.

Um diese Berechnung bequem zu gestalten, wollen wir die zwei möglichen Fälle gesondert betrachten:

1) Leitfähigkeit gross, d. h. $4 s^2$ gross neben 1. Da man ein Ansprechen der Vacuumröhre in diesem Falle nur bei kleinen Werthen l_1 und l_2 erzielen kann, weil sonst die Amplitudenschwächung zu stark, d. h. ϱ zu klein ist, so kann man in (36) und (37) 1 neben $(\delta_0 + \varepsilon_1 \delta_1)^2$, $(\delta_0 + \varepsilon_2 \delta_2)^2$ und $(\delta_0 + \varepsilon \delta_1)^2 (1 + 4 s^2)$, $(\delta_0 + \varepsilon \delta_2)^2 (1 + 4 s^2)$ vernachlässigen und erhält dann aus (36) und (37):

$$\frac{1}{\delta_0 + \varepsilon_1 \delta_1} = \frac{1}{(\delta_0 + \varepsilon \delta_1)(1 + 4 s^2)},$$

$$\frac{1}{\delta_0 + \varepsilon_2 \delta_2} = \frac{1}{(\delta_0 + \varepsilon \delta_2)(1 + 4 s^2)}.$$

Da nun ferner δ_0, zumal bei grosser Gesammtcapacität, ein kleiner Bruch ist (0,1), so kann man es gegen das bedeutende $\varepsilon_1 \delta_1$ etc. vernachlässigen und erhält daher:

$$(38)\qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon (1 + 4 s^2).$$

Bei sehr grosser Leitfähigkeit, d. h. bedeutendem s, werden daher die beiden äquivalenten ε_1 und ε_2 einander gleich, man kann ε und s nicht gesondert bestimmen, sondern erhält nur die Combination $\varepsilon (1 + 4 s^2)$. Um ε zu ermitteln, muss man daher s kennen.

Für sehr grosse Werthe der Leitfähigkeit knüpft man die Berechnung am besten direct an die Formel (16) an, welche bei grosser Leitfähigkeit übergeht in:

$$(35')\qquad 4\pi \frac{l}{\lambda} = \frac{2b}{a^2} = \frac{\delta_0 + \varepsilon \delta}{2 c^2 \sigma^2 \lambda^2 \delta^2}.$$

Man kann nach dieser Formel, wenn man l und σ beobachtet, wenigstens die Grössenordnung der Dielektricitätsconstante taxiren. Z. B. ist bei 80% Schwefelsäure $c\sigma = 3{,}3$. Da ferner

Condensatoren mit $\delta = 0{,}01$ und $\delta_0 = 0{,}2$ wohl construirbar sind (z. B. der in Figur 2 auf pag. 587 abgebildete Condensator besitzt ungefähr diese Werthe), so folgt aus (35) für diesen Fall bei $\lambda = 72$ cm: $l = 1$ mm für $\varepsilon = 0$, $l = 6$ mm für $\varepsilon = 100$. Die Formel (14) ergiebt zugleich einen nicht allzukleinen Werth von ϱ, sodass rohe Einstellungen noch möglich sein müssten. Ich hoffe später über derartige Versuche zur Taxirung der Dielectricitätskonstante unorganischer Säuren berichten zu können.

2) Leitfähigkeit klein, $4s^2$ klein erster Ordnung neben 1, sodass $(4s^2)^2$ neben 1 zu vernachlässigen ist. Dann ist auch ε_1 und ε_2 wenig von einander und von ε verschieden, man kann setzen

$$(39) \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_1(1 + \zeta)\,, \quad \varepsilon = \varepsilon_1(1 - \varphi) = \varepsilon_2(1 - \varphi - \zeta),$$

wobei die Quadrate von φ und ζ gegen 1 zu vernachlässigen sind. Aus (36) und (37) folgt dann, da nach (17) näherungsweise ist:

$$\operatorname{cotg} 2\pi \frac{l_1}{\lambda} = \delta_0 + \varepsilon\,\delta_1\,, \qquad \operatorname{cotg} 2\pi \frac{l_2}{\lambda} = \delta_0 + \varepsilon\,\delta_2\,,$$

und näherungsweise auch δ_0 gegen $\operatorname{cotg} 2\pi \frac{l_1}{\lambda}$ bezw. $\operatorname{cotg} 2\pi \frac{l_2}{\lambda}$ zu vernachlässigen ist, weil nur kleine Werthe l_1, l_2 gutes Functioniren des Apparates erlauben:

$$(40) \qquad \begin{aligned} 4s^2 &= \frac{\zeta}{\cos^2 2\pi \frac{l_2}{\lambda} - \cos^2 2\pi \frac{l_1}{\lambda}}\,, \\ \varphi &= 4s^2 \cos^2 2\pi \frac{l_1}{\lambda}\,. \end{aligned}$$

Hiernach sind also aus bekanntem ζ die beiden Unbekannten $4s^2$ und φ, d. h. auch ε und σ zu berechnen. Die Bestimmung von $4s^2$ wird aber nur ungenau, da wegen der Störung durch die Absorption auch ζ nur ungenau zu ermitteln ist.

III. *Der Condensator sei mit einer anomal absorbirenden Flüssigkeit erfüllt.* Manche Flüssigkeiten, z. B. die Alkohole und Fettsäuren, besitzen für elektrische Wellen der hier betrachteten Länge anomale Absorption, d. h. eine solche, wie sie nicht aus der elektrischen Leitfähigkeit derselben folgt. Letztere ist vielmehr wegen ihres geringen Betrages hier ganz zu vernachlässigen. Diese »anomalen« Flüssigkeiten besitzen hinsichtlich ihrer elektrischen Natur für jede Schwingung bestimmter Periode zwei charakteristische Constanten, als welche man ihren elektrischen Brechungsexponenten n und Absorptionsindex [1]) $\varkappa$ wählen kann. Es fragt sich, in welcher Weise die an einem Condensator, der mit »anomaler« Flüssigkeit gefüllt ist, beobachtbaren Erscheinungen von den Constanten n und $\varkappa$ der Flüssigkeit abhängen.

Für Veränderungen bestimmter zeitlicher Periode (ohne Dämpfung) können die Eigenschaften des elektrischen Feldes in jedem Medium durch die Differentialgleichung charakterisirt werden:

$$\frac{(\mathfrak{f} - i\mathfrak{f}')}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{F} = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial z^2},$$

worin der reelle Theil der im Allgemeinen complexen Grösse $\mathfrak{F}$ die elektrische Kraft bedeutet, c die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum, i die imaginäre Einheit und $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ zwei positive Werthe sind, die im Allgemeinen von der betrachteten Schwingungsperiode T abhängen können.

Für »normale« Substanzen der Dielektricitätsconstante ε und Leitfähigkeit σ ist

$$\mathfrak{f} = \varepsilon, \quad \mathfrak{f}' = 2\sigma c^2 T.$$

Der Brechungsexponent n und Absorptionsindex $\varkappa$ einer beliebigen durch $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ definirten Substanz bestimmt sich aus den Gleichungen:

$$n^2(1 - \varkappa^2) = \mathfrak{f}, \quad 2n^2\varkappa = \mathfrak{f}'.$$

Wir können daher in unsre früheren Betrachtungen und Formeln sofort die Constanten n und $\varkappa$ einer beliebigen, auch anomalen, Substanz einführen, wenn wir darin setzen[2]):

$$\varepsilon = n^2(1 - \varkappa^2), \quad \sigma c^2 T = n^2\varkappa. \tag{41}$$

1) Betreffs der Definition dieser Grössen vgl. Abhandlungen d. k. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Cl. Bd. **23**, p. 152, 1896.

2) Wie anfangs hervorgehoben ist, gelten diese Formeln nur für periodische Feldänderungen ohne wesentliche Dämpfung. Strengere Formeln sind in den Abhandl. d. k. sächs. Ges. Bd. **23**, p. 110 (Formeln 109) aufgestellt. Dort ist auch gezeigt, dass man in den praktischen Fällen auf die Dämpfung keine Rücksicht zu nehmen braucht.

Da $cT = \lambda$ (Wellenlänge der Schwingung in Luft) ist, so folgt mit Rücksicht auf (27):

$$(42)\qquad s = \frac{\varkappa}{1 - \varkappa^2}\,.$$

Die frühere Formel (31′) für die grösste Amplitudenschwächung wird so:

$$(43)\qquad \varrho_{\text{Min}} = \frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa}\,.$$

Sie ist also ein Maximum für $\varkappa = 1$, dann reflectirt der Condensator überhaupt die elektrische Welle nicht mehr.

Die frühere Formel (32) die für kleine Absorptionsbeträge gilt, wird:

$$(44)\qquad \varrho = 1 - 2\varkappa \sin 4\pi \frac{l}{\lambda}\,,$$

die Formel (34), die für grössere Werke von $\varkappa$ gilt, welche nicht klein gegen 1 sind, wird:

$$(45)\qquad \varrho^2 = \frac{1 - \varkappa^2 - 8\pi\varkappa \frac{l}{\lambda}}{1 - \varkappa^2 + 8\pi\varkappa \frac{l}{\lambda}}\,.$$

Aus (38) folgt, dass bei bedeutendem $\varkappa$ die Flüssigkeit hinsichtlich der Einstellung l des Condensators so wirkt, wie ein guter Isolator der Dielektricitätsconstante:

$$(46)\qquad \varepsilon = n^2(1 + \varkappa^2)\frac{1 + \varkappa^2}{1 - \varkappa^2}$$

und schliesslich folgt aus (40) eine experimentelle Bestimmung von n und $\varkappa$ gesondert, falls man die Einstellungen mit zwei verschiedenen Condensatoren vornimmt. $\varkappa^2$ muss dabei klein 1. Ordnung gegen 1 sein. In (40) ist dann s^2 einfach durch $\varkappa^2$ zu ersetzen, und mit Berücksichtigung von (41) und (39) wird:

$$(47)\qquad n^2 = \varepsilon_1 \left[1 + \varkappa^2 \left(1 - 4 \cos^2 2\pi \frac{l_1}{\lambda}\right)\right].$$

Eine genauere Bestimmung des $\varkappa$ erhält man, falls man diejenige wässrige Lösung eines Elektrolyten aufsucht, welche in irgend einem Condensator gleiche Amplitudenschwingung hervorruft, wie die zu untersuchende anomale Flüssigkeit in einem beliebigen anderen oder gleichen Condensator. Es sind wiederum die Fälle zu unterscheiden:

1) $\varkappa$ *gross*. Die Einstellungen l müssen klein sein, damit die Vacuumröhre überhaupt anspricht. Es ist dann näherungsweise für die wässrige Lösung (Einstellung l_1) nach (34'):

$$\varrho_1 = 1 - 4s \,.\, 2\pi \frac{l_1}{\lambda}\,,$$

für die anomale Flüssigkeit (Einstellung l_2):

$$\varrho_2 = 1 - \frac{4\varkappa}{1-\varkappa^2}\, 2\pi \frac{l_2}{\lambda}\,.$$

Bei Gleichheit von ϱ_1 und ϱ_2 folgt:

$$\frac{\varkappa}{1-\varkappa^2} = s\,\frac{l_1}{l_2}. \tag{48}$$

Berechnet man also das s der Lösung aus ihrer Leitfähigkeit σ, so ist aus (46) und (48) n und $\varkappa$ der anomalen Flüssigkeit zu erhalten. Das $\varkappa$ der anomalen Flüssigkeit ist nur dann dem Absorptionsindex der wässrigen Lösung gleich, falls $l_1 = l_2$ ist. Zweckmässig sind die Condensatoren so zu wählen, dass l_1 nicht sehr verschieden von l_2 ist.

2) $\varkappa$ *klein*. Kann man $\varkappa^2$ neben 1 vernachlässigen, so wirkt die anomale Flüssigkeit hinsichtlich der Einstellung l des Condensators wie ein guter Isolator der Dielektricitätsconstante

$$\varepsilon = n^2\,. \tag{49}$$

Die Formeln (32) und (44) liefern:

$$\varkappa = s\,\frac{\sin 4\pi \dfrac{l_1}{\lambda}}{\sin 4\pi \dfrac{l_2}{\lambda}}\,, \tag{50}$$

falls s der aus (27) folgende Werth für eine wässrige Lösung ist, die gleiches Ansprechen der Vacuumröhre hervorruft, wie die anomale Flüssigkeit; l_1 und l_2 bedeuten die Einstellungen an den mit Lösung bezw. Flüssigkeit gefüllten Condensatoren. Dieselben können von einander verschieden gewählt werden, aber es ist zweckmässig, dass sowohl l_1 als l_2 in der Nähe von $\frac{1}{8}\lambda$ liegt, da nach (32) bezw. (44) dann der stärkste Einfluss von s bezw. $\varkappa$ auf die Stärke ϱ der reflectirten Amplitude, d. h. auch auf das Ansprechen der Vacuumröhre, ausgeübt wird.

Leipzig, December 1896.

H. Ambronn, a.o. M.: *Ueber Pleochroismus pflanzlicher und thierischer Fasern, die mit Silber- und Goldsalzen gefärbt sind.*

I.

In einigen früheren Mittheilungen [1]) habe ich bereits darauf aufmerksam gemacht, dass man durch gewisse Färbungen in optisch anisotropen Substanzen des Pflanzen- und Thierkörpers einen starken Pleochroismus hervorrufen kann. Ich hatte dabei die Vermuthung ausgesprochen, dass die Ursache dieser Erscheinung in der Einlagerung des Farbstoffes in krystallinischer Form zu suchen sei. Die Krystalle der zu den Färbungen benutzten Stoffe zeigten sämmtlich einen ganz ähnlichen Pleochroismus, wie die in ihren Lösungen gefärbten Fasern. Eine durch die anisotropen Eigenschaften dieser Fasern hervorgerufene gleichsinnige Orientirung eingelagerter Krystalltheilchen würde also auch ungefähr dieselben optischen Wirkungen hervorbringen können, wie die Krystalle der Farbstoffe selbst.

Wurden dagegen die Färbungen mit Stoffen ausgeführt, die in festem Zustande entweder überhaupt nicht krystallinisch waren oder deren Krystalle keinen Pleochroismus besassen, so liess sich auch in den damit gefärbten Fasern keine Verschiedenheit der Absorption in verschiedenen Richtungen erkennen.

Die Resultate einiger Versuche, die ich später anstellte, waren sehr geeignet, die in den erwähnten Mittheilungen ausgesprochene Vermuthung zu bestätigen. Es lag nahe, die in der Histologie so vielfach benutzte Einlagerung von Silber hinsichtlich ihres optischen Verhaltens zu prüfen. Das Silber krystallisirt im regulären System und ein Dimorphismus ist nicht bekannt, also konnte man annehmen, dass auch bei Einlagerung dieses Metalles in krystallinischer Form kein Pleochroismus auf-

1) Wiedem. Annalen Bd. 34, 1888. S. 340; Arch. f. d. ges. Phys. Bd. 44, 1889. S. 301; Ber. d. Deutschen Bot. Ges. Bd. 6, 1888. S. 226, und Bd. 7, 1889. S. 103.

treten würde. Diese Erwartung wurde bei den damaligen Versuchen in der That bestätigt, die versilberten Fasern zeigten keine Spur von Pleochroismus. Das dabei angewandte Verfahren war folgendes: es wurden Leinen- oder Baumwollenfasern oder auch Schnitte aus Coniferenholz einige Zeit in eine Lösung von Silbernitrat gelegt, dann in destillirtem Wasser genügend abgespült und in eine Chlornatriumlösung gebracht. Nach nochmaligem Auswaschen wurden dann die Objecte belichtet. Diese Methode war deshalb gewählt worden, weil das hierbei in den Membranen gebildete Chlorsilber bei intensiver Beleuchtung ziemlich rasch geschwärzt wird. Die so erhaltenen Präparate zeigten eine gleichmässige, dunkel blaugraue Färbung der Membranen, aber nicht den geringsten Pleochroismus.

Neuerdings habe ich nun diese Versuche aus anderen Gründen wiederholt, dabei aber die Bildung von Chlorsilber vermieden, also die Belichtung direct nach der Behandlung mit Silbernitrat einwirken lassen. Unter diesen Umständen tritt bekanntlich ebenfalls eine Schwärzung der Fasern ein, aber es dauert viel länger, etwa 24 Stunden und darüber, ehe die Färbung in genügender Weise stattgefunden hat. Die auf diese Weise behandelten Präparate zeigen nun ein ganz anderes optisches Verhalten. Schon bei makroskopischer Betrachtung mit einem Nicol'schen Prisma oder mit einer dichroskopischen Lupe kann man erkennen, dass jetzt ein starker Pleochroismus vorhanden ist. Bei Beobachtung im Mikroskop unter Anwendung gewöhnlichen Lichtes ergiebt sich, dass die einzelnen Membranen in sehr verschiedener Weise gefärbt sind; die einen haben blaugrüne, die anderen röthlichviolette oder auch braunrothe Färbungen angenommen. Nach Einschaltung des Polarisators und Drehung des Präparates über diesem zeigen sich sehr bedeutende Farben- und Intensitätsunterschiede bei den verschiedenen Lagen der Fasern zur Polarisationsebene des einfallenden Lichtes.

Ist die längere Achse der Elasticitätsellipse in den Fasern parallel zur Polarisationsebene, so erscheinen fast sämmtliche Membranen ganz hellgelb oder hellgrünlich; werden dagegen beide Richtungen rechtwinklig gekreuzt, so zeigen jetzt die einzelnen Membranen lebhaft blaue, grüne oder auch rothe und violette Farbentöne. Dünne Schnitte aus Fichtenholz geben dabei ein ganz farbenprächtiges Bild, die einzelnen Membranen erscheinen in den leuchtendsten Farben, und fast jeder behöfte Tüpfel hat in Folge der radialen Lage der Elasticitätsellipsen zwei lebhaft gefärbte und zwei helle Sectoren.

Man kann auf verschiedene Weise verfahren, um diese Färbungen hervorzurufen. Man bringt am besten die Schnitte oder Fasern in eine 1—2proc. Lösung von Silbernitrat oder Silberacetat und lässt sie darin einige Zeit im Dunkeln liegen; sodann nimmt man sie heraus und lässt sie austrocknen. Nach etwa zweitägiger Belichtung haben die Membranen jene intensiven Färbungen angenommen. Nunmehr wäscht man sie in Wasser gründlich aus und legt sie nach Behandlung mit Alkohol und Xylol in Canadabalsam oder ein ähnliches stark brechendes Medium, weil unter diesen Umständen die Farben am schönsten hervortreten und von den dunkeln Contouren der Membranen am wenigsten gestört werden.

Sehr intensive, aber nicht so gleichmässige Färbungen erhält man bei Anwendung stärker concentrirter Lösungen von Silbernitrat. Bringt man auf ein Stückchen Fichtenholz oder ein leinenes Gewebe einige Tropfen dieser Lösungen und lässt nun bei Belichtung eintrocknen, so sieht man nach ein oder zwei Tagen dunkle, unregelmässig begrenzte Flecken, die in der Mitte stark braun, am Rande dagegen dunkelblau oder auch röthlich erscheinen. Untersucht man nun die Fasern aus den braunen Partien, so erkennt man an diesen ebenfalls einen starken Pleochroismus: dunkelbraunviolett — hellbraun. Die aus den Randpartien entnommenen Fasern zeigen hingegen die verschiedensten Farbentöne in derselben Weise, wie man sie in verdünnten Lösungen erhält.

Es scheint nothwendig zu sein, dass die Präparate eintrocknen, denn lässt man sie in den Lösungen bei Belichtung liegen, so werden sie nach längerer Zeit auch etwas dunkler, aber mehr missfarbig grau, die einzelnen Membranen erscheinen dann bei mikroskopischer Betrachtung fast ungefärbt und besitzen keinen Pleochroismus.

Sehr bemerkenswerth ist, dass eine intensive Färbung selbst dann möglich ist, wenn man überhaupt keine Lösungen anwendet, sondern die lufttrockenen Schnitte oder Fasern mit fein pulverisirtem Silbernitrat bestreut und so im Lichte liegen lässt. Ja man kann sagen, dass man auf diese Weise sogar die intensivsten Färbungen erhält. Nach etwa zwei Tagen bildet sich um jeden Krystallsplitter, der mit den Fasern in directer Berührung steht, ein sehr lebhaft gefärbter Hof, der sich allmählich immer mehr verbreitert. An seiner Peripherie erscheint er zart rosa, weiter nach innen lebhaft blau, grün, violett, wenn die Polarisationsebene senkrecht zu der längeren Axe der Elasticitätsellipse steht. Bei Parallelstellung sind die Membranen fast farblos. Lässt man solche Präparate mehrere Wochen lang ohne jede Berührung mit Wasser in tropfbar flüssiger Form liegen, so erreicht der Durchmesser der Höfe etwa 2—3 mm, jetzt sind aber nur in den äusseren Zonen jene lebhaften Farbentöne bemerkbar, weiter nach innen erscheinen die Fasern in der einen Stellung dunkelbraunviolett und in der anderen hellbraun, also ganz ebenso wie die Fasern, die mit concentrirten Lösungen gefärbt wurden.

Erwähnt mag noch werden, dass man in diesen Höfen eine grössere Anzahl eigenthümlicher concentrischer Ringe mit scharfen Contouren sieht. Es hat fast den Anschein, als ob verschiedene Perioden in dem Vordringen der Färbung zu unterscheiden wären. Die ganze Erscheinung ist schwer zu beschreiben und ich will deshalb auch nicht weiter darauf eingehen, zumal ja die Herstellung solcher Präparate und ihre Beobachtung nicht die geringsten Schwierigkeiten bietet.

Ein derartiger Vorgang, bei dem ein fester Körper mit einem anderen festen Körper ohne Mitwirkung irgend einer Flüssigkeit gefärbt wird, hat zunächst etwas Ueberraschendes. Jedenfalls liegt ein ganz eigenartiger Diffusionsvorgang der Erscheinung zu Grunde, der näher untersucht zu werden verdient. Dass der Wassergehalt der Luft und die geringe Hygroscopicität der benutzten Fasern dabei eine Rolle spielt, ist wohl mit Sicherheit anzunehmen, denn bei Präparaten, die mehrere Wochen hindurch sich im Exsiccator befanden, sonst aber in ganz derselben Weise hergestellt waren, unterblieb die Hofbildung fast ganz und nur an den Berührungsstellen der Krystallsplitter zeigten sich sehr kleine gefärbte Flecken.

Wenn somit auch der Wassergehalt der Luft bei diesem Vorgange eine wichtige Rolle spielt, so bieten doch im Uebrigen das allmähliche Vordringen und die damit verbundenen fortwährenden Farbenänderungen noch manches Räthselhafte. Besonders auffällig erscheint dabei das Auftreten jener scharf contourirten concentrischen Ringe, denn die naheliegende Vermuthung, dass durch sie vielleicht die täglichen Belichtungsperioden von einander getrennt werden, ist wohl kaum zutreffend, da ihre Zahl durchaus nicht mit der der Tage übereinstimmt, sondern geringer als diese ist. Da in einem Zeitraum von mehreren Wochen die Intensität der einzelnen täglichen Belichtungen und ebenso auch die Luftfeuchtigkeit grosse Verschiedenheiten aufweist, so wäre es immerhin möglich, dass die Bildung der Ringe dadurch beeinflusst würde. Es wäre deshalb sehr wünschenswerth, diese Versuche unter Einwirkung einer andauernd gleich starken Lichtquelle und bei constantem Wassergehalt der Luft auszuführen. Unter diesen Umständen liessen sich auch Messungen über die Schnelligkeit des Vordringens gewinnen. Leider bin ich nicht in der Lage, derartige Versuche anzustellen.

Es mag noch bemerkt werden, dass diese Art der Färbung mit trockenem Silbernitrat nicht bloss bei pflanzlichen Fasern eintritt, sondern sich auch in ganz ähnlicher Weise an thierischen Fasern oder Haaren, sowie an Gelatine und künstlich hergestellten Cellulosehäuten beobachten lässt. Führt man die Versuche an Chitinsehnen von Krebsen aus, so treten ganz dieselben Färbungen auf wie bei den pflanzlichen Fasern, zumal wenn die Sehnen vorher mit kochender alkoholischer Kalilauge behandelt waren. Bei anderen Sehnen, z. B. bei denen des Mäuseschwanzes, ferner bei weissen Menschenhaaren, dauert das Eindringen jedenfalls etwas länger und die Höfe zeigen von Anfang an nur braunviolette Färbungen, aber ebenfalls einen starken Pleochroismus dunkelbraunviolett — hellbraun. Ganz dieselben Farben treten auch in trockener Gelatine bei Bestreuung mit Silbernitrat auf. Nimmt man zu den Versuchen gewöhnliche Gelatine, so zeigen die braunen Höfe natürlich keinen Pleochroismus, war aber die Gelatine durch starke Spannungen vorher doppelbrechend gemacht, so liess sich derselbe Pleochroismus wie bei den Mäuseschwanzsehnen beobachten. Schliesst man diese Präparate mit braungefärbten Höfen in Canadabalsam ein, so verbreitern sich nach kurzer Zeit die gefärbten Zonen sehr bedeutend, aber ohne scharfe Grenzen, und schliesslich werden die ganzen Fasern oder Gelatinestreifen ziemlich gleichmässig braun gefärbt. Auch diese nachträgliche Färbung ergiebt bei den erwähnten thierischen Objecten, sowie bei den doppelbrechenden Gelatinepartien denselben Pleochroismus. Eine solche nachträgliche diffuse Färbung in Canadabalsam erinnert einigermassen an die Vorgänge, die vor einiger Zeit von R. Fick[1]) bei Präparaten nach der Golgi'schen Methode beschrieben wurden. Bringt man übrigens kleine Splitter von Silbernitrat direct in Canadabalsam, so bildet sich nach einigen Tagen im Lichte um jeden Splitter ein ähnlicher brauner Hof, und es wäre deshalb wohl möglich, dass auch bei jenen Präparaten die nachträgliche Färbung durch noch nicht veränderte Partien des angewandten Silbernitrats oder eines anderen Silbersalzes bewirkt würde.

Behandelt man die thierischen Fasern und die Gelatinestreifen nicht mit trockenem Silbernitrat, sondern mit Lösungen dieses Salzes in ähnlicher Weise, wie dies oben für die pflanzlichen Fasern beschrieben wurde, so treten nach Belichtung dieselben braunen Färbungen auf. Bei den Sehnenfasern und Haaren findet sich dann auch der gleiche Pleochroismus. Die doppelbrechenden Gelatinestreifen kann man allerdings nicht mit wässeriger Silbernitratlösung behandeln, weil sie sonst ihre Anisotropie verlieren würden. Man muss bei diesen eine in ca. 80proc. Alkohol gesättigte Silbernitratlösung anwenden und die Streifen mehrere Tage darin liegen lassen. Bringt man sie dann ans Licht, so färben sie sich ebenfalls gleichmässig braun und besitzen auch jenen starken Pleochroismus.

Da hiernach die Anwendung des Silbernitrats bei den verschiedensten Objecten stets pleochroitische Färbungen ergeben hatte, so lag es nahe, auch die Wirkungen des in der Histologie viel benutzten Goldchlorids in dieser Hinsicht zu studiren. Das Verhalten anderer verwandter Metalle habe ich bis jetzt noch nicht geprüft, hoffe aber später über solche Untersuchungen berichten zu können.

Lässt man pflanzliche Fasern oder Haare, am besten dünne Schnitte aus Fichtenholz, einige Zeit in 1—2proc. wässeriger oder alkoholischer Goldchloridlösung liegen und dann auf dem Objectträger eintrocknen, so zeigen sie nach zwei- bis dreitägiger Einwirkung des Lichtes eine blaugraue Färbung. Wäscht man nun die Präparate in Wasser aus und schliesst sie dann in Canadabalsam ein, so kann man ebenfalls schon bei makroskopischer Betrachtung mit einem Nicol oder mit der dichroskopischen Lupe eine sehr starke Verschiedenheit in der Absorption er-

1) R. Fick, Zur Technik der Golgi'schen Färbung. Zeitschr. f. wiss. Mikroskopie Bd. 8, S. 168.

kennen. Der bei dieser Färbung auftretende Pleochroismus ist so stark, dass man nicht einmal ein Nicol'sches Prisma braucht, um ihn zu erkennen; schon das theilweise geradlinig polarisirte Licht, das vom blauen Himmel reflectirt wird, genügt vollkommen dazu. Hält man das Präparat in der Weise gegen eine von der Sonne ziemlich entfernte Stelle des blauen Himmels, dass die Längsrichtung der Fasern parallel zu der durch die Sonne und den beobachteten Ort des Himmels gehenden Linie liegen, so erscheinen sie röthlich gefärbt, kreuzt man beide Richtungen unter rechtem Winkel, so haben sie nunmehr eine blaugrüne Farbe.

Noch deutlicher wird natürlich die Erscheinung im Mikroskop sichtbar. Steht die Polarisationsebene parallel zu der längeren Axe der wirksamen Elasticitätsellipse, so zeigen die Membranen eine lebhafte rothe Färbung, dreht man den Objecttisch um 90°, so ändert sich die Farbe in ein leuchtendes Blaugrün oder reines Grün. Ganz ähnliche Unterschiede zeigen auch in derselben Weise behandelte Leinenfasern, Samenhaare und dergl., sowie von thierischen Objecten Chitinsehnen, elastische Fasern, Haare und vor allem die Sehnenfasern des Mäuseschwanzes. Bei dem letzteren Objecte sind die Farben noch intensiver als bei den erwähnten Holzfasern. Bemerkenswerth ist, dass auch hier eine längere Zeit nothwendig ist, um die stark pleochroitische Färbung mit Goldchlorid hervorzurufen; denn wenn man die Fasern nach wenigen Stunden aus der Goldchloridlösung herausnimmt und dann mit Ameisensäure behandelt, so werden sie allerdings sehr bald intensiv blau oder blauviolett gefärbt. Aber die so gefärbten Membranen besitzen keine Spur von Pleochroismus. Die Färbung der untersuchten pflanzlichen Fasern erfolgt, wie es scheint, am schönsten, wenn man 1—2 proc. Lösungen von Goldchlorid anwendet. Benutzt man concentrirtere Lösungen oder legt man kleine Krystalle von Goldchlorid auf die Fasern, so tritt bald eine intensive braune Färbung ein, die jedoch keinen bemerkbaren Pleochroismus zeigt; nur an den Rändern der dabei entstandenen Flecken entstehen blaue Färbungen mit starkem Pleochroismus.

Bei den erwähnten thierischen Fasern ist ein längeres Verweilen in den Lösungen nöthig, und die Färbung erfolgt dann auch ohne Austrocknen nach einigen Tagen. Am besten gelingt sie, wenn man die frischen Fasern direct in die Goldchloridlösung bringt, zwei Tage im Dunkeln darin liegen lässt und dann in destillirtem Wasser auswäscht. Werden die im Wasser liegenden Präparate dem Lichte ausgesetzt, so entstehen nach einigen Tagen die beschriebenen sehr intensiven Färbungen, die selbst an den dünnsten Fasern von nur wenigen Mikromillimetern Durchmesser ausserordentlich deutlich zu beobachten sind. Gerade diese dünnsten Fasern zeigen die Erscheinung am reinsten und besitzen die leuchtendsten rothen und blaugrünen Farbentöne bei verschiedenen Lagen zur Polarisationsebene. Sie übertreffen in der Stärke des Pleochroismus bei weitem die gewöhnlich als typische Beispiele aufgeführten Mineralien wie Pennin, Epidot, Cordierit; denn Platten aus diesen Krystallen von so geringer Dicke lassen kaum noch eine verschiedene Absorption erkennen. Mehr Aehnlichkeit besteht schon zwischen solchen Fasern und den dünnen Krystallplättchen des Herapathits, deren Pleochroismus bekanntlich noch stärker als der des olivengrünen Turmalins ist.

Auch bei doppelbrechender Gelatine lässt sich durch Einwirkung des Goldchlorids ein deutlicher Pleochroismus herbeiführen. Legt man Streifen aus solcher Gelatine mehrere Tage in alkoholische Goldchloridlösung, so nehmen sie eine schwach gelbliche Färbung an, zeigen aber keinen Pleochroismus. Schliesst man sie nun in Canadabalsam ein, so tritt ganz allmählich im Laufe mehrerer Wochen eine röthliche Färbung ein, und nunmehr ist auch eine beträchtliche Verschiedenheit in der Absorption zu beobachten. Viel intensivere Rothfärbung erhält man auf folgende Weise: man lässt isotrope Gelatinestreifen in wässeriger Goldchloridlösung aufquellen und sodann in stark gespanntem Zustande eintrocknen. Sie haben dann eine hellgrünlichgelbe Färbung und diese Farbe ändert sich auch nicht, wenn die Streifen mehrere Wochen hindurch in Luft liegen bleiben. Schliesst man sie jedoch in Canadabalsam ein, so verwandelt sich nach mehreren Wochen die gelbgrünliche Färbung in eine leuchtend rothe, und diese besitzt einen sehr starken Pleochroismus.

Es ist wohl zweifellos, dass die im Vorstehenden beschriebenen Färbungen ausser an den von mir untersuchten Objecten auch noch an zahlreichen anderen pflanzlichen und thierischen Fasern in ähnlicher Weise hervorgerufen werden können; auch andere Gold- und Silberverbindungen dürften die gleichen Wirkungen haben. Ich habe nun zwar nicht die Absicht, die Untersuchungen in dieser Richtung auszudehnen, möchte aber doch darauf aufmerksam machen, dass solche Färbungen gewiss schon oft bei histologischen Untersuchungen beobachtet wurden und dass nur der dabei auftretende Pleochroismus aus naheliegenden Gründen übersehen worden ist. Man pflegt in der Histologie nach dem optischen Verhalten solcher Färbungen nicht viel zu fragen. Vielleicht ist es in dieser Beziehung nicht ohne Nutzen, hier darauf hinzuweisen, dass eine solche Prüfung nicht die geringsten Schwierigkeiten bereitet. Nach Einschaltung eines Nicol'schen Prismas unter dem Objecttisch braucht man das Präparat nur um die optische Achse des Mikroskops zu drehen, um sofort erkennen zu können, ob Pleochroismus vorhanden ist oder nicht.

II.

Es bleibt nun noch zu erörtern, wie etwa ein so starker Pleochroismus durch die Einwirkung der Gold- und Silbersalze zu erklären wäre. Von vielen Seiten wird angenommen, dass bei derartigen Färbungen eine Reduction der Verbindungen zu sehr fein vertheiltem Silber und Gold in metallischer Form stattfindet, und man spricht deshalb ja auch häufig in der mikroskopischen Technik direct von Versilberung und Vergoldung der Fasern. Wollte man den Pleochroismus auf eine Einlagerung der Metalle in amorpher oder krystallinischer Form zurückführen, so müsste man annehmen, dass die an sich isotropen Metalltheilchen durch die anisotropen Eigenschaften der Fasern in irgend einer Weise eine regelmässige nach verschiedenen Richtungen verschiedene Anordnung erfahren und dass hierdurch der Unterschied in der Absorption hervorgerufen würde. Wir hätten somit ein Gebilde, das man wohl als ein *anisotropes trübes Medium* bezeichnen könnte.

