



S. 1802 C. I.









Xu 411

Comm. I-XIV  
Nov. - I ~~IX~~  
Asia I, II, III, IV

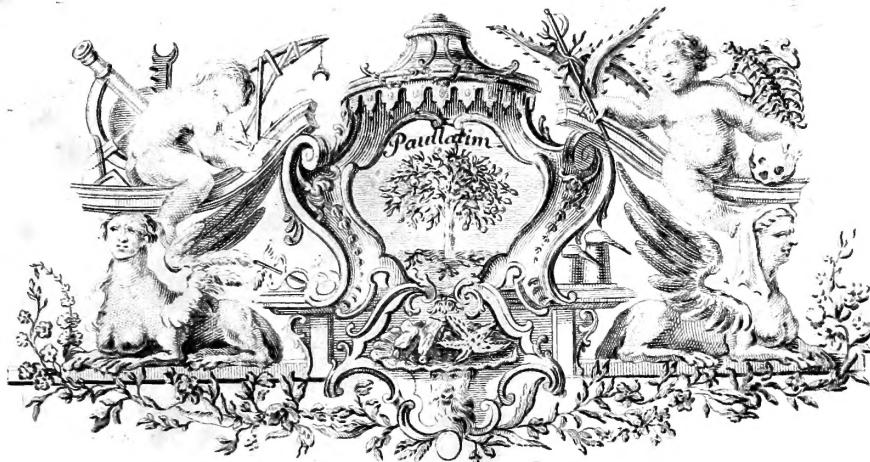
108546

S. 1802 C. L.

COMMENTARI  
ACADEMIAE  
SCIENTIARVM  
IMPERIALIS  
PETROPOLITANAE

---

TOMVS I.  
AD ANNVM cōlcc xxvi.



PETROPOLI  
TYPIS ACADEMIAE  
cōlcc xxviii.



P E T R O II

R V S S O R V M I M P E R A T O R I

A V G V S T O

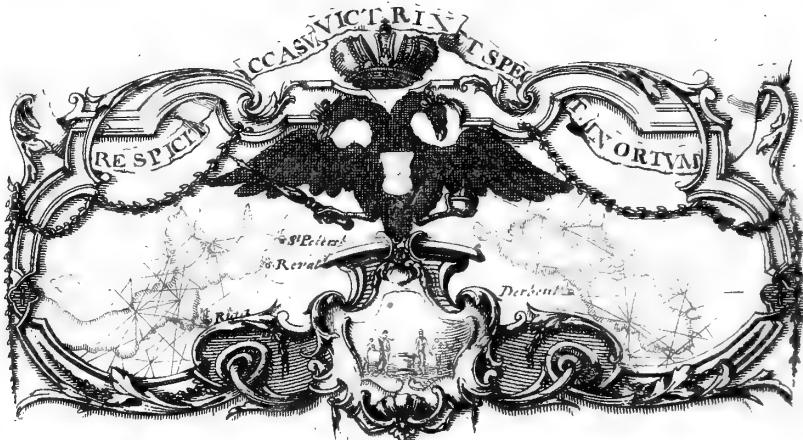
C E T E R A C E T E R A C E T E R A

I M P E R I V M P A C I F I C V M

D I V T V R N V M F E L I X

P R E C A T V R

A C A D E M I A P E T R O P O L I T A N A .



*V*anquam dictu difficile est, utrum belli an pacis artibus maiorem gloriam consecutus sit PETRVS MAGNVS Imperator, Avus Tuus, tamen hoc utique certum est, eum in utroque genere excellentem non modo praeclara multa et paene incredibilia praestitisce, verum etiam plura volvisse animo, et futuro tempori exequenda destinasse, nisi inopinata morte oppressus fuisset. Quae cum orbi terrarum nota sunt, supervacaneum foret, hic repetere, si ullo pacto temperare nobis possemus a tantarum virtutum commemoratione, quas in Te iam renascen-

*scentes, imo, ut rectius loquar, in iuventute Tua maturas cernimus aptasque ad perficienda omnia, quae Petro in caelum recepto Divina Providentia Tibi reservavit.*

*Inter ultimas Magni illius Imperatoris curas non minimam fuisse constat, quam de Academia Petropolitana susceperebat; neque arbitror, ullum huic Academiae honorificentius, aut de eiusdem utilitate certius testimonium produci posse, quam quod divi Petri auctoritate partim in Germania, partim in Gallia Italiaque tam solciter, tam constanter, tantisque praemiis propositis, viri, qui huic negotio pares credebantur, conquisiti sunt, quorum studia labores ac vigiliae, cum ad cives Tuos, AVGVSTE, in primis pertineant, eo minus hoc primum suorum Commentariorum volumen Tibi Patri Patriae offerre dubitant Academicici, quod Avi Tui auspiciis iam pridem inchoatum, Tuο nunc demum iusu ac munificentia in publicam lucem prodit.*

*His suis speciminibus non infeliciter se imitatos putant Societatis Parisinae aliarumque industriad, quarum iudicio et exemplo se tuerunt adversus illorum reprobationem, qui acutissima in Physica et Mathesi problemata*

*contemnunt, nisi illico usus eorum aliquis in  
Mechanica similive arte ostendatur: tanquam  
si cognitio veritatis, quae ipsa per se in omni  
doctrina sapientem delectat, solius lucri, quod  
inde quaeri potest, magnitudine metienda sit,  
cum tamen utilitas Geometriae difficilioris il-  
lius atque intimae, etiam in quotidianis re-  
bus ingens deprehendatur, uti ex iis, quae de  
arte navigandi, de temporis in aequales arti-  
culos divisione, de iactu telorum, propaga-  
tione soni atque luminis aliisque quam pluri-  
mis problematis demonstrata fuerunt, constat.  
Praeterea siderum scientiam Astronomi tum  
Petropoli colunt, tum ad extimas, quae im-  
perio Tuo parent, septentrionis oras transtu-  
lerunt, ut iuncta in tam diversis locis opera  
observationes suas ad incrementum Astrono-  
miae atque Geographiae conferrent. Erunt  
denique in iis, quae ad Anatomen et Huma-  
nitatis studia pertinent, nova non pauca, nec  
aequis iudicibus spernenda.*

*Academici vero existimarunt, se non me-  
lius de civibus Tuis, quibus erudiendis praefer-  
cti sunt, mereri posse, quam si amorem earum  
artium, quarum scientiam ipsi profitentur, Ti-  
bi a teneris commendarent, quando ad Impe-  
ratoris*

ratoris exemplum reliqua hominum turba componi solet: idcirco Mathematum et Historiarum epitomas quasdam aetati atque indoli Tuae aptas partim ediderunt, partim adhuc parant, quibus utriusque scientiae initia traduntur, facilia illa quidem, sed ita necessaria, ut sine iisdem ad veram eruditionem nemo perveniat. Praeterea usum machinarum in attenuando comprimentove aere, in allevandis parva vi maximis oneribus, in excitando per radios solis igne, aliaque et utilia et visu iucunda Tibi semel atque iterum demonstrarunt, quum, mirantibus iis, qui adstabant, contemplari omnia accurate, antliam denique ipse manu versare atque aerem extrahere gauderes. Haec illi, ut potuere, in hunc diem tentarunt, plura olim, atque maiora in Tuum Tuaeque gentis usum praestituri. Sicut non illico poma profert arbor peregre transplantata, sed tempore opus habet et cultura soli, ut radices agat atque in terram insinuet, antequam efflorescat et fructus ipsa suos carpentibus commendare possit: ita mirum non est, uno alterove anno non omnia commoda ex Societate nostra in Russiam emanasse, quae procedente tempore certo sequentur, postquam leges Academicis datas et reditus a Petro Magno

*gno iisdem constitutos Tua singularis benevolentia in sempiternum tempus confirmavit.*

Tibi vero DEVS bunc erga bonas artes animum servet, avertatque a Te, quaecunque indoli Tuae divinae repugnant. Servet Tibi hanc clementiam atque mansuetudinem, qua paucis post adeptum imperium diebus edicebas, “*praecipuam*  
“ *Tibi curam fore, ut populum Tuum pietate*  
“ *et iustitia regas, ut afflictis succurras, ut pau-*  
“ *peres et iniuste oppressos ad Te configentes*  
“ *non repellas, sed vultu sereno querimonias*  
“ *eorum exaudias et laudatissimo Titi Vespasia-*  
“ *ni exemplo neminem unquam a Te tristiorum*  
“ *dimittas.*

*Quid non boni expectemus ab Imperatore,*  
*qui haec pollicetur? Quae profecto tanta sunt, ut*  
*nec Russia Dominum optare possit, cui pareat libentius, neque alium eligere potuisse videatur Di-*  
*vina Providentia, cui potius, quam Tibi gene-*  
*rique Tu imperium sine fine concederet.*

*Moscuae  
Calend. Novembr.  
el locc xxviii.*

*Academicorum nomine  
scripsit*

*Christianus Goldbach.*



## PRAEFATIO.

**N**on dubito, quin Societatis nostrae Commentarii, cum ad exteris nationes pervenerint, desiderium in illis excitaturi sint, penitus cognoscendae huius ipsius Congregationis, et sane interest eruditorum, praesertim qui communia nobiscum studia colunt, ut non solum sciant, quid apud alias gentes novi inventum sit, et quae incrementa ipsae artes ceperint, sed etiam intelligant, quo numero et loco sint illi, qui has artes profitentur atque exercent, nobis vero favorem ac beneficia Augustorum, quibus convocati, et in hunc diem excepti nutritique sumus, silere, nisi ingratis, non licet.

)()()

PE-

PETRUS I. Russorum Imperator cum per varias Europae regiones iret , in quibusdam vero etiam subsisteret diutius , ita ubique versatus est, ut quidquid usquam optimum esset, id animo comprehenderet atque in civium suorum usum conservaret , consilio laudabili , successu admirando. In Britannia et Belgio , non modo quae ad instruendam classem , bellumque navale administrandum pertinerent , solicite perspexit ac tenuit , sed prima rei nauticae rudimenta artemque naves et gubernandi et extruendi didicit , sed didicit ea solertia eaque laboris patientia , quae fidem apud posteros superabit. In Germania haud dubie complura ad usum belli et emendationem disciplinae militaris utilia observavit , quae in Russiam transferret. In Gallia copia rerum et ingenio atque humanitate incolarum mirum in modum delestatu est, occurrentibus veluti eruditis atque invicem certantibus , ut bonarum artium studia Hospiti commendarent : Academiam vero Parisinam , perspecta eiusdem utilitate meritisque

tisque Academicorum, ita dilexit, ut insolito quidem sed memorabili exemplo isti Societati nomen daret. Non enim a Maiestate sua alienum putavit, in eorum collegium adoptari, quorum opera atque vigiliis, pacis bellicique artes ab ignorantia pristinorum saeculorum vindicantur, et naturae scientia, qua nihil pulchrius, nihil excellentius humanum ingenium novit, his nostris temporibus incredibiliter aucta atque perfecta est.

Cum ad suos rediisset Petrus M. epistola ad Academicos Parisinos data (quae publice extat) se etiam ad diligentis Academicorum laudem contendere affirmabat, et praeter descriptionem Caspii maris plura communicaturum non indigna iudicio et industria Academicorum pollicebatur. Postea vero quam bellum difficile et pertinax memorabili ac gloriosa pace composuerat, ad nutriendas excolendasque in regnis suis artes praecipue curam intendit, et consilium condendae Petropoli Academiae, quod iamdiu  
)( 2 presse-

preferat, exequendum duxit. Fuit ille quidem ita de salute ac fama gentis suae solitus, ut nihil domi omitteret, quod, sive ad extruendam urbem suo nomine dignam, sive ad classem navium amplissimam et cum instru-  
etissimis quibusque comparandam require-  
retur, sed multo magis armis requiescenti-  
bus imitandam putavit illustrem Gallorum,  
quam paullo ante diximus, Academiam, et  
cum minime ignoraret, quantis difficulta-  
tibus obnoxium esset negotium, tantum  
abest, ut a proposito desisteret, ut potius,  
quae erant obstacula mirabili benignitate ex-  
pugnaret. Iam litterae ad exterros cum man-  
dato Imperatoris mittebantur, iam responsa  
adventabant, cum inopinata morte Petrus  
terris eripitur. Huius fati nuncio quamvis  
valde perturbarentur, qui se itineri parave-  
rant, CATHARINAE AVGVSTAE au-  
toritate mox confirmati sunt, acceptisque  
amplissimis privilegiis Petropolin concesse-  
runt plerique eorum, quorum nomina in ti-  
tulis speciminum exstant, praeter

Ioan-

*Ioannem Simonem Beckensteinum,  
Ioannem Georgium Leutmannum et  
Michaelem Burgerum,*

qui postremi advenerunt. *Nicolaus Bernoullius*  
*et Michael Burgerus*, vertente adhuc anno,  
diem suum obierunt, de quorum vitis et  
meritis alias dicemus.

Praeter hos viri quidam celeberrimi in  
exteris terris degentes ad Societatem no-  
stram accesserunt, quos honoris cauſa nomi-  
namus, eo ordine, quo in Academiam co-  
optati sunt,

*Christianus Wolfius, Marpurgi,  
Ioannes Bernoullius, Basileae,  
Marchio Ioannes Polenius, Patavii et  
Petrus Antonius Michelottus, Venetiis.*

Industria eorum, qui in hanc Societa-  
tem convenerunt, tripartita est, aliis Ma-  
thesin, aliis Physicam, aliis denique Hu-  
manitatis studia colentibus, eo ordine atque

lege, ut quilibet in se receperit, non solum quotidie una hora eam artem, quam callet, publice docere atque in eadem duos iuvenes sibi commissos instituere privatim, verum etiam eiusdem artis suae epitomen, quae dissentium studiis inserviat, aut aliquod insigne opusculum conscribere, suoque ingenio et solertia scientiae fines promovere. Idcirco pauci Academicorum, qui iam sub aestate anni cl<sup>o</sup> l<sup>o</sup> cc xxv accesserunt, privatos conventus inchoarunt, in quibus, quae domi quisque elaboraverat, p<sup>r</sup>aefec<sup>t</sup>it, ut collegarum sententias exploraret, quae consultationes aucto deinde Academicorum numero bis in hebdomade continuatae, in hoc, quod nunc publicamus, et alterum, cuius impressio maturabitur, volumen succreverunt.

Cum vero haec Societas ab aliis, quae in Europa florent, eo differat, quod in istis indigenae plerique, in hac nostra exteri fere

fere omnes reperiantur , illos saepe pri-  
vata industria in Societatem coeuntes Re-  
gis au<sup>t</sup>oritas confirmarit , has sola Impera-  
toris Maiestas sustineat , aequum erat pro-  
videre , ne quid iis , ad commoditatem  
vitae deesset. Igitur et stipendia et subsi-  
dia studiorum , de quibus pa<sup>t</sup>ti erant Aca-  
demici , liberaliter exhibita fuerunt. Ac-  
cessit PETRI II. editum , quo Academiae  
reditus perpetuo confirmantur.

Qua de cauſa speramus fore , ut Aca-  
demici , processu temporis et maiora et uti-  
llioria Russicae genti producant , si Impe-  
rator , qua coepit clementia , bonas artes  
tueatur , Avique destinata perficiat. Verum  
quando ipse maioribus curis distinetur ,  
dum tanti imperii gubernacula capessit , ut  
tam diversas et per maximam partem Eu-  
ropae Asiaeque diffusas nationes five in offi-  
cio contineat , five a vicinorum iniuriis  
defendat , rogamus atque obtestamur , vi-  
rum

rum immortalibus in Russiam meritis illu-  
strem, Imperii Russici Procancellarium Baro-  
nem HENRICUM de OSTERMANN, ut ad tam  
multa, quibus Academicos sibi obligavit,  
beneficia hoc maximum addat, et quemad-  
modum AVGVSTO praeципue affectum  
atque amorem erga eruditos viros excita-  
vit, eundem pro sua summa prudentia  
et gratia apud Imperatorem conservare  
atque augere velit.

Christianus Goldbach.

INDEX

# INDEX COMMENTARIORUM IN CLASSE MATHEMATICA.

- Iacobi Hermanni*, De Mensura virium Corporum. p. 1.  
*Georgii Bernhardi Bülfingeri*, De Viribus corpori moto insitis,  
et illarum Mensura. p. 43.  
*Nicolai Bernoullii*, De Motu corporum ex percussione. p. 121.  
*Danielis Bernoullii*, Examen Principiorum Mechanicae p. 126.  
*Iacobi Hermanni*, De Problemate Kepleriano. p. 142.  
*Eiusdem*, De Calculo integrali. p. 149.  
*Ioannis Bernoullii*, De Integrationibus Aequationum differen-  
tialium. p. 167.  
*Christiani Goldbachi*, De Casibus quibusdam integrabilibus. p. 185  
*Nicolai Bernoullii*, Analysis Aequationum quarundam differen-  
tialium. p. 198.  
*Christiani Goldbachi*, Methodus integrandi Aequationem diffe-  
rentialem. p. 207.  
*Iacobi Hermanni*, De Epicycloidibus Sphaericis. p. 210.  
*Christiani Wolffii*, Principia Dynamica. p. 217.

# IN CLASSE PHYSICA.

- Iohannis Christiani Buxbaum*, Noua Plantarum genera. p. 241.  
*Georgii Bernhardi Bülfingeri*, De directione Corporum gravium  
in vortice Sphaerico. p. 245.

