This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

### Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

### Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

### Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen,** der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher

hulmänner des In- und Aus-
en Lehrenden und Lernenden
rlich sein werden. **Verlags-**
lägigem Gebiete werden mir
liche Werke über denselben
d, stets sehr willkommen sein.
gen mache ich ganz besonders
ften zu München und Wien
u Göttingen herausgegebene
**issenschaften** aufmerksam,
, die Analysis, die Geometrie,
d Geophysik und die Astro-
d historische, philosophische
ein Generalregister zu obigen

e mathematischen und natur-
ags, als da sind: Die **Mathe-**
**athematica,** das **Archiv der**
**sberichte der Deutschen**
**hrift für Mathematik** und
, die **Zeitschrift für mathe-**
**n Unterricht,** ferner **Natur**
n naturkundlichen Unterricht
**chrift** u. a.
zen Zwischenräumen: „**Mit-**
**. G. Teubner**“. Diese „Mit-
Exemplaren sowohl im In- als
, sollen das Publikum, welches
von den erschienenen, unter
preiteten Unternehmungen des
und sind ebenso wie das bis
ei- bis dreimal neu gedruckte
**bner auf dem Gebiete der**
**Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften** nebst **Grenzgebieten,** 96. Ausgabe [XL u. 168 S. gr. 8], sowie der Nachtrag 1901—1903 [XII u. 56 S.] zu diesem Katalog in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

**B. G. Teubner.**

Math 3029.04

SCIENCE CENTER LIBRARY

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
**PROF. JOHN FARRAR, LL.D.**
AND HIS WIDOW
**ELIZA FARRAR**
FOR
“BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY”

25366

# ÜBUNGSBUCH

ZUM STUDIUM DER

# HÖHEREN ANALYSIS

VON

DR. OSKAR SCHLÖMILCH.

ERSTER TEIL:

AUFGABEN AUS DER DIFFERENTIALRECHNUNG.

FÜNFTE AUFLAGE.

BEARBEITET VON

DR. E. NAETSCH,
A.-O. PROFESSOR AN DER KGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU DRESDEN.

MIT 85 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

Math 3029.04

Farrar fund

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

## Vorwort zur ersten Auflage.

In einer zwanzigjährigen Lehrerpraxis hat sich bei mir eine reichhaltige Sammlung grösstentheils neuer Aufgaben und Beispiele aus der höheren Analysis gebildet, deren Veröffentlichung ich hiermit aus zwei Gründen unternehme; einerseits, weil eine beträchtliche Menge von neuem didaktischen Material immerhin willkommen sein wird, andererseits, weil selbst die bekanntesten Werke dieser Richtung sehr empfindliche Lücken zeigen. In der Sohncke'schen Aufgabensammlung z. B. fehlen Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen ganz und gar, von Reihenentwickelungen findet man nur die gewöhnlichen, in jedem Lehrbuche stehenden Beispiele, jedoch ohne Angabe der Giltigkeitsgrenzen, die Doppelintegrale sind durch ein einziges Beispiel, dreifache Integrale gar nicht vertreten, die Integration der Differentialgleichungen ist mit völligem Stillschweigen übergangen — kurz, es fehlen gerade diejenigen Partieen, ohne welche man in der Mechanik, mathematischen Physik u. s. w. auch nicht einen Schritt thun kann. Diesen Mängeln dürfte das vorliegende Werkchen abhelfen, jedoch sind dabei die übrigen Theile der Analysis keineswegs stiefmütterlich behandelt worden.

Bei den Aufgaben über die Differentiation entwickelter Functionen einer Variabelen (§§ 2—6) erschien es mir zweckmässig, häufig die verschiedenen, zum Ziele führenden Wege anzudeuten und dadurch dem Studirenden die Mittel zur Controle seiner Rechnung an die Hand zu geben, auch habe ich kleine Rechnungsvortheile bei jeder sich darbietenden Gelegenheit erwähnt. In § 5 findet sich eine Reihe von Fragen, welche den Studirenden zur Uebung in der Transformation cyclometrischer Functionen veranlassen sollen. Die Aufgaben sind übrigens soweit als möglich stufenweis, von leichten zu schwereren fortschreitend, geordnet; bei der ersten Aufgabe jeder Art ist die Lösung etwas ausführlicher gezeigt, bei den übrigen Aufgaben sind nur, wo es nöthig schien, Andeutungen zur Lösung gegeben. Hier und da wird man auch neue wissenschaftliche Kleinigkeiten finden, wie z. B. in den Abschnitten über isokline Normalen und reciproke Maxima und Minima.

Dem vorliegenden ersten Theile hoffe ich einen zweiten, Aufgaben aus der Integralrechnung enthaltenden Theil rasch folgen zu lassen.

Dresden, am 1. Juli 1868.

**Schlömilch.**

## Vorwort zur zweiten Auflage.

In Folge der durchaus beifälligen Aufnahme, welche dem vorliegenden Werke bei seinem ersten Erscheinen zu Theil geworden ist, habe ich von wesentlichen Aenderungen abgesehen, wohl aber mancherlei Verbesserungen angebracht und eine Reihe neuer Aufgaben hinzugefügt; die letzteren wird man theils in der Einleitung, theils in den Capiteln IV, VIII und X finden.

Dresden, am 1. August 1873.

**Schlömilch.**

## Vorwort zur dritten Auflage.

Auch die vorliegende Auflage unterscheidet sich von ihrer Vorgängerin durch eine Zahl neuer Beispiele und Aufgaben. Unter diesen darf ich wohl den Abschnitt über die „Grenzwerthe der Functionen zweier Variabelen“ besonders hervorheben, weil dieses Capitel, trotz seiner Eigenthümlichkeiten, bisher noch sehr wenig Beachtung gefunden hat.

Dresden, am 15. Juli 1878.

**Schlömilch.**

## Vorwort zur vierten Auflage.

Da kein Grund zu einer wesentlichen Umgestaltung des Werkes vorlag, so habe ich mich auch bei dieser neuen Ausgabe darauf beschränkt, eine Reihe neuer Beispiele und Aufgaben hinzuzufügen.

Dresden, im October 1887.

**Schlömilch.**

## Vorwort zur fünften Auflage.

Bei der wenige Jahre nach Oskar Schlömilchs Ableben unternommenen Bearbeitung der vorliegenden fünften Auflage ist der Wunsch maßgebend gewesen, dem Werke seine Eigenart, durch die es sich seit nunmehr 36 Jahren zahlreiche Freunde erworben hat, durchaus zu erhalten. Es wurden aus diesem Grunde wesentliche Änderungen weder im Stoff noch in der Anordnung vorgenommen, Zusätze und Einschaltungen aber nur in beschränktem Umfange angebracht; dieselben sind übrigens durch kleineren Druck als solche kenntlich gemacht worden.

Bei den Einschaltungen handelt es sich namentlich um zweierlei; einerseits sind gewisse allgemeine Prinzipien, auf welche sich ganze Gruppen von Aufgaben zurückführen lassen, hervorgehoben, gelegentlich auch als Quellen neuer Übungsbeispiele verwertet worden; besonders ist dies in § 19a geschehen; anderseits aber sollten die Methoden der Differentialrechnung auf einige Fragen angewendet werden, welche in der darstellenden Geometrie vorkommen und dort mittels geometrischer Überlegungen oder direkt auf graphischem Wege erledigt zu werden pflegen; in dieser Hinsicht seien besonders die Aufgaben 21 und 22 in § 15, 18 in § 16, sowie 7 in § 19a erwähnt.

In § 13a sind die auf die Vertauschung der Variabeln (Einführung von neuen Veränderlichen) bezüglichen Betrachtungen der früheren Auflagen (§ 13) weiter ausgeführt und auf zwei Beispiele angewendet worden: auf die für die Theorie der linearen Differentialgleichungen interessanten Formeln $x = \Phi(u)$, $y = v\,\Psi(u)$, und auf das für die projektive Geometrie so wichtige Gleichungssystem $x = \frac{a_1 u + b_1 v + c_1}{a_3 u + b_3 v + c_3}$, $y = \frac{a_2 u + b_2 v + c_2}{a_3 u + b_3 v + c_3}$. — In § 19a wird der Begriff der Transformation der Ebene eingeführt, der ja implicite bereits in § 13 unter II und in § 13a vorkommt — ist doch z. B. das eben angeführte Gleichungssystem nichts anderes als die analytische Darstellung der allgemeinsten projektiven Transformation der Ebene; es wird darauf hingewiesen, daß bei den Aufgaben der drei vorangegangenen Paragraphen gewisse Transformationen der Ebene eine Rolle spielen, und daß sich unter diesen letzteren insbesondere eine Berührungstransformation (die Fußpunkttransformation) befindet; im Anschluß an diese Wahrnehmungen werden die beiden wichtigsten Typen von Transformationen der Ebene, die Punkttransformationen und Berührungstransformationen, kurz charakterisiert. Hierauf werden einige spezielle Transformationen verschiedener Art eingeführt und an diese eine Reihe von Übungsbeispielen angeknüpft. — Auch die in Kapitel VIII (einhüllende Kurven und Flächen) gelegentlich eingeschalteten Bemerkungen bringen die Tatsache zur Sprache, daß sich nicht selten mehrere Aufgaben einem gemeinschaftlichen Gesichtspunkt unterordnen lassen, wenn beachtet wird, daß sie die Benutzung einer gewissen Transformation verlangen; und zwar kommt an den fraglichen Stellen namentlich die zur Fußpunkttransformation inverse Transformation sowie die Transformation durch reziproke Polaren in Betracht. — In Kapitel IX (vieldeutige Ausdrücke) hat § 29 einen Zusatz erhalten, an dessen Schluß auch auf die geometrische Bedeutung der auseinandergesetzten Theorie hingewiesen wird.

Der Firma B. G. Teubner sei an dieser Stelle für ihr bereitwilliges Eingehen auf die vor und während der Drucklegung des Werkes geäußerten Wünsche des Bearbeiters dessen aufrichtigster Dank ausgesprochen.

Dresden-Blasewitz, im Oktober 1904.

**E. Naetsch.**

# Inhaltsverzeichnis.

## Einleitung.



## Kapitel I.

**Einfache Differentiation von entwickelten Funktionen einer Variabeln.**



## Kapitel II.

**Mehrfache Differentiationen von entwickelten Funktionen einer Variabeln.**



## Kapitel III.

**Differentiation von Gleichungen zwischen mehreren Variabeln.**

## Kapitel IV.

### Die Diskussion ebener Kurven.



## Kapitel V.

### Aufgaben über geometrische Orte.



## Kapitel VI.

### Die Diskussion doppelt gekrümmter Kurven.



## Kapitel VII.

### Die Diskussion der Flächen.



## Kapitel VIII.

### Einhüllende Kurven und Flächen.



## Kapitel IX.

### Bestimmung der Werte vieldeutiger Ausdrücke.

## Kapitel X.

### Maxima und Minima der Funktionen.



## Kapitel XI.

### Unendliche Reihen.



## Kapitel XII.

### Funktionen und Reihen mit komplexen Variabeln.



---

### Berichtigung.

Seite 315 Zeile 5 und 9 ist im Nenner $\psi'$ statt $4'$ zu lesen.

# Einleitung.

## Grenzwerte von Funktionen einer Variabeln.

I. Um den Grenzwert zu ermitteln, welchem sich eine Funktion $f(x)$ in dem Falle nähert, wo an die Stelle von $x$ eine über jede bestimmte Größe hinauswachsende Zahl $\omega$ gesetzt wird, reicht in vielen Fällen eine bloße Umformung von $f(x)$ hin. Die folgenden Aufgaben werden dies zeigen.

**Aufgabe 1.** Es soll $Lim\left(\sqrt{\omega+\alpha}-\sqrt{\omega}\right)$ für ein konstantes $\alpha$ bestimmt werden.

Wollte man ohne weiteres $\omega = \infty$ setzen, so würde man den nichtssagenden Ausdruck $\infty - \infty$ erhalten; betrachtet man aber die gegebene Funktion als einen Bruch mit dem Nenner 1 und multipliziert Zähler und Nenner mit $\sqrt{\omega+\alpha}+\sqrt{\omega}$, so führt die nunmehrige Gleichung

$$\sqrt{\omega+\alpha}-\sqrt{\omega} = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega+\alpha}+\sqrt{\omega}}$$

zu dem Resultate

$$Lim\left(\sqrt{\omega+\alpha}-\sqrt{\omega}\right) = 0.$$

**Aufgabe 2.** Man sucht $Lim\left[\sqrt{\omega(\omega+\alpha)}-\omega\right]$.

Durch ein dem vorigen ganz ähnliches Verfahren ergibt sich zunächst

$$\sqrt{\omega(\omega+\alpha)}-\omega = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\frac{\alpha}{\omega}}+1}$$

und hieraus

$$Lim\left[\sqrt{\omega(\omega+\alpha)}-\omega\right] = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Bemerkung. In älteren Werken findet man häufig die Behauptung, daß eine endliche Größe gegen eine unendlich wachsende Zahl verschwinde, und daß mithin $\omega+\alpha$ durch $\omega$ zu ersetzen sei.

Die Unrichtigkeit dieser Schlußweise zeigt sich an den obigen zwei Aufgaben, denn nach jener Weglassungsregel würde man zwar bei Nr. 1 das richtige Resultat $\sqrt{\omega} - \sqrt{\omega} = 0$, bei Nr. 2 aber das falsche Resultat $\omega - \omega = 0$ erhalten.

Ebenso ungerechtfertigt ist die nicht selten von ungenauen Schriftstellern benutzte Gleichung $\frac{1}{\infty} = 0$. Der Quotient $\frac{1}{\omega}$ wird nämlich unter keinen Umständen gleich der Null, vielmehr bildet letztere nur den idealen Grenzwert, welchem sich $\frac{1}{\omega}$ asymptotisch nähert.

**Aufgabe 3.** Nach demselben Verfahren ist die Richtigkeit der Gleichung

$$Lim\left[\sqrt{(\omega+\alpha)(\omega+\beta)} - \omega\right] = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

zu beweisen.

**Aufgabe 4.** Es soll

$$Lim\frac{lg\,(\alpha + \beta e^{\omega})}{\omega}$$

bestimmt werden, wobei $e$ die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Unter Berücksichtigung der Identität

$$\alpha + \beta e^{\omega} = e^{\omega}(\alpha e^{-\omega} + \beta)$$

erhält man

$$Lim\frac{lg\,(\alpha + \beta e^{\omega})}{\omega} = Lim\left[1 + \frac{lg\,(\alpha e^{-\omega} + \beta)}{\omega}\right] = 1.$$

**Aufgabe 5.** Man sucht den Grenzwert

$$Lim\left\{lg\,(\alpha + \beta e^{\omega}) \cdot lg\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)\right\}.$$

Derselbe ist identisch mit

$$Lim\left\{\frac{lg\,(\alpha+\beta e^{\omega})}{\omega} \cdot lg\left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]\right\} = 1.$$

II. Eine zu Grenzbestimmungen häufig anwendbare Methode besteht darin, daß man die veränderliche Größe $V$, deren Grenzwert gesucht wird, zwischen zwei Variabeln $U$ und $W$ einschließt, von denen die eine kleiner, die andere größer als $V$ ist, daß man also eine Ungleichung von der Form

$$U < V < W$$

aufstellt. Bezeichnet $\varepsilon$ einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch, so kann die vorstehende Ungleichung auch durch die Gleichung

$$V = U + \varepsilon(W - U)$$

ersetzt werden. Falls nun $U$ und $W$ sich einer gemeinschaftlichen Grenze $K$ nähern, konvergiert $W - U$ gegen den Wert $K - K = 0$ und dann ergibt sich

$$Lim\, V = K.$$ [1])

Der Anwendung dieses Verfahrens schicken wir einen vielfach brauchbaren Hilfssatz voraus. In der identischen Gleichung

$$\frac{b^m - a^m}{b - a} = b^{m-1} + b^{m-2}a + b^{m-3}a^2 + \cdots + b\,a^{m-2} + a^{m-1}$$

sei $m$ eine ganze positive Zahl und $0 < a < b$; die rechte Seite erhält alsdann einen zu kleinen Wert, wenn man jedes $b$ durch das kleinere $a$ ersetzt; sie wird dagegen zu groß, wenn für jedes $a$ das größere $b$ geschrieben wird; es ist daher

$$\alpha)\qquad m\,a^{m-1} < \frac{b^m - a^m}{b - a} < m\,b^{m-1}.$$

Bezeichnen ferner $p$ und $q$ ganze positive Zahlen und $x$ eine positive die Einheit übersteigende Größe, so hat man nach dem vorigen

$$\frac{x^q - 1}{x - 1} < q x^{q-1}$$

und um so mehr

$$\frac{x^q - 1}{x - 1} < q x^q, \quad \frac{x^q - 1}{x - 1} < q x^{q+1}, \quad \frac{x^q - 1}{x - 1} < q x^{q+2}, \ldots$$

$$\frac{x^q - 1}{x - 1} < q x^{p-1},$$

wobei natürlich $p > q$ vorausgesetzt ist. Die Addition dieser Ungleichungen liefert

$$(p - q)\frac{x^q - 1}{x - 1} < q\,x^q\frac{x^{p-q} - 1}{x - 1}, \quad \text{woraus} \quad \frac{p}{q} < \frac{x^p - 1}{x^q - 1}$$

folgt; für $x = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{q}}$ wird hieraus

$$\frac{p}{q}\,a^{\frac{p}{q}-1} < \frac{b^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}}}{b - a}, \quad b > a, \quad p > q.$$

Bezeichnet dagegen $y$ einen positiven echten Bruch, so hat man analog

$$\frac{1-y^q}{1-y} > q y^q, \quad \frac{1-y^q}{1-y} > q y^{q+1}, \ldots \frac{1-y^q}{1-y} > q y^{p-1},$$

mithin durch Addition und für $y = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{q}}$

$$\frac{p}{q} b^{\frac{p}{q}-1} > \frac{b^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}}}{b-a}, \quad b > a, \quad p > q.$$

Die beiden gefundenen Ungleichungen lassen sich für $\frac{p}{q} = \varkappa$ folgendermaßen zusammenziehen

$$\beta) \qquad \varkappa a^{\varkappa-1} < \frac{b^\varkappa - a^\varkappa}{b-a} < \varkappa b^{\varkappa-1}, \quad b > a, \quad \varkappa > 1.$$

Für $\varkappa = \frac{1}{\lambda}$, $a = A^\lambda$, $b = B^\lambda$ wird hieraus

$$\frac{1}{\lambda} A^{1-\lambda} < \frac{B-A}{B^\lambda - A^\lambda} < \frac{1}{\lambda} B^{1-\lambda}, \quad B > A, \quad 0 < \lambda < 1$$

oder, wenn man die reziproken Werte nimmt und der Gleichförmigkeit wegen $A$ und $B$ durch $a$ und $b$ ersetzt,

$$\gamma) \qquad \lambda a^{\lambda-1} > \frac{b^\lambda - a^\lambda}{b-a} > \lambda b^{\lambda-1}, \quad b > a, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Die Ungleichungen $\alpha$), $\beta$), $\gamma$) liefern zusammen den Satz, daß bei positiven $\mu$ der Quotient

$$\frac{b^\mu - a^\mu}{b-a}$$

immer zwischen $\mu a^{\mu-1}$ und $\mu b^{\mu-1}$ enthalten ist.[2])

**Aufgabe 6.** Man sucht den Grenzwert von

$$\sqrt[3]{(\omega+\alpha)(\omega+\beta)(\omega+\gamma)} - \omega.$$

Setzt man in der vorigen Ungleichung

$$\lambda = \tfrac{1}{3}, \quad a = \omega^3, \quad b = (\omega+\alpha)(\omega+\beta)(\omega+\gamma)$$

und zur Abkürzung

$$\frac{b}{a} = \left(1+\frac{\alpha}{\omega}\right)\left(1+\frac{\beta}{\omega}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\omega}\right) = R, \text{ mithin } b = aR,$$

so erhält man

$$\frac{1}{3\omega^2 \sqrt[3]{R^2}} < \frac{\sqrt[3]{(\omega+\alpha)(\omega+\beta)(\omega+\gamma)} - \omega}{(\alpha+\beta+\gamma)\omega^2 + (\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)\omega + \alpha\beta\gamma} < \frac{1}{3\omega^2}$$

oder

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{R^2}}\left\{\alpha+\beta+\gamma+\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\omega}+\frac{\alpha\beta\gamma}{\omega^2}\right\}$$
$$<\sqrt[3]{(\omega+\alpha)(\omega+\beta)(\omega+\gamma)}-\omega<$$
$$\frac{1}{3}\left\{\alpha+\beta+\gamma+\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\omega}+\frac{\alpha\beta\gamma}{\omega^2}\right\}.$$

Wegen $Lim\, R=1$ folgt nun

$$Lim\left\{\sqrt[3]{(\omega+\alpha)(\omega+\beta)(\omega+\gamma)}-\omega\right\}=\tfrac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma).$$

**Aufgabe 7.** Unter der Voraussetzung, daß $\alpha$, $\beta$, $\gamma, \ldots \mu$ endliche Größen sind und $n$ deren Anzahl bedeutet, ist nach der vorigen Methode die Gleichung abzuleiten

$$Lim\left\{\sqrt[n]{(\omega+\alpha)(\omega+\beta)\ldots(\omega+\mu)}-\omega\right\}=\frac{\alpha+\beta+\cdots+\mu}{n}.^{3})$$

III. Ein drittes Verfahren zur Ermittelung von Grenzwerten besteht darin, daß man eine neue Variable einführt und damit die gegebene Funktion auf eine andere Form bringt, deren Grenzwert bekannt ist.

**Aufgabe 8.** Für ein konstantes $\alpha$ soll

$$Lim\left\{\left(1+\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}$$

ermittelt werden.

Setzt man $\frac{\omega}{\alpha}=\tau$, wo $\tau$ eine gleichzeitig mit $\omega$ unendlich wachsende Zahl bedeutet, so hat man identisch

$$\left(1+\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}=\left[\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}\right]^{\alpha},$$

mithin, weil $\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}$ gegen die Grenze $e$ konvergiert,

$$Lim\left\{\left(1+\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}=e^{\alpha}.$$

**Aufgabe 9.** Man verlangt den Wert von

$$Lim\left(\omega \sin\frac{\alpha}{\omega}\right).$$

Für $\frac{\alpha}{\omega}=\vartheta$, wo nun $\vartheta$ gegen die Null konvergiert, ist

$$\omega \sin\frac{\alpha}{\omega}=\alpha\frac{\sin\vartheta}{\vartheta},$$

und mithin

$$Lim\left(\omega \sin\frac{\alpha}{\omega}\right)=\alpha.$$

**Aufgabe 10.** Auf ähnliche Art sind die Formeln

$$Lim\left\{\omega\left(1-\cos\frac{\alpha}{\omega}\right)\right\}=0,\quad Lim\left\{\omega^2\left(1-\cos\frac{\alpha}{\omega}\right)\right\}=\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

zu beweisen.

**Aufgabe 11.** Man verlangt den Wert von

$$Lim\left\{\left(\cos\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}.$$

Wird $\sin^2\frac{\alpha}{\omega}=\frac{1}{\tau}$ gesetzt, so ergibt sich

$$Lim\left\{\left(\cos\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}=Lim\left\{\left[\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}\right]^{\frac{1}{2}\left(\omega\sin\frac{\alpha}{\omega}\right)\sin\frac{\alpha}{\omega}}\right\}=1.$$

**Aufgabe 12.** Auf ähnliche Art ist die Formel

$$Lim\left\{\left(\cos\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega^2}\right\}=e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$$

zu beweisen.

**Aufgabe 13.** Man sucht den Wert von

$$Lim\left\{\left(1+\varkappa\, tg\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}.$$

Wird $tg\frac{\alpha}{\omega}=\frac{1}{\tau}$ gesetzt, so ergibt sich

$$Lim\left\{\left(1+\varkappa\, tg\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}=Lim\left\{\left[\left(1+\frac{\varkappa}{\tau}\right)^{\tau}\right]^{\omega\sin\frac{\alpha}{\omega}\sec\frac{\alpha}{\omega}}\right\}=e^{\varkappa\alpha}.$$

**Aufgabe 14.** Mittels der Formeln in Nr. 11 und 13 soll die Gleichung

$$Lim\left\{\left(\cos\frac{\alpha}{\omega}+\varkappa\sin\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}=e^{\varkappa\alpha}$$

bewiesen werden.

IV. Grenzwerte von Summen. Wenn eine Funktion $f(x)$ oder kurz $X$ sich der Grenze $A$ nähert, wenn demnach die Differenz $X-A$ gegen die Null konvergiert, so kann man $X=A+\delta$ setzen, wo $\delta$ zwar nicht näher bekannt ist, jedenfalls aber beim Grenzübergang verschwinden muß. Auf mehrere Funktionen $X_1$, $X_2, \ldots X_n$, angewendet, führt diese Bemerkung zu der Gleichung

$$\begin{aligned}&X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n\\=&A_1+A_2+A_3+\cdots+A_n\\+&\delta_1+\delta_2+\delta_3+\cdots+\delta_n.\end{aligned}$$

Falls nun $n$ eine endliche Zahl ist und es auch beim Grenzübergange bleibt, erhellt leicht, daß die Summe $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$ sich der Null nähert; man hat dann

$$\begin{aligned} Lim\,(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n) \\ = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n, \end{aligned}$$

d. h. der Grenzwert einer Summe ist gleich der Summe der Grenzwerte der einzelnen Summanden. Wenn dagegen $n$ entweder von Hause aus unendlich groß ist oder es durch den Grenzübergang wird, so kann es geschehen, daß in der Summe $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$ die Abnahme der einzelnen Glieder durch den fortwährenden Zuwachs von Gliedern ausgeglichen wird, daß also die genannte Summe nicht gegen die Null konvergiert; dann ist es aber auch falsch, den Grenzwert einer Summe durch Summierung der Grenzwerte der einzelnen Summanden bestimmen zu wollen. Die folgenden Aufgaben gehören sämtlich dem zweiten Falle an.

**Aufgabe 15.** Man sucht den Grenzwert von

$$S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

für ein unendlich wachsendes $n$.

Jeder einzelne Summand konvergiert gegen die Null, die Summe aber nicht; man hat nämlich

$$Lim\, S_n = Lim\left\{\tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\} = \tfrac{1}{2}.$$

**Aufgabe 16.** Für $n = \infty$ soll der Grenzwert von

$$T_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$$

bestimmt werden.

Auf ähnliche Weise wie vorhin findet man

$$Lim\, T_n = \tfrac{1}{3}.$$

**Aufgabe 17.** Der Grenzwert von

$$U_n = \frac{1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \cdots + n^\mu}{n^{\mu+1}}$$

für ein beliebiges $\mu$ und $n = \infty$ zu bestimmen.

Da es keine, für jedes $\mu$ gültige Summenformel für

$$1^\mu + 2^\mu + \cdots + n^\mu$$

gibt, so hilft man sich damit, daß man die Summe zwischen zwei einschließende Zahlen bringt. Aus der Ungleichung II, $\beta$) ergibt sich nämlich, wenn das eine Mal $a = m$, $b = m + 1$, das andere Mal $a = m - 1$, $b = m$ genommen wird,

$$\varkappa m^{\varkappa-1} < (m+1)^{\varkappa} - m^{\varkappa}, \quad m^{\varkappa} - (m-1)^{\varkappa} < \varkappa m^{\varkappa-1} \, (\varkappa > 1),$$

d. h. zusammen und für $\varkappa = \mu + 1$

$$\frac{m^{\mu+1} - (m-1)^{\mu+1}}{\mu+1} < m^{\mu} < \frac{(m+1)^{\mu+1} - m^{\mu+1}}{\mu+1}, \quad \mu > 0.$$

Addiert man alle für $m = 1, 2, 3, \ldots n$ hieraus entspringenden Ungleichungen und dividiert mit $n^{\mu+1}$, so findet man

$$Lim\, U_n = \frac{1}{\mu+1}, \quad \mu > 0.$$

Aus der Ungleichung II, $\gamma$) erhält man durch ein ähnliches Verfahren

$$\frac{(m+1)^{\mu+1} - m^{\mu+1}}{\mu+1} < m^{\mu} < \frac{m^{\mu+1} - (m-1)^{\mu+1}}{\mu+1}, \quad \mu < 0$$

und hieraus

$$Lim\, U_n = \frac{1}{\mu+1}, \quad \mu > -1$$

$$Lim\, U_n = \infty, \quad \mu < -1.$$

**Aufgabe 18.** Man sucht den Grenzwert von

$$R_n = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha+\beta} + \frac{1}{n\alpha+2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}$$

für den Fall $n = \infty$. Hierbei mögen $\alpha$ und $\beta$ positiv sein.

Aus der für $a < b$ geltenden Ungleichung

$$b^m - a^m > m(b-a)\, a^{m-1}$$

erhält man für $a = 1$, $b = 1 + \frac{z}{m}$ und durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende $m$

$$e^z - 1 > z, \quad \text{oder} \quad e^z > 1 + z.$$

Auf ähnliche Weise findet man mittels der Ungleichung

$$b^m - a^m < m(b-a)\, b^{m-1}$$

für $a = 1 - \frac{z}{m}$, $b = 1$

$$1 - e^{-z} < z, \quad \text{oder} \quad e^{-z} > 1 - z,$$

und umgekehrt, wenn $z$ ein positiver echter Bruch ist

$$e^z < \frac{1}{1-z}.^{4)}$$

Nimmt man von beiden Ungleichungen die Logarithmen, so hat man

$$lg(1+z) < z < lg\left(\frac{1}{1-z}\right), \quad (0 < z < 1).$$

Man erteile nun dem $z$ der Reihe nach die Werte

$$\frac{\beta}{n\alpha}, \quad \frac{\beta}{n\alpha+\beta}, \quad \frac{\beta}{n\alpha+2\beta}, \cdots \frac{\beta}{n\alpha+(n-1)\beta}$$

und addiere alle entstehenden Ungleichungen; für $n=\infty$ ergibt sich dann

$$Lim\, R_n = \frac{lg(\alpha+\beta) - lg\,\alpha}{\beta}.^{5)}$$

**Aufgabe 19.** Für $n=\infty$ soll der Grenzwert von

$$W_n = \frac{n-1^2}{1\cdot 2\cdot(n+1)} + \frac{n-2^2}{2\cdot 3\cdot(n+2)} + \frac{n-3^2}{3\cdot 4\cdot(n+3)} + \cdots + \frac{n-n^2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+n)}$$

ermittelt werden.

Die einzelnen Summanden nähern sich den Grenzen

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \cdots$$

dagegen ist $Lim\, W_n$ nicht gleich der Summe dieser einzelnen Grenzwerte, d. h. nicht gleich 1 (vgl. § 35 unter 1). Man hat nämlich identisch

$$\frac{n-k^2}{k(k+1)(n+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+k},$$

mithin

$$W_n = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} - \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right\},$$

und, wenn man den in Aufgabe 18 ermittelten Grenzwert benutzt,

$$Lim\, W_n = 1 - lg\,2.$$

**Aufgabe 20.** Unter der Voraussetzung eines positiven echt gebrochenen $\alpha$ soll der Grenzwert von

$$S_n = \left(\alpha + \beta\frac{\sqrt{1}}{n}\right)^2 + \left(\alpha^2 + \beta\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^2 + \left(\alpha^3 + \beta\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\alpha^n + \beta\frac{\sqrt{n}}{n}\right)^2$$

für $n=\infty$ ermittelt werden.

Die einzelnen Summanden nähern sich den Grenzen $\alpha^2$, $\alpha^4$, $\alpha^6$, usw., doch ist $Lim\, S_n$ nicht gleich $\alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \cdots$ Nach Auflösung der Parenthesen ergibt sich vielmehr

$$S_n = \frac{\alpha^2(1-\alpha^{2n})}{1-\alpha^2} + 2\beta\frac{s_n}{n} + \frac{1}{2}\beta^2\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

wobei zur Abkürzung

$$s_n = \alpha\cdot\sqrt{1} + \alpha^2\cdot\sqrt{2} + \alpha^3\cdot\sqrt{3} + \cdots + \alpha^n\cdot\sqrt{n}$$

gesetzt wurde.

Die Summe dieser Reihe ist aber positiv und kleiner als

$$(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^n)\sqrt{n},$$

mithin

$$0 < s_n < \frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha}\sqrt{n}, \quad \text{daher} \quad 0 < \frac{s_n}{n} < \frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha}\,\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Für $n = \infty$ folgt nun wegen $Lim(\alpha^n) = 0$

$$Lim\, S_n = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\beta^2}{2}.$$

**Aufgabe 21.** Man sucht den Grenzwert von

$$S_n = \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{n}} + \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta}{n}} + \sqrt{\alpha^3 + \frac{\beta}{n}} + \cdots + \sqrt{\alpha^n + \frac{\beta}{n}},$$

worin $\alpha$ einen positiven echten Bruch, $\beta$ eine beliebige positive Konstante bedeutet und alle Wurzeln absolut genommen werden sollen.

Die Grenzwerte der einzelnen Summanden sind $\sqrt{\alpha}$, $(\sqrt{\alpha})^2$, $(\sqrt{\alpha})^3$, usw., dagegen ist $Lim\, S_n$ keineswegs

$$= \sqrt{\alpha} + (\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\alpha})^3 + \cdots = \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}.$$

Zufolge der Bemerkung

$$\sqrt{\alpha^k + \frac{\beta}{n}} > \sqrt{\frac{\beta}{n}}$$

ist $S_n > \sqrt{n\beta}$; hieraus ergibt sich, daß $S_n$ gleichzeitig mit $n$ über alle Grenzen wächst.

**Aufgabe 22.** Unter denselben Bedingungen wie vorhin sucht man den Grenzwert von

$$S_n = \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{1\cdot n}} + \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta}{2\cdot n}} + \sqrt{\alpha^3 + \frac{\beta}{3\cdot n}} + \cdots + \sqrt{\alpha^n + \frac{\beta}{n\cdot n}}.$$

Benutzt man die für positive $a$ und $b$ leicht beweisbaren Ungleichungen

$$a+b>\sqrt{a^2+b^2}>a+b-\sqrt{ab},$$

und setzt zur Abkürzung

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$V_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt[4]{\frac{\alpha}{1}}+\sqrt[4]{\frac{\alpha^2}{2}}+\cdots+\sqrt[4]{\frac{\alpha^n}{n}}\right),$$

so erhält man

$$S_n<\sqrt{\alpha}\,\frac{1-(\sqrt{\alpha})^n}{1-\sqrt{\alpha}}+U_n\cdot\sqrt{\beta},$$

$$S_n>\sqrt{\alpha}\,\frac{1-(\sqrt{\alpha})^n}{1-\sqrt{\alpha}}+U_n\cdot\sqrt{\beta}-V_n\cdot\sqrt[4]{\beta}.$$

Der Grenzwert von $U_n$ findet sich aus Aufgabe 17 für $\mu=-\frac{1}{2}$; weil ferner

$$0<V_n<\sqrt[4]{\frac{\alpha}{n}}\cdot\frac{1-(\sqrt[4]{\alpha})^n}{1-\sqrt[4]{\alpha}}$$

ist, folgt $\mathit{Lim}\, V_n=0$, daher zusammen

$$\mathit{Lim}\, S_n=\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}+2\sqrt{\beta}.$$

**Aufgabe 23.** Es soll der Grenzwert von

$$U_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-lg\, n$$

untersucht werden.

Aus der früher bewiesenen Ungleichung $z>lg(1+z)$ erhält man für $z=\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{n}$ und durch Addition der entstehenden Spezialfälle

$$U_n>lg\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

es ist also $U_n$ immer positiv.

Man hat ferner

$$U_n-U_{n+1}=lg\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1},$$

oder wenn die Ungleichung $lg\left(\frac{1}{1-z}\right)>z$ für $z=\frac{1}{n+1}$ benutzt wird,

$$U_n-U_{n+1}>0,\quad U_n>U_{n+1},$$

$$U_1>U_2>U_3>U_4>\cdots$$

Bei wachsenden $n$ nimmt also $U_n$ fortwährend ab, kann aber nach dem vorigen nicht negativ werden und muß folglich gegen eine bestimmte Grenze $\mu \geqq 0$ konvergieren.

Auf analoge Weise findet man, daß der Ausdruck

$$V_n = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - lg\,(n+1)$$

von seinem Ausgangswerte $V_1 = 1 - lg\,2 = 0{,}307\ldots$ an fortwährend zunimmt.

Weil endlich

$$Lim\,(U_n - V_n) = Lim\,lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$$

ist, so konvergieren $U_n$ und $V_n$ gegen die gemeinschaftliche Grenze $\mu$, und zwar $U_n$ durch Abnahme, $V_n$ durch Zunahme. Demnach liegt $\mu$ zwischen zwei zusammengehörigen Werten von $U_n$ und $V_n$, z. B. zwischen $U_{20} = 0{,}60201\ldots$ und $V_{20} = 0{,}55322\ldots$, so daß näherungsweise $\mu = \frac{1}{2}(U_{20} + V_{20}) = 0{,}577\ldots$ sein muß.

Mit Hilfe der Integralrechnung findet man den genauen Wert $\mu = 0{,}57721566\ldots$ (siehe II. Teil, § 25, Nr. 8).

V. Grenzwerte von Produkten führt man leicht auf Grenzwerte von Summen zurück, indem man vorerst den Logarithmus des Produkts untersucht. Daraus folgt, daß der Grenzwert eines Produkts gleich dem Produkte aus den Grenzwerten der einzelnen Faktoren ist, solange die Faktorenzahl endlich bleibt, daß aber diese Gleichheit nicht mehr stattzufinden braucht, wenn die Faktorenzahl unendlich groß wird.

Zur Bestimmung der Grenzwerte von Produkten sind folgende Hilfssätze von Nutzen. Nach Aufgabe 18 ist für ein beliebiges positives $x$ und für ein echt gebrochenes positives $y$

$$lg\,(1+x) < x, \quad y < lg\left(\frac{1}{1-y}\right);$$

setzt man in der zweiten Ungleichung $y = \frac{x}{1+x}$, wo nun $x$ jede positive Zahl bedeuten darf, so hat man zusammen

a) $$\frac{x}{1+x} < lg\,(1+x) < x, \quad x > 0,$$

wofür auch die stärkere Ungleichung

b) $$x - x^2 < lg\,(1+x) < x$$

genommen werden kann.

Läßt man in der Ungleichung

$$\frac{x}{1+x} < lg(1+x)$$

$\frac{\beta}{\alpha}$ an die Stelle von $x$ treten, so erhält man leicht

$$lg\,\alpha < \frac{(\alpha+\beta)\,lg(\alpha+\beta) - \alpha\,lg\,\alpha}{\beta} - 1;$$

wenn man ferner in der Ungleichung

$$lg(1+x) < x$$

die Substitution

$$x = \frac{\beta}{\alpha-\beta}$$

vornimmt, wobei $\alpha > \beta > 0$ sein möge, so gelangt man zu der Relation

$$\frac{\alpha\,lg\,\alpha - (\alpha-\beta)\,lg(\alpha-\beta)}{\beta} - 1 < lg\,\alpha;$$

zusammengenommen ist demnach für $\alpha > \beta > 0$

c) $$\frac{\alpha\,lg\,\alpha - (\alpha-\beta)\,lg(\alpha-\beta)}{\beta} - 1 < lg\,\alpha < \frac{(\alpha+\beta)\,lg(\alpha+\beta) - \alpha\,lg\,\alpha}{\beta} - 1.$$

**Aufgabe 24.** Für ein positives $\gamma$ und unendlich wachsende $n$ soll der Grenzwert des Produkts

$$P_n = \left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n+1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{\gamma}{2n-1}\right)$$

bestimmt werden.

Die einzelnen Faktoren konvergieren zwar gegen die Einheit, es ist aber $Lim\,P_n$ nicht $=1$. Mittels der vorigen Ungleichung b) findet man nämlich, wenn zur Abkürzung

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = v_n,$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} = w_n$$

gesetzt wird,

$$\gamma \cdot v_n - \gamma^2 \cdot w_n < lg\,P_n < \gamma \cdot v_n;$$

dabei ist $w_n$ positiv und $< n \cdot \frac{1}{n^2}$, mithin $0 < w_n < \frac{1}{n}$. Durch Übergang zur Grenze (vgl. Aufgabe 18) findet sich nun

$$Lim\,P_n = 2^\gamma.$$

Dasselbe Verfahren liefert den allgemeineren Satz, daß das Produkt

$$\left(1+\frac{\gamma}{n\alpha}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n\alpha+\beta}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n\alpha+2\beta}\right)\cdots\left(1+\frac{\gamma}{n\alpha+(n-1)\beta}\right)$$

gegen die Grenze

$$\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\gamma}{\beta}}$$

konvergiert, wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ positive Werte haben.

**Aufgabe 25.** Für positive $\mu$ und unendlich wachsende $n$ soll der Grenzwert des Ausdrucks

$$P_n = \frac{\sqrt[n]{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)}}{\mu+\frac{1}{2}(n-1)}$$

ermittelt werden.

Benutzt man die Ungleichung c) der Reihe nach für

$$\alpha = \mu+1, \quad \mu+2, \ldots \mu+n-1$$

und für $\beta = 1$, so findet man, daß $lg\, P_n$ mehr beträgt als

$$lg\left(\frac{\mu+n-1}{\mu+\frac{1}{2}(n-1)}\right) - 1 + (\mu-1)\frac{lg(\mu+n-1)}{n} + \frac{1+(1-\mu)\,lg\,\mu}{n},$$

dagegen weniger als

$$lg\left(\frac{\mu+n}{\mu+\frac{1}{2}(n-1)}\right) - 1 + \mu\frac{lg(\mu+n)}{n} + \frac{1+lg\,\mu-(\mu+1)\,lg(\mu+1)}{n}.$$

Nach einem bekannten Satze konvergiert $\frac{lg\,\omega}{\omega}$ bei unendlich wachsenden $\omega$ gegen die Null*; hieraus folgt im vorliegenden Falle, daß sich $lg\,P_n$ der Grenze $lg\,2 - 1$ nähert, also

$$Lim\, P_n = \frac{2}{e}.$$

**Aufgabe 26.** Es bezeichne $Q_n$ das arithmetische, $R_n$ das geometrische Mittel aus den $n$ Gliedern der Progression

$$a, \quad a+b, \quad a+2b, \quad a+3b, \ldots a+(n-1)b,$$

worin $a$ und $b$ als positiv vorausgesetzt werden; man sucht den

---

* Wegen $e^z > 1+z$ ist um so mehr $e^z > z$ und durch Erhebung aufs Quadrat $e^{2z} > z^2$, mithin, wenn $e^{2z} = \omega$ gesetzt wird

$$\omega > \tfrac{1}{4}(lg\,\omega)^2 \quad \text{oder} \quad \frac{lg\,\omega}{\omega} < \frac{4}{lg\,\omega}.$$

Da anderseits $\frac{lg\,\omega}{\omega}$ positiv bleibt für $\omega > 1$, so ergibt sich jetzt der obige Satz.

Grenzwert, gegen welchen $\frac{Q_n}{R_n}$ bei unendlich wachsenden $n$ konvergiert.

Setzt man $\frac{a}{b} = \mu$, so läßt sich die Aufgabe leicht auf die vorige zurückführen; der gesuchte Grenzwert ist $\frac{1}{2}e$.

**Aufgabe 27.** Für unendlich wachsende $n$ soll der Grenzwert des Produkts

$$P_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

bestimmt werden.

Mittelst der Ungleichung b) findet man leicht

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) < lg\, P_n < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

und hieraus

$$Lim\, P_n = \sqrt{e}.$$

Auf gleiche Weise folgt der allgemeinere Satz, daß das Produkt

$$\left(1 + \frac{2a}{n^2}\right)\left(1 + \frac{4a}{n^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{6a}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{2na}{n^2}\right)$$

gegen die Grenze $e^a$ konvergiert.

## Grenzwerte von Funktionen zweier Variabeln.

Für die Bestimmung von Grenzwerten der Funktionen zweier Variabeln $x$ und $y$ ist die Bemerkung von Gewicht, daß eine Funktion $f(x, y)$ häufig ganz verschiedene Werte annimmt, je nachdem erst $y = 0$ und dann $x = 0$, oder erst $x = 0$ und nachher $y = 0$, oder gleichzeitig $x = 0$ und $y = 0$ gesetzt wird. Als Beispiel möge die Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + ax + by}{x + y}$$

dienen, hier ist

$$f(x, 0) = x + a, \quad \text{mithin} \quad f(0, 0) = a,$$

$$f(0, y) = y + b, \quad\quad „ \quad\quad f(0, 0) = b,$$

ferner, wenn $y = \lambda x$ genommen und unter $\lambda$ eine beliebige Konstante verstanden wird,

$$f(x, \lambda x) = \frac{x + \lambda^2 x + a + b\lambda}{1+\lambda}, \quad \text{mithin} \quad f(0, 0) = \frac{a + b\lambda}{1+\lambda},$$

endlich, wenn

$$y = -\frac{x(2x+a)}{b}$$

gesetzt wird

$$f\left(x, -\frac{x(2x+a)}{b}\right) = -\frac{x(2x+a+b}{b}, \quad \text{mithin} \quad f(0, 0) = 0;$$

$f(0, 0)$ ist also vieldeutig. Diese Erscheinung wird anschaulich klar, wenn man die Gleichung $z = f(x, y)$ unter Benutzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems geometrisch deutet; sie stellt alsdann ein einschaliges Hyperboloid dar, welches so gelegen ist, daß die $z$-Achse eine Erzeugende desselben bildet. Erst $y = 0$ setzen und dann $x$ zu Null werden lassen, heißt nunmehr, auf der $xz$-Spur der Fläche bis zum Durchschnitte dieser Spur mit der $z$-Achse fortschreiten; erst $x = 0$ und nachher $y = 0$ nehmen, bedeutet dagegen, in der $yz$-Spur bis zum Durchschnitte mit der $z$-Achse fortgehen; durch $y = \lambda x$ und $x = 0$ wird ausgedrückt, daß man auf der Fläche diejenige Kurve, deren Horizontalprojektion eine durch den Koordinatenanfang gehende Gerade ist, bis zur $z$-Achse verfolgt; endlich sagt die Gleichung $by = -x(2x + x)$ aus, daß man auf der Fläche einer Kurve nachgeht, deren Horizontalprojektion eine gewisse durch den Koordinatenanfang gehende Parabel ist. Daß aber diese verschiedenen Wege zu verschiedenen Punkten der $z$-Achse führen, ist einleuchtend. Was von dem Falle $x = 0$, $y = 0$ gilt, findet natürlich auch dann statt, wenn man sich $x$ und $y$ als unendlich abnehmende Größen denkt und dementsprechend etwa mit $\delta$ und $\varepsilon$ bezeichnet. Im folgenden ist das Zeichen *Lim* immer zweimal angewendet und jedesmal durch einen Index diejenige Variable hervorgehoben worden, auf welche sich der Grenzübergang bezieht. Hiernach bedeutet

$$\mathit{Lim}_\delta \mathit{Lim}_\varepsilon f(\delta, \varepsilon),$$

daß zunächst der Grenzwert für unendlich abnehmende $\varepsilon$ bei konstant bleibendem $\delta$ ermittelt und nachher der Grenzwert für unendlich abnehmende $\delta$ bestimmt werden soll; dagegen ist unter

$$\mathit{Lim}_\varepsilon \mathit{Lim}_\delta f(\delta, \varepsilon)$$

der umgekehrte Gang der Operationen zu verstehen.

**Aufgabe 28.** Man sucht die Grenzwerte von

$$\frac{(1+\delta+\varepsilon)^{\mu}-1}{a\delta+b\varepsilon}.$$

Bei konstanten $\delta$ und gegen die Null konvergierenden $\varepsilon$ ergibt sich

$$Lim_{\varepsilon} \frac{(1+\delta+\varepsilon)^{\mu}-1}{a\delta+b\varepsilon} = \frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{a\delta},$$

daher

$$Lim_{\delta}\, Lim_{\varepsilon} \frac{(1+\delta+\varepsilon)^{\mu}-1}{a\delta+b\varepsilon} = \frac{\mu}{a}.$$

Dagegen wird

$$Lim_{\varepsilon}\, Lim_{\delta} \frac{(1+\delta+\varepsilon)^{\mu}-1}{a\delta+b\varepsilon} = \frac{\mu}{b}.$$

Setzt man ferner $\delta = \alpha\vartheta$, $\varepsilon = \beta\vartheta$, wo $\alpha$ und $\beta$ Konstanten bezeichnen und $\vartheta$ eine gegen die Null konvergierende Zahl ist, so nehmen $\delta$ und $\varepsilon$ gleichzeitig, jedoch so ab, daß ihr Verhältnis konstant bleibt; der Grenzwert ist dann

$$\frac{(\alpha+\beta)\mu}{a\alpha+b\beta}.$$

**Aufgabe 29.** Man verlangt die Grenzwerte von

$$\frac{a^{\delta}+b^{\varepsilon}-2}{\delta+\varepsilon+\delta\varepsilon}.$$

Die gesuchten Werte sind

$$Lim_{\delta}\, Lim_{\varepsilon} \frac{a^{\delta}+b^{\varepsilon}-2}{\delta+\varepsilon+\delta\varepsilon} = lg\, a,$$

$$Lim_{\varepsilon}\, Lim_{\delta} \frac{a^{\delta}+b^{\varepsilon}-2}{\delta+\varepsilon+\delta\varepsilon} = lg\, b;$$

für $\delta = \alpha\vartheta$, $\varepsilon = \beta\vartheta$ und verschwindende $\vartheta$ ergibt sich der Grenzwert

$$\frac{\alpha \cdot lg\, a + \beta \cdot lg\, b}{\alpha+\beta}.$$

**Aufgabe 30.** Man sucht die Grenzwerte von

$$\frac{lg(1+\delta+\varepsilon)}{a\delta+b\varepsilon}.$$

Dieselben sind

$$Lim_{\delta}\, Lim_{\varepsilon} \frac{lg(1+\delta+\varepsilon)}{a\delta+b\varepsilon} = \frac{1}{a},$$

$$Lim_{\varepsilon}\, Lim_{\delta} \frac{lg(1+\delta+\varepsilon)}{a\delta+b\varepsilon} = \frac{1}{b};$$

für $\delta = \alpha\vartheta$, $\varepsilon = \beta\vartheta$ und verschwindende $\vartheta$ entsteht

$$\frac{\alpha+\beta}{a\alpha+b\beta}.$$

**Aufgabe 31.** Unter der Voraussetzung, daß $\tau$ und $\omega$ unendlich wachsende positive Zahlen bedeuten, sollen die Grenzwerte von

$$\left(1+\frac{1}{\tau+\omega}\right)^{a\tau+b\omega}$$

ermittelt werden.

Bei analoger Bezeichnung wie früher erhält man

$$Lim_\tau\, Lim_\omega\left[\left(1+\frac{1}{\tau+\omega}\right)^{a\tau+b\omega}\right]=e^b,$$

$$Lim_\omega\, Lim_\tau\left[\left(1+\frac{1}{\tau+\omega}\right)^{a\tau+b\omega}\right]=e^a;$$

setzt man $\tau=\alpha\sigma$, $\omega=\beta\sigma$ und läßt $\sigma$ unendlich wachsen, so erhält man den Grenzwert

$$e^{\left(\frac{a\alpha+b\beta}{\alpha+\beta}\right)}.$$

**Aufgabe 32.** Man verlangt die Grenzwerte der Funktion

$$F(\delta,n)=\delta\left[\frac{1}{1^{1+\delta}}+\frac{1}{2^{1+\delta}}+\frac{1}{3^{1+\delta}}+\cdots+\frac{1}{n^{1+\delta}}\right]$$

für den Fall, daß die positive Größe $\delta$ unendlich abnimmt und die ganze positive Zahl $n$ unendlich wächst.

Aus der für $a<b$ und $0<\lambda<1$ geltenden, auf Seite 4 unter $\gamma$) bewiesenen Ungleichung

$$\lambda a^{\lambda-1}>\frac{b^\lambda-a^\lambda}{b-a}>\lambda b^{\lambda-1}$$

folgt für $a=m$, $b=m+1$

$$\lambda m^{\lambda-1}>(m+1)^\lambda-m^\lambda>\lambda(m+1)^{\lambda-1}$$

oder

$$\frac{\lambda}{m(m+1)^\lambda}>\frac{1}{m^\lambda}-\frac{1}{(m+1)^\lambda}>\frac{\lambda}{(m+1)m^\lambda}.$$

Setzt man linker Hand statt $(m+1)^\lambda$ das kleinere $m^\lambda$, rechter Hand statt $m^\lambda$ das größere $(m+1)^\lambda$, so erhält man die stärkere Ungleichung

$$\frac{\lambda}{m^{1+\lambda}}>\frac{1}{m^\lambda}-\frac{1}{(m+1)^\lambda}>\frac{\lambda}{(m+1)^{1+\lambda}}.$$

Es sei nun $\lambda=\delta$ und $m$ der Reihe nach $=1, 2, 3, \ldots n-1$; die Addition der so entstehenden Ungleichungen gibt dann

$$\delta\left[\frac{1}{1^{1+\delta}}+\frac{1}{2^{1+\delta}}+\frac{1}{3^{1+\delta}}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^{1+\delta}}\right]$$
$$>1-\frac{1}{n^\delta}>\delta\left[\frac{1}{2^{1+\delta}}+\frac{1}{3^{1+\delta}}+\frac{1}{4^{1+\delta}}+\cdots+\frac{1}{n^{1+\delta}}\right],$$

woraus leicht die neue Ungleichung folgt

$$1-\frac{1}{n^\delta}+\frac{\delta}{n^{1+\delta}}<F(\delta,n)<1-\frac{1}{n^\delta}+\delta.$$

Läßt man zunächst $n$ ins Unendliche wachsen bei konstanten $\delta>0$, so erhält man

$$1<Lim_n F(\delta,n)<1+\delta$$

und nachher, wenn $\delta$ gegen die Null konvergiert

$$Lim_\delta\, Lim_n F(\delta,n)=1.$$

Wenn zweitens bei konstanten $n$ erst $\delta$ gegen die Null konvergiert, so wird die vorletzte Ungleichung zur Gleichung

$$Lim_\delta F(\delta,n)=0$$

und es ist daher auch

$$Lim_n\, Lim_\delta F(\delta,n)=0.$$

Setzt man drittens

$$\delta=\frac{x}{lg\, n},$$

wo $x$ eine beliebige endliche Konstante bezeichnet, so tritt die Abnahme von $\delta$ gleichzeitig mit dem Wachsen des $n$ ein; die Ungleichung für $F(\delta,n)$ wird jetzt zur folgenden

$$1-\left(1-\frac{x}{n\cdot lg\, n}\right)e^{-x}<F\left(\frac{x}{lg\, n},\ n\right)<1-e^{-x}+\frac{x}{lg\, n},$$

und diese gibt

$$Lim_n F\left(\frac{x}{lg\, n},\ n\right)=1-e^{-x}.$$

Bei der Aufsuchung der Grenzwerte von Funktionen mehrerer Variabeln hat man in analoger Weise die Reihenfolge der Grenzübergänge zu beachten, welche sich auf die einzelnen Variabeln beziehen.

---

[1]) Diese Methode gelangt zur Anwendung bei einem Verfahren, dessen man sich zuweilen in der Stereometrie bedient, um die Formel für das Volumen der Pyramide abzuleiten. Bei diesem Verfahren (vgl. z. B. Schlömilch, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der

Geometrie des Maßes, II. Teil, § 16) überzeugt man sich zunächst durch einfache geometrische Hilfsbetrachtungen, daß für das Volumen $V$ einer Pyramide, deren Grundfläche den Inhalt $G$, besitzt und deren Höhe gleich $h$ ist, die beiden Ungleichungen

$$U < V < W$$

gelten, in denen

$$U = Gh\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3},$$

$$W = Gh\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

ist; $n$ bedeutet hierbei eine beliebige positive ganze Zahl. Wenn man nun $n$ unendlich groß werden läßt, so wird (vgl. Aufgabe 16)

$$Lim\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3},$$

und weil

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}-\frac{1}{n}$$

geschrieben werden kann, auch

$$Lim\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}=\frac{1}{3};$$

für ein unendlich wachsendes $n$ nähern sich daher $U$ und $W$ der gemeinschaftlichen Grenze $\frac{1}{3}Gh$. Hieraus folgt aber, daß auch

$$V=\frac{1}{3}Gh$$

sein muß.

[2]) Die in den Ungleichungen $\beta$) und $\gamma$) enthaltenen Tatsachen können geometrisch gedeutet werden, wenn man den Verlauf der Funktion $x^\mu$ mit Hilfe eines rechtwinkligen Koordinatensystems graphisch veranschaulicht, indem man $x$ als Abscisse, $x^\mu$ als zugehörige Ordinate aufträgt. Aus den genannten Ungleichungen kann man dann schließen, daß der im ersten Quadranten gelegene Teil der entstehenden Kurve der $x$-Achse durchweg seine konvexe Seite zukehrt, solange $\mu > 1$ ist; daß er hingegen der $x$-Achse durchweg seine konkave Seite zuwendet, sobald $0 < \mu < 1$ ist. — Geeignete Beispiele zur bequemen Veranschaulichung dieser beiden Tatsachen ergeben sich, wenn man dem Exponenten $\mu$ der Reihe nach die Werte 3, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ erteilt.

[3]) Die abzuleitende Gleichung behauptet, daß sich die Werte der beiden Funktionen

$$\sqrt[n]{(x+\alpha)(x+\beta)\ldots(x+\mu)} \quad \text{und} \quad x+\frac{\alpha+\beta+\cdots+\mu}{n}$$

um so weniger voneinander unterscheiden, je größer der Wert der Variabeln $x$ ist. Stellt man den Verlauf beider Funktionen in der üblichen Weise graphisch dar, so erkennt man, daß diese Behauptung einen einfachen geometrischen Sinn hat; sie kommt darauf hinaus, daß die durch die Gleichung

$$y = x + \frac{\alpha + \beta + \cdots + \mu}{n}$$

dargestellte gerade Linie eine Asymptote der durch die Gleichung

$$y^n = (x + \alpha)(x + \beta) \ldots (x + \mu)$$

dargestellten algebraischen Kurve $n^{\text{ter}}$ Ordnung sein soll. Daß letzteres aber in der Tat der Fall ist, kann durch die im Anfange des IV. Kapitels angegebenen Hilfsmittel sofort bewiesen werden. — Analoge geometrische Deutungen sind übrigens auch bei den Aufgaben 2, 3 und 6 möglich.

[4]) Die Tatsache, daß $e^z < \frac{1}{1-z}$ wird, solange $0 < z < 1$ ist, kann sofort anschaulich gemacht werden, indem der Verlauf der beiden Funktionen $e^z$ und $\frac{1}{1-z}$ graphisch dargestellt wird, und zwar in dem nämlichen rechtwinkligen Koordinatensystem; dann ergibt sich das eine Mal eine logarithmische Linie (vgl. § 16), das andere Mal eine gleichseitige Hyperbel. Die gegenseitige Lage der beiden Kurven läßt die Richtigkeit der obigen Ungleichung sofort erkennen. — In analoger Weise können übrigens auch die gleichfalls im Text auftretenden Ungleichungen $e^z > 1 + z$ und $e^{-z} > 1 - z$ veranschaulicht werden.

[5]) Eine bemerkenswerte Kontrolle ergibt sich, wenn man in dem gefundenen Resultat $\beta = 0$ werden läßt. Bezeichnet man den im Text erhaltenen Wert von $Lim\, R_n$ zur Abkürzung mit $S$, so daß

$$S = \frac{lg(\alpha + \beta) - lg\,\alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta}\, lg\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

ist, so erkennt man durch die Substitution $\beta = \frac{1}{\omega}$, daß der Wert, welchen $S$ für $\beta = 0$ annimmt, identisch sein muß mit dem Werte, welchem sich der Ausdruck

$$\omega\, lg\left(1 + \frac{1}{\alpha\omega}\right),$$

den man auch

$$lg\left\{\left(1 + \frac{1}{\alpha\omega}\right)^{\omega}\right\}$$

schreiben kann, für ein unendlich wachsendes $\omega$ nähert. Dieser Wert aber kann nach Aufgabe 8 sofort angegeben werden, er ist gleich $\frac{1}{\alpha}$. Das nämliche Resultat aber kann auch auf direktem Wege erhalten werden; macht man nämlich die Substitution $\beta = 0$ in der ursprünglichen Formel für $R_n$, so ergibt sich sofort $R_n = \frac{1}{\alpha}$, also auch $Lim\, R_n = \alpha$ und mithin $S = \frac{1}{\alpha}$.

# Kapitel I.

## Einfache Differentiation von entwickelten Funktionen einer Variabeln.

### § 1.

### Grundformeln und allgemeine Regeln.

Für die Differentiation der sogenannten einfachen Funktionen gelten die nachstehenden Formeln, welche gewissermaßen das Einmaleins der Differentialrechnung ausmachen:

1) $$\frac{d(x^\mu)}{dx} = \mu x^{\mu-1},$$

2) $$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x . \lg a, \quad \frac{d(e^x)}{dx} = e^x,$$

3) $$\frac{d({}^a\log x)}{dx} = \frac{1}{x . \lg a}, \quad \frac{d \lg x}{x} = \frac{1}{x},$$

4) $$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x,$$

5) $$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x,$$

6) $$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \sec^2 x,$$

7) $$\frac{d \cot x}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x,$$

8) $$\frac{d \sec x}{dx} = \sec^2 x . \sin x,$$

9) $$\frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x . \cos x,$$

10) $$\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx},$$

11) $$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = -\frac{d \operatorname{arc} \cot x}{dx},$$

12) $$\frac{d \operatorname{arc} \sec x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = -\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x}{dx}.$$

Sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ usw. konstante Größen, $u$, $v$, $w$ usw. Funktionen einer und derselben Variabeln $x$, so hat man für die Differentiation des Aggregats $\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \cdots$ die Regel

$$13) \qquad \frac{d(\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w + \cdots)}{dx} = \alpha \cdot \frac{du}{dx} + \beta \cdot \frac{dv}{dx} + \gamma \cdot \frac{dw}{dx} + \cdots$$

Dieselbe gilt im allgemeinen nur unter der Voraussetzung, daß die Anzahl der Summanden endlich ist; im entgegengesetzten Falle wird eine besondere Untersuchung erforderlich.

Zur Differentiation der Produkte dient die Vorschrift

$$14) \qquad \frac{d(uv)}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx},$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$\frac{d(uv)}{dx} = uv\left(\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx}\right).$$

Aus der letzteren Form ergibt sich bei einer größeren Anzahl von Faktoren

$$15) \qquad \frac{d(uvw\ldots)}{dx} = uvw\cdots\left(\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{w} \cdot \frac{dw}{dx} + \cdots\right).$$

Falls unendlich viel Faktoren vorhanden sind, darf diese Formel nicht ohne weiteres angewendet werden.

Die Differentiation der Quotienten unterliegt dem Gesetz

$$16) \qquad \frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dx} = \frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{u^2}.$$

Ist der Nenner konstant $= a$, so bedarf es dieser Formel nicht, weil der Quotient $\frac{v}{a}$ als Produkt aus dem konstanten Faktor $\frac{1}{a}$ und dem veränderlichen Faktor $v$ angesehen werden kann. Bei konstantem Zähler $v = b$ gibt die Formel einfacher

$$17) \qquad \frac{d\left(\frac{b}{u}\right)}{dx} = -\frac{b}{u^2} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Handelt es sich um die Differentiation einer Funktion von einer Funktion

$$z = f[\varphi(x)],$$

so ersetzt man diese eine Gleichung durch die beiden folgenden Gleichungen

$$z = f[y], \quad y = \varphi(x).$$

Aus der ersten berechnet man $\frac{dz}{dy}$ ebenso als wenn $y$ eine unabhängige Veränderliche wäre; aus der zweiten ermittelt man $\frac{dy}{dx}$, und schließlich erhält man durch Multiplikation

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}. \tag{18}$$

Für die praktische Rechnung empfiehlt es sich, nicht sogleich den Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$, sondern vorerst das Differential $dz$ zu entwickeln und die angegebene Substitution von $y$ im Gedächtnis zu behalten. Das Ende der Rechnung kündigt sich von selbst dadurch an, daß das Differential der unabhängigen Veränderlichen als letzter Faktor auftritt. Soll z. B $lg(a + bx + cx^2)$ differenziert werden, so sagt man: analog der Formel

$$d\, lg\, y = \frac{1}{y} \cdot dy$$

ist auch, wenn statt $y$ der Ausdruck $a + bx + cx^2$ gesetzt wird

$$d\, lg(a + bx + cx^2) = \frac{1}{a + bx + cx^2} \cdot d(a + bx + cx^2);$$

rechts hat man noch ein Aggregat zu differenzieren und dies gibt wegen $da = 0$

$$\begin{aligned} d\, lg(a + bx + cx^2) &= \frac{1}{a + bx + cx^2} \cdot [b \cdot dx + c \cdot d(x^2)] \\ &= \frac{1}{a + bx + cx^2} [b \cdot dx + c \cdot 2x\,dx] \\ &= \frac{b + 2cx}{a + bx + cx^2} \cdot dx \end{aligned}$$

und damit schließt die Rechnung, weil es nur noch der beiderseitigen Division mit $dx$ bedürfen würde, um den gesuchten Differentialquotienten zu erhalten. In diesem, wie in jedem anderen Falle w a n d e r t das Zeichen $d$ so lange von links nach rechts, bis es auf der äußersten Rechten nur noch vor $x$ oder der sonstigen unabhängigen Veränderlichen steht.

## § 2.

### Beispiele zur Differentiation algebraischer Funktionen.

1) $d[(a + \alpha x)(b + \beta x)] = (a\beta + b\alpha + 2\alpha\beta x) \cdot dx.$

Die Aufgabe kann auf zwei verschiedene Arten behandelt werden; man benutzt entweder die Regel zur Differentiation der

Produkte, oder man führt die Multiplikation von $a + \alpha x$ mit $b + \beta x$ aus und differenziert das entstandene Aggregat. Dies gibt zugleich eine Kontrolle der Rechnung

2) $$d[(a + \alpha x)(b + \beta x^2)] = (b\alpha + 2a\beta x + 3\alpha\beta x^2) \cdot dx.$$

Hier gilt eine ähnliche Bemerkung wie vorhin.

3) $$d\left[\left(\tfrac{1}{2} b^2 - bx + x^2\right)\left(\tfrac{1}{2} b^2 + bx + x^2\right)\right] = 4x^3 \cdot dx.$$

Warum ist das Differential so einfach und identisch mit $d(x^4)$?

4) $$d\left(\frac{c}{a + bx}\right) = -\frac{bc}{(a + bx)^2} \cdot dx.$$

5) $$d\left(\frac{\alpha + \beta x}{\alpha - \beta x}\right) = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha - \beta x)^2} \cdot dx.$$

Man kann diese Aufgabe entweder direkt nach Formel 16) behandeln, oder auf die vorhergehende zurückführen, indem man von der identischen Gleichung

$$\frac{\alpha + \beta x}{\alpha - \beta x} = \frac{2\alpha}{\alpha - \beta x} - 1$$

Gebrauch macht.

6) $$d\frac{\alpha + \beta x}{a + bx} = \frac{a\beta - b\alpha}{(a + bx)^2} \cdot dx.$$

Die vorhin angegebenen zwei Methoden sind auch hier anwendbar; welcher kleinen Modifikationen bedarf die zweite?

7) $$d\left(\frac{a + bx}{a + bx + cx^2}\right) = -\frac{2acx + bcx^2}{(a + bx + cx^2)^2} \cdot dx.$$

8) $$d\left(\frac{\alpha + \beta x}{a + bx + cx^2}\right) = \frac{a\beta - b\alpha - 2c\alpha x - c\beta x^2}{(a + bx + cx^2)^2} \cdot dx.$$

9) $$d\left(\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{a + bx + cx^2}\right) = \frac{a\beta - b\alpha + 2(a\gamma - c\alpha)x + (b\gamma - c\beta)x^2}{(a + bx + cx^2)^2} \cdot dx.$$

Anstatt die Aufgabe direkt zu lösen, kann man sie auch mittelst der identischen Gleichung

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{a + bx + cx^2} = \frac{\gamma}{c} - \frac{1}{c} \cdot \frac{a\gamma - c\alpha + (b\gamma - c\beta)x}{a + bx + cx^2}$$

auf die vorhergehende zurückführen.

10) $$d\sqrt{a+bx} = \frac{b}{2\sqrt{a+bx}}\,dx.$$

11) $$d\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{b+2cx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}\,dx.$$

12) $$d\left(x\sqrt{a+bx}\right) = \frac{2a+3bx}{2\sqrt{a+bx}}\cdot dx.$$

Hier benutzt man entweder die Regel zur Differentiation der Produkte nebst Formel 10) oder man setzt $x\sqrt{a+bx} = \sqrt{ax^2+bx^3}$ und betrachtet den letzteren Ausdruck als Potenz eines Aggregats; was ist bequemer für die Rechnung?

13) $$d\left(\frac{\sqrt{a+bx}}{x}\right) = -\frac{2a+bx}{2x^2\sqrt{a+bx}}\cdot dx.$$

Hier gilt wieder die vorige Bemerkung.

14) $$d\left(x^\mu\sqrt{a+bx}\right) = \frac{2\mu a x^{\mu-1}+(2\mu+1)bx^\mu}{2\sqrt{a+bx}}\cdot dx.$$

15) $$d\left(x\sqrt{a+bx+cx^2}\right) = \frac{2a+3bx+4cx^2}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}\cdot dx.$$

16) $$d\left(\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}\right) = -\frac{2a+bx}{2x^2\sqrt{a+bx+cx^2}}\cdot dx.$$

17) $$\left\{\begin{aligned} &d\left(x^\mu\sqrt{a+bx+cx^2}\right)\\ &= \frac{2\mu a x^{\mu-1}+(2\mu+1)bx^\mu+(2\mu+2)cx^{\mu+1}}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}\cdot dx.\end{aligned}\right.$$

Für die letzten vier Beispiele kann man die bei Nr. 12 gemachte Bemerkung gleichfalls benutzen.

18) $$d\left(\frac{x}{\sqrt{a+bx}}\right) = \frac{2a+bx}{2\sqrt{(a+bx)^3}}\cdot dx.$$

Die zu differenzierende Funktion läßt sich entweder als Quotient oder als Produkt aus $x$ und $(a+bx)^{-\frac{1}{2}}$ ansehen.

19) $$d\left(\frac{2a+bx}{\sqrt{a+bx}}\right) = \frac{b^2x}{2\sqrt{(a+bx)^3}}\cdot dx.$$

20) $$d\left(\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{a+bx}}\right) = \frac{2a\beta-b\alpha+b\beta x}{2\sqrt{(a+bx)^3}}\cdot dx.$$

21) $$d\left(\frac{b+2cx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right) = \frac{4ac-b^2}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}\cdot dx.$$

22) $$d\left(\frac{2a+bx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right) = \frac{(b^2-4ac)x}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}\cdot dx.$$

23) $$d\left(\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right) = \frac{2a\beta - b\alpha + (b\beta - 2c\alpha)x}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}\cdot dx.$$

24) $$\begin{cases} d\left(\dfrac{x^\mu}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right) \\ = \dfrac{2\mu a x^{\mu-1} + (2\mu-1)bx^\mu + (2\mu-2)cx^{\mu+1}}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}\cdot dx. \end{cases}$$

Hinsichtlich der letzten sechs Aufgaben gilt wieder die bei Nr. 18 gemachte Bemerkung.

25) $$d\left\{\frac{(a-2bx)\sqrt{a+bx}}{x\sqrt{x}}\right\} = -\frac{3a^2}{2x^2\sqrt{x(a+bx)}}\cdot dx.$$

Die hier gegebene Funktion läßt sich entweder als Quotient ansehen oder als Produkt zweier Faktoren:

$$\left(\frac{a}{x} - 2b\right)\cdot\sqrt{\frac{a}{x} + b}$$

oder als Produkt von drei Faktoren

$$(a - 2bx)\cdot x^{-\frac{3}{2}}\cdot(a+bx)^{\frac{1}{2}};$$

welche Form ist die bequemste für die Rechnung?

26) $$d\sqrt{\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta x)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}\cdot dx.$$

Wie kann diese Aufgabe, falls man sie nicht direkt lösen will, auf Nr. 23 zurückgeführt werden?

27) $$d\sqrt{\frac{\alpha+\beta x^2}{\alpha-\beta x^2}} = \frac{2\alpha\beta x}{(\alpha-\beta x^2)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^4}}\cdot dx.$$

28) $$d\left\{\frac{(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a})^2}{x}\right\} = -\sqrt{a}\,\frac{(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a})^2}{x^2\sqrt{a+bx}}\cdot dx.$$

Hier läßt sich die gegebene Funktion entweder als Quotient betrachten oder auf die Form

$$\frac{2a}{x} + b + 2\sqrt{a}\,\frac{\sqrt{a+bx}}{x}$$

bringen, welche die Anwendung von Nr. 13 gestattet.

29) $$d\left\{\frac{(\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a})^2}{x^2}\right\} = -2\sqrt{a}\,\frac{(\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a})^2}{x^3\sqrt{a+cx^2}}\cdot dx.$$

Hier gilt eine ähnliche Bemerkung wie vorhin, wobei Nr. 17 zu beachten ist.

30) $$d\left\{\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}\right\} = -\frac{\sqrt{a}}{b}\,\frac{(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a})^2}{x^2\sqrt{a+bx}}\cdot dx.$$

Warum unterscheidet sich dieses Resultat von dem in Nr. 28 verzeichneten nur durch einen konstanten Faktor?

31) $$d\left\{\frac{\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+cx^2}-\sqrt{a}}\right\} = -\frac{2\sqrt{a}}{c}\cdot\frac{(\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a})^2}{x^3\sqrt{a+cx^2}}\cdot dx.$$

32) $$d\left\{\frac{\sqrt{\alpha+\beta x}+\sqrt{\alpha-\beta x}}{\sqrt{\alpha+\beta x}-\sqrt{\alpha-\beta x}}\right\} = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}{x^2\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}\cdot dx.$$

Inwiefern läßt sich die vorige Bemerkung zu einer wesentlichen Abkürzung der Rechnung benutzen?

33) $$d\{(-3a+2bx)\sqrt[3]{(a+bx)^2}\} = \frac{10}{3}\,\frac{b^2x}{\sqrt[3]{a+bx}}\cdot dx.$$

34) $$d\{(-3a+2bx^2)\sqrt[3]{(a+bx^2)^2}\} = \frac{20}{3}\,\frac{b^2x^3}{\sqrt[3]{a+bx^2}}\cdot dx.$$

35) $$d\{(-3a^2+abx^2+4b^2x^4)\sqrt[3]{a+bx^2}\} = \frac{56}{3}\,b^2x^3\sqrt[3]{a+bx^2}\cdot dx.$$

36) $$d\{(-4a+3bx)\sqrt[4]{(a+bx)^3}\} = \frac{21}{4}\cdot\frac{b^2x}{\sqrt[4]{a+bx}}\cdot dx.$$

37) $$d\{(-4a+3bx^2)\sqrt[4]{(a+bx^2)^3}\} = \frac{21}{2}\cdot\frac{b^2x^3}{\sqrt[4]{a+bx^2}}\cdot dx.$$

38) $$d\{(-4a^2+abx^2+5b^2x^4)\sqrt[4]{a+bx^2}\} = \frac{45}{2}\,b^2x^3\cdot\sqrt[4]{a+bx^2}\cdot dx.$$

39) $$\left\{\begin{aligned} & d\sqrt{\frac{x^3}{(a+\alpha x)(b+\beta x)(c+\gamma x)}} \\ & = \frac{1}{2}\left\{\frac{a}{a+\alpha x}+\frac{b}{b+\beta x}+\frac{c}{c+\gamma x}\right\}\frac{\sqrt{x}\cdot dx}{\sqrt{(a+\alpha x)(b+\beta x)(c+\gamma x)}}.\end{aligned}\right.$$

Zur Lösung dieser Aufgabe kann man unter anderem die Formel 15) in § 1 benutzen.

40) $$\left\{\begin{aligned} & d\left\{\frac{(k+\varkappa x)^{m+n+\cdots}}{(a+\alpha x)^m (b+\beta x)^n \cdots}\right\} \\ & = \left\{m\frac{a\varkappa - k\alpha}{a+\alpha x} + n\frac{b\varkappa - k\beta}{b+\beta x} + \cdots\right\}\frac{(k+\varkappa x)^{m+n+\cdots-1}\cdot dx}{(a+\alpha x)^m (b+\beta x)^n\cdots};\end{aligned}\right.$$

die Anzahl der Faktoren ist hier beliebig, nur darf sie nicht unendlich groß werden.

## § 3.

## Beispiele zur Differentiation von Exponentialgrößen und Logarithmen.

1) $d[(x-1)e^x] = xe^x \cdot dx.$

2) $d[(x^2 - 2x + 2)e^x] = x^2 e^x \cdot dx.$

3) $d[(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x] = x^3 e^x \cdot dx.$

Hieran knüpft sich die allgemeinere Frage: „Wie müssen die Koeffizienten $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... gewählt werden, wenn die Gleichung

4) $d[(x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \cdots)e^x] = x^m e^x \cdot dx$

stattfinden soll, worin $m$ eine ganze positive Zahl bedeutet?"

5) $d\left(\frac{1}{x}e^x\right) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^x \cdot dx.$

6) $d\left[\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)e^x\right] = \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\right)e^x \cdot dx.$

7) $d\left[\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x}\right)e^x\right] = \left(\frac{1}{2x} - \frac{3}{x^4}\right)e^x \cdot dx.$

8) $d\left[\left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{6x}\right)e^x\right] = \left(\frac{1}{6x} - \frac{4}{x^5}\right)e^x \cdot dx.$

Wie müssen überhaupt die Koeffizienten $B_1$, $B_2$, $B_3$, ... und die beiden Konstanten $a$ und $b$ gewählt werden, wenn die Gleichung

9) $d\left[\left(\frac{1}{x^m} + \frac{B_1}{x^{m-1}} + \frac{B_2}{x^{m-2}} + \cdots\right)e^x\right] = \left(\frac{a}{x} - \frac{b}{x^{m+1}}\right) \cdot dx$

stattfinden soll?

10) $d(e^{2ax+bx^2}) = 2(a+bx)e^{2ax+bx^2} \cdot dx.$

11) $d(xe^{2ax+bx^2}) = [1 + 2(ax + bx^2)]e^{2ax+bx^2} \cdot dx.$

12) $d\left(e^{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right) = \frac{b+2cx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}\, e^{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx.$

$$13)\qquad d\,lg(a+bx) = \frac{b}{a+bx}\cdot dx.$$

$$14)\qquad d\,lg(a+bx+cx^2) = \frac{b+2cx}{a+bx+cx^2}\cdot dx.$$

$$15)\qquad d\,lg[(a+\alpha x)(b+\beta x)] = \frac{a\beta+b\alpha+2\alpha\beta x}{(a+\alpha x)(b+\beta x)}\cdot dx.$$

Den gegebenen Logarithmus kann man entweder im ganzen differenzieren oder vor der Differentiation in die Logarithmen der einzelnen Faktoren zerlegen.

$$16)\qquad d\,lg\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2 x^2}\cdot dx.$$

Hier gilt eine ähnliche Bemerkung wie vorhin.

$$17)\qquad d\,lg\frac{\alpha+\beta x}{a+bx} = \frac{a\beta-b\alpha}{(a+bx)(\alpha+\beta x)}\cdot dx.$$

$$18)\qquad d\,lg\left(\frac{x}{\sqrt{a+bx}}\right) = \frac{2a+bx}{2x(a+bx)}\cdot dx.$$

$$19)\qquad d\,lg\left(\frac{x}{\sqrt{a+cx^2}}\right) = \frac{a}{x(a+cx^2)}\cdot dx.$$

$$20)\qquad d\,lg\left(\frac{b+2cx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right) = \frac{4ac-b^2}{2(b+2cx)(a+bx+cx^2)}\cdot dx.$$

$$21)\qquad d\,lg\left(\frac{2a+bx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right) = \frac{(b^2-4ac)x}{2(2a+bx)(a+bx+cx^2)}\cdot dx.$$

$$22)\qquad d\,lg\left(\sqrt{c}\cdot x+\sqrt{a+cx^2}\right) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+cx^2}}\cdot dx.$$

$$23)\qquad d\,lg\left(\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}\right) = \frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{a+bx}}\cdot dx.$$

$$24)\qquad d\,lg\left(\frac{\sqrt{a+cx^2}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a}}\right) = \frac{2\sqrt{a}}{x\sqrt{a+cx^2}}\cdot dx.$$

$$25)\qquad d\,lg\left(\frac{\sqrt{\alpha+\beta x}-\sqrt{\alpha-\beta x}}{\sqrt{\alpha+\beta x}+\sqrt{\alpha-\beta x}}\right) = \frac{\alpha}{x\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}\cdot dx.$$

Setzt man in Nr. 24) $a=\alpha^2$, $c=-\beta^2$, so unterscheiden sich die rechten Seiten der Gleichungen 24) und 25) nur um einen konstanten Faktor; was folgt daraus in Beziehung auf die linksstehenden Logarithmen?

26) $$d\,lg\left(\frac{2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}+(b+2cx)}{2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}-(b+2cx)}\right)=\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\cdot dx.$$

27) $$d\,lg(ae^x+b)=\frac{ae^x}{ae^x+b}\cdot dx.$$

28) $$d\,lg\left(\frac{\alpha e^x-\beta}{\alpha e^x+\beta}\right)=\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2e^x-\beta^2e^{-x}}\cdot dx.$$

29) $$d\,lg\left(\sqrt{ae^{2x}+b}+\sqrt{a}\cdot e^x\right)=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^{-2x}}}\cdot dx.$$

30) $$d\,lg\left(\frac{\sqrt{a+be^x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^x}+\sqrt{a}}\right)=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^x}}\cdot dx.$$

## § 4.

### Beispiele zur Differentiation trigonometrischer Funktionen.

1) $d[sin^m(\alpha x+\beta)]= m\alpha\, sin^{m-1}(\alpha x+\beta)\cos(\alpha x+\beta)\cdot dx.$

2) $d[cos^m(\alpha x+\beta)]=-m\alpha\, cos^{m-1}(\alpha x+\beta)\sin(\alpha x+\beta)\cdot dx.$

3) $d[tg^m(\alpha x+\beta)]= m\alpha\, tg^{m-1}(\alpha x+\beta)\sec^2(\alpha x+\beta)\cdot dx.$

4) $d(2x+\sin 2x)=4\cos^2x\cdot dx.$

5) $d(2x-\sin 2x)=4\sin^2x\cdot dx.$

6) $d(9\sin x+\sin 3x)= 12\cos^3x\cdot dx.$

7) $d(9\cos x-\cos 3x)=-12\sin^3x\cdot dx.$

8) $d(x+\sin x\cos x)=2\cos^2x\cdot dx.$

9) $d(x-\sin x\cos x)=2\sin^2x\cdot dx.$

10) $d\{(2+\cos^2x)\sin x\}=3\cos^3x\cdot dx.$

11) $d\{(2+\sin^2x)\cos x\}=-3\sin^3x\cdot dx.$

Warum stimmen die rechten Seiten von 4) und 8), 5) und 9), 6) und 10), 7) und 11) bis auf konstante Faktoren miteinander überein?

12) $d\{\frac{3}{2}x+(\frac{3}{2}\cos x+\cos^3x)\sin x\}=4\cos^4x\cdot dx.$

13) $d\{\frac{3}{2}x-(\frac{3}{2}\sin x+\sin^3x)\cos x\}=4\sin^4x\cdot dx.$

14) $$d(3\,tg\,x + tg^3 x) = \frac{3}{\cos^4 x}\cdot dx.$$

15) $$d(3\cot x + \cot^3 x) = -\frac{3}{\sin^4 x}\cdot dx.$$

16) $$d(tg\,x - \tfrac{1}{3}\,tg^3 x) = \frac{\cos 2x}{\cos^4 x}\cdot dx.$$

17) $$d(tg\,x - tg^3 x) = \frac{\cos 3x}{\cos^5 x}\cdot dx.$$

18) $$d(\tfrac{3}{2}\,tg^2 x - \tfrac{1}{4}\,tg^4 x) = \frac{\sin 3x}{\cos^5 x}\cdot dx.$$

19) $$d(2\,tg^2 x - tg^4 x) = \frac{\sin 4x}{\cos^6 x}\cdot dx.$$

20) $$d\left\{\frac{3\,tg\,x - tg^3 x}{1 - 3\,tg^2 x}\right\} = \frac{3}{\cos^2 3x}\cdot dx.$$

21) $$d\left\{\frac{tg\,x - tg^3 x}{1 - 6\,tg^2 x + tg^4 x}\right\} = \frac{1}{\cos^2 4x}\cdot dx.$$

22) $$d\left(\frac{\sin x}{a + b\cos x}\right) = \frac{a\cos x + b}{(a + b\cos x)^2}\cdot dx.$$

23) $$d\left(\frac{1}{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}\right) = \frac{(\alpha - \beta)\sin 2x}{(\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x)^2}\cdot dx.$$

24) $$d\sqrt{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x} = -\frac{(\alpha - \beta)\sin 2x}{2\sqrt{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}}\cdot dx.$$

25) $$d\left\{\frac{\sqrt{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}}{\cos x}\right\} = \frac{\beta\sin x\sec^2 x}{\sqrt{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}}\cdot dx.$$

26) $$d\left\{\frac{\sqrt{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}}{\sin x}\right\} = -\frac{\alpha\cos x\,\mathrm{cosec}^2 x}{\sqrt{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}}\cdot dx.$$

27) $$d\left\{\frac{\sqrt{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}}{\cos x\sin x}\right\} = -\frac{\alpha\cot^2 x - \beta\,tg^2 x}{\sqrt{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}}\cdot dx.$$

28) $$d\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}}\right\} = -\frac{\beta\sin x}{\sqrt{(\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x)^3}}\cdot dx.$$

29) $$d\left\{\frac{\sin x}{\sqrt{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}}\right\} = \frac{\alpha\cos x}{\sqrt{(\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x)^3}}\cdot dx.$$

30) $$d\left\{\frac{\cos x\sin x}{\sqrt{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}}\right\} = \frac{\alpha\cos^4 x - \beta\sin^4 x}{\sqrt{(\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x)^3}}\cdot dx.$$

## § 5.

## Beispiele zur Differentiation cyklometrischer Funktionen.

1) $$d\, arc\, tg \frac{1}{x} = -\frac{1}{1+x^2} \cdot dx.$$

2) $$d\, arc\, tg \frac{1-x}{1+x} = -\frac{1}{1+x^2} \cdot dx.$$

Warum sind die rechten Seiten dieser Gleichungen identisch mit $d(-arc\, tg\, x)$?

3) $$d\, arc\, tg \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2}{1+x^2} \cdot dx.$$

4) $$d\, arc\, cos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \cdot dx.$$

Warum stimmen die rechten Seiten dieser Gleichungen überein mit $d(2\, arc\, tg\, x)$?

5) $$d\, arc\, tg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx.$$

Warum ist die rechte Seite $= d\, arc\, sin\, x$?

6) $$d\, arc\, sin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2} \cdot dx.$$

Warum ist die rechte Seite $= d\, arc\, tg\, x$?

7) $$d\, arc\, sin \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx.$$

Warum ist die rechte Seite $= d(2\, arc\, sin\, x)$?

8) $$d\, arc\, tg \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \frac{1}{2(1+x^2)} \cdot dx.$$

Warum ist die rechte Seite $= d(\frac{1}{2}\, arc\, tg\, x)$?

9) $$d\left\{2\, arc\, tg \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}\right\} = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{a+bx+cx^2} \cdot dx.$$

10) $$d\, arc\, sin \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+bx-cx^2}} \cdot dx.$$

11) $$d\left\{2\, arc\, tg \frac{2a+bx}{2\sqrt{4ac-b^2}}\right\} = -\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{a+bx+cx^2} \cdot dx.$$

12) $$d \, arc \sin \frac{2a - bx}{x\sqrt{4ac + b^2}} = - \frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{-a + bx + cx^2}} \cdot dx.$$

13) $$d \, arc \, tg \frac{x\sqrt{2\alpha + \beta}}{\alpha - x^2} = \frac{(\alpha + x^2)\sqrt{2\alpha + \beta}}{\alpha^2 + \beta x^2 + x^4} \cdot dx.$$

14) $$d \, arc \sin \frac{\alpha x + \beta}{\alpha + \beta x} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{(\alpha + \beta x)\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx.$$

15) $$d \, arc \sin \frac{(2\alpha + \beta\gamma)x - \alpha\gamma}{\gamma(\alpha + \beta x)} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha + \beta\gamma)}}{(\alpha + \beta x)\sqrt{\gamma x - x^2}} \cdot dx.$$

16) $$d \, arc \sin \frac{2a\beta - b\alpha + (b\beta - 2c\alpha)x}{(\alpha + \beta x) \cdot \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{\sqrt{b\alpha\beta - a\beta^2 - c\alpha^2}}{(\alpha + \beta x)\sqrt{a + bx + cx^2}} \cdot dx.$$

17) $$d \, arc \sin \frac{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)(1 - x^2)}}{\alpha + \beta x} = - \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{(\alpha + \beta x)\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx.$$

18) $$d \, arc \, tg \frac{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)(1 - x^2)}}{\alpha x + \beta} = - \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{(\alpha + \beta x)\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx.$$

Warum sind die rechten Seiten von 17) und 18) gleich und entgegengesetzt der rechten Seite von Nr. 14)?

19) $$d\left\{2 \, arc \sin \sqrt{\frac{(\alpha + \beta\gamma)x}{\gamma(\alpha + \beta x)}}\right\} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha + \beta\gamma)}}{(\alpha + \beta x)\sqrt{\gamma x - x^2}} \cdot dx.$$

20) $$d\left\{2 \, arc \, tg \sqrt{\frac{(\alpha + \beta\gamma)x}{\alpha(\gamma - x)}}\right\} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha + \beta\gamma)}}{(\alpha + \beta x)\sqrt{\gamma x - x^2}} \cdot dx.$$

Weshalb stimmen die rechten Seiten von Nr. 15), 19) und 20) überein?

21) $$d \, arc \, tg \frac{x\sqrt{\alpha + \beta}}{\sqrt{\alpha(1 - x^2)}} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}}{(\alpha + \beta x^2)\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx.$$

22) $$d \, arc \sin \frac{x\sqrt{\alpha + \beta}}{\sqrt{\alpha + \beta x^2}} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}}{(\alpha + \beta x^2)\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx.$$

23) $$d \, arc \sin \frac{(2\alpha + \beta x)\sqrt{\gamma}}{\beta\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{x\sqrt{\gamma(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\sqrt{\alpha + \beta x}} \cdot dx.$$

24) $$d \, arc \sin \frac{(\beta + 2\gamma x)\sqrt{\alpha}}{\beta\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = - \frac{\sqrt{\alpha(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\sqrt{\beta x + \gamma x^2}} \cdot dx.$$

## § 6.

### Vermischte Beispiele.

1) $$d(x^x) = x^x(1 + lg\, x) \cdot dx.$$

Man beachte hierbei, daß $x^x$ als Exponentialgröße dargestellt werden kann.

2) $$d(x^{lg\, x}) = 2x^{lg\, x - 1}\, lg\, x \cdot dx.$$

3) $$d[(lg\, x)^x] = (lg\, x)^{x-1}\{1 + lg\, x \cdot lg\,(lg\, x)\} \cdot dx.$$

4) $$d\left\{\left(\frac{x}{e}\right)^x\right\} = \left(\frac{x}{e}\right)^x lg\, x \cdot dx.$$

Wenn $u$ und $v$ Funktionen von $x$ bedeuten, $u'$ und $v'$ ihre nach $x$ genommenen Differentialquotienten sind, so gilt überhaupt die Formel

5) $$d(u^v) = u^{v-1}(u'v + uv'\, lg\, u) \cdot dx.$$

Im folgenden bezeichne ${}^b log\, z$ den zur Basis $b$ gehörenden Logarithmus von $z$; es ist dann

6) $$d({}^x log\, a) = -\frac{1}{x} \cdot {}^x log\, a \cdot {}^x log\, e \cdot dx.$$

Hier wird es zweckmäßig sein, ${}^x log\, a$ durch natürliche Logarithmen auszudrücken.

7) $$d\{{}^x log\,(\alpha + \beta x)\} = \left\{\frac{\beta}{\alpha + \beta x} - \frac{1}{x} \cdot {}^x log\,(\alpha + \beta x)\right\} {}^x log\, e \cdot dx.$$

8) $$d\{{}^x log\, sin\, x\} = \left\{cot\, x - \frac{1}{x} \cdot {}^x log\, sin\, x\right\} {}^x log\, e \cdot dx.$$

Sind überhaupt $y$ und $z$ Funktionen von $x$, $y'$ und $z'$ ihre Differentialquotienten, so gilt die allgemeine Formel

9) $$d({}^y log\, z) = \left(\frac{z'}{z} - \frac{y'}{y} \cdot {}^y log\, z\right) \cdot {}^y log\, e \cdot dx.$$

10) $$d\{x\, arc\, sin\, x + \sqrt{1 - x^2}\} = arc\, sin\, x \cdot dx.$$

11) $$d\{x\, arc\, tg\, x - \tfrac{1}{2}\, lg\,(1 + x^2)\} = arc\, tg\, x \cdot dx.$$

12) $$d\left\{\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, arc\, sin\, x + \tfrac{1}{2}\, lg\,(1 - x^2)\right\} = \frac{arc\, sin\, x}{\sqrt{(1 - x)^3}} \cdot dx.$$

13) $$d\{x^2 + (arc\, sin\, x - 2x\sqrt{1 - x^2})\, arc\, sin\, x\} = \frac{4x^2\, arc\, sin\, x}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx.$$

14) $$d\left\{x-\tfrac{1}{2}\operatorname{arc}tg\,x)\operatorname{arc}tg\,x-\tfrac{1}{2}\lg(1+x^2)\right\}=\frac{x^2\operatorname{arc}tg\,x}{1+x^2}\cdot dx.$$

15) $$d\left\{\frac{1}{1+x^2}+\left(\frac{2x}{1+x^2}+\operatorname{arc}tg\,x\right)\operatorname{arc}tg\,x\right\}=\frac{4\operatorname{arc}tg\,x}{(1+x^2)^2}\cdot dx.$$

16) $$d\left\{\lg\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)-\frac{\arcsin x}{x}\right\}=\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot dx.$$

17) $$d\left\{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)\right\}=(a^2+b^2)e^{ax}\cos bx\cdot dx.$$

18) $$d\left\{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)\right\}=(a^2+b^2)e^{ax}\sin bx\cdot dx.$$

19) $$d\left\{(x+k\sqrt{1-x^2})e^{k\arcsin x}\right\}=(1+k^2)e^{k\arcsin x}\cdot dx.$$

20) $$d\left\{\frac{k+x}{\sqrt{1+x^2}}e^{k\operatorname{arc}tg\,x}\right\}=\frac{1+k^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}e^{k\operatorname{arc}tg\,x}\cdot dx.$$

21) $$d\left\{x\cos(\lg x-\tfrac{1}{4}\pi)\right\}=\sqrt{2}\cdot\cos(\lg x)\cdot dx.$$

22) $$d\left\{x\sin(\lg x-\tfrac{1}{4}\pi)\right\}=\sqrt{2}\cdot\sin(\lg x)\cdot dx.$$

23) $$d\lg\left(\frac{\alpha+\beta\,tg\,x}{\alpha-\beta\,tg\,x}\right)=\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2\cos^2x-\beta^2\sin^2x}\cdot dx.$$

24) $$d\lg\left(\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\,tg\,\tfrac{1}{2}x}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\,tg\,\tfrac{1}{2}x}\right)=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}\cdot dx.$$

25) $$d\operatorname{arc}tg\left(\frac{\beta}{\alpha}\,tg\,x\right)=\frac{\alpha\beta}{\alpha^2\cos^2x+\beta^2\sin^2x}\cdot dx.$$

26) $$d\operatorname{arc}tg\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,tg\,\tfrac{1}{2}x\right)=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2(a+b\cos x)}\cdot dx.$$

27) $$d\lg\left\{\frac{(a-b)tg\tfrac{1}{2}x+c-\sqrt{b^2+c^2-a^2}}{(a-b)tg\tfrac{1}{2}x+c+\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\right\}=\frac{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}{a+b\cos x+c\sin x}\cdot dx.$$

28) $$d\operatorname{arc}tg\frac{(a-b)\,tg\,\tfrac{1}{2}x+c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}{2(a+b\cos x+c\sin x)}\cdot dx.$$

29) $$d\left\{\sqrt{2}\cdot\operatorname{arc}tg\frac{\sqrt{2a}\cdot\sin\tfrac{1}{2}x}{\sqrt{(a+b)\cos x}}\right\}=\frac{\sqrt{a(a+b)}\cdot\cos\tfrac{1}{2}x}{(a+b\cos x)\sqrt{\cos x}}\cdot dx.$$

30) $$d\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\lg\left(\frac{\sqrt{2a}\cdot\cos\tfrac{1}{2}x-\sqrt{(a-b)\cos x}}{\sqrt{2a}\cdot\cos\tfrac{1}{2}x+\sqrt{(a-b)\cos x}}\right)\right\}=\frac{\sqrt{a(a-b)}\cdot\sin\tfrac{1}{2}x}{(a+b\cos x)\sqrt{\cos x}}\cdot dx.$$

# Kapitel II.

## Mehrfache Differentiationen von entwickelten Funktionen einer Variabeln.

### § 7.

### Grundformeln und allgemeine Regeln.

Die successiven Differentialquotienten der Funktion $f(x)$ werden entweder bezeichnet durch

$$\frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, \ldots$$

oder kürzer durch

$$Df(x), \quad D^2 f(x), \quad D^3 f(x), \ldots$$

oder auch durch

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \ldots$$

Für die höheren Differentialquotienten der einfachsten Funktionen gelten folgende Formeln:

$$1) \quad \begin{cases} D^n[(a+bx)^\mu] \\ = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1]) \,.\, b^n \,.\, (a+bx)^{\mu-n}; \end{cases}$$

spezieller für $\mu = -1$

$$2) \quad D^n\left(\frac{1}{a+bx}\right) = \frac{(-1)^n . 1 . 2 . 3 \ldots n . b^n}{(a+bx)^{n+1}}$$

und für $\mu = -\frac{1}{2}$

$$3) \quad D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right) = \frac{(-1)^n . 1 . 3 . 5 \ldots (2n-1) . b^n}{2^n (a+bx)^n \sqrt{a+bx}}.$$

$$4) \quad D^n lg(a+bx) = \frac{(-1)^{n-1} . 1 . 2 . 3 \ldots (n-1) . b^n}{(a+bx)^n}.$$

$$5) \quad D^n(e^{bx}) = b^n e^{bx}.$$

$$6) \quad D^n \sin x = \sin\left(\tfrac{1}{2} n\pi + x\right).$$

$$7) \quad D^n \cos x = \cos\left(\tfrac{1}{2} n\pi + x\right).$$

Bedeuten $u$ und $v$ Funktionen der Variabeln $x$, so ist

$$8)\qquad D^n(au + bv) = a\,.\,D^n u + b\,.\,D^n v.$$

$$9)\qquad \begin{cases} D^n(uv) = (n)_0\,.\,u\,.\,D^n v + (n)_1\,.\,Du\,.\,D^{n-1}v \\ \qquad\qquad + (n)_2\,.\,D^2u\,.\,D^{n-2}v + \cdots, \end{cases}$$

wobei in der letzten Formel unter $(n)_0$, $(n)_1$, $(n)_2$, ... die Binomialkoeffizienten

$$1,\ \frac{n}{1},\ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3},\ldots$$

zu verstehen sind.

Um die höheren Differentialquotienten einer gegebenen Funktion $f(x)$ zu entwickeln, kann man zwei verschiedene Methoden benutzen: die rekurrierende und die independente Darstellung. Bei der ersten bildet man zunächst eine Gleichung zwischen zwei oder mehreren aufeinander folgenden Differentialquotienten beliebig hoher Ordnung, wie z. B. zwischen $f^{(n)}(x)$, $f^{(n+1)}(x)$, $f^{(n+2)}(x)$, und berechnet mittelst dieser Gleichung (der sogenannten Rekursionsformel) einen Differentialquotienten nach dem anderen. Bei der zweiten Methode sucht man $f^{(n)}(x)$ unabhängig von den vorhergehenden Differentialquotienten darzustellen, wie dies z. B. bei den Formeln 1) bis 7) geschehen ist. Da sich für keine der beiden Methoden allgemeine Vorschriften geben lassen, so dienen die folgenden Beispiele hauptsächlich um zu zeigen, wie man in speziellen Fällen die besonderen Eigenschaften einer gegebenen Funktion benutzen muß.

## § 8.

### Beispiele zur rekurrierenden Entwickelung höherer Differentialquotienten.

1. Handelt es sich um die successiven Differentialquotienten von

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2},$$

so differenziert man zunächst einmal; die entstehende Gleichung

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

multipliziert man mit $1 + x^2$, gibt dem Resultate die Form

$$(1+x^2)f'(x)=xf(x)$$

und differenziert noch $(m+1)$-mal mittels der Formel 9) in § 7; das Resultat lautet

$$(1+x^2)f^{(m+2)}(x)+(m+1)_1\,.\,2xf^{(m+1)}(x)+(m+1)_2\,.\,2f^{(m)}(x)$$
$$=xf^{(m+1)}(x)+(m+1)_1\,.\,f^{(m)}(x)$$

oder

$$f^{(m+2)}(x)=-\frac{(2m+1)xf^{(m+1)}(x)+(m-1)(m+1)f^{(m)}(x)}{1+x^2}.$$

Für $m=0$ folgt aus dieser Rekursionsformel unter Einführung der schon bekannten Werte von $f^{(0)}(x)=f(x)$ und $f'(x)$

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}};$$

ferner ist für $m=1$, $2$ usw.

$$f'''(x)=-\frac{3xf''(x)}{1+x^2}=-\frac{3x}{\sqrt{(1+x^2)^5}},$$

$$f^{IV}(x)=-\frac{5xf'''(x)+3f''(x)}{1+x^2}=\frac{12x^2-3}{\sqrt{(1+x^2)^7}},$$

usw.