Die optischen Eigenschaften der trüben Medien sind allerdings schon vielfach untersucht worden, aber immer nur an optisch isotropen Körpern; wenigstens ist mir kein Fall in der Literatur bekannt, wo von einem anisotropen trüben Medium die Rede wäre. Obwohl wir also die optischen Eigenschaften der anisotropen trüben Medien zur Zeit nicht kennen, so könnte man doch aus theoretischen Gründen wohl annehmen, dass bei solchen Körpern eine verschiedene Absorption in verschiedenen Richtungen auftreten würde. Die Frage ist nur, ob auch bei den hier in Betracht kommenden Färbungen eine solche Erklärung sich als stichhaltig erweist. Zunächst ist zu bemerken, dass die Durchmesser der eingelagerten Metalltheilchen jedenfalls weit unterhalb der Grössenordnung der Lichtwellenlängen liegen, und dass unter solchen Umständen eigentlich jede gefärbte Faser sowie jeder durch andere Stoffe gefärbte doppelbrechende Krystall ein solches anisotropes trübes Medium darstellen müsste. Danach wäre zu erwarten, dass auch alle solche Fasern und Krystalle pleochroitische Eigenschaften hätten; das ist aber, wie wir aus zahlreichen Beispielen wissen, nicht der Fall.

Auch aus dem oben Erwähnten geht ja hervor, dass die Einlagerung von Silber und Gold in feinvertheiltem Zustande unter gewissen Umständen nicht die geringste Verschiedenheit in der Absorption verursacht. Ungefähr gleichbedeutend mit der Annahme eines anisotropen trüben Mediums würde es sein, wenn man sich vorstellte, dass durch die Färbung eine Art Kreuzgitter oder irgend ein anderes Gitter entstünde, in dem die Abstände der Gitterstäbe in verschiedenen Richtungen verschieden wären. Durch solche Gitter würde ohne Zweifel auch je nach der Richtung eine verschiedene Einwirkung auf das durchgehende Licht ausgeübt werden. Gegen eine Erklärung des Pleochroismus aus einer solchen Structur würde sich allerdings nicht viel einwenden lassen; nur wäre es wiederum nicht recht verständlich, warum manche gefärbte Fasern und Krystalle Pleochroismus besitzen, andere dagegen nicht. Es scheint mir deshalb einfacher und auch berechtigter zu sein, wenn man annimmt, dass die pleochroitische Wirkung auf eine Eigenschaft des färbenden Körpers selbst zurückzuführen ist, die dann zur Geltung kommt, wenn alle seine Theilchen oder doch die Mehrzahl davon durch irgend einen Einfluss gleichsinnig orientirt werden, ebenso wie die Krystallmoleküle in einem einheitlichen farbigen Krystalle mit pleochroitischen Eigenschaften. Hierzu aber würde es nothwendig sein, dass an den einzelnen Theilchen selbst in irgend einer Weise verschiedene Richtungen ausgebildet wären, dass sie also mit anderen Worten selbst schon anisotrope Eigenschaften hätten. Für diese Annahme scheinen mir auch die interessanten Beobachtungen zu sprechen, die

Kundt[1]) früher an gewissen Metallniederschlägen gemacht hat und die zunächst mit den hier behandelten Färbungen in gar keinem Zusammenhange zu stehen scheinen. Kundt hat bei seinen Untersuchungen über die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in Metallen dünne Schichten dieser Körper in verschiedener Weise auf Glas niedergeschlagen. Die eine Methode bestand darin, dass das betreffende Metall in Form eines dünnen Drahtes als Kathode im Vacuum benutzt und nun bei geeigneter Stärke der elektrischen Entladung über einer Glasscheibe zerstäubt wurde. Es bildeten sich dabei unterhalb der Kathode conische Metallspiegel, die überraschende optische Eigenschaften besassen. Kundt sagt hierüber[2]): »Die auf die angegebene Weise niedergeschlagenen Metallspiegel erweisen sich unter dem Mikroskop im durchfallenden Licht als völlig cohärent und homogen; sie zeigen meist, auch wenn sie anscheinend ganz oxydfrei sind, *Newton*'sche Ringe, die besonders deutlich und schön sichtbar sind, wenn die Platten bei ziemlich schiefer Incidenz des Lichtes mit einem Nicol'schen Prisma betrachtet werden. Als ich dieselben aber behufs der Untersuchung der elektromagnetischen Drehung zwischen gekreuzte Nicols brachte, fand ich zu meiner Ueberraschung, dass die Spiegel doppelbrechend waren. Es wurde bald festgestellt, dass nicht das Glas bei der Herstellung der Metallschichten dauernd doppelbrechend geworden war, sondern dass die dünnen Metallschichten selbst die beobachtete optische Erscheinung bedingten«.

Bei genauerer Untersuchung der Doppelbrechung stellte Kundt fest, dass die Elasticitätsachsen radial zum Fusspunkt der Kathode und senkrecht dazu lagen; und zwar sind die radial verlaufenden Achsen nach der hier gewählten Bezeichnungsweise die längeren Achsen der wirksamen Elasticitätsellipsen.

Er liefert sodann den Beweis, dass weder Spannungen in dem Glase, auf dem die Schichten niedergeschlagen waren, noch auch solche in den Metallschichten selbst die Ursache der Doppelbrechung sein können. Da somit diese Möglichkeiten, die Doppelbrechung verständlich zu machen, wegfielen, so suchte

---

1) Kundt, Ueber Doppelbrechung des Lichtes in Metallspiegeln. Wiedem. Ann. Bd. 27, 1886, S. 59 ff.

2) a. a. O., S. 61.

er nach einer anderen Erklärung, und die Ueberlegungen, die er zu diesem Zwecke anstellte, sind gerade für die hier in Betracht kommenden Färbungen von grossem Interesse. Es möge deshalb Entschuldigung finden, wenn ich den ganzen hierauf bezüglichen Absatz der Kundt'schen Mittheilung wiedergebe[1]):

»Es bleibt mithin, soviel ich sehe, nichts anderes übrig, als anzunehmen, dass die Metalltheilchen durch irgend eine Ursache sich auf der Glasplatte krystallinisch anordnen. Man könnte zunächst vermuthen, dass diese krystallinische Anordnung in der Weise zu Stande kommt, dass kleine Krystallindividuen, die sich aus dem von der Kathode ausgesandten Metall bilden, sich in einer bestimmten Richtung radial anordnen, wie ja oft aus einer Lösung doppelbrechender Krystalle eine radial angeordnete flache Druse sich ausscheidet. Eine solche flache Druse kann dann auch im Polarisationsapparat bei parallelem Lichte ein schwarzes Kreuz zeigen, dessen Schnittpunkt im Mittelpunkt der Druse liegt. In diesem Falle müssen aber die kleinen Krystallindividuen an und für sich doppelbrechend sein. Von den oben genannten Metallen, mit denen Spiegel hergestellt wurden, sind nun aber Silber, Gold und Kupfer für gewöhnlich regulär. Mithin fällt auch diese Annahme fort, man müsste denn annehmen, dass auch die genannten Metalle in verschiedenen Krystallsystemen krystallisiren können. Lässt man diese, soviel ich weiss, bisher unerwiesene Annahme fallen, so muss irgend eine besondere Einwirkung in unserem Falle die Anordnung der Theilchen so modificiren, dass die Schicht doppelbrechend wird. Die einzige Kraft, die für diesen Zweck in Betracht kommen kann, scheint mir die elektrische Wirkung zwischen der Kathode und den weggeschleuderten Theilchen zu sein. Da die Entladungen in dem Apparate discontinuirlich sind, so ist jedenfalls anzunehmen, dass jedes fortgeschleuderte Molekül mit Elektricität geladen ist. Ist die Anordnung der Elektricität auf dem Moleküle infolge der Gestalt desselben oder aus irgend einem anderen Grunde nicht eine allseitig gleiche, so wird durch die Elektricität der Kathode jedes Molekül während seiner Bewegung gerichtet werden, und alle Moleküle werden auf der Glasplatte in einer bestimmten Weise orientirt sich absetzen. Die Orientirung wird von der Form der Elektrode und der Lage der Platte

1) a. a. O., S. 68.

zu derselben abhängen müssen. Ist die Kathode ein einfacher Draht und befindet sich vertical unter derselben die Glasplatte, so muss die Orientirung vom Mittelpunkt der Kathode auf allen Radien die gleiche sein, sodass die beschriebene Art der Doppelbrechung auftritt.« Obwohl hiernach Kundt annimmt, dass das Silber in keinem anderen als im regulären Systeme krystallisire, so kommt er doch bei seinen weiteren Ueberlegungen zu dem Resultate, dass die einzelnen von der Kathode abgestäubten Silbertheilchen an sich schon eine gewisse Anisotropie, also eine Ungleichwerthigkeit der Richtungen besitzen. Eine derartige Anisotropie würde aber bei gleichsinniger Orientirung aller Moleküle doch wohl auch zu einem anisotropen Gesammtsystem mit den Eigenschaften eines anisotropen Krystalls führen können, und es wäre deshalb ganz gut möglich, dass man es bei jenen Niederschlägen mit einer Modification des Silbers zu thun hätte, die in einem anderen Systeme krystallisirte; vorausgesetzt, dass die Niederschläge überhaupt aus reinem Silber bestehen, was immerhin fraglich ist.

Von besonderer Bedeutung ist nun noch die weitere Beobachtung Kundt's, dass die doppelbrechenden Silberspiegel auch einen starken Pleochroismus besitzen, der bezüglich der dabei auftretenden Farbentöne fast ganz mit demjenigen übereinstimmt, den ich bei den meisten oben erwähnten Fasern, die mit Silbernitrat in geeigneter Weise behandelt worden waren, nachweisen konnte. Ueber das Verhalten der Goldspiegel in dieser Beziehung theilt Kundt nichts mit, er sagt nur[1]) am Schlusse seiner Mittheilung, dass er an den Spiegeln von Platin, Palladium und Eisen keinen Pleochroismus beobachten konnte.

In der bald darauf erschienenen Arbeit von Dessau »Ueber Metallschichten, welche durch Zerstäuben einer Kathode entstehen«[2]), ist allerdings von dem Pleochroismus der Metallspiegel gar nicht mehr die Rede, doch wird gelegentlich bemerkt, dass die Goldspiegel unter gewissen Umständen im durchfallenden Lichte röthlich erscheinen und auch bei dieser Färbung starke Doppelbrechung zeigen. Es dürfte wohl zu erwarten sein, dass derartige Spiegel bei Untersuchung mit einem Nicol sich ebenfalls als pleochroitisch erweisen würden. Ich bin leider nicht in der

---

1) a. a. O., S. 71.

2) Wiedem. Ann. Bd. 29, 1886. S. 353.

Lage, solche Niederschläge herzustellen und kann deshalb auch diese Vermuthung nicht auf ihre Richtigkeit prüfen.

Man könnte nun fragen, was die optischen Eigenschaften jener von Kundt und Dessau untersuchten Metallspiegel mit den Färbungen anisotroper Fasern zu thun haben, da es sich dabei doch offenbar um ganz verschiedene Dinge handle. Trotzdem dürfte es wohl gerechtfertigt sein, die Erscheinungen miteinander zu vergleichen. In beiden Fällen findet jedenfalls eine gleichsinnige Richtung kleinster Theilchen statt, die in ihrem physikalischen und wahrscheinlich auch in ihrem chemischen Verhalten grosse Aehnlichkeit zeigen. Während in dem einen Falle nach der Kundt'schen Annahme die Richtung als eine Folge der Abstäubung von der Kathode und der damit verbundenen elektrischen Ladung eintritt, findet bei der Färbung der optisch anisotropen Fasern eine gleichsinnige Orientirung infolge der anisotropen Eigenschaften dieser Substanzen statt. So kommt es in beiden Fällen zur Ausbildung eines Gesammtsystems der färbenden Theilchen, das optisch anisotrop und zugleich stark pleochroitisch ist.

Die nach Erzeugung von Chlorsilber in den Membranen entstehenden Färbungen und ebenso die bei Anwendung von Ameisensäure beobachteten Goldeinlagerungen würden dagegen ein isotropes Gesammtsystem darstellen; die einzelnen Theilchen könnten hier nicht gerichtet werden, weil eben bei ihnen infolge Gleichwerthigkeit aller Richtungen eine gleichsinnige Orientirung gar nicht möglich ist. Es drängt sich in diesen letzteren beiden Fällen die Vermuthung auf, dass die hierbei eingelagerten Theilchen wirklich aus metallischem Silber oder Gold in der gewöhnlichen regulär krystallisirenden Modification bestehen. Ob man es nun bei den Färbungen, die starken Pleochroismus hervorrufen, ebenfalls mit reinem Silber und Gold, oder mit irgend welchen Verbindungen dieser Metalle zu thun hat, muss zunächst dahingestellt bleiben. Eine Entscheidung dieser mehr chemischen Frage würde allerdings von grossem Interesse sein; umsomehr, da gerade in neuerer Zeit von verschiedenen Seiten [1]) darauf hin-

1) Carey Lea, Amer. Journ. of Sc. Bd. 37, S. 476; Bd. 38, S. 47 u. 237; Bd. 43, S. 527. — Philos. Mag. Bd. 31, S. 238, 320, 497; Bd. 32, S. 337. — Zeitschr. f. anorg. Chemie Bd. 7, S. 341.

E. A. Schneider, Ber. d. deutsch. chem. Ges. Bd. 24, S. 3370; Bd. 25, S. 1440.

gewiesen worden ist, dass diese Metalle auch in anderen Modificationen auftreten können. So haben manche der von Carey Lea dargestellten Formen »allotropen Silbers« in ihrer Farbe grosse Aehnlichkeit mit den oben beschriebenen, bei Einwirkung von Silbernitrat auf organisirte Fasern entstehenden Färbungen. Bemerkenswerth erscheint es auch, dass einige dieser allotropen Formen des Silbers sich gerade beim Zusammenwirken von Silbernitrat und Colloiden bilden. Da wir es auch in jenen Fasern im Wesentlichen mit colloidalen Substanzen zu thun haben, so wären auch in dieser Beziehung bei den Färbungen für die Umwandlung des Silbernitrats ähnliche Bedingungen gegeben.

Kundt und Dessau haben bei ihren Versuchen, die Niederschläge in verschiedenen Gasarten: Luft, Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff sich bilden lassen und dabei stets Doppelbrechung beobachtet. Sie halten es für möglich, dass Verbindungen der Metalle mit diesen Gasen entstehen. Dass sich bei Gegenwart von Luft oder reinem Sauerstoff Oxydschichten bilden, ist ja auch mit ziemlicher Sicherheit anzunehmen; aber auch diese Schichten waren doppelbrechend und zeigten nur etwas andere Färbungen, als die in reinem Wasserstoff oder Stickstoff hergestellten Spiegel.

Ueber den Grad der Doppelbrechung in solchen Metallspiegeln hat Kundt eine annähernde Berechnung angestellt; er gelangte dabei zu dem Resultate, dass die Differenz der beiden Brechungsexponenten den ausserordentlich hohen Werth von mindestens 5 Einheiten in der ersten Decimale hat, dass aber in Wirklichkeit sich dieser Werth wohl noch höher stellen dürfte. Bei so grosser Verschiedenheit der Brechungsexponenten würde auch der starke Pleochroismus in ganz dünnen Schichten nicht überraschen. Nach den Berechnungen von Kundt und später Dessau schwankt die Dicke der Spiegel etwa zwischen 10^{-5} und 10^{-6} mm. Die dünnsten Fasern, bei denen der Pleochroismus noch sehr deutlich zu beobachten ist, haben einen Durchmesser von 10^{-2} bis 10^{-3} mm. Wenn man nun bedenkt, dass in diesen

---

Barus und Schneider, Zeitschr. f. phys. Chemie Bd. 8, S. 285. — Wiedem. Ann. Bd. 48, S. 327.

Barus, Amer. Journ. of Sc. Bd. 48, S. 451.

Oberbeck, Wiedem. Ann. Bd. 46, S. 265; Bd. 47, S. 353; Bd. 48, S. 745.

Schottländer, Verh. d. deutschen Naturf. Vers. 1893, II, S. 73.

Louis, Bull. d. Soc. franc. d. Min. 1895, S. 278.

Objecten doch die Hauptmasse durch die Substanz der Faser selbst gebildet wird, so erhält man für die Dicke der Schicht, die sämmtliche färbende Theilchen bilden würden, natürlich einen viel geringeren Werth, der wohl auch in der Grössenordnung 10^{-5} bis 10^{-6} mm liegen dürfte.

Zum Schlusse möge noch auf eine Beobachtung von v. Lasaulx [1]) hingewiesen werden, die er an Würfeln von Chlorsilber von Schneeberg in Sachsen machte. An den farblosen Krystallen liess sich durch Druck, wie dies auch nicht anders zu erwarten war, eine starke Doppelbrechung erzeugen. Zugleich aber traten in den zusammengedrückten Partien an manchen Stellen intensiv himmelblaue Farbentöne auf und diese Stellen zeigten einen sehr auffallenden Pleochroismus: »das einemal blau, in der um 90° verwendeten Stellung violett oder rosaroth«. Blieben die Kryställchen eine Zeit lang ruhig liegen, so verlor sich der Pleochroismus wieder, durch vorsichtiges Erwärmen konnte er aber von Neuem hervorgerufen werden und während des Erwärmens fand ein allmählicher Farbenwechsel statt. Am stärksten war der Pleochroismus sofort nach der Einwirkung des Druckes, und die am intensivsten gefärbten Stellen zeigten auch zwischen gekreuzten Nicols die stärkste Aufhellung. Aus dieser Beobachtung v. Lasaulx' geht hervor, dass unter Umständen ein regulärer Krystall durch Spannungen nicht blos doppelbrechend wird, sondern auch seine Färbung bedeutend ändern und pleochroitisch werden kann. Auf Grund dieser Thatsache könnte man nun noch eine weitere Erklärung für die oben beschriebenen Erscheinungen geben. Nähme man an, dass sowohl bei der Einlagerung in die anisotropen Membranen wie auch bei der Abstäubung von der Kathode die an sich isotropen Theilchen etwa durch Spannungen anisotrop gemacht und zugleich orientirt würden, so wäre es denkbar, dass sie sich dann ähnlich wie die von v. Lasaulx beobachteten Krystalle verhielten. Man würde aber dabei ebenfalls ein aus einzelnen nunmehr anisotropen Theilchen bestehendes Gesammtsystem erhalten, und eine solche Erklärung liefe also im Wesentlichen auf dieselben Annahmen hinaus, die den obigen Betrachtungen schon zu Grunde gelegt worden sind.

1) 57. Jahresber. d. Schles. Ges. für vaterländ. Cultur 1889, S. 171.

Prof. **Lange** in Berlin: *Ein elementarer Beweis des Reciprocitätssatzes.* Vorgelegt von C. Neumann, o. M.

§ 1.

Wenn $p = 2n + 1$ eine Primzahl, und z eine beliebige, durch p nicht theilbare Zahl ist, so ist nach dem Euler'schen Kriterium z quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem $z^n \equiv +1$ oder $\equiv -1 \pmod{p}$ ist. Für den gegenwärtigen Zweck lässt sich hieraus noch eine andere Entscheidung herleiten. Wenn man die n Producte $1z, 2z, 3z \ldots nz$ durch p dividirt, so können sich unter den n kleinsten positiven Resten nicht zwei gleiche und nicht zwei vorfinden, deren Summe p ist; denn wenn solche etwa von den Producten αz und βz herkämen, so müsste im ersten Falle $(\alpha - \beta) z$ und im zweiten $(\alpha + \beta) z$ durch p theilbar sein, was unmöglich ist, da α und β kleiner als $\frac{p}{2}$ angenommen sind. Sucht man unter diesen n Resten die ungeraden Zahlen auf, und ersetzt jede derselben, etwa r, durch die gerade Zahl $p - r$, so hat man n gerade Zahlen, unter denen sich nicht zwei gleiche befinden können; denn diese könnten doch nur von einem Paar r und $p - r$ jener Reste herkommen. Da diese Zahlen auch kleiner als p sind, so können es nur die n Zahlen $2, 4, 6 \ldots 2n$ sein, und das Product der n Congruenzen von der Form $\alpha z \equiv \pm \alpha' \pmod{p}$ ist daher gleich

$$1 . 2 . 3 \ldots n . z^n \equiv (-1)^u \, 2 . 4 . 6 \ldots 2n \pmod{p},$$

wenn u die Anzahl der ungeraden Reste war. Ist n eine gerade Zahl, so ist

$$\begin{aligned} 2 . 4 . 6 \ldots 2n &= 2 . 4 . 6 \ldots n . (p-1)(p-3)(p-5) \ldots (p-n+1) \\ &\equiv (-1)^{\frac{n}{2}} . 1 . 2 . 3 \ldots n . \end{aligned}$$

Ist n dagegen ungerade, so ist

$$2.4.6\ldots 2n = 2.4.6\ldots(n-1)(p-1)(p-3)(p-5)\ldots(p-n)$$
$$\equiv (-1)^{\frac{n+1}{2}}.1.2.3\ldots n.$$

Da es hier nicht auf die Zahlen $\frac{n}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ ankommt, sondern nur auf die Alternative ob gerade oder ungerade, was zur Abkürzung fortan der *Charakter* der Zahl genannt werden soll, so kann man, ohne das Resultat zu ändern, jene Zahlen um eine beliebige gerade Zahl vermehren oder vermindern. Vermehrt man, wenn n gerade ist, $\frac{n}{2}$ um die gerade Zahl $\frac{n^2}{2}$, und wenn n ungerade ist, $\frac{n+1}{2}$ um die gerade Zahl $\frac{(n+1)(n-1)}{2}$, so ist die Summe in beiden Fällen $\frac{n(n+1)}{2}$, und daher ist es gestattet, in beiden Fällen die Zahl $\frac{n(n+1)}{2}$ in die Stelle der Exponenten $\frac{n}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ zu setzen, wodurch sich beide Fälle in einen zusammenschliessen. Darnach hat man also, nach Fortlassung des gleichen Factors auf beiden Seiten, das folgende Kriterium:

Wenn $p = 2n + 1$ eine Primzahl und z eine beliebige, durch p nicht theilbare Zahl ist; wenn ferner die Anzahl der kleinsten positiven ungeraden Reste der Producte $1z$, $2z$, $3z$ $\ldots nz$ (mod p) *mit u bezeichnet wird, so ist z quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem die Zahl*

$$a = \frac{n(n+1)}{2} + u$$

gerade oder ungerade ist; oder, mit Benutzung des Legendreschen Symbols:

$$\left(\frac{z}{p}\right) = (-1)^a.$$

§ 2.

Es seien nun $p = 2n + 1$ und $q = 2m + 1$ zwei Primzahlen, p die grössere, und also $n - m$ positiv. Bei der Aufsuchung der in dem Reciprocitätssatz ausgesprochenen Beziehungen der beiden Primzahlen zu einander, welche in der Gleichung

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{mn}$$

vollständig enthalten sind, kommt es also nach dem Vorigen auf die Anzahl der ungeraden Zahlen an, die sich in den beiden Reihen der kleinsten positiven Reste

I. der Producte $1p, 2p, 3p \ldots mp \pmod q$

und

II. der Producte $1q, 2q, 3q \ldots nq \pmod p$

vorfinden.

Diese sämmtlichen Reste stellen sich anschaulich vor Augen, wenn man sich vorstellt, dass von demselben Anfangspunkte aus und in derselben Richtung n Strecken $= q$ in den Punkten $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$ und ebenso m Strecken $= p$ in den Punkten $P_1, P_2 \ldots P_m$ hinter einander abgetragen sind. Da $nq = mp + n - m$, so bleiben am Schluss für die Strecke von P_m bis Q_n noch $n - m$ Einheiten übrig. Die m Strecken q, in welche die m Punkte P fallen, werden durch diese in zwei Theile getheilt, von denen die nach dem Anfang zu liegenden mit $r_1, r_2 \ldots r_m$ die nach dem Ende zu liegenden mit $r'_1, r'_2 \ldots r'_m$ bezeichnet werden sollen.

Die m Reste der Reihe I, welche sämmtlich kleiner als q sein müssen, stellen sich als die Strecken dar, die ihren Endpunkt in einem der Punkte P und ihren Anfangspunkt in dem zunächst vorhergehenden Punkte Q haben, und es sind also die m vorhin mit $r_1, r_2 \ldots r_m$ bezeichneten Grössen. Ist u die Anzahl der ungeraden Zahlen unter diesen Resten, so ist nach dem oben gewonnenen Kriterium p quadratischer Rest oder Nichtrest von q, je nachdem die Zahl

$$A_1 = \frac{m(m+1)}{2} + u$$

gerade oder ungerade ist, oder es ist:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{A_1}.$$

Von den Resten der Reihe II ist der erste *in jedem Falle* q, weil q kleiner als p angenommen wurde; alle anderen sind entweder grösser oder kleiner als q. Man erhält offenbar jeden

Rest aus dem vorhergehenden, wenn man den letzteren um q vermehrt, jedoch nur so lange, als der neue Rest unter der Grenze p bleibt. Wird diese Grenze überschritten, indem ein q hinzugefügt wird, in welches einer der Punkte P fällt, so ist ausserdem noch ein p abzuziehen, oder der vorige Rest ist um $p-q$ zu vermindern. Der so erhaltene Rest ist kleiner als q, denn er hat seinen Anfangspunkt in einem der Punkte P, und seinen Endpunkt in dem zunächst folgenden Punkte Q. Er wird also durch eine der vorhin mit $r'_1, r'_2 \dots r'_m$ bezeichneten Strecken dargestellt. Will man daher sämmtliche n Reste der Reihe II in der natürlichen Reihenfolge, wie sie aus den Producten $1q$, $2q \dots nq$ hervorgegangen sind, hinter einander aufzählen, so hat man in keinem Falle etwas anderes zu thun, als, *mit q anfangend*, jeden vorhergehenden Rest *entweder* um q zu vermehren, *oder* ihn um $p-q$ zu vermindern; und zwar muss dieser letztere Fall nicht mehr und nicht weniger als m-mal eintreten, weil man allen m Punkten P begegnet sein muss, wenn man beim letzten Rest in Q_n angelangt ist. Nun ist q eine ungerade, dagegen $p-q$ eine gerade Zahl; daher wird der vorige Rest seinen Charakter jedesmal ändern, wenn q hinzugefügt wird; dagegen bleibt sein Charakter ungeändert, wenn $p-q$ abgezogen wird. Wenn man daher bei der Aufzählung der Restreihe II diese m Reste, welche den Charakter des vorigen Restes nicht ändern, also die Reste $r'_1, r'_2 \dots r'_m$ auslässt, so bilden die übrig bleibenden $n-m$ Reste eine Reihe von Zahlen, in welcher ungerade und gerade Zahlen regelmässig mit einander abwechseln, und die Anzahl der ungeraden Zahlen unter diesen $n-m$ Resten ist daher $\frac{n-m}{2}$, wenn $n-m$ eine gerade Zahl ist, und, da die erste Zahl der Reihe in jedem Falle die ungerade Zahl q war, $\frac{n-m+1}{2}$, wenn $n-m$ ungerade ist. Da es auch hier nicht auf die Zahlen selbst, sondern nur auf ihren Charakter ankommt, weil dieselben hier nur als Exponenten von -1 in Betracht kommen, so kann man auch diese beiden Fälle mit derselben Begründung wie vorhin in einen zusammenfassen, wenn man die Zahl $\frac{(n-m)(n-m+1)}{2}$ in die Stelle von $\frac{n-m}{2}$ und von $\frac{n-m+1}{2}$ setzt. Es bleibt noch die ausgeschlossene Restreihe $r'_1, r'_2 \dots r'_m$ übrig. War u die Anzahl der ungeraden Zahlen in der Reihe

$r_1, r_2 \ldots r_m$, so ist, da jedes $r + r' = q$, die Anzahl der geraden Zahlen in der Reihe $r'_1, r'_2 \ldots r'_m$ ebenfalls u, und also die Anzahl der ungeraden Zahlen in dieser Reihe $m - u$. Für die Anzahl der ungeraden Zahlen in der ganzen Reihe II kann man also setzen:

$$\frac{(n-m)(n-m+1)}{2} + m - u = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} - mn - u,$$

und wenn man diese, nach dem obigen Kriterium, um $\frac{n(n+1)}{2}$ vermehrt, und dann noch um die gerade Zahl $n(n+1) + m(m+1) - 2mn$ vermindert, so ist, wenn

$$A_2 = mn - \frac{m(m+1)}{2} - u$$

gesetzt wird:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{A_2},$$

und also:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{A_1 + A_2} = (-1)^{mn},$$

oder, etwas ausführlicher geschrieben:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}};$$

was zu beweisen war.

Berlin, November 1896.

Ernst Neumann aus Königsberg i. Pr.: *Beiträge zur Elektrostatik, insbesondere über einen von drei Kugelflächen begrenzten Conductor.* Mit einer Figur. Vorgelegt von C. Neumann, o. M.

In dem während des Wintersemesters 1895/96 abgehaltenen mathematischen Seminar stellte mein hochverehrter Lehrer und Onkel, Herr Professor Carl Neumann in Leipzig, u. a. die folgende Aufgabe: Es solle Aufschluss gegeben werden über den allgemeinen Charakter der Flächen constanten elektrostatischen Potentials (Niveauflächen) bei einem Systeme, bestehend aus zwei elektrisch geladenen Metallkugeln, auf die von aussen her eventuell noch feste elektrische Massen einwirkten. Die Beschäftigung mit dieser Aufgabe gab mir die erste Anregung zu einer Arbeit, die ich an anderer Stelle zu veröffentlichen gedenke, und deren Resultate hier nur in Kürze mitgetheilt werden sollen.

Ein wesentliches Hülfsmittel bei den Untersuchungen, über die hier berichtet werden soll, bildeten die dipolaren Coordinaten. Ein näheres Eingehen auf die Theorie derselben verbietet an dieser Stelle der Mangel an Raum, doch werden für unsere Zwecke auch die folgenden kurzen Andeutungen genügen:

Sind zwei Punkte A_1 und A_2 im Raume fest gegeben, und bezeichnen wir jede durch dieselbe hindurchgehende Ebene als Meridianebene, so ist die Lage eines beliebigen Punktes ξ *innerhalb seiner Meridianebene* völlig bestimmt, sobald man erstens das Verhältniss seiner Entfernungen ϱ_1 und ϱ_2 von A_1 und A_2 und zweitens den Winkel ϑ kennt, den diese Entfernungen ϱ_1 und ϱ_2 mit einander bilden. Die Lage von ξ *im Raume* wird mithin bestimmt sein, sobald man neben diesem Verhältniss $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ und dem Winkel ϑ auch noch die Neigung φ seiner Meridianebene gegen eine feste Meridianebene $\varphi = 0$ kennt. — Es empfiehlt sich, jenes Verhältniss $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ gleich $e^{-\lambda}$ zu setzen, anstatt des Verhältnisses selber also die Grösse

$$\lambda = -\log\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

einzuführen. Dann können wir kurz sagen, die Lage des Punktes ξ sei völlig bestimmt durch die Grössen λ, ϑ, φ. Wir bezeichnen daher λ, ϑ, φ als Coordinaten des Punktes ξ, und zwar speciell als seine *dipolaren Coordinaten.*

Die Punkte A_1 und A_2 heissen die beiden *Pole* des dipolaren Coordinatensystems, ihre Verbindungslinie heisst die *Pollinie.* — Die Länge $2a$ dieser Pollinie ist eine dem dipolaren Coordinatensystem zugehörige Constante. Ist dieselbe gegeben, so ist damit das ganze System eindeutig bestimmt mit den drei zugehörigen, einander orthogonal schneidenden Flächenscharen $\lambda =$ const., $\vartheta =$ const. und $\varphi =$ const. Die Flächen $\varphi =$ const. stellen in ihrer Gesammtheit ein Ebenenbüschel dar, jede der Flächen ist, wie aus dem Obigen hervorgeht, eine Meridianebene. Ferner bilden die Flächen $\lambda =$ const. ein Kugelbüschel (mit imaginärem Schnittkreis), und zwar wird eine solche Kugelfläche $\lambda =$ const., oder wie wir sie kurz nennen wollen, eine *λ-Kugelfläche* den Pol A_1 oder aber den Pol A_2 umschliessen, je nachdem $\lambda > 0$ oder $\lambda < 0$ ist. — Die Flächen $\vartheta =$ const. endlich sind Conoidflächen, d. h. Rotationsflächen von Kreisbogen um ihre Sehne. Diese Sehne ist in allen Fällen dieselbe, nämlich die Pollinie $\overline{A_1 A_2}$, so dass die beiden Pole die conischen Punkte gleichzeitig sämmtlicher Conoidflächen sind.

Neben λ, ϑ und φ werden wir übrigens jedem Punkte im Raume gleichsam als vierte (überflüssige) Coordinate noch eine Grösse ψ zuordnen. Sie wird als Abkürzung stets in der Bedeutung

$$\psi = e^{\lambda} + e^{-\lambda} - 2\cos\vartheta$$

gebraucht werden.

Um nun auf unsere eigentlichen Untersuchungen näher einzugehen, fassen wir einen beliebigen Punkt o ins Auge, der in einem dipolaren Coordinatensystem die Coordinaten λ_0, ϑ_0, φ_0; ψ_0 besitzt, und beschreiben um denselben mit dem Radius H

eine Kugelfläche. Dann wollen wir neben dem ursprünglich gegebenen Coordinatensystem noch ein zweites dipolares System betrachten, dessen Pole A'_1 und A'_2 den Polen A_1 und A_2 des ursprünglichen Systems in Bezug auf jene Kugelflächen (o, H) conjugirt sind (conjugirt nach dem Gesetze der reciproken Radien). Wir nennen dann dieses zweite System kurz das *dipolare Bildsystem* des ersteren. *Sind alsdann ξ und ξ' zwei beliebige Punkte, die einander conjugirt sind in Bezug auf eben jene Kugelfläche (o, H) und bezeichnen λ, ϑ, φ die dipolaren Coordinaten von ξ im ursprünglich gegebenen System und λ', ϑ', φ' die Coordinaten von ξ' im dipolaren Bildsystem, so finden zwischen diesen Coordinaten die folgenden Beziehungen statt. Es ist:*

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} \lambda' &= \lambda - \lambda_0 \\ \cos\vartheta' &= \cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0) \\ \cos\varphi' &= \frac{\cos\vartheta\sin\vartheta_0 - \sin\vartheta\cos\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0)}{\sin\vartheta'}. \end{aligned}$$

Ferner stehen die Constanten der beiden Systeme, d. h. die Poldistanzen $\overline{A_1A_2} = 2a$ und $\overline{A'_1A'_2} = 2a'$ zu einander in der Beziehung, dass

$$2a' = \frac{H^2}{2a}\cdot\psi_0$$

ist.