XXX

*Ioannis*

- Ioannis Georgii Du Vernoii*, Descriptio Vasorum Chyliferorum. p. 262.
- Danielis Bernoullii*, Tentamen nouae de motu Muscularum Theoriae. p. 297.
- Eiusdem*, Experimentum circa neruum opticum. p. 314.
- Georgii Bernhardi Bülfingeri*, De variis Barometris sensibilioribus et eorum noua specie ac usibus. p. 317.
- Ioannis Georgii Du Vernoii*, De Cisterna et ductu Thoracico Catopardi, Phocae et Elephanti. p. 342.
- Friderici Christophori Meyeri*, De Luce Boreali. p. 351.
- Petri Antonii Michelotti*, Rari ac prope inauditi ex utero morbi historia. p. 368.
- Observationes Anatomicae*. p. 379.

IN CLASSE  
HISTORICA.

- Theophili Sigefridi Bayeri*, De origine et priscis sedibus Scytharum. p. 387.
- Eiusdem*, de situ Scythiae sub aetatem Herodoti. p. 400.
- Eiusdem*, De Muro Caucaseo. p. 425.

\* \* \*

- Iosephi Nicolai De l'Isle et Ludouici De l'Isle de la Croyere*  
*Observationes Astronomicae*. p. 465.

CLAS-

*CLASSIS*  
P R I M A  
*continens*  
**MATHEMATICA**





# DE MENSURA VIRIUM CORPORUM

Autore I. Hérmanno.

## I.



*Is corporis cuiusque , consentientibus M. Sept.  
Mechanices scriptoribus omnibus , de- 1725.  
notat potentiam motum efficiendi , vel in  
hoc ipso corpore cui hæc potentia in-  
esse intelligitur , vel in aliis corpori-  
bus ab ipso diversis . Nullum enim corpus vere qui-  
escens tales potentiam motricem habere potest , sed vi-  
tantum inertiarum præditum est , qua , vi in ipsum agenti ,  
resistit .*

2. Sermo autem hic est de corpore *vere* quiescen-  
te , & hoc nomine intelligimus non simpliciter illud  
quod apparet tantum quiescit , sed illud potius quod

A omni

omni conatu ad motum destitutum est. Dantur enim corpora quæ, etiamsi actu ipso non moveantur, conatum tamen habent ad motum, qui verò conatus propter interposita impedimenta inefficax est. Sic corpus grave piano cuidam horizontali incumbens apparenter quidem quiescit, quia planum in quo est descensum ejus impedit, sed non ideo tamen vere quiescit, quandoquidem conatum descendendihabet, qui in descensum actualem erumpet, simulatque planum corporis descensum impediens ablatum fuerit.

3. Ingens ergo discriminè est inter potentiam quæ *motum actualem* producit, & potentiam quæ tantum in *simplicem conatum* definit. Hæc enim est tantum *Vis mortua*, illa vero vis viva vocatur. Itaque corpus filo appensum, vel piano cuicunque insistens *vim mortuam* tantum habet. Sed si actu ipso movetur, tunc *vim vivam* habere, dicetur.

Omnis autem scientia Mechanica versatur in eo, ut mensuras idoneas inveniamus juxta quas tum vires mortuas corporum, tum vires vivas rectè æstimare liceat. Ex quo apparet veram doctrinam virium nonnullius momenti esse, adeoque dignam quæ diligenter & caute excolatur. Et iamsi verò circa vires mortuas nullæ sint controversiæ, ut sunt circa vires vivas, ab iis tamen initium faciam.

4. Quantum ergo ad vires mortuas attinet earumque mensuram: Hæc mensura inventu difficultis non est. Modica enim attentio adhibita manifestabit unicuique, quod pondus cuiusque corporis mensura sit ejus *vis mortuæ*, in quantum hæc vis manat ex principio gravitatis. Hanc restrictionem addidi, quia alia datur species vis mortuæ in corporibus, quæ non fluit ex principio gravitatis,

vitatis, & hujus speciei vis mortuæ sunt *vires centrifugæ* corporum in gyrum actorum. Quotiescumque enim corpus aliquod uniformi, aut etiam quocunque variato motu peripheriam circuli aliasve curvæ describit, singulis motus hujus momentis conabitur motum suum prosequi in directione tangentis circuli vel curvæ in eo puncto in quo est : Singulis ergo momentis mobile conatur à peripheria circuli, vel à curva recedere in directione perpendicularis ad tangentem per centrum gravitatis corporis transirentis, sed quoties mobile reapse non potest recedere à peripheria circuli vel curva & tantum conatum habet recedendi , hic conatus est *vis mortua*. Conatus enim centrifugi cum gravitate comparari possunt, siveque adeo vires centrifugæ & gravitas quantitates homogeneæ. Jam *vires mortuæ* cujuscunque sint speciei sunt massis corporum proportionales, si cætera sint paria: hoc est, si gravitas in utroque mobili sit eadem; aut si ambo mobilia incedant æquali celeritate in circulis æqualibus. Hoc probatu facillimum: incumbant plano cuidam horizontali & immobili corpora duo inæqualia, minus A & majus B, utrumque tantam vim in planum exseret , quantum est ejus pondus, quia hoc planum descensui amborum corporum directe oppositum & immobile est ; est vero pondus majoris B ad pondus minoris A , ut massa ipsius B ad massam ipsius A , hoc enim passim receptum est, ergo vis mortua corporis A est ad vim mortuam alterius B , ut massa A ad massam B. Res ergo ita se habet cum viribus mortuis à gravitate pendentibus , idemque de iis quæ à viribus centrifugis fluunt , facile ostendi potest; nam quia (*hyp.*) ambo corpora A & B æquali celeritate in

circulis æqualibus in gyrum aguntur , si B majorem habet virtutem centrifugam quam corpus A , id venit à massa , propterea toties vis centrifuga corporis B major est vi centrifuga corporis A , quoties massa illius B major est massa hujus A . Est ergo , ut vis mortua B proveniens ab ejus vi centrifuga , ad vim corporis A , ita massa B ad massam A .

Pari ratione ostendī potest , quod , si intensitas gravitatis in diversis corporibus , aut intensitas vis centrifugæ corporum in diversis circulis gyrantium , diversa sit , vires mortuæ futuræ sint in ratione composita ex massis corporum & intensitatibus gravitatis , aut viribus centrifugis corporum circulariter motorum . Per intensitatem verò gravitatis aut vis centrifugæ intelligo , gravitatem seu pondus , quod corpus cuius massa est ut 1. habet in diversis distantiis à centro gravium , vel vim centrifugam quam idem corpus in diverso statu motus circularis habet . Tantum de viribus mortuis .

5. Quam verò rationem habet vis mortua ad vim vivam ? ad hanc quæstionem probatissimi quique Autores respondent , quod vis viva infinita sit præ vi mortua , & legi merentur ea , quæ hac de re habent Galileus , Torricellius , Joh. Alph. Borellius & alii , qui omnes dedita opera probare conati sunt tum experimentis , tum etiam rationibus , vim percussione infinitam esse , si cum simplice pondere vel gravitate corporum eam comparare velimus . Superfluum duco eximiorū virorum argumenta huc transcribere , quippe quæ in ipsorum operibus editis legi & ponderari possunt , & super hac re nulla controversia est inter Peritos . Id unicum ergo hoc loco monebo , præclarissimos illos Philosophs .

phos accuratius locuturos fuisse , si vim percusionis, & gravitationem corporum quantitates heterogeneas, adeoque comparationis incapaces dixissent ; quemadmodum *Cartesius* de hisce virium speciebus locutus est, qui (Epist. 74. Part. 1.) ad P. *Mersennum* expresse scribit , quod *vis* ea quæ ponderi ad aliquam altitudinem attollendo sufficit *duas semper dimensiones habeat* , illa verò quæ sustinendo ponderi in quolibet hujus altitudinis puncto sufficit, *nunquam plures dimensiones habeat, quam unam*, ita ut hæ vires perinde inter se differant ac superficies à linea , ac propterea rationis incapaces sint. Hoc idem de vi percusionis & de gravitatione corporum est dicendum , illa enim est vis viva hæc verò vis mortua. Quæ in hoc paragrapho strictim tantum diximus in sequentibus clarius probabuntur , posteaquam de mensura virium vivarum loquuti fuerimus.

6. Non una omnium est sententia circa rationem quam *vires vivæ* inter se servant. Plerique enim autem has vires sequi rationem impetum corporum , seu quantitatum motus, hoc est , quod vires vivæ duorum corporum sint in composita ratione massarum & celeritatum. Ita sane universa pene Mechanicorum cohors sentire videtur. Qui vero cum *Illustri Leibnitio* sentiunt , paulo aliter statuunt , vires illas vivas in composita esse ratione massarum & duplicata velocitatum corporum. Hanc thesin *Leibnitius* primum inferuit *Actis Erudit.* 1686. pag. 161. eamque ex gemino principio deduxit 1. *quod unumquodque corpus grave* , abstracto ab omnibus motus impedimentis externis , *verticaliter cadendo vim acquirat ascendendi ad ipsam altitudinem* , *ex qua cecidit*. 2. *Quod vis qua opus est ad*

elevandum grave A unius libræ ad altitudinem quatuor ulnarum, præcise æqualis sit vi qua aliud corpus grave B, quatuor librarum attolli possit ad altitudinem unius ulnæ. Ex quibus ipsi facile fuit concludere, quod vires corporum sint ut facta ex massis in quadrata celeritatum. Certitudo autem hujus conclusionis pendet à certitudine principiorum, quorum primum nemini negatur, & alterum quoque cum hac restrictione *si tempora ascensuum æqualia fuerint*, ab omnibus admittitur. Hoc sensu saltem D. Abbas Catelanus qui in Novellis Reip. litterariæ 1686. pag. 577. Cartesianorum partes adversus Leibnitium in se suscepit, secundum Leibnitii principium admisit, prætendens tamen eo turpiter abusum esse Leibnitium, quod illud corporibus quæ inæqualibus temporibus altitudines suas absolvant, applicuerit, cum tamen motibus tantum isochronis, quoties quinque machinis vulgaribus applicatur, quadrare possit. Nempe Catelanus & alii Cartesianum principium de quo nunc agitur, ideo tantum de motibus *isochronis* intellectum voluerunt, ut spatia mobilibus describenda possent in celeritates convertere, & vires corporum, quantitatibus motus eorundem proportionales facere, nam in motibus uniformibus & isochronis celeritates sunt ut spatia. *Leibnitius* verò clare ostendit in iisdem Novellis 1687 pag. 131. nulla opus esse consideratione temporis in æstimatione virium corporum, & *Cartesius* ipse, qui (Epist. 73. Part. 1.) hoc principio utitur, *quod neque major, neque minor vis requiritur ad aliquod corpus grave certam ad altitudinem elevandum, quam ad elevandum alterum minusgrave ad altitudinem tanto majorem, quanto ipsum minus grave est; vel ad elevandum aliud gravius ad altitudinem tanto minorem, nullam temporis*

temporis mentionem injicit, etiamsi illud potentissimis mechanicis, in quibus motus isochroni obtinent, applicuerit. Imo verò in Epistola sequenti expresse hæc monet: *Primum illud quo possit quis in hoc præoccupari, est, quod plurimi solent spatii considerationem cum temporis aut celeritatis consideratione confundere; ubi statim subdit hæc: ita in vecte vel in bilance supposito quod unus radius alterius sit duplus et pondus breviori radio alligatum itidem duplum illius quod longiori radio sit annexum, ita ut sint in æquilibrio: ubi dicendum esset æquilibrii bujus causam esse, quod si pondus majus attolleret minus, aut ab eo attolleretur, tum majus illud pondus non pertransiret, nisi subduplicem spatium ejus quod minus pertransit: illi dicunt, quod duplo tardius moveretur; qui quidem error eo deterior est, quanto agnitus difficilior.* Sepositam ergo vult Philosophus considerationem temporis aut celeritatis, à consideratione spatii, in æstimatione virium vivarum, & in hoc ipso plus artis ostendisse contendit, quam in ulla alia ejusdem scripti statici parte. Ipse met ergo Cartesius cum Leibnitio sentire quadrantenus videtur.

7. Vulgaris opinio, quod vires vivæ sint ut impetus seu quantitates motus corporum, fundari videtur in principio nemini quidem negando, sed male adhibito, nempe in hoc axiomate, quod *effectus proportionales sint causis suis adæquatis.* Plerique saltem communem virium æstimationem ex hoc axiomate deducunt: Nam si vis aliquuj corporis est potentia ejus motum efficiendi, hæc potentia consideranda veniet instar causæ, & motus productus instar effectus; quare potentia dupla, tripla vel ad libitum multiplex, producet motum duplum, triplum &c. vel æque multiplum; hoc ergo pacto vires vivæ corporum

porum forent ut quantitates motus seu impetus, non ergo liquet cur hæ ipsæ vires debeat esse ut facta ex massis corporum in quadrata celeritatum, ut Leibnitius docuit.

8. Non negamus speciosum esse hoc argumentum, sed nihilo tamen verius illud arbitramur. Non inficiamur, quod *causæ sint effectis suis proportionales*, id enim recte intellectum & legitime applicatum non modo negari non potest, sed ipse etiam Leibnitius admittit aliis verbis, cum statuit *in violabilem esse æ qualitatem inter causam plenam & effectum integrum*: reapse enim causa eatenus causa est, quatenus effectum suum edit, adeo ut hic effectus & causa quæ ipsum edidit æquipolleant, quod si est: qua ratione causa agens augetur vel minuitur, in eadem ratione augebitur quoque vel minuetur effectus. Sed negamus quod motus corporis seu impetus quatenus hic exponitur per facta ex massa in celeritate corporum, integer & adæquatus sit effectus potentiae agentis, sed potius altitudines seu spatia per quæ corpora ascendere possunt, assumenda essent pro mensura effectuum quos potentiae in hæc corpora agentes edere possunt, nec enim, vel ipso *Cartesio* judice, hæc spatia cum celeritatibus aut temporibus sunt confundenda. Celeritates enim sunt tantum entia *modalia & incompleta*, secus ac spatia quæ corpora ascendendo conficiunt. Ad hoc præterea accedit, quod effectus per quantitates motus expositi, non sint capaces mensuræ accuratæ. Genuina enim mensurandi lex poscit, ut id præcise, qnod pro mensura assumimus, semel vel pluries contineatur vel replicetur in rebus mensurandis, id autem in corporibus diversis celeritatibus latis evidenter non obtinet, etsi enim (ut exemplo Leibnitiano utar) tria corpora æqualia & æquivelocia

velocia præcise triplo plus habere potentia agnoscam, quam eorum unum, quia una eademque mensura etiam hic ter repetitur, ter enim repetitur corpus certæ quantitatis qualis fuit singulorum, non tamen ideo statim concedi potest, corpus tres celeritatis gradus habens, ter continere corpus ipsi æquale unum habens velocitatis gradum, quia in hoc posteriori exemplo communis mensura non eodem modo replicatur in majori quantitate, quo replicabatur in primo exemplo; in hoc enim ens *substantiale*, hoc est, corpus gradum unum celeritatis habens replicatur ter, in altero vero exemplo *celeritas* quæ est ens *modale & incompletum* unius ejusdemque rei substantialis seu corporis nostri, replicatur ter, quare non uno eodemque modo minus continentur in majori in duobus hisce exemplis.

9. *Leibnitius* præterea in pluribus locis, nempe in *Actis Erudit*, 1690. pag. 235. s. 1691. pag. 439. & 1695. pag. 156. & alibi contradictionem apertam seu absurdum nasci ostendit ex eo, si vires vivæ æstimentur per quantitates motus corporum. Supposuit enim globum aliquem A, cecidisse verticaliter ex altitudine unius pedis, & cum velocitate in fine hujus altitudinis acquisita motum æquabilem in plano horizontali continuantem, impegisse in globum subquadrum & qui-  
escentem B, & in hunc quicquid motus & virium habebat transtulisse, adeo ut globus B, hoc impactu qua-  
tuor celeritatis gradus acquisiverit, & juxta systema or-  
dinarium vim æqualem illi quam globus A, casu ex alti-  
tudine unius pedis obtinuerit; ostendit deinceps *Leibni-  
tius*, quod, cum globus B, motum suum à globo A ac-  
quisitum verticaliter in altum convertens, assurgere possit

ad altitudinem 16 pedum, ope vectis cuiusdam attollere possit globum A ad altitudinem plusquam triplo majorem ea, ad quam idem globus A assurgere poterat cum vi quam casu ex altitudine unius pedis acquisiverat. Jam contradic̄tio & absurdum in eo situm est.

Habemus duo corpora quorum A habet massam ut 4, celeritatem ut 1; alterum B massam ut 1 sed celeritatem ut 4, quæ viribus æqualia statuuntur, cum tamen globus B, cum vi sua corpus aliquod, alteri A æquale, attollere possit ad altitudinem majorem tribus pedibus, corpus verò A, tantum vim habeat se se attollendi ad altitudinem simplam unius pedis. Quare corpus B simul & eodem tempore vim *majorem* & vim *æqualem* habet vi corporis A.

*Papinus* contra quem *Leibnitius* hoc argumentum userat in *Act. Erud.* locis cit. aliud replicandum non inventit, quam hoc, per vires naturæ impossibile esse, ut motus globi A transferatur in alterum quiescentem B, sed cum postea *Leibnitius* ostendisset, quomodo hoc fieri possit, atque vectis consideratione ad id usus effet, exceptit, *nulos dari vectes perfecte rigidos et inflexiles*. Sed tam levi opera vis argumenti non eluditur. Largiamur quod motus alicujus corporis in aliud inæquale corpus transferri non possit, largiamur itidem nullum in rerum natura dari vectem rigidum & inflexilem, nihil profecto decedet vi argumenti; nam fieri potest, ut globi A & B, qui ratione massæ sunt in ratione quadrupla, æquales habeant motus quantitates, idque sine suppositione quod motus unius transeat in alterum, aut quod dentur vectes rigidi & inflexiles; itaque fieri potest ut minor B, motum suum in altum convertens assurgat ad altitudinem 16 pedum

16 pedum, & si hoc est, agnoscendum erit, quod globus B attollere possit globum A ad altitudinem plusquam 3 pedum, sive detur vectis perfecte rigidus & inflexilis, sive minus: salvum ergo manet Leibnitii argumentum non obstantibus Papini exceptionibus.