In dem speziellen Falle $x=0$ wird die Rekursionsformel einfacher, nämlich

$$f^{(m+2)}(0)=-(m-1)(m+1)\,.\,f^{(m)}(0)$$

und daraus erhält man wegen $f(0)=1$ und $f'(0)=0$

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n}{2}-1}\,.\,[1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(n-3)]^2\,.\,(n-1)$$
für gerade Werte von $n$,

$$f^{(n)}(0)=0,\ \text{für ungerade Werte von } n.$$

2. Die Funktion
$$f(x)=(a+bx^2)^{\mu}$$
gibt bei gleicher Behandlung

$$(a+bx^2)f'(x)=2\mu bxf(x),$$

$$f^{(m+2)}(x)=b\,\frac{(2\mu-2m-2)xf^{(m+1)}(x)+(m+1)(2\mu-m)f^{(m)}(x)}{a+bx^2}.$$

Im speziellen Falle $x = 0$ wird bei geraden Werten von $n$

$$f^{(n)}(0)=1\cdot3\cdot5\cdots(n-1\cdot\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots\left(\mu-\left[\frac{n}{2}-1\right]\right)a^{\mu-\frac{n}{2}}.\left(2b\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$=1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)\cdot2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)\cdots$$

$$(2\mu-n+2)\,a^{\mu}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}},$$

dagegen bei ungeraden Werten von $n$

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

3. Um die Funktion

$$f(x) = \frac{2a}{(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a})\sqrt{a+bx}}$$

mehrmals zu differenzieren, schreibt man erst

$$f(x) = \frac{2a}{b}\cdot\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{x\sqrt{a+bx}},$$

multipliziert mit $x\sqrt{a+bx}$ und differenziert vorläufig einmal; nach gehöriger Reduktion findet sich

$$2(ax+bx^2)f'(x)+(2a+3bx)f(x)=2a.$$

Durch $(m+1)$-malige Differentiation folgt nun die Rekursionsformel

$$2x(a+bx)f^{(m+2)}(x)+[(2m+4)a+(4m+7)bx]f^{(m+1)}(x)$$
$$+(m+1)(2m+3)bf^{(m)}(x)=0.$$

Für den speziellen Fall $x = 0$ ergibt sich wegen $f(0) = 1$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n\cdot1\cdot2\cdot3\cdots n\frac{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}{4\cdot6\cdot8\cdots(2n+2)}\left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

4. Aus der Gleichung

$$f(x) = \left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}+\beta x\right)^{\mu}$$

erhält man durch einmalige Differentiation

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}\cdot f'(x) = \mu\beta\cdot f(x);$$

eine weitere Differentiation liefert — wenn die soeben gefundene Formel benutzt wird — die Gleichung

$$(\alpha^2+\beta^2x^2)\cdot f''(x)+\beta^2\cdot xf'(x) = \mu^2\beta^2\cdot f(x).$$

Nach $m$-maliger Differentiation dieser Gleichung findet man

$$(\alpha^2+\beta^2x^2)f^{(m+2)}(x) = -(2m+1)\beta^2xf^{(m+1)}(x)$$
$$+(\mu^2-m^2)\beta^2f^{(m)}(x).$$

Für $x = 0$ ergibt sich bei geraden Werten von $n$

$$f^{(n)}(0) = \mu^2(\mu^2 - 2^2)(\mu^2 - 4^2)\cdots(\mu^2 - [n-2]^2)\alpha^{\mu-n}\beta^n,$$

dagegen bei ungeraden Werten von $n$

$$f^{(n)}(0) = \mu(\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 3^2)\cdots(\mu^2 - [n-2]^2)\alpha^{\mu-n}\beta^n.$$

5. Es sei

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(arc \sin x)^2;$$

man findet dann

$$(1 - x^2)f''(x) - xf'(x) = 1$$

und hieraus die Rekursionsformel

$$(1 - x^2)f^{(m+2)}(x) = (2m + 1)xf^{(m+1)}(x) + m^2 f^{(m)}(x).$$

Im speziellen Falle $x = 0$ wird

$$f^{(n)}(0) = [2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-2)]^2, \quad \text{für gerade Werte von } n,$$

$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad \text{für ungerade Werte von } n.$$

6. Aus der Gleichung

$$f(x) = \cos(\mu\, arc \sin x)$$

folgt, wenn einmal differenziert, dann mit $\sqrt{1 - x^2}$ multipliziert und nochmals differenziert wird,

$$(1 - x^2)f''(x) - xf'(x) = -\mu^2 f(x);$$

man findet nachher die Rekursionsformel

$$(1 - x^2)f^{(m+2)}(x) = (2m + 1)xf^{(m+1)}(x) + (m^2 - \mu^2)f^{(m)}(x).$$

Diese gibt im speziellen Falle $x = 0$

$$f^{(n)}(0) = -\mu^2(2^2 - \mu^2)(4^2 - \mu^2)\cdots([n-2]^2 - \mu^2),$$

für gerade Werte von $n$,

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \text{für ungerade Werte von } n.$$

7. Eine ganz ähnliche Behandlung gestattet die Funktion

$$f(x) = \sin(\mu\, arc \sin x).$$

Die Rekursionsformel ist hier dieselbe wie vorhin, und für $x = 0$ wird

$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad \text{bei geraden Werten von } n,$$

$$f^{(n)}(0) = \mu(1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2)\cdots([n-2]^2 - \mu^2),$$

bei ungeraden Werten von $n$.

8. Es sei

$$f(x) = (1+x^2)^{\frac{\mu}{2}} \cos(\mu \operatorname{arc} tg\, x);$$

differenziert man statt dieser Gleichung die folgende

$$(1+x^2)^{-\frac{\mu}{2}} f(x) = \cos(\mu \operatorname{arc} tg\, x),$$

multipliziert nachher mit $1+x^2$ und differenziert noch einmal, so findet man

$$(1+x^2) f''(x) - 2(\mu-1) x f'(x) + \mu(\mu-1) f(x) = 0.$$

Daraus ergibt sich die Rekursionsformel

$$(1+x^2) f^{(m+2)}(x) = 2(\mu-m-1) x f^{(m+1)}(x) \\ - (\mu-m)(\mu-m-1) f^{(m)}(x).$$

Im speziellen Falle $x = 0$ wird

$f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)$, für gerade $n$,

$f^{(n)}(0) = 0$, für ungerade $n$.

9. Ganz ähnlich läßt sich die Funktion

$$f(x) = (1+x^2)^{\frac{\mu}{2}} \sin(\mu \operatorname{arc} tg\, x)$$

behandeln. Die Rekursionsformel ist hier dieselbe wie vorhin; im Falle $x = 0$ ergibt sich

$f^{(n)}(0) = 0$, für gerade $n$,

$f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)$, für ungerade $n$.

## § 9.

### Beispiele zur independenten Entwickelung höherer Differentialquotienten.

1. Um die gebrochene Funktion

$$\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2 x^2}$$

zu differenzieren, bringt man dieselbe auf die Form

$$\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{\alpha-\beta x} + \frac{1}{\alpha+\beta x}\right)$$

und wendet die Formel 2) in § 7 an; man erhält

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2-\beta^2x^2}\right)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot\beta^n}{2\alpha}\left\{\frac{1}{(\alpha-\beta x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(\alpha+\beta x)^{n+1}}\right\}$$

oder auch

$$\left\{\begin{aligned}&D^n\left(\frac{1}{\alpha^2-\beta^2x^2}\right)\\&=\frac{(-1)^{n+1}\cdot1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot\beta^n}{2\alpha}\left\{\frac{1}{(\beta x-\alpha)^{n+1}}-\frac{1}{(\beta x+\alpha)^{n+1}}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Vereinigt man die beiden Brüche rechter Hand, benutzt im Zähler den binomischen Satz und führt die Abkürzung

$$U=(n+1)_1\cdot(\beta x)^n+(n+1)_3\cdot\alpha^2(\beta x)^{n-2}+(n+1)_5\cdot\alpha^4(\beta x)^{n-4}+\cdots$$

ein, so folgt

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2-\beta^2x^2}\right)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot\beta^n\cdot U}{(\alpha^2-\beta^2x^2)^{n+1}}.$$

2. Mittelst eines ähnlichen Verfahrens erhält man

$$\left\{\begin{aligned}&D^n\left(\frac{x}{\alpha^2-\beta^2x^2}\right)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot\beta^n}{2\beta}\left\{\frac{1}{(\alpha-\beta x)^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{(\alpha+\beta x)^{n+1}}\right\}\\&\quad=(-1)^{n+1}\cdot3\cdot4\cdots n\cdot\beta^{n-1}\left\{\frac{1}{(\beta x-\alpha)^{n+1}}+\frac{1}{(\beta x+\alpha)^{n+1}}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$V=(\beta x)^{n+1}+(n+1)_2\cdot\alpha^2(\beta x)^{n-1}+(n+1)_4\cdot\alpha^4(\beta x)^{n-3}+\cdots,$$

so ist auch

$$D^n\left(\frac{x}{\alpha^2-\beta^2x^2}\right)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot\beta^{n-1}\cdot V}{(\alpha^2-\beta^2x^2)^{n+1}}.$$

3. Um die Funktion

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2}$$

zu differenzieren, kann man die Zerlegung

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2}=\frac{1}{2\alpha i}\left(\frac{1}{\beta x-\alpha i}-\frac{1}{\beta x+\alpha i}\right)\quad(i=\sqrt{-1})$$

benutzen und dann wie in Nr. 1 rechnen. Wird hierbei zur Abkürzung

$$U=(n+1)_1\cdot(\beta x)^n-(n+1)_3\cdot\alpha^2(\beta x)^{n-2}+(n+1)_5\cdot\alpha^4(\beta x)^{n-4}-\cdots$$

gesetzt, so ergibt sich

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right)=\frac{(-1)^n\cdot1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot\beta^n\cdot U}{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{n+1}}.$$

Ein anderes Verfahren ist folgendes. Man führe den Hilfswinkel $\omega$ ein mittels der Formel

$$\omega = arc\, tg \frac{\alpha}{\beta x},$$

aus welcher folgt

$$x = \frac{\alpha}{\beta} \cot \omega, \quad dx = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{d\omega}{\sin^2 \omega}, \quad d\omega = -\frac{\beta}{\alpha} \sin^2 \omega \cdot dx,$$

und differenziere zunächst die Gleichung

$$\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \sin^2 \omega;$$

man erhält

$$d\left(\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}\right) = \frac{2}{\alpha^2} \sin \omega \cos \omega \cdot d\omega = -\frac{2\beta}{\alpha^3} \sin^3 \omega \cos \omega \cdot dx,$$

oder

$$D\left(\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}\right) = -\frac{\beta}{\alpha^3} \sin^2 \omega \sin 2\omega.$$

Differenziert man zum zweiten Male und drückt $d\omega$ wieder durch $dx$ aus, so findet man

$$D^2\left(\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}\right) = +\frac{2\beta^2}{\alpha^4} \sin^3 \omega \sin 3\omega$$

und durch mehrmalige Anwendung desselben Verfahrens

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}\right) = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot \beta^n}{\alpha^{n+2}} \sin^{n+1} \omega \cdot \sin(n+1)\omega.$$

Die allgemeine Gültigkeit dieser Formel beweist man mittelst des Schlusses von $n$ auf $n+1$, d. h. man differenziert die vorstehende Gleichung noch einmal und zeigt, daß hierdurch entsteht

$$D^{n+1}\left(\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}\right) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n+1) \cdot \beta^{n+1}}{\alpha^{n+3}} \sin^{n+2} \omega \cdot \sin(n+2)\omega;$$

die Formel gilt also für den $(n+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten, wenn sie für den $n^{\text{ten}}$ richtig war, und da sie beim ersten Differentialquotienten gegolten hat, so ist sie nun successive richtig für den zweiten, dritten usw. Setzt man für $\sin \omega$ und $\omega$ ihre ursprünglichen Werte, so gelangt man zu dem Endresultate

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}\right) = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot \beta^n}{\alpha \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 x^2)^{n+1}}} \sin\left[(n+1)\, arc\, tg \frac{\alpha}{\beta x}\right].$$

Aus der Vergleichung der beiden, auf verschiedenen Wegen erhaltenen Ausdrücke für denselben Differentialquotienten folgt noch

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}{\beta x}\right)^{n+1} \sin\left[(n+1)\, arc\, tg\, \frac{\alpha}{\beta x}\right] = (n+1)_1 \cdot \frac{\alpha}{\beta x} \\ &\qquad - (n+1)_3 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta x}\right)^3 + (n+1)_5 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta x}\right)^5 - \cdots \end{aligned}\right.$$

oder, wenn $n = m - 1$ gesetzt und wieder $\omega$ eingeführt wird,

$$\frac{\sin m\,\omega}{\cos^m \omega} = (m)_1 \cdot tg\,\omega - (m)_3 \cdot tg^3\,\omega + (m)_5 \cdot tg^5\omega - \cdots,$$

worin ein oft gebrauchter goniometrischer Satz liegt.

4. Der $n^{\text{te}}$ Differentialquotient von

$$\frac{x}{\alpha^2+\beta^2x^2}$$

läßt sich gleichfalls auf zwei verschiedene Arten entwickeln. Setzt man zur Abkürzung

$$V = (\beta x)^{n+1} - (n+1)_2 \cdot \alpha^2(\beta x)^{n-1} + (n+1)_4 \cdot \alpha^4(\beta x)^{n-3} - \cdots,$$

so gelangt man zu der Formel

$$D^n\left(\frac{x}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right) = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot \beta^{n-1} \cdot V}{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{m+1}}.$$

Man kann aber auch, wenn $\omega$ seine vorige Bedeutung behält, von der Gleichung

$$\frac{x}{\alpha^2+\beta^2x^2} = \frac{1}{\alpha\beta} \sin\omega \cos\omega$$

ausgehen und findet dann

$$D^n\left(\frac{x}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right) = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot \beta^{n-1}}{\alpha^{n+1}} \sin^{n+1}\omega \cos(n+1)\,\omega,$$

$$D^n\left(\frac{x}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right) = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot \beta^{n-1}}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{n+1}}} \cos\left[(n+1)\, arc\, tg\, \frac{\alpha}{\beta x}\right].$$

Durch Vergleichung der beiden auf verschiedenen Wegen erhaltenen Ausdrücke für denselben Differentialquotienten folgt noch

$$\frac{\cos m\,\omega}{\cos^m \omega} = (m)_0 - (m)_2 \cdot tg^2\,\omega + (m)_4 \cdot tg^4\omega - \cdots$$

5. Die identische Gleichung

$$\frac{1}{a+2bx+cx^2} = \frac{1}{c\left[\frac{ac-b^2}{c^2} + \left(\frac{b}{c} + x\right)^2\right]}$$

führt zur Kenntnis des $n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten der linksstehenden Funktion; man wendet hierbei die Formeln des 3. Beispiels so an, daß man

$$\alpha^2 = \frac{ac-b^2}{c^2}, \quad \beta = 1$$

und zugleich $\frac{b}{c} + x$ für $x$ setzt, wodurch sich $dx$ nicht ändert. Macht man Gebrauch von der Abkürzung

$$S = (n+1)_1 \cdot (b+cx)^n - (n+1)_3 \cdot (ac-b^2)(b+cx)^{n-2} + (n+1)_5 \cdot (ac-b^2)^2(b+cx)^{n-4} - \cdots,$$

so ergibt sich

$$D^n\left(\frac{1}{a+2bx+cx^2}\right) = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot S}{(a+2bx+cx^2)^{n+1}}.$$

Falls $ac - b^2$ positiv ist, kann man analog der zweiten Methode in Nr. 3) verfahren; wird nämlich

$$\omega = arc\,tg \frac{\sqrt{ac-b^2}}{b+cx},$$

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{ac-b^2}}{\sqrt{c(a+2bx+cx^2)}}, \quad \cos\omega = \frac{b+cx}{\sqrt{c(a+2bx+cx^2)}}$$

gesetzt, so findet sich

$$D^n\left(\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a+2bx+cx^2}\right)$$

$$= (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdots n\left(\sqrt{\frac{c}{a+2bx+cx^2}}\right)^{n+1} \cdot \sin\left[(n+1)\, arc\,tg \frac{\sqrt{ac-b^2}}{b+cx}\right].$$

6. Aus der identischen Gleichung

$$\frac{b+cx}{a+2bx+cx^2} = \frac{\frac{b}{c}+x}{\frac{ac-b^2}{c^2} + \left(\frac{b}{c}+x\right)^2}$$

erhält man nach Nr. 4), wenn die Abkürzung

$$T = (b+cx)^{n+1} - (n+1)_2 \cdot (ac-b^2)(b+cx)^{n-1} + (n+1)_4 \cdot (ac-b^2)^2(b+cx)^{n-3} - \cdots$$

eingeführt wird,

$$D^n\left(\frac{b+cx}{a+2bx+cx^2}\right) = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot T}{(a+2bx+cx^2)^{n+1}}.$$

Falls $ac - b^2$ positiv ist, kann man die zweite Methode in Nr. 4 anwenden; sie gibt

$$D^n\left(\frac{b+cx}{a+2bx+cx^2}\right)$$

$$=(-1)^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot\left(\sqrt{\frac{c}{a+2bx+cx^2}}\right)^{n+1}\cdot cos\left[(n+1) arc\,tg\frac{\sqrt{ac-b^2}}{b+cx}\right].$$

7. Nach der Regel für die Differentiation der Produkte findet man

$$D^n(e^{ax}\cos bx) = \{(n)_0\cdot a^n - (n)_2\cdot a^{n-2}b^2 + (n)_4\cdot a^{n-4}b^4 - \cdots\}e^{ax}\cos bx$$
$$-\{(n)_1\cdot a^{n-1}b - (n)_3\cdot a^{n-3}b^3 + \cdots\}e^{ax}\sin bx.$$

Ein anderer Weg zur Entwickelung desselben Differentialquotienten ist folgender. Man führe zwei Hilfskonstanten $c$ und $\vartheta$ ein mittels der Gleichungen

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad tg\,\vartheta = \frac{b}{a},$$

aus denen folgt

$$a = c\cos\vartheta, \quad b = c\sin\vartheta;$$

statt der Formel

$$D(e^{ax}\cos bx) = e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)$$

läßt sich dann schreiben

$$D(e^{ax}\cos bx) = c\,e^{ax}\cos(bx + \vartheta).$$

Durch mehrmalige Anwendung desselben Verfahrens erhält man die Formel

$$D^n(e^{ax}\cos bx) = c^n e^{ax}\cos(bx + n\vartheta),$$

welche mittelst des Schlusses von $n$ auf $n+1$ zu beweisen ist.

Vergleicht man die beiden für $D^n(e^{ax}\cos bx)$ erhaltenen Ausdrücke, setzt in der entstehenden Gleichung $x = 0$ und $b = a\,tg\,\vartheta$, so erhält man dieselbe goniometrische Formel, wie am Schlusse von Nr. 4.

8. Die höheren Differentialquotienten von $e^{ax}\sin bx$ lassen sich gleichfalls nach den vorigen zwei Methoden entwickeln. Die erste gibt

$$D^n(e^{ax}\sin bx) = \{(n)_0\cdot a^n - (n)_2\cdot a^{n-2}b^2 + (n)_4\cdot a^{n-4}b^4 - \cdots\}e^{ax}\sin bx$$
$$+\{(n)_1\cdot a^{n-1}b - (n)_3\cdot a^{n-3}b^3 + \cdots\}e^{ax}\cos bx;$$

nach der zweiten Methode erhält man

$$D^n(e^{ax}\sin bx) = c^n e^{ax}\sin(bx + n\vartheta),$$

wo $c$ und $\vartheta$ dieselbe Bedeutung haben wie in Nr. 7).

Vergleicht man die beiden für $D^n(e^{ax}\sin bx)$ erhaltenen Ausdrücke, setzt in der entstehenden Gleichung $x = 0$ und $b = a\,tg\,\vartheta$, so kommt man auf die in Nr. 3) gefundene goniometrische Relation zurück.

## § 10.

## Allgemeine Theoreme über höhere Differentialquotienten.

1. Um die höheren Differentialquotienten von $F\left(\frac{1}{x}\right)$ zu entwickeln, setze man für den Augenblick

$$\frac{1}{x} = y, \quad \text{mithin} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2};$$

es ist dann

$$\frac{dF\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = \frac{dF(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = -F'(y)\cdot\frac{1}{x^2},$$

wobei $F'(y)$ so berechnet wird, als wenn $y$ eine unabhängige Variable wäre; zufolge des Wertes von $y$ ergibt sich dann

$$DF\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\cdot F'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Eine nochmalige Anwendung desselben Verfahrens liefert

$$D^2F\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dF'(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x^3}\cdot F'\left(\frac{1}{x}\right)$$

oder durch Wiedereinsetzung des Wertes von $y$

$$D^2F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4}\cdot F''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}\cdot F'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Auf diese Weise fortgehend, erhält man der Reihe nach

$$D^3F\left(\frac{1}{x}\right) = -\left\{\frac{1}{x^6}\cdot F'''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{6}{x^5}\cdot F''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{6}{x^4}\cdot F'\left(\frac{1}{x}\right)\right\},$$

$$D^4F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^8}\cdot F^{IV}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{12}{x^7}\cdot F'''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{36}{x^6}\cdot F''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{24}{x^5}\cdot F'\left(\frac{1}{x}\right).$$

In den bisherigen Formeln scheint sich folgendes Gesetz auszusprechen:

$$D^n F\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \left\{\frac{1}{x^{2n}} \cdot F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n-1)\cdot(n)_1}{x^{2n-1}} \cdot F^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)\cdot(n)_2}{x^{2n-2}} \cdot F^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots\right\};$$

man soll dasselbe mittelst des Schlusses von $n$ auf $n+1$ beweisen.

a) Hiernach ist z. B.

$$D^n\left(e^{\frac{a}{x}}\right) = \frac{(-1)^n}{x^n}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^n + (n-1)\cdot(n)_1 \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right.$$
$$\left. + (n-1)(n-2)\cdot(n)_2 \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^{n-2} + \cdots\right\} e^{\frac{a}{x}}.$$

b) Wählt man die Funktion $F(y)$ so, daß sich $D^n F\left(\frac{1}{x}\right)$ direkt (d. h. ohne Hilfe der allgemeinen Formel) entwickeln läßt, so gelangt man nicht selten zu bemerkenswerten algebraischen oder goniometrischen Sätzen. Z. B. für

$$F(y) = arc\ tg\ y, \quad F'(y) = \frac{1}{1+y^2},$$

$$F^{(k)}(y) = \frac{(-1)^{k-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (k-1)}{(\sqrt{1+y^2})^k} \sin\left(k\ arc\ tg \frac{1}{y}\right)$$

ergibt sich

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = arc\ tg \frac{1}{x}, \quad DF\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2+1},$$

$$D^n F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{(\sqrt{x^2+1})^n} \sin\left(n\ arc\ tg \frac{1}{x}\right);$$

wendet man nun die allgemeine Formel an, indem man schreibt

$$(-1)^n \cdot \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} D^n F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(n)_1}{x} \cdot F'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n)_2}{1 \cdot x^2} \cdot F''\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$+ \frac{(n)_3}{1 \cdot 2 \cdot x^3} \cdot F'''\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots$$

und setzt man schließlich $arc\ tg\ x = \theta$, so erhält man

$$\sin^n \theta \sin n\left(\tfrac{1}{2}\pi - \theta\right) = (n)_1 \cdot \cos\theta \sin\theta - (n)_2 \cdot \cos^2\theta \sin 2\theta$$
$$+ (n)_3 \cdot \cos^3\theta \sin 3\theta - \cdots$$

Die Annahme $F(y) = \frac{1}{2} lg(1+y^2)$ führt bei gleicher Behandlung zu dem entsprechenden Satze

$$\sin^n \theta \cos n\left(\tfrac{1}{2}\pi - \theta\right) = (n)_0 - (n)_1 \cdot \cos\theta \cos\theta + (n)_2 \cdot \cos^2\theta \cos 2\theta$$
$$- (n)_3 \cdot \cos^3\theta \cos 3\theta + \cdots$$

2. Setzt man für den Augenblick $x^2 = y$, so erhält man

$$\frac{dF(x^2)}{dx} = \frac{dF(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = F'(y) \cdot 2x$$

oder

$$DF(x^2) = 2x \cdot F'(x^2);$$

die mehrmalige Anwendung desselben Verfahrens gibt

$$D^2F(x^2) = (2x)^2 \cdot F''(x^2) + 2 \cdot F'(x^2),$$

$$D^3F(x^2) = (2x)^3 \cdot F'''(x^2) + 6 \cdot 2x \cdot F''(x^2),$$

$$D^4F(x^2) = (2x)^4 \cdot F^{IV}(x^2) + 12\,(2x)^2 \cdot F'''(x^2) + 12 \cdot F''(x^2),$$

$$D^5F(x^2) = (2x)^5 \cdot F^{V}(x^2) + 20\,(2x)^3 \cdot F^{IV}(x^2) + 60\,(2x) \cdot F'''(x^2)$$

usw.;

in diesen Gleichungen aber erkennt man induktorisch das Gesetz

$$\begin{aligned} D^nF(x^2) = (2x)^n \cdot F^{(n)}(x^2) &+ \frac{n(n-1)}{1} \cdot (2x)^{n-2} \cdot F^{(n-1)}(x^2) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}(2x)^{n-4} \cdot F^{(n-2)}(x^2) \\ &+ \frac{n(n-1)\cdots(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(2x)^{n-6} \cdot F^{(n-3)}(x^2) + \cdots, \end{aligned}$$

welches mittelst des Schlusses von $n$ auf $n+1$ zu beweisen ist.

a) Beispielsweise hat man nach dieser Formel

$$\left\{ \begin{aligned} D^n\left(\frac{1}{\alpha + \beta x^2}\right) = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdots n \cdot (2\beta x)^n}{(\alpha + \beta x^2)^{n+1}} &\left\{1 - (n-1)_1 \cdot \frac{\alpha + \beta x^2}{4\beta x^2}\right. \\ &\left. + (n-2)_2 \cdot \left(\frac{\alpha + \beta x^2}{4\beta x^2}\right)^2 - \cdots\right\}. \end{aligned} \right.$$

Ersetzt man die Größen $\alpha$, $\beta$, $x$ durch

$$\frac{ac - b^2}{c}, \quad c, \quad \frac{b}{c} + x,$$

was auf $dx$ keinen Einfluß hat, und führt zur Abkürzung ein

$$\frac{c(a + 2bx + cx^2)}{4(b + cx)^2} = u,$$

so erhält man

$$\left\{ \begin{aligned} D^n\left(\frac{1}{a + 2bx + cx^2}\right) = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdots n \cdot [2(b + cx)]^n}{(a + 2bx + cx^2)^{n+1}} &\left\{1 - (n-1)_1 \cdot u\right. \\ &\left. + (n-2)_2 \cdot u^2 - \cdots\right\}. \end{aligned} \right.$$

b) Die allgemeine Formel für $D^n F(x^2)$ liefert ferner

$$\left\{\begin{aligned} D^n\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}\right) = \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(\beta x)^n}{(\sqrt{\alpha+\beta x^2})^{2n+1}}\Bigg\{1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\,\frac{\alpha+\beta x^2}{\beta x^2} \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{\alpha+\beta x^2}{\beta x^2}\right)^2 - \cdots\Bigg\}.\end{aligned}\right.$$

Benutzt man hier die nämlichen Substitutionen wie im vorigen Beispiel und setzt zur Abkürzung

$$\frac{c(a+2bx+cx^2)}{(b+cx)^2} = v,$$

so erhält man

$$\left\{\begin{aligned} D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\right) = \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot(b+cx)^n}{(\sqrt{a+2bx+cx^2})^{2n+1}}\Bigg\{1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}v \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}v^2 - \cdots\Bigg\}.\end{aligned}\right.$$

Diese Formel gestattet eine bemerkenswerte Umwandlung. Aus der Gleichung

$$(z^2-1)^n = z^{2n} - (n)_1\cdot z^{2n-2} + (n)_2\cdot z^{2n-4} - \cdots$$

folgt nämlich, wenn $z$ als unabhängige Variable angesehen wird,

$$\left\{\begin{aligned} D_z^n[(z^2-1)^n] = (n+1)(n+2)\cdots(2n)z^n\Bigg\{1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\,\frac{1}{z^2} \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}\,\frac{1}{z^4} - \cdots\Bigg\};\end{aligned}\right.$$

beachtet man erstens die identische Gleichung

$$(n+1)(n+2)\cdots(2n) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\,2^n,$$

und setzt man zweitens rechter Hand

$$z = \frac{b+cx}{\sqrt{c(a+2bx+cx^2)}},$$

so wird $\frac{1}{z^2} = v$ und die eingeklammerte Summe identisch mit der nach Potenzen von $v$ fortschreitenden Reihe; dies gibt folgende Relation

$$D_x^n\left(\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\right) = \frac{(-1)^n\sqrt{c^n}}{2^n(\sqrt{a+2bx+cx^2})^{n+1}}\,D_z^n[(z^2-1)^n],$$

wobei nach geschehener Differentiation in Beziehung auf $z$ der für $z$ angegebene Ausdruck zu substituieren ist. Hieraus folgt spezieller, wenn nach ausgeführter Differentiation $x = 0$ gesetzt wird,

$$\left\{D_x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\varkappa\lambda x+\varkappa^2 x^2}}\right)\right\}_0 = \frac{(-1)^n\varkappa^n}{2^n}\,D_\lambda^n[(\lambda^2-1)^n].$$

c) Die allgemeine Formel für $D^n F(x^2)$ liefert ferner

$$\begin{cases} D^n(\alpha + \beta x^2)^\mu = \dfrac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)\cdot(2\beta x)^n}{(\alpha+\beta x^2)^{n-\mu}}\left\{1 + \dfrac{n(n-1)}{1(\mu-n+1)}\,\dfrac{\alpha+\beta x^2}{4\beta x^2}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot(\mu-n+1)(\mu-n+2)}\left(\dfrac{\alpha+\beta x^2}{4\beta x^2}\right)^2 + \cdots\right\}. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$A_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2k+1)}{1\cdot 2\cdots k\cdot(\mu-n+1)(\mu-n+2)\cdots(\mu-n+k)},$$

$$u = \frac{c(a+2bx+cx^2)}{4(b+cx)^2},$$

so erhält man aus der vorigen Formel

$$\begin{cases} D^n(a + 2bx + cx^2)^\mu \\ = \dfrac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)[2(b+cx)]^n}{(a+2bx+cx^2)^{n-\mu}}(1 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots). \end{cases}$$

Bemerkenswert ist der spezielle Fall $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, $n = m - 1$, $\mu = m - \frac{1}{2}$, welcher gibt

$$\begin{cases} D^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}} = \dfrac{(-1)^{m-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)\cdot x^m}{m}\left\{(m)_1\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right. \\ \qquad\qquad \left. - (m)_3\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3 + (m)_5\cdot\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5 - \cdots\right\}. \end{cases}$$

Für $x = \cos\omega$ läßt sich die eingeklammerte Reihe mittelst der Formel 3) in § 9

$$(m)_1\cdot tg\,\omega - (m)_3\cdot tg^3\omega + (m)_5\cdot tg^5\omega - \cdots = \frac{\sin m\omega}{\cos^m\omega}$$

summieren, und es wird nach Restitution von $\omega = arc\cos x$

$$D^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{m-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{m}\sin(m\,arc\cos x).$$

d) Wählt man $F(y)$ so, daß $D^n F(x^2)$ unabhängig von der allgemeinen Formel entwickelt werden kann, so gelangt man zu irgend einem algebraischen oder goniometrischen Satze. Im Falle

$$F(y) = lg(1-y)$$

erhält man z. B.

$$\frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{(2x)^n} = 1 - \frac{n}{1}\cdot\frac{x^2-1}{4x^2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}\left(\frac{x^2-1}{4x^2}\right)^2 - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x^2-1}{4x^2}\right)^3 + \cdots$$

oder wenn

$$\frac{x^2-1}{x^2} = z, \quad \text{mithin} \quad x = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

gesetzt wird,

$$\frac{(1+\sqrt{1-z})^n + (1-\sqrt{1-z})^n}{2^n} = 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{z}{4}\right) + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{4}\right)^2 - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{z}{4}\right)^3 + \cdots,$$

worin der Koeffizient von $(\frac{1}{4}z)^k$ durch den Ausdruck

$$\frac{n(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-2k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

gegeben ist.

Differenziert man die vorige Gleichung in Beziehung auf $z$ und läßt nachher $n+1$ an die Stelle von $n$ treten, so findet man leicht

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{(1+\sqrt{1-z})^n - (1-\sqrt{1-z})^n}{2^n\sqrt{1-z}} = 1 - \frac{n-2}{1}\left(\frac{z}{4}\right) \\ &+ \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{4}\right)^2 - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{z}{4}\right)^3 + \cdots \end{aligned}\right.$$

Zu ähnlichen Sätzen führt die Annahme

$$F(y) = lg(1+y),$$

und zwar ergibt sich, wenn nach Ausführung aller Differentiationen

$$arc\, tg \frac{1}{x} = \theta$$

gesetzt wird,

$$2\cos n\theta = (2\cos\theta)^n - \frac{n}{1}(2\cos\theta)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}(2\cos\theta)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}(2\cos\theta)^{n-6} + \cdots$$

Hieraus folgt noch durch Differentiation in Beziehung auf $\theta$

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = (2\cos\theta)^{n-1} - \frac{n-2}{1}(2\cos\theta)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}(2\cos\theta)^{n-5} - \cdots$$

3. Durch mehrmalige Differentiation von $F(\sqrt{x})$ erhält man folgende Gleichungen

$$DF(\sqrt{x}) = \frac{F'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}},$$

$$D^2F(\sqrt{x}) = \frac{F''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^2} - 2\frac{F'(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^3},$$

$$D^3F(\sqrt{x}) = \frac{F'''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^3} - 6\frac{F''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^4} + 12\frac{F'(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^5},$$

$$D^4F(\sqrt{x}) = \frac{F^{IV}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^4} - 12\frac{F'''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^5} + 60\frac{F''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^6} - 120\frac{F'(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^7}$$

usw.,

die zu der induktorischen Formel führen

$$D^nF(\sqrt{x}) = \frac{F^{(n)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^n} - \frac{n(n-1)}{1}\frac{F^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+1}} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}\frac{F^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+2}} - \cdots;$$

diese ist mittelst des Schlusses von $n$ auf $n+1$ zu beweisen.

a) Hiernach ergibt sich z. B.

$$\left\{ \begin{aligned} D^n\left(\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{x}}\right) = \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 2\cdots n\cdot\beta^n}{(2\sqrt{x})^n(\alpha+\beta\sqrt{x})^{n+1}}\Bigg\{1 + \frac{n-1}{1}\,\frac{\alpha+\beta\sqrt{x}}{2\beta\sqrt{x}} \\ + \frac{(n+1)(n-2)}{1\cdot 2}\left(\frac{\alpha+\beta\sqrt{x}}{2\beta\sqrt{x}}\right)^2 + \cdots\Bigg\}, \end{aligned}\right.$$

wobei die Koeffizienten unter der Form

$$\frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)(n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

enthalten sind. Das obige Resultat läßt sich noch dadurch etwas verallgemeinern, daß man $\beta$ durch $\beta\sqrt{b}$ und zugleich $x$ durch $\frac{a}{b} + x$ ersetzt.

b) Macht man Gebrauch von den Abkürzungen

$$B_k = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots n(n-1)\cdots(n-k)}{1\cdot 2\cdots k(\mu-n+1)(\mu-n+2)\cdots(\mu-n+k)},$$

$$w = \frac{\alpha+\beta\sqrt{x}}{2\beta\sqrt{x}},$$

so findet man mittelst der Formel für $D^nF(\sqrt{x})$

$$D^n(\alpha+\beta\sqrt{x})^\mu = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)\cdot\beta^n}{(2\sqrt{x})^n(\alpha+\beta\sqrt{x})^{n-\mu}}(1 - B_1 w + B_2 w^2 - \cdots).$$

Ein bemerkenswerter spezieller Fall hiervon ist

$$D^n\left(\alpha + \beta\sqrt{x}\right)^{2n-1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\,\frac{\beta}{\sqrt{x}}\left(\beta^2 - \frac{\alpha^2}{x}\right)^{n-1}.$$

c) Wählt man $F(y)$ so, daß $D^n F\left(\sqrt{x}\right)$ unabhängig von der allgemeinen Formel entwickelt werden kann, so gelangt man zu einem algebraischen oder goniometrischen Satze.

Ein Beispiel hierzu liefert die Annahme

$$F(y) = \tfrac{1}{2}\,lg\,(y^2 - 1),$$

welche gibt

$$F'(y) = \frac{y}{y^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+1}\right),$$

$$F^{(k)}(y) = (-1)^{k-1}\cdot 3\cdot 4\cdots(k-1)\cdot\left\{\frac{1}{(y-1)^k} + \frac{1}{(y+1)^k}\right\},$$

$$F\left(\sqrt{x}\right) = \tfrac{1}{2}\,lg\,(x-1),\quad DF\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1},$$

usw.

und schließlich, wenn nach Ausführung aller Differentiationen

$$x = \left(\frac{u+v}{u-v}\right)^2$$

gesetzt wird,

$$(u+v)^n = u^n + v^n + (n)_1\cdot(u^{n-1} + v^{n-1})\,\frac{uv}{u+v}$$
$$+ (n+1)_2\cdot(u^{n-2} + v^{n-2})\left(\frac{uv}{u+v}\right)^2 + \cdots$$
$$\cdots + (2n-2)_{n-1}\cdot(u+v)\left(\frac{uv}{u+v}\right)^{n-1}.$$

Nimmt man dagegen

$$F(y) = \tfrac{1}{2}\,lg\,(y^2+1)$$

und setzt nach Ausführung aller Differentiationen

$$arc\,tg\,\frac{1}{\sqrt{x}} = \theta,$$

so erhält man die goniometrische Formel

$$2^{n-1}\cos^n\theta = \cos n\theta + (n)_1\cdot\frac{\cos(n-1)\theta}{2\cos\theta} + (n+1)_2\cdot\frac{\cos(n-2)\theta}{(2\cos\theta)^2} + \cdots$$
$$\cdots + (2n-2)_{n-1}\cdot\frac{\cos\theta}{(2\cos\theta)^{n-1}}.$$

4. Durch mehrfache Differentiation von $F(x^\lambda)$ erhält man die Gleichungen

$$DF(x^\lambda) = \lambda x^{\lambda-1} \cdot F'(x^\lambda),$$
$$D^2F(x^\lambda) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} \cdot F'(x^\lambda) + \lambda^2 x^{2\lambda-2} \cdot F''(x^\lambda),$$
$$D^3F(x^\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3} \cdot F'(x^\lambda) + 3\lambda^2(\lambda-1)x^{2\lambda-3} \cdot F''(x^\lambda) + \lambda^3 x^{3\lambda-3} \cdot F'''(x^\lambda),$$

usw.

Hieraus ist ersichtlich, daß $D^nF(x^\lambda)$ folgende Gestalt haben muß

$$\left\{ D^n F(x^\lambda) = \frac{1}{x^n}\left\{ C_1 x^\lambda \cdot F'(x^\lambda) + C_2 x^{2\lambda} \cdot F''(x^\lambda) + C_3 x^{3\lambda} \cdot F'''(x^\lambda) + \cdots \right\}, \right.$$

worin $C_1, C_2, C_3, \ldots$ gewisse Koeffizienten bedeuten, welche nur von $\lambda$, nicht aber von $x$ und der Natur der Funktion $F(x^\lambda)$ abhängen. Zufolge des letzteren Umstandes kann man jene Koeffizienten dadurch ermitteln, daß man für $F(x^\lambda)$ eine Funktion wählt, deren Differentiation direkt (d. h. ohne die obige Formel) möglich ist, und nachher das Resultat mit der allgemeinen Formel vergleicht. Zu dem erwähnten Zwecke eignet sich z. B. die Annahme

$$F(y) = (1 - t + ty)^n,$$

worin $t$ eine beliebige Konstante sein möge. Benutzt man zur Abkürzung das Symbol

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-k+1) = [\mu]^k,$$

so erhält man aus der obigen Formel

$$x^n \cdot D^n(1 - t + tx^\lambda)^n = C_1 [n]^1 x^\lambda (1 - t + tx^\lambda)^{n-1} t + C_2 [n]^2 x^{2\lambda} (1 - t + tx^\lambda)^{n-2} t^2 + \cdots$$

Anderseits ist

$$F(x^\lambda) = (1 - t + tx^\lambda)^n = (1-t)^n + (n)_1 \cdot (1-t)^{n-1} t x^\lambda + (n)_2 \cdot (1-t)^{n-2} t^2 x^{2\lambda} + \cdots$$

und durch direkte Differentiation

$$x^n \cdot D^n(1 - t + tx^\lambda)^n = (n)_1 \cdot [\lambda]^n (1-t)^{n-1} \cdot tx^\lambda + (n)_2 \cdot [2\lambda]^n (1-t)^{n-2} \cdot t^2 x^{2\lambda} + \cdots$$

Die Vergleichung der beiden, auf verschiedenen Wegen gefundenen Resultate gibt eine Gleichung, die für jedes $x$ und $t$

richtig sein muß; setzt man in ihr zur Vereinfachung $x = 1$, so lautet sie

$$\left\{\begin{aligned} & \overset{1}{[n]}\cdot C_1 t + \overset{2}{[n]}\cdot C_2 t^2 + \overset{3}{[n]}\cdot C_3 t^3 + \cdots \\ & = (n)_1 \cdot \overset{n}{[\lambda]}(1-t)^{n-1} t + (n)_2 \cdot \overset{n}{[2\lambda]}(1-t)^{n-2} t^2 \\ & \qquad + (n)_3 \cdot \overset{n}{[3\lambda]}(1-t)^{n-3} t^3 + \cdots \end{aligned}\right.$$

Entwickelt man rechter Hand $(1-t)^{n-1}$, $(1-t)^{n-2}$ usw. und ordnet alles nach Potenzen von $t$, so erhält man durch Vergleichung der Koeffizienten von $t$, $t^2$, $t^3$ usw.

$$C_1 = \frac{1}{1}\overset{n}{[\lambda]},$$

$$C_2 = \frac{1}{1\cdot 2}\left\{\overset{n}{[2\lambda]} - 2\overset{n}{[\lambda]}\right\},$$

$$C_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left\{\overset{n}{[3\lambda]} - 3\overset{n}{[2\lambda]} + 3\overset{n}{[\lambda]}\right\},$$

usw.

und überhaupt

$$C_k = \frac{1}{1\cdot 2\cdots k}\left\{(k)_0\cdot\overset{n}{[k\lambda]} - (k)_1\cdot\overset{n}{[(k-1)\lambda]} + (k)_2\cdot\overset{n}{[(k-2)\lambda]} - \cdots\right\}.$$

Um das Resultat möglichst einfach darstellen zu können, setzen wir

$$L_k = (k)_0\cdot\overset{n}{[k\lambda]} - (k)_1\cdot\overset{n}{[(k-1)\lambda]} + (k)_2\cdot\overset{n}{[(k-2)\lambda]} - \cdots$$

und haben dann

$$D^n F(x^\lambda) = \frac{1}{x^n}\left\{\frac{L_1 x^\lambda}{1} F'(x^\lambda) + \frac{L_2 x^{2\lambda}}{1\cdot 2} F''(x^\lambda) + \frac{L_3 x^{3\lambda}}{1\cdot 2\cdot 2} F'''(x^\lambda) + \cdots\right\}.$$

Beispiele zu dieser allgemeinen Formel sind:

$$D^n (a + x^\lambda)^\mu = \frac{(a+x^\lambda)^\mu}{x^n}\left\{(\mu)_1\cdot L_1\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right) + (\mu)_2\cdot L_2\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2 + \cdots\right\},$$

$$D^n lg(a+x^\lambda) = \frac{1}{x^n}\left\{\frac{1}{1}\cdot L_1\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right) - \frac{1}{2}\cdot L_2\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot L_3\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right) - \cdots\right\},$$

$$D^n e^{(x^\lambda)} = \frac{1}{x^n}\left\{\frac{L_1 x^\lambda}{1} + \frac{L_2 x^{2\lambda}}{1\cdot 2} + \frac{L_3 x^{3\lambda}}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right\} e^{(x^\lambda)}.$$

Gelegentlich ergeben sich hieraus Eigenschaften der Größen $L_1$, $L_2, \ldots$ Setzt man nämlich im ersten Beispiele $a = 0$ und differenziert linker Hand direkt, so erhält man

$$\overset{n}{[\lambda\mu]} = (\mu)_1\cdot L_1 + (\mu)_2\cdot L_2 + \cdots + (\mu)_n\cdot L_n.$$

5. Differenziert man die Funktion $F(e^x)$ mehrmals nacheinander, so gelangt man zu folgenden Gleichungen

$$DF(e^x) = e^x \cdot F'(e^x),$$
$$D^2F(e^x) = e^x \cdot F'(e^x) + e^{2x} \cdot F''(e^x),$$
$$D^3F(e^x) = e^x \cdot F'(e^x) + 3e^{2x} \cdot F''(e^x) + e^{3x} \cdot F'''(e^x),$$

usw.,

deren allgemeine Form ist

$$D^nF(e^x) = C_1 e^x \cdot F'(e^x) + C_2 e^{2x} \cdot F''(e^x) + C_3 e^{3x} \cdot F'''(e^x) + \cdots$$

Um die von $x$ und $F(e^x)$ unabhängigen Koeffizienten $C_1, C_2, C_3, \ldots$ zu bestimmen, wenden wir die vorliegende Formel auf den Fall an

$$F(y =) (1 - t + ty)^n$$

und erhalten

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad D^n(1 - t + te^x)^n \\ = C_1 \overset{1}{[n]} e^x(1 - t + te^x)^{n-1}t + C_2 \overset{2}{[n]} e^{2x}(1 - t + te^x)^{n-2}t^2 + \cdots \end{array}\right.$$

Anderseits ist

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad F(e^x) = (1 - t + te^x)^n \\ = (1 - t)^n + (n)_1 \cdot (1 - t)^{n-1}te^x + (n)_2 \cdot (1 - t)^{n-2}t^2e^{2x} + \cdots \end{array}\right.$$

und durch direkte Differentiation

$$D^n(1 - t + te^x)^n = (n)_1 \cdot 1^n(1 - t)^{n-1}te^x + (n)_2 \cdot 2^n(1 - t)^{n-2}t^2e^{2x} + \cdots$$

Die Vergleichung beider Resultate gibt, wenn zur Vereinfachung $x = 0$ gesetzt wird,

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad \overset{1}{[n]} C_1 t + \overset{2}{[n]} C_2 t^2 + \overset{3}{[n]} C_3 t^3 + \cdots \\ = (n)_1 \cdot 1^n(1-t)^{n-1}t + (n)_2 \cdot 2^n(1-t)^{n-2}t^2 + (n)_3 \cdot 3^n(1-t)^{n-3}t^3 + \cdots, \end{array}\right.$$

woraus durch Anordnung nach Potenzen von $t$ folgt

$$C_1 = 1^n,$$
$$C_2 = \frac{1}{1 \cdot 2}\{2^n - 2 \cdot 1^n\},$$
$$C_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\{3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 1^n\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und überhaupt

$$C_k = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots k}\{k^n - (k)_1 \cdot (k-1)^n + (k)_2 \cdot (k-2)^n - \cdots\}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$E_k = (k)_0 \cdot k^n - (k)_1 \cdot (k-1)^n + (k)_2 \cdot (k-2)^n - \cdots,$$

so hat man die allgemeine Formel

$$D^n F(e^x) = \frac{E_1 e^x}{1} F'(e^x) + \frac{E_2 e^{2x}}{1 \cdot 2} F''(e^x) + \frac{E_3 e^{3x}}{1 \cdot 2 \cdot 3} F'''(e^x) + \cdots$$

Beispiele hierzu sind:

$$\left\{\begin{aligned} D^n (a+e^x)^\mu = (a+e^x)^\mu \Big\{ & (\mu)_1 \cdot E_1 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) \\ & + (\mu)_2 \cdot E_2 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \cdots \Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$D^n lg(a+e^x) = \tfrac{1}{1} E_1 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - \tfrac{1}{2} E_2 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) + \tfrac{1}{3} E_3 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - \cdots$$

Aus der ersten dieser beiden Formeln wird für $a = 0$

$$\mu^n = (\mu)_1 \cdot E_1 + (\mu)_2 \cdot E_2 + \cdots + (\mu)_n \cdot E_n,$$

worin eine Eigenschaft der Größen $E_1, E_2, \ldots$ liegt. Substituiert man hier die Werte

$$(\mu)_1 = \frac{\mu}{1}, \quad (\mu)_2 = \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} = \frac{\mu^2 - \mu}{1 \cdot 2}, \ldots$$

ordnet alles nach Potenzen von $\mu$ und vergleicht die beiderseitigen Koeffizienten von $\mu, \mu^2, \ldots \mu^n$, so erhält man noch $n$ spezielle Relationen. Die erste derselben ist für $n > 1$

$$0 = \tfrac{1}{1} \cdot E_1 - \tfrac{1}{2} \cdot E_2 + \tfrac{1}{3} \cdot E_3 - \cdots,$$

und die letzte

$$1 = \frac{E_n}{1 \cdot 2 \cdots n},$$

d. i. vermöge des Wertes von $E_n$

$$(n)_0 \cdot n^n - (n)_1 \cdot (n-1)^n + (n)_2 \cdot (n-2)^n - \cdots = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Durch die Formel für $D^n F(e^x)$ erledigt sich auch die Differentiation aller Funktionen von den Formen $f(\cos x)$, $f(\sin x)$ usw., weil (nach der Lehre von den Funktionen komplexer Variabeln) $\cos x$, $\sin x$ usw. durch Exponentialgrößen ausgedrückt werden können.

6. Differenziert man $F(lg\,x)$ mehrmals nacheinander, so erhält man die Gleichungen

$$DF(lg\,x) = \frac{1}{x}\cdot F'(lg\,x),$$

$$D^2F(lg\,x) = \frac{1}{x^2}\{F''(lg\,x) - F'(lg\,x)\},$$

$$D^3F(lg\,x) = \frac{1}{x^3}\{F'''(lg\,x) - 3F''(lg\,x) + 2F'(lg\,x)\},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

welche auf das allgemeine Bildungsgesetz

$$\left\{\begin{aligned} D^nF(lg\,x) = \frac{1}{x^n}\{&C_0\cdot F^{(n)}(lg\,x) - C_1\cdot F^{(n-1)}(lg\,x) \\ &+ C_2\cdot F^{(n-2)}(lg\,x) - \cdots\}\end{aligned}\right.$$

hinweisen, worin die Koeffizienten $C_0$, $C_1, \ldots C_{n-1}$ unabhängig von $x$ sind. Zu ihrer Bestimmung dient die spezielle Annahme $F(y) = e^{-\lambda y}$, $F(lg\,y) = x^{-\lambda}$, bei welcher alle angedeuteten Differentiationen ausführbar werden; die entstehende Gleichung

$$\begin{aligned}\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n-1) = C_0\lambda^n + C_1\cdot\lambda^{n-1}& \\ + C_2\lambda^{n-2} + \cdots + C_{n-1}\lambda&\end{aligned}$$

gibt zu erkennen, daß man durch Ausführung der angedeuteten Multiplikation kombinatorische Formeln für die Koeffizienten $C_0$, $C_1$, $C_2, \ldots$ aufstellen kann. Es folgt nämlich

$$\begin{aligned} C_0 &= 1, \\ C_1 &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1), \\ C_2 &= 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + \cdots + 1\cdot(n-1) \\ &\quad + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots + 2\cdot(n-1) \\ &\quad\quad + 3\cdot 4 + \cdots + 3\cdot(n-1) \\ &\quad\quad\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &\quad\quad\quad\quad + (n-2)(n-1), \end{aligned}$$

usw.,

überhaupt ist $C_1$ die Summe der Zahlen $1, 2, \ldots (n-1)$, $C_2$ die Summe der aus den letzteren herstellbaren Kombinationen zu je zweien (ohne Wiederholungen), wobei jede solche Ambe als Produkt angesehen wird, ferner ist $C_3$ die Summe der auf gleiche

Weise gebildeten Ternen usw. Diese Kombinationsreihen lassen sich zwar summieren, z. B.

$$C_0 = 1,\quad C_1 = \frac{n(n-1)}{2},\quad C_2 = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{24}, \ldots$$

jedoch ist das Bildungsgesetz von $C_1$, $C_2, \ldots$ auf diesem Wege nicht zu entdecken.*

Dagegen kann man die erwähnten Koeffizienten rekursiv berechnen, wie sich folgendermaßen zeigen läßt. Unter $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ mögen die Ausdrücke verstanden werden, welche aus $C_0, C_1, C_2, \ldots$ hervorgehen, wenn $n+1$ an die Stelle von $n$ tritt, mithin

$$\Gamma_0 = 1,\quad \Gamma_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2},$$

$$\Gamma_2 = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \cdots + (n-1)n = \frac{(n+1)n(n-1)(3n+2)}{24},$$

usw.;

es ist dann

$$(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)\cdots(\lambda+n) = \Gamma_0\lambda^n + \Gamma_1\lambda^{n-1} + \Gamma_2\lambda^{n-2} + \cdots + \Gamma_n.$$

Setzt man $\lambda - 1$ für $\lambda$ und multipliziert beiderseits mit $\frac{\lambda+n}{\lambda}$, so erhält man

$$\begin{cases} (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)\cdots(\lambda+n) \\ = \frac{\lambda+n}{\lambda}\{\Gamma_0(\lambda-1)^n + \Gamma_1(\lambda-1)^{n-1} + \cdots + \Gamma_n\}. \end{cases}$$

Die linken Seiten dieser beiden Gleichungen stimmen überein, folglich müssen auch die rechten Seiten gleich sein; entwickelt man nun $(\lambda-1)^n$, $(\lambda-1)^{n-1}, \ldots$ nach dem binomischen Satze für ganze positive Exponenten und ordnet alles nach Potenzen von $\lambda$, so gelangt man durch Vergleichung der Koeffizienten gleicher Potenzen von $\lambda$ zu der Rekursionsformel

$$k\cdot\Gamma_k = \tfrac{1}{2}(n+k)(n-k+1)_1\cdot\Gamma_{k-1} - \tfrac{1}{3}(2n+k)(n-k+2)_2\cdot\Gamma_{k-2} + \tfrac{1}{4}(3n+k)(n-k+3)_3\cdot\Gamma_{k-3} - \cdots,$$

woraus sich für $k = 1, 2, 3, \ldots$ der Reihe nach die Werte von $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ ergeben.

---

* Der Verfasser hat dasselbe nach einem anderen Verfahren gefunden, siehe „Kompendium der höheren Analysis" Teil II, Seite 23.

Für $F(y) = y^p$ erhält man bei umgekehrter Anordnung der Summanden

$$D^n (lg\,x)^p = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n} \{p \cdot C_{n-1} (lg\,x)^{p-1} - p(p-1) \cdot C_{n-2} (lg\,x)^{p-2}$$
$$+ p(p-1)(p-2) \cdot C_{n-3} (lg\,x)^{p-3} - \cdots\}.$$

Ist $p$ eine ganze positive Zahl, so müssen die Fälle $p > n$ und $p \leqq n$ unterschieden werden. Im ersten Falle enthält die Reihe $n$ Glieder, im zweiten Falle verschwinden alle diejenigen Glieder, bei welchen die Anzahl der gemachten Differentiationen mehr als $p$ beträgt, und es bleibt daher

$$D^n (lg\,x)^p = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n} \{p \cdot C_{n-1} (lg\,x)^{p-1} - p(p-1) \cdot C_{n-2} (lg\,x)^{p-2} + \cdots$$
$$+ (-1)^{p+1} p(p-1) \cdots 2 \cdot 1 : C_{n-p}\}.$$

Daraus folgt z. B., wenn $(lg\,x)^p$ kurz mit $f(x)$ bezeichnet wird,

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+p} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p \cdot C_{n-p}, \quad n \geqq p.$$

# Kapitel III.

## Differentiation von Gleichungen zwischen mehreren Variabeln.

### § 11.

### Beispiele zur Differentiation unentwickelter Funktionen einer Variabeln.

Wenn zwischen zwei veränderlichen Größen $x$ und $y$ eine Gleichung von der Form

$$f(x, y) = 0$$

besteht, so weiß man im voraus, daß $y$ eine Funktion von $x$ sein muß, deren Natur aber so lange unbekannt bleibt, als man die gegebene Gleichung nicht nach $y$ aufgelöst hat. Trotzdem kann die Gleichung differenziert werden, wobei einfach zu berücksichtigen ist, daß eine Änderung des $x$ eine gleichzeitige Änderung des $y$ zur Folge hat. Man erhält dann eine Gleichung zwischen $x$, $y$, $dx$ und $dy$, aus welcher sich $\frac{dy}{dx}$ finden läßt. Durch mehrmalige Anwendung desselben Verfahrens können auch die weiteren Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ usw. entwickelt werden.

Beispielsweise sei die gegebene Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + K = 0.$$

Nach einmaliger Differentiation ergibt sich

$$2Ax\,dx + 2By\,dy + 2C(x\,dy + y\,dx) = 0$$

und hieraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Ax + Cy}{By + Cx}.$$

Differenziert man wieder diese Gleichung, so erhält man nach einer kleinen Reduktion

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{AB - C^2}{(By + Cx)^2}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$$

und zufolge des vorigen Wertes von $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(AB - C^2)(Ax^2 + By^2 + 2Cxy)}{(By + Cx)^3},$$

oder kürzer

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(AB - C^2)K}{(By + Cx)^3}.$$

Eine fernere Differentiation liefert

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-3(AB - C^2)K}{(By + Cx)^4}\left(B\frac{dy}{dx} + C\right)$$

und durch Substitution des Wertes von $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3(AB - C^2)^2 Kx}{(By + Cx)^5}.$$

Wie man dieses Verfahren fortsetzen kann, dürfte unmittelbar einleuchten. Da sich im vorliegenden Beispiele die ursprünglich gegebene Gleichung nach $y$ auflösen läßt, so ist hier eine Probe auf die Richtigkeit der gefundenen Differentialquotienten möglich.

Weitere Beispiele sind folgende:

1)
$$x^3 - 3cxy + y^3 = 0;$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{cy - x^2}{cx - y^2},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(x^3 - 3cxy + y^3 + c^3)xy}{(cx - y^2)^3} = \frac{2c^3xy}{(cx - y^2)^3}.$$

2)
$$x^5 - 5Cxy + y^5 = 0;$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Cy - x^4}{Cx - y^4},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2C^2 + 4x^3y^3)(x^5 + y^5) + 2C^3xy - 14Cx^4y^4}{(Cx - y^4)^3} = \frac{6C(2C^2 + x^3y^3)xy}{(Cx - y^4)^3}.$$

3)
$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - y^2} = c;$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - y^2}\right)}{y\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2}\right)} = \frac{c^2x}{2y^3},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c^2(2y^4 - 3c^2x^2)}{4y^7}.$$

Hier kann man die gefundenen Formeln dadurch verifizieren, daß man die gegebene Gleichung nach $y$ auflöst und das erhaltene $y$ direkt differenziert.

4)
$$\sqrt{(x+y)^3}+\sqrt{(x-y)^3}=C;$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}=-\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2x^3+(2x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}{y^3\sqrt{x^2-y^2}}.$$

5)
$$(x^2+y^2)^2=2(Ax^2+By^2);$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x(x^2+y^2-A)}{y(x^2+y^2-B)}.$$

Um bei der Entwickelung des zweiten Differentialquotienten Weitläufigkeiten zu vermeiden, benutze man die Abkürzungen

$$s=x^2+y^2,$$

$$\frac{dy}{dx}=y', \quad \frac{ds}{dx}=s';$$

es ergibt sich dann

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(s-A)(s-B)(y-xy')+(A-B)xys'}{y^2(s-B)^2}.$$

Aus dem Werte von $y'$ und unter Rücksicht auf die Gleichung

$$s^2=2(Ax^2+By^2)$$

erhält man ferner

$$y-xy'=\frac{Ax^2+By^2}{y(s-B)},$$

$$s'=2(x+yy')=\frac{2(A-B)xy}{y(s-B)}$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(s-A)(s-B)(Ax^2+By^2)+2(A-B)^2x^2y^2}{y^3(s-B)^3}.$$

Hier ist

$$(s-A)(s-B)=s^2-(A+B)s+AB=2(Ax^2+By^2)$$
$$-(A+B)(x^2+y^2)+AB,$$

mithin

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(A-B)(Ax^2-By^2)(x^2+y^2)+AB(Ax^2+By^2)}{y^3(s-B)^3},$$

oder endlich, wenn $Ax^2 + By^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$ gesetzt wird,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(x^2+y^2)[A(A-\frac{1}{2}B)x^2+B(B-\frac{1}{2}A)y^2]}{y^3(x^2+y^2-B)^3}.$$

Da sich die gegebene Gleichung nach $y$ auflösen läßt, so können die erhaltenen Differentialformeln verifiziert werden.

6) $$e^y + ax^2e^{-y} - 2bx = 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(b-axe^{-y})}{e^y - ax^2e^{-y}} = \frac{1}{x};$$

dies ist sehr leicht zu verifizieren.

7) $$\frac{1}{2}\lg(x^2 + y^2) - \lg c = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

8) $$\sqrt{x^2 + y^2} = c \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Wird zur Abkürzung $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ gesetzt, so ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cy+xr}{cx-yr},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2c^2+r^2)r^3}{(cx-yr)^3}.$$

9) $$(x^2 + y^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = c^2.$$

Benutzt man wieder die vorige Abkürzung, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yr^2 - 2c^2x}{xr^2 + 2c^2y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2c^2r^2(r^4 - 4c^4)}{(xr^2 + 2c^2y)^3}.$$

10. Setzt man abkürzend

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'',$$

so kann man aus der Gleichung

$$arc\cos\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}} + arc\,tg\,\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2-c^2}}{c}$$

die folgenden zwei Relationen ableiten

$$\frac{x+yy'}{y-xy'} = -\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2-c^2}},$$

$$\frac{(x^2+y^2)y''+(y-xy')(1+y'^2)}{(y-xy')^2} = \frac{c(x+yy')}{\sqrt{(x^2+y^2-c^2)^3}}.$$

Allgemeine Bemerkung. Die in den vorigen Beispielen ausgeführten Rechnungsoperationen lassen sich in allgemeinen Symbolen darstellen, wenn man von dem Satze Gebrauch macht, daß das totale Differential einer Funktion zweier Variabeln gleich ist der Summe der partiellen Differentiale derselben Funktion, also, falls $z$ eine Funktion von $x$ und $y$ bedeutet,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Aus der Gleichung

$$f(x, y) = 0 \quad \text{oder kurz} \quad f = 0$$

folgt hiernach

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0,$$

mithin

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Differenziert man nochmals, wobei zur Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q$$

sein möge, so erhält man

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{q\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy\right) - p\left(\frac{\partial q}{\partial x}dx+\frac{\partial q}{\partial y}dy\right)}{q^2}$$

und durch Division mit $dx$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x} + \left(q\frac{\partial p}{\partial y} - p\frac{\partial q}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}}{q^2}.$$

Nach Substitution des Wertes $\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}$ wird hieraus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q^2\frac{\partial p}{\partial x} - pq\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\right) + p^2\frac{\partial q}{\partial y}}{q^3};$$

setzt man hier die Werte von $p$, $q$ ein und beachtet, daß die Ausdrücke

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

einander gleich sind, so gelangt man zu der Formel

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}.$$

Auf diesem Wege kann man weiter gehen. Für den praktischen Gebrauch ist es übrigens vorteilhafter, die Rechnung (wie in den Beispielen) für jeden Fall besonders durchzuführen, einmal, weil man das Nachschlagen der allgemeinen Formeln spart, und anderseits, weil sich nicht selten vermöge der speziellen Form der Gleichung $f(x, y) = 0$ Abkürzungen beizeiten anbringen lassen.

## § 12.

## Beispiele zur Differentiation unentwickelter Funktionen mehrerer Variabeln.

Wenn zwischen drei veränderlichen Größen $x$, $y$, $z$ eine Gleichung von der Form

$$F(x, y, z) = 0$$

besteht, so weiß man im voraus, daß $z$ eine Funktion von $x$ und $y$ sein muß, deren Natur so lange unbekannt bleibt, als man die Gleichung nicht auf $z$ reduziert hat. Um ohne diese Auflösung die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

zu finden, differenziert man die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ erst in der Art, daß man nur $x$ und $z$ als Variable, $y$ dagegen als Konstante ansieht; man gelangt dann zu einer Gleichung zwischen

$x$, $y$, $z$, $\partial x$ und $\partial z$, aus welcher sich $\frac{\partial z}{\partial x}$ ergibt. Sieht man dagegen $x$ als Konstante an, so führt eine ähnliche Rechnung zur Kenntnis von $\frac{\partial z}{\partial y}$. Durch weitere Differentiationen in Beziehung auf $x$ oder $y$ findet man die übrigen Differentialquotienten. Ganz analog ist das Verfahren zur Differentiation unentwickelter Funktionen von drei oder mehr Variabeln.

Beispielsweise sei die gegebene Gleichung

$$2axz + 2byz + cz^2 + k = 0.$$

Differenziert man zunächst unter Voraussetzung eines konstanten $y$, so erhält man

$$a(x\partial z + z\partial x) + by\,\partial z + cz\,\partial z = 0,$$

mithin

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{az}{ax + by + cz}.$$

Auf gleiche Weise ergibt sich bei konstantem $x$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{bz}{ax + by + cz}.$$

Wird nun $\frac{\partial z}{\partial x}$ partiell nach $x$ differenziert, so folgt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{a}{(ax + by + cz)^2}\left\{az - (ax + by)\frac{\partial z}{\partial x}\right\}$$

oder vermöge des Wertes von $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{a^2(2axz + 2byz + cz^2)}{(ax + by + cz)^3},$$

wofür kürzer geschrieben werden kann

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{a^2 k}{(ax + by + cz)^3}.$$

Durch eine ganz ähnliche Rechnung ergibt sich, indem $\frac{\partial z}{\partial y}$ partiell nach $y$ differenziert wird,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{b^2 k}{(ax + by + cz)^3}.$$

Wird dagegen $\frac{\partial z}{\partial x}$ nach $y$ differenziert, so entsteht die Formel

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{a}{(ax + by + cz)^2}\left\{bz - (ax + by)\frac{\partial z}{\partial y}\right\}$$

$$= \frac{ab(2axz + 2byz + cz^2)}{(ax + by + cz)^3},$$

wofür kürzer

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{abk}{(ax+by+cz)^3}$$

geschrieben werden kann; dasselbe Resultat erhält man, wenn $\frac{\partial z}{\partial y}$ nach $x$ differenziert wird. Wie man auf diese Weise alle partiellen Differentialquotienten von $z$ entwickeln kann, dürfte unmittelbar einleuchten. Die totalen Differentiale von $z$ ergeben sich nun mittelst der bekannten Formeln

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot dy^2$$

usw.;

sie sind im obigen Falle

$$dz = -\frac{z(a\,dx + b\,dy)}{ax+by+cz},$$

$$d^2 z = -\frac{k(a\,dx+b\,dy)^2}{(ax+by+cz)^3}$$

usw.

Da sich hier die ursprüngliche Gleichung zwischen $x$, $y$, $z$ nach $z$ auflösen läßt, so können die gefundenen Resultate leicht verifiziert werden.

Nach der angegebenen Methode sind folgende Beispiele zu behandeln:

1) $$z^3 + 3(ax+by)z + c^3 = 0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{az}{ax+by+z^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{bz}{ax+by+z^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2a^2(ax+by)z}{(ax+by+z^2)^3} = -\frac{2a^2(c^3+z^3)}{3(ax+by+z^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2b^2(ax+by)z}{(ax+by+z^2)^3} = -\frac{2b^2(c^3+z^3)}{3(ax+by+z^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2ab(ax+by)z}{(ax+by+z^2)^3} = -\frac{2ab(c^3+z^3)}{3(ax+by+z^2)^3}.$$

2) $$ax^3 + by^3 + cz^3 + 3hxyz + k = 0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ax^2+hyz}{cz^2+hxy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{by^2+hxz}{cz^2+hxy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xz\,[ack + (abc + h^2)\,y^2]}{(cz^2 + hxy)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2yz\,[bck + (abc + h^2)\,x^2]}{(cz^2 + hxy)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2\,(abc + h^2)\,x^2y^2z + hk\,(hxy - cz^2)}{(cz^2 + hxy)^3}.$$

3) $$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2\,(Ax^2 + By^2 + Cz^2);$$

wird $x^2 + y^2 + z^2$ zur Abkürzung mit $S$ bezeichnet, so ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x\,(S-A)}{z\,(S-C)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y\,(S-B)}{z\,(S-C)};$$

$$\frac{\partial^2 z}{dx^2} = -\frac{(S-A)\,(S-C)\,[(S-A)x^2 + (S-C)z^2] + 2\,(A-C)^2x^2z^2}{z^3\,(S-C)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(S-B)\,(S-C)\,[(S-B)y^2 + (S-C)z^2] + 2\,(B-C)^2y^2z^2}{z^3\,(S-C)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy\,[(S-A)\,(S-B)\,(S-C) + 2\,(A-B)\,(B-C)\,z^2]}{z^3\,(S-C)^3}.$$

4) $$e^{Ax + By + Cz} = A_1x + B_1y + C_1z;$$

setzt man zur Abkürzung

$$e^{Ax + By + Cz} = S,$$

so erhält man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{AS - A_1}{CS - C_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{BS - B_1}{CS - C_1};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(AC_1 - A_1C)^2 S}{(CS - C_1)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(BC_1 - B_1C)^2 S}{(CS - C_1)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{(AC_1 - A_1C)\,(BC_1 - B_1C)\,S}{(CS - C_1)^3}.$$

5) $$x^x y^y z^z = c;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1 + lg\,x}{1 + lg\,z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1 + lg\,y}{1 + lg\,z};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x\,(1 + lg\,x)^2 + z\,(1 + lg\,z)^2}{xz\,(1 + lg\,z)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y\,(1 + lg\,y)^2 + z\,(1 + lg\,z)^2}{yz\,(1 + lg\,z)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{(1 + lg\,x)\,(1 + lg\,y)}{z\,(1 + lg\,z)^3}.$$

**Allgemeine Bemerkung.** Um die vorigen Rechnungsoperationen allgemein darzustellen, sei

$$f(x, y, z) = 0$$

eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen, und es werde $z$ als unentwickelte Funktion von $x$ und $y$ betrachtet. Differenziert man zuerst unter Voraussetzung eines konstanten $y$, so erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$

mithin

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Auf analoge Weise findet sich

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Benutzt man für den Augenblick die Abkürzungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = v, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = w$$

und differenziert die erste der beiden Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u}{w}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{v}{w}$$

partiell in Beziehung auf $x$, wobei zu beachten ist, daß $u$ und $w$ nicht nur $x$, sondern auch das von $x$ abhängige $z$ enthalten, so gelangt man zu der Formel

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{1}{w^2}\left\{w\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) - u\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{w^2}\left\{w\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial w}{\partial x} + \left(w\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}\right\}.\end{aligned}$$

Durch Substitution von $-\frac{u}{w}$ statt $\frac{\partial z}{\partial x}$ wird hieraus

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{w^3}\left\{w^2\frac{\partial u}{\partial x} - wu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + u^2\frac{\partial w}{\partial z}\right\},$$

d. i. vermöge der Bedeutung von $u$ und $w$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}.$$

Auf gleiche Weise ergibt sich, wenn $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{v}{w}$ nach $y$ differenziert wird,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}.$$

Differenziert man endlich die Gleichung $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u}{w}$ nach $y$, so erhält man

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}.$$

Ähnliche Formeln lassen sich für unentwickelte Funktionen von drei oder mehr Veränderlichen aufstellen.

## § 13.

### Beispiele zur Vertauschung der unabhängigen Variabeln.

I. Wenn in eine Gleichung von der Form $y = f(x)$ statt $x$ eine neue unabhängige Variable $t$ eingeführt wird, welche mit $x$ durch die Gleichung $x = \varphi(t)$ verbunden ist, so erscheint auch $y$ als Funktion von $t$, nämlich $y = f[\varphi(t)]$, oder kurz $y = \psi(t)$. Um nun auch $\frac{dy}{dx}$ durch $t$ auszudrücken, braucht man nur die Gleichungen $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ zu differenzieren und die so entstandenen Gleichungen durcheinander zu dividieren; auf analoge Weise erhält man die höheren Differentialquotienten $\frac{d^2 y}{dx^2}$ usw.

Es sei z. B.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

und es werde $t$ dadurch eingeführt, daß man setzt

$$x = \frac{2at}{1+t^2},$$

woraus folgt

$$y = b\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Man hat jetzt durch Differentiation in Beziehung auf die unabhängige Variable $t$

$$dx = 2a\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\cdot dt, \quad dy = -\frac{4bt}{(1+t^2)^2}\cdot dt,$$

mithin als Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2bt}{a(1-t^2)}.$$

Eine zweite Differentiation gibt

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{2b(1+t^2)}{a(1-t^2)^2}\cdot dt;$$

dividiert man links durch $dx$, rechts durch den vorhin für $dx$ gefundenen Ausdruck, so erhält man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2}\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^3.$$

Auf gleiche Weise findet sich weiter

$$d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{12b}{a^2}\cdot\frac{(1+t^2)^2t}{(1-t^2)^4}\cdot dt,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{6b}{a^3}\cdot\frac{(1+t^2)^4t}{(1-t^2)^5},$$

usw.

Im vorliegenden Falle können diese Ergebnisse leicht verifiziert werden. Aus der Gleichung

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

erhält man nämlich direkt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ab}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3abx}{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}, \ldots$$

und wenn man in die rechten Seiten dieser Formeln den Wert

$$x = \frac{2at}{1+t^2}$$

substituiert, so kommt man auf die oben entwickelten Resultate.

Nach demselben Verfahren sind folgende Beispiele zu behandeln.

1. In die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

soll statt $x$ eingeführt werden

$$x = a\frac{t^2+1}{2t};$$

die Differentialquotienten sind dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{t^2+1}{t^2-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2}\left(\frac{2t}{t^2-1}\right)^3, \text{ usw.}$$

2. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

folgt, wenn $x = a\cos\omega$ gesetzt wird,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cot\omega, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2\sin^3\omega}, \text{ usw.}$$

3. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

ergibt sich für $x = a\sec\omega$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\,\frac{1}{\sin\omega}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2}\cot^3\omega, \text{ usw.}$$

4. Wenn in der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

die Substitution $x = a\cos^3\omega$ vorgenommen wird, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg}\omega, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{3a^2}\sec^4\omega\operatorname{cosec}\omega.$$

5. Es sei

$$y = c\arccos\frac{c-x}{c} + \sqrt{2cx - x^2}$$

und werde substituiert

$$\arccos\frac{c-x}{c} = \chi;$$

die Differentialquotienten sind dann

$$\frac{dy}{dx} = \cot\tfrac{1}{2}\chi, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4c\sin^3\frac{1}{2}\chi\cos\frac{1}{2}\chi}.$$

**Allgemeine Bemerkung.** Wenn überhaupt zwei Gleichungen von den Formen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

stattfinden, so erhält man nach der vorigen Methode

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\varphi'(t)^2\cdot\psi'''(t) - 3\varphi'(t)\varphi''(t)\psi''(t) + [3\varphi''(t)^2 - \varphi'(t)\varphi'''(t)]\,\psi'(t)}{\varphi'(t)^5}$$

usw.

Sehr häufig weiß man nur, daß $x$ und $y$ gewisse Funktionen einer dritten Veränderlichen $t$ sind, ohne diese Funktionen explicite angeben zu können; die vorigen Formeln bleiben dann der Sache nach dieselben, weil sich aber die Werte von $\varphi'(t)$, $\varphi''(t), \ldots$ $\psi'(t)$, $\psi''(t), \ldots$ nicht entwickeln lassen, so deutet man diese Differentiationen nur an und schreibt demgemäß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{d^2x}{dt^2}\cdot\dfrac{dy}{dt}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2\dfrac{d^3y}{dt^3} - 3\dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{d^2x}{dt^2}\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2} + \left[3\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{d^3x}{dt^3}\right]\dfrac{dy}{dt}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^5}$$

usw.

Es sei z. B. $y$ eine unbekannte Funktion von $x$ und es werde $x = \frac{1}{t}$ gesetzt; dann ist

$$\frac{dy}{dx} = -t^2\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = t^4\frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3\frac{dy}{dt},$$

woraus u. a. folgt

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = t^3\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Die nachstehenden ähnlichen Aufgaben lassen sich mittelst desselben Verfahrens lösen.

6. Bedeutet $y$ eine gewisse Funktion von $x$ und wird $x = \frac{1}{2}t^2$ gesetzt, so ergibt sich

$$2x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

7. In dem Ausdruck

$$S = (a + bx)\frac{d^2y}{dx^2} + c\frac{dy}{dx}$$

soll man die neue unabhängige Veränderliche $t$ mittelst der Substitution

$$a + bx = kt^m$$

einführen und nachher $k$, $m$ so bestimmen, daß $S$ die Form

$$S = t^n \frac{d^2y}{dt^2}$$

erhält. Für $n$ findet sich der Wert $\frac{b-2c}{b-c}$.

8. Setzt man

$$x = \frac{1}{2}a(e^t - e^{-t}),$$

so wird

$$(a^2 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

9. Die Substitution

$$x = a \sin t$$

gibt

$$(a^2 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

10. Setzt man

$$x = a\sqrt{e^t - 1},$$

so findet man

$$\frac{x^2 + a^2}{x^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^2 - a^2}{x^3}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{4}{a^2}e^{-t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}.$$

II. Das bisherige Verfahren bleibt auch in dem Falle dasselbe, wo es darauf ankommt, die ursprünglichen Veränderlichen $x$ und $y$ durch zwei neue Veränderliche $u$ und $v$ zu ersetzen. Wird nämlich in einer zwischen $x$ und $y$ bestehenden Gleichung

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

gesetzt, so entsteht eine neue Gleichung zwischen $u$ und $v$, in welcher man die eine dieser beiden Größen, etwa $u$, als die unabhängige, die andere als abhängige Veränderliche ansehen kann, und nunmehr handelt es sich darum, die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots$ durch $\frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2}, \cdots$ auszudrücken. Man differenziert zu diesem Zweck die Formeln

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

mit Rücksicht auf den Umstand, daß sowohl $x$ als auch $y$ gleichzeitig von $u$ und $v$ abhängt, und dividiert nachher $dy$ durch $dx$. Auf analoge Weise bildet man die höheren Differentialquotienten.

Beispielsweise mögen die gegebenen Gleichungen sein

$$x = uv, \quad y = (1 - u)v;$$

man erhält dann durch Differentiation

$$dx = u\,dv + v\,du,$$

$$dy = (1 - u)\,dv - v\,du$$

und durch Division

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-u)dv - v\,du}{u\,dv + v\,du}$$

oder um anzudeuten, daß $v$ von $u$ abhängt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-u)\frac{dv}{du} - v}{u\frac{dv}{du} + v}.$$

Bezeichnet man für den Augenblick $\frac{dv}{du}$ mit $v'$, so gelangt man durch Differentiation der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-u)v' - v}{uv' + v} = \frac{v'}{uv' + v} - 1$$

zu der neuen Gleichung

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{v\,dv' - v'(v'du + dv)}{(uv' + v)^2};$$

nach Division durch die Formel $dx = (uv' + v)\,du$ wird hieraus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v\frac{dv'}{du} - v'\left(v' + \frac{dv}{du}\right)}{(uv' + v)^3}$$

oder zufolge der Bedeutung von $v'$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v\frac{d^2v}{du^2} - 2\left(\frac{dv}{du}\right)^2}{\left(u\frac{dv}{du} + v\right)^3}.$$

Wie man auf diese Weise fortrechnen kann, dürfte unmittelbar einleuchten.

11. Substituiert man, wie es in der analytischen Geometrie beim Übergange von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten geschieht,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

und betrachtet $r$ als Funktion von $\theta$, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-r\frac{d^2r}{d\theta^2} + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}{\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)^3},$$

woraus z. B. folgt

$$\frac{\left[\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\right]^3}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

12. Die Substitution*

$$x = c\frac{\sin(\theta+\eta)}{\sin(\theta-\eta)}, \quad y = 2c\frac{\sin\theta\sin\eta}{\sin(\theta-\eta)}$$

gibt, wenn $\eta$ als Funktion von $\theta$ angesehen wird,

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{\frac{d\eta}{d\theta}\sin^2\theta - \sin^2\eta}{\frac{d\eta}{d\theta}\sin 2\theta - \sin 2\eta},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4\left[-\frac{d^2\eta}{d\theta^2}\sin\theta\sin\eta + 2\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2\sin\theta\cos\eta - 2\frac{dy}{d\theta}\cos\theta\sin\eta\right]\sin(\theta-\eta)}{c\left[\frac{d\eta}{d\theta}\sin 2\theta - \sin 2\eta\right]^3}.$$

---

* Die obigen Formeln vermitteln den Übergang vom rechtwinkligen Koordinatensystem zu demjenigen System, welches in der Geodäsie beim „Visieren und Schneiden" benutzt wird. Die Größe $2c$ ist hier die Länge der Standlinie, $\theta$ und $\eta$ sind die an derselben liegenden Winkel, beide nach derselben Drehungsrichtung gemessen. Man kann dieses Koordinatensystem als das bipolare bezeichnen.

## § 13a.

## Allgemeine Sätze über die Einführung von neuen Veränderlichen.

Im Hinblick auf die Anwendungen, welche die Einführung von neuen Veränderlichen auf verschiedenen Gebieten der Mathematik, z. B. in der Theorie der Differentialgleichungen, findet, erscheint es zweckmäßig, die in § 13 unter II gegebenen Andeutungen etwas weiter auszuführen.

1. Es soll sich also darum handeln, an Stelle der beiden ursprünglichen Veränderlichen $x$ und $y$ die beiden neuen Veränderlichen $u$ und $v$ einzuführen, und zwar auf Grund der beiden gegebenen Gleichungen

1) $$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v).^*$$

Hierbei möge, wie in § 13, angenommen werden, daß zuerst $x$ die unabhängige und $y$ die abhängige, nachher aber $u$ die unabhängige und $v$ die abhängige Veränderliche sei. Ferner werde zur Abkürzung gelegentlich

$$y', y'', y''', \ldots \quad \text{an Stelle von} \quad \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$$

und ebenso

$$v', v'', v''', \ldots \quad \text{an Stelle von} \quad \frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2}, \frac{d^3v}{du^3}, \ldots$$

geschrieben. Endlich möge auch für die auftretenden partiellen Differentialquotienten der beiden Funktionen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ eine abkürzende Bezeichnungsweise festgesetzt werden, indem

$$\varphi_u, \varphi_v, \psi_u, \psi_v \quad \text{an Stelle von} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial v}$$

geschrieben werden soll.

Es kommt nunmehr darauf an, $y', y'', y''', \ldots$ durch $u, v, v', v'', v''', \ldots$ auszudrücken.

Beachten wir, daß $v$ als eine Funktion von $u$ gedacht werden soll und daß alsdann die beiden Ausdrücke $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ von $u$ allein abhängig gemacht werden können, so finden wir durch Differentiation der beiden Gleichungen 1) nach $u$

$$\frac{dx}{du} = \varphi_u + \varphi_v \cdot v', \quad \frac{dy}{du} = \psi_u + \psi_v \cdot v';$$

und hieraus folgt durch Division

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi_u + \psi_v \cdot v'}{\varphi_u + \varphi_v \cdot v'}.$$

---

* Die beiden Funktionen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ sollen — was auch schon in § 13 stillschweigend vorausgesetzt wurde — so beschaffen sein, daß eine Elimination von $u$ und $v$ aus den beiden Gleichungen 1) unmöglich ist, daß vielmehr diese Gleichungen nach $u$ und $v$ aufgelöst werden können.

Die rechte Seite der letzten Gleichung, welche — formal betrachtet — eine Funktion der drei Größen $u$, $v$ und $v'$ ist, wollen wir zur Abkürzung mit $\chi_1(u, v, v')$ bezeichnen, so daß die genannte Gleichung kürzer

$$2)\qquad y' = \chi_1(u, v, v')$$

geschrieben werden kann.

Bedenken wir wiederum, daß $v$ — und daher natürlich auch $v'$ — von $u$ abhängen soll und daß alsdann auch der Ausdruck $\chi_1(u, v, v')$ von $u$ allein abhängig gemacht werden kann, so finden wir durch Differentiation der Gleichung 2) nach $u$

$$\frac{dy'}{du} = \frac{\partial \chi_1}{\partial u} + \frac{\partial \chi_1}{\partial v} \cdot v' + \frac{\partial \chi_1}{\partial v'} \cdot v'';$$

und hieraus folgt, wenn durch die frühere Formel

$$\frac{dx}{du} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot v'$$

dividiert wird,

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{\partial \chi_1}{\partial u} + \frac{\partial \chi_1}{\partial v} \cdot v' + \frac{\partial \chi_1}{\partial v'} \cdot v''}{\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot v'}.$$

Bezeichnen wir die rechte Seite der soeben erhaltenen Gleichung, welche — formal betrachtet — eine Funktion der vier Größen $u$, $v$, $v'$ und $v''$ ist, abkürzend mit $\chi_2(u, v, v', v'')$, so kann diese Gleichung kürzer

$$3)\qquad y'' = \chi_2(u, v, v', v'')$$

geschrieben werden.

In analoger Weise weiter schließend, gelangt man zunächst zu der Gleichung

$$\frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{\partial \chi_2}{\partial u} + \frac{\partial \chi_2}{\partial v} \cdot v' + \frac{\partial \chi_2}{\partial v'} \cdot v'' + \frac{\partial \chi_2}{\partial v''} \cdot v'''}{\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot v'},$$

und diese kann, da ihre rechte Seite die fünf Größen $u$, $v$, $v'$, $v''$ und $v'''$ enthält, kürzer

$$4)\qquad y''' = \chi_3(u, v, v', v'', v''')$$

geschrieben werden. Der nächste Schritt führt zu einer Gleichung von der Form

$$5)\qquad y^{IV} = \chi_4(u, v, v', v'', v''', v^{IV});$$

und auch die weitere Fortsetzung des Verfahrens ergibt lauter Gleichungen, welche die gemeinschaftliche Form

$$6)\qquad y^{(n)} = \chi_n(u, v, v', v'', \ldots v^{(n)})$$

besitzen.

Es hängt also $y^{(n)}$ zwar von $u, v, v', \ldots v^{(n)}$ ab, aber nicht von $v^{(n+1)}, v^{(n+2)}$ usw.*

Der Ausdruck $\chi_n$ wird natürlich um so komplizierter, je größer die positive ganze Zahl $n$ ist; indessen kann man — mit Benutzung des Schlusses von $n$ auf $n+1$ — doch ohne besondere Schwierigkeit erkennen, daß, falls $n>1$ ist, $\chi_n$ stets die Form

$$R+v^{(n)}\cdot S$$

besitzt, wobei $R$ und $S$ Ausdrücke sind, in denen $v^{(n)}$ nicht mehr vorkommt; daß, unter der gleichen Voraussetzung, $S$ durch die Formel

$$S=\frac{\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u}{(\varphi_u+\varphi_v\cdot v')^{n+1}}$$

gegeben ist, also nur von $u$, $v$ und $v'$ abhängt; daß endlich, falls $n\geqq 4$ ist, $R$ stets die Form

$$P(u, v, v', \ldots v^{(n-2)})+v^{(n-1)}\cdot Q(u, v, v', v'')$$

hat, wobei $P$ und $Q$ Ausdrücke sind, in denen lediglich die in Parenthese beigefügten Größen vorkommen.

2. Die bisherigen Rechnungen und Ergebnisse können sich bei besonderer Form der beiden Funktionen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ erheblich vereinfachen. Dies tritt z. B. ein, wenn die beiden Ausdrücke $\varphi$ und $\frac{1}{v}\cdot\psi$ bloße Funktionen von $u$ sind, wenn also die Gleichungen, durch welche die neuen Veränderlichen $u$ und $v$ eingeführt werden, die spezielle Form

$$x=\Phi(u),\quad y=v\cdot\Psi(u) \tag{7}$$

besitzen. In diesem Falle gelangt man bei Durchführung des oben skizzierten Verfahrens zu lauter Gleichungen von der Form

$$y^{(n)}=v\cdot F_0+v'\cdot F_1+v''\cdot F_2+\cdots+v^{(n)}\cdot F_n; \tag{8}$$

es drückt sich also $y^{(n)}$ homogen und linear durch $v, v', v'', \ldots v^{(n)}$ aus. Die Koeffizienten $F_0, F_1, F_2, \ldots F_n$ sind hierbei Funktionen von $u$ allein; insbesondere wird

$$F_n=\frac{\Psi(u)}{[\Phi'(u)]^n}.\,^{**}$$

* Infolgedessen geht, wenn durch Gleichungen von der Form 1) an Stelle der beiden Veränderlichen $x$ und $y$ die beiden neuen Veränderlichen $u$ und $v$ eingeführt werden, eine jede gewöhnliche Differentialgleichung $n$-ter Ordnung zwischen $x$ und $y$ in eine gewöhnliche Differentialgleichung $n$-ter Ordnung zwischen $u$ und $v$ über.

** Infolgedessen verwandelt sich, wenn die neuen Veränderlichen durch Gleichungen von der speziellen Form 7) eingeführt werden, jede lineare Differentialgleichung zwischen $x$ und $y$ in eine lineare Differentialgleichung zwischen $u$ und $v$; und insbesondere jede homogene lineare Differentialgleichung wiederum in eine homogene lineare Differentialgleichung.

3. Um die allgemeinen Betrachtungen von Nr. 1 noch auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir annehmen, daß $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ gebrochene lineare Funktionen mit gemeinschaftlichem Nenner seien, daß also die neuen Veränderlichen durch Gleichungen von der besonderen Form

$$9)\qquad x = \frac{a_1 u + b_1 v + c_1}{a_3 u + b_3 v + c_3}, \quad y = \frac{a_2 u + b_2 v + c_2}{a_3 u + b_3 v + c_3}$$

eingeführt werden. Hierbei müssen wir, um die Auflösbarkeit dieser beiden Gleichungen nach $u$ und $v$ sicher zu stellen, voraussetzen, daß die aus den konstanten Koeffizienten $a$, $b$, $c$ gebildete dreireihige Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Wert hat.

Um die Form der Funktionen $\chi_1(u, v, v')$ und $\chi_2(u, v, v', v'')$ in übersichtlicher Weise angeben zu können, wollen wir die zu den einzelnen Elementen $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ der Determinante $\varDelta$ gehörenden zweireihigen Unterdeterminanten einführen; dieselben mögen resp. mit $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ bezeichnet werden.

Dann ergibt sich

$$\varphi_u = \frac{B_2 - C_2 v}{(a_3 u + b_3 v + c_3)^2}, \quad \varphi_v = \frac{C_2 u - A_2}{(a_3 u + b_3 v + c_3)^2},$$

$$\psi_u = \frac{C_1 v - B_1}{(a_3 u + b_3 v + c_3)^2}, \quad \psi_v = \frac{A_1 - C_1 u}{(a_3 u + b_3 v + c_3)^2};$$

mithin wird

$$10)\qquad y' = \chi_1(u, v, v') = \frac{A_1 \cdot v' - B_1 + C_1 \cdot (v - uv')}{-A_2 \cdot v' + B_2 - C_2 \cdot (v - uv')}.$$

Die Berechnung von $\chi_2(u, v, v', v'')$ läßt sich wesentlich vereinfachen durch die Bemerkung, daß $\chi_1(u, v, v')$ die beiden Veränderlichen $u$ und $v$ bloß in der Verbindung $v - uv'$ enthält, und daß infolgedessen

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial u} + \frac{\partial \chi_1}{\partial v} \cdot v' = 0$$

ist. Berücksichtigt man noch, daß

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial v'} = \frac{\varDelta \cdot (a_3 u + b_3 v + c_3)}{[-A_2 \cdot v' + B_2 - C_2 \cdot (v - uv')]^2}$$

wird, wie sich mit Hilfe der Beziehungen

$$B_1 C_2 - B_2 C_1 = \varDelta \cdot a_3, \quad C_1 A_2 - C_2 A_1 = \varDelta \cdot b_3, \quad A_1 B_2 - A_2 B_1 = \varDelta \cdot c_3$$

ergibt, so erhält man schließlich die Relation

$$11)\qquad y'' = \chi_2(u, v, v', v'') = v'' \cdot \frac{\varDelta \cdot (a_3 u + b_3 v + c_3)^3}{[-A_2 \cdot v' + B_2 - C_2 \cdot (v - uv')]^3}.$$

Dieselbe läßt unmittelbar erkennen, daß, sobald $v''=0$ ist, im allgemeinen auch $y''=0$ wird.

Anmerkung. Die Gleichungen 1) kann man stets geometrisch deuten, indem man $x$ und $y$ als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes $P$ der Ebene, $u$ und $v$ aber als die rechtwinkligen Koordinaten eines anderen Punktes $M$ der Ebene — bezogen auf das nämliche Koordinatensystem — ansieht. Denn sobald wir den Koordinaten von $M$ bestimmte numerische Werte beilegen, erhalten vermöge der Gleichungen 1) auch die Koordinaten von $P$ bestimmte numerische Werte; es wird also durch diese Gleichungen die Lage des Punktes $P$ abhängig gemacht von derjenigen des Punktes $M$. Durchläuft insbesondere der Punkt $M$ eine gewisse Kurve $c$, so wird der Punkt $P$ ebenfalls eine gewisse Kurve $k$ durchlaufen, deren Gleichung übrigens ohne Schwierigkeit aus derjenigen der Kurve $c$ hergeleitet werden kann. — Wenn man nun zwei Gleichungen von der speziellen Form 9) dieser geometrischen Deutung unterwirft, so läßt sich aus der oben hervorgehobenen Eigenschaft der Relation 11) ein bemerkenswerter Schluß ziehen; wir können aus derselben schließen, daß jedem Wendepunkte der Kurve $c$ ein Wendepunkt der Kurve $k$ entspricht.

# Kapitel IV.

## Die Diskussion ebener Kurven.

### § 14.

#### Allgemeine Regeln und Formeln.

Die Kurve sei auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem der $x$ und $y$ bezogen und es möge zur Abkürzung

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y''$$

gesetzt werden; dann gelten folgende Regeln.

Solange $y'$ positiv bleibt, so lange steigt die Kurve; solange $y'$ negativ ist, so lange fällt sie; wechselt $y'$ durch Null hindurchgehend sein Vorzeichen, so findet an der betreffenden Stelle eine Kulmination statt und zwar eine obere oder untere, je nachdem der Zeichenwechsel von $+$ nach $-$, oder von $-$ nach $+$ vor sich geht.

Solange $y''$ positiv bleibt, so lange ist die Kurve konvex nach unten; solange $y''$ negativ bleibt, so lange ist die Kurve konkav nach unten; jedem Zeichenwechsel von $y''$ entspricht ein Inflexionspunkt (Wendepunkt).

Bezeichnet $\tau$ den Winkel, welchen die Tangente im Punkte $xy$ mit der $x$-Achse einschließt, so ist (Fig. 1)

$$tg\,\tau = y',$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\tau &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{ds} \\ \sin\tau &= \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dy}{ds} \end{aligned}\right\} ds = \sqrt{dx^2+dy^2},$$

worin $ds$ das Bogendifferential bedeutet. Ferner gelten die Formeln:

Subtangente: $MT = \frac{y}{y'}$,

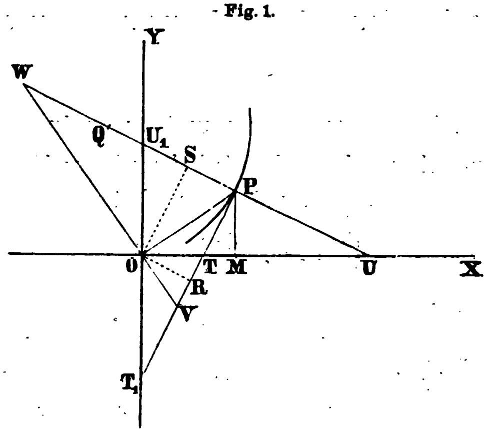
Tangente: $PT = \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}$,

Abschnitt der Tangente auf der $x$-Achse: $OT = x - \frac{y}{y'}$,

" " " " " $y$- " $OT_1 = y - xy'$,

Entfernung der Tangente vom Koordinatenanfang: $OR = \frac{y - xy'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

Fig. 1.




Projektion des Radiusvektor auf die Tangente: $PR = \frac{x + yy'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

Koordinaten von $R$: $-\frac{(y - xy')y'}{1+y'^2}$ und $\frac{y - xy'}{1+y'^2}$,

Polarsubtangente: $OV = \frac{\sqrt{x^2+y^2}(y - xy')}{x + yy'}$,

Polartangente: $PV = \frac{(x^2+y^2)\sqrt{1+y'^2}}{x + yy'}$,

Koordinaten von $V$: $-\frac{y(y - xy')}{x + yy'}$ und $\frac{x(y - xy')}{x + yy'}$,

Gleichung der Tangente: $\eta - y = y'(\xi - x)$.

Wenn bei unendlich wachsenden $x$

$$Lim\, y' = A, \quad Lim(y - xy') = B$$

endlich bestimmte Größen sind, so ist

Gleichung der Asymptote: $\eta = A\xi + B$.

Ferner gelten die Formeln (siehe Fig. 1)

Subnormale: $MU = yy'$,

Normale: $PU = y\sqrt{1+y'^2}$,

Abschnitt der Normale auf der $x$-Achse: $OU = x + yy'$,

" " " " " $y$- " $OU_1 = y + \dfrac{x}{y'}$,

Entfernung der Normale vom Koordinatenanfang: $OS = \dfrac{x+yy}{\sqrt{1+y'^2}}$,

Projektion des Radiusvektor auf die Normale: $PS = \dfrac{y-xy'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

Koordinaten von $S$: $\dfrac{x+yy'}{1+y'^2}$ und $\dfrac{(x+yy')y'}{1+y'^2}$,

Polarsubnormale: $OW = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+yy')}{y-xy'}$,

Polarnormale: $PW = \dfrac{(x^2+y^2)\sqrt{1+y'^2}}{y-xy'}$,

Koordinaten von $W$: $\dfrac{y(x+yy')}{y-xy'}$ und $-\dfrac{x(x+yy')}{y-xy'}$,

Gleichung der Normale: $\eta - y = -\dfrac{1}{y'}(\xi - x)$.

Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes $Q$:

$$x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''} \quad \text{und} \quad y + \frac{1+y'^2}{y''},$$

$$\text{Krümmungshalbmesser: } \varrho = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''},$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\sin\tau}{dx} = -\frac{d\cos\tau}{dy}.$$

Ist die Kurve auf Polarkoordinaten $r$ und $\theta$ bezogen und wird zur Abkürzung

$$\frac{dr}{d\theta} = r', \quad \frac{d^2 r}{d\theta^2} = r''$$

gesetzt, so gelten die Formeln:

$$y' = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta} = tg\,\tau,$$

$$y'' = \frac{-rr'' + 2r'^2 + r^2}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^3},$$

$$ds = \sqrt{(r\,d\theta)^2 + dr^2},$$

ferner, wenn $\varphi$ den Winkel zwischen Radiusvektor und Tangente, sowie $\psi$ den Winkel zwischen Radiusvektor und Normale bezeichnet,

$$tg\,\varphi = \frac{r}{r'}, \quad tg\,\psi = -\frac{r'}{r},$$

$$\text{Polarsubtangente: } OV = \frac{r^2}{r'},$$

$$\text{Polartangente: } PV = \frac{r\sqrt{r^2+r'^2}}{r'},$$

$$\text{Entfernung der Tangente vom Pol: } OR = \frac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2}},$$

$$\text{Polarsubnormale: } OW = r',$$

$$\text{Polarnormale: } PW = \sqrt{r^2+r'^2},$$

$$\text{Entfernung der Normale vom Pol: } OS = \frac{rr'}{\sqrt{r^2+r'^2}},$$

Rechtwinklige Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$r\cos\theta - \frac{(r^2+r'^2)(r'\sin\theta + r\cos\theta)}{r^2+2r'^2-rr''}$$

und

$$r\sin\theta + \frac{(r^2+r'^2)(r'\cos\theta - r\sin\theta)}{r^2+2r'^2-rr''},$$

$$\text{Krümmungshalbmesser: } \varrho = \frac{\sqrt{(r^2+r'^2)^3}}{r^2+2r'^2-rr''},$$

$$\frac{r}{\varrho} = \cos\psi + \frac{d\sin\psi}{d\theta}.$$

## § 15.

**Beispiele von Kurvendiskussionen.** (Algebraische Kurven.)

1. Die Parabel. Bezeichnet $h$ den Halbparameter, so führt die Scheitelgleichung

$$y^2 = 2hx$$

zu folgenden Sätzen und Formeln.

Die Subtangente ist gleich der doppelten Abscisse; die Tangente bildet mit der nach dem Brennpunkt gezogenen Geraden (dem Brennstrahl des Berührungspunktes) denselben Winkel wie mit der Parabelachse. Fällt man vom Brennpunkte eine Senkrechte auf irgend eine Tangente, so liegt der Fußpunkt dieses Perpendikels auf der Scheiteltangente. Die Subnormale ist konstant gleich dem Halbparameter.

Als Gleichung der Tangente hat man

$$h\xi - y\eta = -hx,$$

als Gleichung der Normale

$$y\xi + h\eta = (h + x)y.$$

Die Abschnitte, welche die Normale auf den Achsen der $x$ und $y$ bestimmt, sind

$$x + h \quad \text{und} \quad y + \frac{xy}{h}.$$

Hinreichend verlängert, schneidet die Normale zum zweiten Male die Parabel in einem Punkte $x_1 y_1$, dessen Koordinaten sind

$$x_1 = x + 2h + \frac{h^2}{x}, \quad y_1 = -\left(y + \frac{2h^2}{y}\right)$$

oder, wenn die Normale $\sqrt{h^2 + y^2}$ mit $u$ bezeichnet wird,

$$x_1 = x + \frac{2hu^2}{y^2}, \quad y_1 = y - \frac{2u^2}{y}.$$

Die Entfernung der Punkte $xy$ und $x_1 y_1$ oder $P$ und $P_1$ beträgt

$$PP_1 = 2\frac{u^3}{y^2} = 2u\, sec^2\tau;$$

hieraus ergibt sich eine einfache Konstruktion des Punktes $P_1$.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = 3x + h, \quad \eta = -\sqrt{\frac{8x^3}{h}} = -\frac{y^3}{h},$$

wobei die erste Formel unter Zuhilfenahme der Normale eine einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes gibt; der Krümmungsradius ist

$$\varrho = -\frac{\sqrt{(h^2 + y^2)^3}}{h^2} = -\frac{u^3}{h^2}.$$

Bezeichnet man die Koordinaten eines Punktes des Krümmungskreises mit $X$, $Y$ und verbindet miteinander die Gleichungen

$$(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 = \varrho^2, \quad Y^2 = 2hX,$$

so erhält man die Koordinaten $X$ und $Y$ oder besser $x_2$ und $y_2$ desjenigen Punktes $P_2$, in welchem der Krümmungskreis zum zweiten Male der Parabel begegnet; dieselben sind

$$x_2 = 9x, \quad y_2 = -3y.$$

Für die Länge von $PP_2$ d. h. der Sehne, welche der Parabel und dem Krümmungskreise gemeinschaftlich angehört, folgt hieraus

$$PP_2 = 4\frac{y\sqrt{h^2+y^2}}{h} = 4\frac{yu}{h} = 4y\,cosec\,\tau.$$

Der Punkt $P_2$ läßt sich entweder direkt mittelst seiner Koordinaten oder auch als Durchschnitt zweier Geraden konstruieren; es gelten nämlich die beiden Gleichungen

$$\frac{x_2}{x} + \frac{y_2}{y} = 6, \quad \frac{y_2 - y}{x_2 - x} = -\,tg\,\tau,$$

von denen die erste eine Gerade bedeutet, welche auf den Koordinatenachsen die Strecken $6x$ und $6y$ abschneidet, während die zweite eine Gerade charakterisiert, welche durch den Punkt $P$ geht und mit der $x$-Achse den Winkel $180^0 - \tau$ einschließt.

2. **Die Ellipse.** Geht man entweder von der Mittelpunktsgleichung aus

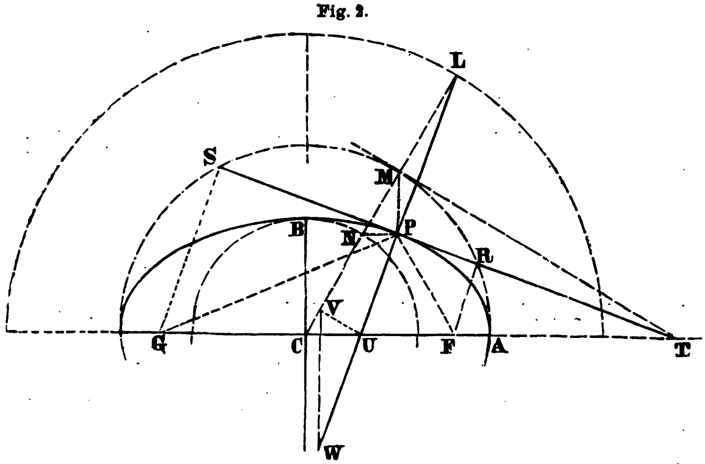
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder benutzt man statt derselben die beiden Gleichungen

$$x = a\cos\omega, \quad y = b\sin\omega,$$

worin $\omega$ den Winkel $ACM$ (die sogenannte exzentrische Anomalie) bedeutet (Fig. 2), so gelangt man zu folgenden Formeln, Sätzen

Fig. 2.




und Konstruktionen. Die Strecke $CT$, welche die Tangente von der Abscissenachse abschneidet, ist

$$CT = \frac{a^2}{x};$$

bezeichnet demnach $M$ denjenigen Punkt des umschriebenen Kreises $AB$, welcher dieselbe Abscisse wie $P$ besitzt, so gehen die Kreistangente $MT$ und die Ellipsentangente $PT$ durch einen und denselben Punkt der $x$-Achse, was eine einfache Tangentenkonstruktion gibt. Die Tangente halbiert den Nebenwinkel des von den Brennstrahlen $FP$ und $GP$ gebildeten Winkels $FPG$. Fällt man von den Brennpunkten Senkrechte auf die Tangente, so liegen die Fußpunkte $R$ und $S$ dieser Perpendikel auf dem umschriebenen Kreise.