Aus den Relationen (A) folgt nun, dass, sobald die Coordinaten λ, ϑ, φ gegeben sind, damit auch zugleich λ', $\cos\vartheta'$ und $\cos\varphi'$ bekannt sind. Nun ist ϑ' seiner Natur nach auf das Intervall von 0 bis π beschränkt, es ist also mit $\cos\vartheta'$ gleichzeitig auch ϑ' selber eindeutig bestimmt. Nicht so φ'. Um dieses aus $\cos\varphi'$ in eindeutiger Weise zu erhalten, bedarf es vielmehr noch einer weiteren Festsetzung. Diese lautet nun folgendermassen: *Ist $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \pi$ (oder $\varphi_0 - 2\pi < \varphi < \varphi_0 - \pi$), so ist φ' zwischen 0 und π, ist dagegen $\varphi_0 + \pi < \varphi < \varphi_0 + 2\pi$ (oder $\varphi_0 - \pi < \varphi < \varphi_0$), so ist φ' zwischen π und 2π zu wählen.* (Dabei ist vorausgesetzt, dass die Meridianebene $\varphi' = 0$ des Bildsystems durch das Abbildungscentrum o hindurchgehe, und dass die dritten Coordinaten φ und φ' zweier conjugirter Punkte gleichzeitig zu- oder abnehmen.) — Nach dieser Festsetzung stellen jetzt die Relationen (A) eine völlig eindeutige Beziehung dar zwischen den Coordinaten λ, ϑ, φ und λ', ϑ', φ' oder zwischen dem ursprünglich gegebenen dipolaren Coordinatensystem und seinem dipolaren Bildsystem[1]).

Eines Grenzfalles ist jedoch noch Erwähnung zu thun, in dem die Relationen (A) nicht ohne Weiteres anwendbar sind, des Falles nämlich, dass das Abbildungscentrum o gerade in einen der Pole hineinfällt, z. B. in A_1. Dann rückt nämlich der Pol A_1' des Bildsystems ins Unendliche, das dipolare Bildsystem artet in diesem Falle in ein monopolares System, d. h. in ein gewöhnliches Polarcoordinatensystem (ϱ, ω, o) aus. Wir können dann wieder in ganz analoger Weise nach dem Zusammenhange zwischen diesen beiden conjugirten Systemen, dem dipolaren und dem monopolaren Coordinatensystem fragen. Wir kommen dann zu dem folgenden Resultate:

Besitzt ein Punkt ξ in dem dipolaren Systeme die Coordinaten λ, ϑ, φ, so besitzt der in Bezug auf die Kugelfläche (A_1, H) zu ξ conjugirte Punkt ξ' in dem conjugirten monopolaren System die Coordinaten:

$$\text{(B)} \qquad \varrho = \varrho_0 e^{\lambda}, \qquad \omega = \vartheta, \qquad o = \varphi,$$

und hier besitzt die Grösse ϱ_0 den Werth

$$\varrho_0 = \frac{H^2}{2a},$$

sie ist also in einfacher Weise abhängig von der Constanten des dipolaren Systems, d. h. von der Poldistanz $\overline{A_1 A_2} = 2a$ desselben. — Geometrisch stellt übrigens ϱ_0 die Entfernung des Abbildungscentrums A_1 vom Anfangspunkt des monopolaren Coordinationssystems dar (zugleich sei bemerkt, dass A_1 in der Axe $\omega = 0$ dieses Systems liegt).

Die Relationen (A) und (B) bilden ein wichtiges Hülfsmittel für die weiteren Untersuchungen.

C. Neumann hat nun die oben besprochenen dipolaren Coordinaten in Anwendung gebracht auf elektrostatische Probleme. Er hat vermittelst derselben eine besonders einfache Lösung des bekannten Poisson'schen Problems angegeben, jenes Problems, betreffend die Vertheilung der Elektricität auf zwei isolirten Metallkugeln ohne Einwirkung äusserer Kräfte (Erstes elektro-

[1]) Ganz analoge Beziehungen hat C. Neumann für die den dipolaren Coordinaten verwandten peripolaren Coordinaten angegeben. Vgl. den Aufsatz »Ueber die peripolaren Coordinaten« in den Abhandlungen dieser Gesellschaft Bd. XX, 1880, daselbst § 1 u. 6.

statisches Fundamentalproblem für zwei Kugeln). Doch weiter lieferten die dipolaren Coordinaten C. Neumann auch die Mittel zur Lösung des höher stehenden Problems, betreffend die Vertheilung der auf zwei zur Erde abgeleiteten Kugeln von einem äusseren Massenpunkte inducirten Elektricität (*Zweites Fundamentalproblem für zwei Kugeln*). Dieses Problem nehme ich nun in meiner Arbeit von Neuem auf. Es lässt sich die Lösung desselben, wie das wohl auch schon sonst bemerkt ist, nach der *Methode der reciproken Radien* leicht zurückführen auf die Lösung des Poisson'schen Problems. Diesen Weg schlage nun auch ich ein, doch, wohl zum ersten Male, *unter gleichzeitiger Anwendung der dipolaren Coordinaten.* Diese Behandlungsweise, bei der die oben angeführten Relationen (A) eine grosse Rolle spielen, führt in überraschend einfacher Weise zum Ziele; sie liefert die Resultate genau in der von C. Neumann angegebenen Form [1]).

Kennt man nun die Lösungen des Poisson'schen und dieses soeben besprochenen Problems, so erledigt sich das allgemeinste, die Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln betreffende Problem leicht durch Superposition [2]) und damit besitzen wir dann die Mittel, der oben angegebenen Frage nach den Flächen constanten elektrostatischen Potentials näher zu treten. Mir schien es hierbei zweckmässig, zunächst zu untersuchen, ob man nicht *in Specialfällen* diese oder jene solche Niveaufläche wirklich bestimmen könnte. So betrachtete ich denn zunächst ein specielles elektrisches Massensystem, bestehend aus zwei isolirten, elektrisch geladenen Metallkugeln, die *unter der Einwirkung eines in ihrer Chordalebene gelegenen einzelnen Massenpunktes m* ständen.

Die Chordalebene zweier Kugeln ist nun bekanntlich der Mittelpunktsort aller Kugelflächen, welche jene beiden Kugeln orthogonal schneiden. Wir können uns daher bezüglich jenes Specialfalles auch so ausdrücken: Jener Massenpunkt m befinde sich im Mittelpunkt einer, die beiden Metallkugeln orthogonal schneidenden Kugelfläche. Eine nähere Untersuchung dieses Falles ergiebt dann, dass bei einer gewissen Ladung der Metallkugeln diese *Orthogonalkugelfläche* eine Niveaufläche wird, oder

1) Vgl. den Anhang zu den »Hydrodynamischen Untersuchungen« (Leipzig, bei Teubner 1883) p. 271.

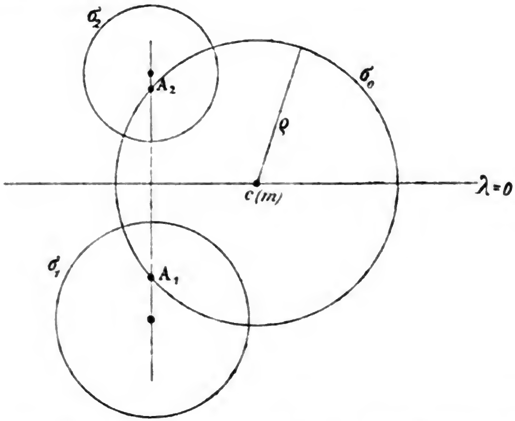
2) Vgl. ebendaselbst p. 272.

vielmehr *mit den Conductorkugeloberflächen gemeinsam eine einzige (doppelt verzweigte) Niveaufläche bildet.* Der auf dieser Fläche vorhandene Potentialwerth wird gleich $\frac{m}{\varrho}$ sein, wenn ϱ den Radius jener Orthogonalkugelfläche bedeutet. Es ist also $\frac{m}{\varrho}$ zugleich der Potentialwerth, bis zu dem wir beide Metallkugeln laden müssen, damit diese einfache Niveaufläche auftritt.

Betrachten wir jetzt das System sämmtlicher Niveauflächen bei unserem speciellen elektrischen Massensystem, so werden wir unter diesen Flächen im Wesentlichen zwei verschiedene Typen zu unterscheiden haben, nämlich solche Flächen, die allein den Massenpunkt m einschliessen (Grenzfall: Punkt m selber mit Potentialwerth ∞), und solche, die das ganze elektrische Massensystem, also m und die beiden Conductorkugeln, gleichzeitig umschliessen (Grenzfall: Unendlich ferne Kugel mit Potentialwerth 0). Den Uebergang von einem dieser Typen zum anderen bildet nun die oben näher bestimmte verzweigte Niveaufläche, sie steht zwischen beiden Typen. In ihr kennen wir also den zweiten Grenzfall der einen sowohl, wie der anderen Flächenkategorie und im Besitze dieser Kenntniss können wir uns jetzt von dem Verlaufe auch sämmtlicher anderen Niveauflächen ein anschauliches Bild entwerfen. — Bemerkt sei auch noch, dass, wenn wir m positiv annehmen, von den beiden Kugelcalotten, in welche die Orthogonalkugelfläche jede der Metallkugeloberflächen theilt, auf der m zugewandten negative, auf der abgewandten positive Elektricität vorhanden sein wird.

Diese letzteren Angaben beziehen sich alle nur auf unser specielles elektrisches Massensystem. Doch werden wir uns nach diesen Ausführungen von dem allgemeinen Charakter der Niveauflächen und von den damit zusammenhängenden Verhältnissen jetzt auch in anderen Fällen leicht eine Vorstellung machen können, wenn wir z. B. den Kugeln andere Ladungen mittheilen, oder auch dem inducirenden Massenpunkt eine andere Lage geben.

Doch noch in anderer Hinsicht ist die Kenntniss einfacher Niveauflächen von grosser Wichtigkeit. Für einen, von einer Niveaufläche begrenzten Conductor ist nämlich nach bekannten Principien leicht das elektrostatische Fundamentalproblem zu lösen [1]), wenigstens unter der Voraussetzung, dass keine äusseren Kräfte einwirken (Erstes elektrostatisches Fundamentalproblem). Machen wir die Anwendung hiervon auf die oben gefundene Niveaufläche, oder vielmehr auf den *äusseren Umriss* derselben, so gelangen wir zur Lösung des Problems, betreffend die Vertheilung der Elektricität auf einem *Conductor K, dessen Oberfläche F aus drei Kugelflächen σ_0, σ_1 und σ_2 gebildet wird, deren erstere die beiden anderen orthogonal schneidet.* Besonders hervorgehoben sei noch, dass dieser Conductor K im Allgemeinen kein Rotationskörper sein wird.



Wir legen der Betrachtung ein dipolares Coordinatensystem (Poldistanz $\overline{A_1 A_2} = 2a$) zu Grunde, dem die Kugelflächen σ_1 und σ_2 als λ-Kugelflächen mit den Parametern λ_1 und λ_2 ($\lambda_1 > 0 > \lambda_2$) angehören mögen. Kennen wir alsdann in diesem Systeme noch die Coordinaten ϑ_c, φ_c [2]) des Centrums c der Orthogonalkugel-

1) Vgl. z. B. meines Grossvaters »*Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen*« (Leipzig, bei Teubner 1887), p. 220.

2) Die λ-Coordinate ist $\lambda_c = 0$, da die Chordalebene der Kugelflächen σ_1 und σ_2, in der c gelegen ist, jenem dipolaren System als λ-Kugelfläche mit dem Parameter 0 angehört.

fläche σ_0, so ist jetzt die Gestalt jenes Conductors K' eindeutig bestimmt. Was nun die Vertheilung der Elektricität auf demselben anlangt, so kommen wir auf dem oben angegebenen Wege zu dem folgenden Resultat:

Wir denken uns diesen Conductor K' elektrisch geladen bis zur Spannung C. Alsdann hat die Dichtigkeit der entstehenden elektrischen Oberflächenbelegung in den Elementen $d\sigma_0$, $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ der drei begrenzenden Kugelflächen die Werthe:

$$\varepsilon_0 = \frac{C}{4\pi\varrho}\left(1 - \psi_0^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(k_1^{(n)} e^{N(\lambda_0 - \lambda_1)} + k_2^{(n)} e^{N(\lambda_2 - \lambda_0)}\right) P_n'(\cos\vartheta_0)\right),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{C}{4\pi a}\,\psi_1^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} N k_1^{(n)} \left(P_n(\cos\vartheta_1) - P_n(\cos\gamma_1)\right),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{C}{4\pi a}\,\psi_2^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} N k_2^{(n)} \left(P_n(\cos\vartheta_2) - P_n(\cos\gamma_2)\right),$$

wo λ, ϑ, φ, ψ mit den entsprechenden Indices die Coordinaten der Elemente $d\sigma_0$, $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ bedeuten, und wo P_n' für den Differenzialquotienten der Kugelfunction n-ter Ordnung P_n steht.

Ferner ist die Gesammtmasse dieser Oberflächenbelegung:

$$M = C\left(\varrho + 2a \sum_{n=0}^{\infty} \left(k_1^{(n)} e^{-N\lambda_1} + k_2^{(n)} e^{N\lambda_2}\right)\left(1 - P_n(\cos\vartheta_c)\right)\right),$$

und ihr Potential auf einen äusseren Punkt ξ $(\lambda, \vartheta, \varphi)$:

$$V = C\left(\frac{\varrho}{r} + \psi^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(k_1^{(n)} e^{N(\lambda - \lambda_1)} + k_2^{(n)} e^{N(\lambda_2 - \lambda)}\right)\left(P_n(\cos\vartheta) - P_n(\cos\gamma)\right)\right).$$

Hier ist $\varrho = \dfrac{a}{\sin\dfrac{\vartheta_c}{2}}$ der Radius der Orthogonalkugelfläche σ_0 und ferner bedeutet r den Abstand des variablen Punktes ξ von dem Centrum c. Sodann steht $\cos\gamma$ als Abkürzung für $\cos\vartheta\cos\vartheta_c + \sin\vartheta\sin\vartheta_c\cos(\varphi - \varphi_c)$, und endlich haben die Coefficienten $k_1^{(n)}$ und $k_2^{(n)}$ die folgenden Bedeutungen:

$$k_1^{(n)} = \frac{e^{-N\lambda_2} - e^{N\lambda_2}}{e^{N\delta} - e^{-N\delta}}, \qquad k_2^{(n)} = \frac{e^{N\lambda_1} - e^{-N\lambda_1}}{e^{N\delta} - e^{-N\delta}},$$

wo $\delta = \lambda_1 - \lambda_2$ und N, wie auch oben, $= n + \frac{1}{2}$.

Unter allen diesen Flächen F' dürfte diejenige das grösste Interesse beanspruchen, die aus der Oberfläche F durch Abbildung von einem der Pole, z. B. von A_1 aus, entsteht. Es ist dies nämlich die Oberfläche einer *Halbkugelschale*, wie man sie erhält, wenn man eine von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzte Kugelschale durch eine Meridianebene halbirt. Die Green'sche Function und Green'sche Belegung dieser Halbkugelschalenoberfläche wird nun jedoch nicht direct durch die Formeln (f') und (f) dargestellt, sondern vielmehr durch einen Grenzfall derselben. Es kommen eben bei ihrer Bestimmung nicht die allgemeinen Relationen (A), sondern die speciellen Relationen (B) zur Anwendung. So stellt sich denn das Resultat auch in den (hier augenscheinlich zweckmässigeren) gewöhnlichen Polarcoordinaten (ϱ, ω, o) dar. Der Anfangspunkt dieses Polarcoordinatensystems ist das gemeinsame Centrum der beiden begrenzenden Halbkugelflächen (deren Radien R_1 und R_2, $R_1 > R_2$ seien) und zur Axe des Systems wählen wir die Rotationsaxe der Halbkugelschale. *Alsdann ist die einem innern Punkte $p(\varrho_p, \omega_p, o_p)$ dieser Halbkugelschale entsprechende Green'sche Function*

$$G^p(\varrho, \omega, o) = \frac{1}{r'} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(h_1^{(n)} \frac{\varrho^n}{\varrho_p^{n+1}} + h_2^{(n)} \frac{R_2^{2n+1}}{\varrho_p^{n+1} \cdot \varrho^{n+1}} \right) \cdot \left(P_n(\cos\gamma) - P_n(\cos\gamma'), \right)$$

und ferner besitzt die Dichtigkeit der jenem Punkte entsprechenden Green'schen Belegung in den Elementen ds_0, ds_1 und ds_2 des ebenen ringförmigen Randes, der grösseren und der kleineren Halbkugelfläche die Werthe

$$g_0 = \frac{\varrho_p \cos\omega_p}{2\pi} \left(\frac{1}{r_0^3} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(h_1^{(n)} \frac{\varrho_0^{n-1}}{\varrho_p^{n+2}} + h_2^{(n)} \frac{R_2^{2n+1}}{\varrho_p^{n+2} \cdot \varrho_0^{n+2}} \right) \cdot P_n'(\cos\gamma_0) \right),$$

$$g_1 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} N h_1^{(n)} \frac{R_1^{n-1}}{\varrho_p^{n+1}} \left(P_n(\cos\gamma_1) - P_n(\cos\gamma_1') \right),$$

$$g_2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} N h_2^{(n)} \frac{R_2^{n-1}}{\varrho_p^{n+1}} \left(P_n(\cos\gamma_2) - P_n(\cos\gamma_2') \right).$$

Hier ist r die Entfernung des betrachteten Punktes vom Punkte $p(\varrho_p, \omega_p, o_p)$ und r' vom Punkte $p'(\varrho_p, \pi-\omega_p, o_p)$. Ferner stehen $\cos\gamma$ und $\cos\gamma'$ in den Bedeutungen:

$$\cos\gamma = +\cos\omega\cos\omega_p + \sin\omega\sin\omega_p\cos(o-o_p),$$
$$\cos\gamma' = -\cos\omega\cos\omega_p + \sin\omega\sin\omega_p\cos(o-o_p),$$

und endlich stehen $h_1^{(n)}$ und $h_2^{(n)}$ als Abkürzungen für die folgenden Ausdrücke:

$$h_1^{(n)} = \frac{\varrho_p^{2n+1} - R_2^{2n+1}}{R_1^{2n+1} - R_2^{2n+1}}, \qquad h_2^{(n)} = \frac{R_1^{2n+1} - \varrho_p^{2n+1}}{R_1^{2n+1} - R_2^{2n+1}}.$$

Wir sind hier in der glücklichen Lage, diese letzten Resultate, und damit auch alle früheren Rechnungen controlliren zu können. Das Problem, die GREEN'sche Function und GREEN'sche Belegung für eine Halbkugelschale zu finden, lässt sich nämlich auf das entsprechende Problem für die ganze Kugelschale zurückführen — in einer Weise, deren nähere Auseinandersetzung an dieser Stelle freilich zu weit führen würde. Thun wir dies nun, so gelangen wir zu genau den obigen Resultaten, wir finden so eine willkommene Bestätigung unserer bisherigen Ausführungen.

Nachdem wir dies constatirt haben, wollen wir jetzt die speciellen Probleme verlassen und uns zunächst einer allgemeineren Betrachtung zuwenden.

Wir denken uns *eine* isolirte Metallkugel gegeben, auf welche von aussen her ein fester elektrischer Massenpunkt m einwirke. Dann wird bei einer gewissen Ladung der Kugel, wie sich leicht zeigen lässt, die um m als Centrum beschriebenen, die Metallkugel orthogonal schneidende Kugelfläche mit dieser zusammen eine Fläche constanten Potentials bilden[1]. — Für den Fall, dass *zwei* isolirte Metallkugeln gegeben sind, haben wir oben einen ganz entsprechenden Satz bewiesen. Es liegt daher die Vermuthung nahe, dass Analoges auch bei 3, 4, oder auch bei ganz beliebig vielen Kugeln stattfinde, dass also der Satz gelte:

Sind n Metallkugeln so gelegen, dass sie eine gemeinsame Orthogonalkugel besitzen, und wirkt auf dieselben ein elektrischer Massenpunkt m ein, der sich gerade im Centrum c dieser Ortho-

1) Vgl. den Aufsatz von LEONHARD WEBER im 8. Band der Mathematischen Annalen.

gonalkugel befindet, so können wir diese n Metallkugeln stets derart elektrisch laden, dass ihre Oberflächen zusammen mit der Orthogonalkugelfläche eine einzige Niveaufläche bilden.

Versuchen wir es nun, diesen Satz zu beweisen, so befinden wir uns zunächst in einer misslichen Lage, da das Problem der elektrischen Vertheilung für n Kugeln bisher nicht gelöst ist, oder doch wenigstens nicht die Resultate in geschlossener Form dargestellt sind. Uns fehlt daher der analytische Ausdruck für das Potential, von dem ausgehend wir, wie in den obigen beiden Specialfällen, den Beweis führen könnten. Wir müssen uns daher nach anderen Mitteln umsehen, und diese bieten sich nun in der Methode der reciproken Radien. Es gelingt vermittelst derselben nicht nur, jenen Satz überraschend einfach zu beweisen, sondern wir erhalten zugleich einen allgemeinen Satz, welcher jenen als Specialfall in sich schliesst. Dieser allgemeinere Satz lautet:

Es sei gegeben irgend ein System von Conductoren, deren Oberflächen die Eigenschaft haben mögen, durch Abbildung an einer beliebigen Kugelfläche in sich selbst transformirt zu werden. Auf dieses System wirke ein elektrischer Massenpunkt m, der sich im Centrum jener Abbildungskugel befinde. Alsdann wird bei gewissen Ladungen der Conductoren auf dieser Kugelfläche der nämliche constante Potentialwerth herrschen, wie auf den sämmtlichen Conductoren.

Dieser Satz erweist sich nun wieder als sehr fruchtbar bei der Behandlung specieller elektrostatischer Probleme. Es sei mir gestattet, hier eine einfache Anwendung desselben zu machen. Wir denken uns zu diesem Zwecke einen Conductor gegeben, dessen Oberfläche gebildet werde von einer Conoidfläche, die einem dipolaren System als Fläche $\vartheta =$ const. angehöre[1]). Wirkt alsdann auf diesen conoidischen Conductor ein in der Verlängerung seiner Axe gelegener elektrischer Massenpunkt m, so werden wir es durch eine gewisse Ladung des Conductors erreichen können, dass diejenige λ-Kugelfläche jenes dipolaren Systems, deren Centrum mit m zusammenfällt, eine Fläche constanten Potentials wird, oder vielmehr mit der Conoidoberfläche gemein-

1) Die elektrostatischen Probleme für diesen Conductor sind gelöst durch die Arbeiten von Mehler und C. Neumann. Beide Aufsätze befinden sich im 18. Band der Mathematischen Annalen (p. 161, bezw. 195).

sam eine Niveaufläche bildet — das folgt eben unmittelbar aus unserem obigen Satze und lässt sich an der Hand des analytischen Ausdrucks für das Potential leicht bestätigen. Von der Kenntniss dieser Niveaufläche gelangt man dann nach bekannter Methode wieder leicht zur Lösung des ersten elektrostatischen Fundamentalproblems für den von ihr begrenzten Conductor, der also aus einem Conoid und einer λ-Kugel besteht.

Die Lösung des elektrostatischen Problems für diesen speciellen Conductor darf nun wohl an und für sich kein besonderes Interesse beanspruchen — wir gehen deshalb auch an dieser Stelle nicht näher auf dieselbe ein —, doch ist sie insofern von einiger Wichtigkeit, als sie die Bestimmung der Green'schen Function und Green'schen Belegung und damit die Lösung des Problems des stationären Temperaturzustandes für den *Kugelsector* vermittelt, in den jener Conductor durch Abbildung von einem Pole aus übergeführt wird. Dieser Kugelsector wird begrenzt von einer Kugelcalotte s_0 und einem über dem kreisförmigen Rande derselben stehenden Kegelmantel s_1. Diese beiden Flächen s_0 und s_1 stehen nun in einer einfachen Beziehung zu einem gewöhnlichen Polarcoordinatensystem (ϱ, ω, o). Sie sind nämlich Theile einer Fläche $\varrho =$ const., bezw. einer Fläche $\omega =$ const., und zwar mögen die Werthe dieser Constanten mit ϱ_0 bezw. mit ω_1 bezeichnet werden. *Liegt alsdann ein Punkt p im Abstande ϱ_p vom Anfangspunkte jenes Polarcoordinatensystems auf der Axe desselben, so ist die diesem innern Punkte p des Kugelsectors entsprechende Green'sche Function:*

$$G^p(\varrho, \omega, o) = \frac{1}{\sqrt{\varrho \cdot \varrho_p}} \int_0^\infty \frac{dq \,.\, C_q}{K_q(\mu_1)} \Big(L_q(\mu_1) K_q(\mu) \cos q\,(t - t_p)$$

$$+ \big(K_q(\mu_1) L_q(\mu) - L_q(\mu_1) K_q(\mu)\big) \cdot \cos q\,(t + t_p) \Big).$$

Ferner wird die Dichtigkeit der dem Punkte p entsprechenden Green'schen Belegung in den Elementen ds_0 bezw. ds_1 der Kugelcalotte, bezw. des Kegelmantels die Werthe besitzen:

$$g_0 = \frac{1}{4\pi\varrho_0} \left(\frac{\varrho_0^2 - \varrho_p^2}{r_0^3} + \frac{2}{\sqrt{\varrho_0 \varrho_p}} \int_0^\infty q dq \cdot C_q \frac{L_q(\mu_1)}{K_q(\mu_1)} K_q(\mu_0) \sin q t_p \right),$$

$$g_1 = \frac{1}{2\pi^2 \varrho_1 \sin\omega_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varrho_1 \cdot \varrho_p}} \int_0^\infty dq \, \frac{\cos q(t_1 - t_p) - \cos q(t_1 + t_p)}{K_q(\mu_1)}.$$

Hier stehen ϱ, ω, o mit den entsprechenden Indices für die Coordinaten der Elemente ds_0 und ds_1, r_0 für den Abstand von ds_0 vom Punkte p, und ferner steht zur Abkürzung

$$\mu = \cos\omega \quad \textit{und} \quad t = \log\frac{\varrho}{\varrho_0}.$$

Schliesslich bedeuten $K_q(x)$ und $L_q(x)$ die Mehler'schen Kegelfunctionen, die zu einander in der Beziehung stehen, dass $L_q(x) = K_q(-x)$ ist. (In Betreff dieser Functionen, sowie der Constanten C_q vergl. die zuletzt citirten Arbeiten von MEHLER und C. NEUMANN)[1]).

Zum Schluss sei es mir noch gestattet, einen einfachen Satz aus der Theorie der reciproken Radien anzuführen, der sich bei meinen Untersuchungen beiläufig ergab und der meines Wissens bisher noch nicht ausgesprochen ist. Es ist dies der folgende Satz:

Sind zwei Conductoren gegeben, deren einer aus dem anderen durch Abbildung nach reciproken Radien von einem beliebig gewählten Punkte o aus entsteht, und denken wir uns beide Conductoren einzeln (d. h. ohne dass der andere überhaupt vorhanden ist) geladen bis zu ein und demselben constanten Potentialwerthe C, so werden die beiden Potentiale der entstehenden Gleichgewichtsvertheilungen im Punkte o den nämlichen Werth besitzen.

1) Der Fall, dass p eine beliebige Lage im Innern besitzt, und nicht gerade auf der Axe des Kugelsectors liegt, ist einer ganz analogen Behandlung fähig; doch wollen wir uns hier auf den obigen Specialfall beschränken.

E. Study in Bonn: *Ueber Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie.* I.[1]) Vorgelegt von S. Lie, o. M.

1.

Die namentlich zufolge der Untersuchungen des Herrn S. Lie immer klarer zu Tage tretende grosse Bedeutung der Begriffe Gruppe und Invariante für weite Gebiete mathematischer Forschung lässt es in höchstem Grade wünschenswerth erscheinen, dass auch für andere algebraische Gruppen als die bis jetzt fast ausschliesslich untersuchte allgemeine projective Gruppe *algebraische* Invariantentheorien ausgebildet und auf die zu diesen Gruppen gehörigen geometrischen Probleme angewendet werden. Der Verfasser hat diesem Gegenstand seit Jahren seine Aufmerksamkeit zugewendet, und hat für mehrere

---

Indem ich die werthvolle Note des Herrn Professor Study der Gesellschaft vorlege, erlaube ich mir an den talentvollen Verfasser die Bitte zu richten, *gelegentlich* auf die Beziehungen einzugehen, die zwischen Arbeiten stattfinden, die in neuerer Zeit über die Invariantentheorie einer *beliebigen* (projectiven) *continuirlichen* Gruppe ausgeführt worden sind. Ich denke hier zunächst an Untersuchungen, die von Maurer (Christoffel?), Hilbert, Study und mir selbst herrühren. Nach meiner Ansicht hat meine Theorie der Transformationsgruppen und der Differentialinvarianten (vgl. insb. Math. Ann. Bd. 24, 1884) die feste und vollständige *analytische Grundlage* für alle diese Invariantentheorien geliefert. Sie beantwortet ja alle Fragen nach Invarianten, Differentialinvarianten, Differentialparametern sowie nach den *analytischen* Kriterien für Aequivalenz innerhalb der Gruppe. Dagegen bin ich nie auf die speciellen und schwierigen, *rein algebraischen* Fragen eingegangen, die sich hier mit Nothwendigkeit stellen und nicht mit meinen Methoden erledigt werden können. Sophus Lie.

1) Das Folgende bildet den Inhalt eines Vortrags, der für die math. Section der Naturforscherversammlung zu Frankfurt am Main angekündigt war, aber aus Mangel an Zeit nicht wirklich gehalten werden konnte. Auch bei einigen weiteren vorläufigen Mittheilungen denke ich mich auf eine Darlegung gewisser Grundgedanken zu beschränken, da mir bis zu dem Erscheinen einer ausführlichen Darstellung meiner Untersuchungen ein Eingehen auf Einzelheiten zwecklos zu sein scheint.

der wichtigsten continuirlichen Gruppen (u. A. für die 15-gliedrige Gruppe der Lie'schen Kugeltransformationen) Ansätze zu solchen Theorien entwickelt. Ein Problem dieser Art soll uns hier beschäftigen, das, so nahe es liegt, schon einen ziemlich verwickelten Charakter hat: *Die Invariantentheorie der Euclidischen Bewegungen in der Ebene.*

Wir verstehen unter einer *ganzen Bewegungsinvariante* eine solche ganze allseitig-homogene Function der als unabhängig veränderlich gedachten Coefficienten irgend welcher ternärer algebraischer Formen $F_i(X_1, X_2, X_3; U_1, U_2, U_3)$, die bei Ausführung einer Bewegung auf die Punkte X und Linien U der Ebene sich mit einem nur von den Transformationscoefficienten abhängigen Factor reproducirt[1]).

Die Frage nach allen Functionen dieser Art, durch die sich die übrigen rational und ganz ausdrücken lassen, lässt sich nicht allgemein beantworten; man kann aber zu einer gewissen Einsicht in das Bildungsgesetz der Bewegungsinvarianten gelangen, indem man, ebenso wie in der gewöhnlichen Invariantentheorie, zeigt, dass sie sich symbolisch als Invarianten linearer Formen darstellen lassen. Das Problem wird hiermit, im Princip, zurückgeführt auf eine speciellere, übrigens immer noch ziemlich allgemeine und auch an und für sich wichtige Aufgabe: »Die Bewegungsinvarianten in einem unbegrenzten System linearer Formen, und die zwischen ihnen stattfindenden Relationen zu ermitteln.« Nach Lösung dieses Problems hat man eine Methode, die nicht nur theoretisch zur Beantwortung gewisser allgemeiner Fragen ausreicht, sondern — was namentlich für die geometrischen Anwendungen bei Weitem wichtiger ist — in den nächstliegenden besonderen Fällen sich als praktisch brauchbar erweist und mit einiger Bequemlichkeit gehandhabt werden kann.

2.

Um die Bewegungsinvarianten von beliebig vielen Punkten $X, Y, Z, \ldots$ und Linien $U, V, W, \ldots$ zu bestimmen, ist es zweckmässig, vorher die in ähnlicher Weise definirten Invarianten derselben Punkte und Linien gegenüber der in der

1) Bei der analytischen Darstellung der Bewegungen in homogenen Coordinaten mag man etwa die vom Verfasser Math. Ann. Bd. 39, S. 558 aufgestellten Formeln zu Grunde legen.

Gruppe der Bewegungen invariant enthaltenen Untergruppe der Schiebungen zu bestimmen. Wir nehmen zu diesem Behufe auf der »unendlich fernen Geraden« — die, beiläufig bemerkt, als eine ganz beliebige Gerade der Ebene angesehen werden kann — zwei beliebige Punkte S und Σ an, und bilden aus diesen und den vorgelegten Punkten X, Y, Z, ... und Linien U, V, W, ... die folgenden simultanen Invarianten der allgemeinen projectiven Gruppe:

$$(1)\qquad \begin{array}{lll} (UVW), & (UX), & (XYZ), \\ (US), & (U\Sigma), & \\ (XYS), & (XY\Sigma), & (S\Sigma X), \end{array}$$

sammt den aus ihnen durch beliebige Vertauschungen der Punkte X, Y, Z, ... unter einander und der Linien U, V, W, ... unter einander hervorgehenden neuen Invarianten[1]). Bilden wir nun von diesen Grössen, oder wie wir uns kurz ausdrücken wollen, von den »*Typen*« (1) solche ganze rationale Functionen, die homogen sind in Bezug auf alle Symbole X, Y, ...; U, V, ..., (d. h. in Bezug auf jedes einzelne der Systeme von drei Grössen X_i, Y_i, ...; U_i, V_i, ...), aber nicht (d. h. nicht nothwendig) homogen in Bezug auf Symbole S und Σ, so haben wir in diesen Ausdrücken bereits die gesuchten Schiebungsinvarianten vor uns.

Um die Bewegungsinvarianten, auf die es uns ankommt, zu erhalten, legen wir den Punkten S und Σ conjugirt-imaginäre Coordinaten bei, und identificiren sie mit den sogenannten unendlich-fernen Kreispunkten. Nun muss sich jede Schiebungsinvariante als eine Summe darstellen, deren einzelne Glieder homogen sind in Bezug auf S und Σ. Verlangen wir von diesen Gliedern, dass die Differenz ihrer beiden Gradzahlen in Bezug auf S und Σ eine und dieselbe positive oder negative ganze Zahl n sein soll, so erhalten wir die Invarianten der durch die Punkte S und Σ definirten Gruppe der Euclidischen Bewegungen.

Es giebt also unendlich viele Gattungen von Bewegungsinvarianten, die den verschiedenen Werthen der genannten Zahl n entsprechen, und die, wie man leicht erkennt, sich durch die zu ihnen hinzutretenden Factoren von einander unterscheiden.