Ex dictis ergo quadantenus liquere autem, quam lubricum & inconstans sit negotium vires corporum per quantitates motus æstimandi, idque tanto magis, quod celeritatis considerationem in hoc subjecto Cartesius ipse excluderit loco supra jam citato, nempe in Epistola 74. Part. I. ubi inter alia hæc habet: *nihil de celeritate bene et solide dici potest, nisi prius recte explicata gravitate totoque simul mundi systemate*, etsi vero circa hanc propositionem paulo aliter jam sentiunt Recentiores, ex ea tamen patet, quod ad æstimandas vires non necessum putarit Philosophus ad celeritates attendere, sed potius ad resistentias quas corpora vincendas habeant, ut in eadem epistola expresse patet.

10. Quoniam ergo quantitates motus corporum non sunt effectus integri & pleni potentiarum in corpora agentium, nondum inferre licet ex eo, quod causæ effectus suis adæquatis proportionales sunt, vires vivas corporum proportionales esse quantitatibus motus eorumdem, ut passim supponi solet: & hanc ob causam indagandum restat, quinam ergo sint effectus illi adæquati & reales virium vivarum? Cartesius ipse jam pridem ejusmodi effectus reales in laudata epistola indigitavit, quando ad resistentias viribus ascensionalibus superandas attendere, obiter saltem, præcepit. Hoc modo enim habemus effectus mensurandis viribus idoneos: nam propositio hæc, *Quod omnia impedimenta motus quæ*

*vim aliquam extinguunt simul sumta, huic vi æqualia sint, æque clara & certa esse videtur, ac ullum aliud Geometriæ axioma, & eodem creditur ac si diceretur, omnes partes alicujus totius et hoc totum ipsum, æqualia esse: nam singula impedimenta totidem partes de vi corporum tollunt, & universa totam vim.* Dispiciendum ergo restat, quænam sint impedimenta illa quæ vires corporum exhaustiunt? ipsa gravitas jam tale est, nemo enim ignorat, quod corpus aliquod data cum celeritate verticaliter in altum projectum motum suum non continuet in infinitum, sed ad certam tantum altitudinem pertingat; ascendere autem deberet in infinitum, si nullam resistentiam nullumque motus impedimentum subiret; adeoque ex eo, quod limitatam tantum altitudinem conficiat quam transfilire non possit, necessario concludendum, id venire à resistentiis, quas superare debeat dum ascendit; hæ verò resistentiæ non proveniunt solum ab aere corpus ascendens ambiente, sed potissimum à gravitate. Nam si à solo Aere venirent, Corpus illud in Aere rarissimo ad quam liberet altitudinem assurgere deberet, quod cum non fiat, concludendum est, dictam altitudinem gravitatis corpori resistentis indubitatum indicium esse: gravitas enim est vis illa qua corpora jugiter versus tellurem pelluntur, propterea hæc vis, quippe contraria vi ascensionali, instar resistentiæ jam spectanda venit. Hoc, nifallor, adeo clarum est, ut fusiore probatione non videatur opus: Sed non æque evidens forte videbitur, quomodo hæc resistentia à gravitate proveniens mensurari debeat? Veruntamen unusquisque qui attenderit, quod corpus ascendens in singulis altitudinis suæ describendæ punctis æqualiter in terram gravitet, non potest non videre,

dere, summam resistentiarum corpori ascendentis superandarum optime exponi per factum ex altitudine ascensus in pondus corporis; & cum hæc resistentiarum summa (per superius dicta) vi corporis initio ascensus æqualis sit, liquet, hanc ipsam vim vivam mensurandam esse per hoc factum ex altitudine ad quam corpus ascendit, in pondus ejusdem corporis. Quod si verò præter opinionem id nondum satis evidens atque probatum videbitur iis qui pro adversa parte stant, demonstrationem hujus rei pleniorem dabo in sequentibus. Nunc verò ad alia pergo.

Inter innumera alia motus impedimenta & illud quoque ad mensuram virium aptum est, quod ab *elastris* æqualibus, & ad æqualem tensionis gradum perducendis petitur. Jam pridem Celeberr. *Joh. Bernoulli* ostendit, quod corpus aliquod A duos habens celeritatis gradus *quatuor elastris* similibus & æqualibus ad eundem tensionis gradum adductis vim suam exhaustat, dum idem corpus A *unicum* habens celeritatis gradum *unicotum elastro* ad parem tensionis gradum adducto vim suam exhaustat; talia verò elastræ æqualia & æqualiter tensa sunt effectus adæquati accuratæ mensuræ capaces, quos vires illæ corporis A, modo 2 modo 1 celeritatis gradus habentis edere possunt; quoniam vero effectus corporis celerioris ad effectum tardioris est, ut 4 ad 1, manifestum est utique, quod hi effectus sint in duplicata ratione celeritatum. Argumentum verò ipsum Celeberr. Viri, brevitatis causa hic non adduco, quod illud dilucide expositum legi possit in *Cel. Wolfii Elementis Mechanicæ* pag. 594. Paragr. 275.

Hoc idem alia adhuc ratione eleganter ex elastrorum theoriâ deduxit Celeb. *s'Gravesandus* in *Elementis Physices* pag. 112. Tom. I. B 3 11. Eadem

11. Eadem virium mensura haberi potest ex regulis motus quæ obtinent in collisione corporum, quemadmodum ante complures annos jam ostendi. Sit globus A, 2 velocitatis gradibus prædictus, qui in plano horizontali incèdens, incurrat in aliud globum, sed quiescentem  $B=3A$ ; huic ergo dabit celeritatem ut 1, & retrocedet A cum celeritate 1. Impingat deinceps hic globus A cum sua celeritate 1, in aliud globum quiescentem  $C=A$ , ipsique etiam dabit celeritatem 1, & motus ejus hoc secundo impulsu fistetur. Hæc verò omnia ex notissimis regulis motus corporum elasticorum levissima opera eliciuntur. Habemus ergo hic globum A, qui duobus impulsibus in singulos globos quiescentes  $B=3A$ , &  $C=A$ , celeritatem eandem transfundens, ut ita loquar, ad quietem redigitur, vimque suam amittit; eundem ergo effectum præsttit, ac si globo  $D=4A=A+3A$  celeritatem 1 impressisset, & globus idem A cum celeritate 1, alii sibi æquali uno impulsu itidem velocitatem 1 imprimet, & ad quietem redigitur, est ergo effectus globi celerioris ad effectum tardioris, ut 4A ad A, hoc est, ut 4 ad 1. Hanc ob causam est vis celerioris ad vim tardioris, ut quadratum celeritatis majoris ad quadratum celeritatis minoris.

Nec aliter se res habet cum eodem globo A, cum habet 3 gradus celeritatis: impingat enim primo in globum quiescentem  $B=5A$ , & post hunc impulsu retrocedet cum celeritate ut 2, in patientem vero B transferret celeritatem 1. Impingat secundò globus A cum residua velocitate 2, in globum quiescentem  $C=3A$ , iterumque hoc secundo impulsu unius gradus velocitatis jactu-

jacturam faciet, & patiens globus C celeritatis gradum 1 acquiret. Restabit hoc modo globo agenti A celeritas 1 post secundum congressum. Quod si denique cum hac celeritate in globum æqualem sed quiescentem D incurrat, quiesceret post hunc tertium impulsum, & patiens globus D eam celeritatem 1 quam agens A habebat, obtinebit. Quare globus A cum velocitatem 3 habet, motum suum vel potius vim suam omnem transferre potest in globos  $B=5A$ ,  $C=3A$ , &  $D=A$ , ita ut singulis det eandem celeritatem 1. Sed idem globus A celeritate 1 præditus, vim suam in unicum tantum globum ipsi æqualem ita transferre potest, ut patienti globo eam impertiatur quam ipse agens ante conflictum habebat. Quare vis globi A habentis celeritatem 3 est ad vim ejusdem cum celeritate 1, ut  $5A + 3A + A = 9A$  ad A, hoc est, ut 9 ad 1, id est, in duplicata ratione celeritatum.

Hoc idem semper eveniet, quæcunque sit ratio celeritatum, & sane curiosus hac in re sese prodit symbolismus inter corpora quæ datis velocitatibus verticaliter in altum projiciuntur, & corpora quæ iisdem velocitatibus alia corpora quiescentia impellunt. Altitudines enim in quarum summitatibus singulis corporis ascendentes celeritas initialis uno gradu decrescit, in eadem progressus sunt ratione numerorum imparium, in qua sunt massæ corporum quibus quiescentibus successivis ictibus unus celeritatis gradus imprimitur à corpore totidem celeritatis gradus initio habente, quot corpus ascendens habebat à principio ascensus, quæ celeritas integra corporis percutientis, singulis ictibus uno itidem gradu minuitur. Verbi gratia, corpus A quod cum celerita-

te initiali 2 ascendit, in summitate altitudinis 3 pedum jaeturam faciet unius gradus celeritatis, & in summitate altitudinis sequentis supra modo dictam altitudinem, alterum gradum similiter amittet: novimus enim quod corpus cum sua celeritate 2 ad altitudinem 4 pedum assurgere possit, abstrahendo nunc à resistentia aeris aliisve motus impedimentis. Similiter corpus A cum celeritate 2, impingens in globum quiescentem  $B=3A$ , hoc primo ictu unum celeritatis gradum amittet, & si cum residua sua celeritate 1, porrò incidat in globum quiescentem  $C=A$ , & hæc ipsi secundo hoc impulsu velocitas adimetur. Quod si idem corpus A ascendat celeritate initiali 3, ut ad altitudinem 9 pedum pervenire possit, in summitate primæ altitudinis 5 pedum, perdet velocitatis gradum 1, in summitate altitudinis secundæ 3 pedum sequentis post primam, perdet adhuc gradum unum, ac denique in summitate altitudinis tertiae unius pedis sequentis post secundam, amittet tertium suum celeritatis gradum. Quid fiet jam eidem corpori A si tribus vicibus successively impingat in globos quiescentes  $5A$ ,  $3A$ , &  $A$ , in primum celeritate 3? eveniet nempe ut primo ictu amittat gradum 1, & si cum residua celeritate 2, impingat in globum  $3A$ , perdet alterum gradum velocitatis, & cum eo qui remanet in corpus tertium A impingens mulctabitur tertio & ultimo celeritatis gradu. Hæc omnia ex doctrina motus gravium, & regulis communicationis motus ultrò fluunt.

12. Imò hæ regulæ communicationis motus non ineleganter deducuntur ex mensura virium vivarum corporum, quam hic probandam suscepimus, modò hoc unicum principium admittatur: *quod eadem virium quantitas*

*titas in percussione corporum conservetur, quæ erat ante conflictum.* Sint enim globi quorum massæ A & B, velocitates eorum ante conflictum  $a$ , &  $b$ , & post conflictum  $x$ , &  $y$ . Principium ergo istud præbet æquationem  $Aaa + Bbb = Axx + Byy$ , quam fundamentalē appellare liceat; nam secundum nostram virium æstimationem vires globorum A & B, ante concursum sunt ut  $Aaa$ ,  $Bbb$ , & vires eorum post collisionem  $Axx$ ,  $Byy$ ; inveniendæ ergo restant ex æquatione fundamentali æstimationes litterarum  $x$  &  $y$ . Hoc autem præstitu est facilimum; intelligantur enim motus globorum A & B eorumque conflictus peragi in spatio mobili, velut in navi, quod spatium celeritate indefinite parva  $dv$  feratur, in easdem, si velis, partes in quas globus A tendit, hoc modo videbuntur ex loco immoto velut ex ripa fluvii in quo navis, vel spatium mobile vehitur, globi A & B moveri, antequam congregiantur, velocitatibus  $a + dv$ , &  $b + dv$ , & post congressum, velocitatibus  $x + dv$ , &  $y + dv$ , quare si in locum celeritatum  $a$ ,  $b$ ,  $x$  &  $y$  æquationis fundamentalis, sufficientur eadem celeritates velocitate adventitia spatii deferentis auctæ, etiamnum manebit æqualitas, nempe  $Aaa + 2Aadv + Adv^2 + Bbb + 2Bbdv + Bdv^2 = Axx + 2Axadv + Adv^2 + Byy + 2Bydv + Bdv^2$ , vel deletis iis quæ se mutuo destruunt,  $Aaa + Bbb + 2Aadv + 2Bbdv = Axx + Byy + 2Axadv + 2Bydv$ , quod si vero ab ista auferatur æquatio fundamentalis  $Aaa + Bbb = Axx + Byy$ , restabit æquatio  $2Aadv + 2Bbdv = 2Axadv + 2Bydv$ , quæ per  $2dv$  divisa, præbet  $Aa + Bb = Ax + By$ . Vel transponendo  $Aa - Ax = By - Bb$ ; æquatio vero fundamentalis suppeditat hanc,  $Aaa - Axx = Byy - Bbb$ , quæ ulterius ad præcedentem applicata, dat pro æquatione resultante

$a+x=y+b$ . Elicuimus igitur ex æquatione fundamentali  $Aaa+Bbb=Axx+Byy$ , has duas  $Aa+Bb=Ax+By$ , &  $a+x=y+b$ ; quarum prior manifestat, quod commune centrum gravitatis binorum globorum A & B æquali celeritate ante & post conflictum moveatur: Nam  $\frac{Ax+Bb}{A+B}$  est celeritas huius centri gravitatis ante concursum, &  $\frac{Ax+By}{A+B}$ , est celeritas eius post collisionem. Altera vero æquatio resultans indicat, eandem esse acceleribus globis ante impulsu[m] velocitatem respectivam, quæ corporibus recedentibus post impulsu[m].

Iam ex inventa æquatione  $a+x=y+b$ , elicetur  $y=a-b+x$ , quæ æstimatio in  $Aa+Bb=Ax+By$  sufficita, præbet  $Aa+Bb=Ba-Bb+Bx+Ax$ , ex qua elicetur  $x=(Aa-Ba+2Bb):(A+B)$ . Quare  $y=(a-b+x)=(2Aa-Ab+Bb):(A+B)$ . Quæ celeritates ex unico illo assumto principio, & mensura virium Leibnitiana erant eruendæ.

13. Äquationes modo inventæ æstimationes litterarum  $x$  &  $y$ , definientes, præbent eas ipsas regulas motus ex percussione, quas Wrennus, Wallisius, Hugenius, Mariottus, & alii pro corporibus elasticis jam pridem dererunt, & aliis fundamentis superstruxerunt. Quæ ergo in præcedenti §. invenimus probandæ thesi nostræ, quod vires vivæ corporum sint ut facta ex massis in quadrata celeritatum, optime inservire possunt, adhibendo conclusionem instar præmissæ, & ex hac deinceps eliciendo, quod sit  $Aaa+Bbb=Axx+Byy$ . Nam si  $m$  significet altitudinem verticalem per quam descendens grave A motu naturaliter accelerato, in termino ejus inferiore velocitatem  $a$  acquirit,  $n$  vero altitudinem in cuius imo B suam celeritatem  $b$  motu pariter accelerato acqui-

acquirit, item  $p$  &  $q$  sint altitudines quas globi iidem A & B cum suis celeritatibus initialibus  $x$  &  $y$  motu natura- liter retardato conficere possunt; eruntque  $m, n, p$ , &  $q$  proportionales quadratis celeritatum  $aa, bb, xx$ , &  $yy$ , eodem ordine sumtis; surrogatis ergo in præcedenti æquatione pro  $aa, bb, xx$ , &  $yy$  altitudinibus illis proportionalibus, resul'tabit æquatio  $Am+Bn=Ap+Bq$ , vel etiam hæc  $\frac{Am+Bn}{A+B}=\frac{Ap+Bq}{A+B}$ . Iam vero fractio ad sinistram denotat quantitatem descensus communis centri gravitatis globorum A & B dum altitudines  $m$  &  $n$  perlabuntur, & fractio quæ est ad dextram designat quantitatem ascensus eiusdem centri gravitatis communis globorum A & B dum ipsi per altitudines  $p$  &  $q$  assurgunt. Quare concludendum, eandem esse quantitatem descensus communis centri gravitatis globorum A & B ante conflictum, cum quantitate ascensus eiusdem post conflictum, supponendo quod globi A & B motus in conflictu acquisitos verticaliter in altum convertant, perinde ac supposuimus velocitates eorundem quas ante congressum habebant, acquisitas fuisse descensu accelerato per eas altitudines quas paulo ante indicavimus: quantitates autem descensus & ascensus communis centri gravitatis globorum A & B, in corporum summam  $A+B$  ductæ, sunt mensuræ virium ante & post eorum concursum. Hoc saltem modo Ill. *Hugenius* plurium corporum simul motorum vel in se mutuo agentium vires semper æstimasse visus est, ut ex pluribus locis demonstrationum eius quas circa regulas motus ex percussione in opusculis posthumis dedit, constat, & liquidius adhuc ex theoria ipsius centri oscillationis, quam in Ho-

*rologio Oscillatorio* exhibuit. Quod si vero summa virium globorum A & B exponi debet per factum ex descensu centri gravitatis eorum in summam ponderum, & summa virium earundem per factum ex ascensu eiusdem centri gravitatis globorum A & B, in summam ponderum eorum, quidni vires eorundem solitariæ per Am & per Bn ante ipsorum congressum, & post congressum per Ap & Bq exponere liceret immo deberem? Sed non opus est ut huic argumento diutius insistamus, quando alia præstantiora in potestate sunt; inter hæc vero nullum mihi evidentius videtur eo, quod nascitur ex consideratione modi, quo *vis aliqua viva* nasci possit ex *vi mortua*.