Um die Normale unabhängig von der Tangente zu konstruieren, beschreibe man um den Ellipsenmittelpunkt einen Kreis mit dem Radius $a + b$ und verlängere $CM$ bis zum Durchschnitte $L$ mit diesem Kreise; $LP$ ist dann die Normale.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes und der Krümmungsradius bestimmen sich durch die Formeln

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3, \quad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b^4} y^3,$$

$$\varrho = -\frac{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}}{a^4 b^4} = -\frac{u^3}{h^2},$$

wobei $u$ die Normale $PU$ und $h$ den Halbparameter $\frac{b^2}{a}$ bedeutet. Ist ferner $U_1$ der Punkt, in welchem die Normale der verlängerten kleinen Halbachse begegnet, $PU_1 = u_1$, und bezeichnet $p$ den Abstand der Tangente vom Mittelpunkte der Ellipse, so gilt auch die Relation

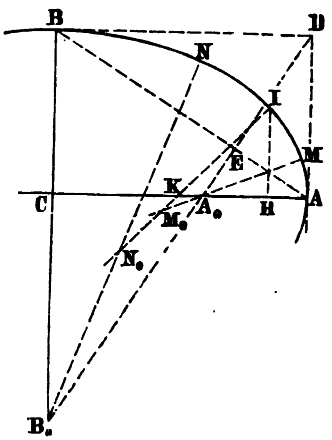
$$u u_1 = p \varrho.$$

Um den Krümmungsmittelpunkt zu konstruieren, legt man $UV$ senkrecht zu $CM$ und zieht durch $V$ parallel zu $BC$ eine Gerade, welche die verlängerte $PU$ im Krümmungsmittelpunkte $W$ schneidet.

Wenn es auf eine gute graphische Darstellung der Ellipse ankommt, so bestimmt man eine Reihe von Kurvenpunkten mittelst des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises, konstruiert mittelst des Kreises vom Radius $a + b$ die zugehörigen Normalen und nimmt die aufeinander folgenden Durchschnitte derselben als Krümmungsmittelpunkte, was um so richtiger ist, je näher die Kurvenpunkte aneinander liegen; die Ellipse läßt sich dann mit beliebig weitgehender Genauigkeit aus Kreisbögen zusammensetzen.

Empfehlenswert ist auch folgende Konstruktion, deren Beweis aus den vorigen Formeln hergeleitet werden kann (Fig. 3). Man bilde zunächst das Rechteck $ACBD$ mit den Seiten $AC = a$, $BC = b$, und lege durch $D$ senkrecht zur Diagonale $AB$ eine Gerade, welche $AB$ in $E$, $AC$ in $A_0$, $BC$ in $B_0$ schneidet; dann ist $A_0$ der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel $A$, und $B_0$ der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel $B$. Nimmt man ferner die Abscisse $CH = BE$ und die Ordinate $HI = AE$, so ist $I$ ein Punkt der Ellipse und zwar derjenige, dessen Normale $IK$ mit $AC$ einen halben rechten Winkel bildet, also durch $HK = HI$ leicht zu konstruieren ist. Man beschreibt nun aus $A_0$ mit dem Halbmesser $A_0A$ einen Kreis und sucht dann auf der verlängerten $IK$ den Mittelpunkt $M_0$ desjenigen Kreises, der durch $I$ geht und den vorigen Kreis von innen berührt.* Auf gleiche Weise bestimmt man zwei sich berührende Kreise aus den Mittelpunkten $B_0$ und $N_0$. Die vier Kreisbögen $AM$, $MI$, $IN$, $NB$ bilden zusammen eine Linie, die dem Ellipsenquadranten außerordentlich nahe kommt.

Fig. 3.




3. Die Hyperbel. Man kann entweder die Mittelpunktsgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

direkt benutzen oder statt deren die beiden Gleichungen

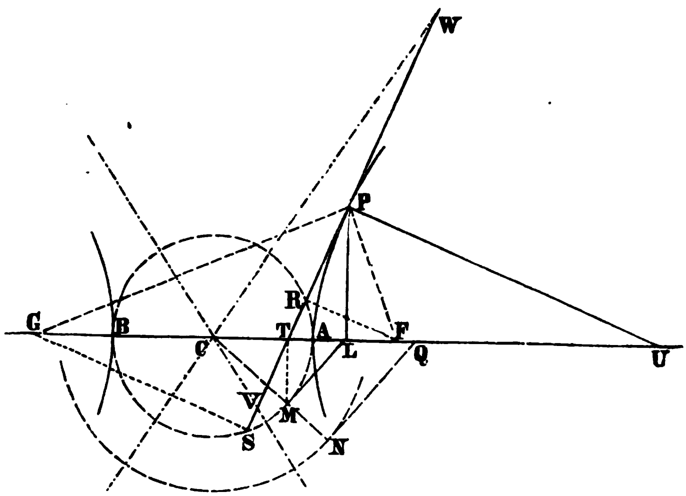
$$x = a \sec \omega, \quad y = b \operatorname{tg} \omega$$

anwenden, in denen $\omega$ den Winkel $ACM$ (Fig. 4) bedeutet, so daß $x = CL$, $y = LP = NQ$ ist; es ergeben sich dann folgende Resultate. Der Durchschnitt $T$ der Tangente mit der $x$-Achse ist der Fußpunkt des von $M$ auf $CA$ herabgelassenen Perpendikels;

* Die hierzu nötige Konstruktion wird man leicht finden; für das praktische Zeichnen ist es aber bequemer und sogar genauer, den Punkt $M_0$ durch Versuche zu bestimmen.

die Tangente halbiert den von den Brennstrahlen $FP$ und $GP$ gebildeten Winkel. Bezeichnet $VW$ das zwischen den Asymptoten liegende Stück der Tangente, so ist $PV = PW$. Die von den Brennpunkten auf die Tangente gefällten Senkrechten schneiden die

Fig. 4.




Tangente in zwei Punkten $R$ und $S$, welche auf dem über der Hauptachse beschriebenen Kreise liegen.

Für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes und den Krümmungsradius gelten die Formeln

$$\xi = \frac{a^2 + b^2}{a^4} x^3, \qquad \eta = -\frac{a^2 + b^2}{b^4} y^3,$$

$$\varrho = -\frac{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}}{a^4 b^4} = -\frac{u^3}{h^2},$$

worin $u$ die Normale $PU$ und $h$ den Halbparameter $\frac{b^2}{a}$ bedeutet. Aus der Bemerkung, daß die Formel für $\xi$ durch $\xi = CU \cdot sec^2 \omega$ ersetzt werden kann, folgt eine einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes.

4. Die zentrischen Kegelschnitte. Stellt man die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel unter der gemeinschaftlichen Form dar

$$Ax^2 + By^2 = 1,$$

so ergeben sich folgende Resultate. Die Tangente hat zur Gleichung

$$Ax\xi + By\eta = 1;$$

bezeichnet $t$ den Abstand der Tangente vom Kurvenmittelpunkte, so ist

$$t = \frac{1}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2}}.$$

Die Normale wird durch folgende Gleichung bestimmt

$$By\xi - Ax\eta = (B - A)xy;$$

sie schneidet die Kurve zum zweiten Male in einem Punkte $P_1$, dessen Koordinaten sind

$$x_1 = x - \frac{2Ax(A^2x^2 + B^2y^2)}{A^3x^2 + B^3y^2}, \quad y_1 = y - \frac{2By(A^2x^2 + B^2y^2)}{A^3x^2 + B^3y^2}.$$

Diese Formeln lassen sich einfacher darstellen, wenn man mit $r$ die Länge desjenigen Radiusvektor bezeichnet, welcher durch den Mittelpunkt der Kurve parallel zur Normale gelegt werden kann; es ist nämlich

$$x_1 = x - 2Axr^2, \quad y_1 = y - 2Byr^2.$$

Das zwischen den Punkten $xy$ und $x_1y_1$ enthaltene Stück der Normale hat die Länge

$$PP_1 = 2\frac{r^2}{t}.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = x - \frac{x}{Bt^2} = \frac{A(B-A)}{B}x^3, \quad \eta = y - \frac{y}{At^2} = \frac{B(A-B)}{A}y^3;$$

für den Krümmungshalbmesser gilt die Formel

$$\varrho = -\frac{\sqrt{(A^2x^2 + B^2y^2)^3}}{AB} = -\frac{1}{ABt^3}.$$

Bezeichnen $X$ und $Y$ die Koordinaten irgend eines Punktes des Krümmungskreises, so ist die Gleichung des letzteren

$$\left(X - x + \frac{x}{Bt^2}\right)^2 + \left(Y - y + \frac{y}{At^2}\right)^2 = \frac{1}{A^2B^2t^6}$$

oder

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + 2\frac{x}{Bt^2}(X - x) + 2\frac{y}{At^2}(Y - y) = 0,$$

und wenn $X - x = X_1$, $Y - y = Y_1$ gesetzt wird,

$$X_1^2 + Y_1^2 + 2\frac{AxX_1 + ByY_1}{ABt^2} = 0.$$

Verbindet man sie mit der Gleichung der Kurve, nämlich $AX^2 + BY^2 = 1$ oder

$$AX_1^2 + BY_1^2 + 2(AxX_1 + ByY_1) = 0,$$

so erhält man die Koordinaten desjenigen Punktes $P_2$, in welchen der Krümmungskreis zum zweiten Male die Kurve trifft. Zunächst findet sich

$$ABt^2(X_1^2 + Y_1^2) - (AX_1^2 + BY_1^2) = 0$$

oder

$$\frac{Y_1}{X_1} = \pm \frac{Ax}{By},$$

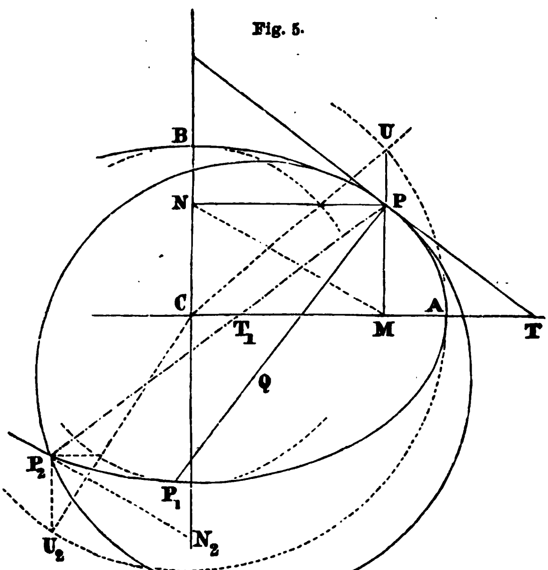
wo aber nur das obere Zeichen zu gebrauchen ist; die vorigen Gleichungen geben dann

$$X_1 = -4Bxy^2, \quad Y_1 = -4Ax^2y,$$

und hieraus folgt, wenn man $x_2$ und $y_2$ für $X$ und $Y$ schreibt,

$$x_2 = x - 4Bxy^2 = 4Ax^3 - 3x, \quad y_2 = y - 4Ax^2y = 4By^3 - 3y.$$

Fig. 5.




Die Länge der Sehne $PP_2$, welche der Kurve und dem Krümmungskreise gemeinschaftlich angehört, beträgt

$$PP_2 = 4xy\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2} = 4\frac{xy}{t}.$$

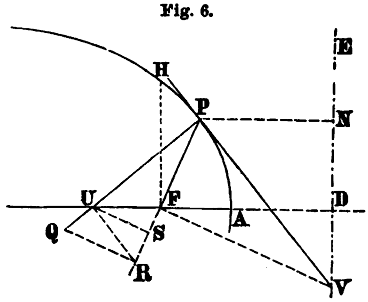
Zur Konstruktion des Punktes $P_2$ empfehlen sich folgende zwei Gleichungen

$$\frac{x_2}{x}+\frac{y_2}{y}=-2,\quad \frac{y_2-y}{x_2-x}=-tg\,\tau;$$

diesen entsprechend nimmt man (Fig. 5) auf der negativen Seite der $y$-Achse die Strecke $CN_2=2MP$ und legt durch $N_2$ eine Parallele zu $MN$, ferner schneidet man die Strecke $MT_1=MT$ auf der Gegenseite von $MT$ ab und zieht $PT_1$; die Verlängerung dieser Geraden trifft die vorhin konstruierte Parallele im Punkte $P_2$. Für die Ellipse ergibt sich noch eine Eigentümlichkeit. Werden nämlich die exzentrischen Anomalien der Punkte $P$ und $P_2$ mit $\omega$ und $\omega_2$ bezeichnet, so folgt $\omega_2=-3\omega$, mithin $arc\,AU_2=3\,arc\,AU$.

5. Die Kegelschnitte in Polarkoordinaten. Es sei (in Fig. 6) $F$ ein Brennpunkt, $DE$ die nächste Direktrix eines Kegelschnittes, so stehen bekanntlich die Entfernungen $PF$ und $PN$ in konstantem Verhältnis; hieraus ergibt sich, wenn $\frac{PF}{PN}=\varepsilon$, $FD=g$ gesetzt und $F$ als Anfang rechtwinkliger Koordinaten genommen wird,

Fig. 6.




$$y^2=\varepsilon^2g^2-2\varepsilon^2gx+(\varepsilon^2-1)x^2$$

und in Polarkoordinaten für

$FP=r,\quad \angle AFP=\theta,\quad FH=h,$

$$r=\frac{h}{1+\varepsilon\cos\theta}.$$

Hieraus können folgende Sätze abgeleitet werden. Der Endpunkt $V$ der Polarsubtangente liegt auf der Direktrix; $FP$ ist das geometrische Mittel zwischen $PN$ und $FU$; die Projektion der Normale auf den Brennstrahl hat die konstante Größe $PS=h$. Errichtet man in $U$ auf der Normale eine Senkrechte, welche den Brennstrahl in $R$ schneidet, und legt dann $RQ$ senkrecht zu $FR$, so schneidet $RQ$ die Normale im Krümmungsmittelpunkte $Q$.

6. **Die semikubische Parabel** ist durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{2}{3}\frac{x^3}{h}$$

bestimmt und läßt sich leicht konstruieren, wenn man von der gewöhnlichen Parabel ausgeht und die Proportion

$$h\sqrt{3} : \sqrt{2hx} = x : y$$

beachtet. Die Kurve besteht aus zwei kongruenten, vom Koordinatenanfange bis ins Unendliche gehenden Zweigen, welche symmetrisch gegen die $x$-Achse liegen; der obere Zweig ist durchaus konvex nach unten. Zur Tangenten- und Normalenkonstruktion dienen die einfachen Beziehungen

$$\text{Subtangente} = \tfrac{2}{3}x, \quad \text{Subnormale} = \frac{x^2}{h}.$$

Die Gleichung der Tangente ist

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{x^2}{hy};$$

um die etwaigen Durchschnitte der Tangente mit der Kurve zu finden, hat man die vorige Gleichung mit den Gleichungen $h\eta^2 = \frac{2}{3}\xi^3$; $hy^2 = \frac{2}{3}x^3$ oder mit der hieraus folgenden

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{2}{3}\frac{\xi^2 + x\xi + x^2}{h(\eta + y)}$$

zu kombinieren; dies gibt

$$\eta = \left(\frac{2}{3}\frac{\xi^2 + x\xi + x^2}{x^2} - 1\right)y$$

oder, wenn $\eta$ durch $\xi$, $y$ durch $x$ ausgedrückt wird,

$$(\xi^3 - x^3)(4\xi - x) = 0;$$

die Tangente am Punkte $xy$ schneidet also den unteren Zweig der Kurve in dem Punkte, dessen Koordinaten $\frac{1}{4}x$ und $-\frac{1}{8}y$ sind. Die zwischen beiden Punkten enthaltene Strecke hat die Länge $\frac{3}{4}x \sec\tau$.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = -\frac{x(3x + h)}{h}, \quad \eta = \frac{2y(2x + h)}{x},$$

der Krümmungshalbmesser ist

$$\varrho = 2\frac{hy}{x}\sec^3\tau;$$

aus diesen Formeln können verschiedene Konstruktionen des Krümmungsmittelpunktes hergeleitet werden.

7. Es soll die Kurve untersucht werden, deren Gleichung ist

$$9ay^2 = (x - 3a)^2 x.$$

Die Kurve besteht aus zwei kongruenten Zweigen, von denen der eine durchaus konvex, der andere durchaus konkav nach unten ist. Der erste schneidet die $x$-Achse im Koordinatenanfang unter einem rechten Winkel, hat bei $x = a$, $y = -\frac{2}{3}a$ einen unteren Kulminationspunkt, schneidet die Abscissenachse bei $x = 3a$ zum zweiten Male unter einem Winkel von $30^0$ und steigt dann ins Unendliche. Zur Tangenten- und Normalenkonstruktion an einem Punkte desselben dient die einfache Formel

$$\sin \tau = \frac{x-a}{x+a}.$$

Die Gleichung der Tangente an einem Punkte $xy$ des oberen (nach unten konkaven) Zweiges ist

$$\eta = \frac{a-x}{2\sqrt{ax}}\xi + \frac{3a+x}{6}\sqrt{\frac{x}{a}};$$

verbunden mit der Gleichung des unteren Zweiges, nämlich

$$\eta = \frac{\xi - 3a}{3}\sqrt{\frac{\xi}{a}},$$

gibt sie eine Gleichung, welche sich in die Form bringen läßt

$$(\xi - x)^2 (4x\xi - [x + 3a]^2) = 0.$$

Die Tangente am Punkte $xy$ des oberen Zweiges schneidet hiernach den unteren Zweig in einem Punkte, dessen Koordinaten sind

$$x_1 = \frac{(x+3a)^2}{4x}, \quad y_1 = \frac{(x+3a)(x-3a)^2}{24x\sqrt{ax}}.$$

Der Krümmungshalbmesser ist

$$\varrho = \frac{(x+a)^2}{2a} = 2x \sec^2 \tau,$$

was man leicht konstruieren kann.

8. In einem mit dem Radius $OA = a$ (Fig. 7) beschriebenen Kreise wird ein fernerer Radius $OL$ unter dem beliebigen Winkel $AOL = \omega$ gezogen, $L$ auf $OA$ projiziert, die Projektion $M$ wieder auf $OL$ nach $N$ projiziert und die Ordinate $MP = MN$ genommen; die so konstruierten Punkte $P$ liegen auf einer Kurve, welche man entweder durch die beiden Gleichungen

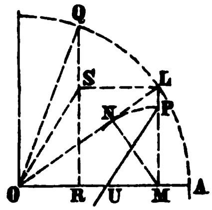
$$x = a\cos\omega, \quad y = a\cos\omega\sin\omega$$

oder durch die eine Gleichung

$$a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$$

ausdrücken kann. Die Kurve besteht aus vier kongruenten Teilen und hat die Form einer Schleife ($\infty$). Der zwischen den positiven Teilen der Koordinatenachsen liegende Quadrant geht unter einem halben rechten Winkel vom Koordinatenanfange $O$ aus, erreicht bei $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{a}{2}$ seinen oberen Kulminationspunkt und schneidet die Abscissenachse zum zweiten Male für $x = a$ unter einem rechten Winkel. Der Mittelpunkt $O$ ist der einzig vorhandene Inflexionspunkt. Um für irgend einen Punkt $P$ die Tangente oder Normale zu konstruieren, nehme man $\angle AOQ = 2\omega$, ziehe $QR \perp OA$, $LS \parallel OA$ und $PU \parallel SO$; es ist dann $PU$ die Normale. Für den Krümmungsradius ergibt sich

Fig. 7.

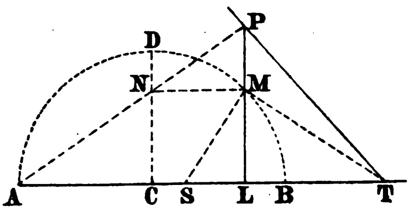



$$\varrho = \pm\frac{\sqrt{(2a^4 - 5a^2x^2 + 4x^4)^3}}{a^2x(3a^2 - 2x^2)},$$

woraus für den Scheitel $A$ und für den Kulminationspunkt sehr einfache Werte folgen.

9. Über dem Durchmesser $AB = 2a$ (Fig. 8) ist ein Kreis beschrieben und durch dessen Mittelpunkt $C$ ein zweiter Durchmesser senkrecht zu $AB$ gelegt. Irgend ein beliebiger Punkt $M$ des Kreises wird auf beide Durchmesser projiziert, wodurch die Punkte $L$ und $N$ entstehen, endlich zieht man die Gerade $AN$, welche der nötigenfalls verlängerten $LM$ in $P$ begegnet. Alle hiernach konstruierten Punkte $P$ liegen in einer Kurve, welche für $CL = x$, $LP = y$ durch die Gleichung

Fig. 8.




$$a^2y^2 = (a + x)^3(a - x)$$

repräsentiert wird. Die Kurve besteht aus zwei kongruenten, über und unter $AB$ liegenden Teilen, die in $A$ und $B$ zusammentreffen und eine geschlossene blattähnliche Figur bilden. Der obere Zweig berührt $AB$ in $A$ mit konvexer Krümmung, hat bei $x = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)a$ einen Wendepunkt, geht unter dem Winkel von $45^0$ durch $D$, erreicht bei $x = \frac{1}{2}a$ seinen oberen Kulminationspunkt und schneidet zuletzt $AB$ in $B$ unter einem rechten Winkel. Um für irgend einen Kurvenpunkt $P$ die Tangente zu konstruieren, nehme man $CS = LB$, ziehe $SM$ und dazu in $M$ eine Senkrechte, welche $AB$ in $T$ schneidet; $TP$ ist dann die Tangente. Für den Krümmungsradius findet man

$$\varrho = \mp \frac{\sqrt{8(a+x)(a^2-2a^2x+2x^2)^3}}{a^2(a^2+2ax-2x^2)},$$

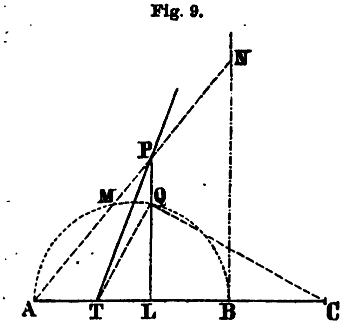
wobei sich das obere Zeichen auf den oberen, das untere auf den unteren Zweig bezieht.

10. Die Cissoide (Fig. 9). Über dem Durchmesser $AB = 2a$ ist ein Kreis beschrieben und in $B$ eine Tangente an denselben gelegt; durch $A$ zieht man eine beliebige Gerade, welche den Kreis in $M$, die Tangente in $N$ schneidet und nimmt die Strecke $AP = MN$. Alle so entstandenen Punkte $P$ bilden eine Kurve, deren Gleichung lautet

$$(2a-x)y^2 = x^3,$$

wobei $A$ als Anfangspunkt rechtwinkliger Koordinaten und $AB$ als Abscissenachse genommen ist. Die Kurve besteht aus zwei kongruenten,

Fig. 9.




über und unter der Abscissenachse liegenden Zweigen; der obere Zweig geht von $A$ aus, wo er die $x$-Achse berührt, und steigt mit konvexer Krümmung ins Unendliche; die Tangente $BN$ ist seine Asymptote. Um die Tangente an $P$ zu konstruieren, nehme man $AC = 3a$, verbinde $C$ mit dem Punkte $Q$, in welchem die Ordinate $LP$ den Kreis schneidet, und errichte auf $CQ$ in $Q$ eine Senkrechte, welche die Abscissenachse in $T$ trifft; die Gerade $TP$ ist die gesuchte Tangente.

Die Gleichung der Tangente ist

$$(3a-x)x^2\xi - (2a-x)^2 y\eta = ax^3;$$

verbindet man sie mit den Gleichungen $(2a-x)y^2 = x^3$ und $(2a-\xi)\eta^2 = \xi^3$, so erhält man die Gleichung

$$(\xi - x)^2\{(8a - 3x)\xi - 2ax\} = 0;$$

die Tangente im Punkte $xy$ schneidet demnach die Cissoide in einem zweiten Punkte $x_1 y_1$, dessen Koordinaten sind

$$x_1 = \frac{2ax}{8a - 3x}, \quad y_1 = -\frac{y}{2x} x_1,$$

und der sich als Durchschnitt der Tangente und der Geraden $\eta = -\frac{y}{2x}\xi$ leicht konstruieren läßt. Die Entfernung der Punkte $xy$ und $x_1 y_1$ beträgt

$$\frac{3ax}{\sqrt{(2a - x)(8a - 3x)}}.$$

Für den Krümmungshalbmesser ergibt sich

$$\varrho = \pm \frac{a\sqrt{x(8a - 3x)^3}}{3(2a - x)^2},$$

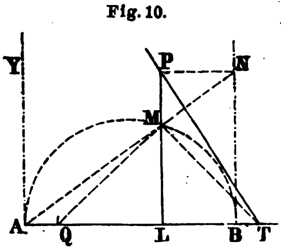
wobei das obere Zeichen dem oberen, das untere dem unteren Zweige entspricht. Die Ordinate $\eta$ des Krümmungsmittelpunktes hat den Wert

$$\eta = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{2ay}{x},$$

welcher eine einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes gestattet, nachdem die Normale bestimmt worden ist.

11. Über dem Durchmesser $AB = 2a$ (Fig. 10) ist ein Kreis beschrieben und in $B$ eine Tangente an denselben gelegt; durch einen beliebigen Punkt $M$ des Kreises zieht man $ML$ senkrecht zu $AB$, ferner die Gerade $AM$, welche die Tangente in $N$ schneidet, und nimmt endlich $LP = BN$. Alle so entstandenen Punkte $P$ bilden eine Kurve, deren Gleichung für $AL = x$, $LP = y$ ist,

Fig. 10.




$$xy^2 = 4a^2(2a - x).$$

Die Kurve besteht aus zwei kongruenten, über und unter der $x$-Achse liegenden Zweigen, welche die $y$-Achse zur gemeinschaftlichen Asymptote haben. Die Ordinaten des oberen Zweiges nehmen ab von $y = \infty$ bis $y = 0$, wo die Kurve die $x$-Achse rechtwinklig schneidet; bei $x = \frac{3}{2}a$ hat jeder Zweig einen Wendepunkt. Um die Tangente an $P$ zu konstruieren, nehme man

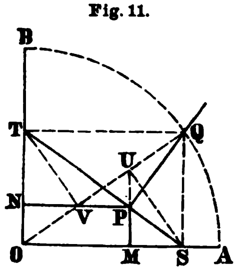
$LQ = a$, ziehe $QM$ und darauf in $M$ eine Senkrechte, welche der $x$-Achse in $T$ begegnet; $TP$ ist die gesuchte Tangente. Für den Krümmungshalbmesser ergibt sich

$$\varrho = \pm \frac{\sqrt{(4a^4 + 2ax^3 - x^4)^3}}{2a^2x^2(3a - 2x)},$$

wobei das obere Zeichen für den oberen, das untere für den unteren Zweig gilt.

12. Die Astroide (Fig. 11). In einem mit dem Radius $OA = a$ beschriebenen Kreise sind zwei gegeneinander senkrechte feste Durchmesser gezogen; irgend ein Punkt $Q$ des Kreises wird erst auf $OA$, nachher auf $OQ$ und dann wieder auf $OA$ projiziert, wodurch der Reihe nach die Projektionen $S$, $U$, $M$ entstehen; ebenso wird $Q$ nacheinander auf $OB$, $OQ$, $OB$ projiziert, und schließlich verlängert man $MU$ und $NV$ bis zu ihrem Durchschnitte $P$. Setzt man $\angle AOQ = \psi$, $OM = x$, $ON = y$, so gelten die Gleichungen

Fig. 11.




$$x = a\cos^3\psi, \quad y = a\sin^3\psi,$$

aus welchen folgt

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

oder in rationaler Form

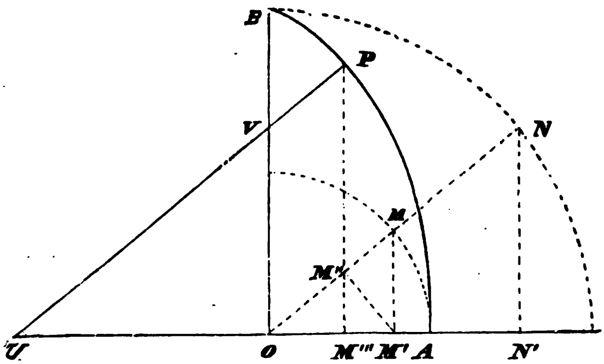
$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0.$$

Die Kurve besteht aus vier kongruenten Teilen, welche zusammen eine sternförmige Figur bilden. Der zwischen den positiven Teilen der Koordinatenachsen liegende Quadrant geht von $B$, wo er die Ordinatenachse berührt, bis $A$, wo er die Abscissenachse berührt; er fällt mit konvexer Krümmung. Ferner liegen die drei Punkte $S$, $P$, $T$ in einer Geraden, welche die Kurve in $P$ berührt und die konstante Länge $ST = a$ besitzt; die Gerade $PQ$ ist die Normale der Kurve im Punkte $P$, der Krümmungshalbmesser ist das Dreifache von $PQ$.

13. Auf der Abscissenachse ist die Strecke $OA = \frac{1}{2}a$, auf der Ordinatenachse die Strecke $OB = a$ genommen (Fig. 12), um den Koordinatenanfang $O$ sind mit den Radien $OA$ und $OB$ Kreise beschrieben; eine beliebige, durch $O$ gelegte Gerade schneide den ersten Kreis in $M$, den zweiten in $N$. Man projiziert nun den

Punkt $M$ auf $OA$, die erhaltene Projektion $M'$ auf $OM$, die so entstandene Projektion $M''$ wieder auf $OA$, wodurch der Punkt $M'''$ entsteht, und konstruiert außerdem die Projektion $N'$ von $N$ auf

Fig. 12.




$OA$; endlich nimmt man auf der Verlängerung von $M''' M''$ die Strecke $M'' P = N' N$. Alle so erhaltenen Punkte $P$ liegen in einer Kurve, die sich, wenn $\angle AOM = \psi$ gesetzt wird, entweder durch die beiden Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2} a \cos^3 \psi, \quad y = \tfrac{1}{2} a (2 + \cos^2 \psi) \sin \psi$$

oder durch die eine Gleichung

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + \tfrac{27}{4} a^2 x^4 = 0$$

ausdrücken läßt.

Die Kurve besteht aus vier kongruenten Teilen, welche zusammen ein Oval bilden. Die zum Punkte $P$ gehörende Normale liegt parallel zu $OMN$; das zwischen die Koordinatenachsen fallende Stück derselben besitzt die konstante Länge $a$. Der Krümmungshalbmesser ist $= 3 \cdot OM''$.

14. Auf der Abscissenachse ist die Strecke $OA = 2a$ (Fig. 13), auf der Ordinatenachse die Strecke $OB = a$ genommen, um den Koordinatenanfang sind mit den Radien $OA$ und $OB$ Kreise beschrieben; eine beliebige, durch $O$ gezogene Gerade schneide den ersten Kreis in $M$, den zweiten in $N$. Wie bei der vorigen Aufgabe projiziert man $M$ dreimal nach $M'$, $M''$, $M'''$, ebenso $N$ einmal nach $N'$ und nimmt wieder $M'' P = N' N$. Alle so erhaltenen Punkte $P$ liegen in einer Kurve, die sich entweder durch die zwei Gleichungen

$$x = 2a\cos^3\psi, \quad y = a(1 + 2\cos^2\psi)\sin\psi$$

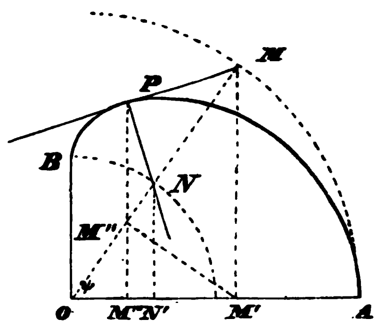
oder durch die eine Gleichung

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 - \tfrac{27}{4}a^4x^2 = 0$$

ausdrücken läßt.

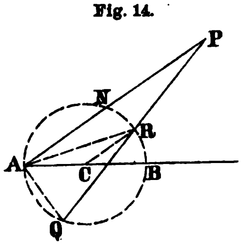
Die Kurve besteht aus vier kongruenten Teilen, ist geschlossen und besitzt in den Punkten 0, $+a$ und 0, $-a$ zwei nach innen gekehrte Spitzen (Rückkehrpunkte). Die Tangente im Punkte $P$ geht durch den Punkt $M$, die zugehörige Normale durch $N$; der Krümmungsradius ist $= \frac{3}{2}ON'$.

Fig. 13.




15. Die Kardioide (Fig. 14). In einem über dem Durchmesser $AB = 2a$ beschriebenen Kreise sind Sehnen $AN$ gezogen, welche durch den festen Punkt $A$ gehen, und auf jeder Sehne wird von $N$ aus, immer nach derselben Seite hin, eine dem Durchmesser $AB$ gleiche Strecke $NP$ aufgetragen.

Fig. 14.




Nimmt man $A$ als Koordinatenanfang, $AB$ als Abscissenachse und setzt $AP = r$, $\angle BAP = \theta$, so ist die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten

$$r = 2a(1 + \cos\theta)$$

und in rechtwinkligen Koordinaten

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

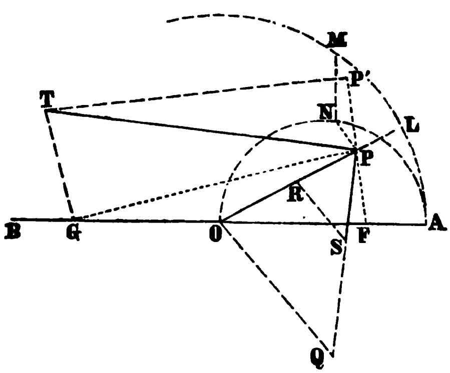
Die Kurve wird durch die Abscissenachse in zwei kongruente Teile geteilt. Der obere Zweig geht von $A$, wo er die $x$-Achse berührt, mit konkaver Krümmung aufwärts, erreicht bei

$$\theta = \tfrac{1}{3}\pi, \quad x = 3a\cos\tfrac{1}{3}\pi, \quad y = 3a\sin\tfrac{1}{3}\pi$$

seinen oberen Kulminationspunkt und schneidet zuletzt die Abscissenachse rechtwinklig im Punkte $x = 4a$, $y = 0$. Behufs der Normalenkonstruktion zieht man die zu $AN$ senkrechte Kreissehne $AQ$; es ist dann $PQ$ die Normale. Diese schneidet den Kreis $ANB$ in einem Punkte $R$, dessen Radius $CR // BP$, und wobei $AR = PR$ ist. Der Krümmungsradius für $P$ beträgt zwei Dritteile von $PQ$.

16. **Die Lemniskate** (Fig. 15). Mit dem Radius $OA = a$ ist ein Kreis und über $OA$ als Durchmesser ein zweiter Kreis beschrieben. Nach einem beliebigen Punkte $L$ des ersten Kreises zieht man den Radius $OL$, nimmt $arc\,LM = arc\,AL$, legt durch $M$ senkrecht zu $OA$ eine Gerade, welche den zweiten Kreis in $N$ schneidet und trägt auf $OL$ die Strecke $OP = ON$ ab. Wählt man $O$ zum Anfang, $OA$ als Abscissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und setzt noch $OP = r$, $\angle AOP = \theta$, so hat man für die Kurve der Punkte $P$ in Polarkoordinaten die Gleichung

Fig. 15.




$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

und in rechtwinkligen Koordinaten

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Auf der Abscissenachse mögen ferner die Punkte $F$ und $G$ so bestimmt sein, daß $OF = OG = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist; die Punkte $F$ und $G$ heißen die Brennpunkte der Lemniskate; die beiden Brennstrahlen eines Lemniskatenpunktes $P$ besitzen dann die Eigenschaft $FP \cdot GP = \overline{OF}^2$.

Die Kurve besteht aus vier kongruenten Teilen und hat die Gestalt einer Schleife ($\infty$). Der zwischen den positiven Seiten der Koordinatenachsen liegende Quadrant geht unter einem halben rechten Winkel von $O$ aus, steigt mit konkaver Krümmung, erreicht bei

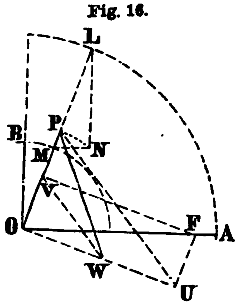
$$\theta = \frac{\pi}{6}, \quad r = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad x = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot \frac{a}{2}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2}$$

seinen oberen Kulminationspunkt und schneidet endlich die $x$-Achse unter einem rechten Winkel bei $x = a$, $y = 0$. Der Mittelpunkt der Kurve ist ihr einziger Inflexionspunkt. Zur Normalenkonstruktion dient die Bemerkung, daß der Winkel zwischen Normale und Radiusvektor das Doppelte von $\theta$, also $\angle OPQ = 2\theta$ ist. Um die

Tangente unabhängig von der Normale zu konstruieren, verlängert man den Brennstrahl $FP$ um $PP' = FP$ und errichtet in $P'$ eine Senkrechte auf $FP'$; diese Senkrechte schneidet die in $G$ auf dem anderen Brennstrahl $GP$ errichtete Senkrechte in einem Punkte $T$, welcher der gesuchten Tangente angehört. Nimmt man auf der Normale die Strecke $PQ = a$, auf dem Radiusvektor die Strecke $PR = \frac{1}{3}a$ und zieht durch $R$ eine zu $OQ$ parallele Gerade, so schneidet letztere die Normale im Krümmungsmittelpunkte $S$.

17. Um den Punkt $O$ sind mit den Radien $OA = a$ und $OB = b$ (Fig. 16) zwei konzentrische Kreise beschrieben; man zieht einen beliebigen Halbmesser, welcher den ersten Kreis in $L$, den zweiten in $M$ schneidet und legt durch $L$ eine Parallele zu $OB$, durch $M$ eine Parallele zu der auf $OB$ senkrechten Geraden $OA$. Beide Parallelen schneiden sich in $N$; endlich trägt man auf $OL$ die Strecke $OP = ON$ ab. Nimmt man $OA$ als Abscissen-, $OB$ als Ordinatenachse und setzt noch $OP = r$, $\angle AOP = \theta$, so hat die Kurve der Punkte $P$ in Polarkoordinaten die Gleichung

Fig. 16.




$$r^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta,$$

dagegen in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2,$$

oder auch, wenn $x$ und $y$ durch $\theta$ ausgedrückt werden,

$$x = \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta} \cdot \cos\theta,$$

$$y = \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta} \cdot \sin\theta.$$

Zur Abkürzung sei

$$\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) = A, \quad \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2) = B;$$

man findet dann

$$x = \sqrt{A + B\cos 2\theta} \cdot \cos\theta, \quad y = \sqrt{A + B\cos 2\theta} \cdot \sin\theta,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A\cos\theta + B\cos 3\theta}{A\sin\theta + B\sin 3\theta},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r(A^2 + 3B^2 + 4AB\cos 2\theta)}{(A\sin\theta + B\sin 3\theta)^3}.$$

Die Kurve besteht aus vier kongruenten, um den Mittelpunkt $O$ herumliegenden Teilen; der von den positiven Seiten der Koordinatenachsen eingeschlossene Quadrant schneidet $OA$ senkrecht in $A$ und $OB$ senkrecht in $B$. Im Falle $a \leqq b\sqrt{2}$ hat derselbe nur einen oberen Kulminationspunkt ($B$) und keinen Wendepunkt; ist dagegen $a > b\sqrt{2}$, so wird $B$ zum unteren Kulminationspunkt und außerdem existiert ein oberer Kulminationspunkt an der Stelle

$$tg\,\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 2b^2}}, \quad r = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Zwischen beiden Kulminationspunkten liegt ein Wendepunkt bei

$$tg\,\theta = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2}}, \quad r = \frac{\sqrt{3}\cdot ab}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}.$$

Um die Normale in einem beliebigen Punkte $P$ zu konstruieren, bestimme man zunächst den festen Punkt $F$, dessen Abscisse $OF = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist, lege durch $O$ senkrecht zu $OP$ eine Gerade und projiziere $F$ auf diese Senkrechte sowie auf $OP$, wodurch man die Punkte $U$ und $V$ erhält; endlich ziehe man durch $V$ eine Parallele zu $PU$, welche $OU$ in $W$ schneiden möge; dann ist $PW$ die verlangte Normale.

18. Die Cassinische Kurve. Es sind zwei feste Punkte $F$ und $G$ in der Entfernung $FG = 2c$ gegeben, und es wird der geometrische Ort des Punktes $P$ gesucht, für welchen das Rechteck aus $FP$ und $GP$ eine konstante Fläche $= h^2$ besitzt. Nimmt man den Mittelpunkt $O$ von $FG$ zum Anfang rechtwinkliger Koordinaten und $OF$ zur $x$-Achse, so erhält man als Gleichung der Kurve

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = h^4 - c^4$$

und in Polarkoordinaten

$$r^4 - 2c^2r^2\cos 2\theta = h^4 - c^4.$$

Aus der ersten Gleichung findet man

$$y^2 = \frac{[x^2 - (c^2 - h^2)]\,[c^2 + h^2 - x^2]}{c^2 + x^2 + \sqrt{h^4 + 4c^2x^2}},$$

und daran knüpfen sich folgende Bemerkungen. Für $h < c$ besteht die Kurve aus zwei gesonderten Blättern; für $h = c$ geht sie in eine Lemniskate über, deren Halbachse $a = \sqrt{2}\cdot c$ ist; für $h > c$ bildet die Kurve eine Ovalfigur mit den Halbachsen $a = \sqrt{h^2 + c^2}$, $b = \sqrt{h^2 - c^2}$.

Ferner gelten die Formeln

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(c^2 - x^2 - y^2)}{y(c^2 + x^2 + y^2)} = \frac{x(c^2 - r^2)}{y(c^2 + r^2)},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{h^2 r}{y(c^2 + r^2)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{h^4}{y^3} \cdot \frac{h^4 - c^4 + 3c^2(x^2 - y^2)}{(c^2 + x^2 + y^2)^3}.$$

Hiernach sind für $h \leqq c$ vier Kulminationspunkte vorhanden an den Stellen

$$x = \pm \frac{\sqrt{4c^4 - h^4}}{2c}, \quad y = \pm \frac{h^2}{2c}, \quad r = c;$$

im Falle $c < h < \sqrt{2} \cdot c$ gibt es sechs Kulminationspunkte bei

$$x = 0, \quad y = \pm \sqrt{h^2 - c^2} \quad \text{und} \quad x = \pm \frac{\sqrt{4c^4 - h^4}}{2c}, \quad y = \pm \frac{h^2}{2c}, \quad r = c;$$

endlich für $\sqrt{2} \cdot c < h$ existieren zwei Kulminationspunkte bei

$$x = 0, \quad y = \pm \sqrt{h^2 - c^2}.$$

Inflexionspunkte sind nur im Falle $c < h < \sqrt{2} \cdot c$ vorhanden und zwar gelten für deren Koordinaten die Gleichungen

$$x^2 - y^2 = -\frac{h^4 - c^4}{3c^2}, \quad x^2 + y^2 = \sqrt{\tfrac{1}{3}(h^4 - c^4)},$$

$$r = \sqrt[4]{\tfrac{1}{3}(h^4 - c^4)} = \sqrt{ab\, tg\, 30^0}, \quad \cos 2\theta = -\frac{r^2}{c^2}.$$

Zur Normalenkonstruktion eignet sich am besten die Formel

$$\sin\psi = \frac{c^2}{h^2} \sin 2\theta,$$

worin $\psi$ den Winkel zwischen Normale und Radiusvektor bezeichnet. Der Krümmungshalbmesser ist

$$\varrho = -\frac{h^2\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}{h^4 - c^4 + 3c^2(x^2 - y^2)} = -\frac{2h^2 r^3}{c^4 - h^4 + 3r^4}.$$

19. Es sind gegeben ein fester Punkt $F$ und eine feste Gerade $DE$, gesucht wird der geometrische Ort des Punktes $P$, für welchen das Rechteck aus seinen Abständen von $F$ und $DE$ eine konstante Fläche besitzt. Nimmt man $F$ zum Koordinatenanfang, die Senkrechte von $F$ auf $DE$ zur Abscissenachse, setzt die Länge dieser Senkrechten $= 2c$ und die konstante Fläche $= h^2$, so hat man

$$r = \frac{h^2}{2c - x},$$

wonach sich die Kurve leicht konstruieren läßt, und ferner

$$y^2 = \frac{h^4}{(2c - x)^2} - x^2 = \frac{(h^2 - 2cx + x^2)(h^2 + 2cx - x^2)}{(2c - x)^2}.$$

Für $h < c$ schneidet die Kurve viermal die Abscissenachse in den Entfernungen

$$a_1 = -(\sqrt{c^2 + h^2} - c), \quad a_2 = c - \sqrt{c^2 - h^2},$$
$$a_3 = c + \sqrt{c^2 - h^2}, \quad a_4 = \sqrt{c^2 + h^2} + c;$$

sie besteht dann aus einem blattförmig geschlossenen Teile und aus zwei ins Unendliche gehenden Zweigen, deren gemeinschaftliche Asymptote die Gerade $DE$ ist. Im Falle $h = c$ reduzieren sich jene vier Durchschnitte auf drei und die Kurve bildet dann eine Schlinge um $F$; für $h > c$ existieren nur noch zwei Durchschnitte, denen zwei Zweige entsprechen. Die Abscissenachse teilt in allen Fällen die Kurve in zwei kongruente Teile.

Man findet weiter

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{h^4}{(2c - x)^3} - x$$

oder wenn zur Abkürzung

$$\frac{c^4}{h^4} = m \quad \text{und} \quad \frac{c}{2c - x} = \xi$$

gesetzt wird

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{h^4}{c^3} \cdot \frac{\xi^4 - 2m\xi + m}{\xi}.$$

Nach bekannten algebraischen Lehren hat nun die Gleichung

$$\xi^4 - 2m\xi + m = 0$$

für $m > \frac{16}{27}$ zwei reelle, voneinander verschiedene Wurzeln und zwei komplexe Wurzeln; für $m = \frac{16}{27}$ werden die beiden reellen Wurzeln identisch; für $m < \frac{16}{27}$ sind alle Wurzeln imaginär. Derjenige Zweig der Kurve, welcher durch die Gleichung

$$y = +\frac{\sqrt{h^4 - x^2(2c - x)^2}}{2c - x}$$

ausgedrückt wird, kann daher höchstens zwei Kulminationspunkte besitzen. Ist nun erstens $h < c$, mithin $m > 1$, und wird

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{h^4}{(2c-x)^3} - x = \varphi(x)$$

gesetzt, so ergibt sich

$$\varphi(0) = \frac{h^4}{8c^3} > 0, \quad \varphi(\tfrac{1}{2}c) = \frac{16h^4 - 27c^4}{54c^3} < 0,$$

$$\varphi(a_2) = -2\left(\frac{a_2}{h}\right)^2\sqrt{c^2-h^2} < 0, \quad \varphi(a_3) = +2\left(\frac{a_3}{h}\right)^2\sqrt{c^2-h^2} > 0;$$

die Abscisse des ersten Kulminationspunktes liegt demnach zwischen 0 und $\frac{1}{2}c$, die des zweiten zwischen $a_2$ und $a_3$; der letzteren entspricht aber kein reelles $y$, es existiert daher in dem oberen Kurvenzweige nur ein oberer Kulminationspunkt.

Für den Fall $h = c$ wird einfacher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c^3 - 7c^2x + 5cx^2 - x^3}{(2c-x)^2\sqrt{c^2+2cx-x^2}},$$

woraus sich für den oberen Zweig ein einziger Kulminationspunkt ergibt an der Stelle $x = 0{,}16071 \cdot c$.

Ist drittens $h > c$, so müssen die drei Unterfälle

$$c^4 < h^4 < \tfrac{27}{16}c^4, \quad h^4 = \tfrac{27}{16}c^4, \quad h^4 > \tfrac{27}{16}c^4$$

unterschieden werden. Im ersten Falle zeigen die Werte von $\varphi(0)$, $\varphi(\frac{1}{2}c)$ und $\varphi(c)$, daß der obere Kurvenzweig zwei Kulminationspunkte besitzt, von denen der obere zwischen 0 und $\frac{1}{2}c$, der untere zwischen $\frac{1}{2}c$ und $c$ liegt. Im zweiten Unterfalle wird

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{(c-2x)^2[2c^2+(5c-2x)^2]}{16(2c-x)^3},$$

und dann ziehen sich die beiden vorigen Kulminationspunkte zu einem Punkte zusammen, in welchem zwar die Tangente horizontal liegt, der aber kein Kulminationspunkt ist, weil der Differentialquotient sein Zeichen nicht wechselt. Im letzten Falle sind gar keine Kulminationspunkte vorhanden.

Weiter erhält man

$$y^3\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2h^8}{(2c-x)^6} - \frac{3h^4x^2}{(2c-x)^4} + \frac{2h^4x}{(2c-x)^3} - \frac{h^4}{(2c-x)^2}$$
$$= -2h^4\frac{8c^4 - h^4 - 24c^3x + 30c^2x^2 - 16cx^3 + 3x^4}{(2c-x)^6}$$

oder unter Benutzung der früheren Zeichen

$$y^3\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2c^2\xi^2}{m^2}(\xi^4 - 6m\xi^2 + 8m\xi - 3m).$$

Die Gleichung

$$\xi^4 - 6m\xi^2 + 8m\xi - 3m = 0$$

besitzt jederzeit zwei imaginäre Wurzeln, es kann daher die obere Hälfte der Kurve höchstens zwei Inflexionspunkte haben. Ist nun erstens $h < c$, so liegt der eine Inflexionspunkt zwischen $a_3$ und $2c$, der andere zwischen $2c$ und $a_4$. Im Falle $h = c$ wird einfacher

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2c^4 \frac{7c - 8x}{(2c - x)^3\sqrt{(c^2 + 2cx - x^2)^3}},$$

und es existiert dann im oberen Zweige der Kurve nur ein Inflexionspunkt an der Stelle

$$x = \tfrac{7}{8}c, \quad y = \frac{4\sqrt{2}}{8}c;$$

legt man im Punkte $x = c$, $y = 0$ eine Tangente an die Kurve, so geht diese Tangente durch den Inflexionspunkt. Im letzten Falle $h > c$ liegt ein Wendepunkt zwischen $a_1$ und $2c$, der andere zwischen $2c$ und $a_4$.

Zur Normalenkonstruktion eignet sich am besten die Formel

$$x + y\frac{dy}{dx} = \frac{r^2}{2c - x}.$$

Anmerkung. Die Behandlung der Aufgabe 19 gestaltet sich etwas einfacher, wenn man mittelst der Transformationsformeln

$$x = x' + c, \quad y = y'$$

zu einem neuen Koordinatensystem übergeht. Dann haben z. B. die Abscissen der Punkte, in denen die betrachtete Kurve die Abscissenachse schneidet, die Werte

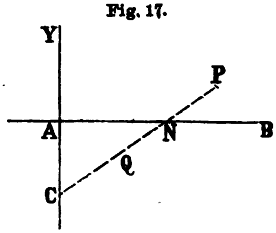
$$a_1' = -\sqrt{c^2 + h^2}, \quad a_2' = -\sqrt{c^2 - h^2}, \quad a_3' = +\sqrt{c^2 - h^2}, \quad a_4' = +\sqrt{c^2 + h^2}.$$

Wesentlich bequemer wird hierbei insbesondere die auf die Wendepunkte der Kurve bezügliche Untersuchung, da sich der Zähler des oben für $y^3\frac{d^2y}{dx^2}$ gefundenen Ausdrucks bei Einführung von $x'$ an Stelle von $x$ sehr einfach gestaltet, so einfach, daß die Benutzung der Hilfsgröße $\xi$ an dieser Stelle ganz überflüssig wird, es ergibt sich nämlich

$$8c^4 - h^4 - 24c^3x + 30c^2x^2 - 16cx^3 + 3x^4 = c^4 - h^4 - 4cx'^3 + 3x'^4.$$

20. Die Konchoide. Eine Gerade $AB$ und ein um die Strecke $AC = b$ davon entfernter Punkt $C$ sind gegeben (Fig. 17); man verbindet den letzteren mit beliebigen Punkten $N$ der Geraden und schneidet von $N$ aus auf beiden Seiten von $NC$ die gleichen Strecken $NP = NQ = a$ ab. Die so entstehende Kurve besitzt zwei Zweige; für den oberen ist, wenn $\angle ACN = \omega$ gesetzt wird,

Fig. 17.




$$x = b\,tg\,\omega + a\sin\omega,\quad y = +\,a\cos\omega,$$

für den unteren

$$x = b\,tg\,\omega - a\sin\omega,\quad y = -\,a\cos\omega,$$

woraus für beide Zweige die gemeinsame Kurvengleichung folgt

$$x^2y^2 = (b + y)^2(a^2 - y^2).$$

Hiernach ergeben sich die Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy^3}{(y+b)(y^3 + a^2b)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2y^3(y^3 + 3by^2 - 2a^2b)}{(y^3 + a^2b)^3}.$$

Die Punkte $x = 0$, $y = +\,a$ und $x = 0$, $y = -\,a$ sind die Kulminationspunkte der Kurve; die Abscissenachse ist Asymptote derselben. Die kubische Gleichung

$$y^3 + 3by^2 - 2a^2b = 0$$

bestimmt die Ordinaten der Inflexionspunkte, wobei zu beachten ist, daß diese Punkte nur dann existieren, wenn die Wurzeln der vorstehenden Gleichung reell und zugleich zwischen $-\,a$ und $+\,a$ enthalten sind. Für $b > a$ findet man zwei derartige $y$, für $b \overline{\overline{<}}\, a$ nur eines; demnach besitzt die Kurve vier Inflexionspunkte, wenn $b > a$ ist; andernfalls nur zwei. Für $b = a$ entsteht bei $C$ eine Spitze, für $b < a$ hat die Kurve eine um $C$ herumgehende Schlinge.

21. Auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel mit dem Anfangspunkt $O$ eines rechtwinkligen Koordinatensystems zusammenfällt, werde ein Punkt $A$ gewählt und durch ihn eine Gerade parallel zur Abscissenachse gezogen (Fig. 18); der Schnittpunkt dieser Geraden mit dem anderen Schenkel heiße $P$. Gesucht wird die Kurve,

welche der Punkt $P$ beschreibt, wenn der rechte Winkel um $O$ gedreht wird.*

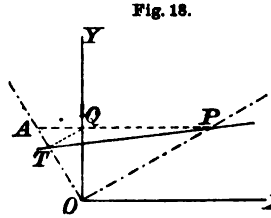
Die Gleichung der fraglichen Kurve lautet, wenn die gegebene Entfernung $OA$ mit $a$ bezeichnet wird,

$$y^2(x^2+y^2)=a^2x^2,$$

oder, in Polarkoordinaten,

$$r\, tg\, \theta = a;$$

Fig. 18.




die Kurve ist symmetrisch zu beiden Koordinatenachsen und hat die beiden geraden Linien $y=+a$ und $y=-a$ zu Asymptoten. Eine bequeme Tangentenkonstruktion ergibt sich, wenn man beachtet, daß für die Polarsubtangente die Formel

$$\frac{r^2}{r'}=-a\cos^2\theta$$

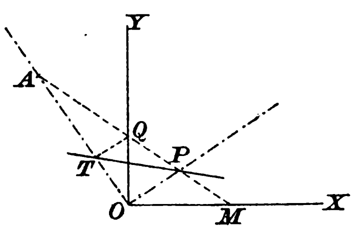
erhalten wird; fällt man nämlich von dem Punkte $Q$, in welchem die Gerade $AP$ die $y$-Achse schneidet, ein Lot auf die Gerade $OA$, so ist der Fußpunkt $T$ dieses Lotes ein Punkt der die Kurve in $P$ berührenden Tangente.

22. Auf dem einen Schenkel eines um seinen Scheitel $O$ drehbaren rechten Winkels werde ein Punkt $A$ gewählt und von ihm aus eine Gerade nach dem festen Punkte $M$ der Ebene gezogen. Gesucht wird der geometrische Ort desjenigen Punktes $P$, in welchem diese Gerade den anderen Schenkel schneidet.**

Macht man den Punkt $O$ zum Anfangspunkt, die Gerade $OM$ aber zur Abscissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 19) und setzt $OA=a$, $OM=m$, so lautet die Gleichung des verlangten geometrischen Ortes

$$(x^2+y^2)\left(x^2+\frac{a^2-m^2}{a^2}y^2\right) - 2mx(x^2+y^2)+m^2x^2=0;$$

Fig. 19.




werden mittelst der Formeln

* Die fragliche Kurve kommt in der darstellenden Geometrie vor (Rohn-Papperitz, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie,* II. Band, Nr. 620) und ist ihrer Gestalt wegen die Kappa-Kurve genannt worden. Sie bildet auch den geometrischen Ort für die Berührungspunkte derjenigen Tangenten, welche man von $O$ aus an die mit dem Radius $a=OA$ um die Punkte der Abscissenachse beschriebenen Kreise legen kann.

** Auch diese Kurve tritt in der darstellenden Geometrie auf (Rohn-Papperitz, II. Band, Nr. 622 ff.); sie geht übrigens, wenn der gegebene Punkt $M$ unendlich fern liegt, in die Kappa-Kurve über.

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

Polarkoordinaten eingeführt, so ergibt sich die Gleichung

$$r = \frac{a\,m\cos\theta}{a + m\sin\theta}.$$

Die hieraus folgende Formel für die Polarsubtangente

$$\frac{r^2}{r'} = -\frac{a\,m\cos^2\theta}{m + a\sin\theta}$$

ermöglicht eine bequeme Tangentenkonstruktion; wird nämlich vom Schnittpunkte $Q$ der Geraden $AM$ mit der $y$-Achse aus ein Lot auf $OA$ gefällt, so ist der Fußpunkt $T$ dieses Lotes ein Punkt der die Kurve in $P$ berührenden Tangente.

Die Gestalt des in Rede stehenden geometrischen Ortes hängt wesentlich von dem Verhältnis der beiden Strecken $a$ und $m$ ab.

Ist $m = a$, so zerfällt der geometrische Ort in eine gerade Linie (die $y$-Achse) und eine zur $x$-Achse symmetrische Kurve III. Ordnung, deren Gleichung

$$(x^2 + y^2)(x - 2a) + a^2 x = 0,$$

oder

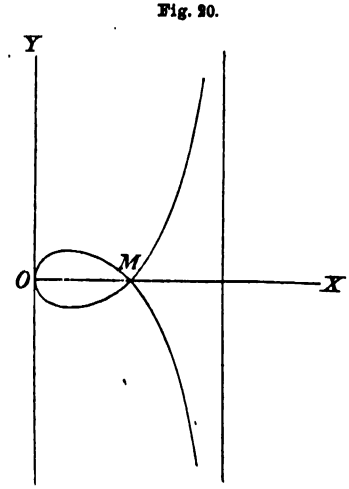
$$y = \pm (x - a)\sqrt{\frac{x}{2a - x}},$$

resp.

$$r = \frac{a\cos\theta}{1 + \sin\theta} = a\,\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$$

geschrieben werden kann. Diese Kurve, die als gerade Strophoide (auch Logocyklika oder harmonische Kurve) bezeichnet wird, besitzt zahlreiche interessante Eigenschaften; ihr Verlauf ist in Fig. 20 dargestellt. Die $y$-Achse ist eine Tangente, die Gerade $x = 2a$ eine Asymptote der Kurve; die beiden Kurventeile, welche sich ergeben, wenn in der vorletzten Gleichung erst das obere und dann das untere Vorzeichen genommen wird, schneiden sich im Punkte $M(x = a,\ y = 0)$ unter rechtem Winkel.

Fig. 20.




Ist dagegen $m < a$, so bildet der geometrische Ort eine vollständig im Endlichen verlaufende Kurve IV. Ordnung, welche ganz auf der rechten Seite der $y$-Achse liegt und symmetrisch zur $x$-Achse ist. An zwei Stellen ist die Kurventangente parallel zur $y$-Achse; um dieselben zu finden, beachte man, daß für jede derartige Stelle

$$r' \cos\theta - r \sin\theta = 0$$

sein muß, woraus mit Hilfe der vorhin angegebenen Kurvengleichung

$$\sin^2\theta + 2\frac{a}{m}\sin\theta + 1 = 0$$

also

$$\sin\theta = \frac{-a + \sqrt{a^2 - m^2}}{m}$$

folgt; die letztere Formel aber ermöglicht eine bequeme konstruktive Ermittelung der gewünschten Kurvenstellen.*

Ist endlich $m > a$, so bildet unser geometrischer Ort ebenfalls eine zur $x$-Achse symmetrische Kurve IV. Ordnung, welche aber ins Unendliche verläuft und zu beiden Seiten der $y$-Achse gelegen ist. Die Kurve besitzt zwei Asymptoten, welche sich im Punkte $M$ schneiden und durch die beiden Gleichungen

$$y = +\frac{a}{\sqrt{m^2 - a^2}}(x - m),$$

$$y = -\frac{a}{\sqrt{m^2 - a^2}}(x - m)$$

dargestellt werden, mit deren Hilfe sie leicht konstruiert werden können.

## § 16.

### Fortsetzung. (Transzendente Kurven.)

1. Die logarithmische Linie hat zur Gleichung

$$y = b e^{\frac{x}{a}} \quad \text{oder} \quad x = a \lg\left(\frac{y}{b}\right);$$

drei oder mehreren in arithmetischer Progression stehenden Abscissen entsprechen hiernach Ordinaten, welche eine geometrische Progression bilden, und zufolge dieser Eigenschaft können aus den beiden Koordinatenpaaren

$$x = 0, \quad y = b, \quad x = a, \quad y = be$$

beliebig viele weitere Koordinatenpaare durch Konstruktion abgeleitet

* Die Kenntnis dieser Stellen ist für die darstellende Geometrie von Interesse. Vgl. Rohn-Papperitz, a. a. O., Nr. 622, wo der in Frage kommende Punkt mit $V$ bezeichnet ist.

werden. Die Kurve steigt fortwährend mit konvexer Krümmung; die Subtangente ist konstant $= a$, der Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{\sqrt{(a^2+y^2)^3}}{ay}.$$

Anmerkung. In der Gleichung der logarithmischen Linie darf man $b=1$ annehmen, ohne daß die Allgemeinheit der Betrachtung beeinträchtigt wird. Da nämlich

$$b e^{\frac{x}{a}} = e^{\frac{x + a\, lg\, b}{a}}$$

ist, so kann die Kurve

$$y = b e^{\frac{x}{a}} \quad (b \gtrless 1)$$

durch eine in der Richtung der $x$-Achse ausgeführte Verschiebung mit der Kurve

$$y = e^{\frac{x}{a}}$$

zur Deckung gebracht werden; die beiden Kurven sind mithin kongruent und unterscheiden sich voneinander bloß durch ihre Lage gegen das Koordinatensystem.

2. Die Gewölblinie entsteht, wenn man die beiden symmetrisch entgegengesetzt liegenden logarithmischen Linien

$$y_1 = b\, e^{+\frac{x}{a}}, \quad y_2 = b\, e^{-\frac{x}{a}}$$

konstruiert und zwischen jedem $y_1$ und $y_2$ das arithmetische Mittel aufsucht; die Gleichung der Gewölblinie lautet demnach

$$y = \tfrac{1}{2} b \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

oder auch

$$x = a\, lg \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - b^2}}{b}\right).$$

Die Kurve wird von der $y$-Achse in zwei kongruente Teile geteilt, von welchen der über der positiven $x$-Achse liegende Zweig fortwährend mit konvexer Krümmung steigt. Mittelst der Formel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - b^2}}{a}$$

ist die Tangente im Punkte $xy$ leicht zu konstruieren; für den Krümmungshalbmesser hat man

$$\varrho = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 + y^2)^3}}{ay}.$$

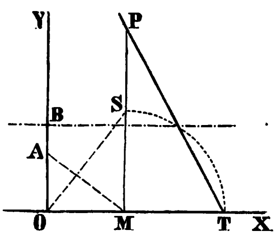
Im speziellen Falle $b = a$ führt die Kurve den Namen Kettenlinie; der Krümmungsradius ist dann gleich und entgegengesetzt der Normale.

3. Die reziproke logarithmische Linie hat zur Gleichung

$$y = b\, e^{\frac{a}{x}} \quad \text{oder} \quad x = \frac{a}{lg\left(\frac{y}{b}\right)};$$

drei in harmonischer Proportion stehende Abscissen entsprechen hiernach drei in geometrischer Proportion stehenden Ordinaten, und zufolge dieser Eigenschaft können aus einem Koordinatenpaar (z. B. $x = \frac{1}{2} a$, $y = b e^2$ und $x = a$, $y = b e$) beliebig viele Koordinatenpaare durch Konstruktion hergeleitet werden. Den negativen Abscissen von $x = -\infty$ bis $x = 0$ entspricht ein Kurvenzweig, der von einer in der Höhe $b$ parallel zur $x$-Achse liegenden Asymptote bis zum Koordinatenanfange herabsteigt und an der Stelle $x = -\frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{e^2}$ von konkaver zu konvexer Krümmung übergeht. An der Stelle $x = 0$ springt $y$ von 0 nach $+\infty$ über, nachher fällt die Kurve mit konvexer Krümmung und nähert sich derselben Asymptote, wie der vorige Zweig. Um die Tangente im Punkte $P$ zu konstruieren (Fig. 21), nehme man auf der Ordinatenachse $OA = a$, lege durch $O$ senkrecht zu $AM$ eine Gerade, welche die Ordinate $MP$ in $S$ schneidet, so ist $MS = MT$ die Subangente. Der Krümmungsradius ist

Fig. 21.



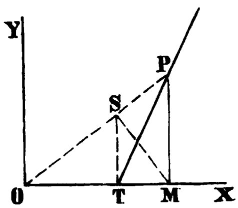

$$\varrho = \frac{\sqrt{(x^4 + a^2 y^2)^3}}{a\,(a + 2x)\, x^2 y}.$$

4. Die Gleichung einer Kurve sei

$$y^2 = x^2\, lg\left(\frac{x^2}{a^2}\right),$$

wobei man beachten möge, daß die Funktionen $lg(z^2)$ und $2\, lg\, z$ zwar für positive, nicht aber für negative $z$ identisch sind. Der Koordinatenanfang ist der Mittelpunkt der Kurve, welche aus vier kongruenten Quadranten besteht. Betrachtet man nur den zwischen den positiven Seiten der Koordinatenachsen liegenden Quadranten, so findet sich, daß derselbe mit $x = a$, $y = 0$ beginnt, anfangs mit konkaver Krümmung, von $x = y = a\sqrt{e}$ ab mit konvexer Krümmung steigt und ins Unendliche geht. Um die Tangente in einem Kurvenpunkte $P$ zu konstruieren (Fig. 22), fällt man vom Abscissenendpunkte $M$ eine Senkrechte $MS$ auf den Radiusvektor $OP$ und legt noch $ST \perp OX$; es ist dann $MT$ die Subtangente. Für den Krümmungsradius ergibt sich, wenn $u$ die Normale im Punkte $P$ bezeichnet,

Fig. 22.




$$\varrho = \frac{u^3}{y^2 - x^2};$$

hieraus folgt eine einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes.

5. Die logarithmische Lemniskate. Es sei

$$y^2 = x^2 \, lg\left(\frac{a^2}{x^2}\right),$$

so besteht die Kurve aus vier kongruenten um den Koordinatenanfang herum liegenden Quadranten. Der zwischen den positiven Koordinatenachsen befindliche Quadrant geht vom Koordinatenanfange aus*, steigt mit konkaver Krümmung bis zu dem oberen

---

* Man kann hierbei folgende Bemerkung zu Hilfe nehmen. Für $a < b$ ist bekanntlich (S. 8)

$$\frac{b^m - a^m}{b - a} > m a^{m-1},$$

mithin für $a = 1$, $b = 1 + \frac{z}{m}$

$$\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m - 1 > z$$

und durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende $m$

$$e^z - 1 > z \quad \text{folglich} \quad e^z > z.$$

Setzt man $z = \frac{1}{2}\, lg\, \omega$, wo $\omega$ mehr als die Einheit betragen muß, und quadriert, so erhält man

$$\omega > \frac{1}{4}(lg\, \omega)^2$$

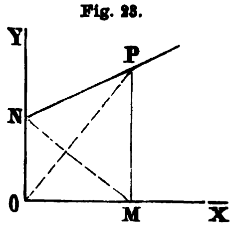
oder

$$\frac{lg\, \omega}{\omega} < \frac{4}{lg\, \omega},$$

daraus geht hervor, daß $\frac{lg\, \omega}{\omega}$ bei unendlich wachsenden $\omega$ gegen die Null konvergiert.

Kulminationspunkte $x = y = \frac{a}{\sqrt{e}}$, fällt dann bis $x = a$, $y = 0$ und wird für $x > a$ imaginär; in beiden Durchschnitten mit der $x$-Achse steht die Kurve senkrecht auf dieser Achse. Der Mittelpunkt ist der einzige Wendepunkt. Um die Tangente im Punkte $P$ zu konstruieren, legt man durch den Abscissenendpunkt $M$ senkrecht zum Radiusvektor $OP$ (Fig. 23) eine Gerade $MN$, welche die Ordinatenachse in $N$ schneidet; $NP$ ist dann die Tangente. Bezeichnet $u$ die Normale im Punkte $P$, so ergibt sich

Fig. 23.




$$\varrho = \frac{u^3}{x^2 + y^2},$$

woraus eine einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes folgt.

6. Die Traktorie der Geraden (Traktrix). Durch die beiden Gleichungen

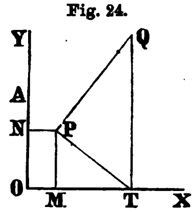
$$x = a\left(\tfrac{1}{2}\, lg\, cot^2 \tfrac{1}{2}\,\omega - cos\,\omega\right), \quad y = a\, sin\,\omega$$

oder durch die eine Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2}\, a\, lg\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}$$

wird eine Kurve von folgenden Eigenschaften bestimmt. Die Kurve besteht aus vier kongruenten um den Koordinatenanfang herum liegenden Quadranten. Der zwischen den positiven Seiten der Koordinatenachsen enthaltene Quadrant beginnt mit $x = 0$, $y = a$, fällt unausgesetzt mit konvexer Krümmung und hat die $x$-Achse zur Asymptote. Es ist ferner

Fig. 24.




$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

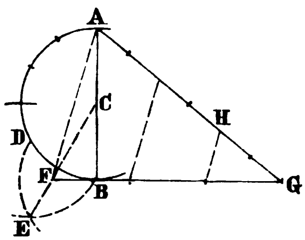
und hieraus folgt, daß die Tangente $PT$ (Fig. 24) die konstante Länge $a$ besitzt. Für den Krümmungshalbmesser findet man

$$\varrho = \frac{a\sqrt{a^2 - y^2}}{y};$$

errichtet man in $T$ eine Senkrechte auf der $x$-Achse, so schneidet diese Senkrechte die Normale im Krümmungsmittelpunkte $Q$.

7. Die Spirale des Archimedes ist diejenige Kurve, bei welcher der Radiusvektor $r$ proportional dem Polarwinkel $\theta$ wächst. Um diese Spirale zu konstruieren, muß man zunächst ihren erzeugenden Kreis rektifizieren, was entweder mittelst eines Maßstabes, oder auf folgendem graphischen Wege geschehen kann (Fig. 25). Ist $AB = 2a$ der Durchmesser, $C$ der Mittelpunkt des Kreises, so legt man in $B$ eine Tangente an den Kreis, konstruiert mit ungeänderter Zirkelöffnung den Winkel $BCE = 30^0$, die Strecke $BF = a \cdot tg\, 30^0$ und nimmt $FG = 3a$; es ist dann

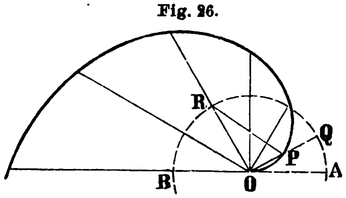
Fig. 25.




$$AG = a\sqrt{13\tfrac{1}{3} - \sqrt{12}} = a \cdot 3{,}141533\ldots,$$

also mit einer für graphische Zwecke völlig ausreichenden Genauigkeit $AG = a \cdot \pi =$ dem Halbkreise $ADB$. Teilt man sowohl den Halbkreis als die Gerade in gleichviel gleiche Teile, z. B. in 6, oder 12, oder 24 Teile, was aus naheliegenden Gründen sehr bequem ist, so entstehen beiderseits gleiche Stücke, wie z. B. $arc\, BD = GH$. In Fig. 26 sei nun wieder $OA = a$ und die Peripherie des um $O$ mit dem Radius $a$ beschriebenen Kreises ebenso wie vorhin geteilt; nach den Teilpunkten zieht man die Radien und trägt auf letztere, vom Mittelpunkte $O$ aus, die entsprechenden geradlinigen Strecken auf, so daß immer $OP = arc\, AQ$ ist. Die Gleichung der Spirale ist hiernach

Fig. 26.




$$r = a\theta \quad \text{oder} \quad \frac{y}{x} = tg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}.$$

Vom Koordinatenanfange ausgehend, macht die Spirale unendlich viele, sich mehr und mehr erweiternde Windungen; sie besitzt daher unendlich viele Kulminationspunkte, deren Polarwinkel durch die Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$tg\,\theta = -\theta$$

bestimmt werden. Die Polarsubnormale hat die konstante Größe $a$; legt man demnach senkrecht zum Vektor $OP$ den Kreisradius $OR$, so ist $PR$ die Normale für den Punkt $P$. Der Krümmungshalbmesser ist

$$\varrho = \frac{u^3}{a^2 + u^2},$$

worin $u$ die Polarnormale $PR$ bezeichnet.

8. Die hyperbolische Spirale. Diese Kurve hat zur Gleichung

$$r = \frac{a}{\theta}$$

und läßt sich auf ähnliche Weise wie die Spirale des Archimedes konstruieren. Für $\theta = 0$ wird $r = \infty$ und zugleich geht $y = r\sin\theta$ in $a$ über; bei wachsenden $\theta$ nimmt $r$ ab. Die hyperbolische Spirale besitzt demnach eine Asymptote, welche in der Entfernung $a$ parallel zur Polarachse liegt; sie macht ferner unendlich viele, sich mehr und mehr verengernde Windungen; der Koordinatenanfang ist ein asymptotischer Punkt der Kurve. Kulminationspunkte sind, wie bei der vorigen Kurve, an den Stellen vorhanden, wo $tg\,\theta = -\theta$ wird. Die Polarsubtangente hat den konstanten Wert $-a$, was eine einfache Tangentenkonstruktion gibt. Bezeichnet $u$ die Polarnormale, so ist

$$\varrho = \frac{u^3}{r^2}.$$

9. Die parabolische Spirale hat zur Gleichung

$$r^2 = a^2\,\theta$$

und kann wegen $r = \sqrt{a \cdot a\theta}$ auf ähnliche Weise wie die Spirale des Archimedes konstruiert werden. Sie macht vom Koordinatenanfange aus sowohl nach rechts wie nach links unendlich viele sich erweiternde Windungen, deren Kulminationspunkte durch die transzendente Gleichung

$$tg\,\theta = -2\theta$$

bestimmt werden. Die Polarsubnormale ist nach der Formel

$$r' = \frac{a^2}{2r}$$

leicht zu konstruieren; zwischen der Polarnormale $u$ und dem Krümmungsradius besteht die Relation

$$\varrho = \frac{u^3}{3u^2 - 2r^2}.$$

10. Die reziproke parabolische Spirale (Lituus). Als Gleichung der Kurve hat man

$$r^2 = \frac{a^2}{\theta},$$

welcher Ausdruck leicht zu konstruieren ist. Für $\theta = 0$ wird $r = \infty$, dagegen $y = 0$; bei wachsenden $\theta$ nimmt $r$ ab. Die Kurve macht daher, und zwar nach entgegengesetzten Seiten hin, unendlich viele sich verengernde Windungen; die Polarachse ist ihre Asymptote, der Pol ihr asymptotischer Punkt. Kulminationspunkte sind an den Stellen vorhanden, wo $tg\,\theta = 2\theta$ wird. Ferner besitzt die Kurve zwei Inflexionspunkte für $\theta = \frac{1}{2} = arc\, 28^0\, 38'\, 52''\, 4$ und $r = \pm\sqrt{2}\cdot a$. Die Polarsubtangente bestimmt sich durch die leicht konstruierbare Formel

$$\frac{r^2}{r'} = -2\frac{a^2}{r};$$

zwischen der Polarnormale $u$ und dem Krümmungsradius besteht die Relation

$$\varrho = \frac{4a^4u^3}{r^2(4a^4 - r^4)}.$$

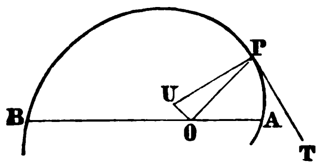
11. Die logarithmische Spirale. Aus der Gleichung der Kurve, nämlich

$$r = ae^{\beta\theta} \quad \text{oder} \quad \theta = \frac{1}{\beta}\, lg\left(\frac{r}{a}\right)$$

folgt, daß die Vektoren in geometrischer Progression wachsen, wenn die Polarwinkel eine arithmetische Progression bilden; sind demnach zwei Punkte der Kurve bekannt, z. B. $A$ mit den Koordinaten $\theta = 0$, $r = a$ und $B$ mit den Koordinaten $\theta = \pi$, $r = b$, so lassen sich durch Konstruktion beliebig viele weitere Kurvenpunkte bestimmen. Den von 0 bis $+\infty$ wachsenden $\theta$ entsprechen unendlich viele, sich fortwährend erweiternde Windungen, den Werten von $\theta = 0$ bis $\theta = -\infty$ unendlich viele immer enger werdende Windungen, die sich dem Koordinatenanfange als asymptotischem

Punkte nähern. So oft $\cot\theta = -\beta$ wird, treten Kulminationspunkte ein. Der Winkel $OPT$ zwischen Radiusvektor und Tangente (Fig. 27) hat immer dieselbe Größe, nämlich $\operatorname{arc}\cot\beta$; der Krümmungshalbmesser ist gleich der Polarnormale $PU$.

Fig. 27.




Anmerkung. In der Gleichung der logarithmischen Spirale darf man $a = 1$ annehmen, ohne hierdurch die Allgemeinheit der Betrachtung einzuschränken. Da nämlich

$$a e^{\beta\theta} = e^{\beta\left(\theta + \frac{lg\,a}{\beta}\right)}$$

ist, so kann die Kurve

$$r = a e^{\beta\theta} \quad (a \gtrless 1)$$

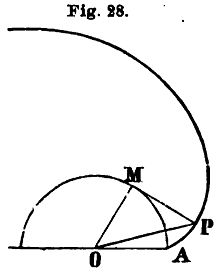
durch Drehung um den Pol des Koordinatensystems mit der Kurve

$$r = e^{\beta\theta}$$

zur Deckung gebracht werden; die beiden Kurven sind demnach kongruent und unterscheiden sich voneinander nur durch ihre Lage zum Koordinatensystem.

12. Die Kreisevolvente (Fig. 28). An einen, mit dem Radius $OA = a$ beschriebenen Kreis ist in einem beliebigen Punkte $M$ eine Tangente gelegt und auf derselben eine Strecke $MP$ abgeschnitten, welche gleich ist dem Kreisbogen zwischen $M$ und einem festen Punkte $A$; alle so konstruierten Punkte $P$ bilden eine Kurve, welche sich für $\angle AOM = \omega$ folgendermaßen ausdrücken läßt

Fig. 28.




$$x = a(\cos\omega + \omega\sin\omega),$$
$$y = a(\sin\omega - \omega\cos\omega)$$

oder

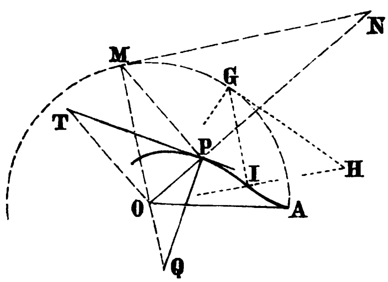
$$r = a\sqrt{1+\omega^2}, \quad \theta = \omega - \operatorname{arc}tg\,\omega,$$

oder

$$\theta = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - \operatorname{arc}\cos\frac{a}{r}.$$

Die Kurve gehört zu den Spiralen, insofern sie unendlich viele, sich fortwährend erweiternde Windungen um $O$ herum macht. Die Kreistangente $MP$ ist zugleich die Normale und der Krümmungshalbmesser der Kurve. Nimmt man in den vorigen Formeln die Wurzeln negativ, so erhält man den zweiten Zweig der Kurve, welcher dem ersten symmetrisch entgegengesetzt liegt.

Fig. 29.




13. Die Traktorie des Kreises (Fig. 29). Es sei $A$ ein fester, $M$ ein beliebiger Punkt eines mit dem Radius $OA = a$ beschriebenen Kreises; durch $M$ ist eine Tangente an den Kreis gelegt, auf dieser $MN = arc\, AM$ genommen und schließlich auf $ON$ die Senkrechte $MP$ gefällt; alle so konstruierten Punkte $P$ bilden eine Kurve, welche sich für $\angle AOM = \omega$ folgendermaßen ausdrücken läßt

$$r = \frac{a}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \theta = \omega - arc\, tg\, \omega$$

oder

$$\theta = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} - arc\cos\frac{r}{a}.$$

Die Kurve macht von $A$ aus unendlich viele, sich fortwährend verengernde Windungen um den Koordinatenanfang, welcher der asymptotische Punkt der Kurve ist; sie besitzt ferner einen Inflexionspunkt $I$ an der Stelle

$$\omega = 1, \quad r = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \theta = 1 - \frac{\pi}{4},$$

welchen man leicht mittelst der Bemerkung konstruieren kann, daß näherungsweise

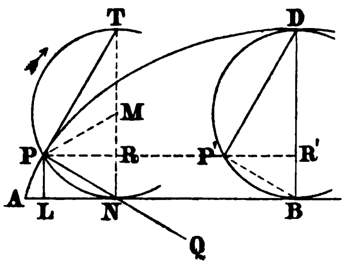
$$tg\, 1 = tg\, 57^0\, 17'\, 44''\, 8 = \tfrac{95}{61}$$

ist, wobei der begangene Fehler weniger als 2 Sekunden beträgt. Die Polartangente $PT$ hat die konstante Länge $a$; der Durchschnitt von $MO$ mit der Normale ist der Krümmungsmittelpunkt $Q$. Nimmt man in den obigen Formeln die Wurzelgrößen negativ, so erhält man einen zweiten Kurvenzweig, welche dem ersten symmetrisch entgegengesetzt liegt.

14. Die Cykloide (Fig. 30). Wenn ein Kreis auf einer Geraden fortrollt, ohne zu gleiten, so beschreibt ein Peripheriepunkt des Kreises die genannte Kurve. Es sei $AB$ die gegebene Gerade,

$NPT$ der rollende Kreis in einer seiner Lagen, wo er $AB$ in $N$ berührt, $P$ derjenige Punkt des Kreises, welcher die Kurve beschreibt und welcher sich zu Anfange der Bewegung in $A$ befunden haben möge; es ist dann $AN = arc\ NP$. Um die Kurve zu konstruieren, braucht man den Kreis nur in seiner mittelsten, einer halben Umdrehung entsprechenden Lage zu zeichnen, so daß $AB$ gleich der halben Kreisperipherie $BP'D$ ist;

Fig. 30.




man wählt dann $arc\ BP'$ willkürlich, nimmt $AN = arc\ BP'$, zieht durch $P'$ eine Parallele, durch $N$ eine Senkrechte zu $AB$ und trägt von dem Durchschnitte $R$ beider Linien die Strecke $RP = R'P'$ ab. Nimmt man $A$ zum Anfang rechtwinkliger Koordinaten, $AB$ zur Abscissenachse, setzt den Kreisradius $MP = b$ und den sogenannten Wälzungswinkel $PMN = \omega$, so erhält man

$$x = b(\omega - \sin\omega), \quad y = b(1 - \cos\omega)$$

oder

$$x = b \operatorname{Arc}\cos\frac{b-y}{b} - \sqrt{2by - y^2},$$

wobei überhaupt $\operatorname{Arc}\cos z$ irgend einen der Bögen bezeichnet, welche $z$ zum Cosinus haben. Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Werte

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\omega}{1-\cos\omega} = \cot\tfrac{1}{2}\omega,$$

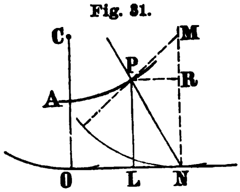
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{b(1-\cos\omega)^2} = -\frac{1}{4b\sin^4\frac{1}{2}\omega}.$$

Die Kurve besteht aus unendlich vielen kongruenten Zügen, welche die Abscissenachse in den Punkten $x = 0, \pm 2\pi b, \pm 4\pi b, \pm 6\pi b$, usw. rechtwinklig schneiden und an den Punkten $x = \pm\pi b, \pm 3\pi b, \pm 5\pi b$, usw., denen immer dieselbe Ordinate $2b$ entspricht, obere Kulminationspunkte besitzen; Inflexionspunkte sind nicht vorhanden. Zieht man noch den Durchmesser $NMT$, so ist $PT$ die Tangente, $PN$ die Normale der Kurve; der Krümmungsradius $PQ$ beträgt das Doppelte der Normale $PN$.

15. Die gedehnte und die verschlungene Cykloide (Fig. 31). Wie bei der vorigen Aufgabe denke man sich einen

Kreis auf einer Geraden rollend, nehme aber als beschreibenden Punkt einen nicht auf der Kreisperipherie liegenden Punkt, dessen

Fig. 31.




Abstand vom Kreismittelpunkt $= c$ sein möge. Die Anfangslage des Kreises sei diejenige, bei welcher die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes und des beschreibenden Punktes $A$ senkrecht auf der gegebenen Geraden steht und der Abstand des beschreibenden Punktes von dieser Geraden am kleinsten ist; die Basis nehmen wir zur Abscissenachse, ihren Durchschnitt mit $CA$ zum Koordinatenanfang. Es gelten dann folgende Gleichungen

$$x = b\omega - c \sin\omega, \quad y = b - c\cos\omega,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c \sin\omega}{b - c\cos\omega}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c\,(b\cos\omega - c)}{(b - c\cos\omega)^3},$$

bei deren Diskussion zwei Fälle unterschieden werden müssen.

Ist nämlich $c < b$ wie in Fig. 31, so heißt die Kurve eine gedehnte Cykloide. Dieselbe schneidet die Abscissenachse nicht und besitzt an den Stellen $x = 0, \pm\pi b, \pm 2\pi b, \pm 3\pi b$, usw. Kulminationspunkte, welche abwechselnd untere und obere Kulminationspunkte sind; dazwischen liegen Inflexionspunkte, deren $\omega$ durch die Gleichung $\cos\omega = \frac{c}{b}$ bestimmt werden, deren Abscissen mithin sind

$$x_i = b \operatorname{Arc} \cos\frac{c}{b} - \frac{c\sqrt{b^2 - c^2}}{b}.$$

Im Falle $c > b$ heißt die Kurve eine verschlungene Cykloide. Sie schneidet die Abscissenachse unendlich vielmal an den Stellen, wo $\cos\omega = \frac{b}{c}$ wird; sie besitzt ferner untere und obere Kulminationspunkte an denselben Stellen, wie die gedehnte Cykloide, dagegen sind Inflexionspunkte im eigentlichen Sinne nicht vorhanden. Für beide Cykloiden ist $PN$ die Normale; bezeichnet man sie mit $u$, so hat man für den Krümmungshalbmesser die Formel

$$\varrho = \frac{u^3}{c\,(b\cos\omega - c)},$$

welche leicht geometrisch konstruiert werden kann.

16. Die Epicykloiden. Auf der Außenseite eines unbeweglichen, mit dem Radius $OA = a$ beschriebenen Kreises (Fig. 32) rolle ein mit dem Halbmesser $b$ konstruierter Kreis; irgend ein Peripheriepunkt $P$ des letzteren Kreises beschreibt dann eine Epicykloide. Den Anfang der Bewegung denken wir uns so, daß der beschreibende Punkt mit dem Berührungspunkte $A$ beider Kreise zusammenfällt; nennen wir für irgend eine spätere Lage $N$ den Berührungspunkt beider Kreise, so ist immer $arc\, AN = arc\, NP$. Die Konstruktion der Kurve kommt daher in der Hauptsache darauf zurück, derartige gleiche Bögen zu finden. Wenn die beiden Kreishalbmesser in rationalem Verhältnisse stehen, so erreicht man dies leicht dadurch, daß man zwei ganze Zahlen $m$ und $n$ wählt, die sich wie $a$ zu $b$ verhalten und nachher den ruhenden Kreis in $m$, den beweglichen Kreis in $n$ Teile teilt. So ist in Fig. 33 $a:b = 3:2$, $m = 12$, $n = 8$, mithin $arc\, AH$, d. h. $\frac{1}{12}$ der Peripherie des ersten Kreises, $= arc\, AF = \frac{1}{8}$ der Peripherie des zweiten, ebenso $arc\, AN = 2\, arc\, AH = 2\, arc\, AF = arc\, NP$. Bei einem irrationalen Verhältnis von $a:b$ ist es für graphische Zwecke hinreichend, statt jenes Verhältnisses ein nahekommendes rationales Verhältnis zu setzen, welches man durch Abkürzung des unendlichen Dezimalbruches für $\frac{a}{b}$ oder besser durch Kettenbrüche erhält; so würde man im Falle $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ entweder $m = 14$, $n = 10$, oder genauer $m = 17$, $n = 12$ nehmen. Ein anderes Näherungsverfahren ist folgendes. Auf dem kleineren der beiden Kreise, welcher in Fig. 33 der rollende Kreis ist, nehme man den Bogen $AF$ willkürlich, jedoch höchstens gleich einem Achtel der Peripherie, ferner $AD$ gleich dem dreifachen Radius $AC$ und ziehe $DF$, welche Gerade die durch $A$ gelegte Kreistangente in $G$ schnede

Fig. 32.

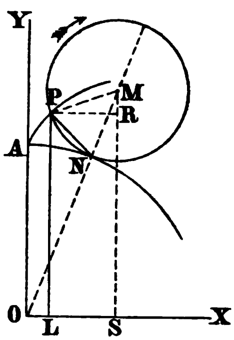
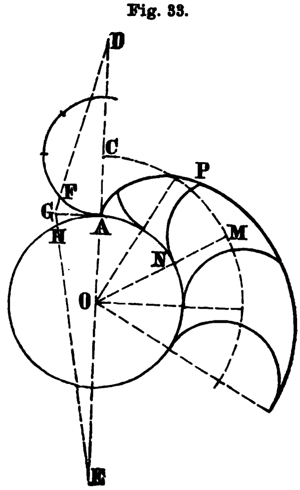



Fig. 33.



Strecke $AG$ kommt dann dem Bogen $AF$ sehr nahe und läßt sich nun wieder auf den anderen Kreis übertragen, indem man $AE = 3 \cdot AO$ nimmt und die Gerade $EG$ zieht, welche von dem zweiten Kreise den Bogen $AH = AG = AF$ abschneidet.* Hat man nach der einen oder anderen Methode die gleichen Bögen $AH$ und $AF$ konstruiert, so nimmt man auf der Peripherie des ruhenden Kreises $arc AN$ gleich einem beliebigen Vielfachen von $arc AH$, zieht $ONM = a + b$, beschreibt aus $M$ mit dem Radius $b$ einen Kreisbogen $NP$, welcher das Gleichvielfache von $arc AF$ ist; man kann auf diese Weise beliebig viele Kurvenpunkte $P$ konstruieren.

Wählt man $O$ zum Anfang rechtwinkliger Koordinaten, $OA$ zur Ordinatenachse und setzt den Wälzungswinkel $NMP = \omega$, so führt die Bemerkung, daß in Fig. 32 $\angle AON = \frac{b\omega}{a}$ und $\angle PMR = \omega + \frac{b\omega}{a}$ ist, zu folgenden Gleichungen

$$x = (a + b) \sin \frac{b\omega}{a} - b \sin \frac{(a + b)\omega}{a},$$

$$y = (a + b) \cos \frac{b\omega}{a} - b \cos \frac{(a + b)\omega}{a}.$$

In dem besonderen Falle, wo $\frac{b}{a}$ ein rationaler Bruch ist, wo sich also $b$ und $a$ zueinander verhalten wie die ganzen positiven Zahlen $n$ und $m$, kann $\omega$ aus den vorstehenden Gleichungen eliminiert werden. Für $\omega = m\varphi$ ist nämlich

$$x = (a + b) \sin n\varphi - b \sin (m + n)\varphi,$$

$$y = (a + b) \cos n\varphi - b \cos (m + n)\varphi,$$

und hier lassen sich die Sinus und Cosinus der Winkel $n\varphi$ und $(m + n)\varphi$ durch Potenzen der Sinus und Cosinus des einfachen Winkels $\varphi$ ausdrücken; die Elimination von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ hat nachher keine Schwierigkeit.

Ist z. B. $b = \frac{1}{2}a$ und wird $\omega = 2\varphi$ gesetzt, so hat man

$$x = \tfrac{1}{2}a(3 \sin\varphi - \sin 3\varphi) = 2a \sin^3\varphi,$$

$$y = \tfrac{1}{2}a(3 \cos\varphi - \cos 3\varphi) = a(2 \sin^2\varphi + 1) \cos\varphi,$$

mithin durch Elimination von $\varphi$

* Vgl. die Aufgabe Nr. 10 in § 42.

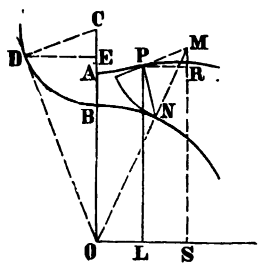
$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 = \tfrac{27}{4} a^4 x^2,$$

woraus hervorgeht, daß die auf Seite 103 unter Nr. 14 betrachtete Kurve eine Epicykloide ist.

In dem noch einfacheren Falle $b = a$ erhält man durch Elimination von $\varphi$ und mittelst der Koordinatenveränderung $x = y_1$, $y = a - x_1$

$$(x_1^2 + y_1^2 - 2 a x_1)^2 = 4 a^2 (x_1^2 + y_1^2),$$

Fig. 34.




woraus folgt, daß auch die Kardioide als eine Epicykloide betrachtet werden kann.

Um die Gleichungen der gedehnten und der verschlungenen Epicykloide zu finden, nehme man die Entfernung des beschreibenden Punktes $P$ vom Mittelpunkte $M$ des rollenden Kreises nicht $= b$, sondern $= c$; man erhält dann (Fig. 34)

$$x = (a + b) \sin \frac{b\omega}{a} - c \sin \frac{(a+b)\omega}{a},$$

$$y = (a + b) \cos \frac{b\omega}{a} - c \cos \frac{(a+b)\omega}{a},$$

wobei $c < b$ einer gedehnten, $c > b$ einer verschlungenen Epicykloide entspricht. Hinsichtlich der Elimination von $\omega$ gilt hier wieder die vorige Bemerkung.

Durch Differentiation der obigen Formeln ergeben sich die Werte

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b \sin \frac{b\omega}{a} - c \sin \frac{(a+b)\omega}{a}}{b \cos \frac{b\omega}{a} - c \cos \frac{(a+b)\omega}{a}} = \frac{a \sin \frac{b\omega}{a} - x}{y - a \cos \frac{b\omega}{a}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^3 + (a+b)c^2 - (a+2b)\, b\, c \cos\omega}{(a+b)\left(b \cos \frac{b\omega}{a} - c \cos \frac{(a+b)\omega}{a}\right)^3},$$

$$\varrho = \frac{(a+b)\sqrt{(b^2 - 2bc\cos\omega + c^2)^3}}{b(b^2 - 2bc\cos\omega + c^2) + ac(c - b\cos\omega)}.$$

Die Entfernung $OP = r$ wird am kleinsten für $\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$ usw., am größten für $\omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$ usw.; die Normale im Punkte $P$ geht immer durch den entsprechenden Berührungspunkt $N$ beider Kreise. Ein Zeichenwechsel von $\varrho$ tritt ein für

$$\cos\omega = \frac{b^2+(a+b)c^2}{(a+2b)bc}$$

oder

$$tg\,\tfrac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{(a+b)c-b^2}{(a+b)c+b^2}},$$

wozu entweder

$$b > c > \frac{b^2}{a+b}$$

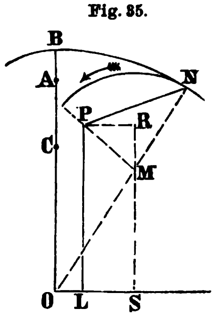
oder

$$b < c < \frac{b^2}{a+b}$$

notwendig ist. Da die letzte Ungleichung sich selber widerspricht, so können Zeichenwechsel von $\varrho$, d. h. Inflexionspunkte, bei der verschlungenen Epicykloide gar nicht, und bei der gedehnten Epicykloide nur dann vorkommen, wenn $c$ zwischen $\frac{b^2}{a+b}$ und $b$ enthalten ist. Die geometrische Bedeutung hiervon ergibt sich, wenn man von $O$ aus an den in seiner Anfangslage befindlichen rollenden Kreis die Tangente $OD$ legt und von $D$ auf $OC$ die Senkrechte $DE$ fällt; der beschreibende Punkt, dessen Anfangslage $A$ ist, muß dann zwischen $E$ und $B$ liegen. Aus dem Werte von $\varrho$ kann man leicht eine Konstruktion des Krümmungshalbmessers ableiten.

17. Die Hypocykloiden (Fig. 35). Auf der Innenseite eines festen mit dem Halbmesser $a$ beschriebenen Kreises rolle ein beweglicher Kreis mit dem Radius $b$; irgend ein Peripheriepunkt des letzteren Kreises beschreibt dann eine Hypocykloide. Liegt der beschreibende Punkt nicht in der Entfernung $b$, sondern in der Entfernung $c$ vom Mittelpunkte des beweglichen Kreises, so entsteht eine gedehnte oder verschlungene Hypocykloide, je nachdem $c < b$ oder $c > b$ ist. Aus der Figur erhält man leicht für $\angle NMP = \omega$

Fig. 35.




$$x = (a-b)\sin\frac{b\omega}{a} - c\sin\frac{(a-b)\omega}{a},$$

$$y = (a-b)\cos\frac{b\omega}{a} + c\cos\frac{(a-b)\omega}{a};$$

dieselben Gleichungen entstehen auch, wenn man in den für die Epicykloiden geltenden Formeln dem $b$ die entgegengesetzte Lage und dem $\omega$ die entgegengesetzte Drehungsrichtung gibt, also $b$, $c$ und $\omega$ zugleich negativ nimmt.

Auch hier gilt die Bemerkung, daß die Elimination von $\omega$ ausgeführt werden kann, sobald $\frac{b}{a}$ ein rationaler Bruch ist. So hat man z. B. für $c = b = \frac{3}{4}a$ und $\omega = 4\varphi$

$$x = \tfrac{1}{4}a(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi) = -a\sin^3\varphi,$$

$$y = \tfrac{1}{4}a(\cos 3\varphi + 3\cos\varphi) = +a\cos^3\varphi,$$

und durch Elimination von $\varphi$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

woraus hervorgeht, daß die Astroide zu den Hypocykloiden gehört.

Die Entwickelung der allgemeinen Eigenschaften der Hypocykloiden geschieht nach ganz ähnlichen Formeln wie bei den Epicykloiden.

In dem Falle $a < b$, wo sich der größere Kreis um den kleineren herumschwingt, nennen manche die Kurve eine Pericykloide; die nicht erheblichen Modifikationen, welche die Formeln dann erleiden, wird man ohne Mühe finden.

18. Ein Rotationskegel, dessen Mantellinien mit seiner Achse den Winkel $\alpha$ einschließen, werde von einer Ebene E geschnitten, welche mit jener Achse den Winkel $\beta$ bildet; dann entsteht auf dem Kegelmantel eine Schnittkurve, welche bekanntlich eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel wird, je nachdem $\alpha \lesseqgtr \beta$ ist. Es möge nun derjenige Punkt dieser Schnittkurve, dessen Entfernung von der Kegelspitze $O$ am kleinsten ist, mit $A$, ferner diejenige Mantellinie, welche auf der Kegeloberfläche der Geraden $OA$ gegenüberliegt, mit $m$ bezeichnet werden. Wenn dann der Kegelmantel längs der Geraden $m$ aufgeschnitten und in einer Ebene $\Pi$ ausgebreitet wird, so geht aus der vorhin genannten Kurve des Kegelmantels offenbar eine zur Geraden $OA$ symmetrische Kurve der Ebene $\Pi$ hervor. Diese Kurve soll untersucht werden.

Macht man in der Ebene $\Pi$ den Punkt $O$ zum Anfangspunkt (Pol) eines Polarkoordinatensystems und die Gerade $OA$ zur Polarachse, so kann die Gleichung der fraglichen Kurve

$$r = \frac{k}{1 + \lambda\cos\dfrac{\theta}{\sin\alpha}} \qquad \left(\lambda = \frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta}\right)$$

geschrieben werden, wobei $k$ eine konstante Strecke bedeutet, deren geometrische Bedeutung übrigens unschwer zu erkennen ist. Die Kurve ist im allgemeinen transzendent, wird jedoch algebraisch, wenn $\sin\alpha$ einen rationalen Wert hat; so gehen z. B., wenn der Mantel eines gleichseitigen Kegels, d. h. eines Kegels, dessen sämtliche Achsenschnitte gleichseitige Dreiecke sind, in der vorgeschlagenen Weise abgewickelt wird, aus allen ebenen Schnittkurven dieses Mantels algebraische Kurven IV. Ordnung hervor.

Solange $\lambda < 1$ (also $\alpha < \beta$) ist, verläuft die Kurve vollständig im Endlichen; sobald $\lambda > 1$ (also $\alpha > \beta$) ist, besitzt sie zwei zur Polarachse symmetrische Asymptoten; die Richtungen derselben bestimmen sich aus der Gleichung

$$\cos \frac{\theta}{\sin \alpha} = -\frac{1}{\lambda},$$

während die Abstände vom Punkte $O$ gleich $\dfrac{k \sin \alpha}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$ sind; letzteres erkennt man mit Hilfe der für die Polarsubtangente gültigen Formel

$$\frac{r^2}{r'} = \frac{k \sin \alpha}{\lambda \sin \frac{\theta}{\sin \alpha}}.$$

Um die Wendepunkte der Kurve — falls solche vorhanden sind — zu finden, bedenke man, daß die ihnen entsprechenden Werte von $\theta$ der Relation

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$$

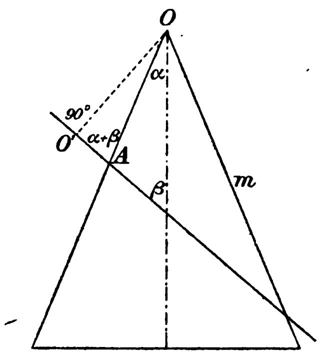
Genüge leisten müssen, in welcher $r, r', r''$ vermöge der obigen Kurvengleichung durch $\theta$ auszudrücken sind. Aus dieser Relation folgt aber

$$\cos \frac{\theta}{\sin \alpha} = tg\, \alpha\, tg\, \beta,$$

und hieraus ergibt sich weiter

$$r = k \cos^2 \alpha.$$

Fig. 36.




Diese Resultate lassen erkennen, daß die Kurve, solange

$$tg\, \alpha\, tg\, \beta > 1, \quad \text{also} \quad \alpha + \beta > 90^\circ$$

ist, keine Wendepunkte haben kann, daß sie hingegen, sobald

$$tg\, \alpha\, tg\, \beta < 1, \quad \text{also} \quad \alpha + \beta < 90^\circ$$

wird, zwei zur Polarachse symmetrische Wendepunkte besitzt. Ein Blick auf den durch die beiden Mantellinien $OA$ und $m$ gelegten Achsenschnitt unseres Kegels (Fig. 36) zeigt übrigens, daß der erste oder der zweite Fall eintritt, je nachdem das von der Kegelspitze $O$ auf die Schnittebene $\mathsf{E}$ gefällte Lot seinen Fußpunkt $O'$ innerhalb oder außerhalb des Kegels hat.