---

1) Hier ist $(UVW) = | U_1 V_2 W_3 |$, $(XYZ) = | X_1 Y_2 Z_3 |$, $(UX) = U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3$, $(US) = U_1 S_1 + U_2 S_2 + U_3 S_3$ u. s. w.

Unter ihnen aber hat für die elementare Geometrie nur die eine Gattung grösseres Interesse, die dem Werthe $n = 0$ entspricht. Sie allein enthält, bei reellen Grundformen, möglicher Weise reelle Invarianten; und erst indem wir uns auf diese Invarianten, die »*Hauptinvarianten*« der Bewegungen beschränken, erhalten wir in deren Studium ein gegenüber der gewöhnlichen Theorie der ternären Formen eigentlich neues Problem.

Um die Hauptinvarianten, von denen wir weiterhin allein reden werden, im Falle reeller Grundformen auch in reeller Gestalt darstellen zu können, führen wir neue Bezeichnungen ein:

$$(LX) = \frac{i}{2}(S\Sigma X)\,, \quad (U\varDelta)^2 = (US)(U\Sigma)\,.$$

An Stelle der Typen (1) treten dann die Typen [1]):

$$(2) \qquad \begin{gathered} (UVW)\,, \qquad (UX)\,, \qquad (XYZ)\,, \\ (LX)\,, \qquad (LUV)\,, \\ (U\varDelta)(V\varDelta)\,, \quad (U\varDelta)(\varDelta XY)\,, \quad (\varDelta XY)(\varDelta X'Y')\,. \end{gathered}$$

Jede ganze Function dieser Grössen, die homogen ist in Bezug auf $X, Y, Z, \ldots; U, V, W, \ldots$ *(aber nicht nothwendig homogen in Bezug auf Symbole* L, $\varDelta$*) ist eine ganze Hauptinvariante der Bewegungen, und umgekehrt.*

Die sämmtlichen Hauptinvarianten der Bewegungen sind also ganze rationale Functionen gewisser elementarer Hauptinvarianten; und *diese* lassen sich formal darstellen als simultane Invarianten der allgemeinen projectiven Gruppe. Man hat, um sie zu bilden, zu den gegebenen realen oder symbolischen linearen Formen noch zwei weitere Formen hinzuzufügen, eine lineare Form (LX) und eine quadratische $(U\varDelta)^2$, zwischen denen beiden die Beziehungen

$$(L\varDelta)(U\varDelta) = 0\,, \quad \tfrac{1}{2}(\varDelta\varDelta' X)^2 = (LX)^2$$

bestehen. Die genannten elementaren Hauptinvarianten sind

---

1) Die fünf letzten nehmen bei geeigneter Coordinatenwahl die folgenden Werthe an:

$$(LX) = X_1\,, \quad (LUV) = U_2V_3 - U_3V_2\,,$$
$$(U\varDelta)(V\varDelta) = U_2V_2 + U_3V_3\,,$$
$$(U\varDelta)(\varDelta XY) = U_2(X_3Y_1 - X_1Y_3) + U_3(X_1Y_2 - X_2Y_1)\,,$$
$$(\varDelta XY)(\varDelta X'Y') = (X_3Y_1 - X_1Y_3)(X'_3Y'_1 - X'_1Y'_3) + \\ + (X_1Y_2 - X_2Y_1)(X'_1Y'_2 - X'_2Y'_1)\,.$$

dann gewöhnliche symbolische Producte in dem so erweiterten System.

Ein Ergebniss dieser Art liess sich, seinem allgemeinen Charakter nach, im Voraus erwarten: Es handelt sich hier um dieselbe Thatsache, die man, freilich in einer wenig exacten Form, häufig so ausgedrückt hat: »Die Sätze der elementaren Geometrie sind Beziehungen geometrischer Figuren zu dem Paar der unendlich fernen Kreispunkte.« Der genaue Inhalt unseres Satzes lässt sich indessen nicht wohl vorhersehen. Man muss, um diesen Satz richtig zu beurtheilen, zweierlei beachten: Erstens wird die Darstellung der Invarianten des genannten erweiterten Systems gegenüber der allgemeinen projectiven Gruppe durch die gewöhnliche Theorie der ternären Formen *nicht* geleistet, da die Formen (LX), $(U\mathcal{A})^2$ nicht von einander unabhängige Coefficienten haben; zweitens besteht nur bei den elementaren Bewegungsinvarianten, aus denen sich alle anderen rational und ganz zusammensetzen lassen, eine thatsächliche Uebereinstimmung mit gewissen Invarianten der gewöhnlichen Theorie der ternären Formen; die zusammengesetzten Bewegungsinvarianten und namentlich auch die allgemeinen Hauptinvarianten der Bewegungen sind in keinem Sinne Invarianten der allgemeinen projectiven Gruppe.

3.

Aus demselben Baumaterial nun, aus dem sich die Theorie der Bewegungsinvarianten aufführen lässt, nämlich aus den Typen (2), lässt sich die Invariantentheorie einer jeden projectiven Gruppe zusammensetzen, die die Bewegungen umfasst. Dabei verhalten sich die algebraischen Gruppen, in denen die Bewegungen mit anderen dreigliedrigen Untergruppen gleichberechtigt sind, anders als die, in denen die Gruppe der Bewegungen invariant enthalten ist. In den verschiedenen Fällen der ersten Art hat man gewisse der Typen (2) selbst wegzulassen, in den anderen treten nur Beschränkungen in Bezug auf die Homogeneität der Symbole von (LX) und $(U\mathcal{A})^2$ hinzu. Wir betrachten nur die reellen Gruppen.

Die Bewegungen bilden eine *invariante Untergruppe*

1) der Gruppe der Bewegungen und Umlegungen;

2) der continuirlichen viergliedrigen Gruppe der eigentlichen Aehnlichkeitstransformationen;

3) der Gruppe der sämmtlichen (eigentlichen und uneigentlichen) Aehnlichkeitstransformationen.

1) Die Umlegungsinvarianten sind sämmtlich Hauptinvarianten der Bewegungen. Es giebt zwei Arten, die bei einer Umlegung mit verschiedenen Factoren reproducirt werden: Bei den einen (»geraden« Invarianten) kommen Symbole L nur in den Graden 0, 2, 4, ..., bei den anderen (»ungeraden« Invarianten) nur in den Graden 1, 3, 5, ... vor.

2) Bei den eigentlichen Aehnlichkeitstransformationen müssen Symbole S und Σ zusammen homogen auftreten; bei den aus den Typen (2) zusammenzusetzenden Hauptinvarianten also Symbole L und $\varLambda^2$ zusammen.

3) Die Invarianten der Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen sind identisch mit den Umlegungsinvarianten, bei denen auch die Bedingung 2) erfüllt ist, mit denen also, die homogen sind in Bezug auf Symbole L und $\varLambda^2$ zusammen.

Die Bewegungen sind ferner, wenn man von der allgemeinen projectiven Gruppe absieht, als *nicht-invariante Untergruppe* enthalten

1) in der continuirlichen fünfgliedrigen Gruppe der eigentlichen flächentreuen Collineationen, der »speciellen linearen Gruppe« von S. Lie;

2) in der aus zwei Schaaren bestehenden Gruppe der eigentlichen und uneigentlichen flächentreuen Collineationen;

3) in der sechsgliedrigen continuirlichen Gruppe der überhaupt affinen Collineationen, der »allgemeinen linearen Gruppe«.

In allen drei Fällen sind die Symbole $(U\varLambda)^2$ wegzulassen, so dass nur die folgenden fünf Typen elementarer Invarianten bleiben:

$$(3) \qquad (UVW)\,, \quad (UX)\,, \quad (XYZ)\,; \quad (LX)\,, \quad (LUV)\,.$$

Im Falle 1) findet keine Beschränkung in Bezug auf die Homogeneität der Symbole L statt. Im Falle 2) können, in jedem Glied einer und derselben Invariante, Symbole L nur in gerader oder nur in ungerader Zahl auftreten. Im Falle 3) endlich sind nur solche Functionen der Typen (3) zu bilden, die homogen sind in Bezug auf Symbole L.

Endlich erhält man bekanntlich alle Invarianten der allgemeinen projectiven Gruppe, wenn man auch die Invarianten mit Symbolen L weglässt.

4.

Bei einer jeden der betrachteten Gruppen nun wird eine ganze Function der aufgezählten elementaren Invarianten, die hinsichtlich ihrer Homogeneität den angegebenen Bedingungen genügt, eine zugehörige Invariante sein. Sie kann aber natürlich auch identisch den Werth Null haben. *Es ist nun von Wichtigkeit, dass auch die Functionen dieser letzten Art, also die sämmtlichen Relationen zwischen den ganzen Functionen* (2), *sich in gewissem Sinne erschöpfend angeben lassen.* Es lässt sich nämlich ein System irreducibeler Identitäten $G_j(J_k) = 0$ zwischen unseren Invarianten J_k aufstellen, das nur eine *endliche* Zahl solcher Identitäten enthält, wenn man je zwei Functionen G_j als nicht verschieden betrachtet, oder zu demselben »Typus« rechnet, die durch Vertauschung der an ihrer Bildung betheiligten Punkte X, Y, Z, ... und Linien U, V, W, ... in einander übergeführt werden können.

Diese Identitäten sind, wenn wir noch für die drei letzten unserer Invariantentypen die bequemeren Bezeichnungen

$$(U|V) = (U\varDelta)(V\varDelta)\,, \quad (U|XY) = (U\varDelta)(\varDelta XY)\,,$$
$$(XY|X'Y') = (\varDelta XY)(\varDelta X'Y')$$

einführen, die folgenden

(4)

a) $$(U_2U_3U_4)(U_1X) - (U_3U_4U_1)(U_2X) + (U_4U_1U_2)(U_3X) - $$
$$- (U_1U_2U_3)(U_4X) = 0^*\,,$$

b) $$(X_2X_3X_4)(UX_1) - (X_3X_4X_1)(UX_2) + (X_4X_1X_2)(UX_3) - $$
$$- (X_1X_2X_3)(UX_4) = 0^*\,,$$

c) $$(UVW)(XYZ) - |(UX)(VY)(WZ)| = 0\,,$$

(5)

a) $$(LVW)(UX) + (LWU)(VX) + (LUV)(WX) - $$
$$- (UVW)(LX) = 0^*\,,$$

b) $$(U_2U_3U_4)(LU_1V) - (U_3U_4U_1)(LU_2V) + (U_4U_1U_2)(LU_3V) - $$
$$- (U_1U_2U_3)(LU_4V) = 0\,,$$

c) $$(X_2X_3X_4)(LX_1) - (X_3X_4X_1)(LX_2) + (X_4X_1X_2)(LX_3) - $$
$$- (X_1X_2X_3)(LX_4) = 0\,,$$

$$\text{d)} \qquad (LUV)(XYZ) - \begin{vmatrix} (LX) & (UX) & (VX) \\ (LY) & (UY) & (VY) \\ (LZ) & (UZ) & (VZ) \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$\text{e)} \quad (LU_1U_2)(LU_3U_4) + (LU_1U_3)(LU_4U_2) + (LU_1U_4)(LU_2U_3) = 0\,,$$

(6)

$$\text{a)} \qquad (X_1X_2|X_3X_4) + (X_1X_3|X_4X_2) + (X_1X_4|X_2X_3) = 0\,,$$

$$\text{b)} \quad (U_2U_3U_4)(U_1|V) - (U_3U_4U_1)(U_2|V) + (U_4U_1U_2)(U_3|V) -$$
$$- (U_1U_2U_3)(U_4|V) = 0\,,$$

$$\text{c)} \qquad (U|YZ)(VX) + (U|ZX)(VY) + (U|XY)(VZ) -$$
$$- (XYZ)(U|V) = 0\,^{***},$$

$$\text{d)} \qquad (X_2X_3X_4)(X_1Y|U) - (X_3X_4X_1)(X_2Y|U) +$$
$$+ (X_4X_1X_2)(X_3Y|U) - (X_1X_2X_3)(X_4Y|U) = 0\,^{*},$$

$$\text{e)} \quad (U_1U_2U_3)(V|XY) - \begin{vmatrix} (U_1|V) & (U_1X) & (U_1Y) \\ (U_2|V) & (U_2X) & (U_2Y) \\ (U_3|V) & (U_3X) & (U_3Y) \end{vmatrix} = 0\,^{*},$$

$$\text{f)} \quad (LU_2U_3)(U_1|V) + (LU_3U_1)(U_2|V) + (LU_1U_2)(U_3|V) = 0\,,$$

$$\text{g)} \qquad (LX)(U|YZ) + (LY)(U|ZX) + (LZ)(U|XY) = 0\,^{*},$$

$$\text{h)} \qquad (LVW)(U|XY) - \begin{vmatrix} 0 & (LX) & (LY) \\ (U|V) & (VX) & (VY) \\ (U|W) & (WX) & (WY) \end{vmatrix} = 0\,^{*},$$

$$\text{i)} \quad (U_1|V_1)(U_2|V_2) - (U_1|V_2)(U_2|V_1) - (LU_1U_2)(LV_1V_2) = 0,$$

$$\text{k)} \qquad (U|XY)(V|W) - (V|XY)(U|W) -$$
$$- (LUV)\{(LX)(WX) - (LX)(WY)\} = 0\,^{*},$$

$$\text{l)} \qquad (U|V)(X_1X_2|Y_1Y_2) - (U|X_1X_2)(V|Y_1Y_2) -$$
$$- \{(LX_1)(VX_2) - (LX_2)(VX_1)\}\{(LY_1)(UY_2) - (LY_2)(UY_1)\} = 0\,^{**},$$

$$\text{m)} \quad (U|X_1Y)(V|X_2X_3) + (U|X_2Y)(V|X_3X_1) + (U|X_3Y)(V|X_1X_2) -$$
$$- (X_1X_2X_3)(LY)(LUV) = 0\,.$$

Dabei haben wir der Kürze halber einige der aufzuführenden Relationen, nämlich solche, die aus den angegebenen durch Substitutionen des Typus $U = \widehat{XY}$ oder $X = \widehat{UV}$ entstehen, nicht wirklich hingeschrieben, sondern wir haben ihr Vorhandensein nur durch den Formeln beigefügte Sterne * angedeutet; so dass z. B. die Formel (6g) ausser ihr selbst auch noch die Identität

$$(LX_1)(YZ\,|\,X_2X_3) + (LX_2)(YZ\,|\,X_3X_1) + (LX_3)(YZ\,|\,X_1X_2) = 0$$

vertritt, die in diesem Zusammenhang als von (6g) verschieden angesehen werden muss.

Wie das System der Invarianten (2) selbst, so weist auch das System der zwischen ihnen bestehenden Identitäten eine bestimmte *Structur* auf. Die unter (4) zusammengestellten Relationen nämlich verbinden nur Invarianten der allgemeinen projectiven Gruppe; sie bilden, wie der Verfasser schon früher gezeigt hat, das vollständige System der irreducibelen Relationen dieser Art[1]). Ihre Anzahl ist fünf. Die Formeln (4) und (5) zusammengenommen gehören ferner in demselben Sinne zur allgemeinen affinen Gruppe mit ihren invarianten Untergruppen. Die Anzahl dieser Relationen ist elf. Endlich gehören die Formeln (4), (5) und (6) zusammen zur Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen mit ihren invarianten Untergruppen. Ihre Anzahl ist zweiunddreissig, da die Identität (5e) in diesem Relationensystem — aber nicht in dem vorher betrachteten System der Relationen (4) und (5) — reducibel, nämlich eine Folge von (6i) ist.

Einige andere Beispiele *reducibeler* Identitäten zwischen ganzen Bewegungsinvarianten sind die folgenden, die, wie man leicht sieht, bekannten geometrischen Sätzen entsprechen:

$$2(LX_1)(LX_2)(LY_1)(LY_2)(X_1X_2\,|\,Y_1Y_2) -$$
$$-\begin{vmatrix} 0 & (LY_1)^2 & (LY_2)^2 \\ (LX_1)^2 & (X_1Y_1\,|\,X_1Y_1) & (X_1Y_2\,|\,X_1Y_2) \\ (LX_2)^2 & (X_2Y_1\,|\,X_2Y_1) & (X_2Y_2\,|\,X_2Y_2) \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$4(LX_1)(LX_2)(LX_3)(X_1X_2X_3)\cdot(LY_1)(LY_2)(LY_3)(Y_1Y_2Y_3) +$$
$$+\begin{vmatrix} 0 & (LY_1)^2 & (LY_2)^2 & (LY_3)^2 \\ (LX_1)^2 & (X_1Y_1\,|\,X_1Y_1) & (X_1Y_2\,|\,X_1Y_2) & (X_1Y_3\,|\,X_1Y_3) \\ (LX_2)^2 & (X_2Y_1\,|\,X_2Y_1) & (X_2Y_2\,|\,X_2Y_2) & (X_2Y_3\,|\,X_2Y_3) \\ (LX_3)^2 & (X_3Y_1\,|\,X_3Y_1) & (X_3Y_2\,|\,X_3Y_2) & (X_3Y_3\,|\,X_3Y_3) \end{vmatrix} = 0\,.$$

1) Methoden zur Theorie der ternären Formen, Leipzig, 1889, II, § 5.

5.

Der Hauptnutzen der angestellten Betrachtungen liegt darin, dass das Rechnen mit den Identitäten (4), (5), (6) den Gebrauch *explicite* geschriebener Coordinaten, also die Einführung willkürlicher Elemente in die Formeln, in gewissem, *durch das Vorhergehende genau erklärtem* Umfange entbehrlich macht[1]). Man wird daher eine Menge von Aufgaben der gewöhnlichen analytischen Geometrie, die man bisher unter Benutzung specieller Coordinatensysteme behandelt hat, ebensowohl in völlig allgemeiner Weise behandeln können[2]). Um uns aber von Uebertreibungen frei zu halten, wollen wir nicht unterlassen, hinzuzufügen, dass das Rechnen mit den Relationen (4), (5), (6) seine Schwierigkeiten hat. Es werden also noch viele Probleme der Euclidischen Geometrie bleiben, bei denen unsere Methode einen wesentlichen Vortheil nicht oder nur nach bedeutender Anstrengung zu bieten vermag.

Einen weiteren Nutzen der aufgestellten Sätze glauben wir darin finden zu dürfen, dass sie uns zu einer vertieften Einsicht in die Structur des Systems geometrischer Sätze führen, die man gewöhnlich unter den Namen der elementaren Geometrie zusammenfasst. Wir glauben nämlich, und wir haben das auch

---

1) Bekanntlich hat bereits Leibnitz derartige Gedanken entwickelt, und Hermann Grassmann hat in seiner Ausdehnungslehre einen ernsthaften und bis zu einem gewissen Grade gelungenen Versuch in dieser Richtung gemacht. *Es fehlt aber bei Grassmann an einer klaren Problemstellung und daher auch an einer richtigen Schätzung des von seiner Methode beherrschten Stoffs.* Unseres Erachtens ist diese Methode nicht nur kein Universalinstrument, sondern selbst in der Beschränkung auf die Geometrie der Bewegungsgruppe noch kein ausreichendes Hülfsmittel. Die Ausdrücke (2) kommen zwar sämmtlich bei Grassmann vor, sie haben aber für ihn nicht die Bedeutung als (symbolische) Bestandtheile der allgemeinsten Bewegungs-Hauptinvarianten frei veränderlicher Formen, und auch nicht die als *vollständiges* Invariantensystem von Punkten und Linien.

Zu erwähnen dürfte übrigens sein, dass auch viele Rechnungen der gewöhnlichen analytischen Geometrie auf einigen der Identitäten (4)—(6) beruhen. Die principielle Bedeutung dieser Formeln ist aber von den Geometern keineswegs erkannt worden, und noch weniger hat man versucht, sie erschöpfend aufzuzählen.

Der ausgedehnteste Gebrauch von den Ausdrücken (2) ist bis jetzt wohl in dem Werke »Geometrie der Kegelschnitte« von Gundelfinger und Dingeldey (Leipzig, 1895) gemacht worden.

2) Wir geben weiterhin ein Beispiel.

schon bei früherer Gelegenheit hervorgehoben, dass die Geometrie der Alten ein sorgfältigeres und vielseitigeres Studium im Sinne moderner Betrachtungsweisen verdient, als man ihr hat zu Theil werden lassen. Die Frage nach den geometrischen Axiomen, die heute allein noch in weiteren Kreisen Interesse zu finden scheint, ist doch schliesslich nur eine Seite der Sache; wir wagen zu glauben, dass auch noch in anderen Richtungen werthvolle Aufschlüsse sich darbieten können. So führen die von uns angegebenen Sätze zu einer eigenthümlichen Begründung der Elementargeometrie, bei der die einzelnen Sätze dieser Disciplin in ganz anderer Weise angeordnet sind, als gewöhnlich, indem z. B. der Begriff der Dreiecksfläche früher auftritt als der Begriff der Entfernung zweier Punkte. Freilich ist es nicht wohl möglich, in Kürze einen klaren Begriff von Dem zu geben, was wir hier im Auge haben; doch wird wenigstens die enge Beziehung zwischen der Euclidischen Geometrie und unserer Theorie der Bewegungsinvarianten deutlich werden, wenn wir einen Blick auf die — grösstentheils wohlbekannten — Ausdrücke der Grössen werfen, mit denen es die Elementargeometrie vorzugsweise zu thun hat. Diese sind nämlich sämmtlich Quotienten von Bewegungsinvarianten, rationale oder irrationale homogene Functionen 0^{ten} Grades der Coordinaten — sogenannte absolute Invarianten. Wir führen die wichtigsten unter ihnen an.

(7).

a) *Die doppelte Fläche des durch drei Punkte P, Q, R bestimmten Dreiecks:*

$$\frac{(PQR)}{(LP)(LQ)(LR)}\,.$$

b) *Die doppelte Fläche des durch drei gerade Linien A, B, C bestimmten Dreiecks:*

$$\frac{(ABC)^2}{(LBC)(LCA)(LAB)}\,.$$

c) *Die einfachsten goniometrischen Functionen des Winkels (A, B) zweier Geraden:*

$$\cos(A, B) = \frac{(A\,|\,B)}{\sqrt{(A\,|\,A)}\sqrt{(B\,|\,B)}}\,,\quad \sin(A, B) = \frac{(LAB)}{\sqrt{(A\,|\,A)}\sqrt{(B\,|\,B)}}\,.$$

d) *Die Entfernung $\overline{PQ}$ zweier Punkte P, Q:*

$$\overline{PQ} = \frac{\sqrt{(PQ\,|\,PQ)}}{(LP)(LQ)}\,.$$

e) *Das Product der Entfernungen* $\overline{P_1 P_2}$, $\overline{Q_1 Q_2}$ (siehe d)) *in den Cosinus des zugehörigen Neigungswinkels, des Winkels der Richtungen* $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$:

$$\overline{P_1 P_2} \cdot \overline{Q_1 Q_2} \cdot \cos(P_1 P_2,\ Q_1 Q_2) = \frac{(P_1 P_2 \mid Q_1 Q_2)}{(LP_1)(LP_2)(LQ_1)(LQ_2)}.$$

f) *Die Länge der Projection von* PQ *auf eine Gerade* A:

$$\overline{PQ} \cdot \cos(A,\ PQ) = \frac{(A \mid PQ)}{\sqrt{(A \mid A)}(LP)(LQ)}.$$

g) *Der (kürzeste) Abstand* A_p *eines Punktes* P *von einer Geraden* A:

$$A_p = \frac{(AP)}{\sqrt{(A \mid A)}(LP)}.$$

h) *Die Fläche* F *des durch drei Gerade* A, B, C *oder Punkte* P, Q, R *bestimmten Dreiecks, getheilt durch den Radius* r *des umschriebenen Kreises*:

$$\frac{F}{r} = \frac{A_P B_Q C_R}{2F} = \frac{4F^2}{\overline{QR} \cdot \overline{RP} \cdot \overline{PQ}} =$$

$$= A_P \cdot \sin(B,\ C) = \cdots = \overline{QR} \cdot \sin(C,\ A) \cdot \sin(A,\ B) = \cdots$$

$$= \frac{(ABC)}{\sqrt{(A \mid A)}\sqrt{(B \mid B)}\sqrt{(C \mid C)}} = \frac{(PQR)^2}{\sqrt{(QR \mid QR)}\sqrt{(RP \mid RP)}\sqrt{(PQ \mid PQ)}}.$$

(Hier ist angenommen, dass $(AX) = (QRX)$ u. s. w.)

Es leuchtet ein, dass vermöge dieser Formeln aus den Identitäten (4) ... (6) eine Menge elementargeometrischer Sätze hervorgehen, Sätze, von denen einige wohlbekannt und häufig benutzt, andere aber auch in bisherigen Untersuchungen noch nicht hervorgetreten sind. Da durch Rechnen mit jenen Relationen (4) ... (6) alle überhaupt vorhandenen Relationen zwischen ganzen Bewegungsinvarianten zunächst von Punkten und Linien, dann aber auch von höheren algebraischen Gebilden (Curven und Connexen) sich müssen ermitteln lassen, so kann man die Elementargeometrie als ein Studium des Modulsystems M auffassen, das von den linken Seiten jener Identitäten gebildet wird. Dieses Modulsystem hat freilich eine ziemlich verwickelte Structur, und es kann nicht geleugnet werden, dass eine solche Behandlungsweise der Elementargeometrie nicht mehr ganz »elementar« ist. Aber vielleicht hat man die Schwierigkeiten unterschätzt, die in einer systematischen Behandlung der Euclidischen Geometrie auch dann noch liegen, wenn man gänzlich von der Frage nach den Axiomen absieht.

6.

Man hat neuerdings stark den Umstand betont, dass die Euclidische Geometrie ein Grenzfall der sogenannten Nicht-Euclidischen Geometrie ist. Werfen wir daher zur Vergleichung einen Blick auf die Gruppe der automorphen collinearen Transformation eines festen Kegelschnittes, deren Zusammenhang mit jener allgemeineren Art von »Geometrie« ja heute allgemein bekannt ist. Es zeigt sich, dass die Invariantentheorie dieser Gruppe in vieler Hinsicht einfacher ist als die Invariantentheorie der Euclidischen Bewegungen. Der Grund dafür liegt in dem Vorhandensein der mit dem Kegelschnitt verknüpften dualistischen Transformation, die die Unterscheidung von zwei Arten linearer Formen überflüssig macht. Die Zahl der zu unterscheidenden Invariantentypen ist in diesem Falle zwei, und die Zahl der Typen von Identitäten zwischen diesen Invarianten ebenfalls zwei, während wir bei den Euclidischen Bewegungen acht Invarianten und zweiunddreissig Relationen zwischen ihnen gefunden haben. Führen wir nun den erwähnten von Cayley angegebenen Grenzübergang aus, so zeigt sich, dass dabei die ganzen Invarianten der Gruppe des Kegelschnittes keineswegs in die Gesammtheit der (Euclidischen) ganzen Bewegungsinvarianten übergehen; vielmehr entstehen auf diese Art nur Hauptinvarianten, und auch unter ihnen nur solche, die zugleich Invarianten der Umlegungen sind. Es kann danach nicht zweckmässig sein, die Euclidische Geometrie vorzugsweise als einen Grenzfall der Nicht-Euclidischen zu behandeln. Jedenfalls werden bei einem solchen Verfahren Fragen, die mit den den Bewegungen übergeordneten projectiven Gruppen zusammenhängen, zu sehr in den Hintergrund gedrängt.

7.

Ein besonderer Vortheil der Methoden der Invariantentheorie im Vergleich zur gewöhnlichen analytischen Geometrie scheint mir überhaupt darin zu liegen, dass sie zu einer bestimmteren und daher *inhaltsreicheren* Fassung zahlreicher Probleme nöthigen.

So wird in unserem Falle schon die ganz elementare Frage nach der Bedingung dafür, dass vier Punkte auf einem Kreise liegen, anders auszudrücken sein als in der gewöhnlichen analytischen Geometrie. Wir haben nämlich zu fragen: »Welche ganzen Functionen der Bewegungsinvarianten (1) müssen verschwinden, damit die vier Punkte auf einem Kreise liegen?« Die Coordinaten werden also, wie schon gesagt, nicht einzeln zugelassen, sondern nur implicite, in ganz bestimmten, von vorn herein bekannten Verbindungen. Die Antwort wird daher auch nicht durch die bekannte Determinante gegeben. Der gemeinsame Theiler der gesuchten, natürlich nur mod. M bestimmten Functionen ist vielmehr der (ebenfalls mod. M bestimmte, und daher, wie jene Determinante, alternirende) Ausdruck

$$(8)\qquad (1234)^2 = (L2)(234)(13\,|\,14) - (L1)(134)(23\,|\,24)\,.$$

Die Gleichung $(1234)^2 = 0$ liefert beiläufig den Satz vom constanten Peripheriewinkel über gegebener Sehne.

Ausserdem führt sie zu einem Satz über die Figur von vier beliebigen Curven 2. Classe. Da nämlich der Ausdruck (8) die Coordinaten eines jeden der vier Punkte im zweiten Grade enthält, so kann er auch als der *symbolische* Ausdruck einer Bewegungsinvariante von vier Curven 2. Classe angesehen werden. Was bedeutet das Verschwinden dieser allgemeineren Invariante? Die Antwort ist sehr einfach: Zu jeder Curve 2. Classe $(U\Phi)^2 = 0$ gehört ein bestimmter Kreis $(\Phi X\,|\,\Phi X) = 0$, der »*Umfassungskreis*« der Curve (Cercle orthogone nach Picquet und Chasles, Director Circle, Directorkreis nach Townsend und Gundelfinger), der Orthogonalkreis aller den Poldreiecken der Curve umschriebenen Kreise, und der Ort aller Punkte, von denen aus die Curve unter rechtem Winkel erscheint. Das Verschwinden obiger Invariante ist nun die Bedingung dafür, dass die zu den vier Curven 2. Classe gehörigen Kreise einem Bündel oder Netz angehören (einen gemeinsamen Orthogonalkreis haben).

Wir wollen die Anwendung unserer Methode auf Fragen der elementaren analytischen Geometrie noch durch ein anderes Beispiel erläutern, indem wir die *Gleichung des Feuerbach'schen Kreises* aufstellen, der zu einem gegebenen Dreieck P, Q, R gehört, und aus ihr einige Folgerungen ziehen. Diese Gleichung ist allerdings längst ermittelt worden; man hat aber bei der Ableitung, soviel uns bekannt, immer das gegebene Dreieck als

Coordinatendreieck gewählt. Sieht man nun von dieser Voraussetzung ab, betrachtet man also die Punkte P, Q, R als veränderlich, so zeigt sich, dass die bekannten Formeln *mit fremden Factoren behaftet* sind, dass sie in den Coordinaten von P, Q, R einen zu hohen Grad aufweisen. Die Abscheidung jener Factoren führt zu einer, wie wir glauben, besser befriedigenden Lösung der Aufgabe, und zugleich zu einigen bisher, wie es scheint, nicht bemerkten elementargeometrischen Sätzen.

Die Gleichung des umschriebenen Kreises ist nach Obigem (vergl. Nr. 8)

$$(9) \qquad (XPQR)^2 = 0 \,.$$

Die Gleichung der Harmonicale des Höhenschnittpunktes ist

$$(10) \qquad (GX) = (RP|PQ)(QRX) + \\ + (PQ|QR)(RPX) + (QR|RP)(PQX) = 0 \,.$$

Die Gleichung des Feuerbach'schen Kreises ist nun:

$$(11) \qquad (XPQR)^2 - \tfrac{1}{2}(LX)(GX) = 0 \,.$$

Die Harmonicale des Höhenschnittpunktes ist also die Potenzlinie des Büschels, zu dem der umschriebene Kreis und der Feuerbach'sche Kreis gehören.

Der äussere Potenzkreis der genannten beiden Kreise, der Kreis des Büschels, der seinen Mittelpunkt im Höhenschnittpunkt hat, wird dargestellt durch die Gleichung

$$(12) \qquad (XPQR)^2 - (LX)(GX) = 0 \,.$$

Er ist apolar zu der in drei Punkte zerfallenen Curve 3. Classe $(UP) \cdot (UQ) \cdot (UR) = 0$, und er ist durch diese Forderung bestimmt: Er ist identisch mit dem Kreis, von dem das gegebene Dreieck ein Poldreieck ist.

Endlich hat auch der innere Potenzkreis der genannten beiden Kreise, der Kreis des Büschels, der seinen Mittelpunkt im Schwerpunkt des Dreiecks hat, eine einfache Bedeutung. Er wird nämlich dargestellt durch die Gleichung

$$(13) \qquad (XPQR)^2 - \tfrac{1}{3}(LX)(GX) = (PQR) \cdot (\mathfrak{K}X)^2 = 0 \,,$$

wo

$$(14) \quad 3(\mathfrak{K}X)^2 = (LP)(QX|RX) + (LQ)(RX|PX) + (LR)(PX|QX) \,.$$

Die letzte Gleichung lässt unmittelbar erkennen, dass der Kreis $(\mathfrak{K}X)^2 = 0$ der Umfassungskreis (s. oben) der Ellipse

$$3(U\Phi)^2 = (LP)(UQ)(UR) + (LQ)(UR)(UP) + \\ + (LR)(UP)(UQ) = 0$$

ist, die die Seiten des Dreiecks in ihren Mitten berührt.

Mehr noch als bei dem hier gewählten einfachen Beispiel wird es sich vielleicht bei verwickelteren Aufgaben lohnen, die allzuoft unter speciellen Voraussetzungen entwickelten Gleichungen der gewöhnlichen analytischen Geometrie daraufhin zu untersuchen, ob sie nicht fremde Factoren enthalten, und ob nicht deren Beseitigung zu durchsichtigeren und brauchbareren Formeln führt; aber gerade bei einfacheren Aufgaben glauben wir schon aus pädagogischen Gründen besonderes Gewicht darauf legen zu müssen, dass die Lösung bis zu Ende durchgeführt und in reiner Form dargestellt wird.

Dass bei einer Behandlungsweise der elementaren analytischen Geometrie, wie wir sie hier im Auge haben, die sogenannte projective Verallgemeinerung maassgeometrischer Sätze keine Verallgemeinerung mehr ist, bedarf kaum der Erwähnung.

Bis hierher haben wir von der Gruppe der Bewegungen als eine Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe gesprochen. Die genannte Gruppe ist aber auch Untergruppe der nicht minder wichtigen Gruppe der Möbius'schen Kreisverwandtschaften, oder der Gruppe der Inversionen. Von den hieraus für die Theorie der Bewegungsinvarianten sich ergebenden Folgerungen soll in einer ersten Fortsetzung dieser Mittheilung die Rede sein.

Otto Biermann in Brünn: *Zur Lie'schen Theorie von den partiellen Differentialgleichungen.* Vorgelegt von S. Lie, o. M.

Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$V\left(z, x_1, \ldots x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

integriren, heisst nach Sophus Lie alle $(n+1)$-gliedrigen Gleichungensysteme

$$\Phi_i(z, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots (n+1))$$

ermitteln, welche die Pfaff'sche Gleichung

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

befriedigen und die Gleichung

$$V(z, x_1, \ldots x_n, p_1, \cdots p_n) = 0$$

umfassen.