Fig. I.

14. Ad obtainendam mensuram *vis vivæ corporis cuiuscunque ex vi eius mortua*, ita processi: ob oculos mihi posui corpus grave C cadens motu naturaliter accelerato in linea verticali AH, ita ut motum a quiete incipiat in A. Initio ergo motus vidi corpus C omni vi viva destitutum in A, quia nullum ibi motum habet, & vis viva solis corporibus actu motis tribuitur. Vi tamen mortua ibidem præditum esse debet quia corpus grave est & determinatum suum pondus habet, hanc vim mortuam exposui per lineam rectam Aa, alteri AH perpendiculariter insistentem, sed posteaquam delatum est in E, ibi vim aliquam vivam iam acquisivit, quia determinatum aliquem celeritatis gradum ibi nactum est, sed seposita tantisper celeritatis consideratione, indagandum a quo, quomodo, & quantum vim vivam lucratum est in E post descensum per spatium AE. Hæc autem vis viva non aliunde corpori C accessisse potest quam a *vi eius mortua*, nam alia hic non habemus consideranda, quam corpus C, eius gravitatem, & spatium per quod cecidit AE, hoc spa-

spatium vero se habet mere passive, nihilque de suo ad motum confert; neque corpus C quatenus ut extensum spectatur & determinata sua massa præditum est, motum ullum producere potest; itaque quicquid motus & virium habet corpus C delatum in E, id a vi mortua indefinenter agente in corpus, dum per spatium AE labitur, provenire potest: Sed quomodo? velut corpus C cum est in A, urgetur vi *mortua*, *Aa*, in B vi *Bb* qualis *Aa*, in C vi *Cc*, in D vi *Dd*, in E vi *mortua Ee*, ita idem corpus C urgetur in singulis spatii confecti punctis vi aliqua mortua æquali ipsi *Aa*, si gravitas corporum uniformis est, ita ut *locus omnium virium mortuarum* corpus C in spatio AE urgentium sit parallelogr. rectangulum *AaeE*; hanc ob causam vis viva in E acquisita non potest esse major neque minor summa omnium virium mortuarum quæ in rectangulo *Ae* contineri possunt, quæ summa per hoc rectangulum ipsum exponitur. Quare vis viva in E acquisita descensu ex AE, ad vim vivam in H acquisitam descensu ex AH est, ut rectangulum *Ae* ad rectangulum *Ab*, (vel quia hæc rectangula communem altitudinem *Aa* habent) ut spatium AE ad spatium AH. Hæc ita se habent cum gravitas in omni a tellure distantia eadem est.

Sed quid eveniet si, ut Recentioribus placet, gravitas in diversis a tellure distantias etiam diversa sit? Ponamus ergo mobile C (fig. 2.) urgeri in spatii AH Fig. 2. punctis A, B, D viribus mortuis quas applicatæ *Aa*, *Bb*, *Dd* curvæ cuiuscunque *adb* representant, per puncta illa transeuntes. Iam si descensus iterum a quiete incipit in A, vis viva, quam descendens grave per spatium AE acquisivit in E, aliud non est quam aggregatum omnium *Aa*, *Bb*, *Dd*, *Ee* quæ in area *AaeE* continentur, nam ab

hisce omnibus sibi invicem succedentibus unice nascitur, propterea dicta area  $AaeE$  vim corporis vivam in E acquisitam descensu ex AE, & area  $AabH$  vim vivam eiusdem corporis in H denotat. Quare vis viva in E est ad vim vivam in H acquisitam, ut area  $AaeE$  ad aream  $AabH$ , ut applicatae harum arearum pondera corporis C in diversis a terra distantiis exponunt.

Fig. 3.

Quod si mobile C in curva quacunque AEH (fig 3.) descendat, & pondera eius in diversis a terra distantiis exponantur applicatis  $ap$ ,  $bq$ ,  $dr$ , &c. curvæ  $prt$ , erit etiamnum vis mobilis in E acquisita descensu eius in arcu AE, ad vim in H acquisitam descensu in arcu AH, ut area  $apse$ , ad aream  $aptH$ . Pervenerit mobile ex A in D, & dispiciamus quanta vi mortua ibi urgeatur secundum tangentem DG curvæ in D, quando gravitas ejus seu pondus in D exponitur ordinata  $dr$ , Ad id ponamus arcum  $AD=s$ , abscissam  $ad=x$ , ordinatam  $dr=g$ , elementum arcus, seu  $Dm=ds$ , elementum abscissæ, id est  $nm=dx$ ; exponat DF parallela Ha gravitatem corporis C in D existentis, demissaque ex F perpendiculari FG in tangentem curvæ DG, & resolvetur vis mortua DF in laterales DG & GF, quarum hæc retunditur a curva super qua mobile incedit, adeoque hoc loco non attendi meretur, illa vero nempe DG est vis mortua tangentialis quæ effectum suum ubique habet, quippe cui nihil aliud resistit quam aer & scabrities curvæ, sed seponimus iam hæc motus impedimenta externa, quasi non essent. His omnibus jam positis, triangula similia DFG & Dmn, præbent  $DG=\frac{gdx}{ds}$ , ducamus hanc in elementum curvæ  $Dm=ds$ , & factum  $gdx$  denotabit incrementum vis vivæ

*vivæ*, quod mobilis accessit dum transiit a termino D elementi  $Dm$ , ad eius terminum alterum  $m$ , & summando vis viva in D vel  $m$  summæ omnium  $gdx$  quæ in area  $aprd$  continentur. Quare vis viva in D area huic  $aprd$ , & vis viva in H area  $aptH$ . Quod ostendendum erat

In præcedenti articulo supposuimus, directiones DF gravium parallelas esse, facilitatis caufa; nam perinde valet argumentum si directiones illæ convergentes sint in aliquod centrum; eo enim casu, rectæ Aa, Bb, Dd, &c. quæ horizonti parallelæ sunt, abibunt iam in arcus circulares concentricos quorum commune centrum est punctum illud, in quod directiones gravium convergunt.

15 Quantumvis evidens fit præcedens argumentum, aut mihi saltem videatur: amolienda tamen est objectio quæ aliquibus negotiis facere potest. Objectum enim mihi est, cum primum in Conventu Academiæ argumentum istud proposuisssem; simili modo argumentum probare vim vivam cuiusque corporis exponendam esse per factum ex tempore descensus in vim mortuam gravitatis, si gravitas uniformis, hoc est, ubique eadem sit, & hoc casu vires vivas corporum proportionales fieri temporibus quibus eas vires acquirunt, si corpora quoad massam æqualia sint; sed si inæquales massas habeant, tunc vires vivas fore in composita ratione temporum & massarum. Sint (fig. 4.) LM, LN, LO, LP, & LQ Fig. 4 tempora quibus spatia AB, AC, AD, AE & AH (fig. 1.) percurruntur; Iam cum singulis temporis momentis individuis L, M, N, O &c. gravitas uniformis est, ut adeo per rectas æquales  $Ll$ ,  $Mm$ ,  $Nn$ ,  $Oo$ , &c. eam exponere liceat; quidni æquo iure summa omnium applicatarum  $Ll$ ,  $Mm$ , &c. quæ in rectangulo  $LlmM$  con-

continentur, hoc est rectangulum hoc ipsum, *vim vivam* corpori in fine temporis LP acquisitam exponere licet, quo ante (fig. 1) exponebatur rectangulo AE ea, ideo quod hoc rectangulum locus sit & summa omnium Aa, Bb, Cc, &c. quæ in eo continentur, cum tamen LP (fig. 4.) duratio sit actionis gravitatis, quemadmodum (fig. 1) AE est spatium descensus hoc eodem tempore?

Respondebam tunc, hanc posteriorem arguendi rationem præ priore locum habere non posse ideo, quod *tempus* perinde ac *celeritas* sit tantum *ens modale & incompletum*, *spatium vero* descensu confectum sit *ens reale* indicans multitudinem virium mortuarum in unam veluti summam, quæ est *vis viva*, agglomeratarum. Addidi præterea, in diverso statu corpus descendens esse in diversis temporis articulis, & non modo massam corporis C, sed etiam statum eius, seu motum in considerationem simul cum gravitate agente & tempusculo actionis trahendum esse, idque hoc modo ostendi. Sit  $LO = t$ , tempus quo vis viva V acquiritur,  $OP = dt$  elementum huius temporis, quemadmodum  $dV$  elementum vis acquisitæ vel incrementum eius durante tempusculo  $dt$ . Cum incrementum istud vis vivæ  $dV$ , nascatur a gravitate  $g$  in corpus C agente, quod corpus jam habeat celeritatem  $u$ , & massam M, atque adeo motus quantitatem  $Mu$ , quantitatis huius motus necessario ratio habenda est, nam in hoc statu in quo est mobile, celeritas ab ipso inseparabilis est; componetur igitur incrementum vis vivæ, ex hisce tribus, nempe ex  $g$ ,  $Mu$  &  $dt$ , eritque adeo necessario  $dV = gMdt$ , non vero ut vulgo supponitur,  $dV = gMdt$ . Jam vero est  $ult = ds$ , si hoc  $ds$  elementum spatii designet, &  $gM$ , significabit pondus

cor-

corporis C, adeoque si formulam  $dV = gMudt$ , ad figuram I aptare velimus, in qua pono AD = s, DE = ds, & quamlibet applicatam Aa, Bb, &c. = gM, fiet  $dV = DdeE$ , & summando  $V = \text{rectangulo } AaeE$ , ut §. 14 invenimus. Ex quo apparet, quod etiam temporis & celeritatis consideratio ad eandem virium vivarum mensuram conduceat, quam ante invenimus, modò recte inveniatur.

16. Quod si verò vis corporis C (fig. 4.) tempore LP acquisita exponenda esset per rectangulum LPpl, in quo Ll vel Mm &c. simplicem gravitationem seu vim mortuam corporis C repræsentaret, & rectangulum PQqp vim tempore PQ acquisitam, hæc eadem rectangularia Lp, & Pq, referrent quoque resistentias quas corpus C ascendendo superandas haberet temporibus PL & QP, quandoquidem gravitatis actioni continuæ ascensus corporis contrarius est, & sensim sensimque extingui debet. Quare si tempora LP & PQ æqualia fuerint, etiam rectangularia LPpl, & PQqp æqualia existent, atque adeo resistentiæ hincæ temporibus superandæ. Videamus jam an & quantum hæc cum regulis motus corporum a gravitate cadentium concordent? Cadat mobile C accelerato motu à quiete in A inchoato per spatiū AE (fig. 1) tempore LP (fig. 4), & per spatiū AH tempore LQ. Quare si delatum in E motum illuc acquisitum verticaliter in altum convertat, perveniet ascensu suo usque ad A, non altius, propter resistentiam gravitatis, itaque cum hæc resistentia (*hyp.*) exponatur rectangulari LPpl (fig. 4.) & resistentia ejusdem corporis ascendentis ex H in A, rectangulari QLlq, ponendo LP & PQ æquales, oportet etiam, ut resistentiæ, quas mobile

le ascendens ex H in E, & deinceps ex E in A subit, æquales sint. Verum si tempus ascensus per HA duplum sit temporis ascensus per EA, fiet HA quadruplica ipsius EA, adeoque HE tripla ejusdem EA, quare tempora ascensus atque adeo resistentiæ in altitudine HE ut 3, & in altitudine EA ut 1, essent æqualia; hoc autem evenire non potest, quin gravitas non *uniformiter* in universa utriusque spatii longitudine agat, sed *subfultim* & *diformiter*, quod oppido absurdum est, & contrarium receptæ doctrinæ de motu gravium. Hæc doctrina enim supponit, quod corpus in omni puncto spatii quod perlabitur aut in quo ascendit, grave sit; grave esse cùtem significat, ibi vi aliqua urgeri, ubi grave est; adeoque in communi gravitatis systemate in omni puncto spatii in quo mobile reperitur à gravitate urgetur, idque non modo in communiori gravitatis uniformis systemate, sed etiam in omni alio quod quis excogitare posset. Nam universalis doctrina virium centralium continuam in omnibus spatii punctis actionem involvit sine qua hæc doctrina omnibus jam probata consistere nequit.

17. Evictum ergo est, quod vis viva mobili acquisita in E (*figuris 1 & 2*) descensu accelerato ex A in E, est ad vim vivam ejusdem acquisitam in H descensu ex A in H, ut area AEEa ad aream AHha, non vero (*fig. 4*) ut area LPpl ad aream LQql, posito quod LP & LQ referant tempora descensus in spatiis AE & AH, ordinatæque Ll, Mm, &c. gravitatem corporum. Ex quo ultrò fluit, quod vires vivæ corporum necessariò sint ut facta ex massis corporum in quadrata celeritatum mobilium. Quod præcipue ex theoria motus gravium deduce-

ducere suscepimus, etiam si argumentum à collisione corporum supra (§. 12. 13.) petitum etiam validissimum, omni-que exceptione majus, nobis videtur.

Posset eadem thesis aliis adhuc argumentis æque stringentibus probari, quia verò id à diversis Societatis hujus Imperialis Membris dilucide est præstitum, eorumque in hanc rem cogitata in Actis Academiæ simul prodeunt, ab iis nunc abstinebo, transiens jam ad partem elencticam Quæstionis de mensura virium. Nam communis sententia Leibnitiae opposita, quasi jure quodam præscriptionis usi multos Præclaros Hyperaspistes est nata quorum argumenta omnino digna sunt quæ excutiantur.

Primum quidem mota est plures hæc instantia: Quod idea vis vivæ corporum non involvat ideam gravitatis, quandoquidem unumquodque corpus determinata aliqua celeritate præditum suam determinatam vim vivam habeat, sive corpus illud grave sit, sive omni gravitate destitutum intelligatur; quodque hanc ob caussam frustra recurratur ad theoriam motus gravium pro mensura virium acquirenda. Concedamus quidem antecedens, nihil tamen firmior erit consequentia: esto quod corpora esse possint corpora, tametsi non sint gravia, & quod hæc corpora non gravia tamen suos quodque gradus virium vivarum habeant; quid inde concludetur? Sane aliud nihil nisi hoc, vires illas vivas non esse gravitatem corporum, neque fluere necessario ex gravitate, quod nusquam diximus neque statuimus unquam; quod autem ex descensu gravium nulla ideo peti possit mensura virium vivarum, id nullo modo sequitur ex propositione antecedenti. Esto enim corpus non grave A habens celeri-

tatem quam nominabo *u*, & hoc corpus habebit ideo aliquam vim vivam, quam à gravitate omnino independentem statuam. Sit aliud corpus B alteri quoad massam æquale sed gravitate pressum, quod cadens ex altitudine *a* acquirat accelerato motu celeritatem æqualem celeritati *u* corporis primi gravitate carentis A. Quæro jam an hæc corpora æqualia & æquivelocia A & B vires vivas æquales habeant, an verò secus? non puto quenquam fore, qui vires hasce inæquales dicat; etiam si enim prius corpus A gravitate (*hyp.*) non urgetur, alterum verò B urgetur, atque adeo hæc circumstantiarum diversitas aliquam virium inæqualitatem in utrumque inducere primo intuitu videtur, reapse tamen nullam inducit, nam simulatque corpus B in infimo termino altitudinis *a* reperitur, ibique celeritatem *u* acquisivit, pone gravitatis actionem cessare, corpus istud B illic etiam gravitate destitutum erit, atque celeritate acquisita *u* motum suum, perinde ac corpus A, æquabiliter continuabit; adeo ut jam habeamus corpora æqualia & æquivelocia A & B non gravia; unde necesse est, ut vires ipsorum æquales sint. Concedo verò quod corporis non gravis A vis viva non pendeat à gravitate, an tamen ideo alterius corporis B vis viva à gravitate non fluit? imo verò maxime fluit, cum initio descensus *vim nullam* habuerit, eamque quam demum nactum est in fine spatii *a* acquisiverit continuata gravitatis actione. Cum autem vires corporum A & B æquales ostensæ sint, nonne altera alterius mensura esse potest, & debet, tametsi vis corporis B à gravitate fluens prorsus independens est à vi corporis A quæ gravitati ortum suum non debet? ex quibus omnibus

bus

bus liquet, quod supra allata instantia nostræ virium vi-  
varum mensuræ nihil prorsus derogare possit.

