1678

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE.

39316 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME TRENTE-CINQUIÈME. — ANNÉE 1907.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ

A LA SORBONNE.

1907

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1907 (1).

Membres honoraires du Bureau....	MM. APPELL. DARBOUX. GUYOU. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. MITTAG-LEFFLER. PICARD. POINCARÉ. VOLTERRA. ZEUTHEN.

Président........................	MM. BLUTEL.
Vice-Présidents	BIOCHE. BRICARD. LÉVY (L.). PERRIN (R.).
Secrétaires........................	RAFFY. SERVANT.
Vice-Secrétaires..................	ESTANAVE. FATOU.
Archiviste........................	FOUCHÉ.
Trésorier.........................	CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil (2).	BOREL, 1909. BOURLET, 1908. CARVALLO, 1908. FONTENÉ, 1908. GRÉVY, 1910. HADAMARD, 1910. KOENIGS, 1910. LAISANT, 1909. LECORNU, 1910. MAILLET, 1908. MAROTTE, 1909. D'OCAGNE, 1909.

---

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(2) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date de l'admission.

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17^e).
1900. **ACKERMANN-TEUBNER**, éditeur, à Leipzig (Allemagne). S. P. [1].
1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert D'), professeur suppléant à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 14, à Lille (Nord).
1896. **ANDOYER**, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Val-de-Grâce, 1, à Paris (5^e).
1894. **ANDRADE**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Mouillière, 1, à Besançon.
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris (6^e).
1879. **APPELL**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bonaparte, 17, à Paris (6^e).
1900. **AURIC**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Pierre-Corneille, 38, à Lyon.
1882. **AUTONNE**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Châteauroux (Indre).
1900. **BAIRE**, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.
1896. **BAKER**, professeur à l'Université de Toronto (Canada).
1894. **BALITRAND**, ingénieur, à Métlaoui (Tunisie).
1905. **BARRÉ**, capitaine du génie, à Verdun (Meuse).
1906. **BARTHELS**, professeur de mathématiques, Weissenburgerstrasse, 52, à Aschaffenburg (Bavière).
1889. **BEGHIN**, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Duquesne, 11, à Paris (7^e).
1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône). S. P.
1904. **BERNSTEIN**, docteur ès sciences, rue Pouchkinskaïa, 10, à Saint-Pétersbourg (Russie).
1891. **BERTRAND DE FONTVIOLANT**, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue d'Erlanger, 29, à Paris (16^e). S. P.
1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6^e). S. P.
1900. **BLUMENTHAL** (Otto), professeur à l'École technique supérieure, Rütscherstrasse, 37, à Aix-la-Chapelle (Allemagne).
1891. **BLUTEL**, professeur au lycée Saint-Louis, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14^e).
1902. **BOBERIL** (vicomte Roger du), rue d'Orléans, 30, à Rennes. S. P.
1892. **BONAPARTE** (prince Roland), avenue d'Iéna, 10, à Paris (16^e).
1895. **BOREL**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, boulevard Arago, 2, à Paris. S. P.
1896. **BOULANGER**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, rue Caumartin, 78, à Lille.
1896. **BOURGET** (Henry), professeur adjoint à la Faculté des Sciences, rue Saint-Jacques, 20, à Toulouse.
1896. **BOURLET**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École des Beaux-Arts, avenue de l'Observatoire, 22, à Paris (14^e). S. P.
1903. **BOUTIN**, rue La Vieuville, 26, à Paris (18^e).
1904. **BOUTROUX** (P.), maître de conférences à la Faculté des Sciences, chemin de la Gaillarde, à Montpellier.
1900. **BREITLING**, proviseur du lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44, à Paris (6^e).
1897. **BRICARD**, ingénieur des manufactures de l'État, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 295, à Paris (14^e).
1873. **BROCARD**, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Ducs de Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.
1901. **BUHL** (Adolphe), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de Villefranche, 6, à Montpellier.
1893. **BURKHARDT**, professeur à l'Université, Kreuzplatz, 1, à Zürich (Suisse).

---

[1] Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Date de l'admission.

1894. **CAHEN**, professeur au collège Rollin, rue Cortambert, 46, à Paris (16^e).
1893. **CALDARERA**, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Liberta, à Palerme.
1888. **CANET** (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie de MM. Schneider et C^{ie}, avenue Henri-Martin, 87, à Paris (16^e). S. P.
1885. **CARON**, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5^e).
1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 *bis*, à Paris (17^e).
1896. **CARTAN**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue du faubourg Saint-Jean, 46, à Nancy.
1887. **CARVALLO**, docteur ès sciences, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Clovis, 1, à Paris (5^e). S. P.
1890. **CEDERCREUTZ** (baronne Nanny), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).
1892. **CELLÉRIER** (Gustave), cours de Rive, 12, à Genève (Suisse).
1887. **CERRUTI**, professeur à l'Université, piazza S. Pietro in vincoli, 5, à Rome (Italie).
1888. **CHAILAN** (Édouard), rue Berthollet, 16, à Paris (5^e).
1896. **CHARVE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.
1884. **CHRYSTAL**, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1901. **CLAIRIN**, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Jacquemars-Giélée, 57 *bis*, à Lille.
1875. **CLAUDE-LAFONTAINE**, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris (9^e). S. P.
1890. **COLOT**, villa Sully, à Arcachon (Gironde).
1898. **COMBEBIAC**, capitaine du génie, docteur ès sciences, rue Coulon, 9, à Bourges.
1900. **COMTE** (Firmin), ingénieur des ponts et chaussées, à Commercy (Meuse).
1896. **COSSERAT** (E.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 1, à Toulouse.
1896. **COSSERAT** (F.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris (10^e).
1900. **COTTON** (Émile), professeur à l'Université de Grenoble. S. P.
1904. **CURTISS**, Sherman avenue, 1939, à Evanston (Illinois, États-Unis).
1872. **DARBOUX**, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris (5^e).
1885. **DAUTHEVILLE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27, à Montpellier.
1901. **DELASSUS**, professeur à la Faculté des Sciences, chemin de Chastre-Monjoux, à Besançon.
1905. **DENJOY**, agrégé de mathématiques, rond-point Bugeaud, 5, à Paris (16^e).
1895. **DELAUNAY** (N.), professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kieff (Russie).
1899. **DELEMER**, ingénieur des ponts et chaussées, place Simon-Vollant, 10, à Lille.
1885. **DEMARTRES**, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).
1892. **DEMOULIN** (Alph.), professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau 10, à Gand (Belgique).
1883. **DERUYTS**, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liége (Belgique).
1894. **DESAINT**, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17^e).
1900. **DICKSTEIN**, Marszatkowska, 117, à Varsovie.
1902. **DIEGUEZ** (D.-F.), professeur de mathématiques à l'École provinciale des Arts et Industries, calle del Orzan, 4-3°, à La Corogne (Espagne).
1899. **DRACH**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Carmélites, 68, à Poitiers.
1896. **DUMAS** (G.), docteur de l'Université de Paris, privat-docent à l'École Polytechnique fédérale, à Zürich (Suisse).
1897. **DUMONT**, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. **DUNCAN**, Consulting Engineer, Empire Building, Broadway, 71, New-York City.
1897. **DURAN-LORIGA** (commandant), plaza de Maria Pita, 20, à la Corogne (Espagne).
1885. **DYCK** (Walther), Technische Hochschule, à Munich (Bavière).

Date d'admission.

1902. EGOROFF (Dimitri), professeur à l'Université, Moltchanovka, maison Fryndisse, à Moscou (Russie).

1903. ESPANET, ingénieur civil, rue Berthollet, 2, à Paris (5°).

1900. ESTANAVE, docteur ès sciences, à la Sorbonne, à Paris (5°).

1896. EUVERTE, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Clercs, à Paris (7°).

1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, 17, rue Chaptal, à Montpellier.

1906. FARAGGI, licencié ès sciences, rue Sadi-Carnot, 11 *bis*, Mustapha-Alger.

1904. FATOU, docteur ès sciences, astronome-adjoint à l'Observatoire, boulevard du Montparnasse, 172, à Paris (14°).

1891. FAUQUEMBERGUE, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan.

1892. FEHR (Henri), professeur à l'Université, rue Ph.-Plantamour, 19, à Genève (Suisse).

1885. FIELDS (J.), professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).

1881. FLOQUET, doyen de la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.

1872. FLYE SAINTE-MARIE, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).

1896. FONTANEAU, ancien officier de marine, cours Bugeaud, 8, à Limoges.

1897. FONTENÉ, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5°).

1903. FORD (WALTER B.), Forest avenue, 617, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).

1889. FOUCHÉ, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5°).

1905. FOUËT (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, rue Férou, 11, à Paris (6°).

1872. FOURET, répétiteur à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17°). S. P.

1903. FRAISSÉ, professeur au lycée, à Lille.

1892. FROLOV (le général), avenue des Vollandes, 2, à Genève (Suisse).

1903. FUETER, Seevogelstrasse, 7, à Bâle (Suisse).

1900. GALDEANO (Z.-S. DE), professeur à l'Université, corso 99, 3, à Saragosse (Espagne).

1906. GARGAM DE MONCETZ, licencié ès sciences, square de Latour-Maubourg, 8, à Paris (7°).

1872. GARIEL, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17°).

1896. GAUTHIER-VILLARS, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6°).

1890. GEBBIA, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).

1872. GENTY, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Rapp, 20, à Paris (7°).

1906. GÉRARDIN, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.

1890. GERBALDI, professeur à l'Université, via XX Settembre, 66, à Palerme (Italie).

1897. GERRANS, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).

1896. GIRARDVILLE, capitaine d'artillerie, rue Michelet, 6, à Montreuil-sous-Bois (Seine).

1903. GODEY, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16°).

1881. GOURSAT, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 39, à Paris (5°).

1896. GREENHILL, professeur à l'École d'artillerie, à Woolwich (Grande-Bretagne).

1896. GRÉVY, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).

1899. GUADET, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 240 *bis*, à Paris (7°)

Date de l'admission.

1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palerme (Italie).

1906. **GUERBY**, professeur au collège Stanislas, boulevard de Port-Royal, 85, à Paris (14^e).

1900. **GUICHARD**, professeur à l'Université de Clermont-Ferrand.

1881. **GUNTHER** (D^r Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).

1885. **GUYOU**, membre de l'Institut, capitaine de frégate, rue Marguerin, 4, à Paris (14^e).

1873. **HAAG**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 11 *bis*, à Paris (16^e).

1882. **HABICH**, directeur de l'École des Ingénieurs, à Lima (Pérou).

1896. **HADAMARD**, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France, rue Humboldt, 25, à Paris (14^e). S. P.

1904. **HALBERSTADT**, ingénieur des Arts et Manufactures, rue des Écoles, 4 *ter*, à Paris (5^e).

1894. **HALSTED**, professeur au Kenyon College, à Gambier (Ohio, États-Unis). S. P.

1901. **HANCOCK** (Harris), professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).

1900. **HARDEL**, villa italienne, à Dieppedalle-Croisset (Seine-Inférieure).

1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6^e). S. P.

1905. **HEDRICK**, professeur à l'Université, South Ninth street, 302, à Columbia (Missouri, États-Unis).

1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5^e).

1893. **HIOUX**, professeur en retraite, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5^e).

1879. **HOLST** (Elling), professeur à l'École Polytechnique, à Hövik, près Christiania (Norvège).

1895. **HOTT** (S.), professeur à l'École S^{te}-Geneviève, rue Bausset, 4, à Paris (15^e). S. P.

1880. **HUMBERT**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17^e).

1881. **IMBER**, directeur des études à l'École Centrale, place Voltaire, 2, à Paris (11^e).

1903. **ISSALY** (l'abbé), rue Poquelin-Molière, 9, à Bordeaux.

1896. **JACQUET** (E.), professeur au Prytanée militaire, rue Couchot, 8, à la Flèche.

1898. **JAHNKE** (D^r E.), professeur à l'Académie des Mines, Ludwigskirchstrasse, 6, à Berlin W^{15} (Allemagne).

1898. **JARRY** (N.), ingénieur civil, avenue du Bel-Air, 7, à Paris (12^e).

1872. **JAVARY**, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris (5^e).

1903. **JENSEN** (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des Téléphones, Gl. Kongevej, 80, à Copenhague, V (Danemark).

1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7^e). S. P.

1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, via Fatebenefratelli, 19, à Milan (Italie).

1892. **KOCH** (H. von), professeur à l'École Polytechnique, à Djursholm-Stockholm (Suède).

1880. **KŒNIGS**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14^e).

1897. **LACAUCHIE**, ingénieur civil, chef du laboratoire de la Compagnie générale des Omnibus, rue de Douai, 48, à Paris (9^e).

1873. **LAISANT**, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris (16^e).

Date de l'admission.

1906. **LALESCO**, licencié ès sciences, rue Monge, 14, à Paris (5e).
1893. **LANCELIN**, astronome adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14e).
1899. **LANDAU** (Edmond), professeur à l'Université de Berlin, Hardenbergstrasse, 13, à Charlottenburg (Allemagne).
1896. **LAUGEL**, ancien attaché d'ambassade, villa Ensoleillée, à Beaulieu-sur-Mer (Alpes-Maritimes).
1873. **LAUTH**, manufacturier, à Thann (Alsace).
1896. **LEAU**, professeur au lycée Michelet, rue Vavin, 6, à Paris (6e).
1880. **LÉAUTÉ**, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17e). S. P.
1896. **LEBEL**, professeur au lycée, avenue Bouisson-Bertrand, 38, à Montpellier.
1902. **LEBESGUE**, docteur ès sciences, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue des Quatre-Roues, 1, à Poitiers.
1903. **LEBEUF**, directeur de l'observatoire de Besançon.
1893. **LECORNU**, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5e).
1895. **LÉMERAY**, licencié ès sciences, ingénieur civil du génie maritime, boulevard de l'Océan, 51, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).
1872. **LEMOINE** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, villa Kérahu, aux Bordes, par Montereau (Seine-et-Marne).
1904. **LEMOYNE** (T.), rue Ernest-Renan, 21, à Paris (15e).
1879. **LE PAIGE**, professeur à l'Université, à l'observatoire de Cointe, à Liége (Belgique).
1895. **LE ROUX**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 17, à Rennes.
1898. **LE ROY**, docteur ès sciences, boulevard Raspail, 117, à Paris (6e).
1891. **LERY**, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1900. **LEVI CIVITA** (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1882. **LÉVY** (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris (6e).
1872. **LÉVY** (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris (16e).
1875. **LEZ** (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1898. **LINDELÖF** (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajan, 15, à Helsingfors (Finlande).
1877. **LINDEMANN**, professeur à l'Université, Franz-Josephstrasse, 12, à Munich (Bavière).
1886. **LIOUVILLE**, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri-IV, 12, à Paris (4e).
1900. **LOVETT** (E.-O), professeur à l'Université de Princeton (New-Jersey, États-Unis).
1888. **LUCAS** (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue Boissière, 30, à Paris (16e).
1902. **LUCAS-GIRARDVILLE**, ingénieur à la Manufacture des Tabacs, rue de Charenton, 319, à Paris (12e).
1902. **LUCAS DE PESLOUAN**, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris.
1882. **MACÉ DE LÉPINAY**, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue Claude-Bernard, 79, à Paris (5e).
1895. **MAILLET**, ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.
1905. **MALUSKI**, professeur au lycée Hoche, rue Gabriel, 12, à Versailles.
1905. **MANTELL** (Mlle L.), rue Dutot, 30, à Paris (15e).

Date
de
l'admission.

1906. **MARCUS**, licencié ès sciences, rue Thénard, 6, à Paris (5ᵉ).
1904. **MAROTTE**, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 *bis*, à Paris (12ᵉ).
1884. **MARTIN** (Artemas), 1535, Colombia Street N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1889. **MARTIN** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue des Fossés-Saint-Jacques, 22, à Paris (5ᵉ).
1901. **MASSAU** (J.), professeur à l'Université, avenue des Arts, 43, à Gand (Belgique).
1894. **MAUPIN**, professeur au lycée, rue de l'église Sᵗ-Ausone, 33, à Angoulême (Charente).
1897. **MEHMKE**, professeur à l'École technique supérieure, Lowenstrasse, à Stuttgart-Degerloch (Wurtemberg).
1889. **MENDIZABAL TAMBOREL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.
1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, rue de l'Université, 193, à Paris (7ᵉ). S. P.
1902. **MERLIN**, docteur en sciences, rue de la Poste, 22, à Uccle (Belgique).
1902. **MESNY** (R.), professeur d'hydrographie à Saint-Tropez (Var).
1904. **METZLER**, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1893. **MICHEL** (François), chef de parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10ᵉ).
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1904. **MIWA**, professeur à l'Université de Kyoto (Japon).
1902. **MOLK** (J.), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy.
1897. **MONTCHEUIL** (l'abbé DE), docteur ès sciences, rue du Languedoc, 9, à Toulouse.
1898. **MONTESSUS DE BALLORE** (vicomte Robert DE), professeur à la Faculté libre des Sciences, boulevard de la Liberté, 121, à Lille (Nord).
1903. **MULLER** (J.-O.), Nikolausbergerweg, 49, à Göttingen (Allemagne).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liége (Belgique).
1897. **NICOLLIER**, professeur, à Montreux (Suisse).
1903. **NIELS NIELSEN**, inspecteur général de l'enseignement secondaire, Norrebrogade, 57, à Copenhague (Danemark).
1900. **NIEWENGLOWSKI**, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Instruction publique, rue de l'Arbalète, 35, à Paris (5ᵉ).
1882. **OCAGNE** (M. D'), professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue La Boëtie, 30, à Paris (8ᵉ). S. P.
1905. **OUIVET**, professeur au lycée, à Dijon.
1873. **OVIDIO** (Enrico D'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1901. **PADÉ** (H.), professeur à l'Université, rue de Turenne, 89, à Bordeaux.
1893. **PAINLEVÉ**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue d'Assas, 33, à Paris (6ᵉ).
1888. **PAPELIER** (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvrance, 20, à Orléans (Loiret).
1884. **PARAF**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences de Toulouse.
1881. **PELLET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue Pascal, 30, à Clermont-Ferrand.
1874. **PERCIN**, général de division, rue de la Faisanderie, 116, à Paris (16ᵉ).
1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.
1873. **PERRIN** (R.), inspecteur général des mines, rue de Grenelle, 80, à Paris (7ᵉ). S. P.
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques, rue Tarbé, 3, à Paris (17ᵉ).
1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 26, à Belgrade (Serbie).

Date de admission.

1902. **PETROVITCH** (S.), capitaine d'artillerie de la garde, professeur adjoint à l'Académie d'artillerie Michel, Sabalkansky prospect 17 log. 15 à Saint-Pétersbourg.

1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, piazza San Marcellino, 2, à Naples (Italie).

1905. **PFEIFFER**, maître de conférences à l'Université, Tarassovskaïa, 20, à Kiew (Russie).

1906. **PHILIPPE** (Léon), inspecteur général des Ponts et Chaussées, rue de Turin, 23 *bis*, à Paris (8e).

1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bara, 4, à Paris (6e).

1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie, examinateur des élèves à l'Ecole Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6e).

1899. **PIERPONT** (James), professeur à l'Université Yale, Mansfield street, 42, à New Haven (Connecticut, États-Unis).

1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris (5e). S. P.

1894. **POTRON**, docteur ès sciences, rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5e).

1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), à Radmannsdorf (Carniole, Autriche). S. P.

1906. **POPOVICI**, licencié ès sciences, rue Monge, 29, à Paris (5e).

1899. **PRINGSHEIM**, professeur à l'Université, Arcisstrasse, 12, à Münich (Bavière).

1896. **PRUVOST**, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16e).

1902. **PUX** (Victor), ancien élève de l'Ecole Polytechnique, professeur de mathématiques, rue Madame, 54, à Paris (6e).

1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, boulevard Saint-Germain, 92, à Paris (5e).

1898. **RABUT**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Duplessis, 77, à Versailles.

1883. **RAFFY**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Pierre-Nicole, 7, à Paris (5e). S. P.

1903. **REMOUNDOS**, professeur de mathématiques, rue Soultani, 17, à Athènes (Grèce).

1906. **REMY**, élève-ingénieur des mines, boulevard Arago, 112, à Paris (14e).

1900. **RENARD**, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris (16e).

1903. **RICHARD**, professeur au lycée, place du Rosoir, 1, à Dijon.

1893. **RIVEREAU** (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).

1903. **ROCHE**, agrégé de l'Université, rue d'Assas, 76, à Paris (6e).

1872. **ROUART**, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 34, à Paris (8e).

1872. **ROUCHÉ**, membre de l'Institut, boulevard St-Germain, 213, à Paris (7e).

1896. **ROUGIER**, docteur ès sciences, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.

1885. **ROUQUET** (V.), professeur honoraire de mathématiques spéciales, à Belpech (Aude).

1906. **ROUSIERS**, professeur au collège Stanislas, boulevard Raspail, 206, à Paris (14e).

1900. **SALTYKOW**, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.

1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.

1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.

1897. **SCHOU** (Erik), Gl. Antvorskov, à Slagelse (Danemark).

1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).

1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).

1896. **SÉGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 56, à Paris (7e).

1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Pétersbourg (Russie). S. P.

Date de l'admission.

1900. **SERVANT**, docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 8, à Paris (7ᵉ).
1900. **SPARRE** (comte Magnus DE), avenue de l'Archevêché, 7, à Lyon. S. P.
1879. **STEPHANOS** (Dʳ Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1901. **STETSON** (Orlando), à Franklin (Massachusetts, États-Unis).
1898. **STÖRMER** (Carl), professeur à l'Université, Davesgade, 14, à Christiania (Norvège).
1903. **SUCHAR**, docteur ès sciences, rue Saint-Lazare, 43, à Paris (8ᵉ).
1904. **SUDRIA**, professeur à l'École pratique d'électricité industrielle, rue Ernest-Renan, 28, à Paris (15ᵉ).
1904. **SUNDMAN**, maître de conférences à l'Université, Skepparebvinken, 2, à Helsingfors (Finlande).
1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège). S. P.
1896. **TANNENBERG** (DE), docteur ès sciences, rue d'Assas, 118, à Paris (6ᵉ).
1875. **TANNERY**, professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris (5ᵉ).
1882. **TARRY** (Gaston), boulevard Pereire, 177, à Paris (17ᵉ). S. P.
1899. **THYBAUT**, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard St-Germain, 11, à Paris (5ᵉ).
1873. **TISSOT**, ancien examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1896. **TISSOT**, enseigne de vaisseau, professeur au *Borda*, à Brest (Finistère).
1896. **TORRES**, membre de l'Académie des Sciences, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).
1893. **TOUCHE**, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue Truffault, 23, à Paris (17ᵉ).
1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du général Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1896. **TRESSE**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Mizon, 6, à Paris (14ᵉ).
1893. **VALLÉE-POUSSIN** (CH.-J. DE LA), professeur à l'Université, rue Léopold, 38, à Louvain (Belgique).
1904. **VANDEUREN**, professeur à l'École militaire, avenue Macan, 16, à Bruxelles.
1905. **VAN VLECK**, professeur de Mathématiques, University of Wisconsin, à Maddison (Wisconsin, Etats-Unis).
1897. **VASSILAS-VITALIS** (J.), professeur à l'Ecole militaire supérieure, rue Socrate, 11 A, à Athènes (Grèce).
1898. **VASSILIEF**, président de la Société physico-mathématique, à Kasan (Russie).
1901. **VESSIOT**, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon.
1888. **VOLTERRA** (Vito), professeur à l'Université, via Lucina, 17, à Rome.
1904. **VORONOÏ**, professeur à l'Université, rue Vilcza, 18, à Varsovie (Russie).
1900. **VUIBERT**, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5ᵉ).
1880. **WALCKENAER**, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7ᵉ).
1879. **WEILL**, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8ᵉ).
1906. **WILSON**, assistant à l'Université de Yale, à New-Haven (Connecticut, États-Unis).
1878. **WORMS DE ROMILLY**, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris (8ᵉ).
1882. **ZABOUDSKI**, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie, rue Znamenkaia, 22, à Saint-Pétersbourg (Russie).
1890. **ZAREMBA**, professeur à l'Université, rue Biskupia, 5, à Cracovie (Autriche).
1903. **ZERVOS**, professeur agrégé à l'Université, rue Marie, 5 B, à Athènes (Grèce).
1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Rosenvonget, Sanct-Kanutkestræde, 11, à Copenhague (Danemark).
1898. **ZIWET**, South Ingalls street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États Unis).

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.......	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.......	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.......	*Revue semestrielle des publications mathématiques.*	Pays-Bas.
Bâle............	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore........	*American Journal of Mathematics.*	États-Unis.
Berlin............	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin............	*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.*	Allemagne.
Berlin............	*Journal für die reine und angewandte Mathematik.*	Allemagne.
Bologne..........	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.........	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.........	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.........	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.......	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Cambridge.......	*Annals of Mathematics.*	Massachusetts.
Christiania.......	*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*	Norvège.
Coïmbre.........	*Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.*	Portugal.
Copenhague......	*Nyt Tidsskrift for Mathematik.*	Danemark.
Cracovie..........	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.............	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg.......	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.......	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand............	*Mathesis.*	Belgique.
Göttingen........	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax..........	Nova Scotian Institute of Science.	Nlle-Écosse (Canada)
Hambourg........	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem...........	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.......	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas...........	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan............	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov..........	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov..........	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
La Haye..........	Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.	Pays-Bas.
Leipzig...........	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig...........	*Mathematische Annalen.*	Allemagne.
Leipzig...........	*Archiv der Mathematik und Physik.*	Allemagne.

Liége	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne	*Periodico di Matematica.*	Italie.
Londres	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille	*Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.*	France.
Mexico	Sociedad cientifica *Antonio Alzate.*	Mexique.
Milan	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme	*Rendiconti del* Circolo matematico.	Italie.
Paris	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris	Société philomathique de Paris.	France.
Paris	*Bulletin des Sciences mathématiques.*	France.
Paris	*Journal de l'École Polytechnique.*	France.
Paris	Institut des Actuaires français.	France.
Paris	*Intermédiaire des Mathématiciens.*	France.
Pise	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise	*Il Nuovo Cimento.*	Italie.
Prague	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague	*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky.*	Autriche.
Prague	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Rome	Académie Royale des *Lincei.*	Italie.
Saint-Pétersbourg	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm	*Acta Mathematica.*	Suède.
Stockholm	*Bibliotheca mathematica.*	Suède.
Tokyo	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse	*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.*	France.
Turin	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Russie.
Varsovie	Prace Matematyczno Fizyczne.	Russie.
Venise	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne	*Monatshefte für Mathematik und Physik.*	Autriche.
Washington	Philosophical Society.	États-Unis.
Zurich	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

RÈGLEMENT

VOTÉ A LA SÉANCE DE L'ASSEMBLÉE GÉNÉRALE, LE 20 JUIN 1888,
MODIFIÉ A LA SÉANCE DU 10 JANVIER 1907.

CHAPITRE PREMIER.

DISPOSITIONS GÉNÉRALES.

ARTICLE PREMIER. — Les conditions à remplir, pour être membre de la Société mathématique de France, sont fixées par le premier paragraphe de l'article 3 des statuts.

Dans le cas où, pour des motifs sérieux, le Bureau croit devoir surseoir à la présentation d'un candidat, le différend est soumis au Conseil d'administration, qui statue définitivement dans sa séance la plus prochaine.

ART. 2. — Les membres nouvellement élus, après avoir acquitté le droit d'admission de dix francs et le montant de la première cotisation annuelle, reçoivent un diplôme signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et portant le sceau de la Société.

ART. 3. — La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice, dont l'origine est fixée au 1er novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

ART. 4. — Tout membre a le droit, à une époque quelconque, de racheter ses cotisations à venir et de devenir *sociétaire perpétuel,* moyennant la somme de *trois cents francs* (art. 3 des statuts). Cette somme peut être payée en une seule fois, ou par versements de *cent francs* chacun, se suivant à des intervalles qui ne doivent pas dépasser une année.

En cas de retard, la cotisation annuelle continue à être exigible, indépendamment et jusqu'à complet acquittement de la somme de *trois cents francs.*

ART. 5. — Tout membre qui, n'étant pas sociétaire perpétuel, négligera de payer régulièrement sa cotisation annuelle, sera, après avertissement du trésorier, à lui adressé par lettre recommandée et resté sans effet, considéré comme démissionnaire.

CHAPITRE II.

TENUE DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ.

ART. 6. — La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, de la mi-juillet à la mi-octobre.

Art. 7. — La première séance de janvier est consacrée spécialement aux élections pour le renouvellement du Bureau et du Conseil.

Art. 8. — Il est adressé chaque année, dès le début d'octobre, à tous les membres de la Société, une carte imprimée portant l'indication des jours de séance.

Art. 9. — Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

Art. 10. — La présence du président ou d'un vice-président, assisté d'un des secrétaires ou vice-secrétaires, suffit pour constituer le Bureau à chaque séance.

Art. 11. — En cas d'absence du président et des vice-présidents, le trésorier, ou, à son défaut, l'archiviste, occupe le fauteuil.

A défaut des membres du Bureau qui viennent d'être désignés, les fonctions de président sont remplies par le plus âgé des sociétaires présents à la séance.

En cas d'absence des secrétaires et vice-secrétaires, le président du jour invite un des membres présents à en remplir les fonctions.

Art. 12. — Chaque séance commence par la lecture du procès-verbal de la séance précédente.

Les Communications sont faites dans l'ordre de leur inscription. Chacune d'elles ne peut durer plus de vingt minutes.

Ces dispositions ne s'appliquent pas aux conférences scientifiques qui pourraient être organisées par le Bureau.

Art. 13. — Les questions relatives à l'administration de la Société, à moins d'une demande du Conseil, ne peuvent être traitées en séance ordinaire. Elles doivent faire l'objet d'une note remise au président, qui en réfère au Conseil dans sa plus prochaine réunion.

CHAPITRE III.

BULLETIN ET PUBLICATIONS DIVERSES.

Art. 14. — La Société publie par livraisons un recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les travaux des personnes étrangères à la Société peuvent, exceptionnellement, trouver place dans le *Bulletin*, à la condition d'offrir un intérêt suffisant.

Art. 15. — L'un des secrétaires est spécialement chargé par le Conseil de tout ce qui concerne la publication du *Bulletin*. Il est assisté, dans le choix des Notes et Mémoires qui peuvent y être insérés, par une *Commission d'impression* composée du président, des vice-présidents, du deuxième secrétaire et des vice-secrétaires.

Art. 16. — La Société se propose, dans les limites de ses droits et de ses ressources, de publier, soit dans le corps du *Bulletin*, soit à part, des Mémoires inédits et de réimprimer des œuvres importantes d'anciens mathématiciens français ou étrangers (art. 14 des statuts).

Art. 17. — Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le payement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

Art. 18. — Le Conseil fixe, par mesure générale, les prix réduits moyennant lesquels les membres de la Société peuvent se procurer les volumes du *Bulletin* parus antérieurement à leur admission, et les Ouvrages autres que le *Bulletin* publiés par les soins de la Société.

CHAPITRE IV.

COMPOSITION ET MODE D'ÉLECTION DU BUREAU ET DU CONSEIL.

Art. 19. — La Société est administrée par un Conseil composé comme l'indique l'article 4 des statuts.

Le Bureau du Conseil est le même que celui de la Société (art. 4 des statuts).

Le nombre des membres honoraires prévus par l'article 4 des statuts n'est pas limité; ces membres honoraires ne peuvent être nommés que sur la présentation du Conseil ou sur une proposition spéciale faite par écrit, signée de vingt membres de la Société, et déposée au plus tard dans la dernière séance de décembre.

Art. 20. — Le renouvellement du Bureau et du Conseil a lieu chaque année, dans la première séance de janvier, et conformément aux prescriptions des articles 5, 6 et 16 des statuts.

Dans ce but, un avis de convocation, accompagné de bulletins de vote en blanc et, s'il y a lieu, des propositions du Conseil, est envoyé, en temps utile, à tous les membres de la Société.

Art. 21. — Les membres, qui ne peuvent assister à la séance dans laquelle ont lieu les élections, sont invités à envoyer au président, en temps opportun, leurs votes sous enveloppes fermées, en y joignant un avis d'envoi portant leur signature.

Les enveloppes contenant les bulletins de vote ne sont ouvertes qu'au moment du scrutin.

CHAPITRE V.

ATTRIBUTIONS DES MEMBRES DU BUREAU.

Art. 22. — Le président veille à l'observation des statuts et du règlement de la Société; il assure l'exécution des délibérations du Conseil.

ART. 23. — Les secrétaires ou, à leur défaut, les vice-secrétaires rédigent les procès-verbaux des séances de la Société et des séances du Conseil.

ART. 24. — Sous la direction du président, les secrétaires sont chargés de la correspondance pour tout ce qui concerne les travaux et les affaires de la Société; ils convoquent la Société, le Conseil et les Commissions, quand il y a lieu, et préparent les ordres du jour.

ART. 25. — L'archiviste est chargé de la garde des archives de la Société. Il a sous sa direction la bibliothèque; il dresse le catalogue des livres, brochures et manuscrits qui en font partie.

ART. 26. — Le trésorier est chargé du recouvrement des sommes dues à la Société. Il acquitte les dépenses ordonnancées par l'un des secrétaires, spécialement délégué par le Conseil. Il tient un registre des recettes et des dépenses.

ART. 27. — Il ne peut être fait aucun emploi extraordinaire des fonds de la Société, sans une délibération spéciale du Conseil.

CHAPITRE VI.

ATTRIBUTIONS DU CONSEIL ET TENUE DE SES SÉANCES. — COMMISSIONS.

ART. 28. — Le Conseil se réunit dans les conditions fixées par l'article 7 des statuts.

ART. 29. — A chaque séance du Conseil, les noms des membres présents sont consignés au procès-verbal.

ART. 30. — Sur la proposition de cinq membres, le vote peut avoir lieu au scrutin secret.

ART. 31. — Sur la demande de cinq membres, il peut être fait appel à la Société des décisions qui n'auraient pas été prises aux deux tiers des voix des membres présents.

ART. 32. — Les procès-verbaux des séances du Conseil doivent être transcrits sur un registre coté et parafé par l'un des secrétaires; ils doivent être signés par le président et le secrétaire qui ont composé le Bureau; les renvois doivent être parafés et les mots rayés approuvés.

ART. 33. — Le Conseil se réunit chaque année au cours du dernier trimestre, pour délibérer sur l'état des affaires de la Société, prendre les mesures préparatoires relatives aux élections prévues au Chapitre IV, et nommer la Commission de comptabilité chargée de vérifier la gestion du trésorier.

ART. 34. — Cette Commission ne peut être composée de moins de trois membres. Elle fait son rapport à l'Assemblée générale dans la première séance de janvier

ART. 35. — Le Conseil peut provoquer, parmi les membres de la Société, la formation de Commissions ayant un but spécial, technique ou scientifique.

CHAPITRE VII.

REVISION DES STATUTS OU DU RÈGLEMENT.

Art. 36. — Les conditions dans lesquelles peut avoir lieu la revision des statuts sont fixées par l'article 18 desdits statuts.

Dans le cas où, à la suite d'une première convocation, l'assemblée extraordinaire, réunie dans ce but, ne pourrait délibérer valablement, une nouvelle assemblée extraordinaire serait réunie dans un délai inférieur à cinq mois.

Art. 37. — Le règlement ne peut être modifié que par une Assemblée extraordinaire, convoquée à cet effet.

Cette Assemblée extraordinaire ne peut délibérer valablement que si le quart au moins des membres de la Société sont présents ou représentés. Si cette proportion n'est pas atteinte, une nouvelle Assemblée extraordinaire est réunie dans un délai compris entre un mois et cinq mois; ses délibérations sont valables, quel que soit le nombre des membres présents ou représentés.

Art. 38. — Toute proposition de modification au règlement, si elle n'émane pas de l'initiative du Conseil d'administration, doit être formulée dans une lettre signée de vingt-cinq membres de la Société au moins, et adressée au président. Celui-ci doit réunir l'Assemblée extraordinaire dans les trente jours qui suivent la remise de la proposition, les vacances annuelles n'étant pas comptées dans ce délai.

Art. 39. — Avant la réunion d'une Assemblée extraordinaire convoquée pour délibérer sur la revision des statuts ou du règlement, le Conseil d'administration, réuni à cet effet, nomme une commission composée de sept de ses membres, chargée d'examiner la demande de revision et de présenter sur cette demande un rapport à l'assemblée extraordinaire.

Art. 40. — Pour les Assemblées extraordinaires, tous les membres de la Société sont spécialement convoqués à domicile.

LISTE DES PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE DEPUIS SA FONDATION.

MM. **CHASLES** (1873). — **LAFFON DE LADEBAT** (1874). — **BIENAYMÉ** (1875). — **DE LA GOURNERIE** (1876). — **MANNHEIM** (1877). — **DARBOUX** (1878). — **O. BONNET** (1879). — **JORDAN** (1880). — **LAGUERRE** (1881). — **HALPHEN** (1882) — **ROUCHE** (1883). — **PICARD** (1884). — **APPELL** (1885). — **POINCARÉ** (1886). — **FOURET** (1887). — **LAISANT** (1888). — **ANDRÉ (DÉSIRÉ)** (1889). — **HATON DE LA GOUPILLIÈRE** (1890). — **COLLIGNON** (1891). — **VICAIRE** (1892). — **HUMBERT** (1893). — **PICQUET** (1894). — **GOURSAT** (1895). — **KŒNIGS** (1896). — **PICARD** (1897). — **LECORNU** (1898). — **GUYOU** (1899). — **POINCARE** (1900). — **D'OCAGNE** (1901). — **RAFFY** (1902). — **PAINLEVÉ** (1903). — **CARVALLO** (1904). — **BOREL** (1905). — **HADAMARD** (1906).

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 8 NOVEMBRE 1906.

PRÉSIDENCE DE M. HADAMARD.

Communications :

M. Lecornu : *Sur l'extinction du frottement.*

M. Raffy : *Sur l'isothermie relative des réseaux et sur les caractéristiques* (asymptotiques et lignes de courbure) *des surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées.*

M. Hadamard signale deux Mémoires de Worpitzky, publiés dès 1870 et où se trouvent certains résultats fondamentaux relatifs à la détermination des singularités des séries entières.

SÉANCE DU 22 NOVEMBRE 1906.

PRÉSIDENCE DE M. HADAMARD.

Communications :

M. Fatou : *Sur certaines séries de Taylor.*

M. Remy : *Sur deux classes de surfaces du quatrième ordre liées à l'octuple gauche.*

M. Hadamard : *Sur une question du calcul des variations.*

SÉANCE DU 6 DÉCEMBRE 1906.

PRÉSIDENCE DE M. HADAMARD.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. K.-L. Barthels, présenté par MM. Raffy et Grévy; MM. Guerby et Rousiers, présentés par MM. Blutel et Grévy; M. Gargam de Moncetz, présenté par MM. Picard et Raffy; M. Lalesco, présenté par MM. Picard et Hadamard.

Communications :

M. Maillet : *Sur diverses propriétés des nombres transcendants de Liouville.*

M. Lalesco : *Sur le groupe des équations trinomes de degré premier.*

M. Raffy : *Remarques sur la recherche des surfaces isothermiques.*

SÉANCE DU 20 DÉCEMBRE 1906.

PRÉSIDENCE DE M. HADAMARD.

Communications :

M. Remy : *Sur une famille de surfaces hyperelliptiques à quinze points doubles.*

M. Raffy : *Sur la recherche des surfaces dont les courbures principales sont fonctions l'une de l'autre.*

SÉANCE DU 10 JANVIER 1907.

PRÉSIDENCE DE M. HADAMARD.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et d'une partie du Conseil d'administration. Elle entend et approuve le Rapport de la Commission des finances.

La Société, réunie en Assemblée générale extraordinaire, discute le Rapport présenté par la Commission de revision du Règlement (1).

(1) Le texte nouveau du Règlement, tel qu'il résulte des décisions prises dans cette séance, est inséré dans le présent Volume, p. XVI et suiv.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR L'EXTINCTION DU FROTTEMENT;

PAR M. L. LECORNU.

Dans une Adresse lue en 1905 au Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences, M. Appell appelait l'attention sur divers cas où le mouvement d'un système s'effectue de façon que le travail de frottement diminue de plus en plus, comme si le système cherchait à échapper au frottement : c'est ce qui arrive notamment dans le glissement d'un cerceau ou d'une boule, glissement qui aboutit finalement à un simple roulement, ou encore dans le redressement progressif de l'axe d'un corps de révolution lancé sur un plan horizontal.

Je voudrais signaler ici un autre exemple assez général, dans lequel la même tendance se manifeste avec une netteté particulière. Il s'agit du mouvement d'un ensemble quelconque de sphères homogènes qui ont leurs centres fixes et qui exercent à leurs divers points de contact des pressions mutuelles données.

Je suppose d'abord que le système, après avoir été lancé d'une façon arbitraire, soit entièrement abandonné à lui-même. Considérons deux de ces sphères, S_1 et S_2, tangentes en un point A. Soient x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées de leurs centres O_1 et O_2 par rapport à trois axes fixes rectangulaires. Soient p_1, q_1, r_1 et p_2, q_2, r_2 les composantes de leurs rotations. Soient enfin ξ, η, ζ les coordonnées de A. La vitesse de glissement V de S_2 par rapport à S_1 a pour composantes :

$$\begin{aligned}
u &= q_2(\zeta - z_2) - r_2(\eta - y_2) - q_1(\zeta - z_1) + r_1(\eta - y_1)\\
v &= r_2(\xi - x_2) - p_2(\zeta - z_2) - r_1(\xi - x_1) + p_1(\zeta - z_1)\\
w &= p_2(\eta - y_2) - q_2(\xi - x_2) - p_1(\eta - y_1) + q_1(\xi - x_1).
\end{aligned}$$

Si F désigne l'effort tangentiel, de grandeur constante, que la sphère S_1 éprouve de la part de S_2 en vertu du frottement, les composantes de cet effort sont $F\frac{u}{V}$, $F\frac{v}{V}$, $F\frac{w}{V}$, et le moment de F par rapport à O_1 a pour composantes :

$$L = \frac{F}{V}[w(\eta - y_1) - v(\zeta - z_1)],$$

$$M = \frac{F}{V}[u(\zeta - z_1) - w(\xi - x_1)],$$

$$N = \frac{F}{V}[v(\xi - x_1) - u(\eta - y_1)].$$

D'autre part, la relation $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$ donne, en remarquant que u ne contient pas p_1 :

$$V\frac{\partial V}{\partial p_1} = v\frac{\partial v}{\partial p_1} + w\frac{\partial w}{\partial p_1} = v(\zeta - z_1) - w(\eta - y_1) = -\frac{VL}{F}.$$

On est ainsi conduit aux trois identités :

$$L = -F\frac{\partial V}{\partial p_1}, \qquad M = -F\frac{\partial V}{\partial q_1}, \qquad N = -F\frac{\partial V}{\partial r_1}.$$

Si donc A_1 désigne le moment d'inertie de la sphère S_1 par rapport à l'un de ses diamètres, les équations du mouvement de cette sphère sont

$$A_1\frac{dp_1}{dt} = -\sum F\frac{\partial V}{\partial p_1}, \qquad A_1\frac{dq_1}{dt} = -\sum F\frac{\partial V}{\partial q_1}, \qquad A_1\frac{dr_1}{dt} = -\sum F\frac{\partial V}{\partial r_1},$$

les sommations étant étendues à toutes les sphères qui sont en contact avec S_1, ou, en d'autres termes, à toutes les vitesses V dont l'expression renferme p_1, q_1, r_1.

Ceci posé, considérons la fonction $\Phi = \Sigma FV$ calculée pour l'ensemble de tous les points de contact existant dans le système donné de sphères. On peut écrire :

$$A_1\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}, \qquad A_1\frac{dq_1}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}, \qquad A_1\frac{dr_1}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r_1},$$

d'où

$$A_1\left[\left(\frac{dp_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right]dt = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial r_1}dr_1\right).$$

Si nous faisons la somme de toutes les équations analogues, et si nous désignons par $\frac{d\Phi}{dt}$ la dérivée totale de Φ par rapport au temps, il vient

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\sum A\left[\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Cette dérivée est donc négative, et par conséquent : *la somme des vitesses de glissement multipliées par les efforts tangentiels correspondants est constamment décroissante,* ou bien encore :

Le travail du frottement, rapporté à chaque instant à l'unité de temps, tend constamment vers zéro.

La démonstration s'applique tant qu'il y a effectivement glissement en chacun des points de contact. Examinons ce qui se passe quand pour l'un de ces points, A par exemple, le glissement se transforme en roulement. A ce moment, V s'annule et l'effort tangentiel prend une valeur f inférieure à F ; sa direction est simplement assujettie à demeurer dans le plan tangent commun aux sphères S_1 et S_2. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de f. Si l'on appelle Ψ la fonction ΣFV calculée en laissant de côté A, les équations du mouvement de S_1 et S_2 sont

$$A_1 \frac{dp_1}{dt} = f[\beta(\zeta - z_1) - \gamma(\eta - y_1)] - \frac{\partial\Psi}{\partial p_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_2 \frac{dp_2}{dt} = -f[\beta(\zeta - z_2) - \gamma(\eta - y_2)] - \frac{\partial\Psi}{\partial p_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on forme l'expression

$$E = A_1\left[\left(\frac{dp_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right] + A_2\left[\left(\frac{dp_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_2}{dt}\right)^2\right],$$

le coefficient de $f\alpha$ est

$$(\eta - y_1)\frac{dr_1}{dt} - (\zeta - r_1)\frac{dq_1}{dt} - (\eta - y_2)\frac{dr_2}{dt} + (\zeta - r_2)\frac{dq_2}{dt}.$$

Ce coefficient est nul, car il représente la dérivée $\frac{du}{dt}$, de la quantité u, qui est nulle pendant le roulement. β et γ disparaissent de même, et il reste seulement

$$-E = \frac{\partial\Psi}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial r_1}\frac{dr_1}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial r_2}\frac{dr_2}{dt}.$$

D'ailleurs, pendant le roulement, la fonction Φ ne diffère pas de la fonction Ψ. On voit donc que la substitution du roulement au glissement ne modifie pas les conclusions précédentes.

Imaginons actuellement que l'une des sphères, S_1 par exemple, soit assujettie à tourner autour d'un axe fixe passant par son centre. Si a, b, c sont les cosinus directeurs de cet axe et si ω désigne la vitesse de rotation, on a $p_1 = a\omega$, $q_1 = b\omega$, $r_1 = c\omega$ et l'équation du mouvement de S_1 est

$$A_1 \frac{d\omega}{dt} = La + Mb + Nc = -F\left(a\frac{\partial V}{\partial p_1} + b\frac{\partial V}{\partial q_1} + c\frac{\partial V}{\partial r_1}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} A_1\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 &= A\left[\left(\frac{dp_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right] \\ &= -F\left(\frac{\partial V}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{dt}\right), \end{aligned}$$

de sorte que la fixité de l'axe de rotation, tout en supprimant l'indépendance de p_1, q_1, r_1, laisse subsister le théorème fondamental. Il en est évidemment de même quel que soit le nombre des sphères obligées de tourner autour d'axes fixes.

Nous allons maintenant supposer qu'au lieu d'abandonner le système à lui-même, on applique sur une ou plusieurs des sphères qui le composent des forces telles que chacune des sphères ainsi actionnées tourne, avec une vitesse constante, autour d'un axe fixe. Admettons par exemple que tel soit le cas de la sphère S_1. Il faut alors, dans les équations du mouvement, considérer p_1, q_1, r_1 comme des constantes données, et, par contre, supprimer les trois équations qui se rapportent au mouvement de S_1. Les autres équations subsistent sans modification. En combinant ces dernières, et remarquant que dp_1, dq_1, dr_1 sont nuls, on retrouve l'équation

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\sum A\left[\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

La fonction Φ est donc, ici encore, constamment décroissante.

Du moment où l'une des sphères ou plusieurs d'entre elles sont ainsi assujetties à conserver des vitesses constantes, il peut arriver que le système atteigne finalement un état permanent dans lequel persistent certains glissements. Quand cet état final se trouve réalisé, c'est-à-dire quand toutes les quantités p, q, r cessent de varier, on a, pour toutes les valeurs des indices,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0,$$

et par conséquent la fonction Φ présente alors un minimum. D'après cela :

L'état final est tel que le travail de frottement dans l'unité de temps soit le plus petit possible.

Observons encore que les sphères tournant autour d'axes fixes peuvent être remplacées par des corps de forme quelconque, homogènes ou non, pourvu que chacun de ces corps tourne autour d'un axe fixe et présente des surfaces de révolution touchant les corps voisins en des points qui demeurent fixes. Car, dans ces conditions, les équations du mouvement ne se trouvent aucunement modifiées.

Comme application très simple et facilement réalisable, considérons trois cylindres C, C_1, C_2 à axes fixes parallèles de rayons R, R_1, R_2 et supposons que les deux cylindres C_1, C_2 soient obligés, par des forces extérieures, à tourner en *sens contraire* avec des vitesses circonférentielles constantes u_1 et u_2, tandis que le troisième cylindre C est en contact avec eux. Soient F_1 et F_2 les efforts tangentiels exercés par C_1 et C_2 sur C lorsqu'il y a glissement; soient A le moment d'inertie de C, R son rayon, u sa vitesse circonférentielle. En prenant pour sens positif des rotations celui du cylindre C_1, l'équation du mouvement de C, pendant que ce cylindre glisse au contact des deux autres, est

$$\frac{A}{R^2}\frac{du}{dt} = [F_2] - [F_1].$$

Dans cette expression $[F_1]$ désigne la force F_1 prise avec le signe du glissement relatif $u_1 + u$, et $[F_2]$ la force F_2 prise avec le signe du glissement relatif $u_2 - u$. La fonction Φ est ici

$$\Phi = F_1[u_1 + u] + F_2[u_2 - u],$$

$[u_1 + u]$ et $[u_2 - u]$ désignant les valeurs absolues de $u_1 - u$ et $u_2 - u$. On en déduit

$$\frac{d\Phi}{dt} = ([F_1] - [F_2])\frac{du}{dt},$$

et, par suite,

$$\frac{A}{R^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

On vérifie ainsi que la fonction Φ est constamment décroissante.

Supposons en particulier que le cylindre C parte du repos, et admettons, ce qu'il est toujours loisible de faire, que l'on ait $F_2 < F_1$. Au début du mouvement, il y a glissement à la fois sur les deux cylindres C_1 et C_2 et l'équation du mouvement est

$$\frac{A}{R^2}\frac{du}{dt} = F_2 - F_1,$$

d'où

$$u = \frac{R^2}{A}(F_2 - F_1)t.$$

Le mouvement continue dans ces conditions jusqu'à ce que l'on ait $u_2 = u$, ce qui arrive au bout du temps $t = \frac{A u_2}{R^2(F_2 - F_1)}$. A cet instant, la fonction Φ, partie de la valeur $F_1 u_1 + F_2 u_2$, se trouve réduite à la valeur $F_1(u_1 + u_2)$. Dès lors, le glissement sur C_2 est supprimé et u conserve la valeur constante u_2, de sorte que Φ cesse de varier. La constante de u exige que l'action tangentielle F'_2 au point de contact de C avec C_2 prenne exactement la valeur F_1. Cela est possible, puisque F_1 est inférieur à F_2; mais on peut trouver étonnant que l'action tangentielle éprouve ainsi, d'une façon instantanée, la diminution finie $F_2 - F_1$. C'est ici le lieu de répéter une remarque que j'ai déjà formulée dans une autre occasion : la théorie précédente considère les cylindres comme rigoureusement indéformables et leur attribue ainsi une propriété que ne possèdent jamais les solides naturels. En réalité, au moment où le glissement de C sur C_2 fait place au roulement, l'action tangentielle s'abaisse *rapidement, mais non pas subitement,* de la valeur F_2 à la valeur F_1. Cet abaissement a pour conséquence une sorte de détente des surfaces en contact accompagnée, en vertu de l'élasticité des solides naturels, d'un déplacement de la couche extérieure de chaque cylindre par rapport aux couches sous-jacentes, de telle sorte que pendant la très courte période de transition dont il s'agit il n'est pas permis de considérer les cylindres comme des solides invariables. Et, de cette façon, toute difficulté disparaît.

EXTENSION A L'ESPACE DU THÉORÈME DES POLYGONES DE PONCELET PAR DES POLYÈDRES RÉTICULÉS;

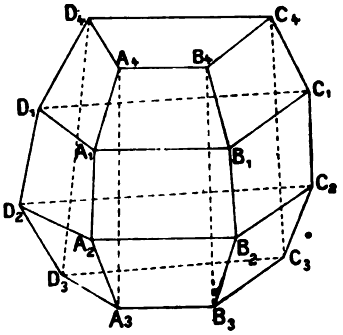
PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. J'ai appelé *polyèdres réticulés* des polyèdres de genre *un*, dont les faces sont des quadrilatères et dont les angles solides sont des angles tétraèdres (*Bulletin*, 1904 à 1906). La nature d'un polyèdre réticulé dépend de trois nombres caractéristiques p, q, r; je supposerai ici $r = 1$; la figure est faite pour le cas $p = 4$, $q = 4$, mais je raisonnerai en prenant p et q quelconques.

Avec $r = 1$, le nombre des sommets ou des faces est pq; le nombre des paramètres dont dépend le polyèdre est, régulière-

Fig. 1.



ment, $2pq$. Si le polyèdre doit être circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S', ce qui forme $2pq$ conditions (sauf réductions possibles), il semble qu'il soit en général déterminé. *Je montrerai que la recherche d'un tel polyèdre est un problème doublement indéterminé lorsque les deux quadriques satisfont à une condition invariante,* dépendant naturellement des valeurs attribuées aux nombres caractéristiques p et q.

J'avais pensé tout d'abord que la question devait être d'un ordre plus élevé que celle des polygones de Poncelet : il se trouve qu'il n'en est rien. Il convient toutefois d'observer que l'on suppose ici $r = 1$; j'ai examiné précédemment le cas $r = 2$, $p = 2$, $q = 2$, pour lequel le résultat est bien différent du résultat général relatif au cas $r = 1$: on trouvera au paragraphe IV l'indication de ce résultat. J'ajoute que la question reste entière pour les polyèdres trigonaux à angles solides hexaèdres, ou leurs corrélatifs, dont j'ai signalé l'existence dans mon premier Mémoire.

2. Les arêtes d'un polyèdre réticulé se distribuent en deux systèmes. Celles du système A_1B_1 forment des contours ponctuels $A_1B_1C_1D_1, \ldots, A_2B_2C_2D_2, \ldots$, et des contours tangentiels $(A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \ldots)$, $(B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, \ldots)$, $\ldots$, ainsi appelés parce que ce sont les plans de deux côtés consécutifs qui sont des éléments du polyèdre; *pour les polyèdres que nous aurons à considérer,* les polygones $A_1B_1C_1\ldots$, $A_2B_2C_2\ldots$, $\ldots$ sont des polygones plans, dont les plans $p_1, p_2, \ldots$ passent par une même droite XY; en conséquence, les droites A_1B_1, A_2B_2, $\ldots$ sont les arêtes d'un angle polyèdre dont le sommet, situé sur XY, sera désigné par $\overline{A}$, et l'on désignera de même par $\overline{B}$ le point de concours sur XY des droites B_1C_1, B_2C_2, $\ldots$, et ainsi de suite. Les arêtes du système A_1A_2 formeront de même des polygones plans $A_1A_2A_3\ldots$, $B_1B_2B_3\ldots$, $\ldots$, dont les plans a, b, $\ldots$ passent par une même droite ZT, et, par une conséquence nécessaire, les droites A_1A_2, B_1B_2, $\ldots$ iront concourir en un point $\overline{P_1}$ de la droite ZT, les droites A_2A_3, B_2B_3, $\ldots$ iront concourir en un point $\overline{P_2}$ de cette même droite, et ainsi de suite. Ainsi, la droite XY est liée au premier système d'arêtes (plans $p_1, p_2, \ldots$, et points $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\ldots$), tandis que la droite ZT est liée au second système d'arêtes (plans a, b, $\ldots$, et points $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$, $\ldots$).

3. Je m'appuierai sur le théorème suivant :

Considérons une quadrique S', *et deux droites* XY et ZT *conjuguées par rapport à cette quadrique* (1); *soient* X'_0 et Y'_0,

(1) On peut supposer que la quadrique S' est un ellipsoïde dont la droite ZT est un diamètre, ou même un axe; la droite XY est alors la droite à l'infini du plan diamétral correspondant.

Z'_0 et T'_0 les points où cette quadrique est rencontrée par les deux droites en question.

Soit une quadrique U *doublement tangente à la quadrique* S', *aux points Z'_0 et T'_0; soit de même une quadrique* V *doublement tangente à la quadrique* S', *aux points X'_0 et Y'_0.*

Si A_1 est un point quelconque de la quadrique S' (*fig.* 2), *menons de ce point une tangente A_1B_1 à la section u_1 de la quadrique* U *par le plan* XYA_1 *ou p_1, et une tangente A_1A_2 à la section v_a de la quadrique* V *par le plan* ZTA_1 *ou* a; L'ENVELOPPE DU PLAN DÉTERMINÉ PAR CES DEUX TANGENTES EST UNE QUADRIQUE S.

Cette quadrique S *est doublement tangente à la quadrique* U, *aux deux points X_0 et Y_0 de cette quadrique situés sur* XY; *elle est de même doublement tangente à la quadrique* V, *aux deux points Z_0 et T_0 de cette quadrique situés sur* ZT.

Les cordes de contact des quadriques sont données par le Tableau suivant :

	S'	S
U	$Z'_0T'_0$	X_0Y_0
V	$X'_0Y'_0$	Z_0T_0

La quadrique	S'	contient le contour	$X'_0Z'_0Y'_0T'_0$,
»	U	»	$X_0Z'_0Y_0T'_0$,
»	V	»	$X'_0Z_0Y'_0T_0$,
»	S	»	$X_0Z_0Y_0T_0$;

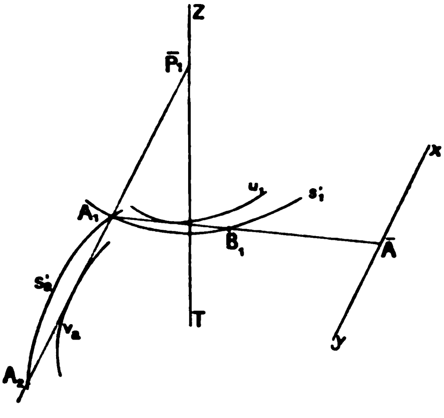
le système de ces quadriques dépend de 19 paramètres. Elles admettent toutes quatre comme droites conjuguées les deux droites XY et ZT, et ont un tétraèdre conjugué commun dont les sommets sur XY, par exemple, sont les deux points qui sont conjugués par rapport à chacun des deux couples X_0, Y_0 et X'_0, Y'_0.

La démonstration peut se faire avec un tétraèdre de référence dont XY et ZT sont simplement deux arêtes opposées; les équations des quadriques sont alors

$$(S')\qquad (a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2) + (c'Z^2 + 2k'ZT + d'T^2) = 0,$$
$$(U)\qquad (a\,X^2 + 2h\,XY + b\,Y^2) + (c'Z^2 + 2k'ZT + d'T^2) = 0,$$
$$(V)\qquad (a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2) + (c\,Z^2 + 2k\,ZT + dT^2) = 0,$$
$$(S)\qquad (a\,X^2 + 2h\,XY + b\,Y^2) + (c\,Z^2 + 2k\,ZT + dT^2) = 0.$$

On peut choisir comme tétraèdre de référence le tétraèdre conjugué commun aux quatre quadriques, de manière à avoir $h' = 0$,

Fig. 2.



$k' = 0$, $h = 0$, $k = 0$ (¹). Voici le calcul, en rapportant la figure au tétraèdre de référence $X_0 Y_0 Z_0 T_0$, ce qui donne $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$, et réduit à une forme très simple l'équation de l'enveloppe cherchée S. Soit

$$UX + VY + WZ + RT = 0.$$

(¹) Si l'on se place dans les conditions de la note précédente, on a les équations

$$(S')\qquad \left(\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2}\right) + \left(\frac{z^2}{c'^2} - 1\right) = 0,$$
$$(U)\qquad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + \left(\frac{z^2}{c'^2} - 1\right) = 0,$$
$$(V)\qquad \left(\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2}\right) + \left(\frac{z^2}{c^2} - 1\right) = 0,$$
$$(S)\qquad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + \left(\frac{z^2}{c^2} - 1\right) = 0.$$

l'équation du plan qui contient les tangentes A_1B_1, A_1A_2. L'équation du plan XYA_1B_1 étant $Z=\beta T$, on a pour la droite A_1B_1

$$Z=\beta T,\qquad UX+VY+(W\beta+R)T=0,$$

et, pour les points d'intersection de cette droite avec la quadrique U,

$$2h(W\beta+R)^2XY+(c'\beta^2+2k'\beta+d')(UX+VY)^2=0,$$

ou, en désignant par X_1, Y_1, Z_1, T_1 les coordonnées du point A_1,

$$2h(WZ_1+RT_1)^2XY+(c'Z_1^2+2k'Z_1T_1+d'T_1^2)(UX+VY)^2=0;$$

en écrivant que cette équation en $\frac{Y}{X}$ a une racine double, on a

$$[(c'Z_1^2+\ldots)UV+h(WZ_1+RT_1)^2]^2-(c'Z_1^2+\ldots)^2U^2V^2=0,$$

ce qui donne

$$2(c'Z_1^2+\ldots)UV+h(WZ_1+RT_1)^2=0.$$

La tangente A_1A_2 donne de même

$$2(a'X_1^2+\ldots)WR+k(UX_1+VY_1)^2=0.$$

En tenant compte de ce que le point A_1 est sur la quadrique S', et dans le plan (U, V, W, R), on a donc pour l'équation tangentielle de l'enveloppe de ce plan

$$\frac{UV}{h}+\frac{WR}{k}=0;$$

on en déduit l'équation ponctuelle

$$hXY+kZT=0.$$

(Si l'on veut énoncer le théorème en partant de la quadrique S pour arriver à la quadrique S', au lieu de prendre un point A_1 de cette dernière quadrique, on doit prendre un plan tangent à la quadrique S. Si ce plan rencontre XY au point $\overline{A}$ et ZT au point $\overline{P_1}$, il coupe le cône de sommet $\overline{A}$ circonscrit à la quadrique U suivant deux génératrices dont l'une est la droite $\overline{A}A_1$, et le cône de sommet $\overline{P_1}$ circonscrit à la quadrique V suivant deux génératrices dont l'une est la droite $\overline{P_1}A_1$; le lieu du point A_1, commun à ces deux droites, est la quadrique S'.)

4. Des considérations géométriques permettent de prévoir que l'enveloppe du plan des deux tangentes A_1B_1 et A_1A_2 est une quadrique dont l'équation est de la forme

$$(aX^2+2hXY+bY^2)+\theta(cZ^2+\ldots+\ldots)=0;$$

mais cela ne donne pas la valeur $\theta=1$. Les deux quadriques V et S' sont bitangentes aux points X'_0 et Y'_0, et les plans tangents en ces points se coupent suivant ZT ; le point $\overline{P_1}$ étant sur ZT, le cône de sommet $\overline{P_1}$, circonscrit à la quadrique V, est bitangent à la quadrique S', aux points X'_0 et Y'_0, et la coupe par suite suivant deux coniques s'_1 et s'_2, dont les plans p_1 et p_2 passent par XY ; dès lors, quand le point A_1 se déplace sur la conique s'_1, le plan des deux tangentes A_1B_1 et A_1A_2 reste tangent au cône de sommet $\overline{P_1}$ qui a pour base la conique u_1 suivant laquelle le plan p_1 coupe la quadrique U. Le cône de sommet $\overline{A}$, circonscrit à la quadrique U, coupe de même la quadrique S' suivant deux coniques s'_a et s'_b, dans les plans a et b passent par ZT; dès lors, quand le point A_1 se déplace sur la conique s'_a, le plan des deux tangentes A_1B_1 et A_1A_2 reste tangent au cône de sommet $\overline{A}$ qui a pour base la conique v_a suivant laquelle le plan a coupe la quadrique V. Ainsi l'enveloppe cherchée est, de deux manières différentes, enveloppe de cônes du second degré ; les cônes du premier système ont leurs sommets sur ZT et sont tangents aux deux plans ZTX_0, ZTY_0, aux points X_0 et Y_0 ; les cônes du second système ont leurs sommets sur XY et sont tangents aux deux plans XYZ_0, XYT_0, aux points Z_0 et T_0. Il faut montrer qu'une enveloppe possédant ces propriétés est une quadrique.

Pour plus de clarté considérons la question corrélative. Une surface est engendrée de deux manières différentes par des coniques ; pour l'un des systèmes, les plans des coniques passent par XY, et ces coniques passent aux points X et Y, où elles sont tangentes aux plans ZTX et ZTY ; pour l'autre système, les plans des coniques passent par ZT, etc. La surface, rapportée au tétraèdre de référence XYZT, peut être représentée par l'un ou l'autre des deux groupes d'équations

$$\begin{cases} Z = \lambda T, \\ Z^2 = XY\varphi(\lambda), \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \mu Y, \\ X^2 = ZT\psi(\mu); \end{cases}$$

on a donc, pour un point de la surface,

$$\lambda^2 T^2 = \mu Y^2 \varphi(\lambda),$$
$$\mu^2 Y^2 = \lambda T^2 \psi(\mu),$$

d'où, en multipliant,

$$\lambda\mu = \varphi(\lambda)\psi(\mu), \qquad \text{ou} \qquad \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} = \frac{\mu}{\psi(\mu)};$$

comme cela doit avoir lieu quels que soient λ et μ, on a nécessairement

$$\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} = \frac{\mu}{\psi(\mu)} = \text{const.} = k;$$

l'équation de la surface est alors

$$ZT = kXY. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

5. J'introduis maintenant les quadrilatères tels que $A_1B_1B_2A_2$. Les tangentes A_1B_1 et A_1A_2 menées des points A_1 de la quadrique S' aux deux quadriques U et V, dans les plans A_1XY et A_1ZT, percent encore la quadrique S' aux points B_1 et A_2 : du fait que les droites XY et ZT sont conjuguées par rapport à la quadrique S', les droites $\overline{A}A_2$ et $\overline{P_1}B_1$ se coupent en un point B_2 situé sur la quadrique S' : on obtient ainsi, dans un plan tangent à S, le quadrilatère plan $A_1B_1B_2A_2$ inscrit à S', et dont les côtés opposés se coupent sur XY et sur ZT. La droite A_2B_2 est d'ailleurs une des deux tangentes que l'on peut mener du point A_2 à la quadrique U dans le plan A_2XY : ces deux tangentes déterminent en effet avec la droite A_2A_1 les deux plans tangents que l'on peut mener par cette droite à la quadrique S ; la droite B_1B_2 est de même une des deux tangentes que l'on peut mener du point B_1 à la quadrique V dans le plan B_1ZT.

Relativement au fait que la droite A_2B_2, par exemple, est tangente à la quadrique U, le point B_2 étant supposé obtenu par la droite $\overline{P_1}B_1B_2$, je ferai la remarque suivante. Lorsque deux quadriques

S' et U sont doublement tangentes, la droite qui joint les points de contact étant ZT, la droite conjuguée étant XY, si l'on coupe chacune de ces deux quadriques par deux plans passant par XY, les deux cônes qui contiennent les deux sections de l'une ou l'autre quadrique ont les mêmes sommets, situés d'ailleurs sur la droite ZT; il suffit pour le voir de considérer les choses dans un plan contenant ZT. Dès lors, comme le point $\overline{P_1}$ est le sommet de l'un des deux cônes qui contiennent les deux coniques s'_1 et s'_2, ce point est aussi le sommet de l'un des deux cônes qui contiennent les deux coniques u_1 et u_2 : le plan $A_1B_1A_2B_2$ est tangent à ce dernier cône, puisque la droite A_1B_1 est tangente à la conique u_1, et par suite la droite A_2B_2 est également tangente à la conique u_2.

6. Il reste à appliquer le théorème des polygones de Poncelet. Considérons les sections u et s' des quadriques U et S' par un plan p passant par XY; l'équation de ce plan étant $Z = \beta T$, les deux coniques en question sont sur les deux cônes

$$(u) \qquad aX^2 + 2hXY + bY^2 + (c'\beta^2 + 2k'\beta + d')T^2 = 0,$$

$$(s') \qquad a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 + (c'\beta^2 + \ldots\ldots\ldots)T^2 = 0.$$

Les racines du discriminant de la forme $\lambda u + s'$ sont les racines des deux équations

$$\lambda + 1 = 0, \qquad \begin{vmatrix} \lambda a + a' & \lambda h + h' \\ \lambda h + h' & \lambda b + b' \end{vmatrix} = 0,$$

de sorte que ces racines sont indépendantes de β. Dès lors, sous une condition unique imposée aux deux quadriques U et S', il existera des polygones de p côtés circonscrits à la conique u et inscrits à la conique s', *quel que soit le plan p*. Ce fait résulte encore de la remarque faite à la fin du n° 5 : si *un* plan p passant par XY donne deux coniques u et s' satisfaisant à la condition en question, il en sera de même pour tout autre plan p passant par XY, puisque le sommet d'un cône contenant les deux coniques s' est aussi le sommet d'un cône contenant les deux coniques u. De même, sous une condition unique imposée aux deux quadriques V et S', il existera des polygones de q côtés circonscrits à la conique v et inscrits à la conique s', les coniques v et s' étant les sections des quadriques V et S' par un plan a passant par ZT.

Les quadriques U et V étant liées à la quadrique S′ de la manière indiquée, soit A_1 un point quelconque de la quadrique S′. Considérons, dans le plan XYA_1, le polygone de p côtés $A_1B_1C_1\ldots$ inscrit à la quadrique S′, circonscrit à la quadrique U, et, dans le plan ZTA_1, le polygone de q côtés $A_1A_2A_3\ldots$ inscrit à la quadrique S′, circonscrit à la quadrique V. On a immédiatement le quadrilatère $A_1B_1B_2A_2$, on en déduit les quadrilatères $B_1C_1C_2B_2$, $C_1D_1D_2C_2$, ..., les quadrilatères $A_2B_2B_3A_3$, $A_3B_3B_4A_4$, ..., et, de proche en proche, on obtient un polyèdre réticulé aux caractéristiques p et q, inscrit à la quadrique S′ et circonscrit à la quadrique S. Le point A_1 variant sur la quadrique S′, on obtient une double infinité de tels polyèdres.

Si, au lieu de partir de la quadrique S′ pour arriver à la quadrique S, on faisait le contraire, la considération des polygones $A_1B_1C_1\ldots$, $A_1A_2A_3\ldots$ serait remplacée par celle des angles polyèdres dont il a été question. Si l'on envisage, par exemple, les deux cônes de sommet $\overline{A}$ circonscrits aux quadriques U et S, il doit exister des angles polyèdres, ayant des arêtes en nombre q, inscrits au premier cône et circonscrits au second. Les relations entre les quatre quadriques, dans cet ordre d'idées, sont indiquées d'une manière très concise par le Tableau suivant :

	S′	S
U	p	q
V	q	p

7. Le système des deux quadriques S et S′ dépend de 17 paramètres $(19-2=17)$. Si l'on se donne, par exemple, la quadrique S′, le système des deux droites conjuguées XY et ZT dépend de 4 paramètres, et chacune des deux quadriques U et V dépend encore de deux paramètres (points X_0 et Y_0, Z_0 et T_0) ; la quadrique S dépend donc de 8 paramètres. Ainsi le système des deux quadriques S et S′ vérifie une condition et une seule.

Le fait énoncé se trouve ainsi établi : *Étant données deux* *quadriques* S *et* S′, *il existe, sous une condition invariante de fermeture, une double infinité de polyèdres réticulés, aux caractéristiques* p, q, 1, *qui sont circonscrits à la quadrique* S *et inscrits à la quadrique* S′.

Ces polyèdres sont liés à deux droites fondamentales XY *et* ZT, *lesquelles sont deux arêtes opposées du tétraèdre conjugué commun aux deux quadriques.*

Les arêtes du système $A_1 B_1$ *sont tangentes à une quadrique* U, *celles du système* $A_1 A_2$ *sont tangentes à une quadrique* V.

8. Relativement à la condition de fermeture, observons que les racines du discriminant de la forme $\lambda S + S'$ sont les racines des deux équations

$$\begin{vmatrix} \lambda a + a' & \lambda h + h' \\ \lambda h + h' & \lambda b + b' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \lambda c + c' & \lambda k + k' \\ \lambda k + k' & \lambda d + d' \end{vmatrix} = 0;$$

nous les appellerons λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. D'autre part, on a vu au n° 6 que les racines du discriminant de la forme $\lambda u + s'$ sont les racines des deux équations

$$\lambda + 1 = 0, \qquad \begin{vmatrix} \lambda a + a' & \lambda h + h' \\ \lambda h + h' & \lambda b + b' \end{vmatrix} = 0,$$

et les deux coniques u et s' doivent admettre des polygones de p côtés circonscrits à u et inscrits à s'; de même, les racines du discriminant de la forme $\lambda v + s'$ sont les racines des deux équations

$$\lambda + 1 = 0, \qquad \begin{vmatrix} \lambda c + c' & \lambda k + k' \\ \lambda k + k' & \lambda d + d' \end{vmatrix} = 0,$$

et les deux coniques v et s' doivent admettre des polygones de q côtés circonscrits à v et inscrits à s'. Des deux relations ainsi obtenues entre λ_1, λ_2, -1 d'une part, et λ_3, λ_4, -1 d'autre part, on déduira la relation homogène qui doit exister entre les quantités λ_1, λ_2, λ_3 λ_4, pour que les deux quadriques S et S′ admettent des polyèdres aux caractéristiques p, q, 1, circonscrits à S et inscrits à S′.

9. Il serait certainement possible d'introduire dans l'étude de la question deux arguments elliptiques u et v, qui seraient les paramètres d'un point de la surface S', le paramètre v restant constant le long d'une section de la surface par un plan contenant XY, le paramètre u restant constant le long d'une section de la surface par un plan contenant ZT, les sommets d'un polyèdre de l'espèce indiquée correspondant aux valeurs suivantes des deux paramètres

$$\begin{array}{llll}
(u, v), & (u+a, v), & (u+2a, v), & \dots, \\
(u, v+b), & (u+a, v+b), & (u+2a, v+b), & \dots, \\
\dots\dots, & \dots\dots, & \dots\dots, & \dots;
\end{array}$$

a et b désignent respectivement la $p^{\text{ième}}$ et la $q^{\text{ième}}$ partie d'une période. On aurait des formules de la forme

$$X = Y f(u), \qquad X = T g(v), \qquad Y h(u) = T k(v),$$

ou

$$\frac{X}{f(u)k(v)} = \frac{Y}{k(v)} = \frac{Z}{g(v)h(u)} = \frac{T}{h(u)}.$$

II.