Zur Lösung dieser Aufgabe stellte Lie vor allem eine einfache Form für jedes $(n+1)$-gliedrige Gleichungensystem her, welches der Pfaff'schen Gleichung genügt, zeigte dann, dass jedes $(n+1)$-gliedrige Gleichungensystem von der Form

$$z - F(x_1, \ldots x_n) = 0\,, \quad p_\nu - \frac{\partial F}{\partial x_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

die infinitesimale Transformation

$$[Vf] = \sum_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\frac{\partial V}{\partial p_\nu} + \frac{\partial f}{\partial z}\sum_{\mu=1}^{n} p_\mu \frac{\partial V}{\partial p_\mu} + \sum_\nu \frac{\partial f}{\partial p_\nu}\left(-\frac{\partial V}{\partial x_\nu} - p_\nu \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

gestattet, wenn es die Gleichung $V(z, x, p) = 0$ umfasst, dass ferner ein auf die letzte Form zurückführbares $(n+1)$-gliedriges Gleichungensystem

$$V_1(z, x, p) = 0\,, \quad \ldots V_{n+1}(z, x, p) = 0$$

alle die infinitesimalen Transformationen $[V_i f]$ gestattet oder, was dasselbe bedeutet, dass alle Ausdrücke $[V_i V_j]$ vermöge der Gleichungen $V_i = 0$ verschwinden, und endlich, dass ein nach z und den p auflösbares $(n+1)$-gliedriges Gleichungensystem $\Phi_1 = 0$, ... $\Phi_{n+1} = 0$ dann und nur dann die Pfaff'sche Gleichung erfüllt, wenn alle Ausdrücke $[\Phi_i \Phi_j]$ vermöge der Gleichungen $\Phi_1 = 0, \dots \Phi_{n+1} = 0$ verschwinden.

Doch weil Lie auch bewies, dass ein allgemeines $(n+1)$-gliedriges Gleichungensystem

$$\Psi_i(z, x, p) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots (n+1))$$

dann und nur dann die Pfaff'sche Gleichung $dz - \Sigma p_\nu dx_\nu = 0$ befriedigt, wenn es alle die infinitesimalen Transformationen $[\Psi_i f]$ gestattet, so hat er das Integrationsproblem auf die Ermittlung eines die Gleichung $V = 0$ umfassenden $(n+1)$-gliedrigen Gleichungensystemes $\Psi_i = 0$ zurückgeführt, vermöge dessen alle Ausdrücke $[\Psi_i \Psi_j]$ verschwinden.

In den folgenden Zeilen suche ich diese Theoreme auf den Fall auszudehnen, dass es sich um die Bestimmung aller $\frac{(n+1)(n+2)}{2} = (n+1)_2$-gliedriger Gleichungensysteme in den $n + (n+1)_2$ Variablen

$$z, x_1, \dots x_n, p_1, \dots p_n, p_{11}, \dots p_{\lambda\mu} = p_{\mu\lambda}, \dots p_{nn}$$

handelt, welche die $(n+1)$ Pfaff'schen Gleichungen

$$dz - \sum_\nu p_\nu dx_\nu = 0, \quad dp_\lambda - \sum_\nu p_{\lambda_\nu} dx_\nu = 0 \quad (\lambda = 1, 2 \dots n)$$

befriedigen und eine Gleichung

$$V(z, x_1, \dots x_n, p_1, \dots p_n, p_{11}, \dots p_{nn}) = 0$$

umfassen. Ich will nämlich im engsten Anschlusse an Lie's Betrachtungsweise darlegen, warum seine Lösungsmethode für die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auch in entsprechend erweiterter Form im Allgemeinen nicht auf partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung verwendbar ist, denn mir scheint eine solche Darlegung ebenso wichtig, wie der von mir[1]) und Forsyth[2]) geführte Beweis, dass es nicht möglich ist, das Integraläquivalent eines simultanen Systems bedingungs-

1) Schlömilch's Zeitschrift Bd. 30. 1885.

2) Theorie der Differentialgleichungen Bd. 1. 1893.

freier Pfaff'scher Gleichungen durch eine Verallgemeinerung der von Pfaff, Clebsch, Grassmann und Natani herrührenden Methoden zur Lösung einer einzigen Pfaff'schen Gleichung zu finden.

In dem ersten Paragraphen stelle ich die dem genannten Systeme von $(n+1)$ Pfaff'schen Gleichungen genügenden Gleichungensysteme auf und im zweiten entwickele ich einige Eigenschaften dieser Systeme, welche die v ogte Einsicht gestatten.

λ_μ

§ 1.

Ein Gleichungensystem

$$\Phi_1(z_1, \dots z_n) = 0\,, \dots \quad \Phi_q(z_1, \dots z_n) = 0 \quad (q \leqq n)$$

zwischen den n Veränderlichen z, vermöge dessen nicht alle q-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1}, & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial \Phi_q}{\partial z_1}, & \dots & \frac{\partial \Phi_q}{\partial z_n} \end{matrix}\right|$$

verschwinden, enthält q von einander unabhängige Gleichungen und heisst darnach ein q-gliedriges Gleichungensystem. Ist z. B. die Determinante:

$$\sum \pm \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial \Phi_q}{\partial z_{\alpha_q}}\,,$$

wo $\alpha_1, \dots \alpha_q$ irgend q der Zahlen $1, 2, \dots n$ bedeuten, vermöge der Gleichungen $\Phi_\varkappa(z) = 0$ $(\varkappa = 1, 2, \dots q)$ nicht Null, so lassen sich die Gleichungen

$$d\Phi_1 = 0\,, \dots \; d\Phi_q = 0$$

nach $dz_{\alpha_1}, \dots dz_{\alpha_q}$ auflösen und aus den so zu bildenden Darstellungen für $dz_{\alpha_1}, \dots dz_{\alpha_q}$ folgt, dass das vorgelegte Gleichungensystem nach den q Veränderlichen $z_{\alpha_1}, \dots z_{\alpha_q}$ auflösbar ist.

Wird ein Gleichungensystem

$$\Psi_1(z) = 0\,, \dots \; \Psi_{q'}(z) = 0 \quad (q' \leqq q)$$

von den dem früheren q-gliedrigen Gleichungensystem genügenden Werthesystemen (z) erfüllt, so ist es eine Folge des früheren.

Zwei gleichgliedrige Gleichungensysteme heissen äquivalent, wenn jedes Werthesystem der Veränderlichen, das dem einen genügt, auch das andere erfüllt. Zur Aequivalenz zweier q-gliedriger Gleichungensysteme ist nothwendig und hinreichend, dass eine Auflösung:

$$z_{\alpha_1} = \varphi_1, \ldots z_{\alpha_q} = \varphi_q$$

des einen Gleichungensystems das zweite identisch befriedigt.

Gestattet ein Gleichungensystem $\Phi_\varkappa = 0$ $(\varkappa = 1, 2 \ldots q)$ eine infinitesimale Transformation:

$$dz_\nu = \zeta_\nu(z_1, \ldots z_n)\,dt \quad (\nu = 1, 2 \ldots n),$$

d. h. werden die Ausdrücke:

$$\zeta_1 \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial z_1} + \cdots + \zeta_n \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial z_n} \quad (\varkappa = 1, 2 \ldots q)$$

vermöge des Gleichungensystems Null, so gestattet jedes äquivalente Gleichungensystem diese infinitesimale Transformation.

Wird ein System von $(n-k)$ Pfaff'schen Gleichungen in den n Variablen $z_1, \ldots z_n$:

$$\alpha_{11}(z)\,dz_1 + \cdots + \alpha_{1n}(z)\,dz_n = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{n-k,1}(z)\,dz_1 + \cdots + \alpha_{n-k,n}(z)\,dz_n = 0$$

von allen Werthesystemen $z_1, \ldots z_n, dz_1, \ldots dz_n$ befriedigt, welche einem Gleichungensystem $\Phi_\varkappa(z) = 0$ $(\varkappa = 1, 2 \ldots q)$ und dem durch Differentiation entstehenden System $d\Phi_1 = 0$, $\ldots d\Phi_q = 0$ genügen, so sagt man, dass das Gleichungensystem $\Phi_1 = 0, \ldots \Phi_q = 0$ die $(n-k)$ Pfaff'schen Gleichungen erfüllt. — Ein dem Gleichungensystem $\Phi_1 = 0, \ldots \Phi_q = 0$ äquivalentes Gleichungensystem erfüllt dieselben Pfaff'schen Gleichungen.

Bestehen nun die genannten Pfaff'schen Gleichungen vermöge der Gleichungen

$$\Phi_1 = 0, \ldots \Phi_q = 0, \quad d\Phi_1 = 0, \ldots d\Phi_q = 0,$$

so gehören zu jedem besonderen Werthesystem (z), das $\Phi_1 = 0$, $\ldots \Phi_q = 0$ befriedigt, $(n-k)q$ solche Zahlengrössen

$$\lambda_{\mu,\varkappa} \quad (\mu = 1, 2 \ldots (n-k); \quad \varkappa = 1, 2 \ldots q),$$

dass für dasselbe besondere Werthesystem (z) die Gleichungen

$$\alpha_{\mu,1} dz_1 + \cdots + \alpha_{\mu,n} dz_n = \lambda_{\mu 1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_\nu} dz_\nu + \cdots + \lambda_{\mu n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \Phi_q}{\partial z_\nu} dz_\nu$$
$$(\mu = 1, 2 \ldots (n-k))$$

gelten, welches auch die Werthe von $dz_1, \ldots dz_n$ seien. Darum aber müssen in den gleichwerthigen Gleichungen:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\alpha_{\mu\nu} - \left(\lambda_{\mu 1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_\nu} + \cdots + \lambda_{\mu q} \frac{\partial \Phi_q}{\partial z_\nu} \right) \right) dz_\nu = 0$$

die Coefficienten von $dz_1, \ldots dz_n$ alle verschwinden; man erhält somit für die $q(n-k)$ Grössen $\lambda_{\mu\varkappa}$ die $n(n-k)$ Gleichungen:

$$\lambda_{\mu 1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_\nu} + \cdots + \lambda_{\mu q} \frac{\partial \Phi_q}{\partial z_\nu} = \alpha_{\mu\nu}(z).$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Grössen $\lambda_{\mu\varkappa}$, so geben Gleichungen hervor, die für alle diejenigen Werthesysteme (z) erfüllt sind, welche den Gleichungen $\Phi_\varkappa(z) = 0$ $(\varkappa = 1, \ldots q)$ genügen, d. h. Gleichungen, die aus dem System $\Phi_1 = 0, \ldots \Phi_q = 0$ folgen.

Will man darnach die PFAFF'schen Gleichungen erfüllende Gleichungensysteme angeben, so wähle man q ganz beliebige Gleichungen

$$\Phi_1 = 0, \ldots \Phi_q = 0$$

und füge zu diesen die durch Elimination der $\lambda_{\mu\varkappa}$ aus den $n(n-k)$ Gleichungen

$$\lambda_{\mu 1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_\nu} + \cdots + \lambda_{\mu q} \frac{\partial \Phi_q}{\partial z_\nu} = \alpha_{\mu\nu}(z)$$

entstehenden, untereinander und mit den gewählten Gleichungen verträglichen Gleichungen. —

Ist ein System PFAFF'scher Gleichungen in den Grössen $y_1, \ldots y_m, z_1, \ldots z_n$ vorgelegt, das von $dy_1, \ldots dy_m$ frei ist:

$$\alpha_{11}(z, y) dz_1 + \cdots + \alpha_{1n}(z, y) dz_n = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{n-k,1}(z, y) dz_1 + \cdots + \alpha_{n-k,n}(z, y) dz_n = 0,$$

und können die $n(n-k)$ Functionen $\alpha_{\mu\nu}(z, y)$ nicht gleichzeitig für Werthesysteme (z, y) verschwinden, so muss jedes diese PFAFF'schen Gleichungen erfüllende Gleichungensystem:

$$W_1(z_1, \dots z_n, y_1, \dots y_m) = 0, \quad W_2 = 0, \dots$$

Relationen in den Grössen z allein umfassen, d. h. es muss implicite Relationen in den z allein enthalten, denn anderenfalls wären ja die Differentiale $dz_1, \dots dz_n$ nicht durch Gleichungen verbunden.

Zur Bestimmung der die letzten Pfaff'schen Gleichungen erfüllenden Gleichungensysteme wähle man somit q ganz beliebige (von einander unabhängige) Gleichungen in den z:

$$\Omega_1(z_1, \dots z_n) = 0, \dots \Omega_q = 0$$

und füge zu diesen die durch Elimination der Grössen $\lambda_{\mu\varkappa}$ aus den Gleichungen

$$\lambda_{\mu 1}\frac{\partial \Omega_1}{\partial z_\nu} + \dots + \lambda_{\mu q}\frac{\partial \Omega_q}{\partial z_\nu} = a_{\mu\nu}(z, y)$$

hervorgehenden Gleichungen

$$U_1(z, y) = 0, \dots \quad U_l(z, y) = 0,$$

die unter einander und mit den Gleichungen $\Omega_\varkappa = 0$ $(\varkappa = 1, \dots q)$ verträglich sind.

Fügt man zu den bisherigen Gleichungen $\Omega = 0$ und $U = 0$ neue

$$V_1(z, y) = 0, \quad V_2(z, y) = 0, \dots$$

die unter einander und mit den früheren Gleichungen verträglich sind, so erhält man immer wieder ein die Pfaff'schen Gleichungen erfüllendes Gleichungensystem; doch die Anzahl der Relationen eines Systems darf die Anzahl der Variablen z und y nicht übersteigen. —

Will man nach diesen Vorschriften die den besonderen $(n+1)$ Pfaff'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n &= 0, \\ dp_1 - p_{11} dx_1 - \dots - p_{1n} dx_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dp_n - p_{n1} dx_1 - \dots - p_{nn} dx_n &= 0 \end{aligned}$$

in den $2n + 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ Variablen

$$x_1, \dots x_n, z; \quad p_1, \dots p_n; \quad p_{11}, \dots p_{\varkappa\lambda} = p_{\lambda\varkappa}, \dots p_{nn}$$

genügenden Gleichungensysteme

$$W_1(z, x_\nu, p_\nu, p_{\varkappa\lambda}) = 0, \quad W_2 = 0, \dots$$

bestimmen, so beachte man zunächst, dass jedes solche Gleichungensystem eine Anzahl von einander unabhängiger Relationen in den z, x_ν und p_ν umfassen muss und diese Relationen die Grössen z und $p_1, \dots p_n$ nicht blos formell enthalten oder von ihnen frei sein können, denn wenn das der Fall wäre und $O_1(x_1, \dots x_n) = 0$, $O_2 = 0, \dots$ die äquivalenten Relationen wären, so lieferten die Gleichungen $W = 0$ und $dW = 0$ eben dieselben Gleichungen wie die Beziehungen $W = 0$ und $dO = 0$; doch die letzten Gleichungen $dO = 0$ würden in Widerspruch mit den Pfaff'schen Gleichungen bei beliebigen dz, $dp_1, \dots dp_n$ erfüllt sein.

Die von einander unabhängigen Gleichungen in z, den x und p mögen heissen:

$$\Omega_1(z, x_1, \dots x_n, p_1, \dots p_n) = 0, \dots \Omega_{q+1}(z, x_\nu, p_\nu) = 0,$$

und q werde kleiner als n angenommen. Es lässt sich zeigen, dass q mindestens gleich n sein muss.

Die $(q+1)$ Gleichungen $\Omega = 0$ sind nach $(q+1)$ der Variablen z, x, p lösbar; wir sagen zunächst nach z, q_1 von den x und q_2 von den p, wenn $q_1 + q_2 = q$ ist. Versteht man unter $\alpha_1, \dots \alpha_n$; $\beta_1, \dots \beta_n$ zwei gewisse Reihenfolgen der Zahlen 1, 2, ... n, so bestehen also Relationen der Form:

$$z - f(x_{\alpha_{q_1+1}}, \dots x_{\alpha_n}; \; p_{\beta_{q_2+1}}, \dots p_{\beta_n}) = 0,$$

$$x_{\alpha_{\varkappa_1}} - \varphi_{\varkappa_1}(x_{\alpha_{q_1+1}}, \dots x_{\alpha_n}; \; p_{\beta_{q_2+1}}, \dots p_{\beta_n}) = 0 \quad (\varkappa_1 = 1, 2 \dots q_1),$$

$$p_{\beta_{\varkappa_2}} - \psi_{\varkappa_2}(x_{\alpha_{q_1+1}}, \dots x_{\alpha_n}; \; p_{\beta_{q_2+1}}, \dots p_{\beta_n}) = 0 \quad (\varkappa_2 = 1, 2 \dots q_2)$$

und hierauf sollen Beziehungen:

$$dz - \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu dx_\mu = \lambda_{00}(dz - df) + \sum_{\varkappa_1=1}^{q_1} \lambda_{0\varkappa_1}(dx_{\alpha_{\varkappa_1}} - d\varphi_{\varkappa_1}) \\ + \sum_{\varkappa_2=1}^{q_2} \lambda_{0, q_1+\varkappa_2}(dp_{\beta_{\varkappa_2}} - d\psi_{\varkappa_2}),$$

$$dp_\nu - \sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu} dx_\mu = \lambda_{\nu 0}(dz - df) + \sum_{\varkappa_1} \lambda_{\nu,\varkappa_1}(dx_{\alpha_{\varkappa_1}} - d\varphi_{\varkappa_1}) \\ + \sum_{\varkappa_2} \lambda_{\nu, q_1+\varkappa_2}(dp_{\beta_{\varkappa_2}} - d\psi_{\varkappa_2})$$

$$(\nu = 1, 2 \dots n)$$

gelten, welches auch die Werthe von dz, den dx und dp sind. Darum muss zunächst:

$$\lambda_{00}=1,\quad \lambda_{0,\varkappa_1}=-p_{\alpha_{\varkappa_1}},\quad \lambda_{0,q_1+\varkappa_2}=0,$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_{q_1+\sigma}}}+\sum_{\varkappa_1=1}^{q_1}p_{\alpha_{\varkappa_1}}\frac{\partial\varphi_{\varkappa_1}}{\partial x_{\alpha_{q_1+\sigma}}}=-p_{\alpha_{q_1+\sigma}}(\sigma=1,2,\dots(n-q_1)),$$

$$-\frac{\partial f}{\partial f_{\beta_{q_2+\tau}}}+p_{\alpha_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_{\beta_{q_2+\tau}}}+\cdots+p_{\alpha_{q_1}}\frac{\partial\varphi_{q_1}}{\partial p_{\beta_{q_2+\tau}}}=0$$
$$(\tau=1,2\,\dots\,(n-q_2))$$

sein; es verschwinden daher nothwendig die Functionaldeterminanten von $f,\varphi_1,\dots\varphi_{q_1}$ nach (q_1+1) unter den $(n+q_1-q)$ Grössen $p_{\beta_{q_2+\tau}}$. Dieser Umstand sagt aus, dass zwischen den Functionen $f,\varphi_1,\dots,\varphi_{q_1}$ weitere Relationen bestehen, solange $q_2<n-q_1$ ist, oder solange $q<n$ ist. Folglich müssen zwischen den Variablen z, p_ν und x_ν mindestens $(n+1)$ Relationen existiren.

Nimmt man an, dass die $(q+1)$ Gleichungen $\Omega=0$ nicht wie früher nach z, nach q_1 von den x_ν und nach q_2 von den p_ν, sondern nach (q_1+1) von den x_ν und nach q_2 von den p_ν auflösbar seien, dass also Relationen von der Form

$$x_{\alpha_{\varkappa_1}}-\varphi_{\varkappa_1}(z,x_{\alpha_{q_1+2}},\dots x_{\alpha_n},p_{\beta_{q_2+1}},\dots p_{\beta_n})=0\,(\varkappa_1=1,\dots(q_1+1))$$
$$p_{\beta_{\varkappa_2}}-\psi_{\varkappa_2}(z,x_{\alpha_{q_1+2}},\dots x_{\alpha_n},p_{\beta_{q_2+1}},\dots p_{\beta_n})=0\quad(\varkappa_2=1,\dots q_2)$$

bestehen, wo wieder $q_1+q_2=q<n$ ist, so gelangt man auf Grund der ersten Pfaff'schen Gleichung zu den Beziehungen:

$$p_{\alpha_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\cdots+p_{\alpha_{q_1+1}}\frac{\partial\varphi_{q_1+1}}{\partial z}=1,$$

$$p_{\alpha_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{\alpha_{q_1+1+\sigma}}}+\cdots+p_{\alpha_{q_1+1}}\frac{\partial\varphi_{q_1+1}}{\partial x_{\alpha_{q_1+1+\sigma}}}=-p_{\alpha_{q_1+1+\sigma}}$$
$$(\sigma=1,2\,\dots\,(n-q_1-1)),$$

$$p_{\alpha_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_{\beta_{q_2+\tau}}}+\cdots+p_{\alpha_{q_1+1}}\frac{\partial\varphi_{q_1+1}}{\partial p_{\beta_{q_2+\tau}}}=0\ (\tau=1,2\dots(n-q_2)),$$

von welchen die letzten $(n-q_2)$ wieder den Schluss erheischen, dass q mindestens gleich n sein muss.

Darnach können wir nun sagen, dass jedes unsere $(n+1)$ Pfaff'schen Gleichungen erfüllende Gleichungensystem

$$W_1(z, x_1, \dots x_n, p_1, \dots p_n, p_{11}, \dots p_{nn}) = 0, \; W_2 = 0, \dots$$

$(n+1+q)$ von einander unabhängige Relationen zwischen z, den x und p umfasst, wo q entweder 0 oder 1 u. s. w. oder n bedeutet.

Heissen diese von einander unabhängigen Gleichungen:

$$\Omega_1(z, x_1, \dots x_n, p_1, \dots p_n) = 0, \dots \Omega_{n+q+1} = 0,$$

so kann man mit Rücksicht darauf, dass sie z und die p nicht blos formell enthalten oder von diesen Grössen nicht frei sein dürfen, auch zeigen, dass eine Functionaldeterminante aller Ω nach z, den p und nach q von den x nicht vermöge der Gleichungen $\Omega = 0$ verschwindet, und somit diese Gleichungen nach z, den p und nach q von den x auflösbar sind, oder dass mehrere Functionaldeterminanten aller Ω nach solchen Variablenreihen vermöge der Gleichungen $\Omega = 0$ nicht verschwinden, die zusammengenommen z und alle p enthalten.

Zum Beweise bemerke man, dass das Gleichungensystem $W = 0$ ausser den Gleichungen $\Omega = 0$ jedenfalls noch alle die Beziehungen umfasst, welche aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\lambda_{01}\frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \cdots + \lambda_{0,n+q+1}\frac{\partial \Omega_{n+q+1}}{\partial z} = 1;\\
&\lambda_{01}\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_\nu} + \cdots + \lambda_{0,n+q+1}\frac{\partial \Omega_{n+q+1}}{\partial x_\nu} = -p_\nu \quad (\nu = 1, \dots n), \quad (\alpha)\\
&\lambda_{01}\frac{\partial \Omega_1}{\partial p_\nu} + \cdots + \lambda_{0,n+q+1}\frac{\partial \Omega_{n+q+1}}{\partial p_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, \dots n),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\lambda_{\mu 1}\frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \cdots + \lambda_{\mu,n+q+1}\frac{\partial \Omega_{n+q+1}}{\partial z} = 0,\\
&\lambda_{\mu 1}\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_\nu} + \cdots + \lambda_{\mu,n+q+1}\frac{\partial \Omega_{n+q+1}}{\partial x_\nu} = -p_{\mu\nu} \; (\nu = 1 \dots n), \quad (\alpha')\\
&\lambda_{\mu 1}\frac{\partial \Omega_1}{\partial p_\nu} + \cdots + \lambda_{\mu,n+q+1}\frac{\partial \Omega_{n+q+1}}{\partial p_\nu} = \begin{cases} 0 \; (\nu \neq \mu) \\ 1 \; (\nu = \mu) \end{cases} (\nu = 1 \dots n)\\
&\qquad\qquad (\mu = 1, 2 \dots n)
\end{aligned}$$

durch Elimination der λ entstehen.

Diese Gleichungen (α) und (α') sind aber nur dann untereinander und mit den Gleichungen $\Omega = 0$ verträglich, wenn eine der $(n+q+1)$-reihigen Functionaldeterminanten der Matrix:

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial z}, & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, & \dots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial \Omega_1}{\partial p_1}, & \dots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial \Omega_{n+q+1}}{\partial z} & \frac{\partial \Omega_{n+q+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Omega_{n+q+1}}{\partial x_n}, & \frac{\partial \Omega_{n+q+1}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \Omega_{n+q+1}}{\partial p_n} \end{matrix}\right|$$

welche die erste Verticalreihe der Matrix enthalten, von Null verschieden ist, wenn ferner eine der Functionaldeterminanten, welche die $(n+\mu+1)^{\text{te}}$ Verticalreihe der Matrix enthalten, — wo μ schrittweise jeden der Werthe $1, 2 \dots n$ annehmen kann — von Null verschieden ist. In der That, wenn alle Functionaldeterminanten einer der genannten Kategorien verschwänden, müssten auch alle übrigen $(n+q+1)$-reihigen Determinanten Null sein, was mit der Unabhängigkeit der Gleichungen $\Omega = 0$ von einander nicht vereinbar ist; oder es müssten, was auch nicht zulässig ist, alle Ω von z und den p frei sein. Sind z. B. alle Determinanten der Matrix Null, welche die erste Verticalreihe dieser enthalten, so nehme man zum Beweise, dass die Determinanten

$$\frac{\partial(\Omega_1, \dots \Omega_{n+q+1})}{\partial(x_{\alpha_1}, \dots x_{\alpha_{q+\pi}}, p_{\beta_1}, \dots p_{\beta_{n-\pi+1}})} \quad (\pi = 1, 2 \dots (n-q); q < n)$$

verschwinden, unter den erst genannten diejenigen $(n+q+1)$ heraus, die je $(n+q)$ von solchen Verticalreihen der Matrix besitzen, welche durch die Ableitungen der Ω nach $x_{\alpha_1}, \dots x_{\alpha_{q+\pi}}$, $p_{\beta_1}, \dots p_{\beta_{n-\pi+1}}$ gekennzeichnet sind, löse alle nach den Elementen $\frac{\partial \Omega_1}{\partial z}, \dots \frac{\partial \Omega_{n+q+1}}{\partial z}$ auf, so muss die Determinante der $(n+q+1)$ entstehenden homogenen Gleichungen verschwinden, weil die Ω nicht alle von z frei sind. Die Determinante ist aber die adjungirte derjenigen, deren Verschwinden nachzuweisen ist, und der Beweis ist erbracht.

Um also der Forderung nach der Verträglichkeit der früheren Gleichungen gerecht zu werden, darf entweder eine Functionaldeterminante der Ω nach z, den p und q von den x, z. B.

$$(1)\qquad \frac{\partial(\Omega_1, \dots \Omega_{n+q+1})}{\partial(z, x_{\alpha_1}, \dots x_{\alpha_q}, p_1, \dots p_n)} \quad (q \leqq n)$$

vermöge der Gleichungen $\Omega = 0$ nicht verschwinden, oder es gibt zugleich nothwendig mehrere — und nothwendig höchstens $(n - q + 1)$ — Functionaldeterminanten der Ω, die nicht vermöge der Gleichungen $\Omega = 0$ verschwinden, und zwar sind diese nach solchen Variablenreihen genommen, dass in ihnen z und alle p vorkommen; sie sind von den Gestalten:

$$(2)\qquad \frac{\partial(\Omega_1, \dots \Omega_{n+q+1})}{\partial(z, x_{\alpha_1}, \dots x_{\alpha_{q+\pi}}, p_{\beta_1}, \dots p_{\beta_{n-\pi}})}, \qquad \begin{pmatrix} \pi = 1, 2 \dots (n-q) \\ q < n \end{pmatrix}$$

$$(3)\qquad \frac{\partial(\Omega_1 \dots \Omega_{n+q+1})}{\partial(x_{\alpha_1}, \dots x_{\alpha_{q+\pi}}, p_{\beta_1}, \dots p_{\beta_{n-\pi+1}})}.$$

Ist eine Determinante wie die unter (1) vermöge der Gleichungen $\Omega = 0$ nicht Null, so ist das System von Gleichungen $\Omega = 0$ auf die Form zu bringen:

$$\begin{aligned}
&z - f(x_{\alpha_{q+1}}, \dots x_{\alpha_n}) = 0\,, \\
&x_{\alpha_\varkappa} - \varphi_{\alpha_\varkappa}(x_{\alpha_{q+1}}, \dots x_{\alpha_n}) = 0 \quad (\varkappa = 1, 2 \dots q)\,, \\
&p_\nu - \psi_\nu(x_{\alpha_{q+1}}, \dots x_{\alpha_n}) = 0 \qquad (\nu = 1, 2 \dots n)\,,
\end{aligned}$$

und die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial(z - f, x_{\alpha_1} - \varphi_{\alpha_1}, \dots x_{\alpha_q} - \varphi_{\alpha_q}, p_1 - \psi_1, \dots p_n - \psi_n)}{\partial(z, x_{\alpha_1}, \dots x_{\alpha_q}, p_1, \dots p_n)}$$

hat den Werth 1.

Trägt man die Ausdrücke für z, $x_{\alpha_\varkappa}$, p_ν in die Gleichungen (α) ein, so entsteht:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} - \sum_{\varkappa=1}^{q} p_{\alpha_\varkappa} \frac{\partial \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} = p_{\alpha_{q+\sigma}} = \psi_{\alpha_{q+\sigma}}(x_{\alpha_{q+1}}, \dots x_{\alpha_n})$$
$$(\sigma = 1, 2 \dots (n-q));$$

man erhält also zwischen den $(n + q + 1)$ Functionen f, $\varphi_{\alpha_\varkappa}$, ψ_ν $(n - q)$ Bedingungen; $\psi_{\alpha_{q+1}}, \dots \psi_{\alpha_n}$ sind durch f, $\varphi_{\alpha_1}, \dots \varphi_{\alpha_q}$, $\psi_{\alpha_1}, \dots \psi_{\alpha_q}$ ausgedrückt.

Setzt man die Ausdrücke für z, $x_{\alpha_\varkappa}$, p_ν in die Gleichungen (a') ein, so ergibt sich

$$p_{\alpha_\varkappa, \alpha_{q+\sigma}} = \frac{\partial \psi_{\alpha_\varkappa}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} - \sum_{\varkappa'=1}^{q} p_{\alpha_\varkappa, \alpha_{\varkappa'}} \frac{\partial \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} = p_{\alpha_{q+\sigma}, \alpha_\varkappa},$$

$$p_{\alpha_{q+\tau}, \alpha_{q+\sigma}} = \frac{\partial \psi_{\alpha_{q+\tau}}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} - \sum_{\varkappa'=1}^{q} p_{\alpha_{q+\tau}, \alpha_{\varkappa'}} \frac{\partial \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}}.$$

In den letzten Gleichungen begegnet man nicht, wie es den Anschein hat, $(n-q)^2$ Gleichungen, sondern nur $\binom{n-q+1}{2}$, denn es ist $p_{\alpha_{q+\tau}, \alpha_{q+\sigma}} = p_{\alpha_{q+\sigma}, \alpha_{q+\tau}}$, wie aus der Darstellung:

$$\begin{aligned} p_{\alpha_{q+\tau}, \alpha_{q+\sigma}} = & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}} \partial x_{\alpha_{q+\tau}}} - \sum_{\varkappa'} \psi_{\alpha_{\varkappa'}} \frac{\partial^2 \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial x_{\alpha_{q+\tau}} \partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} \\ & + \sum_{\varkappa} \sum_{\varkappa'} p_{\alpha_\varkappa, \alpha_{\varkappa'}} \frac{\partial \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} \frac{\partial \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial x_{\alpha_{q+\tau}}} \\ & - \sum_{\varkappa'} \left(\frac{\partial \psi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} \frac{\partial \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial x_{\alpha_{q+\tau}}} + \frac{\partial \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} \frac{\partial \psi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial x_{\alpha_{q+\tau}}} \right) \end{aligned}$$

zu erkennen ist, die man mit Hilfe der Ausdrücke für $p_{\alpha_{q+\tau}, \alpha_{\varkappa'}}$ und $\psi_{\alpha_{q+\tau}}$ gewinnt.

Das unseren $(n+1)$ PFAFF'schen Gleichungen genügende Gleichungensystem:

$$z - f = 0, \quad x_{\alpha_\varkappa} - \varphi_{\alpha_\varkappa} = 0, \quad p_{\alpha_\varkappa} - \psi_{\alpha_\varkappa} = 0$$

$$p_{\alpha_{q+\sigma}} - \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} + \sum_{\varkappa'=1}^{q} \psi_{\alpha_{\varkappa'}} \frac{\partial \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} = 0,$$

$$p_{\alpha_\varkappa, \alpha_{q+\sigma}} - \frac{\partial \psi_{\alpha_\varkappa}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} + \sum_{\varkappa'} p_{\alpha_\varkappa \alpha_{\varkappa'}} \frac{\partial \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} = 0,$$

$$p_{\alpha_{q+\sigma}, \alpha_{q+\tau}} - \frac{\partial p_{\alpha_{q+\tau}}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} + \sum_{\varkappa'} p_{\alpha_{q+\tau}, \alpha_{\varkappa'}} \frac{\partial \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} = 0,$$

$$(\varkappa = 1, \ldots q; \ \sigma = 1, 2 \ldots (n-q))$$

ist daher

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{q(q-1)}{2} \right)\text{-gliedrig,}$$

es stellt geradezu z, $x_{\alpha_\varkappa}$, $p_{\alpha_\varkappa}$, $p_{\alpha_\varkappa, \alpha_{q+\sigma}}$, $p_{\alpha_{q+\sigma}, \alpha_{q+\tau}}$ durch die übrigen in dem System vorkommenden Variablen, d. h. durch die Grössen:

$$x_{\alpha_{q+1}}, \ldots x_{\alpha_n} \text{ und die } \frac{q(q+1)}{2} \text{ Variablen } p_{\alpha_\varkappa, \alpha_{\varkappa'}} \text{ dar}[1]).$$

Setzt man $q = 0$, also

$$z - f(x_1, \ldots x_n), \quad p_\nu - \psi_\nu(x_1, \ldots x_n) = 0 \quad (\nu = 1, \ldots n),$$

so wird

$$p_\nu = \psi_\nu = \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \text{ und } p_{\lambda\mu} = p_{\mu\lambda} = \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\lambda \partial x_\mu},$$

und man hat ein $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$-gliedriges Gleichungensystem vor sich. Dieses System ist das allgemeinste nach z, den p_ν und $p_{\lambda\mu}$ auflösbare $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$-gliedrige Gleichungensystem, das die Pfaff'schen Gleichungen erfüllt.