18. Sed plures aliæ objectiones olim prodierunt  
à doctiss. viris nempe à Dn. Abbatे *Catelano*, à *Dioni-  
ſio Papino* & aliis, & hæ objectiones omnes in substantia  
recurrent in iis quæ non multis abhinc annis V. Cl. *Sa-  
muel Clarke* Theologus & Philosophus Anglus contra  
Ill. *Leibnitium* paulum post hujus obitum disputavit, in  
opere quod Anglico & Gallico idiomate edidit Londini  
sub titulo, *A Collection of Papers which passed between the  
late Learned Mr. Leibnitz and Dr. Clarke in the years  
1715 and 1716. London 1712 in 8.* Quodque Dn. *Des-  
maizeaux* ampla præfatione & aliis scriptis auctum denuo  
edidit Gallice, cum titulo *Recueil de diverses Pièces sur la  
Philosophie, la Religion naturelle, l'Histoire, les Mathéma-  
tiques, par Mrs. Leibnitz, Clarke, Newton & autres  
Auteurs célèbres. A Amsterdam in 12. 1720.* Jam in  
nota ad §. 93,-95. quintæ Responsionis ad Leibnitium  
Dn. Clarke non modo Leibnitii argumenta pro nostra  
virium mensura confutare satagit, sed etiam locum ali-  
quem Phoronomiæ de hac eadem re fugillavit. Etsi ve-  
ro alio loco præcipua ejus argumenta ad examen revo-  
cavi, quia tamen id brevissime factum est in scripto  
quod in paucorum manus venit, ideo præcipuas Clarkii  
objectiones huc adducere & refellere libet, idque tanto li-  
bentius quanto oportuniorem nobis occasionem submi-  
nistrant de viribus vivis theoriam magis illustrandi. Pri-  
mo loco Vir Cl. *Leibnitium* de confusione & contradic-  
tionibus in hoc de viribus argumento admissis graviter  
accusat, quod sentiat *eandem virium quantitatem in natu-  
ra conservari*, & tamen agnoscat *non eandem motus quan-*

*titatem manere*, ubi per vocabulum *vis*, aut *vis activa* in præsenti quæstione necessariò intelligere debuerit *Impetum* aut *vim impulsivam et relativam corporum motorum*. Sed si quicquam aliud hæc Cl. Opponentis accusatio lepida mihi videtur; assumit enim quod Leibnitius secum sentiat, quando supponit quod Leibnitius de viribus locutus in iis locis quæ citavit, per hoc vocabulum intelligat impetum seu quantitatem motus, ut deinceps quæri posset de contradictione & confusione, cum ab ipso dissentit. Sed nullum Vir Doct. memorabit locum in quo Leibnitius per vim activam quam in universo conservari statuit, quantitatem motus seu impetum intellexerit; imò contrarium ex illo ipso elucet, quod quantitatem motus mutabilem, quantitatem vero virium eandem semper manere, probare conatus est. Hac ergo in re sibi ipsi Leibnitius non contradixit sed Cl. Antagonista præjudicata opinione abruptus *principium petiit*. Pergit deinceps A dicendo, *id quod Dn. Leibnitio occasionem dedit sibi contradicendi est, quod per errorem Philosopho prorsus indignum, vim impulsivam*, ut Clarkius loquitur, *estimarit per quantitatem materiæ et spatii quod mobile ascendendo consicit, seposita consideratione temporis quo accessus fit*. Sed si vera sunt, quæ in §§. 15, 16, 17. apodictice demonstravi, quod mensuræ virium sint altitudines ad quas corpora pervenire possunt ductæ in vim gravitatis, nullum errorem, nedumtalem qui omni Philosopho indignus sit, *Leibnitius* admisit.

19. Quantum ad illud attinet, quod Doct. Antagonista habet, *non parum errare Leibnitium in eo, quod putet à Cartesianis ac reliquis Philosophis ac Mathematicis concedi hanc propositionem*: Tanta vi opus esse ad elevandum corpus A unius libræ ad altitudinem quatuor ulnarum

rum, quanta opus sit ad elevandum corpus B quatuor librarum ad altitudinem unius ulnæ, cum tempora horum ascensuum non sunt æqualia, esset tantum error facti, si error est, qui summæ rei nihil derogare potest; præterquam quod supra pag. 7. jam ex *Cartesio* ipso locum allegavi ex quo apparet *Illustrem Philosophum* controversam hanc propositionem sine ulla limitatione æqualitatis temporis admisisse. Imo id erroneum judicat, cum spatii consideratio confunditur in negotio virium mensurandarum, cum temporis aut celeritatis consideratione, & sententiæ hujus solidam demonstrationem supra §§.

15. 16. dedimus. Stante vero demonstratione in loco citato, concidunt omnia quæ Cl. noster *Adversarius* professe porro adducit, quippe quæ in solis assertionibus sine omni probatione prolatis, consistunt. Prætendit namque, quod, si *Pendulum quoddam Cycloidem describat*, arcus Cycloidis ascensiū descriptus, proportionalis sit futurus vi ascensionali in infimo puncto Cycloidis: hujusque propositionis non aliam affert rationem, quam hoc, quod tempora ad ascensum requisita sint æqualia. Sed quam longe Vir Doctiss. absit à vero, patebit postquam descensum ac ascensum corporis in Cycloide paulo curatius contemplati fuerimus.

Sit ergo curva ADH (fig. 3) Semicyclois verticem in H & axem aH habens, cuius proinde semibasis erit Aa. Esto corpus C quod descensum incipiat in puncto A, atque accelerato motu cavam cycloidis partem percurrat in suppositione, quod gravitas ubique uniformis & uniusmodi sit: itaque initio descensus urgebitur mobile secundum directionem tangentis cyclidis in puncto A, vi quam exponit arcus AH, id *Newtonus* primum & postea

postea alii autores plures demonstrarunt, sed, quod pro-  
be notandum, hæc vis tangentialis non est vis viva sed  
tantum mortua, est enim derivata ex vi gravitatis, quæ  
tantum vis mortua est. Delatum postea mobile ex A  
in B urgebitur in hoc puncto etiam in directione tangen-  
tis vi mortua quam exponit arcus cycloidis BH, & ita  
in omni alio puncto cycloidis vi quadam mortua quam  
exponit arcus cycloidis inter hoc punctum & verticem H;  
erectæ porro intelligantur in punctis A, B, D, &c. & o-  
mnibus intermediis, ad planum cycloidis perpendiculares  
atque æquales respectivis arcibus AH, BH, DH &c. orie-  
tur inde superficies cylindrica cujus basis est cyclois  
ADH, & contendo hanc superficiem totam ejusque  
partes, mensuras esse virium corporis descensu per AH  
vel partes hujus arcus acquisitarum. Nam vis acquisita  
in infimo puncto cycloidis H, est complexus omnium  
virium mortuarum quibus mobile in punctis A, B, D, H,  
& omnibus intermediis urgetur, nam quicquid virium  
habet in H id cunctis hisce viribus mortuis continue in  
mobile agentibus acceptum est fereendum, adeoque vis in  
H acquisita, non major neque minor esse potest com-  
plexu illo virium mortuarum ex quibus resultavit, &  
area illa cylindrica complectitur omnes lineas omnium  
virium mortuarum repræsentatrices. Exempli causa si  
in fig. 5 AL=AH, BM=BH, DN=DH & ita por-  
ro respectu omnium reliquorum cycloidis arcuum, atque  
hæ AL, BM, DN plano cycloidis AaH normales sint;  
superficies cylindrica ALMH complectitur omnes AL,  
BM, DN &c. quæ vires mortuas quibus descendens mobile  
in A, B, D, &c. urgetur, exponunt; adeoq; dicta superficies  
cylindrica HAL exponit vim in H acquisitam descensu  
per

per arcum AH, propter similem rationem superficies LABM, LADN exponent vires acquisitas mobili in B & D, initio descensus a quiete existente in A.

Examinandum restat quantæ sint superficies ALH, eiusque partes; sit arcus DH=DN=s, ejusque elementum=ds, quare elementum superficie HDN, quod oritur ductu ordinatæ DN=s, in elementum arcus HD, sit =sds, quare integrando, sit area ipsa HDN= $\frac{1}{2}ss$ = semissi quadrati arcus DH, adeoque area tota HAL= dimidio quadrati ex AH; areæque ABML, ADNL æquantur  $\frac{1}{2}AH^2 - \frac{1}{2}BH^2$ , &  $\frac{1}{2}AH^2 - \frac{1}{2}DH^2$ . Positis iam hisce, sequitur, quod vis acquisita in H descensu per arcum AH, quæ repræsentatur per aream HAL, proportionalis sit, non arcui ipsi AH, ut putat *Dn. Clarke*, sed dimidio quadrato arcus eiusdem AH, & tanta quoque est initio vis mobilis ascendentis in cycloide ex H in A. Quod si vero descensus incipiat à quiete in puncto D, vis in infimo puncto H acquisita proportionalis erit, non arcui DH sed dimidio eius quadrati, & huic æqualis est vis corporis in arcu HD ascendentis.

Quando V. Cl. porro dicit, *quod si duo corpora æqualia in diversis distantiis ab axe alicuius libræ in ejus brachia gravitent, vires eorum corporum futuræ sint, ut arcus quos describunt, quod eos æqualibus temporibus conficiant*, veram rationem, cur dictæ illæ vires sint ut arcus descripti, non attingit. Nam hæ vires sunt ut arcus, non ideo, quia arcus æquali tempore describuntur, sed quia gravitatis actio continua est, & in omnibus arcuum punctis hæc corpora vi quadam mortua æquali urgentur.

Sed pergit noster dicendo, *Si globi duo æquales in plano horizontali viribus inæqualibus impellantur, temporibus*

bus æqualibus, spatia describent viribus impellantibus proportionalia. Aut si globi inæquales viribus æqualibus impellantur, describent temporibus æqualibus spatia massis suis reciproce proportionalia. Utraque hæc propositio est falsa. Sint enim primum globi æquales A, A & quiescentes, quorum prior impellatur globo B cum celeritate b, alter vero globo C cum celeritate c; per regulas communicationis motus, acquiret prior globus celeritatem  $\frac{2Bb}{B+A}$ , & alter globus A a globo impellente C accipiet celeritatem  $\frac{2Cc}{A+C}$ , est ergo spatum primo globo A describendum ad spatum ab altero æquali tempore peragrandum, ut prior fractio  $\frac{2Bb}{A+B}$ , ad alteram  $\frac{2Cc}{A+C}$ , sed hæc fractiones non sunt ut vires impellantibus, quæ secundum hypotheses *Autoris* sunt ut Bb & Cc, quare prior ejus propositio est falsa.

Videamus an altera locum habeat nec ne? Sint iam globi inæquales A & B quiescentes qui ambo impellantur à globis æqualibus C, C celeritate æquali a; per easdem regulas communicationis motus, accipiet globus A celeritatem  $\frac{2Ca}{A+C}$ , & globus B celeritatem  $\frac{2Ca}{B+C}$ , & hæc celeritates sunt ut spatia quæ ambo globi post impulsus æquali tempore describent. Hæc vero spatia non sunt massis globorum A, & B proportionalia ut Dn. *Opponens* dicit; quare & altera ejus propositio est falsa. Propterea corruunt omnes consequentiæ, quas Vir Cl. adversus *Leibnitium* ex præmissis suis negavit, & dicere ausim, in omnibus fere iis quæ sequuntur perpetuam regnare petitionem principii, quia Doct. *Opponens* fere ubique supponit, quod vires corporum sint ut

ut quantitates motus, quod tamen a Leibnitio negatur, atque id est de quo queritur, debuisset itaque alicubi idoneam suæ theses demonstrationem proferre, priusquam Leibnitio & aliis, qui hac in re cum ipso sentiunt, nescio quas *contradictiones* aliasque *absurditates* objiceret. Videlicet fortasse dedisse demonstrationem suæ propositionis in sequenti periodo quæ ita habet : „Galilæus in suppositione gravitatis uniformis, demonstravit motum Projectorum in mediis non resistentibus, omnes, que Mathematici, ne quidem Cl. Leibnitio excepto, propositionibus ejus assentiuntur. Jam vero si tempus, quo corpus spatium suum perlabitur in partes æquales, divisum intelligatur; quoniam gravitas uniformis est, atque adeo æqualibus temporis partibus æqualiter agit, oportet ut actione sua corpori imprimat impertiatur, que temporibus æqualibus, vires, velocitates, motusque, æquales. Sed hæc ipsa consequentia, quatenus ad vires spectat, falsa est, ut verum est, temporibus æqualibus, æquales celeritates motusque æquales gravitatis uniformis actione continua generari. Nam ad producenda velocitatis incrementa, gravitas perinde agit in corpora mota ac in quiescentia; adeo ut temporibus æqualibus æqualia velocitatis incrementa mobili adiiciantur, sive id in motu sit, sive quiescat. Sed res aliter se habet cum virium incrementis, in hisce enim computandis celeritatis præsentis ratio est habenda, nec dici potest hæc virium incrementa esse simpliciter, ut incrementa temporis, sed potius in composita ratione ex celeritatibus iam acquisitis & temporis incrementis; hoc est ut incrementa spatiorum, si nempe massæ corporum æquales fuerint, quod pluribus iam supra probatum

est. Posteaquam varias alias consequentias ex prima-  
ria illa, quam modo confutavi, elicuit Vir Cl. me deni-  
que ipsum adoritur, hæc scribens. *Sed Hermannus Leib-.*  
*nitii partes secutus contra eos qui vires corporibus caden-*  
*tibus acquisitas proportionales esse statuunt temporibus quibus*  
*descensus illi funt, aut velocitatibus acquisitis:* Hermannus inquam afferit id falsæ suppositioni, quod scilicet cor-  
pora in altum jacta temporibus æqualibus æqualem a gra-  
vitate impulsuum numerum accipiart, inniti. Hoc idem est ac  
si Hermannus gravitatem non esse uniformem, dixisset idque  
adeo est Galilei theoriam in quam omnes Geometræ consen-  
tiunt, funditus evertere. Existimo Hermannum sibi ima-  
ginari, quod quo velocior sit motus ascensionalis, eo plures  
corpora accipient impulsus, quia ipsis occurruint particule  
(imaginariæ) quæ gravitatem producunt. Atque ita pon-  
dus corporum iugis erit cum ascendunt, et minus cum  
descendunt. Ex hisce cognoscere potest Lector quam fa-  
gax sit industria Cl. *Antagonistæ* in eliciendis consequen-  
tiis, & Adversariorum suorum sensu perscrutando:  
Scripsi utiq; in Phoronoma false hypothesi superstrui sen-  
tentiam eorum qui vires corporum ascendentium per tem-  
pora ascensuum mensurant, quod tacite supponant cor-  
pora æqualibus temporibus æqualem impulsuum nume-  
rum subire, cumque citato loco præsertim contra *Papi-*  
*num* disputaverim, vocabulo *impulsuum* usus sum, quod  
ipse prior id adhibuerit ad designandas *resistentias* quas as-  
cendens mobile superandas habeat: Exinde protinus  
concludit Dn. *Antagonista*, hoc idem esse ac si gravita-  
tem non uniformem esse dixissem, idque adeo esse Ga-  
liei theoriam funditus evertere, si autem quæris nexum  
inter hanc propositionem *gravia verticaliter in altum pro-*  
*jecta*

*jecta non temporibus æqualibus, sed ascendentia per altitudes æquales, resistentias à gravitate æquales patiuntur, & hanc, gravitatem non esse uniformem; hunc nexus Vir Eximus nusquam ostendit, aut si unquam ostendere poterit, mihi erit magnus Apollo; interea vero nunc criticum agit & animi mei sensum non expressum verbis, scrutatus est; arbitratur enim mea opinione corpora ascendentia eo plures impulsus à gravitate accipere, quo velocior sit motus ascensionalis, quia ipsis occurrant particulae quæ gravitatem producunt, quas particulas ipse imayinarias vocat, haud dubie ideo, quia gravitas ipsi est qualitas occulta. Sed sepositis iocis, ut Cl. Viro directe respondeam: in pluribus locis præsentis schediasmatis geometrice probatas vidi has duas propositiones 1. Ex eo, quod gravitas uniformis est, mensuræ virium corporum, sunt in composita ratione ex massis & altitudinibus quas in altum projecta velocitatibus initialibus iis, quas corpora habent, percurrere possunt. 2. Sin vero vires illæ essent in composita ratione massarum & temporum ascensionis, gravitas non uniformiter sed subsultim ageret. Itaque in Cl. *Adversarii* hypothesi gravitas non est uniformis, adeoque Galilei theoria destruitur, quæ in nostro systemate sarta testaque manet.*

Sed examinandum est grave argumentum, quod Vir Cl. adhuc contra nos adducit. *Si vis* (inquit ille) *quam corpus cadendo acquirit est ut spatium descriptum, dividatur tempus in partes æquales, et si prima temporis parte acquirat partem unam virium, duabus primis temporis partibus acquiret quatuor virium partes; tribus primis partibus temporis acquiret novem partes virium, et ita deinceps. Quare secunda temporis parte acquiret*

*tres virium partes ; tertia temporis parte acquiret quinque partes virium, et sic porro.* Hæc omnia optime se habent, sed elumbes sunt consequentiæ quas inde dicit, *si ergo, pergit ille, supponatur actio gravitatis has vires producentis, unius esse gradus in medio primæ partis temporis, in Medio secundæ, tertie, quartæ partis temporis, tres, quinque, septem gradus habebit, et sic deinceps.* Sed hoc ipsum est falsissimum, actio enim gravitatis in medio cuiusque temporis eadem est ut initio & in fine. Quam validum sit Cl. *Antagonistæ* argumentum istud, vel exinde quoque cognoscetur, quod simili modo probari possit ex eo, quod spatia æqualibus temporibns deinceps descripta, sint ut numeri impares 1, 3, 5, &c. quod gravitas quæ efficit, ut hæc spatia mobili describantur sit ut numeri iidem impares ; nam si supponatur quod actio gravitatis quæ efficit ut hæc spatia percurrentur in medio primi temporis esse unius gradus, gravitatis actio in medio secundæ, tertiae, quartæ partis temporis, tres, quinque, septem gradus habebit, & ita deinceps ; quare tali arguento Cl. viri probatum est ex eo, quod gravitas uniformis est, *gravitatem non esse uniformem.* Videtur autem vir Doctissimus ideo sic argumentatus esse, ut concludere posset his verbis : *Hoc est actio gravitatis proportionalis erit tempori et velocitati acquisitæ.* Sed nosse vellem in medio cuiusnam temporis actio gravitatis proportionalis sit facto ex tempore in celeritatem? quandoquidem hoc ex ex præmissis non cognoscitur, in hisce enim ordinem temporum æqualium recensuit in quorum medio gravitatis actio sequitur progressionem numerorum imparium ; sed Oedipo opus est qui inde excusat actionem gravitatis facto ex tempore in celeritatem proportionari,

ac denique initio temporis, gravitatem esse nullam. Si V. Cl. dixisset initio primi temporis vim vivam mobilis nullam esse, nihil a veritate alienum protulisset, sed quod gravitas ibi nulla esse debeat, nunquam legitimo ratiocinio ex nostro systemate deducetur.