10. Examinons plus particulièrement le cas $p = 3, q = 3$; nous remplacerons ici la notation S' par la notation S''.

En Géométrie plane, un polygone de Poncelet dépend de 10 paramètres $(5 + 4 + 1 = 10)$; tout pentagone est un polygone de Poncelet; un hexagone n'est un polygone de Poncelet que s'il a une droite de Pascal et un point de Brianchon; etc. Dans l'espace, les polyèdres réticulés dont il vient d'être question dépendent de 19 paramètres $(9 + 8 + 2 = 19)$. Tout polyèdre réticulé correspondant aux valeurs simples $p = 3$, $q = 3$ est un polyèdre de l'espèce indiquée : il a en effet 9 sommets, 9 faces, et on peut lui circonscrire une quadrique S'', lui inscrire une quadrique S; un tel polyèdre dépend, comme je l'ai montré, de 19 paramètres (au lieu de 18, qui serait le nombre régulier); j'ai fait observer aussi que, dans un polyèdre de cette nature, les plans des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ passent par une même droite XY, etc.

11. Les conditions de fermeture relatives aux coniques u et s'',

v et s'' du n° 8 (je mets s'' au lieu de s') sont ici

$$1 \pm \sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} = 0, \qquad 1 \pm \sqrt{\lambda_3} \pm \sqrt{\lambda_4} = 0;$$

la condition de fermeture relative aux deux quadriques S et S″ est donc

$$(1) \qquad \sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \sqrt{\lambda_3} \pm \sqrt{\lambda_4} = 0,$$

les λ étant les racines du discriminant de la forme $\lambda S + S''$; c'est la condition que j'avais obtenue par un calcul très pénible dans mon Mémoire de 1904.

En Géométrie plane, pour des triangles ABC qui doivent être circonscrits à une conique S et inscrits à une conique S″, on a la condition

$$\sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \sqrt{\lambda_3} = 0,$$

les λ étant les racines du discriminant de la forme $\lambda S + S''$; les triangles ABC sont alors conjugués par rapport à une conique S′ (intermédiaire entre S et S″), et, si l'on désigne par μ_1, μ_2, μ_3 les racines du discriminant de la forme $\mu S + S'$, on a

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0;$$

il n'y a donc aucune différence à établir entre les sommets X, Y, Z du triangle conjugué commun aux deux coniques. On sait qu'il n'en est pas de même lorsqu'il s'agit de quadrilatères, la condition de fermeture étant alors

$$-\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0.$$

Il en est de même dans l'espace, et, d'après ce que l'on a vu au paragraphe I, on a ce théorème :

Lorsque deux quadriques S *et* S″ *satisfont à la condition* (1), *elles admettent* trois *séries de polyèdres réticulés, aux caractéristiques* $p = 3$, $q = 3$, *circonscrits à* S *et inscrits à* S″, *ces trois séries de polyèdres étant liées aux trois couples d'arêtes opposées* (TX, YZ), (TY, ZX), (TZ, XY) *du tétraèdre conjugué commun.*

12. Les sommets d'un polyèdre de la nature indiquée étant

$$A_1 B_1 C_1,$$
$$A_2 B_2 C_2,$$
$$A_3 B_3 C_3,$$

nous dirons que ce polyèdre est conjugué par rapport à une quadrique S' si le plan polaire d'un sommet quelconque (A_1 par exemple), relativement à la quadrique de conjugaison, est le plan de la face opposée ($B_2 C_2 C_3 B_3$).

Les considérations suivantes éclaireront la nature de cette conjugaison. Soient 9 points, d'abord quelconques, auxquels nous donnerons simplement un double classement d'après les lignes et les colonnes du Tableau ci-dessus; soit en outre une quadrique S'. Si l'on demande que deux quelconques des 9 points, n'appartenant ni à une même ligne ni à une même colonne du Tableau, soient conjugués par rapport à la quadrique, le nombre des conditions imposées est égal à $\frac{9 \times 4}{2}$ ou 18; mais il y a là seulement 17 conditions distinctes, et le nombre des paramètres dont dépend la figure est $27 + 9 - 17$, ou 19. Les quatre points B_1, C_1, B_2, C_2, par exemple, sont dans le plan polaire du point A_1, et l'on a un polyèdre réticulé, aux caractéristiques (3, 3), conjugué par rapport à la quadrique S'. Comme un polyèdre de cette nature dépend par lui-même de 19 paramètres, si on le suppose donné *a priori,* il admet une quadrique conjuguée S'. *La conjugaison en question équivaut dès lors à* 9 *conditions distinctes.*

Que les 17 conditions relatives à un système de 9 points quelconques soient remplacées par un système de 9 conditions seulement lorsque ces points sont supposés être les sommets d'un polyèdre réticulé, c'est ce qu'il est facile de comprendre : du moment que les points B_1, C_1, B_2, C_2 sont dans un même plan, une condition de conjugaison disparaît, et il disparaît ainsi 8 conditions; l'existence des 9 plans ne forme en effet que 8 conditions distinctes (c'est ainsi que le polyèdre dépend de 19 paramètres au lieu de 18).

13. Cela étant, si l'on se donne deux quadriques S' et S'', la recherche d'un polyèdre de l'espèce indiquée qui soit conjugué à S′ et inscrit à S″ est un problème en apparence indéterminé, puisque l'on dispose de 19 paramètres pour satisfaire à 18 conditions; en réalité, c'est un problème généralement impossible, et qui ne devient possible qu'en devenant doublement indéterminé. Supposons en effet que les deux quadriques S′ et S″ admettent un tel polyèdre, et soit S la quadrique qui est la polaire réciproque de S″ par rapport à S′ : le polyèdre considéré est circonscrit à cette quadrique S. Les deux quadriques S et S″ admettent ainsi des polyèdres réticulés, aux caractéristiques (3, 3), circonscrits à S et inscrits à S″; les racines de l'équation en λ pour ces deux quadriques vérifient donc la condition (1). Or les racines de l'équation en λ pour S′ et S″ sont les racines carrées des racines de l'équation en λ pour S et S″, prises avec des signes convenables; on le voit en rapportant les trois quadriques à leur tétraèdre conjugué commun; on a donc pour les quadriques S′ et S″ une condition de la forme

$$\varepsilon_1\mu_1+\varepsilon_2\mu_2+\varepsilon_3\mu_3+\mu_4=0 \qquad (\varepsilon=\pm 1).$$

Comme deux arêtes du tétraèdre conjugué commun, XY et ZT par exemple, jouent un rôle particulier pour les polyèdres considérés (circonscrits à S et inscrits à S″), la condition est certainement de la forme

$$(2) \qquad \mu_1+\mu_2-\mu_3-\mu_4=0.$$

14. *Réciproquement, si deux quadriques* S *et* S″ *satisfont à la condition* (1), *de sorte qu'il existe trois séries de polyèdres réticulés, aux caractéristiques* 3, 3, *circonscrits à* S *et inscrits à* S″, *les polyèdres de chaque série sont conjugués par rapport à une quadrique* S′ : *les trois quadriques dont il s'agit,* S'_1, S'_2, S'_3, *sont trois des huit quadriques par rapport auxquelles les quadriques* S *et* S″ *sont polaires, réciproques, à savoir celles qui vérifient une condition de la forme* (2).

Les équations des deux quadriques étant

$$(S) \qquad x^2+y^2+z^2+t^2=0,$$

$$(S'') \qquad a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+d^2t^2=0,$$

on peut toujours supposer que la condition (1) est

$$(1') \qquad a+b+c+d=0;$$

les équations des quadriques S′ sont alors

$$(S'_1) \qquad -ax^2+by^2+cz^2-dt^2=0,$$

$$(S'_2) \qquad ax^2-by^2+cz^2-dt^2=0,$$

$$(S'_3) \qquad ax^2+by^2-cz^2-dt^2=0,$$

et l'on a, par exemple, pour la dernière

$$(2') \qquad a+b-(-c)-(-d)=0;$$

j'ai vérifié ce résultat en supposant $a=b$.

Le polyèdre que j'ai considéré dans mon premier Mémoire est conjugué par rapport à la quadrique

$$(S') \quad d'(\delta-d)\left(\frac{a}{a'}x^2+\frac{b}{b'}y^2+\frac{c}{c'}z^2+\frac{d}{d'}t^2\right)+(ax+by+cz+dt)^2=0.$$

III.

15. Pour $p=4$, $q=4$, la condition de fermeture relative aux coniques u et s' du n° 8 est que l'une des racines de l'équation en λ soit égale à la somme des deux autres; on peut avoir

$$\lambda_1+\lambda_2=1, \qquad \text{ou bien} \qquad \lambda_1-\lambda_2=\pm 1,$$

et, selon l'hypothèse adoptée, les diagonales du quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$, circonscrit à u et inscrit à s', passent par tel ou tel des trois sommets du triangle autopolaire commun aux deux coniques : avec l'hypothèse $\lambda_1+\lambda_2=1$, ce sommet est le point où la droite ZT perce le plan des deux coniques, tandis que, avec l'hypothèse $\lambda_1-\lambda_2=\pm 1$, ce sommet est l'un des deux points de la droite XY qui sont conjugués communs pour les deux quadriques U et S′; il y a là deux choses bien distinctes. Relativement aux deux coniques v et s', on peut de même avoir

$$\lambda_3+\lambda_4=1, \qquad \text{ou bien} \qquad \lambda_3-\lambda_4=\pm 1;$$

avec la première hypothèse, les diagonales du quadrilatère

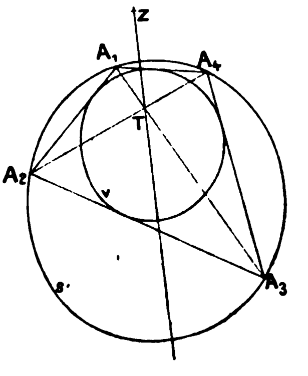
$A_1A_2A_3A_4$ passent au point où la droite XY perce le plan des deux coniques, tandis que, avec la seconde hypothèse, elles passent par l'un des deux points de la droite ZT qui sont conjugués communs pour les deux quadriques V et S'.

D'après les considérations qui sont exposées dans mon Mémoire de 1905, on doit avoir, par exemple,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_4 - \lambda_3 = 1;$$

les diagonales du quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ passent au point où la droite ZT rencontre le plan de ce quadrilatère, tandis que les diagonales du quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ passent par l'un des deux points de la droite ZT qui sont conjugués communs pour les deux quadriques S et S'. Par exemple, si S et S' sont deux ellipsoïdes dont ZT est un axe, le premier étant intérieur au second, les quadrilatères $A_1B_1C_1D_1$ sont des quadrilatères convexes dont les dia-

Fig. 3.



gonales se coupent sur l'axe en question, et les quadrilatères $A_1A_2A_3A_4$ sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous : les diagonales se coupent au point T parce que, dans la relation $\lambda_4 = \lambda_3 + 1$, c'est λ_4 qui joue un rôle à part.

La condition à laquelle satisfont les deux quadriques S et S' est alors

$$(3) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0,$$

et elle peut prendre les trois formes

$$\lambda_4 - \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3, \qquad \lambda_4 - \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_1, \qquad \lambda_4 - \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Lorsque cette condition est remplie, les deux quadriques S *et* S′ *admettent donc trois séries de polyèdres réticulés, aux caractéristiques* 4, 4, *circonscrits à* S *et inscrits à* S′. *Ces trois séries de polyèdres sont liées aux trois couples d'arêtes opposées du tétraèdre conjugué commun* XYZT : *les arêtes* TX, TY, TZ *jouent successivement le rôle que jouait ci-dessus l'arête* TZ.

IV.

16. Ce paragraphe est complètement indépendant de ce qui précède.

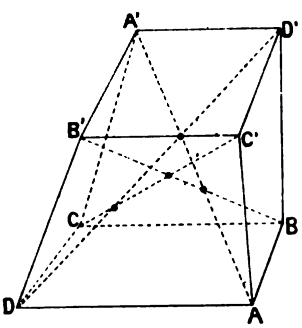
Le polyèdre réticulé qui correspond aux valeurs

$$p = 2, \qquad q = 2, \qquad r = 2$$

a 8 faces quadrangulaires, 8 angles solides tétraèdres; dans la figure suivante les faces sont ABD′C′, BCA′D′, ..., et ABB′A′, BCC′B′, ...

Ce polyèdre dépend exceptionnellement de paramètres en nombre $2pqr + 1$ ou 17. Comme les 8 sommets forment en outre un système de points de Lamé, en même temps que les 8 plans des

Fig. 4.



faces forment un système de plans de Lamé, le problème de construire un tel polyèdre, circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S′, est un problème triplement indéterminé en apparence : j'ai montré que ce problème est en réalité un problème généralement impossible, et qui ne devient possible qu'en devenant quadruplement indéterminé ; la condition de fermeture est

$$(4) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4.$$

Dans un Mémoire inséré au Volume du *Bulletin* pour 1906 (*Sur une configuration remarquable dans l'espace*), j'ai considéré une figure, comprenant 8 points et 8 plans, que j'ai appelée un *octuple gauche complet :* les 8 points et les 8 plans de cette figure sont, de trois manières différentes, les sommets et les plans des faces d'un polyèdre réticulé aux caractéristiques 2, 2, 2 (*loc. cit., fig.* 3). On peut dire, et c'est sous cette forme que j'ai démontré le théorème :

Le problème de construire un octuple gauche complet, circonscrit à une quadrique S *et inscrit à une quadrique* S′, *est un problème triplement indéterminé en apparence : ce problème est en réalité un problème généralement impossible, et qui ne devient possible qu'en devenant quadruplement indéterminé.*

17. La condition (4) ne doit pas être considérée comme une dépendance des conditions planes

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 - \lambda_4 = 1,$$

ou

$$\lambda_1 - \lambda_3 = 1, \qquad \lambda_4 - \lambda_2 = 1,$$

ou

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 1, \qquad \lambda_4 - \lambda_1 = 1,$$

du n° **15**. Toutefois, parmi les polyèdres en nombre quadruplement infini que l'on a à considérer ici, se trouvent des polyèdres en nombre doublement infini pour lesquels les deux quadrilatères ABCD et A′B′C′D′, généralement gauches, sont des quadrilatères plans dont les plans passent par XY, en même temps que les deux quadrilatères AA′CC′ et BB′DD′, généralement gauches, sont des quadrilatères plans dont les plans passent par ZT ; pour ces polyèdres particuliers, les considérations du n° **15** sont valables : les diagonales AC et BD, A′C′ et B′D′ se coupent sur ZT, les diagonales AC et A′C′, BD et B′D′ se coupent sur XY, et l'on a deux relations

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 + \lambda_4 = 1,$$

qui donnent lieu à la relation (4). [On doit ici considérer le polyèdre de la figure 4 comme une dégénérescence du polyèdre réticulé aux caractéristiques (4, 4, 1), les quadrilatères A″B″C″D″ et A‴B‴C‴D‴ étant confondus avec les quadrilatères CDAB et C′D′A′B′.]

SUR DIVERSES PROPRIÉTÉS DES NOMBRES TRANSCENDANTS DE LIOUVILLE;

PAR M. EDMOND MAILLET.

I. — INTRODUCTION.

Dans cette Note, je m'occupe d'ensembles formés de nombres de Liouville *correspondants,* avec ou sans adjonction de nombres rationnels. J'indique des catégories étendues C de nombres de Liouville pour lesquelles sont vraies ces propriétés :

1° Est impossible l'identité $0 = \sum_{0}^{\nu} a_m e^{b_m}$, où les a_m, $\neq 0$, et les b_m, distincts, sont des nombres de Liouville d'une même catégorie ou ensemble C ou des nombres rationnels. Exemple : $\sin b_m$ est transcendant.

2° Les c_m étant des nombres rationnels > 1, et les d_m des nombres de Liouville réels > 1 de C, tout polynome à coefficients entiers positifs formé avec d_m, $c_m^{d_m}$, $d_m^{d_m}$, $d_m^{c_m}$ est un nombre transcendant.

Ces propriétés entraînent comme cas particuliers ou corollaires divers théorèmes, dont certains ont été indiqués par moi antérieurement [1].

[1] *Bull. Soc. math.*, 1906, p. 226, et *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions*. Paris, Gauthier-Villars, 1906, p. 34.

II. — Ensembles de nombres de Liouville correspondants.

Soient I, I′, I″, ... des irrationnelles réelles ou imaginaires (¹), limites des suites de fractions rationnelles

$$(1)\quad \begin{cases} I_1 = P_1 Q_1^{-1}, & \ldots, & I_n = P_n Q_n^{-1}, & \ldots, & \text{pour } I, \\ I'_1 = P'_1 Q'^{-1}_1, & \ldots, & I'_n = P'_n Q'^{-1}_n, & \ldots, & \text{pour } I', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \end{cases}$$

avec $Q_{n+1} \geqq Q_n$, $Q'_{n+1} \geqq Q'_n$, ..., $\lim Q_n = \lim Q'_n = \ldots = \infty$ pour $n = \infty$, tous les dénominateurs Q_n, Q'_n, ... étant supposés réels. Je pose

$$(2)\quad \varepsilon_n = |I - I_n| = Q_n^{-\varphi_n}, \qquad \varepsilon'_n = |I' - I'_n| = Q'^{-\varphi'_n}_n, \qquad \ldots.$$

J'admets encore que l'on puisse trouver une infinité de valeurs n_1 de n telles que l'on ait

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi_{n_1} > \alpha, & Q'_{n_1} = Q_{n_1}^{\sigma'_{n_1}}, & Q''_{n_1} = Q_{n_1}^{\sigma''_{n_1}}, & \ldots, \\ & \varphi'_{n_1} = \tau'_{n_1}\varphi_{n_1}, & \varphi''_{n_1} = \tau''_{n_1}\varphi_{n_1}, & \ldots, \end{cases}$$

où α est aussi grand que l'on veut, σ'_{n_1}, σ''_{n_1}, ... sont positifs et ont une limite inférieure et une limite supérieures communes pour $\lim n_1 = \infty$, τ'_{n_1}, τ''_{n_1}, ... sont positifs et ont une limite inférieure commune pour $\lim n_1 = \infty$, mais non forcément une limite supérieure. On sait qu'alors I, I′, I″, ... sont des nombres transcendants de Liouville. Je dirai que ces nombres, satisfaisant aux conditions (1), (2) et (3), sont *des nombres de Liouville correspondants*. Une fois qu'on a formé au moins deux nombres de Liouville correspondants I et I′, ce qui précise suffisamment les valeurs n_1 de n, on peut évidemment considérer un ensemble S de nombres de Liouville correspondants; on voit que S dépend de I, I′ et des valeurs n_1. I et — I sont alors correspondants.

I et I′ étant choisis, pour déterminer un pareil ensemble S, il n'est pas nécessaire de considérer toutes les valeurs n_1 de n

(¹) Ceci veut dire que I, par exemple, n'est pas de la forme $a + bi$, où a et b sont, à la fois, rationnels.

pour lesquelles (2) et (3) ont lieu : il suffit d'en considérer une infinité. Suivant la façon dont on choisira ces valeurs, on pourra, à l'occasion, avoir des ensembles S différents. De même on pourra avoir d'autres ensembles S avec I et un nombre transcendant de Liouville J analogue à I', mais différent de I'.

D'après les définitions précédentes, on voit que I et I' se correspondent, I et J se correspondent, mais I' et J peuvent ne pas se correspondre. Finalement, pour préciser complètement la notion de correspondance, il faut se donner I, I' et les n_1, ce qui détermine l'ensemble S. Aussi devra-t-on dire, quand on pourra craindre une ambiguïté, que I, I', I'', ... sont *correspondants dans l'ensemble* S.

On pourra encore considérer des correspondances plus particulières en introduisant de nouvelles conditions à satisfaire par I, I', ..., spécifier par exemple, comme je l'ai indiqué ailleurs (¹), que φ_{n_1} est plus grand qu'une certaine fonction de n_1, croissant indéfiniment avec n_1, mais plus ou moins vite.

On pourra aussi spécifier que I, I', I'', ... sont réels, et que

$$I - I_{n_1}, \quad I' - I'_{n_1}, \quad \ldots$$

sont tous de même signe pour chaque valeur n_1 de n, sans que l'on ait forcément $I - I_{n_1}$ et $I - I_{n'_1}$ de même signe quand $n'_1 \neq n_1$. Avec cette restriction, I et $-$I ne se correspondent plus. Soit S' l'ensemble des nombres de Liouville correspondants en ce second sens, pour des valeurs données de I, I' et des n_1. Ces valeurs définissent un ensemble S qui contient S'.

Je considérerai encore, en supposant I et I' positifs, les nombres de S' qui sont positifs : ils forment un ensemble S''. Enfin, on pourra considérer les nombres de S'' pour lesquels les τ'_{n_1}, τ''_{n_1}, ... sont aussi limités supérieurement pour $\lim n_1 = \infty$: ils forment un ensemble S'''.

Soient enfin S_1, S'_1, S''_1, S'''_1 les ensembles formés en adjoignant respectivement à S, S', S'', S''' les nombres rationnels ou rationnels positifs. Je vais établir les propriétés suivantes :

(¹) *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions.* Paris, Gauthier-Villars, 1906, p. 34.

Théorème I. — *L'ensemble des nombres de* S_1 *forme un groupe par rapport aux quatre opérations fondamentales de l'arithmétique (addition, soustraction, multiplication, division). Toute fonction rationnelle à coefficients rationnels réels ou imaginaires des nombres de* S_1 *appartient à* S_1.

Théorème II. — *L'ensemble des nombres de* S''_1 *(ou de* S'''_1*) forme un groupe par rapport à l'addition et la multiplication. Tout polynome à coefficients positifs formé avec les nombres de* S''_1 *(ou de* S'''_1*) appartient à* S''_1 *(ou à* S'''_1*)* (¹).

J'établis le théorème I. Soient

$$x = \mathrm{I} = x_n + h_n, \qquad y = y_n + k_n, \qquad \ldots,$$

où $x_n = \mathrm{I}_n$, ..., des nombres de S_1, n étant un des nombres n_1, $f(x, y, \ldots)$ la fraction rationnelle considérée dans l'énoncé; on a

$$\mathrm{J} = f(x, y, \ldots) = f(x_n, y_n, \ldots) + h_n f'_{x_n} + k_n f'_{y_n} + \ldots + h_n^2 f''_{x_n^2} + \ldots,$$

d'après la formule de Taylor.

$$f(x_n, y_n, \ldots), \quad f'_{x_n}, \quad f'_{y_n}, \quad \ldots, \quad f''_{x_n^2}, \quad \ldots,$$

quand on y substitue à x_n, y_n, ... leurs valeurs $P_n Q_n^{-1}$, $P'_n Q_n'^{-1}$, ..., et qu'on chasse les dénominateurs, sont des nombres rationnels $p_n q_n^{-1}$; p_n, q_n sont des polynomes à coefficients entiers formés avec $P_n = \mathrm{I}_n Q_n$, $P'_n = \mathrm{I}'_n Q'_n$, ..., Q_n, Q'_n, ..., c'est-à-dire que, d'après (2) et (3), le module de $p_n q_n^{-1}$ est compris entre Q_n^{ω} et $Q_n^{-\omega}$, où ω est fixe et positif, quel que soit n, pour la fonction f et les nombres $x, y, \ldots$ considérés, puisque $\sigma'_n, \sigma''_n, \ldots$ sont limités supérieurement et inférieurement. Si $\mathrm{J}_n = f(x_n, y_n, \ldots)$, le module de la différence $\mathrm{J} - \mathrm{J}_n$ est alors de la forme $Q_n^{-\omega_n \varphi_n}$, où ω_n est positif et limité inférieurement, c'est-à-dire que le nombre $f(x, y, \ldots)$ appartient à S_1. Bien entendu, à l'occasion, ce nombre pourra être nul.

Quant au théorème II, si l'on prend pour $\mathrm{J} = f(x, y, \ldots)$ un polynome à coefficients positifs, x, y, ... étant positifs, la

---

(¹) Il résulte en particulier de là que l'on définit au moins un ensemble S_1 et S''_1 à l'aide du nombre I seul, satisfaisant à (1), (2) et (3). Pour définir complètement cet ensemble, il restera à choisir la suite des valeurs n_1.

démonstration est presque identique. $J_n = f(x_n, y_n, \ldots)$, f'_{x_n}, f'_{y_n}, ... sont positifs et $\neq 0$, h_n, k_n, ... sont de même signe, d'après les propriétés de S'', et

$$J - J_n = (h_n f'_{x_n} + k_n f'_{y_n} + \ldots)(1 + \zeta_n),$$

où $\lim \zeta_n = 0$ pour $n = \infty$. $J - J_n$ étant de même signe que h_n, et son module de la forme $Q_n^{-\omega_n \varphi_n}$, J appartient à S'_1.

Une propriété correspondante a évidemment lieu quand $x, y, \ldots$ appartiennent à S''_1. C. Q. F. D

III.

On vient de voir que toute fraction rationnelle à coefficients rationnels formée avec les nombres de S_1 appartient à S_1. Ceci indique la portée de la propriété suivante, que je vais établir :

Théorème III. — *Soient* $J^{(0)}, J^{(1)}, \ldots, J^{(\nu)}, I^{(0)}, I^{(1)}, \ldots, I^{(\nu)}$ *des nombres de* S_1 *dont les* $\nu + 1$ *premiers sont* $\neq 0$ *et les* $\nu + 1$ *derniers distincts : il n'existe aucune identité de la forme*

$$\sum_0^\nu J^{(k)} e^{I^{(k)}} = 0, \tag{4}$$

lorsque φ_n *croît suffisamment vite avec* n, *pour les valeurs* n_1 *de* n *qui servent à définir* S_1. *Pour préciser*, (4) *est impossible quand*

$$\varphi_n \geq Q_n^{\beta_n}, \tag{17}$$

pour une infinité des valeurs n_1 *de* n *assez grandes* ($\lim \beta_{n_1} = \infty$).

En particulier, (4) *est impossible lorsque les* $I^{(k)}, J^{(k)}$ *sont des nombres de Liouville correspondants de la forme* $M + M_1 i$, M *et* M_1 *étant des fractions rationnelles à coefficients entiers réels formées avec un nombre de Liouville réel dont le développement en fraction continue satisfait aux conditions du corollaire* I *du théorème* I *de notre Note du Bull. Soc. math.*, t. XXXIV, 1906, p. 219 (1).

(1) Il est intéressant de rapprocher ce théorème d'une propriété connue ana-

J'admets qu'il y ait une identité de la forme (4). En en divisant les deux membres par $J^{(0)}e^{I^{(0)}}$, on obtient

$$1+\sum_{1}^{\nu} J^{(k)} J^{(0)-1} e^{I^{(k)}-I^{(0)}} = 0.$$

D'après le théorème I, les $J^{(k)}J^{(0)-1}$ sont des nombres de $S_1 \neq 0$; les $I^{(k)} - I^{(0)}$ sont des nombres de S_1 distincts et $\neq 0$. Finalement on est ramené à une identité analogue à (4), mais où le premier terme est l'unité et les exposants sont $\neq 0$. Il suffit donc d'examiner ce dernier cas.

Soit l'identité

$$(5) \qquad 1+\sum_{1}^{\nu} J^{(k)} e^{I^{(k)}} = 0.$$

La démonstration de son impossibilité n'est qu'une modification convenable de la démonstration classique de la transcendance de e (Jordan, *Cours d'Analyse lithographié de l'École Polytechnique*). On part de l'identité

$$e^{z_1}\int_0^{z_1} \varpi e^{-z}\,dz = -F(z_1) + e^{z_1}F(0),$$

où z_1 est réel ou imaginaire, $\varpi = \varpi(z)$ est un polynome et $F(z) = \varpi + \varpi' + \varpi'' + \ldots$. On prend ici pour ϖ le polynome

$$\varpi(z) = \varpi(z, I^{(1)}, \ldots, I^{(\nu)}) = \frac{z^{p-1}(z-I^{(1)})^p \ldots (z-I^{(\nu)})^p}{\underline{|p-1}},$$

avec $\underline{|p-1} = 1.2\ldots(p-1)$, p étant un nombre premier très grand dont la valeur sera fixée tout à l'heure.

On remarque de suite que les dérivées $m^{\text{ièmes}}$ de ϖ par rapport aux $I^{(k)}$ sont formées d'un seul ou d'une partie des termes (¹) de $\varpi^{(m)}(z)$ affectés du signe + ou —.

---

logue due à M. Lindemann, et relative non plus aux nombres de Liouville, mais aux nombres algébriques, et d'une Communication de M. Rémoundos (*Comptes rendus*, 16 janvier 1905, p. 135).

(¹) Chaque terme étant de la forme $z^{\beta_0}(z-I^{(1)})^{\beta_1}\ldots(z-I^{(\nu)})^{\beta_\nu}$.

On a, quel que soit ϖ, l'identité

$$e^{\mathfrak{Z}}\int_0^{\mathfrak{Z}} \varpi e^{-z}\,dz = -\mathrm{F}(\mathfrak{Z}) + e^{\mathfrak{Z}}\,\mathrm{F}(0);$$

s'il existe une relation (5), on en conclut alors

$$(6)\qquad \sum_1^{\nu} \mathrm{J}^{(k)} e^{\mathrm{I}^{(k)}} \int_0^{\mathrm{I}^{(k)}} \varpi e^{-z}\,dz = -\sum_1^{\nu} \mathrm{J}^{(k)}\,\mathrm{F}(\mathrm{I}^{(k)}) - \mathrm{F}(0).$$

1° Soient Π_1 le premier membre, λ une quantité égale à trois fois le plus grand des modules des quantités $\mathrm{J}^{(1)}, \ldots, \mathrm{J}^{(\nu)}, \mathrm{I}^{(1)}, \ldots, \mathrm{I}^{(\nu)}$, ν et 2 : on peut supposer l'intégrale $\int_0^{\mathfrak{Z}}$ prise, dans le plan complexe des z, le long de la droite joignant l'origine au point $\mathfrak{Z}$: on a, sous le signe $\int$,

$$|e^{-z}| \leqq e\lambda, \qquad |\varpi| \leqq (\underline{|p-1})^{-1}\lambda^{\nu p+p-1}.$$

Dès lors,

$$(7)\qquad |\Pi_1| \leqq (\underline{|p-1})^{-1}\lambda^{\nu p+p+2}e^{2\lambda} < \lambda^{2p(\nu+1)}\left(\frac{p}{e}\right)^{-p} < (\lambda^{2\nu+2}ep^{-1})^p,$$

dès que p est assez grand.

2° Je m'occupe maintenant du deuxième membre de (6). J'écrirai

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(z, \mathrm{I}^{(1)}, \ldots, \mathrm{I}^{(\nu)}), \qquad \mathrm{F}_n(z) = \mathrm{F}(z, \mathrm{I}_n^{(1)}, \ldots, \mathrm{I}_n^{(\nu)}),$$
$$\varpi_n(z) = \varpi(z, \mathrm{I}_n^{(1)}, \ldots, \mathrm{I}_n^{(\nu)}),$$

où n est un des nombres n_1, $\mathrm{I}_n^{(k)} = \mathrm{P}_n^{(k)}\mathrm{Q}_n^{(k)-1}$ une des fractions de la suite (1) dont $\mathrm{I}^{(k)}$ est limite, quand $\mathrm{I}^{(k)}$ est un nombre de Liouville.

Soit $\mathfrak{Z}$ une des quantités $0, \mathrm{I}^{(1)}, \ldots, \mathrm{I}^{(\nu)}$, avec $l_n = 0$ quand $\mathfrak{Z} = 0$ ou $\mathfrak{Z}$ rationnel, $l_n^{(k)} = 0$ quand $\mathrm{I}^{(k)}$ est rationnel, et

$$\mathfrak{Z} = \mathrm{I}_n + l_n, \qquad \mathrm{I}^{(k)} = \mathrm{I}_n^{(k)} + l_n^{(k)},$$

(n étant assez grand). On a

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(\mathfrak{Z}, \mathrm{I}^{(1)}, \ldots, \mathrm{I}^{(\nu)}) = \mathrm{F}(\mathfrak{Z}) = \mathrm{F}(\mathrm{I}_n + l_n, \mathrm{I}_n^{(1)} + l_n^{(1)}, \ldots, \mathrm{I}_n^{(\nu)} + l_n^{(\nu)}) \\ &\quad = \mathrm{F}_n(\mathrm{I}_n) + l_n\mathrm{F}'_{n\mathrm{I}_n} + l_n^{(1)}\mathrm{F}'_{n\mathrm{I}_n^{(1)}} + \ldots + \frac{1}{1.2}\left(l_n^2\mathrm{F}''_{n\mathrm{I}_n^2} + \ldots\right) + \ldots, \end{aligned}\right.$$

avec

$$F_n(l_n) = F(l_n, l_n', \dots, l_n^{(\nu)}) = \varpi_n(l_n) + \varpi_n'(l_n) + \dots$$

D'après ce qu'on a vu, $F_{n l_n}$, $F_{n l_n'}$, ..., $F_{n l_n^{(\nu)}}$, ... sont formés chacun de tout ou partie des termes, multipliés par ± 1, de $F_n(l_n)$. On aura donc une limite supérieure du module de toutes ces quantités en cherchant une limite supérieure L_n de la somme des modules des termes de $F_n(l_n)$. Soient $\rho_n(z)$, $\rho_n'(z)$, ... les limites supérieures analogues pour $\varpi_n(z)$, $\varpi_n'(z)$, ...; on a, pour $z = \zeta$ ou $z = l_n$, si l'on veut,

$$\left\{\begin{aligned}
&\underline{|p-1}\,|\varpi_n(z)| = |z^{p-1}(z-l_n')^p \dots (z-l_n^{(\nu)})^p| \le \underline{|p-1}\,\rho_n(z) \le \lambda^{\nu p+p-1},\\
&\underline{|p-1}\,|\varpi_n'(z)| \le p\Sigma|f_1(z)| \le \underline{|p-1}\,\rho_n^1(z) \le p(\nu+1)\lambda^{\nu p+p-1},\\
&\underline{|p-1}\,|\varpi_n''(z)| \le p^2\Sigma|f_2(z)| \le \underline{|p-1}\,\rho_n^2(z) \le p^2(\nu+1)^2\lambda^{\nu p+p-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ;
\end{aligned}\right.$$

où les f_1, f_2, ... sont des produits $z^{\beta}(z-l_n')^{\beta_1} \dots (z-l_n^{(\nu)})^{\beta_\nu}$, en nombre respectivement $\le \nu+1$, $(\nu+1)^2$, ..., avec $\beta_k \le p$.

Alors

$$\begin{aligned}
&\underline{|p-1}\,|F_n(l_n)|\\
&\quad \le \underline{|p-1}\,L_n \le \lambda^{\nu p+p-1}[1 + p(\nu+1) + p^2(\nu+1)^2 + \dots + p^\mu(\nu+1)^\mu + \dots],
\end{aligned}$$

où $\mu \le \nu p + p - 1$, et

$$\underline{|p-1}\,L_n \le \lambda^{\nu p+p-1}(p\nu+p)^{p\nu+p} < [p(\nu+1)\lambda]^{p\nu+p} = \rho \quad (1).$$

Cette inégalité a lieu que l'on prenne ζ égal à 0, l', ..., ou $l^{(\nu)}$.

Ceci posé, d'après (8),

$$F(\zeta) = F_n(l_n) + \theta_n,$$

où

$$|\theta_n| < |l_n|[(\nu+1) + (\nu+1)^2 + \dots + (\nu+1)^{\nu p+p-1}]\rho < |l_n|(\nu+1)^{\nu p+p}\rho,$$

puisque $F(z)$ est de degré $\nu p + p - 1$, l_n étant celle des quantités l_n, l_n', ..., $l_n^{(\nu)}$ dont le module est le plus grand. On conclut de là

$$J^{(k)}F(l^{(k)}) = (J_n^k + j_n^k)[F_n(l_n^{(k)}) + \theta_n^k] = J_n^k F_n(l_n^{(k)}) + \varepsilon_n^k,$$

---

(1) D'après le même raisonnement, ρ est aussi limite supérieure de $\underline{|p-1}\,F(\zeta)$.

$J_n^{(k)}$ étant une des fractions de la suite (1) dont $J^{(k)}$ est la limite et $J^{(k)} = (J_n^{(k)} + j_n^{(k)})$ ($j_n^{(k)} = 0$ quand $J^{(k)}$ est rationnel);

$$|\zeta_n^{(k)}| \leqq |j_n^{(k)}|\varphi + 2\lambda|\theta_n^{(k)}| < |l_n''|(\nu+1)^{2\nu p+2p-1}\varphi,$$

l_n'' étant celle des quantités $l_n', j_n^{(1)}, \ldots, j_n^{(\nu)}$ dont le module est le plus grand. Le second membre de (6) changé de signe s'écrit alors

$$\sum_1^\nu J^{(k)} F(I^{(k)}) + F(0) = \sum_1^\nu J_n^{(k)} F_n(I_n^{(k)}) + F_n(0) + \chi_n = f_n + \chi_n,$$

où

(9) $$|\chi_n| < |l_n''|(\nu+1)^{2\nu p+2p}\varphi.$$

(6) donne donc

(10) $$f_n = -\chi_n - H_1 = -\psi_n,$$

où, d'après (7) et (9), quand p est assez grand,

(11) $$|\psi_n| < (\lambda^{2\nu+2} e p^{-1})^p + |l_n''| p^{6p\nu+6p}.$$

En précisant cette limite supérieure de $|\psi_n|$, et déterminant une limite inférieure de $|f_n|$ pour la valeur de n considérée et une valeur correspondante convenable de p, je vais établir l'impossibilité de (10) dans les conditions indiquées au théorème III.

J'étudie f_n : en s'inspirant de la démonstration classique précitée de la transcendance de e, on voit que

$$F_n(0) = \varpi_n(0) + \varpi_n'(0) + \ldots,$$

où les $p-1$ premières quantités $\varpi_n(0), \varpi_n'(0), \ldots$ sont nulles; $\varpi_n^{(p-1)}(0)$ est de la forme

$$(-1)^{\nu p}(I_n^{(1)} \ldots I_n^{(\nu)})^p;$$

$\varpi_n^{(p)}(0), \varpi_n^{(p+1)}(0), \ldots$ sont de la forme

(12) $$p\,\Phi(I_n^{(1)}, \ldots, I_n^{(\nu)}),$$

où Φ est un polynome en $I_n^{(1)}, \ldots, I_n^{(\nu)}$ à coefficients entiers de degré $\leqq p\nu$.

On voit encore que

$$\varpi_n(z) = \frac{b_1(z - \mathrm{I}_n^{(k)})^p + b_2(z - \mathrm{I}_n^{(k)})^{p+1} + \ldots}{\underline{|p-1}}$$

a, pour $z = \mathrm{I}_n^{(k)}$, ses $p - 1$ premières dérivées nulles et toutes les autres de la même forme (12). Finalement, soit

$$\mathrm{I}_n^{(k)} = \mathrm{P}_n^{(k)} \mathrm{Q}_n^{(k)-1}, \qquad \mathrm{J}_n^{(k)} = p_n^{(k)} q_n^{(k)-1},$$

où $\mathrm{Q}_n^{(k)}$, $q_n^{(k)}$ sont réels et satisfont (¹) aux conditions (1), (2) et (3); on a

$$f_n = \frac{(-1)^{p\nu}(\mathrm{P}_n^{(1)} \ldots \mathrm{P}_n^{(\nu)})^p (\mathrm{Q}_n^{(1)} \ldots \mathrm{Q}_n^{(\nu)})^{p\nu - p} q_n^{(1)} \ldots q_n^{(\nu)} + p\Psi}{q_n^{(1)} \ldots q_n^{(\nu)} (\mathrm{Q}_n^{(1)} \ldots \mathrm{Q}_n^{(\nu)})^{p\nu}},$$

où Ψ est un entier, réel ou imaginaire.

Soit q_n le plus grand des nombres $q_n^{(1)}, \ldots, q_n^{(\nu)}, \mathrm{Q}_n^{(1)}, \ldots, \mathrm{Q}_n^{(\nu)}$. D'après (3), le dénominateur de f_n est de la forme $q_n^{p\sigma_n}$, où σ_n est limité supérieurement et inférieurement. Quant au numérateur, si $\Psi = 0$, il est $\neq 0$, et son module est $\geqq 1$; si $\Psi \neq 0$, le numérateur a son module $\geqq 1$ ou est nul : dans ce dernier cas, le carré du module de chacun des deux termes du numérateur aurait même valeur; or, le carré du module du premier terme est

$$\mathrm{N} = |\mathrm{P}_n^{(1)} \ldots \mathrm{P}_n^{(\nu)}|^{2p} (\mathrm{Q}_n^{(1)} \ldots \mathrm{Q}_n^{(\nu)})^{2p\nu - 2p} (q_n^{(1)} \ldots q_n^{(\nu)})^2,$$

puisque les $\mathrm{Q}_n^{(k)}$ et les $q_n^{(k)}$ sont réels. D'après (3), chaque facteur du second membre de N étant $\leqq q_n^{\sigma}$, où σ est fini, tout facteur premier du nombre N est $\leqq q_n^{\sigma}$. Si donc on prend le nombre premier arbitraire $p = q_n^{\alpha_n}$, où α_n est $> \sigma$, on voit que les carrés des modules des deux termes du numérateur de f_n ne peuvent être égaux; donc alors, en tout cas, le numérateur de f_n est un entier $\neq 0$, dont le module est $\geqq 1$.

Finalement, on aura, pour la valeur de p en question,

$$|f_n| \geqq q_n^{-p\tau} \qquad (\tau \text{ fixe convenable} > 0),$$

et, d'après (10) et (11),

$$q_n^{-p\tau} < (\lambda^{2\nu+2} e p^{-1})^p + |l''_n| p^{6p\nu + 6p}. \tag{13}$$

(¹) Quand $\mathrm{I}^{(k)} = \mathrm{I}_n^{(k)}$ ou $\mathrm{J}^{(k)} = \mathrm{J}_n^{(k)}$ sont rationnels (n assez grand), on peut toujours les mettre sous une forme satisfaisant à ces conditions, avec $\tau'_n = \infty$.

D'une part,

$$(14)\qquad (\lambda^{2\nu+2}ep^{-1})^p < q_n^{-2p\tau} < \frac{1}{4}q_n^{-p\tau},$$

car

$$q_n^{2\tau} < pe^{-1}\lambda^{-2\nu-2},$$

si α_n est assez grand ; d'autre part, d'après (3),

$$|l_n''| \leqq q_n^{-\tau_1\varphi_n} \qquad (\tau_1 \text{ fixe}),$$

et

$$(15)\qquad |l_n''|\, p^{6p\nu+6p} \leqq q_n^{-\tau_1\varphi_n+6p\alpha_n(\nu+1)} < q_n^{-2p\tau} < \frac{1}{4}q_n^{-p\tau},$$

pourvu que

$$2p\tau < \tau_1\varphi_n - 6p\,\alpha_n(\nu+1),$$

ou

$$\tau_1\varphi_n q_n^{-\alpha_n} > 2\tau + 6\alpha_n(\nu+1).$$

Il suffira que

$$(16)\qquad \varphi_n \geqq q_n^{2\alpha_n},$$

autrement dit que l'on ait pour toute valeur de n_1 assez grande (ou même pour une infinité des valeurs n_1)

$$(17)\qquad \varphi_{n_1} > q_{n_1}^{\alpha},$$

si grand que soit le nombre positif α [1].

La condition (17) étant supposée satisfaite par l'ensemble S_1, (14) et (15) ont lieu, et (13) est impossible, par suite aussi (6), (5) et (4). La première partie du théorème III se trouve ainsi établie.

Je me reporte maintenant aux considérations qui suivent le théorème I de ma dernière Note du *Bulletin de la Société mathématique*, 1906, p. 216, intitulée : *Sur les nombres transcendants dont le développement en fraction continue est quasi-périodique et sur les nombres de Liouville*. Soit le nombre réel de Liouville

$$(18)\qquad \mathfrak{J} = c_0 + 1 : c_1 + 1 : c_2 + \ldots,$$

---

(1) L'existence du nombre premier $p > q_n^{\sigma}$ est alors une conséquence immédiate du postulat de Bertrand établi par Tchebychef : il y a toujours un nombre premier entre l'entier y et l'entier $2y$.

d'ordre $\geqq (3, \varepsilon)$ dans la première classification (ε positif arbitraire), γ_s le plus grand des entiers positifs $c_0, c_1, \ldots, c_s$: la condition (17) sera satisfaite par la $s^{\text{ième}}$ réduite de $\mathfrak{Z}$ si l'on a la condition analogue à l'inégalité (5 *bis*) de cette Note

$$\log c_{s+1} > \gamma_s^{\alpha' s} \qquad (\alpha' \text{ comme } \alpha) :$$

l'ordre étant quelconque, mais $\geqq (3, \varepsilon)$, il y a toujours des fractions continues satisfaisant à cette inégalité pour une infinité de valeurs de s. L'ensemble S_1 correspondant à $\mathfrak{Z}$ pour ces valeurs de s satisfait au théorème III.

Enfin, quand le nombre réel de Liouville (18) satisfait aux conditions du corollaire I du théorème I de la même Note, on voit encore que (17) aura lieu si, pour une infinité de valeurs de s,

$$\log \log c_s > \alpha' s \log \gamma_{s-1},$$

ou, *a fortiori*, si

$$e_{k_s - 3}(s) > \alpha' s\, e_{k_s - 4}(s) \qquad (k_s > 4) :$$

il suffit, si $x = e_{k_s - 4}(s) > \alpha' s$, $e^x > x^2$, pour x assez grand, ce qui a lieu. Les fractions rationnelles à coefficients entiers réels M, M_1 formées avec le nombre $\mathfrak{Z}$ et les nombres de l'ensemble S_1 correspondant satisfont à (17); ces nombres comprenant ceux de la forme $M + M_1 i$, la deuxième partie du théorème III se trouve établie. C. Q. F. D.

Ce théorème comporte une série de corollaires presque immédiats qui valent la peine, semble-t-il, d'être énoncés isolément.

Je désigne toujours par $\mathfrak{Z}$ un nombre $\neq 0$ de la forme (¹) $M + M_1 i$, où M et M_1 sont des nombres de Liouville réels de S_1 satisfaisant à (17) ou des nombres rationnels.

Corollaire I. — $e^{\mathfrak{Z}}$, $\cos \mathfrak{Z}$, $\sin \mathfrak{Z}$, $\operatorname{tang} \mathfrak{Z}$ *sont des nombres transcendants.*

Si $x = a + bi$, où a et b sont rationnels et réels, x appartient

(¹) C'est la forme générale des nombres de S_1 [*Introduction à la théorie des nombres transcendants*, p. 45, note (1)].

à S_1, quel que soit le nombre de Liouville $\mathfrak{Z}$ satisfaisant à (17). Donc :

Corollaire II. — *e^x, où $x \neq 0$ est rationnel, réel ou imaginaire quelconque, n'est racine d'aucune équation algébrique dont les coefficients sont des polynomes, à coefficients rationnels, formés avec un même nombre de Liouville satisfaisant à* (17); *il en est de même de* $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tang} x$.

En particulier, $x \neq 0$ étant rationnel et réel, quelconque, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tang} x$, *qui sont transcendants* ([1]), *ne peuvent être des nombres de Liouville satisfaisant à* (17). *Par suite, on peut assigner une limite supérieure de leur ordre, c'est-à-dire de la croissance des quotients incomplets de leur développement en fraction continue arithmétique.*

Ces fractions continues ne peuvent en effet satisfaire aux conditions du corollaire I du théorème I de notre Note précitée du *Bull. Soc. Math.*, 1906, p. 219 : si

$$c_0 + 1 : c_1 + 1 : c_2 + \ldots + 1 : c_n + \ldots \qquad (c_n \text{ entier})$$

est une de ces fractions, et si k_n est le plus petit entier positif ou négatif tel que $c_n \leqq e_{k_n}(n)$, on a, par suite, dès que n est assez grand, $k_n < n^{1+\varepsilon}$, si petit que soit le nombre positif fixe ε.

Corollaire III. — *Le logarithme népérien d'un nombre de* S_1 *n'est pas un nombre de* S_1 ; *le logarithme népérien d'un nombre algébrique n'est pas un nombre de* S_1. *Le développement en fraction continue du logarithme népérien d'un nombre algébrique réel* > 1 *a son ordre limité* ([2]) *comme au corollaire II.*

En effet, si $\mathfrak{Z}$ et J sont deux nombres de S_1, on n'a pas $\mathfrak{Z} = e^J$, $\log \mathfrak{Z} = J$. D'autre part, soit y un nombre algébrique : on n'a pas $y = e^{\mathfrak{Z}}$, $\log y = \mathfrak{Z}$.

([1]) La démonstration du théorème III suffit pour montrer que $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$ sont transcendants pour x rationnel $\neq 0$ et réel, sans qu'il soit nécessaire de recourir au théorème général connu de M. Lindemann.

([2]) Ceci s'applique en particulier à Log nép. $(1+\sqrt{2})$ (constante de M. Laisant). Je remarque, en cours d'impression, qu'il en est de même du développement en fraction continue de π, puisque $e^{\pi i} = -1$.

Remarque. — On pourrait essayer de généraliser le théorème III et ses corollaires en considérant l'ensemble Σ formé des nombres de S_1 et des nombres algébriques par rapport à S_1, c'est-à-dire des nombres racines d'équations algébriques dont les coefficients sont des nombres de S_1. On aurait ainsi, semble-t-il, l'extension la plus générale du théorème précité de M. Lindemann.

Pour une pareille tentative, il conviendra de se reporter aux travaux de M. Lindemann (*Math. Ann.*, t. XX, 1882, p. 213) et de Weierstrass (*Sitzungsberichte der Berl. Akad.*, 1885, p. 1067), en cherchant à suivre une marche analogue.

IV.

Je vais maintenant établir la propriété suivante :

THÉORÈME IV. — *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ des nombres rationnels > 1, $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(\nu)}$ des nombres de Liouville > 1 appartenant à un ensemble S'' satisfaisant à (17). Tout polynome ψ à coefficients entiers positifs formé avec les nombres $I^{(j)}$, $a_k^{I^{(j)}}$, $I^{(j)I^{(k)}}$, $I^{(j)a_k}$ est un nombre transcendant.*

La même conclusion subsiste quand $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ sont des nombres rationnels positifs quelconques $\neq 1$, $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(\nu)}$ des nombres de Liouville positifs quelconques fonctions rationnelles à coefficients entiers réels, d'un même nombre de Liouville positif $\mathfrak{J}$ satisfaisant à (17), pourvu que la fonction $\Psi(x)$ obtenue en remplaçant $\mathfrak{J}$ par x dans le polynome ψ dépende de x.

Soit une quantité ψ limite pour n infini d'une suite de quantités $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$, où ψ_n est une fonction de quantités rationnelles

$$\xi_n = P_n Q_n^{-1}, \qquad \xi'_n = P'_n Q'^{-1}_n, \qquad \ldots,$$

ayant elles-mêmes pour limites quand n croît indéfiniment $\xi, \xi', \ldots$, en sorte que

$$\psi = \psi(\xi, \xi', \ldots), \qquad \psi_n = \psi(\xi_n, \xi'_n, \ldots).$$

Les $\xi, \xi', \ldots$ seront des nombres transcendants de Liouville ou des nombres rationnels en nombre fini : l'un au moins sera un nombre de Liouville.

Je suppose que, pour une infinité de valeurs de n, $|\psi - \psi_n|$ possède une limite supérieure $l_n \neq 0$ et fonction de n, quand les ξ, ξ', ... prennent une série de valeurs appartenant à un certain ensemble de nombres (par exemple S, S', S'', S''', S_1, ...) : l_n tend vers o avec $\frac{1}{n}$.

J'admets alors que la quantité ψ puisse être racine d'une équation algébrique donnée *irréductible* arbitraire $f(x) = 0$ à coefficients entiers : $\psi_n = x_n$ est une valeur approchée de la racine. On aura, pour n assez grand,

$$f(\psi_n) = f(\psi + \psi_n - \psi) = (\psi_n - \psi)M \neq 0,$$

où $|M| \geqq \frac{1}{2}|f'(\psi)|$ est fini, et

$$(19) \qquad |f(\psi_n)| \leqq l_n M.$$

D'autre part, si l'on peut, par un procédé quelconque, avoir une limite inférieure $\lambda_n \neq 0$ et fonction de n de la quantité $|f(\psi_n)|$ dès que n est assez grand, on devra avoir

$$\lambda_n \leqq l_n M.$$

Si cette condition n'a pas lieu pour toute valeur de n assez grande, ψ est un nombre transcendant.

J'envisage un cas plus particulier, celui où ψ_n est un nombre algébrique racine d'une équation à coefficients entiers

$$(20) \qquad F_n(x) = B_0 x^{d_n} + B_1 x^{d_n - 1} + \ldots + B_{d_n} = 0,$$

de racines

$$\eta_1 = \psi_n, \qquad \eta_2, \qquad \ldots, \qquad \eta_{d_n}.$$

La fonction

$$(21) \qquad \Phi_n = B_0^{d_n} f(\eta_1) \ldots f(\eta_{d_n})$$

est un entier fonction de n. L'équation $f(x) = 0$ ne peut avoir en commun avec F_n une racine sans diviser F_n : si l'on peut établir qu'il n'en est pas ainsi, $\Phi_n \neq 0$ et $|\Phi_n| \geqq 1$. On déterminera une limite supérieure des $|\eta_i|$, et l'on en déduira une limite supérieure μ_n des $|f(\eta_i)|$, en sorte que

$$(22) \quad |f(\psi_n)| = |f(\eta_1)| = |\Phi_n|\,|B_0^{d_n} f(\eta_2) \ldots f(\eta_n)|^{-1} \geqq B_0^{-d_n} \mu_n^{-d_n+1} = L_n;$$

on pourra prendre $\lambda_n = L_n$, et il faudra

$$L_n \leqq l_n M.$$

En choisissant, si cela est possible, les $\xi - \xi_n$ de façon que

$$(23) \qquad l_n B_0^{d_n} \mu_n^{d_n - 1}$$

tende vers o pour une infinité de valeurs de n croissant indéfiniment, on obtient des quantités ψ qui sont des nombres transcendants.

Ces principes généraux posés, je vais en faire une application : soient $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ un nombre fini de nombres rationnels réels positifs > 0, $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(\nu)}$ un nombre fini de nombres de Liouville réels positifs appartenant à un ensemble S''. Je prends pour $\xi, \xi', \ldots$ des quantités quelconques de la forme

$$(23\ bis) \qquad I^{(j)}, \quad a_i^{I^{(j)}}, \quad I^{(i)^{I^{(j)}}}, \quad I^{(j)^{a_i}}.$$

Il y a un cas où l'on est sûr que $\psi - \psi_n \neq 0$, puisque les nombres $\mathfrak{J}$ de S'' sont tels que les $\mathfrak{J} - I_n$ sont tous de même signe, c'est celui où, remplaçant $I^{(j)}$ par $x^{(j)}$, quel que soit j, dans ψ, ψ devient, au voisinage du système de valeurs $x^{(1)} = I^{(1)}$, $x^{(2)} = I^{(2)}, \ldots$ une fonction Ψ *simultanément* croissante ou décroissante de toutes les variables $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$. Exemples :

1° ψ est une fonction rationnelle à coefficients entiers réels des quantités (23 *bis*), et les $I^{(1)}, \ldots, I^{(\nu)}$ sont des fonctions rationnelles, à coefficients rationnels réels, d'un même nombre $\mathfrak{J}$ de Liouville réel : remplaçant $\mathfrak{J}$ par x, il suffira que Ψ dépende effectivement de x pour que $\psi - \psi_n$ soit $\neq 0$ quand $x = \mathfrak{J}$, dès que n est assez grand (¹). Ainsi, quand $\psi = a^{\mathfrak{J}} + a^{-\mathfrak{J}}$, $\psi - \psi_n \neq 0$;

2° $\psi = \sum A \xi^{\omega} \xi'^{\omega'} \ldots$ est un polynome en $\xi, \xi', \ldots$ à coefficients entiers positifs, et les a_i et les $I^{(j)}$ sont tous > 1; dans ce *deuxième cas,* que je vais seul considérer, en observant que les mêmes raisonnements s'appliquent en partie dans le *premier*, quand on fait varier les $x^{(j)}$ de quantités suffisamment petites $\Delta x^{(j)}$ toutes de même signe, $\Delta x^{(j)}$, $\Delta a_i^{x^{(j)}}$, $\Delta x^{(j)^{x^{(k)}}}$, $\Delta x^{(j)^{a_i}}$ sont tous

(¹) La fonction $\Psi(x)$ est, en effet, monodrome aux environs de $x = \mathfrak{J}$.

du signe des $\Delta x^{(j)}$, et aussi $\Delta\Psi$. Dès que n est assez grand, on est sûr que $\psi - \psi_n \neq 0$.

Ceci posé, dans ce même cas,

$$\psi_n = \sum A \xi_n^{\omega} \xi_n'^{\omega'} \ldots,$$

et $|\psi - \psi_n|$ a une limite supérieure de la forme $\lambda\zeta_n$, où λ est une constante et ζ_n une limite supérieure des quantités $|I^{(j)} - I_n^{(j)}|$. D'après les relations (2), (3) et (19), on pourra poser

$$(23\ ter) \qquad |\psi - \psi_n| \leqq \lambda\zeta_n \leqq Q_n^{-\tau\varphi_n} = l_n, \qquad |f(\psi_n)| \leqq l_n M,$$

où $\tau > 0$ est une constante limitée inférieurement.

D'autre part, $\mathfrak{I}$ et J étant deux quelconques des nombres $I^{(1)}, \ldots, I^{(\nu)}$, les $\xi_n, \xi_n', \ldots$ sont chacun d'une des formes

$$I_n, \quad \left(\frac{p}{q}\right)^{I_n}, \quad I_n^{J_n}, \quad I_n^{\frac{p}{q}} \qquad (p,\ q \text{ entiers} > 0),$$

avec

$$I_n = P_n Q_n^{-1} > 1, \qquad J_n = P_n' Q_n'^{-1} > 1, \qquad pq^{-1} > 1;$$

$\xi_n, \xi_n', \ldots$ sont racines d'équations algébriques d'une des formes

$$(24) \qquad \begin{cases} Q_n x - P_n = 0, & q^{P_n} x^{Q_n} - p^{P_n} = 0, \\ Q_n^{P_n'} x^{Q_n'} - P_n^{P_n'} = 0, & Q_n^p x^q - P_n^p = 0. \end{cases}$$

Si l'on remplace dans ψ_n, de toutes les manières possibles, chacune des quantités $\xi_n, \xi_n', \ldots$ par les diverses racines de celles des équations (24) dont elle est racine, on obtient d_n quantités conjuguées $\eta_1 = \psi_n, \eta_2, \ldots, \eta_{d_n}$ qui sont racines d'une même équation algébrique $F_n = 0$ à coefficients entiers de la forme (20).

J'admets que ψ soit racine de $f(x) = 0$, c'est-à-dire soit algébrique.

Je dis d'abord que $f(\eta_i) \neq 0$. En effet, si $f(\eta_i) = 0$, $f(x)$, qui est irréductible, divisera $F_n(x)$; toutes les racines de $f(x)$, et en particulier ψ, seront parmi les quantités $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{d_n}$. Les racines des équations (24) sont d'ailleurs d'une des formes

$$x = I_n, \qquad x = (pq^{-1})^{I_n} e^{2k\pi i Q_n^{-1}}, \qquad x = I_n^{J_n} e^{2k'\pi i Q_n'^{-1}},$$
$$x = I_n^{pq^{-1}} e^{2k''\pi i q^{-1}},$$

où k est un des entiers $0, 1, 2, \ldots, Q_n - 1$, k' un des entiers $0, 1, 2, \ldots, Q_n' - 1$, k'' un des entiers $0, 1, 2, \ldots, q - 1$. On aura, par exemple, une égalité de la forme

$$\psi = \sum A \xi_n^{\omega} \xi_n'^{\omega'} \ldots e^{2\pi i (\omega k Q_n^{-1} + \omega' k' Q_n'^{-1} + \ldots)} = \psi_n'.$$

D'abord, quand les $\xi - \xi_n$ sont tous positifs, c'est-à-dire puisque $a_i > 1$, $I^{(j)} > 1$, quand les $\mathfrak{J} - I_n$ dans S'' sont tous positifs, le module du second membre est $< \psi$, et l'égalité est impossible; alors $f(\eta_i)$ est $\neq 0$. Quand les $\mathfrak{J} - I_n$ sont tous négatifs, ψ_n' étant réel, ainsi que ψ_n,

$$\psi_n - \psi = \psi_n - \psi_n' = \sum A \xi_n^{\omega} \xi_n'^{\omega'} \ldots [1 - \cos 2\pi(\omega k Q_n^{-1} + \omega' k' Q_n'^{-1} + \ldots)] > 0.$$

$1 - \cos 2\pi(\omega k Q_n^{-1} + \ldots)$ tend vers 0 quand n croît indéfiniment, puisque $\psi_n - \psi$ tend alors vers 0, c'est-à-dire que, N_n étant entier,

$$2\pi(\omega k Q_n^{-1} + \ldots) = \frac{2\pi N_n}{Q_n Q_n' \ldots} = 2\pi(\lambda \pm \varepsilon_n'),$$

avec λ entier, $\lim \varepsilon_n' = 0$ pour $n = \infty$.

Or $Q_n Q_n' \ldots$ est de la forme $Q_n^{\sigma_n}$ (σ_n limité supérieurement et inférieurement), d'après (3); $1 - \cos 2\pi(\lambda \pm \varepsilon_n')$ est nul ou au moins de l'ordre de grandeur de $\varepsilon_n'^2$, c'est-à-dire $\geqq Q_n^{-\sigma}$, où σ est un nombre fixe convenable > 0; il en serait de même de $|\psi_n - \psi_n'| \neq 0$, car les ε_n' ne sont pas tous nuls; mais $\psi_n - \psi$ est $\neq 0$ et au plus de l'ordre de grandeur de $Q_n^{-\tau\varphi_n}$, d'après ce qu'on a vu [équation (23 *ter*)]; on est donc conduit à une impossibilité quand n est assez grand.

Finalement, $f(\eta_i)$ est $\neq 0$ quand les $\mathfrak{J} - I_n$ dans S'' sont tous à la fois positifs ou négatifs [1].

---

(1) On remarquera que, si l'on suit des procédés de raisonnement analogues dans le premier cas mentionné plus haut, en supposant $\psi = \sum A \xi^{\omega} \xi'^{\omega'} \ldots$, où A, ξ, ξ', ... sont positifs et les $I^{(j)}$ fonctions rationnelles, à coefficients rationnels réels, d'un même nombre $\mathfrak{J}$ de Liouville réel (a_i et $I^{(j)} > 0$), on est sûr que $|\psi - \psi_n| \neq 0$ pour une infinité de valeurs de n, si Ψ dépend de x; on a encore (23 *ter*), (24) avec $pq^{-1} > 0$, $|\psi_n - \psi| > 0$,

$$1 - \cos 2\pi(\lambda \pm \varepsilon_n') = \lambda_1 \varepsilon_n'^2 \qquad (\lambda_1 \text{ fini} \geqq 0),$$

les ε_n' n'étant pas tous nuls, puisque $|\psi - \psi_n| \neq 0$. On est également conduit à un résultat absurde, c'est-à-dire que $f(\eta_i)$ est aussi $\neq 0$. Il est inutile de s'occuper du signe des quantités $I^{(j)} - I_n^{(j)}$.

Dans le cas considéré ici, les raisonnements qui suivent s'appliquent à peu près identiquement.

Je suppose donc $f(\eta_i) \neq 0$. On a, dans (21), $|\Phi_n| \geqq 1$. Une limite supérieure des η_i est précisément ψ_n; si δ est une limite supérieure du degré et des valeurs absolues des coefficients de $f(x)$,

$$(25) \qquad |f(\eta_i)| \leqq (\delta+1)^2 \psi_n^\delta = \mu_n < A',$$

où A' est un nombre fixe. Il reste à obtenir une limite supérieure de B_0 et de d_n.

Le nombre des quantités $\xi, \xi', \ldots$ distinctes dans ψ est limité; quand on substitue dans ψ_n à $\xi_n, \xi'_n, \ldots$ les diverses racines des équations (24), le nombre d_n des quantités $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{d_n}$ obtenues est au plus égal à un nombre de la forme $Q_n^{\theta_n}$, où θ_n est limité supérieurement, d'après (2) et (3). Donc

$$(26) \qquad d_n \leqq Q_n^\theta, \quad (\theta \text{ positif indépendant de } n).$$

Je fais dans les équations (24) le changement de variables respectif

$$x = y Q_n^{-1}, \qquad x = y q^{-\mu'}, \qquad x = y Q_n^{-\mu'}, \qquad x = y Q_n^{-\mu'};$$

il vient les équations

$$(27) \qquad \begin{cases} y - P_n = 0, & y^{Q_n} - p^{P_n} q^{\mu' Q_n - P_n} = 0, \\ y^{Q'_n} - P_n^{P'_n} Q_n^{\mu' Q'_n - P'_n}, & y^q - P_n^p Q_n^{\mu' q - p} = 0. \end{cases}$$

Si μ' est un entier supérieur au double de la plus grande des quantités $I^{(1)}, \ldots, I^{(\nu)}, a_1, \ldots, a_\mu$, quand n est assez grand, les racines des équations (27) sont des entiers algébriques. Posant

$$\xi_n = \rho_n Q_n^{-1}, \qquad \xi_n = \rho_n q^{-\mu'}, \qquad \xi_n = \rho_n Q_n^{-\mu'} \quad \text{ou} \quad \xi_n = \rho_n Q_n^{-\mu'},$$

suivant celle des équations (27) dont ξ est racine, et des relations analogues pour $\xi'_n, \ldots$, on peut déterminer un nombre $\nu_n \leqq \nu'$, dès que n dépasse une certaine limite, et tel que

$$C_n = Q_n^{\nu_n}, \qquad \chi_n = \psi_n C_n = \sum A_n \rho_n^\omega \rho_n'^{\omega'} \ldots,$$

où les A_n sont entiers, et χ_n un entier algébrique; χ_n et ses conjuguées sont racines d'une équation algébrique en z de degré d_n, où le coefficient de la plus haute puissance de z est l'unité

$$z^{d_n} + D_1 z^{d_n - 1} + \ldots + D_{d_n} = 0;$$

ψ_n et ses conjuguées sont alors racines de l'équation à coefficients entiers

$$C_n^{d_n} x^{d_n} + D_1 C_n^{d_n-1} x^{d_n-1} + \ldots + D_{d_n} = 0,$$

équation qui, ayant mêmes racines que l'équation (20), est telle que, d'après (26), l'on peut prendre

$$B_0 \leqq C_n^{d_n} \leqq Q_n^{\nu' d_n} \leqq Q_n^{\nu' Q_n^{\theta}}. \tag{28}$$

Il ne reste plus qu'à rapprocher les conditions (23), (23 *ter*), (25), (26) et (28); il en résulte que ψ sera transcendant si

$$Q_n^{-\tau\varphi_n + \nu' Q_n^{\theta}} A'^{Q_n^{\theta}}$$

tend vers 0 pour une infinité de valeurs de n croissant indéfiniment. La condition suffisante ainsi obtenue est encore la condition (17). Il s'ensuit qu'elle a lieu pour tous les nombres réels > 1 d'un ensemble S'' satisfaisant à (17), en particulier d'un ensemble S'' défini par un nombre $\mathfrak{z} > 1$ de Liouville remplissant les conditions du corollaire I du théorème I de notre Note précitée du *Bull. Soc. math.*

En tenant compte de ce qui a été dit pour le *premier cas,* on obtient le théorème IV. C. Q. F. D.

Ce théorème comporte encore un certain nombre de corollaires presque immédiats et qui valent la peine, semble-t-il, d'être énoncés isolément.

Corollaire I. — *$\mathfrak{z}$ étant un nombre réel de Liouville, positif ou négatif, satisfaisant à* (17), *$a^{\mathfrak{z}}$, où a est rationnel > 0 et $\neq 1$, est transcendant.*

Corollaire II. — *$\mathfrak{z}$ étant un nombre réel de Liouville, > 0 et satisfaisant à* (17), *$\mathfrak{z}^{\mathfrak{z}}$ est transcendant.*

Corollaire III. — *Le logarithme d'un nombre rationnel ou algébrique réel > 1, dans le système de base a rationnelle > 0 et $\neq 1$, ne peut être un nombre de Liouville satisfaisant à* (17); *par suite son développement en fraction continue* [1] *arithmétique a son ordre limité comme au corollaire* II *du théorème* III.

---

[1] Ce logarithme peut être rationnel : le logarithme de $\sqrt{2}$ est $\frac{1}{2}$ avec la base 2; mais $\log\sqrt{2}$ est irrationnel avec la base 3. De même, la racine positive de $x^x = m$ peut être rationnelle car $2^2 = 4$; mais la racine de $x^x = 2$ est irrationnelle.

Corollaire IV. — *La racine positive de l'équation* $x^x = m$, *où* m *est algébrique* > 1, *ne peut être un nombre de Liouville satisfaisant à* (17); *par suite, son développement en fraction continue a son ordre limité comme ci-dessus.*

Enfin, je mentionnerai encore ce corollaire à titre d'exemple :

Corollaire V. — *Tout étant posé comme au corollaire* I, $a^{\mathfrak{z}} + a^{-\mathfrak{z}}$ *est transcendant.*

Car si, par exemple, $\mathfrak{z} > 0$, $a^{-\mathfrak{z}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\mathfrak{z}}$.

Je me contenterai d'indiquer la possibilité d'extensions du théorème IV par les procédés précédents pour d'autres formes de ψ (1).

NOTE RELATIVE AUX POINTS D'INTERSECTION DES COURBES ALGÉBRIQUES;

Par M. Félix Lucas.

On sait que le groupe des points d'intersection de deux courbes algébriques planes du même degré présente, lorsque ce degré surpasse 2, cette intéressante particularité qu'il existe entre ces points certaines liaisons inévitables. S'il s'agit, par exemple, de deux cubiques, leurs neuf points d'intersection sont tels que huit d'entre eux déterminent le neuvième, car toutes les cubiques du faisceau déterminé par ces huit points passent nécessairement par ce

---

(1) Additions à la bibliographie indiquée par moi à la page 273 de mon *Introduction à la théorie des nombres transcendants*, article *Nombres transcendants*.

A. Hurwitz, *Acta mathematica*, t. XIV, 1890, p. 211; *Math. Ann.*, t. XXII, p. 211; t. XXXII, p. 583; t. XXXIII, p. 249; t. XLIV, p. 417; *Göttinger Nachr.*, 1893, p. 220; *Naturforsch. Gesellschaft*, 1896, p. 34. Le premier de ces Mémoires renferme des résultats très élégants sur la réductibilité des fonctions entières à coefficients rationnels, le dernier sur la théorie des fractions continues.

Staeckel, *Acta Math.*, t. XXV.

Faber, *Math. Ann.*, t. LVIII.

Je dois en grande partie ces renseignements complémentaires à une obligeante communication de MM. Hurwitz et Landau.

neuvième. S'agit-il, plus généralement, de deux courbes du degré m supérieur à 2, il suffit de

$$\frac{m(m+3)}{2} - 1$$

points quelconques du plan pour déterminer un faisceau de ces courbes lesquelles ont m^2 points communs, en sorte que

$$\frac{m(m-3)}{2} + 1$$

points viennent s'adjoindre aux précédents en se liant avec eux.

Parmi les conséquences intéressantes qui résultent de ces liaisons, nous nous proposons ici d'en étudier une dont voici l'indication. Si l'on sépare un point du groupe des m^2 pivots, en imposant à une courbe algébrique passant par les $m^2 - 1$ autres pivots la condition de ne pas passer par le premier, le degré de cette courbe sera nécessairement supérieur à m. Quel sera le minimum possible du degré et quelle sera l'équation générale de la courbe? Tel est le problème que nous allons résoudre.

Je prends pour origine des coordonnées (les axes rectangulaires restant quelconques) celui des m^2 pivots qui doit être isolé du groupe. Les équations des deux courbes du degré m qui déterminent ces m^2 pivots seront alors dépourvues de terme constant; désignons ces équations par

$$(1) \qquad U = 0$$

et

$$(2) \qquad V = 0.$$

Considérant la première, je divise le coefficient de chacun de ses termes par le degré de ce terme, et j'obtiens l'équation d'une courbe auxiliaire du même degré m,

$$(3) \qquad u = 0;$$

je puis alors écrire l'équation (1) sous la forme

$$(4) \qquad U = x u'_x + y u'_y = 0.$$

Opérant de même pour l'équation (2), je considère la courbe auxiliaire

(5) $$v = 0,$$

et je puis écrire

(6) $$V = xv'_x + yv'_y = 0.$$

Prenons le rapport $\frac{y}{x}$ dans chacune des équations (4) et (6) et égalons les deux valeurs de ce rapport, nous aurons

(7) $$W = u'_x v'_y - u'_y v'_x = 0,$$

équation du degré $2(m-1)$. Cette courbe passe par les (m^2-1) pivots, autres que l'origine des coordonnées, communs aux deux courbes U et V; elle passe, d'autre part, par les $(m-1)^2$ pivots du faisceau de courbes du degré $(m-1)$

$$u'_x + \lambda u'_y = 0,$$

λ désignant un paramètre arbitraire, ainsi que par les $(m-1)^2$ pivots du faisceau de courbes du degré $(m-1)$

$$v'_x + \lambda v'_y = 0.$$

Le nombre total des points ainsi désignés appartenant à la courbe W est

$$3m^2 - 4m + 1;$$

il est supérieur, lorsque m surpasse 2, au nombre

$$2m^2 - m - 1$$

des points nécessaires pour déterminer une courbe du même degré $2(m-1)$ que la courbe W; la valeur de l'excès dont il s'agit est $m^2 - 3m + 2$.

Cela posé, désignons par φ et ψ deux polynomes du degré $(m-2)$ à coefficients arbitraires, et formons l'équation

(8) $$U\varphi + V\psi + W = 0;$$

nous aurons l'équation générale des courbes du degré $2(m-1)$ qui passent par les (m^2-1) pivots, autres que l'origine des coordonnées, communs aux deux courbes U et V. Je dis l'équation *générale;* en voici le motif. Pour déterminer une courbe du degré

$2(m-1)$ à laquelle on impose préalablement la condition de passer par m^2-1 points donnés, il est nécessaire et suffisant de se donner $m(m-1)$ autres points de cette courbe. Comme ce nombre $m(m-1)$ est précisément celui des coefficients arbitraires introduits dans l'équation (8) par les polynomes φ et ψ, on déterminera ces paramètres, considérés comme des inconnues, au moyen d'un système de $m(m-1)$ équations linéaires à nombre égal d'inconnues. Encore faut-il que les $m(m-1)$ points considérés ne soient pas groupés de manière à rendre incompatibles les équations linéaires; pour ne citer qu'un cas d'impossibilité, lequel est d'une complète évidence, indiquons la disposition de plus de $2(m-1)$ points sur une ligne droite qui passerait par l'origine des coordonnées. Si certains groupements des $m(m-1)$ points conduisaient à des cas d'indétermination, on pourrait imposer aux coefficients des polynomes φ et ψ quelques conditions supplémentaires. Quoi qu'il en soit, nous pouvons regarder comme un fait acquis que *l'équation* (8) *est l'équation générale des courbes du degré* $2(m-1)$ *qui passent par les* $(m-1)^2$ *points d'intersection* (*autres que l'origine des coordonnées*) *des deux courbes* U *et* V.