# Kapitel V.

## Aufgaben über geometrische Orte.

### § 17.

### Die Evoluten.

Sind $x$ und $y$ die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes und wird ferner zur Abkürzung

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y''$$

gesetzt, so werden die rechtwinkligen Koordinaten $\xi$ und $\eta$ des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes durch folgende Formeln bestimmt

$$\xi = x - \frac{1+y'^2}{y''} y', \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Alle Krümmungsmittelpunkte bilden zusammen eine Kurve, den geometrischen Ort des Krümmungsmittelpunktes, welche bei ebenen Kurven die Evolute der ursprünglichen Kurve heißt; ihre Gleichung erhält man aus den Formeln für $\xi$ und $\eta$, wenn man, unter Zuhilfenahme der zwischen $x$ und $y$ bestehenden ursprünglichen Kurvengleichung, die Variabeln $x$ und $y$ eliminiert, so daß nur die gesuchte Gleichung zwischen $\xi$ und $\eta$ übrig bleibt.

1. Die Parabel. Aus der Gleichung

$$y = \sqrt{2hx}$$

folgen die Werte

$$\xi = 3x + h, \quad \eta = -\sqrt{\frac{8x^3}{h}};$$

durch Elimination von $x$ ergibt sich als Gleichung der Evolute

$$27h\eta^2 = 8(\xi - h)^3$$

oder, wenn der Koordinatenanfang im Sinne der positiven $\xi$ um $h$ verschoben wird,

$$27h\eta^2 = 8\xi^3.$$

Die Evolute ist demnach eine semikubische Parabel.

2. Die Ellipse. Stellt man die Ellipsengleichung in der gewöhnlichen Form dar

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

und setzt zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a}, \quad \beta = \frac{a^2 - b^2}{b},$$

so erhält man als Gleichung der Evolute

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

oder in rationaler Form

$$\left(\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1\right)^3 + 27\left(\frac{\xi\eta}{\alpha\beta}\right)^2 = 0.$$

3. Die Hyperbel. Aus der Mittelpunktsgleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

folgt, wenn zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{a^2 + b^2}{a}, \quad \beta = \frac{a^2 + b^2}{b}$$

gesetzt wird,

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

oder in rationaler Form

$$\left(\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1\right)^3 - 27\left(\frac{\xi\eta}{\alpha\beta}\right)^2 = 0.$$

4. Die Cissoide. Die Gleichung dieser Kurve, nämlich

$$(2a - x)y^2 = x^3$$

liefert die Werte

$$\xi = -\frac{ax(12a - 5x)}{3(2a - x)^2}, \quad \eta = \frac{8a}{3}\sqrt{\frac{x}{2a - x}};$$

entnimmt man $x$ der zweiten Formel und substituiert den erhaltenen Ausdruck in die erste, so findet man als Gleichung der Evolute

$$4096\, a^3 \xi + 1152\, a^2 \eta^2 + 27\eta^4 = 0.$$

5. Für die Kurve, deren Gleichung ist

$$9ay^2 = (x - 3a)^2 x,$$

gelten die Werte

$$\xi = \frac{a^2 + 2ax - x^2}{2a}, \quad \eta = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}},$$

welche umgekehrt geben

$$x = a \pm \sqrt{2a(a - \xi)}, \quad x = \sqrt[3]{\tfrac{9}{16} a\eta^2}.$$

Beachtet man nun, daß eine Gleichung von der Form

$$a \pm \sqrt{u} = \sqrt[3]{v}$$

nach Wegschaffung der Wurzelgrößen übergeht in

$$(u - a^2)^3 + 2a(3u + a^2)v - v^2 = 0,$$

so erhält man als Gleichung der Evolute

$$256a(a - 2\xi)^3 + 288a(7a - 6\xi)\eta^2 - 81\eta^4 = 0.$$

6. Die Kardioide läßt sich entweder durch die eine der beiden Gleichungen

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2),$$
$$r = 2a(1 + \cos\theta)$$

oder auch durch die zwei Gleichungen

$$x = 2a(1 + \cos\theta)\cos\theta, \quad y = 2a(1 + \cos\theta)\sin\theta$$

ausdrücken. Die letzteren geben

$$\xi = \tfrac{4}{3}a + \tfrac{2}{3}a(1 - \cos\theta)\cos\theta, \quad \eta = \tfrac{2}{3}a(1 - \cos\theta)\sin\theta,$$

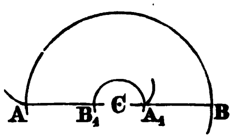
oder, wenn $\theta = \pi - \theta_1, \quad \tfrac{4}{3}a - \xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1$

gesetzt wird,

$$\xi_1 = \tfrac{2}{3}a(1 + \cos\theta_1)\cos\theta_1, \quad \eta_1 = \tfrac{2}{3}a(1 + \cos\theta_1)\sin\theta_1.$$

Die Gleichung der Evolute in rechtwinkligen Koordinaten würde man hieraus durch Elimination von $\theta_1$ erhalten, man übersieht aber auch ohne diese Elimination, daß die Evolute der Kardioide wieder eine Kardioide ist. Der Radius ihres erzeugenden Kreises beträgt $\frac{1}{3}a$, ihr Anfangspunkt $A_1$ liegt in der Entfernung $AA_1 = \frac{4}{3}a$ und die Drehungsrichtung der Evolute ist entgegengesetzt der Drehungsrichtung der gegebenen Kardioide (Fig. 37).

Fig. 37.




7. Die Lemniskate. Drückt man die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten aus, nämlich

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta},$$

so hat man die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes mittelst folgender Formeln zu bestimmen

$$\xi = r\cos\theta - \frac{(r^2 + r'^2)(r'\sin\theta + r\cos\theta)}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

$$\eta = r\sin\theta + \frac{(r^2 + r'^2)(r'\cos\theta - r\sin\theta)}{r^2 + 2r'^2 - rr''};$$

man erhält

$$\xi = \frac{2a\cos^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}, \quad \eta = -\frac{2a\sin^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

Als Gleichung der Evolute ergibt sich hieraus durch Elimination von $\theta$

$$\left(\xi^{\frac{2}{3}}+\eta^{\frac{2}{3}}\right)^2\left(\xi^{\frac{2}{3}}-\eta^{\frac{2}{3}}\right)=\tfrac{4}{9}a^2.$$

8. Die logarithmische Linie. Von der Gleichung

$$y=be^{\frac{x}{a}}$$

ausgehend erhält man

$$\xi=x-a-\frac{b^2}{a}e^{\frac{2x}{a}},\quad \eta=2be^{\frac{x}{a}}+\frac{a^2}{b}e^{-\frac{x}{a}};$$

mittelst der zweiten Gleichung kann man $e^{\frac{x}{a}}$ und $x$ durch $\eta$ ausdrücken und nach Substitution dieser Werte wird aus der ersten Gleichung

$$\xi=a\,lg\left(\frac{\eta\pm\sqrt{\eta^2-8a^2}}{4b}\right)-\frac{\eta\left(\eta\pm\sqrt{\eta^2-8a^2}\right)}{8a}-\tfrac{1}{2}a.$$

9. Die Kettenlinie. Aus der Gleichung

$$y=\tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

folgen die Werte

$$\xi=x-\tfrac{1}{4}a\left(e^{\frac{2x}{a}}-e^{-\frac{2x}{a}}\right),\quad \eta=a\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

welche geben

$$\xi=a\,lg\left(\frac{\eta\pm\sqrt{\eta^2-4a^2}}{2a}\right)\mp\frac{\eta\sqrt{\eta^2-4a^2}}{4a}.$$

10. Die Traktorie der Geraden. Mittelst der Gleichung

$$x=\tfrac{1}{2}a\,lg\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{a-\sqrt{a^2-y^2}}\right)-\sqrt{a^2-y^2}$$

erhält man die Werte

$$\xi=\tfrac{1}{2}a\,lg\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{a-\sqrt{a^2-y^2}}\right),\quad \eta=\frac{a^2}{y},$$

mithin durch Elimination von $y$

$$\xi=\tfrac{1}{2}a\,lg\left(\frac{\eta+\sqrt{\eta^2-a^2}}{\eta-\sqrt{\eta^2-a^2}}\right)=a\,lg\left(\frac{\eta+\sqrt{\eta^2-a^2}}{a}\right),$$

oder

$$\eta=\tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{\xi}{a}}+e^{-\frac{\xi}{a}}\right);$$

die Evolute ist also eine Kettenlinie.

11. Die logarithmische Spirale. Die Gleichung

$$r = a e^{\beta \theta}$$

liefert, wenn $\xi$ und $\eta$ durch Polarkoordinaten ausgedrückt werden,

$$\xi = -a\beta e^{\beta\theta} \sin\theta, \quad \eta = a\beta e^{\beta\theta} \cos\theta.$$

Um auch die Gleichung der Evolute in Polarkoordinaten zu haben, sei

$$\xi = R \cos\tau, \quad \eta = R \sin\tau;$$

es ergibt sich dann

$$R = a\beta e^{\beta\left(\tau - \frac{1}{2}\pi\right)};$$

wird noch $\tau = \omega + \frac{1}{2}\pi$ gesetzt, so folgt, daß die Evolute der logarithmischen Spirale wieder eine logarithmische Spirale ist, bei welcher $a\beta$ statt $a$ eintritt.

Zufolge der auf Seite 123 gemachten Anmerkung ist die neue Spirale kongruent mit der ursprünglichen und kann mit ihr durch eine Drehung um den Pol des Koordinatensystems zur Deckung gebracht werden.

12. Die Cykloiden. Für die gemeine Cykloide gelten die Gleichungen

$$x = b(\omega - \sin\omega), \quad y = b(1 - \cos\omega),$$

aus welchen man erhält

$$\xi = b(\omega + \sin\omega), \quad \eta = -b(1 - \cos\omega).$$

Setzt man $\omega = \pi - \omega_1$ und geht hierauf mittelst der Formeln

$$\xi = \pi b - \xi_1, \quad \eta = \eta_1 - 2b$$

zu einem neuen Koordinatensystem über, so gelangt man zu den neuen Gleichungen

$$\xi_1 = b(\omega_1 - \sin\omega_1), \quad \eta_1 = b(1 - \cos\omega_1),$$

welche zeigen, daß die Evolute mit der ursprünglichen Cykloide kongruent und nur der Lage nach von ihr verschieden ist.

Für die Epicykloide hat man die Gleichungen

$$x = (a + b) \sin\frac{b\omega}{a} - b \sin\frac{(a+b)\omega}{a},$$

$$y = (a + b) \cos\frac{b\omega}{a} - b \cos\frac{(a+b)\omega}{a}$$

und erhält aus denselben

$$\xi = \frac{a(a+b)}{a+2b} \sin\frac{b\omega}{a} + \frac{ab}{a+2b} \sin\frac{(a+b)\omega}{a},$$

$$\eta = \frac{a(a+b)}{a+2b} \cos\frac{b\omega}{a} + \frac{ab}{a+2b} \cos\frac{(a+b)\omega}{a}.$$

Vertauscht man das Koordinatensystem der $\xi$, $\eta$ mit einem anderen gleichfalls rechtwinkligen Systeme der $\xi_1$, $\eta_1$, welches denselben Anfang hat und dessen Abscissenachse mit der Achse der $\xi$ den Winkel $\gamma$ einschließt, so hat man bekanntlich

$$\xi = \xi_1 \cos\gamma - \eta_1 \sin\gamma, \quad \eta = \xi_1 \sin\gamma + \eta_1 \cos\gamma$$

oder umgekehrt

$$\xi_1 = \eta \sin\gamma + \xi \cos\gamma, \quad \eta_1 = \eta \cos\gamma - \xi \sin\gamma,$$

mithin vermöge der Werte von $\xi$ und $\eta$

$$\xi_1 = \frac{a(a+b)}{a+2b} \sin\left(\frac{b\omega}{a} + \gamma\right) + \frac{ab}{a+2b} \sin\left(\frac{(a+b)\omega}{a} + \gamma\right),$$

$$\eta_1 = \frac{a(a+b)}{a+2b} \cos\left(\frac{b\omega}{a} + \gamma\right) + \frac{ab}{a+2b} \cos\left(\frac{(a+b)\omega}{a} + \gamma\right).$$

Es sei noch

$$\gamma = -\pi\frac{b}{a}, \quad \omega = \pi + \omega_1,$$

$$\frac{a^2}{a+2b} = a_1, \quad \frac{ab}{a+2b} = b_1, \quad \text{also} \quad \frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1};$$

die vorigen Gleichungen werden dann

$$\xi_1 = (a_1 + b_1) \sin\frac{b_1\omega_1}{a_1} - b_1 \sin\frac{(a_1+b_1)\omega_1}{a_1},$$

$$\eta_1 = (a_1 + b_1) \cos\frac{b_1\omega_1}{a_1} - b_1 \cos\frac{(a_1+b_1)\omega_1}{a_1},$$

woraus hervorgeht, daß die Evolute einer Epicykloide immer wieder eine Epicykloide ist, bei welcher die Radien des festen und des rollenden Kreises in demselben Verhältnis stehen, wie bei der ursprünglichen Kurve.

Nimmt man z. B. die Radien $a$ und $b$ gleich, so ist die ursprüngliche Kurve eine Kardioide, ebenso ist auch die Evolute eine Kardioide; und zwar ist für dieselbe $a_1 = b_1 = \frac{1}{3} a$ (vgl. Aufgabe 6).

Für die Hypocykloide gelten ganz ähnliche Formeln, aus denen der analoge Satz folgt, daß die Evolute eine mit den Radien

$$a_1 = \frac{a^2}{a-2b}, \quad b_1 = \frac{ab}{a-2b}$$

konstruierte Hypocykloide ist.

18. Die in § 15, Aufgabe 18 untersuchte Kurve konnte entweder durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + \tfrac{27}{4} a^2 x^4 = 0$$

oder durch die beiden Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2} a \cos^3 \psi, \quad y = \tfrac{1}{2} a (2 + \cos^2 \psi) \sin \psi$$

dargestellt werden. Aus den letzteren ergibt sich

$$\xi = -a \cos^3 \psi, \quad \eta = + a \sin^3 \psi,$$

woraus durch Elimination von $\psi$

$$\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

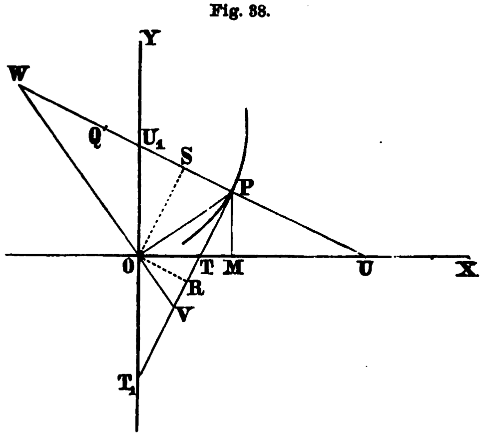
folgt. Die Evolute der in Rede stehenden Kurve ist hiernach eine Astroide.

## § 18.

## Die Endpunkte der Polartangenten und Polarnormalen.

I. Bezeichnen $u$ und $v$ die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes $V$ in Fig. 38, welcher der Endpunkt der Polartangente ist, so hat man

Fig. 38.




$$u = -\frac{y(y - xy')}{x + yy'},$$

$$v = \frac{x(y - xy')}{x + yy'};$$

unter Zuhilfenahme der Gleichung der Kurve kann man aus diesen Gleichungen $x$ und $y$ eliminieren, so daß nur eine Gleichung zwischen $u$ und $v$ übrig bleibt, welche den geometrischen Ort des Punktes $V$ bestimmt.

1. Für die **Ellipse** ergeben sich, wenn man von der Mittelpunktsgleichung

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

ausgeht, die Werte

$$u = -\frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2)x}, \quad v = \frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2)y},$$

mithin durch Elimination von $x$ und $y$

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab} u v\right)^2.$$

Bei der Hyperbel gestaltet sich die Gleichung ähnlich.

2. Nimmt man den Scheitel eines Kegelschnittes zum Koordinatenanfang und demgemäß

$$y = \sqrt{2hx + kx^2},$$

so erhält man

$$u = -\frac{hx}{h + (1+k)x}, \quad v = \frac{hx^2}{[h + (1+k)x]y},$$

folglich

$$v^2 = -\frac{u^3}{2h + (2+k)u}.$$

Die semikubische Parabel und die Cissoide sind spezielle Fälle dieser Kurve.

3. Ist ein Brennpunkt eines Kegelschnittes der Koordinatenanfang, mithin

$$y = \sqrt{h^2 - 2h\varepsilon x + (\varepsilon^2 - 1)x^2},$$

so wird

$$u = \frac{h}{\varepsilon}, \quad v = -\frac{hx}{\varepsilon y}.$$

Der geometrische Ort des Endpunktes der Polartangente ist dann eine Parallele zur Ordinatenachse und zwar die Direktrix des Kegelschnittes.

4. Falls die Gleichung der ursprünglichen Kurve in Polarkoordinaten gegeben ist, treten an die Stelle der vorigen allgemeinen Formeln für $u$ und $v$ die folgenden

$$u = \frac{r^2}{r'} \sin\theta, \quad v = -\frac{r^2}{r'} \cos\theta,$$

aus welchen dann unter Zuhilfenahme der Polargleichung der gegebenen Kurve eine Gleichung zwischen $u$ und $v$ hergeleitet werden muß.

Für die **reziproke parabolische Spirale** hat man z. B.

$$r^2 = \frac{a^2}{\theta},$$

$$u = -2a\sqrt{\theta}\cdot \sin\theta, \quad v = +2a\sqrt{\theta}\cdot\cos\theta$$

$$u^2 + v^2 = 4a^2\theta,$$

woraus hervorgeht, daß die Endpunkte der Polartangenten in einer parabolischen Spirale liegen.

5. Die Gleichung

$$r = \frac{h}{\theta + \varepsilon \sin\theta}$$

charakterisiert eine Kurve, von welcher die hyperbolische Spirale ein besonderer Fall ist; man erhält

$$u = -\frac{h \sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}, \quad v = +\frac{h\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta},$$

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{h}{1+\varepsilon\cos\theta}\right)^2.$$

Der geometrische Ort des Endpunktes der Polartangente ist in diesem Falle ein Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt mit dem Koordinatenanfange zusammenfällt, und dessen Hauptachse in der Ordinatenachse liegt.

II. Bezeichnen $u$ und $v$ die rechtwinkligen Koordinaten des Endpunktes $W$ der Polarnormale, so gelten die Formeln

$$u = \frac{y(x+yy')}{y-xy'}, \quad v = -\frac{x(x+yy')}{y-xy'};$$

unter Zuziehung der Gleichung der Kurve lassen sich $x$ und $y$ eliminieren, so daß eine Gleichung zwischen $u$ und $v$ übrig bleibt, welche den geometrischen Ort des Endpunktes der Polarnormale bestimmt.

6. Aus der Mittelpunktsgleichung der **Ellipse** folgen die Werte

$$u = \frac{(a^2-b^2)xy^2}{a^2b^2}, \quad v = -\frac{(a^2-b^2)x^2y}{a^2b^2},$$

welche geben

$$(a^2u^2 + b^2v^2)^3 = a^2b^2(a^2-b^2)^2u^2v^2.$$

Für die **Hyperbel** gestaltet sich die Gleichung ähnlich.

7. Legt man bei irgend einem Kegelschnitte den Koordinatenanfang in den Scheitel, so hat man

$$u = \frac{2h + kx}{h}[h + (1 + k)x],$$

$$v = -\frac{\sqrt{2hx + kx^2}}{h}[h + (1 + k)x].$$

Die Kombination

$$\frac{u}{v} = -\sqrt{\frac{2h + kx}{x}}$$

dient hier, um $x$ durch $u$ und $v$ auszudrücken; setzt man den so erhaltenen Wert in eine der vorhergehenden Gleichungen ein, so gelangt man zu dem Resultate

$$(u^2 - kv^2)^2 = 2hu[u^2 + (2 + k)v^2].$$

8. Falls die ursprüngliche Kurve auf Polarkoordinaten bezogen ist, hat man

$$u = -r' \sin\theta, \quad v = +r' \cos\theta,$$

woraus eine Gleichung zwischen $u$ und $v$ herzuleiten ist.

Bei der Kardioide, deren Gleichung

$$r = 2a(1 + \cos\theta)$$

sein möge, gelten die Werte

$$u = 2a\sin^2\theta, \quad v = -2a\sin\theta\cos\theta,$$

welche geben

$$v^2 = 2au - u^2;$$

der geometrische Ort des Endpunktes der Polarnormale ist hier der Kreis, welcher zur Konstruktion der Kardioide dient.

9. Für die Kurve, deren Gleichung ist

$$r = a\,tg\tfrac{1}{2}\theta,$$

erhält man als Gleichung des geometrischen Ortes von $W$

$$u^2 + 2av = a^2;$$

letzterer ist also eine Parabel.

10. Für die Kurve, deren Gleichung ist

$$r = a\,lg\cot\tfrac{1}{2}\theta,$$

findet man

$$u = a, \quad v = -a \cot \theta;$$

der gesuchte Ort besteht hier aus einer Parallelen zur Ordinatenachse.

Anmerkung. Bemerkenswerte Resultate ergeben sich, wenn man die unter I. und II. gegebenen Regeln auf diejenige Kategorie von Kurven anwendet, bei denen $r$ proportional der $n^{\text{ten}}$ Potenz von $\theta$ ist, wobei $n$ eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl bedeutet. Zu diesen Kurven gehört u. a. die Spirale des Archimedes ($n = 1$), die parabolische Spirale $\left(n = \frac{1}{2}\right)$, der Kreis ($n = 0$), der Lituus $\left(n = -\frac{1}{2}\right)$ und die hyperbolische Spirale ($n = -1$).

Wenn eine Kurve der in Rede stehenden Kategorie angehört, also etwa durch die Gleichung

$$r = a \cdot \theta^n$$

dargestellt wird, so ergibt sich als Gleichung für den geometrischen Ort des Endpunktes der Polartangenten die Relation

$$r = \frac{a}{n} \cdot \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)^{n+1},$$

hingegen als Gleichung für den geometrischen Ort des Endpunktes der Polarnormalen die Relation

$$r = na \cdot \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^{n-1}.$$

Aus der Form dieser beiden Gleichungen aber geht hervor, daß beide geometrische Orte wiederum Kurven der obigen Kategorie sind; denn offenbar ist der erste geometrische Ort kongruent mit der durch die Gleichung

$$r = \frac{a}{n} \cdot \theta^{n+1},$$

der zweite geometrische Ort hingegen mit der durch die Gleichung

$$r = na \cdot \theta^{n-1}$$

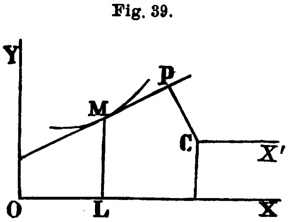
dargestellten Kurve.

## § 19.

### Die Fußpunktkurven.

Läßt man von einem festen Punkte $C$ (Fig. 39) Senkrechte auf alle Tangenten einer gegebenen Kurve herab, so bilden die Fußpunkte $P$ jener Perpendikel eine neue Linie, deren Gleichung auf folgende Weise gefunden wird.

Fig. 39.




Bezeichnen $g$, $h$ die rechtwinkligen Koordinaten des sogenannten Poles $C$, $x$ und $y$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes $M$ der gegebenen Kurve, $u$ und $v$ die Koordinaten des entsprechenden Fußpunktes $P$, so gelten für letztere die Gleichungen

$$v - y = y'(u - x), \quad v - h = -\frac{1}{y'}(u - g),$$

woraus z. B. folgt

$$u - g = \frac{(x-g)y'^2 - (y-h)y'}{1+y'^2},$$

$$v - h = -\frac{(x-g)y' - (y-h)}{1+y'^2}.$$

Unter Zuhilfenahme der zwischen $x$ und $y$ bestehenden Gleichung lassen sich aus irgend zweien der obigen vier Gleichungen $x$ und $y$ eliminieren; die übrigbleibende Gleichung zwischen $u$ und $v$ bestimmt die Natur der Fußpunktkurve.

1. Die Parabel. Von der Gleichung ausgehend

$$y^2 = 4ax$$

kann man die zwei ersten Gleichungen zwischen $u$ und $v$ folgendermaßen darstellen:

$$yv = 2au + \tfrac{1}{2}y^2, \quad 2a(v - h) = -y(u - g);$$

man erhält dann durch Elimination von $y$

$$u(u-g)^2 + (u-g)(v-h)v + a(v-h)^2 = 0.$$

Wird der Brennpunkt zum Pol genommen, so ergibt sich einfach $u = 0$, d. h. die Scheiteltangente ist dann die Fußpunktlinie; im Fall der Parabelscheitel zum Pol genommen wird, geht die Fußpunktkurve in eine Cissoide über.

2. Ellipse und Hyperbel. Die Gleichung der Ellipse sei

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1;$$

die beiden ersten Gleichungen zwischen $u$ und $v$ lauten dann

$$b^2ux + a^2vy = a^2b^2, \quad b^2(v-h)x - a^2(u-g)y = 0.$$

Bestimmt man hieraus $x$ und $y$, und setzt die gefundenen Ausdrücke in die Ellipsengleichung ein, so erhält man

$$[u(u-g) + v(v-h)]^2 = a^2(u-g)^2 + b^2(v-h)^2.$$

Diese Gleichung der Fußpunktkurve läßt sich etwas einfacher darstellen, wenn der Pol $C$ zum Anfang eines Polarkoordinatensystems genommen wird, dessen Achse $CX'$ parallel zur $x$-Achse liegt und worin die Senkrechte $CP = p$ der Radiusvektor und $\angle X'CP = \chi$ der Polarwinkel ist; es ergibt sich

$$(p + g\cos\chi + h\sin\chi)^2 = a^2\cos^2\chi + b^2\sin^2\chi.$$

Nimmt man einen Brennpunkt der Ellipse zum Pol, so wird die Fußpunktkurve ein Kreis; liegt der Pol im Ellipsenmittelpunkte, so entsteht die auf Seite 106, Aufgabe 17 betrachtete Kurve. Für $b = a$, $g = -a$, $h = 0$ geht die Fußpunktkurve in eine Kardioide über.

Um die entsprechenden Formeln für die Hyperbel zu erhalten, bedarf es nur der Vertauschung von $b^2$ mit $-b^2$. In dem speziellen Falle, wo die Hyperbel eine gleichseitige ist und ihr Mittelpunkt zum Pol genommen wird, ergibt sich

$$p^2 = a^2 \cos 2\chi;$$

die Fußpunktkurve ist dann eine Lemniskate.

3. Die semikubische Parabel. Die Gleichung der Kurve sei

$$y = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}},$$

ferner $g = -\frac{1}{3}a$, $h = 0$; für $u$ und $v$ gelten dann die Gleichungen

$$v = (u - \tfrac{1}{3}x)\sqrt{\frac{x}{a}}, \quad v = -(u + \tfrac{1}{3}a)\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Substituiert man den Wert von $x$ aus der zweiten Gleichung in das Produkt beider Gleichungen, so erhält man

$$v^4 + u(u + \tfrac{1}{3}a)v^2 - \tfrac{1}{3}a(u + \tfrac{1}{3}a)^3 = 0,$$

oder

$$[v^2 + (u + \tfrac{1}{3}a)^2][v^2 - \tfrac{1}{3}a(u + \tfrac{1}{3}a)] = 0;$$

der erste Faktor kann nur für einen isolierten Punkt verschwinden, die Fußpunktkurve hat daher zur Gleichung

$$v^2 = \tfrac{1}{3}a(u + \tfrac{1}{3}a)$$

und ist demgemäß eine Parabel.

4. Die ursprüngliche Kurve sei bestimmt durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0;$$

um Weitläufigkeiten zu entgehen, ersetze man diese Gleichung durch die beiden Gleichungen (Seite 102, Aufg. 12)

$$x = a \cos^3 \omega, \quad y = a \sin^3 \omega,$$

drücke dementsprechend $u$ und $v$ durch $\omega$ aus und eliminiere schließlich $\omega$. Wegen $y' = -tg\,\omega$ gehen die Gleichungen für $u$ und $v$ in die folgenden über

$$u \sin\omega + v \cos\omega = a \sin\omega \cos\omega, \quad v - h = (u - g) \cot\omega,$$

aus denen sich ergibt

$$u(u-g) + v(v-h) = \frac{a(u-g)(v-h)}{\sqrt{(u-g)^2 + (v-h)^2}},$$

oder in Polarkoordinaten, welche ebenso wie bei der vorletzten Aufgabe zu wählen sind,

$$p = a \cos\chi \sin\chi - (g \cos\chi + h \sin\chi).$$

5. Am einfachsten gestalten sich die Formeln, wenn man gleich anfangs den Pol zum Anfangspunkte von Polarkoordinaten wählt und demgemäß substituiert

$$g = 0, \quad h = 0,$$

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad u = p\cos\chi, \quad v = p\sin\chi;$$

die allgemeinen Gleichungen gehen dann über in

$$[r\cos(\theta - \chi) + r'\sin(\theta - \chi)]\,p = r^2, \quad r' = r\,tg(\theta - \chi)$$

oder, wenn man $r'$ aus der zweiten Gleichung in die erste substituiert,

$$p = r\cos(\theta - \chi), \quad r' = r\,tg(\theta - \chi),$$

wie man auch direkt mittelst einer einfachen geometrischen Betrachtung findet.

Als Beispiel mögen die Kurven dienen, welche durch die Gleichung

$$r^m = a^m \cos m\theta$$

repräsentiert werden und zu denen u. a. die gleichseitige Hyperbel ($m = -2$), die Parabel ($m = -\frac{1}{2}$), die Kardioide ($m = +\frac{1}{2}$), der Kreis ($m = +1$) und die Lemniskate ($m = +2$) gehören. Die allgemeinen Gleichungen sind hier

$$p = a(\cos m\theta)^{\frac{1}{m}} \cos(\theta - \chi), \quad tg\, m\theta = tg(\chi - \theta);$$

aus der letzten Gleichung folgt $\theta = \frac{\chi}{m+1}$ und nachher aus der ersten

$$p^n = a^n \cos n\chi, \quad n = \frac{m}{m+1}.$$

Die Fußpunktkurve ist hier von derselben Gattung wie die ursprüngliche Kurve; der gleichseitigen Hyperbel z. B. entspricht die Lemniskate.

Die soeben betrachteten Kurven sind als **Sinusspiralen** bezeichnet worden; sie zeichnen sich noch durch eine Reihe weiterer interessanter

Eigenschaften aus. — Vergleiche den Artikel von Scheffers „*Besondere transzendente Kurven*“ in der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften;* ferner Gino Loria, *Spezielle ebene Kurven* (18. Kapitel des V. Abschnitts).

6. Die logarithmische Spirale. Aus der Gleichung

$$r = ae^{\beta\theta}$$

erhält man

$$p = ae^{\beta\theta}\cos(\theta - \chi), \quad \beta = tg(\theta - \chi),$$

mithin durch Substitution von $\theta$ aus der zweiten Gleichung in die erste

$$p = a_1 e^{\beta\chi}, \quad a_1 = \frac{a}{\sqrt{1+\beta^2}}\, e^{\beta \operatorname{arctg} \beta};$$

die Fußpunktkurve ist also wieder eine logarithmische Spirale.

Aus einer früheren Anmerkung (Seite 123) geht übrigens hervor, daß die neue Spirale der ursprünglichen kongruent ist und mit ihr durch eine Drehung um den Pol des Koordinatensystems zur Deckung gebracht werden kann.

7. Die Kreisevolvente. Wenn die Kurve durch die beiden Gleichungen

$$r = a\sqrt{1 + \omega^2}, \quad \theta = \omega - \operatorname{arc} tg\, \omega$$

repräsentiert wird, so hat man

$$p = a\sqrt{1 + \omega^2}\cdot\cos(\theta - \chi), \quad tg(\theta - \chi) = \frac{1}{\omega};$$

die letztere Gleichung gibt einerseits

$$\cos(\theta - \chi) = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}},$$

anderseits

$$\theta - \chi = \operatorname{arc} tg \frac{1}{\omega}$$

oder

$$\omega - \operatorname{arc} tg\, \omega - \chi = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arc} tg\, \omega, \quad \omega = \tfrac{1}{2}\pi + \chi,$$

mithin ist nach Substitution der Werte von $\cos(\theta - \chi)$ und $\omega$

$$p = a(\tfrac{1}{2}\pi + \chi).$$

Die Fußpunktkurve ist also eine archimedische Spirale.

## § 19a.

### Weitere Aufgaben über geometrische Orte.

Im gegenwärtigen Kapitel sind vier verschiedene Gesetze aufgestellt worden, welche dazu dienten, aus jeder ebenen Kurve $c$ eine gewisse andere ebene Kurve $c_1$ entstehen zu lassen. In § 17 war die neue Kurve $c_1$ die Evolute der ursprünglichen Kurve $c$, in § 18 I und II hingegen der geometrische Ort für die Endpunkte ihrer Polartangenten resp. Polarnormalen, in § 19 endlich bildete $c_1$ die Fußpunktkurve von $c$ in bezug auf einen gegebenen festen Pol. In allen vier Fällen trat das für die Entstehung der Kurve $c_1$ aus der Kurve $c$ maßgebende Gesetz zunächst in geometrischem Gewande auf, wurde aber nachher analytisch eingekleidet; und zwar ergaben sich als analytisches Äquivalent des betreffenden Gesetzes jedesmal zwei Gleichungen, welche die Koordinaten $x_1 y_1$ des laufenden Punktes $P_1$ der Kurve $c_1$ als Funktionen der Koordinaten $xy$ des laufenden Punktes $P$ der Kurve $c$ und der Ableitungen $y'$, $y''$, ... von $y$ nach $x$ ausdrückten, also zwei Gleichungen von der Form

$$x_1 = \Phi(x, y, y', y'', \ldots), \quad y_1 = \Psi(x, y, y', y'', \ldots).^*$$

Nun bezeichnet man ein Gesetz, durch welches jeder Linie der Ebene eine gewisse andere Linie der Ebene zugeordnet wird, als eine Transformation der Ebene. Infolgedessen können wir sagen: In den vorangehenden Paragraphen sind vier verschiedene Transformationen der Ebene, welche zunächst auf geometrischem Wege definiert wurden, analytisch aber durch je zwei Gleichungen von obiger Form charakterisiert werden konnten, zur Erzeugung von Kurven verwendet worden.

Im folgenden sollen einige weitere derartige Transformationen eingeführt und gleichfalls zur Erzeugung ebener Kurven benutzt werden. Für die Reihenfolge dieser Transformationen aber wird die Beschaffenheit der in den entsprechenden Gleichungen auftretenden Ausdrücke $\Phi(x, y, y', y'', \ldots)$ und $\Psi(x, y, y', y'', \ldots)$ maßgebend sein.**

An erster Stelle wird es sich um einige Transformationen handeln, die so beschaffen sind, daß in den Ausdrücken $\Phi$ und $\Psi$ die Ableitungen $y'$, $y''$, ... gänzlich fehlen, daß also die entsprechenden Gleichungen

$$\text{A)} \qquad x_1 = \Phi(x, y), \quad y_1 = \Psi(x, y)$$

geschrieben werden können. Eine derartige Transformation hat die Eigenschaft, jedem einzelnen Punkt $P$ wieder einen einzelnen Punkt $P_1$ zuzuordnen; jeder Kurve $c$ durch $P$ entspricht eine Kurve $c_1$ durch $P_1$; berühren sich insbesondere zwei Kurven $c$ und $k$ in $P$, so berühren sich auch die entsprechenden Kurven $c_1$ und $k_1$ in $P_1$. Transformationen dieser Art werden als Punkttransformationen bezeichnet.

---

* Betreffs der Bezeichnungen sei erwähnt, daß an Stelle von $x_1$ und $y_1$ in § 17 die Buchstaben $\xi$ und $\eta$, in § 18 und § 19 aber die Buchstaben $u$ und $v$ verwendet worden sind.

** Daß übrigens zwei Gleichungen von der angegebenen Form, falls sich nicht etwa die sämtlichen Größen $x$, $y$, $y'$, $y''$, ... aus ihnen eliminieren lassen, stets eine Transformation der Ebene definieren, kann leicht eingesehen werden; ist $y = f(x)$ die Gleichung irgend einer Kurve $c$, so ergibt sich durch Elimination von $x$ aus den beiden Relationen

$$x_1 = \Phi(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots), \quad y_1 = \Psi(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots)$$

die Gleichung der entsprechenden Kurve $c_1$.

An zweiter Stelle werden einige Transformationen in Betracht kommen, welche so beschaffen sind, daß die entsprechenden Ausdrücke $\Phi$ und $\Psi$ außer $x$ und $y$ noch die erste Ableitung von $y$ nach $x$ enthalten, von den höheren Ableitungen hingegen frei sind, daß also die in Frage kommenden Gleichungen sich

$$\text{B)} \qquad x_1 = \Phi(x, y, y'), \quad y_1 = \Psi(x, y, y')$$

schreiben lassen; von dieser Art waren die drei in den §§ 18—19 benutzten Transformationen. Derartige Transformationen ordnen einem einzelnen Punkte $xy$ niemals wieder einen einzelnen Punkt zu [sondern vielmehr eine Kurve, deren Gleichung — geschrieben in den laufenden Koordinaten $x_1 y_1$ — durch Elimination von $y'$ aus den beiden Relationen B) erhalten werden kann]; jedoch haben manche unter ihnen die Eigenschaft, zwei einander berührenden Kurven $c$ und $k$ stets wieder zwei einander berührende Kurven $c_1$ und $k_1$ zuzuordnen. Transformationen, welche diese letztere Eigenschaft besitzen, werden Berührungstransformationen genannt. Zu ihnen gehört die in § 19 zur Erzeugung der Fußpunktkurven verwendete sogenannte Fußpunkttransformation. Näheres siehe im folgenden unter IV.

An dritter Stelle endlich soll eine Transformation benutzt werden, welche so beschaffen ist, daß die Ausdrücke $\Phi$ und $\Psi$ außer $y'$ auch noch $y''$ enthalten, daß also die entsprechenden Gleichungen die Form

$$\text{C)} \qquad x_1 = \Phi(x, y, y', y''), \quad y_1 = \Psi(x, y, y', y'')$$

besitzen, wie dies der Fall war bei der in § 17 zur Erzeugung der Evoluten verwendeten Transformation. Eine Transformation dieser Art wird weder jedem einzelnen Punkte wieder einen einzelnen Punkt, noch zwei einander berührenden Kurven wieder zwei einander berührende Kurven zuordnen können.

I. Von dem festen Zentrum $O$ aus werde nach jedem Punkt $P$ einer gegebenen Kurve $c$ eine gerade Linie gezogen und auf derselben ein Punkt $P_1$ derart bestimmt, daß die beiden Vektoren $OP$ und $OP_1$ gleichgerichtet sind und das konstante Produkt $k^2$ ergeben ($k$ ist eine Strecke von gegebener Länge); dann wird als geometrischer Ort des Punktes $P_1$ eine neue Kurve $c_1$ entstehen. Da hiernach jeder Linie $c$ der Ebene eine gewisse andere Linie $c_1$ zugeordnet ist, so wird durch die obigen Festsetzungen eine Transformation der Ebene definiert; und zwar handelt es sich, da jedem einzelnen Punkte $P$ offenbar wieder ein einzelner Punkt $P_1$ entspricht, um eine Punkttransformation. Dieselbe wird als die Transformation durch reziproke Radien (oder auch als Kreisinversion) bezeichnet. Um diese Transformation analytisch darzustellen, empfiehlt es sich, den festen Punkt $O$ zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, oder — was noch bequemer ist — zum Pol eines Polarkoordinatensystems zu machen; die Gleichungen der Transformation lauten im ersten Fall

$$x_1 = x\frac{k^2}{x^2+y^2}, \quad y_1 = y\frac{k^2}{x^2+y^2},$$

im zweiten Fall hingegen

$$r_1 = \frac{k^2}{r}, \quad \theta_1 = \theta.$$

Eine besondere Rolle spielt bei dieser Transformation der mit dem Radius $k$ um das Zentrum $O$ beschriebene Kreis, der sogenannte Bezugskreis. Liegt $P$ auf diesem Kreise, so fällt $P_1$ mit $P$ zusammen; liegt $P$ innerhalb des Kreises, so liegt $P_1$ außerhalb und umgekehrt; in jedem Falle ist $P_1$ derjenige Punkt, in welchem die Polare des Punktes $P$ in bezug auf jenen Kreis von der Geraden $OP$ geschnitten wird. Eine weitere Eigentümlichkeit der in Rede stehenden Transformation besteht darin, daß zwischen der ursprünglichen und der neuen Figur stets Kreisverwandtschaft stattfindet; d. h. jedem Kreise in der ursprünglichen Figur entspricht in der neuen Figur wieder ein Kreis.*

Von Wichtigkeit ist der Umstand, daß zu jedem Punkt $P_1$ der neuen Kurve $c_1$ die Tangente konstruiert werden kann, sobald sich zu dem entsprechenden Punkt $P$ der ursprünglichen Kurve $c$ die Tangente konstruieren läßt. Schreibt man nämlich zur Abkürzung $r'$ und $r_1'$ an Stelle von

$$\frac{dr}{d\theta} \text{ und } \frac{dr_1}{d\theta_1},$$

so ergeben sich aus den beiden Gleichungen

$$r_1 = \frac{k^2}{r}, \quad \theta_1 = \theta$$

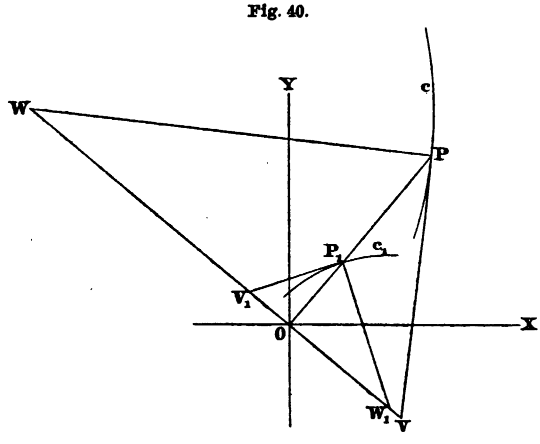
die weiteren drei Relationen

$$\frac{r_1'}{r_1} = -\frac{r'}{r},$$

$$r_1' \cdot \frac{r^2}{r'} = -k^2,$$

$$\frac{r_1^2}{r_1'} \cdot r' = -k^2.$$

Fig. 40.




Werden dann noch die Endpunkte der zu $P$ resp. $P_1$ gehörenden Polarsubtangenten von $c$ und $c_1$ mit $V$ und $V_1$, die Endpunkte der entsprechenden Polarsubnormalen hingegen mit $W$ und $W_1$ bezeichnet (Fig. 40), so zeigen diese drei Relationen, daß die Beziehungen

$$\sphericalangle OP_1V_1 = \sphericalangle OPV, \quad OW_1 \cdot OV = k^2, \quad OV_1 \cdot OW = k^2$$

stattfinden; dabei ist allerdings zu beachten, daß die Vektoren $OV$ und $OV_1$ entgegengesetzt gerichtet sind, und daß die gleiche Bemerkung auch

* Dies ist allerdings nur dann allgemein richtig, wenn man auch jede gerade Linie als einen Kreis — mit unendlich großem Radius — betrachtet.

von den Vektoren $OW$ und $OW_1$ gilt. Alle drei Beziehungen können benutzt werden, um die Tangente der Kurve $c_1$ zu finden, sobald die Tangente der Kurve $c$ gegeben ist.

Anmerkung. Die erste Beziehung in Verbindung mit der evidenten Tatsache, daß jede durch $O$ gehende Gerade sich selbst entspricht, läßt unmittelbar eine wichtige Eigenschaft der in Rede stehenden Transformation erkennen; schneiden sich im Punkt $P$ irgend zwei Linien $c$ und $c'$ unter einem gewissen Winkel $\alpha$, so schneiden sich im Punkt $P_1$ die entsprechenden Linien $c_1$ und $c_1'$ gleichfalls unter dem Winkel $\alpha$. Mit Rücksicht auf diese Eigenschaft sagt man, die Transformation durch reziproke Radien sei eine konforme (winkeltreue) Transformation.

1. Wendet man die Transformation durch reziproke Radien auf den durch die Gleichung

$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

dargestellten Kegelschnitt an, so entsteht eine Kurve, deren Gleichung

$$r_1 = k + k\varepsilon \cos \theta_1$$

geschrieben werden kann. Die Tangenten dieser Kurve, welche als Pascal'sche Schnecke bezeichnet wird*, können konstruiert werden, wenn die in § 15, Nr. 5 gefundene Eigenschaft der Kegelschnittstangenten benutzt wird; da nämlich der Endpunkt $V$ der Polarsubtangente des Kegelschnitts auf einer Geraden $\left(\text{Gleichung: } r = \frac{k}{\varepsilon \cos \theta}\right)$ liegt, so muß der Endpunkt $W_1$ der Polarsubnormale auf einem durch $O$ gehenden Kreise (Gleichung: $r_1 = k\varepsilon \cos \theta_1$) gelegen sein. Vergleiche auch Nr. 3.

II. Von einem festen Zentrum $O$ werde nach jedem Punkt $P$ einer gegebenen Kurve $c$ eine Gerade gezogen und auf derselben ein Punkt $P_1$ derart bestimmt, daß die Entfernung $PP_1$ einen gegebenen konstanten Wert hat; dabei werde $P_1$ entweder stets außerhalb oder stets innerhalb der Strecke $OP$ angenommen. Dann ergibt sich als geometrischer Ort des Punktes $P_1$ eine neue Kurve $c_1$, welche man als eine Konchoide der ursprünglichen Kurve $c$ bezeichnet. Wie sich sofort übersehen läßt, wird durch die soeben getroffene Festsetzung abermals eine Transformation der Ebene definiert, und zwar offenbar wiederum eine Punkttransformation. Dieselbe kann, wenn $O$ zum Pol eines Polarkoordinatensystems genommen wird, analytisch dargestellt werden durch zwei Gleichungen von der Form

$$r_1 = r + h, \quad \theta_1 = \theta;$$

die Konstante $h$ besitzt einen positiven oder einen negativen Wert, je nachdem der erste oder der zweite der beiden oben unterschiedenen

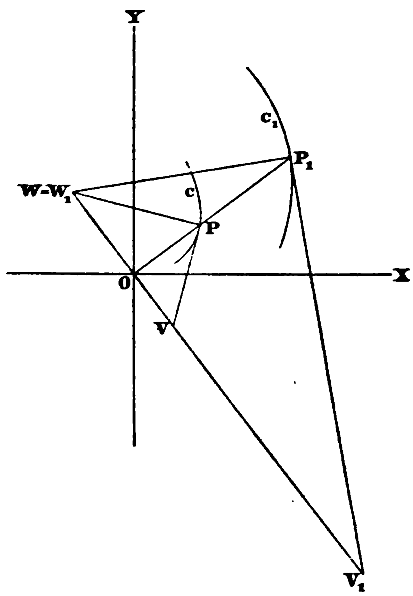
---

* Die Gestalt der Pascal'schen Schnecke fällt verschieden aus, je nachdem $\varepsilon \lesseqqgtr 1$ ist; in dem besonderen Falle $\varepsilon = 1$ wird die Kurve zu einer Kardioide.

Fälle vorliegt. Es dürfte sich empfehlen, die Kurve $c_1$ im ersten Fall eine äußere, im zweiten Fall eine innere Konchoide der Kurve $c$ zu nennen.*

Aus den obigen Gleichungen folgt sofort die Relation

Fig. 41.




$$\frac{d r_1}{d \theta_1} = \frac{d r}{d \theta},$$

und diese sagt aus, daß die zum Punkte $P_1$ gehörende Polarsubnormale der neuen Kurve $c_1$ stets gleich der zum Punkte $P$ gehörenden Polarsubnormale der ursprünglichen Kurve $c$ (Fig. 41) ist. Infolgedessen können die Tangenten der Kurve $c_1$ konstruiert werden, sobald sich die Tangenten der Kurve $c$ konstruieren lassen.

2. Wenn die Kurve $c$ eine Gerade ist, so entsteht als Kurve $c_1$ die in § 15, Nr. 20 untersuchte Linie, welche demnach als Konchoide der Geraden bezeichnet werden kann. Die Tangenten dieser Linie können nach II. sehr einfach konstruiert werden.

3. Ist die Kurve $c$ ein durch $O$ gehender Kreis, so wird die Kurve $c_1$ eine Pascal'sche Schnecke. Um dies zu übersehen, lege man die Polarachse durch den Kreismittelpunkt und bezeichne den Kreisdurchmesser mit $a$; dann ergibt sich als Gleichung der verlangten Konchoide die Relation

$$r_1 = a \cos \theta_1 + h,$$

welche offenbar mit der unter Nr. 1 gefundenen Gleichung identisch wird, wenn man $a = ks$, $h = k$ setzt.

Die aus II. folgende Konstruktion der Tangenten an die Pascal'sche Schnecke stimmt überein mit der aus I. resultierenden und in Nr. 1 angedeuteten Konstruktion.

4. Wird die Spirale des Archimedes, deren Gleichung

$$r = a \cdot \theta$$

lautet, unserer Transformation unterworfen, so entsteht eine Kurve, deren Gleichung

$$r_1 = a \cdot \theta_1 + h = a \cdot \left(\theta_1 + \frac{h}{a}\right)$$

* Bei besonderer Beschaffenheit der Kurve $c$ kann es vorkommen, daß die beiden Konchoiden, welche sich ergeben, wenn für $h$ zwei nur durch das Vorzeichen verschiedene Werte genommen werden, Zweige einer und derselben Kurve sind.

geschrieben werden kann. Diese Kurve ist aber, welchen Wert auch $h$ besitzen möge, mit der gegebenen Spirale kongruent und läßt sich durch eine Drehung um den Punkt $O$ mit ihr zur Deckung bringen.

5. Wendet man die in Rede stehende Transformation auf die durch die Gleichung

$$r = \frac{a}{\theta}$$

dargestellte hyperbolische Spirale an, so ergibt sich eine Kurve, deren Gleichung

$$r_1 = \frac{a}{\theta_1} + h$$

geschrieben werden kann. Für diese Kurve ist, wie für die ursprüngliche hyperbolische Spirale selbst, die durch die Gleichung

$$r \cdot \sin \theta = a$$

dargestellte Gerade eine Asymptote; durchläuft ferner ein Punkt $P_1$ die Kurve derart, daß seine Anomalie $\theta_1$ von $0$ bis $\infty$ wächst, so nähert er sich, aus dem Unendlichen kommend, schließlich asymptotisch eine mit dem Radius $h$ um den Mittelpunkt $O$ beschriebenen Kreise. Bemerkenswert ist der Umstand, daß die Kurve stets einen, aber auch nur einen Wendepunkt besitzt; der zugehörige Wert der Anomalie $\theta_1$ ist die einzige reelle Wurzel der kubischen Gleichung

$$\theta_1 \left(\theta_1 + \frac{a}{h}\right)^2 - 2\frac{a}{h} = 0.$$

6. Die letzten Ergebnisse ermöglichen eine Beantwortung der Frage, welche Gestalt die durch eine bilineare Gleichung zwischen $r$ und $\theta$, also durch eine Gleichung von der Form

$$r = \frac{A \cdot \theta + B}{C \cdot \theta + D}$$

dargestellte Kurve besitzt. Diese Kurve kann, falls die Koeffizienten $A$, $B$, $C$, $D$ keinen Bedingungen unterworfen sind, als Konchoide einer hyperbolischen Spirale angesehen werden; man erkennt dies, wenn die obige Gleichung in der Form

$$r = \frac{A}{C} + \frac{BC - AD}{C^2\left(\theta + \frac{D}{C}\right)}$$

geschrieben wird, was bei nicht verschwindendem $C$ stets geschehen kann. Bei besonderer Beschaffenheit der Koeffizienten kann die gegebene Gleichung eine hyperbolische Spirale, eine archimedische Spirale, einen Kreis mit dem Zentrum $O$ oder auch eine durch $O$ gehende Gerade darstellen.

7. Wenn eine Ellipse, deren Mittelpunkt $O$ ist, den beiden Transformationen

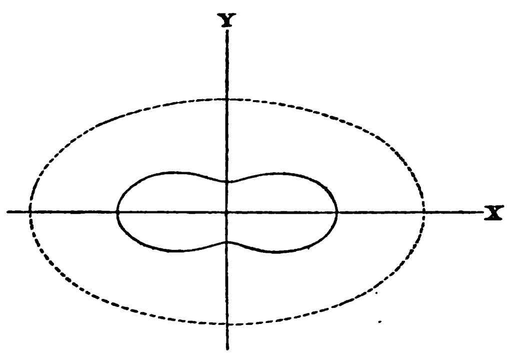
$$r_1 = r + d, \quad \theta_1 = \theta, \quad \text{und} \quad r_1 = r - d, \quad \theta_1 = \theta$$

unterworfen wird ($d$ soll eine positive Konstante sein!), so entstehen zwei Kurven, welche nach dem Früheren als eine äußere und eine innere Konchoide dieser Ellipse zu bezeichnen sind.*

Die erste Kurve bildet ein zu den beiden Achsen der gegebenen Ellipse symmetrisches Oval, dessen Gestalt sich, welchen Wert auch die Konstante $d$ besitzen möge, nur wenig von derjenigen einer Ellipse unterscheidet. Dagegen kann die zweite Kurve, also die innere Konchoide, je nach dem Werte von $d$ sehr verschiedene Gestalten haben; dieselben sollen im folgenden kurz beschrieben werden.

In jedem Falle ist die Kurve symmetrisch sowohl in bezug auf die große als auch in bezug auf die kleine Achse der Ellipse; machen wir die erste zur $x$-Achse, die zweite zur $y$-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so genügt es demnach, das Verhalten der Kurve im ersten Quadranten zu untersuchen. Wenn mittelst der Formeln $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ Polarkoordinaten eingeführt werden, und die große Halbachse der Ellipse mit $a$, die kleine Halbachse mit $b$, die numerische Exzentrizität mit $\varepsilon$ bezeichnet wird, so kann die Gleichung unserer Kurve

Fig. 42.




$$r_1 = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\theta_1}} - d$$

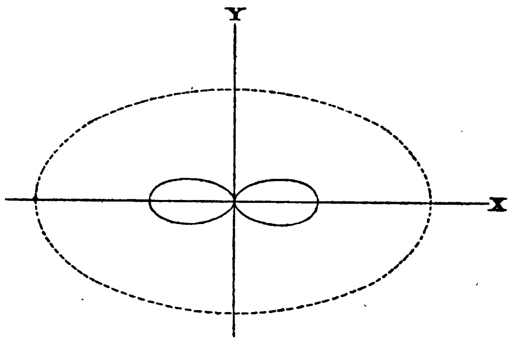
geschrieben werden; zur Feststellung der Gestalt der Kurve genügt es alsdann, die zwischen den Grenzen 0 und 90° gelegenen Werte des Polarwinkels $\theta$ in Betracht zu ziehen.

Solange $d < \frac{b^2}{a^2}$ ist, bildet die Kurve ein einfaches ellipsenähnliches Oval, dessen große Achse in der $x$-Achse und dessen kleine Achse in der $y$-Achse liegt. Sobald $\frac{b^2}{a^2} < d < b$ wird, zeigt dieses Oval an den beiden in der $y$-Achse gelegenen Scheiteln je eine Einbuchtung (Fig. 42); infolgedessen gibt es in jedem Quadranten einen Kurvenpunkt mit horizontaler Tangente. Für $d = b$ wird jede der beiden Einbuchtungen zu einer Spitze (Fig. 43), so daß die Kurve aus zwei Schleifen besteht, welche im

* Die beiden Kurven kommen in der darstellenden Geometrie vor. Sie bilden den Grundriß der auf einer Ringfläche bei Parallelbeleuchtung entstehenden Lichtgrenze, falls die Flächenachse senkrecht zur Grundrißebene steht. Die große Halbachse $a$ der in Frage kommenden Ellipse ist dann gleich dem Radius des die Ringfläche erzeugenden Kreises, die Strecke $d$ hingegen gleich dem Abstand des Kreismittelpunktes von der Flächenachse. Vgl. Rohn-Papperitz, *Darstellende Geometrie,* II. Band, Nr. 540.

Koordinatenanfang die $y$-Achse berühren. Wenn $b < d < a$ ist, setzt sich die Kurve auf die in Fig. 44 angedeutete Weise aus vier Schleifen zusammen, von denen zwei symmetrisch zur $x$-Achse, die beiden anderen symmetrisch zur $y$-Achse liegen. Für $d = a$ besteht die Kurve wieder aus zwei Schleifen, welche jedoch im Koordinatenanfang die $x$-Achse berühren (Fig. 45, S. 156). Sobald

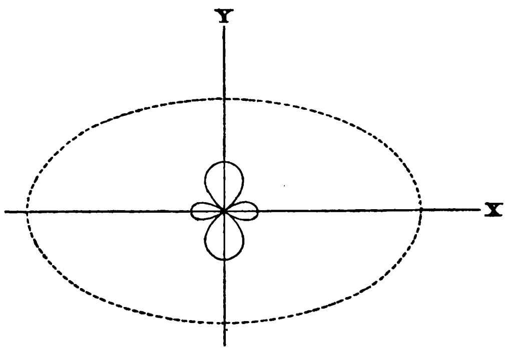
Fig. 43.




$$a < d < \frac{a^3}{b^2}$$

ist, wird die Kurve wieder ein einfaches Oval, welches aber an den beiden in der $x$-Achse gelegenen Scheiteln je eine Einbuchtung aufweist (Fig. 46, S. 156), so daß in jedem Quadranten ein Kurvenpunkt mit vertikaler Tangente vorhanden ist.* Wenn schließlich $d > \frac{a^3}{b^2}$ wird, so fallen die Einbuchtungen weg, und die Kurve nimmt wieder ellipsenähnliche Gestalt an; jedoch liegt diesmal die große Achse in der $y$-Achse und die kleine Achse in der $x$-Achse des Koordinatensystems.

Fig. 44.




Erwähnt sei noch, daß sich für die Polarkoordinaten derjenigen Kurvenpunkte, zu denen horizontale oder vertikale Tangenten gehören, verhältnismäßig einfache Formeln ergeben; für die Punkte mit horizontalen Tangenten findet man

$$r_1 = \sqrt[3]{a^2 d} - d, \quad \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta_1} = \frac{b}{\sqrt[3]{a^2 d}},$$

für die Punkte mit vertikaler Tangente hingegen

$$r_1 = d - \sqrt[3]{b^2 d}, \quad \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta_1} = \sqrt[3]{\frac{b}{d}}.$$

---

* Diese vier Punkte sind in der darstellenden Geometrie (vgl. die vorige Fußnote) von besonderer Wichtigkeit; ihnen entsprechen auf der in Frage kommenden Ringfläche diejenigen Punkte der Lichtgrenze, in denen die Tangenten der letzteren parallel sind zur Lichtstrahlrichtung.

Aus diesen Formeln folgt übrigens, daß Punkte der ersten Art nur existieren, wenn

$$\frac{b^2}{a^2} < d < a$$

ist, und daß Punkte der zweiten Art nur vorhanden sind, wenn

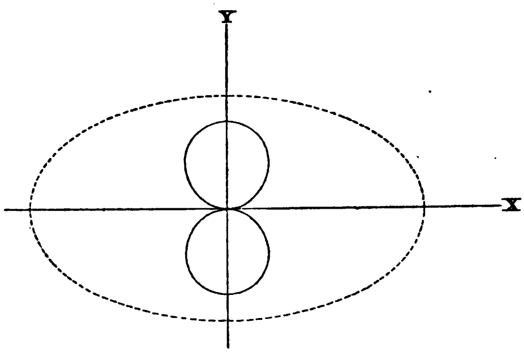
$$b < d < \frac{a^2}{b^2}$$

ist; soll es auf einer und derselben Kurve sowohl Punkte mit horizontalen als auch Punkte mit vertikalen Tangenten geben, so muß demnach

$$b < d < a$$

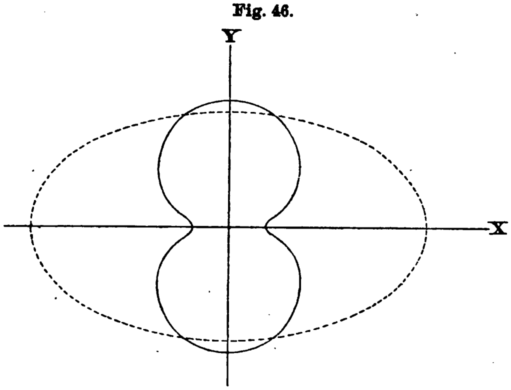
sein (vgl. hierzu die Figuren 42—46).

Fig. 45.




III. Von jedem Punkt $P$ einer gegebenen Kurve $c$ aus werde auf der zugehörigen Normalen dieser Kurve eine Strecke von der gegebenen konstanten Länge $h$ aufgetragen und der Endpunkt derselben mit $P_1$ bezeichnet. Dann ergibt sich als geometrischer Ort des Punktes $P_1$ eine neue Kurve $c_1$, welche man — aus einem Grunde, der im folgenden zur Sprache kommen wird — eine **Parallelkurve** der ursprünglichen Kurve $c$ nennt. Da durch die soeben gegebene Vorschrift jeder Kurve $c$ eine gewisse andere Kurve $c_1$ zugeordnet wird, so liegt wiederum eine Transformation der Ebene vor; dieselbe wird als **Dilatation** bezeichnet. Um eine analytische Darstellung dieser Transformation zu ermöglichen, führen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und bezeichnen die Koordinaten von $P$ mit $x$, $y$, diejenigen von $P_1$ mit $x_1$, $y_1$; daß $P$ auf einer gewissen Kurve $c$, und $P_1$ auf einer gewissen anderen Kurve $c_1$ liegt, drückt sich dann analytisch dadurch aus, daß $y$ eine gewisse Funktion von $x$, und $y_1$ eine gewisse andere Funktion von $x_1$ ist; die successiven Differentialquotienten von $y$ nach $x$

Fig. 46.



und von $y_1$ nach $x_1$ mögen mit $y'$, $y''$, ..., resp. $y_1'$, $y_1''$, ... bezeichnet werden. Nunmehr ist leicht zu erkennen, daß

$$x_1 = x - h\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad y_1 = y + h\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

wird*; es hängen also $x_1$ und $y_1$ nicht bloß von $x$ und $y$, sondern auch noch von $y'$ ab. Die Dilatation ist demnach keine bloße Punkttransformation; die Lage des Punktes $P_1$ ist, wie sich auch geometrisch sofort übersehen läßt, nicht bloß durch die Lage des Punktes $P$ bedingt, sondern auch durch die Richtung, in welcher die Kurve $c$ durch den Punkt $P$ hindurchgeht.

Von Interesse ist der Umstand, daß sich aus den obigen zwei Gleichungen nach ähnlichen Grundsätzen wie in § 13 und § 13*a* eine Reihe weiterer Gleichungen ableiten lassen, durch welche $y_1'$, $y_1''$ ... als Funktionen von $x$, $y$, $y'$, $y''$, ... ausgedrückt werden. So ergibt sich z. B.

$$\frac{dx_1}{dx} = 1 - h\frac{y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3}, \quad \frac{dy_1}{dx} = y' - h\frac{y'y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3},$$

und hieraus folgt durch Division die Gleichung

$$y_1' = y'.$$

Diese aber hat einen einfachen geometrischen Sinn; sie sagt aus, daß die Tangente, von welcher die Kurve $c_1$ im Punkte $P_1$ berührt wird, stets parallel ist zu der Tangente, von welcher die Kurve $c$ im Punkte $P$ berührt wird. Hieraus ergibt sich sofort ein weiterer wichtiger Umstand; berühren sich im Punkte $P$ irgend zwei Kurven $c$ und $k$, so berühren sich im Punkte $P_1$ auch die entsprechenden Kurven $c_1$ und $k_1$. Die Dilatation ist somit eine Berührungstransformation.

8. Wenn eine Ellipse mit den Halbachsen $a$ und $b$ der soeben besprochenen Transformation unterworfen wird, so ergeben sich die beiden Zweige einer gewissen Kurve 8. Ordnung, welche gleichfalls bei Behandlung der Ringfläche in der darstellenden Geometrie vorkommt** und als Toroide bezeichnet worden ist. Jeder der beiden Zweige ist symmetrisch in bezug auf beide Achsen der Ellipse; der eine Zweig verläuft stets außerhalb der Ellipse und bildet ein einfaches ellipsen-

---

* Oder $x_1 = x + h\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, $y_1 = y - h\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$; denn es gibt auf der oben erwähnten Normalen der Kurve $c$ zwei verschiedene Punkte, welche von $P$ den gegebenen Abstand $h$ haben, und es gehören daher zur Kurve $c$ bei gegebenem Wert von $h$ zwei verschiedene Parallelkurven, welche allerdings in der Regel als Teile einer und derselben durch eine Gleichung darstellbaren Kurve anzusehen sind. Die Dilatation ist eben — im Gegensatz zu den übrigen hier behandelten Transformationen — keine eindeutige sondern eine zweideutige Transformation der Ebene.

** Vgl. Rohn-Papperitz, *Darstellende Geometrie*, II. Band, Nr. 538 bis 540.

artiges Oval; die Gestalt des anderen Zweigs dagegen kann verschieden ausfallen und hängt wesentlich von der Größe der Strecke $h$ ab.

IV. Es liegt nahe, allgemein zu fragen, wie die beiden Funktionen $\Phi$ und $\Psi$ beschaffen sein müssen, wenn eine durch zwei Gleichungen von der Form

$$\text{B)} \qquad x_1 = \Phi(x, y, y'), \quad y_1 = \Psi(x, y, y')$$

charakterisierte Transformation zur Klasse der Berührungstransformationen gehören soll.

Um diese Frage beantworten zu können, bedenke man, daß sich aus den Gleichungen B) durch Differentiation

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} y'', \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Psi}{\partial y'} y''$$

ergibt, woraus weiter die Relation

$$\text{D)} \qquad y_1' = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Psi}{\partial y'} y''}{\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} y''}$$

folgt. Damit die fragliche Transformation eine Berührungstransformation sei, damit sie also zwei einander berührenden Kurven $c$ und $k$ stets wieder zwei einander berührende Kurven $c_1$ und $k_1$ zuordne, ist nun notwendig — und offenbar auch hinreichend —, daß $y_1'$ nur von $x$, $y$ und $y'$, aber nicht von $y''$ abhängt*, und diese Bedingung ist, wie aus dem Bau der Relation D) hervorgeht, stets dann, aber auch nur dann erfüllt, wenn die beiden Funktionen $\Phi$ und $\Psi$ identisch der Gleichung

$$\text{E)} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + y' \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y' \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial y'} = 0$$

Genüge leisten.

Die Richtigkeit dieses Ergebnisses kann bei der Fußpunkttransformation, sowie bei der Dilatation sofort bestätigt werden.

V. Durch jeden Punkt $P$ einer gegebenen Kurve $c$ werde eine Gerade gelegt, welche mit der zugehörigen Tangente von $c$ einen gegebenen konstanten Winkel $\alpha$ bildet; auf dieser Geraden werde von $P$ aus eine Strecke von der gleichfalls gegebenen konstanten Länge $h$ aufgetragen; der Endpunkt derselben möge $P_1$ heißen. Dann ergibt sich als geometrischer Ort für $P_1$ eine neue Kurve $c_1$; und da offenbar jeder Kurve $c$ durch die soeben gegebene Vorschrift eine gewisse

* Denn sonst würden zwei Kurven $c$ und $k$, welche sich in einem Punkt $P$ berühren, jedoch daselbst verschiedene Krümmung besitzen, zwei Kurven $c_1$ und $k_1$ entsprechen, welche zwar durch einen Punkt $P_1$ gingen, jedoch daselbst verschiedene Tangenten besäßen.

andere Kurve $c_1$ zugeordnet wird, so liegt abermals eine Transformation der Ebene vor.*

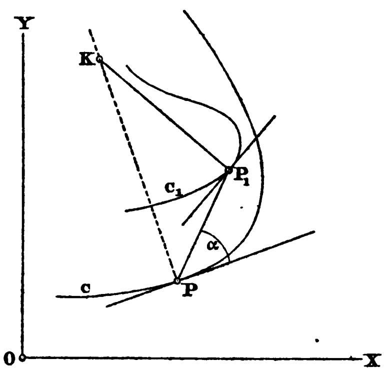
Analytisch kann diese Transformation, wenn wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem einführen und wie unter III. verfahren, dargestellt werden durch die Gleichungen

$$x_1 = x + h\frac{\cos\alpha - y'\sin\alpha}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad y_1 = y + h\frac{\sin\alpha + y'\cos\alpha}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Aus diesen folgt, wenn der unter IV. gefundene Satz angewendet wird, daß die neue Transformation im allgemeinen — d. h. bei beliebigem Werte von $\alpha$ — keine Berührungstransformation ist, daß sie vielmehr nur dann eine solche wird, wenn $\alpha = 90^\circ$ ist (vgl. die vorige Fußnote).

Dagegen besitzt unsere Transformation, wie mit Hilfe der letzten Gleichungen bewiesen werden kann, eine andere interessante Eigenschaft, welche es gegebenenfalls ermöglicht, die Tangenten der Kurve $c_1$ zu konstruieren; es geht nämlich jede Normale der Kurve $c_1$ durch den entsprechenden Krümmungsmittelpunkt der Kurve $c$. (Vgl. Fig. 47, wo $K$ den zum Punkte $P$ gehörenden Krümmungsmittelpunkt der Kurve $c$ bedeutet.)

Fig. 47.




VI. Es sei $P$ ein beliebiger Punkt der gegebenen Kurve $c$; es sei ferner $n$ die zugehörige Normale und $K$ der entsprechende Krümmungsmittelpunkt von $c$. Wird alsdann durch das feste Zentrum $O$ eine Gerade parallel zu $n$ gezogen und auf ihr der Punkt $P_1$ so bestimmt, daß die Strecke $OP_1$ nach Länge und Richtungssinn mit dem Krümmungshalbmesser $KP$ übereinstimmt, so liegt der Punkt $P_1$ auf einer neuen Kurve $c_1$, welche als **Radialkurve** oder **Radiale** von $c$ bezeichnet wird.

Um die Entstehung der Kurve $c_1$ aus der Kurve $c$ analytisch charakterisieren zu können, benutzen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt $O$; dann ergeben sich, wenn analoge Bezeichnungen angewendet werden wie früher, die Gleichungen

$$x_1 = +\frac{1+y'^2}{y''}y', \quad y_1 = -\frac{1+y'^2}{y''},$$

welche offenbar die Form C) besitzen.

---

* Wie man sofort übersieht, wird in dem besonderen Falle $\alpha = 90^\circ$ die Kurve $c_1$ zu einer Parallelkurve von $c$, die vorliegende Transformation also zu einer Dilatation.

$$x_1^2 + (y_1 - 2b)^2 = (2b)^2;$$

seine Lage und Größe kann hiernach sofort beurteilt werden.

**16.** Die Radiale einer logarithmischen Spirale ist wieder eine logarithmische Spirale. Lautet die Gleichung der ursprünglichen Spirale

$$r = ae^{\beta\theta},$$

so kann die Gleichung der neuen Spirale

$$r_1 = a\sqrt{1+\beta^2}\, e^{\beta(\theta_1 + \operatorname{arc\,tg} \beta)}$$

geschrieben werden. Es läßt sich leicht zeigen, daß die zweite Kurve der ersten kongruent ist und mit ihr durch eine Drehung um den Pol zur Deckung gebracht werden kann.

**17.** Als Radiale der Kreisevolvente ergibt sich eine archimedische Spirale. Ist die betreffende Kreisevolvente dargestellt durch die Relationen

$$x = a(\cos\omega + \omega\sin\omega), \quad y = a(\sin\omega - \omega\cos\omega),$$

so kann die Gleichung der fraglichen Spirale

$$r_1 = a\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

geschrieben werden.

# Kapitel VI.

## Die Diskussion doppelt gekrümmter Kurven.

### § 20.

### Allgemeine Regeln und Formeln.

Wenn die gegebene Kurve auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem der $x$, $y$, $z$ bezogen ist, so gilt für das Bogenelement $ds$ die Formel

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

falls die Kurve durch ihre Projektionen auf die Horizontalebene $xy$ und die eine Vertikalebene $xz$, mithin durch zwei Gleichungen von den Formen $y = \varphi(x)$ und $z = \psi(x)$ bestimmt ist, hat man statt der obigen Formel zu schreiben

$$ds = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \cdot dx.$$

Die Winkel $\tau_x$, $\tau_y$, $\tau_z$, welche die Tangente im Punkte $xyz$ mit den Koordinatenachsen bildet, bestimmen sich durch die Formeln

$$\cos \tau_x = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}},$$

$$\cos \tau_y = \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}},$$

$$\cos \tau_z = \frac{dz}{ds} = \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}.$$

Die Gleichungen der Tangente sind

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{ds}},$$

oder

$$\eta - y = y'(\xi - x), \quad \zeta - z = z'(\xi - x).$$

Die Gleichung der Normalebene ist

$$(\zeta - x)\frac{dx}{ds} + (\eta - y)\frac{dy}{ds} + (\zeta - z)\frac{dz}{ds} = 0$$

oder

$$\zeta - x + (\eta - y)y' + (\zeta - z)z' = 0.$$

Um den Krümmungshalbmesser $\varrho$ und die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes zu finden, berechnet man zuerst die drei Größen

$$X = dy\,d^2z - d^2y\,dz,$$

$$Y = dz\,d^2x - d^2z\,dx,$$

$$Z = dx\,d^2y - d^2x\,dy;$$

die Gleichung der Krümmungsebene (Schmiegungsebene, oskulierenden Ebene) ist dann

$$(\xi - x)X + (\eta - y)Y + (\zeta - z)Z = 0;$$

ferner gelten für die Koordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ des Krümmungsmittelpunktes die Formeln

$$\xi - x = \frac{Y\,dz - Z\,dy}{X^2 + Y^2 + Z^2}ds^2,$$

$$\eta - y = \frac{Z\,dx - X\,dz}{X^2 + Y^2 + Z^2}ds^2,$$

$$\zeta - z = \frac{X\,dy - Y\,dx}{X^2 + Y^2 + Z^2}ds^2,$$

und der Krümmungsradius ist

$$\varrho = \frac{ds^3}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Statt dieser Formel kann auch geschrieben werden

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}\right]^2 + \left[\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}\right]^2 + \left[\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}\right]^2}},$$

$$\xi - x = \varrho^2\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}, \quad \eta - y = \varrho^2\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}, \quad \zeta - z = \varrho^2\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}.$$

Nimmt man $x$ als unabhängige Veränderliche, so hat man als Gleichung der Krümmungsebene die Relation

$$(\xi - x)(y'z'' - y''z') - (\eta - y)z'' + (\zeta - z)y'' = 0,$$

oder

$$(\xi - x)\left(\frac{y'}{y''} - \frac{z'}{z''}\right) - (\eta - y)\frac{1}{y''} + (\zeta - z)\frac{1}{z''} = 0;$$

der Krümmungshalbmesser wird

$$\varrho = \sqrt{\frac{(1 + y'^2 + z'^2)^3}{(y'z'' - y''z')^2 + y''^2 + z''^2}}$$

und für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes ergibt sich

$$\xi - x = -\varrho^2 \frac{y'y'' + z'z''}{(1 + y'^2 + z'^2)^2},$$

$$\eta - y = \quad \varrho^2 \frac{y'' - (y'z'' - y''z')z'}{(1 + y'^2 + z'^2)^2},$$

$$\zeta - z = \quad \varrho^2 \frac{z'' + (y'z'' - y''z')y'}{(1 + y'^2 + z'^2)^2}.$$

In den Fällen, wo sich $x$, $y$, $z$ durch die unabhängige Veränderliche $s$ ausdrücken lassen, ist

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

$$\xi - x = \varrho^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta - y = \varrho^2 \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \zeta - z = \varrho^2 \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Um den Halbmesser $\varrho_1$ der zweiten Krümmung, den sogenannten Torsionsradius zu bestimmen, berechnet man zuerst die Größe

$$S = dx(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y) + dy(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z)$$
$$+ dz(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x);$$

es ist dann

$$\varrho_1 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{S} = \frac{ds^6}{\varrho^2 S}.$$

Wird $x$ als unabhängige Veränderliche angesehen, so ist einfacher

$$\varrho_1 = \frac{(1 + y'^2 + z'^2)^3}{\varrho^2(y''z''' - y'''z'')}.$$

Falls bei jedem $x$ die Gleichung $S = 0$ stattfindet, liegt die Kurve in einer Ebene, welche dann mit der Krümmungsebene identisch ist.

Zwei durch die Punkte $xyz$ und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ gelegte Normalebenen schneiden sich in einer Geraden (Krümmungsachse), welche durch die Gleichungen beider Ebenen, nämlich

$$(\xi - x)dx + (\eta - y)dy + (\zeta - z)dz = 0,$$
$$(\xi - x)d^2x + (\eta - y)d^2y + (\zeta - z)d^2z = ds^2,$$

bestimmt ist. Alle diese Geraden bilden stetig aufeinander folgend eine (abwickelbare) Regelfläche, die sogenannte **Evolutenfläche**; ihre Gleichung ergibt sich dadurch, daß man $x$ aus den vorstehenden Gleichungen eliminiert.

## § 21.

### Beispiele.

1. **Durchschnitt zweier parabolischer Cylinder.** Die Gleichungen der beiden Cylinder mögen lauten

$$y = \frac{x^2}{2a}, \quad z = \frac{x^3}{6a^2};$$

dann ergibt sich

$$\cos \tau_x = \frac{2a^2}{2a^2 + x^2}, \quad \cos \tau_y = \frac{2ax}{2a^2 + x^2}, \quad \cos \tau_z = \frac{x^2}{2a^2 + x^2}.$$

Die Gleichungen der Tangente sind

$$\eta = \frac{x}{a}\xi - \frac{x^2}{2a}, \quad \zeta = \frac{x^2}{2a^2}\xi - \frac{x^3}{3a^2}.$$

Die Punkte, in denen die Tangente die Koordinatenebenen schneidet, d. h. die Spuren der Tangente, bestimmen sich hiernach durch folgende Formeln

$$\xi_1 = \tfrac{2}{3}x, \quad \eta_1 = \tfrac{1}{6}\frac{x^2}{a}, \quad \zeta_1 = 0,$$
$$\xi_2 = \tfrac{1}{2}x, \quad \eta_2 = 0, \quad \zeta_2 = -\tfrac{1}{12}\frac{x^3}{a^2},$$
$$\xi_3 = 0, \quad \eta_3 = -\tfrac{1}{2}\frac{x^2}{a}, \quad \zeta_3 = -\tfrac{1}{3}\frac{x^3}{a^2};$$

läßt man den Punkt $xyz$ auf der Kurve im Raume fortrücken, so beschreibt die erste Tangentenspur eine Parabel zweiten Grades, die zweite eine Parabel dritten Grades, die dritte eine semikubische Parabel.

Aus den beiden Gleichungen der Tangente erhält man durch Elimination von $x$ die Gleichung derjenigen abwickelbaren Fläche, welche von den aufeinander folgenden Tangenten gebildet wird, nämlich

$$(\xi^3 - 3a\xi\eta + 3a^2\zeta)^2 = (\xi^2 - 2a\eta)^3.$$

Die Gleichung der Normalebene lautet

$$2a^2\cdot\xi + 2ax\cdot\eta + x^2\cdot\zeta = \frac{x(12a^4 + 6a^2x^2 + x^4)}{6a^2},$$

hieraus können u. a. die Gleichungen der Spuren dieser Ebene hergeleitet werden.

Ferner ist

$$\varrho = \frac{(2a^2 + x^2)^2}{4a^3} = a\sec^2\tau_x,$$

und für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes hat man die Formeln

$$\xi = -\frac{x^3}{2a^2},\quad \eta = \frac{4a^4 + 2a^2x^2 - x^4}{4a^3},\quad \zeta = \frac{x(3a^2 + 2x^2)}{3a^2}.$$

Bildet man hieraus durch Elimination von $x$ zwei Gleichungen zwischen $\xi$, $\eta$, $\zeta$, so bestimmen diese Gleichungen den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte.

Für den Halbmesser der zweiten Krümmung ergibt sich

$$\varrho_1 = \varrho.$$

2. Durchschnitt eines parabolischen und eines gleichseitig-hyperbolischen Cylinders. Die Gleichungen der beiden Cylinder seien

$$y = 2\sqrt{b(x - a)},\quad z = \frac{c^2}{x};$$

die Gleichungen der Tangente sind dann

$$\eta = \sqrt{\frac{b}{x-a}}(\xi + x - 2a),\quad \zeta = \frac{c^2}{x^2}(-\xi + 2x).$$

Legt man durch einen zweiten Punkt $x_1\, y_1\, z_1$ gleichfalls eine Tangente, so ist ebenso

$$\eta = \sqrt{\frac{b}{x_1 - a}}(\xi + x_1 - 2a),\quad \zeta = \frac{c^2}{x_1^{\,2}}(-\xi + 2x_1),$$

und es kann nun die Frage gestellt werden, ob sich beide Tangenten schneiden oder nicht. Für den Durchschnitt der Horizontalprojektionen beider Tangenten ergibt sich

$$\xi_I = \sqrt{(x - a)(x_1 - a)} + a,$$

für den Durchschnitt der zugehörigen Vertikalprojektionen ist

$$\xi_{II}=\frac{2xx_1}{x+x_1},$$

und wenn sich beide Tangenten schneiden sollen, so muß $\xi_I=\xi_{II}$ sein; daraus folgt

$$x_1=\frac{ax}{x-a},\quad y_1=2a\sqrt{\frac{b}{x-a}},\quad z_1=\frac{c^2(x-a)}{ax}.$$

Beiläufig sei erwähnt, daß hiernach das harmonische Mittel zwischen $x$ und $x_1$, das geometrische Mittel zwischen $y$ und $y_1$, sowie das arithmetische Mittel zwischen $z$ und $z_1$ konstante Größen sind. Die Tangenten am Punkte $xyz$ und an dem nunmehr bestimmten Punkte $x_1y_1z_1$ schneiden sich im Punkte

$$\xi=2a,\quad \eta=x\sqrt{\frac{b}{x-a}},\quad \zeta=\frac{2c^2(x-a)}{x^2};$$

alle diese Durchschnitte liegen auf einer Ebene, welche im Abstande $2a$ parallel zur Ebene $yz$ ist, und bilden zusammen eine durch die Gleichung

$$\eta^2\zeta=2bc^2$$

bestimmte Kurve dritten Grades.

3. Durchschnitt eines kubisch-parabolischen und eines gleichseitig-hyperbolischen Cylinders. Die gegebenen Gleichungen seien

$$y=\frac{(x-a)^3}{3b^2},\quad z=\frac{c^2}{x};$$

für die Tangente hat man dann

$$\eta=\frac{(x-a)^2}{b^2}\left(\xi-\frac{2x+a}{3}\right),\quad \zeta=\frac{c^2}{x^2}(-\xi+2x).$$

Die Tangente am Punkte

$$x_1=\tfrac{3}{2}a-x,\quad y_1=\frac{(a-2x)^3}{24b^2},\quad z_1=\frac{2c^2}{3a-2x}$$

schneidet die erste Tangente, und zwar sind die Koordinaten des Durchschnitts

$$\xi=\frac{2x(3a-2x)}{3a},\quad \eta=-\frac{(x-a)^2(2x-a)^2}{3ab^2},\quad \zeta=\frac{4c^2}{3a};$$

die stetig aufeinander folgenden Durchschnitte bilden hiernach eine Parabel, deren Ebene parallel zur $xy$-Ebene liegt und deren Gleichung ist

$$a(3\xi-2a)^2+12b^2\eta=0.$$

4. **Durchschnitt eines hyperbolischen und eines parabolischen Cylinders.** Sind die gegebenen Gleichungen

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + x^2}, \quad z = 2\sqrt{cx},$$

so hat man als Gleichungen der Tangente die Relationen

$$\eta = \frac{b}{a} \cdot \frac{x\xi + a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{c}{x}}\,(\xi + x).$$

Soll diese Tangente eine durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ gehende Tangente schneiden, so muß die Bedingung

$$x x_1 = a^2$$

erfüllt sein, aus welcher weiter die Relationen

$$x y_1 = a y, \quad z z_1 = 4ac$$

folgen. Die Koordinaten des Durchschnitts beider Tangenten sind

$$\xi = a, \quad \eta = \frac{b\,(a + x)}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \zeta = (a + x)\sqrt{\frac{c}{x}};$$

alle Durchschnitte bilden zusammen eine ebene, in der Entfernung $a$ parallel zu $yz$ liegende Kurve vierten Grades, deren Gleichung ist

$$\frac{b^2}{\eta^2} + \frac{2ac}{\zeta^2} = 1.$$

5. **Durchschnitt eines Kreiscylinders und einer Kugel.** Die Gleichungen beider Flächen mögen sein

$$y^2 = x\,(a - x), \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

so daß der Durchmesser des Cylinders dem Halbmesser der Kugel gleichkommt; es sind daher

$$y = \sqrt{x\,(a - x)}, \quad z = \sqrt{a\,(a - x)}$$

die Gleichungen des Durchschnitts beider Flächen. Hieraus folgen die Werte

$$\cos \tau_x = 2\sqrt{\frac{x\,(a - x)}{a\,(a + x)}}, \quad \cos \tau_y = \frac{a - 2x}{\sqrt{a\,(a + x)}}, \quad \cos \tau_z = -\sqrt{\frac{x}{a + x}};$$

die Gleichungen der Tangente sind

$$\eta = \frac{(a - 2x)\,\xi + ax}{2\sqrt{x\,(a - x)}}, \quad \zeta = -\frac{\sqrt{a}\,[\xi - (2a - x)]}{2\sqrt{a - x}};$$

ferner ist die Gleichung der Normalebene

$$2y \cdot \xi + (a - 2x) \cdot \eta - \sqrt{ax} \cdot \zeta = 0.$$

Für den Halbmesser der ersten Krümmung findet man

$$\varrho = \sqrt{\frac{(a-x)^3}{5a-3x}}$$

und für den der zweiten

$$\varrho_1 = \frac{5a+3x}{6}\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Die Gleichungen der Schnittlinie von zwei aufeinander folgenden Normalebenen können geschrieben werden

$$2\sqrt{x(a-x)}\cdot\xi + (a-2x)\cdot\eta = \sqrt{ax}\cdot\zeta,$$

$$(a-2x)\cdot\xi - 2\sqrt{x(a-x)}\cdot\eta = \tfrac{1}{2}\sqrt{a(a-x)}\cdot\zeta.$$

Quadriert und addiert man dieselben, so erhält man

$$a(4\xi^2 + 4\eta^2 - \zeta^2) = 3\zeta^2 x;$$

eliminiert man dagegen $\xi$ aus den beiden vorigen Gleichungen, so bleibt

$$a^2\cdot\eta = -x\sqrt{ax}\cdot\zeta \quad \text{oder} \quad a^3\eta^2 = x^3\zeta^2;$$

endlich gibt die Elimination von $x$ aus den letzten Gleichungen

$$[4(\xi^2+\eta^2) - \zeta^2]^3 - 27\eta^2\zeta^4 = 0.$$

Hierdurch bestimmt sich die Evolutenfläche, welche im vorliegenden Falle eine Kegelfläche ist.

6. **Durchschnitt eines hyperbolischen und eines Kettencylinders.** Die Gleichungen der beiden Flächen mögen lauten

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right),*$$

und die numerische Exzentrizität der Hyperbel werde zur Abkürzung mit $\varepsilon$ bezeichnet. Dann gelten zunächst die Formeln

$$\cos\tau_x = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\varepsilon x}, \quad \cos\tau_y = \frac{b}{a\varepsilon}, \quad \cos\tau_z = \frac{a}{\varepsilon x},$$

von denen namentlich die zweite bemerkenswert ist. Ferner lauten die Gleichungen der Tangente

---

* Zweckmäßig ist es übrigens, $xyz$ mittelst der 3 Relationen $x = \frac{1}{2}a(e^\omega + e^{-\omega})$, $y = \frac{1}{2}b(e^\omega - e^{-\omega})$, $z = a\omega$ von einer Hilfsgröße $\omega$ abhängig zu machen. Die rechten Seiten der beiden ersten Gleichungen enthalten sogenannte hyperbolische Funktionen von $\omega$ (vgl. § 44).

$$\eta - y = \frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}(\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}(\xi - x),$$

während die Normalebene durch die Gleichung

$$a\sqrt{x^2-a^2}(\xi - x) + bx(\eta - y) + a^2(\zeta - z) = 0$$

bestimmt ist und die $xz$-Ebene immer unter demselben Winkel schneidet.

Für die beiden Krümmungsradien erhält man

$$\varrho = \frac{s^2x^2}{a}, \quad \varrho_1 = \frac{s^2x^2}{b},$$

woraus folgt, daß $\varrho_1 : \varrho = a : b$ ist.

7. **Durchschnitt eines parabolischen und eines cykloidischen Cylinders.** In der Horizontalebene $xy$ (Fig. 48) sei eine Parabel als Direktrix eines vertikal stehenden Zylinders durch die Gleichung

$$y = 2\sqrt{ax}$$

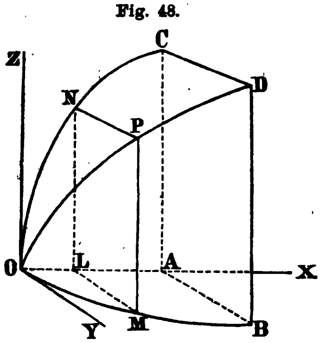
bestimmt, in der Vertikalebene $xz$ sei eine Cykloide $ONC$ als Direktrix eines horizontalen Cylinders genommen, dabei $AC$ die halbe Basis, $O$ der Scheitel der Cykloide, $OA$ der Durchmesser des rollenden Kreises $= b$, so daß die Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2}b(1 + \cos\omega),$$
$$z = \tfrac{1}{2}b(\pi - \omega + \sin\omega),$$

oder für $\omega = \pi - \psi$

$$x = \tfrac{1}{2}b(1 - \cos\psi),$$
$$z = \tfrac{1}{2}b(\psi + \sin\psi)$$

Fig. 48.




stattfinden, welche man zu der einen Gleichung

$$z = \tfrac{1}{2}b\,Arc\cos\frac{b-2x}{b} + \sqrt{bx - x^2}$$

zusammenziehen kann. Aus den beiden Gleichungen ergeben sich folgende Werte:

$$\cos\tau_x = \sqrt{\frac{x}{a+b}}, \quad \cos\tau_y = \sqrt{\frac{a}{a+b}}, \quad \cos\tau_z = \sqrt{\frac{b-x}{a+b}},$$

von denen namentlich der zweite bemerkenswert ist.

Als Gleichungen der Tangente erhält man die beiden Relationen

$$\eta - y = \sqrt{\frac{a}{x}}(\xi - x), \quad \zeta - z = \sqrt{\frac{b-x}{x}}(\xi - x);$$

die Normalebene wird dargestellt durch die Gleichung

$$(\xi - x)\cdot\sqrt{x} + (\eta - y)\cdot\sqrt{a} + (\zeta - z)\cdot\sqrt{b-x} = 0$$

und schneidet die $xz$-Ebene immer unter demselben Winkel.

Für die beiden Krümmungshalbmesser findet man die Formeln

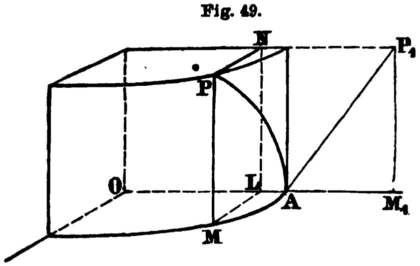
$$\varrho = 2(a+b)\sqrt{\frac{b-x}{b}},$$

$$\varrho_1 = 2(a+b)\sqrt{\frac{b-x}{a}};$$

aus diesen folgt, daß $\varrho^2 : \varrho_1^2 = a : b$ ist.*

8. Die Schraubenlinie (Fig. 49). Bezeichnet $OA = a$ den Radius des Cylinders, auf welchem die Schraubenlinie liegt, $\beta$ den Steigungswinkel $M_1AP_1$ und ist ferner $OL = x$, $LM = y$, $MP = z$, $\angle AOM = \omega$, so gelten bekanntlich folgende Gleichungen

Fig. 49.




$$x = a\cos\omega, \quad y = a\sin\omega,$$

$$z = a\omega\, tg\,\beta;$$

dabei läßt sich $a\, tg\,\beta$ durch $\frac{h}{2\pi}$ ersetzen, wenn $h$ die Höhe eines Schraubenganges bedeutet; zur Abkürzung sei noch

$$a\, tg\,\beta = \frac{h}{2\pi} = b, \quad \text{mithin} \quad z = b\omega.$$

Man findet zunächst

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2}\cdot d\omega,$$

* Zu besonders bequemen Formeln gelangt man, wenn alle drei Koordinaten $xyz$ des laufenden Kurvenpunktes $P$ von $\psi$ abhängig gemacht werden, was mittelst der Gleichungen

$$x = \frac{b}{2}(1 - \cos\psi), \quad y = 2\sqrt{ab}\sin\frac{\psi}{2}, \quad z = \frac{b}{2}(\psi + \sin\psi)$$

geschehen kann.

was auch aus der Entstehung der Schraubenlinie unmittelbar hervorgeht, ferner

$$\cos\tau_x = -\frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\tau_y = \frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\tau_z = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Die Vertikalprojektionen der Tangente werden dargestellt durch die Gleichungen

$$\xi - x = -\frac{y}{b}(\zeta - z), \quad \eta - y = +\frac{x}{b}(\zeta - z),$$

welche zu einer einfachen Tangentenkonstruktion führen. Läßt man den Punkt $xyz$ auf der Schraubenlinie fortrücken, so beschreibt die Horizontalspur der Tangente eine Kreisevolvente, deren Grundkreis den Radius $a$ besitzt.

Die Normalebene bestimmt sich durch die Gleichung

$$-y\xi + x\eta + b\zeta = bz;$$

sie bildet mit der Horizontalebene immer denselben Neigungswinkel.

Der Halbmesser der ersten Krümmung ist konstant, nämlich

$$\varrho = \frac{a^2+b^2}{a};$$

die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = -\frac{b^2}{a}\cos\omega, \quad \eta = -\frac{b^2}{a}\sin\omega, \quad \zeta = b\omega,$$

und hier erkennt man augenblicklich, daß alle Krümmungsmittelpunkte wiederum auf einer Schraubenlinie liegen, welche die nämliche Achse wie die ursprüngliche Schraubenlinie besitzt, deren Radius aber $= a\,tg^2\beta$ und deren Steigungswinkel $= 90 - \beta$ ist.

Der Radius der zweiten Krümmung ist gleichfalls konstant, nämlich

$$\varrho_1 = \frac{a^2+b^2}{b}.$$

Für die Schnittlinie der Normalebenen durch zwei aufeinander folgende, den Winkeln $\omega$ und $\omega + d\omega$ entsprechende Punkte gelten die Gleichungen

$$\xi a \sin\omega - \eta a \cos\omega = b(\zeta - b\omega),$$
$$\xi a \cos\omega + \eta a \sin\omega = -b^2;$$

quadriert und addiert man und setzt zur Abkürzung

$$\frac{b^2}{a} = a\,tg^2\beta = c, \quad \frac{b}{a} = tg\,\beta = \varkappa,$$

so erhält man

$$\omega = \frac{\varkappa\zeta \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - c^2}}{c}$$

und durch Substitution in die zweite Gleichung

$$\xi \cos\left(\frac{\varkappa\zeta \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - c^2}}{c}\right) + \eta \sin\left(\frac{\varkappa\zeta \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - c^2}}{c}\right) + c = 0;$$

dies ist die Gleichung der Evolutenfläche.

9. **Die konische Schraubenlinie** ist der Durchschnitt eines Rotationskegels und einer um dieselbe Achse beschriebenen Schraubenfläche; nimmt man die gemeinschaftliche Achse beider Flächen zur $z$-Achse, so hat man für $x$, $y$, $z$ die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 = z^2 \, tg^2 \gamma, \quad \frac{y}{x} = tg\,\frac{z}{c},$$

oder, wenn $\frac{z}{c} = \omega$, $\quad c\,tg\,\gamma = b$ gesetzt wird,

$$x = b\omega \cos\omega, \quad y = b\omega \sin\omega, \quad z = c\omega,$$

woraus u. a. folgt, daß die Horizontalprojektion der konischen Schraubenlinie eine archimedische Spirale ist.

Zur Abkürzung sei $b^2 + c^2 = a^2$; man erhält dann

$$\cos\tau_x = \frac{b(\cos\omega - \omega\sin\omega)}{\sqrt{a^2 + b^2\omega^2}} = \frac{c(cx - yz)}{z\sqrt{a^2c^2 + b^2z^2}},$$

$$\cos\tau_y = \frac{b(\sin\omega + \omega\cos\omega)}{\sqrt{a^2 + b^2\omega^2}} = \frac{c(cy + xz)}{z\sqrt{a^2c^2 + b^2z^2}},$$

$$\cos\tau_z = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2\omega^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2c^2 + b^2z^2}},$$

ferner als Gleichungen der Tangente

$$cz\xi = (cx - yz)\zeta + yz^2, \quad cz\eta = (cy + xz)\zeta - xz^2,$$

woraus z. B. folgt, daß die Horizontalspur der Tangente eine Spirale beschreibt, deren Vektoren proportional den Quadraten der Polarwinkel wachsen.

Die Gleichung der Normalebene ist

$$c(cx - yz)\xi + c(cy + xz)\eta + c^3\zeta = a^2z^2.$$

Für die beiden Krümmungshalbmesser findet man

$$\varrho = \frac{(\sqrt{a^2c^2 + b^2z^2})^3}{bc\sqrt{4a^2c^4 + (4b^2 + c^2)c^2z^2 + b^2z^4}},$$

$$\varrho_1 = \frac{4a^2c^4 + (4b^2 + c^2)c^2z^2 + b^2z^4}{c^3(6c^2 + z^2)}.$$

# Kapitel VII.

## Die Diskussion der Flächen.

### § 22.

### Allgemeine Regeln und Formeln.

Die Gleichung einer Fläche sei in rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt und zur Abkürzung

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

gesetzt; diese Differentialquotienten werden entweder direkt oder nach § 12 berechnet, je nachdem die Gleichung der Fläche in der entwickelten Form $z = f(x, y)$ oder unentwickelt in der Form $F(x, y, z) = 0$ gegeben ist; die Berührungsebene im Punkte $xyz$ hat dann zur Gleichung

$$p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = 0.$$

Die Stellungswinkel dieser Ebene, d. h. die Richtungswinkel der Normale im Punkte $xyz$ bestimmen sich durch die Formeln

$$\cos \nu_x = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

$$\cos \nu_y = -\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

$$\cos \nu_z = +\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}};$$

die Gleichungen der Normalen sind

$$\xi - x = -p(\zeta - z), \quad \eta - y = -q(\zeta - z).$$

Soll eine Ebene, deren Gleichung

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 1$$

sein möge, die Normale in sich enthalten, so müssen die Bedingungen

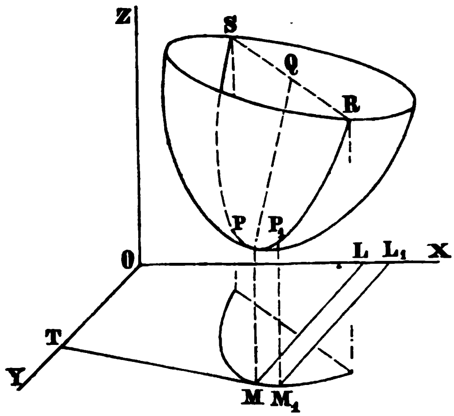
$$\gamma = \alpha p + \beta q, \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 1$$

erfüllt sein, wodurch die obige Gleichung übergeht in

$$\alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y) + (\alpha p + \beta q)(\zeta - z) = 0;$$

das Verhältnis $\frac{\beta}{\alpha}$ bleibt hierbei willkürlich. Denkt man sich (Fig. 50) außer dem Punkt $xyz$ oder $P$, durch welchen die Normale $PQ$ geht, einen zweiten Flächenpunkt $P_1$ mit den Koordinaten $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ und legt durch $PQ$ und $P_1$ eine Ebene, so hat man ferner

Fig. 50.




$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0,$$

oder wegen $\gamma = \alpha p + \beta q$ und $dz = p dx + q dy$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha + (\alpha p + \beta q) p}{\beta + (\alpha p + \beta q) q}.$$

Da $x$ und $y$ voneinander unabhängig sind, so bedeutet $\frac{dy}{dx}$ zunächst keinen eigentlichen Differentialquotienten, sondern nur das Verhältnis zweier beliebig abnehmender Inkremente, d. h. eine willkürliche Größe $\varepsilon$, geometrisch die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen der Geraden $M_1MT$ und der Abscissenachse. Mittelst der vorigen Gleichung kann man $\varepsilon$ aus $\frac{\beta}{\alpha}$ oder umgekehrt dieses Verhältnis aus $\varepsilon$ herleiten, nämlich

$$\varepsilon = -\frac{1 + p^2 + \frac{\beta}{\alpha} pq}{\frac{\beta}{\alpha}(1 + q^2) + pq}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1 + p^2 + pq\varepsilon}{(1 + q^2)\varepsilon + pq}.$$

Der Normalschnitt $RPS$ hat in $P$ den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{1 + \varepsilon^2 + (p + q\varepsilon)^2}{r + 2s\varepsilon + t\varepsilon^2} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}.$$

Wählt man die Größe $\varepsilon$ so, daß sie der quadratischen Gleichung genügt

$$[(1 + q^2)s - pqt]\varepsilon^2 + [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]\varepsilon = (1 + p^2)s - pqr,$$

so erreicht $\varrho$ seinen größten oder kleinsten Wert. Statt diese

Gleichung aufzulösen und die den Wurzeln $\varepsilon = \varepsilon_1$ und $\varepsilon = \varepsilon_2$ entsprechenden Werte $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ nach der vorigen Formel zu berechnen, kann man die Hauptkrümmungshalbmesser $\varrho_1$ und $\varrho_2$ direkt bestimmen; wird nämlich zur Abkürzung

$$n = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

gesetzt, so sind $\varrho_1$ und $\varrho_2$ die Wurzeln der Gleichung

$$(rt - s^2)\varrho^2 - [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]n\varrho + n^4 = 0,$$

mithin ist auch

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{rt - s^2}n,$$

$$\varrho_1 \varrho_2 = \frac{n^4}{rt - s^2}.$$

Die Ebenen der beiden Hauptnormalschnitte stehen aufeinander senkrecht.

Für irgend einen Normalschnitt, der mit dem ersten Hauptnormalschnitte den Winkel $\theta$ bildet, bestimmt sich der Krümmungshalbmesser mittelst der Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\theta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\theta}{\varrho_2},$$

oder

$$\varrho = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 \sin^2\theta + \varrho_2 \cos^2\theta} = \frac{2\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2 - (\varrho_1 - \varrho_2)\cos 2\theta}.$$

In dem speziellen Falle, wo $\varrho_1$ und $\varrho_2$ gleich und von gleichem Vorzeichen sind, erhalten alle $\varrho$ denselben Wert, hängen also nicht mehr von $\varepsilon$ ab. Da die allgemeine Formel für $\varrho$ geschrieben werden kann

$$\varrho = \frac{1 + p^2}{r} \cdot \frac{1 + \frac{2pq}{1 + p^2}\varepsilon + \frac{1 + q^2}{1 + p^2}\varepsilon^2}{1 + \frac{2s}{r}\varepsilon + \frac{t}{r}\varepsilon^2}n,$$

so tritt der obige Fall nur dann ein, wenn gleichzeitig

$$\frac{pq}{1 + p^2} = \frac{s}{r}, \quad \frac{1 + q^2}{1 + p^2} = \frac{t}{r}$$

ist, oder

$$pqr = (1 + p^2)s, \quad (1 + q^2)r = (1 + p^2)t,$$

wofür symmetrisch geschrieben werden kann

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2}.$$

In Verbindung mit der Gleichung der Fläche bestimmen diese Relationen die sogenannten Kreispunkte (Nabelpunkte, Punkte sphärischer Krümmung) der Fläche.

Die Hauptkrümmungshalbmesser $\varrho_1$ und $\varrho_2$ werden gleich und von entgegengesetztem Zeichen, sobald

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0$$

ist. In Verbindung mit der Gleichung der Fläche bestimmt diese Relation diejenigen Flächenpunkte, welchen die genannte Eigenschaft von $\varrho_1$ und $\varrho_2$ zukommt.

Es kann sich ereignen, daß die vorige Relation für jedes der Flächengleichung Genüge leistende Wertsystem $(x, y, z)$ stattfindet; dann sind in jedem Punkte der betreffenden Fläche die beiden Hauptkrümmungshalbmesser gleichgroß und entgegengesetzt gerichtet. Dieser Fall tritt bei den sogenannten Minimalflächen ein, zu denen z. B. die beiden in § 23 unter 9 und 10 betrachteten Flächen gehören.