Für $q = n$ werden z, alle x und p constant; die $p_{\lambda\mu}$ bleiben unbestimmt. —

Weitere Betrachtungen über die hier behandelten Gleichungensysteme folgen später; jetzt sollen zunächst die Fälle gesetzt werden, in denen keine Functionaldeterminante der Form (1) vermöge der Gleichungen $\Omega = 0$ von Null verschieden ist.

Ist das Gleichungensystem $\Omega = 0$ nach z, $x_{\alpha_\varkappa}$ ($\varkappa = 1, 2 \ldots (q+\pi)$; $\pi = 1, 2 \ldots (n-q)$; $q < n$) und p_{β_ι} ($\iota = 1, 2 \ldots (n-\pi)$) auflösbar, weil die Functionaldeterminante von der Form (2) — und wie gezeigt war, mindestens noch eine zweite Functionaldeterminante — nicht vermöge der Gleichungen $\Omega = 0$ verschwindet, und heissen die Auflösungen:

---

1) und es entsteht aus dem $(n+1)$-gliedrigen Gleichungensystem mit $(q+1)$ Relationen zwischen z und den x, welches die eine Pfaff'sche Gleichung $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ erfüllt, aus dem Gleichungensystem:

$$z - f(x_{\alpha_{q+1}}, \ldots x_{\alpha_n}) = 0, \quad x_{\alpha_\varkappa} - \varphi_{\alpha_\varkappa} = 0,$$

$$p_{\alpha_{q+\sigma}} - \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} + \sum_{\varkappa=1}^{q} p_{\alpha_\varkappa} \frac{\partial \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} = 0 \quad (q = 0, 1, \ldots n)$$

dadurch, dass man die Relationen $p_{\alpha_\varkappa} - \psi_{\alpha_\varkappa} = 0$ und die Gleichungen in den $p_{\mu\nu}$ hinzufügt.

$$z - f(x_{\alpha_{q+\pi+1}}, \dots x_{\alpha_n}, p_{\beta_{n-\pi+1}}, \dots p_{\beta_n}) = 0,$$
$$x_{\alpha_\varkappa} - \varphi_{\alpha_\varkappa}(x_{\alpha_{q+\pi+1}}, \dots x_{\alpha_n}, p_{\beta_{n-\pi+1}}, \dots p_{\beta}) = 0,$$
$$p_{\beta_\iota} - \psi_{\beta_\iota}(x_{\alpha_{q+\pi+1}}, \dots x_{\alpha_n}, p_{\beta_{n-\pi+1}}, \dots p_{\beta_n}) = 0,$$

so gewinnt man auf dem früher bezeichneten oder directen Wege die folgenden Gleichungen, die man zu den voranstehenden hinzuzufügen hat, um ein den Pfaff'schen Gleichungen genügendes System vor sich zu haben:

$$p_{\alpha_{q+\pi+\tau}} - \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_{q+\pi+\tau}}} + \sum_{\varkappa'=1}^{q+\pi} p_{\alpha_{\varkappa'}} \frac{\partial \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial x_{\alpha_{q+\pi+\tau}}} = 0$$
$$(\tau = 1, 2 \dots n - (q+\pi)),$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p_{\beta_{n-\pi+\varrho}}} + \sum_{\varkappa'} p_{\alpha_{\varkappa'}} \frac{\partial \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial p_{\beta_{n-\pi+\varrho}}} = 0 \quad (\varrho = 1, 2 \dots \pi),$$

$$p_{\beta_\iota, \alpha_{q+\pi+\tau}} - \frac{\partial \psi_{\beta_\iota}}{\partial x_{\alpha_{q+\pi+\tau}}} + \sum_{\varkappa'} p_{\beta_\iota \alpha_{\varkappa'}} \frac{\partial \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial x_{\alpha_{q+\pi+\tau}}} = 0$$
$$\begin{pmatrix} \iota = 1, 2 \dots (n-\pi) \\ \tau = 1, 2 \dots (n-q-\pi) \end{pmatrix},$$

$$-\frac{\partial \psi_{\beta_\iota}}{\partial p_{\beta_{n-\pi+\varrho}}} + \sum_{\varkappa'} p_{\beta_\iota \alpha_{\varkappa'}} \frac{\partial \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial p_{\beta_{n-\pi+\varrho}}} = 0,$$

$$p_{\beta_{n-\pi+\varrho}, \alpha_{q+\pi+\tau}} + \sum_{\varkappa'} p_{\beta_{n-\pi+\varrho}, \alpha_{\varkappa'}} \frac{\partial \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial x_{\alpha_{q+\pi+\tau}}} = 0,$$

$$\sum_{\varkappa'} \frac{\partial \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial p_{\beta_{n-\pi+\varrho'}}} p_{\beta_{n-\pi+\varrho}, \alpha_{\varkappa'}} = \begin{cases} 1 & \varrho' = \varrho \\ 0 & \varrho' \neq \varrho \end{cases} \quad (\varrho' = 1, 2 \dots \pi).$$

Das Gleichungssystem ist im Falle $q \geqq \pi \left(\frac{(1+n)(n+2)}{2} - \frac{q(q-1)}{2}\right)$-gliedrig und im Falle $q \leqq \pi$

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{q(q-1)}{2} + (\pi - q)\right)\text{-gliedrig.}$$

Ist endlich eine Functionaldeterminante der Ω von der Form (3) vermöge der Gleichungen $\Omega = 0$ nicht Null — und wie früher mindestens noch eine zweite — dann hat man in den folgenden Gleichungen ein den Pfaff'schen Gleichungen genügendes Gleichungssystem:

$$x_{\alpha_\varkappa} - \varphi_{\alpha_\varkappa}(z, x_{\alpha_{q+\pi+1}}, \dots x_{\alpha_n}, p_{\beta_{n-\pi+2}}, \dots p_{\beta_n}) = 0$$
$$(\varkappa = 1, 2 \dots (q+\pi)),$$
$$p_{\beta_\iota} - \psi_{\beta_\iota}(z, x_{\alpha_{q+\pi+1}}, \dots x_{\alpha_n}, p_{\beta_{n-\pi+2}}, \dots p_{\beta_n}) = 0$$
$$(\iota = 1, 2 \dots (n-\pi+1)),$$
$$p_{\alpha_{q+\pi+\tau}} + \sum_{\varkappa=1}^{q+\pi} p_{\alpha_\varkappa} \frac{\partial \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial x_{\alpha_{q+\pi+\tau}}} = 0 \quad (\tau = 1, 2, \dots n-(q+\pi)),$$
$$\sum_\varkappa p_{\alpha_\varkappa} \frac{\partial \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial z} - 1 = 0, \quad \sum_\varkappa p_{\alpha_\varkappa} \frac{\partial \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial p_{\beta_{n-\pi+1+\varrho}}} = 0$$
$$(\varrho = 1, 2 \dots (\pi-1)),$$
$$p_{\beta_\iota, \alpha_{q+\pi+\tau}} - \frac{\partial \psi_{\beta_\iota}}{\partial x_{\alpha_{q+\pi+\tau}}} + \sum_\varkappa p_{\beta_\iota \alpha_\varkappa} \frac{\partial \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial x_{\alpha_{q+\pi+\tau}}} = 0,$$
$$\frac{\partial \psi_{\beta_\iota}}{\partial z} - \sum_\varkappa p_{\beta_\iota \alpha_\varkappa} \frac{\partial \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial \psi_{\beta_\iota}}{\partial p_{\beta_{n-\pi+1+\varrho}}} - \sum_\varkappa p_{\beta_\iota \alpha_\varkappa} \frac{\partial \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial p_{\beta_{n-\pi+1+\varrho}}} = 0,$$
$$p_{\beta_{n-\pi+1+\varrho}, \alpha_{q+\pi+\tau}} + \sum_\varkappa p_{\beta_{n-\pi+1+\varrho}, \alpha_\varkappa} \frac{\partial \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial x_{\alpha_{q+\pi+\tau}}} = 0,$$
$$\sum_\varkappa p_{\beta_{n-\pi+1+\varrho}, \alpha_\varkappa} \frac{\partial \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial z} = 0,$$
$$\sum_\varkappa p_{\beta_{n-\pi+1+\varrho}, \alpha_\varkappa} \frac{\partial \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial p_{\beta_{n-\pi+1+\varrho'}}} = \begin{cases} 0 & \varrho' \neq \varrho \\ 1 & \varrho' = \varrho \end{cases} \quad (\varrho' = 1, 2 \dots (\pi-1)),$$

welches wiederum

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{q(q-1)}{2}\right)\text{-gliedrig}$$

oder

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{q(q-1)}{2} + (\pi - 1 - q)\right)\text{-gliedrig}$$

ist, je nachdem

$$q \geqq \pi - 1 \quad \text{oder} \quad q \leqq \pi - 1$$

ist; π hat die Werthe 1, 2 ... oder $(n-q)$ und q ist $< n$.

Zur Herstellung der unseren $(n+1)$ Pfaff'schen Gleichungen genügenden Gleichungensysteme ist nun noch eine Erwägung vorzunehmen.

Nennt man den Inbegriff bestimmter Werthe

$$(z, x_1, \dots x_n, p_1, \dots p_n, p_{11}, \dots p_{nn})$$

ein Element zweiter Ordnung des Raumes $(z, x_1, \dots x_n)$, so entsteht die Frage, die Herr Engel im Falle $n = 2$ aufwarf und behandelte[1]), ob jedem Elemente (z, x, p) einer $(n-q)$-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit, die als Elementmannigfaltigkeit aufgefasst durch die Gleichungen

$$z - f(x_{\alpha_{q+1}}, \dots x_{\alpha_n}) = 0,$$

$$x_{\alpha_\varkappa} - \varphi_{\alpha_\varkappa}(x_{\alpha_{q+1}}, \dots x_{\alpha_n}) = 0 \quad (\varkappa = 1, 2 \dots q),$$

$$p_{\alpha_{q+\sigma}} - \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} + \sum_\varkappa p_{\alpha_\varkappa} \frac{\partial \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} = 0 \quad (\sigma = 1, 2 \dots (n-q))$$

dargestellt sei, mit Hilfe der n Gleichungen

$$dp_{\alpha_{q+\sigma}} - \sum_{\nu=1}^{n} p_{\alpha_{q+\sigma}, \alpha_\nu} \, dx_{\alpha_\nu} = 0,$$

$$dp_{\alpha_\varkappa} - \sum_{\nu=1}^{n} p_{\alpha_\varkappa, \alpha_\nu} \, dx_{\alpha_\nu} = 0$$

ein bestimmtes Element zweiter Ordnung zuzuordnen ist. Sofern $q > 0$ ist, also $x_{\alpha_{q+1}}, \dots x_{\alpha_n}$ und $p_{\alpha_1}, \dots p_{\alpha_q}$ willkürlich sind, ergibt sich bei der Substitution der Ausdrücke für $x_{\alpha_\varkappa}$, z und $p_{\alpha_{q+\sigma}}$ in die Pfaff'schen Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}}} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}} \partial x_{\alpha_{q+\tau}}} - \sum_\varkappa p_{\alpha_\varkappa} \frac{\partial^2 \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial x_{\alpha_{q+\sigma}} \partial x_{\alpha_{q+\tau}}}$$
$$- \sum_\varkappa p_{\alpha_{q+\sigma}, \alpha_\varkappa} \frac{\partial \varphi_{\alpha_\varkappa}}{\partial x_{\alpha_{q+\tau}}} = p_{\alpha_{q+\sigma}, \alpha_{q+\tau}},$$

$$1 = 0, \quad \sum_{\varkappa'} p_{\alpha_\varkappa \alpha_{\varkappa'}} \frac{\partial \varphi_{\alpha_{\varkappa'}}}{\partial x_{\alpha_{q+\tau}}} = 0 \quad (\tau = 1, 2 \dots (n-q)),$$

was ganz sinnlos ist. — Man wird also aufmerksam, dass die Grössen (Coordinaten) $p_{11}, \dots p_{nn}$ zur analytischen Berechnung

---

[1]) Ber. der K. Sächs. Gesellschaft der W. vom 3. Juli 1893.

der Elemente zweiter Ordnung einer Punktmannigfaltigkeit von weniger als n Dimensionen im Raume R_{n+1} unbrauchbar sind.

Herr Engel führte darum für die Elemente zweiter Ordnung neue Coordinaten ein, so dass jedem Elemente (z, x, p) der ersten Ordnung einer $(n-1)$, $(n-2)$, ... 0-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit ein bestimmtes Element zweiter Ordnung zugehört. Indem er im Falle $n = 2$, wo in üblicher Weise statt $x_1, x_2, p_1, p_2, p_{11}, p_{12} = p_{21}, p_{22}$ der Reihe nach x, y, p, q, r, s, t geschrieben werde, dx, dy, dp, dq als homogene Coordinaten eines Raumes von drei Dimensionen auffasst, stellen die zwei Pfaff'schen Gleichungen

$$dp - r\,dx - s\,dy = 0\,, \quad dq - s\,dx - t\,dy = 0$$

∞^3 Geraden dar, welche einem linearen Complex angehören; doch die Coordinaten r, s, t reichen nicht aus, um alle Geraden des Complexes darzustellen, und darum reichen sie nicht zur Bestimmung der Elemente zweiter Ordnung einer einfach oder nullfach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit im Raume (z, x, y) aus.

Um nun alle Geraden des Complexes zu umfassen, führt Herr Engel fünf Coordinaten r_1, s_1, t_1, u_1, v_1 ein, und zwar sei:

$$r = -\frac{r_1}{u_1}\,, \quad s = -\frac{s_1}{u_1}\,, \quad t = -\frac{t_1}{u_1}\,, \quad r_1 t_1 - s_1^2 + u_1 v_1 = 0\,.$$

Dann werden alle Geraden des Complexes durch die Gleichungen

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} u_1\,dp + r_1\,dx + s_1\,dy &= 0\,, \\ u_1\,dq + s_1\,dx + t_1\,dy &= 0\,, \\ t_1\,dp - s_1\,dq - v_1\,dx &= 0\,, \\ s_1\,dp - r_1\,dq + v_1\,dy &= 0 \end{aligned}$$

dargestellt und man hat auf Grund dieser Gleichungen dem Elemente (z, x, y, p, q) der Elementmannigfaltigkeiten:

$$z - f(x) = 0\,, \quad y - \varphi(x) = 0 \quad p - f'(x) + q\varphi'(x) = 0$$

beziehungsweise

$$z = a\,, \quad x = b\,, \quad y = c$$

bestimmte Elemente zweiter Ordnung $(z, x, y, p, q, r_1 : s_1 : t_1 : u_1 : v_1)$ zuzuordnen. Im ersten Falle wird wegen der Willkürlichkeit von dx und dq

$$r_1 = \varphi'^2 t_1\,, \; s_1 = -\varphi' t_1\,, \; u_1 = 0\,, \; v_1 = (f'' - q\varphi'')\,t_1\,,$$

im zweiten wegen der Willkürlichkeit von dp und dq

$$u_1 = 0, \ t_1 = r_1 = s_1 = 0.$$

Die Ausführung dieser Betrachtungen zur Bestimmung der Elemente zweiter Ordnung von Punktmannigfaltigkeiten in Räumen von mehr als drei Dimensionen hat sich Herr ENGEL vorbehalten.

Darum knüpfen wir nunmehr allein im Falle $n = 2$ die Frage an, ob uns bei Aufstellung des den drei PFAFF'schen Gleichungen

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \ dp - r\,dx - s\,dy = 0,$$
$$dq - s\,dx - t\,dy = 0$$

genügenden Gleichungensystems:

$$z - f(x) = 0, \ y - \varphi(x) = 0, \ q - \psi(x) = 0, \ p - f' + \psi\varphi' = 0,$$
$$s = \psi' - t\varphi', \ r = (f'' - \psi'\varphi' - \psi\varphi'') - \psi'\varphi' + \varphi'^2 t,$$

die früher behandelt wurde, nicht am Ende Gleichungen verloren gingen, welche erst bei Gebrauch der Coordinaten r_1, s_1, t_1, u_1, v_1 in Erscheinung treten. Zur Entscheidung der Frage setze man

$$z = f(x), \ y = \varphi(x), \ q = \psi(x), \ p = f' - \psi\varphi'$$

in die Gleichungen (β) ein, wobei

$$\begin{aligned} &u_1(f'' - \varphi'\psi' - \psi\varphi'') + r_1 + s_1\varphi' = 0,\\ &u_1\psi' + s_1 + t_1\varphi' = 0,\\ &t_1(f'' - \varphi'\psi' - \psi\varphi'') - s_1\psi' - v_1 = 0,\\ &s_1(f'' - \varphi'\psi' - \psi\varphi'') - r_1\psi' + v_1\varphi' = 0 \end{aligned}$$

entsteht und entnehme hieraus die Darstellungen:

$$\begin{aligned} s_1 &= -u_1\psi' - t_1\varphi',\\ r_1 &= -u_1(f' - \varphi'\psi' - \psi\varphi'') + u_1\varphi'\psi' + \varphi'^2 t_1,\\ v_1 &= t_1(f'' - \varphi'\psi' - \psi\varphi'') + u_1\psi'^2 + t_1\varphi'\psi'. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke erfüllen die vierte der früheren Gleichungen und ebenso die Relation

$$r_1 t_1 - s_1^2 + u_1 v_1 = 0$$

identisch. Darum gewinnt man beim Uebergang zu den nicht homogenen Grössen r, s, t ausser den Gleichungen:

$$s = \psi' - t\varphi' \quad \text{und} \quad r = f'' - 2\varphi'\psi' - \psi\varphi'' + t\cdot\varphi'^2$$

keine weitere mehr; t wird nicht eine durch f, φ und ψ zu bestimmende Function von x.

Ebensowenig wie in dem hier betrachteten Falle $n = 2$ sind in anderen Fällen bei Aufstellung von Gleichungensystemen, die den Pfaff'schen Gleichungen genügen, Gleichungen verloren gegangen, es ist daher nur noch hinzuzufügen, dass man aus den aufgestellten Gleichungensystemen höhergliedrige Gleichungensysteme findet, welche den Pfaff'schen Gleichungen genügen, wenn man den gefundenen Gleichungen neue mit diesen und untereinander verträgliche Relationen

$$V_1(z, x_1, \dots x_n, p_1, \dots p_n, p_{11}, \dots p_{nn}) = 0\,, \; V_2 = 0\,, \dots$$

hinzugesellt; so wird man insbesondere $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$-gliedrige Gleichungensysteme herstellen können.

§ 2.

Der in dem voranstehenden Paragraphen beschriebene Vorgang zur Herstellung von Gleichungensystemen, welche ein System Pfaff'scher Gleichungen erfüllen, ist dann von Bedeutung, wenn man die Integration einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$V\left(z, x_1, \dots x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dots \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\, \partial x_n}\right) = 0$$

nicht als Bestimmung derjenigen Function $z = F(x_1, \dots x_n)$ auffasst, welche die Gleichung $V = 0$ identisch befriedigen, sondern nach Einführung der Bezeichnungen:

$$\frac{\partial z}{\partial x_\nu} = p_\nu\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_\lambda\, \partial x_\mu} = p_{\lambda\mu} \quad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2 \dots n)$$

als Bestimmung derjenigen nach z, den p_ν und $p_{\lambda\mu}$ auflösbaren, $(n+1)_2$ d. h. $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$-gliedrigen Gleichungensysteme von der Form:

$$z - F(x_1, \dots x_n) = 0\,, \; p_\nu - \frac{\partial F}{\partial x_\nu} = 0, \; p_{\lambda\mu} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_\lambda\, \partial x_\mu} = 0 \quad (\alpha)$$

auffasst, welche die Gleichung

$$V(z, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n, p_{11}, \ldots p_{n-1,n}) = 0$$

zu einer Identität machen oder umfassen; und wenn man weiter diese Aufgabe mit Rücksicht auf den Umstand, dass die Gleichungen (α) die $(n+1)$ PFAFF'schen Gleichungen

$$dz - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu dx_\nu = 0, \; dp_\lambda - \sum_{\mu=1}^{n} p_{\lambda\mu} dx_\mu = 0 \quad (\lambda = 1, \ldots n)$$

erfüllen, dahin verallgemeinert, dass alle $(n+1)_2$-gliedrigen Gleichungensysteme zu finden seien, welche diese PFAFF'schen Gleichungen erfüllen und die Gleichung $V = 0$ umfassen.

Ist diese Integrationsaufgabe gelöst, so ist es auch die voranstehende, denn es sind unter den letztgenannten Gleichungensystemen nur die auszuwählen, welche die Form (α) erhalten können.

Es sollen aber zunächst die $(n+1)_2$-gliedrigen Gleichungensysteme von der Form (α) in Betracht gezogen werden, welche eine Gleichung

$$V(z, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n, p_{11}, \ldots p_{n-1,n}) = 0$$

umfassen, so dass also

$$V\left(F, x_1, \ldots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial^2 F}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\right)$$

identisch Null ist. Die aus dieser Identität $V = 0$ durch Differentiation nach einer der Grössen x entstehenden Identitäten lehren, dass das Gleichungensystem (α) ausser der Gleichung $V = 0$ auch die n Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial z} p_i + \sum_\nu \frac{\partial V}{\partial p_\nu} p_{\nu i} + \sum_{\lambda,\mu} \frac{\partial V}{\partial p_{\lambda\mu}} \frac{\partial^3 F}{\partial x_\lambda \partial x_\mu \partial x_i} = 0 \qquad (\alpha')$$

$$(i = 1, \ldots n)$$

umfasst.

Diese Thatsache soll nun unter stetem Verfolg des Vorganges, den LIE bei Behandlung der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung einschlug, dadurch zum Ausdruck gebracht werden, dass gesagt wird: das Gleichungensystem (α) gestattet eine infinitesimale Transformation

$$\frac{\partial f}{\partial z}\varphi + \sum_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\varphi_\nu + \sum_\nu \frac{\partial f}{\partial p_\nu}\psi_\nu + \sum_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial p_{\lambda\mu}}\chi_{\lambda\mu},$$

in der die Functionen φ, φ_ν, ψ_ν, $\chi_{\lambda\mu}$ von z, den x, p und $p_{\lambda\mu}$ so ermittelt werden sollen, dass der eben angegebene Ausdruck nicht allein für

$$f = -(z - F), \; -\left(p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i}\right), \; -\left(p_{\lambda\mu} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right)$$

vermöge der Gleichungen (α) und (α') verschwindet, sondern für eines dieser f gerade in die linke Seite der Gleichung (α') übergeht.

In der That ist das die Verallgemeinerung der Aussagen, die Lie von einem $(n+1)$-gliedrigen Gleichungensysteme

$$z - F(x_1, \ldots x_n) = 0, \; p_\nu - \frac{\partial F}{\partial x_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, \ldots n) \qquad (\bar{\alpha})$$

macht, welches die eine Pfaff'sche Gleichung $dz - \Sigma p_\nu dx_\nu = 0$ erfüllt und sowohl die Gleichung $\Phi(z, x, p) = 0$ als auch die Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p_i + \sum_\nu \frac{\partial \Phi}{\partial p_\nu} \frac{\partial^2 F}{\partial x_\nu \partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots n)$$

umfasst; denn wenn Lie sagt, dass das Gleichungensystem $(\bar{\alpha})$, welches die Gleichung $\Phi = 0$ umfasst, die infinitesimale Transformation

$$\begin{aligned}[\Phi f] &= \frac{\partial f}{\partial z} \sum_\nu p_\nu \frac{\partial \Phi}{\partial p_\nu} + \sum_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial p_\nu} + \sum_\nu \frac{\partial f}{\partial p_\nu}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} - p_\nu \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \\ &= \sum_\nu \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right\}\end{aligned}$$

gestattet, so hat er unter den infinitesimalen Transformationen, welche das Gleichungensystem $(\bar{\alpha})$ gestattet, also unter den Transformationen:

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial z} \sum_\nu p_\nu \varphi_\nu + \sum_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \varphi_\nu + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\sum_\nu \frac{\partial^2 F}{\partial x_\nu \partial x} \varphi_\nu\right),$$

wo die φ noch willkürliche Functionen von z, den x und p sind, diejenige herausgegriffen, für die:

$$X\left(-p_i + \frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = \sum_\nu \frac{\partial^2 F}{\partial x_\nu \partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial p_\nu} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p_i$$

ist.

Um nun die frühere Aufgabe zu lösen, muss man das Gleichungensystem (α) als ein System auffassen, welches ausser den Variablen z, x, p und $p_{\lambda\mu}$ auch die von der Anordnung der Indices unabhängigen $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ Grössen $p_{\lambda\mu\nu}$ formal enthält, und hat $p_{\lambda\mu\nu}$ nicht am Ende als unabhängige Veränderliche, sondern als Function der x anzusehen, und insbesondere als die Ableitung von $p_{\lambda\mu}$ nach x_ν, wenn $p_{\lambda\mu}$ wie in dem System (α) als Function der x auftritt.

Führt man nämlich den Ausdruck ein:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\frac{\partial V}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}+p_\nu\frac{\partial f}{\partial z}+\sum_{\lambda'\mu'}\frac{\partial f}{\partial p_{\lambda'\mu'}}p_{\lambda'\mu'\nu}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial f}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial V}{\partial x_\nu}+p_\nu\frac{\partial V}{\partial z}+\sum_{\lambda'\mu'}\frac{\partial V}{\partial p_{\lambda'\mu'}}p_{\lambda'\mu'\nu}\right)\right\},$$

der durch das Symbol

$$[Vf]_2$$

bezeichnet werde*), so lässt sich darum weil

$$[V, z-F]_2=\sum_\nu\frac{\partial V}{\partial p_\nu}\left(p_\nu-\frac{\partial F}{\partial x_\nu}\right),$$

$$\left[V, p_i-\frac{\partial F}{\partial x_i}\right]_2=\sum_\nu\frac{\partial V}{\partial p_\nu}\left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_\nu}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial V}{\partial z}+\sum_{\lambda'\mu'}\frac{\partial V}{\partial p_{\lambda'\mu'}}p_{\lambda'\mu' i}\right),$$

$$\left[V, p_{ij}-\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]_2=\sum_\nu\frac{\partial V}{\partial p_\nu}\left(p_{ij\nu}-\frac{\partial^3 F}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_\nu}\right)$$

ist, zunächst sagen:

---

*) wo $[V, f]_2$ auch durch die Summe von Determinanten zu erklären ist:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\begin{vmatrix}\frac{\partial V}{\partial z}, & \frac{\partial(z-F)}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial V}{\partial x_\nu}+\sum_{\lambda'\mu'}\frac{\partial V}{\partial p_{\lambda'\mu'}}p_{\lambda'\mu'\nu}, & \frac{\partial(z-F)}{\partial x_\nu}+\sum_{\lambda'\mu'}\frac{\partial(z-F)}{\partial p_{\lambda'\mu'}}p_{\lambda'\mu'\nu}, & \frac{\partial f}{\partial x_\nu}+\sum_{\lambda'\mu'}\frac{\partial f}{\partial p_{\lambda'\mu'}}p_{\lambda'\mu'\nu} \\ \frac{\partial V}{\partial p_\nu}, & \frac{\partial(z-F)}{\partial p_\nu}, & \frac{\partial f}{\partial p_\nu},\end{vmatrix}.$$

Wenn ein Gleichungensystem (α) die Gleichung $V=0$ umfasst, so umfasst es auch die Gleichungen:

$$[V, z-F]_2=0, \left[V, p_i-\frac{\partial F}{\partial x_i}\right]_2=0, \left[V, p_{ij}-\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]_2=0,$$

denn diese Gleichungen bestehen vermöge des Gleichungensystems (α).

Deutet man hierauf

$$[V,f]_2=\frac{\partial f}{\partial z}\sum_\nu p_\nu\frac{\partial V}{\partial p_\nu}+\sum_\nu\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\frac{\partial V}{\partial p_\nu}$$
$$+\sum_\nu\frac{\partial f}{\partial p_\nu}\left(-\frac{\partial V}{\partial x_\nu}-p_\nu\frac{\partial V}{\partial z}-\sum_{\lambda'\mu'}\frac{\partial V}{\partial p_{\lambda'\mu'}}p_{\lambda'\mu'\nu}\right)$$
$$+\sum_{\lambda'\mu'}\frac{\partial f}{\partial p_{\lambda'\mu'}}\left(\sum_\nu\frac{\partial V}{\partial p_\nu}p_{\lambda'\mu'\nu}\right)$$

als diejenige Transformation, welche den Veränderlichen z, x_ν, p_ν, $p_{\lambda\mu}$ der Reihe nach die unendlich kleinen Incremente:

$$\delta z=\left(\sum_\nu p_\nu\frac{\partial V}{\partial p_\nu}\right)\delta t,\quad \delta x_\nu=\frac{\partial V}{\partial p_\nu}\delta t,$$
$$\delta p_\nu=-\left(\frac{\partial V}{\partial x_\nu}+p_\nu\frac{\partial V}{\partial z}+\sum_{\lambda'\mu'}\frac{\partial V}{\partial p_{\lambda'\mu'}}p_{\lambda'\mu'\nu}\right)\delta t,$$
$$\delta p_{\lambda\mu}=\left(\sum_\nu\frac{\partial V}{\partial p_\nu}p_{\lambda\mu\nu}\right)\delta t$$

ertheilt, den Grössen $p_{\lambda\mu\nu}$ aber die Zuwächse Null zuordnet, so kann man auch sagen, dass das Gleichungensystem (α) dann, wenn es die Gleichung $V=0$ umfasst, die infinitesimale Transformation $[V,f]_2$ gestattet.

Dann aber gestattet das Gleichungensystem (α) auch die $(n+1)_2$ infinitesimalen Transformationen

$$[z-F,f]_2, \left[p_i-\frac{\partial F}{\partial x_i}, f\right]_2, \left[p_{ij}-\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j}, f\right]_2,$$

d. h. alle diese Ausdrücke verschwinden für

$$f=z-F,\ p_\nu-\frac{\partial F}{\partial x_\nu},\quad p_{\lambda\mu}-\frac{\partial^2 F}{\partial x_\lambda\,\partial x_\mu},$$

denn man kann ja V der Reihe nach durch

$$z - F,\ p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i},\ p_{ij} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$$

ersetzen, weil jede Gleichung des Systems (α) von dem System umfasst wird.

Nunmehr sei ein $(n+1)_2$-gliedriges Gleichungensystem

$$V_\sigma(z, x, p, p_{\lambda\mu}) = 0 \quad (\sigma = 1, 2, \ldots (n+1)_2)$$

vorgelegt, welches sich aber auf die Form des Systems (α) bringen lasse. Dann gestattet das System (α) die $(n+1)_2$ infinitesimalen Transformationen:

$$[V_\sigma, f]_2;$$

und das dem System (α) äquivalente Gleichungensystem $V_\sigma = 0$ gestattet dieselben Transformationen, folglich sind alle Ausdrücke:

$$[V_\sigma, V_\tau]_2 \quad (\sigma, \tau = 1, 2, \ldots (n+1)_2)$$

vermöge der Gleichungen $V_\sigma = 0$ Null.

Ist ferner ein Gleichungensystem

$$\Phi_1(z, x, p, p_{\mu\lambda}) = 0, \ldots \Phi_m(z, x, p, p_{\mu\lambda}) = 0$$

gegeben, das wieder als ein System aufgefasst werde, welches die von den Variablen $z, x, p, p_{\lambda\mu}$ abhängig zu denkenden Grössen $p_{\lambda\mu\nu}$ formal enthält, und sind alle Ausdrücke

$$[\Phi_i \Phi_j]_2 \quad (i, j = 1, 2 \ldots m)$$

vermöge der Gleichungen $\Phi_\mu = 0$ Null oder gestattet das Gleichungensystem $\Phi_\mu = 0$ die infinitesimalen Transformationen $[\Phi_i, f]_2$, so wird auch jedes dem System $\Phi_\mu = 0$ äquivalente Gleichungensystem $\Psi_\mu = 0$ die Eigenschaft besitzen, dass alle Ausdrücke $[\Psi_i \Psi_j]_2$ vermöge der Gleichungen $\Psi_\mu = 0$ verschwinden.

In der That, das Gleichungensystem $\Psi_\mu = 0$ gestattet die infinitesimalen Transformationen $[\Phi_i f]_2$, d. h. es verschwinden alle Ausdrücke $[\Phi_i, \Psi_j]_2$ vermöge jedes der äquivalenten Gleichungensysteme $\Psi_\mu = 0$ und $\Phi_\mu = 0$.

Nun ist aber

$$[\Phi_i \Psi_j]_2 = -[\Psi_j \Phi_i]_2,$$

daher verschwinden die Ausdrücke $[\Psi_j \Phi_i]_2$ vermöge der Gleichungen $\Phi_\mu = 0$, d. h. das Gleichungensystem $\Phi_\mu = 0$ gestattet auch die infinitesimalen Transformationen

$$[\Psi_j f]_2 \quad (i = 1, \dots m).$$

Doch weil endlich das äquivalente Gleichungensystem $\Psi_\mu = 0$ dieselben Transformationen gestattet, verschwinden wirklich alle Ausdrücke $[\Psi_i \Psi_j]_2$ vermöge der Gleichungen $\Psi_\mu = 0$.

Auf Grund dieses Satzes folgt: Wenn ein $(n+1)_2$-gliedriges Gleichungensystem

$$\Phi_\sigma(z, x, p, p_{\lambda\mu}) = 0 \qquad (\sigma = 1, \dots (n+1)_2)$$

auf die Form des Systems (α) zurückführbar sein soll, so müssen die Gleichungen $\Phi_\sigma = 0$ nicht allein nach z, den p und $p_{\lambda\mu}$ auflösbar sein, sondern es müssen auch alle Ausdrücke $[\Phi_\sigma \Phi_\tau]_2$ vermöge der Gleichungen $\Phi_\sigma = 0$ verschwinden.