Dans cette équation (8) le nombre des termes du plus haut degré (c'est-à-dire du degré $2m-2$) est égal à $2m-1$, alors que le nombre des coefficients des termes du plus haut degré (c'est-à-dire du degré $m-2$) dans l'ensemble des deux polynomes φ et ψ est seulement de $2m-2$. Il est par conséquent impossible de choisir ces coefficients de manière à abaisser d'une unité le degré de l'équation (8). Cette observation nous indique qu'il ne doit pas exister de courbes d'un degré inférieur à $2(m-1)$ pouvant passer par les m^2-1 pivots, autres que l'origine des coordonnées, des courbes U et V, sans passer en même temps par cette origine. Encore reste-t-il à démontrer, pour confirmer cette prévision, que le premier membre de l'équation (8) ne peut pas se décomposer en deux facteurs dont l'un représenterait une courbe ne passant par aucun des pivots des courbes données U et V; voici d'abord à ce sujet une observation très simple.

Supposons qu'une courbe

$$\mu = 0,$$

d'un degré supérieur à m mais inférieur à $2(m-1)$, passe par les m^2-1 pivots sans passer par l'origine des coordonnées; nous pourrons lui adjoindre une courbe entièrement arbitraire

$$\nu = 0,$$

d'un degré égal à l'excès de $2(m-1)$ sur le degré de la courbe μ, cette courbe ν ne passant par aucun des m^2 points d'intersection de U et de V. L'équation, du degré $2(m-1)$,

$$\mu\nu = 0, \tag{9}$$

devra se trouver comprise dans l'équation générale (8); il devra donc être possible de déterminer les coefficients des polynomes φ et ψ de manière à identifier les premiers membres des équations (8) et (9). Or, en supposant, ce qui est permis, que dans chacun des polynomes mis en cause la valeur absolue du terme constant soit égale à l'unité, nous voyons que, dans chacun des premiers membres des équations (8) et (9), le nombre des coefficients (autres que le terme constant) est égal à $2m^2-m-1$, tandis que dans l'ensemble des polynomes φ et ψ le nombre des coefficients n'est que de m^2-m. Par conséquent l'identification des deux équations (8) et (9) exigerait la solution de $2m^2-m-1$ équations à m^2-m inconnues seulement; il ne paraît pas téméraire d'admettre que cette insuffisance du nombre des inconnues démontre l'impossibilité de l'identification.

Quoi qu'il en soit, on peut arriver au but avec une rigueur incontestable par le raisonnement suivant, qui nous a été indiqué par notre collègue de la Société mathématique, M. Blutel.

Dans la courbe arbitraire

$$\nu = 0,$$

nous pouvons faire entrer la droite

$$x = x_0,$$

parallèle à l'axe des y et assujettie à cette seule condition de ne passer par aucun des points communs aux courbes données U et V. En faisant $x=0$ dans l'équation (8), nous obtiendrons l'identité, par rapport à y,

$$U_0\varphi_0 + V_0\psi_0 + W_0 = 0. \tag{10}$$

Attribuons à y la valeur d'une des m racines de l'équation

$$U_0 = 0,$$

que nous pouvons également écrire sous la forme

$$(11) \qquad x_0(u'_x)_0 + y(u'_y)_0 = 0;$$

l'identité (10) deviendra

$$V_0\psi_0 + W_0 = 0,$$

ou, sous une autre forme

$$(12) \qquad [x_0(v'_x)_0 + y(v'_y)_0]\psi_0 + (u'_x)_0(v'_y)_0 - (u'_y)_0(v'_x)_0 = 0.$$

Prenons dans (11) la valeur de $(u'_x)_0$ et portons-la dans (12); il viendra, réductions faites,

$$(13) \qquad V_0[x_0\psi_0 - (u'_y)_0] = 0.$$

Le premier facteur V_0 ne peut pas être nul, car, s'il l'était, le point (x_0, y), qui appartient à la droite $x = x_0$, serait commun aux deux courbes U et V, contrairement à l'hypothèse que nous avons faite sur cette droite. Il faut donc que le second facteur soit nul et cela pour chacune des m valeurs racines de $U_0 = 0$ qu'il nous est possible d'attribuer à y; par conséquent ce second facteur est identiquement nul; il en résulte que notre droite $x = x_0$ doit faire partie de la courbe

$$(14) \qquad x\psi - u'_y = 0.$$

En prenant dans (11) la valeur de $(u'_y)_0$, au lieu de $(u'_x)_0$, pour la porter dans (12) et raisonnant ensuite comme ci-dessus, nous trouverons que notre droite $x = x_0$ doit faire partie de la courbe

$$(15) \qquad y\psi + u'_x = 0.$$

Puisque les deux premiers membres des équations (14) et (15) sont divisibles par $(x - x_0)$, il en est de même du premier membre de l'équation

$$(16) \qquad xu'_x + yu'_y = 0,$$

que nous obtenons en éliminant ψ entre (14) et (15).

Or le premier membre de cette équation (16) est identiquement le polynome U. Nous arrivons donc à ce résultat inadmissible que notre droite $x = x_0$, laquelle est tout à fait arbitraire, ferait partie de la courbe $U = 0$. Il faut donc rejeter l'hypothèse de l'existence d'une courbe d'un degré inférieur à $2(m-1)$ qui passerait par les $m^2 - 1$ points d'intersection, autres que l'origine des coordonnées, des courbes U et V, sans passer en même temps par ladite origine des coordonnées.

De là ce théorème : *Il est impossible de faire passer une courbe de degré inférieur à* $2(m-1)$ *par tous les points d'intersection sauf un de deux courbes du degré m.*

La théorie que nous venons d'exposer peut être généralisée en attribuant aux polynomes U et V deux degrés différents m et n ; le polynome auxiliaire W est alors du degré $m + n - 2$. On trouve ainsi *qu'il est impossible de faire passer une courbe d'un degré inférieur à* $(m+n-2)$ *par tous les points d'intersection sauf un de deux courbes des degrés m et n.* Et l'équation générale des courbes de ce degré satisfaisant à la condition indiquée est

$$U\varphi + V\psi + W = 0,$$

φ et ψ désignant des polynomes dont les degrés respectifs sont $(n-2)$ et $(m-2)$.

SUR UNE FAMILLE DÉNOMBRABLE DE SURFACES HYPERELLIPTIQUES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. L. REMY.

L'objet de cette Note est de définir et de caractériser une famille de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre à quinze points doubles. Cette famille comprend une infinité *dénombrable* de surfaces, dépendant chacune de trois modules, et elle se trouve liée à certaines équations arithmétiques du type de Pell.

On pourrait définir par le même procédé des familles de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre à un nombre moindre de points doubles, également liées à des équations arithmétiques. Mais il suffira d'étudier le cas des surfaces à quinze points doubles qui présente le moins de complexité, pour mettre en évidence le caractère *arithmétique* du problème de la recherche des surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre.

I.

1. Pour définir cette famille, considérons les fonctions thêta de deux variables u, v, répondant au tableau de périodes (¹)

$$(\mathrm{T}_\Delta) \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta} & 0 & G & H \\ 0 & 1 & H & G' \end{vmatrix}$$

d'ordre $2n$, de caractéristique nulle, paires, et admettant le point $u=0$, $v=0$ pour zéro d'ordre $4p$.

En égalant les coordonnées homogènes d'un point $x_1, \ldots, x_4$ à quatre de ces fonctions $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$, supposées linéairement distinctes, on obtient une surface algébrique telle qu'entre les points de cette surface et les couples de points d'une courbe de genre *deux,* il existe une correspondance $(1, \Delta)$.

La surface possède quinze points doubles correspondant aux demi-périodes autres que $u=0$, $v=0$. Son degré est égal à la moitié (²) du nombre des zéros communs à deux des fonctions considérées Θ, non compris le point $u=0$, $v=0$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(2\Delta \times 2n \times 2n - 4p \times 4p)$. Pour que la surface soit du quatrième ordre, il faut donc que les entiers Δ, n, p vérifient la relation

$$(\mathrm{E}) \qquad \Delta n^2 - 2p^2 = 1.$$

Dans ce cas il existe effectivement quatre fonctions Θ linéairement distinctes.

(¹) Ces fonctions ont été étudiées systématiquement par M. Traynard. Leur théorie était d'ailleurs implicitement contenue dans les travaux de M. Humbert, ainsi que nous l'avons montré (*Comptes rendus,* 26 mars 1905).

(²) En effet, aux valeurs (u, v) et $(-u, -v)$ correspond un même point de la surface.

2. Inversement, étant donné un système d'entiers Δ, n, p, satisfaisant à la condition (E), peut-on lui faire correspondre une surface hyperelliptique du quatrième ordre à quinze points doubles Σ? Il n'en est pas toujours ainsi, comme le montre l'exemple suivant : soit le système

$$\Delta = 1, \qquad n = 17, \qquad p = 12.$$

On peut mettre les quatre fonctions Θ_i correspondantes sous la forme

$$x_i = \theta_i(u, v)[F(u, v)]^8 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

en désignant par $\theta_1, \ldots, \theta_4$ les quatre fonctions thêta d'ordre *deux*, de caractéristique nulle, paires et par $F(u, v)$ la fonction thêta d'ordre *quatre*, de caractéristique nulle, paire et admettant le point $u = 0$, $v = 0$ comme zéro d'ordre *six*. Après suppression du facteur commun $[F(u, v)]^8$, on retrouve la représentation classique de la surface de Kümmer.

Ainsi, lorsque les quatre fonctions Θ_i possèdent un facteur commun, la surface définie par les équations $x_i = \Theta_i(u, v)$ n'est pas nécessairement une surface du quatrième ordre à quinze points doubles; et, au cas où il en serait ainsi, la surface correspondrait en réalité, non pas au système d'entiers Δ, n, p, mais à un système Δ, n', p' ($n' < n$ et $p' < p$).

3. Il importe donc de reconnaître *a priori* si les fonctions Θ_i possèdent un facteur commun. A cet effet considérons une fonction $\theta(u, v)$ quelconque répondant au tableau (T_Δ), d'ordre ν, inférieur à $2n$, s'annulant à l'ordre ρ au point $u = 0$, $v = 0$, et formons l'expression

$$D(\nu, \rho) = \Delta n \nu - p\rho,$$

qui, en général, représente la moitié du degré de la courbe $\theta(u, v) = 0$ sur la surface définie par les équations $x_i = \Theta_i(u, v)$.

Dans certains cas cette formule peut donner pour D une valeur négative ou nulle. En premier lieu, si D est négatif, les fonctions $\theta(u, v)$ et $\Theta_i(u, v)$ possèdent plus de $4n\nu\Delta$ et, par suite, une infinité de zéros communs. Donc les quatre fonctions $\Theta_i(u, v)$ sont divisibles par $\theta(u, v)$.

Supposons en second lieu que $D = 0$ et posons

$$X_1 = x_1 + \lambda_1 x_4,$$
$$X_2 = x_2 + \lambda_2 x_4,$$
$$X_3 = x_3 + \lambda_3 x_4,$$
$$X_4 = x_4;$$

on peut déterminer les constantes λ de manière que les fonctions X_1, X_2, X_3 possèdent $(4n\nu\Delta + 1)$ zéros communs avec la fonction $\theta(u, v)$ et par suite renferment $\theta(u, v)$ en facteur. Dès lors l'équation $\theta(u, v) = 0$ représente sur la surface non pas une courbe mais un point singulier $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, et la surface a plus de quinze points doubles.

En résumé, pour qu'il corresponde aux entiers Δ, n, p une surface du quatrième ordre à quinze points doubles, il est *nécessaire* qu'il n'existe aucune fonction $\theta(u, v)$ pour laquelle l'expression $D(\nu, \rho)$ soit nulle ou négative.

4. Cette condition est *suffisante* : pour le prouver, il suffit d'établir que, si les fonctions $\Theta_i(u, v)$ ont un facteur commun $F(u, v)$, en sorte que

$$x_i = \Phi_i(u, v)\,F(u, v),$$

l'expression $D(\nu, \rho)$ correspondant à la fonction $F(u, v)$ est nécessairement nulle ou négative.

Les fonctions F et Φ_i sont de même parité, de même caractéristique, et leurs ordres sont de même parité. Pour fixer les idées, nous les supposerons d'ordre pair, de caractéristique nulle, et paires; la démonstration serait analogue dans les autres cas.

Désignons par 2ν l'ordre de F, par 2ρ l'ordre de multiplicité du zéro $u = 0$, $v = 0$, et enfin par $2\nu'$, $2\rho'$ les quantités analogues pour les fonctions Φ_i. En vertu des relations

$$n = \nu + \nu',$$
$$2p = \rho + \rho',$$

l'équation fondamentale

$$\Delta n^2 - 2p^2 = 1$$

peut se mettre sous la forme

$$[(2\Delta\nu'^2 + 2 - \rho'^2) - 4] + (2\Delta\nu\nu' - \rho\rho') + (2\Delta n\nu - 2p\rho) = 0.$$

Le premier terme est positif ou nul, car l'expression

$$(2\Delta\nu'^2 + 2 - \rho'^2)$$

représente le nombre des fonctions thêta d'ordre $2\nu'$, de caractéristique nulle, paires, s'annulant à l'ordre $2\rho'$ pour $u = 0$, $v = 0$, et il y en a au moins quatre linéairement distinctes, à savoir $\Phi_1, \ldots, \Phi_4$. Le second terme ne peut être négatif, car dans ce cas les fonctions F et Φ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ auraient plus de $2\Delta \times 2\nu \times 2\nu'$ zéros communs et par suite posséderaient un facteur commun. Dès lors le troisième terme est négatif ou nul : or c'est précisément $D(2\nu, 2\rho)$.

5. La condition précédente peut s'exprimer par un système de deux inégalités entre les entiers indéterminés ν et ρ. En effet, considérons d'abord les fonctions thêta d'ordre pair 2ν, de caractéristique nulle, et paires : elles sont au nombre de $(2\Delta\nu^2 + 2)$ linéairement distinctes, et pour que l'on puisse en former une dont le développement de Mac Laurin au point $u = 0$, $v = 0$ commence par des termes d'ordre 2ρ, il faut que

$$2\Delta\nu^2 + 2 - \rho^2 \geqq 1.$$

L'existence d'une surface Σ correspondant aux entiers Δ, n, p est donc subordonnée à l'impossibilité de la résolution en nombres entiers ν, ρ du système d'inégalités

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho^2 - 2\Delta\nu^2 &\overline{\gtrless} 1, \\ \Delta n\nu &\overline{\gtrless} p\rho. \end{aligned} \right.$$

On obtient des systèmes analogues en considérant des fonctions thêta paires ou impaires et de caractéristique quelconque. La discussion n'offre pas de difficultés et montre que chacun de ces systèmes entraîne nécessairement le système (I).

Le problème se trouve donc ramené à la discussion de ce *seul système* d'inégalités.

6. Or la seconde inégalité du système (I) peut s'écrire

$$(\Delta n^2)(\Delta \nu^2) \leqq p^2 \rho^2,$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (E),

$$(1 + 2p^2)(\Delta \nu^2) \leqq p^2 \rho^2$$

ou encore

$$\rho^2 - 2\Delta \nu^2 \geqq \frac{\Delta \nu^2}{p^2},$$

ce qui exige, puisque ρ et ν sont *entiers,*

$$\rho^2 - 2\Delta \nu^2 \geqq 1.$$

La comparaison de cette inégalité avec la première du système (I) prouve que l'on doit avoir nécessairement l'*égalité*

$$\text{(E}'\text{)} \qquad \rho^2 - 2\Delta \nu^2 = 1.$$

Ainsi les entiers ρ, ν vérifient l'équation de Pell (E'); et le système (I) sera impossible à résoudre si l'on a, pour toute solution ρ_k, ν_k de cette équation,

$$\Delta n \nu_k > p \rho_k.$$

Or, d'après l'équation (E'), le rapport $\frac{\nu_k}{\rho_k}$ croît avec le rang k de la solution ν_k, ρ_k; l'inégalité précédente sera donc vérifiée pour toute valeur de k si elle l'est pour $k = 1$.

Voici donc quelle est la conclusion de l'analyse précédente :

Pour qu'il corresponde une surface Σ *aux entiers* Δ, n, p, *supposés liés par la relation* (E), *il faut et il suffit que la plus petite solution* ρ_1, ν_1 *de l'équation de Pell* (E') *vérifie l'inégalité*

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \Delta n \nu_1 > p \rho_1.$$

II.

7. Les équations (E) et (E') se trouvent liées très simplement l'une à l'autre : les deux formes

$$\Delta X^2 - 2 Y^2$$

et

$$x^2 - 2\Delta y^2$$

ont même discriminant; de plus, sous l'hypothèse que la forme $\Delta X^2 - 2Y^2$ peut représenter le nombre 1 (ce qui est le cas dans le problème actuel), ces deux formes sont équivalentes. Si l'on désigne en effet par n_1, p_1 une solution quelconque de l'équation

$$\Delta n^2 - 2p^2 = 1,$$

la substitution modulaire

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} x = \Delta n_1 X + 2p_1 Y, \\ y = p_1 X + n_1 Y \end{cases}$$

fait passer d'une forme à l'autre.

Nous supposerons désormais que dans ces formules n_1, p_1 désignent, non plus une solution quelconque, mais celle formée par les plus petits entiers *non négatifs*. Il est aisé de démontrer que, sous cette hypothèse, on obtient *toutes les solutions positives* x, y de l'équation (E′) en remplaçant dans les formules (S) X, Y par toutes les solutions positives de l'équation (E) : il suffit, pour le prouver, de vérifier que les formules (S) ne peuvent donner pour x et y deux valeurs positives si X et Y ne sont pas tous deux positifs.

8. Il convient d'examiner à part le cas où p_1 serait nul, ce qui exige que

$$\Delta = 1;$$

dans ce cas les surfaces Σ correspondantes seraient représentables sur la surface de Kummer. Mais, en fait, il n'en existe pas, car à la solution

$$n_1 = 1, \qquad p_1 = 0$$

correspond la représentation classique de la surface de Kummer et aucune autre solution n, p de l'équation (E) ne satisfait à l'inégalité (I′).

Ce cas étant écarté, on peut démontrer qu'à la plus petite solution n_1, p_1 de l'équation (E) correspond certainement une surface Σ. En effet, la plus petite solution $x = \rho_1$, $y = \nu_1$ de l'équation

(E′) s'exprime en fonction de n_1 et p_1 par les formules (S), d'où

$$\rho_1 = 4p_1^2 + 1,$$
$$\nu_1 = 2p_1 n_1.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'inégalité (I′) elle devient

$$p_1 \overline{\gtrless} 0,$$

condition qui ne pourrait être satisfaite que dans le cas précédemment exclu où $p_1 = 0$.

Au contraire, si l'on considère la deuxième solution n_2, p_2 de l'équation (E), solution qui se calcule de suite par la résolution de l'équation de Pell (E′) et par les relations (S), on reconnaît qu'elle ne vérifie pas l'inégalité (I′). Il en est de même *a fortiori* pour toutes les autres solutions de l'équation (E), puisque le rapport $\frac{p}{n}$ croît avec le rang de la solution n, p.

Il ne correspond donc de surface Σ qu'à la plus petite solution n_1, p_1.

Nous parvenons ainsi au résultat suivant :

Il existe une famille dénombrable *de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre Σ_Δ définies de la manière suivante : soit Δ un entier quelconque (sauf $\Delta = 1$) tel que la forme $\Delta X^2 - 2Y^2$ puisse représenter le nombre* 1, *et soit n, p la plus petite solution de l'équation*

$$\Delta n^2 - 2p^2 = 1;$$

les coordonnées homogènes d'un point de la surface Σ_Δ sont proportionnelles à quatre fonctions thêta répondant au tableau de périodes (T_Δ), *d'ordre $2n$, de caractéristique nulle, paires et admettant le point $u = 0$, $v = 0$ pour zéro d'ordre $4p$.*

Nous établirons un peu plus loin que ces surfaces sont effectivement toutes distinctes, ce qui n'est pas évident *a priori;* car à des représentations paramétriques distinctes pourrait correspondre une même surface.

III.

9. La surface générale du quatrième ordre à quinze points doubles dépend projectivement de *quatre* paramètres, alors qu'une surface hyperelliptique ne dépend que de *trois* modules : chacune des surfaces Σ_Δ doit donc être caractérisée par *une* condition.

A cet effet considérons l'unicursale singulière C_0 qui correspond sur la surface Σ_Δ à la demi-période $u = 0$, $v = 0$ annulant les quatre fonctions coordonnées $x_1, \ldots, x_4$. Cette courbe est de degré $4p$, puisque les développements de Mac Laurin des fonctions x_1, x_2, x_3, x_4 autour du point $u = 0$, $v = 0$ sont supposés commencer par des termes de degrés $4p$; elle ne passe d'ailleurs par aucun des points doubles de la surface.

L'existence de cette unicursale entraîne une condition

$$f_p(a, b, c, d) = 0$$

entre les quatre paramètres a, b, c, d dont dépend la surface générale du quatrième ordre à quinze points doubles.

10. Pour former cette condition, nous ramènerons la question à un problème de Géométrie plane en projetant la surface à partir d'un de ses points doubles O : le contour apparent en projection se compose de quatre droites $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ et d'une conique C, telles qu'il existe une conique Γ bitangente à C et tangente aux quatre droites Δ [1]. Inversement, à une telle figure plane correspond une surface du quatrième ordre à quinze points doubles

Si la surface possède une unicursale C_0 de degré $4p$ ne passant par aucun point double, il existe, en projection, une unicursale C'_0 de même degré, inscrite au contour apparent; de là résulte une condition, car cette unicursale est assujettie à $12p$ conditions de contact, alors qu'elle ne dépend que de $12p - 1$ paramètres.

Cette méthode permet donc, par un nombre fini d'opérations algébriques, de former une équation algébrique $F_p(a, b, c, d) = 0$ à laquelle satisfait toute surface du quatrième ordre à quinze

---

[1] Cette conique Γ correspond au cône des tangentes à la surface au centre de projection O.

points doubles qui possède une unicursale d'ordre $4p$ ne passant par aucun point double. Il en résulte que le polynome $F_p(a, b, c, d)$ est divisible par $f_p(a, b, c, d)$.

Mais l'équation $F_p = 0$ peut renfermer des facteurs étrangers : ainsi cette circonstance se présente dans le cas où le cône qui projette l'unicursale C'_0 à partir du point double O coupe la surface suivant deux courbes unicursales qui passent toutes deux par le centre de projection O. En fait, la présence de ces facteurs étrangers dans l'équation $F_p = 0$ rendrait très difficile la formation effective de l'équation $f_p = 0$.

Nous nous bornerons à donner une application de cette méthode au cas où $p = 1$.

IV.

11. Dans le cas où $p = 1$ la relation fondamentale

$$\Delta n^2 - 2p^2 = 1$$

exige

$$\Delta = 3 \quad \text{et} \quad n = 1.$$

La surface correspondante Σ_3 est caractérisée par l'existence d'une quartique de deuxième espèce C_0 ne passant par aucun point double.

Elle possède d'ailleurs une deuxième quartique analogue C_1 qui est son intersection résiduelle par la quadrique menée par la quartique C_0.

D'après la méthode du paragraphe III, pour former l'équation F_1, on doit déterminer dans le plan quatre droites $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ et une conique C jouissant des deux propriétés suivantes : d'une part, il existe une conique Γ inscrite au quadrilatère $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ et bitangente à C; d'autre part, il existe une quartique unicursale C'_0 bitangente à chacune des quatre droites et quadritangente à C.

A priori, ce problème se décompose et par suite l'équation

$$F_1(a, b, c, d) = 0$$

est réductible. En effet une quartique unicursale C'_0 possède quatre familles de coniques quadritangentes : l'une de ces familles ne comprend aucun couple de bitangentes, alors que chacune des trois autres familles en comprend deux (à savoir les couples Δ_1, Δ_2 et Δ_3, Δ_4; Δ_1, Δ_3 et Δ_2, Δ_4; Δ_1, Δ_4 et Δ_2, Δ_3). De là quatre problèmes distincts, suivant que la conique C est supposée appartenir à l'une ou l'autre des familles de coniques quadritangentes à C'_0.

Il serait facile de reconnaître que les trois dernières familles sont étrangères au problème actuel. Mais il est préférable pour former l'équation $f_1 = 0$ de partir d'une autre propriété de la surface Σ_3 qui conduit à une équation irréductible.

12. A cet effet considérons les fonctions thêta impaires, du premier ordre, répondant à une caractéristique impaire et au tableau de périodes (T_3). Elles définissent sur la surface une famille linéaire de biquadratiques passant par cinq points doubles. Étant donné un autre point double O de la surface, il existe une biquadratique de la famille passant par O, et elle y présente un point double. Elle est donc projetée de ce point suivant un cône du second ordre γ. On reconnaît aisément que ce cône contient les arêtes du trièdre formé par trois des plans tangents singuliers passant par O, ainsi que les deux points doubles de la surface situés en dehors de ces plans; de plus il est tangent à la surface.

De là résulte la propriété suivante en projection :

Les droites Δ et la conique C formant le contour apparent sont telles qu'il existe une conique γ circonscrite au triangle $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$, passant par les points d'intersection de Δ_4 avec C et tangentes à C en un autre point (1).

13. Cette condition peut se traduire analytiquement de la manière suivante : prenons les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 pour triangle de référence $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et soit

$$\Gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

l'équation de la conique Γ qui correspond au cône des tangentes au centre de projection.

La droite Δ_4 qui doit être tangente à cette conique a pour équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0,$$

(1) Cette méthode appartient pour le fond à M. Humbert (*Comptes rendus*, 1er semestre 1899).

avec la condition

$$(1) \qquad \alpha+\beta+\gamma=0.$$

Enfin la conique C de contour apparent a une équation de la forme

$$C(x, y, z)=\Gamma(x, y, z)+(ax+by+cz)^2=0.$$

Il est aisé de former l'équation de la conique γ, qui est la suivante :

$$C(x, y, z)-\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}\right)[\alpha(a^2+1)x+\beta(b^2+1)y+\gamma(c^2+1)z]=0,$$

et il suffit dès lors d'exprimer que cette conique est tangente à C, ou encore que la droite

$$\alpha(a^2+1)x+\beta(b^2+1)y+\gamma(c^2+1)=0$$

est tangente à C.

Après suppression du facteur étranger [1]

$$(ab+bc+ca-1),$$

on obtient l'équation suivante,

$$(\mathcal{C}) \qquad A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2+2A'\beta\gamma+2B'\gamma\alpha+2C'\alpha\beta=0,$$

en posant

$$A=(a^2+1)(ab+ac-bc+1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A'=(b^2+1)(c^2+1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les coefficients B, C se déduisant de A par permutation circulaire et de même B′, C′ de A′.

Si l'on pose $\beta=1$ et $\gamma=-(\alpha+1)$, de manière à satisfaire à la relation (1), l'équation ($\mathcal{C}$) est du second degré par rapport à α. Elle est irréductible, car son discriminant n'est pas carré parfait (ce dont on s'assure en faisant par exemple $b=0$, $c=0$). En définitive, on peut considérer a, b, c, α comme les paramètres définissant une surface du quatrième ordre à quinze points doubles et l'équation ($\mathcal{C}$) n'est autre que l'équation désignée plus haut par $f_1=0$.

[1] Si ce facteur était nul, la conique C se décomposerait en deux droites.

14. Énonçons en terminant quelques propriétés géométriques relatives à la surface particulière Σ_3 :

Soit une surface du quatrième ordre à quinze points doubles; on considère trois plans tangents singuliers P_1, P_2, P_3 *menés par un point double* O *et le cône du second ordre* γ, *de sommet* O, *circonscrit au trièdre* $P_1P_2P_3$ *et passant par les deux points doubles de la surface situés en dehors des plans* P_1, P_2, P_3 *(on peut définir soixante cônes analogues).*

Si la surface est tangente à l'un des cônes γ :

1° *Elle est hyperelliptique* (¹);

2° *Elle est tangente aux cinquante-neuf autres cônes* γ;

3° *Elle est tangente à chacune des dix quadriques passant par les neuf points situés en dehors d'un plan tangent singulier et la coupe suivant deux quartiques de deuxième espèce;*

4° *Il existe une quadrique tangente en dix points à la surface, ne passant par aucun point double et la coupant suivant deux quartiques de deuxième espèce.*

V.

15. Pour aborder le cas général, il est nécessaire d'étudier sur la surface Σ_Δ correspondant aux entiers Δ, n_1, p_1 la famille des *courbes unicursales* C *sans points multiples et ne passant par aucun point double de la surface.*

En dehors de l'unicursale singulière C_0, toute courbe algébrique de la surface Σ_Δ s'obtient en égalant à zéro une fonction $\theta(u, v)$ répondant au tableau de périodes (T_Δ), paire ou impaire (²). Si la courbe ne passe par aucun point double de la sur-

---

(¹) Pour pouvoir énoncer ce théorème, il était nécessaire de vérifier que la condition $(\mathcal{C})$ est *indécomposable*.

(²) Nous supposons ici que les périodes g, h, g' ne sont pas singulières, c'est-à-dire ne satisfont pas à une relation de la forme

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

à coefficients entiers.

face, cette fonction est nécessairement d'ordre 2ν, de caractéristique nulle et paire; elle peut d'ailleurs s'annuler pour la demi-période $u=0$, $v=0$, soit 2ρ l'ordre de multiplicité de ce zéro. Le genre de la courbe $\theta(u, v)=0$, supposée sans point multiple, est égal à

$$2\Delta\nu^2+1-\rho^2.$$

De là résulte que la surface possède une infinité d'unicursales C_k liées aux solutions de l'équation de Pell

$$(\mathrm{E}') \qquad \rho^2-2\Delta\nu^2=1,$$

que nous avons déjà rencontrée.

Le degré de la courbe C_k qui correspond à la $k^{\text{ième}}$ solution de l'équation de Pell a pour expression

$$4(\Delta n_1\nu_k-p_1\rho_k).$$

Cette valeur s'exprime plus simplement en fonction de la $k^{\text{ième}}$ solution de l'équation fondamentale

$$(\mathrm{E}) \qquad \Delta n^2-2p^2=1.$$

En effet les formules de la substitution S résolues par rapport à n_k et p_k donnent

$$n_k=n_1\rho_k-2p_1\nu_k,$$
$$p_k=-p_1\rho_k+\Delta n_1\nu_k.$$

Le degré de la courbe C_k est donc $4p_k$. Il croît avec l'indice; la courbe de degré minimum C_1 est de degré $4p_1$, de même que l'unicursale singulière C_0.

L'entier $4p_1$ a donc une signification géométrique simple : il représente le degré minimum des unicursales C *de la surface.*

De là résulte que deux surfaces Σ_Δ, $\Sigma_{\Delta'}$ correspondant à deux entiers p_1, p'_1 différents sont distinctes. Ce raisonnement tombe en défaut lorsque $p_1=p'_1$, en sorte que

$$2p_1^2+1=\Delta n_1^2=\Delta' n_1'^2,$$

car les unicursales C_k et C'_k appartenant à ces deux surfaces et de même indice sont de même degré. Dans ce cas, on s'assure que les surfaces sont distinctes par la considération d'une autre famille de courbes : par exemple la famille linéaire définie par les fonctions thêta d'ordre *deux,* de caractéristique nulle, et paires.

Nous énoncerons enfin le théorème suivant relatif aux unicursales C, et qui se déduit aisément de leur équation hyperelliptique :

Les courbes C_0 et C_1 *forment l'intersection complète de la surface* Σ *par une surface algébrique d'ordre* $2p_1$*; plus généralement on peut faire passer par la courbe* C_k *une surface algébrique ayant avec la surface* Σ *un contact d'ordre* $\left(\frac{n_k}{n_1} - 1\right)$ *le long de l'unicursale singulière* C_0, *et ne la coupant pas en dehors des courbes* C_0 *et* C_k.

VI.

16. Les considérations précédentes permettent d'établir un lien entre l'équation $\Delta n^2 - 2p^2 = 1$ et l'équation algébrique

$$f_p(a, b, c, d) = 0,$$

qui exprime que la surface du quatrième ordre à quinze points doubles de paramètres a, b, c, d possède une unicursale d'ordre $4p$ (sans points multiples et ne passant par aucun point double de la surface).

Soit p un entier quelconque : décomposons le nombre $2p^2 + 1$ de toutes les manières possibles en un produit de deux facteurs dont l'un soit carré parfait,

$$2p^2 + 1 = \Delta n^2 = \Delta' n'^2 = \ldots,$$

et considérons les surfaces hyperelliptiques Σ_Δ, $\Sigma_{\Delta'}$, ...

Remarquons tout d'abord que, dans le cas où $2p^2 + 1$ est carré parfait, on ne doit pas considérer la décomposition $\Delta = 1$, $n = \sqrt{2p^2 + 1}$, à laquelle ne correspond pas de surface. Au contraire, on doit considérer la décomposition $\Delta = 2p^2 + 1$, $n = 1$, à laquelle correspond la surface Σ_{2p^2+1}.

Ceci posé, nous distinguerons les décompositions en deux classes, suivant que n et p forment ou non la ***plus petite solution*** de l'équation $\Delta n^2 - 2p^2 = 1$.

Dans ce dernier cas, soit k le rang de la solution n, p, et soit n_1, p_1 la plus petite solution. D'après les résultats du paragraphe V, la surface Σ_Δ qui correspond aux entiers Δ, n_1, p_1 possède une unicursale C de degré $4p$, à savoir celle d'indice k. L'équation $f_p(a, b, c, d) = 0$ renfermera donc en facteur le premier membre de l'équation $f_{p_1} = 0$, qui caractérise la surface Σ_Δ.

Supposons que l'on ait formé toutes les équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ..., jusqu'à $f_{p-1} = 0$. Parmi les polynomes $f_\pi (\pi < p)$, on peut prévoir *a priori* ceux que contiendra en facteur l'équation $f_p = 0$ et, par des opérations rationnelles, on débarrassera l'équation $f_p = 0$ de ces facteurs.

Il reste donc à étudier les décompositions Δn^2 de la première classe. A chacune d'elles correspond une surface Σ_Δ possédant deux unicursales C_0, C_1 d'ordre $4p$ et n'en possédant pas de degré moindre. L'équation $f_p(a, b, c, d) = 0$ proprement dite se décomposera donc en autant d'équations qu'il y a de décompositions Δn^2 de première classe.

17. Voici deux remarques qui permettront dans la plupart des cas de reconnaître de suite à quelle classe appartient une décomposition donnée $2p^2 + 1 = \Delta n^2$.

La deuxième solution n_2, p_2 de l'équation (E) se calcule aisément en fonction de n_1, p_1 par les formules S :

$$n_2 = n_1(8p_1^2 + 1),$$
$$p_2 = p_1(8p_1^2 + 3).$$

Dès lors p_2 ne peut être un nombre premier que si $p_1 = 1$, et d'ailleurs il en serait de même de tous les nombres p_k qui contiennent p_1 en facteur : donc, si p est un nombre premier différent de *onze*, toutes les décompositions Δn^2 seront de la première classe.

D'autre part n_2 peut se mettre sous la forme

$$n_2 = n_1(4\Delta n_1^2 - 3);$$

or

$$n_1 \geqq 1;$$

donc, si k est différent de 1,

$$n_k \geqq 4\Delta - 3.$$

Dès lors, si $n < 4\Delta - 3$, on est assuré que n, p est la plus petite solution de l'équation (E), c'est-à-dire que la décomposition Δn^2 est de première classe.

18. Il résulte de l'étude que nous avons faite des unicursales C tracées sur la surface Σ_Δ qu'il n'existe pas d'autre surface de la famille étudiée qui possède une unicursale d'ordre $4p$ (sans points multiples et ne passant par aucun point double) en dehors de celles que nous venons de considérer. Mais l'analyse précédente ne prouve pas que l'équation $f_p = 0$ ne renferme pas d'autres facteurs étrangers correspondant par exemple à des surfaces qui ne seraient pas hyperelliptiques.

Quoi qu'il en soit, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Il existe autant de types de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre à quinze points doubles possédant une unicursale d'ordre $4p$ (sans points multiples et ne passant par aucun point double) que le nombre $2p^2+1$ admet de diviseurs carrés. Dans cet énoncé on doit comprendre le diviseur 1, mais non le diviseur $\sqrt{2p^2+1}$ au cas où $2p^2+1$ est un carré.

Sous une autre forme :

L'équation algébrique qui exprime qu'une surface du quatrième ordre à quinze points doubles possède une unicursale d'ordre $4p$ se décompose en autant de facteurs, au moins, que le nombre $2p^2+1$ possède de diviseurs carrés (y compris 1 et non compris $\sqrt{2p^2+1}$).

SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME ORDRE QUI ADMETTENT POUR LIGNE ASYMPTOTIQUE UNE COURBE DE QUATRIÈME ORDRE ET DE QUATRIÈME CLASSE;

PAR M. CH. BIOCHE.

1. La détermination du nombre des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface contienne une courbe donnée est dans le cas général un problème délicat. Il en est de même, évidemment, de la détermination du nombre des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe soit ligne asymptotique, ou, autrement dit, ait, à la fois, ses points sur la surface et ses plans osculateurs tangents à la surface. Cependant, on peut traiter facilement le problème dans quelques cas simples ([1]); il m'a semblé que les résultats obtenus dans des cas particuliers d'un problème généralement difficile pouvaient présenter quelque intérêt.

Je considère ici le cas où la courbe est de quatrième ordre et de quatrième classe. Je rappellerai qu'il y a deux sortes de courbes à distinguer ([2]); les unes sont les transformées homographiques de la biquadratique

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1},$$

dont le plan osculateur a pour équation

$$X - 6\lambda^2 Y + 8\lambda^3 Z - 3\lambda^4 T = 0;$$

les autres sont les transformées homographiques de la quartique à sécantes triples

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1},$$

dont le plan osculateur a pour équation

$$X - 2\lambda Y + 2\lambda^3 Z - \lambda^4 T = 0.$$

2. *Surfaces du troisième ordre ayant pour ligne asympto-*

([1]) J'ai déjà étudié le cas où la courbe donnée est une cubique gauche dans deux Mémoires (*Bull. Soc. math.*, t. XXVI, 1898 et t. XXVII, 1899).

([2]) Voir *Bull. Soc. math.*, t. XXXIII, 1905, p. 18.

tique une biquadratique de quatrième classe. — Il est facile de voir que les points d'intersection d'une biquadratique avec une surface algébrique d'ordre quelconque ne sont pas *indépendants*. En particulier, toutes les surfaces du troisième ordre qui passent par 11 points d'une pareille courbe ont en commun un 12ᵉ point, l'équation qui donne les λ des points d'intersection n'ayant pas de terme du onzième degré.

Il suffit donc d'écrire que la surface passe par un point indépendant des 11 premiers pour qu'elle contienne 13 points, et, par suite, tous les points de la courbe. On a donc, dans l'équation générale des surfaces du troisième ordre qui contiennent la courbe, 12 paramètres de moins que dans l'équation générale du troisième ordre. Il est facile de vérifier que la première équation peut s'écrire

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z, T) = (Y^2 - XT)(AX + BY + CZ + DT) \\ + (Z^2 - YT)(A'X + B'Y + C'Z + D'T) = 0. \end{aligned}$$

Pour exprimer que le plan osculateur à la biquadratique est tangent à la surface il suffit, comme ce plan contient déjà la tangente à la courbe, d'écrire qu'il coupe une arête du tétraèdre de référence au même point que le plan osculateur, on a ainsi l'équation

$$\frac{F'_x(\lambda^4, \lambda^2, \lambda, 1)}{1} = -\frac{F'_y(\lambda^4, \lambda^2, \lambda, 1)}{6\lambda^2}.$$

Cette équation est du sixième degré en λ. Donc il y a 6 plans osculateurs qui touchent la surface en leurs points de contact avec la courbe; l'équation n'ayant pas de terme en λ^5 ces points ne sont pas indépendants; il y a donc 6 conditions seulement à exprimer pour que la courbe soit ligne asymptotique; on obtient alors, comme équation générale des surfaces cherchées,

$$\alpha(Y^3 + XYT - 4XZ^2) + \beta(4YZ^2 - 5Y^2T + XT^2) = 0.$$

On a en évidence dans cette équation deux surfaces du quatrième ordre, qui se conservent par toute transformation homographique conservant la biquadratique. Ces surfaces se coupent suivant la biquadratique, le long de laquelle elles se touchent et suivant la droite $X = Y = 0$.

3. *Surfaces du quatrième ordre ayant pour asymptotique une biquadratique de quatrième classe.* — Il suffit de 16 conditions pour que la surface du quatrième ordre contienne une biquadratique de quatrième classe; il reste alors, dans l'équation d'une pareille surface, 19 termes et l'on peut l'écrire

$$\begin{aligned}[&(Z^2-YT)(AX^2+A'Y^2+A''Z^2+2BYZ+2B'ZX\\&\qquad+2B''XY+2CXT+2C'YT+2C''ZT+DT^2)\\&+(Y^2-XT)[A_1X^2+A'_1Y^2+2B_1YZ+2B'_1ZX\\&\qquad+2B''_1XY+2C_1XT+2C'_1YT+2C''_1ZT+D_1T^2]=0.\end{aligned}$$

On a en évidence, dans cette équation, outre les premiers membres des équations de deux quadriques simples contenant la biquadratique, ceux qui correspondent à deux autres quadriques, les premiers membres des équations de ces dernières contenant l'un 10 termes, l'autre 9 seulement, car on peut ne pas y écrire de terme en Z^2.

Si l'on forme, en opérant comme précédemment, l'équation qui donne les points où les plans osculateurs sont tangents à la surface, on obtient une équation du 10^e degré. Il y a donc 10 plans osculateurs tangents à la surface; mais, *ces plans n'étant pas indépendants,* il suffit encore de 10 équations de condition pour exprimer que tous les plans sont tangents à la surface. Il reste donc 9 termes seulement dans l'équation que l'on peut écrire, en mettant en évidence les deux surfaces particulières du troisième ordre, obtenues au paragraphe précédent,

$$\begin{aligned}&(Y^3+3XYT-4XZ^2)(AX+BY+CZ+DT)\\&\quad+(4YZ^2-5Y^2T+XT^2)(A'X+B'Y+C'Z+D'T)+K(Z^2-YT)^2=0.\end{aligned}$$

4. *Surfaces du troisième ordre ayant pour ligne asymptotique une quartique à sécantes triples.* — Les points d'intersection d'une telle courbe avec une surface sont *indépendants;* il y a donc 13 équations de condition à écrire pour exprimer qu'une surface du troisième ordre contient la courbe; l'équation de cette surface peut s'écrire

$$\begin{aligned}&A(X^2Z-Y^3)+B(XZ^2-Y^2T)+C(YT^2-Z^3)\\&\qquad+(XT-YZ)(\alpha X+\beta Y+\gamma Z+\delta T)=0;\end{aligned}$$

l'équation qui détermine les points de contact des plans osculateurs tangents à la surface est

$$A\lambda^6 + \alpha\lambda^5 + \beta\lambda^4 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + C = 0.$$

Il y a donc 6 plans osculateurs tangents à la surface, mais l'équation n'ayant pas de terme en λ^3 ces plans ne sont pas indépendants. Il en résulte qu'il suffit, pour exprimer que la ligne est asymptotique, d'écrire 6 équations de condition. On voit immédiatement que l'équation de la surface est

$$XZ^2 - Y^2T = 0.$$

Il n'y a donc qu'une surface du troisième ordre admettant comme asymptotique une quartique de quatrième classe à sécantes triples, c'est la surface réglée à directrices distinctes. On savait bien qu'une pareille surface avait ses lignes asymptotiques du quatrième ordre et de quatrième classe, avec des sécantes triples; on voit que c'est la seule catégorie de surfaces du troisième ordre admettant une ligne asymptotique de cette nature.

5. *Surfaces du quatrième ordre ayant pour ligne asymptotique une quartique de quatrième classe à sécantes triples.* — On a 17 équations de condition à écrire pour exprimer qu'une surface du quatrième ordre contient la courbe; il reste donc dans l'équation de la surface 18 termes. L'équation qui donne les λ des points où le plan osculateur est tangent à la surface est du dixième degré; cette équation est complète et il n'existe aucune relation entre coefficients de termes de degrés différents, de sorte que *les plans sont indépendants,* tandis qu'il n'en était pas de même dans les autres cas traités déjà. On a alors 11 conditions nouvelles à exprimer pour que la courbe soit asymptotique, et il reste 7 termes dans l'équation qui peut s'écrire :

$$\begin{aligned}(X^2Z - Y^2T)(AX + BY + CZ + DT) + \alpha(YZ - XT)^2 \\ + \beta(Y^4 - 2X^2YZ + X^3T) + \gamma(Z^4 - 2YZT^2 + XT^3) = 0.\end{aligned}$$

On a en évidence dans l'équation une surface particulière se décomposant en un plan et une surface réglée du troisième ordre, un système de deux quartiques confondues, et deux surfaces du quatrième ordre proprement dites.

Les équations de ces dernières se déduisent l'une de l'autre en remplaçant X, Y, Z, T par T, Z, Y, X. Ce sont des surfaces réglées ayant chacune pour directrice triple la tangente à la ligne asymptotique, en un de ses points d'inflexion linéaire. Les génératrices de chacune de ces surfaces appartiennent à une congruence linéaire ayant ses directrices confondues ([1]).

6. *Points doubles des surfaces.* — Les surfaces passant par une courbe algébrique et ayant cette courbe comme asymptotique possèdent des points doubles situés sur la courbe. C'est une propriété générale que j'ai déjà eu occasion de signaler dans le cas où la courbe est une cubique gauche ([2]).

Il suffit, pour le voir, de remarquer que les dérivées partielles du premier membre de l'équation de la surface, qui sont les coefficients de l'équation du plan tangent, sont proportionnelles aux coefficients de l'équation du plan osculateur. Or le coefficient de X dans cette équation étant 1, le coefficient de proportionnalité est F'_x. Donc on aura des points doubles donnés par

$$F'_x(\lambda^4, \lambda^2, \lambda, 1) = 0$$

dans le cas de la biquadratique, et par

$$F'_x(\lambda^4, \lambda^3, \lambda, 1) = 0$$

dans le cas de l'autre courbe. Il est facile de reconnaître que la première équation est du huitième degré en λ et la seconde du sixième.

On voit ainsi que, bien que les courbes soient du même ordre et de la même classe, les degrés des équations déterminant les points doubles ne sont pas les mêmes.

J'ajouterai que les équations peuvent avoir des racines multiples, et que, par suite, plusieurs points doubles peuvent se confondre. Ce fait se produit sans que l'ordre de multiplicité des points augmente, en général. Ordinairement il y a seulement décomposition du cône des tangentes. Des faits analogues se produisaient quand la ligne asymptotique était une cubique gauche.

([1]) Voir *Bull. Soc. math.*, t. XIX, p. 120.
([2]) Voir *Bull. Soc. math.*, t. XXVI, 1898, p. 226.

SUR LE GROUPE DES ÉQUATIONS TRINOMES;

PAR M. T. LALESCO.

1. Toute équation trinome peut être réduite à la forme

$$(1) \qquad x^n - kax + a = 0,$$

où a désigne un paramètre arbitraire et k la constante $n:(n-1)^{\frac{n-1}{n}}$.

Je me propose de démontrer que le groupe de Galois de cette équation, si son degré est premier, *est le groupe symétrique*.

En effet, les seules racines en a de son discriminant sont 0 et 1; si donc on envisage les racines de (1) comme fonctions de a, autour de l'origine elles formeront un seul cycle et autour du point $a = 1$ il y en a seulement deux qui se permutent, puisque la dérivée seconde de (1) ne s'annule plus pour $x \neq 0$.

Le groupe de monodromie de (1) est donc d'abord transitif à cause du cycle de n racines; il contient d'ailleurs une transposition provenant de la permutation de deux racines autour du point $a = 1$. D'après un théorème bien connu, ce groupe est donc ou imprimitif ou bien identique au groupe symétrique; comme n est premier, la seconde hypothèse est la seule admissible.

Dès lors, le groupe de Galois de l'équation (1), admettant le groupe de monodromie comme sous-groupe invariant, se confondra lui aussi avec le groupe symétrique.

2. D'après un théorème de M. D. Hilbert, il existe *dans ce cas* une infinité de valeurs rationnelles du paramètre a pour lesquelles le groupe de l'équation (1) sera toujours le groupe symétrique. Par conséquent *une équation trinome, en général, sera sans affect.*

Voici d'ailleurs une démonstration très simple de l'important théorème de M. Hilbert, que nous venons de rappeler.

Soit u un élément primitif du corps de l'équation (1) et soient $u_1, u_2, \ldots, u_N$ ses valeurs conjuguées; par définition, deux quelconques de ces expressions ne peuvent pas être *identiquement* égales ([1]). Par conséquent, il existera une infinité de valeurs rationnelles du paramètre a telles que les valeurs numériques correspondantes des éléments u_i soient toutes différentes entre elles, ce qui suffit pour démontrer la proposition.

CONSTRUCTION DES RAYONS DE COURBURE D'UNE CLASSE DE COURBES ET DE SURFACES;

Par M. A. Pellet.

1. Par un point T pris sur la tangente en M à une conique, menons une perpendiculaire sur la polaire de ce point T, et soit N sa rencontre avec la normale en M ; par les points T et N, menons des perpendiculaires sur la tangente et la normale et soit τ le point de rencontre de ces perpendiculaires ; le lieu du point τ lorsque T se déplace sur la tangente en M est une droite qui passe par le centre de courbure en M, par le pôle de la normale MN, et coupe à angle droit la symétrique du diamètre de la conique qui passe en M. Nous appellerons ce lieu du point τ, pour abréger, *axe de déviation* de la conique au point M. En un point M d'une courbe quelconque, les coniques ayant un contact du troisième ordre avec la courbe ont même axe de déviation, qui par suite peut être désigné par les mots *axe de déviation de la courbe en* M. En un point de rencontre de deux coniques homofocales, les axes de déviation de deux coniques coïncident. Plus généralement, soit M un point d'une quadrique : le plan tangent en M coupe les deux quadriques homofocales passant en M suivant deux coniques qui ont le même axe de déviation, lequel n'est autre que la polaire de la normale en M à la première quadrique par rapport à cette quadrique. En effet, menons par cette normale un plan quelconque; le lieu des pôles de ce plan par rapport aux quadriques homofocales est une droite qui lui est perpendiculaire, se trouve dans le plan tangent en M et rencontre les normales des qua-

([1]) Elles ne sont donc égales que pour un nombre fini de valeurs de a, racines d'un certain nombre d'équations algébriques en a.

driques homofocales passant par M en deux points d'où l'on déduit un point τ appartenant à la fois aux deux axes de déviation.

2. Soit

$$y = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a_1 x^3}{6} + \dots$$

l'équation d'une courbe rapportée à une tangente et la normale correspondante. a_1 est égale à $\frac{da}{ds}$. L'équation du diamètre de la courbe à l'origine est

$$ax + \frac{a'}{3a}y = 0;$$

et celle de l'axe de déviation

$$ay + \frac{a'}{3a}x = 1.$$

La normale à l'axe de déviation menée par l'origine va couper le rayon de courbure de la développée au tiers de sa longueur, comptée à partir du point de contact avec la normale $x = 0, y = \frac{1}{a}$.

Pour une courbe normale,

$$x = \frac{a'y^2}{2} + \frac{a'_1 y^3}{6} + \dots,$$

ayant même axe de déviation, on aura

$$aa' = \frac{a'}{3} = \frac{a'_1}{3}.$$

3. Prenons un triangle de référence ABC; et soient X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées d'un point M, $AX + BY + CZ = 0$ l'équation d'une droite passant par ce point M, MT.

Les courbes

$$(1) \qquad AX_0\left(\frac{X}{X_0}\right)^m + BY_0\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^m + CZ_0\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^m = 0,$$

$$(2) \qquad \left(\frac{X}{X_0}\right)^{Ax_0}\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^{By_0}\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{Cz_0} = 1$$

passent par le point M et sont tangentes à MT; rapportons ces courbes à leurs coordonnées normales en M, la droite MT, et la perpendiculaire menée par M à cette droite, axes des x et des y, il vient

$$y = \frac{(1-m)a}{2}x^2 + \frac{(1-m)(a_1 m + a_1')}{6}x^3 + \ldots ;$$

l'équation de la courbe (2) correspond à $m = 0$.

L'axe de déviation de ces courbes au point M a pour équation

$$(1-m)ay + \frac{a_1 m + a_1'}{3a}x = 1.$$

Ainsi, lorsque m varie, l'axe de déviation passe par un point fixe, et, pour construire l'axe de déviation d'une de ces courbes, il suffit de connaître les axes de déviation des courbes correspondant à deux valeurs de m.

Or, pour $m = 2$, l'équation (1) représente une conique conjuguée au triangle ABC. Soient a, b, c les points de rencontre de BC, CA, AB avec MT; a est le pôle de MA, b celui de MB et c de MC. On en déduit trois points de l'axe de déviation de cette conique au point M.

Pour $m = -1$, l'équation (1) représente une conique circonscrite au triangle ABC; a est le pôle de la droite joignant M au conjugué harmonique de a par rapport aux points B et C; b celui de la droite joignant M au conjugué harmonique de b par rapport aux points B et C; c celui de la droite joignant M au conjugué harmonique de c par rapport aux points A et B. Pour $m = \frac{1}{2}$, l'équation (1) représente une conique inscrite au triangle ABC; et l'on peut construire les pôles des droites MA, MB, MC. Le pôle de la droite AM, par exemple, est à l'intersection de la droite conjuguée harmonique de AM par rapport aux droites AB, AC avec MT. Ainsi, pour $m = 2$, $m = -1$ et $m = \frac{1}{2}$, on peut construire les axes de déviation des coniques correspondantes et l'on en déduira l'axe de déviation de la courbe (1) pour les autres valeurs de m.

4. L'enveloppe des polaires d'un point fixe P pris sur la droite $AX + BY + CZ = 0$ par rapport aux coniques conjuguées au triangle ABC et tangentes à cette droite est la conique inscrite au

triangle ABC et tangente à cette droite $AX + BY + CZ = o$ au point P.

L'équation de ces coniques est, en effet,

$$A\frac{X^2}{X_0} + B\frac{Y^2}{Y_0} + C\frac{Z^2}{Z_0} = o,$$

X_0, Y_0, Z_0 étant reliées par la relation

$$AX_0 + BY_0 + CZ_0 = o.$$

La polaire du point P, X_1, Y_1, Z_1 étant ses coordonnées, a pour équation

$$A\frac{X_1X}{X_0} + B\frac{Y_1Y}{Y_0} + C\frac{Z_1Z}{Z_0} = o,$$

et l'enveloppe de cette droite lorsqu'on fait varier X_0, Y_0, Z_0

$$A\sqrt{X_1X} + B\sqrt{Y_1Y} + C\sqrt{Z_1Z} = o,$$

conique qui passe par le point X_1, Y_1, Z_1 si ce point est situé sur la droite $AX + BY + CZ = o$.

Une conique est conjuguée par rapport au triangle formé par ses deux axes et la droite de l'infini; on en déduit que l'axe de déviation d'une conique en un point M est la polaire de ce point par rapport à la parabole inscrite dans le quadrilatère formé par les deux axes de la conique, la tangente et la normale en M. Les axes des coniques ayant un contact du troisième ordre avec une courbe en un point M de cette courbe sont tangents à une même parabole.

5. Soit ABCD un tétraèdre de référence, X_0, Y_0, Z_0, T_0 un point P du plan

$$(1) \qquad AX + BY + CZ + DT = o,$$

les surfaces

$$(2) \qquad AX_0\left(\frac{X}{X_0}\right)^m + BY_0\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^m + CZ_0\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^m + DT_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^m = o,$$

$$(3) \qquad \left(\frac{X}{X_0}\right)^{AX_0}\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^{BY_0}\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{CZ_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{DT_0} = 1$$

sont tangentes au plan (1) au point X_0, Y_0, Z_0, T_0. Si on les rapporte à une perpendiculaire en ce point à ce plan, axe des z, et à deux droites rectangulaires situées dans ce plan, il vient

$$z = \frac{1-m}{2}u_2 + \frac{(1-m)(2-m)}{2.3}u_3 + \ldots$$
$$+ \frac{(1-m)(2-m)\ldots(n-m)}{1.2\ldots n}u_n + \ldots,$$

u_2, u_3, .., u_n, ... étant des fonctions homogènes de x, y, z, indépendantes de m. Ces surfaces ont donc mêmes directions asymptotiques en P, et les rayons de courbure d'une section plane sont inversement proportionnels à $1 - m$.

Or, pour $m = 2$, l'équation (2) représente une quadrique conjuguée au tétraèdre ABCD. Les faces de ce tétraèdre coupent le plan (1) suivant un quadrilatère; les droites joignant le point P aux sommets opposés de ce quadrilatère forment trois couples de droites en involution; les directions asymptotiques des surfaces (2) et (3) sont les rayons doubles de cette involution, PI et PI_1. Menons dans le plan (1) une droite PJ; elle coupe les faces du tétraèdre BCD, CDA, DAB, ABC aux points a, b, c, d, dont on peut construire les plans polaires par rapport à la quadrique

$$AX_0\left(\frac{X}{X_0}\right)^2 + BY_0\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^2 + CZ_0\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^2 + DT_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = 0.$$

Le plan polaire de a, par exemple, est le plan mené par les droites PJ_1 et PA, PJ_1 étant la conjuguée harmonique de PJ par rapport aux directions asymptotiques PI, PI_1.

Menons par PJ un plan quelconque; il coupe la quadrique (2) suivant une conique et les plans polaires de a, b, c, d suivant des droites qui sont les polaires de ces points par rapport à la conique. On en déduira quatre points de l'axe de déviation de la conique en P.

SUR LES SÉRIES ENTIÈRES ET LES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES;

Par M. E. Goursat.

1. Étant donnée une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

où le second membre est une fonction holomorphe des variables x et y dans le domaine D défini par les conditions

$$|x| \leqq a, \qquad |y| \leqq b,$$

et dont le module ne dépasse pas un nombre positif M dans ce domaine D, on sait que l'intégrale de l'équation (1) qui prend la valeur $y = 0$ pour $x = 0$ est holomorphe à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine pour centre, dont le rayon est au moins égal au plus petit des deux nombres a et $\frac{b}{M}$. C'est là un résultat aujourd'hui classique, qui se déduit aisément de la première méthode de Cauchy, ainsi que de la méthode des approximations successives de M. Picard.

Il paraît difficile d'avoir une limite plus avantageuse pour le rayon du domaine où l'intégrale est holomorphe, si l'on ne possède pas sur la fonction $f(x, y)$ d'autres renseignements que ceux qui figurent dans l'énoncé que je viens de rappeler. Mais, si l'on connaît le domaine de convergence de la série entière $f(x, y)$, on peut énoncer un résultat plus précis, qui donne dans tous les cas le moyen d'avoir la limite la plus grande possible fournie par l'application du théorème précédent.

2. Nous rappellerons d'abord, en les précisant sur certains points, les propositions principales relatives aux séries entières à plusieurs variables.

Soit

$$\sum a_{mn} x^m y^n \tag{2}$$

une série entière en x et y, à coefficients quelconques. D'après un théorème classique, si cette série est convergente pour $x = x_0$, $y = y_0$ (ou du moins si le module du terme général $a_{mn} x_0^m y_0^n$ reste inférieur à un nombre fixe, quels que soient m et n), la série (2) est absolument convergente pour tout système de valeurs de x et de y tel que l'on ait à la fois

$$|x| < |x_0|, \qquad |y| < |y_0|.$$

Si l'on décrit de l'origine comme centre, dans les plans des x et des y respectivement, deux cercles C et C′ de rayon $|x_0|$ et $|y_0|$ respectivement, la somme $F(x, y)$ de la série (2) est une fonction holomorphe des variables x et y, lorsque la variable x reste dans le cercle C et la variable y dans le cercle C′. On se contente généralement d'établir ce résultat dans la plupart des Cours d'Analyse, et d'étudier la fonction $F(x, y)$ dans le domaine qui vient d'être défini.

Pour avoir une idée plus précise du domaine de convergence de la série (2), commençons par étudier la série des modules

$$(3) \qquad \sum A_{mn} X^m Y^n, \qquad A_{mn} = |a_{mn}|, \qquad X = |x|, \qquad Y = |y|,$$

et cherchons dans quelle partie de l'angle XOY on doit prendre le point de coordonnées (X, Y) pour que cette série (3) soit convergente.

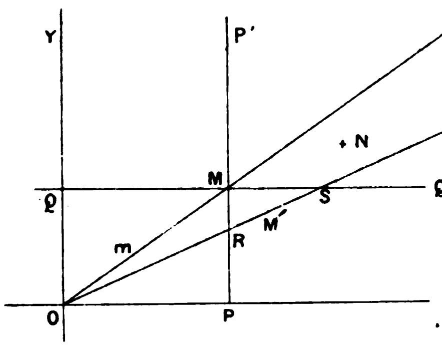
D'après le théorème rappelé au début de ce paragraphe, si la série (3) est convergente pour les coordonnées d'un point M pris dans l'angle XOY, elle est aussi convergente en tout point pris à l'intérieur ou sur les côtés du rectangle OPMQ, ayant deux côtés sur OX et OY et dont le point M est un sommet. Au contraire, si la série est divergente au point M, elle est forcément divergente en tout point N pris dans l'angle P′MQ′ ou sur les côtés MP′, MR′ de cet angle; car, si la série était convergente au point N, elle le serait *a fortiori* au point M.

Cela posé, considérons une demi-droite indéfinie OL dans l'angle XOY, et un point m décrivant cette droite à partir de l'origine. Les coordonnées de ce point m, et par suite tous les termes de la série (3), vont en croissant lorsque le point m s'éloigne de l'origine. Il y a donc sur la droite OL un point séparatif M tel que la série (3) est convergente pour tout point du segment OM compris entre l'origine et le point M, et divergente pour tout point de OL au delà du point M (¹).

Comme cas particuliers, il peut arriver que le point M soit à l'origine; les deux séries (3) et (2) sont alors divergentes sauf pour $x = y = 0$. Si le point M est rejeté à l'infini, la série (3) est au contraire absolument convergente, quels que soient x et y, et représente une fonction entière des deux variables x et y.

Laissant de côté ces cas extrêmes, sur chaque demi-droite située dans l'angle XOY, nous avons ainsi un point M, dont la distance à l'origine varie d'une manière continue avec le coefficient angulaire λ de cette droite. Soit en effet OL′ une demi-droite voisine de OL (*fig.* 1). La série (3) est convergente pour tout

Fig. 1.



point du segment OM et par suite pour tout point du segment OR; au contraire, cette série (3) est divergente en tout point de la demi-droite indéfinie ML et par suite en tout point de la demi-droite indéfinie SL′. Le point séparatif M′ de la demi-droite OL′ est donc un point du segment RS, et par conséquent ce point M′ vient se confondre avec le point M lorsque OL′ vient se confondre avec OL. Il est à remarquer que la démonstration ne s'applique plus aux axes eux-mêmes OX et OY. Lorsque OL vient se con-

(¹) Si λ est le coefficient angulaire de la droite OL, l'abscisse du point M est l'inverse de *la limite supérieure pour n infini de l'expression* $\sqrt[n]{A_{pq}\lambda^q}$, où $n = p + q$ (Lemaire, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1906, p. 286). Il serait intéressant d'étudier, au moins dans quelques cas simples, la fonction de λ ainsi définie.

fondre avec OY, le point M ne tend pas forcément vers le point séparatif situé sur OY, comme nous en verrons tout à l'heure un exemple.

Le lieu décrit par le point M lorsque la demi-droite OL décrit l'angle XOY est donc une courbe continue Γ. Il résulte de la façon même dont on a obtenu cette courbe que, si $x = R$, $y = R'$ sont les coordonnées d'un point quelconque de Γ, *la série* (2) *est absolument convergente si l'on a à la fois*

$$|x| < R, \quad |y| < R',$$

et divergente si l'on a à la fois

$$|x| > R, \quad |y| > R'.$$

Les cercles C et C', de rayon R et R', décrits de l'origine pour centre dans les plans des variables x et y respectivement, constituent un système de *cercles de convergence associés*. A tout point de la courbe Γ correspond un pareil système de cercles associés.

D'une façon générale, la série (2) est absolument convergente pour un système de valeurs des variables x et y, si le point m de coordonnées $|x|$ et $|y|$ est intérieur à la courbe Γ, divergente si ce point m est extérieur à Γ. Il y a doute si le point m est sur Γ.

L'ensemble des systèmes de valeurs des variables complexes x et y, tels que le point m de coordonnées $|x|$ et $|y|$ soit à l'intérieur de Γ constitue un continuum connexe D de l'espace à quatre dimensions, à l'intérieur duquel la série (2) est absolument convergente, et la somme $F(x, y)$ de cette série est une fonction holomorphe des variables x et y dans ce domaine D.

3. Cette courbe séparatrice Γ peut avoir des formes très diverses, suivant la série considérée. Il résulte seulement du raisonnement fait plus haut que l'ordonnée d'un point de cette courbe ne peut augmenter lorsque l'abscisse augmente et inversement. Pour voir ce qui arrive lorsque OL tend vers OX, il suffit de remarquer que l'abscisse du point M ne peut décroître et que l'ordonnée de ce point ne peut augmenter; y tend donc vers une limite finie, tandis que x peut tendre vers une limite ou augmenter indéfiniment. La courbe Γ peut donc aboutir à un point de OX, ou avoir une

asymptote parallèle à OX, qui peut être l'axe lui-même. Il est clair que tout cela s'applique aussi à l'axe OY. Nous allons donner quelques exemples.

1° La série double

$$\sum_{m,n} \mathrm{M}\left(\frac{x}{a}\right)^m \left(\frac{y}{b}\right)^n = \frac{\mathrm{M}}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)}$$

est convergente si l'on a à la fois

$$|x| < a, \qquad |y| < b,$$

et dans ce cas seulement. La courbe Γ est formée ici des deux côtés d'un rectangle parallèle aux axes. On prend généralement une fonction majorante de ce type dans les démonstrations du calcul des limites, mais il y aurait souvent avantage à prendre des majorantes appartenant à des types différents.

2° La série double

$$\sum_{m,n} \mathrm{M}\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\left(\frac{x}{a}\right)^m \left(\frac{y}{b}\right)^n = \frac{\mathrm{M}}{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}$$

n'est absolument convergente que si l'on a

$$\left|\frac{x}{a}\right| + \left|\frac{y}{b}\right| < 1.$$

La courbe Γ est ici le segment de la droite

$$\frac{\mathrm{X}}{a} + \frac{\mathrm{Y}}{b} = 1,$$

compris entre les axes OX, OY.

3° La série double $\Sigma a_{mn} x^m y^n$, où l'on a $a_{mm} = 1$, et $a_{mm} = 0$ (pour $m \neq n$), n'est convergente que si l'on a $|xy| < 1$. La courbe Γ est une branche d'hyperbole asymptote aux deux axes.

4° La série

$$\sum{}' \mathrm{M}\left(\frac{x}{a}\right)^m \left(\frac{y}{b}\right)^n,$$

où les indices m et n varient de *un* à $+\infty$, est encore divergente si l'on a $|x| > a$ ou $|y| > b$. La courbe Γ se compose donc, comme dans le second exemple, des deux côtés d'un carré, et cependant la série est aussi convergente pour $x=0$ ou pour $y=0$. Lorsque la demi-droite OL tend vers OX, le point M de OL tend vers le point d'abscisse a sur OX, tandis que le point séparatif sur l'axe est rejeté à l'infini.

4. Reprenons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \tag{1}$$

et soit Γ la courbe que nous venons de définir relativement à la série entière

$$f(x,y)=\sum a_{mn}x^m y^n.$$

La fonction $f(x, y)$ est holomorphe dans le domaine D correspondant, et nous supposerons que $|f(x,y)|$ ne dépasse jamais un nombre positif M dans ce domaine. On peut toujours satisfaire à cette condition en remplaçant au besoin la courbe Γ par une courbe homothétique Γ' relativement à l'origine, et infiniment voisine de Γ.

Soit N un point de Γ de coordonnées (a, b). La fonction $f(x,y)$ est holomorphe lorsque l'on a à la fois $|x|<a$, $|y|<b$, et, d'après le résultat classique rappelé au début de cet article, l'intégrale de l'équation (1), qui est nulle pour $x=0$, est certainement holomorphe dans un cercle de rayon h, h étant le plus petit des deux nombres

$$a=\mathrm{OP},\qquad \frac{b}{\mathrm{M}}=\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{M}}.$$

Pour avoir la valeur de h la plus grande possible, il faut choisir le point N sur Γ de façon que le plus petit des deux nombres OP et $\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{M}}$ soit le plus grand possible.

Il suffit pour cela de prendre *le point d'intersection de la courbe* Γ *avec la demi-droite* OL *de coefficient angulaire* M.

En effet, si le point N est sur cette droite, on a $\mathrm{NP}=\mathrm{M}\times\mathrm{OP}$, ou

$$\mathrm{OP}=\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{M}}.$$

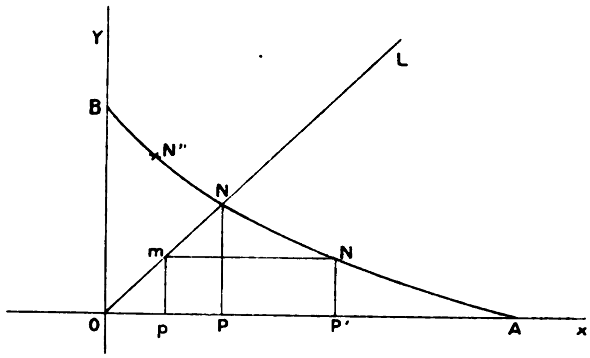
Pour un point N' de Γ à droite du point N (*fig.* 2), on a $\mathrm{OP}'>\mathrm{OP}$, mais

$$\frac{N'P'}{M} = \frac{mP}{M} = Op < OP.$$

Pour un point N″ de Γ à gauche de N, l'abscisse au contraire est inférieure à OP.

En définitive, l'intégrale de l'équation (1), qui est nulle pour

Fig. 2.



$x = 0$, est holomorphe dans un cercle décrit de l'origine pour centre, *dont le rayon est au moins égal à l'abscisse du point d'intersection de la courbe* Γ *avec la droite* $Y = MX$.

Lorsque la courbe Γ se réduit aux deux côtés du rectangle formé par les axes et les deux droites $X = a$, $Y = b$, on retrouve bien la limite ordinaire.

5. Les considérations développées plus haut s'étendent évidemment aux séries entières à un nombre quelconque de variables. Prenons en particulier une série entière à trois variables

$$(4) \qquad \sum a_{mnp} x^m y^n z^p,$$

et soit

$$(5) \qquad \sum A_{mnp} X^m Y^n Z^p$$

la série des modules correspondante. Sur chaque demi-droite OL située dans le trièdre OXYZ, il existe un point M séparant les points pour lesquels la série (5) est convergente des points pour lesquels elle est divergente. Le lieu de ce point M est une surface Σ située dans le trièdre OXYZ, qui peut avoir des formes très variées, mais qui satisfait toujours à la condition suivante : si (a, b, c) sont les coordonnées d'un point de Σ, tous les points intérieurs au parallélépipède formé par les 6 plans

$$X = 0, \quad X = a, \quad Y = 0, \quad Y = b, \quad Z = 0, \quad Z = c,$$

sont aussi intérieurs à Σ.

La série (4) est absolument convergente pour un système de valeurs x, y, z des variables, si le point de coordonnées $|x|, |y|, |z|$ est intérieur à la surface Σ, et divergente si ce point est à l'intérieur de Σ. L'ensemble des systèmes de valeurs de (x, y, z) tels que le point de coordonnées $|x|, |y|, |z|$ soit intérieur à Σ, constitue un domaine D où la somme $F(x, y, z)$ de la série (4) est une fonction holomorphe de ces variables, et à chaque point de Σ on peut encore faire correspondre un système de trois cercles de convergence *associés*.

Si l'on a une seconde série entière

$$(6) \qquad \sum b_{mnp} x^m y^n z^p,$$

il lui correspond une surface de séparation Σ', généralement différente de Σ. Toute demi-droite OL, située dans le trièdre OXYZ, rencontre Σ en un point M et Σ' en un point M'. Celui de ces deux points qui est le plus rapproché décrit une surface S, d'une forme analogue à celle des surfaces Σ et Σ'; si R et R' sont deux points de S, les trois coordonnées de R' ne peuvent être à la fois plus grandes ou plus petites que les coordonnées de R. L'ensemble des systèmes de valeurs des variables x, y, z tels que le point de coordonnées $|x|, |y|, |z|$ soit du même côté que l'origine par rapport à S, constitue un domaine D, à l'intérieur duquel les sommes des deux séries

$$F(x, y, z) = \sum a_{mnp} x^m y^n z^p,$$

$$\Phi(x, y, z) = \sum b_{mnp} x^m y^n z^p$$

sont des fonctions régulières de x, y, z. Nous supposerons de plus que ces fonctions sont finies sur la frontière de ce domaine, et nous désignerons par M et N des limites supérieures de $|F|$ et de $|\Phi|$ respectivement. On peut toujours satisfaire à cette dernière condition en remplaçant, si c'est nécessaire, la surface S par une surface infiniment voisine.

Cela étant, considérons le système d'équations différentielles

$$(7) \qquad \frac{dy}{dx} = F(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = \Phi(x, y, z),$$

et soient (a, b, c) les coordonnées d'un point R de la surface S. On voit aisément, en reprenant la méthode des approximations successives, que les intégrales du système (7) qui s'annulent pour $x = 0$ sont holomorphes à l'intérieur d'un cercle de centre $x = 0$, dont le rayon est au moins égal au plus petit des trois nombres

$$a, \quad \frac{b}{M}, \quad \frac{c}{N}.$$

Pour avoir la limite la plus grande possible, *on doit prendre pour* R *le point d'intersection de la surface* S *avec la droite représentée par les équations*

$$Y = MX, \qquad Z = NX.$$

En effet, si a, b, c sont les coordonnées de ce point, on a les égalités

$$a = \frac{b}{M} = \frac{c}{N} = h;$$

soient a', b', c' les coordonnées d'un autre point R' de S; on ne peut avoir à la fois

$$a' > a, \qquad b' > b, \qquad c' > c,$$

et par conséquent le plus petit des nombres a', $\frac{b'}{M}$, $\frac{c'}{N}$ ne peut être supérieur à h.