Im Falle $rt-s^2=0$ ist, wird $\frac{1}{\varrho}=0$, d. h. der eine Hauptnormalschnitt geht in dem betreffenden Punkte mit seiner Tangente eine Berührung höherer Ordnung ein.

Auch hier ist zu bemerken, daß die Relation

$$rt-s^2=0$$

unter Umständen für jedes der Flächengleichung Genüge leistende Wertsystem $(x, y, z)$ stattfinden kann; und zwar tritt dieser Fall bei sämtlichen Cylinderflächen und Kegelflächen, überhaupt bei allen sogenannten abwickelbaren Flächen ein. Derartige Flächen werden von einer Ebene nicht in einem Punkte, sondern längs einer Geraden berührt.

## § 23.

### Beispiele.

1. Das elliptische Paraboloid. Die Gleichung der Fläche sei

$$z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}$$

und darin $a>b$. Als Gleichung der Berührungsebene findet man

$$\frac{x}{az}\xi+\frac{y}{bz}\eta-\frac{1}{z}\zeta=1,$$

wonach die Spuren dieser Ebene leicht zu konstruieren sind. Die Gleichungen der Normale sind

$$\xi - x = -\frac{x}{a}(\zeta - z), \quad \eta - y = -\frac{y}{b}(\zeta - z);$$

setzt man

$$n = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}},$$

so bestimmen sich die Richtungswinkel der Normale durch die Formeln

$$\cos\nu_x = -\frac{x}{an}, \quad \cos\nu_y = -\frac{y}{bn}, \quad \cos\nu_z = +\frac{1}{n}.$$

Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser $\varrho_1$ und $\varrho_2$ sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\varrho^2 - \left(a + b + \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right) n\varrho + abn^4 = 0;$$

setzt man zur Abkürzung $\frac{1}{2}(a + b) = c$, so erhält man

$$\varrho_1 = n\{c + z + \sqrt{(c + z)^2 - abn^2}\},$$

$$\varrho_2 = n\{c + z - \sqrt{(c + z)^2 - abn^2}\}.$$

Beide Krümmungshalbmesser sind positiv, mithin sind es auch die Krümmungshalbmesser aller Normalschnitte.

Zur Bestimmung der Kreispunkte dienen die Gleichungen

$$xy = 0, \quad ay^2 - bx^2 = ab(a - b);$$

die erste Gleichung gibt entweder $x = 0$ oder $y = 0$, wobei der letzte Wert wegen $a > b$ unbrauchbar ist; die Koordinaten der Kreispunkte sind folglich

$$x = 0, \quad y = +\sqrt{b(a - b)}, \quad z = \tfrac{1}{2}(a - b),$$

$$x = 0, \quad y = -\sqrt{b(a - b)}, \quad z = \tfrac{1}{2}(a - b).$$

2. **Das hyperbolische Paraboloid.** Die Gleichung der Fläche sei

$$z = \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b};$$

als Gleichung der Berührungsebene findet sich dann

$$\frac{x}{az}\xi - \frac{y}{bz}\eta - \frac{1}{z}\zeta = 1.$$

Um zu entscheiden, ob diese Ebene außer dem Punkte $xyz$ noch andere Punkte mit dem hyperbolischen Paraboloide gemein hat, verbinde man die Gleichung der Berührungsebene mit der Gleichung

$$\zeta = \frac{\xi^2}{2a} - \frac{\eta^2}{2b};$$

die Elimination von $\zeta$ gibt

$$a(\eta - y)^2 - b(\xi - x)^2 = 0,$$

und da diese Gleichung zwei Gerade darstellt, so schneidet die Berührungsebene das Paraboloid in zwei Geraden, deren Horizontalprojektionen parallel zur Horizontalspur der Fläche sind.

Als Gleichungen der Normale erhält man die Relationen

$$\xi - x = -\frac{x}{a}(\zeta - z), \quad \eta - y = +\frac{y}{b}(\zeta - z);$$

wird ferner zur Abkürzung

$$n = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

gesetzt, so sind die Cosinus der Richtungswinkel der Normale

$$\cos \nu_x = -\frac{x}{an}, \quad \cos \nu_y = +\frac{y}{bn}, \quad \cos \nu_z = \frac{1}{n}.$$

Mit Benutzung des abkürzenden Zeichens $c = \frac{1}{2}(a - b)$ erhält man für die Hauptkrümmungshalbmesser

$$\varrho_1 = n\{c + z + \sqrt{(c + z)^2 + abn^2}\},$$

$$\varrho_2 = n\{c + z - \sqrt{(c + z)^2 + abn^2}\}.$$

Dabei ist $\varrho_1$ positiv, $\varrho_2$ negativ; die Krümmungshalbmesser aller um einen Punkt herum liegenden Normalschnitte erstrecken sich demgemäß teils nach der einen, teils nach der anderen entgegengesetzten Richtung.

Das hyperbolische Paraboloid besitzt keine Kreispunkte, wohl aber solche Punkte, in denen die Hauptkrümmungshalbmesser gleich und entgegengesetzt sind. Die Bedingung $\varrho_1 + \varrho_2 = 0$ gibt nämlich $z = -c$; die erwähnten Punkte liegen demnach auf einer horizontalen Ebene, welche die Fläche in einer Hyperbel schneidet.

3. Das dreiachsige Ellipsoid. Statt der gewöhnlichen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

schreiben wir kürzer

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1;$$

die Werte der fünf erforderlichen Differentialquotienten sind dann

$$p = -\frac{Ax}{Cz}, \quad q = -\frac{By}{Cz},$$

$$r = -\frac{A(Ax^2 + Cz^2)}{C^2 z^3}, \quad s = -\frac{ABxy}{C^2 z^3}, \quad t = -\frac{B(By^2 + Cz^2)}{C^2 z^3}.$$

Die Gleichung der Berührungsebene wird

$$Ax\xi + By\eta + Cz\zeta = 1,$$

woraus folgt, daß diese Ebene auf den Koordinatenachsen die Strecken

$$\frac{1}{Ax} = \frac{a^2}{x}, \quad \frac{1}{By} = \frac{b^2}{y}, \quad \frac{1}{Cz} = \frac{c^2}{z}$$

abschneidet, deren Konstruktion sehr einfach ist.

Die Normale bestimmt sich durch folgende Gleichungen

$$\frac{\xi - x}{Ax} = \frac{\eta - y}{By} = \frac{\zeta - z}{Cz};$$

ihre Richtungswinkel findet man, wenn zur Abkürzung

$$N = \sqrt{A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2}$$

gesetzt wird, mittelst der Formeln

$$\cos \nu_x = \frac{Ax}{N}, \quad \cos \nu_y = \frac{By}{N}, \quad \cos \nu_z = \frac{Cz}{N}.$$

Ferner ergibt sich aus den obigen Werten von $p$, $q$, $r$, $s$, $t$

$$\begin{aligned}(1 + q^2)r &- 2pqs + (1 + p^2)t \\ &= -\frac{A^2(B + C)x^2 + B^2(C + A)y^2 + C^2(A + B)z^2}{C^3 z^3} \\ &= -\frac{AB + CN^2 - (A - C)(B - C)Cz^2}{C^3 z^3};\end{aligned}$$

$$rt - s^2 = \frac{AB}{C^3 z^4};$$

für die Hauptkrümmungshalbmesser ist also

$$\varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{A^2(B + C)x^2 + B^2(C + A)y^2 + C^2(A + B)z^2}{ABC} N,$$

$$\varrho_1 \varrho_2 = \frac{N^4}{ABC}.$$

Das positive Vorzeichen von $\varrho_1 \varrho_2$ beweist, daß beide Faktoren gleiche Vorzeichen haben; demzufolge liegen die Krümmungshalbmesser aller durch den Punkt $xyz$ gehenden Normalschnitte nach derselben Seite hin.

Unter der Voraussetzung $a > b > c$, also $A < B < C$ besitzt die Fläche vier Kreispunkte, deren Koordinaten aus den Formeln

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

durch Kombinationen der Vorzeichen erhalten werden.

4. **Das einfache Hyperboloid.** Wie im vorigen Beispiele mögen $A$, $B$, $C$ die reziproken Werte der Halbachsenquadrate bezeichnen; die Gleichung der Fläche ist dann

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 1,$$

und die Gleichung der Berührungsebene im Punkte $xyz$

$$Ax(\xi - x) + By(\eta - y) - Cz(\zeta - z) = 0,$$

oder

$$Ax\xi + By\eta - Cz\zeta = 1.$$

Um zu entscheiden, ob diese Ebene außer dem Berührungspunkte noch andere Punkte mit der Fläche gemein hat, verbinde man die vorstehende Gleichung mit der Gleichung

$$A\xi^2 + B\eta^2 - C\zeta^2 = 1,$$

was am einfachsten zu machen ist, wenn man $\xi - x = \xi_1$, $\eta - y = \eta_1$, $\zeta - z = \zeta_1$ setzt, wodurch die erwähnten zwei Gleichungen übergehen in

$$Ax\xi_1 + By\eta_1 - Cz\zeta_1 = 0,$$

$$A\xi_1^2 + B\eta_1^2 - C\zeta_1^2 = 0.$$

Durch Elimination von $\zeta_1$ ergibt sich

$$A(Cz^2 - Ax^2)\xi_1^2 + B(Cz^2 - By^2)\eta_1^2 - 2ABxy\xi_1\eta_1 = 0,$$

$$\frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{ABxy \pm \sqrt{ABC}\cdot z}{B(Cz^2 - By^2)},$$

oder vermöge der Werte von $\xi_1$, $\eta_1$, $A$, $B$, $C$, $z$

$$\eta - y = \frac{xy \pm \sqrt{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}}{x^2 - a^2}(\xi - x).$$

Hieraus folgt, daß die Fläche von ihrer Berührungsebene in zwei Geraden geschnitten wird, deren Horizontalprojektionen die Horizontalspur der Fläche (die sogenannte Kehlellipse) berühren.

Die Normale bestimmt sich durch die Gleichungen

$$\frac{\xi - x}{Ax} = \frac{\eta - y}{By} = -\frac{\zeta - z}{Cz};$$

für die Richtungswinkel $\nu_x$, $\nu_y$, $\nu_z$ gelten die Formeln

$$\cos \nu_x = \frac{Ax}{N}, \quad \cos \nu_y = \frac{By}{N}, \quad \cos \nu_z = -\frac{Cz}{N},$$

wo $N$ die nämliche Bedeutung hat, wie in Aufgabe 3.

Ebenso findet man die Werte von $\varrho_1 + \varrho_2$ und $\varrho_1 \varrho_2$ dadurch, daß man in den Formeln des dritten Beispiels $-C$ an die Stelle von $C$ treten läßt. Dabei wird $\varrho_1 \varrho_2$ negativ, mithin liegen die Hauptkrümmungshalbmesser nach entgegengesetzten Richtungen.

Auf dem einfachen Hyperboloide existieren keine Kreispunkte, wohl aber können solche Punkte vorkommen, in denen $\varrho_1$ und $\varrho_2$ entgegengesetzt gleich sind. Die hierzu nötige Bedingung ist

$$A^2(B - C)x^2 + B^2(A - C)y^2 + C^2(A + B)z^2 = 0$$

oder wenn die Werte von $z$, $A$, $B$, $C$, eingeführt und die Abkürzungen

$$a_1 = a\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}}$$

benutzt werden,

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1.$$

Jene Punkte sind hiernach die Durchschnitte des Hyperboloids mit einer konzentrischen Kugelfläche, deren Radius $= \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ ist; sie werden imaginär, wenn gleichzeitig $a_1 < a$ und $b_1 < b$, d. h. $a < c$ und zugleich $b < c$ ist.

5. Das geteilte Hyperboloid. Bezeichnen $A$, $B$, $C$ die reziproken Werte der Halbachsenquadrate, so ist die Gleichung der Fläche

$$-Ax^2 - By^2 + Cz^2 = 1,$$

man erhält demnach alle nötigen Formeln, wenn man in den Formeln des dritten Beispiels $-A$ für $A$ und gleichzeitig $-B$ für $B$ setzt.

Die Hauptkrümmungsradien $\varrho_1$ und $\varrho_2$ haben gleiche Vorzeichen, mithin liegen die Krümmungshalbmesser aller Normalschnitte nach einerlei Richtung.

Die Fläche besitzt vier Kreispunkte, deren Koordinaten (für $a > b$) durch folgende Formeln bestimmt werden

$$x = 0, \quad y = \pm b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}}, \quad z = \pm c\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}},$$

wobei alle Kombinationen der Vorzeichen zu bilden sind.

6. **Die Flächen zweiten Grades.** Aus der Untersuchung der zentrischen Flächen zweiten Grades geht hervor, daß die Normale eines Flächenpunktes nur dann mit dem Radiusvektor desselben Punktes zusammenfällt, wenn dieser Punkt zugleich auf einer der Hauptachsen liegt, d. h. wenn er ein Scheitel der Fläche ist. Diese Bemerkung kann dazu dienen, um die Scheitel und Haupthalbachsen einer zentrischen Fläche zu bestimmen, deren Gleichung in der allgemeineren Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = K$$

gegeben ist. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$Ax + Fy + Ez = u,$$

$$By + Dz + Fx = v,$$

$$Cz + Ex + Dy = w,$$

so erhält man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u}{w}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{v}{w};$$

hieraus bestimmen sich die Winkel $\nu_x$, $\nu_y$, $\nu_z$ und wenn diese identisch mit den Winkeln $(r, x)$, $(r, y)$, $(r, z)$ sein sollen $\left(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, so müssen die Bedingungen

$$\frac{v}{u} = \frac{y}{x}, \quad \frac{w}{u} = \frac{z}{x}$$

erfüllt sein. Dafür kann man schreiben

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z} = Q,$$

wobei $Q$ den gemeinschaftlichen Wert der drei Quotienten bezeichnet; es ist also

$$Ax + Fy + Ez = Qx,$$

$$By + Dz + Fx = Qy,$$

$$Cz + Ex + Dy = Qz$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $x$, $y$, $z$ und addiert, so ergibt sich

$$\alpha)\qquad K = Q(x^2 + y^2 + z^2), \quad r = \sqrt{\frac{K}{Q}}.$$

Es werde ferner zur Abkürzung

$$A - \frac{EF}{D} = L, \quad B - \frac{FD}{E} = M, \quad C - \frac{DE}{F} = N,$$

$$\frac{x}{D} + \frac{y}{E} + \frac{z}{F} = S$$

gesetzt, wo $L$, $M$, $N$ bekannt sind, dagegen $S$ unbekannt ist; die vorigen drei Bedingungsgleichungen lassen sich dann folgendermaßen darstellen

$$(Q - L)x = EFS, \quad (Q - M)y = FDS, \quad (Q - N)z = DES$$

oder

$$\beta)\qquad x = \frac{EFS}{Q-L}, \quad y = \frac{FDS}{Q-M}, \quad z = \frac{DES}{Q-N}.$$

Berechnet man hieraus $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \frac{K}{Q}$, so erhält man

$$\gamma)\qquad S^2 = \frac{K}{Q\left\{\left(\frac{EF}{Q-L}\right)^2 + \left(\frac{FD}{Q-M}\right)^2 + \left(\frac{DE}{Q-N}\right)^2\right\}};$$

dividiert man dagegen die vorigen drei Gleichungen durch $D$, $E$, $F$ und addiert, so kommt links wieder $S$ zum Vorschein und es bleibt

$$\delta)\qquad 1 = \frac{EF}{D} \cdot \frac{1}{Q-L} + \frac{FD}{E} \cdot \frac{1}{Q-M} + \frac{DE}{F} \cdot \frac{1}{Q-N}.$$

Die vorstehende kubische Gleichung bestimmt die Werte von $Q$; nachher gibt die Gleichung $\gamma$) die entsprechenden Werte von $S$; aus $\beta$) erhält man die Koordinaten der Scheitel und aus $\alpha$) die Radienvektoren der Scheitel, d. h. die Halbachsen der Fläche.

Um die Anzahl der reellen Wurzeln von Gleichung $\delta$) zu ermitteln, betrachte man die Relation

$$\eta = \frac{a}{\xi - L} + \frac{b}{\xi - M} + \frac{c}{\xi - N}$$

als Gleichung einer Kurve in den rechtwinkligen Koordinaten $\xi$ und $\eta$. Die Werte, welche $\eta$ für

$$\xi = -\infty,\quad L-0,\quad L+0,\quad M-0,\quad M+0,\quad N-0,\quad N+0,\quad +\infty$$

erhält, lassen erkennen, daß diese Kurve aus vier getrennten Zweigen besteht, von denen der erste und letzte die $\xi$-Achse zur Asymptote haben, daß $\eta$ an den Stellen $\xi = L$, $M$, $N$ unendlich groß wird und hierbei jedesmal sein Vorzeichen wechselt, daß also an den genannten drei Stellen Asymptoten parallel zur $\eta$-Achse vorhanden sind. Wenn nun insbesondere

$$\varepsilon)\qquad a = \frac{EF}{D},\quad b = \frac{FD}{E},\quad c = \frac{DE}{F}$$

ist, so haben, weil sich in diesem Falle $aD^2 = bE^2 = cF^2$ ergibt, die drei Koeffizienten $a$, $b$, $c$ ein und dasselbe Vorzeichen. Dann aber ist sicher, daß der Vorzeichenwechsel, welchen $\eta$ erleidet, wenn $\xi$, beständig wachsend, die drei Stellen $\xi = L$, $M$, $N$ passiert, jedesmal in gleichem Sinne erfolgt (d. h. entweder jedesmal von $-\infty$ zu $+\infty$ oder jedesmal von $+\infty$ zu $-\infty$); und hieraus kann, wie die Anschauung lehrt, geschlossen werden, daß die in Rede stehende Kurve von der durch die Gleichung $\eta = 1$ dargestellten geraden Linie dreimal geschnitten wird. Demnach gibt es unter der Annahme $\varepsilon$) stets drei reelle Werte von $\xi$, welche der Gleichung

$$1 = \frac{a}{\xi - L} + \frac{b}{\xi - M} + \frac{c}{\xi - N}$$

Genüge leisten; d. h. aber die Gleichung $\delta$) hat immer drei reelle Wurzeln. Diesen entsprechen jedoch — wenn $K$ als positiv vorausgesetzt wird — nur insoweit sie zugleich positiv sind, auch reelle Werte von $S$, $x$, $y$, $z$.

Hieraus folgt, daß die Fläche ein Ellipsoid, ein einfaches oder ein geteiltes Hyperboloid ist, je nachdem die Gleichung $\delta$) drei, zwei oder eine positive Wurzel besitzt.

7. Eine Fläche habe die folgende, geometrisch leicht zu interpretierende Gleichung

$$xyz = c^3;$$

die Gleichung der Berührungsebene ist dann

$$\frac{\xi - x}{x} + \frac{\eta - y}{y} + \frac{\zeta - z}{z} = 0,$$

oder

$$\frac{\xi}{3x} + \frac{\eta}{3y} + \frac{\zeta}{3z} = 1.$$

Diese Ebene schneidet außerdem die Fläche in einer Kurve, für welche die Gleichungen

$$\frac{\xi}{x}+\frac{\eta}{y}+\frac{\zeta}{z}=3 \quad \text{und} \quad \xi\eta\zeta=c^3$$

zusammen bestehen; die Horizontalprojektion des Durchschnittes hat demnach zur Gleichung

$$\left(3-\frac{\xi}{x}-\frac{\eta}{y}\right)\xi\eta=\frac{c^3}{z}.$$

Die Gleichungen der Normale sind

$$x(\xi-x)=y(\eta-y)=z(\zeta-z);$$

die Richtungswinkel der Normale bestimmen sich durch die Formeln

$$\frac{1}{N}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}},$$

$$\cos\nu_x=\frac{N}{x},\quad \cos\nu_y=\frac{N}{y},\quad \cos\nu_z=\frac{N}{z}.$$

Ferner hat man

$$\varrho_1+\varrho_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{N},\quad \varrho_1\varrho_2=\frac{c^6}{3N^4};$$

an den Stellen $x^2=y^2=z^2=c^2$ sind Kreispunkte vorhanden.

8. Die Gleichung einer Fläche sei

$$z=\frac{1}{2}\,lg\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),$$

oder bequemer

$$Cz=\frac{1}{2}\,lg\,(Ax^2+By^2);$$

die partiellen Differentialquotienten $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ sind dann

$$p=\frac{Ax}{C(Ax^2+By^2)},\quad q=\frac{By}{C(Ax^2+By^2)},$$

$$r=\frac{A(By^2-Ax^2)}{C(Ax^2+By^2)^2},\quad s=-\frac{2ABxy}{C(Ax^2+By^2)^2},\quad t=\frac{B(Ax^2-By^2)}{C(Ax^2+By^2)^2}.$$

Hieraus findet man als Gleichung der Berührungsebene

$$Ax\xi+By\eta-C(Ax^2+By^2)\,\zeta=(1-Cz)\,(Ax^2+By^2),$$

als Gleichungen der Normale

$$\xi-x=-\frac{Ax(\zeta-z)}{C(Ax^2+By^2)},\quad \eta-y=-\frac{By(\zeta-z)}{C(Ax^2+By^2)},$$

und für die Richtungswinkel der Normale, wenn zur Abkürzung

$$N = \sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2(Ax^2 + By^2)^2}$$

gesetzt wird,

$$\cos \nu_x = -\frac{Ax}{N}, \quad \cos \nu_y = -\frac{By}{N}, \quad \cos \nu_z = +\frac{C(Ax^2 + By^2)}{N}.$$

Ferner ist

$$\varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{AB - (A - B)C^2(Ax^2 - By^2)}{ABC^2(Ax^2 + By^2)} N,$$

$$\varrho_1 \varrho_2 = -\frac{N^4}{ABC^2(Ax^2 + By^2)^2}.$$

Hieraus folgt, daß der Durchschnitt der Fläche und des Cylinders

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{c^2}{b^2 - a^2}$$

alle diejenigen Punkte enthält, deren Hauptkrümmungsradien gleich und entgegengesetzt sind.

9. Das Katenoid. In der Vertikalebene $xz$ denke man sich die Kettenlinie konstruiert, deren Gleichung ist

$$z = c \lg\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - c^2}}{c}\right)$$

und lasse diese Kurve um die $z$-Achse rotieren; die entstehende Umdrehungsfläche hat dann zur Gleichung

$$z = c \lg\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - c^2}}{c}\right),$$

woraus die Werte folgen

$$p = \frac{cx}{u\sqrt{u^2 - c^2}}, \quad q = \frac{cy}{u\sqrt{u^2 - c^2}},$$

$$r = -\frac{c(x^4 - y^4 + c^2y^2)}{u^3\sqrt{(u^2 - c^2)^3}}, \quad t = +\frac{c(x^4 - y^4 - c^2x^2)}{u^3\sqrt{(u^2 - c^2)^3}},$$

$$s = -\frac{cxy(2x^2 + 2y^2 - c^2)}{u^3\sqrt{(u^2 - c^2)^3}};$$

hierbei steht $u$ zur Abkürzung für $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Die Berührungsebene hat zur Gleichung

$$cx(\xi - x) + cy(\eta - y) - u\sqrt{u^2 - c^2}(\zeta - z) = 0$$

und schneidet die Fläche in einer transzendenten Kurve. Für die Normale gelten die Gleichungen

$$\xi - x = -\frac{cx(\zeta - z)}{u\sqrt{u^2 - c^2}}, \quad \eta - y = -\frac{cy(\zeta - z)}{u\sqrt{u^2 - c^2}};$$

ferner ist

$$\cos\nu_x = -\frac{cx}{u^2}, \quad \cos\nu_y = -\frac{cy}{u^2}, \quad \cos\nu_z = +\frac{\sqrt{u^2 - c^2}}{u}.$$

Endlich hat man für alle der Flächengleichung genügenden Wertsysteme $(x, y, z)$ die Relation

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 0,$$

mithin kommt der Fläche die bemerkenswerte Eigenschaft zu, daß in jedem ihrer Punkte die beiden Hauptkrümmungsradien gleich und entgegengesetzt sind. (Vgl. § 22.)

10. Aus der Gleichung

$$\frac{y}{x} = tg\frac{z}{c},$$

durch welche eine einfache **Schraubenfläche** dargestellt wird, ergeben sich die Werte

$$p = -\frac{cy}{x^2 + y^2}, \quad q = +\frac{cx}{x^2 + y^2},$$

$$r = \frac{2cxy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad s = -\frac{c(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad t = -\frac{2cxy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Die Berührungsebene hat die Gleichung

$$cy\xi - cx\eta + (x^2 + y^2)\zeta = (x^2 + y^2)z;$$

für die Normale gelten die Gleichungen

$$\xi - x = \frac{cy}{x^2 + y^2}(\zeta - z), \quad \eta - y = -\frac{cx}{x^2 + y^2}(\zeta - z),$$

und die Cosinus der Richtungswinkel der Normale sind

$$\cos\nu_x = \frac{cy}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + c^2)}}, \quad \cos\nu_y = -\frac{cx}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + c^2)}},$$

$$\cos\nu_z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + c^2}}.$$

Endlich ist allgemein

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 0,$$

die fragliche Schraubenfläche besitzt also rücksichtlich der Hauptkrümmungshalbmesser die nämliche Eigenschaft wie das Katenoid. (Vgl. § 22.)

## § 24.

### Vermischte Aufgaben über Flächen.

I. Isokline Normalen. Eine im Punkte $xyz$ auf einer Fläche errichtete Normale schneidet die Horizontalebene $xy$ unter einem Winkel $\nu = \frac{1}{2}\pi - \nu_z$ und es ist daher

$$cot^2 \nu = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Von dem Punkte $xyz$ ausgehend, kann man auf der Fläche noch unendlich viel weitere Punkte finden, deren Normalen gleichfalls unter dem Winkel $\nu$ gegen den Horizont geneigt sind; derartige Normalen mögen isokline Normalen heißen.

Setzt man in der vorigen Formel $\nu$ einer Konstanten $\gamma$ gleich und nimmt die Gleichung der Fläche hinzu, so hat man zwei Bedingungen, durch welche diejenige Kurve bestimmt wird, in der die Fläche von den stetig aufeinander folgenden isoklinen Normalen geschnitten wird. Diese Kurve heiße kurz die Kurve der isoklinen Normalen.

1. Das elliptische Paraboloid. Die beiden vorhin erwähnten Bedingungen sind hier

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b},$$

$$cot^2 \gamma = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Aus der letzten Gleichung geht hervor, daß die Kurve der isoklinen Normalen eine elliptische Horizontalprojektion besitzt, daß sie mithin als Durchschnitt des Paraboloids und eines vertikalen elliptischen Cylinders betrachtet werden kann, dessen Halbachsen sind

$$a' = a\, tg\, \gamma, \quad b' = b\, tg\, \gamma.$$

Die Horizontalprojektion irgend einer Normale des Paraboloids hat die Gleichung

$$\frac{a}{x}(\xi - x) = \frac{b}{y}(\eta - y);$$

soll diese Normale zu den vorigen isoklinen Normalen gehören, so muß noch sein

$$\left(\frac{x}{a'}\right)^2 + \left(\frac{y}{b'}\right)^2 = 1,$$

welcher Bedingung durch $x = a' \cos \omega$, $y = b' \sin \omega$ genügt wird.

Die Horizontalprojektion einer isoklinen Normale ist demnach dargestellt durch die Gleichung

$$\frac{a\xi}{a' \cos\omega} - \frac{b\eta}{b' \sin\omega} = a - b;$$

diese Gerade schneidet auf den Koordinatenachsen die Strecken ab

$$\frac{(a-b)\,a'}{a} \cos\omega = (a-b)\, tg\,\gamma \cdot \cos\omega,$$

$$\frac{(a-b)\,b'}{b} \sin\omega = -(a-b)\, tg\,\gamma \cdot \sin\omega,$$

d. h. die Horizontalprojektionen aller isoklinen Normalen liegen so, daß die zwischen die Koordinatenachsen fallenden Strecken derselben die konstante Länge $(a-b)\, tg\,\gamma$ besitzen. Nach dieser Bemerkung sind die Horizontal- und Vertikalprojektionen einer Schar isokliner Normalen leicht zu konstruieren.

Für das hyperbolische Paraboloid gelten ähnliche Sätze.

2. Das Ellipsoid. Als Bedingungen hat man

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\cot^2\gamma = \frac{c^4}{z^2}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right),$$

und hieraus folgt durch Elimination von $z$, daß die Kurve der isoklinen Normalen eine aus den Halbachsen

$$a' = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2 tg^2\gamma}}, \quad b' = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2 tg^2\gamma}}$$

konstruierte Ellipse zur Horizontalprojektion hat.

Die Horizontalprojektion irgend einer unter dem Winkel $\gamma$ gegen die $xy$-Ebene geneigten Normale hat die Gleichung

$$\frac{a^2}{x}(\xi - x) = \frac{b^2}{y}(\eta - y),$$

wobei $x$ und $y$ an die Bedingung

$$\left(\frac{x}{a'}\right)^2 + \left(\frac{y}{b'}\right)^2 = 1$$

gebunden sind. Um letztere zu erfüllen, setze man $x = a' \cos\omega$, $y = b' \sin\omega$; die vorige Gleichung wird dann

$$a^2 b' \xi \sin\omega - b^2 a' \eta \cos\omega = (a^2 - b^2)\, a' b' \cos\omega \sin\omega.$$

# Kapitel VIII.

## Einhüllende Kurven und Flächen.

### § 25.

### Einhüllende Kurven.

Die Gleichung einer ebenen Kurve enthalte außer den Koordinaten $x$ und $y$ noch eine willkürliche Konstante $p$ (einen sogenannten Parameter), besitze also die Form

$$F(x, y, p) = 0.$$

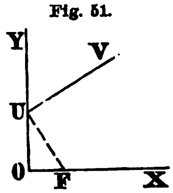
Läßt man $p$ sich stetig ändern, so entsteht eine Schar von Kurven derselben Art, die sich aber in ihren Dimensionen, Gestalten oder Lagen voneinander unterscheiden. Dabei kann es geschehen, daß jede solche Kurve die nächste schneidet, und dann bilden die successiven Durchschnitte eine neue Kurve, die sogenannte Einhüllende jener Schar. Die Gleichung der Einhüllenden ergibt sich dadurch, daß man aus den beiden Gleichungen

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0$$

den veränderlichen Parameter $p$ eliminiert.

Beispiel 1. Ein rechter Winkel bewege sich so, daß der eine Schenkel durch einen festen Punkt geht und der Scheitel auf einer festen Geraden hingleitet; man sucht die Einhüllende des anderen Schenkels (Fig. 51).

Fig. 51.




Nimmt man die feste Gerade zur Ordinatenachse, legt zu dieser senkrecht die Abscissenachse durch den festen Punkt $F$, wählt auf der $y$-Achse die Strecke $OU = u$ willkürlich und zieht $UV \perp FU$, so ist $FUV$ irgend eine Lage des rechten Winkels; die Gleichung von $UV$ lautet für $OF = a$

$$y = \frac{a}{u} x + u,$$

und darin bedeutet $u$ die willkürliche Konstante (vorhin $p$). Die partielle Differentiation in Beziehung auf $u$ gibt

$$0 = -\frac{a}{u^2} x + 1$$

und durch Elimination von $u$ entsteht

$$y^2 = 4ax.$$

Die Einhüllende ist hiernach eine Parabel (vgl. S. 144, Aufg. 1).

Beispiel 2. Ein rechter Winkel werde so verschoben, daß der eine Schenkel durch einen festen Punkt geht und der Scheitel einen gegebenen Kreis durchläuft; man sucht die Einhüllende des anderen Schenkels.

Der Mittelpunkt des Kreises sei der Koordinatenanfang $O$, seine Verbindungslinie mit dem festen Punkte $F$ die $x$-Achse, der Kreisradius $= a$, $OF = c$; die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf dem Kreise mögen $u$ und $v$ heißen; die Gleichung des zweiten Winkelschenkels ist dann

$$v(y - v) = (c - u)(x - u),$$

wobei $u$ und $v$ an die Bedingung

$$u^2 + v^2 = a^2$$

gebunden sind. Differenziert man die Gleichung der vorigen Geraden nach $u$ und beachtet, daß zufolge der letzten Bedingung $v$ abhängig von $u$ und deshalb $\frac{\partial v}{\partial u} = -\frac{u}{v}$ ist, so erhält man

$$(y - 2v)\left(-\frac{u}{v}\right) = -(c + x) + 2u.$$

Endlich gibt die Elimination von $u$ und $v$ aus allen drei Gleichungen

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2);$$

die Einhüllende ist also eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der feste Punkt innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt (vgl. S. 144, Aufg. 2).

Beispiel 3. Ein rechter Winkel bewegt sich so, daß der eine Schenkel durch den Scheitel einer Parabel geht, während der Scheitel des Winkels auf derselben Parabel fortrückt; man sucht die Einhüllende des anderen Schenkels.

Für den zweiten Schenkel gilt die Gleichung

$$v(y-v)=-u(x-u),$$

wobei $u$ und $v$ an die Bedingung

$$v^2=4au$$

gebunden sind. Wegen $\frac{\partial v}{\partial u}=\frac{2a}{v}$ erhält man durch Differentiation der ersten Gleichung

$$(y-2v)\frac{2a}{v}=-x+2u.$$

Eliminiert man $u$ das eine Mal aus der ersten und zweiten, das andere Mal aus der zweiten und dritten Gleichung, so erhält man

$$16a^2y+4a(x-4a)v-v^3=0,$$
$$4a^2y+2a(x-4a)v-v^3=0;$$

die Subtraktion beider Gleichungen gibt

$$v=-\frac{6ay}{x-4a},$$

und wenn man diesen Wert in eine der beiden vorhergehenden Gleichungen einsetzt, so gelangt man zu der Gleichung der Einhüllenden, nämlich

$$27ay^2=(x-4a)^3.$$

Die gesuchte Kurve ist demnach eine semikubische Parabel.

Beispiel 4. Ein rechter Winkel bewegt sich so, daß der eine Schenkel durch den Brennpunkt einer gegebenen Parabel geht, während der Scheitel auf derselben Parabel fortrückt; man sucht die Einhüllende des anderen Schenkels.

Die Gleichung des letzteren Schenkels ist

$$v(y-v)=(a-u)(x-u),$$

wobei $u$ und $v$ der Bedingung

$$v^2=4au$$

genügen müssen. Durch ein dem vorigen sehr ähnliches Verfahren erhält man als Gleichung der Einhüllenden

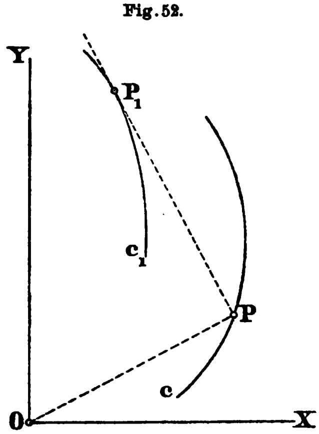
$$27ay^2=x(x-9a)^2;$$

letztere ist identisch mit der in § 15, Aufg. 7 untersuchten Kurve.

Anmerkung. Die Aufgaben 1—4 sind spezielle Fälle eines allgemeineren Problems, welches folgendermaßen formuliert werden kann: Auf einer gegebenen Kurve $c$ bewege sich der Scheitel eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel beständig durch den festen Punkt $O$ geht; welche Kurve $c_1$ umhüllt hierbei der andere Schenkel?

Da offenbar zu jeder ebenen Kurve $c$ eine andere ebene Kurve $c_1$ in der verlangten Beziehung steht, so können wir sagen, daß hier eine Transformation der Ebene vorliegt. Um zu einer analytischen Darstellung derselben zu gelangen, machen wir $O$ zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, bezeichnen die Koordinaten eines beliebigen Punktes $P$ der Kurve $c$ mit $x$, $y$ und die Koordinaten des entsprechenden Punktes $P_1$ der Kurve $c_1$ mit $x_1$, $y_1$ (Fig. 52). Dann ist zunächst sicher, daß die Relation

Fig. 52.




A) $(x_1 - x)x + (y_1 - y)y = 0$

stattfindet, welche aussagt, daß der Winkel $OPP_1$ ein rechter ist. Wird nun beachtet, daß — vermöge der Gleichung der Kurve $c$ — $y$ eine Funktion von $x$ ist, so kann die Relation A) als Gleichung einer veränderlichen Geraden mit dem laufenden Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und dem Parameter $x$ angesehen werden; diese Gerade ist nichts anderes als der zweite Schenkel unseres beweglichen rechten Winkels. Für die Einhüllende der genannten Geraden, also für die verlangte Kurve $c_1$, gilt aber außer der Relation A) noch die weitere aus ihr durch Differentiation nach dem Parameter $x$ hervorgehende Relation

B) $$x_1 - 2x + (y_1 - 2y)y' = 0 \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right).$$

Aus A) und B) endlich folgen durch Auflösen nach $x_1$ und $y_1$ die Gleichungen

C) $$x_1 = \frac{(x^2 - y^2)y' - 2xy}{xy' - y}, \quad y_1 = \frac{x^2 - y^2 + 2xyy'}{xy' - y},$$

welche $x_1$ und $y_1$ durch $x$, $y$, $y'$ ausdrücken und somit als analytisches Äquivalent der in Rede stehenden Transformation angesehen werden können. — Auf Grund dieser Gleichungen läßt sich mit Hilfe des in § 19a unter IV. gefundenen Satzes zeigen, daß unsere Transformation eine Berührungstransformation ist.

Übrigens steht die fragliche Transformation in einer sehr einfachen Beziehung zur Fußpunkttransformation; geht nämlich die Kurve $c_1$ aus der Kurve $c$ durch unsere Transformation hervor, so ist $c$ die Fußpunktkurve von $c_1$; denn der zweite Schenkel des oben benutzten beweglichen rechten Winkels ist eine Tangente von $c_1$, und der erste Schenkel ist das von dem festen Punkt $O$ auf diese Tangente gefällte Lot (vgl. Fig. 52). Da hiernach durch die Fußpunkttransformation $c_1$ in $c$, durch die neue Transformation aber $c$ wieder in $c_1$ übergeführt wird, so sagt man, die letztere Transformation sei invers zur Fußpunkttransformation, nennt auch wohl $c_1$ die negative Fußpunktkurve von $c$.

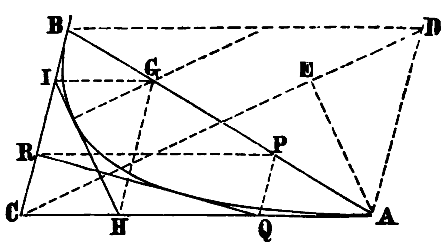
Beispiel 5 (Fig. 53). Auf der einen Seite $AB$ eines gegebenen Dreiecks $ABC$ wählt man den Punkt $P$ beliebig, legt durch denselben $PQ \parallel BC$, $PR \parallel AC$ und zieht die Gerade $QR$; welches ist die Einhüllende aller dieser Geraden?

Nimmt man $CA$ und $CB$ als Koordinatenachsen und setzt

$$CA = a, \quad CB = b,$$

$$CQ = u, \quad CR = v,$$

Fig. 53.




so ist die Gleichung der Geraden $QR$

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1,$$

wo $u$ und $v$ der Bedingung

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} = 1$$

genügen müssen. Die Einhüllende bestimmt sich durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) + 1 = 0$$

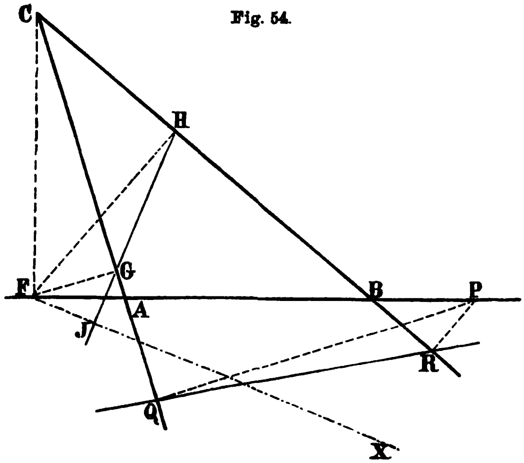
und ist eine Parabel, welche die Koordinatenachsen in $A$ und $B$ berührt. Um die Achse dieser Parabel zu finden, konstruiere man aus den Seiten $CA$, $CB$ das Parallelogramm $ACBD$, fälle auf dessen Diagonale $CD$ von $A$ aus die Senkrechte $AE$ und wähle auf $AB$ den Punkt $G$ so, daß

$$AG : BG = CE : DE;$$

dann ist $G$ ein Punkt der Parabelachse und die zu $G$ gehörende Gerade $HI \parallel AE$ die Scheiteltangente.

**Beispiel 6** (Fig. 54). Es sind drei Gerade gegeben, welche sich in den Punkten $A$, $B$, $C$ schneiden; jeder Punkt $P$ der Ge-

Fig. 54.




raden $AB$ wird auf die beiden übrigen Geraden $CA$ und $CB$ projiziert, wodurch die Punkte $Q$ und $R$ entstehen; man sucht die Einhüllende der Geraden $QR$.

Um ein bequemes Koordinatensystem zu erhalten, nehme man den Fußpunkt $F$ der Dreieckshöhe $CF$ zum Anfange rechtwinkliger Koordinaten, konstruiere die zugehörige Gerade $GH$ und lege die Abscissenachse $FX$ senkrecht zu $GH$. Für

$$FJ = c, \quad \angle JFG = \alpha, \quad \angle JFH = \beta$$

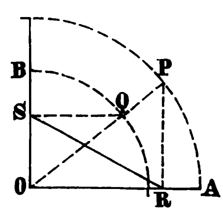
erhält man

$$\angle JFA = \alpha + \beta - 90^0,$$

und wenn $FP = r$ gesetzt wird, so ist die Gleichung der veränderlichen Geraden $QR$

$$c \cdot x - r \cos\alpha \cos\beta \cdot y = c^2 + r^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta.$$

Fig. 55.




Hieraus ergibt sich, daß die einhüllende Kurve eine Parabel ist, welche $F$ zum Brennpunkte und $J$ zum Scheitel hat.

**Beispiel 7** (Fig. 55). Mit den Radien $OA = a$ und $OB = b$ sind zwei konzentrische Kreise beschrieben und es sei $OB \perp OA$; irgend eine durch $O$ gelegte Gerade schneidet den ersten Kreis in $P$, den zweiten in $Q$; man projiziert ferner $P$ auf $OA$, $Q$ auf

$OB$, wodurch die Punkte $R$ und $S$ entstehen, und zieht die Gerade $RS$; welches ist die Einhüllende aller dieser Geraden?

Für $OR = u$, $OS = v$ hat man als Gleichung von $RS$

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1,$$

wobei $u$ und $v$ der Bedingung

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

genügen müssen. Bequemer ist es hier, den Winkel $AOP = \omega$ einzuführen, wodurch $u = a \cos \omega$, $v = b \sin \omega$ wird, und in der nunmehrigen Gleichung von $RS$, nämlich

$$\frac{x}{a \cos \omega} + \frac{y}{b \sin \omega} = 1,$$

den Winkel $\omega$ als willkürliche Konstante zu betrachten. Differenziert man die Gleichung in Beziehung auf $\omega$ und eliminiert nachher $\omega$, so erhält man als Gleichung der Einhüllenden

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Im Falle $b = a$ hat die Linie $RS$ die konstante Länge $a$ und es entsteht dann die in § 15, Aufg. 12 betrachtete Kurve (Astroide); im Falle $b < a$ ist die Einhüllende identisch mit der Evolute einer aus den Halbachsen

$$\frac{ab^2}{a^2 - b^2} \quad \text{und} \quad \frac{a^2 b}{a^2 - b^2}$$

konstruierten Ellipse.

Beispiel 8. Eine Gerade bewege sich so, daß das Rechteck aus den Strecken, welche sie von den Koordinatenachsen abschneidet, die konstante Fläche $c^2$ besitzt; man sucht die Einhüllende jener Geraden.

Nennt man $u$ und $v$ die erwähnten Abschnitte, so ist die Gleichung der beweglichen Geraden

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1,$$

wobei $u$ und $v$ an die Bedingung

$$uv = c^2$$

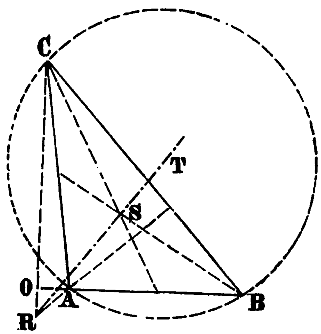
gebunden sind. Als Einhüllende ergibt sich eine Hyperbel, welche durch die Gleichung

$$xy = \tfrac{1}{4} c^2$$

bestimmt ist.

Beispiel 9. In jedem Dreieck $ABC$ (Fig. 56) liegen bekanntlich der Höhendurchschnitt $R$, der Durchschnitt $S$ der Mittellinien (der Schwerpunkt der Dreiecksfläche) und der Mittelpunkt $T$ des umschriebenen Kreises in einer Geraden; läßt man die Spitze $C$ in einer zur Basis $AB$ senkrechten Geraden fortrücken, so ändert die Gerade $RST$ ihre Lage, und es fragt sich, welches die Einhüllende von $RST$ ist.

Fig. 56.




Die Basis $AB$ sei die Abscissenachse, die zugehörige Höhe $OC$ die Ordinatenachse; für $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ sind dann die Koordinaten

$$\begin{array}{llll} \text{von } R\text{: Absc.} = 0, & & \text{Ord.} = -\frac{ab}{c}, \\ \text{,, } S\text{: ,,} & = \frac{a+b}{3}, & \text{,,} = \frac{c}{3}, \\ \text{,, } T\text{: ,,} & = \frac{a+b}{2}, & \text{,,} = \frac{ab+c^2}{2c}, \end{array}$$

und demnach ist die Gleichung der Geraden $RST$

$$(a+b)cy = (3ab + c^2)x - ab(a+b).$$

Differenziert man die Gleichung nach $c$ und eliminiert dann $c$, so erhält man

$$\left(x - \frac{a+b}{6}\right)^2 - \frac{(a+b)^2}{12ab}y^2 = \left(\frac{a+b}{6}\right)^2.$$

Die Einhüllende ist demnach eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem der Punkt $O$ zwischen $A$ und $B$ oder außerhalb der Strecke $AB$ liegt. Fällt $O$ mit einem der Punkte $A$ und $B$ zusammen, so reduziert sich die Einhüllende auf den Punkt $O$.

Beispiel 10. In einem Dreiecke $ABC$ ist $C$ mit einem willkürlichen Punkte $N$ der Geraden $AB$ verbunden und die Strecke $CN$ in $M$ halbiert worden; man zieht ferner die beiden Geraden $AM$ und $BM$, welche die Gegenseiten des Dreiecks in $P$ bzw. $Q$ schneiden mögen; es soll nun die Einhüllende der Geraden $PQ$ bestimmt werden.

Nimmt man $CB = a$ zur Abscissen-, $CA = b$ zur Ordinatenachse und bezeichnet die Gleichung von $CN$ mit $y = tx$, so erhält man als Gleichung von $PQ$

$$(at^2 + 2bt)x + (2at + b)y = abt$$

und hieraus als Gleichung der Einhüllenden

$$(2bx + 2ay - ab)^2 = 4ab\,xy$$

oder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \frac{xy}{ab} - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{1}{4} = 0.$$

Diese Gleichung repräsentiert eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Koordinaten $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{3}b$ besitzt, also der Schwerpunkt des Dreiecks ist, und welche ferner die Dreiecksseiten in deren Mitten berührt.

Wendet man die in der Trigonometrie übliche Bezeichnung an und setzt zur Abkürzung

$$k = a\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} = c\,\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\beta - \gamma)},$$

so bestimmen sich die Winkel $\vartheta$ und $90^0 + \vartheta$, welche die Achsen der Ellipse mit der $x$-Achse bilden, durch die Formel

$$tg\,2\vartheta = \frac{b \sin\gamma}{k + b\cos\gamma},$$

woraus sich leicht eine Konstruktion von $\vartheta$ herleiten läßt.

Beispiel 11. Man hat eine Schar konfokaler Parabeln konstruiert und von einem festen Punkte $C$ (dem Pole) aus an jede solche Parabel Tangenten gelegt, deren Berührungspunkte $P$ und $Q$ heißen mögen; es soll nun die Einhüllende sämtlicher Berührungssehnen $PQ$ (der Polaren) bestimmt werden.

Der gemeinschaftliche Brennpunkt der Parabeln sei der Koordinatenanfang, $p$ der veränderliche Halbparameter, $ab$ der Pol; die Gleichung einer der Parabeln ist dann

$$y^2 = 2px + p^2$$

und die Gleichung der zum Pole $ab$ gehörenden Polare*

$$p(x + a) - by + p^2 = 0.$$

* Vgl. Fort und Schlömilch, *Lehrbuch der analytischen Geometrie,* I. Teil, 7. Auflage von R. Heger, § 36.

Für die Einhüllende ergibt sich hieraus

$$(x + a)^2 + 4by = 0,$$

also wieder eine Parabel, deren Scheitel der Punkt $-a$, 0 ist, und deren Brennpunkt symmetrisch entgegengesetzt dem Pole $C$ liegt.

Beispiel 12. Wie vorhin sei $C$ der feste Pol, in bezug auf welchen die Polaren einer Schar konfokaler Ellipsen und Hyperbeln konstruiert sind; man sucht die Einhüllende aller Polaren.

Bezeichnet $e$ die lineare Exzentrizität, $q$ das Quadrat der Haupthalbachse, so ist für die Ellipse

$$\frac{x^2}{q} + \frac{y^2}{q - e^2} = 1$$

und für die Hyperbel

$$\frac{x^2}{q} - \frac{y^2}{e^2 - q} = 1,$$

welche Gleichungen formell übereinstimmen. Die Gleichung der Polare ist für beide Fälle

$$ax(q - e^2) + byq = q(q - e^2)$$

und daraus folgt als Gleichung der Einhüllenden

$$(ax - by - e^2)^2 + 4abxy = 0$$

oder

$$(ax + by)^2 - 2e^2(ax - by) + e^4 = 0.$$

Legt man die $y$-Achse auf die entgegengesetzte Seite und setzt

$$\frac{e^2}{a} = a_1, \quad \frac{e^2}{b} = b_1,$$

so ersieht man, daß die Einhüllende identisch ist mit der in Aufg. 5 betrachteten Parabel.

Beispiel 13. In der Ebene eines Kegelschnittes $K_1$ liege ein beliebiger Punkt $P$, von welchem aus an den Kegelschnitt Tangenten gelegt sind, deren Berührungspunkte $Q$ und $R$ heißen mögen. Man sucht die Einhüllende aller der Berührungssehnen (Polaren) $QR$, welche entstehen, wenn der Punkt $P$ einen zweiten Kegelschnitt $K_2$ durchläuft.

Die Hauptachse von $K_2$ nehme man zur Abscissenachse und einen Scheitel von $K_2$ zum Koordinatenanfang; die Koordinaten von $P$ seien $p$ und $q$; die Gleichung von $K_1$ hat dann die allgemeine Form

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$U = Ax + Cy + D,$$

$$V = Cx + By + E,$$

$$W = Dx + Ey + F,$$

so ist die Gleichung der veränderlichen Berührungssehne in den laufenden Koordinaten $x$ und $y$

$$Up + Vq + W = 0,$$

außerdem hat man als Gleichung von $K_2$

$$q^2 = 2hp + kp^2.$$

Zufolge der Bemerkung, daß

$$q^2 - kp^2 = \frac{h^2V^2 - kW^2}{U^2 - kV^2}$$

ist, erhält man als Gleichung der einhüllenden Kurve

$$h^2V^2 - 2hUW + kW^2 = 0.$$

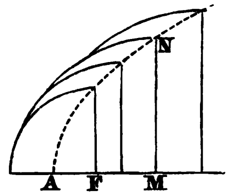
Vermöge der Werte von $U$, $V$, $W$ ergibt sich, daß die einhüllende Kurve wiederum ein Kegelschnitt $K_3$ ist, dessen spezielle Natur sich nach folgendem Satze entscheidet: je nachdem der Mittelpunkt von $K_1$ innerhalb, auf oder außerhalb $K_2$ liegt, wird $K_3$ zu einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Für den Fall eines parabolischen $K_1$ bleibt der Satz im wesentlichen derselbe, wenn der unendlich entfernte Punkt der Parabelachse als Mittelpunkt von $K_1$ betrachtet wird.

Anmerkung. Es liegt nahe, die soeben behandelte Aufgabe folgendermaßen zu verallgemeinern: Es sei $P$ ein beliebiger Punkt der Ebene, $p$ seine Polare in bezug auf den festen gegebenen Kegelschnitt $K$; es durchlaufe $P$ irgend eine vorgelegte Kurve $c$; welche Kurve $c_1$ ergibt sich dann als Einhüllende von $p$?

Da offenbar zu jeder Kurve $c$ eine ganz bestimmte Kurve $c_1$ gehört, so liegt hier eine Transformation der Ebene vor; und zwar hat dieselbe die Eigenschaft, jeder ebenen Figur ihre Polarfigur in bezug auf den festen Kegelschnitt $K$ zuzuordnen. Diese Transformation, welche als eine Transformation durch reziproke Polaren bezeichnet wird, ist übrigens stets, wie auch der zugrunde gelegte Kegelschnitt $K$ beschaffen sein möge, eine Berührungstransformation; dies kann mit Hilfe des in § 19a unter IV. gefundenen Satzes leicht bewiesen werden, wenn man ein rechtwinkliges Koordinatensystem benutzt, welches so gewählt ist, daß die Gleichung des Kegelschnitts $K$ möglichst einfach wird.

Beispiel 14. In einer Parabel, deren Achse die Abscissenachse sein möge, werden die Endpunkte der Abscissen als Mittelpunkte, die zugehörigen Parabelordinaten als Halbmesser von Kreisen genommen; man sucht die Einhüllende dieser Kreise.

Fig. 57.




Setzt man (Fig. 57) $AF = a$, $AM = u$, $MN = v$, so ist die Gleichung des aus $M$ mit dem Radius $MN$ beschriebenen Kreises

$$(x - u)^2 + y^2 = v^2,$$

wobei $v^2 = 4au$ sein muß. Hieraus findet sich, daß die Einhüllende durch die Gleichung

$$y^2 = 4a(x + a)$$

dargestellt, also wieder eine Parabel ist.

Beispiel 15. In einer Ellipse, deren große Achse die Abscissenachse sein möge, werden die Endpunkte der Abscissen als Mittelpunkte, die zugehörigen Ellipsenordinaten als Halbmesser von Kreisen genommen; man sucht die Einhüllende dieser Kreise.

Sind $u$ und $v$ die Koordinaten eines Kreismittelpunktes, so hat man

$$(x - u)^2 + y^2 = v^2, \quad \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1;$$

als Einhüllende ergibt sich hieraus eine konzentrische Ellipse, deren Halbachsen $\sqrt{a^2 + b^2}$ und $b$ sind.

Ein ähnliches Resultat liefert die Hyperbel.

Beispiel 16. Welches ist die Einhüllende von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer Parabel liegen und deren Peripherien durch den Scheitel derselben Parabel gehen?

Sind $u$ und $v$ die Koordinaten eines Kreismittelpunktes, so gelten die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy = 0, \quad u = \frac{v^2}{4a};$$

die Einhüllende hat zur Gleichung

$$x^3 + (2a + x)y^2 = 0$$

und ist demnach eine Cissoide, deren erzeugender Kreis seinen Mittelpunkt in dem Durchschnitte von Parabelachse und Direktrix hat und dessen Durchmesser dem Parameter $2a$ gleichkommt.

**Beispiel 17.** Welches ist die Einhüllende von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer Ellipse liegen und deren Peripherien durch das Zentrum der Ellipse gehen?

Bei derselben Bezeichnung wie in Nr. 15 hat man

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy = 0, \quad \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1;$$

die Einhüllende bestimmt sich durch die Gleichung

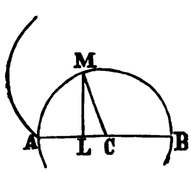
$$(x^2 + y^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2)$$

und ist folglich die Fußpunktkurve einer aus den Halbachsen $2a$ und $2b$ konstruierten Ellipse.

Ein ähnliches Resultat liefert die Hyperbel.

**Beispiel 18.** Welche Einhüllende gehört zu Kreisen, deren Mittelpunkte auf einem gegebenen Kreise liegen und deren Peripherien durch einen festen Punkt der Peripherie des gegebenen Kreises gehen (Fig. 58)?

Fig. 58.




Der Mittelpunkt des gegebenen Kreises sei $C$, der feste Peripheriepunkt $A$, ferner $AC = a$, $AL = u$, $LM = v$, endlich $A$ der Anfang und $AC$ die Abscissenachse; es ist dann

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy = 0, \quad v^2 = u(2a - u).$$

Drückt man $u$ und $v$ durch den Zentriwinkel $ACM = \omega$ aus, so hat man bequemer

$$x^2 + y^2 - 2ax = 2a(y \sin\omega - x\cos\omega).$$

Für die Einhüllende ergibt sich hieraus

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2);$$

dieselbe ist folglich eine Kardioide, deren erzeugender Kreis die Strecke $AB$ zum Durchmesser hat.

Anmerkung. Die Aufgaben unter 16—18 sind spezielle Fälle des folgenden allgemeineren Problems: Um die Punkte einer vorgelegten Kurve $c$ als Mittelpunkte sind Kreise beschrieben worden, welche durch den gegebenen festen Punkt $O$ hindurchgehen; es soll die Einhüllende $c_1$ dieser Kreise ermittelt werden.

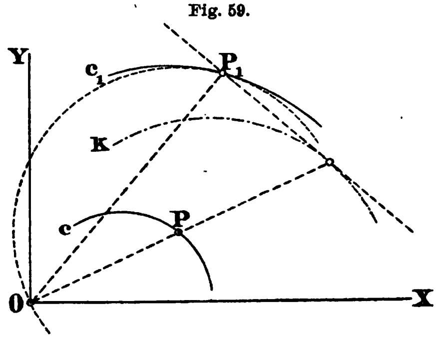
Da zu jeder beliebigen Kurve $c$ offenbar eine bestimmte Kurve $c_1$ gehört, handelt es sich hier abermals um eine Transformation der Ebene, welche sich übrigens bei näherer Untersuchung als eine Berührungstransformation erweist. Analytisch kann diese Transformation, wenn $O$ als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems benutzt wird, charakterisiert werden durch die Gleichungen

$$x_1 = \frac{2y'(xy'-y)}{y'^2+1}, \quad y_1 = -\frac{2(xy'-y)}{y'^2+1},$$

deren Ableitung nach dem Vorbilde der in der Anmerkung auf S. 197 angewendeten Methode erfolgen kann.

Die vorliegende Transformation steht in einem sehr bemerkenswerten Zusammenhange mit der Fußpunkttransformation. Die Kurve $c_1$ ist nämlich die Fußpunktkurve einer zur Kurve $c$ im Verhältnis $2:1$ ähnlichen Kurve $k$, wobei der Punkt $O$ das Ähnlichkeitszentrum für $c$ und $k$ und zugleich derjenige Punkt ist, von dem aus die Lote auf die Tangenten von $k$ zu fällen sind (Fig. 59). Unsere Transformation ist infolgedessen ersetzbar durch zwei nacheinander auszuführende Transformationen; durch die erste Transformation wird die Kurve $c$ in die Kurve $k$ übergeführt, indem die von $O$ ausgehenden Radienvektoren der Kurve $c$ verdoppelt werden, durch die zweite Transformation geht aus der Kurve $k$ die Kurve $c_1$ hervor, als Ort für die Fußpunkte der Lote, die sich von $O$ aus auf die Tangenten von $k$ fällen lassen. Die erste Transformation, welche als eine **Streckungstransformation** oder kurz **Streckung** bezeichnet wird, ist offenbar eine Punkttransformation; die zweite Transformation aber ist — als Fußpunkttransformation — nach früheren Feststellungen (§ 19a) eine Berührungstransformation.

Fig. 59.




**Beispiel 19.** Welche Einhüllende entsteht, wenn eine Ellipse so verändert wird, daß die Summe ihrer Halbachsen konstant bleibt?

Bezeichnet $k$ die konstante Summe, so findet sich für die Einhüllende

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}},$$

welcher Gleichung die auf S. 102, Aufg. 12 erwähnte Kurve (Astroide) entspricht.

**Beispiel 20.** Man sucht die Einhüllende der Fußpunktkurven aller konzentrischen Ellipsen, deren Halbachsen eine konstante Summe geben.

Ist wie vorhin $k$ die konstante Summe der beiden Halbachsen, so hat man als Gleichung der Fußpunktkurve

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + (k - a)^2y^2$$

und als Gleichung der Einhüllenden

$$(x^2 + y^2)^3 = k^2x^2y^2$$

oder in Polarkoordinaten

$$r = k \cos\theta \sin\theta.$$

Das letztere Resultat kann man auch unmittelbar dadurch erhalten, daß man von der Polargleichung der Fußpunktkurve ausgeht.

## § 26.

### Einhüllende Flächen.

I. Wenn in der Gleichung einer Fläche außer den Koordinaten $x$, $y$, $z$ noch ein willkürlicher Parameter vorkommt, wenn demnach die Gleichung der Fläche unter der Form

$$F(x, y, z, p) = 0$$

enthalten ist, so findet man die Gleichung der einhüllenden Fläche dadurch, daß man $p$ aus den beiden Gleichungen

$$F(x, y, z, p) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, z, p)}{\partial p} = 0$$

eliminiert. Das Verfahren ist also in diesem Falle dasselbe, wie bei der Aufsuchung einhüllender Kurven.

Aufgabe 1. Eine Ebene schneidet auf den Achsen der $x$, $y$, $z$ der Reihe nach die Strecken $p$, $q$, $c$ ab, von denen die letzte konstant ist, während $p$ und $q$ sich so verändern, daß ihr Produkt den konstanten Wert $k^2$ behält; man sucht die Einhüllende aller derartigen Ebenen.

Die Gleichung der veränderlichen Ebene ist

$$\frac{x}{p} + \frac{py}{k^2} + \frac{z}{c} = 1,$$

und hieraus findet sich als Gleichung der einhüllenden Fläche

$$(z - c)^2 = \frac{4c^2}{k^2} xy.$$

Letztere ist demnach ein Kegel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt die Koordinaten 0, 0, $c$ besitzt.

Aufgabe 2. Eine durch den Koordinatenanfang gehende Ebene schneidet die $xy$-Ebene in einer Geraden, welche mit der $x$-Achse den Winkel $\alpha$ bildet, ebenso die $xz$-Ebene in einer Geraden, welche mit der $x$-Achse den Winkel $\beta$ einschließt; man verlangt die Einhüllende dieser Ebene für den Fall, daß sich die Ebene dreht, während die Winkelsumme $\alpha + \beta$ den konstanten Wert $\gamma$ behält.

Unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems ist die Gleichung der veränderlichen Ebene

$$x - y \cot\alpha - z \cot(\gamma - \alpha) = 0;$$

betrachtet man $\alpha$ als veränderlichen Parameter, so erhält man als Gleichung der Einhüllenden

$$[x \sin\gamma - (y + z) \cos\gamma]^2 = 4yz.$$

Dieser Gleichung entspricht ein elliptischer Kegel.

Aufgabe 3. Eine Ebene bilde auf den drei Koordinatenachsen bez. die Abschnitte

$$\frac{t^2}{a+t}, \quad \frac{t^2}{b+t}, \quad \frac{t^2}{c+t},$$

wobei $a$, $b$, $c$ gegebene konstante Strecken sind, und $t$ eine veränderliche Strecke bedeutet; man sucht die Einhüllende aller solcher Ebenen.

Die Gleichung der Ebene ist

$$(a + t)x + (b + t)y + (c + t)z = t^2$$

und die Gleichung der Einhüllenden

$$(x + y + z)^2 + 4(ax + by + cz) = 0.$$

Die hiermit bestimmte Fläche ist ein parabolischer Cylinder.

Aufgabe 4. Man sucht die Einhüllende aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Parabel liegen und deren Oberflächen durch den Scheitel derselben Parabel gehen.

Nimmt man die Ebene der Parabel zur $xy$-Ebene, ihre Achse zur $x$-Achse und stellt die Gleichung der Parabel in der Form $v^2 = 2bu$ dar, so ist die Gleichung der veränderlichen Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{v^2}{b}x - 2vy = 0;$$

für die Einhüllende ergibt sich hieraus

$$(x^2 + y^2 + z^2)x + by^2 = 0.$$

**Aufgabe 5.** Man sucht die Einhüllende aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Ellipse liegen und deren Oberflächen durch den Mittelpunkt derselben Ellipse gehen.

Verfährt man ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe, so hat man als Gleichung der veränderlichen Kugelfläche die Relation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ux - 2vy = 0,$$

wobei $u$ und $v$ der Bedingung

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

genügen müssen. Als Gleichung der Einhüllenden ergibt sich die Relation

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2).$$

**Aufgabe 6.** Ein durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$$

bestimmtes hyperbolisches Paraboloid werde von einer Ebene geschnitten, welche den festen Punkt $\alpha\beta\gamma$ enthält und demgemäß zur Gleichung haben möge

$$M(x-\alpha) + N(y-\beta) + z - \gamma = 0.$$

Der Schnitt ist im allgemeinen eine Hyperbel, deren Asymptotenwinkel mittelst der Bemerkung gefunden werden kann, daß zwei in der Schnittebene vom Punkte $\alpha\beta\gamma$ nach den unendlich entfernten Hyperbelpunkten gezogene Gerade eine dem Asymptotenwinkel gleichen Winkel einschließen. Setzen wir nun in den Gleichungen beider Flächen

$$x = \alpha + r\cos\varphi, \quad y = \beta + r\cos\psi, \quad z = \gamma + r\cos\chi,$$

wobei $r$ die Entfernung der Punkte $\alpha\beta\gamma$ und $xyz$ bedeutet, so haben wir gleichzeitig

$$\frac{(\alpha + r\cos\varphi)^2}{a} - \frac{(\beta + r\cos\psi)^2}{b} = 2(\gamma + r\cos\chi),$$

$$M\cos\varphi + N\cos\psi + \cos\chi = 0.$$

Dividiert man die erste Gleichung durch $r^2$ und läßt dann $r$ unendlich werden, so entstehen die beiden Gleichungen

$$\frac{\cos^2\varphi}{a} - \frac{\cos^2\psi}{b} = 0,$$

$$M\cos\varphi + N\cos\psi + \cos\chi = 0,$$

und diese drücken die Bedingungen aus, welchen die Richtungswinkel $\varphi$, $\psi$, $\chi$ genügen müssen, wenn der Punkt $xyz$ ein unendlich ferner Hyperbelpunkt sein soll. Da die erste Gleichung quadratisch ist, so gibt es zwei derartige Richtungen $\varphi_1\psi_1\chi_1$ und $\varphi_2\psi_2\chi_2$, für welche man findet

$$\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1} = +\sqrt{\frac{b}{a}}, \quad \frac{\cos\psi_2}{\cos\varphi_2} = -\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Der Winkel zwischen beiden Richtungen bestimmt sich durch die Formel

$$\begin{aligned}\cos\omega &= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\psi_1\cos\psi_2 + \cos\chi_1\cos\chi_2\\ &= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\psi_1\cos\psi_2\\ &\quad + (M\cos\varphi_1 + N\cos\psi_1)(M\cos\varphi_2 + N\cos\psi_2)\end{aligned}$$

oder

$$\cos\omega = \cos\varphi_1\cos\varphi_2\left\{1 + M^2 + MN\left(\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1} + \frac{\cos\psi_2}{\cos\varphi_2}\right)\right.$$
$$\left. + (1+N^2)\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1}\cdot\frac{\cos\psi_2}{\cos\varphi_2}\right\},$$

d. i. zufolge der vorhin angegebenen Werte

$$\cos\omega = \cos\varphi_1\cos\varphi_2\,\frac{a(1+M^2) - b(1+N^2)}{a}.$$

Im Falle $a(1 + M^2) = b\,(1 + N^2)$ oder

$$aM^2 - bN^2 = b - a$$

wird $\omega = \frac{1}{2}\pi$; die vorstehende Gleichung ist also die Bedingung dafür, daß die Ebene

$$M(x-\alpha) + N(y-\beta) + z - \gamma = 0$$

mit dem Paraboloid einen gleichseitigen hyperbolischen Schnitt bildet.

Läßt man die Ebene sich so um den festen Punkt drehen, daß ihre Schnitte mit dem Paraboloid immer gleichseitige Hyperbeln bleiben, so erhält man für die Einhüllende aller derartigen Ebenen die Gleichung

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a} - \frac{(y-\beta)^2}{b} + \frac{(z-\gamma)^2}{a-b} = 0;$$

derselben entspricht ein elliptischer Kegel.

**Aufgabe 7.** Die beiden Hyperboloide und ihr gemeinschaftlicher Asymptotenkegel können durch die eine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\varepsilon$$

dargestellt werden, wobei $\varepsilon=+1$ dem einfachen Hyperboloid, $\varepsilon=0$ dem Asymptotenkegel, $\varepsilon=-1$ dem geteilten Hyperboloid entspricht. Für den Schnitt der einen oder anderen dieser Flächen mit einer durch den festen Punkt $\alpha\beta\gamma$ gehenden Ebene hat man außer der obigen Gleichung noch die folgende

$$M(x-\alpha)+N(y-\beta)+z-\gamma=0.$$

Wie bei der vorigen Aufgabe findet man leicht, daß die Richtungswinkel $\varphi$, $\psi$, $\chi$ einer von $\alpha\beta\gamma$ nach einem unendlich entfernten Punkte des Schnittes gezogenen Geraden an die Bedingungen

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\cos^2\psi}{b^2}-\frac{\cos^2\chi}{c^2}=0,$$

$$M\cos\varphi+N\cos\psi+\cos\chi=0$$

gebunden sind; für das Verhältnis $\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}$, welches kurz mit $\lambda$ bezeichnet werden möge, folgt hieraus die quadratische Gleichung

$$\lambda^2+\frac{2b^2MN}{b^2N^2-c^2}\lambda+\frac{b^2(a^2M^2-c^2)}{a^2(b^2N^2-c^2)}=0,$$

deren Wurzeln $\lambda_1$ und $\lambda_2$ heißen mögen. Der Winkel $\omega$ zwischen den entsprechenden Richtungen $\varphi_1\psi_1\chi_1$ und $\varphi_2\psi_2\chi_2$ bestimmt sich durch die Formel

$$\cos\omega=\cos\varphi_1\cos\varphi_2\{1+M^2+MN(\lambda_1+\lambda_2)+(1+N^2)\lambda_1\lambda_2\};$$

zufolge der Bedeutung von $\lambda_1$, $\lambda_2$ und unter Einführung der Abkürzungen

$$A=a^2(b^2-c^2),\quad B=b^2(a^2-c^2),\quad C=c^2(a^2+b^2)$$

ergibt sich weiter

$$\cos\omega=\cos\varphi_1\cos\varphi_2\frac{AM^2+BN^2-C}{a^2(b^2N^2-c^2)}.$$

Die Gleichung

$$AM^2+BN^2=C$$

ist hiernach die Bedingung dafür, daß die Ebene

$$M(x-\alpha)+N(y-\beta)+z-\gamma=0$$

mit der einen oder anderen der vorhin genannten drei Flächen einen gleichseitig-hyperbolischen Schnitt bildet.

Für die Einhüllende aller derartigen, durch den Punkt $\alpha\beta\gamma$ gehenden Ebenen erhält man die Gleichung

$$\frac{(x-\alpha)^2}{A}+\frac{(y-\beta)^2}{B}-\frac{(z-\gamma)^2}{C}=0,$$

welcher ein elliptischer Kegel entspricht. Ist gleichzeitig $c>a$ und $c>b$, so existieren überhaupt keine gleichseitig-hyperbolischen Schnitte, und dann stellt die obige Gleichung keine reelle Fläche mehr dar.

II. Wenn in der Gleichung einer Fläche zwei voneinander unabhängige Parameter $p$ und $q$ vorkommen, so findet man die Gleichung derjenigen Einhüllenden, welche den gleichzeitigen Änderungen von $p$ und $q$ entspricht, dadurch, daß man aus den Gleichungen

$$F(x,y,z,p,q)=0,$$

$$\frac{\partial F(x,y,z,p,q)}{\partial p}=0,\quad \frac{\partial F(x,y,z,p,q)}{\partial q}=0$$

die Parameter $p$ und $q$ eliminiert.

Aufgabe 8. Eine Ebene bewegt sich so, daß die Strecken, welche sie auf den Koordinatenachsen abschneidet, eine konstante Summe haben; man sucht die Einhüllende dieser veränderlichen Ebene.

Bezeichnet man die Achsenabschnitte mit $u$, $v$, $w$, ihre konstante Summe mit $k$, so ist $w=k-u-v$, mithin die Gleichung der Ebene

$$\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{k-u-v}=1.$$

Die veränderlichen Parameter sind hier $u$ und $v$; für die Einhüllende ergibt sich die Gleichung

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2=k.$$

Die Aufgabe läßt sich auf folgende Art verallgemeinern. Eine feste Ebene schneide von den Koordinatenachsen die Strecken $a$, $b$, $c$ ab; man projiziert jeden Punkt dieser Ebene auf die drei

Koordinatenachsen und legt durch die drei Projektionen eine neue Ebene. Die Einhüllende der letzteren hat zur Gleichung

$$\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}\right)^2=1.$$

**Aufgabe 9.** Eine Ebene bewegt sich so, daß das Parallelepiped aus den Strecken, welche sie auf den Koordinatenachsen abschneidet, den konstanten Inhalt $k^3$ besitzt; man sucht die Einhüllende dieser Ebene.

Die Gleichung der gesuchten Fläche ist

$$xyz=\frac{1}{27}k^3.$$

**Aufgabe 10.** Jeder Punkt eines Ellipsoides werde auf die Achsen desselben projiziert und durch die erhaltenen Projektionen eine Ebene gelegt; man sucht die Einhüllende aller dieser Ebenen.

Die Gleichung der veränderlichen Ebene sei

$$\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{w}=1;$$

die Abschnitte $u$, $v$, $w$ sind dann an die Bedingung

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}=1$$

gebunden. Hieraus folgt die Gleichung der Einhüllenden

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

**Aufgabe 11.** Die Berührungsebene im Scheitel eines elliptischen Paraboloids sei die $xy$-Ebene, die beiden Hauptebenen des Paraboloides mögen die übrigen Koordinatenebenen sein; jeder Punkt der Fläche werde auf die drei Koordinatenachsen projiziert und durch die Projektionen eine Ebene gelegt; man sucht die Einhüllende dieser Ebene.

Die Gleichung der veränderlichen Ebene sei

$$\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{w}=1,$$

wobei $u$, $v$, $w$ der Bedingung

$$\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}=2w$$

genügen müssen; die Gleichung der Einhüllenden ist

$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{y^2}{b}\right)^{\frac{1}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}=0.$$

Aufgabe 12. Welches ist die Einhüllende aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem dreiachsigen Ellipsoide liegen und deren Oberflächen durch den Mittelpunkt des Ellipsoides gehen?

Sind $u$, $v$, $w$ die Mittelpunktskoordinaten einer solchen Kugel, so hat man als Gleichung der letzteren

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ux - 2vy - 2wz = 0$$

und hierzu die Bedingung

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = 1.$$

Daraus ergibt sich

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4\,(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2);$$

die Einhüllende ist demnach die Fußpunktfläche eines aus den doppelten Achsen konstruierten Ellipsoides.

Aufgabe 13. Welche Einhüllende gehört zu Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem elliptischen Paraboloide liegen und deren Oberflächen durch den Scheitel desselben Paraboloides gehen?

Bei ähnlicher Bezeichnung wie vorhin ist

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ux - 2vy - 2wz = 0,$$

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} = 2w;$$

daraus ergibt sich

$$(x^2 + y^2 + z^2)\,z + ax^2 + by^2 = 0.$$

Die Einhüllende ist demnach die Fußpunktfläche eines aus den doppelten Parametern konstruierten elliptischen Paraboloides.

Anmerkung. Die in den Schlußbemerkungen zu Aufgabe 12 und 13 enthaltenen Beobachtungen können folgendermaßen verallgemeinert werden:

Zu irgend einer vorgelegten Fläche $F$ werde eine mit ihr im Verhältnis $2:1$ ähnliche Fläche $\Phi$ derart konstruiert, daß der gegebene feste Punkt $O$ Ähnlichkeitszentrum ist (man ziehe also von $O$ aus Strahlen nach sämtlichen Punkten von $F$ und verdoppele jeden Strahl); sodann werde zur Fläche $\Phi$ die Fußpunktfläche $\Psi$ hergestellt, indem von $O$ aus Lote auf sämtliche Tangentialebenen von $\Phi$ gefällt werden. Andererseits seien um sämtliche Punkte der ursprünglichen Fläche $F$ als Mittelpunkte Kugeln beschrieben, deren Oberflächen durch $O$ gehen; dann ist die Einhüllende aller dieser Kugeln identisch mit der Fläche $\Psi$.

Aufgabe 14. Ein dreiachsiges Ellipsoid verändert sich so, daß die Summe der Halbachsen den konstanten Wert $k$ behält; man sucht die Einhüllende.

Als Gleichung der letzteren findet sich die Relation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}};$$

die Einhüllende kann daher nach Aufgabe 10 auch aus einer mit dem Radius $k$ beschriebenen Kugel hergeleitet werden, was auch geometrisch eingesehen werden kann.

**Aufgabe 15.** Ein dreiachsiges Ellipsoid verändert sich so, daß die Summe der Halbachsenquadrate den konstanten Wert $h^2$ behält; man sucht die Einhüllende.

Die Gleichung der letzteren ist

$$(\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + z)^2 = h^2,$$

worin $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ positive oder negative Einheiten bezeichnen. Hiernach besteht die Einhüllende aus den acht Ebenen, welche von den Koordinatenachsen die Strecken $\pm h$ abschneiden.

**Aufgabe 16.** Ein dreiachsiges Ellipsoid verändert sich so, daß das Produkt seiner Halbachsen den konstanten Wert $k^3$ behält; man sucht die Einhüllende.

Als Gleichung derselben findet sich

$$x^2 y^2 z^2 = \tfrac{1}{27} k^6;$$

die Fläche ist also im wesentlichen dieselbe, wie bei der Aufgabe 9.

**Aufgabe 17.** Welche Einhüllende gehört zur Fußpunktfläche eines dreiachsigen Ellipsoides, dessen Halbachsen die konstante Summe $k$ haben?

Aus der Gleichung

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + (k - a - b)^2 z^2$$

erhält man

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) = k^2 x^2 y^2 z^2.$$

# Kapitel IX.

## Bestimmung der Werte vieldeutiger Ausdrücke.

### § 27.

### Die Formen $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$ und $\frac{\infty}{\infty}$.

I. Wenn die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für den speziellen Wert $x = a$ gleichzeitig verschwinden, so erhält der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ die vieldeutige Form $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{0}{0}$; der wahre Wert dieses Bruches findet sich dann mittelst des Satzes, daß unter den angegebenen Umständen

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

ist. Falls wiederum $\varphi'(a) = 0$ und zugleich $\psi'(a) = 0$ sein sollte, muß derselbe Satz zum zweitenmal angewendet werden u. s. f.

Beispiele. Es sei

1) $$y = \frac{(x-b)^m - (a-b)^m}{x-a};$$

$$\text{für } x = a \quad \text{wird} \quad y = \frac{0}{0} = m(a-b)^{m-1}.$$

2) $$y = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 12};$$

$$\text{für } x = -3 \quad \text{wird} \quad y = \frac{0}{0} = -1.$$

3) $$y = \frac{1 - (m+1)x^m + mx^{m+1}}{(1-x)^2};$$

$$\text{für } x = 1 \quad \text{wird} \quad y = \frac{0}{0} = \frac{m(m+1)}{2}.$$

4)
$$y = \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+cx}-\sqrt{a+c}};$$

$$\text{für } x = 1 \quad \text{wird} \quad y = \frac{0}{0} = \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a+c}{a+b}}.$$

5)
$$y = \frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}};$$

$$\text{für } x = 1 \quad \text{wird} \quad y = \frac{0}{0} = \frac{16}{9}.$$

6)
$$y = \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}-\sqrt{a-bx+cx^2}}{\sqrt{\alpha+\beta x}-\sqrt{\alpha-\beta x}};$$

$$\text{für } x = 0 \quad \text{wird} \quad y = \frac{0}{0} = \frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}.$$

7)
$$y = \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^m-(\sqrt{1+x^2}-x)^m}{x};$$

$$\text{für } x = 0 \quad \text{wird} \quad y = \frac{0}{0} = 2m.$$

8)
$$y = \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n+(\sqrt{1+x^2}-x)^n-2}{x^2};$$

$$\text{für } x = 0 \quad \text{wird} \quad y = \frac{0}{0} = n^2.$$

9)
$$y = \frac{a^x-b^x}{x};$$

$$\text{für } x = 0 \quad \text{wird} \quad y = \frac{0}{0} = lg\, a - lg\, b.$$

10)
$$y = \frac{x-a-a(lg\, x-lg\, a)}{a-\sqrt{2ax-x^2}};$$

$$\text{für } x = a \quad \text{wird} \quad y = \frac{0}{0} = 1.$$

11)
$$y = \frac{lg(x^{2m}+x^m-1)-m\, lg\, x}{x^2-1};$$

$$\text{für } x = 1 \quad \text{wird} \quad y = \frac{0}{0} = m.$$

12)
$$y = \frac{x^x-1}{x^m+x^n\, lg\, x-1};$$

$$\text{für } x = 1 \quad \text{wird} \quad y = \frac{0}{0} = \frac{1}{m+1}.$$

13) $$y = \frac{e^{(x^2)} - 1}{1 - \cos x};$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{0}{0} = 2$.

14) $$y = \frac{tg\, x}{kx + lg\,(1 + \sqrt{1 - x^2}) - lg\, 2};$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{0}{0} = \frac{1}{k}$.

15) $$y = \frac{\sin 3x + 4 \sin^3 x - 3\, lg\,(1 + x)}{(e^x - 1)\sin x};$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{0}{0} = \frac{3}{2}$.

16) $$y = \frac{1 - \cos x - lg \cos x}{x^2};$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{0}{0} = 1$.

17) $$y = \frac{1 - \cos(\mu \arcsin x)}{lg\,(1 + x^2)};$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{0}{0} = \frac{1}{2}\mu^2$.

18) $$y = \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x};$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{0}{0} = \frac{3}{2}$.

19) $$y = \frac{1 + 2\cos^3 x - 3\sqrt{\cos 2x}}{\sin^4 x};$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{0}{0} = \frac{9}{4}$.

20) $$y = \frac{1 - 5\sin^2 x + 4\cos^5 x - 5\sqrt{\cos^3 2x}}{\sin^6 x};$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{0}{0} = -\frac{15}{4}$.

II. Wenn die Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ für $x = a$ gleichzeitig unendlich werden, so erhält die Differenz $F(x) - f(x)$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$; den wahren Wert derselben findet man dadurch, daß man die Differenz in einen Bruch verwandelt z. B. mittelst der identischen Gleichung

$$F(x) - f(x) = \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)\,F(x)}}$$

und diesen, wenn nötig, nach der vorigen Regel untersucht.

21) $$z = \frac{\alpha}{1-x^\alpha} - \frac{\beta}{1-x^\beta};$$

für $x = 1$ wird $z = \infty - \infty = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

22) $$z = \frac{1}{lg\,x} - \frac{\alpha}{x^\alpha - 1};$$

für $x = 1$ wird $z = \infty - \infty = \frac{1}{2}\alpha$.

23) $$z = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1};$$

für $x = 0$ wird $z = \infty - \infty = \frac{1}{2}$.

24) $$z = \frac{2}{x} - \frac{1}{e^x - x - 1};$$

für $x = 0$ wird $z = \infty - \infty = \frac{2}{3}$.

25) $$z = \tfrac{1}{2}\pi \sec x - x\,tg\,x;$$

für $x = \frac{1}{2}\pi$ wird $z = \infty - \infty = 1$.

26) $$z = \frac{1}{x^2} - \cot^2 x;$$

für $x = 0$ wird $z = \infty - \infty = \frac{2}{3}$.

27) $$z = \frac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \frac{3}{x^4};$$

für $x = 0$ wird $z = \infty - \infty = \frac{1}{60}$.

28) $$z = \cot x - \frac{15 - 6x^2}{x(15 - x^2)};$$

für $x = 0$ wird $z = \infty - \infty = 0$.

29) $$z = \frac{3}{3x^4 - x^6} - \frac{1}{x^3\,arc\,tg\,x};$$

für $x = 0$ wird $z = \infty - \infty = \frac{1}{5}$.

30) $$z = \frac{2 + \sqrt{1-x^2}}{3x^4} - \frac{1}{x^3\,arc\,tg\,x};$$

für $x = 0$ wird $z = \infty - \infty = \frac{1}{180}$.

III. Wenn die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ für $x = a$ gleichzeitig unendlich werden, so erhält der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ die vieldeutige Form $\frac{\infty}{\infty}$; der wahre Wert desselben findet sich dann nach dem Satze, daß unter den angegebenen Umständen

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

ist; die Methode zur Bestimmung des wahren Wertes eines vieldeutigen Bruches bleibt also bei der Form $\frac{\infty}{\infty}$ dieselbe wie bei der Form $\frac{0}{0}$.

31) $$y = \frac{c - lg\, x}{a + \frac{b}{x}};$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{\infty}{\infty} = 0.$

32) $$y = \frac{log\,(x - a)}{log\,(e^x - e^a)};$$

für $x = a$ wird $y = \frac{\infty}{\infty} = 1.$

33) $$y = \frac{tg\, x}{a + \frac{b}{\pi - 2x}};$$

für $x = \frac{1}{2}\pi$ wird $y = \frac{\infty}{\infty} = \frac{2}{b}.$

34) $$y = \frac{log\, x}{a + b\, log\, sin\, x};$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{b}.$

35) $$y = \frac{log\, x}{a + b\, log\, tg\,(\mu x)};$$

für $x = 0$ wird $y = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{b}.$

36) $$y = \frac{lg\, x}{x^m}, \quad m > 0;$$

für $x = \infty$ wird $y = \frac{\infty}{\infty} = 0.$

37) $$y = \frac{x}{e^{ax}}, \quad a > 0;$$

für $x = \infty$ wird $y = \frac{\infty}{\infty} = 0.$

38) $$y = \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0;$$

$$\text{für } x = \infty \text{ wird } y = \frac{\infty}{\infty} = 0.$$

39) $$y = \frac{lg(a + be^x)}{\alpha + \beta x};$$

$$\text{für } x = \infty \text{ wird } y = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\beta}.$$

40) $$y = \frac{lg(a + be^x)}{\sqrt{\alpha + \beta x^2}};$$

$$\text{für } x = \infty \text{ wird } y = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

## § 28.

### Die Formen $0 \cdot \infty$, $0^0$, $\infty^0$ und $1^\infty$.

I. Wenn für $x = a$ gleichzeitig $\varphi(x)$ verschwindet und $f(x)$ unendlich wird, so erhält das Produkt $\varphi(x) \cdot f(x)$ die Form $0 \cdot \infty$; den wahren Wert desselben findet man dadurch, daß man $\varphi(x) \cdot f(x)$ in einen Quotienten verwandelt, welcher für $x = a$ entweder die Form $\frac{0}{0}$ oder die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt; dem ersten Falle entspricht die Umwandlung

$$\varphi(x) \cdot f(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

der zweite Fall tritt ein, wenn gesetzt wird

$$\varphi(x) \cdot f(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}.$$

41) $$z = x^p\, lg\left(\frac{1}{x}\right), \quad p \geqq 1;$$

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } z = 0 \cdot \infty = 0.$$

42) $$z = (\pi - 2x)\, tg\, x;$$

$$\text{für } x = \tfrac{1}{2}\pi \text{ wird } z = 0 \cdot \infty = 2.$$

43) $$z = lg\left(2 - \frac{x}{a}\right) \cdot tg\frac{\pi x}{2a};$$

$$\text{für } x = a \text{ wird } z = 0 \cdot \infty = \frac{2}{\pi}.$$

44) $$z = (e^a - e^x)\, tg\frac{\pi x}{2a};$$

für $x = a$ wird $z = 0\cdot\infty = \frac{2a}{\pi} e^a$.

45) $$z = lg\cos x\cdot\cot x;$$

für $x = 0$ wird $z = 0\cdot\infty = 0$.

46) $$z = lg\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\cdot\cot x;$$

für $x = 0$ wird $z = 0\cdot\infty = 1$.

47) $$z = arc\sin x\cdot\cot x;$$

für $x = 0$ wird $z = 0\cdot\infty = 1$.

48) $$z = arc\cos\frac{x}{a}\cdot tg\frac{\pi x}{2a};$$

für $x = a$ wird $z = 0\cdot\infty = \infty$.

49) $$z = \frac{x}{\alpha + \beta x^2}\cdot lg(a + be^x);$$

für $x = \infty$ wird $z = 0\cdot\infty = \frac{1}{\beta}$.

50) $$z = \sin\frac{c}{x}\cdot lg(a + be^x);$$

für $x = \infty$ wird $z = 0\cdot\infty = c$.

II. Wenn die Potenz $[f(x)]^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine der Formen $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$ annimmt, so benutzt man die Gleichung

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\cdot lg f(x)}$$

und untersucht den Exponenten $\varphi(x)\cdot lg f(x)$ nach den im vorigen Abschnitt gegebenen Regeln.

51) $$u = x^x;$$

für $x = 0$ wird $u = 0^0 = 1$.

52) $$u = x^{\frac{1}{a + b\,lg x}};$$

für $x = 0$ wird $u = 0^0 = e^{\frac{1}{b}}$.

53) $$u = x^{\frac{1}{lg(e^x - 1)}};$$

für $x = 0$ wird $u = 0^0 = e$.

54) $$u = \left(\frac{1}{a + be^x}\right)^{\frac{c}{x}};$$

für $x = \infty$ wird $u = 0^0 = e^{-c}$.

55) $$v = x^{\frac{1}{x}};$$

für $x = \infty$ wird $v = \infty^0 = 1$.

56) $$v = (a + be^{tg\, x})^{\pi - 2x};$$

für $x = \frac{1}{2}\pi$ wird $v = \infty^0 = e^2$.

57) $$v = (a + bx^m)^{\frac{1}{\alpha + \beta \lg x}}, \quad m > 0;$$

für $x = \infty$ wird $v = \infty^0 = e^{\frac{m}{\beta}}$.

58) $$w = [tg(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x)]^{\cot x};$$

für $x = 0$ wird $w = 1^\infty = e$.

59) $$w = \left(2 - \frac{2x}{\pi}\right)^{tg\, x};$$

für $x = \frac{1}{2}\pi$ wird $w = 1^\infty = e^{\frac{2}{\pi}}$.

60) $$w = \left(\cos\sqrt{\frac{2a}{x}}\right)^x;$$

für $x = \infty$ wird $w = 1^\infty = e^{-a}$.

## § 29.

### Differentialquotienten von der Form $\frac{0}{0}$.

Wenn aus einer Gleichung zwischen $x$ und $y$, etwa $f(x, y) = 0$, der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ nach der Formel

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}$$

entwickelt ist, so kann es geschehen, daß für spezielle Werte $x = a$, $y = b$ (welche selbstverständlich der ursprünglichen Gleichung genügen müssen) Zähler und Nenner des rechtsstehenden Bruches gleichzeitig verschwinden, also $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ wird. Man wendet dann wieder die in § 27, I erwähnte Regel an, wobei aber nicht zu übersehen ist, daß der unbekannte Wert, welchen $\frac{dy}{dx}$ für $x = a$ und $y = b$ annimmt, möglicherweise auch unendlich groß sein kann.

1. Aus der Gleichung

$$x^3 - 3cxy + y^3 = 0$$

folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cy - x^2}{y^2 - cx},$$

welcher Ausdruck für $x = 0$ und $y = 0$ in $\frac{0}{0}$ übergeht. Differenziert man rechter Hand Zähler und Nenner für sich und setzt zur Abkürzung $\frac{dy}{dx} = y'$, so hat man

$$y' = \frac{cy' - 2x}{2yy' - c}, \quad (x = 0, \quad y = 0),$$

und durch Auflösen dieser quadratischen Gleichung

$$y' = \frac{c \mp \sqrt{c^2 - 4xy}}{2y},$$

oder, wie man leicht findet,

$$y' = \frac{2x}{c + \sqrt{c^2 - 4xy}}, \quad y' = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4xy}}{2y}.$$

Die wirkliche Einführung der Werte $x = 0$ und $y = 0$ gibt nun

$$y' = 0, \quad y' = \infty.$$

Eine Modifikation dieses Verfahrens beruht auf der Bemerkung, daß der Quotient $\frac{y-b}{x-a}$ für $x = a$ und $y = b$ denselben Wert annimmt, wie $y'$; bezeichnet man — um diese Bemerkung auf unser Beispiel anzuwenden — den Quotienten $\frac{y}{x}$ mit $u$ und nimmt in der obigen Formel

$$y' = \frac{cy - x^2}{y^2 - cx}$$

die Substitution $y = xu$ vor, so erhält man

$$\frac{u + y'}{1 + u^2 y'} = \frac{x}{c}.$$

Für $x = 0$ wird hieraus, wenn man den gemeinsamen Wert, welchen für diesen Fall $u$ und $y'$ annehmen, durch $v$ bezeichnet,

$$\frac{2v}{1 + v^2} = 0,$$

und dieser Bedingung genügen $v = 0$ und $v = \infty$.

2) $$x^5 - 5c^3xy + y^5 = 0;$$

für $x = 0$ und $y = 0$ erhält $y'$ die Werte 0 und $\infty$.

3) $$(x^2 + y^2)^2 = c^2xy;$$

für $x = 0$ und $y = 0$ erhält $y'$ die Werte 0 und $\infty$.

4) $$(y^2 - x^2)^2 = ax^3 - bxy^2;$$

für $x = 0$ und $y = 0$ erhält $y'$ die Werte $\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ und $\infty$.

5) $$y^4 + axy^2 = bx^3 - x^4;$$

für $x = 0$ und $y = 0$ erhält $y'$ die Werte $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ und $\infty$.

6) $$y^4 + (a^2 + x^2)y^2 = b^2x^2;$$

für $x = 0$ und $y = 0$ erhält $y'$ die Werte $\pm \frac{b}{a}$.

Anmerkung. Die im gegenwärtigen Paragraphen behandelte Aufgabe kann, ohne daß die Theorie der vieldeutigen Ausdrücke benutzt wird, noch auf einem anderen Wege gelöst werden, welcher sich an die Darlegungen von § 11 anschließt.

In der Tat, wenn die Veränderliche $y$ vermöge der Gleichung

I) $$f(x, y) = 0$$

eine Funktion der Veränderlichen $x$ ist, und die Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ldots \text{ zur Abkürzung mit } y',\ y'',\ y''',\ldots$$

bezeichnet werden, so ergeben sich durch mehrmaliges Differenzieren der genannten Gleichung nach $x$ die Relationen

II) $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y' = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2 + \dfrac{\partial f}{\partial y}y'' = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}y' + 3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}y'^2 + \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}y'^3 + 3\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'\right)y'' \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial f}{\partial y}y''' = 0 \\ \qquad\qquad \text{usw.,} \end{cases}$$

deren Bildungsgesetz unschwer festgestellt werden kann.*

* Die $n^{\text{te}}$ Relation hat die Form

$$(n)_0\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + (n)_1\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}y' + (n)_2\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}y'^2 + \cdots + (n)_n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}y'^n + S + \frac{\partial f}{\partial y}y^{(n)} = 0;$$

hierbei bedeutet $S$ einen in bezug auf die $2^{\text{ten}}$, $3^{\text{ten}}$, ... $(n-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $f(x, y)$ homogenen linearen Ausdruck, dessen Koeffizienten Produkte von Potenzen der Größen $y', y'', y''', \ldots y^{(n-1)}$ sind. Beweis mittelst des Schlusses von $n$ auf $n+1$.

Wenn nun für ein spezielles Wertsystem $x=a$, $y=b$, welches der Gleichung I) Genüge leistet, die beiden Ausdrücke

$$\text{A)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}$$

der Null gleich werden, ohne daß gleichzeitig auch die drei Ausdrücke

$$\text{B)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

verschwinden, so lassen die Relationen II) erkennen, daß das zugehörige $y'$ aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 = 0$$

gefunden werden kann, in der man sich $x$ und $y$ durch $a$ resp. $b$ ersetzt denken muß; da diese Gleichung quadratisch ist, so ergeben sich für $y'$ zwei Werte. — Man vergleiche hierzu die Beispiele 1), 2), 3) und 6).

Wenn hingegen für $x=a$, $y=b$ die sämtlichen Ausdrücke A) und B) verschwinden, während mindestens einer der vier Ausdrücke

$$\text{C)} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

von Null verschieden ist, so lehren die Relationen II), daß das entsprechende $y'$ aus der Gleichung

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} y' + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} y'^3 = 0$$

gefunden werden kann, in welcher natürlich $x=a$, $y=b$ zu setzen ist. Da diese Gleichung aber kubisch ist, so erhält man in diesem Falle für $y'$ drei Werte. — Man vergleiche hierzu die Beispiele 4) und 5).

Wie sich die Sachlage gestaltet, wenn für $x=a$, $y=b$ außer den Größen A) und B) auch noch die Größen C) sämtlich verschwinden, dürfte nach dem Vorstehenden leicht zu entscheiden sein.

Übrigens sei darauf hingewiesen, daß die im gegenwärtigen Paragraphen behandelten Vorkommnisse in bemerkenswerter Weise geometrisch gedeutet werden können, wenn man $x$ und $y$ als rechtwinklige Koordinaten eines veränderlichen Punktes der Ebene, die Gleichung I) mithin als Gleichung einer ebenen Kurve ansieht. Sobald nämlich für ein der Gleichung I) Genüge leistendes Wertsystem $x=a$, $y=b$ die beiden Ausdrücke A) verschwinden, so sind $a$ und $b$ die Koordinaten eines singulären Punktes jener Kurve; und zwar handelt es sich, wofern für $x=a$, $y=b$ wenigstens einer der drei Ausdrücke B) von Null verschieden ist, um einen Doppelpunkt, wofern für $x=a$, $y=b$ die sämtlichen Ausdrücke A) und B) verschwinden, unter den vier Ausdrücken C) aber mindestens einer von Null verschieden ist, um einen dreifachen Punkt usw.

## § 30.

### Zwei allgemeine Sätze.

Nach § 27, III und mit Hilfe der bekannten Relation

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=h\cdot\varphi'(x+\varepsilon h),$$

in welcher $\varepsilon$ einen positiven echten Bruch bedeutet, läßt sich sehr leicht folgender Satz beweisen: Wenn $\varphi(x)$ gleichzeitig mit $x$ ins Unendliche wächst und $\varphi(x+1)-\varphi(x)$ sich einer bestimmten Grenze nähert, so ist für $x=\infty$

$$Lim\frac{\varphi(x)}{x}=Lim\{\varphi(x+1)-\varphi(x)\}.$$

Hiernach ergeben sich z. B. die Grenzwerte

$$Lim\frac{lg\,x}{x}=0,\quad Lim\frac{\cot\frac{c}{x}}{x}=\frac{1}{c}.$$

Die Substitution $\varphi(x)=lg\,\psi(x)$ führt zu dem weiteren Satze: Wenn $\psi(x)$ gleichzeitig mit $x$ unendlich wächst und $\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)}$ sich einer bestimmten Grenze nähert, so ist für $x=\infty$

$$Lim\left\{[\psi(x)]^{\frac{1}{x}}\right\}=Lim\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)}.$$

Hieraus ergeben sich die Grenzwerte

$$Lim\left(x^{\frac{1}{x}}\right)=1,\quad Lim\left\{(a+b\,c^{x})^{\frac{1}{x}}\right\}=c,\quad c>1.$$

# Kapitel X.

## Maxima und Minima der Funktionen.

### § 31.

### Maxima und Minima der Funktionen einer Veränderlichen.

Eine Funktion $f(x)$ erreicht jedesmal einen Maximalwert oder einen Minimalwert, sobald ihr Differentialquotient $f'(x)$ sein Vorzeichen wechselt, und zwar ist $f(a)$ ein Maximum, wenn $f'(x)$ an der Stelle $x = a$ vom Positiven zum Negativen übergeht, d. h. wenn für unendlich kleine positive Werte von $\delta$ gleichzeitig

$$f'(a - \delta) > 0, \quad f'(a + \delta) < 0$$

ist; dagegen bildet $f(a)$ ein Minimum, wenn $f'(x)$ an der Stelle $x = a$ vom Negativen zum Positiven übergeht, d. h. wenn die Ungleichungen

$$f'(a - \delta) < 0, \quad f'(a + \delta) > 0$$

zusammen stattfinden.

Falls $f'(x)$ sich stetig ändert, kann $f'(x)$ sein Vorzeichen nur mittelst Durchgangs durch Null wechseln, d. h. es muß $f'(a) = 0$ sein; man hat daher diejenigen Werte von $x$ aufzusuchen, für welche $f'(x) = 0$ wird. Ist $a$ ein solcher Wert, so bedarf es dann noch der Entscheidung, ob $f(a)$ ein Maximum oder Minimum von $f(x)$ darstellt. Meistenteils reicht hierzu der zweite Differentialquotient hin; $f(a)$ ist nämlich ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem $f''(a)$ negativ oder positiv ausfällt. Wenn aber $f''(a) = 0$ ist, so muß man die höheren Differentialquotienten von $f(x)$ zu Hilfe nehmen; die Regel ist dann: ein aus der Gleichung $f'(x) = 0$ bestimmter Wert $x = a$ macht $f(x)$ nur dann zu einem Maximum oder Minimum, wenn in der Reihe der Differentialquotienten $f''(x)$, $f'''(x), \ldots$ der erste für $x = a$ nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist, und zwar bildet $f(a)$ ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem der genannte Differentialquotient für $x = a$ negativ oder positiv ausfällt.

Wenn $f'(x)$ keine stetige Funktion von $x$ ist, so kann $f'(x)$ sein Vorzeichen plötzlich ändern (z. B. mittelst Sprunges von $-\infty$ nach $+\infty$); solche Stellen bedürfen einer genauen Untersuchung, namentlich müssen dann $f(a-\delta)$ und $f(a+\delta)$ besonders diskutiert werden.

Beispiel 1. $$y = x(2a - x);$$

für $x = a$ wird $y = a^2$ das Maximum.

2) $$y = x(a^2 - x^2);$$

für $x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ wird $y = -\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}$ das Minimum,

für $x = +\frac{a}{\sqrt{3}}$ wird $y = +\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}$ das Maximum.

3) $$y = x(a - x)^2;$$

für $x = \frac{1}{3}a$ wird $y = \frac{4}{27}a^3$ das Maximum,

für $x = a$ wird $y = 0$ das Minimum.

4) $$y = x + \frac{a^2}{x};$$

für $x = a$ wird $y = 2a$ das Minimum,

für $x = -a$ wird $y = -2a$ das Maximum.

5) $$y = x^2 + \frac{2a^3}{x};$$

für $x = a$ wird $y = 3a^2$ das Minimum.

6) $$y = x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x;$$

für $x = -\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ wird $y = \alpha(2\alpha^2 - 3\beta) \pm 2\sqrt{(\alpha^2-\beta)^3}\begin{cases}\text{das Maximum,}\\ \text{das Minimum,}\end{cases}$

wobei aber $\alpha^2 - \beta > 0$ sein muß. Wenn $\alpha^2 - \beta \leqq 0$ ist, so hat $y$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

7) $$y = \frac{x}{x^2 + \alpha x + \beta};$$

für $x = \mp\sqrt{\beta}$ wird $y = \frac{1}{\alpha \mp 2\sqrt{\beta}}\begin{cases}\text{das Minimum,}\\ \text{das Maximum,}\end{cases}$

wobei aber $\beta > 0$ sein muß. Wenn $\beta \leqq 0$ ist, so hat $y$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

8) $$y = \frac{x-\gamma}{x^2+\alpha x+\beta};$$

für $x = \gamma \mp \sqrt{\alpha\gamma+\beta+\gamma^2}$ wird $y = \dfrac{1}{\alpha+2\gamma\mp 2\sqrt{\alpha\gamma+\beta+\gamma^2}}\begin{cases}\text{das Minimum,}\\ \text{das Maximum,}\end{cases}$

wobei aber $\alpha\gamma+\beta+\gamma^2 > 0$ sein muß. Wenn $\alpha\gamma+\beta+\gamma^2 \leqq 0$ ist, so besitzt $y$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

9) $$y = x + \sqrt{a(a-x)};$$

für $x = \frac{3}{4}a$ wird $y = \frac{5}{4}a$ das Maximum.