Lautet nun die aufgelöste Form der Gleichungen $\Phi_\sigma = 0$ etwa:

$$\begin{gathered} z - F(x_1, \dots x_n) = 0, \;\; p_\nu - \varphi_\nu(x_1, \dots x_n) = 0, \\ p_{\lambda\mu} - \psi_{\lambda\mu}(x_1, \dots x_n) = 0, \end{gathered} \tag{β}$$

so müssen zunächst einmal alle Ausdrücke

$$[p_i - \varphi_i, z - F]_2 = p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

vermöge der Gleichungen (β) verschwinden, also muss

$$\varphi_\nu = \frac{\partial F}{\partial x_\nu}$$

sein. Ferner aber müssen auch alle Ausdrücke:

$$\begin{gathered} [z - F, p_{\lambda\mu} - \psi_{\lambda\mu}]_2, \qquad [p_i - \varphi_i, p_j - \varphi_j]_2, \\ [p_i - \varphi_i, p_{\lambda\mu} - \psi_{\lambda\mu}]_2, \qquad [p_{ij} - \psi_{ij}, p_{\lambda\mu} - \psi_{\lambda\mu}]_2 \end{gathered}$$

vermöge der Gleichungen (β) verschwinden. Doch weil diese Ausdrücke identisch Null, beziehungsweise:

$$-\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}, \;\; p_{\lambda\mu i} - \frac{\partial \psi_{\lambda\mu}}{\partial x_i}$$

und wiederum identisch Null sind, geht hier nicht mehr hervor als der Satz: Die aufgelöste Form der Gleichungen $\Phi_\sigma = 0$ lautet nothwendig:

$$z - F(x_1, \dots x_n) = 0, \; p_\nu - \frac{\partial F}{\partial x_\nu} = 0, \; p_{\lambda\mu} - \psi_{\lambda\mu}(x_1, \dots x_n) = 0.$$

Man kann aber mehr von einem $(n+1)_2$-gliedrigen Gleichungensystem $\Phi_\sigma = 0$, das auf die Form des Systems (α) zurückführbar sein soll, aussagen, wenn man noch bemerkt, dass das eine gegebene Gleichung $V(z, x, p, p_{\lambda\mu}) = 0$ umfassende Gleichungensystem

$$z - F(x_1, \dots x_n) = 0, \; p_\nu - \frac{\partial F}{\partial x_\nu} = 0, \; p_{\lambda\mu} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} = 0$$

nicht allein die infinitesimale Transformation $[Vf]_2$, sondern auch die infinitesimale Transformation

$$\{Vf\}_2 = [Vf]_2 + \sum_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial p_{\lambda\mu}} \left| \begin{array}{l} \sum_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + p_\mu \frac{\partial V}{\partial z} + \sum_{\lambda'} p_{\lambda'\mu} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda'}} \right. \\ \left. \quad + \sum_{\lambda'\mu'} p_{\lambda'\mu'\mu} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda'\mu'}}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p_\nu} p_{\nu\lambda}\right) \\ \quad + \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + p_\mu \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{\lambda'} p_{\lambda'\mu} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda'}} \right. \\ \left. \quad + \sum_{\lambda'\mu'} p_{\lambda'\mu'\mu} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda'\mu'}}\right) \\ \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x_\lambda} + p_\lambda \frac{\partial V}{\partial z} + \sum_{\lambda'\mu'} \frac{\partial V}{\partial p_{\lambda'\mu'}} p_{\lambda'\mu'\lambda}\right) \end{array} \right|$$

gestattet.

In der That, setzt man $f = z - F$ oder $f = p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i}$, so erhält man gewiss Ausdrücke, die vermöge des Gleichungensystems (α) und der Gleichungen (α') verschwinden, weil $[Vf]_2$ verschwindet und f jetzt nicht von den $p_{\lambda\mu}$ abhängt. Setzt man aber

$$f = p_{ij} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j},$$

so geht der Ausdruck hervor:

$$\sum_\nu \frac{\partial V}{\partial p_\nu}\left(p_{ij\nu} - \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_\nu}\right) +$$
$$+ \sum_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{\lambda'} p_{\lambda' j} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda'}} + \sum_{\lambda'\mu'} p_{\lambda'\mu' j} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda'\mu'}}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p_\nu} p_{\nu i}\right) +$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{\lambda'} p_{\lambda' j} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda'}} + \sum_{\lambda'\mu'} p_{\lambda'\mu' j} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda'\mu}}\right)$$
$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z} + \sum_{\lambda'\mu'} \frac{\partial V}{\partial p_{\lambda'\mu'}} p_{\lambda'\mu' i}\right)$$

und dieser verschwindet, weil $p_{ij\nu}$ die Ableitung von p_{ij} nach x_ν bedeutet und

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z} + \sum_{\lambda'\mu'} \frac{\partial V}{\partial p_{\lambda'\mu'}} p_{\lambda'\mu' i} = - \sum_{\nu} \frac{\partial V}{\partial p_i} p_{\nu i}$$

ist.

Jetzt aber sieht man wieder, dass ein auf die Form des Systems (α) zurückführbares, $(n+1)_2$-gliedriges Gleichungensystem $V_\sigma = 0$ die Eigenschaft hat, dass alle Ausdrücke $\{V_\sigma V_\tau\}_2$ vermöge der Gleichungen $V_\sigma = 0$ verschwinden. Und sind dann zwei äquivalente Gleichungensysteme

$$\Phi_1 = 0, \ldots \Phi_m = 0 \quad \text{und} \quad \Psi_1 = 0, \ldots \Psi_m = 0$$

gegeben, von welchen das erste die Eigenschaft hat, dass alle Ausdrücke

$$\{\Phi_i \Phi_j\}_2 \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

vermöge der Gleichungen $\Phi_\mu = 0$ verschwinden, so werden auch alle Ausdrücke $\{\Psi_i \Psi_j\}_2$ vermöge der Gleichungen $\Psi_\mu = 0$ Null.

Soll daher ein $(n+1)_2$-gliedriges Gleichungensystem $\Phi_\sigma = 0$ auf die Form des Systems (α) zurückgeführt werden können, so muss es nicht allein nach z, den p und $p_{\lambda\mu}$ auflösbar sein, also etwa die Gestalt

$$\begin{aligned} z - F(x_1 \ldots x_n) = 0, \quad p_\nu - \varphi_\nu(x_1 \ldots x_n) = 0, \\ p_{\lambda\mu} - \psi_{\lambda\mu}(x_1 \ldots x_n) = 0 \end{aligned} \tag{β'}$$

zulassen, sondern es müssen auch alle Ausdrücke:

$$\{p_i - \varphi_i, z - F\}_2 = p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

$$\{z - F, p_{ij} - \psi_{ij}\}_2 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{\mu'} p_{\mu' j} \frac{\partial}{\partial p_{\mu'}} + \sum_{\lambda'\mu'} p_{\lambda'\mu' j} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda\mu'}}\right)\left(p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i}\right) =$$

$$= p_{ij} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$\{p_i - \varphi_i, p_j - \varphi_j\}_2 = -\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j},$$

$$\{p_i - \varphi_i, p_{\lambda\mu} - \psi_{\lambda\mu}\}_2 = p_{\lambda\mu i} - \frac{\partial \psi_{\lambda\mu}}{\partial x_i} + p_{i\lambda\mu} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\lambda \partial x_\mu},$$

$$\{p_{ij} - \psi_{ij}, p_{\lambda\mu} - \psi_{\lambda\mu}\}_2 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + p_\mu \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{\lambda'} p_{\lambda'\mu} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda'}} + \sum_{\lambda'\mu'} p_{\lambda'\mu'\mu} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda'\mu'}}\right)\left(p_{ij\lambda} - \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x_\lambda}\right)$$

vermöge der Gleichungen (β') verschwinden; es muss somit

$$\varphi_\nu = \frac{\partial F}{\partial x_\nu} \quad \text{und} \quad \psi_{\lambda\mu} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}$$

sein.

Weil nun das Gleichungensystem (α) das allgemeinste nach z, den p und $p_{\lambda\mu}$ auflösbare $(n+1)_2$-gliedrige Gleichungensystem ist, welches die $(n+1)$ PFAFF'schen Gleichungen

$$dz - \sum_\nu p_\nu dx_\nu = 0, \quad dp_\lambda - \sum_\mu p_{\lambda\mu} dx_\mu = 0 \quad (\lambda = 1, \dots n)$$

erfüllt, so folgt:

Ein nach z, den p und $p_{\lambda\mu}$ auflösbares $(n+1)_2$-gliedriges Gleichungensystem

$$\Phi_\sigma(z, x, p, p_{\lambda\mu}) = 0 \qquad (\sigma = 1, \dots (n+1)_2)$$

erfüllt dann und nur dann diese $(n+1)$ PFAFF'schen Gleichungen, wenn alle Ausdrücke $\{\Phi_i \Phi_j\}_2$ vermöge der Gleichungen $\Phi_\sigma = 0$ verschwinden.

Und nun ist die Frage zu stellen, ob die im ersten Paragraphen aufgestellten $(n+1)_2$-gliedrigen Gleichungensysteme $\Phi_1 = 0, \dots \Phi_{(n+1)_2} = 0$ die Eigenschaft haben, dass alle Ausdrücke $\{\Phi_i \Phi_j\}_2$ vermöge der Gleichungen des Systems verschwinden. Eine Antwort ist leicht gegeben: Da die $(n+1)_2$-gliedrigen Gleichungensysteme im Allgemeinen willkürliche Gleichungen enthalten und zwar die Gleichungensysteme der ersten Kategorie $\frac{q(q-1)}{2}$, die der zweiten $\frac{q(q-1)}{2}$ oder $\frac{q(q-1)}{2} - (\pi - q)$, je nachdem $q \geqq \pi$ oder $q \leqq \pi$ ist, und die der dritten Kategorie $\frac{q(q-1)}{2}$ oder $\frac{q(q-1)}{2} - (\pi - 1 - q)$, je nachdem $q \geqq \pi - 1$ oder $q \leqq \pi - 1$ ist, so kann nicht davon die Rede sein, dass allen $(n+1)_2$-gliedrigen Gleichungensystemen $\Phi_\sigma = 0$ die Eigenschaft zukommt, dass alle Ausdrücke $\{\Phi_i \Phi_j\}_2$ vermöge der Gleichungen $\Phi_\sigma = 0$ verschwinden. Es wäre darum nur mehr die Frage nach den besonderen $(n+1)_2$-gliedrigen Gleichungensystemen zu stellen, welche die genannte Eigenschaft besitzen; und es gibt solche, wie uns bekannt ist.

Bisher ist also gezeigt, dass die LIE'sche Integrationsmethode im Allgemeinen nicht auf partielle Differentialgleichungen zweiter

Ordnung anwendbar ist, d. h. die Integrationsaufgabe bei solchen Differentialgleichungen gestattet offenbar nur in einem Theile, nur in einfachen Fällen eine Formulirung, die als natürliche Erweiterung der Lie'schen Fassung seiner Integrationsaufgabe zu bezeichnen ist. Doch auch in diesen Fällen wird nicht zu verkennen sein, dass die neue Formulirung der Aufgabe nicht gut zu verwenden sein kann, weil die infinitesimalen Transformationen $\{\Phi_\sigma f\}_2$ zufolge der Bedeutung der Grössen $p_{\lambda\mu\nu}$ nicht blos von den einzelnen Functionen Φ_σ, sondern von allen abhängen, und darum begnüge ich mich — wenigstens augenblicklich — mit dem bisherigen Ergebniss.

Brünn, den 9. October 1896.

Zum Gedächtniss

an

MORITZ WILHELM DROBISCH.

Rede

im Auftrage der Königl. Sächs. Gesellschaft
der Wissenschaften

gehalten

in der öffentlichen Gesammtsitzung am 5. December 1896

von

Max Heinze,
o. M.

Moritz Wilhelm Drobisch.

Gedächtnissrede, gehalten am 5. December 1896.

Erst seit wenigen Jahren ist es in unserer Gesellschaft üblich, Worte des Gedächtnisses der gestorbenen Mitglieder in einer der nächsten Sitzungen nach ihrem Tode zu sprechen. Hätten wir diesen Brauch nicht eingeführt, so würde sich jetzt doch wohl allgemeiner das Bedürfniss geltend machen, ehrend in Gemeinschaft zu gedenken des vor Kurzem verschiedenen Seniors unserer Gesellschaft, Moritz Wilhelm Drobisch, der zugleich langjähriger Senior der philosophischen Facultät, wie der ganzen Universität gewesen ist, ohne den unsere Gesellschaft überhaupt nicht existiren würde oder wenigstens nicht zu der Zeit schon, wo sie gestiftet worden ist, entstanden wäre. Der Genannte kann mit Fug und Recht als Begründer der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften bezeichnet werden; über 50 Jahre ist er dann ihr Mitglied gewesen, hat stets den regsten Antheil an ihrer Entwickelung genommen und hat eine grosse Zahl von Arbeiten in ihren Schriften, sogar beider Abtheilungen, geliefert, so dass er eigentlich beiden Classen der Gesellschaft angehörte.

Geboren war Drobisch den 16. August 1802 hier in Leipzig, in derselben Strasse, in der er dann 57 Jahre lang, bis wenige Jahre vor seinem Tode wohnte. Er war der Sohn des Stadtschreibers, eines schon wegen seines Amtes angesehenen Mannes. Sein etwas über ein Jahr jüngerer Bruder Carl Ludwig war ein bekannter Kirchen- und Oratoriencomponist, der schon 1854 als Kapellmeister in Augsburg starb. — Unser Drobisch besuchte zunächst die hiesige Nicolaischule; in diese Zeit fiel die Schlacht bei Leipzig, deren Gang der elfjährige Knabe von einem Thürmchen der elterlichen Wohnung aus mit dem Fernrohr in grösster

Spannung verfolgte. Seit 1815 war er Fürstenschüler in Grimma, eine Zeit, an deren jugendlichen Frohsinn er sich noch in den letzten Jahren seines Lebens gern erinnerte. Schon früh zeigte er Neigung und Begabung für Mathematik und beschäftigte sich bereits in Grimma, soweit es ihm möglich war, mit Astronomie. In dieser seiner Neigung wurde er, wie mir berichtet worden ist, bestärkt und gefördert durch einen seiner Lehrer, den Professor TÖPFER, den er noch in späten Jahren mit grosser Anerkennung erwähnt.

Nach Beendigung der Gymnasialzeit besuchte er 1820 die Universität seiner Vaterstadt, wo er vorzüglich Mathematik unter MOLLWEIDE studirte, dessen er immer pietätvoll gedachte, und jedenfalls von dem Kantianer KRUG in die Philosophie, namentlich die KANT'sche, eingeführt wurde. Die beiden anderen Professoren der Philosophie neben KRUG: CLODIUS und WENDT, scheinen nicht bestimmend auf ihn eingewirkt zu haben. 1824 wurde er promovirt und erwarb sich zugleich die Rechte eines Privatdocenten in der philosopischen Facultät durch Vertheidigung der Dissertation: *Theoriae analyseos geometrica prolusio*, wie es heisst, in der Hoffnung, sich durch die Habilitation dem Ministerium zu einer Lehrerstelle an einer höheren Schule zu empfehlen. Statt dessen wurde er schon 1826 zum ausserordentlichen Professor in der philosophischen Facultät ernannt, nachdem er als Privatdocent Vorlesungen über die reine Mathematik, Geometrie, Trigonometrie und Astronomie gehalten hatte, und schon in demselben Jahre, nach dem Tode MOLLWEIDE's, als Vierundzwanzigjähriger zum ordentlichen Professor befördert. Und zwar war er nicht von der Facultät zunächst dafür denominirt, sondern auf die Anfrage des Ministeriums, ob die Facultät mit seiner Ernennung einverstanden sein würde, empfohlen worden, was bei einigen älteren Herren der Facultät Bedenken erregte, weil sie meinten, sich dadurch eines Rechts zu begeben. Auch an seiner Jugend nahm Einer wenigstens Anstoss, worauf KRUG erwiederte, das sei ein Fehler, den Herr DROBISCH von Jahr zu Jahr mehr ablegen werde.

Professor der Mathematik blieb er bis 1868, bekleidete aber nach dem Tode KRUG's von 1842 an zugleich eine ordentliche Professur der Philosophie, nachdem er schon längst philosophische Vorlesungen gehalten hatte, die von der Regierung als besonders werthvoll anerkannt wurden. 1868 legte er seine mathematische

Professur nieder und blieb nur Professor der Philosophie. Von seinem 84. Jahre an glaubte er das Recht zu haben, sich von der Verpflichtung, Vorlesungen zu halten, befreien zu lassen: er empfand das Bedürfniss nach Ruhe, zumal ein Augenleiden, das sich schon früher bei ihm gezeigt hatte, das Lesen erschwerte.

Noch bis zu seinem Tode am 30. September d. J. war er, obwohl körperlich schwach, so dass er die letzten Jahre nicht mehr ausging und die längste Zeit des Tages auf seinem Lehnstuhl zubrachte, doch geistig noch verhältnissmässig frisch, noch voller Theilnahme mehr für Persönliches als für Sachliches und treuen Gedächtnisses, sobald es sich namentlich um früher Erlebtes handelte.

Wie er sich für Mathematik habilitirt hatte, so bezogen sich auf diese auch seine ersten Schriften und auch die grösste Zahl seiner Arbeiten. Wenn er auch dem Umschwung in der Mathematik, wie er durch Jacobi, Abel, Dirichlet hervorgebracht wurde, nicht mehr folgte, so sind seine Arbeiten auf diesem Gebiet, von denen gerade viele in den Schriften unserer Gesellschaft erschienen sind, doch nicht ohne Werth. Das Urtheil eines Fachmathematikers über sie lautet: »Sie legen von seiner regen wissenschaftlichen Thätigkeit auf dem Gebiete der Mathematik vollgültiges Zeugniss ab. Wenn sich auch keine epochemachenden Arbeiten darunter befinden, so zeichnen sich seine mathematischen Aufsätze doch gleich den übrigen im Laufe der Jahre von ihm publicirten mathematischen Werken und Universitätsprogrammen ebenso durch eindringendes Studium und scharfsinnige Durchführung, wie durch Klarheit und Präcision der Darstellung aus.« Und wie mannigfaltig war der Inhalt seiner mathematischen und diesen nahestehenden Arbeiten! Er schrieb »Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen«, »Ueber die mathematische Bestimmung der musikalischen Intervalle«, »Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur«, »Ueber Mittelgrössen und die Berechnung des Schwankens des Goldwerthes«, »Ueber die wahrscheinlich zu erwartende Dauer der Ehen«, »Ueber das Florentiner Problem«, »Ueber den Raum von drei Dimensionen«, »Ueber die Gestalt des scheinbaren Himmelsgewölbes«, »Ueber Fechner's psychophysisches Grundgesetz« und vieles Andere.

Von einschneidendster Bedeutung für seine ganze wissenschaftliche Entwickelung sowie für seine Lehrthätigkeit war der Einfluss Herbart's auf ihn, eines Philosophen, der Drobisch's mathematischer Schulung durch vielfache Anwendung der Mathematik, sowie dessen klarem, wenig überschwenglichem, im Ganzen nüchternem Wesen durch seine Exactheit, scharfe Bestimmung der Begriffe und Betonung der Erfahrung besonderen Eindruck machen musste, so dass Drobisch seit seinem Auftreten als philosophischer Schriftsteller und Lehrer bis zum Ende seiner wissenschaftlichen Thätigkeit sich im Ganzen als Anhänger Herbart's, als Herbartianer fühlte und zu erkennen gab. Wie aber Herbart selbst sich als Kantianer, wenn auch etwas späterer Zeit, bezeichnete, so war sich auch Drobisch der Verwandtschaft gewisser seiner Ansichten mit den Kant'schen bewusst, so dass er in vertrautem Kreise wohl Herbart seinen Vater und Kant seinen Grossvater nannte. Hatte er sich ja doch zuerst durch das Studium Kant's philosophische Ueberzeugungen gebildet, die dann nach seiner eigenen Angabe durch Herbart befestigt, geklärt, berichtigt und ergänzt worden waren. Er war der vorzüglichste Vertreter der Lehre Herbart's in der Burg des Herbartianismus, wie Leipzig wohl bezeichnet werden konnte.

Die Bekanntschaft mit Herbart leitete eine anonyme Recension Drobisch's in der Leipziger Literaturzeitung über Herbart's Abhandlung *De attentionis mensura* ein, die von Herbart so hoch geschätzt wurde, dass er an den auch ihm unbekannten Verfasser durch Vermittelung der Expedition der Literaturzeitung einen Brief gelangen liess. Als dann Drobisch ihm unter Aufgabe des Incognitos antwortete, äusserte sich Herbart, dem daran gelegen war, dass seine Arbeiten verständnissvolle Besprechung und Würdigung fänden, brieflich wie auch in der Vorrede zum 1. Theile seiner Allgemeinen Metaphysik in der schmeichelhaftesten Art über die Recension und forderte ihren Verfasser auf, sich mit seiner Psychologie zu beschäftigen. Das hatte zur Folge, dass 1828 in derselben Zeitschrift von Drobisch, jetzt unter seinem Namen, eine längere Besprechung der Herbart'schen Psychologie als Wissenschaft erschien, die von Herbart in seinen Briefen an den Verfasser, aber namentlich in der Vorrede zum 2. Theile seiner Allgemeinen Metaphysik in hoch lobender Weise gepriesen wird. Er schreibt an ihn: »Wohl habe ich selbst manchmal mit Sorgfalt recensirt; aber, indem ich mein Gedächtniss anstrenge, kann ich kaum ein Beispiel finden, wo ich mit aller meiner Eigenliebe mir selber im Stillen zu sagen getraute, ich hätte eine Recension von so ausgezeichneter Zweckmässigkeit zu Stande gebracht. Man erkennt in der Ihrigen den Mathematiker und seinen Takt, gerade das Rechte zu treffen, aber man erkennt noch mehr. Man erkennt einen Mann, den man durchaus wünschen muss, persönlich kennen zu lernen.« Und in der erwähnten Vorrede sagt HERBART: Die Recension sei für künftige Verhandlungen geradezu als Aktenstück zu benutzen; ihr Verfasser bewege sich mit einem so hohen Grade von Leichtigkeit und Sicherheit auf dem neuen Felde, als wäre bereits seit einem halben Jahrhundert von mathematischer Psychologie die Rede gewesen.

HERBART war sehr froh darüber, einen so kenntnissreichen, mathematisch geschulten Mann, der zugleich gewandter Schriftsteller war, als Bekenner seiner neuen Lehre gewonnen zu haben. Aber es lag ihm weiterhin besonders daran, dass von demselben auch seine Metaphysik besprochen würde. So schreibt er ihm, als DROBISCH Bedenken trug, dies zu thun, weil er damit über seine Grenzen hinausgehe, geradezu: »Sie müssen noch weiter zeugen«, und: »Schieben Sie die Schuld auf mich; ich bin in Ihre Grenzen gekommen, ich habe behauptet, dass Mathematik in Physik und Metaphysik eingreifen müssen; noch mehr: ich habe behauptet, Sie seien derjenige, welcher in meinen Arbeiten gerade das verstehe, was Andern unbegreiflich vorkomme, Sie seien aufs Dringendste aufgefordert, ein Zeugniss abzulegen, und es sei für Sie kein hinreichender Grund, dies zu verweigern.« Es folgte dann die persönliche Bekanntschaft der beiden bei einer Zusammenkunft in Berlin, wo HERBART DROBISCH lebhaftest zuredete, sich der Philosophie, für die er ganz geschaffen sei, zuzuwenden; kurze Zeit darauf, am 28. und 29. Mai 1830, war HERBART bei DROBISCH in Leipzig, für Letzteren eine grosse Freude. HERBART hatte von dem Minister eine Remuneration von 300 Thl. und Urlaub erhalten, »damit er in Stand gesetzt werde, in Bezug auf seine wissenschaftlichen Bestrebungen sich mit den Professoren BRANDIS in Bonn und DROBISCH in Leipzig persönlich zu berathen«. Noch nicht einmal in Berlin, auf seiner Rückreise nach Königsberg, schrieb er schon wieder an DROBISCH: »Lassen Sie mir die Hoffnung, dass bei Ihrer wissenschaftlichen Genauigkeit Schutz für die sorgfältigsten Arbeiten und für die verletzbarsten Theile meiner Untersuchungen dann zu finden sei, wenn man nach allen Seiten mit unreifen Versuchen daran zerren und ziehen wird.«

Endlich entschloss sich Drobisch zur Besprechung, die in der Jenaer Literaturzeitung 1830 noch erschien, zur grossen Genugthuung Herbart's, im Wesentlichen eine Uebersicht des Hauptinhalts von lichtvoller Kürze, nicht einmal durchaus lobend, sondern an einigen Punkten Schwächen aufdeckend. Trotzdem äussert sich Herbart wiederum aufs Anerkennendste über sie in seiner Vorrede zur Encyclopädie der Philosophie, indem er besonders die Präcision Drobisch's mit Recht rühmt, die so ausgezeichnet sei, dass man fragen möchte, ob jemals ein metaphysisches Buch das Glück gehabt habe, von seinem Beurtheiler so dargestellt zu werden. Es war diese Recension wirklich eine That für die Herbart'sche Philosophie, es war, wie es der Meister gewünscht hatte, Zeugniss für sein Werk abgelegt, und zugleich war durch sie und die früheren Recensionen, da sie in gelesenen Zeitschriften erschienen, die Aufmerksamkeit weiterer Kreise mehr als bisher auf Herbart gelenkt, so dass sich Drobisch schon mit ihnen ein entscheidendes Verdienst um das Bekanntwerden von dessen Lehren erworben hat. Es spielen diese Besprechungen eine nicht zu unterschätzende Rolle in der Geschichte der Herbart'schen Philosophie.

Jetzt kam es Herbart darauf an, seinen Anhänger für die Philosophie mehr und mehr zu gewinnen, aus dem Mathematiker auch einen philosophischen Schriftsteller und Lehrer zu machen. Und es ist wesentlich dem Einfluss Herbart's zuzuschreiben, dass Drobisch allmählich in den Pfad der Philosophie einlenkte. Als er Ernst damit gemacht hatte, schreibt ihm Herbart: »Wahrlich es thut Noth, dass ein Mann wie Sie der gemisshandelten Philosophie nicht den Rücken wende. Und gerade die Bedingung, die man erfüllen muss, um jenen Vorsatz durchzuführen — Resignation —, haben Sie ausgesprochen. So gewaffnet können Sie dereinst bessere Zeiten herbeiführen.« Und als Drobisch 1832 zum ersten Mal ein philosophisches Colleg, die später so viel gehörte Logik las, da schreibt ihm Herbart: »Philosophie von Ihnen in Leipzig vorgetragen — *hoc erat in votis.* Sie treten nur die Verwaltung Ihres natürlichen Eigenthums an, indem Sie sich der Philosophie widmen. Der an sich fruchtbare Boden kann Ihnen die reichsten Früchte tragen, und Ihr Verdienst wird unermesslich sein, wenn Sie gerade jetzt Ordnung in die besseren Köpfe bringen.« Voller Selbstverleugnung setzt er noch hinzu: »Entfernen Sie jeden Gedanken an die Frage, ob diejenigen philosophischen Lehren, die Sie mündlich vortragen und schriftlich ohne Zweifel noch verbreiten werden, die meinigen seien oder nicht. Mein Recht werden Sie mir schon widerfahren lassen; es kann nicht in besseren Händen sein als in den Ihrigen. Mein Unrecht, wann und wo es Ihr Scharfsinn entdecken mag, sprechen Sie offen aus und fürchten Sie meinerseits keine Empfindlichkeit. Es braucht nicht, dass eine Schule nach mir genannt werde. Nur das wünsche ich, unter den Ersten zu sein, die es erfahren, was Sie tadeln werden.«

Jedoch kurze Zeit darauf, als Herbart von Seiten Schelling's einen Angriff fürchtet, sieht er sich nach Secundanten um, und mahnt Drobisch zu ihm zu halten, da Eintracht zwischen ihm und seinen Anhängern sehr nöthig sei — er wünscht also doch sehr, Drobisch zu seinen eigensten Schülern rechnen zu können. Bald aber traten kleine Verstimmungen ein: die Freiheit und Selbständigkeit des Geistes liess den Schüler sich doch nicht unbedingt an den Meister fesseln, so dass der Briefwechsel einige Störung erleidet. Im Jahre 1833 nahm Herbart einen Ruf nach Göttingen an, zu dem Drobisch nach Herbart's eigener Aeusserung wesentlich mit geholfen hatte, sei es durch unmittelbares Wirken in Göttingen, sei es, was mir wahrscheinlicher ist, durch seine Recensionen. Die Vertrautheit des Verhältnisses nahm etwas ab, wenn auch Meister und Jünger noch drei Mal persönlich zusammenkamen, einmal 1834 in Weimar, sodann 1835 in Nordhausen und zuletzt, als Drobisch zum Universitätsjubiläum Herbart selbst auf dessen dringende Einladung hin besuchte, und obgleich Drobisch im Jahre 1834 die der Herbart'schen Philosophie sehr zu Gute kommenden »Beiträge zur Orientirung über Herbart's System der Philosophie« erscheinen liess, in denen er sehr scharf gegen die Angriffe auf Herbart vorgeht und die Aeusserungen über ihn zurückweist, von denen die eine die andere an Sinnlosigkeit übertreffe. Es kam zu Differenzen sachlicher Art, namentlich wegen des Begriffs der Hemmungssumme, auf welchen Herbart grossen Werth legte, auch wegen der psychologischen Grundlehren überhaupt, die Drobisch für Hypothesen halten wollte, während sie dies für Herbart nie waren und nie sein konnten. Herbart bittet Drobisch aber noch 1835, ihm seine Bedenken mitzutheilen, damit er darauf antworten könne, Drobisch werde dann selbst urtheilen, und fügt hinzu: »Es ist höchst nöthig, dass wir unsere Zusammenstimmung so sorgfältig, als wir können, aufrecht erhalten. Dies unter vier Augen!« Allein Drobisch wich bald gerade da von Herbart ab, wo dieser unbedingte Beistimmung erwartet hatte. Trotzdem mahnt ihn Herbart noch einmal, sich für die Philosophie ins Zeug zu legen, die in Deutschland bald in die Lage kommen werde wie in England und Frankreich. »Wer soll dies verhindern? Ich sage: Sie, mein theurer Freund, und die, welche Sie in Bewegung setzen werden. Sie müssen eilen, anregen, wirken, ohne auch lange um mein Interesse sich zu kümmern. Hier stehen wichtigere Interessen auf dem Spiel, als persönliche es sein können und dürfen. Das Studium der Philosophie muss gehalten werden, gleichviel, woran und wie.«

Bei der Aufhebung der Verfassung in Hannover, gegen welche die Göttinger Sieben protestirt hatten, zeigte sich Herbart nicht gerade muthig, weshalb er es offenbar für nöthig hielt, an Drobisch eine lange Rechtfertigung seines Verhaltens zu richten. Die Erwiederung Drobisch's, die zwar auch das Verhalten der Sieben nicht ganz billigt, aber doch betont, dass die Universität mit dem freimüthigen Bekenntniss ihrer Ueberzeugung hätte vorangehen müssen, und so das Verfahren Herbart's nicht als richtig anerkennt, beantwortet Herbart spät und verstimmt. Doch ist er hinterher noch erfreut, als er hört, dass sich Drobisch mit logischen Ideen beschäftige. Wenn ein Anderer dies thäte, würde er sich zu einem Fragezeichen versucht fühlen, bei Drobisch habe aber die Logik nichts zu fürchten, nur zu hoffen.

Bald wurde der Meister aber ernstlich ungehalten über den Schüler, wie es so zu geschehen pflegt, dass von Seiten der Gründer wissenschaftlicher Richtungen im Princip jede Abweichung den Anhängern frei stehen soll, kommt aber eine solche factisch vor, sie übel vermerkt wird. Drobisch hatte 1839 nach Empfang von Herbart's Psychologischen Untersuchungen in einem längeren Schreiben an der mathematischen Psychologie Manches auszusetzen gefunden, indem er zugab, vor einem Jahre habe er noch die ernstlichste Absicht gehabt, die mathematische Psychologie in unveränderter Gestalt zu einer möglichst evidenten Darstellung zu bringen, und dann hinzufügte: jetzt habe er angefangen, darauf Verzicht zu leisten, und zwar sei dies nicht das Werk des Uebermuths, der Willkür, eines falschen Ehrgeizes, sondern der sich ihm aufdrängenden Nothwendigkeit, und zwar denke er, mit seinen eigenen Ansichten, die bald zu veröffentlichen ihn allerdings nichts dränge, wenn sie sich nicht änderten, hervorzutreten, da er keineswegs beabsichtige, die mathematische Psychologie mit Stumpf und Stiel auszurotten, sondern sie nur zu verbessern. Eine Verwirrung in den Köpfen würde durch solche Darlegung abweichender Ansichten kaum hervorgebracht, da er ja nicht einmal recht wisse, ob ausser ihnen beiden noch ein Dritter, der Mathematik verstehe, sich ernstlich damit beschäftigt habe. Er giebt dann die Punkte, wo er Schwierigkeiten findet, an. HERBART antwortet sehr kurz, nennt DROBISCH nicht mehr »Freund«, wie seit längeren Jahren regelmässig, sondern nur »Verehrtester« und bemerkt, wenn DROBISCH eine gewisse Ansicht betreffs der Spannung und Energie der Vorstellungen hege, so verhielten sie beide sich zu einander wie Ja und Nein. Obgleich DROBISCH etwa sechs Monate später schrieb, er versichere, dass HERBART keinen Angriff von ihm zu erwarten habe, und er leiste darauf Verzicht, die mathemathische Psychologie künftighin zu einem Gegenstand öffentlicher Discussion zu machen, sind die folgenden Briefe HERBART's doch kühl, ja zum Theil scharf gehalten. In dem letzten von den 83 an DROBISCH gerichteten, manche kürzere oder längere wissenschaftliche Auseinandersetzung enthaltenden Briefen, die ich durchgesehen habe, redet er ihn, der gerade Rector war, einfach mit *Magnifice* an. Der Brief ist etwa drei Monate vor seinem Tode aus dem Jahre 1841 datirt. Er hatte zwar kurz vorher noch die Nothwendigkeit der vollen litterarischen Freiheit auch für DROBISCH betont, aber doch heimlich gehofft, in ihm einen unbedingten Apostel auf die Dauer zu haben, und dass sich dies nicht erfüllte, schmerzte und verbitterte ihn. Auch DROBISCH litt entschieden unter den Verstimmungen; es ist mir erst aus der Kenntniss des schliesslichen Verhältnisses zwischen den beiden klar geworden, warum ich in Gesprächen mit DROBISCH über HERBART stets eine gewisse Zurückhaltung bei ihm zu bemerken glaubte. — Aus HERBART's Hinterlassenschaft war ihm dessen Schreibzeug zugekommen.

Die höchste Verehrung zollte er dem Meister, der so viel von ihm gehalten hatte, bis an das Ende seines Lebens, scheute sich auch nicht, späterhin mit Hartenstein zusammen von dem Herbart'schen als »unserem System« zu reden, wahrte sich aber stets die Selbständigkeit des Denkens — auf die Worte des Meisters schwor er nie, hat aber zur Verbreitung von dessen Lehren durch seine Vorlesungen und Schriften wesentlich beigetragen. Wie er es für eine Pflicht der Pietät ansah, kurz nach dem Tode Herbart's einen öffentlichen Vortrag ihm zu Ehren zu halten, so feierte er auch den hundertsten Geburtstag des Philosophen, als diesem ein Denkmal in seiner Vaterstadt errichtet wurde, durch eine später gedruckte akademische Festrede, zu der er eingeladen hatte, und legte als 74jähriger Mann noch einmal in grosser Versammlung Zeugniss für Herbart ab. Er glaubt nicht, dass alle Probleme, an denen sich die grossen Denker alter und neuer Zeiten abgemüht haben, durch Herbart befriedigend gelöst, dass alle philosophischen Streitfragen durch ihn endgültig entschieden seien, aber er spricht es als vollste Ueberzeugung aus, dass »Herbart sich unvergängliche Verdienste um die Fortbildung der Philosophie erworben hat, dass die tiefe Gründlichkeit seiner Untersuchungen, die Methode seiner Forschungen mustergiltig ist, und dass die Resultate, die er gewonnen, in der überwiegenden Mehrzahl einen bleibenden Werth behalten werden«.