6. La règle précédente peut être étendue aux fonctions non analytiques. Bornons-nous, pour fixer les idées, au cas d'une équation unique du premier ordre

$$(8) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

la fonction $f(x, y)$ est supposée continue à l'intérieur d'un contour C formé d'un arc de courbe Γ dans l'angle xOy, joignant un point A de Ox à un point B de Oy, et des segments OA, OB, et satisfait dans ce domaine à la condition de Lipschitz, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif K tel que l'on ait

$$|f(x, y'') - f(x, y')| < K|y'' - y'|,$$

(x, y') et (x, y'') désignant les coordonnées de deux points quelconques pris à l'intérieur ou sur le contour de C. La courbe Γ peut avoir une forme quelconque; mais, comme on peut toujours la remplacer par une courbe Γ' intérieure à Γ, nous supposerons que les coordonnées d'un point de Γ ne peuvent croître ou diminuer en même temps. Cela posé, soient M la limite supérieure de $|f(x, y)|$ dans le domaine précédent, et h l'abscisse du point de rencontre de l'arc de courbe Γ avec la droite $y = Mx$. *L'intégrale de l'équation* (8) *qui se réduit à zéro pour* $x = 0$ *est certainement continue lorsque* x *varie de* 0 *à* h.

On sait que M. E. Lindelöf a indiqué une autre expression de l'intervalle où cette intégrale est certainement continue (*Journal de Mathématiques*, 1894). Soient (a, b) les coordonnées d'un point de l'arc Γ et M_a le maximum de $|f(x, 0)|$ lorsque x varie de 0 à a; M_a est une fonction $\varphi(a)$ de l'abscisse a qui ne peut diminuer lorsque a augmente et qui est au plus égale à M. D'après M. E. Lindelöf, l'intégrale de l'équation (8), qui s'annule pour $x = 0$, est certainement continue dans l'intervalle $(0, \rho)$, ρ désignant le plus petit des deux nombres

$$a \quad \text{et} \quad \frac{1}{K}\log\left(1 + \frac{Kb}{M_a}\right).$$

Soit N le point de l'arc Γ pour lequel les deux nombres précédents sont égaux,

$$a = \frac{1}{K}\log\left(1 + \frac{Kb}{M_a}\right);$$

ce point est à l'intersection de Γ avec la courbe qui a pour équation

$$y = \frac{\varphi(x)}{K}(e^{Kx} - 1). \tag{9}$$

Tout autre point N' de coordonnées (a', b') sur l'arc Γ donnera pour ρ une limite plus petite que le point N. Cela est évident si $a' < a$; si a' est $> a$, on aura

$$b' \leqq b, \qquad M_{a'} \geqq M_a, \qquad \frac{1}{M_{a'}} \leqq \frac{1}{M_a}, \qquad \frac{b'}{M_{a'}} \leqq \frac{b}{M_a},$$

et par suite

$$\log\left(1 + \frac{Kb'}{M_{a'}}\right) < \log\left(1 + \frac{Kb}{M_a}\right).$$

On aura donc la valeur de φ *la plus favorable en prenant le point d'intersection* N *de la courbe* Γ *avec la courbe* (9).

Pour savoir laquelle des deux méthodes fournit le plus grand intervalle, il suffira de prendre les points d'intersection de Γ avec les deux courbes

$$y = Mx, \qquad y = \frac{\varphi(x)}{K}(e^{Kx} - 1),$$

et de prendre celui de ces deux points dont l'abscisse est la plus grande. Il est clair que le résultat dépend de la forme de l'arc Γ, et aussi de la fonction $\varphi(x)$.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU MOUVEMENT DE POINSOT;

Par M. L. Lecornu.

On sait, depuis Poinsot, que le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe O s'effectue, en l'absence de forces extérieures, de façon que l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point roule et pivote sur un plan fixe, avec une vitesse angulaire représentée vectoriellement par le diamètre joignant le point fixe au point de contact de l'ellipsoïde et du plan.

Supposons qu'au lieu de l'ellipsoïde d'inertie relatif à O, nous considérions un autre ellipsoïde, de même centre O et de mêmes directions principales, dont les axes ne soient pas proportionnels à ceux de l'ellipsoïde d'inertie : tel est par exemple le cas de la surface d'un corps homogène ayant une forme ellipsoïdale. Si nous assujettissons cet ellipsoïde, que nous appellerons l'*ellipsoïde superficiel*, à se mouvoir autour de son centre, en roulant et pivotant, sans glissement, au contact d'un plan fixe, nous obtenons un mouvement fort analogue à celui de Poinsot, en ce sens que le déplacement s'effectue, géométriquement parlant, d'une façon identique, et que, dans un cas comme dans l'autre, la force vive demeure constante. Mais l'action du plan cesse alors d'avoir un moment nul par rapport au point O. Je me propose d'étudier la nature de ce mouvement et de déterminer en outre l'action du plan.

Soit $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ l'équation de l'ellipsoïde superficiel, rapporté à ses axes. Il roule et pivote sur un plan fixe Π, placé à la distance $\frac{1}{\delta}$ de son centre O. Le lieu du pôle P, c'est-à-dire du point de contact avec le plan Π, est la polhodie définie par les deux équations

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 &= 1, \\ \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 &= \delta^2. \end{aligned}\right.$$

Soient p, q, r les composantes de la rotation instantanée ω. Cette rotation s'effectue autour de OP, et l'on a, en appelant x, y, z les coordonnées de P,

$$(2) \qquad \frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \lambda;$$

le rapport λ est généralement variable.

Si nous imprimons au système une rotation $-\omega$ autour de OP, l'ellipsoïde est ramené à l'immobilité et le plan Π, qui était fixe, devient mobile. L'équation de ce plan est, en appelant ξ, η, ζ les coordonnées courantes,

$$\alpha x\xi + \beta y\eta + \gamma z\zeta = 1;$$

les cosinus directeurs de la normale au plan sont

$$a = \frac{\alpha x}{\delta} = \lambda\frac{\alpha p}{\delta},$$

$$b = \frac{\beta y}{\delta} = \lambda\frac{\beta q}{\delta},$$

$$c = \frac{\gamma z}{\delta} = \lambda\frac{\gamma r}{\delta}.$$

Écrivons que le point dont les coordonnées sont a, b, c est entraîné par la rotation $-\omega$. Nous obtenons les relations

$$\frac{da}{dt} = rb - qc, \qquad \frac{db}{dt} = pc - ra, \qquad \frac{dc}{dt} = qa - pb,$$

ou bien

$$(3) \qquad \alpha\frac{dx}{dt} = \lambda(\beta-\gamma)qr, \quad \beta\frac{dy}{dt} = \lambda(\gamma-\alpha)rp, \quad \gamma\frac{dz}{dt} = \lambda(\alpha-\beta)pq.$$

Revenons maintenant au mouvement réel.

La vitesse absolue du pôle P étant nulle, le travail de l'action du plan sur l'ellipsoïde est également nul, et la force vive de celui-ci est par conséquent constante. Si A, B, C désignent les moments d'inertie principaux et h la force vive, on a

$$(4) \qquad \mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 = h,$$

ou bien

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}z^2 = h\lambda^2;$$

d'où

$$(5) \qquad \mathrm{A}x\frac{dx}{dt} + \mathrm{B}y\frac{dy}{dt} + \mathrm{C}z\frac{dz}{dt} = h\lambda\frac{d\lambda}{dt}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$(6) \qquad \mathrm{D} = \frac{\mathrm{A}}{\alpha}(\beta-\gamma) + \frac{\mathrm{B}}{\beta}(\gamma-\alpha) + \frac{\mathrm{C}}{\gamma}(\alpha-\beta),$$

et si l'on remplace $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ par leurs valeurs (3), l'équation (5) devient

$$(7) \qquad \mathrm{D}\lambda pqr = h\frac{d\lambda}{dt}.$$

D'ailleurs

$$\frac{dx}{dt} = \lambda\frac{dp}{dt} + p\frac{d\lambda}{dt}.$$

Portons dans cette équation les valeurs de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{d\lambda}{dt}$ tirées de (3) et (7). Nous obtenons la première des relations suivantes (les deux autres s'en déduisent par permutation)

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\beta-\gamma}{\alpha}qr - \frac{p^2qr}{h}\mathrm{D}, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\gamma-\alpha}{\beta}rp - \frac{pq^2r}{h}\mathrm{D}, \end{aligned} \right.$$

Soient L, M, N les composantes de l'action du plan. Les formules connues

$$L = A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

donnent, en tenant compte de (8),

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} L &= \left[\frac{A}{\alpha}(\beta-\gamma)-(B-C)-\frac{D}{h}p^2\right]qr,\\ M &= \left[\frac{B}{\beta}(\gamma-\alpha)-(C-A)-\frac{D}{h}q^2\right]rp,\\ N &= \left[\frac{C}{\gamma}(\alpha-\beta)-(A-B)-\frac{D}{h}r^2\right]pq. \end{aligned}\right.$$

On connaît ainsi l'effort exercé par le plan sur le corps. Si l'on veut que cet effort soit constamment nul, il faut d'abord, puisque p, q, r sont variables, que l'on ait $D = 0$. Cette condition étant remplie, on doit en outre poser

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha} = \frac{B-C}{A}, \qquad \frac{\gamma-\alpha}{\beta} = \frac{C-A}{B}, \qquad \frac{\alpha-\beta}{\gamma} = \frac{A-B}{C},$$

ou bien

$$\begin{aligned} A\beta - B\alpha &= A\gamma - C\alpha,\\ B\gamma - C\beta &= B\alpha - A\beta,\\ C\alpha - A\gamma &= C\beta - B\gamma. \end{aligned}$$

En retranchant l'une de l'autre les deux premières de ces égalités, il vient

$$C\beta - B\gamma = A\gamma - C\alpha,$$

et en comparant à la troisième on en conclut les relations

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}.$$

L'action du plan n'est donc nulle que si l'ellipsoïde superficiel est semblable à l'ellipsoïde d'inertie.

Pour trouver, dans le cas général, la loi du mouvement écrivons les deux équations

$$\begin{aligned} \lambda^2(\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2) &= 1,\\ \lambda^2(\alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 + \gamma^2 r^2) &= \delta^2. \end{aligned}$$

Par élimination de λ il vient

$$(10)\qquad \alpha(\alpha-\delta^2)p^2 + \beta(\beta-\delta^2)q^2 + \gamma(\gamma-\delta^2)r^2 = 0.$$

Les équations (4) et (10) permettent d'exprimer linéairement q^2 et r^2 en fonction de p^2, et, en portant les valeurs trouvées dans la première équation (8), on voit que le temps est donné en fonction de p par une intégrale elliptique de troisième espèce.

Nous allons maintenant nous occuper spécialement du cas où la quantité D est nulle. L'équation (7) montre que λ est alors une constante, de sorte que la vitesse de rotation est dans un rapport constant avec la longueur OP. D'après cela :

Si D *est nul, le mouvement de l'ellipsoïde superficiel est un mouvement de Poinsot.*

Mais l'action du plan n'est pas nulle, à moins que A, B, C ne soient proportionnels à α, β, γ, ce que nous ne supposons pas.

Cherchons ce que signifie l'équation $D = 0$.

Quels que soient A, B, C on peut, en admettant que α, β, γ soient inégaux, trouver trois constantes R, S, T telles que l'on ait

$$A = R + S\alpha + T\alpha^2,$$
$$B = R + S\beta + T\beta^2,$$
$$C = R + S\gamma + T\gamma^2.$$

En portant ces expressions dans l'équation (7), il vient

$$D = R\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right).$$

Si donc D est nul, on a simplement

$$A = S\alpha + T\alpha^2,$$
$$B = S\beta + T\beta^2,$$
$$C = S\gamma + T\gamma^2.$$

D'après cela, la relation $D = 0$ exprime que l'ellipsoïde d'inertie $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ et l'ellipsoïde superficiel $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ se coupent suivant une courbe pour laquelle $\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2$ est une quantité constante, c'est-à-dire suivant une polhodie de l'ellipsoïde superficiel. La réciproque est évidemment vraie. Comme l'échelle de construction de l'ellipsoïde d'inertie est arbitraire, on peut toujours, quand D est nul, supposer que cet ellipsoïde passe par la polhodie que décrit le pôle P. Admettons en outre que l'unité de temps soit choisie de façon à rendre la constante λ égale à l'unité. Alors les coordonnées x, y, z de P ne diffèrent pas de p, q, r.

En remplaçant, dans les valeurs (9) de L, M, N les moments d'inertie A, B, C par leurs valeurs ci-dessus on trouve

$$\begin{aligned} L &= T(\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)qr, \\ M &= T(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma-\alpha)rp, \\ N &= T(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta)pq. \end{aligned}$$

D'après le théorème connu de Resal, L, M, N sont identiques aux composantes de la vitesse du point G, extrémité du vecteur représentant le moment cinétique. Les coordonnées de G sont Ap, Bq, Cr. Pour construire ce point, il suffit d'abaisser, à partir de O, une perpendiculaire sur le plan tangent en P à l'ellipsoïde d'inertie, et de prendre sur cette perpendiculaire une longueur OG égale à l'inverse de la distance du point O au plan tangent.

Il existe d'ailleurs une infinité d'autres points dont la vitesse peut servir à représenter le moment de l'action du plan Π. Cette propriété appartient à tous les points K dont les coordonnées sont

$$\begin{aligned} \xi &= (U\alpha + T\alpha^2)p, \\ \eta &= (U\beta + T\beta^2)q, \\ \zeta &= (U\gamma + T\gamma^2)r, \end{aligned}$$

U désignant une constante arbitraire.

En effet, la vitesse relative d'un pareil point a pour projection sur Ox

$$\frac{d\xi}{dt} = (U\alpha + T\alpha^2)\frac{dp}{dt} = (U + T\alpha)(\beta-\gamma)qr.$$

La vitesse d'entraînement du même point a pour projection

$$q\zeta - r\eta = [U + T(\beta+\gamma)](\gamma-\beta)qr.$$

Par suite la projection de la vitesse absolue est

$$T(\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)qr,$$

expression identique à celle de L.

Le lieu des points K, quand l'on fait varier U, est une droite passant par G et dirigée perpendiculairement au plan tangent à l'ellipsoïde superficiel : c'est donc une droite de direction fixe dans l'espace.

Lorsque le corps est homogène, les moments d'inertie A, B, C ont pour valeurs, en appelant μ la masse totale,

$$A = \frac{\mu}{5}\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right), \qquad B = \frac{\mu}{5}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}\right), \qquad C = \frac{\mu}{5}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right),$$

ce qui peut s'écrire

$$A = \frac{\mu}{5\alpha\beta\gamma}[(\alpha + \beta + \gamma)\alpha - \alpha^2],$$

$$B = \frac{\mu}{5\alpha\beta\gamma}[(\alpha + \beta + \gamma)\beta - \beta^2],$$

$$C = \frac{\mu}{5\alpha\beta\gamma}[(\alpha + \beta + \gamma)\gamma - \gamma^2].$$

Il suffit alors de poser

$$S = \frac{\mu(\alpha + \beta + \gamma)}{5\alpha\beta\gamma}, \qquad T = -\frac{\mu}{5\alpha\beta\gamma},$$

pour rentrer dans le cas précédent.

La condition $D = 0$ est encore vérifiée lorsque le corps est composé de couches ellipsoïdales homothétiques dont chacune est homogène. On le reconnaît immédiatement en considérant une pareille couche comme la différence de deux ellipsoïdes homothétiques et homogènes.

Par conséquent :

Un ellipsoïde homogène, ou composé de couches homothétiques et homogènes, qui a son centre fixe et qui se meut en roulant et pivotant au contact d'un plan fixe, obéit à la loi de Poinsot.

SUR UN ÉLÉMENT GÉOMÉTRIQUE NOUVEAU DES SURFACES;

PAR M. E. BARRÉ.

Dans deux Communications insérées au *Bulletin de la Société mathématique* (19 janvier et 16 mars 1887), M. le professeur Demartres, de l'Université de Lille, signalait à l'attention des géomètres l'intérêt d'un élément géométrique nouveau auquel il donnait le nom de *flexion*.

Le présent Mémoire a pour objet de continuer le travail de M. Demartres et d'établir dans ses grandes lignes la théorie de cet élément.

Je rappellerai ici les définitions et les résultats généraux signalés dans les Mémoires précités, afin de présenter une étude qui se suffise à elle-même; mais je me bornerai à renvoyer le lecteur, pour les démonstrations, aux Communications du savant professeur de l'Université de Lille.

PREMIÈRE PARTIE. — DÉFINITION DE LA FLEXION. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS. APPLICATIONS.

1. *Définition.* — Considérons sur une surface un point M et prenons un plan de référence fixe P. Si l'on se déplace infiniment peu sur la surface, suivant une direction MM′, on s'éloignera du plan P d'une quantité dh; en même temps, la trace du plan tangent sur le plan de référence tourne de l'angle $d\Psi$. L'angle du plan tangent en M avec le plan de référence étant θ, nous appellerons *flexion* de l'élément MM′ par rapport au plan P le rapport

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{dh}{d\Psi}. \tag{1}$$

2. THÉORÈME I. — *Si l'on considère sur une même surface deux directions conjuguées dont les flexions relatives à un même plan* P *soient* $\mathfrak{F}_1$ *et* $\mathfrak{F}_2$, *on a*

$$\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 + R_1 R_2 = 0, \tag{2}$$

R_1 *et* R_2 *étant les rayons de courbure principaux de la surface au point* M.

Corollaire. — *Si le déplacement a lieu suivant une asymptotique, on aura*

$$\mathfrak{F} = \sqrt{-R_1 R_2}, \tag{3}$$

et l'on remarquera que cette valeur est indépendante de la direction choisie pour le plan de référence. (*Voir* Communication du 19 janvier.)

3. *Expressions diverses de la flexion.* — Soient MM' l'élément de courbe, Q le plan tangent en M. Soit δ la trace sur Q d'un plan parallèle au plan de référence mené par M.

Si l'on désigne par ε l'angle que δ fait avec la direction MT de la tangente en M à l'élément MM' et par ε_1 l'angle de δ avec la direction conjuguée de MT, on démontre (Communication du 16 mars) la formule

$$\mathfrak{F} = \frac{ds}{d\sigma}\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon_1}, \tag{4}$$

ds désignant l'élément d'arc du déplacement, *dσ* l'élément correspondant de l'arc d'indicatrice des normales.

La formule (4) conduit immédiatement au théorème suivant :

Théorème II. — *La flexion d'un élément n'est pas changée quand le plan de référence tourne d'un angle quelconque autour de sa trace sur le plan tangent en* M.

Nous pouvons donc donner la définition suivante :

Définition. — La flexion d'un élément MM' par rapport à une direction δ du plan tangent en M est la flexion de l'élément MM' relativement à un plan quelconque parallèle à δ.

Nous la désignerons par le symbole (Tδ) et nous l'appellerons, pour abréger, *flexion de* T *par rapport à* δ.

Formules diverses. — Le Mémoire précité contient une série de formules que je me borne à rappeler.

Soient φ l'angle de MT avec la direction principale de rayon de courbure normale R_1 ; ω celui de $M\delta$ avec la même direction, et φ_1 celui de la droite MT_1 conjuguée de MT avec cette direction; on a en valeur absolue

$$\mathcal{F} = \frac{ds}{d\sigma}\,\frac{\sin(\omega-\varphi)}{\sin(\omega-\varphi_1)}. \tag{5}$$

Si l'on prend pour sens positif des ω, φ celui qui amène la direction relative à R_1 sur celle relative à R_2, par une rotation d'un quadrant, l'observateur étant supposé les pieds au point M et la tête vers le centre de courbure, on trouve

$$\mathcal{F} = (T\delta) = \frac{\sin(\omega-\varphi)}{\dfrac{\cos\omega\cos\varphi}{R_1}+\dfrac{\sin\omega\sin\varphi}{R_2}} = \frac{\operatorname{tang}\omega-\operatorname{tang}\varphi}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}\varphi}, \tag{6}$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\frac{\mathcal{F}}{R_2}\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}\varphi+\operatorname{tang}\varphi-\operatorname{tang}\omega+\frac{\mathcal{F}}{R_1}=0; \tag{6 bis}$$

et en désignant par R le rayon de courbure normale de MT et par R′ celui de $M\delta$:

$$\mathcal{F} = \frac{R\sin(\omega-\varphi)\sin(\varphi-\varphi_1)}{\sin(\omega-\varphi_1)} \tag{7}$$

et

$$\left\{\begin{aligned}\mathcal{F} = \left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)\Bigg[&\ \frac{1}{R_1}\sqrt{\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R'}\right)}\\ &+\frac{1}{R_2}\sqrt{\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R}\right)}\,\Bigg]^{-1}.\end{aligned}\right. \tag{8}$$

De l'une ou l'autre de ces relations on tire $(T\delta)+(\delta T)=0$; ainsi :

Théorème III. — *La flexion de T par rapport à δ est égale et de signe contraire à celle de δ par rapport à T.*

On obtient de même les résultats suivants :

Théorème IV. — *A chaque direction T en correspond une autre δ, telle que $T\delta$ ait une valeur donnée. Les faisceaux* *correspondants* T *et* δ *sont homographiques et ont pour rayons doubles les directions asymptotiques.*

Théorème V. — *Quand deux directions sont rectangulaires, la flexion de l'une par rapport à l'autre a pour valeur absolue l'inverse de la torsion géodésique de l'élément correspondant* ([1]).

Théorème VI. — *La courbure totale est égale et de signe contraire à l'inverse du produit des flexions d'un même déplacement par rapport à deux directions conjuguées.*

La considération de la formule (6) m'amène immédiatement à deux théorèmes nouveaux; écrivons que la valeur de $\mathcal{J}$ est indépendante de φ, on obtient, tous calculs faits :

$$\tang^2 \omega = -\frac{R_2}{R_1};$$

d'où l'on conclut :

Théorème VII. — *Il existe deux directions* δ *et deux seulement telles que la flexion* (Tδ) *ait une valeur indépendante de la direction* MT : *ce sont les deux directions asymptotiques.*

Cette valeur constante de la flexion est en valeur absolue $\sqrt{-R_1 R_2}$.

Théorème VIII. — *Il existe deux directions et deux seulement, les directions asymptotiques, pour lesquelles la flexion soit indépendante du plan de référence choisi.*

Cette valeur est encore $\sqrt{-R_1 R_2}$ au signe près.

Remarque sur les modifications à apporter aux énoncés précédents dans le cas d'un point parabolique. — La flexion en un pareil point ne sera, pour aucune direction, *définie et indépendante* de la direction du plan ou de la direction de référence; car la direction asymptotique unique pour laquelle seule cela pourrait arriver donne une flexion infinie ou indéterminée suivant le choix du plan ou de la direction de référence.

([1]) Dans ce cas, la formule $(T\delta) + (\delta T) = 0$ conduit au théorème de M. Bertrand sur les torsions géodésiques de deux déplacements rectangulaires.

Même remarque si l'on cherche une direction δ telle que $(T\delta)$ soit indépendante de la direction T.

4. *Nouvelle expression de la flexion.* — On peut transformer l'expression (4) d'une manière qui nous conduira à une formule qui nous sera utile plus tard.

Soit $M\Phi$ la parallèle à la tangente à l'indicatrice des normales relatives au point M. $M\Phi$ est, comme l'on sait, la direction du plan tangent en M perpendiculaire à MT_1 conjuguée de MT. La formule (4) donne donc immédiatement en valeur absolue

$$\mathfrak{F} = (T\delta) = \frac{ds}{d\sigma}\frac{\sin(\delta T)}{\cos(\delta\Phi)}. \tag{9}$$

5. *Flexion relative au déplacement du plan osculateur d'une courbe.* — La définition générale de la flexion (n° 1) peut évidemment s'appliquer au déplacement du plan osculateur à une courbe en associant à chacun de ces plans son point de contact avec la courbe.

Si alors l'on prend pour Oz une perpendiculaire au plan de référence, on aura

$$\mathfrak{F} = \frac{dz}{d\psi}\frac{1}{\sin^2\theta},$$

où $d\psi$, θ ont les significations précédemment définies et x, y, z représentent les coordonnées d'un point courant de la courbe.

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente à la courbe; α', β', γ' ceux de sa normale principale, et α'', β'', γ'' ceux de la binormale. On a

$$\sin^2\theta = 1 - \gamma''^2.$$

Mais la trace du plan osculateur sur xOy a pour coefficient angulaire $-\frac{\alpha''}{\beta''}$.

Soit alors T le rayon de torsion de la courbe; il vient

$$d\Psi = \frac{\alpha'' d\beta'' - \beta'' d\alpha''}{\alpha''^2 + \beta''^2} = \frac{\alpha''\beta' - \beta''\alpha'}{\alpha''^2 + \beta''^2}\frac{ds}{T} = \frac{\gamma}{\gamma''^2 - 1}\frac{ds}{T}$$

et enfin $\mathfrak{F} = -T$. Donc :

THÉORÈME IX. — *La flexion relative au déplacement du* *plan osculateur à une courbe est égale, au signe près, à son rayon de torsion.*

6. *Étude de la flexion pour un déplacement suivant une asymptotique.* — Nous savons que la flexion pour un tel déplacement est, au signe près, égale à $\sqrt{-R_1R_2}$.

D'après le théorème précédent, elle est égale au rayon de torsion de l'asymptotique; d'où la relation connue

$$T_0 = \sqrt{-R_1R_2},$$

où T_0 est le rayon de torsion de l'asymptotique considérée.

Remarquons qu'en s'appuyant sur le théorème V on pourrait retrouver ces résultats.

Cas où l'asymptotique est une génératrice d'une surface réglée. — Il ne peut plus être question ici de torsion de l'asymptotique, mais on peut arriver à d'autres conclusions.

Soit M le point considéré, O le point central. Prenons un plan de référence perpendiculaire à la génératrice; dans ces conditions, en posant $OM = \rho$, on aura

$$\mathcal{F} = \frac{d\rho}{d\psi}, \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{\rho}{K},$$

K étant le paramètre de distribution de la surface considérée. On déduit de là

$$d\psi = \frac{K\,d\rho}{\rho^2 + K^2}, \qquad \mathcal{F} = \frac{\rho^2 + K^2}{K},$$

et finalement

$$(10) \qquad \frac{1}{R_1R_2} = -\frac{K^2}{(K^2+\rho^2)^2},$$

expression simple de la courbure totale d'une surface réglée.

7. *Application des résultats précédents à la recherche des surfaces réglées à courbure totale constante.* — D'après l'expression (10), on voit que, sauf le cas où K est nul ou infini (développables et cylindres et courbure totale nulle), la courbure ne

peut être constante que si ρ est constant tout le long d'une génératrice. Ceci n'est possible que pour des génératrices isotropes. On arrive dès lors facilement au théorème suivant :

THÉORÈME X. — 1° *Il n'existe aucune surface réglée à génératrices réelles applicables sur la sphère ou sur la pseudo-sphère.*

2° *Les seules surfaces réglées réelles applicables sur une sphère sont les sphères égales.*

3° *Aucune surface réglée réelle n'est applicable sur une pseudo-sphère.*

Les deux dernières parties de l'énoncé résultent de ce que, si la surface admet la génératrice isotrope G, et si elle est réelle, elle admet également la droite imaginaire conjuguée G_1 comme génératrice et se réduit nécessairement à une sphère.

Remarque I. — Il existe toutefois des surfaces réglées imaginaires, mais à équation réelle, applicables sur une pseudo-sphère. Ce sont les sphères imaginaires

$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = 0.$$

Remarque II. — Le paramètre de distribution d'une sphère de rayon R est R*i*.

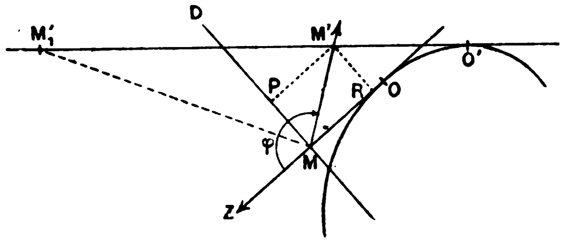
8. THÉORÈME XI. — *La torsion géodésique de la trajectoire orthogonale d'une ligne asymptotique est, au signe près, égale à la torsion de cette asymptotique au point considéré.*

Car la flexion prise par rapport à la direction perpendiculaire au déplacement, direction qui n'est autre ici que la tangente principale, est égale, au signe près, à $\sqrt{-R_1 R_2}$, c'est-à-dire précisément au rayon de torsion de l'asymptotique.

Remarque. — Ce théorème se déduit immédiatement de la proposition de M. Bertrand sur les torsions géodésiques de deux éléments rectangulaires.

9. ***Étude géométrique de la flexion dans les développables.*** — Soit M le point considéré. Prenons un plan de référence perpendiculaire à la génératrice OM de la développable, O désignant le point de contact de cette génératrice avec l'arête de rebroussement. Posons $OM = l$. Soit MM′ la direction suivant laquelle on veut étudier la flexion par rapport à la direction MD, perpendiculaire à OM dans le plan tangent en M. Soit M′O′ la génératrice

Fig. 1.



du point M′. Soient $d\sigma_n$, $d\sigma$, $d\sigma'$, $d\sigma''$ les éléments d'indicatrices : de la normale à la surface au point M, de la tangente et des deux normales à l'arête de rebroussement au point correspondant O. Comme ici l'on a $d\psi = d\sigma_n$ et $\sin\theta = 1$, la flexion $\mathfrak{F}$ a pour expression

$$\mathfrak{F} = \frac{dl}{d\sigma_n}.$$

D'autre part, on a évidemment

$$d\sigma_n = d\sigma'';$$

d'où, φ étant l'angle indiqué sur la figure,

$$\mathfrak{F} = \frac{\overline{PM'}}{d\sigma_n} = \frac{\overline{MR}}{d\sigma_n} = \frac{l\,d\sigma}{\sin\varphi}(-\cos\varphi)\frac{1}{d\sigma''}.$$

En réduisant et faisant usage des formules de Frenet, on arrive à la formule suivante :

$$\mathfrak{F} = -l\cot\varphi\frac{T}{R}, \tag{11}$$

où T et R sont les rayons de courbure et de torsion de l'arête de la développable.

D'autre part, si K est le point de M′O′ situé dans le plan de référence dont MD est la trace sur le plan tangent, les segments M'R et MK sont des infiniment petits équivalents en grandeur absolue; ils sont, d'ailleurs, dirigés en sens inverse. On a évidemment

$$\lim \frac{\mathrm{MK}}{d\psi} = \mathrm{R}_1,$$

R_1 désignant le rayon de courbure de la section normale principale MK. Donc

$$\mathrm{R}_1 = \lim \frac{\overline{\mathrm{MK}}}{d\psi} = -\lim \frac{\overline{\mathrm{M'R}}}{d\psi} = \lim \frac{\mathrm{MR}}{d\psi} \cot\varphi;$$

d'où enfin l'expression nouvelle de la flexion,

$$\mathfrak{F} = \mathrm{R}_1 \cot\varphi. \tag{12}$$

En comparant les relations (11) et (12) on obtient la formule connue qui donne l'expression du rayon de courbure principal fini d'une développable,

$$\mathrm{R}_1 = -l\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}}. \tag{13}$$

Si l'on prend un plan de référence perpendiculaire à MM' défini par sa trace MM'_1 dans le plan tangent, la flexion relative à cette direction prend les formes suivantes :

$$\mathfrak{F} = \frac{l\,d\sigma}{\sin\varphi\,d\psi} = l\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}}\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d\sigma_n}{d\psi} = l\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}}\frac{1}{\sin\psi}\frac{1}{\cos(\mathrm{MK}, \mathrm{MM}'_1)}.$$

Or, on a

$$(\mathrm{MK}, \mathrm{MM}'_1) = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

d'où

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{\mathrm{Q}} = \frac{2\mathrm{R}_1}{\sin 2\psi}, \tag{14}$$

Q désignant la torsion géodésique de l'élément MM'. Cette formule aurait d'ailleurs pu être écrite de suite en se rappelant l'expression de la torsion géodésique.

DEUXIÈME PARTIE. — ÉTUDE DE LA FLEXION EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES RECTANGLES.

1. ***Expressions diverses de la flexion, le plan de référence étant l'un des plans de coordonnées.*** — Nous supposons d'abord l'équation de la surface ramenée à la forme

$$z = f(xy), \tag{1}$$

laissant de côté le cas simple, où la surface se réduirait à un cylindre dont les génératrices seraient parallèles à l'axe Oz.

Premier cas. — Le plan de référence est parallèle à l'un des plans $x = 0$ ou $y = 0$. On démontre (Communication du 19 janvier) que dans le premier cas la flexion $\mathfrak{F}$ est donnée par la formule

$$\mathfrak{F} = (p^2 + q^2 + 1)\frac{dx}{s\,dx + t\,dy}, \tag{2}$$

où p et q sont les dérivées premières de f; r, s et t ses dérivées secondes.

Une formule absolument analogue donne la solution de la question pour un plan de référence parallèle à $y = 0$,

$$\mathfrak{F} = (p^2 + q^2 + 1)\frac{dy}{r\,dx + s\,dy}. \tag{2 bis}$$

Deuxième cas. — Le plan de référence est parallèle au plan xOy. On obtient, par une marche identique à celle suivie par M. Demartres, l'expression

$$\mathfrak{F} = (p^2 + q^2 + 1)\frac{p\,dx + q\,dy}{p\,dq - q\,dp}, \tag{3}$$

ou

$$\mathfrak{F} = (p^2 + q^2 + 1)\frac{p\,dx + q\,dy}{(ps - qr)\,dx + (pt - qs)\,dy}. \tag{4}$$

2. ***Points d'une surface pour lesquels la flexion, par rapport à un plan fixe, est indépendante du déplacement élémentaire choisi.*** — Prenons le plan zOy parallèle au plan de référence.

En se reportant à la formule (2), on voit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que t soit nul : le lieu cherché est donc défini par les équations

$$(5) \qquad \begin{cases} t = 0, \\ z = f(x, y); \end{cases}$$

on voit que c'est le lieu des points pour lesquels une direction asymptotique est parallèle au plan de référence; on pouvait le prévoir d'après le théorème VII. Sous une autre forme ce résultat s'énonce ainsi :

Théorème XII. — *Le lieu* Γ *des points d'une surface* Σ *pour lesquels la flexion par rapport à un plan donné est indépendante du déplacement élémentaire est le lieu des points d'inflexion des sections faites dans la surface* Σ *par des plans parallèles au plan de référence.*

3. *Il peut arriver que le lieu précédent ne soit plus une ligne mais bien une surface;* ceci arriverait dans le cas où la surface considérée comprendrait une nappe pour laquelle on aurait en tout point $t = 0$. L'équation $t = 0$ représentant une surface réglée à plan directeur, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème XIII. — *Toute surface telle qu'en chacun de ses points la flexion par rapport à un plan fixe* P *soit indépendante du déplacement élémentaire est une surface réglée ayant le plan* P *comme plan directeur. Inversement, sur toute surface réglée à plan directeur, la flexion prise par rapport à ce plan pour un déplacement élémentaire quelconque est indépendante de la direction de ce déplacement.*

Remarque. — Cette dernière partie se généralise sans peine : dans toute surface réglée, la flexion suivant un déplacement quelconque, à partir d'un point, prise par rapport à la génératrice de ce point, est constante et égale au signe près à $\sqrt{-R_1 R_2}$. C'est une conséquence immédiate du théorème VIII.

4. Problème. — *On peut se proposer de rechercher les lignes*

de la surface Σ telles que la flexion prise pour un déplacement sur cette ligne, par rapport à un plan donné, soit en chaque point donnée par une fonction déterminée $\mathfrak{F}(x, y)$ de ses coordonnées indépendantes, la surface étant supposée représentée par l'équation (1).

Si nous adoptons le choix de coordonnées correspondant à la formule (2), le lieu sera représenté par les équations

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} z &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dx} &= \left[\frac{p^2+q^2+1}{\mathfrak{F}(x, y)} - s\right]\frac{1}{t}. \end{aligned}\right.$$

Nous obtenons ainsi une famille de courbes. Toutefois la discussion de la seconde des équations (6) amène à des développements analytiques que je crois hors de proportion avec l'intérêt qui s'y attache, aussi me bornerai-je à étudier quelques applications particulières.

Applications. — 1° La fonction $\mathfrak{F}$ se réduit à la constante zéro. La seconde équation (6) ne peut plus être appliquée en toute rigueur. Toutefois, en considérant le résultat obtenu comme cas limite, on trouve

$$dx = 0.$$

Les courbes cherchées sont les sections de la surface par des plans parallèles au plan de référence.

2° La surface est une surface réglée dont le plan de référence est le plan directeur. On a, dans ce cas, $t = 0$; par suite dx est nul, ce qui donne les génératrices rectilignes : ce résultat peut s'expliquer géométriquement, la flexion prise dans ces conditions étant évidemment indéterminée.

On trouve, en outre, la solution singulière seule intéressante :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} & p^2+q^2+1 = s\,\mathfrak{F}(x, y), \\ & z = f(x, y) = y f_1(x) + f_2(x), \end{aligned}\right.$$

qui représente une courbe bien définie sur la surface.

Supposons, par exemple, que la surface soit un paraboloïde équilatère et le plan de référence un de ses plans directeurs. Elle a pour équation

$$(8) \qquad z = \frac{1}{a} xy.$$

La première des équations (7) donne ici

$$(9) \qquad x^2 + y^2 + a^2 = a\,\mathfrak{F}(x, y).$$

Dans le cas spécial où la fonction $\mathfrak{F}$ serait du premier degré en x et y et, en particulier, une constante, cette courbe serait tracée sur un cylindre de révolution. Donc, *les lignes d'égale flexion du paraboloïde équilatère par rapport à un de ses plans directeurs sont ses intersections avec la famille des cylindres de révolution autour de l'axe de la surface.*

5. *Flexion dans l'hélicoïde gauche à plan directeur, la flexion étant prise par rapport à ce plan.* — L'équation de la surface rapportée à son plan directeur est

$$(10) \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tang} \frac{z}{a},$$

d'où, en vertu de la formule (3), l'on conclut

$$\mathfrak{F} = a + \frac{x^2 + y^2}{a}.$$

Ainsi, *les lignes d'égale flexion sont les hélices asymptotiques de la surface;* nous négligeons, bien entendu, les génératrices rectilignes.

6. *Flexion dans le paraboloïde de révolution.* — Nous prendrons comme plan de référence, soit un plan parallèle au plan tangent au sommet, soit un plan parallèle à l'axe, c'est-à-dire à un plan méridien.

I. L'équation de la surface étant

$$(11) \qquad z = \frac{x^2 + y^2}{2a},$$

supposons d'abord le plan de référence perpendiculaire à l'axe. La formule (3) donne pour expression de la flexion

$$(12)\qquad \mathfrak{F} = \frac{x^2+y^2+a^2}{a}\,\frac{x\,dx+y\,dy}{x\,dy-y\,dx}.$$

Une intégration immédiate donne en termes finis l'équation des lignes d'égale flexion. Elles sont gauches, sauf quand cette flexion doit être nulle, auquel cas elles se réduisent aux parallèles de la surface.

II. Si le plan de référence est parallèle à l'axe, nous pouvons le supposer parallèle au plan $x = 0$. La formule (2) donne alors

$$(13)\qquad \mathfrak{F} = \frac{a^2+x^2+y^2}{a}\,\frac{dx}{dy}.$$

Cette formule permet de trouver les lignes à flexion constante et de résoudre d'autres problèmes du même genre. On voit qu'elle montre que *le long d'un méridien la flexion varie comme la distance du point considéré au plan tangent au sommet.*

7. Il resterait, pour compléter cet exposé, à rechercher l'expression de la flexion pour une surface donnée par une équation

$$z = f(x, y),$$

le plan de référence étant quelconque. Ce problème pouvant être considéré comme cas particulier du problème général qui termine ce travail, je ne le traiterai pas ici. On en déduit la solution du problème lorsque la surface est donnée par une équation de la forme

$$f(x, y, z) = 0.$$

TROISIÈME PARTIE. — Étude de la flexion en coordonnées curvilignes rapportées a un trièdre trirectangle.

Nous supposons dans tout ce qui va suivre la surface définie par des équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x = f(u, v), \\ y = \varphi(u, v), \\ z = \psi(u, v), \end{cases}$$

et nous poserons suivant l'usage

$$(2)\qquad A = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$(2')\qquad \left\{ \begin{array}{l} E = \Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2, \qquad F = \Sigma \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}, \qquad G = \Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2, \\ \qquad H = (A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}} = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

$$(3)\qquad \left\{ \begin{array}{l} D = \begin{vmatrix} f''_{u^2} & \varphi''_{u^2} & \psi''_{u^2} \\ f'_u & \varphi'_u & \psi'_u \\ f'_v & \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix}, \qquad D' = \begin{vmatrix} f''_{uv} & \varphi''_{uv} & \psi''_{uv} \\ f'_u & \varphi'_u & \psi'_u \\ f'_v & \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix}, \\ \qquad D'' = \begin{vmatrix} f''_{v^2} & \varphi''_{v^2} & \psi''_{v^2} \\ f'_u & \varphi'_u & \psi'_u \\ f'_v & \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix}, \end{array} \right.$$

$$(3')\qquad E' = \frac{D}{H}, \qquad F' = \frac{D'}{H}, \qquad G' = \frac{D''}{H}.$$

1. *Établissement direct de la formule donnant la flexion par rapport au plan xOy.* — On trouve, comme dans le travail de M. Demartres, la formule

$$(4)\qquad \mathcal{F} = \frac{H^2\, dz}{A\, dB - B\, dA}.$$

Cette dernière formule mène, par des calculs identiques à ceux que nous rencontrerons prochainement, à la suivante

$$(5)\qquad \mathcal{F} = \frac{(\psi'_u\, du + \psi'_v\, dv) H^2}{(D'\psi'_u - D\psi'_v)\, du + (D''\psi'_u - D'\psi'_v)\, dv}.$$

2. *Applications.* — Dans le cas où l'on prend des sections horizontales comme courbe $v = \text{const.}$, c'est-à-dire où la fonction ψ se réduit à une fonction de la seule variable Y, la formule (5) se simplifie considérablement et devient

$$(6)\qquad \mathcal{F} = -\frac{H^2\, dv}{D\, du + D\, dv},$$

elle s'écrit encore

$$(7)\qquad \mathcal{F} = -\left(\frac{F'}{H} + \frac{E'}{H}\frac{du}{dv}\right).$$

On tire très simplement de cette dernière forme divers résultats.

Quand $E'=0$, c'est-à-dire quand la direction de référence, intersection du plan tangent et du plan de référence, est asymptotique, $\mathcal{F}$ est indépendant du rapport $\frac{du}{dv}$, c'est-à-dire du déplacement choisi et c'est le seul cas où cela ait lieu; c'est un résultat déjà trouvé.

Soient maintenant Q_z la torsion géodésique des courbes horizontales $v=$ const. et Q_n celle des courbes $u=$ const. Ces deux fonctions sont données par les relations

$$Q_z = \frac{1}{EH}(E'F - F'E), \qquad Q_u = \frac{1}{GH}(F'G - FG').$$

La flexion $\mathcal{F}$ suivant le déplacement $du=0$ satisfait donc aux deux relations

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{F}} + Q_z &= \frac{E'F}{EH},\\ \frac{1}{\mathcal{F}} - Q_u &= \frac{G'F}{HG}.\end{aligned}\right.$$

Les formules (8) conduisent aux résultats suivants :

1° Si les courbes coordonnées $u=$ const. et $v=$ const. sont rectangulaires, F est nul et il vient

$$\frac{1}{\mathcal{F}} = Q_u = -Q_z,$$

résultat déjà trouvé.

2° On a également $\frac{1}{\mathcal{F}} = Q_u$ si $G'=0$, c'est-à-dire si les courbes $u=$ const. sont asymptotiques. C'est un résultat connu (Théorème XI).

Si $E'=0$, on retrouve le résultat suivant : *la flexion d'une asymptotique par rapport à une direction quelconque est égale à son rayon de torsion.*

3° Soient R_u et R_z les rayons des sections normales tangentes aux courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ Les formules (8) s'écrivent

$$(9) \qquad \frac{1}{\mathcal{F}} + Q_z = \frac{\cos\theta}{R_z}, \qquad \frac{1}{\mathcal{F}} - Q_u = \frac{\cos\theta}{R_u}.$$

On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème XIV. — *L'inverse de la flexion d'une direction* uT *par rapport à une direction de référence* Mδ *est égale :*

1° *A la somme de la torsion géodésique relative à la direction considérée et du produit de sa courbure normale par le cosinus de l'angle* (Tδ).

2° *A la différence entre le produit de la courbure normale de la direction de référence par le cosinus de l'angle* (Tδ) *et de la torsion géodésique de cette direction de référence.*

3. Revenons aux conséquences de l'équation générale (7). Si l'on pose $\frac{du}{dv} = \mu$, la formule considérée s'écrit

$$\frac{1}{\mathcal{F}} = -\left(\frac{F'}{H} + \mu\,\frac{F'}{H}\right):$$

1° Soient μ_1 et μ_2 deux valeurs de μ telles que $\mu_1 + \mu_2 = 0$. En appelant $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les flexions relatives aux directions qui correspondent à μ_1 et μ_2,

$$\frac{1}{\mathcal{F}_1} + \frac{1}{\mathcal{F}_2} = -2\,\frac{F'}{H} = \frac{2}{\mathcal{F}_0},$$

où $\mathcal{F}_0$ désigne la flexion du déplacement suivant $u = \text{const.}$ Ainsi :

Théorème XV. — *La flexion prise par rapport à une direction quelconque pour un déplacement déterminé est moyenne harmonique des flexions relatives à deux déplacements conjugués harmoniques par rapport à la direction de référence et au déplacement considéré.*

Corollaire. — La flexion d'un élément prise par rapport à une direction perpendiculaire, égale à la torsion géodésique de la direction du déplacement, est moyenne harmonique des flexions prises par rapport à la même direction, de deux déplacements quelconques symétriques par rapport au déplacement considéré.

Remarque. — Le théorème V n'est qu'un cas particulier du théorème XIV.

2° Soient μ_1 et μ_2 deux valeurs quelconques de μ; on a

$$\frac{1}{\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2} = \frac{F'^2}{H^2} + \frac{(\mu_1+\mu_2)E'F'}{H^2} + \mu_1\mu_2 + \frac{E'^2}{H^2}. \tag{10}$$

Dans le cas où les déplacements sont conjugués, on a

$$E'\mu_1\mu_2 + F'(\mu_1+\mu_2) + G' = 0,$$

et il vient

$$\frac{1}{\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2} = \frac{F'^2 - E'G'}{H^2} = -\frac{1}{R_1R_2},$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 + R_1R_2 = 0,$$

résultat déjà trouvé autrement.

4. *Calcul de l'expression générale de la flexion* (Tδ) *d'un déplacement par rapport à une direction de référence.* — On voit sans peine que l'on a en valeur absolue l'égalité

$$\mathcal{F} = \frac{ds}{d\sigma}\,\frac{\sin(\delta T)}{\cos(\delta\Phi)} = \frac{[\Sigma(\alpha_1\,dy - \beta_1\,dx)^2]^{\frac{1}{2}}}{\alpha_1\,dA + \beta_1\,dB + \gamma_1\,dC} \tag{11}$$

en désignant par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les cosinus directeurs de Mδ et par a_1, b_1, c_1 ceux de la normale à la surface; or ici

$$a = \frac{A}{H}, \qquad b = \frac{B}{H}, \qquad c = \frac{C}{H},$$

la formule (11) devient alors

$$\mathcal{F} = \frac{H^2[\Sigma(\alpha_1\,dy - \beta_1\,dx)^2]^{\frac{1}{2}}}{H(\alpha_1\,da + \beta_1\,db + \gamma_1\,dc) - (a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1)\,dH}.$$

La direction de référence étant dans le plan tangent, cette expression se réduit à

$$\mathcal{F} = \frac{H[\Sigma(\alpha_1\,dy - \beta_1\,dx)^2]^{\frac{1}{2}}}{\alpha_1\,dA + \beta_1\,dB + \gamma_1\,dC}. \tag{12 bis}$$

Soient λ et μ les coefficients directeurs superficiels de la direction de référence; on a

$$\alpha_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial f}{\partial v}, \qquad dx = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

et la formule analogue; d'où

$$\alpha_1 \, dy - \beta_1 \, dx = C(\lambda \, dr - \mu \, du).$$

Il vient alors

$$(12) \qquad \mathfrak{F} = \frac{(\lambda \, dr - \mu \, du) H^2}{\alpha_1 \, dA + \beta_1 \, dB + \gamma_1 \, dC}.$$

Le dénominateur est de la forme $I \, du + J \, dv$; il reste à calculer I et J. Dans l'expression de $\alpha_1 \, dA$ qui, développée, s'écrit

$$\alpha_1 \, dA = \frac{\partial A}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial f}{\partial u} + p \frac{\partial f}{\partial v}\right) du + \frac{\partial A}{\partial v}\left(\lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial f}{\partial v}\right) dv,$$

faisons les substitutions

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \varphi''_{u^2}\psi'_v - \varphi'_v\psi''_{u^2} + \varphi'_u\psi''_{uv} - \psi'_u\varphi''_{uv},$$

$$\frac{\partial A}{\partial v} = \varphi''_{uv}\psi'_v - \psi''_{uv}\varphi'_u + \varphi'_u\psi''_{v^2} - \psi'_u\varphi''_{v^2}.$$

Nous aurons, comme coefficient de du,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \; & \lambda[f'_u(\varphi''_{u^2}\psi'_v - \psi''_{u^2}\varphi'_v) + f_u(\varphi'_u\psi''_{uv} - \psi'_u\varphi''_{uv})] \\ & + \mu[f'_v(\varphi''_{u^2}\psi'_v - \psi''_{u^2}\varphi'_v) + f'_v(\varphi'_u\psi''_{uv} - \psi'_u\varphi''_{uv})]. \end{aligned}$$

Faisant la somme des termes analogues dans $\alpha_1 \, dA$, $\beta_1 \, dB$, $\gamma_1 \, dc$, nous trouvons

$$I = -(\lambda D + \mu D'),$$
$$J = -(\lambda D' + \mu D'').$$

Nous avons donc au signe près

$$\mathfrak{F} = \frac{(\mu \, du - \lambda \, dv) H^2}{(\lambda D + \mu D') \, du + (\lambda D' + \mu D'') \, dv}.$$

Pour voir quel signe il faut adopter, comparons avec la formule (5), qui donne sans ambiguïté la flexion par la direction définie par la relation $\psi'_u\, du + \psi'_v\, \mu = 0$. Nous constatons que la formule précédente convient en grandeur et en signe. On a donc

$$
(13)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \frac{(\mu\, du - \lambda\, dv)\,\mathrm{H}^2}{(\lambda \mathrm{D} + \mu \mathrm{D}')\, du + (\lambda \mathrm{D}' + \mu \mathrm{D}'')\, dv} \\
&= \frac{\mathrm{H}(\mu\, du - \lambda\, dv)}{(\lambda \mathrm{E}' + \mu \mathrm{F}')\, du + (\lambda \mathrm{F}' + \mu \mathrm{G}')\, dv}
\end{aligned}
\right.
$$

et, si l'on définit le déplacement par ses paramètres superficiels ξ, η, on obtient la formule

$$
(14)\qquad \mathcal{J} = \frac{\mathrm{H}(\mu\xi - \lambda\eta)}{(\lambda \mathrm{E}' + \mu \mathrm{F}')\xi + (\lambda \mathrm{F}' + \mu \mathrm{G}')\eta},
$$

et, si l'on pose

$$
\theta(\lambda\mu) = \mathrm{E}'\lambda^2 + 2\mathrm{F}'\lambda\mu + \mathrm{G}'\mu^2,
$$

on peut encore écrire

$$
(15)\qquad \mathcal{J} = \frac{2\mathrm{H}(\mu\xi - \lambda\eta)}{\xi\theta'_\lambda + \eta\theta'_\mu} = \frac{2\mathrm{H}(\mu\xi - \lambda\eta)}{\lambda\theta'_\xi + \mu\theta'_\eta}.
$$

On vérifie immédiatement sur ces formules la relation

$$
(\mathrm{T}\delta) + (\delta\mathrm{T}) = 0
$$

et le fait que, si les directions (ξ, η) et (λ, μ) sont conjugués, $\mathcal{J}$ est infini.

5. *Interprétation géométrique nouvelle de la formule* (15). — Rapportons la surface à ses lignes de courbure : l'équation de l'indicatrice en un point (u, v) rapportée à ses axes sera

$$
\mathrm{E}'\lambda^2 + \mathrm{G}'\mu^2 = 1,
$$

l'homogénéité de la formule (15) permettant de prendre pour valeurs des paramètres λ et μ les coordonnées rectangulaires (λ, μ) du point correspondant de l'indicatrice.

I. *Indicatrice elliptique.* — On peut poser

$$
\mathrm{E}' = \frac{1}{a^2}, \qquad \mathrm{G}' = \frac{1}{b^2}
$$

et

(16) $$\begin{cases} \lambda = a\cos\varphi_1, & \mu = b\sin\varphi_1, \\ \xi = a\cos\varphi_2, & \eta = b\sin\varphi_2, \end{cases}$$

a et b étant les axes de l'indicatrice. Or, ici les axes superficiels étant rectangles, on a

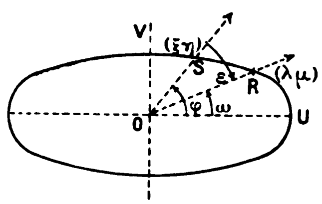
$$\mu\xi - \lambda\eta = \mathrm{OR\,OS}\sin\varepsilon,$$

et la formule (15) donne immédiatement

(17) $$\mathfrak{F} = \frac{\mathrm{H}\sin\varepsilon\,\mathrm{OR\,OS}}{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

On peut aussi calculer la différence $\mu\xi - \lambda\eta$ au moyen des

Fig. 2.



relations (16); si l'on pose

$$\zeta = \varphi_1 - \varphi_2,$$

on arrive à la formule

(18) $$\mathfrak{F} = \mathrm{H}ab\,\mathrm{tang}\,\zeta.$$

On peut transformer ces deux résultats de manière à mettre en évidence divers éléments géométriques : les rayons des sections R_1, R_2, R et R′ des sections normales qui passent respectivement par OU, OV, OR et OS. En effet, en posant $\mathrm{H}'^2 = \mathrm{E}'\mathrm{G}'$ on a la relation

(19) $$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 = \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{H}'^2}.$$

D'où

$$\mathrm{OR\,OS} = \frac{1}{\mathrm{H}'}\sqrt{\frac{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}{\mathrm{RR}'}};$$

la formule (17) donne alors

(20) $$\mathfrak{F} = \frac{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}{\sqrt{\mathrm{RR}'}}\,\frac{\sin\varepsilon}{\cos\zeta}.$$

La formule (18) donne immédiatement

$$\mathcal{J} = \sqrt{R_1 R_2} \operatorname{tang} \zeta. \tag{21}$$

Les formules (20) et (21) ont des significations géométriques qu'on aperçoit immédiatement en faisant intervenir le cercle principal de l'indicatrice.

Dans le cas d'un ombilic, les deux formules se réduisent à

$$\mathcal{J} = R \operatorname{tang} \varepsilon.$$

II. *Cas d'une indicatrice hyperbolique.* — On posera ici

$$\begin{cases} \lambda = a \sec\varphi_1, & \xi = a \sec\varphi_2, \\ \mu = b \operatorname{tang}\varphi_1, & \eta = b \operatorname{tang}\varphi_2, \end{cases} \tag{22}$$

et l'on trouvera

$$\mathcal{J} = \frac{R_1 R_2}{\sqrt{RR'}} \frac{\sin\varepsilon}{\operatorname{tang}\psi} \tag{23}$$

en posant

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{1 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}.$$

L'interprétation de cette formule ne présente pas le même intérêt géométrique que celle de la formule (20). Même observation pour la formule qui remplace la formule (21).

Remarque. — Il est évident qu'on pourrait ramener ce second cas au premier par l'introduction d'angles imaginaires.

III. *Cas d'une indicatrice réduite à deux parallèles.* (*Points paraboliques.*) — L'équation de l'indicatrice est ici

$$E'\lambda^2 = 1.$$

On a successivement

$$\mathcal{J} = \frac{H.OR.OS \sin\varepsilon}{E'\lambda\xi} = \frac{H}{E'} \frac{\sin\varepsilon}{\sin\theta \sin\theta'},$$

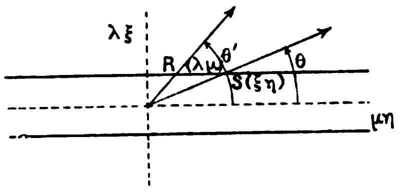
d'où résulte

$$\mathcal{J} = R_1 \frac{\sin\varepsilon}{\sin\theta \sin\theta'}, \tag{24}$$

R_1 désignant le rayon de courbure normale fini unique au point parabolique considéré.

Nous avons déjà, dans l'étude des développables, rencontré des

Fig. 3.



cas particuliers de la formule (23). Par exemple, si la direction T et δ sont rectangulaires, OR et OS sont rectangulaires; et l'on a

$$\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}, \qquad \varepsilon = \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\mathfrak{F} = \frac{2R_1}{\sin 2\theta}, \tag{25}$$

formule qui n'est autre que la formule (13) de la première Partie.

6. *Expression de la flexion suivant un déplacement donné prise par rapport à un plan de référence arbitraire.* — Soit

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \tag{26}$$

l'équation du plan de référence dans laquelle α, β, γ sont les cosinus mêmes de la normale au plan. On obtient la direction correspondante (λ, μ) en portant dans l'équation (26) les valeurs

$$x = \lambda f'_u + \mu f_v, \qquad y = \lambda\varphi'_u + \mu\varphi'_v, \qquad z = \lambda\psi'_u + \mu\psi'_v,$$

et l'emploi de la formule (14), par exemple, donne immédiatement

$$\mathfrak{F} = \frac{H[(\alpha f'_u + \beta\varphi'_u + \gamma\psi'_u)\,du + (\alpha f'_v + \beta\varphi'_v + \gamma\psi'_v)\,dv]}{\left\{\begin{array}{l} [\alpha(F'f'_u - E'f'_v) + \beta(F'\varphi'_u - E'\varphi'_v) + \gamma(F'\psi'_u - E'\psi'_v)]\,du \\ \quad + [\alpha(G'f'_u - F'f'_v) + \beta(G'\varphi'_u - F'\varphi'_v) + \gamma(G'\psi'_u - F'\psi'_v)]\,dv \end{array}\right\}}, \tag{27}$$

et avec la notation en paramètres superficiels

$$\mathfrak{F} = \frac{H[\alpha f'_u + \beta\varphi'_u + \gamma\psi'_u)\xi + (\alpha f'_v + \beta\varphi'_v + \gamma\psi'_v)\eta]}{\left\{\begin{array}{l} \xi[\alpha(F'f'_u - E'f'_v) + \beta(F'\varphi'_u - E'\varphi'_v) + \gamma(F'\psi'_u - E'\psi'_v)] \\ \quad + \eta[\alpha(G'f_u - F'f'_v) + \beta(G'\varphi'_u - F'\varphi'_v) + \gamma(G'\psi'_u - F'\psi'_v)] \end{array}\right\}}. \tag{28}$$

Remarque. — Ces formules se simplifient un peu si les coordonnées u, v forment un système conjugué.

7. *Application.* — Nous nous bornerons à faire de la formule (27) l'application signalée à la fin de la seconde Partie : la surface étant donnée par son équation cartésienne

$$z = f(x, y),$$

et le plan de référence étant représenté par l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

calculer la flexion. En appliquant la formule (27), on trouve

$$(29) \qquad \mathcal{F} = \frac{(p^2 + q^2 + 1)[(\alpha + \gamma p)\,dx + (\beta + \gamma q)\,dy]}{[\alpha s - \beta t + \gamma(ps - qr)]\,dx + [\alpha r - \beta s + \gamma(pt - qs)]dy}.$$

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE D'UNE IRRATIONNELLE AMBIGUË DU SECOND DEGRÉ;

Par M. Auric.

Considérons une irrationnelle ω racine de l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

d'où

$$\omega = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Le développement en fraction continue de ω est périodique et nous pouvons écrire

$$\omega \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

La racine conjuguée $\omega' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ donne naissance au développement renversé et l'on a

$$\omega' \equiv (\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1).$$

Si l'irrationnelle ω appartient à une classe ambiguë, ces deux développements sont identiques et cela ne peut se produire que si la suite indéfinie

$$(1) \qquad \ldots, \lambda_n, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

est symétrique soit par rapport à un terme λ, soit par rapport à l'intervalle compris entre deux termes consécutifs.

Nous savons que, dans le premier cas, ω est racine d'une équation de la forme

$$ax^2 + \mu a x + c = 0,$$

d'où $\omega = -\frac{\mu}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, et nous dirons que ω est une *pseudo-fraction*.

Dans le second cas ω est racine d'une équation de la forme

$$ax^2 + bx + a = 0,$$

d'où $\omega\omega' = 1$, et nous dirons que ω est une *pseudo-unité* (¹).

Trois cas seulement peuvent se présenter :

A. La suite (1) est symétrique par rapport à deux intervalles : en d'autres termes il existe deux pseudo-unités distinctes équivalentes au sens de Dedekind.

B. La suite (1) est symétrique par rapport à un intervalle et par rapport à un terme, ce qui se présentera évidemment si la période renferme un nombre impair de termes.

C. La suite (1) est symétrique par rapport à deux termes, c'est-à-dire qu'il existe deux pseudo-fractions équivalentes.

Nous allons examiner successivement chacun de ces cas et nous verrons que, si l'on appelle t, u la plus petite solution de l'équation de Fermat

$$t^2 - \Delta u^2 = 4,$$

la nature de la suite (1) dépend exclusivement de la décomposition en facteurs des deux nombres $t+2$ et $t-2$.

(¹) Voir *Journal de M. Jordan*, 1902, p. 416. La distinction entre pseudo-fractions et pseudo-unités a pour but de faire ressortir des résultats différents au point de vue des identités arithmétiques. Mais elle n'est pas essentielle : en effet, toute période $(\ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_i, \lambda_{i-1}, \ldots)$, symétrique par rapport à l'intervalle (λ_i, λ_i), se ramène à la période $(\ldots, \lambda_{i-1}, \pm 1 + \lambda_i, \pm 1, \pm 1 + \lambda_i, \lambda_{i-1}, \ldots)$, qui est symétrique par rapport au terme ± 1.

A. Appelons ω, ω_1 les deux pseudo-unités, on aura

$$\omega\omega' = \omega_1\omega_1' = 1, \qquad \omega_1 = \frac{A\omega - B}{C\omega - D},$$

avec

$$BC - AD = 1.$$

Cette relation subsiste évidemment si l'on remplace chaque irrationnelle par son inverse, ce qui donne

$$\frac{1}{\omega_1} = \frac{A - B\omega}{C - D\omega},$$

d'où en substituant on obtient les deux relations :

$$\omega = \frac{(A^2 - C^2)\omega - (AB - CD)}{(AB - CD)\omega - (B^2 - D^2)}, \qquad \omega_1 = \frac{(A^2 - B^2)\omega_1 - (AC - BD)}{(AC - BD)\omega_1 - (C^2 - D^2)}$$

qui donnent sous une forme explicite les équations dont ω et ω_1 sont racines.

La quantité placée sous le radical est égale à

$$(B^2 + C^2 - A^2 - D^2)^2 - 4,$$

ce qui permet d'écrire

$$B^2 + C^2 - A^2 - D^2 = t$$

et, comme $BC - AD = 1$, il vient

$$t + 2 = (B + C)^2 - (A + D)^2 = (B + C + A + D)(B + C - A - D),$$
$$t - 2 = (B - C)^2 - (A - D)^2 = (B - C + A - D)(B - C - A + D).$$

Si $t + 2 = mn$ et $t - 2 = pq$ sont des décompositions acceptables on aura évidemment

$$B = \frac{m + n + p + q}{4}, \qquad A = \frac{m - n + p - q}{4},$$
$$C = \frac{m + n - p - q}{4}, \qquad D = \frac{m - n - p + q}{4}.$$

B. Admettons en second lieu que l'on ait

$$\omega\omega' = 1, \qquad \omega_1 + \omega_1' = \lambda, \qquad \omega_1 = \frac{A\omega - B}{C\omega - D}$$

avec

$$BC - AD = 1.$$

On trouvera comme seconde relation

$$\lambda - \omega_1 = \frac{A - B\omega}{C - D\omega}$$

et en éliminant il viendra

$$\omega = \frac{D(2B - D\lambda)\omega - (BC + AD - CD\lambda)}{(BC + AD - CD\lambda)\omega - C(2A - C\lambda)},$$

$$\omega_1 = \lambda - \frac{(AC - BD)\omega_1 - (A^2 - B^2)}{(C^2 - D^2)\omega_1 - (AC - BD)}.$$

La quantité placée sous le radical sera égale à

$$[\lambda(C^2 - D^2) - 2(AC - BD)]^2 - 4,$$

d'où l'on peut poser

$$\lambda(C^2 - D^2) - 2AC + 2BD = t$$

et par suite, en tenant compte de $BC - AD = 1$,

$$t + 2 = (C + D)[\lambda(C - D) - 2A + 2B],$$
$$t - 2 = (C - D)[\lambda(C + D) - 2A - 2B].$$

Si les décompositions $t + 2 = mn$, $t - 2 = pq$ sont acceptables, on aura

$$C = \frac{m + p}{2}, \quad A = \frac{\lambda m - n - q}{4}, \quad D = \frac{m - p}{2}, \quad B = \frac{\lambda p + n - q}{4}.$$

Remarquons que l'on peut mettre le produit $t\lambda$ sous la forme d'une somme algébrique de quatre carrés

$$t\lambda = B^2 + (C\lambda - A)^2 - A^2 - (D\lambda - B)^2$$

avec

$$B(C\lambda - A) - A(D\lambda - B) = \lambda.$$

C. Admettons, enfin, que l'on ait

$$\omega + \omega' = \lambda, \quad \omega_1 + \omega'_1 - \lambda_1, \quad \omega_1 = \frac{A\omega - B}{C\omega - D}$$

avec

$$BC - AD = 1.$$

On aura comme seconde relation

$$\lambda_1 - \omega_1 = \frac{A(\lambda - \omega) - B}{C(\lambda - \omega) - D},$$

et, par suite, en éliminant,

$$\omega = \lambda - \frac{(CD\lambda_1 - BC - AD)\omega - D(D\lambda_1 - 2B)}{C(C\lambda_1 - 2A)\omega - (CD\lambda_1 - BC - AD)},$$

$$\omega_1 = \lambda_1 - \frac{(AC\lambda - BC - AD)\omega_1 - A(A\lambda - 2B)}{C(C\lambda - 2D)\omega_1 - (AC\lambda - BC - AD)}.$$

La quantité placée sous le radical est

$$(C^2\lambda\lambda_1 - 2AC\lambda - 2DC\lambda_1 + 2BC + 2AD)^2 - 4,$$

ce qui permet de poser

$$C^2\lambda\lambda_1 - 2AC\lambda - 2CD\lambda_1 + 2BC + 2AD = t$$

et, par suite, puisque $BC - AD = 1$,

$$t + 2 = C(C\lambda\lambda_1 - 2A\lambda - 2D\lambda_1 + 4B),$$

$$t - 2 = (C\lambda_1 - 2A)(C\lambda - 2D),$$

et, si l'on pose encore $t + 2 = mn$, $t - 2 = pq$, il viendra

$$C = m, \quad A = \frac{m\lambda_1 - p}{2}, \quad D = \frac{m\lambda - q}{2}, \quad B = \frac{m\lambda\lambda_1 - p\lambda - q\lambda_1 + n}{4}.$$

Enfin, nous remarquerons que l'on peut mettre le produit $t\lambda\lambda_1$ sous la forme d'une somme algébrique de quatre carrés

$$t\lambda\lambda_1 = B^2 + (C\lambda\lambda_1 - A\lambda - D\lambda_1 + B)^2 - (A\lambda - B)^2 - (D\lambda_1 - B)^2$$

avec

$$B(C\lambda\lambda_1 - A\lambda - D\lambda_1 + B) - (A\lambda - B)(D\lambda_1 - B) = \lambda\lambda_1.$$

Il sera possible de déduire de nombreuses identités arithmétiques des formules que nous venons d'établir.

NOTE SUR LES ÉQUATIONS $x^2 - ay^2 = 1$ ET $x^2 - ay^2 = -1$;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI.

1. On sait que l'équation

$$x^2 - ay^2 = 1, \tag{1}$$

dans laquelle a est un entier non carré, a une infinité de solutions entières. Si x et y sont deux entiers positifs vérifiant l'équation, $\frac{x}{y}$ est une réduite de rang pair du développement de $\sqrt{a}$ en fraction continue.

2. Soit x_1, y_1 une solution entière positive de l'équation (1), telle que $x_1 > 1$, et soient α, β les racines de l'équation

$$x^2 - 2x_1 x + 1 = 0, \tag{2}$$

en posant

$$x_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}, \qquad y_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{a}} \qquad (\alpha > \beta); \tag{3}$$

x_n, y_n sera une solution entière de (1). Si x_1, y_1 désigne la plus petite solution entière et positive de l'équation considérée, on démontre aisément que les formules (3) donnent toutes les solutions entières positives de la même équation.

On calcule ces solutions par les formules de récurrence

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = 2x_1 x_n - x_{n-1}, \\ y_{n+1} = 2x_1 y_n - y_{n-1}. \end{array}\right. \tag{4}$$

3. L'équation (1) représente, en axes rectangulaires, une hyperbole de sommets (1, 0) et (— 1, 0). Nous appellerons *points entiers* les points de cette hyperbole ayant pour coordonnées des nombres entiers.

On établit facilement les propriétés suivantes de ces points. Si M et M' sont deux points entiers, la parallèle à la tangente en M' menée par M rencontre une seconde fois l'hyperbole (1) en un point entier M″. Si M et M′ sont sur une même branche et que l'arc MM′ ne possède aucun autre point entier que ses extrémités, nous dirons que M et M′ sont des points entiers consécutifs ; alors M′ et M″ sont aussi des points entiers consécutifs.

Soient $A(1, 0)$ le sommet, $A_1(x_1, y_1)$ le premier point entier à coordonnées positives ; la parallèle menée par A à la tangente en A_1 donnera le point $A_2(x_2, y_2)$; la corde $A_1 A_3$ sera parallèle à la tangente en A_2, etc., et l'on obtiendra ainsi tous les points à coordonnées entières et positives. Par symétrie, on aura tous les points entiers à coordonnées positives ou négatives.

Au moyen de ces remarques, on voit par exemple que, si x', y' est une solution entière, les formules

$$x = 2x'^2 - 1, \qquad y = 2x'y'$$

en fournissent une nouvelle. De même

$$x = 4x'^3 - 3x', \qquad y = 4ay'^3 + 3y', \qquad \ldots,$$

formules qu'on obtient aisément à l'aide des équations (4).

On peut encore remarquer qu'il y a une infinité de manières de distribuer les points entiers deux à deux sur des cordes parallèles.

4. L'équation $x^2 - an^2y^2 = 1$ a une infinité de solutions entières. Soit x', y' l'une d'elles ; alors x', ny' est une solution de l'équation (1). Donc cette équation (1) a une infinité de solutions x, y telles que y soit un multiple d'un entier n donné arbitrairement.

5. Occupons-nous maintenant de l'équation

$$(1)' \qquad x^2 - ay^2 = -1.$$

Elle n'a pas toujours de solutions entières. Si elle en a, elle en a une infinité et, si l'on désigne l'une quelconque par ξ, η, la fraction $\frac{\xi}{\eta}$ est une réduite de rang impair du développement de $\sqrt{a}$. En outre, si ξ_1, η_1 désigne la solution entière positive composée des plus petits entiers possibles, on a $\xi_1 > 1$ et en outre

$$\xi_1 < x_1, \qquad \eta_1 < y_1.$$

Soient γ, δ les racines de l'équation

$$(2)' \qquad x^2 - 2\xi_1 x - 1 = 0;$$

si l'on pose

$$(3)' \qquad \xi_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}, \qquad \eta_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{2\sqrt{a}} \qquad (\gamma > \delta),$$

on aura

$$\xi_n^2 - a\eta_n^2 = \varepsilon,$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1, suivant que n est pair ou impair.

On a

$$(4)' \qquad \begin{cases} \xi_{n+1} = 2\xi_1\xi_n + \xi_{n-1}, \\ \eta_{n+1} = 2\xi_1\eta_n + \eta_{n-1}. \end{cases}$$

On obtient ainsi, en remarquant que $\xi_0 = 1$, $\eta_0 = 0$,

$$\xi_2 = 2\xi_1^2 + 1,$$
$$\eta_2 = 2\xi_1\eta_1,$$

d'où

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\xi_2 - 1}{2}}, \qquad \eta_1 = \sqrt{\frac{\xi_2 + 1}{2a}}.$$

Plus généralement, si l'on pose

$$(5) \qquad \xi = \sqrt{\frac{x - 1}{2}}, \qquad \eta = \sqrt{\frac{x + 1}{2a}},$$

ou, inversement,

$$(6) \qquad x = 2\xi^2 + 1, \qquad y = 2\xi\eta,$$

si les formules (5) attribuent à ξ, η des valeurs entières, ξ, η sera une solution de l'équation (1)'. D'autre part, si ξ, η est une solution entière de (1)', les formules (6) donnent pour x, y des valeurs entières vérifiant l'équation (1).

Or,

$$\eta_2 = 2\xi_1\eta_1 < 2x_1y_1,$$

c'est-à-dire

$$\eta_2 < y_2.$$

Mais

$$\xi_2^2 - a\eta_2^2 = 1;$$

donc

$$\xi_2 = x_1, \qquad \eta_2 = y_1.$$

La relation

$$\xi_2 = 2\xi_1^2 + 1$$

peut donc s'écrire

$$x_1 = 2\xi_1^2 + 1,$$

et de même

$$y_1 = 2\xi_1\eta_1.$$

De là cette conséquence : *pour que l'équation*

$$x^2 - ay^2 = -1$$

ait des solutions entières, il faut et il suffit que la plus petite solution positive entière autre que 1, 0 *de l'équation* (1) *soit de la forme*

$$x_1 = 1 + 2u^2,$$
$$y_1 = 2uv,$$

et alors $\xi_1 = u$, $\eta_1 = v$.