Venio tandem ad Achillem Cl. Antagonistæ qui nostram virium æstimationem ipsi penitus evertere videatur, nam diputationem hanc sequentibus verbis finit: Ut præsens controversia demonstrative decidatur, ex,, duobus *radius* seu *filis* æqualis longitudinis pendeant globi Chalibei ita, ut cum globi suspensi manent & se se tangunt, *radii* seu *fila* parallela sint. Alteruter horum globorum *idem* semper sit & ab altero ad eandem, in omnibus experimentis distantiam abducatur. Alter, globus sit arbitrariæ magnitudinis abducaturque in partem oppositam ad distantiam ponderi suo reciproce, proportionalem. Ambos hos Globos eodem tempore, momento labi sinas ita, ut in infimo loco descensus in quo suspensi hærebant antequam à se invicem ducti essent, se se attingere possint. Primus Globus eodem modo resiliet, hoc est, ad eandem altitudinem. Quare vis alterius eadem semper est, quoties ejus celeritas ponderi suo reciproce proportionalis est. Et per consequens pondere eodem manente, vis eius, velocitati proportionalis erit. Q.E.D.

Ut hujus prætensiæ demonstrationis vis melius capiatur, placet totum negotium per figuram 6. expone-re. Sint fila æqualia DF, EG suspensa in D & E: in imo ipsorum alligati sint globi chalibei, nempe filo DF globus A, & filo EG globus B. Oportet ut distantia punctorum suspensionis DE æquat summam semidiame-trorum

trorum globorum A & B, aut si vice globi B alius major vel minor adhibeatur quem dicam C, ut distantia DE æquet summam semidiametrorum hujus globi & globi A, ad id, ut quoties fila DF & EG in situ verticali sunt, globi A & B, aut globi A & C, se se contingent: intelligatur linea horizontalis MN transire per centra globorum & puncta F, G designare hæc centra. Centro D radio DF descriptus sit arcus FO, centroque E radio EG arcus GP. Sit arcus FH ad arcum GI, ut globus B ad globum A, abducaturque globus A ex F in H, & globus B ex G in I, & ambo simul descendere incipiunt ex H & I, eodemque tempore pervenient per arcus HF & IG in F & G & illic inter se collidentur, ita ut uterque regrediatur in arcu in quo ceciderat, nempe globus A regredietur post impulsu[m] ex F in H, & globus B ex G in I, seposita consideratione resistentiæ aeris. Post hoc experimentum eximatur globus B ex G, ibique aliis globus C ita alligetur, ut distantia DE jam æquet semidiametrorum summam, sitque C ad B ut arcus major GK ad arcum minorem GI. Nunc ponamus globos A & C simul descensum incipere in H & K, & æquali iterum tempore describent accelerato motu arcus HF & KG, atque in F & G sibi invicem cum celeritatibus quas arcus HF & KG exponunt, obviam venient; contingit vero iterum post impulsu[m], ut globus A resiliat ex F in H, & globus C ex G in K. Adeoque globus A in utroque experiento ad eandem altitudinem HL resilit, ex quo Cl. *Antagonista* concludit, quod vis alterius globi B vel C etiam eadem semper sit, quoties celeritas finalis globi B est ad celeritatem finalem globi C, ut hic globus ad illum.

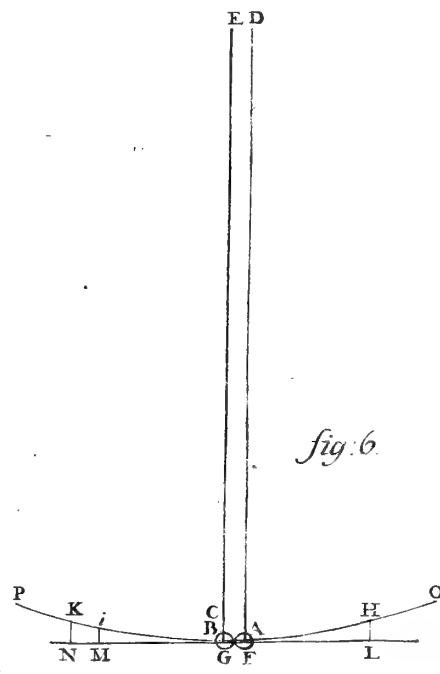
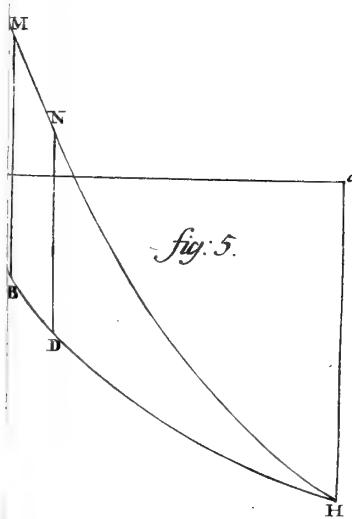
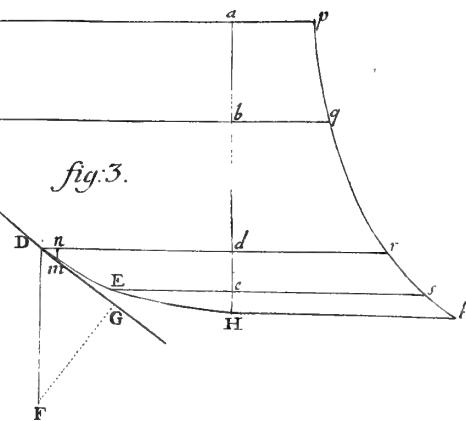
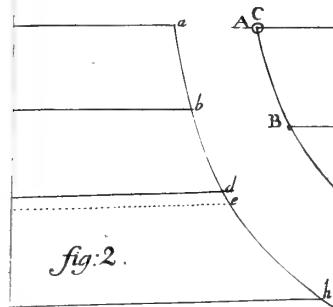
Sed dicam vix aptius medium mihi suppeditari potuisse

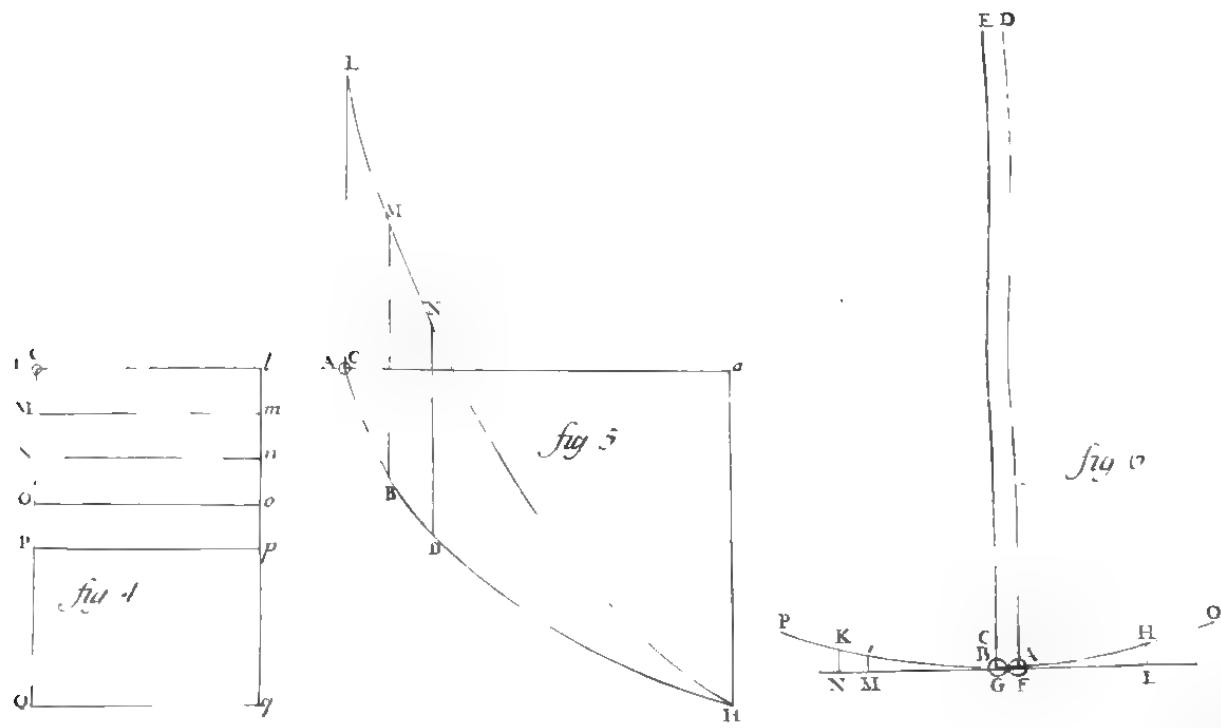
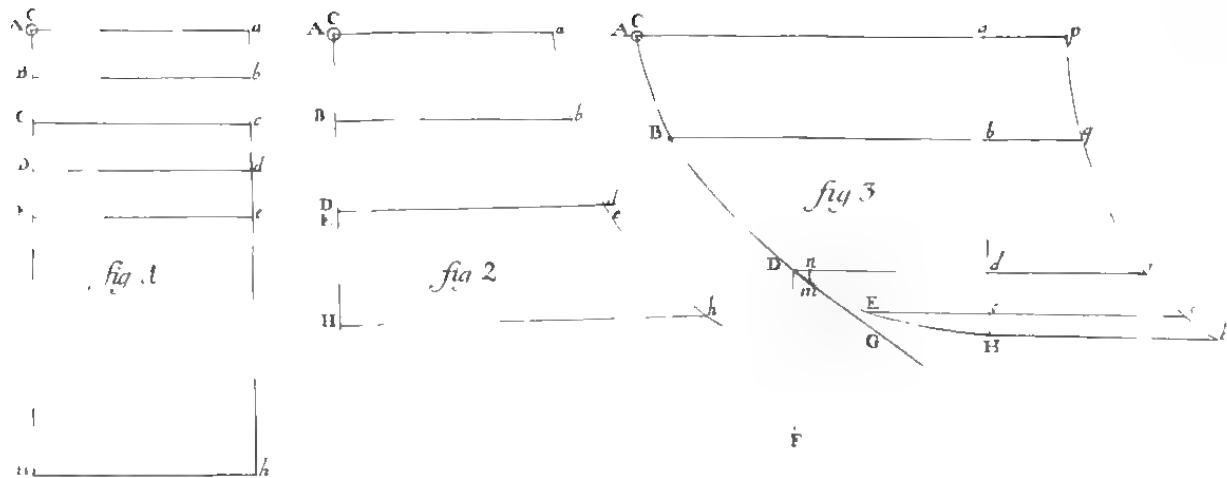
ad

ad confutandam Cl. viri mensuram virium, quam hoc ipsum experimentum quod pro se adducit. Primum enim conclusio ejus, quod vires globorum B & C æquales sint alium peti non potest, quam ex hac suppositione, quod tam vis globi B quam vis globi C æqualis sit vi globi A eodem semper tenore resiliens. Hæc vero suppositio est *mera petitio principii*, sed ne hoc gratis dixisse videar, probabo secundo, quod, positis iis omnibus quæ in experimento posita sunt, vis globi celerioris C major sit vi alterius B. Hoc autem apodictice probatum erit, postquam ostendero quod *commune centrum gravitatis* globorum A & C in arcibus FH & GK ascendentium *altius* assurgat, quam *commune centrum gravitatis* globorum A & B in arcibus FH & GI ascendentium: nam si hoc est, vires globorum A & C *majus* quid præstant, quam vires globorum A & B, hoc est vis globi A plus vi globi C major est vi globi A + vi globi B, adeoque cum (*hyp*) vis globi A utrinque eadem sit, restat vis globi celerioris C major vi globi tardioris B. Itaque tantum probandum est, *commune centrum gravitatis* globorum A & C *altius* ascendere, quam *commune gravitatis centrum* globorum A & B. In horizontalem NL demittantur ex terminis arcuum H, I, K, perpendiculares HL, IM, & KN, atque dicantur  $HL=a$ ,  $IM=b$ ,  $KN=c$ ; item arcus  $FH=l$ ,  $GI=m$  &  $GK=n$  ac denique diameter horum arcuum seu  $2DF$ , vel  $2EG=d$ . His positis est (*hyp*) arcus GK ( $n$ ) major arcu GI ( $m$ ) adeoque  $ln > lm$ , hoc est fractio  $(ln+lm):(dl+dn)$   $>$  fractione  $(lm+lm):(dl+dm)$ . Cum autem arcus FH, GI, GK, minimi sint, confundentur cum suis chordis, eruntque adeo  $ll=ad$ ,  $mm=bd$ , et  $nn=cd$ , quibus

in præcedentibus fractionibus surrogatis, fiet ( $an+cl$ ): ( $l+n$ ) major quam ( $am+bl$ ): ( $l+m$ ), vel quod eodem recidit, ( $anA+clA$ ): ( $lA+nA$ ) major quam ( $amA+blA$ ): ( $lA+mA$ ), constructio vero præbet æquationes  $lA=mB$ , &  $lA=nC$ , itaque in prima fractione surrogando  $nC$  pro  $lA$ , &  $mB$  pro  $lA$ , in secunda, fiet ( $Ana+Ccn$ ): ( $nA+nC$ ) vel ( $Aa+Cc$ ): ( $A+C$ ) maior quam ( $Aam+Bbm$ ): ( $Am+Bm$ ) vel ( $Aa+Bb$ ): ( $A+B$ ). Atqui ex centrobaricis constat, quod prior si actio ( $Aa+Cc$ ): ( $A+C$ ) denotet distantiam communis centri gravitatis globorum A & C in A & K existentium, ab horizontali LN, alteraque fractio ( $Aa+Bb$ ): ( $A+B$ ), distantiam communis centri gravitatis globorum A & B existentium in H & I. Quare centrum gravitatis globorum A & C altius assurgit quam centrum gravitatis globorum A & B, propterea vis globi C major est vi globi B. Quod erat demonstrandum.

Nemini scrupulum moveat, quod in præcedenti demonstratione arcus FH, GI, GK indefinite parvos supposui, ut cum suis cordis confundi possint; nam demonstratio etiam obtinet cum arcus illi sunt finitæ magnitudinis, tunc vero debent globi A, B, C non arcibus FH, GI, GK reciproce proportionales esse, sed chordis horum arcuum.





# DE VIRIBUS CORPORI MOTO IN SITIS

&amp;

*Illarum Mensura,*

Demonstraciones Mechanicæ,

*Auctore*

Georgio Bernhardo Bülfingero.



N *primis Academiæ Scientiarum Con-*  
*ventibus facta est de Mensura Virium* *MM.*  
*motricium, & natis inde controversis* *Sept. et Octob.*  
*mentio. Visum est, non id sine usu* *1725.*  
*sore, si qui Sociorum suam de isthoc ar-*  
*gumento sententiam ex instituto dicant : atque inter il-*  
*las placuit & meam audiri. Non multa promitto, ne-*  
*que eximia : sed nova tamen aliqua, hoc est, publice,*  
*quod sciam, nondum vulgata.*

Nolo vero recensum hic instituere *vel virorum vel*  
*scriptorum, quibus agitata est de viribus corporum vi-*  
*vis disceptatio : occurrit aliqua in principio sectionis*  
*secundæ. Lubet suffragari Leibnitio, qui vires corpo-*  
*rum insitas *ex facto masse in quadratum celeritatis æst-**  
*mat. Argumenta in hanc rem plura præsto sunt, & di-*  
*versi generis, inventa variis Auctoribus. Plerique axio-*  
*matis loco requirunt, ut vires totæ censeantur *effectibus**  
*integris *proportionales*. Tum vero effectus metiuntur*  
*vel cum Leibnitio ex ascensi gravium retardato ; vel cum*  
*Jo. Bernoullio *ex elastris*, quæ tendi a corpore moto*

possunt ; vel cum Hermanno nostro ex percussionibus successivis ejusdem corporis elastici ad diversa alia; vel cum Jo. Polenio (& s'Gravesandio) ex foraminibus, quæ corpora gravia lapsu suo imprimunt corporibus mollibus.

*Alia ex virium genesi sumuntur : qualia sunt illud Hermanni oriundum ex descensu gravium ; & nata per replicatas gravitatis follicitationes vi viva : (atque alterum s'Gravesandii , quo numerum elastrorum motus acceleratos generantium attendit , & in summam colligit.)*

Prior classis pertinet proxime ad vires , quas infra mixtas vocabimus. Itaque non indignum publica luci visum est, si de viribus quoque puris demonstratio prodiret immediata : maxime cum ea dupli modo instrui possit, quorum altero effectus ad causam refertur ; altero autem , sine istius axiomatis interventu, æquatio inter vires unas & alteras instituitur , atque ex ea ipsa derivatur virium mensura.

Talem Sectio prima demonstrationem exhibebit, quæ se mihi obtulit , cum metaphysicis distringenter cogitationibus ; indicatam breviter in Dilucidationibus meis Philosophicis de Deo , Anima & Mundo , Tubingæ editis, Sect. II. Cap. 3. §. 174. p. 173.

Posterior argumentorum classis ad motus gravium acceleratos semper attendit , neglectis motu horizontali , & doctrina de percussione , quam huic negotio minus aptam judicari contigit. Eratque illa , ut verum fatear , non nihil ab hoc negotio remotior : non erat autem aliena. Cum examinarem difficultates , sententiaz Leibnitianaz ex percussionum doctrina objectas , non potui non in novam ejus demonstrationem , et si aliud agens , incidere. Ipsa virium vivarum in corpore elastico per impulsum facta gene-

genesis docuit me mensuram , quam in sectione *secunda* prolixiori inter plures alias hujus argumenti dilucidationes exhibebo.