10) $$y = x - \sqrt{a(x-a)};$$

für $x = \frac{5}{4}a$ wird $y = \frac{3}{4}a$ das Minimum.

11) $$y = \sqrt{\alpha+\beta x} + \gamma x;$$

für $x = \dfrac{\beta^2-4\alpha\gamma^2}{4\beta\gamma^2}$ wird $y = -\dfrac{\beta^2+4\alpha\gamma^2}{4\beta\gamma}$

zum Maximum oder Minimum, je nachdem $\beta\gamma$ negativ oder positiv ist.

12) $$y = \sqrt{\alpha+\beta x^2} + \gamma x;$$

für $x = \mp\gamma\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta(\beta-\gamma^2)}}$ wird $y = \mp\sqrt{\dfrac{\alpha(\beta-\gamma^2)}{\beta}}\begin{cases}\text{das Minimum,}\\ \text{das Maximum,}\end{cases}$

wobei $\alpha\beta(\beta-\gamma^2)$ positiv sein muß.

13) $$y = \frac{a+bx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}};$$

für $x = \dfrac{\alpha b}{a\beta}$ wird $y = \sqrt{\dfrac{a^2}{\alpha}+\dfrac{b^2}{\beta}}$

zum Maximum oder Minimum, je nachdem $a\beta$ positiv oder negativ ist.*

14) $$y = \frac{(a+bx)\sqrt{\alpha+\beta x^2}}{x};$$

für $x = \sqrt[3]{\dfrac{a\alpha}{b\beta}}$ wird $y = \sqrt{\dfrac{(ab_1+ba_1)^3}{ab}}$

zum Minimum oder Maximum, je nachdem $b\beta$ positiv oder negativ ist.*

* In den Beispielen 13) und 14) sind die im Text angegebenen Resultate nur richtig, solange die betreffenden Werte von $y$ reell ausfallen.

Die Größen $a_1$ und $b_1$ dienen zur Abkürzung, es ist nämlich

$$a_1 = \sqrt[3]{ac}, \quad b_1 = \sqrt[3]{bd}.$$

15) $$y = \frac{1-x}{x}\left(1+x-\sqrt{1-2\varepsilon x+x^2}\right),$$

wenn $\varepsilon$ einen echten Bruch bedeutet. Aus

$$y' = \frac{1-x}{x^2}\left\{\frac{1+(1-\varepsilon)x+x^2}{\sqrt{1-2\varepsilon x+x^2}} - (1+x)\right\}$$

folgt, weil der Parentheseninhalt positiv ist,

für $x=1$, $y = 2(2-\sqrt{2-2\varepsilon})$ das Maximum.

Man hat daher

$$\frac{1-x}{x}\left(1+x-\sqrt{1-2\varepsilon x+x^2}\right) \leqq 2\left(2-\sqrt{2(1-\varepsilon)}\right);$$

für $x = \frac{b}{a}$, $\varepsilon = \cos\gamma$ ergibt sich hieraus die geometrische Beziehung

$$\sqrt{a^2-2ab\cos\gamma+b^2} \geqq a+b-4h\sin^2\left(45^\circ-\tfrac{1}{4}\gamma\right),$$

wobei $h$ das harmonische Mittel zwischen $a$ und $b$ bedeutet.

16) $$y = 2x + 3\sqrt[3]{b(x-a)^2}, \quad b>0;$$

für $x = a-b$ wird $y = 2a+b$ das Maximum,

für $x = a$ wird $y = 2a$ das Minimum.

17) $$y = 2x - 3\sqrt[3]{b(x-a)^2}, \quad b>0;$$

für $x = a$ wird $y = 2a$ das Maximum,

für $x = a+b$ wird $y = 2a-b$ das Minimum.

18) $$y = b - \sqrt[3]{\frac{(2ax-x^2)^2}{a}}, \quad a>0;$$

für $x = 0$ wird $y = b$ ein Maximum,

für $x = a$ wird $y = b-a$ das Minimum,

für $x = 2a$ wird $y = b$ ein Maximum.

19) $$y = \sqrt[3]{bx^2} - \sqrt[3]{c(x-a)^2}, \quad b>c, \ c>0;$$

für $x = 0$ wird $y = -\sqrt[3]{a^2c}$ ein Minimum,

für $x = \frac{ab}{b-c}$ wird $y = \sqrt[3]{a^2(b-c)}$ das Maximum,

für $x = a$ wird $y = \sqrt[3]{a^2b}$ ein Minimum.

20) $$y = \sqrt[3]{bx^2} - \sqrt[3]{c(x-a)^2}, \quad b > c > 0;$$

für $x = 0$ wird $y = -\sqrt[3]{a^2 c}$ ein Minimum,

für $x = a$ wird $y = +\sqrt[3]{a^2 b}$ das Maximum,

für $x = \frac{ab}{b-c}$ wird $y = \sqrt[3]{a^2(b-c)}$ ein Minimum.

21) $$y = x^m e^{-x}, \quad m > 0;$$

für $x = m$ wird $y = \left(\frac{m}{e}\right)^m$ das Maximum.

22) $$y = b e^{\frac{x}{a}} - x, \quad a \cdot b > 0;$$

für $x = a\,lg\left(\frac{a}{b}\right)$ wird $y = a\left\{1 - lg\left(\frac{a}{b}\right)\right\}$ das Minimum oder Maximum, je nachdem $a$ und $b$ positiv oder negativ sind.

23) $$y = x^m\,lg\left(\frac{a}{x}\right), \quad a > 0;$$

für $x = a e^{-\frac{1}{m}}$ wird $y = \frac{a^m}{me}$ zum Maximum oder Minimum, je nachdem $m$ positiv oder negativ ist.

24) $$y = x^x;$$

für $x = \frac{1}{e}$ wird $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ das Minimum.

25) $$y = x^{\frac{1}{x}};$$

für $x = e$ wird $y = e^{\frac{1}{e}}$ das Maximum.

26) $$y = \left(\frac{a}{x}\right)^x; \quad a > 0;$$

für $x = \frac{a}{e}$ wird $y = e^{\frac{a}{e}}$ das Maximum.

27) $$y = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}; \quad a > 0;$$

für $x = ae$ wird $y = e^{\frac{1}{ae}}$ das Maximum.

28) $$y = \sin x \cdot \sin(\alpha + x);$$

für $x = n\pi + \frac{1}{2}\alpha$ wird $y = -\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ ein Minimum,

für $x = n\pi + \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ wird $y = +\cos^2\frac{1}{2}\alpha$ ein Maximum,

wobei $n$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

29) $$y = \sin x \cdot \cos(\alpha + x);$$

für $x = n\pi - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha$ wird $y = -\sin^2(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha)$ ein Minimum,

für $x = n\pi + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha$ wird $y = +\sin^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$ ein Maximum.

30) $$y = \cot x \cdot tg(x - \alpha), \quad 0 < \alpha < \pi;$$

für $x = (n + \frac{1}{4})\pi + \frac{1}{2}\alpha$ wird $y = tg^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$ ein Maximum,

für $x = (n - \frac{1}{4})\pi + \frac{1}{2}\alpha$ wird $y = tg^2(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha)$ ein Minimum.

31) $$y = \sin x \cdot \cos^2 x;$$

für $x = (2n - \frac{1}{2})\pi$ wird $y = 0$ ein Maximum,

für $x = (2n + \frac{1}{2})\pi$ wird $y = 0$ ein Minimum;

wenn ferner zur Abkürzung $arctg \frac{1}{\sqrt{2}} = \vartheta$ gesetzt wird, so ist

für $x = 2n\pi + \vartheta$ und für $x = (2n+1)\pi - \vartheta$, $y = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ein Maximum,

für $x = 2n\pi - \vartheta$ und für $x = (2n+1)\pi + \vartheta$, $y = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ein Minimum.

32) $$y = \frac{1}{2}\left(a \sin x + \frac{b}{\sin x}\right), \quad a > b > 0;$$

für $x = (2n + \frac{1}{2})\pi$ wird $y = +\frac{1}{2}(a + b)$ ein Maximum,

für $x = (2n - \frac{1}{2})\pi$ wird $y = -\frac{1}{2}(a + b)$ ein Minimum;

wenn ferner $arcsin \sqrt{\frac{b}{a}} = \vartheta$ ist, so wird

für $x = 2n\pi + \vartheta$ und für $x = (2n+1)\pi - \vartheta$, $y = +\sqrt{ab}$ ein Minimum,

für $x = 2n\pi - \vartheta$ und für $x = (2n+1)\pi + \vartheta$, $y = -\sqrt{ab}$ ein Maximum.

33) $$y = \frac{1}{2}(a\, tg x + b \cot x), \quad a > 0,\ b > 0;$$

bezeichnet man $arctg \sqrt{\frac{b}{a}}$ mit $\vartheta$, so wird

für $x = n\pi + \vartheta$, $y = +\sqrt{ab}$ ein Minimum,

für $x = n\pi - \vartheta$, $y = -\sqrt{ab}$ ein Maximum.

34) $$y = e^x \cdot \sin(x - \alpha);$$

für $x = (2n - \frac{1}{4})\pi + \alpha$ wird $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{(2n - \frac{1}{4})\pi + \alpha}$ ein Minimum,

für $x = (2n + \frac{3}{4})\pi + \alpha$ wird $y = +\frac{1}{\sqrt{2}} e^{(2n + \frac{3}{4})\pi + \alpha}$ ein Maximum.

35) $y = e^x[x \sin(x+\alpha) + (1-x)\cos(x+\alpha)], \quad \alpha > 0;$

für $x = 0$ wird $y = \cos\alpha$ ein Minimum;

für $x = (2n+1)\pi - \alpha$ wird $y = [(2n+1)\pi - \alpha - 1]e^{(2n+1)\pi-\alpha}$ ein Maximum,

für $x = 2n\pi - \alpha$ wird $y = -(2n\pi - \alpha - 1)e^{2n\pi-\alpha}$ ein Minimum.

36) $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2};$

für $x = 0$ wird $y = 1$ das Minimum.

37) $y = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} lg(1+x^2);$

für $x = 0$ wird $y = 0$ das Minimum.

38) $y = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{2} - x \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right);$

für $x = 0$ wird $y = \frac{1}{2}$ das Maximum,

für $x = \pm 1$ wird $y = -\frac{1}{8}(\pi - 2)$ ein Minimum.

39) $y = \frac{9x + 7x^3}{(1+x^2)(9+x^2)} - \operatorname{arc\,tg} x;$

für $x = -\sqrt{3}$ wird $y = -\left(\frac{5}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{8}\pi\right)$ das Minimum,

für $x = +\sqrt{3}$ wird $y = \frac{5}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{8}\pi$ das Maximum.

40) $y = \frac{1 + 2x \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2};$

für $x = -1$ wird $y = \frac{1}{4}(\pi + 2)$ ein Maximum,

für $x = 0$ wird $y = 1$ das Minimum,

für $x = +1$ wird $y = \frac{1}{4}(\pi + 2)$ ein Maximum.

## § 32.

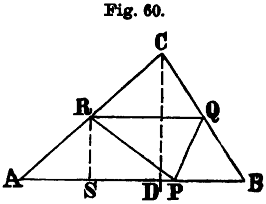
## Geometrische und physikalische Aufgaben.

1. Es ist ein Dreieck $ABC$ und auf der Seite $AB$ der Punkt $P$ gegeben; man soll die Transversale $QR \| AB$ so legen, daß der Flächeninhalt des eingeschriebenen Dreiecks $PQR$ ein Maximum wird (Fig. 60).

Das Maximum tritt ein, wenn die Höhe des Dreiecks $PQR$ gleich wird der halben Höhe des Dreiecks $ABC$, also $RS = \frac{1}{2} CD$; es ist dann

$$\Delta PQR = \frac{1}{4} \Delta ABC.$$

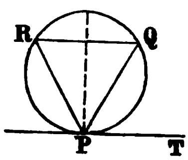
Fig. 60.




2. Es ist ein Kreis und ein Peripheriepunkt $P$ desselben gegeben; man soll die Sehne $QR$ parallel der Kreistangente $PT$ so

legen, daß der Flächeninhalt des eingeschriebenen Dreiecks $PQR$ ein Maximum wird (Fig. 61).

Fig. 61.

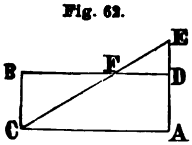



Das Maximum tritt ein, wenn die Entfernung der Sehne vom Punkte $P$ gleich wird $\frac{3}{4}$ des Kreisdurchmessers und es verhält sich dann die Dreiecksfläche zur Kreisfläche wie $\frac{3}{4}\sqrt{3} : \pi$.

Im wesentlichen bleiben diese Resultate ungestört, wenn man an die Stelle des Kreises eine Ellipse setzt, nur ist dann statt des Kreisdurchmessers derjenige Ellipsendurchmesser zu nehmen, welcher die zu $PT$ parallelen Sehnen halbiert.

3. Durch die Ecke $C$ des gegebenen Rechtecks $ACBD$ soll eine Gerade, welche die Seiten $AD$ in $E$ und $BD$ in $F$ schneidet, so gelegt werden, daß $AE + BF$ ein Minimum wird (Fig. 62).

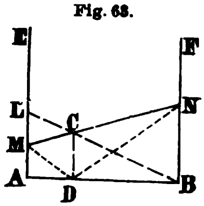
Fig. 62.




Das Minimum tritt ein, wenn $AF = BF$ gleich dem geometrischen Mittel zwischen den Rechteckseiten $AC$ und $BC$ genommen wird.

4. In den Endpunkten einer gegebenen geradlinigen Strecke $AB$ sind auf letzterer Senkrechte $AE$ und $BF$ nach derselben Richtung gezogen; innerhalb des Raumes $EABF$ ist noch ein Punkt $C$ gegeben; durch diesen soll man eine Gerade legen, welche $AE$ in $M$ und $BF$ in $N$ so schneidet, daß das geometrische Mittel zwischen $AM$ und $BN$ ein Maximum wird (Fig. 63).

Fig. 63.




Man erhält die gesuchte Transversale, wenn man $BC$ bis zum Durchschnitte $L$ mit $AE$ verlängert und den Mittelpunkt $M$ des Abschnittes $AL$ mit $C$ verbindet. Ist $D$ die Projektion von $C$ auf $AB$, so gelten hierbei folgende Beziehungen

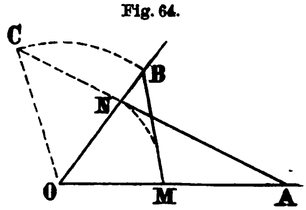
$$\angle CDM = \angle CDN,\quad \sqrt{AD \cdot BD} \cdot \sqrt{AM \cdot BN} = \triangle ABC.$$

5. Auf den Schenkeln eines Winkels sind zwei feste Punkte $A$ und $B$ gegeben; man sucht zwei andere in gleichen Entfernungen vom Scheitel $O$ liegende Punkte $M$ und $N$ der Art, daß $AN + BM$ ein Minimum ist (Fig. 64).

Nimmt man $\angle BOC = \angle BOA$, $OC = OB$ und zieht $AC$, so schneidet diese Gerade den Schenkel $OB$ in dem einen gesuchten

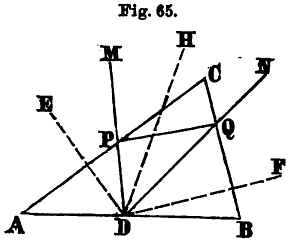
Punkte $N$; der andere ergibt sich durch $OM = ON$. Die Gerade $AC$ ist zugleich die gesuchte Minimalsumme. Eine rein geometrische Betrachtung führt zu denselben Resultaten.

Fig. 64.




6. Es ist ein Dreieck $ABC$ gegeben und auf der Seite $AB$ der Punkt $D$; auf den anderen Seiten $AC$ und $BC$ sollen die Punkte $P$ und $Q$ so bestimmt werden, daß der Winkel $PDQ$ eine gegebene Größe $\gamma$ hat und daß der Flächeninhalt des Dreiecks $PDQ$ ein Minimum wird (Fig. 65).

Fig. 65.




Setzt man $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\alpha + \beta - \gamma = \delta$ und bezeichnet $\angle APD$ mit $x$, so findet man, daß das gesuchte Minimum eintritt, wenn $\sin x \sin(x + \delta)$ ein Maximum wird. Dies führt zu folgender Konstruktion. Man zieht $DE \perp AC$, $DF \perp BC$, halbiert den Winkel $EDF$ und trägt zu beiden Seiten der Halbierungslinie $DH$ die gleichen Winkel $HDM$ und $HDN$ ab, deren Schenkel $DM$ und $DN$ die gesuchten Punkte bestimmen.

7. Um ein gegebenes Dreieck $ABC$ soll das größte gleichseitige Dreieck $PQR$ beschrieben werden (Fig. 66). Nach der gewöhnlichen Bezeichnung der Seiten und Winkel eines Dreiecks ist für $\angle ACQ = \varphi$

$$PQ = \frac{b \sin\varphi + c \sin(60^\circ + \alpha - \varphi)}{\sin 60^\circ}$$

und daher für den Fall, daß der Umfang und ebenso die Fläche von $PQR$ ein Maximum werden soll,

$$tg\,\varphi = \frac{b - c\cos(60^\circ + \alpha)}{c \sin(60^\circ + \alpha)}.$$

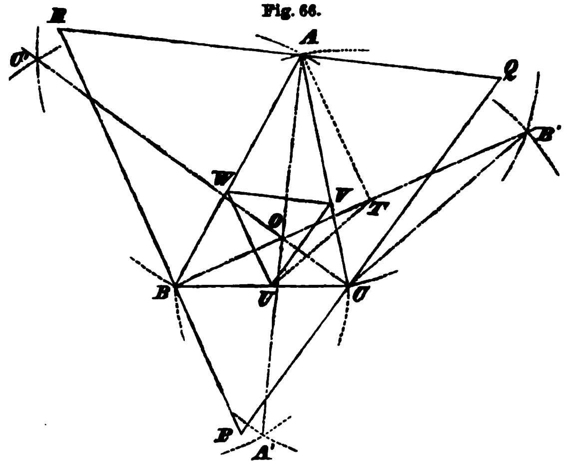
Konstruiert man über den Seiten des Dreiecks $ABC$ die gleichseitigen Dreiecke $ABC'$, $BCA'$, $CAB'$, so schneiden sich die Geraden $AA'$, $BB'$, $CC'$ in einem Punkte $O$; die Seiten des gesuchten Dreiecks $PQR$ stehen senkrecht auf $AA'$, $BB'$, $CC'$ und sind hiernach leicht zu konstruieren.

8. In ein gegebenes Dreieck $ABC$ soll das kleinste gleichseitige Dreieck $UVW$ beschrieben werden (Fig. 66).

Für $\angle CVU = \tau$ ist

$$UV = \frac{bc \sin\alpha}{b \sin\tau + c \sin(60^\circ + \alpha - \tau)},$$

Fig. 66.

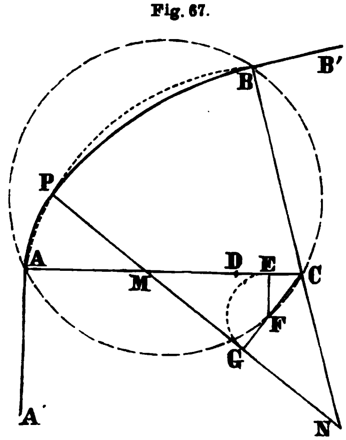



mithin, wenn Umfang und Fläche von $UVW$ Minima werden sollen,

$$tg\,\tau = \frac{b - c\cos(60^\circ + \alpha)}{c \sin(60^\circ + \alpha)}.$$

Fällt man von $A$ auf $BB'$ die Senkrechte $AT$ und legt durch $T$ parallel zu $B'C$ eine Gerade, so gibt deren Durchschnitt mit $BC$ die eine Ecke $U$; die übrigen Ecken $V$ und $W$ findet man mittelst der Bemerkung, daß die Seiten des Dreiecks $UVW$ parallel zu den Seiten des Dreiecks $PQR$ liegen.

Fig. 67.




9. Zwei gegebene geradlinige Strecken $AA'$ und $BB'$ sollen durch zwei Kreisbögen $AP$ und $PB$ so verbunden werden, daß $AA'$ Tangente an $AP$, $BB'$ Tangente an $BP$, ferner $P$ der innere Berührungspunkt beider Bögen und daß endlich die Differenz der Radien beider Bögen ein Minimum ist (Fig. 67).

Es sei $C$ der Durchschnitt der in $A$ und $B$ auf den gegebenen Strecken errichteten Senkrechten $AC = a$, $BC = b$, $\angle ACB = \gamma$, ferner $a > b$ und zur Abkürzung $a - b = c$, $1 - \cos\gamma = k$; man bemerkt leicht, daß der Mittelpunkt $M$ des Bogens $AP$ auf $AC$, ebenso der Mittelpunkt $N$ des Bogens $BP$ auf der Verlängerung von $BC$ liegen, und daß $MN$ gleich der Radiendifferenz $BN - AM$ sein muß. Für $CM = x$, $MN = u$ erhält man der Reihe nach die Größen von $AM = MP$, $NP = BN$, $CN$ und aus dem Dreiecke $CMN$

$$u = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2kx^2 - c^2}{kx - c} - c.$$

Den gegebenen Bedingungen entspricht hiernach

$$CM = CN = \frac{a-b}{4\sin^2\frac{1}{4}\gamma};$$

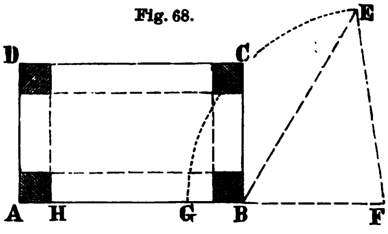
es ist daher $AD = BC$, $CE = \frac{1}{2} CD$ zu nehmen, durch $E$ senkrecht zu $AC$ eine Gerade zu legen, welche die Halbierungslinie des Winkels $ACN$ in $F$ schneidet, endlich $CF$ um $FG = FE$ zu verlängern und durch $G$ senkrecht zu $CG$ eine Gerade zu ziehen, welche auf $AC$ und $BC$ die gesuchten Punkte $M$ und $N$ bestimmt.

Beiläufig sei noch bemerkt, daß $F$ auf dem um das Dreieck $ABC$ beschriebenen Kreise liegt und daß $A$, $P$, $B$ Punkte eines aus dem Mittelpunkte $F$ beschriebenen Kreises sind.

Die Determination, unter welcher die Aufgabe nur möglich ist, findet man leicht aus dem angegebenen Werte von $CM$.

10. Aus einer rechteckförmigen Tafel soll durch Wegschneiden von vier gleichen Eckquadraten und gehöriges Zusammenbiegen ein offener rechtwinkliger Kasten von möglichst großem Volumen gebildet werden (Fig. 68).

Fig. 68.




Sind $AB = a$, $BC = b$ die Seiten des gegebenen Rechtecks und bezeichnet $x$ die gesuchte Quadratseite $AH$, so erhält man für $x$ die quadratische Gleichung

$$12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0,$$

von welcher aber nur die kleinere Wurzel zu gebrauchen ist. Mittelst eines Dreiecks $EBF$, worin $\angle EBF = 60^0$ ist, kann $AH$ konstruiert werden.

Wählt man zwei ganze Zahlen $m$ und $n < \frac{1}{2}m$ willkürlich und setzt

$$a = 6(m^2 - n^2), \quad b = 6m(m - 2n),$$

so erhält man für $x$ den rationalen Wert

$$x = (m + n)(m - 2n);$$

falls die für $a$, $b$, $x$ gefundenen Werte einen gemeinschaftlichen Faktor haben, kann derselbe weggelassen werden.

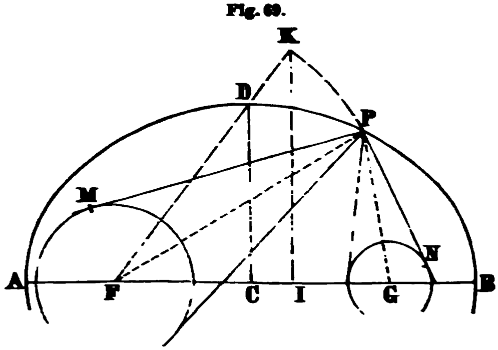
Nach diesen Bemerkungen findet man z. B. für $m = 5$, $n = 1$ die Werte $a = 8$, $b = 5$, $x = 1$.

11. In der vorigen Aufgabe werde statt des Rechtecks $ABCD$ ein beliebiges Dreieck $ABC$ genommen und im übrigen dasselbe Maximalvolumen gesucht. Den Abstand $x$ der Seiten des inneren Dreiecks von den ihnen parallelen Seiten des Dreiecks $ABC$ findet man gleich dem dritten Teile von dem Radius des Kreises, welcher dem Dreiecke $ABC$ eingeschrieben ist.

Ein ähnlicher Satz gilt für alle Tangentenvielecke.

12. Um die Brennpunkte einer gegebenen Ellipse sind mit bekannten Radien Kreise beschrieben, welche innerhalb der Ellipse liegen; auf der letzteren soll der Punkt $P$ so bestimmt werden, daß die Summe der von ihm aus an die Kreise gelegten Tangenten ein Maximum wird (Fig. 69).

Fig. 69.




Bezeichnet man die Halbachsen der Ellipse mit $a$ und $b$, die Radien der um die Brennpunkte $F$ und $G$ beschriebenen Kreise mit $f$ und $g$, und nimmt den Brennstrahl $FP = r$ als unabhängige Variable, so hat man

$$2MP + 2NP = 2\left\{\sqrt{r^2 - f^2} + \sqrt{(2a - r)^2 - g^2}\right\}$$

zu einem Maximum zu machen und erhält

$$FP = \frac{2af}{f+g}, \quad GP = \frac{2ag}{f+g}.$$

Dies gibt folgende Konstruktion: Durch den inneren Ähnlichkeitspunkt $I$ der beiden Kreise lege man parallel zu $CD$ eine Gerade, welche $FD$ in $K$ schneidet; dann ist $FK = FP$ der eine, $AB - FK = GP$ der andere Brennstrahl des gesuchten Ellipsenpunktes. Bemerkenswert ist noch, daß $\angle FPM = \angle GPN$ ist, daß also die beiden Kreise von $P$ aus unter gleichen Winkeln gesehen werden.

13. Um die Brennpunkte einer Ellipse sind Kugeln beschrieben, welche innerhalb der Ellipse liegen; auf der letzteren soll man den Punkt $P$ so bestimmen, daß die Summe der beiden Kugelkappen, welche man von $P$ aus überblickt, ein Maximum wird.

Bei derselben Bezeichnung wie in Nr. 12 handelt es sich hier um das Maximum von

$$2\pi\left\{f^2 + g^2 - \left(\frac{f^3}{r} + \frac{g^3}{2a-r}\right)\right\};$$

dieses tritt ein, wenn sich die Quadrate der beiden Brennstrahlen von $P$ zueinander verhalten wie die Würfel der Kugelhalbmesser, also für

$$FP = \frac{2a\sqrt{f^3}}{\sqrt{f^3}+\sqrt{g^3}}, \quad GP = \frac{2a\sqrt{g^3}}{\sqrt{f^3}+\sqrt{g^3}}.$$

14. Unter allen geraden Kreiskegeln von gegebener Seitenlänge $c$ soll derjenige gefunden werden, dessen Volumen am größten ist.

Bezeichnet man den Radius des Basiskreises mit $a$, die Höhe des Kegels mit $b$, den Neigungswinkel der Kegelachse gegen die Mantellinien (die sogenannte Öffnung des Kegels) mit $\alpha$ und betrachtet dann etwa den Grundkreisradius als unabhängige Veränderliche ($a = x$), so findet man

$$a = c\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \quad b = c\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

$$tg\,\alpha = \sqrt{2}, \qquad \alpha = 54^0\,44'\,8'', 2.$$

15. In einen geraden Kreiskegel soll der gerade Kreiscylinder vom größten kubischen Inhalte so einbeschrieben werden, daß die Grundflächen beider Körper konzentrisch sind.

Bezeichnet $a$ den Basisradius, $b$ die Höhe des Kegels, so ist der Basisradius des Cylinders $= \frac{2}{3}a$, die Cylinderhöhe $= \frac{1}{3}b$ und das Cylindervolumen $= \frac{4}{9}$ des Kegelinhaltes.

16. In einen geraden Kreiskegel soll der gerade Kreiscylinder von größtem Mantel einbeschrieben werden.

Bei derselben Bezeichnung wie in Nr. 15 hat der Cylinder den Radius $\frac{1}{2}a$ und die Höhe $\frac{1}{2}b$.

17. In einen geraden Kreiskegel soll derjenige gerade Kreiscylinder einbeschrieben werden, dessen Gesamtoberfläche ein Maximum ist.

Bei derselben Bezeichnung wie vorhin ergibt sich der Cylinderradius $= \frac{ab}{2(b-a)}$, die Höhe $= \frac{b(b-2a)}{2(b-a)}$, wobei $b > 2a$ sein muß.

18. In eine gegebene Kugel soll der gerade Kreiscylinder von größtem kubischen Inhalte einbeschrieben werden. Bezeichnet $c$ den Kugelhalbmesser, so ist der Cylinderradius $= c\sqrt{\frac{2}{3}}$ und die Cylinderhöhe $= 2c\sqrt{\frac{1}{3}}$.

19. In eine gegebene Kugel soll der gerade Kreiscylinder von größtem Mantel einbeschrieben werden.

Bei derselben Bezeichnung wie vorhin ist der Cylinderradius $= c\sqrt{\frac{1}{2}}$ und die Cylinderhöhe $= c\sqrt{2}$.

20. In eine gegebene Kugel soll derjenige gerade Kreiscylinder einbeschrieben werden, dessen Gesamtoberfläche ein Maximum ist.

Der Cylinder hat die Dimensionen

$$\text{Radius} = c\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right)}, \quad \text{Höhe} = 2c\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right)}.$$

21. In eine gegebene Kugel soll der gerade Kreiskegel von größtem kubischen Inhalt einbeschrieben werden.

Der Basisradius ist $\frac{2}{3}c\sqrt{2}$, die Höhe $\frac{4}{3}c$.

22. In eine gegebene Kugel soll der gerade Kreiskegel von größtem Mantel einbeschrieben werden.

Der gesuchte Kegel ist derselbe wie bei der vorigen Aufgabe.

23. In eine gegebene Kugel soll derjenige gerade Kreiskegel einbeschrieben werden, dessen Gesamtoberfläche ein Maximum ist.

Nimmt man die Höhe des Kegels als unabhängige Variable, so findet man

$$\text{Höhe} = \frac{23-\sqrt{17}}{16}c, \quad \text{Basisradius} = \frac{\sqrt{190+14\sqrt{17}}}{16}c.$$

24. Es sind zwei Punkte $A_1$, $A_2$ und eine Gerade $BC$ gegeben; in letzterer soll man den Punkt $P$ so bestimmen, daß

der Winkel $A_1PA_2$, unter welchem die Strecke $A_1A_2$ von $P$ aus gesehen wird, seinen größten Wert erhält (Fig. 70).

Ist $O$ der Durchschnitt von $A_1A_2$ mit $BC$, $OA_1 = a_1$, $OA_2 = a_2$, $\angle A_1OB = \gamma$, $OP = r$, $\angle A_1PA_2 = \omega$, so ergibt sich

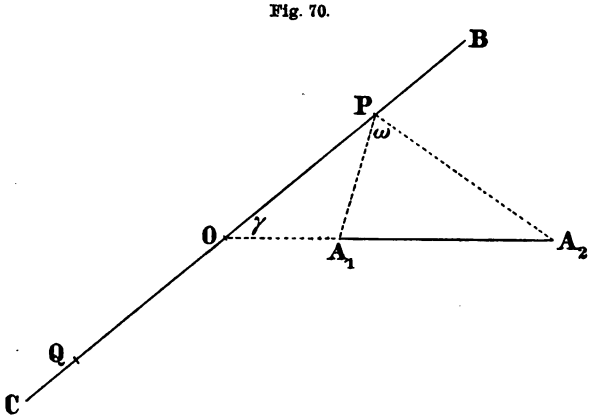
$$tg\,\omega = \frac{(a_2 - a_1)\,r\sin\gamma}{a_1a_2 - (a_1 + a_2)\,r\cos\gamma + r^2}$$

und wenn $\omega$, also auch $tg\,\omega$ sein Maximum erreichen soll, so muß

$$r = \pm\sqrt{a_1a_2}$$

sein. Es gibt demnach zwei solcher Punkte $P$ und $Q$ auf entgegengesetzten Seiten von $O$, und zwar sind $P$ und $Q$ diejenigen

Fig. 70.




Punkte, in welchen die zwei, durch $A_1$ und $A_2$ gehenden und $BC$ berührenden Kreise die letztere Gerade tangieren. Bezeichnet man die beiden Maxima von $\omega$ mit $\Omega_1$ und $\Omega_2$, so gelten die Formeln

$$tg\,\tfrac{1}{2}\Omega_1 = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}}\cot\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\Omega_2 = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}}\,tg\,\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_2) = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}\cot\gamma.$$

25. Auf der Achse einer bestimmten Parabel sind zwei Punkte $A_1$ und $A_2$ gegeben; man soll denjenigen Parabelpunkt $P$ ermitteln, für welchen $\angle A_1PA_2$ ein Maximum ist.

Bezeichnen $a_1$, $a_2$ die Abscissen der Punkte $A_1$, $A_2$ und ist

$$y = \sqrt{2bx}$$

die Gleichung der Parabel, so findet sich, wenn zur Abkürzung $\frac{1}{2}(a_1 + a_2) - b = c$ gesetzt wird, als Abscisse von $P$

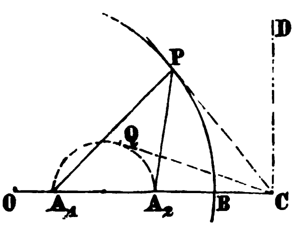
$$x = \frac{1}{3}\left(c + \sqrt{3a_1a_2 + c^2}\right).$$

In dem speziellen Falle $b = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ wird einfacher $x = \sqrt{a_1a_2} \cdot tg\, 30^0$. Wenn $A_1$ mit dem Scheitel der Parabel zusammenfällt, ist die Aufgabe nur unter der Bedingung $a_2 > 2b$ lösbar.

26. Auf einem Durchmesser eines bestimmten Kreises sind zwei Punkte $A_1$ und $A_2$ gegeben; man soll denjenigen Peripheriepunkt $P$ ermitteln, für welchen $\angle A_1PA_2$ ein Maximum wird (Fig. 71).

Nimmt man den Kreismittelpunkt zum Koordinatenanfang,

Fig. 71.




setzt $OA_1 = a_1$, $OA_2 = a_2$ und den Kreisradius $OB = b$, so findet man für die rechtwinkligen Koordinaten von $P$

$$x = \frac{(a_1 + a_2)b^2}{a_1a_2 + b^2},$$

$$y = \frac{b\sqrt{(b^2 - a_1^2)(b^2 - a_2^2)}}{a_1a_2 + b^2},$$

welche Formeln zu folgender Konstruktion führen. Man beschreibe über $A_1A_2$ als Durchmesser einen Kreis und bestimme auf der nötigenfalls verlängerten Geraden $OB$ denjenigen Punkt $C$, von welchem aus gleiche Tangenten $CP = CQ$ an beide Kreise gelegt werden können (die Gerade $CD \perp OC$ ist die sogenannte Potenzlinie beider Kreise); der Berührungspunkt $P$ besitzt dann die verlangte Eigenschaft.

Wenn $A_1$ und $A_2$ gleichzeitig innerhalb oder gleichzeitig außerhalb des Kreises liegen, ist die Aufgabe immer möglich, dagegen wird sie unmöglich, wenn einer der gegebenen Punkte innerhalb und der andere außerhalb des Kreises liegt.

27. Auf der Peripherie einer gegebenen Ellipse soll derjenige Punkt bestimmt werden, von welchem aus gesehen die große Halbachse der Ellipsen am größten erscheint.

Bezeichnet man die Halbachsen mit $a$ und $b$, die lineare Exzentrizität $\sqrt{a^2 - b^2}$ mit $c$, so erhält man für die Abscisse des gesuchten Punktes die Gleichung

$$(x-a)(c^2x^2+ac^2x-a^4)=0$$

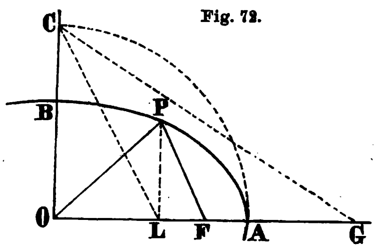
und hieraus

$$x=\frac{a}{2c}\left(\sqrt{4a^2+c^2}-c\right).$$

Die Aufgabe ist nur für $a>b\sqrt{2}$ möglich.

28. Auf der Peripherie einer gegebenen Ellipse soll derjenige Punkt bestimmt werden, von welchem aus gesehen die lineare Exzentrizität am größten erscheint (Fig. 72).

Fig. 72.




Bei derselben Bezeichnung wie vorhin ergibt sich

$$(cx-a^2)(cx^2+a^2x-a^2c)=0,$$

$$x=\frac{a}{2c}\left(\sqrt{a^2+4c^2}-a\right).$$

Nimmt man $OC=OA=a$, $OG=2OF=2c$, so schneidet die Halbierungslinie des Winkels $OCG$ die Gerade $OA$ in einem Punkte $L$, welcher der Endpunkt der Abscisse von $P$ ist.

29. Zwei Punkte $A_1$, $A_2$ und eine Kurve sind gegeben; auf letzterer soll der Punkt $P$ so bestimmt werden, daß $\angle A_1PA_2$ ein Maximum oder Minimum ist.

Legt man den Koordinatenanfang des rechtwinkligen Systems auf die Gerade $A_1A_2$, bezeichnet die Abscissen der Punkte $A_1$, $A_2$ durch $a_1$, $a_2$, und nimmt an, daß die Gleichung der Kurve im gewählten Koordinatensystem

$$y=f(x)$$

laute, so erhält man die Koordinaten $x$ und $y$ von $P$ durch Verbindung der vorstehenden Gleichung mit der folgenden

$$(a_1+a_2-2x)+[a_1a_2-(a_1+a_2)x+x^2-y^2]\,y'=0.$$

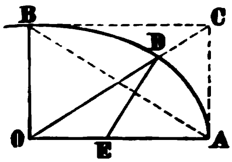
Unter der Voraussetzung, daß die Winkel $PA_1X=\varphi_1$, $PA_2X=\varphi_2$ und der Tangentenwinkel $\tau$ in der Richtung von der positiven Seite der $x$-Achse nach der positiven Seite der $y$-Achse von 0 bis 180° gezählt werden, bedeutet die obige Bedingung, daß $\varphi_1+\varphi_2$ entweder $=\tau$ oder $=\tau+\pi$ sein muß.

30. Der Mittelpunkt einer Ellipse ist geradlinig mit einem Peripheriepunkte verbunden und durch letzteren die Normale zur

Kurve gelegt; wie muß der Punkt gewählt werden, wenn der Winkel zwischen jenem Radiusvektor und dieser Normale ein Maximum sein soll?

Wird der Ellipsenmittelpunkt als Pol und die große Halbachse als Polarachse genommen, so sind die Polarkoordinaten des gesuchten Punktes durch die Formeln bestimmt

Fig. 73.



$$tg\,\theta = \frac{b}{a}, \quad r = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Der gesuchte Punkt ist also der Durchschnitt $D$ der Ellipse mit der Diagonale $OC$ des aus den Halbachsen konstruierten Rechtecks $AOBC$ (Fig. 73); die Normale $DE$ steht senkrecht auf der anderen Diagonale $AB$, auch ist

$$\angle ODE = \angle OBA - \angle OAB.$$

31. Auf der Fußpunktkurve einer gegebenen Ellipse sucht man denjenigen Punkt, für welchen der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der Normale ein Maximum ist.

Sind $OA$ und $OB$ die Achsen der Ellipse, so schneidet die von $O$ auf $AB$ herabgelassene Senkrechte die Fußpunktkurve im gesuchten Punkte.

32. Auf einer gegebenen Kurve soll man denjenigen Punkt bestimmen, für welchen der Winkel zwischen Radiusvektor und Normale ein Maximum oder Minimum ist.

Bezieht man die Kurve auf Polarkoordinaten, etwa

$$r = F(\theta),$$

so bestimmen sich $\theta$ und $r$ aus dieser und der folgenden Gleichung

$$r'^2 - rr'' = 0,$$

welche geometrisch bedeutet, daß an der gesuchten Stelle der Krümmungshalbmesser mit der Polarnormale identisch ist.

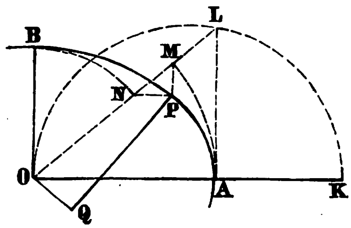
33. Welche Ellipsennormale liegt am weitesten entfernt vom Ellipsenmittelpunkte?

Die Koordinaten desjenigen Ellipsenpunktes, zu welchem in dem Quadranten der positiven Koordinaten die gesuchte Normale gehört, sind

$$x = \sqrt{\frac{a^3}{a+b}}, \quad y = \sqrt{\frac{b^3}{a+b}}.$$

Um den betreffenden Punkt zu konstruieren (Fig. 74), errichtet man im Endpunkte $A$ der großen Halbachse $OA$ auf derselben die Normale $AL = \sqrt{ab}$ und zieht hierauf die Gerade $OL$, welche den umbeschriebenen Kreis in $M$, den einbeschriebenen Kreis in $N$ schneidet und damit auch den gesuchten Punkt $P$ bestimmt. Legt man durch ihn die Ellipsennormale, so ist deren Abstand von $O$, nämlich $OQ$, das geforderte Maximum und zwar $= a - b$; gleichzeitig ist $PQ = AL$ und $Q$ der Krümmungsmittelpunkt für die Stelle $P$.

Fig. 74.




34. Welche Normale der Kardioide liegt am weitesten entfernt von der Spitze der Kurve?

In Polarkoordinaten ist für denjenigen Kardioidenpunkt, durch welchen die Normale geht,

$$\cos\theta = \tfrac{1}{3}, \quad r = \tfrac{4}{3}b,$$

wenn $b$ den Durchmesser des erzeugenden Kreises bedeutet.

35. Ein Punkt und eine Kurve sind gegeben; man sucht diejenige Normale der Kurve, welche von jenem Punkt am weitesten entfernt oder ihm am nächsten liegt.

Wird der gegebene Punkt zum Koordinatenanfang genommen, so ist bei rechtwinkligen Koordinaten die Bedingung

$$(1 + y'^2)^2 + (y - xy')y'' = 0$$

zu erfüllen, dagegen bei Polarkoordinaten die Bedingung

$$r'^4 + r^3 r'' = 0.$$

Der Kurvenpunkt, durch welchen die gesuchte Normale geht, besitzt hiernach die Eigenschaft, daß der zugehörige Krümmungsradius gleich ist der Entfernung der Tangente vom Koordinatenanfange.

36. Durch einen Ellipsenpunkt $P$ ist eine Ellipsentangente gelegt, welche die verlängerte große Achse in $T$ und die verlängerte kleine Achse in $U$ schneidet; der Punkt $P$ soll so bestimmt werden, daß die Strecke $TU$ ihren Minimalwert erreicht.

Der gesuchte Punkt ist derselbe wie in der Aufgabe 33; das Minimum von $TU$ beträgt $a+b$.

37. Durch den Punkt $xy$ der Kurve

$$y=(a-\tfrac{1}{8}x)\sqrt{\frac{x}{a}}$$

ist eine Tangente gelegt, welche die Abscissenachse in $T$, die Ordinatenachse in $U$ schneidet; für welchen Punkt $xy$ wird $TU$ ein Minimum?

Die Abscisse $x$ des gesuchten Punktes hat der kubischen Gleichung Genüge zu leisten

$$3x^3-ax^2-15a^2x-3a^3=0;$$

aus dieser ergibt sich

$$x=2{,}49654\cdot a.$$

38. Es bezeichne $t$ die zwischen den Koordinatenachsen enthaltene Strecke der Tangente, welche durch den Punkt $xy$ an die Kurve

$$y=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

gelegt ist; man sucht die Maxima und Minima von $t$.

Im Falle $b \overline{\gtrless} 2a$ existiert nur ein Minimum für $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$, d. h. wenn der gesuchte Punkt mit dem Inflexionspunkte der Kurve zusammenfällt.

Ist zweitens

$$2a<b<\frac{3}{\sqrt{2}}a,$$

so setze man zur Abkürzung

$$\frac{b-\sqrt{b^2-4a^2}}{2}=h,\quad \frac{b+\sqrt{b^2-4a^2}}{2}=k;$$

dann wird

für $\qquad x=\frac{a}{\sqrt{2}},\qquad h,\qquad k$

$t$ ein Minimum, Maximum, Minimum.

Im Falle $b=\frac{3}{\sqrt{2}}a$ existiert nur ein Minimum, welches für $x=\sqrt{2}\cdot a$ eintritt.

Ist endlich $b > \frac{3}{\sqrt{2}} a$, so entsprechen den Werten

$$x = h, \qquad \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad k$$

ein Minimum, Maximum, Minimum.

39. Für die Kurve

$$y = a e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

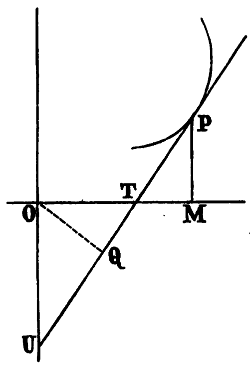
sucht man die Maxima und Minima von $t$, welches dieselbe Strecke wie in der vorigen Aufgabe bedeuten soll.

Für $x = \frac{1}{\sqrt{2}} a$, d. h. im Inflexionspunkte der Kurve findet ein Minimum statt; diesem folgt

für $x = 0{,}86255 \cdot a$ das Maximum,

für $x = 1{,}14409 \cdot a$ ein Minimum.

Fig. 75.




40. Durch den Punkt $P$ einer allgemein gegebenen Kurve ist eine Tangente gelegt, welche die Abscissenachse in $T$, die Ordinatenachse in $U$ schneidet; man sucht diejenigen Punkte $P$, für welche $TU$ seine größten oder kleinsten Werte erreicht (Fig. 75).

Für $OM = x$, $MP = y$ bestimmen sich die gesuchten Punkte aus der Gleichung der Kurve, verbunden mit der Bedingung

$$(y + xy'^3)y'' = 0.$$

Legt man $OQ$ senkrecht zu $TU$, so bedeutet diese Bedingung, daß entweder $TP + QU = 0$ oder der Punkt $P$ ein Inflexionspunkt sein muß.

41. Durch einen Parabelpunkt $P$ ist die zugehörige Parabeltangente konstruiert, welche die Direktrix in $Q$ schneidet; man sucht denjenigen Punkt, für welchen die Strecke $PQ$ am kleinsten wird.

Stellt man die Gleichung der Parabel in der Form dar

$$y = 2\sqrt{ax},$$

so erhält man

$$x = \tfrac{1}{2} a, \quad y = \pm\sqrt{2} \cdot a.$$

42. In der vorigen Aufgabe werde die Parabel durch eine Ellipse ersetzt, deren Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

sein möge, und dann wieder das Minimum von $PQ$ gesucht.

Es gibt selbstverständlich vier der Aufgabe genügende Punkte, von denen nur derjenige bestimmt zu werden braucht, dessen Koordinaten positiv sind. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{b}{a} = \mu, \quad \sqrt{3(32 - 61\mu^2 + 32\mu^4)} = \nu,$$

$$\sqrt[3]{\frac{16 - 9\mu^2 + 3\mu\nu}{2}} + \sqrt[3]{\frac{16 - 9\mu^2 - 3\mu\nu}{2}} = \lambda,$$

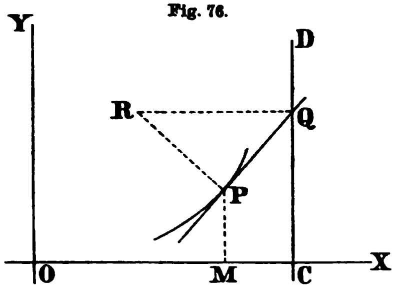
so findet man

$$x = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\lambda - 1}{\sqrt{1 - \mu^2}}\, a.$$

Eine ähnliche Bestimmung gilt für die Hyperbel.

43. Durch den Punkt $P$ einer gegebenen Kurve ist an letztere eine Tangente gelegt, welche eine in der Entfernung $OC = c$ parallel zur $y$-Achse gezogene Gerade $CD$ im Punkte $Q$ schneidet; man sucht das Maximum oder Minimum der Strecke $PQ$ (Fig. 76).

Fig. 76.




Für $OM = x$, $MP = y$ bestimmt sich der gesuchte Punkt durch die Gleichung der Kurve, verbunden mit der Bedingung

$$(x - c)y'y'' + 1 + y'^2 = 0;$$

die letztere bedeutet geometrisch, daß die Ordinate des Krümmungsmittelpunktes $R$ gleich der Höhe $CQ$ sein muß.

44. In welchen Punkten der auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen und durch die Gleichung

$$3a^2y = 2a^2x + x^3$$

bestimmten Kurve findet die stärkste oder schwächste Krümmung statt?

Betrachtet man den reziproken Wert des Krümmungshalbmessers als Maß der Krümmung einer Kurve, so handelt es sich um das Minimum oder Maximum von $\varrho$; hier tritt das erste ein für

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \varrho = a\sqrt{6}.$$

45. In welchen Punkten der logarithmischen Linie

$$y = b e^{\frac{x}{a}}$$

findet die stärkste oder schwächste Krümmung statt?

Die stärkste Krümmung tritt ein für

$$x = a \lg\left(\frac{a}{b\sqrt{2}}\right), \quad \varrho = \frac{3\sqrt{3}}{2} a.$$

46. In welchen Punkten der durch die Gleichung $y = f(x)$ bestimmten Kurve findet die stärkste oder schwächste Krümmung statt?

Die Koordinaten der gesuchten Punkte müssen den Bedingungen $y = f(x)$ und

$$3y' y''^2 - (1 + y'^2) y''' = 0$$

gleichzeitig genügen.

47. Die Fußpunktkurve der Ellipse wird bekanntlich durch die Polargleichung

$$r^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta$$

dargestellt und besitzt im Falle $a > b\sqrt{2}$ einen Wendepunkt, für den

$$tg\,\theta = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2}}$$

ist; bei welchem Achsenverhältnisse wird dieses $\theta$ am kleinsten?

Setzt man $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = q$ und betrachtet $q$ als unabhängige Variable, so wird für $q = 2 + \sqrt{3}$, d. h. für

$$a = 2b \cos 15^0, \quad \theta = 75^0 \text{ ein Minimum.}$$

48. Die gedehnte Epicykloide hat (nach S. 130) unter der Bedingung

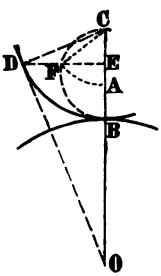
$$\frac{b^2}{a+b} < c < b$$

einen Inflexionspunkt, dessen Wälzungswinkel durch die Formel

$$\cos \omega = \frac{b^2 + (a+b)c^2}{(a+2b)bc}$$

bestimmt ist; wie muß $c$ gewählt werden, wenn dieses $\omega$ seinen Maximalwert erreichen soll?

Fig. 77.




Das Maximum tritt ein für

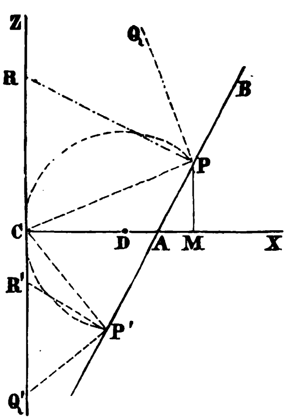
$$c = \sqrt{\frac{b^3}{a+b}}$$

und zwar ist dann

$$tg \tfrac{1}{2} \omega = \frac{b-c}{b+c}.$$

Dies gibt folgende Konstruktion (Fig. 77): Ist $OB$ der Radius des festen, $BC$ der Halbmesser des beweglichen Kreises in seiner Anfangslage, so beschreibe man über $BC$ als Durchmesser einen Halbkreis, lege an den beweglichen Kreis von $O$ aus die Tangente $OD$, ziehe senkrecht zu $BC$ die Gerade $DE$, welche den Halbkreis in $F$ schneidet, und nehme auf $CB$ die Strecke $CA = CF$; es ist dann $A$ der beschreibende Punkt.

Fig. 78.




Wählt man zwei rationale Zahlen $m$ und $n < \frac{1}{2} m$ willkürlich und setzt

$$a = m(m-n)(m-2n),$$
$$b = (m-n)n^2,$$

so erhält $c$ den rationalen Wert

$$c = n^3, \quad tg \tfrac{1}{2} \omega = \frac{m-2n}{m}.$$

49. In der $xy$-Ebene, welche man sich normal zur Ebene von Fig. 78 zu denken hat, ist um den Punkt $C$ eine kleine Fläche beschrieben, und diese wird von einer Lichtquelle beleuchtet, welche in der $xz$-Ebene längs der Geraden $AB$ verschoben werden kann; bei welcher Stellung der Lichtquelle erhält jene Fläche die stärkste Beleuchtung?

Bezeichnet $\lambda$ die Lichtmenge, welche auf die Fläche fallen würde, wenn die Lichtquelle in der Entfernung 1 senkrecht über der Fläche stände, so kann die Beleuchtung, welche die Fläche von derselben Lichtquelle erhält, wenn letztere sich in $P$ befindet, nach dem Satze bestimmt werden, daß die Beleuchtung direkt proportional ist dem Sinus des Einfallswinkels der Lichtstrahlen und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung; für $CM = x$, $MP = z$ ist sie demnach

$$\frac{\lambda z}{\sqrt{(x^2+z^2)^3}}.$$

Setzt man noch $CA = a$, $\angle BAX = \beta$, so erhält man für $x$ die Gleichung

$$x^2 - \tfrac{1}{2}(3 + \sin^2\beta)\,ax + a^2\sin^2\beta = 0;$$

sie führt zu folgender Konstruktion: man nehme $CD = \frac{3}{4}a$ und beschreibe aus $D$ als Mittelpunkt mit dem Radius $DC$ einen Kreis, welcher die Gerade $AB$ in den gesuchten Punkten $P$ und $P'$ schneidet.

Errichtet man in $P$ sowohl auf $CP$ eine Senkrechte, welche die $z$-Achse in $Q$ trifft, als auch auf $AB$ eine Normale, welche der $z$-Achse in $R$ begegnet, so ist

$$CQ = 3\,CR \quad \text{und analog} \quad CQ' = 3\,CR'.$$

50. Die vorige Aufgabe werde dahin modifiziert, daß sich die Lichtquelle $P$ längs einer, durch die Gleichung

$$z = \sqrt{2hx}$$

gegebenen Parabel bewegt und daß die beleuchtete Stelle auf der Parabelachse um $c$ vom Scheitel entfernt liegt.

Das Maximum der Beleuchtung tritt ein für

$$x = \tfrac{1}{5}\left\{2(c-h) + \sqrt{4(c-h)^2 + 5c^2}\right\}.$$

51. Läßt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Parabel einen Kreis treten, dessen Gleichung

$$z = \sqrt{a^2 - x^2}$$

ist, so ergibt sich

$$x = \sqrt{3a^2 + b^2} - b, \quad b = \frac{a^2+c^2}{2c}.$$

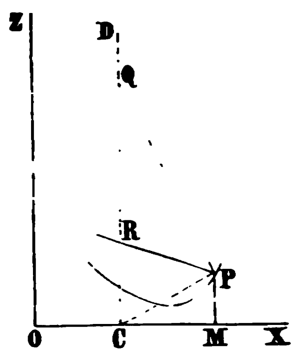
52. Die Lichtquelle $P$ bewege sich auf einer beliebigen, durch eine Gleichung von der Form $z = f(x)$ gegebenen Kurve, die beleuchtete Stelle $C$ habe die Koordinaten $OC = c$ und 0; man sucht wieder diejenige Lage von $P$, bei welcher die Beleuchtung von $C$ ein Maximum oder Minimum wird.

Die Koordinaten des gesuchten Punktes bestimmen sich aus der Gleichung der Kurve verbunden mit der Bedingung

$$3(x-c)z-[(x-c)^2-2z^2]z'=0.$$

Legt man $CD // OZ$, bezeichnet mit $Q$ den Durchschnitt von $CD$ mit einer in $P$ auf $CP$ errichteten Senkrechten und nennt $R$ den Durchschnitt von $CD$ mit der durch $P$ gehenden Kurvennormale, so hat die obige Gleichung den geometrischen Sinn, daß $CQ = 3CR$ sein muß (Fig. 79).

Fig. 79.




53. Die Aufgabe 49 werde dahin verallgemeinert, daß die Gerade $AB$ eine beliebige Lage im Raume erhält und demgemäß durch die beiden Gleichungen

$$x = Mz + a, \quad y = Nz + b$$

bestimmt wird; man sucht wieder die Stellung der Lichtquelle, für welche die Beleuchtung der um $C$ beschriebenen Fläche ein Maximum wird.

Die Koordinaten von $P$ bestimmen sich aus den Gleichungen der Geraden, verbunden mit der Bedingung

$$2(M^2+N^2+1)z^2+(Ma+Nb)z=a^2+b^2.$$

Bezeichnet $A$ die Horizontalspur der Geraden $AB$, und wird auf der Strecke $CA$ der Abschnitt $CE = \frac{3}{4}CA$ genommen, so ist $P$ resp. $P'$ der Durchschnitt von $AB$ mit einem in der Ebene $CAB$ liegenden Kreise, welcher $E$ zum Mittelpunkte und $EC$ zum Radius hat.

Legt man in der Ebene $CPZ$ durch $P$ eine zu $CP$ senkrechte Gerade, welche $CZ$ in $Q$ schneidet, und bezeichnet man ferner mit $R$ den Punkt, in welchem $CZ$ von der durch $P$ normal zu $AB$ liegenden Ebene geschnitten wird, so ist $CQ = 3CR$ und analog $CQ' = 3CR'$.

54. Ersetzt man in der vorigen Aufgabe die Gerade $AB$ durch eine beliebige Kurve, deren Gleichungen

$$x = \varphi(z) \quad \text{und} \quad y = \psi(z)$$

sind, so erhält man die Bedingung

$$x^2+y^2-2z^2=3z\left(x\frac{dx}{dz}+y\frac{dy}{dz}\right).$$

Der geometrische Sinn derselben ist, daß $CQ = 3\,CR$ sein muß, wobei $Q$ denselben Punkt wie vorhin bedeutet und $R$ denjenigen Punkt, in welchem die durch $P$ gehende Normalebene der Kurve die Gerade $CZ$ schneidet.

55. **Reziproke Maxima und Minima.** Wenn zwischen drei Größen $x$, $u$, $v$ eine Gleichung von der Form

$$u - v = f(x)$$

stattfindet und es freisteht, die eine oder andere der beiden Größen $u$ und $v$ zu einer Konstanten zu machen, so hat man bei konstantem $v$ die Gleichung $u' = f'(x)$, bei konstantem $u$ dagegen $v' = -f'(x)$. Aus diesen Gleichungen geht unmittelbar hervor, daß einem Minimum oder Maximum von $u$ ein Maximum oder Minimum von $v$ entspricht, daß also zwei reziproke Sätze entstehen, wie sie in den folgenden Beispielen ausgesprochen sind.

56. Die Grundlinie eines Rechtecks sei $g$, seine Höhe $h$, sein Umfang $U$, seine Fläche $V$; wird ferner das Verhältnis $h : g$ mit $x$ bezeichnet, so ist

$$\frac{U^2}{V} = 4\,\frac{(1+x)^2}{x},$$

oder

$$2\,lg\,U - lg\,V = lg\,4 + 2\,lg\,(1+x) - lg\,x.$$

Diese Gleichung hat die in Nr. 55 erwähnte Form, und da die Funktion rechter Hand für $x = 1$ ihren Minimalwert erreicht, so lassen sich folgende reziproke Sätze aufstellen: Unter allen Rechtecken von gleicher Fläche hat das Quadrat den kleinsten Umfang, und unter allen Rechtecken von gleichem Umfang hat das Quadrat die größte Fläche. Dabei ist immer $U^2 = 16\,V$; einem gegebenen $V$ entspricht $g = h = \sqrt{V}$, bei gegebenem $U$ ist $g = h = \frac{1}{4}\,U$.

57. Ein cylindrisches Hohlmaß habe $r$ zum Radius der Basis, $h$ zur Höhe, $U$ zur Oberfläche, $V$ zum Volumen; für $\frac{h}{r} = x$ ist dann

$$\frac{U^3}{V^2} = \pi\,\frac{(1+2x)^3}{x^2}.$$

Hieraus ergeben sich folgende Sätze: Unter allen cylindrischen Hohlmaßen von gleichem Fassungsraume hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen Höhe gleich dem Basisradius ist, und unter allen cylindrischen Hohlmaßen von gleicher Oberfläche faßt dasjenige am meisten, bei welchem dasselbe Verhältnis zwischen Höhe und Basisradius stattfindet.

In allen Fällen ist $U^3 = 27\pi V^2$; bei gegebenem $V$ folgt

$$r = h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},$$

dagegen bei gegebenem $U$

$$r = h = \sqrt{\frac{U}{3\pi}}.$$

58. Für einen allseitig geschlossenen Cylinder mögen dieselben Bezeichnungen wie vorhin gelten; man gelangt dann zu folgenden Sätzen: Unter allen Cylindern von gleichem Inhalte besitzt derjenige die kleinste Oberfläche, dessen Höhe gleich dem Basisdurchmesser ist, und unter allen Cylindern von gleicher Oberfläche hat derjenige das größte Volumen, bei welchem dasselbe Verhältnis zwischen Höhe und Basisdurchmesser stattfindet.

Dabei ist immer $U^3 = 54\pi V^2$ und, je nachdem $V$ oder $U$ als gegeben betrachtet wird,

$$r = \tfrac{1}{2} h = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \quad r = \tfrac{1}{2} h = \sqrt{\frac{U}{6\pi}}.$$

59. Unter allen geraden Kreiskegeln von gleichem Volumen hat derjenige den kleinsten Mantel, dessen Seite $= \sqrt{3} \cdot r$ ist, wo $r$ den Basisradius bezeichnet, und unter allen Kegeln von gleicher Mantelfläche besitzt derjenige das größte Volumen, bei welchem die nämliche Gleichung stattfindet.

Zugleich ist immer $U^3 = \frac{27\sqrt{3}}{2}\pi V^2$.

60. Unter allen geraden Kreiskegeln von demselben Volumen besitzt derjenige die kleinste Gesamtoberfläche, dessen Seite gleich dem dreifachen Basisradius ist, und unter allen Kegeln von gleicher Oberfläche hat derjenige den größten kubischen Inhalt, bei welchem zwischen der Seite und dem Basisradius dasselbe Verhältnis stattfindet.

Zugleich ist in beiden Fällen $U^3 = 72\pi V^2$.

61. Ein Körper besteht aus einem geraden Kreiscylinder und einer daran gesetzten Halbkugel, deren ebene Fläche mit der einen ebenen Fläche des Cylinders zusammenfällt; das Verhältnis der Cylinderhöhe zum Radius der Cylinderbasis sei $x$, $U$ die Oberfläche, $V$ das Volumen des Körpers. Bei konstantem $V$ ist dann $U$ ein Minimum, bei konstantem $U$ dagegen $V$ ein Maximum für $x = 1$ und $U^3 = 45\pi V^2$.

62. Ein Körper besteht aus einem geraden Kreiskegel und einer daran gesetzten Halbkugel, deren ebene Fläche mit der Kegelbasis zusammenfällt; das Verhältnis der Kegelhöhe zum Radius der Halbkugel sei $x$, die übrige Bezeichnung wie vorhin; es ist dann

$$\frac{U^3}{V^2} = 9\pi \frac{(2+\sqrt{1+x^2})^3}{(2+x)^2}.$$

Der Ausdruck rechter Hand wird ein Minimum, wenn

$$x^2 + 6x - 2 - 4\sqrt{1+x^2}$$

vom Negativen durch Null ins Positive übergeht, was für positive $x$ nur an der Stelle $x = 1{,}12598$ der Fall ist.

Bei konstantem $V$ wird demnach $U$ für diesen Wert ein Minimum, bei konstantem $U$ dagegen $V$ ein Maximum.

## § 33.

### Maxima und Minima der Funktionen mehrerer Variabeln.

Wenn $F(x, y, z \ldots)$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, so kann man sich $x, y, z \ldots$ als willkürliche Funktionen einer neuen Variabeln $t$ denken; und dann muß der Ausdruck

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \cdots$$

sein Vorzeichen ändern, während $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ usw. ganz willkürliche Größen bedeuten. Falls $\frac{dF}{dt}$ eine stetige Funktion ist, kann der Vorzeichenwechsel nur durch Null hindurch erfolgen und hierzu gehören die Bedingungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \ldots$$

Um zu entscheiden, ob $F$ durch die hieraus bestimmten Werte von $x, y, z$ usw. zu einem Maximum oder zu einem Minimum wird, muß zunächst untersucht werden, ob $\frac{d^2F}{dt^2}$ durch Substitution jener Werte negativ oder positiv ausfällt. Sollte dieser Differentialquotient bei der genannten Substitution verschwinden, so müssen die höheren Differentialquotienten von $F$ diskutiert werden.

Bei Funktionen zweier Variabeln führt die Untersuchung von $\frac{d^2F}{dt^2}$ zu folgender Regel: Die aus den Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ abgeleiteten Werte von $x$ und $y$ müssen zunächst der Bedingung

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$$

genügen und geben das Maximum oder Minimum der Funktion $F$, je nachdem sie die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

gleichzeitig negativ oder positiv machen. Verschwinden dagegen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

für jene Werte von $x$ und $y$, so verliert das angegebene Kriterium seine Anwendbarkeit, und es ist dann am zweckmäßigsten, aus der Natur der gestellten speziellen Aufgabe zu entscheiden, ob ein Maximum oder Minimum stattfindet. Dieselbe Bemerkung gilt für Funktionen von drei oder mehr Variabeln und ebenso für den Fall, daß sprungweise Änderungen der Differentialquotienten vorkommen.

## Beispiele und Aufgaben.

1. Die Funktion

$$F(x, y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + K$$

hat nur dann ein Maximum oder Minimum, wenn $C^2 - AB$ negativ ist; bei negativen $A$ und $B$ liefern die Werte

$$x = \frac{CE - BD}{AB - C^2}, \quad y = \frac{CD - AE}{AB - C^2}$$

das Maximum, bei positiven $A$ und $B$ das Minimum der Funktion, nämlich

$$F(x, y) = \frac{2CDE - (AE^2 + BD^2)}{AB - C^2} + K.$$

2. Es sei

$$F(x, y) = xy(Ax + By - C);$$

die partiellen Differentialquotienten dieser Funktion verschwinden in folgenden Fällen

$$x = 0, \qquad y = 0;$$

$$x = 0, \quad y = \frac{C}{B}; \quad x = \frac{C}{A}, \quad y = 0;$$

$$x = \frac{C}{3A}, \quad y = \frac{C}{3B}.$$

Von diesen vier Wertepaaren liefern die drei ersten weder Maxima noch Minima; das letzte gibt den Wert

$$F(x, y) = -\frac{C^3}{27AB},$$

welcher ein Minimum oder ein Maximum der Funktion bildet, je nachdem das Produkt $ABC$ positiv oder negativ ist.

3. Eine gegebene positive Zahl soll derart in drei Teile zerlegt werden, daß das Produkt aus der $m^{\text{ten}}$ Potenz des ersten, der $n^{\text{ten}}$ Potenz des zweiten und der $p^{\text{ten}}$ Potenz des dritten Teiles ein Maximum wird.

Nur bei positiven $m$, $n$, $p$ existiert ein solches Maximum; die gesuchten Teile der Zahl $c$ sind

$$\frac{mc}{m+n+p}, \quad \frac{nc}{m+n+p}, \quad \frac{pc}{m+n+p}$$

und das erwähnte Maximalprodukt ist

$$\frac{m^m n^n p^p c^{m+n+p}}{(m+n+p)^{m+n+p}}.$$

4. Von einem innerhalb des gegebenen Dreiecks $ABC$ liegenden Punkte $O$ sind auf die Dreieckseiten $BC$, $CA$, $AB$ die Senkrechten $OP$, $OQ$, $OR$ herabgelassen; man soll den Punkt $O$ so bestimmen, daß das rechtwinklige Parallelepiped aus den Kanten $OP$, $OQ$, $OR$ die kleinste Diagonale besitzt.

Bezeichnet man die Dreieckseiten mit $a$, $b$, $c$, die Senkrechten darauf mit $x$, $y$, $z$ und die Dreiecksfläche mit $\Delta$, so hat man den Ausdruck

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{2\Delta - ax - by}{c}\right)^2$$

zu einem Minimum zu machen; die hierzu nötigen Werte sind

$$x = \frac{2\Delta \cdot a}{a^2+b^2+c^2}, \quad y = \frac{2\Delta \cdot b}{a^2+b^2+c^2}, \quad z = \frac{2\Delta \cdot c}{a^2+b^2+c^2}.$$

Mittelst der Proportion

$$x : y : z = a : b : c$$

wird man leicht eine Konstruktion des Punktes $O$ finden.

Derselbe ist übrigens der gemeinschaftliche Durchschnitt derjenigen drei Geraden, welche die Mittelpunkte der Dreieckseiten mit den Mittelpunkten der zugehörigen Dreieckhöhen verbinden. Die Seiten des Dreiecks $PQR$ verhalten sich wie die Schwerlinien des Dreiecks $ABC$ und stehen senkrecht auf den letzteren.

5. Innerhalb des Dreiecks $ABC$ soll der Punkt $O$ so bestimmt werden, daß das rechtwinklige Parallelepiped, welches die Abstände $OP$, $OQ$, $OR$ zu Kanten hat, die größte Oberfläche besitzt.

Behält man die vorige Bezeichnung bei und setzt zur Abkürzung

$$2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) = N,$$

so erhält man die Werte

$$x = \frac{2\Delta}{N}(b + c - a), \quad y = \frac{2\Delta}{N}(c + a - b), \quad z = \frac{2\Delta}{N}(a + b - c).$$

Der in das Dreieck $ABC$ beschriebene Kreis berühre die Seiten $BC$, $CA$, $AB$ in den Punkten $A_0$, $B_0$, $C_0$; es ist dann

$$AB_0 = AC_0 = \tfrac{1}{2}(b + c - a) = a_0,$$
$$BC_0 = BA_0 = \tfrac{1}{2}(c + a - b) = b_0,$$
$$CB_0 = CB_0 = \tfrac{1}{2}(a + b - c) = c_0,$$

wobei $a_0$, $b_0$, $c_0$ zur Abkürzung dienen; die Proportion

$$x : y : z = a_0 : b_0 : c_0$$

läßt sich jetzt zur Konstruktion des Punktes $O$ benutzen. Noch sei bemerkt, daß sich die Umfänge der Seitenflächen des gesuchten Parallelepipedes wie die Dreieckseiten verhalten.

6. Innerhalb des Dreiecks $ABC$ soll der Punkt $O$ so bestimmt werden, daß das Parallelepiped aus den Kanten $OP$, $OQ$, $OR$ das größtmögliche Volumen besitzt.

Bei derselben Bezeichnung wie vorhin ergeben sich die Werte

$$x = \frac{2\Delta}{3a}, \quad y = \frac{2\Delta}{3b}, \quad z = \frac{2\Delta}{3c}.$$

Der Punkt $O$ liegt demnach so, daß die Dreiecke $BOC$, $COA$, $AOB$ die gleiche Fläche $\frac{1}{3}\Delta$ haben. Teilt man irgend eine Dreieckseite in drei gleiche Teile und zieht durch jeden Teilpunkt eine Parallele zur nächstliegenden Seite, so schneiden sich diese Parallelen in dem gesuchten Punkte $O$.

7. In der Ebene des Dreiecks $ABC$ soll der Punkt $O$ so bestimmt werden, daß $\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2$ möglichst klein wird.

Bezeichnet man die Dreieckseiten $BC$, $CA$, $AB$ mit $a$, $b$, $c$, die Gegenwinkel mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und setzt $AO = u$, $\angle OAB = \theta$, so findet man für $u$ und $\theta$ die Bedingungsgleichungen

$$3u = c\cos\theta + b\cos(\alpha - \theta), \quad 0 = c\sin\theta - b\sin(\alpha - \theta),$$

deren Quadratsumme gibt

$$u = \tfrac{1}{3}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}$$

und analog

$$BO = v = \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 + a^2 + 2ca\cos\beta}, \quad CO = w = \tfrac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}.$$

Die Konstruktion von $u$, $v$, $w$ liegt sehr nahe und zeigt, daß $O$ der Schwerpunkt des Dreiecks $ABC$ ist.

8. In der Ebene des Dreiecks $ABC$ soll der Punkt $O$ so bestimmt werden, daß die Summe $a_1 \cdot AO + b_1 \cdot BO + c_1 \cdot CO$, worin $a_1$, $b_1$, $c_1$ gegebene positive Faktoren bedeuten, ihren Minimalwert erreicht.

Die vorige Bezeichnung beibehaltend, findet man die beiden Bedingungsgleichungen

$$a_1 = b_1 \frac{c\cos\theta - u}{v} + c_1 \frac{b\cos(\alpha - \theta) - u}{w},$$

$$0 = b_1 \frac{c\sin\theta}{v} - c_1 \frac{b\sin(\alpha - \theta)}{w},$$

d. h., wenn die Verlängerung von $AO$ mit $OL$ bezeichnet wird,

$$a_1 = b_1 \cos BOL + c_1 \cos COL,$$

$$0 = b_1 \sin BOL - c_1 \sin COL.$$

Eliminiert man hieraus einmal $c_1$, das andere Mal $b_1$, so folgt

$$a_1 : b_1 : c_1 = \sin BOC : \sin COA : \sin AOB,$$

oder wenn

$$\angle BOC = 180^0 - \sigma, \quad \angle COA = 180^0 - \tau, \quad \angle AOB = 180^0 - \omega$$

gesetzt wird,

$$a_1 : b_1 : c_1 = \sin\sigma : \sin\tau : \sin\omega,$$

$$\sigma + \tau + \omega = 180^0.$$

Die Hilfswinkel $\sigma$, $\tau$, $\omega$ bilden demnach die Winkel eines Dreiecks, dessen Seiten $a_1$, $b_1$, $c_1$ oder diesen Größen proportional sind; die

Möglichkeit des Punktes $O$ setzt die Möglichkeit dieses Dreiecks voraus.

Um hiernach den Punkt $O$ zu konstruieren, beschreibt man über den Dreieckseiten $BC$, $CA$, $AB$ als Sehnen genommen, Kreisbögen, in denen die Winkel $180^0 - \sigma$, $180^0 - \tau$ und $180^0 - \omega$ Peripheriewinkel sind; der gemeinschaftliche Durchschnitt dieser Kreisbögen ist der Punkt $O$.

In dem einfachsten Falle $a_1 = b_1 = c_1$ wird $\sigma = \tau = \omega = 60^0$ und jeder der Winkel $BOC$, $COA$, $AOB$ beträgt dann $120^0$. Für $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$ werden $\sigma$, $\tau$, $\omega$ identisch mit den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und der Punkt $O$ ist dann der Durchschnitt der Höhen des Dreiecks $ABC$.

9. Auf den Seiten $BC$, $CA$, $AB$ eines gegebenen Dreiecks sind die Punkte $U$, $V$, $W$ angenommen und zu einem Dreiecke $UVW$ verbunden worden; man verlangt eine solche Wahl von $U$, $V$, $W$, daß der Flächeninhalt des Dreiecks $UVW$ ein Minimum werde.

Benutzt man die in der Trigonometrie übliche Bezeichnung und setzt $BU = x$, $CV = y$, $AW = z$, so erhält man die Bedingungen

$$y \sin\gamma + z \sin\beta = c \sin\beta,$$

$$z \sin\alpha + x \sin\gamma = a \sin\gamma,$$

$$x \sin\beta + y \sin\alpha = b \sin\alpha,$$

aus denen hervorgeht, daß $UVW$ die Mittelpunkte der Seiten $BC$, $CA$, $AB$ sind.

10. Die Punkte $U$, $V$, $W$ mögen wie vorhin gelegen sein; man verlangt dagegen, daß der Umfang des Dreiecks ein Minimum werde.

Setzt man zur Abkürzung $VW = u$, $WU = v$, $UV = w$, so erhält man die Bedingungen

$$\frac{x - (c - z)\cos\beta}{v} = \frac{a - x - y\cos\gamma}{w},$$

$$\frac{y - (a - x)\cos\gamma}{w} = \frac{b - y - z\cos\alpha}{u},$$

$$\frac{z - (b - y)\cos\alpha}{u} = \frac{c - z - x\cos\beta}{v},$$

welche geometrisch bedeuten, daß

$$\angle BUW = \angle CUV, \quad \angle CVU = \angle AVW, \quad \angle AWV = \angle BWU$$

sein muß. Hieraus ergibt sich weiter

$$\angle BUW = \alpha, \quad \angle CVU = \beta, \quad \angle AWV = \gamma;$$

die Punkte $U$, $V$, $W$ sind folglich die Fußpunkte der Höhen des Dreiecks $ABC$.

11. Um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt $O$ sind mit den Radien $a$, $b$, $c$ drei Kreise beschrieben; auf der Peripherie des ersten Kreises ist ein Punkt $X$ zu wählen, ebenso auf dem zweiten Kreise ein Punkt $Y$, auf dem dritten ein Punkt $Z$; es sollen nun diejenigen $X$, $Y$, $Z$ ermittelt werden, für welche die Fläche des Dreiecks $XYZ$ ihren Maximalwert erreicht.

Bezeichnet man wie folgt

$$\angle YOZ = \xi, \quad \angle ZOX = \eta, \quad \angle XOY = \zeta = 2\pi - (\xi + \eta),$$

so erhält man als Dreiecksfläche

$$\tfrac{1}{2}\{bc \sin\xi + ca \sin\eta - ab \sin(\xi + \eta)\}$$

und hieraus die Bedingungen

$$\frac{\cos\xi}{a} = \frac{\cos\eta}{b} = \frac{\cos\zeta}{c}.$$

Der gemeinschaftliche Wert der drei unbekannten Quotienten sei $\frac{1}{u}$; es bestimmt sich dann $u$ durch die kubische Gleichung

$$u^3 - (a^2 + b^2 + c^2)u + 2abc = 0,$$

und nachher finden sich $\xi$, $\eta$, $\zeta$ mittelst der Formeln

$$\cos\xi = \frac{a}{u}, \quad \cos\eta = \frac{b}{u}, \quad \cos\zeta = \frac{c}{u}.$$

Die obige kubische Gleichung besitzt drei reelle Wurzeln, und es ist daher zu untersuchen, ob jeder derselben eine Lösung der Aufgabe entspricht.

12. Die Punkte $XYZ$ mögen wie vorhin gelegen sein, dagegen verlangt man, daß der Umfang des Dreiecks $XYZ$ ein Maximum werde.

Versteht man unter $\xi$, $\eta$, $\zeta$ dieselben Winkel wie vorhin und unter $x$, $y$, $z$ die Dreieckseiten $YZ$, $ZX$, $XY$, so erhält man die Bedingungen

$$\frac{c \sin \xi}{x} = \frac{a \sin \zeta}{z}, \quad \frac{c \sin \eta}{y} = \frac{b \sin \zeta}{z},$$

aus denen hervorgeht, daß $O$ der Mittelpunkt des dem Dreiecke $XYZ$ eingeschriebenen Kreises sein muß. Der Radius des letzteren heiße $r$; die vorigen Bedingungen lassen sich dann in folgender Form schreiben

$$a \cos \xi = b \cos \eta = c \cos \zeta = -r.$$

Für $r$ erhält man eine kubische Gleichung, welche der in Nr. 11 vorkommenden ähnlich wird, wenn man ihr folgende Gestalt gibt

$$\left(\frac{1}{r}\right)^3 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{1}{r} - \frac{2}{abc} = 0;$$

nachher ist

$$\cos \xi = -\frac{r}{a}, \quad \cos \eta = -\frac{r}{b}, \quad \cos \zeta = -\frac{r}{c}.$$

13. Um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt $O$ hat man mit den Radien $a$, $b$, $c$ Kreise beschrieben und an jeden der letzteren eine Tangente gelegt; diese Tangenten mögen sich in den Punkten $X$, $Y$, $Z$ schneiden. Es soll nun die Fläche des Dreiecks $XYZ$ zu einem Minimum gemacht werden.

Wenn die gegebenen Kreise die entsprechenden Seiten $YZ$, $ZX$, $XY$ berühren, so ist nach leicht verständlicher Bezeichnung die Fläche des Dreiecks gleich

$$\frac{(a \sin X + b \sin Y + c \sin Z)^2}{2 \sin X \sin Y \sin Z} \quad \text{und} \quad Z = \pi - (X + Y).$$

Hieraus ergeben sich die Bedingungen

$$a \sin X = b \sin(2X + Y) + c \sin(X + Y),$$
$$b \sin Y = a \sin(X + 2Y) + c \sin(X + Y),$$

oder

$$\frac{\cos X}{a} = \frac{\cos Y}{b} = \frac{\cos Z}{c}.$$

Nennt man $\frac{1}{u}$ den gemeinschaftlichen Wert dieser Quotienten, so ist

$$u^3 - (a^2 + b^2 + c^2)u - 2abc = 0$$

und nachher

$$\cos X = \frac{a}{u}, \quad \cos Y = \frac{b}{u}, \quad \cos Z = \frac{c}{u}.$$

14. Die Punkte $X$, $Y$, $Z$ mögen wie vorhin entstanden sein, dagegen verlangt man, daß der Umfang des Dreiecks $XYZ$ ein Minimum werde.

Der Umfang des fraglichen Dreiecks ist

$$(b + c) \cot \tfrac{1}{2} X + (c + a) \cot \tfrac{1}{2} Y + (a + b) \cot \tfrac{1}{2} Z,$$
$$Z = \pi - (X + Y);$$

er wird ein Minimum unter den Bedingungen

$$\frac{b+c}{\sin^2 \frac{1}{2} X} = \frac{c+a}{\sin^2 \frac{1}{2} Y} = \frac{a+b}{\sin^2 \frac{1}{2} Z}.$$

Setzt man

$$\sqrt{b + c} = a_1, \quad \sqrt{c + a} = b_1, \quad \sqrt{a + b} = c_1$$

und den gemeinschaftlichen Wert der vorigen drei Quotienten $= v^2$, so erhält man für $v$ die kubische Gleichung

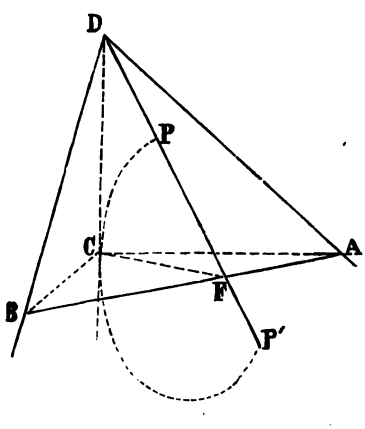
$$v^3 - (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) v - 2 a_1 b_1 c_1 = 0$$

und nachher

$$\sin \tfrac{1}{2} X = \frac{a_1}{v}, \quad \sin \tfrac{1}{2} Y = \frac{b_1}{v}, \quad \sin \tfrac{1}{2} Z = \frac{c_1}{v}.$$

15. In der Horizontalebene $ABC$ (Fig. 80) ist um den Punkt $C$ eine kleine Fläche beschrieben, und diese wird von einer Lichtquelle $P$ beleuchtet, welche sich in der festen Ebene $ABD$ bewegen läßt; bei welcher Lage von $P$ erhält jene Fläche die stärkste Beleuchtung?

Fig. 80.




Für $CA = a$,

$CB = b$,

$CD = h$

und wenn $CA$, $CB$, $CD$ als Koordinatenachsen genommen werden, ergeben sich die Bedingungen

$$2h^2\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 - x^2 - y^2 = 3ax\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$
$$= 2by\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

Diesen entspricht folgende Konstruktion: Man lege die Gerade $CF$ senkrecht zur Horizontalspur $AB$ der gegebenen Ebene und konstruiere in der Ebene $DCF$ einen Kreis, welcher die Gerade $CD$ in $C$ berührt und $\frac{3}{4}CF$ zum Radius hat; dieser Kreis schneidet die Gerade $DF$ in den gesuchten Punkten $P$ und $P'$.

Legt man in der Ebene $DCP$ durch $P$ senkrecht zu $CP$ eine Gerade, welche $CD$ in $Q$ schneidet, und konstruiert man ferner in $P$ die zur Ebene $ABD$ gehörende Normale, welche $CD$ in $R$ trifft, so ist $CQ = 3CR$ und analog $CQ' = 3CR'$.

16. Die vorige Aufgabe werde dahin verallgemeinert, daß der Punkt $C$ auf der $x$-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems der $OX$, $OY$, $OZ$ in der Entfernung $OC = c$ liegt, und daß sich die Lichtquelle auf einer durch die Gleichung $z = f(x, y)$ bestimmten Fläche bewegt; man sucht wieder das Maximum der Beleuchtung der kleinen um $C$ in der $xy$-Ebene beschriebenen Fläche.

Die Koordinaten von $P$ bestimmen sich aus der Gleichung der Fläche verbunden mit den beiden Bedingungen

$$(x-c)^2 + y^2 + z^2$$
$$= 3z\,\frac{x - c + z\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial x}} = 3z\,\frac{y + z\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}}.$$

Zieht man $CD // OZ$ und legt in der Ebene $DCP$ durch $P$ senkrecht zu $CP$ eine Gerade, welche $CD$ in $Q$ schneidet, so bedeuten die obigen Bedingungen, daß die durch $P$ gehende Normale der Fläche gleichfalls die Linie $CD$ in einem Punkte $R$ schneidet und daß $CQ = 3CR$ ist.

17. Reziproke Maxima und Minima. Wenn eine Gleichung von der Form
$$u - v = F(x, y, z, \ldots)$$
stattfindet und es frei steht, die eine oder andere der beiden Größen $u$ und $v$ konstant zu nehmen, so liefern diejenigen Werte von $x, y, z, \ldots$, welche $F(x, y, z \ldots)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, einerseits das Maximum (resp. Minimum) von $u$ bei konstantem $v$, anderseits das Minimum (resp. Maximum) von $v$ bei konstantem $u$.

18. Aus einem Rechtecke und einem daran gesetzten gleichschenkligen Dreiecke ist ein Fünfeck konstruiert; die gemeinschaft-

liche Basis des Rechtecks und des Dreiecks sei $2g$, die Rechteckshöhe $h$, die Dreieckshöhe $h_1$, ferner $\frac{h}{g} = x$, $\frac{h_1}{g} = y$, endlich $U$ der Umfang, $V$ der Flächeninhalt des Fünfecks; es ist dann

$$\frac{U^2}{V} = 4\frac{(1+x+\sqrt{1+y^2})^2}{2x+y},$$

oder

$$2\,lg\,U - lg\,V = lg\,4 + 2\,lg(1+x+\sqrt{1+y^2}) - lg(2x+y).$$

Das Minimum der Funktion rechter Hand tritt ein, wenn die beiden Bedingungen

$$\frac{1}{1+x+\sqrt{1+y^2}} - \frac{1}{2x+y} = 0,$$

$$\frac{2}{1+x+\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{1}{2x+y} = 0$$

erfüllt sind. Aus der ersten folgen die Relationen

$$y = \frac{1-(x-1)^2}{2(x-1)}, \quad \sqrt{1+y^2} = \frac{1+(x-1)^2}{2(x-1)},$$

nachher liefert die zweite Bedingungsgleichung die Werte

$$x = 1, \quad x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}},$$

von denen zwei unbrauchbar sind, weil $y$ einen positiven endlichen Wert erhalten soll. Für

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sqrt{1+y^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

wird nun $U$ ein Minimum bei konstantem $V$, und umgekehrt $V$ ein Maximum bei konstantem $U$.

19. Ein Körper bestehe aus einem geraden Kreiscylinder und einem darauf gestellten geraden Kreiskegel, dessen Basis mit der einen ebenen Fläche des Cylinders zusammenfällt; der Cylinder habe den Radius $r$ und die Höhe $h$, der Kegel die Höhe $h_1$; es sei $\frac{h}{r} = x$, $\frac{h_1}{r} = y$, die Oberfläche des Körpers $= U$, sein Volumen $= V$; man hat dann

$$\frac{U^3}{V^2} = 9\pi\frac{(1+2x+\sqrt{1+y^2})^3}{(3x+y)^2}.$$

Hieraus ergibt sich, daß die Werte

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sqrt{1+y^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

das Minimum von $U$ liefern bei konstantem $V$ und zugleich das Maximum von $V$ bei konstantem $U$.

20. An die eine ebene Endfläche eines geraden Kreiscylinders ist eine Halbkugel, an die andere ein gerader Kreiskegel angesetzt; bei denselben Bezeichnungen wie vorhin ist dann

$$\frac{U^3}{V^2} = 9x \frac{(2 + 2x + \sqrt{1+y^2})^3}{2 + 3x + y^2}.$$

Hieraus folgt, daß die Werte

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sqrt{1+y^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

das Minimum von $U$ liefern bei konstantem $V$ und zugleich das Maximum von $V$ bei konstantem $U$.

## § 34.

### Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

I. Wenn $F(x, y)$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht und dabei die Bedingung $\varphi(x, y) = 0$ erfüllt werden soll, so könnte man aus der letzten Gleichung $y$ als Funktion von $x$ entwickeln und diesen Wert in $F(x, y)$ substituieren, so daß man es nur noch mit einer Funktion der einen unabhängigen Variabeln $x$ zu tun hat; meistens ist es aber besser, sowohl $F(x, y)$ als die Bedingungsgleichung zu differenzieren, wobei $y$ als implizite Funktion von $x$ gilt, und nachher $\frac{dy}{dx}$ zu eliminieren. Man erhält dann zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten $x$ und $y$.

1. Auf dem positiven Quadranten der Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

soll der Punkt $xy$ so bestimmt werden, daß die Fläche des Rechtecks aus $x$ und $y$ am größten ausfällt.

Es ist hier

$$F(x, y) = xy, \quad \frac{dF(x, y)}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

und zufolge der Ellipsengleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y};$$

nach Substitution dieses Wertes in die vorige Gleichung hat man die beiden Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

und erhält daraus

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Das Maximum von $xy$ beträgt hiernach $\frac{1}{2}ab$.

2. An die vorige Ellipse ist im Punkte $xy$ eine Tangente gelegt, welche die Koordinatenachsen $OX$ und $OY$ in den Punkten $U$ und $V$ schneidet; man soll den Berührungspunkt so bestimmen, daß die Diagonale des Rechtecks aus $OU$ und $OV$ ihren Minimalwert erreicht.

Es handelt sich hier um das Minimum von

$$F(x, y) = \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2};$$

dieses tritt ein für

$$x = \sqrt{\frac{a^3}{a+b}}, \quad y = \sqrt{\frac{b^3}{a+b}},$$

wonach der Punkt $xy$ derselbe ist wie in Nr. 33, § 32. Das Minimum der Diagonale beträgt $a + b$. Bezeichnet $S$ den Mittelpunkt und zugleich den Schwerpunkt der Geraden $UV$, so gelten die obigen Formeln auch für das Minimum von $OS$, welches also dem arithmetischen Mittel aus $a$ und $b$ gleichkommt.

3. Man verlangt den kleinsten und größten Radiusvektor, d. i. die Halbachsen einer zentrischen Linie zweiten Grades, welche durch die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy = K$$

bestimmt ist.

Unter Voraussetzung eines schiefwinkligen Koordinatensystems, dessen Koordinatenwinkel $\gamma$ ist, hat man

$$F(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma} = r,$$

und wenn $\frac{dr}{dx} = 0$ werden soll, so folgt

$$(x + y\cos\gamma) + (y + x\cos\gamma)\frac{dy}{dx} = 0;$$

aus der Gleichung der Kurve ergibt sich ferner

$$(Ax + Cy) + (By + Cx)\frac{dy}{dx} = 0,$$

und mit dem Vorigen zusammen

$$(y + x\cos\gamma)(Ax + Cy) - (x + y\cos\gamma)(By + Cx) = 0.$$

Nimmt man hierzu die Gleichung der Kurve in der Form

$$x(Ax + Cy) + y(By + Cx) = K$$

und setzt für den Augenblick

$$Ax + Cy = u, \quad By + Cx = v,$$

so erhält man für die Unbekannten $u$ und $v$ die Werte

$$u = \frac{K(x + y\cos\gamma)}{x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma} = \frac{K(x + y\cos\gamma)}{r^2},$$

$$v = \frac{K(y + x\cos\gamma)}{x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma} = \frac{K(y + x\cos\gamma)}{r^2}.$$

Nach Restitution von $Ax + Cy$ für $u$ und von $By + Cx$ für $v$ entstehen die Gleichungen

$$(Ar^2 - K)x + (Cr^2 - K\cos\gamma)y = 0,$$

$$(Cr^2 - K\cos\gamma)x + (Br^2 - K)y = 0,$$

aus welchen durch Elimination von $x$ und $y$ folgt

$$(Ar^2 - K)(Br^2 - K) - (Cr^2 - K\cos\gamma)^2 = 0$$

oder

$$(AB - C^2)r^4 - (A + B - 2C\cos\gamma)Kr^2 + K^2\sin^2\gamma = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt die Maximal- und Minimalwerte von $r$. Für $C^2 - AB < 0$ sind alle vier $r$ reell und zu je zweien entgegengesetzt gleich; für $C^2 - AB > 0$ gibt es nur zwei reelle einander entgegengesetzte $r$.

4. Von einem gegebenen Punkte $\alpha\beta$ soll die kürzeste oder längste Linie nach einem Punkte $xy$ der Parabel gezogen werden, welche durch die Gleichung

$$y = \frac{x^2}{2c}$$

bestimmt ist.

Man hat in diesem Falle die Gleichungen

$$x - \alpha + (y - \beta)\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{c},$$

welche geometrisch bedeuten, daß die gesuchten Geraden normal zur Parabel liegen.

Die erste Gleichung wird durch Substitution von $\frac{x}{c}$ statt $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{c(x-\alpha)}{x} = \beta - y,$$

und wenn man den unbekannten Wert beider Seiten dieser Gleichung mit $u$ bezeichnet, so ist

$$x = \frac{c\alpha}{c-u}, \quad y = \beta - u$$

und vermöge der Parabelgleichung

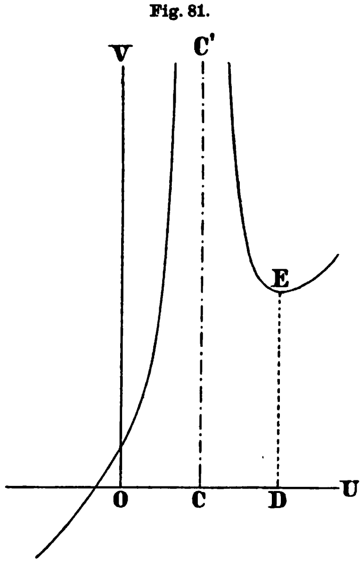
$$\beta = u + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{c\alpha^2}{(c-u)^2}.$$

Aus den Formeln für $x$ und $y$ geht hervor, daß $x$ und $y$ ebensoviel reelle Werte haben, als die vorstehende kubische Gleichung reelle Werte von $u$ liefert. Um hierüber unabhängig von der Theorie der kubischen Gleichungen zu entscheiden, betrachte man die allgemeinere Gleichung

$$v = u + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{c\alpha^2}{(c-u)^2}$$

als Gleichung einer in rechtwinkligen Koordinaten $u$ und $v$ ausgedrückten Kurve und untersuche deren Verlauf nach den gewöhnlichen Regeln. Man findet, daß diese Kurve aus zwei getrennten Zweigen besteht

Fig. 81.




(Fig. 81), deren erster von $u = -\infty$, $v = -\infty$ bis $u = c$, $v = +\infty$ beständig steigt, also bei $OC = c$ eine vertikale Asymptote $CC'$

hat, während der zweite einen unteren Kulminationspunkt $E$ besitzt, dessen Koordinaten sind

$$OD = c + \sqrt[3]{c\alpha^2}, \quad DE = c + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{c\alpha^2}.$$

Die Frage, wann $v = \beta$ wird, ist nun einerlei mit der Frage, wieviel Punkte eine in der Höhe $\beta$ parallel zur Abscissenachse gelegte Gerade mit der betrachteten Kurve gemein hat; dann lehrt aber ein Blick auf die Figur, daß die Anzahl der gemeinsamen Punkte 1, 2 oder 3 beträgt, je nachdem $\beta$ kleiner, gleich oder größer als $DE$ ist. Die obige kubische Gleichung für $u$ besitzt demnach 1, 2 oder 3 reelle Wurzeln, je nachdem

$$\beta \lesseqgtr c + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{c\alpha^2},$$

oder

$$27c\alpha^2 \gtreqless 8(\beta - c)^3$$

ist.

Geometrisch bedeutet diese Unterscheidung, daß von dem Punkte $\alpha\beta$ eine, zwei oder drei Normalen zur Parabel gezogen werden können, je nachdem jener Punkt außerhalb, auf oder innerhalb der Parabelevolute liegt. Im letzten Falle verschwindet die algebraische Summe der Abscissen der drei Parabelpunkte, nach welchen die Normalen gehen, was ein einfaches Mittel gibt, um zu zwei solchen Normalen die dritte zu konstruieren.

5. Durch einen gegebenen Punkt $\alpha\beta$ soll die kürzeste oder längste Gerade nach einem Punkte der Ellipse gezogen werden, welche durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

bestimmt ist.

Die gesuchten Linien sind die durch den Punkt $\alpha\beta$ gehenden Normalen der Ellipse; die Koordinaten ihrer Endpunkte müssen außer der Ellipsengleichung noch der Bedingung genügen

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{x} = \frac{b^2(y-\beta)}{y}.$$

Bezeichnet man mit $u$ den unbekannten gemeinschaftlichen Wert dieser Quotienten, so hat man

$$x = \frac{a^2\alpha}{a^2 - u}, \quad y = \frac{b^2\beta}{b^2 - u},$$

und vermöge der Ellipsengleichung

$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-u)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2-u)^2} = 1.$$

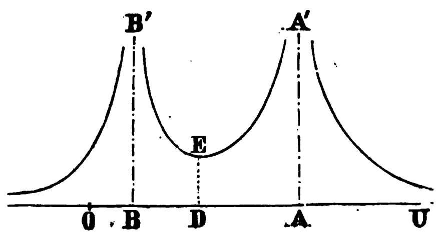
Jede reelle Wurzel dieser biquadratischen Gleichung liefert ein reelles $x$ und ein reelles $y$; es gibt daher so viel Normalen durch den Punkt $\alpha\beta$, als die vorliegende Gleichung reelle Wurzeln besitzt.

Um die Anzahl derselben rasch zu finden, betrachte man die allgemeinere Gleichung

$$v = \frac{a^2\alpha^2}{(a^2-u)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2-u)^2}$$

als Gleichung einer auf rechtwinklige Koordinaten $u$ und $v$ bezogenen Kurve. Letztere besteht aus drei getrennten Zweigen (Fig. 82); der erste Zweig hat die Abscissenachse zur horizontalen Asymptote und steigt bis zu einer zur Abscisse $OB = b^2$ gehörenden vertikalen Asymptote $BB'$; der zweite Kurvenzweig geht von der Asymptote $BB'$ bis zu einer zur Abscisse $OA = a^2$ gehörenden vertikalen Asymptote $AA'$ und besitzt einen unteren Kulminationspunkt $E$, dessen Ordinate $DE = \mu$ durch die Formel

Fig. 82.




$$\mu = \frac{(\sqrt[3]{a^2\alpha^2} + \sqrt[3]{b^2\beta^2})^3}{c^4}; \quad (c = \sqrt{a^2 - b^2})$$

bestimmt ist; der dritte Zweig geht von der vertikalen Asymptote $AA'$ abwärts und nähert sich der Abscissenachse als seiner Asymptote. Die Frage, wann $v = 1$ wird, ist nun einerlei mit der Frage, wie viele Punkte eine in der Höhe 1 parallel zur Abscissenachse gelegte Gerade mit der Kurve gemein hat; man übersieht augenblicklich, daß zwei, drei oder vier solche Punkte vorhanden sind, je nachdem 1 kleiner, gleich oder größer als $\mu$ ist. Demnach besitzt die biquadratische Gleichung für $u$ zwei, drei oder vier reelle Wurzeln, je nachdem

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} \gtreqless c^{\frac{4}{3}}$$

ist, und es gehen also durch den Punkt $\alpha\beta$ zwei, drei oder vier Ellipsennormalen, je nachdem dieser Punkt außerhalb, auf oder innerhalb der Ellipsenevolute liegt.

6. Man soll die analoge Untersuchung für die Hyperbel ausführen, bei welcher ein ganz ähnliches Resultat zum Vorschein kommt.

II. Wenn $F(x, y, z)$ so zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, daß die Bedingung $\varphi(x, y, z) = 0$ erfüllt bleibt, so hat man es mit einer Funktion von nur zwei unabhängigen Variabeln $x, y$ zu tun, da $z$ eine implizite Funktion von $x$ und $y$ ist. Mit Rücksicht hierauf bildet man die partiell nach $x$ und $y$ genommenen Differentialquotienten von $F$, ebenso die von $\varphi$, und eliminiert die hierbei vorkommenden Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$; man erhält dann drei Bedingungsgleichungen für $x$, $y$ und $z$.

7. Auf dem positiven Oktanten des Ellipsoids

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

soll der Punkt $xyz$ so bestimmt werden, daß der Inhalt des rechtwinkligen Parallelepipeds aus $x, y, z$ möglichst groß ausfällt.

Es ist hier $F(x, y, z) = xyz$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + z\right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x\left(y\frac{\partial z}{\partial y} + z\right) = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z};$$

substituiert man diese Werte in die zwei vorhergehenden Gleichungen und beachtet, daß $x = 0$ und $y = 0$ Minima geben, so erhält man

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Das Maximum von $xyz$ beträgt $\frac{abc}{\sqrt{27}}$.

8. An das vorige Ellipsoid ist im Punkte $xyz$ eine Berührungsebene gelegt, welche die Koordinatenachsen $OX$, $OY$, $OZ$ in den Punkten $U$, $V$, $W$ schneidet; man soll den Berührungspunkt so

bestimmen, daß die körperliche Diagonale des Parallelepipeds aus $OU$, $OV$, $OW$ ihren Minimalwert erreicht.

Es handelt sich hier um das Minimum von

$$F(x, y, z) = \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} + \frac{c^4}{z^2};$$

dieses tritt ein für

$$x = \sqrt{\frac{a^3}{a+b+c}}, \quad y = \sqrt{\frac{b^3}{a+b+c}}, \quad z = \sqrt{\frac{c^3}{a+b+c}}.$$

Das Minimum der Diagonale beträgt $a + b + c$.

Bezeichnet $S$ den Schwerpunkt der Fläche des Dreiecks $UVW$, so gelten die obigen Formeln auch für das Minimum von $OS$, das also dem arithmetischen Mittel aus $a$, $b$, $c$ gleichkommt.

9. Auf dem vorigen Ellipsoid sucht man denjenigen Punkt $xyz$, für welchen die Fläche des Dreiecks $UVW$ am kleinsten wird.