6. Cela posé, des formules

$$\xi_{p+2} = 2\xi_1\xi_{p+1} + \xi_p,$$
$$\xi_{p+1} = 2\xi_1\xi_p \quad + \xi_{p-1},$$
$$\xi_p \quad = 2\xi_1\xi_{p-1} + \xi_{p-2}$$

on tire

(7)
$$\xi_{p+2} = 2x_1\,\xi_p - \xi_{p-2}$$

et de même

(7)'
$$\eta_{p+2} = 2x_1\eta_p - \eta_{p-2}.$$

Si nous supposons p impair, ξ_{p-2}, η_{p-2} ; ξ_p, η_p ; ξ_{p+2}, η_{p+2} sont trois solutions de (1)' fournies par les formules (3)'; désignons-les par

$$x'_{n-1}, y'_{n-1} ;\ x'_n, y'_n ;\ x'_{n+1}, y'_{n+1}.$$

Nous aurons ainsi

(8)
$$\begin{cases} x'_{n+1} = 2x_1x'_n - x'_{n-1}, \\ y'_{n+1} = 2x_1y'_n - y'_{n-1}. \end{cases}$$

Ces formules ne peuvent servir qu'à partir de $n = 2$.
On a donc

$$x'_3 = 2x_1x'_2 - x'_1,$$
$$y'_3 = 2y_1y'_2 - y'_1.$$

D'ailleurs,

$$\xi_3 = 2\xi_1\xi_2 + \xi_1$$

ou

$$x'_2 = (2x_1 + 1)x'_1,$$

et de même

$$y'_2 = 2x'_1 y_1 + y'_1.$$

Cela étant, on déduit des formules (8)

$$x'_{n+1}y'_n - x'_n y'_{n+1} = x'_n y'_{n-1} - y'_n x'_{n-1},$$

et par suite, de proche en proche, on arrive à

$$x'_{n+1}y'_n - x'_n y'_{n+1} = x'_2 y'_1 - x'_1 y'_2,$$
$$x'_{n+1}y'_n - x'_n y'_{n+1} = 2x'_1(x_1 y'_1 - x'_1 y_1),$$

ou enfin

$$x'_{n+1}y'_n - x'_n y'_{n+1} = y_1.$$

7. Je dis maintenant que nous avons obtenu toutes les solutions entières de l'équation $(1)'$. En effet, soit x', y' une solution différente de celles que nous avons trouvées. On voit immédiatement que x' est compris entre deux valeurs telles que x'_n et x'_{n+1}, et y' entre y'_n et y'_{n+1}.

Si l'on pose

$$x = x'x'_{n+1} - ay'y'_{n+1},$$
$$y = y'x'_{n+1} - x'y'_{n+1},$$

x, y sera une solution de l'équation (1).

Or,

$$y = (x'_{n+1} - y'_{n+1}\sqrt{a})y' - (x' - y'\sqrt{a})y'_{n+1}$$

ou

$$y = \frac{y'_{n+1}}{x' + y'\sqrt{a}} - \frac{y'}{x'_{n+1} + y'_{n+1}\sqrt{a}} > 0.$$

D'autre part, nous avons trouvé

$$x'_{n+1}y'_n - x'_n y'_{n+1} = y_1,$$

ce qui peut s'écrire

$$y_1 = (x'_{n+1} - y'_{n+1}\sqrt{a})y'_n - (x'_n - y'_n\sqrt{a})y'_{n+1},$$

ou encore

$$y_1 = \frac{y'_{n+1}}{x'_n + y'_n\sqrt{a}} - \frac{y'_n}{x'_{n+1} + y'_{n+1}\sqrt{a}},$$

ce qui donne, par comparaison,

$$o < y < y_1,$$

ce qui est impossible.

8. Reprenons les relations (7), (7)′ et supposons maintenant que p soit pair. Alors, ξ_{p-2}, ξ_p, ξ_{p+2} sont trois solutions de l'équation (1) et, si on les désigne par x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, on aura entre ces quantités les relations (4).

Donc, en réunissant les résultats obtenus, on voit que, si l'équation (1)′ a des solutions, les formules (4)′ donnent alternativement toutes les solutions de l'équation (1)′ et de l'équation (1), pourvu que ξ_1, η_1 désigne la plus petite solution positive entière de (1)′.

9. Remarquons enfin que les points entiers de l'hyperbole représentée par l'équation (1)′ ont des propriétés analogues à ceux de sa conjuguée; mais les sommets de (1)′ ne sont pas des points entiers.

SUR L'EXTINCTION DU FROTTEMENT;

PAR M. PAUL APPELL.

Dans un intéressant article publié dans ce Recueil [1], M. Lecornu a étudié, sur un exemple assez général, le problème de l'extinction du frottement.

1. Je me propose d'étudier la même question pour un système matériel présentant les caractères suivants, qui se trouvent réalisés dans la plupart des systèmes usuels.

1° Le système considéré est d'abord assujetti à des liaisons quelconques, sans frottement, indépendantes de temps;

2° Il est soumis à des forces intérieures dérivant d'un potentiel Π qui est positif dans toutes les configurations possibles du système

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXV, p. 3, 1907.

et qui devient *nul* dans une configuration spéciale, constituant une configuration d'équilibre stable du système sous l'action des seules forces intérieures;

3° Le système est en contact avec des solides fixes $S_1, S_2, \ldots, S_p$, sur lesquels il glisse avec frottement;

4° Il est soumis enfin à d'autres forces extérieures dérivant d'une fonction U, qui reste inférieure à une limite fixe L, pour toutes les positions du système dans lesquelles le contact subsiste avec l'un au moins des corps $S_1, S_2, \ldots, S_p$.

II. Le système étant ainsi défini, le théorème des forces vives donne l'équation

$$(1)\qquad d(T+\Pi-U) = -f_1 N_1 v_1\,dt - f_2 N_2 v_2\,dt - \ldots - f_p N_p v_p\,dt,$$

où T est la demi-force vive, où $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont les coefficients de frottement, $N_1, N_2, \ldots, N_p$ les valeurs absolues des réactions normales, $v_1, v_2, \ldots, v_p$ les valeurs absolues des vitesses des points matériels en contact avec les solides $S_1, S_2, \ldots, S_p$.

On déduit de cette équation la conséquence suivante :

Si les réactions restent finies, il est impossible que l'un quelconque des produits $N_1 v_1, N_2 v_2, \ldots, N_p v_p$, ainsi que la somme $\Sigma f N v$, ait une limite inférieure autre que zéro.

En effet, supposons, par exemple, que pour les valeurs croissantes du temps t, $N_k v_k$ reste supérieur à un nombre positif fixe λ, différent de zéro. On aura

$$\frac{d}{dt}(T+\Pi-U) < -\lambda f_k;$$

d'où, en intégrant,

$$T+\Pi-U < -\lambda f_k t + C;$$

comme, par hypothèse, U est limité, $U < L$, tant que le système est en contact avec S_k, on a

$$T+\Pi < -\lambda f_k t + C + L.$$

Mais alors, au bout d'un temps t suffisamment grand, $T+\Pi$ deviendrait *nul*, et les vitesses de tous les points du système s'annuleraient dans la configuration d'équilibre stable correspondant à $\Pi = 0$.

Ce résultat est en contradiction avec l'hypothèse faite

$$N_k v_k > \lambda,$$

car, puisque les vitesses s'annulent, v_k tend vers zéro et N_k est supposé fini.

Les limites inférieures de tous les produits $N_1 v_1$, $N_2 v_2$, ..., $N_p v_p$ *et de la somme* $\Sigma f N v$ *sont donc nulles.*

Il arrivera, en général, que ces produits tendront tous vers *zéro*. Donc, certaines des réactions, N_1, N_2, ..., N_k, par exemple, tendront vers *zéro;* le système tendra à abandonner les liaisons avec frottement d'où proviennent ces réactions. En même temps les vitesses des autres points frottants v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_p tendront vers *zéro* et les glissements correspondants tendront à disparaître.

Le système, dans son ensemble, cherchera donc bien à échapper au frottement.

Ces considérations s'étendent au cas où les corps du système frottent les uns sur les autres. Je laisse à d'autres, qui auront plus de loisirs que moi, le soin de les généraliser et de les préciser.

SUR LE PROBLÈME DES MULTIPLICATEURS RÉCIPROQUES;

PAR M. C. POPOVICI.

1. A propos de la théorie des derniers multiplicateurs, on peut formuler le problème suivant : *Quels sont les systèmes d'équations*

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n},$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n},$$

tels que les coefficients d'un système soient les multiplicateurs *de l'autre?* C'est ce qu'on pourrait appeler le *problème des multiplicateurs réciproques.*

Pour le traiter, il faut résoudre le système de $2(n-1)$ équations :

$$
\text{(III)} \quad \left\{ \begin{array}{l}
A_1 \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} + A_2 \dfrac{\partial f_k}{\partial x_2} + \ldots + A_n \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} + f_k \left(\dfrac{\partial A_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial A_n}{\partial x_n} \right) = 0, \\
f_1 \dfrac{\partial A_k}{\partial x_1} + f_2 \dfrac{\partial A_k}{\partial x_2} + \ldots + f_n \dfrac{\partial A_k}{\partial x_n} + A_k \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \right) = 0 \\
\qquad (k = 1, 2, \ldots, n).
\end{array} \right.
$$

Nous ne considérerons que le cas de deux variables. Dans ce cas, les derniers multiplicateurs sont en même temps facteurs intégrants.

Deux questions se posent :

1° *Quels sont les deux groupes de facteurs intégrants réciproques* A, B; f, φ?

2° *Quelles sont les intégrales que l'on obtient avec ces facteurs?*

Nous résoudrons les deux questions en même temps.

2. Pour traiter la première, il faut intégrer le système

$$
(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll}
A \dfrac{\partial f}{\partial x} + B \dfrac{\partial f}{\partial y} + f \left(\dfrac{\partial A}{\partial x} + \dfrac{\partial B}{\partial y} \right) = 0, & f \dfrac{\partial A}{\partial x} + \varphi \dfrac{\partial A}{\partial y} + A \left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0, \\
A \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + B \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi \left(\dfrac{\partial A}{\partial x} + \dfrac{\partial B}{\partial y} \right) = 0, & f \dfrac{\partial B}{\partial x} + \varphi \dfrac{\partial B}{\partial y} + B \left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0.
\end{array} \right.
$$

En ce qui regarde la deuxième question, il faut remarquer que, si l'on fait

$$\frac{A}{B} = u, \qquad \frac{f}{\varphi} = v,$$

on a

$$
(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll}
\dfrac{dx}{u} = dy & \text{pour } v = \text{const.}; \\
\dfrac{dx}{v} = dy & \text{pour } u = \text{const.}
\end{array} \right.
$$

Il s'ensuit que chaque intégrale obtenue avec la combinaison $A\,dy - B\,dx$ sera une fonction de v et chaque intégrale obtenue avec la combinaison $f\,dy - \varphi\,dx$ sera une fonction de u; par conséquent, on aura

$$(3)\quad \begin{cases} z(v) = \int f(\mathrm{A}\,dy - \mathrm{B}\,dx), & t(u) = \int \mathrm{A}(f\,dy - \varphi\,dx); \\ \zeta(v) = \int \varphi(\mathrm{A}\,dy - \mathrm{B}\,dx), & \tau(u) = \int \mathrm{B}(f\,dy - \varphi\,dx). \end{cases}$$

Maintenant, si nous égalons les premiers membres de celles des équations (1) qui sont écrites sur une même ligne, nous obtiendrons

$$(4)\quad \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{B}f = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{A}\varphi, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{B}f = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{A}\varphi.$$

Donc

$$(5)\quad \mathrm{A}\varphi - \mathrm{B}f = \text{const.} = k,$$

ce qui revient à

$$u - v = \frac{k}{\mathrm{B}\varphi},$$

et, en vertu des équations (3),

$$(6)\quad \begin{cases} kx = z(v) - t(u), \\ ky = \zeta(v) - \tau(u). \end{cases}$$

Ces formules font voir que les courbes $u =$ const. et $v =$ const. sont des courbes de translation, ce qui résulte aussi des équations (2).

En vertu des équations (2), on peut écrire

$$(7)\quad uv'_x + v'_y = 0, \qquad vu'_x + u'_y = 0,$$

d'où, par élimination de v,

$$(8)\quad u = -\frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{u'_y}{u'_x}}{\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{u'_y}{u'_x}}.$$

Pour intégrer cette équation, remarquons qu'en vertu des équations (2) et (6), on a

$$(9)\quad \frac{z'(v)}{\zeta'(v)} = v, \qquad \frac{t'(u)}{\tau'(u)} = u.$$

Donc, si l'on fait $k = 1$, il viendra

$$(10) \qquad \begin{cases} x = \int v\,\zeta'(v)\,dv - \int u\,\tau'(u)\,du, \\ y = \zeta(v) - \tau(u), \end{cases}$$

ou, en éliminant v,

$$(11) \qquad x + u\,\tau(u) - \int \tau(u)\,du = \pi[y + \tau(u)],$$

qui est l'intégrale générale de l'équation (8). On tirera v de la seconde équation (7).

L'intégration du système (1) est terminée si l'on se souvient que nous avons encore obtenu l'intégrale (5). En effet, les équations (4) et (7) sont équivalentes au système (1).

Il est intéressant de remarquer que les fonctions ζ et τ peuvent être prises arbitrairement, en tant qu'elles sont regardées comme fonctions de v et u; mais, si on les regarde ensuite comme fonctions de x et y, elles ne sont plus arbitraires. En effet, les équations (3) nous donnent

$$\zeta'_x = \tau'_x = -B\varphi.$$

On voit que le problème dépend de trois fonctions arbitraires. Supposons que l'on se donne, par exemple, B, ζ et τ; alors les équations (10) donnent u et v, l'équation (5) fait connaître φ; puis on a $A = Bu$, $f = \varphi v$ et enfin z et t par les équations (9).

Si l'on se donne d'avance les équations

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B}, \qquad \frac{dx}{f} = \frac{dy}{\varphi},$$

ce sont les équations (5) et (7) qui permettent de reconnaître si les coefficients sont des multiplicateurs réciproques.

3. On peut résoudre un problème plus général : *Déterminer les fonctions u et v telles que l'on ait*

$$\frac{dx}{\lambda(u)} = dy \quad \text{pour } v = \text{const.}; \qquad \frac{dx}{\mu(v)} = dy \quad \text{pour } u = \text{const.}$$

Il faut intégrer le système

$$(7') \qquad \lambda(u)v'_x + v'_y = 0, \qquad \mu(v)u'_x + u'_y = 0,$$

qui nous conduit à l'équation

$$\lambda(u) = D^2(u),$$

D désignant le symbole $\dfrac{\dfrac{\partial}{\partial y}}{\dfrac{\partial}{\partial x}}$.

Le problème est le même; car, si u est une intégrale de l'équation $dx = v\,dy$, $\lambda(u)$ en sera une aussi; de même $\mu(v)$ sera comme v une intégrale de l'équation $dx = u\,dy$.

Faisons donc $\lambda(u) = U$ et $\mu(v) = V$; le système $(7')$ se réduit à

$$UV'_x + V'_y = 0, \qquad VU'_x + U'_y = 0,$$

dont nous avons trouvé l'intégrale générale. En passant de U à u, on a, pour cette dernière fonction,

$$(11') \qquad x - \lambda(u)T(u) + \int T(u)\,du = \pi[y - T(u)].$$

On pourrait trouver encore cette solution en remarquant que, d'après les équations $(7')$, les courbes u et v sont des courbes de translation. Dès lors on doit avoir

$$x = z(v) + t(u),$$
$$y = \zeta(v) + \tau(u),$$

avec

$$\frac{z'(v)}{\zeta'(v)} = \mu(v), \qquad \frac{t'(u)}{\tau'(u)} = \lambda(u).$$

4. Une question plus générale encore, que nous allons formuler, conduit à une équation de la forme

$$(12) \qquad H(z, t) = \frac{P(z, t)q + \dfrac{\partial t}{\partial y}}{P(z, t)p + \dfrac{\partial t}{\partial x}}, \qquad t = \frac{q}{p},$$

que nous pourrons étudier et même intégrer dans certains cas en la réduisant à l'équation classique de Laplace

$$s + ap + bq = 0,$$

où a et b ne dépendent que de x et y.

Nous avons intégré l'équation (12) dans le cas où P est nul et H fonction de z; son intégrale générale est exprimée par la relation (11').

On arrive à cette équation quand on se propose de trouver les fonctions u et v telles que l'on ait

$$\frac{dx}{\lambda(u,v)} = dy \quad \text{pour } v = \text{const.}; \qquad \frac{dx}{\mu(u,v)} = dy \quad \text{pour } u = \text{const.}$$

Pour cela il faut intégrer le système

$$(13) \qquad \lambda(u,v)v'_x + v'_y = 0, \qquad \mu(u,v)u'_x + u'_y = 0.$$

De la deuxième équation on tire

$$v = \mathrm{F}(u,t), \qquad t = \frac{u'_y}{u'_x},$$

et en remplaçant dans la première on obtient l'équation (12) où z représente la fonction u.

Réciproquement, on peut revenir de l'équation (12) au système (13) si l'on intègre l'équation

$$\frac{du}{dt} = \mathrm{P}(u,t).$$

Essayons maintenant d'intégrer le système (13).

Remarquons que $\varphi(v)$ et $f(u)$ seront comme u et v des intégrales respectives des équations (13). Nous pourrons donc user des substitutions $\mathrm{U} = f(u)$, $\mathrm{V} = \varphi(v)$ pour simplifier les expressions de λ et de μ.

Au lieu de chercher u et v en fonction de x et y, cherchons x et y en fonction de u et v. A cet effet, posons

$$(14) \qquad x = \pi(u,v), \qquad y = \varpi(u,v).$$

Faisons successivement $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$; nous trouvons

$$\frac{\pi'_u}{\varpi'_u} = \lambda(u,v), \qquad \frac{\pi'_v}{\varpi'_v} = \mu(u,v).$$

Donc, si l'on connaît la fonction ϖ, on aura

$$(15) \qquad \pi(u,v) = \int_{u_0}^{u} \lambda\varpi'_u\,du + \int_{v_0}^{v} \mu\varpi'_v\,dv.$$

Exprimons que le second membre est intégrable; nous arrivons à

$$\varpi''_{uv} + \frac{\lambda'_v}{\lambda - \mu}\varpi'_u - \frac{\mu'_u}{\lambda - \mu}\varpi'_v = 0, \tag{16}$$

ce qui est une équation de Laplace. Supposons que l'on connaisse l'intégrale de l'équation (16); alors on aura l'expression de ϖ avec deux fonctions arbitraires, puis π; les équations (14) nous donneront enfin la solution générale du système (13).

5. Exemple I. — *On suppose λ fonction de u et μ fonction de v*. On a

$$\varpi''_{uv} = 0,$$
$$y = \varpi(u, v) = \zeta(v) - \tau(u).$$

On retombe sur une solution connue que nous avons exprimée par la formule (11').

6. Exemple II. — *On suppose* $\lambda = \mu$. Les équations (13) donnent alors

$$\frac{u'_y}{u'_x} = \frac{v'_y}{v'_x}, \qquad v = \varphi(u).$$

Les deux équations (13) se réduisent à une seule

$$\lambda[u, \varphi(u)]\, u'_x + u'_y = 0.$$

et il n'y a pas lieu de chercher x et y. On a

$$x - \lambda[u, \varphi(u)]\, y = \pi(u),$$

avec deux fonctions arbitraires φ et π.

7. Exemple III. — *On se donne le système*

$$f(u)^{n'-1}\varphi(v)^n v'_x + v'_y = 0, \qquad f(u)^{n'}\varphi(v)^{n-1} u'_x + u'_y = 0.$$

Cet exemple contient comme cas particulier l'exemple I pour $n = n' = 0$ et aussi le cas $\lambda = \varphi(v)$, $\mu = f(u)$ pour $n = n' = 1$.

Par un changement de variables on est ramené aux équations

$$u^{n'-1} v^n v'_x + v'_y = 0, \qquad u^{n'} v^n u'_x + u'_y = 0.$$

La détermination de y dépend de l'équation

$$\varpi''_{uv} + \frac{n}{v-u}\varpi'_v - \frac{n'}{v-u}\varpi'_u = 0,$$

qui est l'équation d'Euler et de Poisson. Son intégrale générale est donnée par la formule

$$y = \varpi(u, v) = \int_{u_0}^{u} \frac{f_1(\alpha)\,d\alpha}{(u-\alpha)^{n'}(v-\alpha)^{n}} + \int_{v_0}^{v} \frac{f_2(\beta)\,d\beta}{(u_0-\beta)^{n'}(v-\beta)^{n}}.$$

On aura par suite pour x

$$x = \pi(u, v) = \int_{u_0}^{u} \frac{u^{n'-1}v^{n} f_1(\alpha)\,d\alpha}{(u-\alpha)^{n'}(v-\alpha)^{n}} + \int_{v_0}^{v} \frac{u_0^{n'}v^{n-1} f_2(\beta)\,d\beta}{(u_0-\beta)^{n}(v-\beta)^{n}}.$$

Pour nous rendre compte de la généralité de la méthode, remarquons que les fonctions ainsi trouvées ne sont pas seulement les intégrales générales du système proposé; mais aussi d'une infinité d'autres; à savoir ceux dans lesquels le couple λ, μ satisfait aux équations

$$\frac{\lambda'_v}{\lambda-\mu} = \frac{n}{v-u}, \qquad \frac{\mu'_u}{\lambda-\mu} = \frac{n'}{v-u}.$$

Éliminant μ entre ces équations, on trouve

$$\lambda''_{uv} - \frac{n}{v-u}\lambda'_u + \frac{n'-1}{v-u}\lambda'_v = 0.$$

Donc les solutions ci-dessus satisferont à une double infinité de systèmes de la forme (13), dans lesquels on a

$$\lambda = \int_{u_0}^{u} \frac{\varphi_1(\alpha)\,d\alpha}{(u-\alpha)^{1-n'}(v-\alpha)^{-n}} + \int_{v_0}^{v} \frac{\varphi_2(\beta)\,d\beta}{(u_0-\beta)^{1-n'}(v-\beta)^{\,n}}.$$

NOTE AU SUJET DE CERTAINES DISCONTINUITÉS APPARENTES DANS LES MOUVEMENTS OU INTERVIENT LE FROTTEMENT DE GLISSEMENT;

Par M. de Sparre.

Dans une Note publiée, l'an passé, dans le *Bulletin de la Société mathématique*, j'ai fait voir que l'on arrive sans peine à lever l'ambiguïté apparente à laquelle peut conduire l'emploi des lois de Coulomb, en tenant compte de la continuité du mouvement.

Il existe toutefois certains problèmes où l'application de ces lois semble conduire, ainsi que je vais le faire voir, à un mouvement discontinu, ce qui paraît à première vue absurde. Toutefois, si l'on examine la question de plus près, on voit que la solution à laquelle on est conduit est au lieu de cela fort rationnelle, et que là encore les lois de Coulomb donnent une image, approchée sans doute, mais somme toute très satisfaisante des phénomènes. La discontinuité qu'elles introduisent n'existe évidemment pas, mais elle remplace une modification très rapide des conditions du mouvement, modification que l'on peut sans inconvénients remplacer par la discontinuité en question, si l'on se propose seulement de connaître ce qui se passait avant et après la modification dont il s'agit.

C'est d'ailleurs l'hypothèse de la rigidité absolue des liaisons, qui introduit dans le cas actuel la discontinuité dont nous venons de parler, comme elle avait conduit à introduire des percussions dans les problèmes examinés par nous dans la Note que je rappelle en commençant.

Si l'on tient compte de l'élasticité des liaisons, cette discontinuité disparaît et elle est remplacée par une modification des conditions du mouvement d'autant plus rapide que les liaisons sont plus raides, et qui, à la limite, devient instantanée lorsqu'on les suppose absolument rigides.

Nous verrons aussi que, pour certains problèmes, où intervient le frottement, on peut, pour des conditions initiales données, Supposons maintenant

$$f < 3 \tang \theta,$$

et supposons toujours le système abandonné à lui-même sans vitesse initiale.

On devra avoir, à l'instant initial,

$$N \varepsilon \eta'' > 0.$$

Or, pour $\theta' = 0$, on a

$$N \varepsilon \eta'' = 2 \frac{g^2 \cos^3 \theta (3 \sin \theta - f\varepsilon \cos \theta) \varepsilon (2 \cos^2 \theta - 1)}{(4 \sin \theta \cos^2 \theta - f\varepsilon \cos \theta + \sin \theta)^2}.$$

Mais, du moment que le mouvement se produit, on a

$$3 \sin \theta > f \cos \theta,$$

la condition précédente revient donc (¹) à

$$\varepsilon (2 \cos^2 \theta - 1) = \varepsilon \cos 2\theta > 0.$$

Donc, si $\theta_0 < 45^\circ$, on devra prendre $\varepsilon = +1$; si, au lieu de cela, $\theta_0 > 45^\circ$, on devra prendre $\varepsilon = -1$.

Supposons maintenant que l'on ait d'abord

$$3 \tang \theta_0 = f,$$

le système est encore en équilibre, et l'on a

$$N = \frac{1}{2} g \cot \theta_0,$$

$$\theta'' = 0.$$

Donnons à $\tang \theta_0$ une valeur tant soit peu supérieure à $\frac{1}{3} f$; si $\theta_0 < 45^\circ$, on devra conserver pour ε la valeur $+1$ qu'on avait dû adopter tant que le système était en équilibre, de sorte que θ'' et η'' commenceront par prendre des valeurs très petites et N aura une valeur très voisine de celle, $\frac{1}{2} g \cos \theta_0$, qu'il avait pour la position d'équilibre; en un mot, les valeurs de θ'', η'' et N pour le mouvement

---

(¹) Car nous supposons

$$\theta < 90^\circ.$$

sont la suite de celles qu'elles avaient pour le repos et il n'y a, par suite, pas de discontinuité. Supposons au lieu de cela le système d'abord en équilibre pour

$$\tang\theta_0 = \frac{1}{3} f \qquad \text{avec} \qquad \theta_0 > 45^\circ,$$

et que l'on donne ensuite à $\tang\theta_0$ une valeur tant soit peu supérieure à $\frac{1}{3}f$, le système se mettra en mouvement et, comme $\theta_0 > 45^\circ$, on devra prendre pour ε la valeur -1, de sorte que θ'', au lieu de prendre une valeur très petite, en prendra une sensiblement égale à

$$\frac{3g \sin\theta_0 \cos\theta_0}{2r \sin\theta_0(1 + \cos^2\theta_0)},$$

θ'' passe donc brusquement de la valeur o à une valeur finie et N qui, au moment de l'équilibre, était égal à

$$\frac{1}{2} g \cot\theta_0,$$

passe brusquement de cette valeur à la valeur négative

$$-\frac{g(1 - 2\cos^2\theta_0)\cos\theta_0}{4 \sin\theta_0(1 + \cos^2\theta_0)}.$$

Il y a donc là une discontinuité, qui ne peut évidemment se présenter dans les phénomènes naturels; mais nous allons voir : 1° que cette discontinuité tient à la rigidité absolue, supposée aux liaisons et qu'elle disparaît lorsqu'on tient compte de leur élasticité; 2° que les résultats fournis par la loi de Coulomb donnent en définitive une image approchée très suffisante des phénomènes, en ce sens qu'au moment où l'équilibre est rompu, le point A échappe en un temps très court au contact du guide sur lequel il s'appuyait, pour venir frotter sur l'autre, si la liaison est bilatérale, ou pour se mouvoir librement, si elle est unilatérale.

Nous supposerons donc dans ce qui va suivre que la tige AB s'allonge ou se raccourcisse proportionnellement à l'effort qu'elle supporte et nous négligerons, au lieu de cela, l'allongement du fil OB ainsi que la déformation des guides.

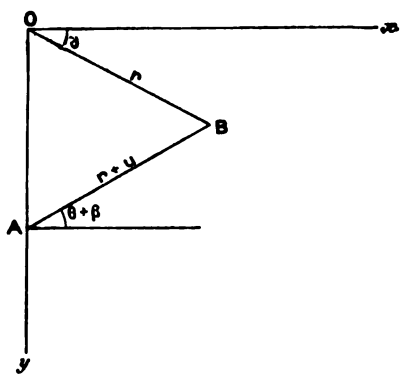
Nous désignerons, comme plus haut, par r la longueur du fil, supposée invariable, la longueur de la tige étant alors $r + u$, et sa tension dans ces conditions étant

$$Q = \nu^2 u \quad (^1),$$

où ν^2 désigne une constante.

La tige ayant actuellement la longueur $r + u$, elle fait avec l'horizontale un angle $\theta + \beta$, où β est très petit, et l'on aura pour

Fig. 2.



déterminer cette quantité β, en se bornant à la partie principale,

$$(r + u)\cos(\theta + \beta) = r\cos\theta$$

ou

$$r\beta = u\cot\theta.$$

Nous aurons ensuite

$$\eta = r\sin\theta + (r + u)\sin(\theta + \beta) = 2r\sin\theta + r\beta\cos\theta + u\sin\theta$$

ou

$$\eta = 2r\sin\theta + \frac{u}{\sin\theta}.$$

Nous poserons alors

$$\zeta = \frac{u}{\sin\theta},$$

ce qui nous donnera

$$\begin{aligned} \eta &= 2r\sin\theta + \zeta, \\ \eta'' &= 2r(\cos\theta\theta'' - \sin\theta\theta'^2) + \zeta'', \\ Q &= \nu^2\zeta\sin\theta. \end{aligned}$$

(1) La déformation étant faible on peut, tout au moins comme première approximation, la supposer proportionnelle à la tension.

Les équations des mouvements de B et de A nous donneront donc

$$r\theta'' = g\cos\theta + Q\sin(2\theta + \beta),$$
$$\eta'' = g + Q[f\varepsilon\cos(\theta + \beta) - \sin(\theta + \beta)],$$
$$N = -Q\cos(\theta + \beta);$$

ou, en se bornant toujours à la partie principale,

$$(5) \qquad r\theta'' = g\cos\theta + 2\nu^2\zeta\sin^2\theta\cos\theta,$$
$$\eta'' = 2r(\cos\theta\theta'' - \sin\theta\theta'^2) + \zeta'' = g + \nu^2\zeta\sin\theta(f\varepsilon\cos\theta - \sin\theta),$$

de sorte que les équations du mouvement seront l'équation (5) et l'équation

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \zeta'' + \nu^2\zeta\sin\theta[4\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta - f\varepsilon\cos\theta] \\ \qquad + g(2\cos^2\theta - 1) - 2r\sin\theta\theta'^2 = 0, \end{array} \right.$$

obtenue en remplaçant θ'' par sa valeur (5) dans l'équation précédente que l'on peut écrire

$$(6') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \zeta'' + \nu^2\zeta\sin\theta[3\sin\theta - f\varepsilon\cos\theta + 2\sin\theta(2\cos^2\theta - 1)] \\ \qquad + g(2\cos^2\theta - 1) - 2r\sin\theta\theta'^2 = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{1}{3}f, \qquad \theta' = 0;$$

le système est en équilibre et l'on a

$$\zeta = -\frac{g}{2\nu^2\sin^2\theta}, \qquad N = \frac{g}{2}\cot\theta.$$

Pour ces valeurs de θ et ζ le système reste en équilibre.

Donnons à θ une valeur θ_0 très peu plus grande et telle que l'on ait

$$f = 3\operatorname{tang}\theta_0\left[1 - \frac{2}{3}\alpha(1 - 2\cos^2\theta_0)\right],$$

en supposant $\theta_0 > 45°$ et α très petit.

Si le système est maintenu en équilibre dans cette position par une très petite force verticale appliquée en A (¹), on aura alors

$$\zeta_0 = -\frac{g}{2\nu^2\sin^2\theta_0};$$

(¹) La force qui maintient le système en équilibre est, en y comprenant le frotabandonnons maintenant le système à lui-même, sans vitesse initiale et considérons un espace de temps assez court pour que nous puissions négliger la variation de θ et prendre par suite

$$\theta' = \theta'_0 = 0, \qquad \theta = \theta_0.$$

Nous aurons

$$\zeta'' - 2\nu^2 \sin^2\theta_0 (1 - 2\cos^2\theta_0)(1-\alpha)\zeta - g(1 - 2\cos^2\theta_0) = 0.$$

Posons alors

$$2\nu^2 \sin^2\theta_0 (1-\alpha)(1 - 2\cos^2\theta_0) = K^2,$$

puisque

$$\theta_0 > 45^\circ,$$

K^2 est positif et très grand, ν^2 l'étant et il devient infini avec ν, lorsqu'on suppose la tige de plus en plus raide.

Nous aurons

$$\zeta = -\frac{g}{2\nu^2 \sin^2\theta_0}\left(\frac{1}{1-\alpha} + A e^{Kt} + B e^{-Kt}\right).$$

Nous avons d'ailleurs par hypothèse

$$\zeta_0 = -\frac{g}{2\nu^2 \sin^2\theta_0}, \qquad \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0 = 0;$$

et l'on en conclut

$$A = B = -\frac{\alpha}{2(1-\alpha)},$$

et par suite

$$\zeta = -\frac{g}{2\nu^2 \sin^2\theta_0 (1-\alpha)}\left[1 - \frac{\alpha}{2}(e^{Kt} + e^{-Kt})\right].$$

Toutefois cette formule ne doit être appliquée que jusqu'à $\zeta = 0$. K étant très grand et, par suite, e^{-Kt} négligeable devant e^{Kt}, dès

---

tement,

$$N\,3 \operatorname{tang}\theta_0 = \frac{3g}{2},$$

la force fournie par le frottement est Nf, la force supplémentaire serait donc

$$\frac{3g}{2} - Nf = \alpha g(1 - 2\cos^2\theta_0),$$

elle est donc très petite avec α.

que t diffère de zéro, on aura $\zeta = 0$ sensiblement pour

$$e^{Kt} = \frac{2}{\alpha}; \qquad \text{donc} \qquad t = \frac{1}{K} \mathcal{L} \frac{2}{\alpha}.$$

A partir de cet instant, ζ changeant de signe, si la liaison est unilatérale (tige s'appuyant contre un mur), la tige échappera et le mouvement subséquent se fera comme si le mur n'existait pas.

Si, au lieu de cela, la liaison est bilatérale, N changera de signe; il faudra, par suite, à partir de ce moment, prendre $\varepsilon = -1$ et l'on aurait, en prenant toujours $\theta = \theta_0$, $\theta'_0 = 0$,

$$\zeta'' + \nu^2 \zeta \sin\theta_0 [\sin\theta_0 (4\cos^2\theta_0 + 1) + f\cos\theta_0] - g(1 - 2\cos\theta_0) = 0.$$

C'est-à-dire, si l'on se borne à la partie principale, f différant très peu de $3\tang\theta_0$,

$$\zeta'' + 4\nu^2 \sin^2\theta_0 (1 + \cos^2\theta_0)\zeta - g(1 - 2\cos^2\theta_0) = 0,$$

et, en posant

$$K_1^2 = 4\nu^2 \sin^2\theta_0 (1 + \cos^2\theta_0),$$

on aurait

$$\zeta = g\frac{1 - 2\cos^2\theta_0}{K_1^2}(1 + A\cos K_1 t + B\sin K_1 t),$$

de sorte qu'il se produirait une série d'oscillations, en réalité rapidement amorties, autour de la position moyenne

$$\zeta = g\frac{1 - 2\cos^2\theta_0}{K_1^2}.$$

Valeur pour laquelle on aurait

$$Q = \frac{g(1 - 2\cos^2\theta_0)}{4\sin\theta_0(1 + \cos^2\theta_0)},$$

et par suite

$$N = -Q\cos\theta_0 = -\frac{g\cos\theta_0(1 - 2\cos^2\theta_0)}{4\sin\theta_0(1 + \cos^2\theta_0)},$$

ce qui est bien la valeur obtenue pour N par l'application des lois de Coulomb et sans tenir compte de l'élasticité des liaisons.

Il reste à vérifier que l'échappement ou le changement de signe de N (suivant que la liaison est unilatérale ou bilatérale) a lieu au bout d'un temps assez court pour que l'on puisse négliger la variation de θ pendant ce temps.

Or, en prenant $\theta = \theta_0$, nous avons par l'équation (5)

$$r\theta'' = g\cos\theta_0 + 2\nu^2\zeta\sin^2\theta_0\cos\theta_0$$
$$= g\cos\theta_0 - \frac{g\cos\theta_0}{1-\alpha}\left[1 - \frac{\alpha}{2}(e^{Kt} + e^{-Kt})\right]$$

ou

$$r\theta'' = \frac{g\alpha\cos\theta_0}{1-\alpha}\left[\frac{1}{2}(e^{Kt} + e^{-Kt}) - 1\right];$$

on en déduit

$$r(\theta - \theta_0) = \frac{g\alpha\cos\theta_0}{1-\alpha}\left[\frac{1}{2K^2}(e^{Kt} + e^{-Kt}) - \frac{t^2}{2}\right].$$

Mais

$$e^{Kt} = \frac{2}{\alpha}, \qquad t = \frac{1}{K}\mathcal{L}\frac{2}{\alpha},$$

de sorte que

$$r(\theta - \theta_0) = \frac{g\cos\theta_0}{K^2(1-\alpha)}\left[1 - \frac{\alpha}{2}\left(\mathcal{L}\frac{2}{\alpha}\right)^2\right].$$

Mais

$$x\mathcal{L}\frac{1}{x^2}$$

est nul pour $x = 0$, de sorte que

$$\frac{\alpha}{2}\left(\mathcal{L}\frac{2}{\alpha}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{L}\frac{2}{\alpha}\right)^2$$

est très petit avec α, et l'on peut prendre par suite

$$r(\theta - \theta_0) = \frac{g\cos\theta_0}{K^2(1-\alpha)},$$

quantité très petite puisque K est très grand et qui tend vers zéro lorsque K augmente indéfiniment.

Nous remarquerons de plus que, si la liaison est unilatérale, ζ' est très petit au moment où l'échappement se produit. On a en effet

$$\zeta' = \frac{\alpha g K}{4\nu^2\sin^2\theta_0(1-\alpha)}(e^{Kt} - e^{-Kt}),$$

soit sensiblement, puisque $K = \nu\sin\theta_0\sqrt{2(1-\alpha)(1-2\cos^2\theta_0)}$,

$$\zeta' = \frac{g\sqrt{2(1-2\cos^2\theta_0)}}{2\nu\sin\theta_0\sqrt{1-\alpha}},$$

quantité très petite et qui tend vers zéro lorsque ν croît indéfiniment.

On voit donc que, s'il y a échappement, le point A peut être considéré comme s'échappant avec une vitesse nulle.

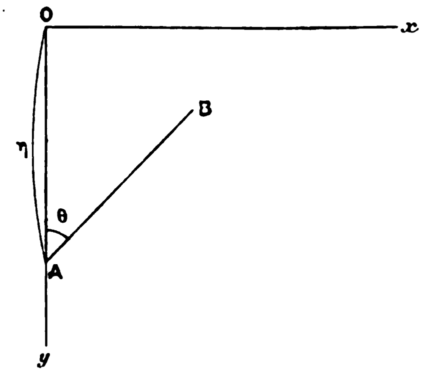
Donc, en résumé, on voit que l'application des lois de Coulomb se trouve pleinement justifiée, en ce sens que, d'une part, l'anomalie qu'elles semblent présenter par suite de la discontinuité qu'elles conduisent à admettre dans le mouvement tient uniquement à la rigidité absolue supposée aux liaisons, et que, d'autre part, sauf une période excessivement courte et sans importance, le plus souvent, elles donnent une image très satisfaisante de l'ensemble du mouvement.

II. Examinons maintenant le second problème que j'ai en vue.

Je suppose deux points matériels A et B de même masse égale à 1, reliés par une tige rigide de longueur r et de masse négligeable.

Le point A est assujetti à se mouvoir sur la verticale descendante Oy, sur laquelle il frotte, le coefficient de frottement étant

Fig. 3.



égal à f. Le point B est seulement, en plus de sa liaison au point A, assujetti à se mouvoir dans le plan vertical xOy.

Nous déterminerons la position du système par l'ordonnée η du point A et par l'angle θ que fait AB avec la verticale ascendante; nous supposons

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Soient x et y les coordonnées de B, on aura

$$x = r\sin\theta,$$
$$y = \eta - r\cos\theta,$$

et l'on en déduit

$$(7)\qquad x'' = r(\cos\theta\,\theta'' - \sin\theta\,\theta'^2),$$
$$(8)\qquad y'' = \eta'' + r(\sin\theta\,\theta'' + \cos\theta\,\theta'^2).$$

Si d'ailleurs on désigne par P la compression de la tige AB et par N la réaction de Oy on aura

$$N = P\sin\theta,$$
$$(9)\qquad \eta'' = g + P\cos\theta - Pf\varepsilon\sin\theta,$$
$$(10)\qquad x'' = P\sin\theta,$$
$$(11)\qquad y'' = g - P\cos\theta;$$

où $\varepsilon = \pm 1$, le signe de cette quantité étant déterminé par la condition

$$N\varepsilon\eta' > 0 \quad \text{si} \quad \eta' \gtrless 0,$$

et par la condition

$$N\varepsilon\eta'' > 0 \quad \text{si} \quad \eta' = 0,$$

cette dernière condition revenant, puisque nous supposons $\sin\theta$ positif, à

$$P\varepsilon\eta'' > 0;$$

on déduit d'ailleurs des équations (7), (8), (9), (10) et (11)

$$\sin\theta(\sin\theta\,\theta'' + \cos\theta\,\theta'^2) + (\cos\theta\,\theta'' - \sin\theta\,\theta'^2)(2\cos\theta - f\varepsilon\sin\theta) = 0;$$

d'où l'on déduit

$$(12)\qquad \theta'' = \frac{\sin\theta\,\theta'^2(\cos\theta - f\varepsilon\sin\theta)}{1 + \cos^2\theta - f\varepsilon\sin\theta\cos\theta},$$

et ensuite

$$P\sin\theta = r(\cos\theta\,\theta'' - \sin\theta\,\theta'^2),$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (12),

$$P = -\frac{r\theta'^2}{1 + \cos^2\theta - f\varepsilon\sin\theta\cos\theta},$$

puis

$$\eta'' = g - \frac{r\theta'^2(\cos\theta - f\varepsilon\sin\theta)}{1 + \cos^2\theta - f\varepsilon\sin\theta\cos\theta}.$$

En considérant ces formules il semble à première vue que, dans le cas où, le système étant abandonné à lui-même, sans vitesse initiale, on a $\theta'_0 = 0$, il n'y ait qu'une solution possible, celle qui correspond à

$$\theta'' = P = 0, \qquad \eta'' = g,$$

c'est-à-dire au cas où la tige se transporte parallèlement à elle-même, sous l'influence de la pesanteur, sans être soumise à aucune action de la part de Og.

Ce mouvement est évidemment celui qui se produit si le point A a avec Oy un simple contact géométrique qui ne met pas en jeu le frottement.

Mais en sera-t-il de même si l'on a d'abord mis la tige en contact avec Og dans une position où elle fait un angle θ avec cette droite et si on la maintient au moyen d'une force verticale appliquée en A et d'une autre force perpendiculaire à sa direction appliquée en B?

On aura alors

$$\begin{aligned} P &= g\cos\theta, \\ N &= g\cos\theta\sin\theta, \end{aligned}$$

et la réaction verticale Q qu'il faudra appliquer en A, si l'on ne tient pas compte du frottement, sera

$$Q = g + g\cos^2\theta = g(1 + \cos^2\theta).$$

Mais, si le coefficient de frottement est tel que l'on ait

$$f > \frac{1 + \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta},$$

on pourra supprimer la force Q appliquée en A et cette force sera fournie par le frottement.

Si ensuite on rend le point B libre en supprimant la force normale qui le retenait, rien ne sera changé au début aux réactions qui s'exerçaient en A et ce point restera fixe, la tige tournant autour de lui.

D'ailleurs, puisque le point A reste fixe, on devra avoir

$$\eta'' = g + P(\cos\theta - f_1 \sin\theta) = 0,$$

avec

$$f_1 \leqq f;$$

de plus, puisque la tige tourne autour d'un point fixe, on a

$$P = g\cos\theta - r\theta'^2,$$

et par suite le point A restera fixe tant que l'on aura

$$\frac{g(1+\cos^2\theta) - r\theta'^2\cos\theta}{g\cos\theta\sin\theta - r\theta'^2\sin\theta} \leqq f.$$

On verrait ensuite qu'au moment où cette inégalité se change en égalité, η'', qui était nul jusque-là, prend brusquement une valeur finie et que N, qui était positif, devient à ce moment brusquement négatif (ou nul si la liaison est unilatérale). Il y a donc là une discontinuité apparente, mais dont l'explication, toute semblable à celle donnée pour le problème précédent, nous permettrait encore de constater que les lois de Coulomb fournissent pour l'ensemble des phénomènes une image très suffisamment approchée.

Nous ne reviendrons pas sur ce fait, car pour cela nous n'aurions, à peu de chose près, qu'à répéter ce que nous avons dit pour le problème précédent, mais nous croyons au lieu de cela devoir insister un peu sur ce qui se passe au début du mouvement.

Nous avons vu, en supposant le système abandonné sans vitesse initiale, que, si l'on a

$$f > \frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta},$$

le problème comporte deux solutions : 1° si la tige a avec Oy un simple contact géométrique elle se transporte parallèlement à elle-même; 2° si l'on a d'abord maintenu la tige immobile en contact avec Ag, de façon que le frottement entre en jeu, la tige tourne, au début du mouvement du moins, autour du point A qui reste fixe.

Si au lieu de cela on a

$$f < \frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta},$$

on n'a dans tous les cas qu'une solution, la tige se transporte parallèlement à elle-même sous l'influence de la seule pesanteur.

A première vue, ce dernier résultat peut paraître paradoxal; il est certain, en effet, puisque l'on a d'abord maintenu la tige en contact avec Oy, que cette tige exerce sur Oy une pression égale à

$$g\sin\theta\cos\theta,$$

le frottement entre donc forcément en jeu au début du mouvement et il semble à première vue étrange que ce mouvement soit absolument le même que s'il n'existait pas. Nous allons cependant reconnaître que là encore les lois de Coulomb donnent une image très suffisamment approchée du phénomène.

Nous allons montrer en effet que, si l'on tient compte de l'élasticité de la tige AB, le frottement s'exercera pendant un temps assez court pour que l'on puisse considérer son effet comme négligeable.

Nous aurons, en désignant par r la longueur normale de la tige AB et par $r+u$ sa longueur à un instant quelconque,

$$\mathrm{P} = -\mu^2 u,$$

où μ^2 est très grand et devient infini lorsqu'on suppose la tige rigide.

Nous aurons alors

$$\begin{aligned}
\eta'' &= g + \mathrm{P}(\cos\theta - f\varepsilon\sin\theta),\\
\eta_1'' &= g + \mu^2 u(f\varepsilon\sin\theta - \cos\theta),\\
x &= (r+u)\sin\theta,\\
x'' &= (r+u)\cos\theta\theta'' - (r+u)\sin\theta\theta'^2 + 2u'\cos\theta\theta' + u''\sin\theta,\\
y &= \eta - (r+u)\cos\theta,\\
y'' &= \eta_1'' + (r+u)\sin\theta\theta'' + (r+u)\cos\theta\theta'^2 + 2u'\sin\theta\theta' - u''\cos\theta,
\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
x'' &= \mathrm{P}\sin\theta = -\mu^2 u\sin\theta,\\
y'' &= g - \mathrm{P}\cos\theta = g + \mu^2 u\cos\theta,
\end{aligned}$$

de sorte qu'on aura

$$(r+u)\cos\theta\theta'' - (r+u)\sin\theta\theta'^2 + 2u'\theta'\cos\theta + u''\sin\theta + \mu^2 u\sin\theta = 0,$$
$$(r+u)\sin\theta\theta'' + (r+u)\cos\theta\theta'^2$$
$$+ 2u'\theta'\sin\theta - u''\cos\theta - \mu^2 u(2\cos\theta - f\varepsilon\sin\theta = 0.$$

On en déduit

$$(r+u)\theta'' + 2u'\theta' - \mu^2 u\sin\theta(\cos\theta - f\varepsilon\sin\theta) = 0, \tag{13}$$
$$u'' - (r+u)\theta'^2 + \mu^2 u(1 + \cos^2\theta - f\varepsilon\sin\theta\cos\theta) = 0. \tag{14}$$

Toutefois, si le point A est fixe, on a $\eta_1'' = 0$ et par suite f doit être remplacé par une valeur f_1 telle que l'on ait

$$g = \mu^2 u(\cos\theta - f_1 \varepsilon \sin\theta). \tag{15}$$

D'ailleurs à l'instant initial on a, *dans tous les cas,*

$$P = -\mu^2 u_0 = g\cos\theta_0;$$

d'où

$$u_0 = -\frac{g\cos\theta_0}{\mu^2}, \tag{16}$$

et aussi si le point A est fixe en vertu de (15) et (16),

$$1 + \cos^2\theta_0 - f_1 \sin\theta_0 \cos\theta_0 = 0.$$

On en conclut que, pour que le point A reste fixe à l'instant initial, nous avons bien la condition

$$f \geqq \frac{1 + \cos^2\theta_0}{\sin\theta_0\cos\theta_0}.$$

Si au lieu de cela on a

$$f < \frac{1 + \cos^2\theta_0}{\sin\theta_0\cos\theta_0},$$

le point A se met en mouvement et l'on a

$$\begin{aligned} &\eta'' > 0, \\ &N = -\mu^2 u_0 \sin\theta_0 > 0. \end{aligned}$$

Il faut donc prendre $\varepsilon = +1$. En supposant donc qu'il s'agisse d'une période assez courte pour que l'on puisse négliger la variation de θ et prendre $\theta' = \theta'_0 = 0$, (14) nous donnera

$$u'' + \mu^2 u(1 + \cos^2\theta_0 - f\sin\theta_0\cos\theta_0) = 0,$$

ou en posant

$$\begin{gathered} 1 + \cos^2\theta_0 - f\sin\theta_0\cos\theta_0 = K^2 > 0, \\ u'' + \mu^2 K^2 u = 0, \end{gathered}$$

d'où, en tenant compte de ce que

$$u_0 = -\frac{g\cos\theta_0}{\mu^2}, \qquad u'_0 = 0,$$

$$u = -\frac{g\cos\theta_0}{\mu^2}\cos\mu K t, \tag{17}$$

formule qui ne doit être appliquée que tant que u est positif (puisque P et N et, par suite ε, changent de signe avec u).

Or on a $u = 0$ pour

$$t = \frac{\pi}{2K\mu},$$

et pour cette valeur de t on a

$$u' = \frac{g\cos\theta_0}{\mu} K.$$

De plus l'équation (13) nous donne, en négligeant les termes en u^2,

$$r\theta'' = \mu^2 u \sin\theta_0(\cos\theta_0 - f\varepsilon\sin\theta_0),$$

ou, en remplaçant u par sa valeur (17),

$$r\theta'' = -g\cos\theta_0\sin\theta_0(\cos\theta_0 - f\varepsilon\sin\theta_0)\cos\mu K t,$$

et par suite

$$r(\theta - \theta_0) = \frac{g\cos\theta_0\sin\theta_0}{\mu^2 K^2}(\cos\theta_0 - f\varepsilon\sin\theta_0)(\cos\mu K t - 1),$$

donc, pour $t = \frac{\pi}{2K\mu}$, θ aura une valeur θ_1 donnée par la formule

$$r(\theta_1 - \theta_0) = -\frac{g\cos\theta_0\sin\theta_0}{\mu^2 K^2}(\cos\theta_0 - f\varepsilon\sin\theta_0),$$

ou, en tenant compte de la valeur de K^2,

$$r(\theta_1 - \theta_0) = -\frac{g\sin\theta_0}{\mu^2 K^2}(K^2 - 1),$$

quantité très petite et qui tend vers zéro lorsque μ croît indéfiniment, c'est-à-dire si la tige devient de plus en plus raide. Il en est d'ailleurs de même de u' et de θ'.

On conclut que, si la liaison est unilatérale, la tige échappera à l'action de Oy au bout d'un temps assez court pour qu'on puisse la considérer comme n'ayant pas sensiblement bougé et comme ayant des vitesses de rotation et de translation nulles. Elle se transportera donc parallèlement à elle-même sous l'influence de la seule pesanteur.

Nous retrouvons par suite les résultats obtenus au moyen des lois de Coulomb et en considérant la tige comme indéformable.

Si, au lieu d'être unilatérale, la liaison était bilatérale, il se ferait quelques oscillations entre les deux guides qui seraient rapidement amorties (vu la petitesse de leur amplitude comparable, ou même inférieure au jeu qui existe forcément être les deux guides).

On voit donc en résumé que, dans ce cas encore, l'application des lois de Coulomb mène, ainsi que nous l'avons annoncé, à une image suffisamment approchée du phénomène, et qui conduit seulement à négliger une période de transition excessivement courte, et le plus souvent sans importance.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 24 JANVIER 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Bioche : *Sur un mode de génération de la surface de Steiner.*

M. Raffy : *Sur la correspondance réciproque entre lignes asymptotiques et lignes diagonales.*

M. Blutel : *Sur une équation du second ordre réductible à l'équation de la série hypergéométrique de Gauss.*

SÉANCE DU 7 FÉVRIER 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. W. Etzel, présenté par MM. Laisant et Renard; M. Guichard, présenté par MM. Appell et Hadamard; M. Montel, présenté par MM. Borel et Fatou; M. Nikitine, présenté par MM. Painlevé et Hadamard; M. Dulac, présenté par MM. Raffy et Servant; M. Schönflies, présenté par MM. Borel et Lebesgue; M. Chazy, présenté par

MM. Hadamard et Borel; M. Lesgourgues, présenté par MM. Bioche et Raffy.

Communications :

M. Fouché : *Sur la projection du dodécaèdre régulier.*

M. Lecornu : *Sur une généralisation du mouvement de Poinsot.*

M. Lalesco : *Sur la dérivée du potentiel de simple couche dans une direction quelconque.*

SÉANCE DU 21 FÉVRIER 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Lalesco : *Sur le nombre des résidus quadratiques de* P *inférieurs à* $\frac{P}{2}$.

M. Bricard : *Sur une propriété des quadriques homofocales.*

M. Fouché : *Sur un complexe du second ordre.*

M. Bricard : *Sur le complexe tétraédral.*

M. Guichard : *Sur une formule concernant les fonctions elliptiques.*

M. Blutel : *Sur une question de Géométrie.*

SÉANCE DU 7 MARS 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Fatou : *Sur certaines séries de fractions rationnelles qui définissent des fonctions affectées de coupures.*

M. Gérardin : *Sur un théorème de divisibilité arithmétique.*

M. Blutel : *Sur certaines surfaces de translation du quatrième ordre.*

SÉANCE DU 21 MARS 1907.

PRÉSIDENCE DE M. R. PERRIN.

Communications :

M. Buhl : *Sur une extension de la méthode de sommation de M. Borel.*

M. Lalesco : *Sur la représentation des nombres par les classes de formes appartenant à un déterminant donné.*

M. Buhl : *Sur les développements des fonctions de variable réelle en séries de fonctions continues.*

M. Raffy : *Sur les fonctions de deux variables liées par une relation homographique.*

SÉANCE DU 11 AVRIL 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Remy : *Sur quelques familles dénombrables de surfaces hyperelliptiques.*

M. Lalesco : *Sur les équations différentielles linéaires et sur une équation analogue à celle de M. Fredholm.*

M. Appell adresse une Note *Sur l'extinction du frottement.*

SÉANCE DU 25 AVRIL 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Raffy : *Sur l'intégration de l'équation des surfaces minima.*

M. Fouché : *Sur les champs de force dont les lignes de force sont dans des plans passant par un point.*

M. Raffy : *Sur les surfaces limites de Ribaucour.*

SÉANCE DU 2 MAI 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Roda, présenté par MM. Raffy et Fontené; M. Jean Merlin, présenté par MM. Lebesgue et Fatou; M. Émile Weber, présenté par MM. Neuberg et Brocard.

Communications :

M. Hadamard : *Sur le problème isopérimétrique.*

M. Bricard : *Sur certains théorèmes d'arithmétique.*

M. Fouché : *Sur les champs de force dont les lignes de force sont situées dans des plans passant par un point.*

M. Marcus : *Sur les faisceaux de coniques.*

M. Lalesco : *Sur une propriété caractéristique des intégrales analytiques du problème de la distribution des températures dans la barre.*

SÉANCE DU 16 MAI 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Popovici : *Détermination de l'intégrale d'une équation du second ordre qui prend des valeurs données sur deux courbes données.*

M. Raffy : *Sur certains changements de variables dépendant de fonctions inconnues.*

M. Servant présente quelques observations à propos de cette Communication.

SÉANCE DU 6 JUIN 1907.

PRÉSIDENCE DE M. R. PERRIN.

Communications :

M. Popovici : *Sur le problème des multiplicateurs réciproques.*

M. Raffy : *Sur les quadriques à centre en relation particulière avec le cercle de l'infini.*

M. Fouché présente quelques observations à propos de cette Communication.

M. d'Ocagne adresse un Mémoire intitulé : *Sur les équations d'ordre nomographique* 3 *et* 4.

SÉANCE DU 20 JUIN 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. Kryloff, présenté par MM. Lucien Lévy et Lalesco.

Communications :

M. Fouché : *Sur les champs de force où les lignes de force sont planes.*

M. Raffy : *Sur la déformation des quadriques et sur le problème de l'habillage de certaines surfaces.*

M. Lalesco résume un Mémoire adressé par M. Goursat et intitulé : *Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm.*

SÉANCE DU 4 JUILLET 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Bioche : *Sur une propriété des courbes gauches du quatrième degré.*

M. Blutel : *Sur le rapport anharmonique.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UN CAS ÉLÉMENTAIRE DE L'ÉQUATION DE FREDHOLM;

PAR M. E. GOURSAT.

1. L'équation de Fredholm

$$(1) \qquad \varphi(x)+\lambda\int_0^1 K(x, s)\varphi(s)\,ds = \psi(x),$$

où $\psi(x)$ et $K(x, y)$ sont des fonctions données et $\varphi(x)$ la fonction inconnue, se résout très aisément lorsque la fonction $K(x, y)$ ou *noyau* (*Kern*) est de la forme

$$(2) \qquad K(x, y) = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \ldots + X_n Y_n,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des fonctions de la seule variable x et Y_1, $Y_2, \ldots, Y_n$ des fonctions de la seule variable y. Par quelques transformations simples de déterminants, on arrive à mettre la solution sous une forme où ne figure que la seule fonction $K(x, y)$; en supposant ensuite que le nombre n croît indéfiniment, on est conduit tout naturellement à la solution générale de l'équation (1) sous la forme même de M. Fredholm. J'ai pensé que cette remarque pouvait présenter quelque intérêt au point de vue de l'enseignement.

2. Si le noyau $K(x, y)$ est de la forme (2), on peut supposer que les n fonctions $X_1, X_2 \ldots, X_n$ sont linéairement indépendantes, sans quoi il serait possible de mettre $K(x, y)$ sous une forme analogue à la formule (2), où figureraient moins de n produits. On peut également supposer, pour la même raison, que les n fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont linéairement indépendantes. En remplaçant $K(x, y)$ par l'expression $X_1 Y_1 + \ldots + X_n Y_n$ dans l'équation (1), celle-ci s'écrit

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi(x)+\lambda\Big[X_1(x)\int_0^1 Y_1(s)\,\varphi(s)\,ds \\ \qquad\qquad + X_2(x)\int_0^1 Y_2(s)\,\varphi(s)\,ds+\ldots\Big]=\psi(x), \end{cases}$$

et l'on en conclut que la fonction inconnue $\varphi(x)$ doit être de la forme

$$(4)\qquad \varphi(x)=\psi(x)-H_1X_1(x)-H_2X_2(x)-\ldots-H_nX_n(x),$$

H_1, H_2, ..., H_n étant des coefficients constants.

Pour déterminer ces coefficients, remplaçons encore $\varphi(s)$ par

$$\psi(s)-H_1X_1(s)-H_2X_2(s)-\ldots-H_nX_n(s)$$

dans l'équation (1); elle devient

$$(5)\quad \begin{cases} \psi(x)-H_1X_1(x)-H_2X_2(x)-\ldots-H_nX_n(x) \\ \quad +\lambda\int_0^1 [X_1(x)\,Y_1(s)+\ldots+X_n(x)\,Y_n(s)] \\ \qquad \times[\psi(s)-H_1X_1(s)-\ldots-H_nX_n(s)]\,ds=\psi(x). \end{cases}$$

Les fonctions X_1, X_2, ..., X_n étant par hypothèse linéairement indépendantes, pour que cette égalité puisse avoir lieu, il faut que l'on ait

$$(6)\quad \begin{cases} H_1=\lambda\int_0^1 Y_1(s)[\psi(s)-H_1X_1(s)-\ldots-H_nX_n(s)]\,ds, \\ H_2=\lambda\int_0^1 Y_2(s)[\psi(s)-H_1X_1(s)-\ldots-H_nX_n(s)]\,ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ H_n=\lambda\int_0^1 Y_n(s)[\psi(s)-H_1X_1(s)-\ldots-H_nX_n(s)]\,ds. \end{cases}$$

Posons

$$(7)\qquad A_{ik}=\int_0^1 X_i(s)\,Y_k(s)\,ds;$$

on voit que les n coefficients H_1, H_2, ..., H_n sont déterminés par les n équations linéaires

$$(8)\quad \begin{cases} (1+\lambda A_{11})H_1+\lambda A_{21}H_2+\ldots+\lambda A_{n1}H_n=\lambda\int_0^1 Y_1(s)\psi(s)\,ds, \\ \lambda A_{12}H_1+(1+\lambda A_{22})H_2+\ldots+\lambda A_{n2}H_n=\lambda\int_0^1 Y_2(s)\psi(s)\,ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda A_{1n}H_1+\lambda A_{2n}H_2+\ldots+(1+\lambda A_{nn})H_n=\lambda\int_0^1 Y_n(s)\psi(s)\,ds; \end{cases}$$

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ sont donc des fonctions rationnelles du paramètre λ, et nous allons d'abord étudier le dénominateur commun de ces fractions

$$(9)\qquad \mathcal{D}_n(\lambda)=\begin{vmatrix} 1+\lambda A_{11} & \lambda A_{21} & \ldots & \lambda A_{n1} \\ \lambda A_{12} & 1+\lambda A_{22} & \ldots & \lambda A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda A_{1n} & \lambda A_{2n} & \ldots & 1+\lambda A_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. Si l'on ordonne ce polynome suivant les puissances de λ, le coefficient de λ^p est égal à la somme de tous les déterminants d'ordre p que l'on déduit du déterminant

$$D=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

en supprimant $n-p$ colonnes quelconques et les $n-p$ lignes correspondantes. Nous désignerons l'un quelconque de ces déterminants par $\delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$, les indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ désignant les rangs des lignes et des colonnes conservées; le coefficient de λ^p est donc

$$\sum \delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p},$$

la sommation s'étendant à toutes les combinaisons p à p des n premiers nombres, et les indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ se succédant dans leur ordre naturel. On a, par exemple,

$$\delta_{12\ldots p}=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{p1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{p2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1p} & A_{2p} & \ldots & A_{pp} \end{vmatrix}.$$

Un terme quelconque de l'un de ces déterminants est un produit de p intégrales tel que

$$\int_0^1 X_1(s)\,Y_1(s)\,ds \times \int_0^1 X_2(s)\,Y_2(s)\,ds \times \ldots \times \int_0^1 X_p(s)\,Y_p(s)\,ds,$$

et l'on peut évidemment le remplacer par une intégrale multiple d'ordre p

$$\int\int\cdots\int X_1(x_1)\,Y_1(x_1)\,X_2(x_2)\,Y_2(x_2)\ldots X_p(x_p)\,Y_p(x_p)\,dx_1\ldots dx_p,$$

les limites de l'intégration étant o et 1 pour les p variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$, comme dans toutes les suivantes. Cette remarque s'appliquant à un terme quelconque de $\delta_{12\ldots p}$, il s'ensuit que, si l'on pose

$$\delta'_{12\ldots p} = \begin{vmatrix} X_1(x_1)\,Y_1(x_1) & X_2(x_1)\,Y_1(x_1) & \ldots & X_p(x_1)\,X_1(x_1) \\ X_1(x_2)\,Y_2(x_2) & X_2(x_2)\,Y_2(x_2) & \ldots & X_p(x_2)\,Y_2(x_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ X_1(x_p)\,Y_p(x_p) & X_2(x_p)\,Y_p(x_p) & \ldots & X_p(x_p)\,X_p(x_p) \end{vmatrix},$$

on a

$$\delta_{12\ldots p} = \int\int\cdots\int \delta'_{12\ldots p}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p;$$

et la même remarque s'applique évidemment aux autres déterminants partiels $\delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$.

Cela posé, considérons les deux tableaux rectangulaires à p lignes et à n colonnes $(p \leqq n)$:

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{vmatrix} X_1(x_1) & X_2(x_1) & \ldots & X_n(x_1) \\ X_1(x_2) & X_2(x_2) & \ldots & X_n(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_1(x_p) & X_2(x_p) & \ldots & X_n(x_p) \end{vmatrix},$$

$$(\mathrm{T}') \qquad \begin{vmatrix} Y_1(x_1) & Y_2(x_1) & \ldots & Y_n(x_1) \\ Y_1(x_2) & Y_2(x_2) & \ldots & Y_n(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_1(x_p) & Y_2(x_p) & \ldots & Y_n(x_p) \end{vmatrix},$$

et désignons par TT' le produit de ces deux tableaux, c'est-à-dire la somme des produits obtenus en multipliant un déterminant d'ordre p formé par p colonnes du tableau (T) par le déterminant correspondant déduit de (T').

Si l'on prend, par exemple, les p premières colonnes de (T) et de (T'), le produit correspondant est un déterminant d'ordre p dont les éléments de la première ligne sont respectivement

$$\begin{gathered}X_1(x_1)\,Y_1(x_1)+X_1(x_2)\,Y_1(x_2)+\ldots+X_1(x_p)\,Y_1(x_p),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ X_1(x_1)\,Y_p(x_1)+X_1(x_2)\,Y_p(x_2)+\ldots+X_1(x_p)\,Y_p(x_p),\end{gathered}$$

les autres lignes se déduisant de celle-là en remplaçant l'indice 1 de X par 2, 3, ..., p successivement. Ce déterminant est égal à la somme de p^p déterminants partiels obtenus en décomposant chaque élément en p parties. Mais, pour avoir des déterminants partiels différents de zéro, il faut prendre des indices différents pour la variable x_i dans chaque ligne. On aura donc seulement $1.2\ldots p$ déterminants partiels différents de zéro, de la forme

$$\begin{vmatrix} X_1(x_{\beta_1})\,Y_1(x_{\beta_1}) & X_1(x_{\beta_2})\,Y_2(x_{\beta_2}) & \ldots & X_1(x_{\beta_p})\,Y_p(x_{\beta_p}) \\ X_2(x_{\beta_1})\,Y_1(x_{\beta_1}) & X_2(x_{\beta_2})\,Y_2(x_{\beta_2}) & \ldots & X_2(x_{\beta_p})\,Y_p(x_{\beta_p}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ X_p(x_{\beta_1})\,Y_1(x_{\beta_1}) & X_p(x_{\beta_2})\,Y_2(x_{\beta_2}) & \ldots & X_p(x_{\beta_p})\,Y_p(x_{\beta_p}) \end{vmatrix},$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ désignant une permutation des p premiers nombres. Il est clair que l'intégrale de ce déterminant, les limites pour toutes les variables étant 0 et 1, est encore égale à $\delta_{12\ldots p}$. Il s'ensuit que le facteur $\delta_{12\ldots p}$ se retrouve multiplié par $p!$ dans l'intégrale multiple

$$I_p=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 TT'\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p;$$

il en est évidemment de même de tous les autres facteurs $\delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$, et nous concluons de là que le coefficient de λ^p dans $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ est égal à

$$\frac{I_p}{1.2\ldots p}.$$

D'autre part, le produit TT' est égal à un déterminant d'ordre n

$$TT'=\begin{vmatrix} X_1(x_1)\,Y_1(x_1)+X_2(x_1)\,Y_2(x_1)+\ldots+X_n(x_1)\,Y_n(x_1) & \ldots \\ X_1(x_2)\,Y_1(x_1)+X_2(x_2)\,Y_2(x_1)+\ldots+X_n(x_2)\,Y_n(x_1) & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ X_1(x_p)\,Y_1(x_1)+X_1(x_p)\,Y_2(x_1)+\ldots+X_n(x_p)\,Y_n(x_1) & \ldots \end{vmatrix},$$

les autres colonnes se déduisant de la première en remplaçant, dans Y_i, x_1 par $x_2, x_3, \ldots, x_p$ successivement. Mais ce déterminant n'est autre chose, d'après la formule (2), que

$$\begin{vmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) & \ldots & K(x_1, x_p) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) & \ldots & K(x_2, x_p) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ K(x_p, x_1) & K(x_p, x_2) & \ldots & K(x_p, x_p) \end{vmatrix},$$

ou, d'après la notation de M. Fredholm,

$$K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix}.$$

En définitive, nous voyons que le coefficient de λ^p dans le polynome $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ est égal à

$$\frac{1}{1.2\ldots p}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1\,dx_2\ldots dx_p.$$

4. Des équations (8) on déduit l'expression de la somme

$$H_1 X_1 + H_2 X_2 + \ldots + H_n X_n$$

au moyen d'un nouveau déterminant d'ordre $n+1$

$$\sum_{i=1}^{n} H_i X_i(x) = \frac{-\lambda}{\mathfrak{D}(\lambda)}\begin{vmatrix} 0 & X_1(x) & X_2(x) & \ldots & X_n(x) \\ B_1 & 1 + A_{11}\lambda & A_{21}\lambda & \ldots & A_{n1}\lambda \\ B_2 & A_{12}\lambda & 1 + A_{22}\lambda & \ldots & A_{n2}\lambda \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ B_n & A_{1n}\lambda & A_{2n}\lambda & \ldots & 1 + A_{nn}\lambda \end{vmatrix},$$

en posant

$$B_i = \int_0^1 Y_i(s)\,\psi(s)\,ds,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\sum_i H_i X_i(x) = \frac{\lambda}{\mathfrak{D}(\lambda)}\int_0^1 \psi(s)\,T(x, s)\,ds,$$

$T(x, s)$ désignant le déterminant

$$T(x, s) = \begin{vmatrix} 0 & -X_1(x) & -X_2(x) & \ldots & -X_n(x) \\ Y_1(s) & 1 + A_{11}\lambda & A_{21}\lambda & \ldots & A_{n1}\lambda \\ Y_2(s) & A_{12}\lambda & 1 + A_{22}\lambda & \ldots & A_{n2}\lambda \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ Y_n(s) & A_{1n}\lambda & A_{2n}\lambda & \ldots & 1 + A_{nn}\lambda \end{vmatrix}.$$

Nous allons encore chercher à développer $T(x, s)$ suivant les puissances de λ. C'est un polynome de degré $n-1$ au plus, dans lequel le terme indépendant de λ est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & -X_1(x) & -X_2(x) & \dots & -X_n(x) \\ Y_1(s) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ Y_2(s) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots\dots & . & . & \dots & 0 \\ Y_n(s) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$
$$= X_1(x)Y_1(s)+X_2(x)Y_2(s)+\dots+X_n(x)Y_n(s)=K(x, s).$$

D'une façon générale le coefficient de λ^p dans $T(x, s)$ est égal à la somme des déterminants d'ordre $p+2$ que l'on déduit du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -X_1(x) & -X_2(x) & \dots & -X_n(x) \\ Y_1(s) & A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ Y_2(s) & A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_n(s) & A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

en conservant les éléments communs à $p+2$ lignes et aux $p+2$ colonnes correspondantes, la première ligne et la première colonne n'étant jamais supprimées complètement. Il y a deux sortes de termes de degré p en λ; les uns contiennent en facteur un produit tel que $X_i(x)Y_i(s)$, les autres un facteur de la forme $X_i(x)Y_k(s)$, où $i \neq k$. Il suffit évidemment par raison de symétrie de calculer les coefficients de $\lambda^p X_1(x) Y_1(s)$ et de $\lambda^p X_1(x) Y_2(s)$.

Le coefficient de $\lambda^p X_1(x) Y_1(s)$ est, d'après ce qui précède, égal à la somme des déterminants d'ordre p que l'on déduit du déterminant

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

en conservant seulement les éléments communs à p lignes et aux p colonnes correspondantes.