Quoniam fieri non potest , ut *difficultatum* Leibnitio propositarum *solutiones* sine memorabili commentationis hujus defectu plane absint : itaque illas non possum non intertexere dicendis. Sed non ideo me falli nescium, aut egregiis utique viris superiorem puto. Non me illic iudicem obtrudo ; sed collocutorem adiungo.

---

*Sectio Prima,*

*sive,*

**DE MENSURA VIRIUM  
CORPORI MOTO INSITARUM  
DEMONSTRATIONES.**

---

*Definitions.*

**I.**

**V**is corpori *moto insita* dicitur principium illud , per quod corpus aliquod naturale actu movetur : Cujusmodi est in corpore libere cadente , vel violenter projecto. Vocatur etiam *vis viva*. *Mortua* vero , quæ ad motum producendum tendit quidem , sed propter impedimenta sibi objecta illum nondum producit : qualis est gravitas in corpore suspenso. *Vis insita* sive *viva* , prout in

motu suo libera persistit , vel impedimentis debilitatur : dicitur vel pura vel mixta. *Mixta*, si producendo effectum suum consumitur , uti est in corpore gravi ascendentे; viva *pura*, si in motu perseverat , non per illum consumitur , qualis est corporis in vacuo moti.

*Schol.* Appellationem & Definitiones sumsi a Leibnitio in Actis Er. 1695. p. 149. & Christian. Wolffio in El. Mech. §. 9. 10.

II. *Directionem* motus voco viam illam , in qua centrum gravitatis corporis incedit, si motus est actualis, vel incederet, si motus sequeretur : sive viam illam , secundum quam nituntur & impellunt Vires. Si via hæc concipitur ut in linea , voco directionem simplicem, vel unius dimensionis : Si in plano posita , & ex directionibus simplicibus composita , voco directionem duarum dimensionum : si in solido, orta ex directionibus plurium planorum, voco directionem trium dimensionum.

**Fig. 1.** III. *Vim* insitam secundum AB , vel secundum AC illam dico , cuius directio & celeritas exponitur per lineam AB, AC.

**Fig. 2.** IV. Si corpus A concipiatur simul habere vim secundum AB, & vim secundum AC, sic, ut eodem tempore transferatur & secundum directionem AB celeritate ut AB, & secundum directionem AC celeritate ut AC: tum ego vim illam ex utriusque huius concursu resultantem, dico *resultans* ex prioribus , vel & *vim compositam*; vocabulo circa motus iam recepto.

*Coroll:* Patet igitur , vim compositam nihil aliud esse, quam vim , quæ sola idem perfecte phænomenon præstaret, quod nunc concipiatur a pluribus invicem coniunctis proficiisci.

V. Si

V. Si Directiones illæ virium secundum AB & secundum AC sint ad se invicem perpendicularares , tum vires illas voco *indifferentes* , intellige ad se invicem ; quia neutrius directio afficit directionem alterius.

VI. Si Directiones illæ comprehendant angulum acutum, vires dico *consentientes*; &, si angulus fiat infinite acutus , adeoque directiones tandem coincidant , vires appello *coincidentes*.

VII. Si directiones memoratæ faciant angulum obtusum , vires voco *dissentientes* ; vel, si angulus fiat infinite obtusus , adeoque directiones tandem sint directe contrariae , vires nomino *repugnantes*.

*Schol.* Quando vim ex repugnantibus compositam dico , non id volo , inexistere illas corpori sic, ut id in contrarias simul moveatur plagas : sed intelligo illud , quod supereft ex viribus , quæ in plagas contrarias diriguntur , & , si divulgæ essent, moverentur.

VIII. Si Directiones virium duarum plane se non intersecent, vires appello *disjunctas* vel *parallelas*. Tales sunt eæ , quæ in diversis ejusdem corporis in directum moti partibus inexistere concipiuntur.

*Schol.* Observandum est , hunc casum plane non respondere ideæ illi , quæ habetur in motibus compositis ; hoc enim casu directiones non exponi possunt per latera alicujus parallelogrammi , quod tamen in ceteris omnibus fit , eo scilicet ordine , qui in rebus naturalibus observatur , ut ( Leibnitiano verbo ) extrema recidant in idem ; angulus e. g. infinite acutus in coincidentiam , infinite obtusus in repugnantiam.

IX. Fun-

**IX.** *Functionem* alicujus *lineæ* *voco* *quantitatem* *quam-*  
*cunque ex linea illa sola vel cum quantitatibus aliis con-*  
*stantibus utcunque compositam.*

**X.** *Functiones* *duarum linearum similes* *voco* *quantita-*  
*tes*, *qræ componuntur ex constantibus utrinque iisdem*, &  
*lineis ipsis eodem plane modo adhibitis*: *vel clarius*: *si*  
*in functione lineæ AB relinquas constantes & signa o-*  
*mnia*, & *solum pro linea AB substituas lineam AC*,  
*quantitates illas compositas voco functiones similes.*

**XI.** *Actionem* alicujus vis dico ipsum ejus exercitium,  
*quo sese dato tempore ad motum producendum applic-*  
*cat*, *una cum modo applicandi*: *si duæ pluresve vires*  
*ad eundem motum producendum concurrunt*, *actionem*  
*ex illis actionibus simplicibus resultantem voco actionem*  
*compositam.*

**Coroll. I.** Adeoque in viribus *vivis puris* *simpli-*  
*cibus* *actionem* *cum Leibnitio* *metior* *per factum vi-*  
*rium* *illarum in tempus*; *Tanto enim maior actio est*,  
*quanto longiori tempore durat uniformiter*, & tanto  
*maior*, *quanto vires sunt maiores*; *Neque in puris sim-*  
*plicibus differt modus applicandi unus ab altero*. *Igi-*  
*tur in symbolis, exposita actione per A, vi viva pura*  
*per V, & tempore per T, est A=VT.*

**2.** Consequenter, si duæ vires vivæ puræ sese agendo non afficiant, iuuent vel impedian, agant autem per tempora æqualia, actiones earum sunt ut ipsæ vires; hæ enim vires spectari possunt, ut simplices.

**3.** Si autem duæ vires sic applicentur, ut una agat in alteram, tum in æstimatione actionum ex datis viribus, vel virium ex datis actionibus, attendi simul debet, an

mo-

modus applicandi inferat differentiam? qualem? & quantum?

*Schol.* In viribus *mortuis*, sive pressionibus, actio idem est, quod alias momentum vocatur, adeoque mensuratur ex intensitate potentiae agentis in viam, quam dato tempore percurrit, vel ex magnitudine obstaculi in viam, per quam cedit. Patet enim, hisce positis adesse mensuram eorum omnium, quae in definitione actionis involvuntur; adeo nimis cum vi ipsa modus etiam applicandi. Ceterum, quae de actione virium hic dicuntur, pertinent praecipue ad sectionem secundam, ubi plenius intelligentur.

*Axiomata.*

I. Corpus, quod vi simplici movetur, habet celeritatem & directionem constantem, si abstrahas ab impedimentis externis.

II. Si vis una ceteris omnibus paribus maiorem producit motum absolutum, quam altera, vis prima maior est, quam secunda: si ceteris paribus eundem motum absolutum minori tempore producit, etiam maior est.

III. Si vires corporis A secundum AB aestimantur ex functione quacunque lineae AB, celeritatem & directionem virium exprimentis: etiam vires corporis A eiusdem vel æqualis secundum AC aestimantur, ex functione simili lineæ AC, exponentis celeritatem & directionem huius vis secundæ.

*Schol.* Pendet hoc axioma ex principio metaphysico, quod Leibnitius in Novellis Bælianis exposuit: ordinatis scilicet datis ordinata esse quaesita; adeoque datis similibus quaesita esse similia. Et hoc ipsum ex

G genera.

generaliori altero oritur, quod scil. nulla sit differentia, ubi nulla est ratio differentiæ. Potest igitur demonstrari hoc axioma, si quis postulet.

*Lemmatæ.*

I. Corpus viribus coniunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describit, quo latera separatis.

II. Et hinc patet compositio vis directæ secundum AD ex viribus quibusvis obliquis secundum AB & BD; & vicissim resolutio vis cuiusvis directæ secundum AD in obliquas quascunque secundum AB & BD.

*Schol.* Enunciavi hæc verbis *If. Newtoni Prince. p. 13.* Intelligo autem illa secundum definit. tertiam, vi cuius per lineas AB, AC, AD exprimitur motus, qui in dato tempore a vi data uniformiter sequeretur; adeoque & celeritas a viribus secundum AB vel AC agentibus oriundi. Ex motu enim ipso sumitur demonstratio Newtoni & aliorum omnium: Motus autem secundum AB, AC, AD, non est sine vi secundum AB, AC, AD,

III. In motu æquabili spatia eodem tempore percursa sunt ut celeritates. Constat id ex mechanicis.

IV. Nullæ dantur functiones similes laterum AC & CD, quæ simul sumtæ, sint in omni Triangulo Rectangulo æquales functioni simili hypotenusæ AD, præter quadrata.

*Demonstratio.*

Vt hoc intelligatur, assumo formulam universalem, functiones alicuius lineæ possibles omnes complexam: & quid ex supposita possibilitate functionum aliarum similiūm sequatur, inquiero. Deprehendo vero, quamprimum a quadratis discessero, emergere talia, quæ ostendant,

non

Fig. 2.  
3. 9.

nōn dari functiones similes desideratis conditionibus alias.  
Sit  $AC=A$ ,  $CD=B$ ,  $AD=V(A^2+B^2)$ . Functiones  
harum linearum  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[V(A^2+B^2)]$ , erunt ex-  
primendo illas universaliter & similiter:

$$[A] = mA^a + nA^b \&c. + (pA^d + qA^e \&c.)^a + (sA^g \\ + tA^b \&c.)^y (xA^i + yA^l \&c.)^{\delta} \&c. + \\ [B] = mB^a + nB^b \&c. + (pB^d + qB^e \&c.)^a \&c. + (sB^g \\ + tB^b \&c.)^y (xA^i + yB^l \&c.)^{\delta} \&c. + \\ [V(A^2+B^2)] = mV(A^2+B^2)^a + nV(A^2+B^2)^b \&c. \\ + \&c. + \&c. — in Infin.$$

Videtur quidem aspectus formularum primus longam & tædii plenam demonstrationem minari: Sed brevem facient *duo compendia*; quorum *altero* ostendam, functionem compositam nullam convenire instituto nostro; *altero*, inter simplices solam convenire potestatem quadraticam.

Sume ex compositis simplicissimam; habebis

$$mA^a + nA^b + mB^a + nB^b = mV(A^2+B^2)^a + \\ nV(A^2+B^2)^b$$

& consequenter

$$\frac{nV(A^2+B^2)^b - n(A^b+B^b)}{m - (A^a+B^a) - V(A^2+B^2)^a}$$

Hic vero in valorem coefficientis  $m$  ingrediuntur valores  
crurum A & B: Valores isti in triangulis dissimilibus  
sunt dissimiles: adeoque valor coefficientis varius: &  
functiones assumtæ nequaquam similes pro omnibus re-  
ctangulis. Manetque hoc incommodum, si vel plures  
duobus simplicibus; vel terminus aliquis complexus ex  
sequentibus assumantur: illi enim, cum simplicissimi

sunt, faciendo ex. gr.  $a=1$ , recidunt in casum modo examinatum. Generaliter itaque verum est, functionem compositam negotio nostro nullam congruere.

Sit iam secundo loco functio non composita, sed uno constans termino: erit

$$\text{five } mA^a + mB^a = mV(A^2 + B^2)^{\frac{a}{2}}$$

unde  $(A^a + B^a)^{\frac{1}{a}} = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$ ; ubi oculis patet, quando  $a=2$ , haberi æqualitatem.

Ut vero intelligatur, nullam dari potestatem aliam; notandum est, in extractione radicum ex aggregato duorum terminorum, post extractionem ex singulis terminis factam, requiri adhuc subtractionem alicuius quantitatis tertiae, quæ pro diversitate radicum necessario maior aut minor est, ut id constat ex genesi potestatum.

Potest itaque  $(A^a + B^a)^{\frac{1}{a}}$  repræsentari per  $A-x+B$ .

&  $(A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$  per  $A-y+B$ . ut nunc habeamus

$(A^a + B^a)^{\frac{1}{a}} = A-x+B = A-y+B = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$ . sed hæc æqualitas non subsistit, nisi  $x=y$ . Et  $x$  non est æquale  $y$ , nisi exponentes radicum sint eædem per modo dicta: Igitur ob æqualitatem inventam exponentes debent esse eædem: five  $a$  non potest esse nisi 2.

Q. E. D.

### Hypotheses.

1. Facilitatis gratia supponantur in universa hac sectione massæ mobilium æquales; nisi contrarium expresse dixero.

2. Supponatur motus æquabilis, donec diserte moneam, me loqui de accelerato aut retardato.

Pro-

## Propositiones.

### Theorema I.

Vires vivæ puræ, quæ easdem massas movent, possunt mensurari per functionem aliquam celeritatis, quam producunt.

### Demonstratio.

Quoniam motus a viribus vivis puris procedens perseverat in infinitum, ex Def. I. & Axiom. I. ideo quantitas illarum virium non potest æstimari sive ex spatio, sive ex tempore absolutis. Potest igitur solum ex massis, & ex relatione spatii ad spatum eodem tempore, vel temporis ad tempus pro eodem spatio; aliud enim nihil datur in hoc motu. Quia verò massas supponimus æquales per hyp. 1. Igitur in nostris casibus aut nulla est inæqualitas, & æstimatio virium nulla; aut illa pendet ex relationibus memoratis. Est vero inæqualitas per ax. 2. ergo & æstimatio eius, eademque petenda ex relationibus allegatis. Hæ autem comprehenduntur in idea celeritatis per definitionem celeritatis receptam. Igitur ex celeritate sumi potest mensura: cumque per dicta aliud nihil accedat, sumi potest ex functione aliqua celeritatis, quæ a viribus illis producitur. Q. E. D.

*Coroll.* 1. Consequenter duæ pluresve vires vivæ puræ, sese invicem non afficientes, vel seorsim consideratæ, æstimari possunt, & per ax. 3. debent, per functiones similes celeritatum, quas producunt.

*Coroll.* 2. Etsi igitur vires puræ non obtineant effectus ita totales, ut iisdem absorbeantur: possunt tamen invicem conferri & mensurari ex effectibus dato tempore productis; effectus enim illi pro diversis celeritatibus sunt diversi.

*Schol.* Attendendum tamen est, cum dico, vires puras mensurari posse ex effectibus suis, & effectus variare pro celeritatibus variis: me non ideo statim asserere, vires, effectus & celeritates esse proportionales. Multæ adhuc difficultates involvuntur mensuræ effectuum variorum, de quibus hoc loco dicere nihil attinet.

### Theorema II.

Si duæ vires vivæ puræ eidem corpori A inexistentes ita agant, & ad producendum aliquem motum absolutum concurrant, ut neutrius motus motum alterius in sua directione & celeritate augeat vel minuat: tum actio composita ex actionibus virium illarum resultans est æqualis aggregato actionum singularium.

### Demonstratio.

Actio composita aut æqualis est aggregato singularium, aut maior, aut minor. Non maior: quia neutra alteram auget, dum ita concurrunt, ut neutrius motus per motum alterius in sua directione & celeritate promoveatur. Non minor: quia neutra alteram in concursu suo impedit, aut motum eius imminuit. Igitur est æqualis.

Q. E. D.

*Coroll.* Quoniam in viribus vivis puris actiones eodem tempore durantes sunt uti vires, per Cor. 2. def. XI. Igitur & vis composita, ex duabus eiusmodi viribus resultans, est æqualis aggregato singularium.

*Schol.* Duplex huius Theorematis applicatio esse potest, utraque legitima, sed altera tantum in sequentibus attendenda. Si massam corporis A concipias divisam in duas partes, tum habebis duas vires vivas in eodem corpore, sed ex illarum genere, quas def. 8. parallelas vel disiunctas vocavimus; atque eo in casu per praefens theorema intelligitur, positis diversorum corporum cele-

celeritatibus iisdem vires esse ut massas. Sin eandem massam corporis A, atque adeo unumquodque eius punctum censeas urgeri duabus viribus, quarum tamen neutra alteram in exercitio suo impedit vel adiuvet, sic, ut corpus non magis aut minus promoveatur in directione singularum, sive illæ simul agant, sive solæ agant: habebimus alterum huius propositionis casum, qui respondet Def. 5. & theoremati seq.

### Theorema III.

In omni parallelogrammo rectangulo actione & vis via pura secundum diagonalem AD est æqualis aggregato actionum & virium vivarum purarum secundum latera AB, AC. Fig. 2.

### Demonstratio I.

Vires secundum latera AB & AC ad communem motum concurrentes sic agunt singulæ, ut neutrius motus motum alterius in sua directione & celeritate augeat vel imminuat: corpus enim A per concursum illarum nec magis nec minus promovetur secundum directionem AB, quam si hæc vis sola ageret; similiterque secundum directionem AC. Earum igitur aggregatum est æquale vi compositæ resultanti ex earum concursu per Cor. Theor. 2. Sed vis hæc composita est vis secundum diagonalem per Coroll. def. 4. & Lemma 1. Ergo in omni parallelogrammo rectangulo vis secundum diagonalem est æqualis aggregato virium secundum latera AB & AC. Idemque valet de actionibus; actiones enim hoc in casu per Cor. 2. Def. XI. sunt ut vires. Q.E.D.