Gibt man der Ellipsoidgleichung die Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

so handelt es sich um das Minimum von

$$F(x, y, z) = \frac{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}{x^2y^2z^2};$$

die Bedingungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ führen zu den Gleichungen

$$Ax^2(A^2x^2 + B^2y^2) = Cz^2(C^2z^2 + B^2y^2),$$

$$By^2(B^2y^2 + A^2x^2) = Cz^2(C^2z^2 + A^2x^2),$$

die sich symmetrisch schreiben lassen

$$\frac{B^2y^2 + C^2z^2}{Ax^2} = \frac{C^2z^2 + A^2x^2}{By^2} = \frac{A^2x^2 + B^2y^2}{Cz^2}.$$

Bezeichnet $T$ den gemeinschaftlichen Wert dieser drei Quotienten, so ist

$$B^2y^2 + C^2z^2 = TAx^2,$$

$$C^2z^2 + A^2x^2 = TBy^2,$$

$$A^2x^2 + B^2y^2 = TCz^2,$$

man hat demnach, mit der Ellipsoidgleichung zusammen, vier Gleichungen zwischen den Unbekannten $x$, $y$, $z$, $T$. Durch Summierung der letzten drei Gleichungen folgt

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \tfrac{1}{2}T;$$

subtrahiert man hiervon der Reihe nach jene drei Gleichungen, so erhält man

$$x=\sqrt{\frac{T}{2A(T+A)}},\quad y=\sqrt{\frac{T}{2B(T+B)}},\quad z=\sqrt{\frac{T}{2C(T+C)}};$$

endlich wird durch Substitution dieser Ausdrücke in die vorhergehende Gleichung

$$\frac{A}{T+A}+\frac{B}{T+B}+\frac{C}{T+C}=1$$

oder

$$T^3-(BC+CA+AB)T-2ABC=0.$$

Nur die einzige positive Wurzel dieser Gleichung ist hier brauchbar; die vorhergehenden Formeln bestimmen dann $x, y, z$.

Als Minimum der Dreiecksfläche ergibt sich der Wert

$$\frac{1}{T}\sqrt{\left(1+\frac{T}{A}\right)\left(1+\frac{T}{B}\right)\left(1+\frac{T}{C}\right)}.$$

10. Unter Voraussetzung positiver $A, B, C$ sei die Gleichung einer Fläche

$$Ax^{\frac{2}{3}}+By^{\frac{2}{3}}+Cz^{\frac{2}{3}}=1,$$

man sucht wie vorhin das Minimum der Dreiecksfläche, welche von den Spuren der Berührungsebene eingeschlossen wird.

Es ist hier

$$F(x, y, z)=A^2(yz)^{\frac{2}{3}}+B^2(zx)^{\frac{2}{3}}+C^2(xy)^{\frac{2}{3}},$$

und daraus ergeben sich die Bedingungen

$$\begin{aligned}AB^2x^{\frac{2}{3}}+(A^3-C^3)y^{\frac{2}{3}}-B^2Cz^{\frac{2}{3}}&=0,\\(B^3-C^3)x^{\frac{2}{3}}+A^2By^{\frac{2}{3}}\qquad-A^2Cz^{\frac{2}{3}}&=0,\end{aligned}$$

man hat also zusammen drei Gleichungen, die in Beziehung auf $x^{\frac{2}{3}}, y^{\frac{2}{3}}, z^{\frac{2}{3}}$ linear sind. Mit Hilfe der Abkürzungen

$$\begin{aligned}A'&=B^3+C^3-A^3,\\B'&=C^3+A^3-B^3,\\C'&=A^3+B^3-C^3,\\D&=2(B^3C^3+C^3A^3+A^3B^3)-(A^6+B^6+C^6)\end{aligned}$$

findet man

$$x = \sqrt{\left(\frac{A^2 A'}{D}\right)^3}, \quad y = \sqrt{\left(\frac{B^2 B'}{D}\right)^3}, \quad z = \sqrt{\left(\frac{C^2 C'}{D}\right)^3}$$

und als Minimum der Dreiecksfläche $UVW$

$$\frac{\sqrt{B'C' + C'A' + A'B'}}{2D} = \frac{1}{2\sqrt{D}}.$$

Erteilt man der Flächengleichung die Form

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} + (cz)^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{4}{3}}$$

und versteht unter $a$, $b$, $c$, $k$ positive lineare Konstanten, so erhält man als Minimum

$$\frac{1}{2\sqrt{D}} = \frac{k^4}{8\Delta},$$

worin $\Delta$ die Fläche des aus den Seiten $a$, $b$, $c$ konstruierten Dreiecks bezeichnet.

11. Man verlangt den kleinsten und größten Radiusvektor einer zentrischen Fläche zweiten Grades, welche, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, durch die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = K$$

bestimmt ist.

Da hier $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, so müssen erstens die Gleichungen gelten

$$x + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad y + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

ferner erhält man aus der Gleichung der Fläche, wenn die Abkürzungen

$$Ax + Fy + Ez = u,$$
$$By + Dz + Fx = v,$$
$$Cz + Ex + Dy = w$$

eingeführt werden,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u}{w}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{v}{w},$$

also zusammen

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z}.$$

Wie man sieht, ist diese Aufgabe die nämliche, welche schon in § 23, Nr. 6 gelöst wurde. Benutzt man wieder die Zeichen

$$L = A - \frac{EF}{D}, \quad M = B - \frac{FD}{E}, \quad N = C - \frac{DE}{F},$$

so erhält man zur Bestimmung der gesuchten Werte von $r$ die folgende Gleichung sechsten Grades

$$1 = \frac{EF}{D} \cdot \frac{r^2}{K - Lr^2} + \frac{FD}{E} \cdot \frac{r^2}{K - Mr^2} + \frac{DE}{F} \cdot \frac{r^2}{K - Nr^2}.$$

12. Von einem gegebenen Punkte $\alpha\beta\gamma$ soll die kürzeste oder längste Gerade nach einem Punkte $xyz$ des elliptischen Paraboloides gezogen werden, dessen Gleichung ist

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}, \quad (a < b).$$

Die Bedingungsgleichungen für den Eintritt des Maximums oder Minimums von

$$F(x, y, z) = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

sind hier

$$\frac{a(x-\alpha)}{x} = \frac{b(y-\beta)}{y} = \gamma - z,$$

oder, wenn $u$ den gemeinschaftlichen Wert dieser drei Ausdrücke bezeichnet,

$$x = \frac{a\alpha}{a-u}, \quad y = \frac{b\beta}{b-u}, \quad z = \gamma - u.$$

Substituiert man diese Werte in die Gleichung der Fläche, so erhält man für $u$ die Gleichung fünften Grades

$$\gamma = u + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{a\alpha^2}{(a-u)^2} + \frac{b\beta^2}{(b-u)^2}\right\},$$

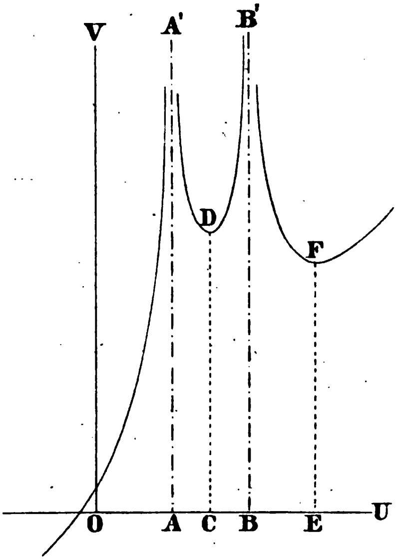
die sich zwar algebraisch nicht auflösen läßt, für welche aber doch die Bedingungen angegeben werden können, unter denen sie eine, zwei, drei, vier oder fünf reelle Wurzeln besitzt.

Man betrachte nämlich die allgemeinere Gleichung

$$v = u + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{a\alpha^2}{(a-u)^2} + \frac{b\beta^2}{(b-u)^2}\right\}$$

als Gleichung einer auf rechtwinklige Koordinaten $u$ und $v$ bezogenen ebenen Kurve und untersuche mit Hilfe von $\frac{dv}{du} = v'$ und $\frac{d^2v}{du^2} = v''$ den Verlauf dieser Linie. Man findet, daß dieselbe aus drei getrennten Zweigen besteht; der erste Zweig steigt von $u = -\infty$, $v = -\infty$ bis $u = a$, $v = +\infty$ und hat bei $OA = a$ (Fig. 83) eine vertikale Asymptote $AA'$; der zweite Zweig geht von dieser Asymptote abwärts, dann wieder aufwärts bis zu einer zur Abscisse $OB = b$ gehörenden zweiten vertikalen Asymptote $BB'$; der dritte Zweig geht von dieser Asymptote abwärts und steigt späterhin wieder bis $u = \infty$, $v = \infty$. Die Kurve besitzt demnach zwei untere Kulminationspunkte $D$ und $F$, deren Koordinaten $\lambda_1$, $\mu_1$ und $\lambda_2$, $\mu_2$ heißen mögen und zwar so, daß die größere der beiden Ordinaten $CD$ und $EF$ mit $\mu_2$ bezeichnet wird.

Fig. 83.




Nun sind $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die beiden einzigen reellen Wurzeln der Gleichung

$$0 = 1 + \frac{a\alpha^2}{(a-\lambda)^3} + \frac{b\beta^2}{(b-\lambda)^3};$$

die beiden zugehörigen $\mu$ bestimmen sich durch die Formel

$$\mu = \lambda + \frac{1}{2}\left\{\frac{a\alpha^2}{(a-\lambda)^2} + \frac{b\beta^2}{(b-\beta)^2}\right\}.$$

Eine in der Höhe $v = \gamma$ parallel zur Abscissenachse gelegte Gerade hat mit der obigen Kurve einen, zwei, drei, vier oder fünf Punkte gemein, je nachdem

$$\gamma < \mu_1, \quad \gamma = \mu_1, \quad \mu_1 < \gamma < \mu_2, \quad \gamma = \mu_2, \quad \mu_2 < \gamma$$

ist, und die Gleichung fünften Grades für $u$ liefert, diesen Fällen entsprechend, eine, zwei, drei, vier oder fünf reelle Wurzeln. Damit ist die Anzahl der in jedem Falle möglichen Auflösungen, d. h. die Anzahl der Normalen bestimmt, welche von dem Punkte $\alpha\beta\gamma$ auf das elliptische Paraboloid herabgelassen werden können.

13. Man soll die analoge Untersuchung für das hyperbolische Paraboloid ausführen.

14. Von einem gegebenen Punkte $abc$ soll die längste oder kürzeste Gerade nach einem Punkte $xyz$ desjenigen Ellipsoides gezogen werden, dessen Gleichung ist

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y^2}{\mathfrak{b}^2}+\frac{z^2}{\mathfrak{c}^2}=1,\quad \mathfrak{a}<\mathfrak{b}<\mathfrak{c}.$$

Die Bedingungen für den Eintritt des gesuchten Maximums oder Minimums sind hier

$$\frac{\mathfrak{a}^2(x-a)}{x}=\frac{\mathfrak{b}^2(y-b)}{y}=\frac{\mathfrak{c}^2(z-c)}{z},$$

oder, wenn $s$ den gemeinschaftlichen Werth dieser Quotienten bezeichnet,

$$x=\frac{\mathfrak{a}^2 a}{\mathfrak{a}^2-s},\quad y=\frac{\mathfrak{b}^2 b}{\mathfrak{b}^2-s},\quad z=\frac{\mathfrak{c}^2 c}{\mathfrak{c}^2-s}.$$

Für $s$ erhält man die Gleichung sechsten Grades

$$\frac{\mathfrak{a}^2 a^2}{(\mathfrak{a}^2-s)^2}+\frac{\mathfrak{b}^2 b^2}{(\mathfrak{b}^2-s)^2}+\frac{\mathfrak{c}^2 c^2}{(\mathfrak{c}^2-s)^2}=1.$$

Um die Anzahl ihrer reellen Wurzeln zu ermitteln, betrachte man die Gleichung

$$y=\frac{\mathfrak{a}^2 a^2}{(\mathfrak{a}^2-s)^2}+\frac{\mathfrak{b}^2 b^2}{(\mathfrak{b}^2-s)^2}+\frac{\mathfrak{c}^2 c^2}{(\mathfrak{c}^2-s)^2}$$

als Gleichung einer ebenen Curve und untersuche den Verlauf der letzteren. Die Curve besteht aus vier getrennten Zweigen (Fig. 34) mit drei verticalen Asymptoten in den Entfernungen $OA=\mathfrak{a}^2$, $OB=\mathfrak{b}^2$, $OC=\mathfrak{c}^2$ vom Coordinatenanfang $O$ und mit zwei unteren Culminationspunkten $E$ und $G$, deren Coordinaten $k_1, s_1$ und $k_2, s_2$ heissen mögen, wobei $s_2>s_1$ vorausgesetzt wird. Die Abscissen $k_1$ und $k_2$ sind die beiden einzigen reellen Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\mathfrak{a}^2 a^2}{(\mathfrak{a}^2-k)^3}+\frac{\mathfrak{b}^2 b^2}{(\mathfrak{b}^2-k)^3}+\frac{\mathfrak{c}^2 c^2}{(\mathfrak{c}^2-k)^3}=0,$$

und die zugehörigen $s$ bestimmen sich durch die Formel

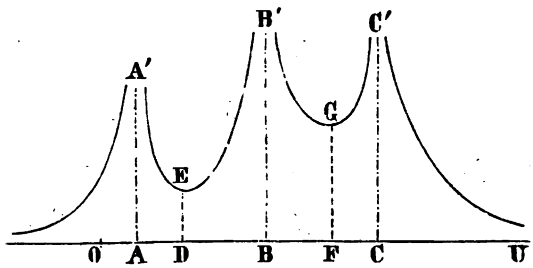
$$s=\frac{\mathfrak{a}^2 a^2}{(\mathfrak{a}^2-k)^2}+\frac{\mathfrak{b}^2 b^2}{(\mathfrak{b}^2-k)^2}+\frac{\mathfrak{c}^2 c^2}{(\mathfrak{c}^2-k)^2}.$$

Eine in der Höhe $v=1$ parallel zur Abscissenachse gelegte Gerade hat nun mit der betrachteten Kurve zwei, drei, vier, fünf oder sechs Punkte gemein, je nachdem

$$1<\mu_1, \quad 1=\mu_1, \quad \mu_1<1<\mu_2, \quad 1=\mu_2, \quad \mu_2<1$$

ist, und die bikubische Gleichung für $u$ liefert, diesen Fällen entsprechend, zwei, drei, vier, fünf oder sechs reelle Wurzeln. Damit ist die Anzahl der in jedem Falle möglichen Auflösungen, d. h. die Anzahl der Normalen bestimmt, welche von dem Punkte $\alpha\beta\gamma$ auf das Ellipsoid herabgelassen werden können.

Fig. 34.




15. Man soll die analoge Untersuchung für das einfache Hyperboloid ausführen.

16. Es wird eine gleiche Untersuchung für das geteilte Hyperboloid verlangt.

17. Zwei Parabeln sind gegeben durch ihre Gleichungen

$$y=\frac{x^2}{2a}, \quad \eta^2=2b\xi;$$

man soll auf der ersten Parabel den Punkt $P$, auf der zweiten den Punkt $\Pi$ so bestimmen, daß die Entfernung $P\Pi$ ein Maximum oder Minimum wird.

Nimmt man $x$ und $\xi$ als unabhängige Variable, so hat man für das Maximum oder Minimum von $P\Pi$ die Bedingungen

$$x-\xi+(y-\eta)\frac{dy}{dx}=0, \quad x-\xi+(y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi}=0;$$

die hieraus folgende Gleichung

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\eta}{d\xi}$$

zeigt, daß $P\Pi$ eine gemeinschaftliche Normale beider Parabeln sein muß. Vermöge der Werte von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d\eta}{d\xi}$ wird die letzte Gleichung

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{\eta},$$

und wenn man den gemeinschaftlichen Betrag beider Quotienten mit $u$ bezeichnet, so ist

$$x = au, \quad \eta = \frac{b}{u},$$

$$y = \frac{au^2}{2}, \quad \xi = \frac{b}{2u^2};$$

nach Substitution dieser Werte verwandelt sich die Gleichung

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{x}{a} = 0$$

in die folgende zur Bestimmung von $u$ dienende Gleichung

$$u^5 + 2u^3 - 2\frac{b}{a}u^2 - \frac{b}{a} = 0.$$

Um die Anzahl ihrer reellen Wurzeln zu finden, denke man sich

$$v = \frac{u^5 + 2u^3}{2u^2 + 1} \quad \text{und} \quad v = \frac{b}{a}$$

als Gleichungen einer Kurve und einer in der Höhe $\frac{b}{a}$ parallel zur $u$-Achse gelegten Geraden; die Diskussion der Kurve zeigt, daß ihre Ordinaten von $v = -\infty$ bis $v = +\infty$ kontinuierlich wachsen, daß also der Spezialfall $v = \frac{b}{a}$ nur einmal vorkommen kann. Die beiden Parabeln haben daher jederzeit eine, aber auch nur eine gemeinschaftliche Normale.

Für $b = a$ wird

$$u = 1, \quad x = a, \quad y = \tfrac{1}{2}a, \quad \xi = \tfrac{1}{2}a, \quad \eta = a.$$

18. Eine Ellipse und eine gleichseitige Hyperbel sind gegeben durch ihre Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{und} \quad \xi\eta = k^2;$$

man soll auf der ersten Kurve den Punkt $P$, auf der zweiten den Punkt $\Pi$ so bestimmen, daß die Entfernung $P\Pi$ ein Maximum oder Minimum wird.

Betrachtet man $x$ und $\xi$ als unabhängige Variable, so hat man für das Minimum von $P\Pi$

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0, \quad x - \xi + (y - \eta)\frac{d\eta}{d\xi} = 0,$$

mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi},$$

woraus hervorgeht, daß die Gerade $P\Pi$ normal auf beiden Kurven sein muß. Zufolge der Werte von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d\eta}{d\xi}$ ist weiter

$$\frac{a^2(x-\xi)}{x} = \frac{b^2(y-\eta)}{y}, \quad \frac{a^2}{x\xi} = \frac{b^2}{y\eta}.$$

Nennt man $u$ den gemeinschaftlichen Wert der beiden ersten, $v$ den gemeinschaftlichen Wert der beiden letzten Quotienten, so findet man

$$x^2 = \frac{a^4}{(a^2-u)v}, \quad y^2 = \frac{b^4}{(b^2-u)v},$$

$$\xi^2 = \frac{a^2-u}{v}, \quad \eta^2 = \frac{b^2-u}{v},$$

und aus den Gleichungen der Kurven

$$v = \frac{a^2}{a^2-u} + \frac{b^2}{b^2-u},$$

$$v^2 = \frac{(a^2-u)(b^2-u)}{k^4}.$$

Die Elimination von $v$ würde eine bikubische Gleichung für $u$ liefern, aus der sich $u$, dann $v$, $x$, $y$, $\xi$, $\eta$ finden ließen; man tut aber besser, die vorstehenden Gleichungen als Gleichungen zweier in rechtwinkligen Koordinaten $u$ und $v$ ausgedrückten Kurven zu betrachten und deren Durchschnitt aufzusuchen. Unter der Voraussetzung $a < b$ existieren nur zwei reelle Durchschnitte, für deren Koordinaten $u_1$, $v_1$, $u_2$, $v_2$ folgende Bemerkungen gelten:

$$-\infty < u_1 < a^2, \quad b^2 < u_2 < +\infty,$$

$$v_1 > 0, \qquad v_2 < 0.$$

Die weitere Diskussion über die Realität von $x$, $y$, $\xi$, $\eta$ bietet keine Schwierigkeit.

19. Ein Ellipsoid und eine Fläche dritten Grades sind gegeben durch ihre Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{und} \quad \xi\eta\zeta=k^3;$$

man soll auf der ersten Fläche den Punkt $P$, auf der zweiten den Punkt $\Pi$ so bestimmen, daß die Entfernung $P\Pi$ ein Maximum oder Minimum wird.

Nimmt man $x$, $y$, $\xi$, $\eta$ als unabhängige Variable, so hat man die vier Gleichungen

$$x-\xi+(z-\zeta)\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad y-\eta+(z-\zeta)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

$$x-\xi+(z-\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}=0, \quad y-\eta+(z-\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}=0;$$

die hieraus folgenden Relationen

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$$

zeigen, daß $P\Pi$ eine gemeinschaftliche Normale beider Flächen sein muß. Vermöge der Werte der vier auftretenden partiellen Differentialquotienten erhält man weiter

$$\frac{a^2(x-\xi)}{x}=\frac{b^2(y-\eta)}{y}=\frac{c^2(z-\zeta)}{z},$$

$$\frac{a^2}{x\xi}=\frac{b^2}{y\eta}=\frac{c^2}{z\zeta},$$

oder, wenn man $u$ den gemeinschaftlichen Wert der ersten drei, $v$ den der letzten drei Brüche nennt,

$$x^2=\frac{a^4}{(a^2-u)v}, \quad y^2=\frac{b^4}{(b^2-u)v}, \quad z^2=\frac{c^4}{(c^2-u)v},$$

$$\xi^2=\frac{a^2-u}{v}, \quad \eta^2=\frac{b^2-u}{v}, \quad \zeta^2=\frac{c^2-u}{v}.$$

Aus den Gleichungen der Flächen ergeben sich nun für $u$ und $v$ folgende Gleichungen

$$v=\frac{a^2}{a^2-u}+\frac{b^2}{b^2-u}+\frac{c^2}{c^2-u},$$

$$v^3=\frac{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}{k^6},$$

welche für $u$ allein eine Gleichung zwölften Grades liefern. Betrachtet man aber die vorstehenden Gleichungen als Gleichungen zweier sich schneidender Kurven, so findet man leicht, daß es für $u$ und $v$ nur vier reelle Wertepaare gibt, nämlich, wenn $a < b < c$ vorausgesetzt wird,

$$-\infty < u_1 < a^2 < u_2 < b^2 < u_3 < c^2 < u_4 < +\infty,$$

$$v_1 > 0, \quad v_2 < 0, \quad v_3 > 0, \quad v_4 < 0.$$

Die weitere Diskussion über die Realität der entsprechenden $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ bietet keine Schwierigkeit.

# Kapitel XI.

## Unendliche Reihen.

### § 35.

### Die Entstehung unendlicher Reihen.

Die Summe der aus $n$ Gliedern bestehenden Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

sei bekannt und heiße $S_n$; trifft es sich nun, daß $S_n$ bei unendlich wachsenden $n$ sich einem bestimmten endlichen Grenzwert $S$ nähert, so geht die Gleichung

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

in die folgende über

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \textit{ in inf.};$$

dann heißt die Reihe **konvergent**, $S$ ihre **Summe**. Ist dagegen $Lim\, S_n$ keine bestimmte Größe, so heißt die Reihe **divergent** und sie hat dann keine Summe.

1. Um die Reihe

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

zu summieren, benutze man die identische Gleichung

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1};$$

man findet

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

und für $n = \infty$

$$1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$$

2. Auf ähnliche Art sollen die folgenden Gleichungen bewiesen werden:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{(x+n-1)(x+n)},$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \cdots$$

3. Mittelst der identischen Gleichung

$$\frac{1}{(x+m)(x+m+1)(x+m+2)}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(x+m)(x+m+1)} - \frac{1}{(x+m+1)(x+m+2)}\right\}$$

erhält man

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right\}$$
$$= \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{(x+n-1)(x+n)(x+n+1)},$$

$$\frac{1}{2x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$+ \frac{1}{(x+2)(x+3)(x+4)} + \cdots$$

4. Setzt man in der identischen Gleichung

$$\frac{1}{z-1} - \frac{2}{z^2-1} = \frac{1}{z+1}$$

der Reihe nach $z = x, x^2, x^4, x^8, \ldots x^{(2^n-1)}$, multipliziert die entstehenden Gleichungen der Reihe nach mit $1, 2, 4, 8, \ldots 2^{n-1}$ und schreibt kurz $p$ für $2^{n-1}$, so erhält man durch Addition

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2p}{x^{2p}-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \cdots + \frac{p}{x^p+1}.$$

Für $n = \infty$ wird hieraus unter der Bedingung $x > 1$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{x^8+1} + \cdots;$$

für $x \leqq 1$ divergiert die Reihe.

5. Setzt man in der obigen identischen Gleichung der Reihe nach $z = x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{4}}, x^{\frac{1}{8}}, \ldots x^{\frac{1}{q}}$, wo $q = 2^n$ ist, so erhält man auf ähnliche Weise

$$\frac{1}{q\left(x^{\frac{1}{q}}-1\right)}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}+1}+\cdots$$
$$+\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{q}}+1}$$

und für $n=\infty$, falls $x$ von der Einheit verschieden ist,

$$\frac{1}{lg\,x}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}+1}+\cdots$$

Abgesehen von ihrer Herleitung gilt diese Gleichung auch für $x=1$, denn nach Nr. 22 in § 27, II erhält dann die linke Seite den Wert $\frac{1}{2}$, welcher (zufolge Nr. 11, s. u.) auch die Summe der rechtsstehenden Reihe ist.

6. Mit Hilfe der goniometrischen Formel

$$\tfrac{1}{2}\cot u-\cot 2u=\tfrac{1}{2}\,tg\,u$$

erhält man für $u=\frac{1}{2}x,\ \frac{1}{4}x,\ \frac{1}{8}x,\ldots\frac{1}{2^n}x$ und für $2^n=q$

$$\frac{1}{q}\cot\frac{x}{q}-\cot x=\tfrac{1}{2}\,tg\frac{x}{2}+\tfrac{1}{4}\,tg\frac{x}{4}+\tfrac{1}{8}\,tg\frac{x}{8}+\cdots\frac{1}{q}\,tg\frac{x}{q},$$

woraus für $n=\infty$ folgt

$$\frac{1}{x}-\cot x=\tfrac{1}{2}\,tg\frac{x}{2}+\tfrac{1}{4}\,tg\frac{x}{4}+\tfrac{1}{8}\,tg\frac{x}{8}+\cdots$$

7. Aus der identischen Gleichung

$$arc\,tg\frac{x}{m}-arc\,tg\frac{x}{m+2}=arc\,tg\frac{2x}{x^2+m(m+2)}$$

erhält man durch Addition der für $m=0,1,2,\ldots n$ entstehenden Gleichungen und für $n=\infty$

$$\frac{\pi}{2}+arc\,tg\,x=arc\,tg\frac{2}{x}+arc\,tg\frac{2x}{x^2+1\cdot3}+arc\,tg\frac{2x}{x^2+2\cdot4}$$
$$+arc\,tg\frac{2x}{x^2+3\cdot5}+\cdots$$

Der Spezialfall $x=1$ gibt

$$\frac{3\pi}{4}=arc\,tg\frac{2}{1^2}+arc\,tg\frac{2}{2^2}+arc\,tg\frac{2}{3^2}+\cdots$$

8. Mittelst der Gleichung

$$arc\,tg\frac{x}{m} - arc\,tg\frac{x}{m+1} = arc\,tg\frac{x}{x^2+m(m+1)}$$

findet sich analog

$$\frac{\pi}{2} = arc\,tg\frac{1}{x} + arc\,tg\frac{x}{x^2+1\cdot 2} + arc\,tg\frac{x}{x^2+2\cdot 3} + \cdots,$$

und speziell für $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{2} = arc\,tg\frac{2}{1^2} + arc\,tg\frac{2}{3^2} + arc\,tg\frac{2}{5^2} + \cdots$$

Zieht man diese Gleichung von der letzten Gleichung in Nr. 7 ab, so bleibt

$$\frac{\pi}{4} = arc\,tg\frac{1}{2\cdot 1^2} + arc\,tg\frac{1}{2\cdot 2^2} + arc\,tg\frac{1}{2\cdot 3^2} + \cdots$$

9. Falls die zu Anfang dieses Paragraphen betrachteten Summanden $u_0, u_1, u_2, \ldots$ Logarithmen sind, etwa $u_m = lg\, v_m$, so führt die Gleichung

$$S = lg\, v_0 + lg\, v_1 + lg\, v_2 + \cdots \textit{ in inf.}$$

zur Wertbestimmung eines unendlichen Produktes, nämlich

$$e^S = v_0 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdots \textit{ in inf.}$$

Beispielsweise folgt aus

$$lg(1-z^2) - lg(1-z) = lg(1+z)$$

die Summierung

$$-lg(1-\zeta) + lg(1-\zeta^{2p}) = lg(1+\zeta) + lg(1+\zeta^2) + lg(1+\zeta^4) + lg(1+\zeta^8) + \cdots + lg(1+\zeta^p),$$

worin $p = 2^{n-1}$ ist; für $n = \infty$ wird unter der Bedingung $\zeta^2 < 1$

$$lg\left(\frac{1}{1-\zeta}\right) = lg(1+\zeta) + lg(1+\zeta^2) + lg(1+\zeta^4) + \cdots$$

oder

$$\frac{1}{1-\zeta} = (1+\zeta)(1+\zeta^2)(1+\zeta^4)(1+\zeta^8)\ldots,$$

wie man auch direkt mittelst der Gleichung

$$\frac{1-z^2}{1-z} = 1+z$$

finden kann.

**Auf ganz analoge Weise ergibt sich für $2^n = q$**

$$lg(1-\zeta) - lg\left\{q\left(1-\zeta^{\frac{1}{q}}\right)\right\} = lg\left(\frac{1+\zeta^{\frac{1}{2}}}{2}\right) + lg\left(\frac{1+\zeta^{\frac{1}{4}}}{2}\right) + lg\left(\frac{1+\zeta^{\frac{1}{8}}}{2}\right) + \cdots + lg\left(\frac{1+\zeta^{\frac{1}{q}}}{2}\right)$$

und für $n = \infty$, falls $0 < \zeta < 1$ ist,

$$lg(1-\zeta) - lg\{-lg\,\zeta\} = lg\left(\frac{1+\zeta^{\frac{1}{2}}}{2}\right) + lg\left(\frac{1+\zeta^{\frac{1}{4}}}{2}\right) + lg\left(\frac{1+\zeta^{\frac{1}{8}}}{2}\right) + \cdots$$

oder

$$\frac{1-\zeta}{lg\frac{1}{\zeta}} = \frac{1+\zeta^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{1+\zeta^{\frac{1}{4}}}{2} \cdot \frac{1+\zeta^{\frac{1}{8}}}{2} \cdots$$

Beträgt $\zeta$ mehr als die Einheit, so wird

$$\frac{\zeta-1}{lg\,\zeta} = \frac{1+\zeta^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{1+\zeta^{\frac{1}{4}}}{2} \cdot \frac{1+\zeta^{\frac{1}{8}}}{2} \cdots;$$

auch für $\zeta = 1$ bleiben diese Ergebnisse richtig.

Differenziert man die Logarithmen der gefundenen unendlichen Produkte nach $\zeta$ und setzt dann $\zeta = \frac{1}{x}$, so kommt man auf die in 4 und 5 angegebenen Resultate zurück.

10. Für $2^n = q$ läßt sich aus der Gleichung

$$lg\,sin\,z - lg(2\,sin\,\tfrac{1}{2}z) = lg\,cos\,\tfrac{1}{2}z$$

die folgende Summierung herleiten

$$lg\,sin\,x - lg\left(q\,sin\frac{x}{q}\right) = lg\,cos\frac{x}{2} + lg\,cos\frac{x}{4} + lg\,cos\frac{x}{8} + \cdots + lg\,cos\frac{x}{q},$$

welche für $n = \infty$ übergeht in

$$lg\,sin\,x - lg\,x = lg\,cos\frac{x}{2} + lg\,cos\frac{x}{4} + lg\,cos\frac{x}{8} + \cdots,$$

oder

$$\frac{sin\,x}{x} = cos\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{4} \cdot cos\frac{x}{8} \cdots$$

Dasselbe Resultat ergibt sich direkt aus der Formel

$$\frac{sin\,z}{2\,sin\frac{1}{2}z} = cos\frac{z}{2}.$$

Differenziert man den Logarithmus des vorigen Produktes nach $x$, so kommt man auf das in Nr. 6 entwickelte Resultat zurück.

11. Die Summenformel für die geometrische Progression, nämlich

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}$$

gibt bei unendlich wachsenden $n$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$
$$-1 < x < +1;$$

für alle der zuletzt angegebenen Bedingung nicht genügenden Werte von $x$ divergiert die Reihe.

12. Multipliziert man die vorhergehende Summenformel mit $x$ und differenziert das Produkt, so entsteht die neue Formel

$$\frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$$

und bei unendlich wachsenden $n$* die Reihenentwickelung

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots,$$
$$-1 < x < +1.$$

13. Multipliziert man die vorhergehende Summe der endlichen Reihe mit $x$ und differenziert, so erhält man

$$\frac{1 + x - (n+1)^2 x^n + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - n^2 x^{n+2}}{(1-x)^3}$$
$$= 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots + n^2 x^{n-1}$$

und für $n = \infty$

$$\frac{(1+x)}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots,$$
$$-1 < x < +1.$$

Auf analoge Weise kann man viele ähnliche Reihensummen ableiten.

---

* Zur Ermittelung des Grenzwertes von $\psi(n)$ kann man sich hier und in mehreren späteren Fällen des Satzes bedienen, daß $\psi(n)$ gegen die Null konvergiert oder unendlich wächst, je nachdem der absolute Wert von $\mathit{Lim}\,\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}$ weniger oder mehr als die Einheit beträgt. Ist der letztere Grenzwert aber der Einheit gleich, so muß eine besondere Untersuchung über $\mathit{Lim}\,\psi(n)$ vorgenommen werden.

14. Es bedeute $U$ die unbekannte Summe der aus $n$ Termen bestehenden Reihe

$$U = 1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + x^3\cos 3\theta + \cdots + x^{n-1}\cos(n-1)\theta;$$

um $U$ zu finden, multipliziere man beiderseits mit

$$1 - 2x\cos\theta + x^2$$

und beachte auf der rechten Seite die Gleichung

$$2\cos k\theta\cos\theta = \cos(k-1)\theta + \cos(k+1)\theta;$$

dann erhält man nach gehöriger Hebung

$$(1 - 2x\cos\theta + x^2)U = 1 - x\cos\theta - x^n\cos n\theta + x^{n+1}\cos(n-1)\theta.$$

Hieraus ergibt sich $U$ und es ist also

$$\frac{1 - x\cos\theta - x^n\cos n\theta + x^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$
$$= 1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + x^3\cos 3\theta + \cdots + x^{n-1}\cos(n-1)\theta.$$

Durch Übergang zur Grenze für unendlich wachsende $n$ wird hieraus

$$\frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = 1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + x^3\cos 3\theta + \cdots,$$
$$-1 < x < +1.$$

Eine Folge hiervon ist die Gleichung

$$\frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = 1 + 2(x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + x^3\cos 3\theta + \cdots),$$
$$-1 < x < +1.$$

15. Behandelt man auf ganz ähnliche Weise die Gleichung

$$V = x\sin\theta + x^2\sin 2\theta + x^3\sin 3\theta + \cdots + x^{n-1}\sin(n-1)\theta,$$

so erhält man zunächst

$$(1 - 2x\cos\theta + x^2)V = x\sin\theta - x^n\sin n\theta + x^{n+1}\sin(n-1)\theta,$$

mithin

$$\frac{x\sin\theta - x^n\sin n\theta + x^{n+1}\sin(n-1)\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$
$$= x\sin\theta + x^2\sin 2\theta + x^3\sin 3\theta + \cdots + x^{n-1}\sin(n-1)\theta.$$

Für $n = \infty$ gibt dies

$$\frac{x\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = x\sin\theta + x^2\sin 2\theta + x^3\sin 3\theta + \cdots,$$
$$-1 < x < +1,$$

wo beiderseits $x$ gehoben werden kann.

16. Wir knüpfen hieran einige Bemerkungen über die gebrochene Funktion

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$a=\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}, \quad b=\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta},$$

wobei aber $\alpha^2>\beta$ sein muß, wenn $a$ und $b$ reell bleiben sollen, so ist $a+b=2\alpha$, $ab=\beta$, mithin

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2}=\frac{1}{1-(a+b)z+abz^2}=\frac{1}{a-b}\left\{\frac{a}{1-az}-\frac{b}{1-bz}\right\}.$$

Im Falle nun die absoluten Werte von $az$ und $bz$ echte Brüche sind, kann auf der rechten Seite die Formel

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots,$$
$$-1<x<+1,$$

sowohl für $x=az$ als auch für $x=bz$ angewendet werden; hierdurch entsteht ein Resultat von der Form

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2}=1+C_1z+C_2z^2+C_3z^3+\cdots,$$

und zwar ist

$$C_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=\frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta})^{n+1}-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta})^{n+1}}{2\sqrt{\alpha^2-\beta}}.$$

Zur weiteren Entwickelung des Zählers läßt sich der binomische Satz für ganze positive Exponenten benutzen, wodurch entsteht

$$C_n=(n+1)_1\cdot\alpha^n+(n+1)_3\cdot\alpha^{n-2}(\alpha^2-\beta)+(n+1)_5\cdot\alpha^{n-4}(\alpha^2-\beta)^2$$
$$+(n+1)_7\cdot\alpha^{n-6}(\alpha^2-\beta)^3+\cdots,$$

also

$$C_1=2\alpha, \quad C_2=4\alpha^2-\beta, \quad C_3=8\alpha^3-4\alpha\beta, \ldots$$

Unter der Bedingung, daß gleichzeitig

$$\alpha^2>\beta, \quad \left[(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta})z\right]^2<1 \quad \text{und} \quad \left[(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta})z\right]^2<1$$

ist, gilt also die Gleichung

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2}=1+2\alpha z+(4\alpha^2-\beta)z^2+(8\alpha^3-4\alpha\beta)z^3+\cdots$$

Die vorigen Schlüsse verlieren ihre Anwendbarkeit, wenn $\alpha^2 < \beta$ ist, mithin $a$ und $b$ imaginär werden. Da in diesem Falle $\beta$ positiv und $\sqrt{\beta} > \alpha$ sein muß, so kann man

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} = \cos\theta, \quad z = \frac{x}{\sqrt{\beta}}$$

setzen und es wird dann

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2} = \frac{1}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$

Hier läßt sich unter der Bedingung $x^2 < 1$ die letzte Formel in Nr. 15 anwenden, wodurch entsteht

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2} = \frac{1}{\sin\theta}\left\{\sin\theta + x\sin 2\theta + x^2\sin 3\theta + x^3\sin 4\theta + \cdots\right\}$$

$$= 1 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots$$

Der Wert von $C_n$ ist

$$C_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\sqrt{\beta^n}$$

oder nach einer bekannten Formel (vgl. § 9, Nr. 3, am Schluß)

$$C_n = \sqrt{\beta^n}\{(n+1)_1\cdot\cos^n\theta - (n+1)_3\cdot\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta$$
$$+ (n+1)_5\cdot\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \cdots\};$$

durch Substitution der Werte

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{\beta-\alpha^2}}{\sqrt{\beta}}$$

wird hieraus

$$C_n = (n+1)_1\cdot\alpha^n - (n+1)_3\cdot\alpha^{n-2}(\beta-\alpha^2) + (n+1)_5\cdot\alpha^{n-4}(\beta-\alpha^2)^2$$
$$-(n+1)_7\cdot\alpha^{n-6}(\beta-\alpha^2)^3 + \cdots$$

Unter den Bedingungen, daß gleichzeitig

$$\alpha^2 < \beta < \frac{1}{z^2}$$

ist, gilt also die Gleichung

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2} = 1 + 2\alpha z + (4\alpha^2-\beta)z^2 + (8\alpha^3 - 4\alpha\beta)z^3 + \cdots$$

Die Koeffizienten von $z$, $z^2$, $z^3, \ldots$ sind hier dieselben wie früher, die Bedingungen für die Gültigkeit der Gleichung sind aber andere.

Wäre endlich $\beta = \alpha^2$, so würde man für $\alpha z = x$ auf eine frühere Summenformel zurückkommen (Nr. 12).

## § 36.

### Die Konvergenz und Divergenz der Reihen.

Wenn eine gegebene unendliche Reihe nur positive Terme enthält, so dienen folgende Sätze zur Beurteilung ihrer Konvergenz oder Divergenz.

a) Die Reihe konvergiert, sobald von einer bestimmten Stelle an ihre Terme kleiner sind als die gleichstelligen Terme einer anderen als konvergent bekannten Reihe; sie divergiert hingegen, wenn ihre Terme größer sind als die entsprechenden Terme einer bekannten divergierenden Reihe.

b) Die Reihe
$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$
konvergiert oder divergiert, je nachdem
$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$$
weniger oder mehr als die Einheit beträgt.

c) Falls der genannte Grenzwert $= 1$ ist, gibt das vorige Kennzeichen keine Entscheidung; man untersuche dann
$$Lim \left\{ n \left( 1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \right\};$$
je nachdem dieser Grenzwert mehr oder weniger als die Einheit ausmacht, konvergiert oder divergiert die Reihe.

d) Sehr häufig läßt sich mit Vorteil der Satz anwenden, daß, wenn $u_1 > u_2 > u_3 \ldots$ ist, die Reihen
$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \cdots$$
und
$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \cdots$$
gleichzeitig konvergieren und divergieren, wie aus folgenden Sätzen hervorgeht. Wegen der obigen Ungleichungen wird

$$\begin{aligned} 2u_4 &< u_3 + u_3 && < 2u_2, \\ 4u_8 &< u_4 + u_5 + u_6 + u_7 && < 4u_4, \\ 8u_{16} &< u_8 + \cdots\cdots + u_{15} && < 8u_8, \\ &\dots \end{aligned}$$

mithin durch Addition und allseitige Hinzufügung von $u_1$

$$\tfrac{1}{2}u_1 - u_2 + \tfrac{1}{2}(u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \cdots)$$
$$< u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \cdots <$$
$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \cdots;$$

diese Ungleichungen liefern sofort den Beweis, daß die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ konvergiert oder divergiert, je nachdem die Reihe $u_1 + 2u_2 + 4u_4 + \cdots$ konvergent oder divergent ist.

Wenn eine Reihe aus Termen mit alternierenden Vorzeichen besteht, mithin unter der Form

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots$$

enthalten ist, so konvergiert sie immer, sobald von einer bestimmten Stelle an jeder Term größer als der nächste und wenn zugleich $Lim\, u_n = 0$ ist.

### Beispiele.

1. Die Reihe

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$$

konvergiert für $x^2 < 1$ und divergiert in jedem anderen Falle.

2. Die Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

konvergiert für $x^2 < 1$ und divergiert für $x^2 > 1$. Im Falle $x^2 = 1$ ist zu unterscheiden, ob $x = -1$ oder $x = +1$ ist. Für $x = -1$ konvergiert die Reihe, für $x = +1$ hingegen divergiert sie, wie man u. a. durch Addition der Ungleichungen

$$\begin{aligned} 1 + \tfrac{1}{2} &> \tfrac{1}{2}, \\ \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} &> \tfrac{2}{4}, \\ \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} &> \tfrac{4}{8}, \\ \tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16} &> \tfrac{8}{16}, \end{aligned}$$

usw.

beweisen kann.

3. Die Reihe

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

konvergiert für jedes endliche $x$, was am einfachsten durch Anwendung des unter b) angegebenen Satzes erkannt wird.

4. Die Reihe

$$1+\tfrac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$

konvergiert für $x^2<1$ und divergiert für $x^2>1$. Im Falle $x=+1$ divergiert sie (nach $c$), im Falle $x=-1$ konvergiert sie; denn, wie sich in Nr. 12 zeigen wird, ergibt sich, sobald $b<c$ ist,

$$\mathit{Lim}\,\frac{b\,(b+1)\,(b+2)\cdots(b+n-1)}{c\,(c+1)\,(c+2)\cdots(c+n-1)}=0,$$

und hieraus folgt für $b=\frac{1}{2}$, $c=1$, daß

$$\mathit{Lim}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}=0$$

wird.

5. Die Reihe

$$1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x}{1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^3}{3}+\cdots$$

konvergiert für $x^2\leqq 1$ und divergiert für $x^2>1$.

6. Die Reihe

$$\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots$$

konvergiert für $x^2\leqq 1$ und divergiert für $x^2>1$.

7. Die allgemeinere Reihe

$$\frac{x}{1^\mu}+\frac{x^2}{2^\mu}+\frac{x^3}{3^\mu}+\cdots$$

konvergiert (bei jedem $\mu$) für $x^2<1$ und divergiert für $x^2>1$. Im Falle $x=-1$ konvergiert sie, sobald $\mu$ eine positive Größe ist. Im Falle $x=+1$ erhält man (nach $c$) für $\frac{1}{n}=\delta$

$$\mathit{Lim}\left\{n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right\}=\mathit{Lim}\left\{\frac{1}{(1+\delta)^\mu}\cdot\frac{(1+\delta)^\mu-1}{\delta}\right\}=\mu;$$

die Reihe

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots$$

konvergiert also für $\mu > 1$ und divergiert für $\mu < 1$. Ist $\mu = 1$, so kommt man auf das zweite Beispiel zurück.

Zu den letzteren, für $x = +1$ geltenden Resultaten gelangt man auch mittelst des unter d) erwähnten Satzes.

8. Die Reihe

$$\frac{x^2}{2^\mu \cdot lg\, 2} + \frac{x^3}{3^\mu \cdot lg\, 3} + \frac{x^4}{4^\mu \cdot lg\, 4} + \cdots$$

konvergiert für $x^2 < 1$ und divergiert für $x^2 > 1$. Im Falle $x = -1$ konvergiert sie bei allen positiven $\mu$; ist $x = +1$, so zeigt der Satz d) (für $u_1 = 0$), daß die Reihe nur unter der Bedingung $\mu > 1$ konvergiert.

9. Um die Konvergenz oder Divergenz der Reihe

$$\frac{x}{1} \cdot lg(1 + \tfrac{1}{1}) + \frac{x^2}{2} \cdot lg(1 + \tfrac{1}{2}) + \frac{x^3}{3} \cdot lg(1 + \tfrac{1}{3}) + \cdots$$

festzustellen, benutze man die Ungleichung

$$\frac{1}{n+1} < lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n};$$

man findet dann, daß die Reihe für $x^2 \leqq 1$ konvergiert und für $x^2 > 1$ divergiert.

Geht man (für $x = 1$) von den Logarithmen zu den Zahlen zurück, so ergibt sich der bemerkenswerte Satz, daß das unendliche Produkt

$$\left(1 + \tfrac{1}{1}\right)^{\frac{1}{1}} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdots$$

konvergent ist.

10. Zur Abkürzung sei

$$s_n = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

gesetzt, und die Reihe gegeben

$$\frac{x}{s_1} + \frac{x^2}{2 s_2} + \frac{x^3}{3 s_3} + \cdots$$

Für $x^2 < 1$ konvergiert dieselbe, für $x^2 > 1$ divergiert sie. Im Falle $x = -1$ ist gleichfalls Konvergenz vorhanden; im Falle $x = +1$ wende man den Satz d) an und beachte die Ungleichungen

$$s_2 = 1 + \tfrac{1}{2} < 2,$$
$$s_4 = s_2 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} < s_2 + \tfrac{2}{2} < 3,$$
$$s_8 = s_4 + \tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8} < s_4 + \tfrac{4}{4} < 4,$$
usw.;

es ergibt sich dann, daß die Reihe
$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{2s_2} + \frac{1}{3s_3} + \cdots$$
divergent ist.

11. Die Reihe
$$xe^{-s_1} + x^2e^{-s_2} + x^3e^{-s_3} + \cdots,$$
in welcher $s_n$ dieselbe Bedeutung hat wie in Nr. 10, konvergiert für $x^2 < 1$ und divergiert für $x^2 > 1$. Wegen $Lim\, s_n = \infty$ ist auch im Falle $x = -1$ Konvergenz vorhanden. Für $x = +1$ zeigt die Anwendung der nach Seite 11 leicht beweisbaren Relation
$$s_n < 1 + lg\, n$$
in Verbindung mit Satz a), daß die Reihe divergiert.

12. Um die Reihe
$$x \cdot lg\left\{\frac{(1+\frac{1}{1})^\mu}{(1+\frac{1}{1}\mu)}\right\} + x^2 \cdot lg\left\{\frac{(1+\frac{1}{2})^\mu}{(1+\frac{1}{2}\mu)}\right\} + x^3 \cdot lg\left\{\frac{(1+\frac{1}{3})^\mu}{(1+\frac{1}{3}\mu)}\right\} + \cdots$$
zu untersuchen, bemerke man zunächst, daß $\mu$ keine ganze negative Zahl sein darf, weil sonst ein Term unendlich werden würde. Schließt man im folgenden die Fälle $\mu = -1, \ -2, \ -3, \ldots$ aus, so ist
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mu \cdot lg\,(n+2) - lg\,(n+1+\mu) - (\mu-1) \cdot lg\,(n+1)}{\mu \cdot lg\,(n+1) - lg\,(n+\mu) - (\mu-1) \cdot lg\, n} \cdot x,$$
wobei sich der Grenzwert des Bruches mittelst des Satzes
$$lg\,(n+h) = lg\, n + \frac{h}{n+\vartheta h}, \quad 0 < \vartheta < 1,$$
finden läßt; man erhält
$$Lim\, \frac{u_{n+1}}{u_n} = x,$$
mithin konvergiert oder divergiert die Reihe, je nachdem $x^2 < 1$ oder $x^2 > 1$ ist. Für $x = -1$ konvergiert die Reihe. Der Fall $x = +1$ erledigt sich, wenn man die Gleichung

$$f(h) = f(0) + h \cdot f'(\vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

auf die Funktion

$$lg\left\{\frac{(1+h)^\mu}{1+h\mu}\right\} = \mu \cdot lg\,(1+h) - lg\,(1+\mu h)$$

anwendet und nachher $h = \frac{1}{n}$ setzt; die Reihe

$$lg\left\{\frac{(1+\frac{1}{1})^\mu}{1+\frac{1}{1}\mu}\right\} + lg\left\{\frac{(1+\frac{1}{2})^\mu}{1+\frac{1}{2}\mu}\right\} + lg\left\{\frac{(1+\frac{1}{3})^\mu}{1+\frac{1}{3}\mu}\right\} + \cdots$$

erhält dann die Form

$$\mu(\mu-1)\left\{\frac{\vartheta_1}{(1+\vartheta_1)(1+\mu\vartheta_1)} + \frac{\vartheta_2}{(2+\vartheta_2)(2+\mu\vartheta_2)} + \frac{\vartheta_3}{(3+\vartheta_3)(3+\mu\vartheta_3)} + \cdots\right\},$$

aus welcher ihre Konvergenz ersehen werden kann.

Hieran knüpft sich die bemerkenswerte Folgerung, daß das unendliche Produkt

$$\frac{(1+\frac{1}{1})^\mu}{1+\frac{1}{1}\mu} \cdot \frac{(1+\frac{1}{2})^\mu}{1+\frac{1}{2}\mu} \cdot \frac{(1+\frac{1}{3})^\mu}{1+\frac{1}{3}\mu} \cdots$$

konvergent ist. Der Wert desselben ist selbstverständlich eine gewisse Funktion von $\mu$; diese wird nicht selten mit $\Pi(\mu)$ bezeichnet. Hiernach ist für unendlich wachsende $n$

$$Lim\left\{\frac{(1+\frac{1}{1})^\mu}{(1+\frac{1}{1}\mu)} \cdot \frac{(1+\frac{1}{2})^\mu}{(1+\frac{1}{2}\mu)} \cdots \frac{(1+\frac{1}{n-1})^\mu}{(1+\frac{1}{n-1}\mu)}\right\} = \Pi(\mu),$$

oder nach gehöriger Hebung

$$Lim\left\{\frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{2}{\mu+2} \cdots \frac{n-1}{\mu+n-1}\, n^\mu\right\} = \Pi(\mu),$$

mithin auch

$$Lim\left\{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{2}{\mu+1} \cdot \frac{3}{\mu+2} \cdots \frac{n}{\mu+n-1}\, n^{\mu-1}\right\} = \frac{\Pi(\mu)}{\mu}.$$

Die rechts stehende Funktion pflegt man $\Gamma(\mu)$ zu nennen. Bei ganzen positiven $\mu$ sind ihre Werte leicht zu finden, nämlich $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 1 \cdot 2$ und überhaupt

$$\Gamma(p) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1).$$

Zufolge der Definition von $\Gamma(\mu)$ kann man setzen

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{2}{\mu+1}\cdots\frac{n}{\mu+n-1}\cdot n^{\mu-1}=\frac{\Gamma(\mu)}{1+\varrho},$$

wo $\varrho$ zwar nicht genauer bekannt ist, jedenfalls aber bei unendlich wachsenden $n$ sich der Grenze Null nähert. Hiernach ergibt sich die oft brauchbare Gleichung

$$\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=(1+\varrho)\frac{n^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}.$$

Um eine Anwendung derselben zu zeigen, leiten wir aus der vorstehenden Gleichung die folgende ab

$$\frac{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1)}=\frac{1+\varrho_1}{1+\varrho}\cdot\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\frac{1}{n^{c-b}},$$

welche sofort erkennen läßt, daß

$$\operatorname{Lim}\frac{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1)}$$

$=\infty$, $=1$, oder $=0$ ist, je nachdem $b$ mehr, ebensoviel oder weniger als $c$ beträgt.

13. Die Reihe

$$1+\frac{\beta}{1}\cdot\frac{x}{1^\alpha}+\frac{\beta(\beta+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2}{2^\alpha}+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{x^3}{3^\alpha}+\cdots$$

konvergiert für $x^2<1$ und divergiert für $x^2>1$. Die Fälle $x=-1$ und $x=+1$ erledigen sich durch Anwendung des vorigen Satzes, nach welchem die Reihe folgendermaßen geschrieben werden kann

$$1+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\left\{\frac{1+\varrho_1}{1^{\alpha-\beta+1}}x+\frac{1+\varrho_2}{2^{\alpha-\beta+1}}x^2+\frac{1+\varrho_3}{3^{\alpha-\beta+1}}x^3+\cdots\right\};$$

man ersieht hieraus, daß im Falle $x=-1$ nur für $\alpha-\beta>-1$ und im Falle $x=+1$ nur für $\alpha-\beta>0$ Konvergenz vorhanden ist.

14. Die Reihe

$$1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)\cdot b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots$$

konvergiert für $x^2<1$ und divergiert für $x^2>1$. Gibt man der Reihe die Form

$$1+\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left\{\frac{(1+\delta_1)x}{1^{c-a-b+1}}+\frac{(1+\delta_2)x^2}{2^{c-a-b+1}}+\frac{(1+\delta_3)x^3}{3^{c-a-b+1}}+\cdots\right\},$$

wo $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ echte Brüche sind und $Lim\, \delta_n = 0$ ist, so folgt, daß die Reihe für $x = -1$ nur unter der Bedingung $c - a - b > -1$ und für $x = +1$ nur unter der Bedingung $c - a - b > 0$ konvergiert.

## § 37.

### Summierung einiger Potenzreihen.

Für das Folgende sind einige Sätze nötig, welche wir zunächst vorausschicken.

a) Die unendliche Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

konvergiert unbedingt, wenn der absolute Wert von

$$Lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}x\right)$$

weniger als die Einheit beträgt; setzt man zur Abkürzung

$$Lim\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda,$$

so läßt sich die vorige Bedingung kürzer ausdrücken durch die Ungleichungen

$$-\lambda < x < +\lambda, \quad \text{oder} \quad x^2 < \lambda^2.$$

Unter derselben Bedingung konvergiert auch die Reihe

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots,$$

wie man durch Untersuchung von $Lim\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ erkennt.

b) Die Summen der vorigen Reihen mögen $f(x)$ und $\varphi(x)$ heißen, nämlich

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots;$$

man kennt diese Summen zwar nicht, weiß aber wenigstens, daß beide so lange endliche Werte haben, als $x^2 < \lambda^2$ bleibt. Vermehrt man $x$ um eine kleine positive Größe $\delta$ von der Beschaffenheit, daß auch $(x+\delta)^2 < \lambda^2$ ist, und vermindert man anderseits $x$ um eine ebensolche Größe $\varepsilon$ unter Festhaltung der Bedingung $(x-\varepsilon)^2<\lambda^2$, so hat man durch Subtraktion der entsprechenden Gleichungen

$$f(x+\delta)-f(x-\varepsilon)=(\delta+\varepsilon)\left\{a_1\frac{x+\delta-(x-\varepsilon)}{\delta+\varepsilon}+a_2\frac{(x+\delta)^2-(x-\varepsilon)^2}{\delta+\varepsilon}\right.$$
$$\left.+a_3\frac{(x+\delta)^3-(x-\varepsilon)^3}{\delta+\varepsilon}+\cdots\right\}.$$

Hier läßt sich auf alle rechts stehenden Quotienten der Satz

$$m\,\alpha^{m-1}<\frac{\beta^m-\alpha^m}{\beta-\alpha}<m\,\beta^{m-1},\quad \alpha<\beta$$

für $\alpha=x-\varepsilon$, $\beta=x+\delta$ anwenden; dies gibt unter der Voraussetzung, daß $a_1, a_2, a_3, \cdots$ und $x$ positiv sind,

$$(\delta+\varepsilon)\{a_1+2a_2(x-\varepsilon)+3a_3(x-\varepsilon)^2+\cdots\}<f(x+\delta)-f(x-\varepsilon)$$
$$<(\delta+\varepsilon)\{a_1+2a_2(x+\delta)+3a_3(x+\delta)^2+\cdots\},$$

d. i.

$$(\delta+\varepsilon)\cdot\varphi(x-\varepsilon)<f(x+\delta)-f(x-\varepsilon)<(\delta+\varepsilon)\cdot\varphi(x+\delta).$$

Bei verschwindenden $\delta$ und $\varepsilon$ folgt hieraus, weil $\varphi(x)$ einen endlichen Wert hat,

$$Lim\,[f(x+\delta)-f(x-\delta)]=0;$$

die Summe einer nur positive Terme enthaltenden Potenzreihe ist hiernach eine stetige Funktion der Veränderlichen $x$.

Kommen positive und negative Terme vor, so lassen sich alle positiven Terme für sich, und ebenso alle negativen Terme für sich zusammenziehen, und die Summe $f(x)$ erhält dann die Form $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$. Hier sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ einzeln genommen stetige Funktionen von $x$, ihre Differenz $f(x)$ ändert sich daher gleichfalls kontinuierlich. Es gilt also der Satz, daß die Summe jeder Potenzreihe innerhalb des Konvergenzintervalles eine stetige Funktion der betreffenden Veränderlichen ist.

c) Aus der letzten Ungleichung folgt für $\varepsilon=0$

$$\varphi(x)<\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}<\varphi(x+\delta)$$

und durch den Übergang zur Grenze für verschwindende $\delta$

$$f'(x)=\varphi(x).$$

Besteht demnach eine Potenzreihe aus lauter positiven Termen, so ist der Differentialquotient ihrer Summe gleich der Summe der

Differentialquotienten ihrer einzelnen Summanden. Mittelst der vorhin benutzten Zerlegung von $f(x)$ in $f_1(x) - f_2(x)$ läßt sich dieser Satz auf beliebige Potenzreihen ausdehnen.

d) Wenn zwei Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ gleiche Differentialquotienten haben $[F'(x) = f'(x)]$, so läßt sich auf folgende Weise eine Eigenschaft dieser Funktionen entdecken. Es sei $\psi(x)$ die Differenz beider Funktionen, d. h.

$$\psi(x) = F(x) - f(x);$$

man hat dann

$$\psi'(x) = F'(x) - f'(x) = 0.$$

Unter der Voraussetzung, daß $F(x)$ und $f(x)$ innerhalb irgend eines Intervalles stetig bleiben, ist auch $\psi(x)$ eine kontinuierliche Funktion von $x$, dasselbe gilt von $\psi'(x)$. Mittelst des Satzes

$$\psi(a+h) - \psi(a) = h\psi'(a + \vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

ergibt sich nun, wenn $a$ und $a+h$ innerhalb des Kontinuitätsintervalles liegen,

$$\psi(a+h) - \psi(a) = 0,$$

woraus hervorgeht, daß $\psi(x)$ einen konstanten Wert hat. Zwei stetige Funktionen, welche gleiche Differentialquotienten besitzen, können daher nur um eine Konstante differieren.

**Aufgabe 1.** Man sucht die Summe der Reihe

$$\tfrac{1}{1}x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots,$$

welche für $x^2 < 1$ konvergiert.

Bezeichnet man die Summe der Reihe mit $F(x)$, so hat man

$$F'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

d. i.

$$F'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Schreibt man statt dieser Gleichung die folgende

$$F'(x) = \frac{d\,lg\left(\frac{1}{1-x}\right)}{dx},$$

so ergibt sich nach dem Satze d)

$$F(x) - lg\left(\frac{1}{1-x}\right) = Const.,$$

oder vermöge der Bedeutung von $F(x)$

$$\tfrac{1}{1}x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots = lg\left(\frac{1}{1-x}\right) + Const.$$

Die Konstante bestimmt sich dadurch, daß man dem $x$ irgend einen speziellen zwischen $-1$ und $+1$ liegenden Wert erteilt; am besten eignet sich hierzu der Wert $x = 0$, mittelst dessen man $Const. = 0$ findet, so daß sich ergibt

$$lg\left(\frac{1}{1-x}\right) = \tfrac{1}{1}x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots,$$
$$x^2 < 1.$$

Setzt man einmal $x = +y$, das andere Mal $x = -y$, so gibt die Subtraktion beider Gleichungen

$$lg\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 2\left(\tfrac{1}{1}y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \cdots\right)$$
$$y^2 < 1.$$

Hieraus lassen sich noch folgende Formeln herleiten

$$lg\, z = \tfrac{1}{2}[lg(z+1) + lg(z-1)] + \frac{1}{2z^2-1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2z^2-1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{2z^2-1}\right)^5 + \cdots,$$
$$z > 1,$$

$$lg(z+2) = 2[lg(z+1) - lg(z-1)] + lg(z-2) + 2\left\{\frac{2}{z^3-3z} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{2}{z^3-3z}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{2}{z^3-3z}\right)^5 + \cdots\right\},$$
$$z > 2.$$

Aufgabe 2. Man sucht die Summe der immer konvergierenden Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

Bezeichnet man die gesuchte Summe durch $\Phi(x)$, so erhält man

$$\Phi'(x) = \Phi(x),$$

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{d\, lg\, \Phi(x)}{dx} = \frac{d(x)}{dx}.$$

Daraus folgt

$$lg\, \Phi(x) - x = c \quad \text{oder} \quad \Phi(x) = e^{x+c},$$

d. i.

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = e^{x+c}.$$

Für $x = 0$ ergibt sich $e^c = 1$, mithin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

Aufgabe 3. Man sucht die Summe der Reihe

$$1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots,$$

welche für $x^2 < 1$ konvergiert.

Bezeichnet man mit $\Phi(x)$ die gesuchte Summe, so findet man

$$(1+x)\,\Phi'(x) = \mu\,\Phi(x),$$

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{d\,lg\,\Phi(x)}{dx} = \frac{d\,[\mu\,lg(1+x)]}{dx}.$$

Hieraus folgt

$$lg\,\Phi(x) - \mu\,lg(1+x) = c \quad \text{oder} \quad \Phi(x) = e^c\cdot(1+x)^\mu,$$

mithin

$$1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots = e^c\cdot(1+x)^\mu.$$

Für $x = 0$ ergibt sich $e^c\cdot 1^\mu = 1$, also wenn $(1+x)^\mu$ im absoluten Sinne genommen und demgemäß $1^\mu = 1$ gesetzt wird, $e^c = 1$ und

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots,$$

$$x^2 < 1.$$

Aufgabe 4. Man sucht die Summen $u$ und $v$ der folgenden, immer konvergierenden Reihen

$$u = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdots 6} + \cdots,$$

$$v = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots$$

Quadriert man die erste Gleichung, so entsteht ein Resultat von folgender Form

$$u^2 = 1 - \frac{a_2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{a_4}{1\cdots 4}x^4 - \frac{a_6}{1\cdots 6}x^6 + \cdots,$$

und darin ist

$$a_n = 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots,$$

wofür kürzer

$$a_n = (n)_0 + (n)_2 + (n)_4 + (n)_6 + \cdots$$

geschrieben werden kann. Auf gleiche Weise erhält man

$$v^2 = \frac{b_2}{1\cdot 2}x^2 - \frac{b_4}{1\cdots 4}x^4 + \frac{b_6}{1\cdots 6}x^6 - \cdots$$

und darin ist

$$b_n = (n)_1 + (n)_3 + (n)_5 + \cdots$$

Aus den Formeln für $u^2$ und $v^2$ folgt

$$u^2 + v^2 = 1 - \frac{a_2 - b_2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{a_4 - b_4}{1\cdots 4}x^4 - \frac{a_6 - b_6}{1\cdots 6}x^6 + \cdots,$$

darin ist aber

$$a_n - b_n = (n)_0 - (n)_1 + (n)_2 - (n)_3 + \cdots = 0,$$

mithin bleibt

$$u^2 + v^2 = 1,$$

wofür man auch schreiben kann

$$v = \sqrt{1 - u^2}, \quad u = \sqrt{1 - v^2}.$$

Differenziert man ferner die ursprünglichen Gleichungen für $u$ und $v$, so hat man

$$\frac{du}{dx} = -v = -\sqrt{1 - u^2},$$

$$\frac{dv}{dx} = +u = +\sqrt{1 - v^2}$$

oder in anderer Form

$$\frac{d\, arc\cos u}{dx} = \frac{d(x)}{dx},$$

$$\frac{d\, arc\sin v}{dx} = \frac{d(x)}{dx}.$$

Die erste Gleichung liefert $arc\cos u - x = \alpha$ oder $u = \cos(x + \alpha)$, mithin

$$1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots = \cos(x + \alpha);$$

für $x = 0$ wird hieraus $\cos\alpha = 1$, mithin $\alpha = 2k\pi$, wo $k$ eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, also durch Substitution dieses Wertes

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdots 6} + \cdots$$

Auf analoge Weise erhält man $v = \sin(x + \beta)$ und schließlich

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdots 5} - \cdots$$

**Aufgabe 5.** Man sucht die Summe der folgenden, für $x^2 < 1$ konvergierenden Reihe

$$\tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots$$

Wird die Summe der Reihe mit $F(x)$ bezeichnet, so ergibt sich

$$F'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2},$$

also

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\,arc\,tg\,x}{dx},$$

und hieraus folgt

$$F(x) = arc\,tg\,x + c.$$

Nach Substitution dieses Wertes kann die Konstante mittelst der Spezialisierung $x = 0$ bestimmt werden; es findet sich dann

$$arc\,tg\,x = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots,$$

$$x^2 < 1.$$

**Aufgabe 6.** Man sucht die Summe der folgenden, für $x^2 \leqq 1$ konvergierenden Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Bezeichnet $F(x)$ die Summe, so ist

$$F'(x) = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots,$$

d. i.

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

oder

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\,arc\sin x}{dx}.$$

Hieraus folgt

$$F(x) = arc\sin x + Const.,$$

und nach Bestimmung der Konstanten ergibt sich

$$arc\sin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots,$$

$$x^2 \leqq 1.$$

## § 38.

### Reihenentwickelungen mit Beachtung des Restes.

Wenn man nicht im voraus weiß, ob und unter welchen Bedingungen eine Funktion $f(x)$ in eine Potenzreihe verwandelbar ist, so wäre es eine völlig ungerechtfertigte Hypothese,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

setzen zu wollen; jedenfalls aber darf man eine Gleichung von der Form

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + R$$

aufstellen, wo $R$ eine unbekannte Funktion von $x$ ist, denn es sagt diese Gleichung nichts weiter, als daß der Unterschied zwischen $f(x)$ und der Reihe eine gewisse Funktion von $x$ sein wird. Wie man durch passende Rechnungsoperationen $a_0, a_1, \ldots a_n$ und $R$, den sogenannten Rest der Reihe, bestimmen kann, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

Aufgabe 1. Es sei

$$lg\left(\frac{1}{1-x}\right) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + R,$$

so ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{1}{1-x} = a_1 + 2 a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \frac{dR}{dx}.$$

Diese Gleichung wird identisch mit der bekannten Relation

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x},$$

wenn die Koeffizienten $a_1, \ldots a_n$ folgende Werte erhalten

$$a_1 = \tfrac{1}{1}, \quad a_2 = \tfrac{1}{2}, \ldots a_n = \frac{1}{n},$$

und wenn überdies

$$\frac{dR}{dx} = \frac{x^n}{1-x}$$

ist. Um hervorzuheben, daß $R$ von $x$ abhängt, setze man $R = \varphi(x)$, also

$$\varphi'(x) = \frac{x^n}{1-x};$$

weil ferner $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ stetige Funktionen von $x$ sind, wenn $x < 1$ bleibt, so läßt sich der Satz

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \cdot \varphi'(\vartheta x), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

anwenden, wodurch man erhält

$$\varphi(x) = x \frac{(\vartheta x)^n}{1 - \vartheta x}.$$

Nach diesen Bemerkungen ist nun

$$lg\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\frac{\vartheta^n x^{n+1}}{1-\vartheta x},$$

$$x<1.$$

Bei unendlich wachsenden $n$ hat $x^n$ nur dann die Null zur Grenze, wenn $x$ zwischen $-1$ und $+1$ liegt; es ist daher

$$lg\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots,$$

$$-1<x<+1.$$

**Aufgabe 2.** Von der Gleichung

$$e^x=1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+R$$

ausgehend, erhält man durch Differentiation

$$e^x=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\frac{dR}{dx};$$

diese Gleichung wird mit der vorigen identisch, wenn erstens

$$a_1=1,\quad 2a_2=a_1,\quad 3a_3=a_2,\ldots na_n=a_{n-1},$$

d. h.

$$a_1=\frac{1}{1},\quad a_2=\frac{1}{1\cdot 2},\quad a_3=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3},\cdots a_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdots n},$$

und wenn außerdem

$$\frac{dR}{dx}=a_nx^n+R$$

ist. Um die letztere Bedingung zu vereinfachen, setzen wir

$$R=e^x\psi(x);$$

es wird dann

$$\psi'(x)=a_nx^ne^{-x}=\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots n}e^{-x},$$

mithin wegen $\psi(x)=\psi(0)+x\cdot\psi'(\vartheta x)$

$$\psi(x)=\frac{\vartheta^n x^{n+1}}{1\cdot 2\cdots n}e^{-\vartheta x};$$

hieraus ergibt sich $R$ und nachher

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots n}+\frac{\vartheta^n x^{n+1}}{1\cdot 2\cdots n}e^{(1-\vartheta)x}.$$

Bei unendlich wachsenden $n$ wird für jedes endliche $x$

$$Lim\,\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots n}=0,$$

der Rest konvergiert dann gegen die Null, und damit kommt man auf die bekannte Exponentialreihe zurück.

**Aufgabe 3.** Es sei

$$(1+x)^\mu = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + R;$$

differenziert man diese Gleichung und multipliziert nachher mit $1+x$, so erhält man

$$\mu(1+x)^\mu = a_1 + (a_1 + 2a_2)x + (2a_2 + 3a_3)x^2 + \cdots \\ + [(n-1)a_{n-1} + n a_n]x^{n-1} + n a_n x^n + (1+x)\frac{dR}{dx},$$

und anderseits ist direkt

$$\mu(1+x)^\mu = \mu + \mu a_1 x + \mu a_2 x^2 + \cdots + \mu a_{n-1} x^{n-1} \\ + \mu a_n x^n + \mu R.$$

Die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen werden miteinander identisch, wenn erstens

$$a_1 = \mu, \quad a_1 + 2a_2 = \mu a_1,$$
$$2a_2 + 3a_3 = \mu a_2, \ldots (n-1)a_{n-1} + n a_n = \mu a_{n-1}$$

ist, woraus folgt

$$a_1 = \frac{\mu}{1}, \quad a_2 = \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2},$$
$$a_3 = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \ldots a_n = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n},$$

und wenn zweitens die Gleichung

$$n a_n x^n + (1+x)\frac{dR}{dx} = \mu a_n x^n + \mu R,$$

oder

$$(1+x)\frac{dR}{dx} - \mu R = (\mu - n) a_n x^n$$

stattfindet. Dieselbe vereinfacht sich mittelst der Substitution

$$R = (\mu - n) a_n (1+x)^\mu \varphi(x);$$

sie wird nämlich

$$\varphi'(x) = \frac{x^n}{(1+x)^{\mu+1}}.$$

Diese Formel bestimmt nachher $R$, und wenn man $a_n$ kurz mit $(\mu)_n$ bezeichnet, so folgt

$$(1+x)^\mu = 1 + (\mu)_1 \cdot x + (\mu)_2 \cdot x^2 + \cdots + (\mu)_n \cdot x^n \\ + (\mu - n)(\mu)_n \frac{\vartheta^n (1+x)^\mu x^{n+1}}{(1+\vartheta x)^{\mu+1}}.$$

Falls $x$ zwischen $-1$ und $+1$ liegt, ist bei unendlich wachsendem $n$

$$Lim\left[(m-n)\binom{m}{n}x^n\right] = 0;$$

der Rest konvergiert dann gegen die Null, und damit kommt man auf den allgemeinen binomischen Satz zurück.

**Aufgabe 4.** Es sei zu entwickeln

$$arc\,tg\,x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots + a_{2n-1} x^{2n-1} + R.$$

Durch Differentiation ergibt sich

$$\frac{1}{1+x^2} = a_1 + 3a_3x^2 + 5a_5x^4 + \cdots + (2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2} + \frac{dR}{dx},$$

anderseits ist identisch

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2},$$

mithin durch Vergleichung

$$a_1 = \tfrac{1}{1}, \quad a_3 = -\tfrac{1}{3}, \quad a_5 = +\tfrac{1}{5}, \cdots a_{2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}.$$

Schreibt man für den Augenblick $\varphi(x)$ statt $R$, so erhält man

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\cdot\varphi'(\vartheta x) = x\frac{(-1)^n(\vartheta x)^{2n}}{1+(\vartheta x)^2}$$

und zusammen

$$arc\,tg\,x = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + \frac{(-1)^n\vartheta^{2n}x^{2n+1}}{1+\vartheta^2x^2}.$$

Bei echt gebrochenen Werten von $x$ und unendlich wachsenden $n$ konvergiert der Rest gegen die Null, und es entsteht die bekannte unendliche Reihe für $arc\,tg\,x$.

**Aufgabe 5.** Es sei zu entwickeln

$$arc\sin x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} + R.$$

Durch Differentiation erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = a_1 + 3a_3x^2 + 5a_5x^4 + \cdots + (2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2} + \frac{dR}{dx},$$

anderseits ist nach dem binomischen Satze für $x^2 < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots$$

Die beiden Reihen werden miteinander identisch, wenn erstens

$$a_1 = \frac{1}{1}, \quad a_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}, \ldots$$

$$a_{2n-1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}\cdot\frac{1}{2n-1}$$

und wenn zweitens ist

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^{2n}\left\{1+\frac{2n+1}{2n+2}x^2+\cdots\right\}.$$

Für $R = \varphi(x)$ folgt hieraus

$$\varphi(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\vartheta^{2n}x^{2n+1}\left\{1+\frac{2n+1}{2n+2}\vartheta^2x^2+\cdots\right\};$$

die Summe der eingeklammerten Reihe beträgt weniger als

$$1+\vartheta^2x^2+\vartheta^4x^4+\cdots = \frac{1}{1-\vartheta^2x^2}$$

und kann daher

$$= \frac{\varepsilon}{1-\vartheta^2x^2}$$

gesetzt werden, wo $\varepsilon$ einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch bezeichnet. Nach diesen Erörterungen ist für $x^2 < 1$

$$\begin{aligned} arc\sin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \\ + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\cdot\frac{\varepsilon\vartheta^{2n}x^{2n+1}}{1-\vartheta^2x^2}. \end{aligned}$$

Bei unendlich wachsenden $n$ konvergiert der Rest gegen die Null, und es entsteht die unendliche Reihe für $arc\sin x$.

Aufgabe 6. Es sei zu entwickeln

$$lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} + R.$$

Durch ein ganz ähnliches Verfahren, wie in Nr. 5 findet man

$$\begin{aligned} lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \cdots \\ + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \\ + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\vartheta^{2n}x^{2n-1}(1-\varepsilon x^2), \end{aligned}$$

wobei $x^2 < 1$ sein muß, $\vartheta$ und $\varepsilon$ positive echte Brüche bedeuten. Bei unendlich wachsenden $n$ wird

$$lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \cdots$$

$$x^2 < 1;$$

diese Gleichung gilt auch noch im Falle $x^2 = 1$.

## § 39.

### Die Sätze von Taylor und Mac Laurin.

Im vorigen Paragraphen wurden die Reihen für $lg(1-x)$, $e^x$, usw. mittelst spezieller Eigenschaften dieser Funktionen entwickelt, jene Reihen können aber auch aus einer gemeinsamen Quelle abgeleitet werden, nämlich aus den Sätzen von Taylor und Mac Laurin. Hierbei macht sich eine Untersuchung des Restes nötig, und für diese ist die Bemerkung von Wert, daß der Rest unter unendlich vielen verschiedenen Formen dargestellt werden kann.

Setzt man

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{b-x}{1} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{1\cdot 2} f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)} f^{(n-1)}(x),$$

worin $f(x)$ eine gegebene Funktion, $\varphi(x)$ dagegen die unbekannte Summe der rechtsstehenden $n$-gliedrigen Reihe bezeichnet, so ist

$$\varphi(a) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)} f^{(n-1)}(a);$$

und ferner unter der Voraussetzung, daß $f(b)$, $f'(b)$, $f''(b)$, $\cdots f^{(n-1)}(b)$ endliche Größen sind,

$$\varphi(b) = f(b).$$

Anderseits ergibt sich durch Differentiation

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)} f^{(n)}(x).$$

Wir benutzen nun folgenden Satz*: Wenn $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ $\psi(x)$, $\psi'(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ endlich und stetig bleiben, und wenn

* *Compendium der höheren Analysis*, I. Band, Seite 45—46.

ferner $\psi'(x)$ innerhalb des genannten Intervalles sein Vorzeichen nicht wechselt, so ist

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(a+\vartheta[b-a])}{\psi'(a+\vartheta[b-a])}, \quad 0<\vartheta<1,$$

oder

$$\varphi(a)=\varphi(b)-\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\psi'(a+\vartheta[b-a])}\,\varphi'(a+\vartheta[b-a]).$$

Mittelst dieser Formel ergibt sich unter Benutzung der Werte von $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ und $\varphi'(x)$

$$f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}f^{(n-1)}(a)$$

$$f(b)-\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\psi'(a+\vartheta[b-a])}\cdot\frac{(1-\vartheta)^{n-1}(b-a)^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}f^{(n)}(a+\vartheta[b-a]),$$

wobei $f(x)$, $f'(x)$, $\cdots f^{(n)}(x)$, $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ endlich und stetig bleiben müssen und $\psi(x)$ eine beliebige nur an die eine Bedingung gebundene Funktion ist, daß $\psi'(x)$ zwischen $a$ und $b$ keinen Vorzeichenwechsel erleiden darf.

Für $b-a=h$ oder $b=a+h$ ergibt sich der Taylorsche Satz

$$f(a+h)-R_n=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}f^{(n-1)}(a),$$

wobei der Rest $R_n$ durch die Gleichung

$$R_n=\frac{\psi(a+h)-\psi(a)}{\psi'(a+\vartheta h)}\cdot\frac{(1-\vartheta)^{n-1}h^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}f^{(n)}(a+\vartheta h)$$

bestimmt ist und zufolge der Willkürlichkeit von $\psi(x)$ unendlich viele verschiedene Formen annehmen kann. Die Wahlen $\psi(x)=x$ und $\psi(x)=(a+h-x)^n$ führen zu den gewöhnlich in den Lehrbüchern angegebenen Restformen.

Setzt man noch $a=0$, so entsteht der Satz von Mac Laurin

$$f(h)-R_n=f(0)+\frac{f'(0)}{1}h+\frac{f''(0)}{1\cdot 2}h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}h^{n-1},$$

$$R_n=\frac{\psi(h)-\psi(0)}{\psi'(\vartheta h)}\cdot\frac{(1-\vartheta)^{n-1}h^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}f^{(n)}(\vartheta h),$$

worin $f(x)$, $f'(x)$, $\cdots f^{(n)}(x)$, $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ von $x=0$ bis $x=h$ stetig und endlich bleiben müssen und $\psi'(x)$ zwischen 0 und $h$ keinen Vorzeichenwechsel erleiden darf. Für

$$\psi(x)=x \quad \text{und} \quad \psi(x)=(h-x)^n$$

kommen die gewöhnlichen Restformen zum Vorschein.

Die Annahme $\psi(x) = h^p - (h-x)^p$, worin $p$ eine beliebige positive Größe bedeuten möge, führt zu der Formel

$$R_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-p}\, h^n}{p\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\, f^{(n)}(\vartheta h), \quad p > 0,$$

in welcher man nicht selten $p$ so wählen kann, daß sich $R_n$ vereinfacht wie z. B. in Aufgabe 2.

Für $\psi(x) = (h-x)^n f^{(n)}(x)$ ergibt sich

$$R_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\frac{h^n}{1-\varrho_n}, \quad \varrho_n = \frac{(1-\vartheta)h}{n}\cdot\frac{f^{(n+1)}(\vartheta h)}{f^{(n)}(\vartheta h)},$$

wobei der Ausdruck

$$n f^{(n)}(x) - (h-x)\, f^{(n+1)}(x)$$

zwischen $x=0$ und $x=h$ keinen Vorzeichenwechsel erleiden darf.

Aufgabe 1. Man soll $(1+h)^\mu$ nach dem Satze von Mac Laurin entwickeln.

Es ergibt sich

$$(1+h)^\mu - R_n = 1 + \frac{\mu}{1}h + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}h^2 + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}h^{n-1},$$

und wenn $\psi(x) = (1+x)^\mu$ genommen wird, so ist unter der Voraussetzung $h < -1$

$$R_n = [(1+h)^\mu - 1]\,\frac{(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\left(\frac{h-\vartheta h}{1+\vartheta h}\right)^{n-1}.$$

Nach dem bekannten Satze, daß für $q^2 < 1$

$$Lim\left\{\frac{(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\, q^{n-1}\right\} = 0$$

ist, findet man leicht, daß $R_n$ gegen die Null konvergiert, wenn

$$\left(\frac{h-\vartheta h}{1-\vartheta h}\right)^2 < 1$$

bleibt, welche Bedingung für $h^2 < 1$ erfüllt ist. Man erhält so den binomischen Satz.

Auf ähnliche Weise lassen sich die Funktionen $lg\,(1+h)$, $e^h$, $cos\ h$, $sin\ h$, $arctg\ h$ in endliche Reihen verwandeln; bei unendlich wachsenden $n$ ist dann zu untersuchen, unter welchen Umständen $Lim\ R_n = 0$ wird.

**Aufgabe 2.** Es soll *arc sin h* nach dem Satze von Mac Laurin entwickelt werden.

Zur Bestimmung von $f''(0)$, $f'''(0)$ usw. benutze man die Rekursionsformel

$$(1-x^2)\cdot f^{(k+2)}(x) = (2k+1)\,x\cdot f^{(k+1)}(x) + k^2\cdot f^{(k)}(x),$$

deren Richtigkeit durch den Schluß von $k$ auf $k+1$ bewiesen werden kann; dann ergeben sich zufolge der Anfangswerte $f(0)=0$ und $f'(0)=1$ die weiteren Werte

$$f''(0)=0, \quad f^{IV}(0)=0, \quad f^{VI}(0)=0, \cdots$$
$$f'''(0)=1^2, \quad f^{V}(0)=1^2\cdot 3^2, \quad f^{VII}(0)=1^2\cdot 3^2\cdot 5^2, \cdots$$

Um den Rest bequem zu gestalten, mache man Gebrauch von der Formel (*Compendium* I, § 14)

$$D^{n+1}\,arc\,sin\,x = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n(1-x)^n\sqrt{1-x^2}}\left\{C_0 - C_1\frac{1-x}{1+x} + C_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \cdots + (-1)^n C_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right\},$$

worin

$$C_0=1,\; C_1=\frac{1\cdot(n)_1}{2n-1},\; C_2=\frac{1\cdot 3\cdot(n)_2}{(2n-1)(2n-3)},\; C_3=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(n)_3}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)},\cdots$$

Die Koeffizienten besitzen (wie die Binomialkoeffizienten) die Eigenschaft

$$C_0=C_n,\; C_1=C_{n-1},\; C_2=C_{n-2},\cdots,$$

sie bilden demnach eine aus zwei symmetrischen Hälften bestehende Reihe. Anfangs ist

$$1=C_0>C_1>C_2,\cdots,$$

die Koeffizienten nehmen also bis zur Mitte der Reihe ab, erreichen dort ein positives Minimum und steigen dann wieder bis $C_n=1$; mit Ausnahme von $C_0$ und $C_n$ sind daher alle $C$ positive echte Brüche. Hieraus folgt, daß die Reihe

$$C_0 - C_1\frac{1-x}{1+x} + C_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \cdots + (-1)^n C_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

von $x=0$ bis $x=1$ eine endliche Summe $\varphi(x,n)$ besitzt, welche selbst im Falle $n=\infty$ endlich bleibt $\left[\text{nämlich } \varphi(x,\infty)=\sqrt{\tfrac{1}{2}(x+1)}\right]$. Man hat also

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n(1-x)^n\sqrt{1-x^2}}\,\varphi(x,n).$$

Auf das mit $h^n$ versehene Reihenglied folgt im allgemeinen der Rest

$$R_{n+1} = \frac{(1-\vartheta)^{n+1-p} \cdot h^{n+1}}{p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} f^{(n+1)}(\vartheta h),$$

mithin im vorliegenden Falle

$$R_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{(1-\vartheta)^{n+1-p} \cdot h^{n+1}}{p(1-\vartheta h)^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{1+\vartheta h}} \varphi(\vartheta h, n),$$

wobei man bemerkt, daß $p = \frac{1}{2}$ die günstigste Annahme von $p$ ist, also

$$R_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \left(\frac{h-\vartheta h}{1-\vartheta h}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{2\sqrt{h} \cdot \varphi(\vartheta h, n)}{\sqrt{1+\vartheta h}}.$$

Aus dem schon früher benutzten Satze (§ 36, Nr. 12), daß, sobald $b < c$ ist,

$$Lim\, \frac{b(b+1)(b+2) \cdots (b+n-1)}{c(c+1)(c+2) \cdots (c+n-1)} = 0$$

wird, folgt für $b = \frac{1}{2}$, $c = 1$

$$Lim\, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = 0,$$

und da alle übrigen im Reste vorkommenden Faktoren endliche Größen bleiben, solange $h$ das Intervall von 0 bis 1 nicht überschreitet, so ergibt sich

$$Lim\, R_{n+1} = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq h \leqq 1$$

und damit die Reihe für $arc\,sin\,h$. Wegen $arc\,sin\,(-h) = -\,arc\,sin\,h$ gilt das Resultat weiter von $h = 0$ bis $h = -1$.

## § 40.

### Reihenentwickelungen für zusammengesetzte Funktionen.

I. Wenn eine Funktion als Summe oder Produkt mehrerer anderer Funktionen betrachtet werden kann, von denen jede für sich in eine Reihe verwandelbar ist, so erhält man die Entwickelung der zusammengesetzten Funktion sehr leicht dadurch, daß man die Reihen für die einzelnen Funktionen addiert, resp. multipliziert.

Aufgabe 1. Es soll die Funktion

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$$

in eine nach Potenzen von $x$ fortschreitende Reihe entwickelt werden.

Beachtet man die verschiedenen Formen

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{1+x^2}\right) = \frac{1-x}{1-x^4},$$

so hat man drei verschiedene Mittel zur Entwickelung der gesuchten Reihe, welche für $x^2 < 1$ lautet

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + x^{12} - x^{13} + \cdots$$

Aufgabe 2. Es soll bewiesen werden, daß die Gleichung

$$\frac{lg(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1}x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \cdots$$

für alle zwischen $-1$ und $+1$ liegenden $x$ gilt.

Aufgabe 3. Durch Multiplikation der Potenzreihen $e^{ax}$ und $\cos x$ entsteht eine Gleichung von der Form

$$e^{ax} \cos x = 1 + \frac{A_1}{1}x + \frac{A_2}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{A_3}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots,$$

wobei sich $A_n$ kurz darstellen läßt, wenn die Formel

$$\frac{\cos n\theta}{\cos^n \theta} = (n)_0 - (n)_2 \cdot tg^2\theta + (n)_4 \cdot tg^4\theta - (n)_6 \cdot tg^6\theta + \cdots$$

benutzt wird. Für $x = z \sin\theta$, $a = \cot\theta$ erhält das Resultat die einfache Gestalt

$$e^{z\cos\theta} \cos(z\sin\theta) = 1 + \frac{z\cos\theta}{1} + \frac{z^2 \cos 2\theta}{1 \cdot 2} + \frac{z^3 \cos 3\theta}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

Auf analoge Weise gelangt man zu der Gleichung

$$e^{z\cos\theta} \sin(z\sin\theta) = \frac{z\sin\theta}{1} + \frac{z^2 \sin 2\theta}{1 \cdot 2} + \frac{z^3 \sin 3\theta}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

Die beiden vorigen Ergebnisse gestatten die vier Kombinationen

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{z\cos\theta} + e^{-z\cos\theta}\right)\cos(z\sin\theta) = 1 + \frac{z^2\cos 2\theta}{1 \cdot 2} + \frac{z^4 \cos 4\theta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{z^6 \cos 6\theta}{1 \cdot 2 \cdots 6} + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{z\cos\theta} - e^{-z\cos\theta}\right)\cos(z\sin\theta) = \frac{z\cos\theta}{1} + \frac{z^3\cos 3\theta}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^5 \cos 5\theta}{1 \cdot 2 \cdots 5} + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{z\cos\theta} + e^{-z\cos\theta}\right)\sin(z\sin\theta) = \frac{z\sin\theta}{1} + \frac{z^3\sin 3\theta}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^5 \sin 5\theta}{1 \cdot 2 \cdots 5} + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{z\cos\theta} - e^{-z\cos\theta}\right)\sin(z\sin\theta) = \frac{z^2\sin 2\theta}{1 \cdot 2} + \frac{z^4\sin 4\theta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{z^6 \sin 6\theta}{1 \cdot 2 \cdots 6} + \cdots$$

Für $\theta = \frac{1}{4}\pi$ und $\theta = \frac{1}{3}\pi$ entstehen hieraus verschiedene spezielle Reihenformeln.

**Aufgabe 4.** Man soll zeigen, daß für jedes $x$ die Entwickelung gilt

$$e^{ax+\frac{b}{x}} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_3}{x^3} + \cdots,$$

worin $A_n$ und $B_n$ die Werte haben

$$A_n = \frac{a^n}{1\cdot 2\cdots n}\left\{1 + \frac{ab}{1\cdot(n+1)} + \frac{a^2b^2}{1\cdot 2\cdot(n+1)(n+2)} + \cdots\right\},$$

$$B_n = \frac{b^n}{1\cdot 2\cdots n}\left\{1 + \frac{ab}{1\cdot(n+1)} + \frac{a^2b^2}{1\cdot 2\cdot(n+1)(n+2)} + \cdots\right\}.$$

Setzt man die Summe der immer konvergierenden Reihe

$$1 + \frac{u}{1^2} + \frac{u^2}{(1\cdot 2)^2} + \frac{u^3}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} + \cdots = \varphi(u),$$

so kann man der vorigen Entwickelung folgende Gestalt geben

$$e^{ax+\frac{b}{x}} = \varphi(ab) + \left(ax + \frac{b}{x}\right)\varphi'(ab) + \left(a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}\right)\varphi''(ab) + \cdots$$

II. Sehr häufig trifft es sich, daß Betrachtungen der vorigen Art zwar die Möglichkeit der Reihenentwickelung zeigen, aber das Bildungsgesetz der Koeffizienten schwer erkennen lassen; in solchen Fällen empfiehlt es sich, die Koeffizienten einstweilen mit Buchstaben zu bezeichnen und sie nachträglich durch eine oder mehrere Differentiationen zu bestimmen. (Methode der unbestimmten Koeffizienten.)

**Aufgabe 5.** Es soll der Ausdruck

$$[lg(1+x)]^2$$

in eine Potenzreihe verwandelt werden. Die Reihe ergibt sich direkt durch Quadrierung der bekannten, unter der Bedingung $x^2 < 1$ geltenden Potenzreihe für $lg(1+x)$; da sich aber das Bildungsgesetz der Koeffizienten hierbei nicht unmittelbar übersehen läßt, so setze man

$$\tfrac{1}{2}[lg(1+x)]^2 = a_2x^2 - a_3x^3 + a_4x^4 - \cdots$$

und differenziere beiderseits. Dies gibt

$$\frac{lg(1+x)}{1+x} = 2a_2x - 3a_3x^2 + 4a_4x^3 - \cdots$$

und durch Vergleich mit der in Aufgabe 2 angegebenen Entwickelung

$$2a_2 = \tfrac{1}{1}, \qquad 3a_3 = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2}, \qquad 4a_4 = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}, \cdots$$

Setzt man zur Abkürzung

$$s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

so hat man das Resultat

$$\frac{1}{2}[lg(1+x)]^2 = \frac{1}{2}s_1x^2 - \frac{1}{3}s_2x^3 + \frac{1}{4}s_3x^4 - \cdots,$$
$$x^2 < 1.$$

Aufgabe 6. Es wird die Reihenentwickelung von

$$[lg(1+x)]^3$$

gesucht, wobei $x^2 < 1$ sein muß.

Setzt man

$$\frac{1}{6}[lg(1+x)]^3 = b_3x^3 - b_4x^4 + b_5x^5 - \cdots,$$

differenziert und multipliziert mit $1 + x$, so kommt man auf die vorige Entwickelung zurück, wodurch sich die Koeffizienten $b_3$, $b_4, b_5, \ldots$ bestimmen. Schließlich ist

$$\frac{1}{6}[lg(1+x)]^3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}s_1x^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{3}s_2\right)x^4$$
$$+ \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{4}s_3\right)x^5 - \cdots,$$
$$x^2 < 1.$$

Auf analoge Weise lassen sich die Ausdrücke

$$\frac{1}{24}[lg(1+x)]^4, \quad \frac{1}{120}[lg(1+x)]^5, \ldots$$

in Potenzreihen verwandeln, deren Koeffizienten aber immer verwickelter werden.

Aufgabe 7. Es soll der Ausdruck

$$\frac{lg(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$$

in eine Potenzreihe verwandelt werden.

Entwickelt man $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ mittelst des binomischen Satzes und $lg(x+\sqrt{1+x^2})$ nach Aufgabe 6 in § 38, so erhält man durch Multiplikation

$$\frac{lg(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{15}x^5 - \frac{16}{35}x^7 + \cdots,$$
$$x^2 < 1,$$

worin das Bildungsgesetz der Koeffizienten schwer zu erkennen ist. Man setze deshalb

$$\frac{lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} = a_1 x - a_3 x^3 + a_5 x^5 - \cdots,$$

multipliziere beiderseits mit $\sqrt{1+x^2}$, differenziere und multipliziere nochmals mit $\sqrt{1+x^2}$; dies gibt

$$1 = a_1 - (3a_3 - 2a_1)x^2 + (5a_5 - 4a_3)x^4 - (7a_7 - 6a_5)x^6 + \cdots$$

und hieraus findet sich der Reihe nach

$$a_1 = 1, \quad a_3 = a_1 \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{3}, \quad a_5 = a_3 \cdot \tfrac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}, \cdots$$

mithin

$$\frac{lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} = x - \tfrac{2}{3}x^3 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}x^5 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}x^7 + \cdots,$$

$$x^2 < 1.$$

**Aufgabe 8.** Man verlangt eine Potenzreihe für den Ausdruck

$$\left[lg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]^2.$$

Multipliziert man die für $lg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ gefundene Reihe mit sich selbst, so entsteht ein Resultat von der Form

$$\left[lg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]^2 = a_2 x^2 - a_4 x^4 + a_6 x^6 - \cdots,$$

$$x^2 < 1;$$

durch Differentiation kommt man auf die Reihenentwickelung der vorigen Aufgabe zurück und erhält schließlich

$$\left[lg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]^2 = \frac{x^2}{1} - \tfrac{2}{3} \cdot \frac{x^4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{x^6}{3} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{x^8}{4} + \cdots,$$

$$x^2 < 1.$$

**Aufgabe 9.** Durch ein ähnliches Verfahren soll folgende Gleichung bewiesen werden

$$\frac{arc \sin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \tfrac{2}{3}x^3 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}x^5 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}x^7 + \cdots,$$

$$x^2 < 1,$$

die sich auch in nachstehender Form darstellen läßt

$$arc\, tg\, z = \frac{z}{1+z^2}\left\{1 + \tfrac{2}{3}\,\frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \cdots\right\},$$

$$z^2 < \infty.$$

**Aufgabe 10.** Es ist folgende Gleichung zu beweisen

$$(arc\sin x)^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{x^6}{3} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{x^8}{4} + \cdots,$$
$$x^2 < 1.$$

**Aufgabe 11.** Man sucht eine Potenzreihe für den Ausdruck

$$2\,lg\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right).$$

Entwickelt man zunächst $\sqrt{1-x}$ nach dem binomischen Satze und benutzt nachher die logarithmische Reihe, so erhält man für den vorliegenden Ausdruck

$$\begin{aligned}2\,lg\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2-\cdots}\right) &= 2\{(\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{16}x^2+\cdots)+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{16}x^2+\cdots)^2\\ &\quad+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{16}x^2+\cdots)^3+\cdots\}\\ &= \tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3+\cdots\\ &\quad+\tfrac{1}{16}x^2+\tfrac{1}{32}x^3+\cdots\\ &\quad+\tfrac{1}{96}x^3+\cdots\\ &\quad+\cdots\end{aligned}$$

Diese Doppelreihe erfüllt die Bedingungen, unter denen es erlaubt ist, ihre Terme nach Vertikalkolonnen zu ordnen; man hat daher

$$2\,lg\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots,$$
$$x^2 < 1,$$

wo $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{16}$, $a_3 = \frac{5}{48}$ ist. Durch Differentiation gelangt man leicht zu der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + \cdots,$$

welche sich mit der Entwickelung von $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ vergleichen läßt; das Endresultat lautet

$$2\,lg\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^3}{3} + \cdots,$$
$$x^2 < 1,$$

oder auch

$$2\,lg\left(\frac{2}{1+s}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-s^2}{1}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{(1-s^2)^2}{2}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\,\frac{(1-s^2)^3}{3}+\cdots,$$
$$0<s<\sqrt{2}.$$

Die Substitution $s=\cos\theta$ führt zu einer bemerkenswerten Formel für $lg\cos\frac{1}{2}\theta$.

**Aufgabe 12.** Man verlangt die Entwickelung des Ausdruckes

$$\tfrac{1}{2}\{(1+\sqrt{1-x})^m+(1-\sqrt{1-x})^m\}.$$

Durch Anwendung des binomischen Satzes bringt man die gegebene Funktion leicht in die Form

$$\begin{aligned}&(m)_0+(m)_2\cdot(1-x)+(m)_4\cdot(1-x)^2+(m)_6\cdot(1-x)^3+\cdots\\ &=(m)_0\\ &+(m)_2-(m)_2\cdot x\\ &+(m)_4-2\,(m)_4\cdot x+(m)_4\cdot x^2\\ &+(m)_6-3\,(m)_6\cdot x+3\,(m)_6\cdot x^2-(m)_6\cdot x^3\\ &+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot,\end{aligned}$$

und zwar gilt diese Transformation für jedes $x$, wenn $m$ eine ganze positive Zahl ist; bei anderen $m$ dagegen muß $x$ auf das Intervall von 0 bis 1 beschränkt werden. Im ersten Falle ist die obige Doppelreihe eine endliche und darf ohne weiteres nach Vertikalkolonnen geordnet werden, wodurch ein Resultat von folgender Form entsteht

$$\tfrac{1}{2}\left\{\left(1+\sqrt{1-x}\right)^m+\left(1-\sqrt{1-x}\right)^m\right\}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

Im zweiten Falle geht die Doppelreihe ins Unendliche fort und darf nur unter der Bedingung in Vertikalkolonnen umgesetzt werden, daß die absoluten Werte der Terme sowohl bei der einen als auch bei der anderen Anordnung konvergente Reihen geben. Diese absoluten Werte liefern aber, wenn die Horizontalzeilen zusammengezogen werden, die divergente Reihe

$$(m)_0+(m)_2\cdot(1+x)+(m)_4\cdot(1+x)^2+\cdots,\quad 0<x<1,$$

mithin kann die ursprünglich gegebene Funktion für andere als ganze positive $m$ nicht in eine nach Potenzen von $x$ fortschreitende Reihe verwandelt werden. Zu demselben Resultate führt auch die Bemerkung, daß für positive echt gebrochene Werte von $x$

$$\tfrac{1}{2}\left\{\left(1+\sqrt{1-x}\right)^m+\left(1-\sqrt{1-x}\right)^m\right\}$$

$$=2^{m-1}\left(1-\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{16}x^2-\cdots\right)+\frac{x^m}{2^{m+1}}\left(1+\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{8}x^2+\cdots\right)^m$$

gesetzt werden kann; ist $m$ keine ganze positive Zahl, so liefert die weitere Entwickelung der rechten Seite keine reine Potenzreihe, sondern ein Gemisch von ganzen positiven und anderen Potenzen der Größe $x$.

Differenziert man die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\left\{\left(1+\sqrt{1-x}\right)^m+\left(1-\sqrt{1-x}\right)^m\right\}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

und benutzt hierbei die Identitäten

$$\left(1+\sqrt{1-x}\right)^{m-1}=\frac{\left(1+\sqrt{1-x}\right)^m}{x}\left(1-\sqrt{1-x}\right),$$

$$\left(1-\sqrt{1-x}\right)^{m-1}=\frac{\left(1-\sqrt{1-x}\right)^m}{x}\left(1+\sqrt{1-x}\right),$$

so erhält man leicht

$$m\,\frac{\left(1+\sqrt{1-x}\right)^m-\left(1-\sqrt{1-x}\right)^m}{2\sqrt{1-x}}$$

$$=ma_0+(m-2)\,a_1x+(m-4)\,a_2x^2+(m-6)\,a_3x^3+\cdots$$

Diese Gleichung multipliziere man mit $\sqrt{1-x}$, differenziere wiederum und mache dabei von den vorigen Identitäten Gebrauch; dies gibt

$$m^2\,\frac{\left(1+\sqrt{1-x}\right)^m+\left(1-\sqrt{1-x}\right)^m}{2}$$

$$=m^2a_0+\left[(m-2)^2a_1-m\,(m-1)\,a_0\right]x$$

$$+\left[(m-4)^2a_2-(m-2)\,(m-3)\,a_1\right]x^2+\cdots$$

Der Vergleich mit der ursprünglichen Gleichung liefert die Relation

$$a_k=-\frac{(m-2k+2)\,(m-2k+1)}{k\,(m-k)}\cdot\frac{a_{k-1}}{4},$$

und da sich aus der anfänglichen Gleichung für $x=0$ der Wert $a_0=2^{m-1}$ ergibt, so können $a_1, a_2, \ldots$ der Reihe nach berechnet werden.

Als Endresultat findet man die folgende Gleichung, worin die Reihe bei geradem $m$ mit $x^{\frac{1}{2}m}$, bei ungeradem $m$ mit $x^{\frac{1}{2}(m-1)}$ abzubrechen ist,

$$\frac{(1+\sqrt{1-x})^m+(1-\sqrt{1-x})^m}{2^m}$$

$$=1-\frac{m}{1}\cdot\frac{x}{4}+\frac{m(m-3)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{m(m-4)(m-5)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^3$$

$$+\frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^4-\cdots$$

Ferner ist nach einer der vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{(1+\sqrt{1-x})^m-(1-\sqrt{1-x})^m}{2^m\sqrt{1-x}}=1-\frac{m-2}{1}\cdot\frac{x}{4}+\frac{(m-3)(m-4)}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{4}\right)^2$$

$$-\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x}{4}\right)^3+\cdots$$

Beiläufig sei noch bemerkt, daß man sich nun auch a posteriori von der nur auf ganze positive Werte von $m$ beschränkten Richtigkeit dieser Formeln überzeugen kann. So ergibt sich z. B. aus der ersten Formel für $m=-1$

$$\frac{4}{x}=1+\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{8}x^2+\cdots,$$

und für $m=\frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}=1-\tfrac{1}{8}x-\tfrac{5}{128}x^2-\cdots,$$

diese Resultate aber sind unrichtig.