Chaque terme de ce déterminant est encore le produit de p intégrales simples et peut être remplacé par une intégrale multiple d'ordre p. Or, si nous considérons les deux tableaux

$$\mathfrak{T} = \begin{vmatrix} X_1(x) & X_2(x) & \ldots & X_n(x) \\ X_1(x_1) & X_2(x_1) & \ldots & X_n(x_1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ X_1(x_p) & X_2(x_p) & \ldots & X_n(x_p) \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{T}' = \begin{vmatrix} Y_1(s) & Y_2(s) & \ldots & Y_n(s) \\ Y_1(x_1) & Y_2(x_1) & \ldots & Y_n(x_1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ Y_1(x_p) & Y_2(x_p) & \ldots & Y_n(x_p) \end{vmatrix},$$

le coefficient de $X_1(x)\,Y_1(s)$ dans le produit $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$ est égal au produit des deux tableaux

$$\Theta = \begin{vmatrix} X_2(x_1) & \ldots & X_n(x_1) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ X_2(x_p) & \ldots & X_n(x_p) \end{vmatrix}, \qquad \Theta' = \begin{vmatrix} Y_2(x_1) & \ldots & Y_n(x_1) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ Y_2(x_p) & \ldots & Y_n(x_p) \end{vmatrix},$$

et l'on reconnaît comme plus haut (n° 3) que chaque terme du coefficient de $\lambda^p X_1(x)\,Y_1(s)$ se retrouve, multiplié par $p!$ dans l'intégrale multiple

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Theta\Theta'\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p.$$

Le coefficient de $X_1(x)\,Y_2(s)$ dans le produit $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$ est de même égal, au signe près, au produit des deux tableaux Θ et Θ''

$$\Theta'' = \begin{vmatrix} Y_1(x_1) & Y_3(x_1) & \ldots & Y_n(x_1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ Y_1(x_p) & Y_3(x_p) & \ldots & Y_n(x_p) \end{vmatrix}$$

et l'intégrale multiple

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Theta\Theta''\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p$$

contient encore $p!$ fois chaque terme du coefficient de $\lambda^p X_1(x)\,Y_2(s)$ dans $T(x, s)$. En définitive, le coefficient de λ^p dans $T(x, s)$ est égal à

$$\frac{1}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \mathfrak{T}\mathfrak{T}'\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p.$$

Mais le produit $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ est égal à un déterminant unique d'ordre $p+1$

$$\mathfrak{G}\mathfrak{G}'=\begin{vmatrix} X_1(x)\;Y_1(s)+\ldots+X_n(x)\;Y_n(s) & \ldots & X_1(x)\;Y_1(x_p)+\ldots+X_n(x)\;Y_n(x_p) \\ X_1(x_1)\,Y_1(s)+\ldots+X_n(x_1)\,Y_n(s) & \ldots & X_1(x_1)\,Y_1(x_p)+\ldots+X_n(x_1)\,Y_n(x_p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_1(x_p)Y_1(s)+\ldots+X_n(x_p)Y_n(s) & \ldots & X_1(x_p)Y_1(x_p)+\ldots+X_n(x_p)Y_n(x_p) \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, d'après les notations de M. Fredholm,

$$\mathfrak{G}\mathfrak{G}'=\mathrm{K}\begin{pmatrix} x, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_p \\ s, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_p \end{pmatrix},$$

et l'on a

$$\mathrm{T}(x,s)=\mathrm{K}(x,s)+\sum_{p=1}^{n-1}\lambda^p\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\mathrm{K}\begin{pmatrix} x, & x_1, & \ldots, & x_p \\ s, & x_1, & \ldots, & x_p \end{pmatrix}dx_1\ldots dx_p.$$

En résumé, lorsque la fonction $\mathrm{K}(x,y)$ est de la forme (2), si l'on pose

$$(10)\qquad \mathfrak{D}_n(\lambda)=1+\sum_{p=1}^{n}\frac{\lambda^p}{p!}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\mathrm{K}\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_p \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_p \end{pmatrix}dx_1\ldots dx_p,$$

$$(11)\qquad \mathfrak{J}_n(x,y;\lambda)=\lambda\,\mathrm{K}(x,y)+\sum_{p=1}^{n-1}\frac{\lambda^{p+1}}{p!}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\mathrm{K}\begin{pmatrix} x, & x_1, & \ldots, & x_p \\ y, & x_1, & \ldots, & x_p \end{pmatrix}dx_1\ldots dx_p,$$

et si λ n'est pas racine de l'équation $\mathfrak{D}_n(\lambda)=0$, l'équation intégrale (1) admet une solution unique donnée par la formule

$$(12)\qquad \varphi(x)=\psi(x)-\frac{1}{\mathfrak{D}_n(\lambda)}\int_0^1\psi(s)\,\mathfrak{J}_n(x,s;\lambda)\,ds.$$

4. La loi de formation des coefficients, dans les deux polynomes en λ, $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ et $\mathfrak{J}_n(x,y;\lambda)$, est évidemment indépendante de la forme particulière (2) que nous avons supposée à la fonction $\mathrm{K}(x,y)$; cette loi de formation peut s'appliquer en partant d'une fonction quelconque des deux variables x et y. Mais, si l'on part d'une fonction de la forme (2), les développements obtenus pour $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ et $\mathfrak{J}_n(x,y;\lambda)$ s'arrêtent d'eux-mêmes, car les déterminants

$$\mathrm{K}\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_p \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_p \end{pmatrix},\quad \mathrm{K}\begin{pmatrix} x, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_{p-1} \\ y, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_{p-1} \end{pmatrix}$$

sont nuls, comme sommes de déterminants ayant deux colonnes identiques, dès que p est supérieur à n. Au contraire, si l'on part d'une fonction quelconque de deux variables $f(x, y)$, on obtient en général deux séries entières en λ toujours convergentes

$$(13) \quad \mathfrak{D}(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p,$$

$$(14) \quad \mathfrak{F}(x, y; \lambda) = \lambda f(x, y) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{p+1}}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x, x_1, \ldots, x_p \\ y, x_1, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p$$

si λ n'est pas racine de l'équation $\mathfrak{D}(\lambda) = 0$, on est conduit *par induction* à représenter par la formule

$$(15) \qquad \varphi(x) = \psi(x) - \frac{1}{\mathfrak{D}(\lambda)} \int_0^1 \psi(s) \mathfrak{F}(x, s; \lambda)\, ds,$$

la solution de l'équation fonctionnelle

$$(1)' \qquad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, s) \varphi(s)\, ds = \psi(s).$$

On peut vérifier *a posteriori* l'exactitude de la solution par la méthode de M. Fredholm. On peut aussi démontrer *a priori* que l'extension de la formule (12) au cas de n infini est légitime dans le cas très étendu où la fonction $f(x, y)$ est développable en série uniformément convergente de la forme

$$(16) \qquad f(x, y) = \sum_i X_i(x) Y_i(y).$$

Posons en effet

$$K_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i,$$

et soient $\mathfrak{D}_n(\lambda)$, $\mathfrak{F}_n(x, y; \lambda)$ les deux polynomes en λ obtenus en remplaçant $K(x, y)$ par $K_n(x, y)$ dans les formules (10) et (11). On démontre facilement que le polynome $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ a pour limite $\mathfrak{D}(\lambda)$, et que $\mathfrak{F}_n(x, y; \lambda)$ tend uniformément vers $\mathfrak{F}(x, y; \lambda)$ lorsque n croît indéfiniment, de sorte que la fonction $\varphi_n(x)$ représentée par la formule

$$(12)' \qquad \varphi_n(x) = \psi(x) - \frac{1}{\mathfrak{D}_n(\lambda)} \int_0^1 \psi(s) \mathfrak{F}_n(x, s; \lambda)\, ds$$

tend uniformément vers la fonction $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \psi(x) - \frac{1}{\mathfrak{D}(\lambda)} \int_0^1 \psi(s) \mathfrak{F}(x, s; \lambda)\, ds, \tag{17}$$

pourvu que λ ne soit pas racine de l'équation $\mathfrak{D}(\lambda) = 0$.

D'autre part, l'équation

$$\varphi_n(x) + \lambda \int_0^1 K_n(x, s)\, \varphi_n(s)\, ds = \psi(x)$$

peut s'écrire

$$\varphi_n(x) + \lambda \int_0^1 f(x, s)\, \Phi(s)\, ds + \lambda \int_0^1 [K_n(x, s) - f(x, s)]\, \varphi_n(s)\, ds$$
$$+ \lambda \int_0^1 f(x, s)\, [\varphi_n(s) - \Phi(s)]\, ds = \psi(x);$$

si n croît indéfiniment, les deux dernières intégrales du premier membre tendent vers zéro, et il reste à la limite

$$\Phi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, s)\, \Phi(s)\, ds = \psi(x).$$

Remarque. — Les théorèmes généraux sur l'équation de Fredholm peuvent de même se déduire comme cas limites de théorèmes analogues relatifs au cas élémentaire considéré dans cette Note.

SUR LES ÉQUATIONS D'ORDRE NOMOGRAPHIQUE 3 ET 4 (¹);

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

I.

1. *Ordre nomographique d'une équation.* — Rappelons

(¹) Les principaux résultats contenus dans ce Mémoire ont été précédemment communiqués à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CXLII, p. 988; t. CXLIV, p. 190, 895 et 1027).

d'abord quelques notions maintenant classiques de Nomographie. Si nous désignons les variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$, entrant dans une équation, simplement par leurs indices, et si nous attribuons aux divers signes fonctionnels les indices de toutes les variables sur lesquelles ils portent, nous dirons qu'une équation à n variables

$$F_{1.2\ldots n} = 0$$

est *nomographiquement rationnelle* si elle s'écrit

$$\sum f_1 f_2 \ldots f_n = 0.$$

Si, ordonnée par rapport aux fonctions de la variable z_i, elle contient $p_i + 1$ termes linéairement distincts, elle est dite, comme l'a proposé M. Soreau (¹), de l'*ordre nomographique* p_i par rapport à la variable z_i. Son ordre nomographique total sera

$$p = \sum_{i=1}^{i=n} p_i,$$

Par exemple, pour l'équation

$$f_1 f_2 + \sqrt{1+f_1^2}\sqrt{1+f_2^2} = f_3,$$

nomographiquement rationnelle par rapport aux fonctions

$$f_1, \quad \sqrt{1+f_1^2}, \quad f_2, \quad \sqrt{1+f_2^2}, \quad f_3,$$

on a

$$p_1 = 2, \qquad p_2 = 2, \qquad p_3 = 1,$$

et, par suite,

$$p = 5.$$

Mais, pour faire ressortir que cette notion de l'ordre nomographique est purement formelle, nous n'aurons qu'à remarquer que l'équation précédente peut encore s'écrire (²)

$$g_1 + g_2 = g_3,$$

lorsqu'on pose

$$g_1 = \log(f_1 + \sqrt{1+f_1^2}), \qquad g_2 = \log(f_2 + \sqrt{1+f_2^2}),$$
$$g_3 = \log(f_3 + \sqrt{f_3^2 - 1}),$$

(¹) *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils*, août 1901, p. 243.
(²) *Traité de Nomographie* (ou, plus simplement, *T. N.*), p. 421.

et que, sous cette forme, elle apparaît comme étant de l'ordre 3.

Un tel changement des fonctions composantes équivaut d'ailleurs à une anamorphose transcendante.

Lorsqu'on se borne à des transformations projectives, l'ordre nomographique se conserve.

2. *Genre d'un nomogramme à points alignés.* — Nous appelons *genre* d'un nomogramme à points alignés le nombre des échelles curvilignes qu'il comporte. Ce genre sera donc 0, 1, 2 ou 3 suivant qu'il y aura 0, 1, 2 ou 3 échelles curvilignes, c'est-à-dire suivant que, dans l'équation représentée, mise sous forme du déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

il y aura 0, 1, 2 ou 3 lignes dont les éléments seront *linéairement dépendants,* c'est-à-dire exprimables linéairement au moyen d'*une seule fonction* de même indice.

En se reportant à la définition précédente, on voit que l'équation développée sera alors d'ordre 3, 4, 5 ou 6.

Donc, en général, à un nomogramme de genre q correspondra une équation d'ordre $p = q + 3$. Mais il pourra se faire que cette équation renferme un ou plusieurs *facteurs parasites* ne portant que sur deux des trois variables, de sorte que l'équation représentée, une fois débarrassée de ces facteurs parasites, ne soit plus que d'un ordre inférieur à $q + 3$.

Cela aura lieu si les supports de deux des échelles (z_1) et (z_2), par exemple, sont confondus (sans d'ailleurs que ces échelles soient identiques). Entre les valeurs de z_1 et z_2 correspondant à chaque point du support commun existe une relation bien déterminée

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

Il suit de là que des valeurs de z_1 et z_2 satisfaisant à cette relation, associées à une valeur quelconque pour z_3, se correspondent en vertu de l'équation représentée, autrement dit que celle-ci doit être de la forme

$$f_{1.2.3}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \tag{2}$$

Et le nomogramme peut être considéré comme représentatif de l'équation

$$f_{1.2.3} = 0$$

quand on associe à des valeurs de z_1 et z_2, affectées à des points *différents* du support commun, la valeur de z_3 que donne la troisième échelle sur l'alignement des deux premières.

Le grand intérêt de cette remarque réside dans ce fait, mis en évidence pour la première fois par M. Clark, et sur lequel nous reviendrons plus loin, que certaines équations, non directement représentables par points alignés, peuvent le devenir grâce à l'introduction d'un facteur parasite convenable.

3. *Construction des échelles par projection.* — Toute échelle cotée au moyen des valeurs de la variable (z_i) peut être définie par l'équation en coordonnées parallèles u et v de son point courant

$$u f_i + v g_i + h_i = 0.$$

Cette échelle est dite *algébrique* par rapport à la fonction f_i quand son équation peut s'écrire

$$U + V f_i + W f_i^2 + \ldots + Z f_i^n = 0,$$

U, V, W, ..., Z étant des fonctions linéaires en u et v, et nous avons fait voir qu'une telle échelle peut se construire par des projections successives à partir de l'échelle de la fonction f_i portée sur un axe rectiligne. En particulier

$$U + V f_i = 0 \tag{3}$$

représente une échelle portée sur la droite, unissant les points $U = 0$, $V = 0$, et qui est simplement projective de celle de la fonction f_i (1). Appelons *faisceau projetant* de celle-ci le système de toutes les droites unissant les points de cette échelle à un centre de projection quelconque. Toute échelle projective de celle de f_i s'obtiendra en coupant un tel faisceau par une transversale dont la position sera entièrement définie par trois de ses points. Donc, toute échelle projective peut être construite quand on a déterminé trois de ses points.

(1) *T. N.*, p. 15.

On peut d'ailleurs, pour la construction, coter les points, non pas au moyen des valeurs de la variable z_i, mais au moyen de celles de la fonction f_i, quitte, après la construction, à remplacer celles-ci par les valeurs correspondantes de z_i. En ce cas, l'échelle à projeter est *métrique*, ce qui, en bien des cas, peut être avantageux, surtout lorsque, à toutes les valeurs de f_i, ne correspondent pas de valeurs réelles de z_i (exemple : $\sin z_i$ qui ne donne des valeurs réelles pour z_i que si $|\sin z_i| < 1$).

De même

$$(4) \qquad U + V f_i + W f_i^2 = 0$$

représente une échelle dont le support est une conique et qui peut se construire par double projection de l'échelle de la fonction f_i, attendu que nous avons démontré que *tout faisceau projetant une telle échelle à partir d'un de ses points se confond avec un faisceau projetant de la fonction* f_i ([1]). Il suit de là qu'une telle échelle est complètement déterminée par quatre de ses points, attendu que le faisceau projetant ayant pour centre l'un quelconque de ces quatre points est entièrement déterminé par les rayons unissant ce point aux trois autres et qu'il suffit de deux tels faisceaux pour construire l'échelle conique demandée.

4. *Transformation homographique générale.* — Nous rappellerons enfin qu'on peut faire subir à tout nomogramme à points alignés la transformation homographique la plus générale, ce qui revient simplement à multiplier l'équation, mise sous forme de déterminant, qu'il représente par un déterminant quelconque du troisième ordre non nul. Et comme un tel déterminant renferme, sous forme homogène, 9 éléments, il permet l'introduction de 8 paramètres arbitraires. Il permet notamment de choisir arbitrairement les points correspondant à quatre cotes quelconques, chacun d'eux équivalant à l'ensemble de deux coordonnées ([2]).

En particulier, comme nous venons de voir que toute échelle conique est entièrement déterminée par quatre de ses points, il en résulte que, si une telle échelle intervient sur un nomogramme

---

([1]) *T. N.*, p. 142.
([2]) *T. N.*, p. 132.

à points alignés, elle peut être choisie d'une façon entièrement arbitraire.

En pratique, c'est généralement, parmi les trois variables, toujours la même, z_3, qui est prise pour inconnue. Les deux autres, z_1 et z_2, étant, dès lors, qualifiées de *données*, on sait, dans chaque cas particulier, entre quelles limites a_1 et b_1, a_2 et b_2, elles restent comprises; et les quatre points que l'on se donne arbitrairement sont ceux qui correspondent à ces valeurs limites ([1]).

II.

5. *Points critiques d'un nomogramme à points alignés.* — Nous appelons *points critiques* d'un nomogramme à points alignés les points de mutuelle rencontre des échelles qui le composent, *valeurs critiques* des variables servant à graduer ces échelles les valeurs que ces variables prennent en ces points; et nous étendons cette désignation aux valeurs correspondantes des fonctions de ces variables dont dépendent ces échelles.

Nous verrons, dans le paragraphe III de ce Mémoire, le rôle capital que joue cette notion de valeur critique dans la construction des nomogrammes à points alignés; nous allons d'abord nous occuper de la détermination de ces valeurs.

Celle-ci repose tout entière sur la remarque que voici : lorsqu'on donne à deux des variables, z_1 et z_2 par exemple, les valeurs critiques ξ_1 et ξ_2 qui correspondent à un même point critique P, l'alignement $\xi_1 \xi_2$ est indéterminé; on peut le confondre avec une droite quelconque passant par le point P, et, par suite, la valeur correspondante de z_3 est aussi indéterminée. En d'autres termes, *on a les valeurs critiques correspondant aux points de rencontre des échelles* (z_1) *et* (z_2) *en cherchant les couples de valeurs de* z_1 *et* z_2 *rendant* z_3 *indéterminé.*

Lorsque l'équation est mise sous la forme du déterminant (1), cette détermination va de soi. Il est clair, en effet, que les valeurs de z_1 et z_2 qui annulent ce déterminant, quelle que soit la valeur

---

([1]) *T. N.*, p. 135.

de z_3, sont telles que

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2} = \frac{h_1}{h_2}, \tag{5}$$

système de deux équations d'où l'on tire les valeurs critiques de z_1 et z_2; il y a lieu toutefois d'examiner de près, une fois ces valeurs trouvées, de quelle façon il convient de les associer, aux divers points critiques.

Ce n'est d'ailleurs généralement pas ainsi que le problème se pose; le principal intérêt de la considération des valeurs critiques réside, comme nous l'allons voir, dans la possibilité qui en résulte de construire le nomogramme à points alignés d'une équation sans l'amener au préalable (par des transformations algébriques parfois assez délicates) à la forme du déterminant (1). Notre premier objet doit donc être de trouver directement les valeurs critiques des variables entrant dans une équation nomographiquement rationnelle. Tel est le problème dont nous allons nous occuper pour les équations d'ordre nomographique 3 ou 4, les seules, ou à peu près, qui intéressent les applications pratiques.

6. *Valeurs critiques dans le cas d'une équation d'ordre nomographique* 3. — L'équation d'ordre nomographique 3 la plus générale peut s'écrire

$$Af_1f_2f_3 + \sum B_i f_j f_k + \sum C_i f_i + D = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3). \tag{6}$$

L'étude algébrique complète que nous avons faite précédemment de cette équation [1] a mis en évidence le rôle que jouent dans cette théorie certains invariants que définissent les formules suivantes.

Posant

$$\left\{\begin{array}{lll} & F_0 = \sum B_i C_i - AD, & \\ E_i = AC_i - B_j B_k, & F_i = F_0 - 2B_i C_i, & G_i = B_i D - C_j C_k, \end{array}\right. \tag{7}$$

on a, quel que soit i,

$$F_i^2 - 4E_i G_i = \Delta, \tag{8}$$

[1] *Acta mathematica*, t. XXI, 1897, p. 301, et *T. N.*, Chap. VI, Sect. II B.

Δ étant le discriminant du premier membre de (6) rendu homogène. Posant encore

(9) $H_i = B_i(F_0 - 2B_jC_j - 2B_kC_k) + 2AC_jC_k', \qquad K = AF_0 - 2B_1B_2B_3,$

nous aurons aussi

(10) $F_jB_i + 2E_jC_k = F_kB_i + 2E_kC_j = H_i, \qquad AF_i + 2E_iB_i = K.$

Pour déterminer les valeurs critiques σ_1 et σ_2 de f_1 et f_2, nous écrirons l'équation (6) sous la forme

$$f_3(Af_1f_2 + B_1f_2 + B_2f_1 + C_3) + B_3f_1f_2 + C_1f_1 + C_2f_2 + D = 0,$$

et nous remarquerons que ces valeurs critiques, rendant f_3 indéterminé, doivent satisfaire à la fois aux équations

$$(11) \qquad \begin{cases} A\,\sigma_1\sigma_2 + B_1\sigma_2 + B_2\sigma_1 + C_3 = 0, \\ B_3\sigma_1\sigma_2 + C_1\sigma_1 + C_2\sigma_2 + D = 0, \end{cases}$$

d'où, par élimination du terme en $\sigma_1\sigma_2$, on déduit immédiatement, eu égard à (7),

$$E_1\sigma_1 + E_2\sigma_2 + AD - B_3C_3 = 0.$$

Si l'on remarque, en se reportant encore à (7), que

$$AD - B_3C_3 = -\frac{F_1 + F_2}{2},$$

on voit que cette dernière égalité peut encore s'écrire

$$(12) \qquad E_1\sigma_1 + E_2\sigma_2 - \frac{F_1 + F_2}{2} = 0.$$

Si, de même, on élimine entre les équations (11) les termes en σ_2 seulement, on a

$$(13) \qquad E_2\sigma_1\sigma_2 + \frac{F_1 - F_2}{2}\sigma_1 - G_1 = 0.$$

Retranchant cette dernière équation de l'équation (12) multipliée par σ_1, on a

$$E_1\sigma_1^2 - F_1\sigma_1 + G_1 = 0.$$

On trouverait la même équation avec l'indice 2 par l'élimination de σ_1; et, comme le choix des variables z_1 et z_2 a été arbitraire, on peut dire que les valeurs critiques σ'_i et σ''_i de f_i sont les racines de l'équation

$$E_i\sigma_i^2 - F_i\sigma_i + G_i = 0. \tag{14}$$

Par suite,

$$\sigma'_i = \frac{F_i + \sqrt{\Delta}}{2E_i}, \qquad \sigma''_i = \frac{F_i - \sqrt{\Delta}}{2E_i}, \tag{15}$$

si nous convenons de représenter par $\sqrt{\Delta}$ la valeur *arithmétique* de ce radical. Nous répartissons ainsi les valeurs critiques en deux groupes (σ') et (σ'') respectivement caractérisés par le fait que le covariant

$$2E_i\sigma_i - F_i$$

a la même valeur, $\sqrt{\Delta}$ ou $-\sqrt{\Delta}$, pour les trois valeurs critiques σ_i du même groupe. Or, l'équation (12) peut s'écrire

$$2E_1\sigma_1 - F_1 = -(2E_2\sigma_2 - F_2). \tag{16}$$

Ceci nous montre que *les deux valeurs critiques associées en un même point critique sont nécessairement de groupes différents*. Il résulte de là que, si P_i est le point critique d'un nomogramme de genre o situé à la rencontre des droites d_j et d_k portant respectivement les échelles (z_j) et (z_k), on pourra avoir soit la disposition

$$P_1(\sigma'_2, \sigma''_3), \quad P_2(\sigma'_3, \sigma''_1), \quad P_3(\sigma'_1, \sigma''_2),$$

soit la disposition

$$P_1(\sigma'_3, \sigma''_2), \quad P_2(\sigma'_1, \sigma''_3), \quad P_3(\sigma'_2, \sigma''_1),$$

d'où, pour la même équation d'ordre 3, *deux classes de nomogrammes de genre* o *homographiquement irréductibles de l'une à l'autre.*

La correspondance des points de la droite d_i et des valeurs de la fonction f_i étant univoque, on voit en outre que les valeurs critiques σ et les points critiques P sont ensemble réels ou imaginaires.

Donc, *le nomogramme de genre* o *représentatif de l'équa-*

tion d'ordre 3 *donnée ne sera réel que si* $\Delta \geqq 0$ [1]. C'est le théorème que nous avions précédemment obtenu par une autre voie [2].

Si d'ailleurs $\Delta = 0$, les valeurs critiques σ' et σ'' devenant égales deux à deux, les trois points critiques se confondent, ce qui est la seconde partie du théorème ici rappelé [3].

Nous verrons plus loin comment, une fois connues les valeurs critiques, la construction du nomogramme peut s'effectuer par une voie purement géométrique.

7. *Valeurs critiques dans le cas d'une équation d'ordre nomographique* 4. — L'équation d'ordre nomographique 4 la plus générale peut s'écrire

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & f_3(a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3) + g_3(b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3) \\ & \qquad\qquad + c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation représentée par un nomogramme de genre 1, sur lequel les échelles rectilignes (z_1) et (z_2) (portées par les droites d_1 et d_2 qui se coupent en P_3) sont respectivement projectives de f_1 et f_2, est de cette forme. Mais, inversement, une telle équation est-elle toujours représentable par un tel nomogramme? Par une voie purement algébrique [en cherchant à ramener l'équation (17) à la forme canonique correspondant à un nomogramme de genre 1] [4], M. Clark a établi que non, en faisant connaître la condition requise pour que cette représentation soit possible. Nous allons retrouver son résultat d'une façon bien simple, grâce à la notion des valeurs critiques.

En effet, si la représentation en question est possible, les valeurs σ_1 et σ_2 que prennent f_1 et f_2 en P_3 sont critiques. Or, ces valeurs devant satisfaire à (17), *quelle que soit la valeur de* z_3,

---

(1) Il convient de ne pas perdre de vue que nous n'avons égard ici qu'aux échelles projectives de celles des fonctions f_i, car lorsque $\Delta < 0$ on peut être ramené au cas où $\Delta = 0$ moyennant une *anamorphose transcendante,* ainsi que M. Fontené en a, le premier, fait la remarque (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1900, p. 494).

(2) *T. N.*, p. 440.

(3) *T. N.*, p. 446.

(4) *T. N.*, p. 182.

doivent être telles que l'on ait à la fois

$$(18) \qquad \begin{cases} a_0\sigma_1\sigma_2 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3 = 0, \\ b_0\sigma_1\sigma_2 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3 = 0, \\ c_0\sigma_1\sigma_2 + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

Et cela exige que le résultat de l'élimination de σ_1 et σ_2 entre ces trois équations soit nul. Or, si l'on pose

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

et si l'on représente par D_i le déterminant déduit de celui-ci lorsqu'on y remplace les éléments a_i, b_i, c_i par a_0, b_0, c_0, on voit, en considérant les équations (18) comme linéaires en $\sigma_1\sigma_2$, σ_1 et σ_2, que l'on en tire

$$(19) \qquad \sigma_1\sigma_2 = -\frac{D}{D_3}, \qquad \sigma_1 = \frac{D_1}{D_3}, \qquad \sigma_2 = \frac{D_2}{D_3}.$$

Il vient, par suite, pour la condition cherchée

$$(20) \qquad DD_3 + D_1D_2 = 0.$$

C'est celle à laquelle M. Clark est parvenu par une voie sensiblement plus laborieuse.

Si elle est remplie, les valeurs critiques de σ_1 et σ_2 sont données par les deux dernières formules (19).

III.

8. *Construction projective des nomogrammes de genre* 0 *et* 1. — Plaçons-nous d'abord, pour le genre 0, dans l'hypothèse où $\Delta > 0$, c'est-à-dire où les trois points critiques sont distincts (ce qui, par leur jonction deux à deux, donne trois supports d_i non concourants).

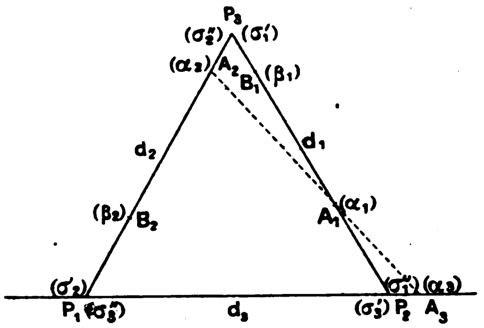
Nous pouvons, comme nous l'avons vu au n° 4, nous donner arbitrairement les points A_1 et B_1, A_2 et B_2 où les variables z_1 et z_2 prennent leurs valeurs limites a_1 et b_1, a_2 et b_2, auxquelles correspondent pour les fonctions f_1 et f_2 les valeurs α_1 et β_1, α_2 et β_2.

Tirant les droites A_1B_1 et A_2B_2, qui sont les supports d_1 et d_2, nous avons le point critique P_3 où les valeurs de f_1 et f_2 sont respectivement, par exemple (n° 6), σ'_1 et σ''_2.

Or, sur d_1, les points A_1, B_1, P_3 cotés α, β_1, σ'_1 appartiennent à une échelle projective d'une échelle métrique (n° 3) et la déterminent complètement ([1]); on peut donc marquer sur cette échelle le point coté σ''_1; c'est le point P_2. Le point P_1 se détermine de même sur d_2 où l'on connaît déjà les points A_2, B_2, P_3.

Tirant la droite P_1P_2 on a le support d_3 sur lequel les points P_1 et P_2 sont cotés σ''_1 et σ'_3; un troisième point suffira pour déterminer complètement l'échelle (z_3) comme projective de celle de f_3. Or, ce troisième point est immédiatement donné par la rencontre

Fig. 1.



de d_3 avec l'alignement défini par deux points déjà cotés sur d_1 et d_2, par exemple A_1 et A_2, la cote du point obtenu se tirant de l'équation (6) où z_1 et z_2 ont été remplacés par leurs valeurs a_1 et a_2.

Si $\Delta = 0$, la construction doit être un peu modifiée, attendu que, par les valeurs critiques, on n'a plus qu'un point (le point critique unique P) de d_3. Pour avoir un second point de ce support, il faut déterminer sur d_1 et d_2 les points où aboutissent deux alignements correspondant, en vertu de (6), à une même valeur de z_3. Un troisième alignement quelconque, indépendant des deux premiers,

---

([1]) Si l'on possède déjà une échelle de la fonction f_1, on peut coter A_1, B_1, P_3 au moyen des valeurs correspondantes a_1, b_1, ξ'_1 de z_1 et construire directement l'échelle (z_1) comme projective de celle de f_1.

donne ensuite sur d_3 le troisième point nécessaire à la détermination complète de l'échelle (z_3).

La même construction projective s'étend immédiatement aux nomogrammes de genre 1 lorsque la condition (20) ci-dessus est remplie. En effet, la connaissance des valeurs σ_1 et σ_2 de f_1 et f_2 au point critique P, jointe aux valeurs α_1 et β_1 d'une part, α_2 et β_2 de l'autre, permet la détermination complète des échelles (z_1) et (z_2). On construit ensuite, au moyen de doubles alignements correspondants, comme ci-dessus, autant de points qu'il est nécessaire de l'échelle (z_3), quatre, par exemple, s'il s'agit d'une échelle conique (n° 3).

9. *Emploi direct des échelles des fonctions composantes.* — Pour que l'échelle (z_i) figurant sur un nomogramme soit non pas seulement projective de l'échelle de la fonction f_i, mais cette échelle elle-même, il faut et il suffit que le point à l'infini sur la droite d_i corresponde à la valeur infinie de la fonction f_i. Appelons d'une manière générale I_i le point de d_i où la fonction f_i devient infinie. Pour que les échelles (z_i) et (z_j) soient simultanément réduites à celles des fonctions f_i et f_j il suffit, par une transformation homographique, de rejeter la droite I_iI_j à l'infini. Si, par hasard, le point I_k se trouve lui-même sur cette droite, la troisième échelle se trouve *ipso facto* réduite aussi à celle de la fonction f_k. Mais il peut se faire aussi que la droite I_iI_j coïncide avec le support d'une des échelles, auquel cas elle ne saurait être tout entière rejetée à l'infini. Il est donc essentiel d'examiner à part les cas où l'un ou plusieurs des points I se confondent avec des points critiques. C'est cette discussion que nous allons présenter ici d'une façon complète.

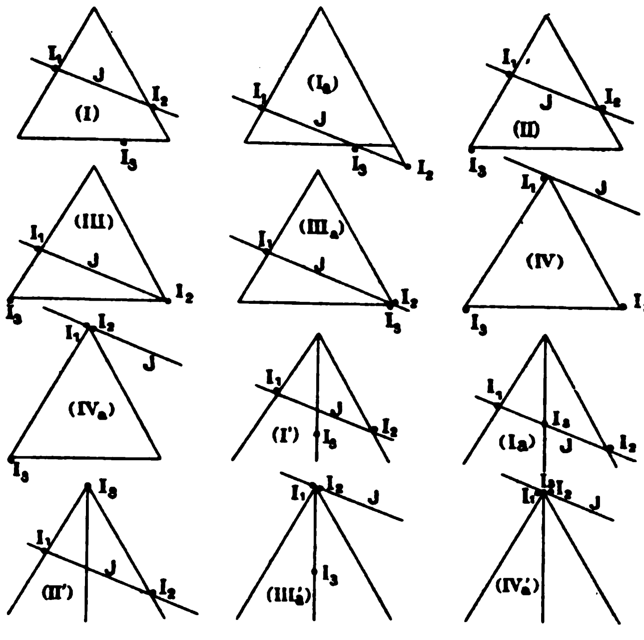
Nous ferons correspondre les numéros I, II, III et IV aux cas où 0, 1, 2 et 3 valeurs critiques des fonctions composantes sont infinies, en les affectant d'un accent lorsque les trois supports d_1, d_2, d_3 sont concourants et d'un indice a lorsque les trois points I_1, I_2, I_3 sont en ligne droite. Observons d'ailleurs tout de suite que les hypothèses (II_a), (II'_a), (III') et (IV') correspondent à des impossibilités.

La disposition relative à chacune des autres hypothèses est représentée schématiquement sur le Tableau ci-joint où la droite J est celle que l'on rejette à l'infini. Nous allons donner un exemple de chacune d'elles.

Au préalable, faisons les deux remarques générales que voici :

1° Pour avoir la valeur que prend l'une des fonctions lorsque les deux autres sont infinies, il faut diviser l'équation (6) par

Fig. 2.



le produit de celles-ci, ce qui montre que la valeur de f_i pour $f_j = f_k = \infty$ est donnée par

$$A f_i + B_i = 0,$$

et, par suite, qu'elle ne peut devenir elle-même infinie que si $A = 0$.

2° Pour qu'une des valeurs critiques σ_i devienne infinie, l'équation (14) montre qu'il faut que $E_i = 0$.

Il suit de là que les divers cas sont caractérisés comme suit (la notation θ indiquant une quantité différente de o) :

$$\Delta > 0.$$

I...........	$E_i = \theta$,	$E_j = \theta$,	$E_k = \theta$,	$A = \theta$,
I_a..........	θ,	θ,	θ,	o,
II..........	θ,	θ,	o,	θ,
III..........	θ,	o,	o,	θ,
III_a........	θ,	o,	o,	o,
IV..........	o,	o,	o,	θ,
IV_a.........	o,	o,	o,	o.

$$\Delta = 0.$$

I'...........	$E_i = \theta$,	$E_j = \theta$,	$E_k = \theta$,	$A = \theta$,
I'_a..........	θ,	θ,	θ,	o,
II'..........	θ,	θ,	o,	θ,
III'_a........	θ,	o,	o,	o,
IV'_a.........	o,	o,	o,	o.

Nous retrouvons bien ainsi les diverses conditions établies naguère par une voie purement algébrique ([1]).

Remarquons enfin que, étant libres de choisir des axes cartésiens avec lesquels les trois supports aient des équations aussi simples que possible, et ayant sur chacun de ces supports les cotes de 3 points, nous pouvons immédiatement écrire pour chacun d'eux les coordonnées du point courant en fonction de sa cote. Il suffit ensuite de remplacer ces coordonnées par leur expression dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pour avoir, à peu près sans calcul algébrique, la transformation de l'équation donnée sous la forme de déterminant (1). C'est ce que nous aurons soin de faire à l'occasion de chacun des exemples particuliers ci-dessous.

10. *Exemples de tous les cas possibles d'équation d'ordre* 3 *représentable par un nomogramme de genre* o. — Représentant

---

([1]) *T. N.*, p. 459. A cet endroit, une faute d'impression s'est glissée dans l'avant-dernière ligne du Tableau, où le signe θ pour A doit être remplacé par o.

par J_3 la valeur de z_3 pour $z_1 = z_2 = \infty$, nous disposons au-dessous de chaque équation les valeurs critiques dans l'ordre

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_1 & \sigma'_3 \\ \sigma''_1 & \sigma''_2 & \sigma''_3 \end{pmatrix}$$

en y ajoutant (J_3).

I. $$z_1 z_2 z_3 + z_2 z_3 - z_3 z_1 + z_1 z_2 + z_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (-1).$$

Nous indiquerons ici le détail de la mise sous forme de déterminant, sans y revenir pour les exemples suivants où nous nous contenterons de donner le résultat, qu'il est très facile de retrouver en se reportant à la marche indiquée ci-dessous.

Si nous prenons d_1 pour Ox, d_3 pour Oy, et d_2 comme droite $y = x + 1$, nous avons

$$x_1 = m_1 z_1 + n_1,$$
$$x_2 = m_2 z_2 + n_2,$$
$$y_3 = \frac{m_3 z_3 + n_3}{z_3 + p_3},$$

avec

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 0, & & -1, & \text{pour} & z_1 = 0, & & -\frac{1}{2}, \\ x_2 = 0, & & -1, & \text{pour} & z_2 = 0, & & -1, \\ y_3 = 0, & 1, & \infty, & \text{pour} & z_3 = 0, & 1, & -1, \end{array}$$

ce qui donne

$$x_1 = 2 z_1,$$
$$x_2 = z_2,$$
$$y_3 = \frac{2 z_3}{z_3 + 1},$$

d'où le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2z_1 & 0 & 1 \\ z_2 & z_2 + 1 & 1 \\ 0 & 2z_3 & z_3 + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Quant à la construction, elle est d'une extrême simplicité, attendu que les échelles (z_1) et (z_2) sont métriques et que l'échelle homographique (z_3), ayant même cote (o) que l'échelle (z_1) en leur point commun O, est effectivement projective de celle-ci ; le centre de projection est à la rencontre des alignements joignant, par exemple, les points cotés 1 et les points cotés — 1 (ce dernier, par conséquent, parallèle à Oy).

Pour les exemples suivants, nous bornant à inscrire au-dessous de chaque équation les valeurs critiques σ' et σ'' ainsi que J_3, nous les faisons suivre de la transformée sous forme de déterminant qui en résulte par une marche analogue à celle ci-dessus.

I_a.

$$z_2 z_3 - z_3 z_1 + z_1 z_2 + z_1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\infty),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ z_2 & z_2+1 & 1 \\ 0 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

II.

$$z_1 z_2 z_3 + z_3 z_1 - z_1 + z_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \infty \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (0),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ z_2 & z_2+1 & 1 \\ 0 & 1 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

III.

$$z_1 z_2 z_3 + z_2 z_3 - z_1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & \infty \end{pmatrix} \qquad (0),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ 0 & z_2 & 1 \\ -z_3 & 1 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

III_a.

$$z_3 z_1 - z_1 z_2 - z_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \infty \\ 0 & \infty & 0 \end{pmatrix} \qquad (\infty),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ 0 & z_2 & 1 \\ -1 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

IV. $$z_1 z_2 z_3 - 1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \qquad (0),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & z_2 + 1 \\ 1 & -z_3 & -z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

IV$_a$. $$z_3 z_1 - z_1 + z_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ \infty & 0 & \infty \end{pmatrix} \qquad \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ z_2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

I′. $$z_1 z_2 z_3 + z_2 z_3 - z_3 z_1 + z_1 z_2 + 4 = 0,$$

$$(-2 \quad -2 \quad -2) \qquad (-1),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ 2 & z_2 - 2 & -1 \\ -z_3 & z_3 + 2 & z_3 + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

I′$_a$. $$z_2 z_3 + z_3 z_1 - z_1 z_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3},$$

$$(0 \quad 0 \quad 0) \qquad (\infty),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ 0 & z_2 & 1 \\ z_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

II′. $$z_1 z_2 z_3 - z_1 - z_2 = 0,$$

$$(0 \quad 0 \quad \infty) \qquad (0),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ 0 & z_2 & 1 \\ 1 & 1 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

III′$_a$. $$z_2 z_3 - 2 z_3 z_1 + 1 = 0,$$

$$(\infty \quad \infty \quad 0) \qquad \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ z_2 & 1 & 1 \\ 1 & -z_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

IV'$_a$.
$$z_1 - 2z_2 + z_3 = 0,$$
$$(\infty \quad \infty \quad \infty) \qquad \left(\frac{0}{0}\right),$$
$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ z_2 & 1 & 1 \\ z_3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

IV.

11. *Nomogrammes coniques pour équations d'ordre* 3. — Lorsqu'une équation est ordonnée nomographiquement par rapport à l'une des variables, z_3 par exemple, sous la forme

(21) $$f_3 f_{12} + g_3 g_{12} + h_3 h_{12} = 0,$$

on peut essayer d'effectuer la disjonction des variables en posant

(22) $$u f_{12} - g_{12} = 0, \qquad v f_{12} - h_{12} = 0,$$

ce qui donne pour z_3 l'échelle ponctuelle définie par

$$f_3 + u g_3 + v h_3 = 0.$$

Si, éliminant ensuite successivement z_2 et z_1 entre les équations (22), on trouve des équations linéaires en u et v

$$f_1 + u g_1 + v h_1 = 0,$$
$$f_2 + u g_2 + v h_2 = 0,$$

la disjonction se trouve effectuée sous la forme requise pour l'application de la méthode des points alignés.

Appliquons cela à l'équation (6). Mise sous la forme (21), elle s'écrira

$$f_3(\mathrm{A} f_1 f_2 + \mathrm{B}_1 f_2 + \mathrm{B}_2 f_1 + \mathrm{C}_3) + \mathrm{B}_3 f_1 f_2 + \mathrm{C}_1 f_1 + \mathrm{C}_2 f_2 + \mathrm{D} = 0,$$

et les équations (22) seront ici

$$\mathrm{A}\; f_1 f_2 + \mathrm{B}_2 f_1 + \mathrm{B}_1 f_2 + \mathrm{C}_3 = u,$$
$$\mathrm{B}_3 f_1 f_2 + \mathrm{C}_1 f_1 + \mathrm{C}_2 f_2 + \mathrm{D} \;= v.$$

L'élimination de f_2 entre ces équations donne, eu égard aux formules du n° 6,

$$E_1 f_1^2 + (B_3 u - A v - F_1) f_1 + C_2 u - B_1 v + G_1 = 0,$$

équation linéaire en u et v, donc définissant un point dont le support a pour équation

$$(B_3 u - A v - F_1)^2 - 4 E_1 (C_2 u - B_1 v + G_1) = 0,$$

que, eu égard encore aux formules du n° 6, on peut écrire

$$(B_3 u - A v)^2 - 2 H_3 u + 2 K v + \Delta = 0,$$

équation qui resterait la même si l'on permutait les indices 1 et 2. Il résulte de là qu'on obtient ainsi un nomogramme sur lequel les échelles (z_1) et (z_2) ont pour support une *même* conique. Telle est la remarque fondamentale due à M. Clark; et, comme elle ne suppose rien sur le discriminant Δ, on voit qu'elle s'applique indistinctement à toutes les équations d'ordre 3.

Il résulte d'ailleurs de ce que nous avons rappelé au n° 3 que chacune de ces échelles (z_1) et (z_2) peut être construite au moyen de deux faisceaux projetants de la fonction f_1 ou f_2. Pour déterminer un tel faisceau, il en faut connaître trois rayons. Or, grâce à la considération de l'homographie la plus générale (n° 4), on peut disposer arbitrairement de quatre points A, B, C, D d'une de ces échelles, cotés d'une manière quelconque. Dans le faisceau obtenu en prenant pour centre l'un d'eux, A par exemple, on connaît les trois rayons AB, AC, AD avec leur cote; par suite, le choix fait des quatre points A, B, C, D entraîne la détermination complète soit de l'échelle (z_1), soit de l'échelle (z_2), et c'est également sur cette remarque que M. Clark a fondé la construction de ses nomogrammes coniques.

La question qui se pose est celle qui consiste à trouver la relation liant z_1 et z_2 en chaque point du support conique commun. M. Clark la résout en ramenant l'équation donnée à la forme canonique

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 + (\varphi_1 + \varphi_2) \psi_3 + \chi_3 = 0, \tag{23}$$

symétrique par rapport à φ_1 et φ_2, parce qu'alors la relation cherchée s'écrit

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{24}$$

Mais la considération des valeurs critiques nous a conduit à trouver le moyen d'écrire cette relation d'après l'équation générale (6) sans lui faire subir aucune transformation préalable. Il est, en effet, facile de se rendre compte *a priori* de la disposition des valeurs critiques sur un nomogramme conique : si C est le support conique commun des échelles (z_1) et (z_2), D le support rectiligne de l'échelle (z_3), coupant la conique C aux points I et J, il est clair que les valeurs critiques sont réunies en ces deux points de façon qu'à l'un d'eux correspondent, pour z_1 et z_2, deux valeurs de même groupe, et, pour z_3, une valeur du groupe contraire; soit, par exemple : σ'_1, σ'_2 et σ''_3 en I; σ''_1, σ''_2 et σ'_3 en J.

Ainsi, les valeurs σ'_1 et σ'_2, d'une part, σ''_1 et σ''_2, de l'autre, sont associées en un même point de la conique. Or, ces couples de valeurs satisfont, d'après ce qui a été vu au n° 6, à la relation

$$2E_1\sigma_1 - F_1 = 2E_2\sigma_2 - F_2,$$

d'où l'on conclut que l'on doit avoir

$$\varphi_1 = 2E_1 f_1 - F_1, \qquad \varphi_2 = 2E_2 f_2 - F_2.$$

Et, en effet, si, dans l'équation générale (6), on remplace f_1 et f_2 par leurs valeurs tirées de là, on obtient

$$\varphi_1\varphi_2(Af_3 + B_3) + (\varphi_1 + \varphi_2)(Kf_3 + H_3) + L_3 f_3 + M_3 = 0,$$

où

$$L_3 = AF_1F_2 + 2B_1E_1F_2 + 2B_2E_2F_1 + 4C_3E_1E_2,$$
$$M_3 = BF_1F_2 + 2C_1E_2F_1 + 2C_2E_1F_2 + 4D\,E_1E_2,$$

qui est bien de la forme (23).

Ainsi, la forme particulière de la relation (24), déduite directement de l'équation générale (6), est

$$2E_1 f_1 - F_1 = 2E_2 f_2 - F_2. \tag{25}$$

Elle permet une construction immédiate du nomogramme, rendant inutile non seulement toute transformation algébrique préliminaire, mais même la simple disjonction des variables, puisque, l'échelle (z_1) étant arbitrairement construite comme il vient d'être dit, la relation (25) permet de doubler sa graduation de celle de l'échelle (z_2).

Remarque. — Nous venons de voir qu'on pouvait arbitrairement choisir quatre points cotés de (z_1). Pour ces quatre cotes, on prendra évidemment, d'une part, les valeurs de z_1, qui sont limites pour l'application qu'on a en vue, de l'autre, celles qui, en vertu de (25), correspondent de même aux valeurs limites de z_2.

12. *Nomogrammes coniques pour équations d'ordre 4.* — Appliquons la même analyse à l'équation générale d'ordre nomographique 4 écrite sous la forme (17) du n° 7, ou, par abréviation,

$$\alpha_{12} f_3 + \beta_{12} g_3 + \gamma_{12} = 0, \tag{17 bis}$$

et, pour cela, posons

$$\gamma_{12} u - \alpha_{12} = 0, \qquad \gamma_{12} v - \beta_{12} = 0. \tag{26}$$

Pour que nous puissions ainsi effectuer la disjonction des variables, remarquons d'abord qu'il faut que les équations en f_1 et f_2,

$$\alpha_{12} = 0, \qquad \beta_{12} = 0, \qquad \gamma_{12} = 0,$$

ne soient pas compatibles. Si, en effet, elles l'étaient, on aurait

$$\gamma_{12} = \lambda \alpha_{12} + \mu \beta_{12},$$

et, des équations (26), on déduirait

$$\lambda u + \mu v = 0,$$

équation indépendante de z_1 et z_2, conduisant dès lors à une impossibilité. Or, si l'on se reporte au n° 7, on voit que la condition d'incompatibilité des équations ci-dessus [qui, moyennant le remplacement de la notation f par la notation σ, se confondent avec les équations (18)] est

$$DD_3 + D_1 D_2 \neq 0.$$

Ainsi, la disjonction par les équations (26) pourra se faire lorsque la condition (20) n'aura pas lieu, c'est-à-dire lorsque l'équation (17) ne sera pas représentable par un nomogramme à deux échelles rectilignes; d'où cette conclusion, autrement obtenue par M. Clark, que, *tandis qu'une équation d'ordre* 3 *est* ad libitum *représentable par un nomogramme à échelles* *rectilignes ou coniques, une équation d'ordre 4 est représentable soit par l'un, soit par l'autre de ces types de nomogramme, à l'exclusion l'un de l'autre.*

Reste à vérifier que les équations (26) conduisent bien, pour z_1 et z_2, à des échelles coniques de même support.

Si, d'une manière générale, on pose

$$u_i = c_i u - a_i, \qquad v_i = c_i v - b_i,$$

les équations (26) peuvent s'écrire

$$f_2(u_0 f_1 + u_2) + u_1 f_1 + u_3 = 0,$$
$$f_2(v_0 f_1 + v_2) + v_1 f_1 + v_3 = 0,$$

et, par suite, lorsqu'on pose encore

$$U_{ij} = u_i v_j - u_j v_i, \tag{27}$$

le résultat de l'élimination de f_2 entre ces équations se met sous la forme

$$U_{01} f_1^2 + (U_{03} - U_{12}) f_1 + U_{23} = 0, \tag{20}$$

équation linéaire en u et v, car on vérifie immédiatement que

$$U_{ij} = (b_i c_j - b_j c_i)\, u + (c_i a_j - c_j a_i)\, v + (a_i b_j - a_j b_i). \tag{29}$$

L'équation (28) définit donc bien pour z_1 une échelle conique.

De même, on trouverait pour z_2 l'échelle

$$U_{02} f_2^2 + (U_{03} - U_{21}) f_2 + U_{13} = 0. \tag{30}$$

Il s'agit maintenant de faire voir que les échelles définies par les équations (28) et (30) ont même support. Les équations des supports de ces échelles sont respectivement (en coordonnées parallèles)

$$(U_{03} - U_{12})^2 - 4 U_{01} U_{23} = 0,$$

et

$$(U_{03} - U_{21})^2 - 4 U_{02} U_{13} = 0,$$

et la vérification de leur identité, lorsqu'on remarque que $U_{21} = - U_{12}$, se réduit à celle de

$$U_{02} U_{13} - U_{01} U_{23} = U_{03} U_{12},$$

qui est immédiate lorsqu'on y remplace les U par leurs expressions (27).

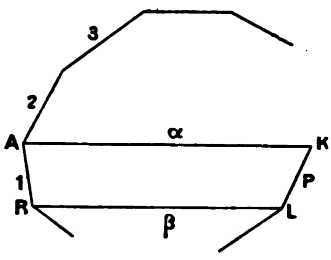
PROPRIÉTÉS DES POLYGONES INSCRITS A UNE CONIQUE;

PAR M. MATHIEU WEILL.

THÉORÈME I. — *Le produit des distances d'un point quelconque d'une conique aux côtés d'un polygone inscrit est dans un rapport constant avec le produit des distances de ce point aux droites qui joignent de p en p les sommets du polygone.*

Parcourons le polygone dans l'ordre indiqué par les côtés 1, 2, ..., p, ..., et, dans les égalités qui vont suivre, négligeons, pour la

Fig. 1.



commodité de l'écriture, des facteurs constants, en désignant par (1) la distance d'un point M de la conique au côté 1, par (2) la distance de M au côté 2, et ainsi de suite.

Le quadrilatère AKLR formé par les côtés 1, p, α, β donne lieu à l'égalité

$$(1)(p) = (\alpha)(\beta).$$

Formons de pareilles égalités en parcourant les sommets successifs du polygone, nous aurons

$$(2)(p+1) = (\alpha')(\beta'),$$
$$(3)(p+2) = (\alpha'')(\beta''),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où, en désignant par P le produit des distances de M à tous les côtés du polygone,

$$(P)^2 = [(\alpha)(\alpha')(\alpha'')\ldots][(\beta)(\beta')(\beta'')\ldots].$$

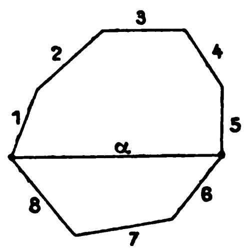
Or, le produit $(\alpha)(\alpha')(\alpha'')\ldots$ représente le produit des distances de M aux droites qui joignent les sommets pris de $(p-2)$ en $(p-2)$; et le produit $(\beta)(\beta')\ldots$ représente le produit des distances de M aux droites qui joignent les sommets pris de p en p.

Le théorème est donc vrai pour p s'il l'est pour $(p-2)$. Or, il est vrai pour la valeur $p-2=2$; donc il est général.

Théorème II. — *Étant donné un polygone de $2m$ côtés inscrit dans une conique, et dont les côtés sont numérotés 1, 2, 3, 4, ..., $2m$, le produit des distances d'un point quelconque* M *de la conique aux côtés* 1, 3, 5, 7, ... *est dans un rapport constant avec le produit des distances de* M *aux côtés* 2, 4, 6, ..., $2m$; *et aussi dans un rapport constant avec le produit des distances de* M *aux diagonales.*

Pour démontrer la première partie, considérons, par exemple,

Fig. 2.



un octogone que nous décomposerons en quadrilatère et hexagone en joignant 2 sommets; en supposant le théorème vrai pour l'hexagone, nous aurons

$$(1)(3)(5)=(2)(4)(\alpha),$$

puis

$$(7)(\alpha)=(6)(8).$$

On voit donc que, si le théorème est vrai pour un polygone de $2m$ côtés, il est vrai pour un polygone de $(2m+2)$ côtés; donc il est général.

Pour démontrer la deuxième partie, remarquons qu'on aura, en appliquant le théorème I au cas de l'octogone, par exemple,

$$(1)(2)(3)\ldots(8)=(D_1D_2D_3D_4)^2,$$

en désignant par D_1, D_2, ... les diagonales; d'où

$$(1)(3)(5)(7) = (2)(4)(6)(8) = D_1 D_2 D_3 D_4.$$

Si la conique donnée est un cercle, les deux théorèmes précédents donnent des produits égaux, et non plus dans un rapport constant.

Appliquons le théorème I à un polygone de m côtés et aux droites qui joignent les sommets de 2 en 2, par exemple; nous aurons une égalité de la forme

$$(1)(2)(3)\ldots(m) = \lambda(\alpha)(\beta)(\gamma)\ldots$$

en désignant par λ un facteur constant, qui se réduit à l'unité quand la conique est un cercle, et en désignant par (α), (β), ... les distances de M aux droites qui joignent les sommets de 2 en 2. Or, l'équation précédente, si l'on y remplace les coordonnées de M par des coordonnées courantes, représente une courbe de degré m, formée, d'une part, de la conique donnée et, d'autre part, d'une courbe restante de degré $(m-2)$, qui passe par les points de rencontre des côtés du polygone et des droites qui joignent les sommets de 2 en 2. Tous les points de cette courbe restante jouissent donc de la propriété exprimée par l'égalité précédente.

Le théorème II donne lieu à la même remarque.

Considérons, maintenant, quelques cas particuliers; nous énoncerons les résultats sans démonstration.

Un hexagone étant inscrit dans une conique, le produit des distances d'un point quelconque de la droite de Pascal aux côtés numérotés 1, 3, 5 est dans un rapport constant avec le produit des distances aux côtés 2, 4, 6, et avec le produit des distances aux diagonales.

Un triangle étant inscrit dans une circonférence, si l'on mène les tangentes aux sommets, la droite qui passe par les points de rencontre de ces tangentes et des côtés jouit de la propriété que le produit des distances d'un point de cette droite aux trois côtés est égal au produit des distances de ce point aux trois tangentes.

Un polygone régulier est inscrit dans une circonférence; les tangentes aux sommets forment un second polygone régulier dont les côtés rencontrent ceux du premier polygone en des points situés sur des circonférences concentriques; le produit des distances d'un point quelconque d'une de ces circonférences aux côtés du polygone est égal au produit des distances de ce point aux tangentes.

Un polygone est inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique, bitangente à la première le long d'une droite D. Les côtés du polygone et les droites qui joignent les sommets de 2 en 2, par exemple, se coupent en des points qui sont situés sur des coniques bitangentes à la première le long de D, et aussi sur la droite D si le nombre des côtés est impair; le produit des distances d'un point quelconque de la droite D ou d'une de ces coniques aux côtés du polygone est dans un rapport constant avec le produit des distances de ce point aux droites qui joignent les sommets de 2 en 2.

Même résultat pour les droites qui joignent les sommets de 3 en 3, de 4 en 4, ...

Considérons encore un polygone d'un nombre pair de côtés, inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique quelconque; l'équation symbolique

$$(1)(3)(5)(7)\ldots = (2)(4)(6)(8)(10)\ldots$$

représente d'abord la conique dans laquelle le polygone est inscrit, puis une courbe restante formée elle-même de coniques, auxquelles vient s'adjoindre une droite quand le nombre des côtés est de la forme $(4m+2)$; ce sont ces coniques dont les points jouissent de la propriété indiquée par l'équation.

Si un polygone de $(4m+2)$ côtés est inscrit dans une circonférence et circonscrit à une autre circonférence, les côtés opposés se coupent deux à deux sur une droite; le produit des distances d'un point quelconque de cette droite aux côtés numérotés 1, 3, 5,... est égal au produit des distances de ce point aux côtés numérotés 2, 4, 6, ...

Théorème III. — *Il existe une relation linéaire et homogène entre les inverses des distances d'un point quelconque d'une conique aux côtés d'un polygone inscrit.*

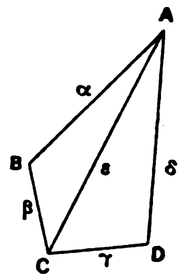
$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ étant les équations des côtés d'un triangle, l'équation d'une conique circonscrite peut s'écrire

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\lambda}=0,$$

a, b, c étant des constantes.

Soit un quadrilatère ABCD et une conique circonscrite; les

Fig. 3.



deux triangles ABC, ACD donneront lieu aux deux équations suivantes de la conique circonscrite :

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\varepsilon}=0,$$

$$-\frac{c}{\varepsilon}+\frac{d}{\gamma}+\frac{e}{\delta}=0.$$

Donc tout point de la conique satisfait à une équation de la forme

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{d}{\gamma}+\frac{e}{\delta}=0;$$

le théorème se démontre de proche en proche.

L'équation de la conique est donc renfermée dans l'équation

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\ldots+\frac{l}{\lambda}=0,$$

qui représente la conique d'une part et, d'autre part, une courbe restante de degré (m — 3) si le polygone a m côtés; cette courbe restante jouit donc de la même propriété que la conique. Ainsi, dans le cas du quadrilatère, c'est la droite qui joint les points de rencontre des côtés opposés; dans le cas du pentagone, c'est la conique qui passe par les cinq points où se coupent les côtés, points autres que les cinq sommets situés sur la conique donnée.

Théorème IV. — *Un polygone de m côtés étant inscrit dans une conique, les m sommets de ce polygone et les $m(m-4)$ points où les côtés sont rencontrés respectivement par les droites qui joignent les sommets de p en p appartiennent à une même courbe de degré $(m-2)$.*

Ce théorème résulte de ce qui précède.

Considérons, par exemple, un hexagone et les droites qui joignent les sommets de 2 en 2; nous aurons 18 points d'une même courbe du quatrième degré.

Théorème V. — *Trois courbes,* C, S, Σ, *font partie d'un faisceau d'ordre m; deux autres courbes,* S′, Σ′, *font partie avec* C *d'un faisceau d'ordre m; les $2m^2$ points de rencontre de* S *avec* Σ′ *et de* S′ *avec* Σ *sont sur une courbe* C′ *de degré m.*

En effet, tout point de la courbe C satisfait à chacune des équations

$$S = \lambda\Sigma, \qquad S' = \mu\Sigma',$$

et, par suite, à l'équation

$$SS' = \lambda\mu\Sigma\Sigma';$$

cette équation, qui représente la courbe C, représente donc aussi une autre courbe C′ qui passe par les points communs à S et Σ′, et aussi à S′ et Σ.

En écrivant $S\mu\Sigma' = S'\lambda\Sigma$, on voit qu'il existe une courbe C″ de degré m passant par les points communs à S et S′, et à Σ et Σ′.

Considérons, par exemple, une cubique et un système A de 3 droites et un autre système B de 3 droites, tels que leurs 9 points communs appartiennent à la cubique; puis deux autres systèmes analogues A′, B′; les 18 points de rencontre de A avec B′, et de A′ avec B, sont sur une même cubique; le produit des distances d'un point quelconque de cette cubique aux 6 droites des groupes A, A′ est proportionnel au produit des distances de ce même point aux 6 droites des groupes B, B′.

Résultat analogue pour deux groupes de 4 points sur une conique quelconque. Transformons par polaires réciproques; nous aurons le résultat suivant :

Étant donnés deux quadrilatères ABCD, A'BC'D (B et D étant deux sommets opposés communs aux deux quadrilatères), s'il existe une conique inscrite à ABCD et ayant A' et C' comme foyers, il existe une conique inscrite à A'BC'D et ayant A et C comme foyers.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES CORRESPONDANCES DE M. ZERMELO;

PAR M. HENRI LEBESGUE.

Soit un ensemble M formé de certains éléments. Nous appelons sous-ensemble de M tout ensemble formé avec des éléments de M pris en totalité ou en partie. Imaginons qu'à chaque sous-ensemble de M nous sachions faire correspondre un élément particulier, bien déterminé, de ce sous-ensemble; une telle correspondance entre les sous-ensembles de M et des *éléments distingués* de ces sous-ensembles est dite une correspondance de M. Zermelo.

C'est en se fondant sur l'existence de telles correspondances que M. Zermelo (¹) a démontré que tout ensemble pouvait être bien ordonné, le sens qu'il faut attribuer au verbe *pouvoir* restant d'ailleurs très obscur pour certains esprits.

Il n'est douteux pour personne qu'on ne pourra jamais, sans particulariser l'ensemble M, nommer une correspondance de M. Zermelo pour tout ensemble M, puisque rien ne nous permet de distinguer deux éléments de M : nous savons seulement qu'ils sont distincts. Je me propose de montrer dans cette Note combien sont encore grandes les difficultés que l'on rencontrerait, si l'on essayait de nommer une correspondance de M. Zermelo pour l'ensemble M des nombres réels. Ma conclusion sera que l'*on ne pourra jamais définir une telle correspondance par des pro-*

(¹) *Beweiss dass jede Menge wohlgeordnet werden kann.* (Lettre à M. Hilbert, publiée dans le Tome LIX des *Math. Annalen.*)

cédés analytiques et cela même si l'on se borne à la considération de certains sous-ensembles très particuliers.

J'emploie dans ce qui suit la terminologie que j'ai adoptée dans un précédent travail ([1]) et j'utilise certains des résultats que j'ai obtenus. Je dirai qu'une fonction est *représentable analytiquement,* si l'on peut la construire en effectuant, suivant une loi déterminée, des opérations élémentaires (additions, soustractions, multiplications, divisions) et des passages à la limite, en nombre fini ou dénombrable, à partir de constantes et des variables, supposées en nombre fini ou dénombrable. Cette définition très large comprend toutes les fonctions qui ont été nommées jusqu'ici, même celles qu'on a construites comme exemples des singularités les plus inattendues, sauf celles que j'ai formées à la fin du Mémoire cité. Encore faut-il ajouter que la méthode de construction que j'ai employée, à laquelle Kronecker eût vraisemblablement dénié les qualités qu'il exigeait d'une définition, est un procédé d'exclusion des fonctions représentables analytiquement; au contraire, les procédés ordinaires de définition des fonctions, qui reviennent tous à une division du domaine considéré en ensembles partiels par des procédés analytiques et à une définition analytique de la fonction sur chacun de ces ensembles, conduisent nécessairement à des fonctions représentables analytiquement.

Pour qu'une fonction f soit représentable analytiquement il faut et il suffit que, quels que soient a et b, les ensembles $E(a < f < b)$, $E(a = f)$, formés des points pour lesquels les égalité et inégalité entre parenthèses sont vérifiées, soient mesurables B.

Les fonctions que j'ai construites sont les seules connues qui ne satisfont pas à cette condition; encore rentrent-elles dans la catégorie des fonctions mesurables, c'est-à-dire de celles pour lesquelles les ensembles $E(a < f < b)$, $E(a = f)$ sont mesurables. On ne sait pas si l'on pourra jamais nommer un ensemble non mesurable, une fonction non mesurable.

On va voir que, pour nommer une correspondance de M. Zermelo pour les nombres réels, il faudrait nommer une fonction non représentable analytiquement et même non mesurable.

([1]) *Sur les fonctions représentables analytiquement* (*Journ. de Math.*, 6e série, t. I, fasc. II, 1905, p. 139-216).

Nommer une telle correspondance, c'est faire correspondre à tout ensemble de nombres E un des nombres de l'ensemble, ou faire correspondre à la fonction f, égale à zéro aux points de E et à 1 ailleurs, une des racines de cette fonction. Si y est cette racine, y apparaît comme une fonction portant sur une variable qui est la forme et la valeur de la fonction f dans un intervalle. Les opérations fonctionnelles faisant correspondre des nombres à des formes de fonctions n'ont guère été étudiées, sauf cette opération fonctionnelle que l'on nomme *intégration définie* (¹); il serait donc prématuré de rechercher à quelle classe d'opérations fonctionnelles il conviendrait de réserver le nom d'*opérations analytiques*. Mais, si l'on convient de dire qu'*une opération fonctionnelle est définie par un procédé analytique quand elle fait correspondre à toute fonction $f(x, \lambda)$ exprimable analytiquement un nombre $y(\lambda)$ exprimable analytiquement*, on est certain d'avoir une définition assez large pour qu'il soit très difficile de trouver une opération qui n'y satisfasse pas (²).

Ces préliminaires exposés, je démontre que, *même si l'on se borne à la considération des ensembles dénombrables, il est impossible de définir pour eux une correspondance de M. Zermelo par des procédés analytiques.*

Soit t une variable comprise entre o et 1; je l'écris dans le système décimal en ayant soin, par exemple, de n'employer qu'un nombre fini de chiffres significatifs quand cela est possible. On a

---

(¹) Cependant il est facile de nommer bien d'autres opérations fonctionnelles de la nature de celles dont il s'agit ici. Ainsi la limite supérieure, la variation totale, la mesure extérieure de l'ensemble des valeurs d'une fonction sont des fonctions de la forme de cette fonction. Quand on s'occupe de classes moins étendues de fonctions on peut citer bien d'autres opérations fonctionnelles de la nature ici considérée. Toutes celles étudiées par M. Volterra et par M. Hadamard sont de cette nature. Les opérations fonctionnelles considérées par M. Pincherle et par M. Bourlet sont un peu différentes : elles font correspondre des fonctions à des fonctions.

(²) Par exemple, si l'on peut obtenir le nombre y à partir de f en effectuant une infinité dénombrable d'opérations élémentaires, de passages à la limite, d'opérations f elles-mêmes sur des nombres ou des fonctions, une infinité dénombrable d'intégrations, de dérivations, y est défini à partir de f par un procédé analytique.

Les opérations fonctionnelles de la note précédente sont toutes définies par des procédés analytiques.

ainsi

$$t = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots.$$

Je pose

$$x_1 = 0, a_1 a_3\ a_5\ \ldots,$$
$$x_2 = 0, a_2 a_6\ a_{10} \ldots,$$
$$x_3 = 0, a_4 a_{12} a_{20} \ldots,$$

et d'une manière générale

$$x_n = 0, a_{2^{n-1}.1}\, a_{2^{n-1}.3}\, a_{2^{n-1}.5} \ldots.$$

A chaque valeur de t je fais ainsi correspondre l'ensemble dénombrable des valeurs x_1, x_2, ..., distinctes ou non. Réciproquement, à tout ensemble de nombres x_i, compris entre 0 et 1, correspond au moins une valeur de t.

On sait que le plus grand entier non supérieur à un nombre x est une fonction exprimable analytiquement de x et cela même à l'aide d'expressions fort simples. Or a_1 est le plus grand entier contenu dans $10t$, a_2 le plus grand entier contenu dans $100t - a_1$, ..., donc a_p est une fonction exprimable analytiquement de t. Par suite il en est de même de x_n; il serait même facile de prouver que x_n est une fonction de classe 1 de la variable t.

Je désigne par $\varphi(\theta)$ la fonction égale à 1 pour $\theta = 0$ et à zéro ailleurs; $\varphi(\theta)$ est la limite, pour p infini, de $e^{-p\theta^2}$, c'est donc une fonction exprimable analytiquement. La fonction $f(x, t)$ égale à 1 quand x prend l'une des valeurs x_i correspondant à t et égale à zéro ailleurs est donc

$$f(x, t) = \varphi(x - x_1) + \varphi(x - x_2) + \ldots;$$

c'est une fonction exprimable analytiquement de x et de t. Seulement, pour que cela soit exact, nous ne considérerons que les valeurs de t pour lesquelles tous les x_p sont différents. Les valeurs de t laissées de côté forment l'ensemble somme des ensembles $E_{p,q}$ $(p \neq q)$, $E_{p,q}$ étant formé des valeurs de t pour lesquelles $x_p = x_q$.

$E_{p,q}$ est partout non dense. En effet, dans un intervalle quelconque on peut en trouver un autre, limité par deux fractions décimales exactes d'ordre α qui soient consécutives, $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$; α étant tel que, parmi les α premiers chiffres de t, il y en ait des nombres inégaux β et γ qui interviennent dans x_p et x_q ([1]). Les valeurs de $E_{p,q}$ qui appartiennent à $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$ ont alors $\alpha + |\beta - \gamma|$ chiffres déterminés, c'est-à-dire que l'on peut nommer des intervalles contenus dans $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$ dans lesquels il n'y a aucun point de $E_{p,q}$. $E_{p,q}$ est donc bien partout non dense.

Laissons encore de côté les valeurs de t pour lesquelles l'un des x_i est un nombre décimal exact, de façon que la correspondance entre t et l'ensemble des x_i soit biunivoque. Nous laissons ainsi de côté une infinité dénombrable d'ensembles tels que, pour chacun d'eux, l'un déterminé x_i des x ait une valeur décimale déterminée r. r a deux développements déterminés différents r_1 et r_2; donc t a une infinité de chiffres qui doivent être égaux soit aux chiffres de r_1, soit à ceux de r_2. Un raisonnement analogue au précédent montre que l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles on a $x_i = r$ est partout non dense.

En définitive, nous laissons de côté un ensemble qui est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles partout non denses, c'est-à-dire un ensemble de première catégorie ([2]).

Supposant toujours les x_i non décimaux et différents, recherchons quelques propriétés de la transformation de x_p en x_q, les autres x n'étant pas modifiés. Je dis que cette transformation fait correspondre à un ensemble partout non dense de valeurs de t un ensemble partout non dense de valeurs de t. Appliquons, en effet, la transformation à un ensemble E partout non dense dans (o, 1), qui est le seul intervalle considéré, et soit (a, b) une partie quelconque de (o, 1). Dans (a, b) je prends un intervalle i_1 de la forme $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$, α étant tel que, dans les α premiers chiffres de t, il y en ait autant qui servent dans x_p et dans x_q et que le dernier de ces α chiffres n'appartienne ni à x_p ni à x_q.

([1]) On suppose ici que x_p et x_q ne sont pas des fractions décimales exactes; ce cas est examiné plus loin.

([2]) Les notions d'ensembles de première et de seconde catégories sont dus à M. R. Baire; pour les propriétés de ces ensembles on consultera les *Leçons sur les fonctions discontinues* de M. Baire (Collection de Monographies publiées sous la direction de M. Borel) ou sa Thèse, *Sur les fonctions de variables réelles* (*Annali di Matematica*, 1899).

Alors la transformation de x_q en x_p fait correspondre à i_1 un intervalle de même forme i. E étant non dense dans i, on peut trouver un intervalle j, intérieur à i, de la forme $\left(\frac{m}{10^\beta}, \frac{m+1}{10^\beta}\right)$, β jouissant des propriétés ci-dessus indiquées pour α. La transformation de x_p en x_q transforme j en un intervalle de même forme j_1, intérieur à i_1, donc à (a, b), dans lequel il n'y a pas de points de E_1.

Ceci posé, une correspondance de M. Zermelo fera correspondre à toute valeur de t non laissée de côté un nombre $y(t)$ qui sera l'un, bien déterminé puisqu'ils sont tous différents, des nombres x_1, x_2, ... Chacune de ces valeurs annulera donc une et une seule des fonctions $y(t) - x_p(t)$. J'appelle e_p l'ensemble des valeurs de t annulant $y(t) - x_p(t)$.

Deux ensembles e_p, e_q n'ont pas de point commun ; $(0, 1)$ est la somme des ensembles e_p et de l'ensemble de première catégorie formé des valeurs de t laissées de côté ; donc l'un des e_p est de seconde catégorie.

Si la correspondance de M. Zermelo est définie, au moins pour les ensembles dénombrables, par un procédé analytique, $y(t)$ sera une fonction exprimable analytiquement et par suite les e_p seront des ensembles mesurables B.

L'un d'entre eux est de seconde catégorie ; or on sait que, si un ensemble mesurable B est de seconde catégorie, il y a un intervalle dans lequel il est partout de seconde catégorie, c'est-à-dire dans lequel son complémentaire est de première catégorie [1]. Je dis que cela est impossible.

Pour le faire voir, je m'appuierai sur cette remarque évidente : la transformation de x_p en x_q change e_p en e_q, et je montrerai que, si e_p est partout de seconde catégorie dans un intervalle, on peut trouver un intervalle et un ensemble e_q dans lequel e_p et e_q soient tous deux partout de seconde catégorie, ce qui ne peut avoir lieu quand e_p est mesurable B.

Supposons donc e_p partout de première catégorie dans (a, b) ; dans (a, b) je choisis un intervalle i de la forme $\left(\frac{m}{10^\alpha}, \frac{m+1}{10^\alpha}\right)$ et un nombre q plus grand que α. Dans les α premiers chiffres de t,

---

[1] *Voir* mon Mémoire cité, p. 187.

il y en a β qui interviennent dans x_p et il n'y en a pas qui interviennent dans x_q. Les valeurs de t comprises dans i et pour lesquelles x_p et x_q ont les β premiers chiffres communs ont donc $\alpha+\beta$ chiffres déterminés, c'est-à-dire que ces valeurs de t appartiennent à un ou plusieurs intervalles j de la forme $\left(\frac{n}{10^\gamma}, \frac{n+1}{10^\gamma}\right)$. Le changement de x_q en x_p fait correspondre à toute valeur d'un intervalle j une valeur de i; donc les points de j qui n'appartiennent pas à e_q proviennent de points de i n'appartenant pas à e_p. Or ces points forment un ensemble somme d'une infinité dénombrable d'ensembles partout non denses à chacun desquels la transformation de x_p en x_q fait correspondre des ensembles partout non denses. Dans les intervalles j, e_p et e_q sont donc partout de seconde catégorie. La proposition est démontrée.

Modifions quelque peu le raisonnement précédent; nous obtiendrons un résultat plus général. Nous avons vu que les points de $E_{p,q}$ qui sont contenus dans $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$ ont plus de α chiffres déterminés, c'est-à-dire qu'ils peuvent être enfermés dans un intervalle de la forme $\left(\frac{n'}{10^{\alpha+1}}, \frac{n'+1}{10^{\alpha+1}}\right)$. De là il résulte que, si l'on peut enfermer $E_{p,q}$ dans des intervalles de mesure totale l, on peut aussi l'enfermer dans des intervalles de mesure totale $\frac{l}{10}$, et $E_{p,q}$ est de mesure nulle. On démontrera de même que, quand l'un des x_i a une valeur décimale exacte donnée r, t appartient à un ensemble de mesure nulle. L'ensemble des valeurs de t laissées de côté est donc de mesure nulle.

D'autre part, si $y(t)$ est une fonction mesurable, les ensembles e_p sont mesurables. Je dis qu'ils ont tous même mesure. En effet, la transformation de x_p en x_q transforme l'intervalle $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$ d'étendue $\frac{1}{10^\alpha}$ en un intervalle de même étendue, pourvu que dans les α premiers chiffres de t il y en ait autant de x_p que de x_q et que le $\alpha^{\text{ième}}$ chiffre n'appartienne ni à x_p ni à x_q. Cela revient à dire que la transformation de x_p en x_q, qui transforme e_p en e_q, transforme un ensemble qu'on peut enfermer dans des intervalles de longueur totale l en un ensemble qu'on peut enfermer aussi dans des intervalles de longueur totale l. Cette transformation conserve donc la mesure : tous les e_p ont même mesure. Or $(0, 1)$ est la somme des e_p et de l'ensemble exceptionnel E; tous ces ensembles sont sans points communs : on a donc les égalités incompatibles

$$1 = m(E) + m(e_1) + m(e_2) + \ldots,$$
$$m(E) = 0, \qquad m(e_1) = m(e_2) = m(e_3) = \ldots.$$

Il est ainsi démontré que $y(t)$ ne peut pas être une fonction mesurable.