In einer nicht lange nach dem Tode Herbart's geschriebenen Abhandlung »Blicke auf die philosophischen Zustände der Gegenwart« 1845, in der er seine allgemeinen philosophischen Ansichten vorträgt, hatte er schon ausgesprochen, dass nach den fünfzigjährigen Kämpfen, nach den grossen Anstrengungen ohne bleibenden Erfolg sich die Zeugungskraft der Philosophie am fruchtbarsten bewähren würde in der Wiederaufnahme der Untersuchungen, die Kant so grossartig eingeleitet und nach ihm Niemand umfassender und scharfsinniger fortgeführt habe, als Herbart. An diesen sei demnach anzuknüpfen.

Den Zusammenhang mit Herbart, ja dessen Geist zeigen alle philosophischen Schriften Drobisch's, indem sie auch namentlich den Gegensatz gegen die phantastisch-romantischen Speculationen Schelling's und seiner Anhänger, sowie auch gegen Hegel deutlich sehen lassen. Freilich liebte es Drobisch nicht, in dem Maasse wie Herbart polemisch vorzugehen. Seine »Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen« erschien noch zu Lebzeiten Herbart's 1836. Dieser recensirte sie selbst und bemerkte dabei, dass Fries darin vielfach benutzt sei. Der Letztgenannte wirft Drobisch in einem Briefe vor, dieser habe sich einmal von Herbart einfangen lassen, und darum sei seine Fassung der Logik so eng und ungenügend für die tieferen philosophischen Interessen; Bestimmung von Begriff und Urtheil seien falsch, da sie irriger Weise von der Erkenntnisslehre losgerissen seien. Die Logik Drobisch's war eben wie die Kant's und Herbart's eine rein formale, im Gegensatz zu Hegel, Schleiermacher, Trendelenburg und anderen Philosophen: nichts von Metaphysik, nichts von Erkenntnisslehre war in ihr zu finden. Die 2. Auflage, vielfach umgearbeitet und erweitert 1851 erschienen, will zwar auch den formalen Charakter wahren, ein Kanon des Denkens sein, dem dies in seinen Formen entsprechen müsse, um in sich wahr zu sein, aber zugleich wird sie zum Organon der mittelbaren Erkenntniss, geht also doch über das rein Formale hinaus. Kant hat die Trennung des Denkens vom Erkennen in einer Weise durchführen wollen, die sich nicht consequent aufrecht erhalten lässt. »Die Logik soll kein reines Denken voraussetzen und es nicht unternehmen, die Formen eines solchen in abstracto zu finden und zu entwickeln. Vielmehr sind die allgemeinsten Formen der innern und äussern Erfahrung der Boden, aus dem sie ihre abstracten Grundbestimmungen zu ziehen hat.« Diese 2. Auflage suchte mit richtigem Gefühl eine Annäherung an Trendelenburg. In der 3. Auflage, die 1863 nöthig war, will Drobisch die Grenzen der formalen Logik, die es nur mit Begriffen, nicht mit realen Gegenständen zu thun habe, genauer einhalten, ohne deshalb in die Beschränkung zurückzufallen, die nöthig wäre, wollte man alle synthetischen Elemente von der Logik ausschliessen. Die 4. und 5. Auflage, die in Zwischenräumen von je 12 Jahren folgten, waren ziemlich unverändert.

Schon aus dieser Reihe von Auflagen ist zu ersehen, dass Drobisch's Logik, trotz des im Grunde sehr trocknen Stoffes, von vielen benutzt wurde. Und auch heutigen Tages ist sie wegen ihres hohen Lehrwerthes noch brauchbar für den, der sich mit den logischen Formen rasch und nicht blos oberflächlich bekannt machen will. Ich glaube nicht, zu weit zu gehen, wenn ich sage, dass sie die vorzüglichste Darstellung der Logik von dem formalen Standpunkt aus ist, weil sie sich auszeichnet durch Klarheit, Präcision, Umsicht und durch treffende Beispiele namentlich auf dem Gebiete der Mathematik und Naturwissenschaften.

Auch noch zu Lebzeiten HERBART's, 1840, erschienen DROBISCH's »Grundlehren der Religionsphilosophie« ungefähr zu gleicher Zeit mit TAUTE's »Religionsphilosophie vom Standpunkte der Religion HERBART's«; beide von dem Meister nicht mit günstigen Augen angesehen, da dieser bekanntlich selbst meinte, seine Metaphysik drohe, sich ihm zu entfremden, wenn er sie auf Gott anzuwenden versuche. Der pluralistische Realismus mit seiner absoluten Selbständigkeit der letzten Wesenheiten kann einen Gott, der die Welt, sei es in welchem Sinne immer, erschaffen hat und erhält, nicht in sein System aufnehmen. Diese fundamentale Schwierigkeit ist auch von DROBISCH nicht gehoben, obgleich sein Versuch, die Philosophie in der HERBART'schen Weise mit der Theologie in Einklang zu bringen, sehr zu beachten ist. Die Philosophie hat nach ihm auch auf dem religiösen Gebiete die Aufgabe, das Gegebene zu begreifen. Das Gefühl der Beschränktheit und Ohnmacht ist da, aus ihm entsteht das Bedürfniss nach Befreiung, nach Erlösung aus der Beschränkung, nach Erhebung zu etwas Höherem. Aber eine blosse Gefühlsreligion genügt nicht, da sie über die blosse Subjectivität nicht hinauskommt und sie in Gefahr geräth, »das Kleinod, nach dem sie trachtet, ganz und gar zu verlieren. Wer nur an einen Gott glaubt, weil er einen wünscht, weil ihm diese Annahme wohlthut, der bildet sich nur einen Gott ein, der hat ihn wie einen Fetisch selbst und nur für sich selbst gemacht, einen Gott erkannt hat er nicht«. Es bedarf des logischen Nachweises. So prüft DROBISCH die sogenannten Gottesbeweise eingehender. Der ontologische und der kosmologische sind nicht brauchbar, durch den teleologischen ergiebt sich das Dasein des geglaubten Gegenstandes als ein höchst wahrscheinliches. Zu festerer Ueberzeugung bringen noch die moralisch-praktischen Glaubensgründe, die bei DROBISCH in ähnlicher Weise wie bei KANT darauf hinauslaufen, dass es Bedingung zur Erfüllung der Pflicht sei, zu glauben, dass eine sittliche Ursache die Welt auf den Zweck des Guten hin eingerichtet habe. Unsere Aufgabe ist es, das höchste Gut, d. h. den moralischen Weltzweck zu verwirklichen, aber die Ausführung ist nur dann möglich, wenn Gott die mit Absicht wirkende Ursache des sittlichen Zweckes und der für diesen zureichenden Mittel in der Natur ist. So wird ein ausserweltlicher, lebendiger, ja persönlicher Gott angenommen, und diesen bestimmt dann Drobisch nach den fünf sogenannten Herbart'schen Ideen, d. h. der Heiligkeit, Vollkommenheit, Liebe, der richtenden und der vergeltenden Gerechtigkeit. Er kommt zu einer Art Deismus, da Gott nicht unmittelbar allgegenwärtig eingreift, sondern nur so, dass »alles natürliche Dasein und Geschehen nicht als unmittelbare Wirkung Gottes, sondern nur als Folge seiner anfänglichen schöpferischen Thätigkeit zu betrachten ist. Eine andere continuirliche wirksame Allgegenwart Gottes kann nicht angenommen werden«. Der Glaube, dass nichts gegen den Willen Gottes geschieht, da nichts geschehen kann, was bei der Schöpfung nicht wenigstens als möglich vorausgesehen war, ist »stark genug, um uns in Verbindung mit dem Gedanken, dass Gott nur das Gute will«, in allen Nöthen des Lebens aufzurichten. Den positiv christlichen Dogmen von der Erlösung u. a. steht Drobisch kritisch gegenüber; der Werth des Christenthums soll darin bestehen, dass es die Lehre von Gott als dem Vater aller Menschen und die von einer Vergeltung im Jenseits aufgestellt habe. — Es erinnern diese Ansichten vielfach an den alten Rationalismus; manches tiefer angelegte religiöse Gemüth wird an ihnen kein Genüge finden; für Drobisch selbst sind sie in mancher schweren Zeit ein fester Halt gewesen.

Ein Werk, das, wenn es auch nicht ganz neue Bahnen ging, doch versuchte, eine Wissenschaft auf eine sichere Basis zu stellen, ohne andere Grundlagen in ihrer Art zu verwerfen, ist Drobisch's sehr beachtenswerthe »Empirische Psychologie nach naturwissenschaftlicher Methode«, 1842 erschienen, in welcher er den Beweis zu führen versucht, dass auch ohne Hülfe der Metaphysik und der Mathematik durch blosse unbefangene Zergliederung, Vergleichung und Verknüpfung der Thatsachen unserer inneren Erfahrung sich eine gesunde Ansicht von den Vorgängen des geistigen Lebens gewinnen lasse. Auf eine nach erprobten wissenschaftlichen Grundregeln methodisch geleitete Autopsie komme es vor allen Dingen an. Von einer solchen, meint er, werde diese Schrift hoffentlich Zeugniss ablegen, da ihr Verfasser nichts niedergeschrieben habe, was er nicht — wenn auch häufig von anderen Psychologen angeregt — in seiner eigenen inneren Erfahrung frisch und lebendig kennen gelernt habe. Was die naturwissenschaftliche Methode betrifft, so weiss

Drobisch selbst, dass sie hohen Ansprüchen nicht genügen kann, es soll die Schrift auch nur ein erster, aber ein ernster Versuch sein. Er fügt hinzu, diese Erklärung gebe er solchen, die durch mathematisch-naturwissenschaftliche Studien an strenge Forderungen gewöhnt seien, nicht aber »der kecken Unwissenheit, vorlauten Anmassung und speculativen Windbeutelei so vieler unserer jungen Philosophen«. Ihnen gelte Bescheidenheit für Schwäche, weil sie selbst kaum durch arrogante Prahlerei ihre Blössen zu decken wüssten. Solche Jünger der Wahrheit freilich würden in seinem Werk noch Manches zu lernen finden. Diese scharfe Sprache hielt er für nöthig den wenig soliden psychologischen Phantasien gegenüber, die freilich damals schon in Abnahme begriffen waren.

Die Uebersicht, die Drobisch nach seiner Methode über das ganze geistige Leben gab, führte ihn zu einer erklärenden Grundansicht, durch welche sich die Wahrheit der Herbart'schen, auf dem Wege der Speculation gewonnenen Theorie des Seelenlebens bethätigen sollte, indem sich alle anderen Hypothesen als ungenügend erwiesen hätten. So wurden die Seelenvorgänge verworfen, und die Einheit der Seele als zulänglich begründet angesehen, der Art, dass wir sie als strenge Einfachheit des Wesens zu denken hätten. — Diese Psychologie ist wegen der Fülle des Materials, ebenso wegen der Besonnenheit in dessen Anwendung und der klaren sehr lesbaren Darstellung mit Recht viel gebraucht worden; sie ist seit lange im Buchhandel vergriffen, so dass man jetzt nach dem Tode ihres Verfassers, der eine neue Auflage, so lange er noch lebte, nicht genehmigen wollte, damit umgeht, sie ebenso wie Lotze's medicinische Psychologie wieder neu drucken zu lassen. Sie ist ja durch neuere Forschungen und Methoden längst und weit überholt, aber einen blos geschichtlichen Werth hat sie auch heutigen Tags noch nicht.

In diesem Werke hatte Drobisch schon den Uebergang zu der rationalen Psychologie gebahnt. Diese bedarf nach ihm besonders der Hülfe der Mathematik, um ihren Grundbestimmungen Specialität zu geben, ohne welche diese immer in vager Allgemeinheit bleiben müssten; nur durch Betrachtung von Grössenverhältnissen sei hier abzuhelfen. Hier müsse noch viel gethan werden, meinte Drobisch, da die mathematische Psychologie auch nach Herbart noch der Erweiterung bedürfe, sowie der klaren, gegen jeden Einwurf beschützten, Begründung. Nachdem er schon früher fünf »*Specimina Quaestionum mathematico-psychologicarum*« veröffentlicht hatte, lies Drobisch deshalb seine lange schon vorbereiteten »Ersten Grundlinien der mathematischen Psychologie« 1850 erscheinen, um den Zugang zu dieser Wissenschaft, die trotz ihres hohen Werthes von Wenigen gekannt und gewürdigt sei, zu erleichtern. Sei auch Manches in der Herbart'schen Theorie mangelhaft begründet, lückenhaft ausgeführt und ungenügend dargestellt, so stehe doch durch das Ganze die Thatsache fest, »dass unsere wechselnden geistigen Zustände nur consequent zusammenhängenden mathematischen Untersuchungen zugänglich« seien, die zu Resultaten führten, deren Uebereinstimmung mit den in uns beobachteten Phänomenen unverkennbar sei. Er selbst giebt hier nur einen Theil in neuer Bearbeitung, die sich in der Art der Begründung, wie in der Behandlungsweise, zum Theil sogar in den Resultaten von Herbart's Lehre unterscheidet. Verdrängen wollte dadurch Drobisch die Schriften Herbart's nicht, ihnen vielmehr erneute Aufmerksamkeit verschaffen.

Es ist ihm trotz des musterhaft kurz und verhältnissmässig verständlich geschriebenen Werkes nicht gelungen, der mathematischen Psychologie Anhänger in grösserer Zahl zu gewinnen. Man erklärte nach wie vor die Statik und Mechanik des Geistes wenn nicht für unmöglich und undurchführbar, so doch für verfrüht. Ich habe sogar den Eindruck, als habe Drobisch selbst in den späteren Jahren Zweifel an dieser Wissenschaft gehegt, wie er auch in seinen Vorlesungen sehr selten auf sie gekommen ist. — Den Mathematiker mochte das Problem immer reizen, aber die Lösung stiess sich an der Wirklichkeit.

Im Jahre 1864 erschien zum Andenken Ernesti's die scharfsinnige Abhandlung: »*De philosophia scientiae naturali insita*«, worin er unter Bekämpfung des Materialismus es als Absicht der Naturforschung ansieht, die Erscheinungen der Vernunft zu unterwerfen, und weiter bemerkt, es gebe die Vernunft zwar Gesetze und stelle solche auf, die Natur aber nehme sie entweder an oder weise sie zurück, da die Begriffe des Seins und Denkens nicht identisch seien.

Mit seiner Eigenschaft als Mathematiker verband sich bei Drobisch die Neigung zur Statistik, die sich in einigen Arbeiten unserer Gesellschaft bethätigt, so in den »Beiträgen zur Statistik der Universität Leipzig innerhalb der ersten 140 Jahre ihres Bestehens«, aber namentlich eine schöne Frucht hervorgebracht hat in seiner Schrift: »Die moralische Statistik und die menschliche Willensfreiheit«, 1867 erschienen, deren Vorläuferin eine mehrfach sehr anerkannte Besprechung Drobisch's über eine Abhandlung Quételet's gewesen war. Er versucht in dieser Schrift darzuthun, dass die moralische Statistik zwar einen Determinismus annehmen lassen müsse, dass aber dieser Determinismus nicht blosser Naturmechanismus sei, sondern vielmehr ein innerer psychologischer, der zwar die Einwirkung der Aussenwelt auf unseren Geist anerkenne, aber diesem eine hinreichende Unabhängigkeit von der Natur sichere, der auch dem sittlichen Interesse nicht widerstreite, sondern von diesem gefördert werde — der übliche Determinismus der Herbart'schen Schule. — Aus seinen mathematischen und statistischen Bestrebungen gingen auch seine metrischen Untersuchungen über den Hexameter und Pentameter im Distichon in der antiken und deutschen Dichtung hervor, in denen er nach dem Urtheil eines Kenners »mit grosser Ausdauer und vielem Scharfsinn den arithmetischen Verhältnissen dieser Verse nachgegangen ist«.

Ein Gebiet, das Herbart mit Vorliebe anbaute, die Pädagogik, hat Drobisch nur selten betreten, einmal in der kleinen von Herbart sehr günstig recensirten Schrift: »Philologie und Mathematik als Gegenstände des Gymnasialunterrichts betrachtet, mit besonderer Beziehung auf Sachsens Gelehrtenschulen«, 1832, worin er verständnissvoll den Werth der klassischen Bildung, die er, wie auch das Lateinschreiben und -sprechen, als guter Fürstenschüler hoch zu schätzen wusste, und den der Mathematik vom Standpunkt des Psychologen aus untersucht und auch für die heutige Zeit noch Beachtenswerthes sagt, und ein anderes Mal mit der Abhandlung: »Ueber mathematische Didaktik« in der Leipziger Literaturzeitung.

In der Geschichte der Philosophie war Herbart mit grösseren Werken nicht aufgetreten, wenngleich er genauer Kenner von ihr war. Auch Drobisch hat nur wenig Philosophiegeschichtliches veröffentlicht. Eine mit überzeugungsvoller Kraft geschriebene Arbeit findet sich in unseren Schriften: »Die Stellung Schiller's zur Kant'schen Ethik«, die sich namentlich gegen Ausführungen Kuno Fischer's wendet und darthut, dass Schiller in seinen philosophischen Schriften dem Sittlichschönen neben dem Sittlicherhabenen eine Stellung in der Ethik anweist, und dass er das moralische Ideal nie durch das ästhetische verdrängen liess oder überhaupt den ästhetischen Gesichtspunkt über den moralischen stellte.

In den letzten Jahren seiner wissenschaftlichen Thätigkeit studirte Drobisch wieder mit grossem Eifer in Kant, hielt auch über verschiedene seiner Schriften, so über die Kritik der Urtheilskraft, über die Prolegomena, ferner über die Erkenntnisslehre Kant's u. A. Vorlesungen. Dieser erneuten Beschäftigung verdankt ihren Ursprung die kleine Schrift: »Kant's Dinge an sich und sein Erfahrungsbegriff«, 1882 erschienen, in welcher Drobisch namentlich mit Scharfsinn den Widerspruch erörtert zwischen Kant's realistischen Ueberzeugungen und den Consequenzen seines Erfahrungsbegriffs.

Nach Erwähnung der hauptsächlichsten Arbeiten Drobisch's muss ich noch hinzufügen, dass er in eine Reihe von Zeitschriften werthvolle Aufsätze und Besprechungen lieferte, so in Gersdorf's Repertorium, in die beiden schon erwähnten Literaturzeitungen, in die Zeitschrift für exacte Philosophie, in die Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, in die Monatsblätter zur Ergänzung der Allgemeinen Zeitung, in Poggendorff's Annalen, in das Literarische Centralblatt und in andere. — Kurze Zeit war er auch Mitglied in der Redaction der Leipziger Literaturzeitung.

Ausser seinen wissenschaftlich-schriftstellerischen Leistungen kommt bei Drobisch sehr in Betracht seine akademische Lehrthätigkeit, auf die er grosses Gewicht, wenn nicht das Hauptgewicht legte. Er war ein ausserordentlich fleissiger und gewissenhafter Professor: nicht selten hat er 16 Stunden Vorlesungen und Uebungen in der Woche gehalten, und dabei bereitete er seine Vorlesungen mit der grössten Sorgfalt vor, oder arbeitete sie vielmehr aus. Abgesehen von den schon erwähnten allgemeinen mathematischen Vorlesungen, denen er solche über speciellere Themata zufügte, bis er die mathematischen 1868 im Wesentlichen abschloss — die letzte handelte über »Mathematische Miscellen« —, auch abgesehen von diesen war der Kreis seiner Vorlesungen ein sehr ausgedehnter. Die vorzüglichsten und regelmässig wiederkehrenden waren Logik und Psychologie, mit welcher ersteren er später regelmässig Einleitung in die Philosophie verband, während er früher getrennt Grundlehren und Encyklopädie oder Encyklopädie und Methodologie der Philosophie vorgetragen hatte. Ausserdem las er sporadisch Metaphysik nach Herbart, Metaphysik der Natur nach demselben, Mathematische Psychologie, diese nicht häufig, einmal auch nach Herbart, Ueber die Fundamente der theoretischen und praktischen Philosophie, Grundlehren der Ethik und Religionsphilosophie, auch Religionsphilosophie allein, Einleitung in die Ethik und Religionsphilosophie, Ueber Herbart's Metaphysik, Grundlinien der Erkenntnisstheorie Kant's mit kritischer Bezugnahme auf dessen Vorgänger, Ueber verschiedene Schriften Kant's, Ueber den Mechanismus und die teleologische Naturansicht, eins seiner letzten Collegien handelte Ueber die Willensfreiheit. Grössere Vorlesungen über Geschichte der Philosophie hielt er nicht; er überliess sie seinem Freund Hartenstein. Dagegen behandelte er beschränktere Gebiete historisch-kritisch; so las er über Kant's Theorie und Kritik der Erfahrung, Ueber die Fundamente von Kant's Moralphilosophie, Historische Einleitung in die Metaphysik, Historisch-kritische Uebersicht der Principien der Ethik u. a. Auch über Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf menschliche Lebensverhältnisse las er noch in der letzten Zeit, in jüngeren Jahren hat er einige Male über die rechte Einrichtung des akademischen Studiums Vorträge gehalten (*De studio academico recte dirigendo*).

Sogenannte Gesellschaften und Uebungen hat er in früherer Zeit vielfach geleitet, mathematische und philosopische, sie aber schon zeitig aufgegeben, obwohl er ihren hohen Werth anerkannte. Es mochte ihm schliesslich die Zeit dazu mangeln — denn dass er nicht der rechte Mann gewesen sei, um in solchen Uebungen nachhaltig auf Studirende einzuwirken, ist nicht anzunehmen.

Alle, die zu seinen Füssen gesessen haben — ich selbst gehöre zu ihnen —, werden die musterhafte Klarheit, Sachlichkeit, den wissenschaftlichen Ernst, die strenge Ordnung, mit der er seine Gedanken vortrug, bewundert haben. Ohne Abschweifungen, nur vielfach Rücksicht nehmend auf die geschichtliche Entwickelung, in einfacher ruhiger Sprache, niemals rhetorisch, selten einmal ein Wort des Witzes, aber dann ein treffendes gebrauchend, trug er seine Lehre, in Paragraphen genau eingetheilt, vor. Er wusste namentlich in seiner Encyklopädie und Einleitung die Probleme rein und sauber herauszuschälen, so dass man in die grossen Fragen der Philosophie trefflich eingeführt wurde, ohne dass er ihre Lösung ebenso ausführlich behandelt hätte, wenn er auch stets die Anleitung zu ihr gab und so zum eigenen Weiterdenken anregte. Es soll nicht selten vorgekommen sein, dass ein junger Student in die einleitenden Vorlesungen hineinging, nur weil er sie belegt hatte, mit der Absicht, bald wegzubleiben, durch den Vortrag aber so gefesselt wurde, dass er bis Ende des Semesters ausharrte.

Die Collegien Drobisch's waren stark besucht; lange Jahre war es üblich, dass die Mehrzahl der jungen Studenten seine Logik wenigstens hörte und sich so etwas wissenschaftliche Schulung für das Denken verschaffte. Zeitweise hatte Drobisch wohl überhaupt die meisten Zuhörer an der Universität, und als er schliesslich nach 64 jähriger akademischer Thätigkeit bei dem Kgl. Ministerium um Befreiung von der Verpflichtung, Vorlesungen zu halten, nachsuchte, da konnte er auf eine staunenswerth grosse Zahl von solchen, die ihn gehört, hinweisen. Wenn er auch verhältnissmässig wenig Studirenden persönlich sehr nahe trat, so hat er doch auf eine Unzahl namentlich von Theologen und Lehrern nachhaltig gewirkt, und überaus Viele hingen und hängen mit Dank und Verehrung an ihm. Ein erlauchtes Beispiel dafür ist der regierende Grossherzog von Oldenburg, der seinen alten Lehrer Drobisch später noch oft in seiner Wohnung aufsuchte, ihn bei einem Jubiläum in anerkennendster Weise ehrte und noch an dem Sarge des Verblichenen einen Kranz niederlegen liess.

Obwohl Drobisch als Schriftsteller und Lehrer äusserst thätig war, fand er doch noch Zeit, sich den Universitäts- und Facultätsangelegenheiten aufopfernd zu widmen. Er war oft Decan der philosophischen Facultät, wie das seine Professur mit sich brachte, viele Jahre Director actorum eben derselben, lange Zeit Mitglied des Senats und der Verwaltungsdeputation, wie Stipendiatenephorus; im Jahre 1841/42 stand er als Rector an der Spitze der Universität. Alle diese Aemter verwaltete er mit grösster Gewissenhaftigkeit und Selbstlosigkeit; Alles, was er angriff, war bei ihm, als einem Mann von weitem Blick, sicherem

Urtheil und Thatkraft, in den besten Händen. Nach Gottfried Hermann's Tod, den er höchst verehrt hatte, spielte er in der Facultät eine hervorragende Rolle, ohne dass er seine Meinung Jemandem hätte aufzwingen wollen: denn Herrisches lag nicht in seiner Natur. Wenn es dagegen galt, die Würde der Person oder die Würde des Amtes zu wahren, da stand er als Mann fest, wie er es besonders zeigte in dem Conflict der Mehrzahl des akademischen Senats mit der Regierung in Sachen der Wahl eines Abgeordneten für die erste Kammer im Jahre 1850. Er gehörte zu den »renitenten« Professoren, die sich nach Einberufung der alten Stände weigerten, eine neue, nach ihrer Ansicht ungesetzliche Wahl vorzunehmen, und in Folge dessen »als Senatsmitglieder suspendirt« wurden. Als nun der Minister von Beust ihn, den damaligen Decan der philosophischen Facultät, persönlich aufsuchte und ihn zu einer Unterschrift in dieser Angelegenheit bereden wollte, die Drobisch nicht glaubte geben zu dürfen, so wies ihn dieser, wie er mir nicht lange vor seinem Tode mit einem gewissen Stolz noch erzählte, darauf hin, dass er, der Professor, ebenso seine Standesehre habe wie der Minister von Beust, die zu verletzen man ihm nicht zumuthen dürfe. Durchaus loyal sein, aber seinen Rechten und Pflichten, auch denen der Universität, nichts vergeben, das war sein Grundsatz.

In einer wichtigen Angelegenheit, die ihm sehr am Herzen lag, haben seine mathematischen Kenntnisse die besten Dienste geleistet, nämlich bei der Einrichtung und Verwaltung der allgemeinen Universitäts-Wittwen- und Waisenkasse, über die er viel berichtet hat. Noch eine seiner letzten Arbeiten für unsere Gesellschaft behandelt die Rechnungsmethoden, die bei der Revision der genannten Kasse angewandt worden waren.

Und nun komme ich zur Gründung unserer Gesellschaft der Wissenschaften, wobei er sich als geschickter Organisator zeigte! Zwar haben wir die Verdienste Drobisch's um diese Gründung erst vor kurzer Zeit in Anwesenheit Sr. Majestät unseres Königs von kundigster Seite darstellen hören, aber es würde meinem Vortrag das für uns Bedeutungsvollste fehlen, wollte ich sie ganz übergehen.

Zunächst ging der Vorschlag Drobisch's dahin, die Jablonowski'sche Gesellschaft in eine Gesellschaft der Wissenschaften etwa nach dem Muster von Göttingen umzuwandeln, und zwar zur Feier des 200. Geburtstags Leibnizens. Man fand, dass dies gegen die Stiftungsbestimmungen sei; als sich aber ein in Folge dieser Anregung gebildeter Verein zur Gründung einer solchen Gesellschaft mit einer Theilung in zwei Klassen, einer mathematisch-naturwissenschaftlichen und philosophisch-historischen, an die Regierung in dieser Angelegenheit wandte, war diese dem Plane nicht abgeneigt, fragte jedoch an, ob nicht den beiden Klassen eine rein philosophische zur Seite gestellt werden könne, weil diese es eigentlich sei, durch welche jene andern Geltung, Leben und Festigkeit gewönnen. Diese letzte Ansicht, meint Drobisch in seinem Votum darüber, bezeichne mehr die ideale Stellung, die die Philosophie als Wissenschaft zu den übrigen Wissenschaften einnehmen sollte, als die factische. Von einem einträchtigen Zusammenarbeiten in der Philosophie sei jetzt noch viel weniger als in mancher früheren Zeit die Rede, und für eine bestimmte Richtung die Klasse zu gründen, werde für alle ausser der Philosophie Stehenden unbillig und einseitig erscheinen. Deshalb erklärt er sich gegen diese Klasse: sie sei weder Bedürfniss noch zweckmässig. Dagegen wäre zu wünschen, dass in den Kreis der geschichtlichen Disciplinen ausdrücklich die Geschichte der Philosophie und in den der naturwissenschaftlichen die Psychologie aufgenommen werde. Die Ansicht des umsichtigen, nüchternen, nicht für seine Schule einseitig sorgenden Fachphilosophen schlug durch; so wurde unsere Gesellschaft mit den beiden Klassen gegründet, nachdem Drobisch selbst noch die Statuten entworfen hatte, die im Ganzen nach seiner Fassung angenommen wurden. Auch sonst hatte er sich den Hauptarbeiten bei der Gründung unterzogen.

Das Präsidium bei der Feierlichkeit am 1. Juli 1846 führte Gottfried Hermann als grösste wissenschaftliche Autorität, der es aber eigentlich Drobisch, da von diesem der ganze Gedanke ausgegangen sei, übertragen wollte. Die wahre Weihe erhielt freilich der Tag durch die tief in den fruchtbaren Gedanken Leibnizens, Akademien zu gründen, eingehende Rede Drobisch's, der zugleich der neuen Gesellschaft in echt wissenschaftlichem Geiste die richtigen Bahnen wies. So krönte er sein Werk auf das Schönste. Die Gesellschaft hat, wie Sie wissen, bei der 50jährigen Jubelfeier ihres greisen Seniors gedacht: durch eine Deputation wurde ihm der Dank der Gesellschaft und damit zugleich die letzte öffentliche Ehre dargebracht, über die er sich noch herzlich freute, da er sich schon gänzlich vergessen wähnte. — Von Drobisch ist auch zu jener Zeit der Gründung unserer Gesellschaft die erste Anregung dazu ausgegangen, dass unsere Stadt ihrem grössten Sohne ein Standbild errichte und so eine alte Ehrenschuld abtrage, ein Gedanke, der damals freilich schon die Universität wie den Rath der Stadt stark bewegte, aber erst über ein Menschenalter später zur Ausführung gelangte.

Stand Drobisch in der Wissenschaft und als einflussreicher Lehrer sowie als Mann von praktischer Begabung in vollstem Ansehen, so musste ihm als Charakter jeder, der ihn kennen lernte, höchste Achtung bezeigen. Treu und fest an seinen Grundsätzen haltend, war er nicht der Mann, irgend welchen wechselnden Einflüssen und Stimmungen nachzugeben. Was er gesagt, das galt auch: streng gegen sich selbst und gewissenhaft bis ins Kleinste — schien er eine Verkörperung des kategorischen Imperativs zu sein. So sah er auch aus, wenn man ihm in sein von weissen Locken umrahmtes, wie aus Stein gemeisseltes Gesicht blickte, das freilich merkwürdiges Leben erhielt, sobald man mit ihm sprach, namentlich über wissenschaftliche Dinge. Stand er fest auf seinem erkannten Recht, so wahrte er ebenso genau die Rechte Anderer, war aber gegen deren Schwächen, z. B. in den Prüfungen, nicht zu nachsichtig. Seine eigenen Verdienste schätzte er gering, doch war er dankbar erfreut über Anerkennung und Ehren, die ihm sonst und namentlich bei der Reihe seiner Jubiläen in grosser Zahl und von verschiedensten Seiten zu Theil wurden, wenn er auch ihrer nicht würdig zu sein glaubte. Eine besondere Genugthuung hatte er über eine bedeutende Geldsumme, die ihm von Verehrern, Schülern und Anhängern bei seinem 50jährigen Professoren-Jubiläum zu seiner Verfügung überreicht wurde. Er bestimmte sie zu einem Stipendium, das jährlich zu seinem Gedächtniss vergeben wird an Studirende, die einen Ausweis über ihre philosophischen Studien bringen. Mässig war er in seinen Genüssen, bescheiden in seinen Ansprüchen, zufrieden damit, seiner Pflicht leben zu können, voller Vertrauen zur göttlichen Vorsehung, nie murrend, obwohl sie ihm manches Schwere, so den zu zeitigen Verlust seiner Gattin und den Verlust von sechs Kindern auferlegt hatte. Im

Verkehr mit Andern beobachtete er bis in sein hohes Alter alle Formen in höflicher Weise, doch vor zu rascher Annäherung, vor zu grosser Vertraulichkeit wich er zurück. In Gesellschaft mit Bekannten anregend, liebenswürdig und heiter, schnell fertig mit witzigem Wort, bisweilen auch sarkastisch, liebte er es sein Leben, das seiner Angehörigen und Freunde mit sinnigen Versen ernster und heiterer Art zu schmücken. In die Oeffentlichkeit trat er nicht ohne Noth: er hat nie eine politische Rolle gespielt noch spielen wollen, obwohl er ein trefflicher Redner war. — Den Werth von Drobisch's sittlich hoch stehender Persönlichkeit lernt man recht kennen aus seinen ausführlich gehaltenen Tagebüchern, in die mir ein kurzer Einblick vergönnt war.

Von Leipzig war er nach seiner Schülerzeit nie lange abwesend, abgesehen von Reisen nach Tirol, nach der Schweiz, wohin er einmal mit seinem Freunde Hartenstein ging, von Ferienaufenthalten in Thüringen, in Elster und anderen Orten. Sein treuester Freund war der eben genannte Hartenstein, wie er Herbartianer und College von ihm; sodann stand er freundschaftlich mit dem Historiker Wachsmuth, mit Fechner, der ihn häufig zu dialektischen Kämpfen reizte, mit Ernst Hnr. Weber, Roscher, Hankel u. A. Er fühlte sich als Leipziger, namentlich als zur Universität gehörig, weshalb er es auch kaum verwinden konnte, dass er aus seiner alten Universitätswohnung weichen musste. 72 Jahre hat er unserer Universität angehört. In drei Tagen, am 8. dieses Monats, hätte er sein 70 jähriges Jubiläum als ordentlicher Professor gefeiert — wir hatten gehofft, dass er dies Fest, das vielleicht in der Geschichte der deutschen Universitäten einzig dagestanden hätte, noch erleben würde; es war ihm nicht beschieden, und er selbst hat sich auch nicht danach gesehnt. — Umsonst hat er nicht gearbeitet und nicht gelebt: das zeigen seine Schriften, die gewirkt haben und jetzt noch wirken, das zeigt der Dank seiner vielen Schüler, das zeigt unsere Gesellschaft der Wissenschaften.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.