Aufgabe 13. Mittelst der gewöhnlichen goniometrischen Formeln erhält man leicht folgende Gleichungen

$$\cos 2u = 2\cos^2 u - 1,$$

$$\cos 3u = 4\cos^3 u - 3\cos u,$$

$$\cos 4u = 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1,$$

$$\cos 5u = 16\cos^5 u - 20\cos^3 u + 5\cos u,$$

$$\cos 6u = 32\cos^6 u - 48\cos^4 u + 18\cos^2 u - 1,$$

usw.,

aus denen hervorgeht, daß bei ganzen positiven $m$ gesetzt werden kann

$$\cos mu = A_0 \cos^m u - A_2 \cos^{m-2} u + A_4 \cos^{m-4} u - \cdots$$

oder kürzer

$$\cos(m \arccos x) = A_0 x^m - A_2 x^{m-2} + A_4 x^{m-4} - A_6 x^{m-6} + \cdots$$

Differenziert man diese Gleichung und multipliziert nachher mit $\sqrt{1-x^2}$, so findet man

$$m \sin(m \arccos x) = \sqrt{1-x^2}\{m A_0 x^{m-1} - (m-2) A_2 x^{m-3} \\ + (m-4) A_4 x^{m-5} - \cdots\};$$

diese Gleichung differenziere man wiederum, multipliziere mit $\sqrt{1-x^2}$ und vergleiche das Resultat mit der ursprünglichen Gleichung; dann gelangt man zu folgender Relation

$$4k(m-k)A_{2k} = (m-2k+2)(m-2k+1)A_{2k-2},$$

welche dazu dient, um $A_2, A_4, A_6, \ldots$ durch den vorläufig unbekannt bleibenden Koeffizienten $A_0$ auszudrücken. Man findet

$$A_2 = \frac{m}{1} \cdot \frac{A_0}{2^2}, \quad A_4 = \frac{m(m-3)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{A_0}{2^4}, \ldots$$

$$A_{2k} = \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\cdots(m-2k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \cdot \frac{A_0}{2^{2k}}.$$

Um $A_0$ zu bestimmen, unterscheide man, ob $m$ gerade oder ungerade ist, ob also $m = 2n$ oder $= 2n+1$ gesetzt werden kann. Im ersten Falle ist

$$\cos 2nu = A_0 \cos^{2n} u - \cdots + (-1)^{n-1} A_{2n-2} \cos^2 u + (-1)^n A_{2n},$$

und für $u = \frac{1}{2}\pi$

$$\cos n\pi = (-1)^n A_{2n}, \quad \text{d. h.} \quad A_{2n} = 1.$$

Anderseits hat man nach der Formel für $A_{2k}$, wenn $m = 2n$, $k = n$ gesetzt wird,

$$A_{2n} = 2\frac{A_0}{2^{2n}},$$

mithin, weil $A_{2n}$ nach dem Vorigen bekannt ist

$$A_0 = 2^{2n-1} = 2^{m-1}.$$

Im Falle $m = 2n+1$ ergibt sich

$$\frac{\cos(2n+1)u}{\cos u} = A_0 \cos^{2n} u - \cdots + (-1)^{n-1} A_{2n-2} \cos^2 u \\ + (-1)^n A_{2n},$$

und für $u = \frac{1}{2}\pi$

$$(2n+1)\cos n\pi = (-1)^n A_{2n}, \quad \text{d. h.} \quad A_{2n} = 2n+1.$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

und durch Differentiation

$$[illegible]$$

Aufgabe 12. Man sucht eine Potenzreihe für den Ausdruck

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{\mu},$$

wenn $\mu$ eine beliebige reelle Zahl bedeuten soll.

Da bekanntlich $e^{kz}$ unter der Form

$$e^{kz}=1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}+\cdots$$

dargestellt werden kann, so hat man

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{\mu}=1-\frac{\mu}{1}\lg\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)+\frac{\mu^2}{1\cdot 2}\left(\lg\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2}-\cdots;$$

hier läßt sich die in der 11. Aufgabe entwickelte Reihe benutzen, wodurch die rechte Seite zu folgender Doppelreihe wird, welche an die Bedingung $x^2<1$ gebunden ist.

$$\begin{aligned}1-\tfrac{1}{1}\mu\left(\tfrac{1}{4}x+\tfrac{3}{32}x^2+\tfrac{5}{96}x^3+\cdots\right)&\\+\tfrac{1}{2}\mu^2\left(\tfrac{1}{16}x^2+\tfrac{3}{64}x^3+\cdots\right)&\\-\tfrac{1}{6}\mu^3\left(\tfrac{1}{64}x^3+\cdots\right)&\\+\cdots&\end{aligned}$$

Wie leicht zu sehen ist, bleibt diese Doppelreihe auch in dem Falle konvergent, wo ihre Terme mit durchaus positiven Zeichen genommen werden; man darf daher nach Vertikalkolonnen ordnen und erhält dadurch ein Resultat von der Form

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{\mu} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$
$$x^2 < 1,$$

wobei die ersten Koeffizienten sind

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{\mu}{4}, \quad a = \frac{\mu^2 - 3\mu}{32}.$$

Differenziert man die vorhergehende Gleichung und benutzt man die Identität

$$(1+\sqrt{1-x})^{\mu-1} = \frac{(1+\sqrt{1-x})^{\mu}}{x}(1-\sqrt{1-x}),$$

so gelangt man leicht zu folgendem Resultate

$$\mu\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{\mu} = \sqrt{1-x}\,\{\mu a_0 + (\mu-2)a_1 x + (\mu-4)a_2 x^2 + (\mu-6)a_3 x^3 + \cdots\},$$

aus welchem sich durch nochmalige Differentiation

$$\mu^2\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{\mu}(1-\sqrt{1-x}) = [\mu a_0 - 2(\mu-2)a_1]x + [3(\mu-2)a_1 - 4(\mu-4)a_2]x^2 + [5(\mu-4)a_2 - 6(\mu-6)a_3]x^3 + \cdots$$

ergibt. Multipliziert man die vorhergehende Gleichung mit $\mu\sqrt{1-x}$ und addiert das Ergebnis zur letzten Gleichung, so entsteht

$$\mu^2\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{\mu} = \mu^2 a_0 + [(\mu-2)^2 a_1 - \mu(\mu-1)a_0]x + [(\mu-4)^2 a_2 - (\mu-2)(\mu-3)a_1]x^2 + \cdots$$

Man setze nun links die ursprüngliche Reihe ein und vergleiche die beiderseitigen Koeffizienten; man erhält dann die Relation

$$a_k = -\frac{(\mu-2k+2)(\mu-2k+1)}{k(\mu-k)}\cdot\frac{a_{k-1}}{4},$$

aus welcher man, mit $a_0 = 1$ beginnend, die Koeffizienten $a_1$, $a_2$, $a_3, \ldots$ bestimmt, was schließlich zu folgendem Resultate führt

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{\mu} = 1 - \frac{\mu}{1}\cdot\frac{x}{4} + \frac{\mu(\mu-3)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x}{4}\right)^3$$
$$+ \frac{\mu(\mu-5)(\mu-6)(\mu-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{x}{4}\right)^4 - \cdots,$$
$$x^2 < 1.$$

Die Reihe ist dieselbe, wie bei der 12. Aufgabe, sie unterscheidet sich aber dadurch von jener, daß sie in jedem Falle (auch bei ganzen positiven $\mu$) ins Unendliche fortgeführt werden muß.

Setzt man $\sqrt{1-x} = 1 - 2z$, so erhält man noch

$$(1-z)^{\mu} = 1 - \frac{\mu}{1} z(1-z) + \frac{\mu(\mu-3)}{1\cdot 2} z^2(1-z)^2$$
$$- \frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{1\cdot 2\cdot 3} z^3(1-z)^3 + \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1) < z < +\tfrac{1}{2}.$$

Bemerkenswerte spezielle Fälle hiervon sind

$$\frac{1}{1-z} = 1 + \tfrac{1}{2}(2)_1 z(1-z) + \tfrac{1}{3}(4)_2 z^2(1-z)^2$$
$$+ \tfrac{1}{4}(6)_3 z^3(1-z)^3 + \cdots,$$
$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + \tfrac{1}{2}(4)_1 z(1-z) + \tfrac{1}{3}(6)_2 z^2(1-z)^2$$
$$+ \tfrac{1}{4}(8)_3 z^3(1-z)^3 + \cdots$$

**Aufgabe 15.** Man sucht eine Potenzreihe für die Funktion

$$(x + \sqrt{1+x^2})^{\mu}.$$

Durch Anwendung der Identität $z^{\mu} = e^{\mu \lg z}$ und der in § 38, Aufgabe 6 gefundenen Resultate bringt man den gegebenen Ausdruck leicht auf die folgende Form

$$1 + \tfrac{1}{1}\mu(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 - \cdots)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\mu^2(x^2 - \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{8}{45}x^6 - \cdots)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wobei $x^2 < 1$ sein muß. Da hier die Doppelreihe auch dann ihre Konvergenz behält, wenn alle Terme positiv genommen werden, so hat man für $x^2 < 1$

$$(x+\sqrt{1+x^2})^\mu = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$
$$a_0 = 1, \qquad a_1 = \mu, \qquad a_2 = \tfrac{1}{2}\mu^2.$$

Man differenziere die Gleichung, multipliziere mit $\sqrt{1+x^2}$, differenziere noch einmal, multipliziere wieder mit $\sqrt{1+x^2}$ und vergleiche das Resultat mit der anfänglichen Gleichung; man gelangt dann zu der Relation

$$a_{k+2} = a_k \cdot \frac{\mu^2 - k^2}{(k+1)(k+2)}.$$

Mit $a_0 = 1$ anfangend, berechnet man hieraus $a_2, a_4, a_6, \ldots$ und von $a_1 = \mu$ ausgehend, $a_3, a_5, a_7, \ldots$, wodurch sich ergibt

$$\begin{aligned}(\sqrt{1+x^2}+x)^\mu = 1 &+ \frac{\mu^2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1\cdot 2\cdots 6}x^6 + \cdots \\ &+ \frac{\mu}{1}x \;\; + \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots,\end{aligned}$$
$$x^2 < 1.$$

Läßt man $-x$ an die Stelle von $x$ treten, so entsteht eine zweite ähnliche Gleichung, welche mit der vorigen durch Addition und Subtraktion verbunden werden kann.

**Aufgabe 16.** Es soll die Exponentialgröße

$$e^{\lambda \arcsin x}$$

in eine Potenzreihe verwandelt werden.

Das Verfahren ist hier fast ganz dasselbe wie bei der vorigen Aufgabe; als Resultat findet sich

$$\begin{aligned}e^{\lambda \arcsin x} = 1 &+ \frac{\lambda^2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\lambda^2(\lambda^2+2^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots \\ &+ \frac{\lambda}{1}x \;\; + \frac{\lambda(\lambda^2+1^2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots,\end{aligned}$$
$$x^2 < 1,$$

woraus noch die Entwickelungen von

$$\frac{e^{\lambda \arcsin x} + e^{-\lambda \arcsin x}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{e^{\lambda \arcsin x} - e^{-\lambda \arcsin x}}{2}$$

hergeleitet werden können.

**Aufgabe 17.** Es ist die Richtigkeit folgender Gleichungen zu beweisen

$$\cos\left[\mu\,lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]=1-\frac{\mu^2}{1\cdot 2}x^2+\frac{\mu^2(\mu^2+2^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4-\frac{\mu^2(\mu^2+2^2)(\mu^2+4^2)}{1\cdot 2\cdots 6}x^6+\cdots,$$

$$x^2<1;$$

$$\sin\left[\mu\,lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]=\frac{\mu}{1}x-\frac{\mu(\mu^2+1^2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{\mu^2(\mu^2+1^2)(\mu^2+3^2)}{1\cdot 2\cdots 5}x^5-\cdots,$$

$$x^2<1.$$

Die Entwickelung geschieht hier nach einem ähnlichen Verfahren wie bei den vorigen Aufgaben. Durch Substitution von

$$lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=z$$

erhalten die vorigen Gleichungen bemerkenswerte neue Formen.

Aufgabe 18. Unter der Voraussetzung beliebiger $\mu$ soll die Funktion

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu}=(1+x)^{\mu}(1-x)^{-\mu}$$

entwickelt werden.

Durch Ausführung der angedeuteten Multiplikation folgt augenblicklich, daß für echt gebrochene $x$ eine Gleichung von folgender Form besteht

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu}=1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots,$$

$$-1<x<+1,$$

und daß der Koeffizient $C_n$ durch die Formel bestimmt ist

$$C_n=(-\mu)_0\cdot(\mu)_n-(-\mu)_1\cdot(\mu)_{n-1}+(-\mu)_2\cdot(\mu)_{n-2}-\cdots+(-1)^n\cdot(-\mu)_n\cdot(\mu)_0.$$

Hiernach sind die sechs ersten Koeffizienten

$$C_1=2\mu,$$

$$C_2=2\mu^2,$$

$$C_3=\tfrac{2}{3}(2\mu^3+\mu),$$

$$C_4=\tfrac{2}{3}(\mu^4+2\mu^2),$$

$$C_5=\tfrac{2}{15}(2\mu^5+10\mu^3+3\mu),$$

$$C_6=\tfrac{2}{45}(2\mu^6+20\mu^4+23\mu^2).$$

Da die Funktion $(1+x)^{\mu}(1-x)^{-\mu}$ dieselbe bleibt, wenn man $x$ mit $-x$ und gleichzeitig $\mu$ mit $-\mu$ vertauscht, so erklärt es sich, daß $C_{2k}$ nur gerade, $C_{2k+1}$ nur ungerade Potenzen von $\mu$ enthält.

Da für hinreichend kleine $x$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu}=\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\mu}=1+(\mu)_1\cdot 2x(1-x)^{-1}+(\mu)_2\cdot(2x)^2(1-x)^{-2}+\cdots$$

gesetzt werden kann, so ergibt sich durch weitere Entwickelung der Potenzen von $1-x$ eine zweite, etwas bequemere Formel für $C_n$, nämlich

$$C_n=2(n-1)_0(\mu)_1+2^2(n-1)_1(\mu)_2+2^3(n-1)_2(\mu)_3+\cdots+2^n(n-1)_{n-1}(\mu)_n.$$

Will man nicht jeden Koeffizienten für sich (independent), sondern einen Koeffizienten nach dem anderen (rekurrierend) berechnen, so differenziere man die Reihenentwickelung

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu}=1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots$$

nach $x$, multipliziere den erhaltenen Differentialquotienten mit $1-x^2$ und vergleiche das Produkt mit dem $2\mu$-fachen der vorstehenden Reihe; man erhält dann die Rekursionsformel

$$C_{n+2}=\frac{2\mu C_{n+1}+nC_n}{n+2},$$

aus welcher man, mit $C_0=1$ und $C_1=2\mu$ anfangend, der Reihe nach $C_2$, $C_3$, $C_4$, ... berechnen kann.

Analog der vorstehenden Formel sind die folgenden

$$C_{n+1}=\frac{2\mu C_n+(n-1)C_{n-1}}{n+1},\quad C_n=\frac{2\mu C_{n-1}+(n-2)C_{n-2}}{n};$$

eliminiert man $C_{n+1}$ und $C_{n-1}$ aus diesen drei Gleichungen, so bleibt eine Relation zwischen $C_{n+2}$, $C_n$, $C_{n-2}$ übrig, welche sich folgendermaßen schreiben läßt:

$$C_{n+2}=\frac{(4\mu^2+2n^2)C_n-(n-1)(n-2)C_{n-2}}{(n+1)(n+2)};$$

sie dient für $n=2, 4, 6, \ldots$ zur Berechnung der Koeffizienten von geradem Index, für $n=3, 5, 7, \ldots$ zur Berechnung der Koeffizienten von ungeradem Index.

Setzt man in der gewonnenen Entwickelung

$$x = \frac{z}{2+z},$$

so erhält dieselbe folgende Gestalt

$$(1+z)^\mu = 1 + C_1 \frac{z}{2+z} + C_2 \left(\frac{z}{2+z}\right)^2 + \cdots, \quad z > 1.$$

**Aufgabe 19.** Es soll die Funktion $\cos(2\mu \operatorname{arc} \operatorname{tg} x)$ nach Potenzen von $x$ entwickelt werden.

Durch Anwendung der Cosinusreihe und der bekannten Entwickelung von $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ findet man zunächst, daß eine Gleichung von der Form besteht

$$\cos(2\mu \operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = A_0 - A_2 x^2 + A_4 x^4 - A_6 x^6 + \cdots,$$
$$-1 < x < +1,$$

worin $A_0 = 1$ und $A_2 = 2\mu^2$ ist. Um die übrigen Koeffizienten zu bestimmen, differenziere man die Gleichung nach $x$, multipliziere den Differentialquotienten mit $1 + x^2$, differenziere das Produkt wieder nach $x$, multipliziere nochmals mit $1 + x^2$ und vergleiche das so erhaltene Resultat mit dem Produkte aus $4\mu^2$ und der obigen Gleichung; dann hat man

$$4\mu^2 A_n = (n+1)[(n+2)A_{n+2} - nA_n] - (n-1)[nA_n - (n-2)A_{n-2}],$$

oder

$$A_{n+2} = \frac{(4\mu^2 + 2n^2)A_n - (n-1)(n-2)A_{n-2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Die Formel stimmt mit der letzten Rekursionsformel in der vorigen Aufgabe überein; da außerdem $A_0 = C_0$ und $A_2 = C_2$ ist, so folgt, daß die Koeffizienten $A_4, A_6, \ldots$ identisch mit den Koeffizienten $C_4, C_6, \ldots$ sind.

Setzt man noch $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = w$, so folgt

$$\cos \mu w = 1 - C_2 \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} w + C_4 \operatorname{tg}^4 \tfrac{1}{2} w - C_6 \operatorname{tg}^6 \tfrac{1}{2} w + \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < w < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

**Aufgabe 20.** Die Funktion $\sin(2\mu \operatorname{arc} \operatorname{tg} x)$ soll nach Potenzen von $x$ entwickelt werden.

Behandelt man die Aufgabe ganz analog der vorigen, so findet man zunächst, daß eine Entwickelung von der Form besteht

$$sin(2\mu\, arc\, tg\, x) = B_1 x - B_3 x^3 + B_5 x^5 - \cdots,$$
$$-1 < x < +1,$$

worin $B_1 = 2\mu$ und $B_3 = \frac{2}{3}(2\mu^3 + \mu)$ ist. Man erhält ferner die Rekursionsformel

$$B_{n+2} = \frac{(4\mu^2 + 2n^2) B_n - (n-1)(n-2) B_{n-2}}{(n+1)(n+2)},$$

woraus in Verbindung mit dem Vorigen die Identität der Koeffizienten $B_1, B_3, B_5, \ldots$ und $C_1, C_3, C_5, \ldots$ in Aufgabe 18 folgt.

Für $2\, arc\, tg\, x = w$ ergibt sich noch

$$sin\, \mu w = C_1\, tg\, \tfrac{1}{2} w - C_3\, tg^3 \tfrac{1}{2} w + C_5\, tg^5 \tfrac{1}{2} w - \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < w < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Aufgabe 21. Unter der Voraussetzung, daß für hinreichend kleine Werte von $x^2$ die Gleichung

$$lg(1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots) = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \cdots$$

bestehen kann, sollen die Koeffizienten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ aus den gegebenen Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ hergeleitet werden.

Differenziert man beiderseits, schafft nachher den Bruch weg und vergleicht die Koeffizienten, so gelangt man zu den Relationen

$$a_1 = b_1,$$
$$2a_2 = a_1 b_1 + 2b_2,$$
$$3a_3 = a_2 b_1 + 2a_1 b_2 + 3b_3,$$
$$4a_4 = a_3 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_1 b_3 + 4b_4,$$
usw.,

aus denen sich successive $b_1, b_2, b_3, \ldots$ berechnen lassen.

Um hiervon eine Anwendung zu machen, werde vorausgesetzt, daß die $n$ Wurzeln der Gleichung

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

bekannt und zwar reell seien; sie mögen $z_1, z_2, \ldots z_n$ heißen. Nach einem Satze aus der Theorie der algebraischen Gleichungen ist dann

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \cdots (z - z_n),$$

mithin für $z = \frac{1}{x}$

$$1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=(1-z_1x)(1-z_2x)(1-z_3x)\cdots(1-z_nx).$$

Nimmt man beiderseits die Logarithmen und wählt $x$ so klein, daß die absoluten Werte aller der Produkte $z_1x, z_2x, \ldots z_nx$ echte Brüche sind, so kann man rechts die sämtlichen $n$ Logarithmen mittelst der Formel

$$lg(1-\zeta) = -\tfrac{1}{1}\zeta - \tfrac{1}{2}\zeta^2 - \tfrac{1}{3}\zeta^3 - \cdots$$

entwickeln und erhält

$$\begin{aligned} lg(1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n) = &-\tfrac{1}{1}(z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n)x \\ &-\tfrac{1}{2}(z_1^2+z_2^2+z_3^2+\cdots+z_n^2)x^2 \\ &-\tfrac{1}{3}(z_1^3+z_2^3+z_3^3+\cdots+z_n^3)x^3 \\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$z_1^k + z_2^k + \cdots + z_n^k = s_k$$

gesetzt wird,

$$lg(1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n) = -\tfrac{1}{1}s_1x - \tfrac{1}{2}s_2x^2 - \tfrac{1}{3}s_3x^3 - \cdots$$

Man hat hier eine Entwickelung der anfangs vorausgesetzten Art, und zwar ist

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0, \quad b_k = -\frac{1}{k}s_k,$$

mithin gelten folgende Relationen

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 + s_1, \\ 0 &= 2a_2 + a_1s_1 + s_2, \\ 0 &= 3a_3 + a_2s_1 + a_1s_2 + s_3, \\ 0 &= 4a_4 + a_3s_1 + a_2s_2 + a_1s_3 + s_4, \end{aligned}$$

usw.

Die Größen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ lassen sich also direkt aus den Koeffizienten der gegebenen algebraischen Gleichung herleiten, ohne daß es nötig wäre, die Gleichung aufzulösen.

**Aufgabe 22.** Unter der Voraussetzung, daß für hinreichend kleine $x^2$ die Gleichung

$$(1+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\cdots)^\mu=1+b_1 x+b_2 x^2+b_3 x^3+b_4 x^4+\cdots$$

bestehen kann, sollen die Koeffizienten $b_1$, $b_2$, $b_3$, ... aus den gegebenen Koeffizienten $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... hergeleitet werden.

Nimmt man beiderseits die Logarithmen, differenziert und verfährt im übrigen wie bei der vorigen Aufgabe, so gelangt man zu folgenden Relationen

$$\begin{aligned}
b_1 &= \mu a_1,\\
2b_2 &= (\mu-1)a_1 b_1 + 2\mu a_2,\\
3b_3 &= (\mu-2)a_1 b_2 + (2\mu-1)a_2 b_1 + 3\mu a_3,\\
4b_4 &= (\mu-3)a_1 b_3 + (2\mu-2)a_2 b_2 + (3\mu-1)a_3 b_1 + 4\mu a_4,
\end{aligned}$$

usw.,

welche zur successiven Berechnung von $b_1$, $b_2$, $b_3$, ... dienen können.

Für den speziellen Fall $\mu=\frac{1}{2}$ ist z. B.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots}\\
&=1+\tfrac{1}{2}a_1x+\left(\tfrac{1}{2}a_2-\tfrac{1}{8}a_1^2\right)x^2+\left(\tfrac{1}{2}a_3-\tfrac{1}{4}a_2a_1+\tfrac{1}{16}a_1^3\right)x^3\\
&\quad+\left(\tfrac{1}{2}a_4-\tfrac{1}{4}a_3a_1-\tfrac{1}{8}a_2^2+\tfrac{3}{16}a_2a_1^2-\tfrac{5}{128}a_1^4\right)x^4+\cdots,
\end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten bald sehr zusammengesetzte Ausdrücke werden, deren independentes Bildungsgesetz zwar durch gewisse Formeln der Kombinationslehre dargestellt werden kann, aber keinen wesentlichen praktischen Vorteil gewährt.

Um hiervon eine Anwendung zu machen, schicken wir folgende Bemerkung voraus. Bezeichnen $\alpha$ und $\beta<\alpha$ zwei beliebige positive Größen, so lassen sich zwei Reihen neuer Zahlen $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ... und $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, ... mittelst nachstehender Formeln berechnen

$$\begin{aligned}
\alpha_1&=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta), & \beta_1&=\sqrt{\alpha\beta},\\
\alpha_2&=\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1), & \beta_2&=\sqrt{\alpha_1\beta_1},\\
\alpha_3&=\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\beta_2), & \beta_3&=\sqrt{\alpha_2\beta_2},
\end{aligned}$$

usw.,

so daß immer

$$\alpha_{k+1}=\tfrac{1}{2}(\alpha_k+\beta_k),\quad \beta_{k+1}=\sqrt{\alpha_k\beta_k}$$

ist. Nach dieser Formel hat man

$$\alpha_{k+1}-\beta_{k+1}=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha_k}-\sqrt{\beta_k}\right)^2$$

und ferner — mittelst einer leichten Umwandlung —

$$\frac{\alpha_{k+1}-\beta_{k+1}}{\alpha_k-\beta_k}=\frac{1}{2}\,\frac{\alpha_k-\beta_k}{(\sqrt{\alpha_k}+\sqrt{\beta_k})^2}=\frac{1}{2}\,\varepsilon_k,$$

wo $\varepsilon_k$ einen echten Bruch bedeutet, auf dessen Wert es nicht ankommt. Setzt man in der vorigen Gleichung $k=0, 1, 2, \ldots (n-1)$, wobei $\alpha_0=\alpha$, $\beta_0=\beta$ zu nehmen ist, und multipliziert alle entstehenden Gleichungen, so erhält man

$$\alpha_n-\beta_n=(\tfrac{1}{2})^n(\alpha-\beta)\,\varepsilon_0\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1},$$

und hieraus folgt für $n=\infty$, weil $(\alpha-\beta)\,\varepsilon_0\ldots\varepsilon_{n-1}$ immer einen endlichen Wert behält,

$$Lim\,(\alpha_n-\beta_n)=0.$$

Die Größen $\alpha_n$ und $\beta_n$ konvergieren also gegen einen und denselben Grenzwert, welcher das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen $\alpha$ und $\beta$ heißt und im folgenden mit $M(\alpha,\beta)$ bezeichnet werden soll.

Um diesen Grenzwert mittelst einer unendlichen Reihe zu berechnen, setze man den echten Bruch

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\lambda,\quad \text{mithin}\quad \beta=\alpha\,\frac{1-\lambda}{1+\lambda};$$

es ist dann

$$\alpha_1=\alpha\,\frac{1}{1+\lambda}=\alpha\,(1-\lambda+\lambda^2-\lambda^3+\lambda^4-\cdots),$$

$$\beta_1=\alpha\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}=\alpha\,(1-\lambda+\tfrac{1}{2}\lambda^2-\tfrac{1}{2}\lambda^3+\tfrac{3}{8}\lambda^4-\cdots),$$

ferner, wenn für $\alpha_1$ und $\beta_1$ die vorstehenden Reihen benutzt werden,

$$\alpha_2=\alpha\,(1-\lambda+\tfrac{3}{4}\lambda^2-\tfrac{3}{4}\lambda^3+\tfrac{11}{16}\lambda^4-\cdots)$$

$$\beta_2=\alpha\sqrt{1-2\lambda+\tfrac{5}{2}\lambda^2-3\lambda^3+\tfrac{27}{8}\lambda^4-\cdots}$$
$$=\alpha\,(1-\lambda+\tfrac{3}{4}\lambda^2-\tfrac{3}{4}\lambda^3+\tfrac{21}{32}\lambda^4-\cdots).$$

Auf diesem Wege fortgehend, erhält man die Reihe

$$M(\alpha,\beta)=\alpha\,(1-\lambda+\tfrac{3}{4}\lambda^2-\tfrac{3}{4}\lambda^3+\tfrac{43}{64}\lambda^4-\cdots),$$

deren Koeffizienten ein ziemlich verwickeltes, mit den bisherigen Mitteln nicht entdeckbares Bildungsgesetz befolgen. Beispielsweise findet sich für $\alpha=7$, $\beta=3$ durch direkte Berechnung

$$\alpha_4=4{,}7890135832\qquad \beta_4=4{,}7890135831;$$

denselben Wert liefert die Reihe für $\alpha=7$ und $\lambda=0{,}4$.

## § 41.

### Näherungsweise Summierung von Reihen.

In der bekannten Relation

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(a+\vartheta[b-a]),\quad 0<\vartheta<1,$$

nehme man der Reihe nach

$$a=0,\quad z,\ 2z,\ 3z,\ldots(n-1)z,$$

$$b=z,\ 2z,\ 3z,\ 4z,\ldots nz;$$

durch Addition aller entstehenden Gleichungen folgt dann

$$\frac{F(nz)-F(0)}{z}$$

$$=F'(\vartheta_0 z)+F'(z+\vartheta_1 z)+F'(2z+\vartheta_2 z)+\cdots+F'([n-1]z+\vartheta_{n-1}z),$$

wobei $F(x)$ und $F'(x)$ stetig und endlich bleiben müssen von $x=0$ bis $x=nz$, während $\vartheta_0$, $\vartheta_1$, $\vartheta_2,\ldots\vartheta_{n-1}$ nicht genauer bestimmte positive echte Brüche bedeuten. Unter der Voraussetzung, daß $F'(x)$ innerhalb des Intervalles von $x=0$ bis $x=nz$ fortwährend abnimmt, ist weiter

$$F'(0)>\quad F'(\vartheta_0 z)\quad>F'(z),$$

$$F'(z)>F'(z+\vartheta_1 z)>F'(2z),$$

$$F'(2z)>F'(2z+\vartheta_2 z)>F'(3z),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F'([n-1]z)>F'([n-1]z+\vartheta_{n-1}z)>F'(nz),$$

und mit Hilfe dieser Ungleichungen folgt aus der vorigen Gleichung, daß die Summe

$$F'(0)+F'(z)+F'(2z)+\cdots+F'([n-1]z)$$

mehr beträgt als

$$\frac{F(nz)-F(0)}{z},$$

dagegen weniger als

$$\frac{F(nz)-F(0)}{z}+F'(0)-F'(nz).$$

Bezeichnet $\varepsilon$ einen nicht näher angebbaren positiven echten Bruch, so ist hiernach

$$F'(z)+F'(2z)+F'(3z)+\cdots+F'(nz)$$
$$=\frac{F(nz)-F(0)}{z}-\tfrac{1}{2}\left[F'(0)-F'(nz)\right].$$

Für $z=$ [illegible] dem arithmetischen Mittel der beiden extremen Terme [illegible], erhält man einen Näherungswert der Reihensumme.

Falls $F(nz)$ und $F'(nz)$ bei unendlich wachsendem $n$ gegen bestimmte Grenzwerte konvergieren, ergibt sich ein Näherungswert für die Summe einer unendlichen Reihe.

Beispiel 1. Die Funktionen

$$F(z)=\operatorname{arctg}(e^{z}),\quad F'(z)=\frac{1}{e^{z}+e^{-z}}$$

erfüllen die genannten Voraussetzungen; für $n=\infty$ und $z=$ [illegible] hat man daher die Näherungsformel

$$\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}+\frac{1}{e^{2x}+e^{-2x}}+\frac{1}{e^{3x}+e^{-3x}}+\cdots=\tfrac{1}{4}\left(\frac{\pi}{x}-1\right),$$

oder, wenn $e^{x}=\xi$ gesetzt wird, wobei $\xi>1$ sein muß,

$$\frac{\xi}{1+\xi^{2}}+\frac{\xi^{2}}{1+\xi^{4}}+\frac{\xi^{3}}{1+\xi^{6}}+\cdots=\tfrac{1}{4}\left(\frac{\pi}{lg\,\xi}-1\right).$$

Im Falle $e^{-x}=\eta$ erhält man ebenso wie für $\xi=\frac{1}{\eta}$

$$\frac{\eta}{1+\eta^{2}}+\frac{\eta^{2}}{1+\eta^{4}}+\frac{\eta^{3}}{1+\eta^{6}}+\cdots=\tfrac{1}{4}\left(\frac{\pi}{-lg\,\eta}-1\right),$$

wobei $0<\eta<1$ sein muß. Die links stehenden Reihen konvergieren mit alleiniger Ausnahme der Fälle $\xi=1$ und $\eta=1$; liegt nun $\xi$ oder $\eta$ der Einheit nahe, so geht die Konvergenz so langsam, daß man eine sehr große Gliederzahl berechnen müßte, um nur einige Genauigkeit zu erreichen. So ist z. B. für $\xi=1\frac{1}{9}$ oder $\eta=0{,}9$

$$\frac{\eta^{50}}{1+\eta^{100}}=0{,}00515,$$

wonach die Summe von 50 Reihengliedern nicht einmal zwei sichere Dezimalstellen geben würde. In Fällen dieser Art leistet die angegebene Näherungsformel gute Dienste; sie liefert für $\eta=0{,}9$ die Summe

$$\tfrac{1}{4}\left(\frac{\pi}{lg 10 - lg 9} - 1\right) = 7{,}2044$$

statt des genauen Wertes 7,2060, welcher sich auf anderem Wege (mittelst elliptischer Funktionen) findet.

An das Vorige knüpfen sich noch die Näherungsformeln

$$\frac{\eta}{1+\eta^2} + \frac{\eta^3}{1+\eta^6} + \frac{\eta^5}{1+\eta^{10}} + \cdots = \frac{\pi}{-8\, lg\, \eta},$$

$$\frac{\eta}{1+\eta^2} - \frac{\eta^2}{1+\eta^4} + \frac{\eta^3}{1+\eta^6} - \frac{\eta^4}{1+\eta^8} + \cdots = \tfrac{1}{4}.$$

Beispiel 2. Es sei

$$F(x) = lg\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right), \quad \text{mithin} \quad F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1};$$

beide Funktionen bleiben endlich und stetig von $x = 0$ bis zu jedem beliebigen positiven Werte der Veränderlichen $x$. Da ferner $F''(x)$ unter der Form

$$F''(x) = -\frac{2e^x}{x^2(e^x-1)^2}\left\{\frac{e^x+e^{-x}}{2} - 1 - \frac{x^2}{2}\right\}$$

dargestellt werden kann, so erhellt, daß $F''(x)$ immer negativ ist, daß also $F'(x)$ unausgesetzt abnimmt von $F'(0) = \tfrac{1}{2}$ bis $F'(\infty) = 0$. Hiernach ergibt sich

$$\tfrac{1}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{3z} + \cdots + \frac{1}{(n-1)z} - \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{e^{2z}-1} - \frac{1}{e^{3z}-1} - \cdots - \frac{1}{e^{(n-1)z}-1}$$

$$= \frac{1}{z}\, lg\left(\frac{nz}{1-e^{-nz}}\right) + \varepsilon\left\{\tfrac{1}{2} - \frac{1}{nz} + \frac{1}{e^{nz}-1}\right\},$$

oder

$$\frac{1}{e^z-1} + \frac{1}{e^{2z}-1} + \frac{1}{e^{3z}-1} + \cdots + \frac{1}{e^{(n-1)z}-1}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - lg\, n\right)\frac{1}{z} - \frac{lg\, z}{z} + \frac{1}{z}\, lg\left(\frac{1}{1-e^{-nz}}\right) - \varepsilon\left\{\tfrac{1}{2} - \frac{1}{nz} + \frac{1}{e^{nz}-1}\right\}.$$

Geht man zur Grenze für unendlich wachsende $n$ über und berücksichtigt das in Nr. 23 der Einleitung gefundene Resultat, so erhält man

$$\frac{1}{e^z-1} + \frac{1}{e^{2z}-1} + \frac{1}{e^{3z}-1} + \cdots = \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon) + \frac{C - lg\, z}{z}, \quad (C = 0{,}5772157).$$

Für $e^{-\varepsilon} = \zeta$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ergibt sich hieraus die Näherungsformel

$$\frac{\zeta}{1-\zeta} + \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} + \frac{\zeta^3}{1-\zeta^3} + \cdots = \frac{1}{4} + \frac{C - lg(-lg\,\zeta)}{-lg\,\zeta}, \quad 0 < \zeta < 1.$$

Die hier vorkommende Reihe läßt sich nach Potenzen von $\zeta$ ordnen und erhält dann die Form

$$t_1\zeta + t_2\zeta^2 + t_3\zeta^3 + t_4\zeta^4 + \cdots;$$

hierbei ist, wie zuerst Lambert bemerkt hat, $t_n$ gleich der Anzahl der Teiler von $n$, einschließlich 1 und $n$; für jede Primzahl $p$ und nur für diese ist daher $t_p = 2$.

Bei kleinen Werten von $\zeta$ konvergiert die Reihe so gut, daß man ihre Summe durch direkte numerische Rechnung finden kann, namentlich wenn folgende Transformation beachtet wird. Schreibt man die Einzelreihen für

$$\frac{\zeta}{1-\zeta}, \quad \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}, \quad \frac{\zeta^3}{1-\zeta^3}, \ldots$$

einfach untereinander, so erhält man die Doppelreihe

$$\begin{array}{l} \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \cdots \\ + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^6 + \zeta^8 + \cdots \\ + \zeta^3 + \zeta^6 + \zeta^9 + \zeta^{12} + \cdots \\ + \zeta^4 + \zeta^8 + \zeta^{12} + \zeta^{16} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot; \end{array}$$

die erste Horizontalreihe und die erste Vertikalkolonne geben zusammen

$$\zeta + 2\zeta^2 + 2\zeta^3 + 2\zeta^4 + \cdots = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\zeta,$$

und es bleibt die Doppelreihe übrig

$$\begin{array}{l} \zeta^4 + \zeta^6 + \zeta^8 + \cdots \\ + \zeta^6 + \zeta^9 + \zeta^{12} + \cdots \\ + \zeta^8 + \zeta^{12} + \zeta^{16} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

Die Vereinigung der ersten Reihe mit der ersten Kolonne liefert

$$\zeta^4 + 2\zeta^6 + 2\zeta^8 + \cdots = \frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2}\zeta^4;$$

setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man statt der Lambert'schen Reihe die folgende

$$\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\zeta + \frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2}\zeta^4 + \frac{1+\zeta^3}{1-\zeta^3}\zeta^9 + \frac{1+\zeta^4}{1-\zeta^4}\zeta^{16} + \cdots,$$

welche bei kleinen Werten von $\zeta$ sehr rasch konvergiert. So genügen z. B. für $\zeta = 0{,}4$ fünf Glieder, um die Summe auf neun Dezimalen genau zu finden, nämlich 0,968984159.

Bei großen, d. h. der Einheit nahekommenden Werten von $\zeta$ gewährt diese Transformation keine bedeutende Hilfe, denn z. B. für $\zeta = 0{,}99$ ist

$$\frac{1+(0{,}99)^{40}}{1-(0{,}99)^{40}}(0{,}99)^{1600} = 0{,}000\,000\,5,$$

wonach sechs genaue Dezimalstellen die Berechnung von mehr als 40 Gliedern erfordern. In solchen Fällen erweist sich die Näherungsformel sehr brauchbar; sie gibt z. B. für $\zeta = 0{,}99$

$$0{,}25 + \frac{0{,}577\,2157 - lg\,(0{,}010\,0503)}{0{,}010\,0503}$$

$$= 0{,}25 + \frac{0{,}577\,2157 + 4{,}600\,1488}{0{,}010\,0503} = 515{,}3932,$$

und diese Summe differiert sehr wenig von dem genauen Werte 515,39815, der sich aus einer Korrektion der Näherungsformel findet. (*Compendium der höheren Analysis*, Band II, Seite 242.)

## § 42.

### Näherungsweise Darstellung gegebener Funktionen.

Wenn die Potenzreihen für zwei verschiedene Funktionen in mehreren anfänglichen Termen übereinstimmen, so ist zu erwarten, daß die beiden Funktionen — wenigstens bei kleinen Werten der Veränderlichen — nicht sehr voneinander differieren werden, daß man folglich die eine der beiden Funktionen als eine genäherte Darstellung der anderen betrachten darf. Aus dieser Bemerkung entspringen zwei Aufgaben: erstens, zu einer gegebenen Funktion eine ihr nahekommende zu finden, und zweitens, den Grad der Annäherung, d. h. das Maximum der Differenz beider Funktionen zu bestimmen. Das folgende Beispiel wird zeigen, wie derartige Aufgaben zu behandeln sind.

**Beispiel 1.** Die drei Konstanten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sollen so bestimmt werden, daß die Gleichung

$$lg(1+x) = \frac{x(\alpha+\beta x)}{1+\gamma x}$$

möglichst genau stattfindet.

Einerseits ist unter der Bedingung $x^2 < 1$

$$lg(1+x) = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots,$$

anderseits, wenn $\gamma^2 x^2 < 1$ genommen wird,

$$\frac{x(\alpha+\beta x)}{1+\gamma x} = x\left\{\alpha - \frac{(\alpha\gamma-\beta)x}{1+\gamma x}\right\}$$

$$= \alpha x - (\alpha\gamma-\beta)x^2 + (\alpha\gamma-\beta)\gamma x^3 - (\alpha\gamma-\beta)\gamma^2 x^4 + \cdots;$$

setzt man in beiden Reihen die Koeffizienten von $x$, $x^2$ und $x^3$ gleich, so hat man drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und erhält $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{2}{3}$. Demnach ist

$$lg(1+x) - \frac{x(6+x)}{6+4x} = -\{(\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{9})x^4 - (\tfrac{1}{5}-\tfrac{4}{27})x^5 + (\tfrac{1}{6}-\tfrac{8}{81})x^6 - \cdots\},$$

und zwar müssen hier die Bedingungen $x^2 < 1$, $\frac{4}{9}x^2 < 1$ gleichzeitig erfüllt sein, wozu $x^2 < 1$ genügt. Setzen wir außerdem $x$ positiv voraus, so wird die Summe der letzten Reihe kleiner als

$$(\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{9})x^4 + (\tfrac{1}{5}-\tfrac{4}{27})x^5 + (\tfrac{1}{6}-\tfrac{8}{81})x^6 + \cdots,$$

mithin erst recht kleiner als

$$\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{4}x^5 + \tfrac{1}{4}x^6 + \cdots,$$

und es ist daher

$$lg(1+x) = \frac{x(6+x)}{6+4x} - \frac{\varrho x^4}{1-x}, \quad 0 < x < 1,$$

wo $\varrho$ zwischen 0 und $\frac{1}{4}$ liegt.

Dasselbe Verfahren gestattet folgende kleine Modifikation, welche meistens bequemer sein dürfte. Man setze

$$lg(1+x) - \frac{x(\alpha+\beta x)}{1+\gamma x} = R,$$

multipliziere mit $1+\gamma x$ und substituiere für $lg(1+x)$ die gleichgeltende Potenzreihe; es ist dann

$$(1+\gamma x)R = (1-\alpha)x + (\gamma-\beta-\tfrac{1}{2})x^2 + (\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\gamma)x^3 - (\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{3}\gamma)x^4$$
$$+ (\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{4}\gamma)x^5 - (\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{5}\gamma)x^6 + \cdots$$

Wählt man $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ so, daß die Koeffizienten von $x$, $x^2$ und $x^3$ verschwinden, so wird

$$lg(1+x) = \frac{x(6+x)}{6+4x} + R,$$

$$(3+2x)R = -\left(\frac{1}{3\cdot 4}x^4 - \frac{2}{4\cdot 5}x^5 + \frac{3}{5\cdot 6}x^6 - \cdots\right).$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe beträgt, wenn $0 < x < 1$ vorausgesetzt wird, weniger als

$$\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{4}x^5 + \tfrac{1}{4}x^6 + \cdots = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{1-x},$$

und daher kann für jedes positive echt gebrochene $x$

$$R = -\frac{\varrho x^4}{(1-x)(3+2x)}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{4},$$

gesetzt werden.

Beschränkt man $x$ auf das Intervall von $x = 0$ bis $x = \frac{5}{6}$, so ist in der Reihe

$$\frac{1}{3\cdot 4}x^4 - \frac{2}{4\cdot 5}x^5 + \frac{3}{5\cdot 6}x^6 - \cdots$$

gleich von Anfang an jeder Term größer als sein Nachfolger, also die Summe der Reihe $< \frac{1}{12}x^4$, und der absolute Wert des Restes $R$ kleiner als

$$\tfrac{1}{12}\cdot\frac{x^4}{3+2x} < \tfrac{1}{36}x^4,$$

oder

$$R = -\varrho x^4, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{36}.$$

So ergibt sich z. B. für $x = 0{,}3$, wenn für $\varrho$ das eine Mal sein größter Wert $\frac{1}{36}$, das andere Mal sein kleinster Wert Null gesetzt wird,

$$0{,}262\,275 < lg(1{,}3) < 0{,}262\,500,$$

während der wahre Wert ist $lg(1{,}3) = 0{,}262\,3643$.

Beispiel 2. Die allgemeinere Voraussetzung

$$lg(1+x) - \frac{x(\alpha+\beta x)}{1+\gamma x+\delta x^2} = R$$

liefert für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die Werte

$$\alpha = 1, \quad \beta = \tfrac{1}{2}, \quad \gamma = 1, \quad \delta = \tfrac{1}{6},$$

mithin

$$lg(1+x) = \frac{x(6+3x)}{6+6x+x^2} + R; \quad x^2 < 1.$$

Man findet ferner

$$(6+6x+x^2)R = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}x^6 + \frac{3\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7}x^7 - \cdots$$

und hieraus für jedes positive echt gebrochene $x$

$$R = \frac{\varrho x^5}{(6+6x+x^2)(1-x)}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{5}.$$

Wird $x$ auf das Intervall von $x=0$ bis $x=\frac{2}{3}$ beschränkt, so ergibt sich

$$R = \varrho x^5, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{180}.$$

Im Falle $x = 0{,}3$ ist hiernach

$$0{,}2623574 < lg(1{,}3) < 0{,}2623709.$$

Beispiel 3. Setzt man

$$\tfrac{1}{2} lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{x(15-4x^2)}{15-9x^2} + R,$$

so ergibt sich für $x^2 < 1$

$$(5-3x^2)R = \frac{4}{5\cdot 7}x^7 + \frac{8}{7\cdot 9}x^9 + \frac{12}{9\cdot 11}x^{11} + \frac{16}{11\cdot 13}x^{13} + \cdots;$$

es kann daher für positive echt gebrochene Werte von $x$

$$R = \frac{\varrho x^7}{(1-x^2)(5-3x^2)}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{2}{7},$$

gesetzt werden.

Beispiel 4. Geht man von einer ähnlichen Annahme, wie im zweiten Beispiel aus, so erhält man

$$e^x = \frac{6+2x}{6-4x+x^2} + R,$$

$$(6-4x+x^2)R = \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 5\cdot 6} + \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6\cdot 7} + \cdots$$

Setzt man nun $x$ positiv voraus, so wird die Summe der letzten Reihe kleiner als

$$\frac{x^4}{3\cdot 4}\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right),$$

mithin

$$R < \frac{x^4 e^x}{12[(x-2)^2+2]} < \frac{x^4 e^x}{24},$$

also

$$R = \varrho x^4 e^x,$$

wobei $\varrho$ zwischen 0 und $\frac{1}{24}$ liegt. Durch Substitution dieses Wertes ergibt sich

$$e^x = \frac{6+2x}{6-4x+x^2} \cdot \frac{1}{1-\varrho x^4}, \quad 0 < \varrho < \frac{1}{24}.$$

Beispiel 5. Durch ein ähnliches Verfahren wie bei dem vorigen Beispiel erhält man unter der Bedingung $x^2 < 1$

$$(1+x)^\mu = \frac{6+(2\mu+4)x}{6-4(\mu-1)x+\mu(\mu-1)x^2} + R$$

und

$$[6-4(\mu-1)x+\mu(\mu-1)x^2]R = C_4 x^4 + C_5 x^5 + C_6 x^6 + \cdots,$$

worin die Koeffizienten $C_4, C_5, \ldots$ durch folgende Formel bestimmt sind

$$C_n = 6 \cdot (\mu)_n - 4(\mu-1) \cdot (\mu)_{n-1} + \mu(\mu-1) \cdot (\mu)_{n-2}.$$

Vermöge der Werte der Binomialkoeffizienten findet man weiter

$$C_n = (\mu)_{n-2} \frac{(n-2)(n-3)(\mu+1)(\mu+2)}{(n-1)n}$$

$$= (\mu+2)(\mu+1)\mu(\mu-1)\frac{(\mu)_{n-4}}{(n-1)n},$$

mithin

$$[6-4(\mu-1)x+\mu(\mu-1)x^2]R$$

$$= (\mu+2)(\mu+1)\mu(\mu-1)\left\{\frac{(\mu-2)_0}{3\cdot 4}x^4 + \frac{(\mu-2)_1}{4\cdot 5}x^5 + \frac{(\mu-2)_2}{5\cdot 6}x^6 + \cdots\right\}.$$

Die Grenzen, zwischen welche dieser Ausdruck gebracht werden kann, hängen von der Beschaffenheit des Exponenten $\mu$ ab. Ist derselbe ein positiver echter Bruch, so wird

$$-[6+4(1-\mu)x-\mu(1-\mu)x^2]R$$

$$= (2+\mu)(1-\mu^2)\mu x^4\left\{\frac{1}{3\cdot 4} - \frac{2-\mu}{1}\cdot\frac{x}{4\cdot 5} + \frac{(2-\mu)(3-\mu)}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2}{5\cdot 6} - \cdots\right\};$$

unter der Voraussetzung, daß $x$ zwischen 0 und $\frac{5}{6}$ liegt, beträgt jeder Term der Reihe dem absoluten Werte nach mehr als sein Nachfolger, daher ist die rechte Seite positiv und kleiner als

$$(2+\mu)(1-\mu^2)\mu x^4 \cdot \frac{1}{3\cdot 4} < \frac{1}{4}x^4.$$

Zufolge dieser Bemerkungen ergibt sich

$$(1+x)^\mu = \frac{6+(4+2\mu)x-\varrho x^4}{6+4(1-\mu)x-\mu(1-\mu)x^2}, \quad 0<\varrho<\tfrac{1}{4},$$

wobei die für $\mu$ und $x$ erwähnten Bedingungen festzuhalten sind.

Hiernach ist z. B.

$$\sqrt{1+x} = \frac{6+5x-\varrho x^4}{6+2x-\frac{1}{4}x^2}, \quad 0<\varrho<\tfrac{1}{4}.$$

**Beispiel 6.** Mittelst der bisherigen Methode findet man

$$\cos x = \frac{12-5x^2}{12+x^2}+R,$$

$$(12+x^2)R = \frac{x^6}{1\cdot 2\cdots 6}\left\{2\cdot 9 - \frac{4\cdot 11}{7\cdot 8}x^2 + \frac{6\cdot 13}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}x^4 - \frac{8\cdot 15}{7\cdot 8\cdots 12}x^6 + \cdots\right\},$$

und für den Fall, daß $x^2<\frac{252}{11}$ ist,

$$R<\frac{x^6}{1\cdot 2\cdots 6}\cdot\frac{2\cdot 9}{12+x^2}<\frac{x^6}{480}.$$

Innerhalb der Grenzen 0 und $\frac{3}{2}\pi$ darf also gesetzt werden

$$\cos x = \frac{12-5x^2}{12+x^2}+\varrho x^6, \quad 0<\varrho<\tfrac{1}{480}.$$

**Beispiel 7.** Behandelt man die Funktion $\sin x$ in analoger Weise, so findet man, daß zwischen den Grenzen 0 und $\frac{3}{2}\pi$ gesetzt werden kann

$$\sin x = \frac{x(60-7x^2)}{60+3x^2}+\varrho x^7, \quad 0<\varrho<\tfrac{1}{4200}.$$

**Beispiel 8.** Unter der Voraussetzung, daß $x$ positiv und $x^2<0{,}9$ ist, erhält man

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x(15+4x^2)}{15+9x^2}-\varrho x^7, \quad 0<\varrho<\tfrac{1}{45},$$

oder auch, wenn der Bogen $u < \operatorname{arc} 41^\circ 59'$ genommen wird,

$$u = \frac{15-11\sin^2 u}{15-6\sin^2 u}\operatorname{tg} u - \varrho \operatorname{tg}^7 u, \quad 0<\varrho<\tfrac{1}{45}.$$

**Beispiel 9.** Nach der bisherigen Methode findet man, echt gebrochene positive Werte von $x$ vorausgesetzt,

$$arc\,sin\,x = \frac{x(60-17x^2)}{60-27x^2} + R,$$

$$(60-27x^2)\,R = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{c_7 x^7}{5\cdot 6\cdot 7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{c_9 x^9}{7\cdot 8\cdot 9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{c_{11} x^{11}}{9\cdot 10\cdot 11} + \cdots,$$

wobei die Koeffizienten $c_7$, $c_9, \ldots$ unter der Form

$$c_n = 3\,(n-5)\,(11n-16)$$

enthalten sind. Beachtet man, daß $11n-16 < 11n-11$ ist, so ergibt sich

$$\frac{c_n}{(n-2)(n-1)n} < \frac{33\,(n-5)}{(n-2)\,n},$$

mithin

$$(60-27x^2)\,R < \tfrac{3}{8}\cdot 33x^7\left(\frac{2}{5\cdot 7} + \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7\cdot 9}x^2 + \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8}\cdot\frac{6}{9\cdot 11}x^4 + \cdots\right)$$

$$< \tfrac{99}{4}\,x^7\left(\frac{1}{5\cdot 7} + \frac{2}{7\cdot 9}x^2 + \frac{3}{9\cdot 11}x^4 + \cdots\right).$$

Wie leicht zu sehen ist, besteht immer die Ungleichung

$$\frac{m}{(2m+3)(2m+5)} < \tfrac{1}{30}$$

und daher ist

$$(60-27x^2)\,R < \tfrac{33}{40}x^7\,(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots),$$

oder

$$R < \tfrac{33}{40}\,\frac{x^7}{(60-27x^2)(1-x^2)} < \tfrac{1}{40}\cdot\frac{x^7}{1-x^2}.$$

Damit gelangt man zu dem Endresultat

$$arc\,sin\,x = \frac{x(60-17x^2)}{60-27x^2} + \frac{\varrho\, x^7}{1-x^2}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{40},$$

oder

$$u = \frac{60\,sin\,u - 17\,sin^3 u}{60-27\,sin^2 u} + \frac{\varrho\,sin^7 u}{cos^2 u}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{40},$$

wobei $u$ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegen muß.

Beispiel 10. Es soll die Genauigkeit der Näherungsformel

$$arc\,sin\,x = \frac{3x}{2+\sqrt{1-x^2}}$$

untersucht werden.

Setzt man

$$arc\,sin\,x - \frac{3x(2-\sqrt{1-x^2})}{3+x^2} = R,$$

so erhält man vermöge der Reihen für $arc\,sin\,x$ und $\sqrt{1-x^2}$

$$(3+x^2)\,R = \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{3\cdot 4}{5\cdot 7}x^7 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{5\cdot 6}{7\cdot 9}x^9 + \cdots$$

Wird nun $x$ positiv angenommen, so wird die Summe der letzteren Reihe kleiner als

$$\tfrac{1}{8}x^5\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{1}{2}x^6+\cdots\right),$$

mithin

$$R<\frac{1}{16}\cdot\frac{x^5}{(3+x^2)(1-x^2)}<\frac{1}{48}\cdot\frac{x^5}{1-x^2}.$$

Demnach ist

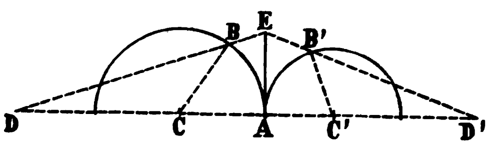
$$arc\,sin\,x=\frac{3x}{2+\sqrt{1-x^2}}+\frac{\varrho x^5}{1-x^2},\quad 0<\varrho<\tfrac{1}{48},$$

oder auch, wenn $arc\,sin\,x=u$ gesetzt und $u$ auf den ersten Quadranten beschränkt wird,

$$u=\frac{3\,sin\,u}{2+cos\,u}+\frac{\varrho\,sin^5 u}{cos^2 u},\quad 0<\varrho<\tfrac{1}{48}.$$

Von dieser Formel läßt sich eine Anwendung zur graphischen Rektifikation von Kreisbögen machen. Ist nämlich (Fig. 85) $AB$ ein gegebener Bogen des mit dem Radius $AC$ beschriebenen Kreises, so bestimme man auf der Geraden $AC$ den Punkt $D$, so daß $AD=3\cdot AC$ und $CD=2\cdot AC$ wird, lege in $A$ eine Tangente an den Kreis und ziehe die Gerade $DB$, welche die Tangente in $E$ schneiden möge; für $AC=1$, $arc\,AB=u$ ist dann

Fig. 85.




$$AE=\frac{3\,sin\,u}{2+cos\,u},$$

mithin nahezu $AE=arc\,AB$. Solange der Zentriwinkel $ACB$ nicht mehr als $30^0$ beträgt, ist der hierbei begangene Fehler weit geringer als die bei Zeichnungen überhaupt unvermeidlichen kleinen Fehler; bei größeren Zentriwinkeln rektifiziert man die Hälfte oder sonst einen passenden Teil des Bogens und nimmt von $AE$ das entsprechende Vielfache. Wie die Figur zeigt, kann man dieses Verfahren auch umgekehrt anwenden und mittelst desselben einen gegebenen Kreisbogen auf einen zweiten Kreis übertragen, so daß $arc\,AB'=arc\,AB$ ist.

**Beispiel 11.** Es soll die Genauigkeit der Gleichung

$$1+(\tfrac{1}{2})^2 x+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 x^2+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 x^3+\cdots=\tfrac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)+\tfrac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\tfrac{1}{2}x}}$$

untersucht werden, wobei $x$ einen positiven echten Bruch bedeutet.

Für die Differenz zwischen der linken und rechten Seite findet man

$$R=-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{32}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)x^4$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{64}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\right)x^5$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 12}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{128}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 12}\right)x^6-\cdots,$$

ferner

$$-R<\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\,x^4\left(\tfrac{9}{32}+\tfrac{9}{32}x+\tfrac{9}{32}x^2+\cdots\right),$$

d. i.

$$-R<\tfrac{315}{4096}\cdot\frac{x^4}{1-x}<\tfrac{1}{13}\cdot\frac{x^4}{1-x},$$

wonach gesetzt werden darf

$$R=-\frac{\varrho x^4}{1-x},\quad 0<\varrho<\tfrac{1}{13}.$$

**Beispiel 12.** Es soll die Genauigkeit der Gleichung

$$1-(\tfrac{1}{2})^2\frac{x}{1}-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{x^2}{3}-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{x^3}{5}-\cdots=\tfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{1-x}\right)+\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}x}$$

untersucht werden, wobei $x$ einen positiven echten Bruch bedeutet.

Man findet für die Differenz beider Seiten

$$R<\tfrac{45}{4096}\cdot\frac{x^3}{1-x}<\tfrac{1}{91}\cdot\frac{x^3}{1-x},$$

so daß gesetzt werden darf

$$R=\frac{\varrho x^3}{1-x},\quad 0<\varrho<\tfrac{1}{91}.$$

In der Lehre von der Rektifikation der Kurven wird sich zeigen, daß die obige Näherungsformel zur approximativen Rektifikation der Ellipse benutzt werden kann.

## § 43.

### Die Auflösung transzendenter Gleichungen.

Die Beispiele des vorigen Paragraphen haben das Gemeinsame, daß eine transzendente Funktion näherungsweise durch eine algebraische Funktion ausgedrückt wird; hiervon läßt sich auf folgende Art Gebrauch machen zur Auflösung transzendenter Gleichungen.

Es bedeute $F(x)$ eine aus algebraischen und transzendenten Bestandteilen zusammengesetzte Funktion (z. B. $x - \cos x$, $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ und dergleichen) und es sei die Gleichung

$$F(x) = 0$$

aufzulösen; ersetzt man hier die transzendenten Bestandteile durch die ihnen nach § 42 nahezu gleichgeltenden algebraischen Ausdrücke, so verwandelt sich die gegebene transzendente Gleichung in eine algebraische Gleichung, welche nach den gewöhnlichen Methoden aufgelöst werden kann. Der so erhaltene Wert von $x$, welcher $\xi$ heißen möge, ist selbstverständlich nur ein Näherungswert und bedarf in der Regel noch einer kleinen Korrektion. Um diese zu finden, berechne man zuerst $F(\xi)$, welches nicht genau $= 0$, aber auch nicht viel davon verschieden sein wird; der erhaltene Wert sei $\varepsilon$, also

$$F(\xi) = \varepsilon.$$

Man setze ferner $x = \xi + \delta$, wo $\delta$ die Korrektion bedeutet, und beachte, daß bei kleinen Werten von $\delta$ nahezu

$$F(\xi + \delta) = F(\xi) + \delta \cdot F'(\xi)$$

ist; man hat dann

$$F(\xi) + \delta \cdot F'(\xi) = 0,$$

mithin wegen der vorhergehenden Gleichung

$$\delta = -\frac{\varepsilon}{F'(\xi)}.$$

Der hieraus folgende Wert von $\delta$ ist nicht absolut genau, mithin $\xi + \delta$ nur ein zweiter Näherungswert von $x$; man kann aber diese Verbesserungsmethode beliebig oft anwenden und dadurch dem wahren Werte des $x$ so nahe kommen, als es der Zweck der Rechnung erfordert.

**Beispiel 1.** Es soll die Gleichung

$$lg(1+x) - \tfrac{3}{4}x = 0$$

aufgelöst werden.

Abgesehen von der Wurzel $x = 0$ gibt es noch eine zweite Wurzel zwischen $\frac{1}{3}$ und 1, wie aus dem Gange der Funktion

$$lg(1+x) - \tfrac{3}{4}x$$

leicht zu ersehen ist. Wegen des echt gebrochenen $x$ kann man die vorliegende Gleichung durch die folgende ersetzen:

$$\frac{x(6+3x)}{6+6x+x^2} - \tfrac{3}{4}x = 0;$$

aus dieser ergibt sich

$$x = \sqrt{3} - 1 = 0{,}73205.$$

Wird dieser Wert mit $\xi$ bezeichnet, so ist

$$\varepsilon = lg(\sqrt{3}) - \tfrac{3}{4}(\sqrt{3} - 1) = 0{,}549306 - 0{,}549038 = 0{,}000268,$$

und hieraus folgt als zweiter Näherungswert

$$x = 0{,}73360,$$

welcher auf fünf Dezimalstellen richtig ist.

**Beispiel 2.** Man verlangt die Wurzel der Gleichung

$$xe^x - 2 = 0.$$

Aus dem Gange der Funktion $xe^x - 2$ erkennt man, daß die gesuchte Wurzel zwischen 0 und 1 liegt, mittelst der im vorigen Paragraphen entwickelten Näherungsformel für $e^x$ findet man als ersten Näherungswert $x = \frac{6}{7}$ und als zweiten

$$x = 0{,}8526.$$

**Beispiel 3.** Es soll die Gleichung

$$x - \cos x = 0$$

aufgelöst werden.

Da der gesuchte Wert zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegen muß, so läßt sich die im vorigen Paragraphen für $\cos x$ entwickelte Näherungsformel anwenden. Man erhält zunächst die kubische Gleichung

$$x^3 + 5x^2 - 12x - 12 = 0,$$

hieraus als ersten Näherungswert $x = 0{,}739 = arc\, 42^0\, 21'$ und nachher durch Verbesserung

$$x = arc\, 42^0\, 20'\, 47'',3.$$

**Beispiel 4.** Für die Wurzel der transzendenten Gleichung

$$1-(1+x^2)\cos x=0$$

findet man als ersten Näherungswert

$$x=\sqrt{\frac{6}{5}}=arc\ 62^0 46'$$

und durch Verbesserung

$$x=1{,}102506=arc\ 63^0 10' 8'',2.$$

Es ist dieser Wert nicht der einzige, welcher die gegebene Gleichung befriedigt. Die Wurzeln derselben lassen sich nämlich als Abscissen der Punkte betrachten, in denen sich die beiden Kurven

$$y=\cos x \quad \text{und} \quad y=\frac{1}{1+x^2}$$

schneiden, und hieraus folgt durch bloße Anschauung der Kurven, daß unendlich viele positive und negative Wurzeln vorhanden sind. Die positiven Wurzeln $x_0, x_1, x_2, \ldots$ liegen folgendermaßen

$$\begin{array}{ll} x_0=0, & 0<x_1<\frac{1}{2}\pi, \\ \frac{3}{2}\pi<x_2<2\pi, & 2\pi<x_3<\frac{5}{2}\pi, \\ \frac{7}{2}\pi<x_4<4\pi, & 4\pi<x_5<\frac{9}{2}\pi, \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

Die negativen Wurzeln haben dieselben absoluten Werte, aber das entgegengesetzte Vorzeichen. Ferner übersieht man leicht, daß die Differenzen

$$x_2-\tfrac{3}{2}\pi,\quad x_3-\tfrac{5}{2}\pi,\quad x_4-\tfrac{7}{2}\pi,\quad x_5-\tfrac{9}{2}\pi,\ldots$$

welche alternierende Vorzeichen besitzen, rasch abnehmen, daß also $x_{n+1}-\frac{2n+1}{2}\pi$ gegen die Grenze 0 konvergiert.

Um $x_2$ zu finden, setze man $x_2=\frac{3}{2}\pi+\xi$, wodurch

$$\sin\xi=\frac{1}{1+(\frac{3}{2}\pi+\xi)^2}$$

wird; man hat dann wegen der Kleinheit von $\xi$ näherungsweise

$$\xi=\frac{1}{1+(\frac{3}{2}\pi)^2},\quad \text{mithin}\quad x_2=\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{1+(\frac{3}{2}\pi)^2},$$

und durch weitere Korrektion

$$x_2=4{,}754761=arc\ 272^0 25' 39'',8.$$

Auf gleiche Weise findet sich

$$x_3 = 7{,}837964 = arc\,449^0\ 4'\,56'',1,$$

$$x_4 = 11{,}003766 = arc\,630^0\,28'\ 9'',6,$$

$$x_5 = 14{,}132185 = arc\,809^0\,42'\,52'',4,$$

$$x_6 = 17{,}282097 = arc\,990^0\,11'\,28'',3,$$

usw.

Beispiel 5. Um die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$u - cot\,u = 0$$

zu finden, benutze man für $u$ die im 10. Beispiel des vorigen Paragraphen entwickelte Formel; als ersten Näherungswert erhält man

$$cos\,u = \frac{\sqrt{13}-1}{4} \quad \text{oder} \quad u = arc\,49^0\,21'$$

und durch Verbesserung

$$u = arc\,49^0\,17'\,36'',5.$$

Die obige transzendente Gleichung besitzt übrigens noch unendlich viele andere Wurzeln.

# Kapitel XII.

## Funktionen und Reihen mit komplexen Variabeln.

### § 44.

### Die einfachen Funktionen komplexer Variabeln.

1. Bezeichnet $i$ die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$, so ist $x + iy$ die allgemeine Form einer komplexen Variabeln; $x^2 + y^2$ heißt die Norm dieser Variabeln, $\sqrt{x^2 + y^2}$ ihr Modul, wobei die Wurzel jederzeit im absoluten Sinne genommen wird.

Setzt man ferner

$$tg\,\theta = \frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad \theta = arc\,tg\,\frac{y}{x} \pm k\pi,$$

wo $k$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so läßt sich die komplexe Variable immer auf die Form

$$x + iy = r\,(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$$

bringen, wobei $r$ den Modul bedeutet; $\theta$ heißt dann die Amplitude der Variabeln.

2. Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division komplexer Variabeln werden ebenso ausgeführt wie bei reellen Variabeln, nur hat man dabei auf die Gleichungen $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$, $i^5 = +i$ usw. Rücksicht zu nehmen. Falls die komplexen Variabeln durch Modul und Amplitude ausgedrückt sind, können Multiplikationen und Divisionen mittelst der Formeln

$$r_1(cos\,\theta_1 + i\,sin\,\theta_1)\cdot r_2(cos\,\theta_2 + i\,sin\,\theta_2) = r_1 r_2[cos\,(\theta_1 + \theta_2) + i\,sin(\theta_1 + \theta_2)],$$

$$\frac{r_1\,(cos\,\theta_1 + i\,sin\,\theta_1)}{r_2\,(cos\,\theta_2 + i\,sin\,\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,[cos\,(\theta_1 - \theta_2) + i\,sin\,(\theta_1 - \theta_2)]$$

ausgeführt werden.

3. Um eine komplexe Zahl mit einem reellen ganzen positiven Exponenten zu potenzieren, drückt man die Basis durch Modul und Amplitude aus und hat

$$(x + iy)^m = [r\,(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)]^m = r^m\,(cos\,m\theta + i\,sin\,m\theta).$$

Ist der Exponent ein positiver, auf seine kürzeste Benennung gebrachter Bruch $\frac{m}{n}$, so hat die Potenz $n$ verschiedene Werte, welche aus der Gleichung

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left\{\cos\frac{m\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{m\theta + 2k\pi}{n}\right\}$$

für $k = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$ hervorgehen. Dabei ist $r^{\frac{m}{n}}$ im absoluten Sinne zu nehmen.

Potenzen mit negativen Exponenten werden mittelst der Definition

$$z^{-\mu} = \frac{1}{z^{\mu}}$$

auf Potenzen mit positiven Exponenten zurückgeführt.

Nach dem Vorhergehenden sind die $n$ Wurzeln der Gleichung

$$z^n = +1$$

bei geraden Werten von $n$ folgende

$$\begin{array}{ll}
+1, & -1, \\
\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, & \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}, \\
\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}, & \cos\frac{4\pi}{n} - i\sin\frac{4\pi}{n}, \\
\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n}, & \cos\frac{6\pi}{n} - i\sin\frac{6\pi}{n}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, & \cos\frac{(n-2)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-2)\pi}{n},
\end{array}$$

bei ungeraden Werten von $n$ sind sie

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{+1,} \\
\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, & \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}, \\
\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}; & \cos\frac{4\pi}{n} - i\sin\frac{4\pi}{n}, \\
\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n}, & \cos\frac{6\pi}{n} - i\sin\frac{6\pi}{n}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}, & \cos\frac{(n-1)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.
\end{array}$$

Ferner hat die Gleichung

$$z^n = -1$$

bei geraden Werten von $n$ folgende Wurzeln

$$\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}, \qquad \cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n}, \qquad \cos\frac{3\pi}{n} - i\sin\frac{3\pi}{n},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n}, \qquad \cos\frac{5\pi}{n} - i\sin\frac{5\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}, \qquad \cos\frac{(n-1)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$

dagegen bei ungeraden Werten von $n$

$$-1,$$

$$\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}, \qquad \cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n}, \qquad \cos\frac{3\pi}{n} - i\sin\frac{3\pi}{n},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n}, \qquad \cos\frac{5\pi}{n} - i\sin\frac{5\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, \qquad \cos\frac{(n-2)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}.$$

Bei komplexen Werten von $z_1$ und $z_2$ gilt der Satz

$$z_1^\mu \cdot z_2^\mu = (z_1 \cdot z_2)^\mu$$

ohne Einschränkung, wenn $\mu$ eine positive oder negative ganze Zahl ist; bei gebrochenem $\mu$ bleibt er insofern richtig, als jeder Wert von $z_1^\mu$, multipliziert mit einem der Werte von $z_2^\mu$, wieder einen der Werte von $(z_1 z_2)^\mu$ ergibt.

4. Die Exponentialgröße $e^{x+iy}$ wird durch die Gleichung

$$e^{x+iy} = Lim\left\{\left(1 + \frac{x+iy}{m}\right)^m\right\}$$

definiert, worin $m$ eine unendlich wachsende ganze positive Zahl bedeutet; die Ausführung des angedeuteten Grenzüberganges liefert

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Hieran knüpfen sich die speziellen Gleichungen

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y,$$

$$\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cos y, \quad \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \sin y.$$

Allgemeiner ist bei reellen positiven Werten von $a$

$$a^{x+iy} = a^x \{\cos(y \lg a) + i \sin(y \lg a)\}.$$

Die Gleichung

$$a^{z_1} \cdot a^{z_2} = a^{z_1 + z_2}$$

gilt für alle komplexen Werte von $z_1$ und $z_2$.

5. Bezeichnet $Lg\,\zeta$ den allgemeinen natürlichen Logarithmus von $\zeta$, d. h. die allgemeinste komplexe Zahl $z$, welcher die in der Gleichung $e^z = \zeta$ ausgedrückte Eigenschaft zukommt, so ist bei positiven Werten von $\xi$

$$Lg(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2} \lg(\xi^2 + \eta^2) + i\left\{\operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\xi} \pm 2k\pi\right\},$$

worin $k$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet; bei negativen Werten von $\xi$ ist

$$Lg(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2} \lg(\xi^2 + \eta^2) + i\left\{\operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\xi} \pm (2k+1)\pi\right\}.$$

Spezielle Fälle hiervon sind

$$Lg(+1) = \pm 2k\pi i, \quad Lg(-1) = \pm (2k+1)\pi i.$$

Die Gleichung

$$Lg(\zeta_1 \zeta_2) = Lg\,\zeta_1 + Lg\,\zeta_2$$

gilt allgemein, wenn die Vieldeutigkeit von $Lg\,\zeta$ beachtet wird (ähnlich wie am Ende von Nr. 3).

Eine häufig angewendete Formel ist noch

$$\frac{1}{2i} Lg\left(\frac{\xi + i\eta}{\xi - i\eta}\right) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\xi} \pm 2h\pi,$$

wobei $h$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

6. Die in Nr. 4 für $\cos y$ und $\sin y$ angegebenen Formeln dienen als Definitionen des Cosinus und Sinus einer beliebigen komplexen Variabeln, sie geben

$$\cos(x + iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x,$$

$$\sin(x + iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x,$$

und spezieller

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \sin(iy) = i \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Die beiden Funktionen

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

nennt man den hyperbolischen Cosinus resp. den hyperbolischen Sinus von $y$ und bezeichnet sie entweder mit $\mathfrak{Cos}\, y$ und $\mathfrak{Sin}\, y$ oder zweckmäßiger durch $cshp\, y$ und $snhp\, y$. Demnach ist

$$\cos(iy) = cshp\, y, \quad \sin(iy) = i\, snhp\, y$$

und

$$\cos(x + iy) = \cos x\, cshp\, y - i \sin x\, snhp\, y,$$

$$\sin(x + iy) = \sin x\, cshp\, y + i \cos x\, snhp\, y.$$

7. Für die übrigen goniometrischen Funktionen benutzt man die gewöhnlichen Definitionen

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \text{usw.}$$

und erhält

$$\sec(x + iy) = 2\, \frac{(e^y + e^{-y}) \cos x + i\,(e^y - e^{-y}) \sin x}{e^{2y} + e^{-2y} + 2 \cos 2x}$$

$$= 2\, \frac{\cos x\, cshp\, y + i \sin x\, snhp\, y}{\cos 2x + cshp\, 2y},$$

$$tg\,(x + iy) = \frac{2 \sin 2x + i\,(e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + e^{-2y} + 2 \cos 2x}$$

$$= \frac{\sin 2x + i\, snhp\, 2y}{\cos 2x + i\, cshp\, 2y},$$

$$cosec\,(x + iy) = 2\, \frac{(e^y + e^{-y}) \sin x - i\,(e^y - e^{-y}) \cos x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x}$$

$$= -2\, \frac{\sin x\, cshp\, y - i \cos x\, snhp\, y}{\cos 2x - cshp\, 2y},$$

$$\cot(x + iy) = \frac{2 \sin 2x - i\,(e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x}$$

$$= -\frac{\sin 2x - i\, snhp\, 2y}{\cos 2x - cshp\, 2y}.$$

Die goniometrischen Formeln für $\sin(z_1 + z_2)$, $\cos(z_1 + z_2)$ usw. gelten ebenso bei komplexen wie bei reellen Werten von $z_1$ und $z_2$.

8. Unter *Arc sin* $\zeta$ versteht man jede reelle oder komplexe Zahl $z$, welche der Gleichung $\sin z = \zeta$ genügt; wird zur Abkürzung gesetzt

$$S = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{(1 + \xi)^2 + \eta^2} + \sqrt{(1 - \xi)^2 + \eta^2}\right\},$$

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{(1 + \xi)^2 + \eta^2} + \sqrt{(1 - \xi)^2 + \eta^2}\right\},$$

wobei alle Wurzeln im absoluten Sinne genommen werden müssen, und bezeichnet man ferner mit $n$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, so sind alle Werte von *Arc sin* $(\xi + i\eta)$ in folgenden zwei Formeln enthalten

$$Arc\,sin\,(\xi + i\eta) = 2n\pi + arc\,sin\,T + i \cdot lg\left(S + \sqrt{S^2 - 1}\right),$$

$$Arc\,sin\,(\xi + i\eta) = (2n+1)\pi - arc\,sin\,T - i \cdot lg\left(S + \sqrt{S^2 - 1}\right).$$

Der kleinste dieser Werte möge mit *arc sin* $(\xi + i\eta)$ bezeichnet werden, nämlich

$$arc\,sin\,(\xi + i\eta) = arc\,sin\,T + i \cdot lg\left(S + \sqrt{S^2 - 1}\right);$$

dann gelten die bekannten Formeln

$$Arc\,sin\,\zeta = 2n\pi + arc\,sin\,\zeta,$$

$$Arc\,sin\,\zeta = (2n+1)\pi - arc\,sin\,\zeta$$

gleichmäßig für reelle und komplexe Werte von $\zeta$.

Für $\eta = 0$, $\xi^2 > 1$ wird $S = \xi$, $T = 1$, daher

$$arc\,sin\,\xi = \tfrac{1}{2}\pi + i \cdot lg\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right), \quad \xi^2 > 1;$$

für $\xi = 0$ und beliebige $\eta$ wird $S = \sqrt{1 + \eta^2}$, $T = 0$, mithin

$$arc\,sin\,(i\eta) = i \cdot lg\left(\sqrt{1 + \eta^2} + \eta\right).$$

Versteht man unter *Arc cos* $\zeta$ jedes der Gleichung $cos\,z = \zeta$ genügende $z$, so kann man alle Werte von *Arc cos* $(\xi + i\eta)$ durch folgende zwei Gleichungen darstellen

$$Arc\,cos\,(\xi + i\eta) = 2n\pi + arc\,cos\,T - i \cdot lg\left(S + \sqrt{S^2 - 1}\right),$$

$$Arc\,cos\,(\xi + i\eta) = 2n\pi - arc\,cos\,T + i \cdot lg\left(S + \sqrt{S^2 - 1}\right),$$

worin $n$, $S$ und $T$ dieselbe Bedeutung haben wie vorhin.

Definiert man *arc cos* $(\xi + i\eta)$ durch die Formel

$$arc\,cos\,(\xi + i\eta) = arc\,cos\,T - i \cdot l\left(S + \sqrt{S^2 - 1}\right),$$

so gilt die Relation

$$Arc\,cos\,\zeta = 2n\pi \pm arc\,cos\,\zeta$$

gleichmäßig für reelle und komplexe Werte von $\zeta$. Ebenso bleibt die Formel

$$arc\,sin\,\zeta + arc\,cos\,\zeta = \tfrac{1}{2}\pi$$

für reelle und komplexe Werte von $\zeta$ richtig.

9. Jedes der Gleichung $tg\, z = \zeta$ genügende $z$ werde mit $Arc\, tg\, \zeta$ bezeichnet; sämtliche Werte von $Arc\, tg\,(\xi + i\eta)$ sind dann in folgenden zwei Formeln enthalten:

$$Arc\, tg\,(\xi + i\eta) = n\pi + \tfrac{1}{2}\, arc\, tg\, \frac{2\xi}{1-(\xi^2+\eta^2)} + \frac{i}{4}\, lg\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],$$
$$\xi^2+\eta^2<1,$$
$$Arc\, tg(\xi + i\eta) = n\pi + \tfrac{1}{2}\left\{\pi - arc\, tg\, \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2-1}\right\} + \frac{i}{4}\, lg\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],$$
$$\xi^2+\eta^2>1,$$

worin $n$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Die für $n = 0$ entstehenden Werte mögen $arc\, tg\,(\xi + i\eta)$ heißen, nämlich

$$arc\, tg\,(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}\, arc\, tg\, \frac{2\xi}{1-(\xi^2+\eta^2)} + \frac{i}{4}\, lg\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],$$
$$\xi^2+\eta^2<1,$$
$$arc\, tg\,(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}\left\{\pi - arc\, tg\, \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2-1}\right\} + \frac{i}{4}\, lg\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],$$
$$\xi^2+\eta^2>1;$$

die Formel

$$Arc\, tg\, \zeta = n\pi + arc\, tg\, \zeta$$

gilt dann gleichmäßig für reelle und komplexe Werte von $\zeta$.

Für $\xi = 0$ folgt

$$arc\, tg\,(i\eta) = \frac{i}{4}\, lg\left[\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^2\right], \quad \eta^2<1,$$
$$arc\, tg\,(i\eta) = \frac{\pi}{2} + \frac{i}{4}\, lg\left[\left(\frac{\eta+1}{\eta-1}\right)^2\right], \quad \eta^2>1;$$

die Funktion $arc\, tg\,(i\eta)$ ändert sich demnach sprungweise an den Stellen $\eta = \pm 1$.

Versteht man unter $Arc\, cot\, \zeta$ jedes $z$, welches die in der Gleichung $cot\, z = \zeta$ ausgedrückte Eigenschaft besitzt, so bestimmen sich die Werte von $Arc\, cot\,(\xi + i\eta)$ durch folgende zwei Formeln:

$$Arc\, cot\,(\xi + i\eta) = n\pi + \tfrac{1}{2}\left\{\pi - arc\, cot\, \frac{1-(\xi^2+\eta^2)}{2\xi}\right\} - \frac{i}{4}\, lg\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],$$
$$\xi^2+\eta^2<1,$$
$$Arc\, cot\,(\xi + i\eta) = n\pi + \tfrac{1}{2}\, arc\, cot\, \frac{\xi^2+\eta^2-1}{2\xi} - \frac{i}{4}\, lg\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],$$
$$\xi^2+\eta^2>1,$$

worin $n$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Dem Werte $n = 0$ entsprechen die speziellen Funktionswerte

$$arc\ cot\,(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}\left\{\pi - arc\ cot\,\frac{1-(\xi^2+\eta^2)}{2\xi}\right\} - \frac{i}{4}\,lg\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],$$

$$\xi^2 + \eta^2 < 1,$$

$$arc\ cot\,(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2}\,arc\ cot\,\frac{\xi^2+\eta^2-1}{2\xi} - \frac{i}{4}\,lg\left[\frac{\xi^2+(1+\eta)^2}{\xi^2+(1-\eta)^2}\right],$$

$$\xi^2 + \eta^2 > 1;$$

es ist daher allgemein für reelle und komplexe Werte von $\zeta$

$$Arc\ cot\,\zeta = n\pi + arc\ cot\,\zeta$$

und ebenso, je nachdem $\zeta$ positiv oder negativ ist

$$arc\ tg\,\zeta + arc\ cot\,\zeta = \pm\tfrac{1}{2}\pi.$$

Auch von der Funktion $arc\ cot\,(i\eta)$ gilt die Bemerkung, daß sie an den Stellen $\eta = \pm 1$ Unterbrechungen der Kontinuität erleidet.

## § 45.

### Reihen mit komplexen Variabeln.

Eine unendliche Reihe, deren Terme komplexe Zahlen sind, heißt konvergent, wenn sowohl die reellen als auch die imaginären Bestandteile aller Terme, für sich genommen, konvergierende Reihen geben; in jedem anderen Falle heißt die Reihe divergent. Zur Konvergenz der Reihe

$$(u_0 + iv_0) + (u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) + \cdots$$

ist also erforderlich, daß die zwei Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots,$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

gleichzeitig konvergieren. Sind $U$ und $V$ die Summen der letzteren Reihen, so nennt man $U + iV$ die Summe der obigen komplexen Reihe.

Beispiel 1. Es soll die Reihe

$$\tfrac{1}{1}z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{4}z^4 + \cdots$$

für den Fall eines komplexen $z$, nämlich

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

summiert werden.

Die beiden Reihen sind hier

$$\tfrac{1}{1} r \cos\theta + \tfrac{1}{2} r^2 \cos 2\theta + \tfrac{1}{3} r^3 \cos 3\theta + \cdots,$$
$$\tfrac{1}{1} r \sin\theta + \tfrac{1}{2} r^2 \sin 2\theta + \tfrac{1}{3} r^3 \sin 3\theta + \cdots;$$

dieselben konvergieren unbedingt, wenn schon die Reihe

$$\tfrac{1}{1} r + \tfrac{1}{2} r^2 + \tfrac{1}{3} r^3 + \tfrac{1}{4} r^4 + \cdots$$

konvergiert, d. h. wenn $r^2 < 1$ ist; auch sind dann ihre Summen stetige Funktionen von $r$. Nennen wir sie $U$ und $V$, so erhalten wir durch Differentiation

$$\frac{dU}{dr} = \cos\theta + r \cos 2\theta + r^2 \cos 3\theta + \cdots,$$

d. i. nach den Formeln in § 35, Nr. 14

$$\frac{dU}{dr} = \frac{\cos\theta - r}{1 - 2r\cos\theta + r^2},$$

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{dU}{dr} = \frac{d\left[-\tfrac{1}{2} lg(1 - 2r\cos\theta + r^2)\right]}{dr}.$$

Zufolge des in § 37 unter d) erwähnten Satzes folgt nun

$$U = -\tfrac{1}{2} lg(1 - 2r\cos\theta + r^2) + Const,$$

und wenn man beachtet, daß die mit $U$ bezeichnete Reihe für $r = 0$ verschwindet, so erhält man $Const = 0$, mithin

$$-\tfrac{1}{2} lg(1 - 2r\cos\theta + r^2) = \tfrac{1}{1} r\cos\theta + \tfrac{1}{2} r^2 \cos 2\theta + \tfrac{1}{3} r^3 \cos 3\theta + \cdots$$
$$r^2 < 1.$$

Mittelst desselben Verfahrens findet sich

$$arc\,tg \frac{r\sin\theta}{1 - r\cos\theta} = \tfrac{1}{1} r\sin\theta + \tfrac{1}{2} r^2 \sin 2\theta + \tfrac{1}{3} r^3 \sin 3\theta + \cdots$$
$$r^2 < 1.$$

Setzt man wieder $r(\cos\theta + i\sin\theta) = z$ und beachtet die Relation

$$-\tfrac{1}{2} lg(1 - 2r\cos\theta + r^2) + i\, arc\,tg \frac{r\sin\theta}{1 - r\cos\theta}$$
$$= -lg[1 - r(\cos\theta + i\sin\theta)] = lg\left(\frac{1}{1-z}\right),$$

so gelangt man mittelst der obigen Gleichung zu dem Resultate, daß die Reihenentwickelung

$$lg\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{1}z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots$$

auch für solche komplexe Werte von $z$ gilt, deren Modul weniger als die Einheit beträgt.

Beispiel 2. Es soll die Reihe

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

für den Fall $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ summiert werden.

Die obige Reihe konvergiert für jedes $r$ und $\theta$ und zerfällt in

$$U = 1 + \frac{r\cos\theta}{1} + \frac{r^2\cos 2\theta}{1\cdot 2} + \frac{r^3\cos 3\theta}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

$$V = \frac{r\sin\theta}{1} + \frac{r^2\sin 2\theta}{1\cdot 2} + \frac{r^3\sin 3\theta}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

Man bemerke nun, daß folgende Gleichungen gelten

$$\frac{dU}{dr} = U\cos\theta - V\sin\theta, \quad \frac{dV}{d\theta} = U\sin\theta + V\cos\theta,$$

aus welchen sich die Relationen ergeben

$$U\frac{dU}{dr} + V\frac{dV}{dr} = (U^2 + V^2)\cos\theta,$$

$$U\frac{dV}{dr} - V\frac{dU}{dr} = (U^2 + V^2)\sin\theta.$$

Diese können einfacher dargestellt werden, wenn man setzt

$$U + iV = P(\cos\Omega + i\sin\Omega),$$

mithin

$$U^2 + V^2 = P^2, \quad arc\,tg\frac{V}{U} + k\pi = \Omega;$$

es ist dann

$$U\frac{dU}{dr} + V\frac{dV}{dr} = P\frac{dP}{dr},$$

$$U\frac{\partial V}{\partial r} - V\frac{\partial U}{\partial r} = (U^2 + V^2)\frac{d\Omega}{dr},$$

und infolge dieser Beziehungen gestalten sich die vorhergehenden Gleichungen wie folgt

$$\frac{dP}{dr} = P\cos\theta \quad \text{oder} \quad \frac{d\,lg\,P}{dr} = \frac{d(r\cos\theta)}{dr},$$

$$\frac{d\Omega}{dr} = \sin\theta \quad\quad " \quad\quad \frac{d\Omega}{dr} = \frac{d(r\sin\theta)}{dr}.$$

Hieraus ergeben sich die Werte

$$P = e^{r\cos\theta + a}, \quad \Omega = r\sin\theta + b,$$

wo $a$ und $b$ Konstanten bedeuten. Diese bestimmen sich durch die Spezialisierung $r = 0$, und das Endresultat besteht aus folgenden zwei Gleichungen

$$e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta) = 1 + \frac{r\cos\theta}{1} + \frac{r^2\cos 2\theta}{1\cdot 2} + \frac{r^3\cos 3\theta}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

$$e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta) = \frac{r\sin\theta}{1} + \frac{r^2\sin 2\theta}{1\cdot 2} + \frac{r^3\sin 3\theta}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit $i$ und addiert sie zur ersten, so findet man, daß die Gleichung

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

für jedes komplexe $z$ gültig ist.

Beispiel 3. Es soll die Reihe

$$1 + \frac{\mu}{1}z + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \cdots$$

für $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ summiert werden.

Bezeichnet man die Binomialkoeffizienten auf die gewöhnliche kurze Weise, so handelt es sich um die Summierung der beiden Reihen

$$1 + (\mu)_1 r\cos\theta + (\mu)_2 r^2\cos 2\theta + (\mu)_3 r^3\cos 3\theta + \cdots,$$

$$(\mu)_1 r\sin\theta + (\mu)_2 r^2\sin 2\theta + (\mu)_3 r^3\sin 3\theta + \cdots,$$

welche bei ganzen positiven Werten von $\mu$ für jedes $r$, außerdem aber nur für $r^2 < 1$ konvergieren und deren Summen in jedem Falle $U$ und $V$ heißen mögen. Man bemerke nun, daß folgende Gleichungen stattfinden

$$\frac{dU}{dr}(1 + r\cos\theta) - \frac{dV}{dr} r\sin\theta = \mu(U\cos\theta - V\sin\theta),$$

$$\frac{dV}{dr}(1 + r\cos\theta) + \frac{dU}{dr} r\sin\theta = \mu(V\cos\theta + U\sin\theta);$$

eliminiert man hieraus das eine Mal $\frac{dV}{dr}$, das andere Mal $\frac{dU}{dr}$, so gelangt man zu den weiteren Relationen

$$(1 + 2r\cos\theta + r^2)\frac{dU}{dr} = \mu\{U(r + \cos\theta) - V\sin\theta\},$$

$$(1 + 2r\cos\theta + r^2)\frac{dV}{dr} = \mu\{U\sin\theta + V(r + \cos\theta)\},$$

$$U\frac{dU}{dr} + V\frac{dV}{dr} = \frac{\mu(r + \cos\theta)}{1 + 2r\cos\theta + r^2}(U^2 + V^2),$$

$$U\frac{dV}{dr} - V\frac{dU}{dr} = \frac{\mu\sin\theta}{1 + 2r\cos\theta + r^2}(U^2 + V^2).$$

Diese vereinfachen sich für

$$U + iV = P(\cos\Omega + i\sin\Omega)$$

und gehen über in

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\mu(r + \cos\theta)P}{1 + 2r\cos\theta + r^2}, \quad \frac{d\Omega}{dr} = \frac{\mu\sin\theta}{1 + 2r\cos\theta + r^2},$$

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{d\,lg\,P}{dr} = \frac{d[\frac{1}{2}\mu\,lg(1 + 2r\cos\theta + r^2)]}{dr}, \quad \frac{d\Omega}{dr} = \frac{d\left[\mu\,arctg\left(\frac{r\sin\theta}{1 + r\cos\theta}\right)\right]}{dr}.$$

Hieraus findet man $P$ und $\Omega$, wobei die auftretenden Konstanten mittelst der Spezialisierung $r = 0$ zu bestimmen sind; die Resultate gestalten sich dann wie folgt:

$$(1 + 2r\cos\theta + r^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos\left(\mu\,arctg\frac{r\sin\theta}{1 + r\cos\theta}\right) = 1 + (\mu)_1\cdot r\cos\theta + (\mu)_2\cdot r^2\cos 2\theta + (\mu)_3\cdot r^3\cos 3\theta + \cdots$$

$$(1 + 2r\cos\theta + r^2)^{\frac{1}{2}\mu}\sin\left(\mu\,arctg\frac{r\sin\theta}{1 + r\cos\theta}\right) = (\mu)_1\cdot r\sin\theta + (\mu)_2\cdot r^2\sin 2\theta + (\mu)_3\cdot r^3\sin 3\theta + \cdots,$$

wobei $r^2 < 1$ sein muß, falls $\mu$ keine positive ganze Zahl ist.

Multipliziert man die zweite Gleichung mit $i$ und addiert sie zur ersten, so findet man, daß der allgemeine binomische Satz auch für solche komplexe Werte von $z$ gilt, deren Modul weniger als die Einheit beträgt.

## § 46.

### Reihen mit übersprungenen Termen.

Aus der bekannten Summenformel

$$1+\cos\beta+\cos 2\beta+\cos 3\beta+\cdots+\cos(m-1)\beta=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m-\frac{1}{2})\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}$$

$$=\tfrac{1}{2}(1-\cos m\beta)+\tfrac{1}{2}\frac{\sin m\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\cos\tfrac{1}{2}\beta$$

erhält man für $\beta=\frac{2k\pi}{m}$, wo $k$ eine positive ganze Zahl bedeuten möge,

$$1+\cos\frac{2k\pi}{m}+\cos\frac{4k\pi}{m}+\cos\frac{6k\pi}{m}+\cdots+\cos\frac{(2m-2)k\pi}{m}=\frac{1}{2}\frac{\sin 2k\pi}{\sin\frac{k\pi}{m}}\cos\frac{k\pi}{m}.$$

Wenn $\frac{k}{m}$ keine ganze Zahl ist, so verschwindet der Ausdruck auf der rechten Seite, wenn dagegen $m$ in $k$ aufgeht, mithin $\frac{k}{m}$ einer ganzen Zahl $q$ gleich ist, so wird

$$\frac{\sin 2k\pi}{\sin\frac{k\pi}{n}}=\frac{\sin 2mq\pi}{\sin q\pi}=\frac{0}{0},$$

und durch Untersuchung des Bruches

$$\frac{\sin 2m\omega}{\sin\omega}\quad \text{für}\quad \omega=q\pi$$

findet man als wahren Wert des fraglichen Quotienten

$$\frac{2m\cos 2mq\pi}{\cos q\pi}=\frac{2m}{\cos\frac{k\pi}{m}}.$$

Nach Substitution dieses Wertes und wenn zur Abkürzung $\frac{2\pi}{m}=\vartheta$ gesetzt wird, ergibt sich folgender Satz: Je nachdem $k$ ein Vielfaches von $m$ ausmacht oder nicht, ist

$$1+\cos k\vartheta+\cos 2k\vartheta+\cos 3k\vartheta+\cdots+\cos(m-1)k\vartheta=m\ \text{oder}\ =0.$$

Von der Summenformel

$$\sin\beta+\sin 2\beta+\sin 3\beta+\cdots+\sin(m-1)\beta$$

$$=\tfrac{1}{2}(1-\cos m\beta)\cot\tfrac{1}{2}\beta-\tfrac{1}{2}\sin m\beta$$

ausgehend, findet man leicht für alle ganzzahligen $k$ und $m$

$$\sin k\vartheta+\sin 2k\vartheta+\sin 3k\vartheta+\cdots+\sin(m-1)k\vartheta=0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta = \varepsilon,$$

so erhält man mit Hilfe der vorangehenden Betrachtungen den Satz: Je nachdem $k$ ein Vielfaches von $m$ ausmacht oder nicht, ist

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \cdots + \varepsilon^{(m-1)k} = m \quad \text{oder} \quad = 0;$$

von diesem Satze läßt sich folgende Anwendung machen.

Wenn eine Gleichung von der Form

$$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots$$

auch für komplexe Werte von $z$ gilt, so setze man darin nacheinander

$$z = x,\ \varepsilon x,\ \varepsilon^2 x,\ \varepsilon^3 x, \ldots \varepsilon^{m-1} x$$

und addiere alle entstehenden Gleichungen; dies gibt

$$f(x) + f(\varepsilon x) + f(\varepsilon^2 x) + \cdots + f(\varepsilon^{m-1} x) = m C_0 + \cdots C_k(1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \cdots$$
$$+ \varepsilon^{(m-1)k})\, x^k + \cdots,$$

wo $k$ die Werte 1, 2, 3, ... erhält. Hier verschwinden nun alle Terme, in denen $k$ kein Vielfaches von $m$ ist, und daher bleibt

$$m C_0 + m C_m x^m + m C_{2m} x^{2m} + m C_{3m} x^{3m} + \cdots$$

Für die linke Seite bemerke man, daß $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots \varepsilon^{m-1}$, und $\varepsilon^m = 1$ die $m$ Wurzeln der Gleichung $x^m = 1$ sind; bezeichnet man sie mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ und schreibt nachträglich $z$ statt $x$, so hat man die Gleichung

$$1)\quad \frac{1}{m}\{f(\varepsilon_1 z) + f(\varepsilon_2 z) + \cdots + f(\varepsilon_m z)\} = C_0 + C_m z^m + C_{2m} z^{2m}$$
$$+ C_{3m} z^{3m} + \cdots,$$

wobei die rechte Seite durch Auslassung von je $m - 1$ Termen der ursprünglichen Reihe gebildet ist.

1. Als erstes Beispiel diene die Gleichung

$$-\frac{lg(1-z)}{z} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{4}z^3 + \cdots, \quad (mod\, z < 1)$$

in welcher $C_n = \dfrac{1}{n+1}$ ist. Für $m = 3$ wird

$$-\frac{1}{3}\left\{\frac{lg(1-\varepsilon_1 z)}{\varepsilon_1 z}+\frac{lg(1-\varepsilon_2 z)}{\varepsilon_2 z}+\frac{lg(1-\varepsilon_3 z)}{\varepsilon_3 z}\right\}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}z^3+\frac{1}{7}z^6+\frac{1}{10}z^9+\cdots;$$

nach völliger Ausrechnung ergibt sich die Formel

$$2)\qquad \frac{1}{3}\left\{lg\left(\frac{1}{1-z}\right)+\frac{1}{2}lg(1+z+z^2)+\sqrt{3}\cdot arc\,tg\frac{z\sqrt{3}}{2+z}\right\}$$
$$=\frac{1}{1}z+\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{7}z^7+\cdots,$$

welche man durch Differentiation leicht verifizieren kann.

2. Nimmt man wieder $m=3$ und geht von der Reihe

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

aus, so erhält man

$$3)\qquad \frac{1}{3}\left\{e^z+2e^{-\frac{1}{2}z}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)\right\}=1+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{z^6}{1\cdot 2\cdots 6}+\frac{z^9}{1\cdot 2\cdots 9}+\cdots$$

Die Gleichung

$$\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{1}+\frac{z}{1\cdot 2}+\frac{z^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

führt nach derselben Methode zu dem Resultate

$$4)\quad \frac{1}{3}e^z-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}z}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)-\sqrt{3}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)\right]$$
$$=\frac{z}{1}+\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{z^7}{1\cdot 2\cdots 7}+\cdots;$$

endlich erhält man aus der Gleichung

$$\frac{e^z-1-z}{z^2}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{z}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{z^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

die Formel

$$5)\qquad \frac{1}{3}e^z-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}z}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)+\sqrt{3}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)\right]$$
$$=\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^5}{1\cdot 2\cdots 5}+\frac{z^8}{1\cdot 2\cdots 8}+\cdots$$

Läßt man in den Gleichungen 3), 4), 5) $-z$ an Stelle von $+z$ treten, so kann man noch die Kombination bilden

$$6)\quad \tfrac{1}{3}e^{-z} + \tfrac{2}{3}e^{\frac{1}{2}z}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) + \sqrt{3}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)\right\} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2}$$
$$- \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{z^5}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{z^6}{1\cdot 2\cdots 6} + \frac{z^7}{1\cdot 2\cdots 7}$$
$$+ \frac{z^8}{1\cdot 2\cdots 8} - \cdots,$$

wobei rechter Hand immer drei positive und drei negative Glieder aufeinander folgen.

Die Reihensummen in 3), 4) und 5) besitzen übrigens ähnliche Eigenschaften wie $\cos z$ und $\sin z$; werden nämlich jene Summen kurz mit $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ bezeichnet, so gelten folgende Relationen

$$\varphi_1(z) = \frac{d\varphi_2(z)}{dz} = \frac{d^2\varphi_3(z)}{dz^2},$$
$$\varphi_2(z) = \frac{d\varphi_3(z)}{dz} = \frac{d^2\varphi_1(z)}{dz^2},$$
$$\varphi_3(z) = \frac{d\varphi_1(z)}{dz} = \frac{d^2\varphi_2(z)}{dz^2};$$

$$\varphi_1(x+y) = \varphi_1(x)\varphi_1(y) + \varphi_2(x)\varphi_3(y) + \varphi_3(x)\varphi_2(y),$$
$$\varphi_2(x+y) = \varphi_3(x)\varphi_3(y) + \varphi_1(x)\varphi_2(y) + \varphi_2(x)\varphi_1(y),$$
$$\varphi_3(x+y) = \varphi_2(x)\varphi_2(y) + \varphi_3(x)\varphi_1(y) + \varphi_1(x)\varphi_3(y),$$

aus denen sich leicht zahlreiche weitere Formeln ableiten lassen.

3. Geht man für $m = 3$ von den folgenden drei Gleichungen aus

$$(1+z)^\mu = 1 + (\mu)_1 z + (\mu)_2 z^2 + (\mu)_3 z^3 + (\mu)_4 z^4 + \cdots,$$
$$\frac{(1+z)^\mu - 1}{z} = (\mu)_1 + (\mu)_2 z + (\mu)_3 z^2 + (\mu)_4 z^3 + \cdots,$$
$$\frac{(1+z)^\mu - 1 - \mu z}{z^2} = (\mu)_2 + (\mu)_3 z + (\mu)_4 z^2 + \cdots,$$

welche bei ganzen positiven Werten von $\mu$ ohne Einschränkung und bei anderen Werten von $\mu$ unter der gemeinschaftlichen Bedingung $\mathrm{mod}\, z < 1$ gelten, und setzt man ferner zur Abkürzung

$$\sqrt{1 - z + z^2} = R, \quad \mathrm{arc\,tg}\frac{z\sqrt{3}}{2-z} = \theta,$$

so gelangt man zu den folgenden drei Formeln

$$7)\qquad \tfrac{1}{3}\{(1+z)^\mu + 2R^\mu \cos\mu\theta\} = (\mu)_0 + (\mu)_3 z^3 + (\mu)_6 z^6 + (\mu)_9 z^9 + \cdots$$

$$8)\qquad \tfrac{1}{3}\{(1+z)^\mu - R^\mu(\cos\mu\theta - \sqrt{3}\cdot\sin\mu\theta)\} = (\mu)_1 z + (\mu)_4 z^4 + (\mu)_7 z^7 + (\mu)_{10} z^{10} + \cdots$$

$$9)\qquad \tfrac{1}{3}\{(1+z)^\mu - R^\mu(\cos\mu\theta + \sqrt{3}\cdot\sin\mu\theta)\} = (\mu)_2 z^2 + (\mu)_5 z^5 + (\mu)_8 z^8 + (\mu)_{11} z^{11} + \cdots,$$

in denen für $\mu$ und $z$ dieselben Bedingungen gelten, an welche der allgemeine binomische Satz geknüpft ist.

Bezeichnet man die gefundenen drei Reihensummen kurz mit

$$\psi_1(z,\mu),\quad \psi_2(z,\mu),\quad \psi_3(z,\mu),$$

so gelten folgende Relationen

$$\psi_1(z,\mu) = \frac{1}{\mu+1}\cdot\frac{d\psi_2(z,\mu+1)}{dz},$$

$$\psi_2(z,\mu) = \frac{1}{\mu+1}\cdot\frac{d\psi_3(z,\mu+1)}{dz},$$

$$\psi_3(z,\mu) = \frac{1}{\mu+1}\cdot\frac{d\psi_1(z,\mu+1)}{dz}.$$

Läßt man $\frac{z}{\mu}$ an die Stelle von $z$ treten und geht zur Grenze für unendlich wachsende Werte von $\mu$ über, so kommt man auf die in Nr. 2 entwickelten Formeln zurück.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

~~DUE JUN 27 '45~~