Les raisonnements précédents prouvent aussi que : *il n'existe aucune fonction $y(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de l'infinité dénombrable de variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$ qui soit représentable analytiquement, ou même simplement mesurable, et qui fasse correspondre à tout ensemble dénombrable $x_1, x_2, x_3, \ldots$ un nombre distingué y de l'ensemble, dépendant de l'ensemble $x_1, x_2, x_3, \ldots$, mais pas de l'ordre dans lequel sont rangés les points qui composent cet ensemble* (¹).

La notion d'ensemble dénombrable le plus général n'étant pas des plus claires, il ne sera peut-être pas inutile de montrer qu'on rencontre les mêmes difficultés quand on essaye de nommer une correspondance de M. Zermelo pour des familles très simples d'ensembles dénombrables. Pour n'avoir toujours à considérer que le segment $(0, 1)$, j'introduirai la notion d'ensemble réduit correspondant à un ensemble E. J'appellerai ainsi l'ensemble des parties fractionnaires $F(t)$ des valeurs de t appartenant à E. Un ensemble réduit ne contiendra donc que des valeurs telles que l'on ait

$$0 \leqq F(t) < 1.$$

Il n'est pas inutile de remarquer que $F(t)$, étant égale à t diminué du plus grand entier, positif, nul ou négatif, qui ne surpasse pas t, est une fonction exprimable analytiquement de t. De telle sorte que, si E est définissable par des procédés analytiques, il en est de même de son ensemble réduit.

Laissons de côté les ensembles bien ordonnés dans l'échelle croissante ou décroissante des valeurs de la variable. Le plus

(¹) Cet énoncé est équivalent au précédent.

simple, peut-être, des autres ensembles dénombrables est la progression arithmétique infinie dans les deux sens formée des nombres $a+nr$, n étant un entier positif, nul ou négatif. Pour ces progressions il est facile de nommer un élément distingué par un procédé analytique; par exemple, le plus petit terme positif de la progression, lequel est une fonction de classe 1 des variables a et r. On va voir qu'au contraire cela est impossible pour l'ensemble réduit (¹).

Pour simplifier je suppose que r a une valeur irrationnelle déterminée, $\sqrt{2}$ par exemple, et je démontre qu'*il n'existe aucune fonction $y(a)$ représentable analytiquement ou simplement mesurable qui fasse correspondre à tout ensemble formé des valeurs de $\mathrm{F}(a+n\sqrt{2})$ pour n entier, une valeur distinguée de l'ensemble ne dépendant que de l'ensemble et non de la manière dont il est donné.*

En effet, si $y(a)$ existait, on aurait, quel que fût l'entier p,

$$y(a+1)=y(a+p\sqrt{2})=y(a);$$

$\lambda(a)$ désignant un entier convenable, l'expression

$$z(a)=\frac{y(a)-a+\lambda(a)}{\sqrt{2}}$$

définirait un entier $z(a)$ vérifiant les égalités

$$\begin{gathered} z(a+1)=z(a), \\ z(a+p\sqrt{2})+p=z(a), \\ z[a+\mathrm{F}(p\sqrt{2})]+p=z(a). \end{gathered}$$

Désignons par e_q l'ensemble des valeurs de a comprises dans $(0, 1)$ pour lesquelles $z(a)=q$. Nous supposons y mesurable; donc e_q est mesurable. Or on passe de e_q à une partie de e_{q-p} par

(¹) Ce fait, singulier au premier abord, résulte de ce que, tandis qu'il est possible de repérer la position de la progression $a+nr$ dans l'échelle des nombres, cela devient impossible si l'on ne connaît que l'ensemble réduit correspondant, parce que le même ensemble réduit correspond à la fois aux deux progressions $a+nr$ et $(a+1)+nr$. De sorte que ce qui va être démontré, c'est l'impossibilité de définir par des procédés analytiques une correspondance de M. Zermelo pour les progressions arithmétiques à deux raisons formées des valeurs que prend l'expression $a+m+nr$ pour toutes les valeurs entières de m et de n, et cela même si r a une valeur irrationnelle déterminée, $\sqrt{2}$ par exemple.

les opérations suivantes : 1° on effectue la translation $+F(p\sqrt{2})$ sur la partie de e_q contenue dans $[0, 1-F(p\sqrt{2})]$, l'extrémité $1-F(p\sqrt{2})$ exclue; 2° on effectue la translation $-[1-F(p\sqrt{2})]$ sur la partie de e_q contenue dans $[1-F(p\sqrt{2}), 1]$, origine comprise. On passerait de même de e_{q-p} à e_q; donc e_q et e_{q-p} ont la même mesure.

$(0, 1)$ est la somme des e_q, sans point commun; tous les e_q ont la même mesure et ils sont en nombre infini; d'où l'impossibilité qui légitime l'énoncé.

Je crois utile, en terminant, de faire quelques remarques. Dans toute question d'existence, il y a lieu de tenir compte de deux mentalités différentes : celle de l'idéaliste et celle de l'empiriste de P. du Bois-Reymond (1). Dans ce qui précède, j'ai donné aux définitions leur sens idéaliste; c'est ainsi, par exemple, que j'ai parlé d'une infinité dénombrable de constantes sans m'occuper d'une loi les définissant, parce que tout ce qui rentre dans la définition empirique rentre *a fortiori* dans la définition idéaliste. Au contraire, j'ai fait des raisonnements empiristes parce que ce sont les seuls qu'idéalistes et empiristes s'accordent à déclarer corrects.

En donnant aux définitions leur sens idéaliste, on est certain de leur donner un sens aussi large que celui que les empiristes leur donneront jamais (2); mais il ne s'ensuit pas qu'on doive utiliser des preuves idéalistes. Sans doute, celles de ces preuves qu'on

---

(1) *Théorie générale des fonctions*, traduction G. Milhaud et A. Girot, Nice. 1887. Il n'y a d'ailleurs pas que deux mentalités en présence, car il y a bien des manières d'être idéaliste ou empiriste. L'empirisme de Kronecker n'est pas celui de M. Jules Drach; l'idéalisme de du Bois-Reymond diffère sensiblement de celui de M. Jacques Hadamard.

Il est d'ailleurs vraisemblable que, connaissant les résultats récents obtenus dans la *Théorie des fonctions*, du Bois-Reymond eût modifié, sur des points de détail, le langage qu'il prête à l'idéaliste.

(2) On ne mérite donc pas ce reproche que M. Hadamard formulait ainsi : « Je crois que le débat est au fond le même qui s'est élevé entre Riemann et ses prédécesseurs sur la notion même de fonction. La loi qu'exige Lebesgue me paraît ressembler fort à l'expression analytique que réclamaient à toute force les adversaires de Riemann. » Et en note : « Je crois devoir insiter un peu sur ce point de vue qui, s'il faut dire toute ma pensée, me paraît former le fond même du débat. Il me semble que le progrès véritablement essentiel des Mathématiques, à partir de l'invention même du Calcul infinitésimal, a consisté dans l'annexion de

peut construire actuellement légitiment tous les énoncés qui, au cours des siècles, seront démontrés par les empiristes; mais est-il bien certain que ces preuves ne légitiment pas aussi des énoncés que les empiristes démontreront être faux? On a vu récemment M. Burali-Forti, employant les raisonnements idéalistes que l'on utilisait constamment, à l'exemple de M. G. Cantor, dans l'étude des ensembles, mettre en évidence une contradiction à laquelle ils conduisent ([1]). Sans doute, les raisonnements de M. Burali-Forti ont été immédiatement condamnés par des idéalistes qui ont fait remarquer, avec raison, qu'il formait un ensemble avec des objets non préalablement existants ([2]). Cette critique, pour l'empiriste, a la valeur suivante : M. Burali-Forti raisonne sur des êtres mal définis comme s'ils étaient bien définis; or l'empiriste se demande si ce n'est pas précisément là ce qui caractérise le raisonnement idéaliste? Pour qu'un empiriste pût admettre les preuves idéalistes, il faudrait qu'on lui eût enseigné comment, avant qu'un raisonnement idéaliste ait conduit à une contradiction, il pourra s'apercevoir s'il est illégitime ou légitime.

Ayant ainsi fait mes réserves sur la valeur des preuves idéalistes, j'énonce des propositions démontrées dans ce qui précède par des raisonnements idéalistes :

Il existe des ensembles qui ne sont pas mesurables.

Il existe des ensembles qui sont, ainsi que leurs complémentaires, de seconde catégorie dans tout intervalle ([3]).

---

notions successives qui, les unes pour les Grecs, les autres pour les géomètres de la Renaissance ou les prédécesseurs de Riemann, étaient « en dehors des Mathé- » matiques », parce qu'il était impossible de les décrire. » (Ce *Bulletin*, t. XXXIII, 1905, p. 270.)

([1]) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1897. (*Voir* aussi HILBERT. *Congrès de Heidelberg*; J. RICHARD, *Revue générale des Sciences*, année 1905.)

([2]) HADAMARD, *Loc. cit.*, p. 271.

([3]) Cette Note a été rédigée à l'occasion d'une question posée par M. C. Segre (*Math. Ann.*, t. XL) et sur laquelle il a bien voulu appeler mon attention.

La réponse partielle que j'ai pu faire à cette question a été publiée dans les *Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino*, 10 mars 1907. J'ai appris depuis que des considérations analogues à certaines de celles que j'utilisais avaient été développées par M. Hamel dans le tome LX des *Math. Annalen*.

J'ajoute que l'existence, au sens idéaliste, d'ensembles non mesurables a été démontrée par M. VITALI (Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1905).

SUR LE MODE DE CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES;

Par M. Otto Blumenthal.

Soit $f(z)$ une fonction entière de z. Posons $z = re^{i\varphi}$ et désignons par $G(r, \varphi)$ le module de f, par $A(r, \varphi)$ et $B(r, \varphi)$ ses parties réelle et imaginaire. Soient, en outre, $M(r)$, $\mathsf{A}(r)$, $\mathsf{B}(r)$ les valeurs maxima de G, A, B sur le cercle de rayon r.

Nous allons établir sur ces fonctions quelques propositions d'ordre général qui me paraissent indispensables pour fonder solidement la théorie des fonctions entières. Il semble que ces théorèmes n'aient pas encore été démontrés explicitement, quoique, dans leurs grandes lignes, ils n'offrent peut-être rien de nouveau pour ceux qui s'occupent des fonctions entières.

Les propositions que je vais établir sont valables pour les trois fonctions $M(r)$, $\mathsf{A}(r)$, $\mathsf{B}(r)$ et de même pour les valeurs minima des fonctions G, A, B. Je me bornerai à les démontrer pour $M(r)$, la démonstration pour les autres fonctions étant ou identique ou plus facile.

1. J'appellerai *fonction* (*courbe*) *algébroïde entière* une fonction (courbe) réelle

$$y = y(x)$$

de la variable réelle x, qui satisfait aux conditions suivantes :

1° Elle est finie et continue pour toutes les valeurs finies de x.

2° Pour toutes les valeurs de x, sauf au plus pour une infinité dénombrable de points tendant vers l'infini comme point limite unique, y est analytique et régulière en x.

3° Pour les valeurs exceptionnelles y admet des développements à la Puiseux, suivant des puissances fractionnaires de x.

Ceci posé, voici la proposition à établir :

La fonction (*courbe*) $M(r)$, *évidemment monodrome, continue et croissante, se compose d'un nombre fini ou infini dé-*

nombrable de parties de fonctions (arcs de courbes) algébroïdes. Les valeurs (points) de rencontre de deux parties de fonctions (arcs de courbes) différentes sont en nombre fini ou n'ont qu'une valeur (point) limite unique à l'infini (¹). De plus, on sait que $M(r)$ tend vers l'infini avec r.

En particulier donc, la courbe sera partout analytique et algébroïde sauf pour les points de rencontre où il y aura, en général, discontinuité de la tangente et des dérivées supérieures.

Ces propriétés sont bien mises en relief par un exemple simple, mais très instructif, qu'on trouvera au n° 10 de ce travail.

2. *Remarques préliminaires.* — Pour éviter des renvois nombreux, je commencerai par rappeler quelques faits connus qui nous seront utiles dans la suite.

A, B et $\log G$ satisfont à l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0.$$

Nous en tirons le lemme suivant :

Une fonction entière $f(z)$, qui a une valeur absolue constante sur un cercle de rayon R ayant l'origine comme centre, est nécessairement de la forme az^m.

D'abord, si f n'a pas de racines à l'intérieur du cercle, $\log G$, étant constant sur sa périphérie et fini à son intérieur, est une constante, et il en est de même de $f(z)$.

Soient donc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ celles des racines de f à l'intérieur du cercle qui sont différentes de zéro. Nous appellerons $r_k = |z - \alpha_k|$ la distance d'un point variable z au point α_k et $r'_k = |z - \alpha'_k|$ la distance de z au point α'_k symétrique à α_k par rapport au cercle (R). On sait alors que

$$\log \frac{r_1 r_2 \ldots r_p}{r'_1 r'_2 \ldots r'_p}$$

(¹) J'ai énoncé ce théorème deux fois sans démonstration : dans la thèse de M. A. Kraft, *Ueber ganze transcendente Funktionen von unendlicher Ordnung* (*Dissertation, Göttingen*, 1903) ; et *Jahresber. d. deutschen Math.-Ver.*, t. XVI, février 1907. Du reste, on peut, par nos méthodes et presque sans aucun changement, démontrer une proposition analogue sur les séries de Taylor à l'intérieur de leur cercle de convergence.

a une valeur constante sur le cercle. Du reste $\log G$, devenant infini comme $\log r_k$ au point α_k, est nécessairement de la forme

$$\log G = \text{const.} + \log \frac{r_1 r_2 \ldots r_p}{r'_1 r'_2 \ldots r'_p} + m \log r,$$

si l'origine est un zéro d'ordre m de $f(z)$.

Donc $\log G$ deviendrait infini positif aux points $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_p$. Ceci étant impossible, puisque $f(z)$ est entière, il vient

$$\log G = \text{const.} + m \log r,$$

ce qui prouve notre proposition ([1]).

Nous exclurons constamment par la suite les puissances az^m.

Une autre forme du même lemme est alors la suivante :

La dérivée $\dfrac{\partial G}{\partial \varphi}$ *ne peut s'annuler tout le long d'un cercle ayant l'origine comme centre.*

En coordonnées polaires r, φ, l'équation $\Delta u = 0$ a la forme

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

On en conclut que

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial B}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \log G}{\partial \varphi}$$

satisfont encore à l'équation de Laplace.

3. Nous posons

$$(1) \qquad \begin{cases} f(z) = \sum a_n z^n, & \lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \\ & a_n = a'_n + i a''_n. \end{cases}$$

Alors

$$(2) \qquad \begin{cases} A(r, \varphi) = a'_0 + \sum\limits_n r^n (a'_n \cos n\varphi - a''_n \sin n\varphi), \\ B(r, \varphi) = a''_0 + \sum\limits_n r^n (a''_n \cos n\varphi + a'_n \sin n\varphi). \end{cases}$$

([1]) Bien entendu, on peut aussi la démontrer sans faire intervenir explicitement la théorie du potentiel.

Par suite de la décroissance rapide des quantités a_n, les séries (2) *restent uniformément* et absolument convergentes, *même si l'on y admet pour r des valeurs complexes dont le module ne dépasse pas une quantité arbitraire* R, *et pour* φ *des valeurs complexes ayant un module* $\leqq 2\pi$. Par suite, d'après un théorème connu, on peut y remplacer $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ par leurs développements de Taylor et changer l'ordre des termes, de façon à obtenir

$$(3)\qquad A(r,\varphi)=a'_0+r\sum_{k,l}c'_{kl}r^k\varphi^l,\qquad B(r,\varphi)=a''_0+r\sum_{k,l}c''_{kl}r^k\varphi^l,$$

et ces séries convergent uniformément et absolument à l'intérieur de tout cercle arbitrairement grand ayant son centre à l'origine du plan des z.

Il en est de même de

$$(4)\qquad G^2(r,\varphi)=A^2(r,\varphi)+B^2(r,\varphi)=g_0+r\sum_{k,l}g_{lk}r^k\varphi^l.$$

Les expressions (3) et (4) montrent que

$$\frac{\partial A(o,\varphi)}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial B(o,\varphi)}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial G(o,\varphi)}{\partial\varphi}$$

s'annulent identiquement en φ ([1]).

4. Considérons maintenant l'ensemble des valeurs (r,φ) pour lesquelles

$$\frac{\partial G}{\partial\varphi}=o.$$

Voici la proposition à prouver :

Dans tout le plan, l'ensemble des points pour lesquels $\frac{\partial G}{\partial\varphi}=o$ *forme au plus une suite dénombrable de courbes algébroïdes; il n'y a qu'un nombre fini de ces courbes* (*ou de leurs branches*) *qui pénètrent dans l'intérieur d'un cercle* (R).

([1]) Ce fait, évident dans le cas où $g\neq o$, se vérifie aisément dans le cas général à l'aide des formules (2).

Tout d'abord, il ne peut exister de point *isolé* pour lequel $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$.

Cela est évident pour le point $r = 0$. Écartons ce cas et supposons en premier lieu que le point isolé ne soit pas un zéro de G. Alors

$$\frac{\partial \log G}{\partial \varphi} = \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial \varphi}$$

s'annule en ce point et reste finie et continue dans son voisinage. Traçons autour du point un cercle c aussi petit que nous voudrons. $\frac{\partial \log G}{\partial \varphi}$, et par suite $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$, doit changer de signe et, par suite, s'annuler sur le cercle, car, puisque $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ satisfait à l'équation de Laplace, on a, d'après le théorème de la moyenne arithmétique,

$$\int_{(c)} \frac{\partial \log G}{\partial \varphi}\, ds = 0,$$

ds désignant l'élément de l'arc du cercle c. Donc le point n'est pas un zéro isolé de $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$.

Supposons en second lieu que G s'annule en même temps que $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$. Nous considérons alors le cercle (r) ayant son centre à l'origine et passant par le point. Il est évident que, sur ce cercle, $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ change de signe au point $G = 0$. Entourons donc encore ce point d'un petit cercle c, on voit que $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ change de signe et, par suite, s'annule sur c.

Pour établir notre proposition, nous n'avons maintenant qu'à appliquer les procédés généraux de l'élimination, ce qui, dans le cas de deux variables, ne présente pas de difficulté. Soit (r_0, φ_0) un point quelconque pour lequel $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$. Développant $\frac{\partial (G^2)}{\partial \varphi}$ en série partout convergente suivant les puissances de $r - r_0$ et de $\varphi - \varphi_0$, la condition $\frac{\partial (G^2)}{\partial \varphi} = 0$ prend la forme

$$(4^a) \qquad \sum_{k,l} \gamma_{kl}(r - r_0)^k(\varphi - \varphi_0)^l = 0,$$

et le premier membre ne s'annule pas identiquement pour $r = r_0$, en vertu du lemme démontré au n° 2 [1].

Admettons, pour un moment, des valeurs complexes de $r - r_0$ et $\varphi - \varphi_0$. Alors, si $\frac{\partial(G^2)}{\partial\varphi}$ commence par des termes d'ordre p en r et φ, il existe exactement p développements de la forme

$$(5) \qquad \varphi^{(\lambda)} - \varphi_0 = \sum_i \varepsilon_i^{(\lambda)} t^i,$$

t étant une puissance fractionnaire de $r - r_0$: $t = (r - r_0)^{\frac{1}{\rho}}$ (ρ entier positif) [2]. L'ensemble des valeurs (r, φ) fournies par ces développements est identique à l'ensemble des racines (r, φ) de l'équation $\frac{\partial(G^2)}{\partial\varphi} = 0$ dans un voisinage fini et déterminé du point (r_0, φ_0).

Or, retournons au domaine réel. Comme le zéro (r_0, φ_0) ne peut être isolé, quelques-uns, du moins, des développements cités auront une projection dans le domaine réel, qui n'est autre chose qu'un élément de courbe algébroïde passant par le point (r_0, φ_0).

De plus, comme G n'a que des zéros isolés, les zéros de $\frac{\partial(G^2)}{\partial\varphi}$ sont, dans un certain voisinage du point, identiques à ceux de $\frac{\partial G}{\partial\varphi}$, donc :

Au voisinage de chaque point (r_0, φ_0) qui annule $\frac{\partial G}{\partial\varphi}$ l'équation $\frac{\partial G}{\partial\varphi} = 0$ définit un nombre fini d'éléments algébroïdes réels passant par le point. On s'assure, du reste, aisément que chacun de ces éléments avec ses prolongements analytiques par le plan des z donne une courbe algébroïde entière.

Envisageons l'ensemble de tous ces éléments. Bornons-nous à ceux d'entre eux qui possèdent des points à l'intérieur ou sur la

---

[1] Le dernier raisonnement ne s'applique pas au point $r = 0$. Pour traiter ce point, on divisera d'abord $\frac{\partial(G^2)}{\partial\varphi}$ par une puissance convenablement choisie de r; on sera ainsi ramené au cas général.

[2] Développements à la Puiseux. Comparer JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 342-350.

périphérie d'un cercle (R). Je dis que ces éléments avec leurs prolongements analytiques ne forment qu'un nombre fini de courbes (branches de courbes) algébroïdes.

En effet, supposons qu'il y en ait une infinité ayant des points communs avec l'intérieur ou la périphérie de (R). Alors il y a, dans (R) ou sur (R), au moins un point limite P tel que dans son voisinage pénètrent des courbes $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ en nombre infini. La continuité de $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ exige alors que P soit lui-même un zéro de la fonction. Appliquant alors le théorème ci-dessus, on voit que l'hypothèse faite est absurde. Notre proposition sur les valeurs $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ est donc bien démontrée.

Nous désignerons dorénavant par *courbes* C les courbes algébroïdes entières $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$.

Une courbe C ne coupe un cercle (r) qu'en un nombre fini de points. C'est ce qu'on démontre encore par la méthode du point limite. Mais la même méthode nous fournit encore le résultat bien plus précis :

Sur tous les cercles (r) *intérieurs à* (R) *le nombre des points pour lesquels* $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ *est au plus égal à un nombre fini* K *qui ne dépend que de* R.

Une dernière conclusion à tirer de la considération des courbes C est la suivante :

Tous les points $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ *d'un cercle* (r) *dans un certain voisinage d'un cercle* (r_0) *sont situés sur des courbes* C *ayant des points communs avec* (r_0).

5. Les mêmes résultats subsistent évidemment pour les courbes $\frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0$ et $\frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0$; il y a même lieu de faire sur ces courbes une remarque complémentaire.

Les courbes $\frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0 \left(\frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0\right)$ *ne peuvent être fermées;* ou mieux : *il ne peut exister, dans le plan des z, aucun domaine fini, limité exclusivement par des arcs de courbes* $\frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0$ $\left(\frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0\right)$.

En effet, comme $\frac{\partial A}{\partial \varphi}$ satisfait partout à l'équation de Laplace et qu'elle est régulière dans tout domaine fini, elle serait identiquement nulle si elle s'annulait sur le contour.

Le résultat analogue sur les courbes C a une portée moins grande. Tout d'abord, en appliquant à $\frac{\partial \log G}{\partial \varphi}$ les raisonnements ci-dessus, on voit qu'il ne peut pas exister de domaines finis, limités exclusivement par des arcs de courbes C, et tels qu'ils ne contiennent, ni dans leur intérieur, ni sur leurs contours, aucun zéro de G. De plus, il est évident que chaque zéro de G est nécessairement situé sur une courbe $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$. D'où ce résultat :

S'il existe un domaine fini, limité exclusivement par des arcs de courbes C *et n'en contenant aucun dans son intérieur, il faut que l'un au moins de ces arcs contienne un zéro de* G (*c'est-à-dire de* f).

L'exemple du n° 10 montrera du reste que cette circonstance peut bien se présenter.

6. Nous pouvons maintenant aborder notre problème principal, la recherche des plus grandes valeurs $M(r)$ de G sur les différents cercles (r). Nous commencerons par une orientation rapide, puis nous approfondirons.

Prenons donc un cercle déterminé (r_0) $(r_0 < R)$ et cherchons-en les points dans lesquels G prend la valeur $M(r_0)$. Je les appellerai les *points maxima* du cercle. Ces points sont certainement compris parmi les intersections du cercle avec les courbes C. Comme le nombre de ces intersections est $\leqq K$, la détermination des points maxima n'offre pas de difficulté théorique. Il peut y en avoir un ou plusieurs.

Il s'agit maintenant de trouver les points maxima sur les cercles voisins de (r_0).

Supposons d'abord qu'il n'y ait, sur (r_0), qu'un seul point maximum et un seul élément C_1 des courbes C passant par ce point. Alors les choses sont très simples. Comme, sur (r_0), aux intersections avec les autres courbes C correspondent des valeurs de G plus petites que $M(r_0)$, de même, sur tous les cercles d'un certain voisinage de (r_0), la courbe C_1 fournira les plus grandes valeurs de G, c'est-à-dire que, dans ce voisinage, les points maxima seront les points d'intersection des différents cercles avec la même courbe algébroïde C_1. Ce voisinage comprend des valeurs r et plus petites et plus grandes que r_0.

J'appellerai *courbe maxima* tout arc de courbe formé par des points maxima. Donc, dans notre cas, il y a, dans le voisinage de r_0, une seule courbe maxima, arc de la courbe algébroïde C_1.

Mais le cas général est plus compliqué. En effet, s'il y a sur r_0 plusieurs points maxima et plusieurs éléments C passant par eux, il faut traiter séparément les valeurs $r > r_0$ et $r < r_0$. Étudions d'abord le cas $r > r_0$. Envisageons tous les éléments de C passant par les points maxima de (r_0) et suivons-les dans la direction des r croissants. Les points maxima des cercles (r) $(r > r_0)$ sont certainement, dans un certain voisinage de (r_0), compris parmi les intersections de (r) avec ces éléments, d'après la remarque faite à la fin du n° 4. Donc, les courbes maxima seront, dans le voisinage de (r_0), comprises parmi ces éléments : ce seront ceux qui fournissent sur chaque cercle (r) $(r > r_0)$ assez voisin de (r_0) les plus grandes valeurs de G. Il peut y en avoir plusieurs.

Les mêmes raisonnements sont valables pour les valeurs $r < r_0$. *Mais les courbes maxima peuvent être différentes pour* $r > r_0$ *et pour* $r < r_0$.

C'est là un fait capital, par suite duquel la fonction $M(r)$ se comporte d'une façon complètement différente des deux côtés du point r_0.

Je dirai que r_0 est un *point anguleux* de la fonction $M(r)$, si cette circonstance se présente, c'est-à-dire, *si les courbes maxima sont différentes pour* $r > r_0$ *et* $r < r_0$.

Il y aura, du reste, lieu de distinguer deux sortes de points anguleux :

1° *Points anguleux de la première sorte.* — Les courbes maxima des deux côtés du cercle (r_0) sont différentes, mais elles passent par les mêmes points maxima de (r_0) [1]. (Ce cas ne peut se présenter que lorsque plusieurs éléments C passent par un point maximum);

2° *Points anguleux de la deuxième sorte.* — Les courbes maxima des deux côtés passent par des points maxima différents.

Nous reviendrons sur cette classification (n° 9).

Les courbes maxima sont donc des arcs de courbes C, coupés aux points anguleux.

Mais les raisonnements ci-dessus ne sont qu'approximatifs. Il faut les rendre concluants par une voie analytique, ce qui ne présente pas de difficulté.

7. A cet effet, nous allons calculer la fonction $M(r)$ au voisinage de r_0, ce qui se fait par une élimination.

Nous écrirons les développements (5) de tous les éléments C passant par les points maxima de (r_0). C'est un nombre fini $(\leq K)$ de développements que nous désignerons par

$$D_1, D_2, \ldots, D_q.$$

Nous aurons

$$(5^a) \qquad D_\lambda : \varphi^{(\lambda)} - \varphi_0^{(\lambda)} = \sum_i \varepsilon_i^{(\lambda)} t^i.$$

La lettre t désigne dans tous ces développements la même puissance fractionnaire de $r - r_0$.

Certains de ces développements pourront du reste n'être réels que pour $r < r_0$ ou $r > r_0$.

Nous avons, d'autre part, autour du point maximum $(r_0, \varphi_0^{(\lambda)})$:

$$(4^b) \qquad G^2(r, \varphi) = M^2(r_0) + \sum_{k,l} \delta_{kl}^{(\lambda)} (r - r_0)^k (\varphi - \varphi_0^{(\lambda)})^l,$$

la somme s'annulant pour $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0^{(\lambda)}$.

---

(1) Pour parler plus exactement : il y a au moins un couple de courbes maxima des deux côtés de (r_0) qui passent par le même point maximum de (r_0).

Nous désignerons par $\overline{G}_\lambda(r)$ les valeurs de $G(r, \varphi)$ sur l'élément D_λ. Substituant (5^a) dans (4^b) et tenant compte de ce que $r - r_0$ est une puissance entière de t, nous trouvons

$$\overline{G}_\lambda^2(r) = M^2(r_0) + \sum_1^\infty B_i^{(\lambda)} t^i,$$

et, par suite, puisque $M(r_0)$ est différent de zéro :

$$\overline{G}_\lambda(r) = M(r_0) + \sum_1^\infty A_i^{(\lambda)} t^i, \tag{6}$$

tous ces développements étant valables à la fois dans un voisinage fini et déterminé de r_0.

Les $\overline{G}_\lambda(r)$ *sont donc des éléments algébroïdes en* r. Certains peuvent n'être réels que pour $r < r_0$ ou $r > r_0$. Il peut aussi y en avoir plusieurs d'identiques : dans ce cas, nous n'en conserverons qu'un seul.

Distinguons maintenant les deux cas $r < r_0$ et $r > r_0$. Prenons d'abord $r > r_0$. Formons toutes les différences deux à deux des $\overline{G}_\lambda$ réels pour $r > r_0$. Soit

$$\overline{G}_\lambda - \overline{G}_\mu = t^s \sum_0^\infty \overline{A}_i t^i \qquad (\overline{A}_0 \neq 0)$$

une de ces différences. Elle a pour toutes les valeurs de r ($> r_0$) dans le voisinage de r_0 un signe constant, celui de $\overline{A}_0 t^s$. Donc il y a un développement bien déterminé, soit $\overline{G}_\lambda$, qui, pour toutes les valeurs $r > r_0$ d'un voisinage fini, donne des valeurs de G supérieures (ou au moins égales) à celles fournies par les autres développements. *On a alors dans tout ce voisinage*

$$M(r) = \overline{G}_\lambda(r) = M(r_0) + \sum_1^\infty A_i^{(\lambda)} t^i \qquad (r > r_0). \tag{6a}$$

Le même raisonnement s'applique aux valeurs $r < r_0$, il y aura encore un développement maximum, soit $\overline{G}_\mu$, mais il est évidènt qu'en général, $\overline{G}_\mu$ est différent de $\overline{G}_\lambda$. Donc

$$(6^b) \qquad M(r) = \overline{G}_\mu(r) = M(r_0) + \sum_1^\infty A_i^{(\mu)} t^i \qquad (r < r_0).$$

Si G_λ et G_μ diffèrent, r_0 est un point anguleux de $M(r)$.

Voici donc le résumé des résultats acquis :

De chaque côté d'un point quelconque r_0, la fonction $M(r)$ *admet un développement algébroïde. Ces développements sont valables dans un intervalle d'étendue finie. Si les développements des deux côtés sont identiques, nous avons un point ordinaire, sinon un point anguleux de* $M(r)$.

8. *A l'intérieur d'un intervalle fini* $(0 \ldots R)$, *il n'y a qu'un nombre fini de points anguleux.*

En effet, s'il y en avait une infinité, ils auraient un point limite $\leqq R$, ce qui est inadmissible, puisque, pour ce point, le théorème du numéro précédent serait en défaut.

Notre proposition générale, énoncée au n° 1, est donc bien établie.

Voici une autre forme du même résultat : *Les courbes maxima sont des arcs de courbes algébroïdes. Toute courbe* C *qui est maxima dans un élément l'est sur un arc de longueur finie. Pour* $r \leqq R$, *cette longueur reste au-dessus d'une limite fixe, différente de zéro.*

9. Je ferai encore quelques remarques à l'égard des points anguleux. En les appelant ainsi, j'ai un peu généralisé l'acception ordinaire du mot. En effet, la définition ci-dessus du point anguleux n'implique pas qu'il y ait forcément discontinuité de la tangente.

Il y a même dans cet ordre d'idées une proposition spéciale sur les points anguleux de première sorte.

En un point anguleux de première sorte, la tangente est toujours continue.

C'est une conséquence immédiate d'une formule très simple relative à la dérivée $\frac{dM}{dr}$.

Soit $\frac{d\varphi}{dr}$ le coefficient angulaire de la courbe maxima au point r. Nous supposerons d'abord que $\frac{d\varphi}{dr}$ n'est pas infini. On a alors

$$\frac{dM}{dr} = \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial G}{\partial r}. \tag{7}$$

Mais cette formule subsiste encore pour les points où le coefficient angulaire est infini [c'est-à-dire où la courbe maxima est tangente au cercle (r)]. Nous savons en effet, par suite du caractère algébroïde des courbes C, que ces points sont isolés. Or la relation (7) étant vérifiée pour des points infiniment voisins du point isolé, l'est aussi pour le point même, parce que, sur une même courbe maxima, $\frac{dM}{dr}$ ne fait pas de sauts brusques.

La formule (7) est assez remarquable : on en conclut, entre autres, que la dérivée $\frac{dM}{dr}$ est partout finie, ce qui ne paraît nullement évident *a priori* (¹).

Pour démontrer notre proposition sur les points anguleux de première sorte, nous n'avons qu'à appliquer la formule (7) au point de rencontre (r_0, φ_0) des deux courbes maxima pour $r < r_0$ et $r > r_0$.

10. La conclusion à tirer de notre théorème général est que la fonction $M(r)$ est loin de se comporter d'une façon simple; ce sont surtout les points anguleux qui y introduisent une complication très sensible. Il m'a donc paru intéressant de vérifier sur un exemple que ces discontinuités que notre méthode de démonstration a fait prévoir se présentent bien en réalité. L'exemple le plus simple d'une courbe $M(r)$ composée de plusieurs arcs de courbes analytiques différentes est fourni par des polynomes du second degré (²).

(¹) *Voir* aussi le théorème cité à la fin de ce travail (nº 11), qui assure la même propriété à la dérivée seconde $\frac{d^2M}{dr^2}$.

(²) M. Ed. Landau a bien voulu me faire savoir que, dès 1904, il avait trouvé et donné dans ses cours l'exemple de la fonction

$$f(z) = 1 + z - z^2,$$

qui rentre dans notre catégorie.

Considérons d'abord une fonction linéaire $f(z) = z + \beta$. Il est évident que cette fonction prend son module maximum une seule fois sur chaque cercle ayant l'origine comme centre; la fonction $M(r)$ a la forme très simple

$$M(r) = r + |\beta|.$$

Mais passons aux polynomes du second degré. Ici, des circonstances très variées peuvent se présenter. Pour les étudier, je n'ai pas pu me servir des procédés éliminatoires directs qui conduisent à des calculs à peu près inextricables, mais j'ai dû recourir à des considérations géométriques.

Je désignerai par e_1, e_2 les deux racines du polynome du second degré, de sorte que nous aurons

$$f(z) = z^2 + \alpha z + \beta = (z - e_1)(z - e_2).$$

Nous marquerons dans le plan les deux points e_1 et e_2 et nous poserons

$$|z - e_1| = r_1, \qquad |z - e_2| = r_2,$$

donc

$$G(r, \varphi) = r_1 r_2, \qquad M(r) = \max(r_1 r_2) \qquad \text{pour } |z| = r.$$

La fonction $M(r)$ est particulièrement simple, si e_1, e_2 sont des nombres complexes conjugués (et dans les cas qui se réduisent à celui-ci par une rotation du plan). On a alors évidemment

$$M(r) = r^2 + |\alpha| r + |\beta|.$$

Écartons ce cas-là et de même, pour un moment, le cas de valeurs e_1, e_2 réelles (et les cas réductibles à ceux-ci). Pour toutes les autres positions des points e_1, e_2 j'ai pu démontrer, par une voie un peu détournée, que la fonction $M(r)$ est partout algébroïde et sans points anguleux, mais le calcul effectif de la fonction serait, probablement, assez long.

Le cas le plus intéressant est celui de valeurs e_1, e_2 réelles et de signes contraires; si e_1, e_2 ont le même signe, on a évidemment le même résultat que dans le cas de valeurs complexes conjuguées.

Soient donc e_1, e_2 deux points situés sur l'axe des x. Envisageons les courbes $r_1 r_2 =$ const. Ce sont des courbes de Cassini ayant les points e_1, e_2 pour foyers. Une telle courbe a, au plus, quatre points réels communs avec un cercle [1]. Soit donc $M(r) = \alpha^2$ le maximum du module sur le cercle (r). Ce cercle est alors renfermé tout entier à l'intérieur de la courbe $r_1 r_2 = \alpha^2$ et il a au moins un point commun avec elle. En ces points communs, il doit y avoir contact entre la courbe et le cercle. Nous avons donc deux cas à distinguer :

1° Le cercle (r) a un seul point de contact avec la courbe (α) (cercle simplement tangent). Pour des raisons de symétrie, ce point est situé sur l'axe des x.

2° Le cercle a deux points de contact avec la courbe (cercle doublement tangent). Les points de contact sont symétriques par rapport à l'axe des x.

Nous chercherons toutes les valeurs de r qui correspondent à des cercles doublement tangents.

L'équation d'une courbe de Cassini ayant les foyers e_1, e_2 est

$$(a) \qquad [(x-e_1)^2+y^2][(x-e_2)^2+y^2] = \alpha^4.$$

Nous supposerons, d'après ce que nous venons de remarquer, que e_1, e_2 sont de signe contraire, et en particulier $e_1 = |e_1|$, $e_2 = -|e_2|$; nous supposerons en outre $e_1 \neq -e_2$, le cas $e_1 = -e_2$ étant un cas limite particulièrement simple [2]. Pour fixer les idées, nous choisirons $e_1 + e_2 < 0$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Éliminant y entre (a) et l'équation du cercle

$$x^2+y^2 = r^2,$$

nous trouvons l'équation en x

$$(b) \qquad \begin{aligned} &(-2e_1x+e_1^2+r^2)(-2e_2x+e_2^2+r^2) = \alpha^4,\\ &4e_1e_2x^2-2(e_1+e_2)(e_1e_2+r^2)x+(e_1^2+r^2)(e_2^2+r^2) = \alpha^4. \end{aligned}$$

Pour qu'il y ait deux points de contact, il faut que cette équation ait une racine double. La condition est, tous calculs faits,

$$(c) \qquad \alpha^4 = -\frac{(e_1-e_2)^2}{4e_1e_2}(r^2-e_1e_2)^2 = \frac{(e_1-e_2)^2}{4|e_1e_2|}(r^2-e_1e_2)^2,$$

---

(1) Parce que les deux points infinis du cercle sont des points doubles de la courbe de Cassini.

(2) *Voir* à la fin de ce numéro.

et l'abscisse commune des points de contact est

$$(d) \qquad x_t = \frac{1}{4}\,\frac{(e_1+e_2)(e_1e_2+r^2)}{e_1e_2}.$$

Il semble donc qu'à chaque cercle r corresponde une courbe (α) à contact double, α étant donné par la formule (c). Mais ces points de contact ne sont pas tous réels. En effet, substituant la valeur de x_t dans l'équation du cercle, on trouve pour l'ordonnée la valeur

$$(e) \qquad y_t^2 = r^2 - \frac{1}{16}\,\frac{(e_1+e_2)^2(e_1e_2+r^2)^2}{e_1^2e_2^2},$$

valeur évidemment négative pour les grandes et les petites valeurs de r. Pour présenter nettement les choses, éliminons r entre (d) et (e); nous trouverons *la courbe formée par les points de contact*. Un calcul facile nous donne

$$(f) \qquad x_t^2 + y_t^2 = \frac{4e_1e_2}{e_1+e_2}x_t - e_1e_2.$$

C'est l'équation d'un cercle ayant le point

$$X = \frac{2e_1e_2}{e_1+e_2}, \qquad Y = 0$$

comme centre et comme rayon la longueur

$$\sqrt{|e_1e_2|}\left|\frac{e_1-e_2}{e_1+e_2}\right|.$$

Le cercle coupe l'axe des x aux deux points

$$-r_1 = \left(\sqrt{|e_1|}-\sqrt{|e_2|}\right)^2\frac{\sqrt{|e_1e_2|}}{e_1+e_2},$$

$$r_2 = -\left(\sqrt{|e_1|}+\sqrt{|e_2|}\right)^2\frac{\sqrt{e_1e_2}}{e_1+e_2}$$

(les racines étant affectées du signe $+$); d'après nos hypothèses sur les valeurs e_1, e_2, le premier point est situé à gauche, le second à droite de l'origine.

Donc, il y a contact double entre les cercles et les courbes de Cassini correspondantes pour les valeurs de r entre

$$r_1 = \left(\sqrt{|e_1|}-\sqrt{|e_2|}\right)^2\frac{\sqrt{|e_1e_2|}}{|e_1+e_2|} \quad \text{et} \quad r_2 = \left(\sqrt{|e_1|}+\sqrt{|e_2|}\right)^2\frac{\sqrt{|e_1e_2|}}{|e_1+e_2|}.$$

Les cercles sont d'ailleurs contenus dans l'intérieur des courbes tangentes. On s'en assure en remarquant que, pour tous les points du cercle (r), on a l'équation analogue à (b)

$$(-2e_1x+e_1^2+r^2)(-2e_2x+e_2^2+r^2)=r_1^2r_2^2.$$

Mais le premier membre a son maximum pour $x=x_t$.

Donc, pour $r_1 \leqq r \leqq r_2$, il y a deux courbes maxima, à savoir les demi-cercles supérieur et inférieur (f). La fonction $\mathrm{M}(r)$ *est donnée par*

$$(c') \qquad \mathrm{M}(r)=\frac{|e_1|+|e_2|}{2\sqrt{|e_1e_2|}}(r^2+|e_1e_2|) \qquad r_1 \leqq r \leqq r_2.$$

Son image géométrique est un arc de parabole.

Considérons maintenant les valeurs $r \leqq r_1$ et $r \geqq r_2$. Nous avons vu que pour ces valeurs il n'y a que des cercles simplement tangents. Les courbes maxima sont donc des segments de l'axe des x (*voir* p. 227, 1°). Je dis qu'avec nos hypothèses sur e_1, e_2, la courbe maxima entre $r=0$ et $r=r_1$ est le segment négatif entre $x=0$ et $x=-r_1$; pour $r \geqq r_2$, au contraire, c'est le segment positif à partir de $x=+r_2$.

La démonstration étant très simple, je ne l'indiquerai brièvement que pour $r<r_1$. Il faut s'assurer que la quantité

$$r_1r_2=\sqrt{[(x-e_1)^2+y^2][(x-e_2)^2+y^2]}$$

est plus grande pour $x=-r, y=0$ que pour $x=+r, y=0$ $(r \leqq r_1)$. Or

$$\text{pour } x=-r, y=0: \quad (r_1r_2)_-=\big|r+e_1\big|\big|r-|e_2|\big|,$$

$$\text{pour } x=+r, y=0: \quad (r_1r_2)_+=\big|r-e_1\big|\big|r+|e_2|\big|.$$

La formule pour r_1 montre que, d'après nos hypothèses sur e_1, e_2,

$$r \leqq r_1=\frac{(\sqrt{|e_2|}-\sqrt{|e_1|})^2}{|e_2|-|e_1|}\sqrt{|e_1e_2|}=\frac{\sqrt{|e_2|}-\sqrt{|e_1|}}{\sqrt{|e_2|}+\sqrt{|e_1|}}\sqrt{|e_1e_2|}<\sqrt{|e_1e_2|}<|e_2|.$$

Donc

$$(r_1r_2)_-=(|e_1|+r)(|e_2|-r),$$

tandis qu'il y a deux hypothèses admissibles sur $(r_1r_2)_+$:

$$1^\circ \qquad (r_1r_2)_+=(|e_1|-r)(|e_2|+r),$$

$$2^\circ \qquad (r_1r_2)_+=(r-|e_1|)(r+|e_2|).$$

Avec la première hypothèse, l'inégalité cherchée

$$(r_1 r_2)_+ < (r_1 r_2)$$

est évidente; avec la seconde, on a

$$(r_1 r_2)_- - (r_1 r_2)_+ = 2\left\{|e_1 e_2| - r^2\right\} \geqq 2\left\{|e_1 e_2| - r_1^2\right\} > 0,$$

ce qui prouve encore notre inégalité.

Nous résumerons, comme il suit, nos résultats :

1° *Les courbes maxima*. Entre $r = 0$ et $r = r_1$

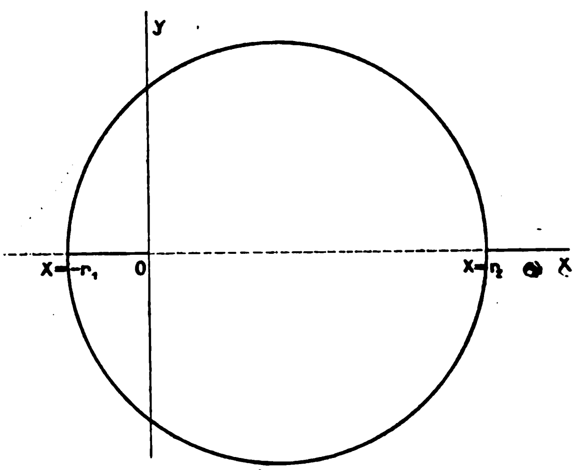
$$r_1 = \frac{\sqrt{|e_2|} - \sqrt{|e_1|}}{\sqrt{|e_2|} + \sqrt{|e_1|}} \sqrt{|e_1 e_2|}$$

il y a une seule courbe maxima : le segment $(0 \ldots - r_1)$ de l'axe des x; entre r_1 et r_2

$$r_2 = \frac{\sqrt{|e_2|} + \sqrt{|e_1|}}{\sqrt{|e_2|} - \sqrt{|e_1|}} \sqrt{|e_1 e_2|}$$

il y a deux courbes maxima : les deux demi-cercles (f); pour $r > r_2$

Fig. 1.



il y a encore une seule courbe maxima : le segment $(+ r_2 \ldots + \infty)$ de l'axe des x (*fig.* 1).

2° *La fonction* $M(r)$. Elle se compose de trois arcs différents :

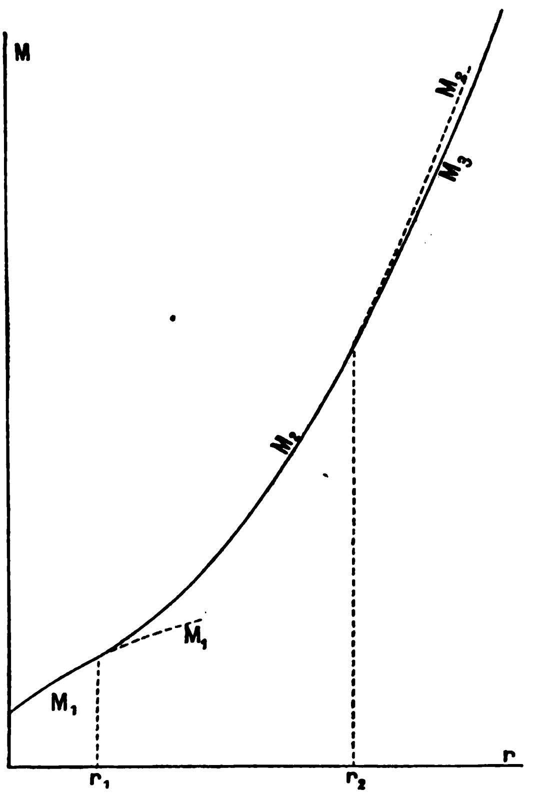
$$\text{pour } 0 \leqq r \leqq r_1 \;:\; M_1(r) = |e_1 e_2| + \{|e_2| - |e_1|\} r - r^2;$$

$$\text{pour } r_1 \leqq r \leqq r_2 \;:\; M_2(r) = \frac{|e_1| + |e_2|}{2\sqrt{|e_1 e_2|}}(r^2 + |e_1 e_2|);$$

$$\text{pour } r > r_2 \;:\; M_3(r) = r^2 + \{|e_2| - |e_1|\} r - |e_1 e_2|.$$

Ce sont trois arcs de paraboles (*fig.* 2).

Fig. 2.



Les points r_1 et r_2 sont les points anguleux de $M(r)$ ([1]).

([1]) Ils sont de la *première* sorte. On vérifie facilement la continuité des tangentes. Il serait peut-être intéressant de se procurer aussi un exemple de points anguleux de la *deuxième* sorte. Je crois qu'on en trouvera parmi les polynomes du troisième degré.

Remarquons, pour finir, que le cas $e_2 = -e_1$ est un cas limite dégénéré : on a alors $r_1 = 0$, le cercle (f) dégénère dans l'axe des y, et

$$M(r) = r^2 + e^2 \qquad (e = e_1 = -e_2).$$

Remarquons encore que l'axe des x, qui n'est courbe maxima que sur une partie de son étendue, est partout une courbe $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$.

11. Il est clair que les propriétés que nous venons de démontrer sur la fonction $M(r)$ sont bien loin de la caractériser complètement. Peut-on indiquer des conditions *suffisantes* simples pour qu'à une fonction $M(r)$ on puisse faire correspondre une fonction entière $f(z)$ telle que

$$M(r) = \max |f(z)| \qquad \text{pour } |z| = r?$$

C'est une question très importante, mais qui ne paraît pas près d'être résolue. En attendant, une autre condition nécessaire a été trouvée par trois voies toutes différentes par M. Hadamard (¹), M. Faber (²) et moi-même (³). Nous avons démontré, en effet, que l'expression

$$\frac{d \log M}{d \log r} = \frac{r}{M} \frac{dM}{dr}$$

est toujours croissante. Il s'ensuit que, pour les fonctions entières non linéaires, la dérivée $\frac{dM}{dr}$ est croissante à partir d'une certaine valeur de r, car pour toutes ces fonctions $\frac{r}{M}$ diminue si r va en augmentant à partir d'une certaine valeur (⁴).

Comme je ne connaissais pas le travail antérieur de M. Hadamard lors de la publication de mon Mémoire, je profite de l'occasion pour faire cette rectification bibliographique.

(¹) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIV, 1896. M. Hadamard n'a pas publié sa démonstration, il a bien voulu me l'indiquer par écrit. Sa proposition a été reproduite par M. d'Adhémar dans sa rédaction des *Leçons sur les séries à termes positifs* de M. Borel. Là encore, la démonstration manque, car le raisonnement ajouté par M. d'Adhémar ne porte pas sur la question.

(²) *Math. Ann.*, t. LXIII, 1907.

(³) *Jahresber. d. deutschen Math.-Ver.*, t. XVI, 1907.

(⁴) *Voir* aussi n° 9, la note en bas de la page 225.

SUR LES COURBES GAUCHES UNICURSALES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. CH. BIOCHE.

On sait que les courbes gauches du quatrième ordre appartiennent à deux familles distinctes :

1° Les *biquadratiques,* par chacune desquelles il passe une infinité de surfaces du second ordre;

2° Les *quartiques de Steiner,* par chacune desquelles il ne passe qu'une surface du second ordre, dont un système de génératrices est constitué par les sécantes triples de la courbe.

Les quartiques de Steiner sont unicursales; leur classe est 6, 5 ou 4.

Les biquadratiques ne sont unicursales que si elles ont un point double; si celui-ci est un point double ordinaire, la courbe est de sixième classe; si c'est un point de rebroussement, la courbe est de quatrième classe (¹).

J'ai été conduit à écrire ce Mémoire à la suite de cette remarque : si d'un point M d'une courbe de sixième classe on mène les trois plans osculateurs qui ont leurs points de contact distincts de M, ces points sont dans un plan Π passant par M. J'ai obtenu des résultats curieux en cherchant l'enveloppe de ce plan Π et, pour pouvoir effectuer simplement les calculs, j'ai dû chercher des formes réduites des équations générales des courbes gauches unicursales du quatrième ordre. Enfin, en cherchant des exemples, j'ai obtenu des formes assez générales d'équations donnant lieu à des remarques intéressantes.

I. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

1. Une courbe gauche unicursale du quatrième ordre peut tou-

(¹) J'ai déjà étudié les courbes de quatrième ordre et de quatrième classe (*Bull. Soc. Math.*, t. XXXIII, 1905, p. 18).

jours se présenter par les équations

$$\begin{aligned} X &= a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4, \\ Y &= b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4, \\ Z &= c_0\lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4, \\ T &= d_0\lambda^4 + d_1\lambda^3 + d_2\lambda^2 + d_3\lambda + d_4, \end{aligned}$$

les polynomes en λ étant premiers entre eux dans leur ensemble.

Les λ des points d'intersection de la courbe avec un plan quelconque sont liés par une relation qui doit être du premier degré par rapport à chacun de ces λ pris isolément, puisque, trois d'entre eux étant donnés arbitrairement, on doit avoir une équation du premier degré pour déterminer le quatrième. Il est facile de voir que, si l'on considère le tableau des coefficients

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{matrix}$$

si l'on désigne par Δ_i le déterminant déduit de ce tableau en supprimant la colonne d'indice i, et par S_k la somme des produits k à k des quatre λ des points d'intersection de la courbe avec un plan, la relation en question peut s'écrire

$$(1) \qquad \Delta_0 + \Delta_1 S_1 + \Delta_2 S_2 + \Delta_3 S_3 + \Delta_4 S_4 = 0.$$

2. Soit λ le paramètre correspondant au point de contact d'un plan osculateur et λ' le paramètre correspondant au point où ce plan coupe la courbe, la relation précédente montre que λ et λ' sont liés par la relation

$$(2) \quad \Delta_0 + 3\Delta_1\lambda^2 + 3\Delta_2\lambda + \Delta_3\lambda^3 + \lambda'(\Delta_1 + 3\Delta_2\lambda + 3\Delta_3\lambda^2 + \Delta_4\lambda^3) = 0;$$

on en déduit immédiatement que, si l'on se donne λ', on a trois valeurs pour λ. Autrement dit, d'un point de la courbe on peut mener trois plans osculateurs autres que celui qui a son point de contact au point correspondant à λ'; ce dernier comptant pour 3, on voit que la courbe est ordinairement de la classe $3 + 3 = 6$. Le nombre qui mesure la classe s'abaisse, si l'équation (2) donne pour λ des racines indépendantes de λ'. On peut reconnaître que les points correspondant à ces valeurs de λ sont des points d'*inflexion linéaire,* c'est-à-dire des points tels que la tangente y coupe la courbe en trois points confondus, de sorte que tout plan passant par cette tangente y a également trois points d'intersection confondus; la présence d'un de ces points abaisse la classe d'une unité [1].

Il peut arriver qu'un plan coupe la courbe en des points qui correspondent à une seule valeur de λ; les λ des points en question sont donnés par l'équation

$$\Delta_0 + 4\Delta_1\lambda + 6\Delta_2\lambda^2 + 4\Delta_3\lambda^3 + \Delta_4\lambda^4 = 0; \tag{3}$$

le plan est alors dit *stationnaire*. Les plans stationnaires peuvent être, on le constate facilement sur des exemples, soit réels, soit imaginaires, soit les uns réels et les autres imaginaires.

3. En comparant les équations (2) et (3), on voit facilement que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (2) ait une racine en λ indépendante de λ' (racine que j'appellerai racine *singulière*), c'est-à-dire pour que le coefficient de λ' et le terme indépendant admettent un facteur commun, est que l'équation (3) possède une racine multiple. En examinant les divers cas qui peuvent se présenter on reconnaît que :

1° Si l'équation (3) a *une racine double,* l'équation (2) a une racine singulière; la courbe correspondante est une *quartique à sécantes triples* ayant un point d'inflexion linéaire, qui correspond à la racine singulière. La courbe est de *cinquième classe*.

2° Si l'équation (3) a *deux racines doubles,* l'équation (2) a deux racines singulières distinctes; la courbe correspondante est une *quartique à sécantes triples* ayant deux points d'inflexion linéaire qui correspondent aux racines singulières. La courbe est de *quatrième classe*. Elle a comme tangentes des droites faisant partie d'un complexe linéaire. Les courbes de cette nature sont les lignes asymptotiques des surfaces réglées du troisième ordre à directrices distinctes.

3° Si l'équation (3) a *une racine triple,* l'équation (2) a une

---

[1] Voir, *Bull. Soc. Math.*, t. IX, 1880-1881, un Mémoire de M. Genty.

racine singulière double; la courbe correspondante est une *biquadratique ayant un point de rebroussement* donné par la racine singulière. La courbe est de *quatrième classe.*

L'équation (3) ne peut pas avoir de racine quadruple, ou, autrement dit, le coefficient de λ' et le terme indépendant de l'équation (2) ne peuvent avoir leurs coefficients proportionnels lorsque les polynomes en λ qui donnent les expressions des coordonnées d'un point de la courbe considérée sont premiers entre eux dans leur ensemble.

4. Considérons une quartique gauche unicursale de sixième classe. Si l'on fait la perspective sur un plan quelconque en prenant comme point de vue un point M de la courbe, on obtient comme perspective une cubique plane unicursale. Les tangentes d'inflexion de cette cubique sont les traces sur le plan du tableau des plans osculateurs menés par M; comme on sait que les points d'inflexion de la cubique sont en ligne droite, on en déduit que *les points de contact des plans osculateurs menés par un point* M *de la courbe sont dans un plan passant par* M. Pour abréger, je désignerai ce plan par Π.

A chaque point M correspond un plan Π. Si l'on forme l'équation de ce plan, on reconnaît facilement que les coefficients de celle-ci sont du deuxième degré par rapport au paramètre λ' du point M. On en déduit que le plan enveloppe un cône du second degré, par suite passe constamment par un point fixe que je désignerai par ω. Je crois inutile de montrer l'existence du cône en question au moyen des équations générales, et je vais, avant de traiter les questions relatives au plan Π, montrer comment on peut simplifier les équations des courbes à étudier, par un choix convenable du tétraèdre de référence et des transformations homographiques simples.

II. — Équations réduites.

5. Prenons pour faces du tétraèdre de référence deux plans osculateurs et deux plans qui passent chacun par la corde qui

joint les deux points et par la tangente en l'un d'eux; si l'un des points correspond à la valeur zéro du paramètre λ et l'autre à la valeur infinie, hypothèse qu'il est facile de réaliser, les équations seront

$$X = a\lambda^4 + a'\lambda^3, \qquad Y = b\lambda^3 + b'\lambda^2, \qquad Z = c\lambda^2 + c'\lambda, \qquad T = d\lambda + d',$$

$X = 0$, $T = 0$ étant les plans osculateurs; on trouve facilement alors pour les coefficients des équations (1), (2) et (3)

$$\Delta_0 = a'b'c'd', \quad \Delta_1 = ab'c'd', \quad \Delta_2 = abc'd', \quad \Delta_3 = abcd', \quad \Delta_4 = abcd.$$

On peut distinguer les biquadratiques des quartiques à sécantes triples; il suffit de remarquer qu'une de ces dernières n'a jamais de point double, tandis qu'une biquadratique unicursale en a toujours un. Or, pour qu'il y ait un point double, il faut et il suffit que l'on puisse trouver un couple de valeurs de λ et μ, de façon que

$$\frac{a\lambda^4 + a'\lambda^3}{a\mu^4 + a'\mu^3} = \frac{b\lambda^3 + b'\lambda^2}{b\mu^3 + b'\mu^2} = \frac{c\lambda^2 + c'\lambda}{c\mu^2 + c'\mu} = \frac{d\lambda + d'}{d\mu + d'};$$

ces équations débarrassées de la solution $\lambda = \mu$ donnent le système

$$\begin{aligned} ab\lambda\mu + ab'(\lambda + \mu) + a'b' &= 0, \\ bc\lambda\mu + bc'(\lambda + \mu) + b'c' &= 0, \\ cd\lambda\mu + cd'(\lambda + \mu) + c'd' &= 0; \end{aligned}$$

on en déduit immédiatement que la condition cherchée s'exprime par

$$\begin{vmatrix} ab & ab' & a'b' \\ bc & bc' & b'c' \\ cd & cd' & c'd' \end{vmatrix} = 0.$$

6. Si l'on prend comme sommets du tétraèdre de référence situés sur la courbe les points de contact de deux plans stationnaires on a

$$a' = 0, \qquad d = 0,$$

et, comme a et d' doivent être alors différents de zéro pour que l'on ait une courbe gauche du quatrième ordre, on peut, par une transformation consistant à diviser X et T par a et d' respectivement, ramener les équations à la forme

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{b\lambda^3 + b'\lambda^2} = \frac{Z}{c\lambda^2 + c'\lambda} = \frac{T}{1}.$$

Pour voir quelle est la classe d'une courbe représentée par ces équations, on peut considérer, soit l'équation du plan osculateur qui est

$$\begin{gathered}(3bc\lambda^2 + 3bc'\lambda + b'c')X - 2(4c\lambda + 3c')\lambda^2 Y \\ + 2(3b\lambda + 4b')\lambda^3 z - (bc\lambda^2 + 3bc'\lambda + 3b'c')\lambda^4 = 0,\end{gathered}$$

soit l'équation qui donne les points stationnaires; cette dernière a une racine infinie, une racine nulle et les deux autres sont données par

$$2bc\lambda^2 + 3bc'\lambda + 2bc' = 0.$$

Il serait facile de faire le tableau des cas qui peuvent se présenter. Pour obtenir des formes d'équations aussi simples que possible, je ferai remarquer que, si l'on écarte le cas des courbes de quatrième classe que j'ai déjà étudiées dans un autre Mémoire, on peut toujours supposer b, b', c, c' différents de zéro. En effet, si $b = 0$ ou $c' = 0$, l'équation qui donne les points de contact des plans stationnaires a une racine triple infinie ou nulle; la courbe est une biquadratique de quatrième classe.

Si $c = 0$ ou $b' = 0$, l'équation qui donne les plans stationnaires a une racine double infinie ou nulle; on a alors une courbe de cinquième classe, si une seule des conditions est vérifiée, ou une quartique de quatrième classe à sécantes triples, si les deux conditions sont vérifiées simultanément.

Dans le cas où la courbe est de cinquième classe, on a vu que celle-ci avait deux plans stationnaires ordinaires et un plan correspondant à une tangente d'inflexion; c'est celui-ci qui correspond à la racine double. Comme on peut toujours prendre pour sommets du tétraèdre de référence les points de contact des plans stationnaires ordinaires, on peut toujours faire en sorte que l'équation qui donne ceux-ci n'ait pour racines infinie ou nulle que des racines simples.

Si donc on suppose $bb'cc' \neq 0$ on peut, par une transformation analogue à celle que j'ai employée au début de ce numéro, ramener les équations à la forme

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3 + \beta\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda^2 + \gamma\lambda} = \frac{T}{1},$$

β et γ étant tous deux différents de zéro.

7. Si maintenant on remplace λ par $\beta\lambda$, X par $\beta^4 X$, Y par $\beta^3 Y$, Z par $\beta^2 Z$ et si l'on pose $\gamma = h\beta$, on obtient les équations

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3 + \lambda^2} = \frac{Z}{\lambda^2 + h\lambda} = \frac{T}{1},$$

et, d'après ce qui précède, toute courbe du quatrième ordre, de sixième ou de cinquième classe est transformée homographique d'une des courbes représentées par ces équations. L'équation qui donne les points de contact des plans stationnaires est alors

$$2\lambda^2 + 3h\lambda + 2h = 0;$$

si $h \neq 0$, l'équation ne peut avoir de racine double que si

$$9h - 16 = 0;$$

dans ce cas la courbe est de cinquième classe.

La courbe est en général une quartique à sécantes triples; pour que ce soit une biquadratique, il faut et il suffit que $h = 2$. La courbe est alors sur les quadriques

$$Y^2 - ZX - X = 0,$$
$$Z^2 - X - 4Y = 0.$$

Les valeurs de λ qui correspondent au point double sont données par

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

8. On peut maintenant faire l'énumération complète des types de courbes qui, au moyen de transformations homographiques, donnent toutes les courbes gauches unicursales du quatrième ordre :

Biquadratique à rebroussement,

$$X = \lambda^4, \qquad Y = \lambda^3, \qquad Z = \lambda;$$

quartique de quatrième classe à sécantes triples,

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^3, \quad Z = \lambda;$$

quartique de cinquième classe à sécantes triples,

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \quad Z = \lambda^2 + \frac{16}{9}\lambda;$$

biquadratique à point double ordinaire,

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \quad Z = \lambda^2 + 2\lambda;$$

quartique de sixième classe à sécantes triples,

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \quad Z = \lambda^2 + h\lambda,$$

h étant, dans ce dernier, différent de 0, 2 et $\frac{16}{9}$.

On peut remarquer que les équations des quatre premiers types ne contiennent plus de constante arbitraire; on en conclut immédiatement que toutes les courbes correspondant à l'un de ces types se déduisent homographiquement de l'une d'elles.

On peut remarquer aussi que les équations

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \quad Z = \lambda^2 + h\lambda$$

donneraient une biquadratique à rebroussement pour $h = 0$. De sorte que ces équations peuvent être considérées, à une transformation homographique près, comme représentant toute courbe gauche unicursale du quatrième ordre, sauf les quartiques de Steiner de quatrième classe, qui se distinguent des autres courbes du quatrième ordre par ce fait que leurs tangentes appartiennent à un complexe linéaire.

III. — Les plans stationnaires.

9. Les λ des points de contact des plans stationnaires étant donnés par l'équation

$$\Delta_0 + 4\Delta_1\lambda + 6\Delta_2\lambda^2 + 4\Delta_3\lambda^3 + \Delta_4\lambda^4 = 0,$$

la condition pour que ces points soient dans un même plan s'exprime par

$$\Delta_0\Delta_4 - 4\Delta_1\Delta_3 + 6\Delta_2^2 - 4\Delta_3\Delta_1 + \Delta_4\Delta_0 = 0.$$

Si l'on prend les équations sous la forme réduite donnée au n° 7, la condition précédente donne

$$h = \frac{4}{3}.$$

Donc les courbes dont les points de contact des plans stationnaires sont dans un même plan sont transformées homographiques de

$$X = \lambda^4, \qquad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \qquad Z = \lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda.$$

On peut constater que les points en question sont dans le plan

$$Y + 3Z = 0$$

et que deux d'entre eux sont imaginaires.

10. Dans le cas général, il existe une relation simple entre les tangentes à la courbe aux points stationnaires. *Ces tangentes sont sur une même quadrique.*

En effet l'équation générale des quadriques passant par les deux tangentes qui sont les arêtes du tétraèdre de référence est

$$Z(AX + BY) + (CX + DY) = 0;$$

si l'on forme l'équation qui donne les λ des points d'intersection de la quadrique avec la courbe, on obtient

$$A\lambda^6 + (B + Ah)\lambda^5 + (B + Bh + C)\lambda^4 + (Bh + D)\lambda^3 + D\lambda^2 = 0;$$

or le premier membre de cette équation est le carré du polynome

$$2\lambda^3 + 3h\lambda^2 + 2h\lambda,$$

qui égalé à zéro donne les λ des plans stationnaires, si l'on a

$$A = 4, \qquad B = 8h, \qquad C = h^2, \qquad D = 4h^2.$$

Donc la quadrique

$$4XZ + 8hYZ + h^2X + 4h^2Y = 0,$$

qui contient deux tangentes, est coupée par chacune des autres en deux points confondus; de plus, les coefficients directeurs des tangentes en ces points étant

$$4\lambda^3, \qquad 3\lambda^2+2\lambda, \qquad 2\lambda+h,$$

ces droites sont parallèles au plan directeur

$$X+2hY=0$$

de la quadrique puisque la condition de parallélisme s'exprime par

$$4\lambda^3+6h\lambda^2+4h\lambda=0,$$

équation vérifiée par les λ des points de contact. Donc les tangentes considérées ont trois points communs avec la quadrique.

11. Cette quadrique se décompose en deux plans si $h=2$, c'est-à-dire si la courbe est une biquadratique; ces deux plans

$$X+4Y=0, \qquad Z+1=0$$

sont des plans bitangents contenant chacun un couple de tangentes aux points de contact des plans stationnaires.

Quand la quadrique ne se décompose pas, les plans

$$X+4Y=0, \qquad 4Z+h^2=0,$$

qui sont tangents à cette surface aux sommets du tétraèdre de référence où la courbe a des plans stationnaires, sont encore des plans bitangents. Ces points étant deux quelconques des quatre points de contact des plans stationnaires, la propriété appartient à tous ces points. Donc *les plans tangents à la quadrique des tangentes aux points de contact des plans stationnaires sont des plans bitangents à la courbe.*

12. Les plans stationnaires forment un tétraèdre; la raison de ce fait est qu'un plan stationnaire comptant comme deux plans osculateurs confondus, si les plans stationnaires avaient un point commun de ce point, on pourrait mener huit plans osculateurs à la courbe, ce qui est impossible. C'est pour une raison analogue que les trois tangentes d'inflexion à une cubique plane à point double ne peuvent être concourantes.

On peut donc prendre les plans stationnaires comme faces du tétraèdre de référence; les équations de la courbe peuvent alors s'écrire

$$X = a(\lambda + \alpha)^4, \qquad Y = b(\lambda + \beta)^4, \qquad Z = c(\lambda + \gamma)^4, \qquad T = d(\lambda + \delta)^4,$$

et le plan osculateur a pour équation

$$\begin{vmatrix} \frac{X}{a} & \frac{Y}{b} & \frac{Z}{c} & \frac{T}{d} \\ (\lambda + \alpha)^2 & (\lambda + \beta)^2 & (\lambda + \gamma)^2 & (\lambda + \delta)^2 \\ \alpha(\lambda + \alpha)^2 & \beta(\lambda + \beta)^2 & \gamma(\beta + \gamma)^2 & \delta(\lambda + \delta)^2 \\ \alpha^2(\lambda + \alpha)^2 & \beta^2(\lambda + \beta)^2 & \gamma^2(\lambda + \gamma)^2 & \delta^2(\lambda + \delta)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit que cette équation est bien du sixième degré en λ, autrement dit, qu'une courbe ayant quatre plans stationnaires distincts est de sixième classe. Si l'on forme la condition pour que les quatre points de contact des plans stationnaires soient dans un même plan, on voit que les déterminants Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 ont en facteur un déterminant de Vandermonde, et il reste

$$12\alpha\beta\gamma\delta - 3\Sigma\alpha\Sigma\alpha\beta\gamma + (\Sigma\alpha\beta)^2 = 0;$$

l'équation du deuxième degré, qui donnerait une des quantités α, β, γ, δ si les trois autres étaient données, a ses racines imaginaires, ce qui est d'accord avec le résultat signalé à la fin du n° 9.

IV. — Le plan Π.

13. J'ai déjà fait remarquer que, si d'un point M d'une courbe de sixième classe on mène les plans osculateurs à la courbe, les points de contact de ces plans sont dans un plan passant par M et que j'ai désigné par Π. On peut se proposer de chercher si les points de contact des points osculateurs sont sur une même droite.

Si la courbe est donnée par les équations

$$X = \lambda^4, \qquad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \qquad Z = \lambda^2 + h\lambda,$$

la relation entre les λ des points d'intersection avec un plan est

$$hS_1 + hS_2 + S_3 = 0,$$

S_k désignant la somme des produits k à k des quatre λ. Si trois des points sont en ligne droite et si l'on désigne par σ_1, σ_2, σ_3 la somme de ces λ ou de leurs produits 2 à 2 ou 3 à 3, et par λ' le quatrième λ, la relation précédente s'écrit

$$h(\sigma_1+\lambda')+h(\sigma_2+\sigma_1\lambda')+(\sigma_3+\sigma_2\lambda')=0.$$

Pour que les trois points soient en ligne droite il faut que cette équation ne donne pas pour λ' une valeur déterminée, c'est-à-dire que l'on ait simultanément

$$\begin{aligned} h\sigma_1+h\sigma_2+\sigma_3&=0,\\ h\quad+h\sigma_1+\sigma_2&=0. \end{aligned}$$

Or les λ des points de contact des plans osculateurs menés du point λ' sont donnés par l'équation

$$\lambda^3+3(h+\lambda')\lambda^2+3h(\lambda'+1)\lambda+\lambda' h=0.$$

Si l'on remplace dans les équations de conditions précédentes σ_1, σ_2, σ_3 par leurs expressions déduites de cette dernière équation, on obtient, après réductions simples,

$$\lambda'(3h^2-4h)=0, \qquad 4h-3h^2=0.$$

On en déduit immédiatement, puisque h ne peut être nul, que, pour que les points considérés soient en ligne droite, il faut et il suffit que

$$h=\frac{4}{3},$$

ce qui est la condition pour que les points de contact des plans stationnaires soient dans un plan ; le point d'où l'on mène les plans osculateurs n'intervient pas dans la condition. Donc :

1° *Si les points de contact des plans osculateurs menés d'un point de la courbe sont en ligne droite, il en est toujours de même, quel que soit le point pris sur la courbe ;*

2° *La condition nécessaire et suffisante pour que ce fait se produise est que les points de contact des plans stationnaires soient dans un même plan.*

14. Pour obtenir l'équation du plan Π, je vais écrire que les λ des points d'intersection de ce plan avec la courbe sont λ' et les trois λ correspondant aux plans osculateurs menés par λ'. L'équation d'un plan étant

$$AX + BY + CZ + D = 0,$$

il s'agit d'identifier l'équation

$$A\lambda^4 + B(\lambda^3 + \lambda^2) + C(\lambda^2 + h\lambda) + D = 0,$$

avec l'équation

$$(\lambda - \lambda')[\lambda^3 + 3(\lambda' + h)\lambda^2 + 3h(\lambda' + 1)\lambda + h\lambda'] = 0.$$

On voit immédiatement que l'on peut prendre

$$A = 1, \qquad B = 2\lambda' + 3h, \qquad C = -(3\lambda'^2 + 2\lambda'), \qquad D = -h\lambda'^2,$$

de sorte que l'équation du plan peut s'écrire

$$(X + 3hY) + 2(Y - Z)\lambda' - (3Z + h)\lambda'^2 = 0;$$

on en déduit facilement que *le plan a pour enveloppe le cône*

$$(Y - Z)^2 + (X + 3hY)(3Z + h) = 0,$$

dont le sommet est le point ω

$$X = h^2, \qquad Y = -\frac{h^2}{3}, \qquad Z = -\frac{h}{3}.$$

Pour que le point ω soit sur la courbe, il faut que $h = \frac{9}{16}$; la courbe serait alors de cinquième classe ; d'un point M de la courbe on ne peut mener que deux plans osculateurs, le plan passant par M et par les points de contact passe par le point d'inflexion linéaire, qui est le point ω.

15. *Le cône enveloppe du plan* Π *touche la courbe aux points de contact des plans stationnaires,* car, si l'on remplace X, Y, Z par leurs expressions en fonction de λ dans le premier membre de l'équation du cône, on obtient, après simplifications et réductions,

$$\lambda^2(2\lambda^3 + 3h\lambda + 2\lambda)^2 = 0.$$

Or le premier membre de cette équation est le carré du premier membre de celle qui donne les points stationnaires.

Il est facile de reconnaître que, lorsque les points stationnaires sont dans un même plan, le point ω est le pôle de ce plan par rapport à la quadrique qui contient les quatre tangentes. Les plans qui touchent cette quadrique aux points stationnaires ne sont autres que les plans Π correspondant aux points stationnaires.

V. — Courbes particulières.

16. Les courbes données par les équations

$$\frac{X}{\cos\theta} = \frac{Y}{\sin\theta} = \frac{Z}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{T}{\alpha\cos^2\theta + \beta\sin^2\theta},$$

ou, si l'on pose $\tang\frac{\theta}{2} = \lambda$,

$$\frac{X}{1-\lambda^4} = \frac{Y}{2\lambda(1+\lambda^2)} = \frac{Z}{2\lambda(1-\lambda^2)} = \frac{T}{\alpha(1-\lambda^2)^2 + 4\beta\lambda^2},$$

sont des courbes unicursales du quatrième ordre. Les trois arêtes du tétraèdre de référence qui passerait par le point $X = Y = Z = 0$ sont des cordes de la courbe et le plan $T = 0$ est celui qui passe par les conjugués du point de concours de ces cordes par rapport aux segments déterminés par la courbe.

L'équation qui détermine les points de contact des plans stationnaires est

$$(\alpha - 2\beta)\lambda^4 + 6\alpha\lambda^2 + (\alpha - 2\beta) = 0.$$

La discussion de cette équation montre qu'elle a ses racines distinctes, sauf dans les cas suivants, où elle a deux racines doubles :

$\alpha = 2\beta$,	racine nulle et racine infinie ;
$\beta = 2\alpha$,	racines ± 1 ;
$\alpha + \beta = 0$,	racines $\pm i$.

Dans ces cas, on a des quartiques de Steiner de quatrième classe. Dans les autres cas, on a des courbes de quatrième ordre et de sixième classe [1].

[1] Les lignes de striction des hyperboloïdes à une nappe sont des transformées homographiques de courbes appartenant à la catégorie considérée. Ce sont des quartiques de Steiner; elles sont en général de sixième classe. Le cas où elles sont de quatrième classe correspond, comme me l'a fait remarquer M. Blutel, au cas des hyperboloïdes dont les plans cycliques sont rectangulaires.

17. On peut distinguer facilement les cas dans lesquels les courbes données par les équations précédentes sont des biquadratiques. Pour une biquadratique il passe par chaque point de l'espace deux cordes proprement dites et la droite qui passe par le point double. Le point $X = Y = Z = o$ étant sur chaque droite le conjugué du point situé dans le plan $T = o$, pour que la courbe ait un point double, il faut que ce point soit dans le plan $T = o$.

On voit ainsi que l'on a des biquadratiques dans les cas suivants :

1° $\alpha = o$; la courbe est l'intersection des quadriques

$$\beta^2(Y^2 - Z^2) = T^2, \qquad \beta YZ = TX;$$

2° $\beta = o$; la courbe est l'intersection des quadriques

$$\alpha^2(X^2 - Z^2) = T^2, \qquad \alpha X^2 = TX;$$

3° $\alpha = \beta$; la courbe est l'intersection des quadriques

$$\alpha^2(X^2 + Y^2) = T^2, \qquad \alpha XY = TZ.$$

Dans tous les cas, la courbe est sur la quadrique

$$\alpha^2 X^2 + \beta^2 Y^2 - (\alpha - \beta)^2 Z^2 = T^2.$$

18. Si l'on rejette à l'infini l'une des faces du tétraèdre de référence, les trois autres faces étant rectangulaires, on obtient une courbe qui admet pour axes de symétrie les trois axes de coordonnées, sans avoir de centre de symétrie. On obtient les points symétriques d'un point correspondant à une valeur θ de l'angle qui figure dans les premières équations en remplaçant θ par $-\theta$, $\pi - \theta$, $\pi + \theta$.

On a ainsi des courbes transformables de quatre façons différentes, en courbes ayant pour axes de symétrie les trois arêtes d'un trièdre trirectangle, sans que le sommet de ce trièdre soit un centre.

Il est facile de constater que le point ω considéré plus haut n'est autre, dans le cas actuel, que le point $X = Y = Z = o$.

SUR LA REPRÉSENTATION DES NOMBRES PAR LES CLASSES DE FORMES APPARTENANT A UN DÉTERMINANT DONNÉ;

PAR M. T. LALESCO.

1. Dans l'étude de la représentation des nombres par les classes de formes appartenant à un déterminant donné D, on peut se borner à considérer le groupe des classes primitives, c'est-à-dire des classes de formes

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, \tag{1}$$

les nombres a, b et c étant premiers dans leur ensemble.

On sait que la véritable représentation d'un nombre m par une forme (1) est celle que l'on appelle la représentation *propre* de ce nombre, c'est-à-dire une représentation telle que

$$m = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2,$$

où les nombres ξ et η sont premiers entre eux, car les représentations impropres reviennent toujours à des représentations propres irréductibles.

Ceci rappelé, prenons deux nombres m et n représentés proprement par deux classes quelconques que nous désignerons par K_m et K_n. La théorie de la composition des formes nous apprend alors que le produit mn pourra être représenté par la classe composée que nous désignerons par $K_m K_n$; mais cette représentation sera-t-elle propre ou non?

Si les nombres m et n sont premiers entre eux, une identité fondamentale de la théorie de la composition des formes montre tout de suite que cette représentation résultante sera propre également; mais, si les nombres m et n ne sont pas premiers entre eux, cela n'est plus vrai, comme on l'a admis quelquefois. Je me propose de montrer ici qu'en général, dans ce cas, il y a plus de représentations résultantes impropres et j'établirai un critère permettant de distinguer les deux cas.

2. Soient

$$m = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_k^{\alpha_k} b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \ldots b_p^{\beta_p},$$
$$n = a_1^{\alpha'_1} a_2^{\alpha'_2} \ldots a_k^{\alpha'_k} c_1^{\gamma_1} c_2^{\gamma_2} \ldots c_q^{\gamma_q},$$

les deux nombres considérés, supposés d'abord premiers à $2D$. Faisons la remarque évidente que toute représentation propre d'un produit de deux facteurs premiers entre eux provient nécessairement de la composition de deux représentations propres convenables de ses facteurs; en effet, l'identité fondamentale

$$aa'X^2 + 2bXY + cY^2 = (ax^2 + 2bxy + a'cy^2)(a'x'^2 + 2bx'y' + acy'^2),$$

où

$$X = xx' - cyy',$$
$$Y = ax'y + a'xy' + 2byy',$$

nous montre que la représentation propre du nombre aa' par la forme (aa', b, c) peut résulter de la composition des représentations propres des nombres a et a' à l'aide des formes $(a, b, a'c)$ et (a', b, ac).

Pour former donc toutes les représentations propres d'un nombre composé, il suffira de déterminer toutes les représentations propres de ses facteurs premiers deux à deux et de composer ensuite ces représentations de toutes les manières possibles. Or, soit K_λ et K_λ^{-1} les deux classes opposées qui, elles seules, représentent proprement le nombre premier λ; la puissance λ^n ne sera représentable proprement que par les classes K_λ^n et K_λ^{-n}, en représentant par K_λ^n la classe qui résulte de la composition de K_λ, n fois de suite avec elle-même. Comme, d'après une remarque déjà faite, les représentations propres de deux nombres premiers entre eux donnent par composition une représentation qui est propre aussi, les expressions générales des classes dont chacune fournira une représentation propre distincte des nombres m et n seront respectivement

$$K_m = K_{a_1}^{\pm\alpha_1} K_{a_2}^{\pm\alpha_2} \ldots K_{a_k}^{\pm\alpha_k} K_{b_1}^{\pm\beta_1} \ldots K_{b_p}^{\pm\beta_p},$$
$$K_n = K_{a_1}^{\pm\alpha'_1} K_{a_2}^{\pm\alpha'_2} \ldots K_{a_k}^{\pm\alpha'_k} K_{c_1}^{\pm\gamma_1} \ldots K_{c_q}^{\pm\gamma_q}.$$

Nous obtenons ainsi 2^{p+k} représentations propres différentes du nombre m et 2^{q+k} du nombre n.

Considérons maintenant le produit

$$mn = a_1^{\alpha_1+\alpha'_1} \dots a_k^{\alpha_k+\alpha'_k} b_1^{\beta_1} \dots b_p^{\beta_p} c_1^{\gamma_1} \dots c_q^{\gamma_q}.$$

Ce nombre aura donc effectivement et seulement 2^{p+q+k} représentations propres par les classes du déterminant D. Or, on peut combiner une représentation propre du nombre m à une représentation propre de n, de 2^{p+q+2k} façons différentes. *Il y aura donc, en général,* $2^{p+q+k}(2^k - 1)$ *cas où la représentation résultante du produit mn ne sera pas propre, quoique les représentations des nombres m et n le soient.*

Si donc $k > 1$, c'est le nombre des cas d'exception qui sera le plus grand. D'autre part, il est évident que les représentations impropres seront données par les classes

$$K_{a_1}^{\pm(\alpha_1-\alpha'_1)} \dots K_{a_k}^{\pm(\alpha_k-\alpha'_k)} K_{b_1}^{\pm\beta_1} \dots K_{b_p}^{\pm\beta_p} K_{c_1}^{\pm\gamma_1} \dots K_{c_q}^{\pm\gamma_q},$$

et ceci nous permet d'énoncer le résultat suivant :

La représentation résultante sera impropre toutes les fois que, dans les représentations propres des nombres m et n, l'un au moins des facteurs communs de ces nombres sera représenté par des classes opposées, et seulement dans ce cas.

3. Examinons maintenant les représentations des nombres qui ne sont pas premiers à 2D.

D'après la remarque faite plus haut, cette question revient à l'étude de la représentation du nombre 2 et des facteurs de D. Nous supposerons ici D *sans diviseurs carrés;* dans ces conditions, je dis qu'on a le théorème suivant :

Un facteur d de D ($D = d\delta$) *n'est représentable proprement que par la classe ambiguë*

$$dx^2 - \delta y^2.$$

Aucune puissance de ce nombre n'est représentable proprement par les classes des formes du déterminant D.

En effet, si d est représentable proprement par une classe K_d, cette classe contiendra la forme (d, n, l) où $n^2 - dl = D = d\delta$;

on déduit de là $n = kd$ et, par conséquent,

$$dx^2 + 2nxy + ly^2 = d(x + ky)^2 - \delta y^2,$$

ce qui prouve que la classe K_d est bien une classe de formes ambiguës.

Prenons maintenant le nombre d^k; on devrait avoir d'une façon analogue $n^2 - d^k l = d\delta$; or, cette égalité est impossible si $k > 1$, puisque δ est premier à d.

Nous avons ainsi (remarquons-le en passant) une propriété caractéristique des formes ambiguës : ce sont les seules classes qui représentent proprement les facteurs de D. Cette propriété ne subsiste plus si D a des facteurs carrés : ainsi, par exemple, la forme $9x^2 + 6xy + 11y^2$ représente proprement $9 (x = 1, y = 0)$; son déterminant est $-90 = -3^2.10$, et pourtant ce n'est pas une forme ambiguë.

La limitation aux déterminants sans diviseurs carrés est donc utile pour simplifier les résultats, même dans la théorie de la représentation des nombres. Ce théorème s'applique aussi pour le facteur 2 si D est pair.

Il nous reste donc à examiner le cas de la représentation de 2 quand D est impair. Or, un théorème bien connu sur les congruences

$$x^2 \equiv D (\bmod 2^k)$$

nous permet d'affirmer immédiatement que 2 est toujours représentable proprement par la seule classe

$$2x^2 + 2xy + ky^2 \qquad (1 - 2k = D);$$

que 4 est toujours représentable par les deux classes opposées

$$4x^2 \pm 2xy + k'y^2 \qquad (1 - 4k' = D),$$

si D est de la forme $4n + 1$ et seulement dans ce cas, et qu'enfin $2^k (k > 2)$ est représenté proprement par 4 classes, deux à deux opposées, si $D = 8n + 1$ et seulement dans ce cas.

On voit maintenant avec facilité comment on devra modifier l'énoncé général trouvé précédemment pour ces divers cas. Ainsi, par exemple, nous aurons les propriétés suivantes :

Si un facteur de D *figure à la fois dans* m *et* n, *la représen-*

tation composée sera sûrement impropre; mais, si les nombres m et n, tout en n'étant pas premiers à D, *ne sont pas divisibles par les mêmes facteurs de* D, *et si les autres conditions sont remplies, la représentation résultante sera propre.*

Dans l'évaluation des nombres p et q, il ne faudra pas tenir compte des facteurs de D; enfin, 2 rentre dans la règle générale si D est pair.

REMARQUES SUR LE MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN;

PAR M. A. PELLET.

1. Le centre de courbure (α, β) de l'enveloppe des droites

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - f(\varphi) = 0$$

est donné par les équations

$$-\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi - f' = 0, \qquad \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi + f'' = 0,$$

d'où l'on déduit

$$x^2 + y^2 = f^2 + f'^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 = f'^2 + f''^2, \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (f+f'')^2,$$
$$\alpha x + \beta y = f'^2 - ff''.$$

Ainsi, lorsque f est de la forme $a\cos(b\varphi - c)$, a, b, c étant des constantes, un point de la courbe et son centre de courbure sont conjugués par rapport à un cercle, de rayon ab. C'est précisément le cas des épicycloïdes et le cercle n'est autre que le cercle de base.

2. Nous pouvons définir le mouvement d'une figure plane dans son plan par les positions successives de deux de ses droites que nous choisirons rectangulaires l'une sur l'autre. Soient

$$\xi = x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0, \qquad \eta = -x\sin\varphi + y\cos\varphi - p_1 = 0,$$

les équations de ces droites par rapport à des axes fixes; et

$$A\xi + B\eta + C = 0,$$

A, B, C étant des constantes, l'équation d'une droite du plan mobile. Dans le mouvement du plan, cette droite enveloppe une courbe dont la normale a pour équation $A\xi'_\varphi + By'_\varphi = 0$. Elle passe par le point $\xi'_\varphi = 0$, $y'_\varphi = 0$, centre instantané de rotation I. De même la développée $n^{\text{ième}}$ a pour normale la droite

$$A\xi^{(n+1)}_{\varphi^{n+1}} + By^{(n+1)}_{\varphi^{n+1}} = 0.$$

Elle passe par un point I_n, $(n+1)^{\text{ième}}$ centre instantané de rotation, indépendant des coefficients A, B, C.

Lorsque φ varie, le lieu du point I dans le plan mobile est la roulette, dans le plan fixe la base; la droite II est normale pour une valeur de φ à la base et à la roulette en leur point de contact, et en général la droite $I_n I_{n+1}$ à la courbe engendrée par le point I_n; enfin le second centre instantané I_1 est situé sur la *polaire du centre de courbure de la roulette par rapport au cercle de courbure de la base.*

Lorsque pour deux mouvements $I, I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$ coïncident, les *deux mouvements ont un contact d'ordre n*, c'est-à-dire que les courbes décrites par un même point ont un contact d'ordre n et réciproquement.

Soient I, I'_1, I'_2 les trois premiers centres instantanés de rotation lorsqu'on fait rouler le cercle osculateur de la roulette sur le cercle osculateur de la base; I'_1 coïncide avec I_1; I'_2 est le pied de la perpendiculaire abaissée par le point I_2 sur la droite II_1 (*Journal de Mathématiques spéciales* de M. de Longchamps, 1895, p. 217 et suivantes).

3. Prenons pour axes de coordonnées la tangente, axe des x, et la normale à la base, axe des y, au point de contact avec la roulette à un certain moment; soient

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2R_1 y = 0$$

les équations des cercles osculateurs de la roulette et de la base; les coordonnées du second centre instantané de rotation (x_1, y_1) sont données par les équations

$$x_1 = 0, \qquad y_1 R - R_1(y_1 + R) = 0.$$

En faisant rouler le cercle $x^2 + y^2 - 2\rho y = 0$ sur le cercle

$x^2+y^2-2\rho_1 y=0$, on aura un mouvement ayant un contact du second ordre avec le premier, si la relation

$$y_1\rho-\rho_1(y_1+\rho)=0$$

est satisfaite. Le cercle de rayon ρ passe par le point α, β si l'on a

$$\alpha^2+\beta^2-2\rho\beta=0.$$

Comme, dans le roulement du cercle ρ sur le cercle ρ_1, le point α, β décrit une épicycloïde, le centre de courbure (α_1, β_1) de la trajectoire se trouve à l'intersection des droites

$$\frac{\alpha_1}{\alpha}=\frac{\beta_1}{\beta}=\mathrm{K}, \qquad \alpha\alpha_1+\beta\beta_1-\rho_1(\beta+\beta_1)=0,$$

d'où

$$\mathrm{K}=\frac{y_1\beta}{\alpha^2+\beta^2+y_1\beta}.$$

Pour $\alpha=0$, on a la relation

$$\beta_1(y_1+\beta)=y_1\beta,$$

ou

$$\frac{1}{\beta_1}-\frac{1}{\beta}=\frac{1}{y_1}=\frac{1}{\mathrm{R}_1}-\frac{1}{\mathrm{R}}.$$

Les droites joignant les points α, β et α_1, β_1 aux centres des cercles R et R_1 ont pour équations

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\mathrm{R}} \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & \frac{1}{\mathrm{K}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\mathrm{R}_1} \end{vmatrix}=0.$$

Par soustraction, on obtient la droite

$$x\alpha_1+y\beta_1=0,$$

d'où le théorème que M. G. Kœnigs veut prendre pour fondement de la théorie (*Bulletin des Sciences mathématiques*, janvier 1907), afin d'éviter des précautions tenant à la question des signes.

4. Soient C le cône lieu des axes instantanés de rotation d'un solide, mobile autour d'un point fixe O, dans l'espace; C′ le cône lieu de cet axe dans le solide; OM la génératrice de contact des

deux cônes, axe instantané à l'instant considéré. Menons par le point M un plan perpendiculaire à OM; ce plan coupe le cône C suivant une courbe B et le cône C' suivant une courbe B'; en faisant rouler B' sur B on obtient pour le plan un mouvement ayant un contact du second ordre avec celui qui résulte du mouvement du solide à l'instant considéré; d'ailleurs les points se trouvant sur une même droite passant par le point fixe O décrivent des trajectoires homothétiques.

SUR LES TRAJECTOIRES AUXQUELLES DONNENT LIEU LES FORCES CENTRALES;

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.

1. Un point mobile, sollicité par une force centrale, peut décrire une trajectoire ayant la propriété intéressante de s'approcher indéfiniment du centre des forces, qui est alors un point asymptote de la trajectoire; c'est là une condition nécessaire pour que le point attiré tende à se choquer avec le point attirant.

Si nous tenons compte de la formule

$$(1) \qquad \rho = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2 r}{d\theta^2}},$$

nous voyons que le rayon de courbure ρ tend vers zéro, lorsque le rayon polaire r tend vers zéro, pourvu que $\operatorname{tang}\omega$ ne tende pas vers zéro avec r, ω désignant l'angle formé par le rayon polaire et la tangente de la courbe; si, en effet, il en est ainsi, la formule

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\operatorname{tang}\omega}$$

montre que la dérivée $\frac{dr}{d\theta}$ tend vers zéro avec le rayon r; il en résulte, en vertu de la formule (1), que le rayon de courbure ρ tend aussi vers zéro avec r. Nous supposons, bien entendu, ici, que la trajectoire ne passe pas par le pôle (centre de force), qui n'est qu'un point asymptote de la courbe.

Dans ce travail, nous allons envisager d'abord ces trajectoires se rapprochant indéfiniment du centre d'attraction, avec l'hypothèse que le rayon de courbure tende vers zéro avec r; ensuite, nous exposerons quelques résultats concernant le rayon de courbure des trajectoires auxquelles donnent lieu des forces centrales données comme fonctions de la distance du mobile au centre des forces.

2. Nous nous posons le problème suivant :

Quelles sont les lois de forces centrales qui peuvent donner lieu à des trajectoires du genre indiqué dans le paragraphe précédent?

Ces trajectoires sont caractérisées par le fait que le centre de force est un point asymptote de ces courbes, le rayon de courbure ρ tendant vers zéro en même temps que le rayon polaire r.

Pour traiter ce problème nous allons utiliser deux formules indiquées par les mathématiciens Resal (*Comptes rendus*, t. XC, p. 769) et Siacci (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII), savoir :

$$F = -\frac{m}{K}\frac{v^3 r}{\rho}, \qquad F = -mK^2\frac{r}{\rho p^3}, \tag{2}$$

m désignant la masse, K la constante des aires, v la vitesse, r le rayon polaire, ρ le rayon de courbure, p la distance du centre de la force à la tangente de la trajectoire et F l'intensité de la force; la deuxième formule n'est qu'une conséquence immédiate de la première et de la formule classique $pv = K$.

La relation évidente [1]

$$p = r\sin\omega$$

nous permet d'écrire la formule (2) comme suit :

$$F = -mK^2\frac{1}{\rho r^2 \sin^3\omega}. \tag{3}$$

Nous allons nous borner au cas où la force F dépend de la seule

[1] Dans cette formule, l'angle ω est choisi inférieur à deux angles droits.

distance du mobile au centre de force et nous remarquerons que la formule (3) nous permet de conclure que les lois de forces centrales, fonctions de la seule distance r du mobile au centre, qui répondent au problème ci-dessus posé, sont de la forme suivante :

$$F = \frac{-m\mu}{r^n} \qquad (n > 2),$$

l'exposant n étant plus grand que deux.

Citons comme exemple la spirale logarithmique

$$r = e^{\mu\theta},$$

qui admet le pôle comme point asymptote et que décrit un mobile sollicité par une force centrale dont l'expression est

$$F = -m(1+\mu^2)K^2\frac{1}{r^3},$$

m désignant la masse et K la constante des aires. Cette trajectoire correspond aux conditions initiales

$$\theta_0 = 0, \qquad r_0 = 1, \qquad v_0 = K\sqrt{1+\mu^2}.$$

Le rayon de courbure ρ tend, en effet, vers zéro, lorsque le point de la courbe s'approche indéfiniment du point asymptote, qui coïncide ici avec le centre de force.

3. D'une façon générale, si la force centrale est donnée par la formule

$$F = \frac{\alpha}{r^q},$$

α étant une constante, nous aurons, pour le rayon de courbure d'une trajectoire quelconque, la formule suivante :

$$\rho = \lambda\frac{r^{q-2}}{\sin^3\omega},$$

λ désignant une constante et ω l'angle défini au n° 2. Nous en déduisons l'inégalité

$$(4) \qquad \rho \geqq |\lambda| r^{q-2},$$

le symbole $|\lambda|$ désignant la valeur absolue de la constante λ.

Cette inégalité nous conduit à plusieurs corollaires :

a. Si $q > 2$, le rayon ρ de courbure tend vers l'infini lorsque r croît indéfiniment sur une branche infinie, s'il en existe.

b. Si $q < 2$, le rayon de courbure ρ tend vers l'infini, lorsque la distance polaire r tend vers zéro sur une branche de la trajectoire s'approchant indéfiniment du centre de la force, s'il existe une telle branche.

En ce qui concerne la détermination de la constante λ, elle se fait immédiatement par les formules du paragraphe précédent; nous avons

$$\lambda = -\frac{m\mathrm{K}^2}{\alpha},$$

et nous voyons qu'elle s'exprime au moyen de la masse du point mobile, de la constante des aires et du coefficient d'attraction α.

Si nous supposons que, sur une trajectoire, la vitesse reste inférieure à une certaine limite b, la formule

$$pv = \mathrm{K}$$

nous permet d'établir aussi une limite supérieure du rayon de courbure de la trajectoire; nous avons en effet, d'une part,

$$p > \frac{\mathrm{K}}{b}, \qquad \frac{1}{p^3} < \frac{b^3}{\mathrm{K}^3},$$

et, d'autre part,

$$\rho = -\frac{m\mathrm{K}^2}{\alpha}\frac{r^{q+1}}{p^3};$$

d'où résulte

$$\rho < \left|\frac{m\mathrm{K}^2}{\alpha}\right|\frac{b^3}{\mathrm{K}^3}r^{q+1},$$

ou encore

$$(5) \qquad \rho < \left|\frac{mb^3}{\alpha\mathrm{K}}\right| r^{q+1}, \qquad \rho < \mathrm{L}r^{q+1}, \qquad \mathrm{L} = \left|\frac{mb^3}{\alpha\mathrm{K}}\right|.$$

Les inégalités (4) et (5) présentent un intérêt particulier pour les trajectoires ayant des points à l'infini ou des branches s'approchant indéfiniment du centre d'attraction, puisqu'elles nous renseignent sur la manière dont le rayon de courbure ρ varie avec r

sur une branche allant à l'infini ou sur une branche s'approchant indéfiniment du centre d'attraction.

L'existence de trajectoires ayant des branches non fermées est assurée dans les cas $q \neq 2$ et $q \neq -1$ par un célèbre théorème de Bertrand, d'après lequel les seules lois de force qui donnent lieu à des trajectoires fermées, quelles que soient les conditions initiales, correspondent aux valeurs $q = 2$ et $q = -1$.

Les inégalités

$$|\lambda| r^{q-1} \leqq \rho < L r^{q+1}$$

fournissent, en général, des limites d'une précision remarquable pour la grandeur du rayon de courbure d'une trajectoire et, en particulier, pour l'ordre d'infinitude et l'ordre infinitésimal dans les cas où le rayon de courbure tend vers l'infini ou vers zéro sur des branches allant à l'infini ou s'approchant indéfiniment du centre de force.

SUR L'ISOTHERMIE RELATIVE DES RÉSEAUX;

PAR M. L. RAFFY.

Les pages qui suivent ont pour principal objet d'étendre la notion de réseau isotherme, afin de faire rentrer dans une même théorie diverses classes de réseaux, notamment ceux qui caractérisent soit les surfaces isothermiques, soit les surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme, et ceux que M. Bianchi appelle isothermes-conjugués.

Je commence par définir l'isothermie relative de deux réseaux et, après avoir montré qu'à deux réseaux qui présentent cette propriété on en peut toujours associer un troisième, qui est dans la même relation avec chacun d'eux, je donne sous forme invariante les conditions qui assurent l'isothermie relative de deux réseaux.

J'applique d'abord ces conditions aux surfaces à lignes de courbure isothermes, et je ramène l'un à l'autre les deux critères de S. Lie et de M. Weingarten relatifs à ces surfaces.

Une seconde application concerne les surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées, dont l'étude a été commencée par M. Eisenhart (*American Journal of Mathematics*, t. XXV, p. 213-248). Par le fait même de son rattachement à une notion plus large, cette étude se trouve complétée sur divers points. Je calcule à nouveau, en la généralisant, l'équation aux dérivées partielles des surfaces de M. Eisenhart et j'en déduis leurs caractéristiques (lignes de courbure et lignes asymptotiques).

Après diverses indications concernant la compatibilité des deux conditions d'isothermie relative, je montre que toute famille de courbes dont l'équation est de la forme

$$U(u) + V(v) = \text{const.}$$

appartient à un réseau isotherme relativement au réseau des lignes coordonnées ($u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$) et je fais rentrer dans une même catégorie les surfaces isothermiques, celles dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme et celles dont les lignes de courbure forment un réseau isotherme-conjugué.

I. — Définition et conditions pour l'isothermie relative des réseaux.

1. Quand deux couples de variables, α et β d'une part, φ et χ d'autre part, donnent lieu à une identité telle que

$$d\alpha\, d\beta = \psi(\varphi, \chi)(d\varphi^2 + d\chi^2), \tag{1}$$

si les équations $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ sont celles des deux familles de lignes de longueur nulle d'une surface, on dit que le réseau des courbes $\varphi = \text{const.}$, $\chi = \text{const.}$ est un réseau isotherme de la surface [1].

En vue de généraliser cette notion, nous n'imposerons plus, au

[1] Si, au lieu de l'identité (1), on posait

$$d\alpha\, d\beta = W(u, v)[U(u)\, du^2 + V(v)\, dv^2],$$

le réseau $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ coïnciderait, comme il est bien connu, avec le réseau $\varphi = \text{const.}$, $\chi = \text{const.}$

moins en général, aux lignes $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ la condition d'être des lignes minima, et nous énoncerons le fait analytique exprimé par l'identité (1) en disant que le réseau $\varphi = \text{const.}$, $\chi = \text{const.}$ est *isotherme relativement au réseau* $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$, ou, plus brièvement, que le réseau (φ, χ) est isotherme relativement au réseau (α, β).

D'après cette convention de langage, une surface est dite *isothermique* quand le réseau de ses lignes de courbure est isotherme relativement au réseau formé par ses lignes de longueur nulle; la représentation sphérique (des lignes de courbure) d'une surface est dite *isotherme* quand le réseau de ses lignes de courbure est isotherme relativement au réseau qui correspond aux lignes minima de sa représentation sphérique; un réseau est dit *isotherme-conjugué,* au sens de M. Bianchi, quand il est isotherme relativement au réseau formé par les lignes asymptotiques.

2. Revenons à l'identité (1). Pour qu'elle ait lieu, il faut et il suffit que α et β soient deux fonctions ne dépendant, l'une que de $\varphi + i\chi$, l'autre que de $\varphi - i\chi$, de sorte qu'on a, inversement,

$$\varphi + i\chi = 2\alpha_1(\alpha), \qquad \varphi - i\chi = 2i\beta_1(\beta).$$

Ces équations entraînent

$$d\varphi\, d\chi = -i(d\alpha_1^2 + d\beta_1^2).$$

Or, le réseau (α_1, β_1) n'est pas distinct du réseau (α, β); d'où cette conclusion :

Théorème I. — *Si un réseau* (φ, χ) *est isotherme relativement à un réseau* (α, β), *le réseau* (α, β) *est isotherme relativement au réseau* (φ, χ), *et réciproquement.* En d'autres termes, *pour qu'un réseau soit isotherme relativement à un autre, il faut et il suffit que cet autre soit isotherme relativement au premier.*

Comme application, cherchons la condition d'isothermie des lignes de courbure d'une surface (S) rapportée à ses lignes minima. Soit

$$ds^2 = 4\lambda^2(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

son élément linéaire et soit ξ l'une des coordonnées isotropes,

$x + iy$, par exemple, d'un point variable sur cette surface; les lignes de courbure sont déterminées (O. Bonnet) par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\xi'_\alpha}{\lambda^2}\right) d\alpha^2 - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\xi'_\beta}{\lambda^2}\right) d\beta^2 = 0.$$

Soient $\varphi = \text{const.}$, $\chi = \text{const.}$ leurs équations finies; on a

$$\mu\, d\varphi\, d\chi = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\xi'_\alpha}{\lambda^2}\right) d\alpha^2 - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\xi'_\beta}{\lambda^2}\right) d\beta^2.$$

Pour exprimer que la surface (S) est isothermique, écrivons que le réseau (α, β) est isotherme relativement au réseau (φ, χ) : nous trouvons immédiatement

$$\frac{1}{A_0(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\xi'_\alpha}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{B_0(\beta)} \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\xi'_\beta}{\lambda^2}\right),$$

ce qui est la condition connue.

Comme autre application, considérons une surface rapportée aux coordonnées tangentielles isotropes d'Ossian Bonnet, qui sont les paramètres (α, β) des lignes minima de sa représentation sphérique, et cherchons la condition pour que l'élément linéaire

$$d\sigma^2 = \frac{4\, d\alpha\, d\beta}{(\alpha\beta + 1)^2}$$

de la sphère de Gauss acquière la forme $\psi(d\varphi^2 + d\chi^2)$, quand on prend pour variables les paramètres (φ, χ) des lignes de courbure. Le plan tangent à la surface a pour équation

$$(\alpha - \beta)x - i(\alpha - \beta)y + (\alpha\beta - 1)z + \xi = 0,$$

et, si l'on pose

$$p = \xi'_\alpha, \qquad q = \xi'_\beta, \qquad r = \xi''_{\alpha^2}, \qquad s = \xi''_{\alpha\beta}, \qquad t = \xi''_{\beta^2},$$

l'équation différentielle des lignes de courbure est

$$r\, d\alpha^2 - t\, d\beta^2 = 0,$$

de sorte qu'on a

$$\lambda\, d\varphi\, d\chi = r\, d\alpha^2 - t\, d\beta^2.$$

Au lieu d'écrire que le réseau (φ, χ) est isotherme relativement au réseau (α, β), écrivons que celui-ci est isotherme relativement au premier; nous trouvons immédiatement

$$\frac{r}{A_0(\alpha)} = \frac{t}{B_0(\beta)}:$$

c'est la condition pour que la représentation sphérique (des lignes de courbure) de la surface soit isotherme. Elle entraîne l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\log\frac{r}{t} = 0,$$

qui lui est équivalente, et dont les caractéristiques sont définies par la relation

$$d\alpha\,d\beta(r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2) = 0.$$

Ainsi, *l'équation aux dérivées partielles des surfaces pour lesquelles la représentation sphérique des lignes de courbure est isotherme admet comme caractéristiques les lignes de courbure et les lignes qui correspondent aux lignes minima de la représentation sphérique.*

3. L'isothermie relative de deux réseaux peut se reconnaître à un caractère, théorique comme le précédent, et que voici :

Théorème II. — *Pour que deux réseaux soient isothermes l'un relativement à l'autre, il faut et il suffit :* 1° *que les tangentes aux courbes de l'un d'eux forment en tout point un faisceau harmonique avec les tangentes aux courbes de l'autre;* 2° *qu'ils soient isothermes l'un et l'autre relativement à un troisième réseau.*

1° Soient (α, β) et (φ, χ) les deux réseaux. On a, par hypothèse,

$$d\alpha\,d\beta = \psi(\varphi, \chi)(d\varphi^2 + d\chi^2).$$

Or, si l'on rapporte le second membre au type général

$$\mathcal{F} = A\,d\varphi^2 + 2B\,d\varphi\,d\chi + C\,d\chi^2,$$

on aura

$$A = C = \psi, \qquad B = 0.$$

De même, si l'on compare le produit $2\,d\varphi\,d\chi$ au type général

$$\mathcal{F}_1 = A_1\,d\varphi^2 + 2B_1\,d\varphi\,d\chi + C_1\,d\chi^2,$$

on aura

$$A_1 = C_1 = 0, \qquad B_1 = 1.$$

De là résulte immédiatement

$$AC_1 - 2BB_1 + CA_1 = 0,$$

ce qui exprime que les tangentes aux courbes du réseau $\mathcal{F} = 0$ ou (α, β) forment en tout point un faisceau harmonique avec les tangentes aux courbes du réseau $\mathcal{F}_1 = 0$ ou (φ, χ). Nous dirons avec M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. IV, p. 65) que *les réseaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ se divisent harmoniquement.*

2° Une extension facile d'un théorème dû à M. Tissot conduit à cet énoncé : *Étant données deux formes quadratiques binaires de différentielles, il existe des variables telles que les deux formes, exprimées au moyen de ces variables, ne contiennent pas de terme rectangle.* Si les deux formes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ ne sont pas proportionnelles, ce système de variables est unique et il est fourni par les intégrales de l'équation

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A\,d\varphi + B\,d\chi & A_1\,d\varphi + B_1\,d\chi \\ B\,d\varphi + C\,d\gamma & B_1\,d\varphi + C_1\,d\chi \end{vmatrix} = 0,$$

qu'on obtient en égalant à zéro le covariant jacobien des deux formes. Dans le problème qui nous occupe, les deux réseaux étant distincts, les formes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ ne peuvent pas être proportionnelles.

Appliquons cette règle au cas présent. L'équation différentielle du réseau qu'elle fait correspondre aux deux réseaux (α, β) et (φ, χ) est

$$\mathcal{F}_2 = d\varphi^2 - d\chi^2 = 0.$$

Posons

$$d\varphi + d\chi = 2\,du, \qquad d\varphi - d\chi = 2\,dv.$$

Nous déduisons de là

$$d\alpha\,d\beta = \psi\,(d\varphi^2 + d\chi^2) = 2\psi\,(du^2 + dv^2), \qquad d\varphi\,d\chi = du^2 - dv^2,$$

ce qui prouve que le réseau $\mathcal{F}_2 = 0$ ou (u, v) est isotherme relativement aux deux réseaux (α, β) et (φ, χ), et que ces deux réseaux sont isothermes relativement à lui.

Réciproquement, supposons qu'il existe un réseau (u, v) tel que, quand on rapporte la surface à ce réseau, les deux formes $d\alpha\, d\beta$ et $d\varphi\, d\chi$ deviennent respectivement

$$d\alpha\, d\beta = 2\psi\,(du^2 + dv^2), \qquad d\varphi\, d\chi = \lambda\,[\mathrm{U}(u)\,du^2 - \mathrm{V}(v)\,dv^2].$$

Si, de plus, les deux réseaux (α, β) et (φ, χ) se divisent harmoniquement, on devra, d'après la condition rappelée plus haut, avoir $\mathrm{U} = \mathrm{V}$, de sorte qu'il viendra

$$d\varphi\, d\chi = \mu\,(du^2 - dv^2).$$

Dès lors l'identité

$$2\,d(u + iv)\,d(u - iv) = [d(u + v)]^2 + [d(u - v)]^2$$

prouve que le réseau $(u + v,\ u - v)$, c'est-à-dire le réseau (φ, χ), est isotherme relativement au réseau $(u + iv,\ u - iv)$ ou (α, β).

La proposition est donc complètement démontrée. Le réseau (u, v), isotherme relativement aux deux réseaux proposés, n'est autre que celui qui est défini par l'extension du théorème de M. Tissot. Son équation, que nous avons dans le cas général mise sous la forme (2), peut aussi s'écrire

$$\begin{vmatrix} d\chi^2 & -d\varphi\, d\chi & d\varphi^2 \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \mathrm{A}_1 & \mathrm{B}_1 & \mathrm{C}_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Elle exprime simplement que ce réseau divise harmoniquement les deux réseaux proposés.

4. *Remarques et exemples.* — Faisons, pour un instant, abstraction de l'hypothèse concernant l'isothermie relative des réseaux et considérons, sur une surface, deux réseaux (R_1) et (R_2), définis respectivement par l'évanouissement de deux formes quadratiques de différentielles

$$\mathfrak{F}_1 = \mathrm{A}_1\, d\varphi^2 + 2\,\mathrm{C}_1\, d\varphi\, d\chi + \mathrm{C}_1\, d\chi^2 = 0,$$
$$\mathfrak{F}_2 = \mathrm{A}_2\, d\varphi^2 + 2\,\mathrm{C}_2\, d\varphi\, d\chi + \mathrm{C}_2\, d\chi^2 = 0.$$

En égalant à zéro le covariant jacobien $\mathfrak{F}_3$ de ces deux formes, on définit un troisième réseau (R_3), qui divise harmoniquement et le réseau (R_1) et le réseau (R_2). Si donc ces deux réseaux se divisent harmoniquement, quel que soit celui des trois réseaux (R_1), (R_2), (R_3) que l'on considère, il divise harmoniquement chacun des deux autres : la condition est nécessaire et suffisante.

Quand elle est réalisée, les trois réseaux présentent une liaison mutuelle remarquable, que nous rappellerons en disant qu'ils forment une *triade*. Voici divers exemples de triades : 1° tout réseau orthogonal tracé sur une surface, son réseau bissecteur et le réseau des lignes minima; en particulier, les lignes de courbure d'une surface, leurs courbes bissectrices et les lignes minima; 2° les lignes de courbure d'une surface, ses lignes asymptotiques et ses *lignes diagonales* (lignes tangentes aux diamètres conjugués égaux de l'indicatrice); 3° les réseaux considérés par M. Darboux dans sa théorie des douze surfaces (*loc. cit.*).

A l'hypothèse qui définit la *triade* ajoutons l'isothermie relative de deux des réseaux; d'après le théorème qui précède, le troisième réseau sera isotherme relativement aux deux premiers. En conséquence, pour exprimer l'isothermie relative de deux réseaux, on pourra introduire le réseau qui complète la triade dont ils font partie et exprimer que ce réseau est isotherme relativement à l'un des premiers. Il y aura donc trois manières équivalentes d'énoncer la propriété d'une surface sur laquelle deux réseaux déterminés sont isothermes l'un relativement à l'autre. Ainsi, les *surfaces isothermiques* étant définies par l'isothermie relative de leurs lignes de courbure et de leurs lignes minima, on a ces théorèmes, dont les réciproques sont vraies : *Sur toute surface isothermique, le réseau bissecteur des lignes de courbure est isotherme relativement au réseau des lignes minima; il est isotherme relativement au réseau des lignes de courbure.* De même, *les surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées* étant définies par l'isothermie relative de leurs asymptotiques et de leurs lignes de courbure, en considérant le réseau des lignes diagonales, on trouve ces deux propriétés caractéristiques : *Sur toute surface à lignes de courbure isothermes-conjuguées, le réseau des lignes diagonales est isotherme relativement aux lignes asymptotiques; il est isotherme relativement aux lignes de courbure.*

Il résulte immédiatement de là que *les surfaces minima ont,* comme l'a démontré M. Eisenhart, *leurs lignes de courbure iso-*

thermes-conjuguées. En effet, les lignes asymptotiques des surfaces minima, étant rectangulaires, coïncident avec le réseau bissecteur des lignes de courbure; l'isothermie relative des lignes de courbure et de leur réseau bissecteur, que les surfaces minima présentent parce qu'elles sont isothermiques, revient donc à l'isothermie relative des lignes de courbure et des lignes asymptotiques, propriété qui définit les surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées.

5. Nous allons maintenant donner, sous forme invariante, les conditions qui assurent l'isothermie relative de deux réseaux déterminés. A cet effet, nous introduirons une notion qui paraît de nature à intervenir dans bien d'autres recherches, la notion des *éléments invariants*. Soient

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathfrak{F} = \mathrm{A}\, du^2 + 2\mathrm{B}\, du\, dv + \mathrm{C}\, dv^2 = 0$$

l'équation d'un premier réseau et

$$(\mathrm{II}) \qquad l\, du^2 + 2m\, du\, dv + n\, dv^2 = 0$$

celle d'un second réseau, isotherme relativement au premier. Cette dernière équation peut être remplacée par les deux suivantes :

$$(\mathrm{II}') \qquad l_1\, du + n_1\, dv = 0, \qquad l_2\, du + n_2\, dv = 0,$$

dont les premiers membres ne sont déterminés chacun qu'à un facteur arbitraire près. A ces premiers membres nous substituerons des expressions différentielles que nous appellerons les *éléments invariants de la forme* (II) *ou du réseau* (II) *relativement à la forme* (I) *ou au réseau* (I) et qui seront indépendantes non seulement des facteurs arbitraires dont il vient d'être question, mais aussi des coordonnées curvilignes auxquelles on rapporte la surface. Ces *éléments invariants,* auxquels nous attribuons les expressions suivantes

$$(\mathrm{EI}) \qquad \begin{cases} \sqrt{\mathrm{C}l_2^2 - 2\mathrm{B}\, l_2 n_2 + \mathrm{A}n_2^2}\, \dfrac{l_1\, du + n_1\, dv}{l_1 n_2 - n_1 l_2}, \\ \sqrt{\mathrm{C}l_1^2 - 2\mathrm{B}\, l_1 n_1 + \mathrm{A}n_1^2}\, \dfrac{l_2\, du + n_2\, dv}{l_1 n_2 - n_1 l_2}, \end{cases}$$

sont homogènes et du degré zéro séparément par rapport à l_1, n_1

et par rapport à l_2, n_2. Ils se réduisent respectivement, quand la forme (I) est l'élément linéaire de la surface, aux *éléments d'arc* [1] des courbes du réseau (II). Pour établir dans tous les cas leur invariance, posons

$$(3)\qquad l_1\,du + n_1\,dv = \omega_1\,d\alpha, \qquad l_2\,du + n_2\,dv = \omega_2\,d\beta$$

et désignons par $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ les paramètres différentiels de α et de β calculés par rapport à la forme quadratique (I); soit enfin $\Theta(\alpha, \beta)$ le déterminant fonctionnel de α et β, divisé par $\sqrt{AC - B^2}$. Les expressions considérées sont respectivement identiques à ces deux-ci

$$\sqrt{\Delta\beta}\frac{d\alpha}{\Theta(\alpha, \beta)}, \qquad \sqrt{\Delta\alpha}\frac{d\beta}{\Theta(\alpha, \beta)},$$

où ne figurent que des symboles invariants.

Cela étant, nous pouvons prendre pour courbes coordonnées les courbes du réseau (II) et faire, en conséquence, $l_1 = n_2 = 1$, $l_2 = n_1 = 0$. Les éléments invariants (EI) se réduisent respectivement à $\sqrt{A}\,du$, $\sqrt{C}\,dv$ [2].

Pour que le réseau (I) soit isotherme relativement au réseau (II), il faut et il suffit, par définition même, que $\mathcal{F}$ ne contienne pas de terme en $du\,dv$ et que les coefficients de du^2 et de dv^2 soient proportionnels à deux fonctions, dont l'une ne dépende que de u et l'autre que de v. C'est ce qu'expriment les deux relations

$$(4)\qquad B = 0,$$

$$(5)\qquad \frac{\sqrt{A}}{U(u)} = \frac{\sqrt{C}}{V(v)}.$$

La condition (4) exprime simplement que *les deux réseaux* (I) *et* (II) *se divisent harmoniquement.*

---

[1] Les *éléments d'arc* ont été considérés par M. von Lilienthal (*Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen*, Leipzig, 1896; p. 17) et lui ont fourni, entre autres, un résultat que nous rapporterons un peu plus loin.

[2] L'équation $A\,du^2 - C\,dv^2 = 0$ définit le réseau qui divise harmoniquement le réseau (I) et le réseau (u, v). D'où cette propriété générale : *En égalant entre eux les carrés des éléments invariants d'un réseau relativement à un autre, on obtient l'équation différentielle du réseau qui les divise harmoniquement tous les deux.*

D'après la condition (5), les éléments invariants s'écrivent

$$\sqrt{A}\, du = \zeta\, U(u)\, du, \qquad \sqrt{C}\, dv = \zeta\, V(v)\, dv,$$

c'est-à-dire qu'*ils admettent un facteur intégrant commun*. Réciproquement, si les deux expressions $\sqrt{A}\, du$ et $\sqrt{C}\, dv$ admettent un facteur intégrant commun, la première ne dépendant que de u et la seconde que de v, on a les relations précédentes, qui entraînent la condition (5).

En conséquence nous arrivons à cette conclusion :

Théorème III. — *Pour que deux réseaux soient isothermes l'un relativement à l'autre, il faut et il suffit que ces deux réseaux se divisent harmoniquement et que les éléments invariants de l'un, calculés relativement à l'autre, admettent un facteur intégrant commun.*

Nous allons faire maintenant diverses applications de ce théorème. Il va sans dire que l'on peut, dans les applications, multiplier chaque élément invariant par tel facteur constant que l'on veut et multiplier simultanément ces deux éléments par n'importe quel facteur constant ou variable, par exemple négliger le dénominateur commun $l_1 n_2 - n_1 l_2$.

II. — Réseaux isothermes et critères divers pour l'isothermie des lignes de courbure.

6. Un réseau *isotherme* d'une surface est un réseau orthogonal, isotherme relativement au réseau des lignes de longueur nulle de la surface. En raison de leur orthogonalité, les tangentes aux courbes du réseau considéré forment un faisceau harmonique avec les tangentes aux lignes minima. Nous avons donc simplement à exprimer que *les éléments invariants du réseau relativement à l'élément linéaire admettent un facteur intégrant commun;* en d'autres termes, *pour qu'un réseau soit isotherme, il faut et il suffit que les éléments d'arc des deux familles de courbes dont il est composé admettent un facteur intégrant commun.*

C'est la forme même donnée par M. von Lilienthal (*loc. cit.*) au critère que Sophus Lie ([1]) a formulé ainsi :

Pour que les courbes intégrales d'une équation

$$l_1\,du + n_1\,dv = 0$$

fassent partie d'un réseau isotherme sur une surface d'élément linéaire

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

il faut et il suffit que l'expression $l_1\,du + n_1\,dv$ *et le premier membre*

$$\frac{\mathrm{E}n_1 - \mathrm{F}l_1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\,du + \frac{\mathrm{F}n_1 - \mathrm{G}l_1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\,dv$$

de l'équation différentielle des trajectoires orthogonales de ces courbes admettent un facteur intégrant commun.

Désignons, en effet, ce premier membre par $l_2\,du + n_2\,dv$ et comparons les *éléments invariants* (EI)

$$\sqrt{\mathrm{G}l_2^2 - 2\mathrm{F}l_2n_2 + \mathrm{E}n_2^2}\,\frac{l_1\,du + n_1\,dv}{l_1n_2 - n_1l_2},$$

$$\sqrt{\mathrm{G}l_1^2 - 2\mathrm{F}l_1n_1 + \mathrm{E}n_1^2}\,\frac{l_2\,du + n_2\,dv}{l_1n_2 - n_1l_2}$$

avec les expressions correspondantes de Sophus Lie

$$l_1\,du + n_1\,dv, \qquad l_2\,du + n_2\,dv.$$

Pour prouver qu'ils leur sont proportionnels, nous n'avons qu'à vérifier l'identité

$$\mathrm{G}l_2^2 - 2\mathrm{F}l_2n_2 + \mathrm{E}n_2^2 = \mathrm{G}l_1^2 - 2\mathrm{F}l_1n_1 + \mathrm{E}n_1^2.$$

Or cette vérification est immédiate, eu égard aux significations de l_2 et n_2.

7. C'est, au fond, le critère tiré des *éléments invariants* que M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. II, p. 248-249) a employé pour former l'équation aux dérivées partielles des surfaces isother-

([1]) *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, Leipzig, 1891; p. 162.

miques. La surface étant rapportée aux lignes minima ($\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$) de sa représentation sphérique (*voir* ci-dessus, n° 2), si l'on pose

$$z = \frac{\xi - p\alpha - q\beta}{\alpha\beta + 1},$$

l'élément linéaire a pour expression

$$ds^2 = [r\,d\alpha + (z+s)\,d\beta][(z+s)\,d\alpha + t\,d\beta],$$

et le réseau des lignes de courbure a pour équations

$$\pm\sqrt{r}\,d\alpha + \sqrt{t}\,d\beta = 0.$$

Formons ses éléments invariants relativement à l'élément linéaire, d'après les expressions générales (EI); nous aurons ici

$$\mathrm{A} = r(z+s), \qquad 2\mathrm{B} = (z+s)^2 + rt, \qquad \mathrm{C} = t(z+s);$$
$$l_1 = \sqrt{r}, \qquad n_1 = \sqrt{t}; \qquad l_2 = -\sqrt{r}, \qquad n_2 = \sqrt{t}.$$

De là résulte

$$\begin{aligned} \mathrm{C}\,l_2^2 - 2\mathrm{B}\,l_2 n_2 + \mathrm{A}\,n_2^2 &= \sqrt{rt}(z+s+\sqrt{rt})^2, \\ \mathrm{C}\,l_1^2 - 2\mathrm{B}\,l_1 n_1 + \mathrm{A}\,n_1^2 &= -\sqrt{rt}(z+s-\sqrt{rt})^2, \\ l_1 n_2 - n_1 l_2 &= 2\sqrt{rt}. \end{aligned}$$

Par suite, les éléments invariants sont, à des facteurs numériques près,

$$(z+s+\sqrt{rt})\frac{\sqrt{r}\,d\alpha + \sqrt{t}\,d\beta}{\sqrt[4]{rt}}, \qquad (z+s-\sqrt{rt})\frac{\sqrt{r}\,d\alpha - \sqrt{t}\,d\beta}{\sqrt[4]{rt}}.$$

Or M. Darboux considère les deux expressions

$$\frac{\sqrt{r}\,d\alpha + \sqrt{t}\,d\beta}{z+s-\sqrt{rt}}, \qquad \frac{\sqrt{r}\,d\alpha - \sqrt{t}\,d\beta}{z+s+\sqrt{rt}},$$

visiblement proportionnelles aux deux précédentes et il écrit qu'elles admettent un facteur intégrant commun, ce qui conduit à l'équation du quatrième ordre que nous formerons un peu plus loin (*voir* ci-après, n° 9).

8. *Comparaison avec le critère de M. Weingarten.* — Voici,

aux notations près, comment M. Bianchi expose ([1]) le critère de M. Weingarten :

L'élément linéaire d'une surface et sa seconde forme quadratique fondamentale étant respectivement

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2,$$

on introduit trois fonctions λ, μ, ν, *définies par le système*

$$(6)\qquad \begin{cases} E\nu - 2F\mu + G\lambda = 0, \\ L\nu - 2M\mu + N\lambda = 0, \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} - \dfrac{\partial\mu}{\partial u} = B\,\lambda + (B_1 - A)\,\mu - A_1\nu, \\[2mm] \dfrac{\partial\nu}{\partial u} - \dfrac{\partial\mu}{\partial v} = B_1\nu + (B - C_1)\mu - C\lambda, \end{cases}$$

où A, A_1, B, B_1, C, C_1 *sont les symboles de Christoffel formés avec* E, F, G. *L'existence des fonctions* λ, μ, ν *est la condition nécessaire et suffisante pour que la surface soit isothermique.*

Pour vérifier les équations finies (6), on pose

$$\lambda = \rho(EM - FL), \qquad 2\mu = -\rho(GL - EN), \qquad \nu = \rho(FN - GM).$$

Substituant dans les équations aux dérivées partielles, on obtient deux relations qui déterminent les deux dérivées de $\log\rho$; on écrit la condition d'existence de cette fonction auxiliaire : c'est la condition cherchée.

Tout revient donc ici à écrire qu'une certaine expression différentielle est une différentielle exacte. Pour appliquer le critère tiré des éléments invariants, on doit écrire que deux expressions différentielles admettent un facteur intégrant commun. Ces deux opérations ne sont pas, au fond, distinctes l'une de l'autre : en effet, pour vérifier si deux expressions différentielles admettent un facteur intégrant commun, on en forme une troisième et l'on écrit que cette expression différentielle est une différentielle exacte.

Pour ramener les deux procédés l'un à l'autre, rapportons la surface à ses lignes de courbure ($u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$); nous aurons $F = M = 0$ et, par suite, $\lambda = \nu = 0$. Les équations (7) se

---

([1]) *Lezioni di Geometria differenziale,* t. II, p. 30.

réduisent à

$$(7)' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \log \mu}{\partial u} &= \mathrm{A} - \mathrm{B}_1 = \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}}, \\ \frac{\partial \log \mu}{\partial v} &= \mathrm{C}_1 - \mathrm{B} = \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E}}}, \end{aligned} \right.$$

et la condition d'isothermie des lignes de courbure exprime simplement que l'expression

$$d' = \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}}\, du + \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E}}}\, dv$$

est une différentielle exacte.

Or les éléments invariants (qui sont ici les éléments d'arc) du réseau des lignes de courbure ont pour expressions respectives $\sqrt{\mathrm{E}}\, du$ et $\sqrt{\mathrm{G}}\, dv$. L'existence d'un facteur intégrant commun revient à la condition pour que l'expression

$$d'' = \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\, du + \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\, dv$$

soit une différentielle exacte. Mais l'identité

$$d \log \sqrt{\mathrm{EG}} = d' + 2d''$$

montre que d' et d'' sont en même temps des différentielles exactes.

Remarque. — Les fonctions λ, μ, ν étant proportionnelles aux coefficients de la forme invariante aux lignes de courbure

$$\mathfrak{F} = \frac{\mathrm{EM} - \mathrm{FL}}{\mathrm{H}}\, du^2 - \frac{\mathrm{GL} - \mathrm{EN}}{\mathrm{H}}\, du\, dv + \frac{\mathrm{FN} - \mathrm{GM}}{\mathrm{H}}\, dv^2 \quad (\mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}),$$

il paraît préférable d'introduire cette forme elle-même, en posant

$$\rho = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{H}},$$

de manière à avoir

$$\lambda\, du^2 + 2\mu\, du\, dv + \nu\, dv^2 = \mathrm{W}\mathfrak{F}.$$

Alors la nouvelle fonction auxiliaire W a une signification invariante, facile à trouver. Reportons-nous, en effet, aux équations $(7)'$. L'existence de la fonction μ entraîne la condition nécessaire et suffisante

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log \frac{E}{G} = 0. \tag{8}$$

D'autre part, les rayons de courbure principaux étant représentés par R_1 et R_2, la forme invariante $\mathcal{J}$ se réduit ici à

$$\mathcal{J} = \sqrt{EG}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) du\, dv;$$

la fonction auxiliaire W est donc liée à μ par la relation

$$2\mu = W\sqrt{EG}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Mais, la condition (8) étant vérifiée, on peut supposer les paramètres des lignes de courbure choisis de façon que l'on ait $E = G$. Alors, en vertu des équations $(7)'$, la fonction μ se réduit à une constante. En conséquence, *la fonction* W, *dont la condition d'existence exprime l'isothermie des lignes de courbure, est, à un facteur constant près, l'inverse de*

$$\frac{E}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

c'est-à-dire de la courbure moyenne de l'une des transformées par normales parallèles de la surface considérée (transformation de Bour-Christoffel; voir *Annales de l'École Normale supérieure,* 1905, p. 419).

Ajoutons que, d'après l'identité

$$2\mu\, du\, dv = W\mathcal{J},$$

où μ est maintenant une constante, $W\mathcal{J}$ est un produit de deux différentielles. Ainsi, *quand une surface est isothermique, pour changer sa forme invariante aux lignes de courbure $\mathcal{J}$ en un produit de deux différentielles, il suffit de diviser cette forme par la courbure moyenne de l'une des transformées par normales parallèles.* Ceci s'accorde bien avec la proposition de Sophus Lie, aux termes de laquelle les lignes de courbure de toute surface isothermique peuvent être déterminées par des quadratures de différentielles exactes.

On peut mettre le résultat précédent sous une forme un peu différente et dire : *A toute surface isothermique correspond une fonction* ω *telle que l'élément linéaire, multiplié par* ω, *devient un produit de deux différentielles et que la forme invariante aux lignes de courbure devient aussi un produit de deux différentielles lorsqu'on la multiplie par* ω *et qu'on la divise par la différence des courbures principales*. En effet, si l'on désigne par 2Γ la différence des courbures principales, on a, d'après ce qui vient d'être rappelé,

$$\mathfrak{F} = 2\Gamma(\sqrt{E}\,du)(\sqrt{G}\,dv).$$

Ainsi la forme $\mathfrak{F}$ est égale au produit de 2Γ et des éléments invariants $\sqrt{E}\,du$, $\sqrt{G}\,dv$ du réseau des lignes de courbure. Soit $\sqrt{\omega}$ le facteur intégrant commun à ces deux éléments : nous aurons

$$\sqrt{\omega}\sqrt{E} = U'(u), \qquad \sqrt{\omega}\sqrt{G} = V'(v);$$

d'où résulte immédiatement

$$\mathfrak{F} = \frac{2\Gamma}{\omega}dU\,dV, \qquad ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 = \frac{dU^2 + dV^2}{\omega},$$

ce qui démontre la proposition.

III. — Les surfaces a lignes de courbure isothermes-conjuguées et leurs caractéristiques.

9. Pour exprimer la propriété qui définit ces surfaces, il faut écrire que le réseau de leurs lignes de courbure et celui de leurs lignes asymptotiques sont isothermes l'un relativement à l'autre. Les tangentes aux courbes de ces deux réseaux formant en chaque point un faisceau harmonique, nous n'avons à tenir compte que de la condition relative aux éléments invariants. Employons encore les coordonnées tangentielles isotropes de Bonnet (*voir* ci-dessus, nos 2 et 7). L'équation des lignes asymptotiques est

$$A\,d\alpha^2 + 2B\,d\alpha\,d\beta + C\,d\beta^2 = r\,d\alpha^2 + 2(z + s)\,d\alpha\,d\beta + t\,d\beta^2 = 0,$$

ce qui permet de prendre

$$A = r, \qquad B = z + s, \qquad C = t.$$

Pour les lignes de courbure, nous aurons, comme au n° 7,

$$l_1=\sqrt{r},\qquad n_1=\sqrt{t},\qquad l_2=-\sqrt{r},\qquad n_2=\sqrt{t}.$$

De là résulte

$$\begin{gathered}
\mathrm{C}\,l_2^2-2\mathrm{B}\,l_2 n_2+\mathrm{A}\,n_2^2=2\sqrt{rt}(\sqrt{rt}+z+s),\\
\mathrm{C}\,l_1^2-2\mathrm{B}\,l_1 n_1+\mathrm{A}\,n_1^2=2\sqrt{rt}(\sqrt{rt}-z-s),\\
l_1 n_2-n_1 l_2=2\sqrt{rt}.
\end{gathered}$$

En conséquence, les éléments invariants du réseau des lignes de courbure relativement aux asymptotiques sont, à des facteurs numériques près,

$$\sqrt{z+s+\sqrt{rt}}\,\frac{\sqrt{r}\,d\alpha+\sqrt{t}\,d\beta}{\sqrt[4]{rt}},\qquad \sqrt{z+s-\sqrt{rt}}\,\frac{\sqrt{r}\,d\alpha-\sqrt{t}\,d\beta}{\sqrt[4]{rt}}.$$

Il suffira donc d'écrire qu'il existe un facteur intégrant commun aux deux expressions

$$(z+s+\sqrt{rt})^m(\sqrt{r}\,d\alpha+\sqrt{t}\,d\beta),\qquad (z+s-\sqrt{rt})^m(\sqrt{r}\,d\alpha-\sqrt{t}\,d\beta),$$

ce qui donne

$$(\mathrm{E})\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\log\frac{r}{t}-m\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sqrt{\frac{t}{r}}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{z+s+\sqrt{rt}}{z+s-\sqrt{rt}}\right)\\
&\qquad\qquad -m\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sqrt{\frac{r}{t}}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{z+s-\sqrt{rt}}{z+s+\sqrt{rt}}\right)=0.
\end{aligned}\right.$$

L'hypothèse $m=0$ conduit à l'équation

$$(9)\qquad \frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\log\frac{r}{t}=0,$$

qui caractérise (n° 2) les surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme.

En faisant $m=1$, on retrouve l'équation de M. Darboux relative aux surfaces isothermiques. Pour $m=\frac{1}{2}$, on obtient l'équation de M. Eisenhart (*loc. cit.*, p. 226) relative aux surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées.

Ces deux dernières équations ne différant que par les coefficients de leur premier terme, les surfaces qui les vérifient à la fois satisfont visiblement à l'équation (9); il suit de là que la représentation sphérique de leurs lignes de courbure est isotherme. Réciproquement, toute surface qui vérifie à la fois l'équation (9), ainsi que l'une des équations de M. Darboux et de M. Eisenhart, satisfait aussi à l'autre. En conséquence, *si le réseau des lignes de courbure d'une surface est isotherme relativement à deux des trois réseaux formés par ses asymptotiques, ses lignes minima et les lignes minima de sa représentation sphérique, il est isotherme relativement à tous les trois.* On peut encore dire : *Toute surface qui possède deux des propriétés suivantes, lignes de courbure isothermes, représentation sphérique des lignes de courbure isotherme, lignes de courbure isothermes-conjuguées, possède aussi la troisième.* Tel est le cas des surfaces de révolution, des quadriques et, plus généralement, de toutes les surfaces isothermiques à représentation sphérique isotherme.

Nous allons maintenant chercher les caractéristiques de l'équation générale (E).

Le groupe des termes contenant les dérivées du quatrième ordre est, abstraction faite du diviseur commun $(z+s)^2 - rt$,

$$\frac{m(z+s)}{rt}\left(r^2\frac{\partial^4\xi}{\partial\beta^4} - t^2\frac{\partial^4\xi}{\partial\alpha^4}\right) - \frac{(z+s)^2+(2m-1)rt}{rt}\left(r\frac{\partial^4\xi}{\partial\beta^3\,\partial\alpha} - t\frac{\partial^4\xi}{\partial\beta\,\partial\alpha^3}\right),$$

de sorte que les caractéristiques sont définies par l'équation

$$\begin{aligned}&m(z+s)(r^2\,d\alpha^4 - t^2\,d\beta^4)\\&\quad+[(z+s)^2+(2m-1)rt](r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2)\,d\alpha\,d\beta = 0,\end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$(r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2)\left\{m(z+s)(r\,d\alpha^2 + t\,d\beta^2) + [(z+s)^2+(2m-1)rt]\,d\alpha\,d\beta\right\} = 0.$$

Si l'on fait $m = 0$, on trouve

$$(r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2)\,d\alpha\,d\beta = 0.$$

Donc *les caractéristiques des surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme sont les lignes de courbure et les lignes qui correspondent aux lignes minima de la représentation sphérique.*

Pour $m = 1$, il vient

$$(r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2)[r\,d\alpha + (z+s)\,d\beta][(z+s)\,d\alpha + t\,d\beta] = 0,$$

ce qui vérifie un théorème que j'ai déjà démontré autrement : *les caractéristiques de l'équation des surfaces isothermiques sont les lignes de courbure et les lignes minima* (voir *Annales de l'École Normale supérieure*, 1906).

Pour $2m = 1$, en écartant l'hypothèse $z + s = 0$, qui correspond aux surfaces minima signalées plus haut, on a

$$(r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2)[r\,d\alpha^2 + 2(z + s)\,d\alpha\,d\beta + t\,d\beta^2] = 0.$$

Ainsi *les caractéristiques de l'équation des surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées sont les lignes de courbure et les lignes asymptotiques*. Cette proposition devra intervenir dans la théorie des surfaces dont il s'agit, de la même façon que la proposition ci-dessus intervient dans la recherche des surfaces isothermiques dépendant de fonctions arbitraires.

Ces deux théorèmes ne pouvaient d'ailleurs être prévus d'après les seules définitions des surfaces qu'ils concernent, car nous savons (n° 4) que ces surfaces sont également définies par l'isothermie relative de *trois couples* de réseaux, tandis qu'un seul de ces couples de réseaux est formé de leurs caractéristiques.

IV. — Compatibilité des conditions d'isothermie et questions diverses.

10. Dans les deux cas que nous venons d'étudier, l'une des conditions pour l'isothermie relative des deux réseaux considérés, celle du faisceau harmonique, était vérifiée d'elle-même. Il n'est resté que la condition concernant les éléments invariants : ces éléments étant exprimés au moyen d'une fonction inconnue ξ et de ses dérivées des deux premiers ordres, on a obtenu dans les deux cas *une équation* du quatrième ordre.

Si l'on veut exprimer qu'une surface présente l'isothermie relative de deux réseaux déterminés, on aura généralement *deux conditions distinctes*. Supposons que les équations différentielles des deux réseaux dépendent d'une fonction inconnue ξ et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement. La condition du faisceau harmonique s'exprime par une équation d'ordre n ; la condition relative aux éléments invariants donnera une équation qui sera généralement de l'ordre $n+2$ et ces deux équations aux dérivées partielles pourront n'admettre que des solutions fort particulières, ou même être incompatibles. C'est ce dont on s'assurerait en traitant des exemples convenablement choisis.

Pour définir des classes très étendues de surfaces présentant l'isothermie relative de deux réseaux, on pourra se donner *les deux familles* de l'un des réseaux et seulement *l'une des familles* de l'autre. Si les équations différentielles de ces trois familles dépendent d'une fonction inconnue ξ et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement, celle de la quatrième famille, qui sera fournie par la condition du faisceau harmonique, dépendra des mêmes dérivées et la condition relative aux éléments invariants fournira *une équation* de l'ordre $n+2$ en général.

On peut aussi, dans ce cas, répéter le raisonnement bien connu qui conduit à la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes $\varphi=$ const. constituent, avec leurs trajectoires orthogonales $\chi=$ const., un réseau isotherme (au sens classique du mot) sur une surface donnée. La condition d'orthogonalité $\Delta(\varphi,\chi)=0$ exprime simplement que les courbes $\varphi=$ const., $\chi=$ const. qui se croisent en chaque point de la surface forment un faisceau harmonique avec ses lignes minima. Elle n'implique aucunement et la suite de la démonstration n'implique pas davantage que la forme quadratique de différentielles dont les coefficients figurent dans les paramètres $\Delta\varphi$, $\Delta\chi$, $\Delta(\varphi,\chi)$, $\Delta_2\varphi$ soit un élément linéaire. En conséquence, *pour que les courbes* $\varphi=$ const. *fassent partie d'un réseau isotherme relativement au réseau défini par l'équation*

$$\mathcal{F}=\mathrm{A}\,du^2+2\mathrm{B}\,du\,dv+\mathrm{C}\,dv^2=0,$$

il faut et il suffit que le quotient des deux paramètres $\Delta_2\varphi$ *et* $\Delta\varphi$, *calculés par rapport à* $\mathcal{F}$, *soit une fonction de* φ. On arrive ainsi aux conclusions qui viennent d'être énoncées.

11. Il y a plus. La règle précédente fait connaître l'équation dont dépend *la recherche de tous les réseaux isothermes* relativement au réseau défini par l'équation $\mathcal{F}=0$. En outre, les symboles qu'elle fait intervenir étant essentiellement invariants, nous pouvons réduire la forme $\mathcal{F}$ à son terme rectangle, en supposant

$A = C = o$. Il vient alors simplement

$$\frac{\varphi''_{uv}}{\varphi'_u \varphi'_v} = \Phi(\varphi).$$

Cette équation exprime, comme on sait, que φ est une fonction de la somme $U(u) + V(v)$, où U et V sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs. Ainsi *l'équation*

$$U(u) + V(v) = \text{const.}$$

définit sur une surface quelconque une famille de courbes qui fait partie d'un réseau isotherme relativement au réseau des courbes coordonnées $u =$ const., $v =$ const. Cette remarque générale s'applique en particulier à diverses classes de surfaces dont les courbures principales sont fonctions l'une de l'autre : le réseau (u, v) étant composé des lignes de courbure, les rayons principaux sont fonctions de $U(u) + V(v)$ pour les hélicoïdes, pour les surfaces isothermiques (*voir* la thèse de M. Caronnet, Paris, 1894), pour celles dont la représentation sphérique est isotherme, pour celles dont les lignes de courbure sont isothermes-conjuguées (Eisenhart), pour celles qui présentent une famille de lignes de courbure planes (Dini, Dobriner) ou sphériques et, sans doute, pour d'autres encore.

12. Proposons-nous, en terminant, la question inverse de celle qui fait l'objet du théorème III :

Étant données deux expressions différentielles

$$M_1(l_1\, du + n_1\, dv), \quad M_2(l_2\, du + n_2\, dv)$$

qui sont supposées admettre un facteur intégrant commun, trouver le réseau isotherme relativement au réseau (R) *défini par l'équation*

$$(l_1\, du + n_1\, dv)(l_2\, du + n_2\, dv) = o.$$

Les deux inconnues du problème sont les rapports des coefficients A, B, C de l'équation

$$\mathfrak{F} = A\, du^2 + 2B\, du\, dv + C\, dv^2 = o,$$

qui définit le réseau cherché. Pour déterminer ces rapports, nous allons écrire que les deux expressions données sont proportionnelles aux éléments invariants (El) du réseau (R) relativement au réseau $\mathcal{F} = 0$; il vient ainsi

$$C l_2^2 - 2 B l_2 n_2 + A n_2^2 = \lambda M_1^2,$$
$$C l_1^2 - 2 B l_1 n_1 + A n_1^2 = \lambda M_2^2,$$

λ étant une indéterminée. De plus, les réseaux (R) et ($\mathcal{F}$) devant se diviser harmoniquement, nous avons

$$C l_1 l_2 - B(l_1 n_2 + n_1 l_2) + A n_1 n_2 = 0.$$

Ainsi se trouve constitué un système de trois équations du premier degré à trois inconnues dont le déterminant $(l_1 n_2 - n_1 l_2)^2$ est différent de zéro. Il fait connaître A, B, C en fonctions des données et du coefficient λ auquel on peut attribuer telle expression qu'on veut.

En appliquant la règle précédente aux deux expressions différentielles

$$(z + s + \sqrt{rt})^m (\sqrt{r}\, d\alpha + \sqrt{t}\, d\beta), \qquad (z + s - \sqrt{rt})^m (\sqrt{r}\, d\alpha - \sqrt{t}\, d\beta),$$

considérées ci-dessus (n° 9), on trouve sans peine l'équation

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = {} & [(z + s + \sqrt{rt})^{2m} - (z + s - \sqrt{rt})^{2m}](r\, d\alpha^2 + t\, d\beta^2) \\ & + 2\sqrt{rt}[(z + s + \sqrt{rt})^{2m} + (z + s - \sqrt{rt})^{2m}]\, d\alpha\, d\beta = 0,\end{aligned}$$

pour définir le réseau isotherme relativement au réseau des lignes de courbure

$$r\, d\alpha^2 - t\, d\beta^2 = 0.$$

Si l'on rapporte la surface à ses lignes de courbure $du\, dv = 0$, on voit facilement qu'il faut remplacer les expressions précédentes par ces deux-ci :

$$(10) \qquad \frac{\sqrt{E}\, du}{R_1^{1-m}}, \quad \frac{\sqrt{G}\, dv}{R_2^{1-m}},$$

dont les numérateurs sont les éléments d'arc ds_1 et ds_2 des lignes de courbure ; dans chaque dénominateur figure le rayon de la section principale tangente à la ligne de courbure considérée.

Supposons que ces deux expressions, visiblement invariantes, admettent un facteur intégrant commun et cherchons le réseau dont cette hypothèse entraîne l'isothermie relativement aux lignes de courbure $du\,dv = 0$. Par l'application des formules ci-dessus, on trouve immédiatement

$$A = \lambda \frac{E}{R_1^{2-2m}}, \qquad B = 0, \qquad C = \lambda \frac{G}{R_2^{2-2m}};$$

d'où résulte l'équation du réseau cherché

$$\mathfrak{F} = \frac{E\,du^2}{R_1^{2-2m}} + \frac{G\,dv^2}{R_2^{2-2m}} = 0.$$

Pour $m = 0$, on a les lignes minima de la représentation sphérique; pour $m = 1$, celles de la surface elle-même; pour $2m = 1$ ses lignes asymptotiques. Ainsi les surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme, les surfaces isothermiques et les surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées rentrent dans la catégorie plus générale des surfaces dont les lignes de courbure forment un réseau isotherme relativement au réseau défini par l'équation $\mathfrak{F} = 0$, où m est une constante arbitraire. On peut donc définir ces trois classes de surfaces par la condition que les deux expressions (10) admettent un facteur intégrant commun, pour les trois valeurs correspondantes de m.

FIN DU TOME XXXV.

ERRATA.

—

Page 184, ligne 4, *au lieu de* α, *lire* α_1.
Même page, ligne 10, *au lieu de* σ''_1, *lire* σ''_2.
Page 188, ligne 3, *au lieu de* $\sigma'_1\,\sigma'_1\,\sigma'_3$, *lire* $\sigma'_1\,\sigma'_2\,\sigma'_3$.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXXV.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*)

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XXXV.

39316 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME TRENTE-CINQUIÈME.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

A LA SORBONNE.

—

1907

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.