*Schol.* Observetur, inter motus vere compositos (v. Schol. def. 8.) in solo rectangulo duas vires laterales sic agere, ut neutra vis alterius motum in sua directione

*Fig. 3.* ctione augeat vel minuat. Si enim angulus sit acutus, & ad singulas directiones AB vel AC ducatur linea perpendicularis *ab*, *ac*; quo mensurari possit, quantum à vi utraque in singulis directionibus corpus A moveatur: manifestum erit, illud motu in linea AD facto magis recedere a linea *ab* in directione AB, vel à linea *ac* in directione AC per motum utrumque coniunctum, quam per unum simplicem: Et vice versa, si angulus fuerit obtusus, illud minus promoveri in suis directionibus. Nostra igitur demonstratio ad solum pertinet casum anguli directionum recti: id quod vel ideo statim monendum duxi, ne quis hæc ad omnes motuum compositorum casus ita transferre adgrediatur, ut putet, in parallelogrammis etiam obliquangulis vim secundum AD esse æqualem aggregato virium singularium secundū AB & AC. Recte Newtonus l. c. monuit, per motum secundum AC corpus A non accedere ad lineam BD. Recedit autem a linea *ba*, & accedit ad lineam *Dd*. Itaque augetur motus in directione *ABd*. Excluditurque hic casus a Theor. 2. una cum illis omnibus, ubi directio vis unius potest resolvi in duas perpendicularares, quarum altera coincidit vel repugnat directioni vis alterius.

### *Demonstratio 2.*

*Fig. 4.* Sit corpus A elasticum quiescens, & in illud incurrat aliud corpus F priori æquale, elasticum, & in directione FA cum celeritate ut FA latum: per receptas percussionum leges, post ictum corpus F quiescat, & corpus A movebitur in directione & cum celeritate  $AD=FA$ . Vis igitur omnis corporis F transit in corpus A, & vis, quam habet corpus A, est æqualis vi, quam habuit corpus F, sibi æquale. Sint porro duo

cor-

corpora E & G prioribus æqualia ; quiescat denuo A, & in idem incurvant eodem momento corpora E & G : Per easdem regulas quiescent post ictum corpora E & G : & corpus A movebitur in directione ac celeritate **AD=FA**. Consequenter utrumque corpus E & G amittet vim suam, quæ transibit utraque in corpus A. Vis autem, quam habebit corpus A, erit eadem, quæ ante fuerat. Cum igitur vis corporis F, & aggregatum virium in corporibus G & E æquentur vi eidem tertiae, a corpore A acceptæ ; æquantur etiam inter se : Hoc est, in parallelogrammo rectangulo vis viva pura corporis F, secundum diagonalem moti, est æqualis aggregato virium, quibus duo corpora æqualia moventur in lateribus FE & FG. Q.E.D.

*Schol. 2.* Facile patet, hanc secundam demonstrationem non posse transferri ad angulos obliquos; quoniam ibi differunt casus percussorum, qui fiunt vel ab uno corpore, secundum diagonalem moto, vel a duobus, motis secundum latera, quando celeritates ubique lineis predictis sunt proportionales. Rationem diversitatis horum casuum ex suis fontibus eruemus in sectione secunda ; qua simul ostendemus, neque a viribus mortuis, neque ab ipso motu composito desumi instantiam posse adversus nostram hanc inferendi rationem.

#### Theorema IV.

In motu actuali æquabili vires motrices non sunt ut spatia, quæ eodem tempore describuntur, neque adeo ut celeritates motuum.

#### Demonstratio.

Vires Motrices in motu æquabili sunt vires vivæ puræ, per Def. 1. Iam in parallelogrammo rectangulo aggregate virium purarum secundum latera AB & AC est Fig. 2.

H

æqua-

æquale vi secundum diagonalem AD per Theor. 3. Aggregatum laterum non est æquale diagonali. Ergo vires non sunt ut latera & diagonalis. Spatia eodem tempore percursa, & celeritates per Lemma 4. sunt ut latera & diagonalis. Igitur vires vivæ non sunt ut spatia eodem tempore percursa, neque ut celeritates. Q. E. D.

*Coroll.* Humani igitur aliquid patiuntur, qui generiter vires omnes motrices, atque adeo etiam vivas puras ex facto massæ in celeritatem æstimant.

### Theorema V.

In motu æquabili vires simplices sunt ut quadrata spatiorum eodem tempore percursorum; sive ut quadrata celeritatum, quas producunt.

### Demonstr.

In parallelogrammo rectangulo diagonalis repræsentat spatium a vi secundum diagonalem, latera re-præsentant spatia a viribus singulis secundum sua latera eodem tempore percursa, per Lemma 1. & spatia illa re-præsentant celeritates per Lemma 4. Vires autem possunt mensurari ex functione celeritatis, per Theor. I. & vires complures ex functionibus similibus, per Coroll. I. Theor. I. Igitur vires secundum diagonalem, & latera possunt mensurari ex functionibus harum linearum. Debent autem in rectangulo sic mensurari, ut aggregatum singularum lateralium sit æquale tertiae diagonali per Theor. III. Sed in rectangulo nullæ dantur functiones similes huic conditioni satisfacientes, præter quadrata laterum, per Lemma 5. Igitur vires singulae æstimandas sunt per quadrata linearum, spatia & celeritates suas experimentum: Hoc est, in motu æquabili vires simplices sunt ut quadrata spatiorum &c. Q. E. D.

*Coroll.*

**Coroll.** Recte igitur æstimationem antea receptam correxit Leibnitus, substituendo illi, pro mensura virium vivarum purarum, factum ex massa in quadratum celeritatis.

**Schol.** Velim attendatur, hoc loco penitus cessare exceptiones virorum celebrium adversus argumentum Leibnitii allegatas, & *a diverso tempore* motuum sumtas: est enim ubique idem tempus; est etiam celeritas uniformis. Feci igitur, quod non ita pridem Illustris sententiæ Leibnitianæ adversarius postulavit; reduxi quæstionem ad motus uniformes, hoc est, ipsius sententia, ad debitos argumento huicce terminos, & ad identitatem temporis. Ostendam vero inferius, quomodo vires in motibus etiam acceleratis æstimentur ex præsentibus; & quibus casibus ad temporum diversitates attendi debeat, vel non debeat, indicabo in sectione secunda.

#### Theorema VI.

In parallelogrammis non rectangulis vis secundum diagonalem non est æqualis aggregato virium secundum latera singularium.

#### Demonstr.

Vires vivæ simplices mensurantur ex quadratis celeritatum suarum, per Theor. V. Celeritates sunt ut lineaæ respectivæ in parallelogrammo, ex Def. III. Aggregatum igitur virium secundum latera repræsentatur aggregato quadratorum ex lateribus  $AB^2 + AC^2$ ; & vis secundum diagonalem repræsentatur quadrato diagonalis  $AD^2$ . Hoc aggregatum non est æquale quadrato diagonalis, nisi in rectangulo, per Elem. Geom. Ergo nec aggregatum virium secundum latera est æquale vi secundum diagonalem in parallelogrammis non rectangulis.

*Coroll.* Ergo neque vis ex duabus lateralibus , eidem corpori A insitis , composita , hoc in casu est æqualis eorum aggregato. Vis enim composita est vis secundum diagonalem , per Coroll. Def. IV.

### Theorema VII.

Vis composita ex duabus viribus lateralibus , quorum directiones angulum *acutum* faciunt , est æqualis summae quadratorum spatiorum , quæ seorsim ab illis eodem tempore percurrentur , una cum duplo facto spatii unius CD in lineam EC, interceptam inter punctum C & perpendicularē AE, ex angulo parallelogrammi acuto demissam.

### Demonstratio.

Vis ex lateralibus secundum AB & AC composita est vis secundum diagonalem AD per Coroll. def. IV. Vis secundum diagonalem  $AD = AD^2$  per Theor. V. sed ob angulum AED rectum, est  $AD^2 = AE^2 + ED^2 = AE^2 + EC^2 + 2EC \times CD + CD^2 =$  (quia  $AE^2 + EC^2 = AC^2$ )  $AC^2 + CD^2 + 2EC \times CD =$  quadrato spatii AC + quadrato spatii CD , una cum duplo facto ex CD in lineam EC. Q. E. D.

*Coroll. 1.* Patet , hunc casum postliminio recidere in casum theoremati tertii ; si angulus fiat infinite parum acutus , sive rectus ; tunc enim EC fit  $\equiv 0$ .

*Coroll. 2.* Patet etiam , si in corpore A supponatur inesse vis insita secundum AB , & simul alia secundum AC , radium quemcunque quadrantis FCG ; vim ex utraque compositam semper esse maiorem , quo angulus BAC est magis acutus ; Erit enim linea EC semper maior , donec evanescente angulo fiat æqualis radio  $AF = AC$ .

*Coroll.*

**Coroll. 3.** Ex quo etiam hoc sequitur , si corpori A iam in motu secundum AB posito , nondum insita concipiatur vis quoque altera , sed illi demum debeat percussione corporis alterius externa ingenerari vis secundum AC radium quemcunque : quod vis externa percutiens , corpori iam moto directionem & celeritatem AC de novo ingeneratura , debeat esse maior , quando est angulus BAC acutior .

### Theorema VIII.

Vis composita ex duabus viribus eidem corpori A Fig. 6. iamiam insitis , & directione sua coincidentibus , est æqualis quadrato summæ spatiorum , quæ a singulis percurserentur dato tempore , sive quadrato summæ celeritatum , quas singulæ seorsim producerent .

### Demonstratio.

Hoc varie demonstrari potest . Maneamus in trahite hactenus calcato . In casu theorematis VII. diagonalis AD , exprimens directionem & celeritatem motus compositi , ob angulum infinite acutum , fit æqualis  $AB+BD$  . Ergo & vis composita , hoc est , vis secundum diagonalem , quæ est  $=DA^2$  , fit  $=(AB+BD)^2$  .

*Similiter* , EC fit  $=AC$  , & AE fit  $=0$  . Adeoque formula illius Theorematis  $AE^2+EC^2+2EC\times CD+CD^2$  transit in hanc  $AC^2+2AC\times CD+CD^2$  ,  $=(AC+CD)^2=(AC+AB)^2$  . Q. E. D.

**Coroll. 1.** Idem valet de tribus , pluribusque in uno corpore coincidentibus , estque vis ex pluribus talibus composita æqualis quadrato summæ celeritatum , non summæ quadratorum celeritatum .

**Coroll. 2.** Adeoque vis composita ex coincidentibus non est aggregatum ex singulis simplicibus tantum :

sed æquatur aggregato huic una cum productis radicum ex singulis quadratarum in radices reliquarum bis sumtis. Patet hoc ex dignitate secunda multinomiorum.

*Cor. 3.* Ergo summa productorum modo memoratorum facit differentiam inter vim compositam ex duabus eidem corpori insitis, sed directione indifferenti, aut coincidenti agentibus.

*Cor. 4.* Quodsi igitur vires simplices in eodem corpore coincidentes sint seorsim æquales, vis ex illis composita proportionalis est quadrato numeri componentium. Ita vis A, composita ex tribus  $a, a, a$ , quarum celeritates sunt 1, 1, 1, habebit celeritatem, ut 3, & erit = 9

*Cor. 5.* Patet quoque, si ex hac velocitate composita dematur velocitas ut 1. vim compositam ex omnibus non solum imminui vi ut 1, sed simul auferri duplum factum ex hac ablata in omnes simplices adhuc remanentes.

*Schol. 1.* Non caret hæc propositio *paradoxi* specie. Itaque varia hic notari debent. 1. Non potest illa evitari, nisi vel Leibnitiana virium æstimatio negetur, vel recepta motuum compositio. Si enim ex duobus motibus consentientibus vel coincidentibus fit motus in diagonali, & vis æstimatur per quadratum celeritatis: erit utique vis composita proportionalis quadrato diagonalis. Hoc igitur in illorum gratiam, qui Leibnitio accedunt, dictum esto. 2. Adversariis commendo *verum* propositionis sensum; eo enim neglecto possent ex hoc theoremate absurditatis arguere æstimationem Leibnitii. Loquor de viribus eidem corpori *insitis*; non de *impri mendis*. *Scio*, si simul impingant in corpus A duo corpora & a sigillatim illi æqualia, & quorum singula seorsim

orsim ipsi imprimenter celeritatem AB, & AC, non ideo corpori A imprimi celeritatem ut AD, cum angulus BAC obliquus est. *Sco*, si corpus duplum ( $=a+a$ ) impingat cum celeritate ut AB, in corpus A quiescens, non illi communicatum iri celeritatem  $=2AB$ ; et si a corpore a solo accepisset celeritatem AB, & a corpore a solo accepisset eandem. Non pertinent ad nostrum institutum hi casus. *Dico enim*: Si eidem corpori A censeantur iam iam insitæ duæ vires M & N, quarum alteræ corpus A transferrent dato tempore ex A in B, & alteræ ex A in C tempore eodem : Tum vis ex illis composita transferet corpus A tempore eodem ex A in D, & erit proportionalis quadrato lineæ AD. 3. Quæ sit huius differentiæ causa prolixius dicam sequenti sectione. Hoc loco illud moneo: *vulgares* percussionum leges & considerationes hic non sufficere. Si quæ autem percussio fuerit eiusmodi, ut in corpus motum agat tanquam in quiescens, illius ope tales corpori vires inferi posse. Exempla mox repetam e doctrina gravitatis. Sed sublimius aliud, & nobili controversiæ implicitum, alteri loco & temporis asservabo. 4. Denique, si minus tolerabile videatur ex duabus viribus coincidentibus exsurgere vim maiorem aggregato earundem : explicit mihi contrariæ sententiæ patroni, cur in ipsarum hypothesi per resolutionem oriantur vires parentibus suis maiores. Sienim ex F moveatur corpus directione & celeritate FA, vis motrix erit  $=F \times FA$ : Sed postquam id in corpus A quiescens & æquale impegit, movebitur A secundum AC cum celeritate AC, & F secundum AB cum celeritate AB: eruntque adeo vires motrices  $=F \times AB + A \times AC$ . Quale hoc *augmentum* est? & unde ortum?

*Schol.*

*Schol. 2.* Illud fortassis non abs re erit, ut solutio-  
nem speciosæ difficultatis hic interserum; quoniam *aliquo*  
*sensu* sumi ex hoc theoremate debet. Est vir genere &  
scientia illustris, cuius hæc obiectio publice legitur.,, *Sit*

Fig. 7.

„ *corpus C sphæricum, et gravitatis expers, libere na-*  
„ *tans in aere. Sint corpora duo A et B priori*  
„ *æqualia et similia, eademque celeritatibus AC=BC, sub*  
„ *directionibus æqualiter ad horizontem inclinatis irruant*  
„ *in corpus C. Resolvantur directiones AC et BC in*  
„ *suas laterales, altera in AD, et DC, altera in BD et*  
„ *DC. Quoniam directiones horizontales AD et BD per*  
„ *hypothesin æquales sunt, et contrariæ; illæ mutuo se se*  
„ *destruunt: Restantque solæ verticales DC et DC, qua*  
„ *m corpus C quiescens agant. Urgebitur itaque corpus*  
„ *C verticaliter deorsum, cum summa directionum vel vi*  
„ *rium verticalium residuarum. Sit angulus ACB=120*  
„ *gradibus, erit DC=½BC, et corpus C urgetur vi ver*  
„ *ticali, quæ sit æqualis vi totali et absolutæ, quam ante*  
„ *ictum habuit corpus A vel B, adeoque dato tempore de*  
„ *scribet lineam verticalem EC=AC=BC: habebitque*  
„ *celeritatem eandem, qua ferebantur corpora A et B an*  
„ *te percussionem: atque, si in ipso ictus momento, quar*  
„ *tum corpus E singulis prioribus æquale verticaliter sur*  
„ *sum impingat cum data celeritate EC, certum est, cor*  
„ *pus C permanfurum in quiete, et futurum inter corpo*  
„ *ra utrinque agentia æquilibrium. Sed æquilibrium non*  
„ *afforet, si vires æstimandæ essent per quadrata veloci*  
„ *tatum: Corpus enim C urgebatur duabus viribus verti*  
„ *calibus, quarum singularum celeritates exprimuntur per*  
„ *DC=½EC. Adeoque vires per DC<sup>2</sup>=¼EC<sup>2</sup>; unde*  
„ *earum integra summa tantum est=½EC<sup>2</sup>; cum tamen*  
„ *quar-*

*quartum corpus E, impingens in C, et idem reducens ad,, aequilibrium, babeat celeritatem ut EC, et consequenter,, vires, ex Leibnitii sententia aestimatas, ut EC<sup>2</sup>. Quo-,, modo haec consentiunt? ,, Est hic dignus vindice nodus: Dabimus operam, ut solvatur. Poteſt autem id fieri, si casuum varietates legitime distinxeris.* 1. *Si omnia tria corpora, A, B, & E simul impingant in corpus medium C: erit aequilibrium, hoc sensu, ut corpus C permaneat in quiete, & nullius corporis motum sequatur; vires autem, quibus illud sursum & deorsum urgetur, non sunt aequales. Siquidem vis sursum agens est = E × EC<sup>2</sup>: & vis deorsum agens est = (A+B) × DC<sup>2</sup>. Notari autem meretur, ad quietem corporis inter duo impingentia medii nequam requiri virium aequalitatem; sed oportere, ut vires sint reciprocæ massarum. Id in secunda sectione plenius apparebit.* 2. *Si consideres, quid in experimento aliquo secuturum sit ex impactu duorum tantum corporum A & B in tertium C quiescens, & de elasticis sermonem instituas: equidem directiones horizontales AD & BD ita sibi repugnabunt, ut corpus C de neutra participet; sed directiones verticales DC & DC non ita transibunt in corpus C, ut hoc moveatur cum celeritate CE, et si illud in eadem hac directione CE feratur post ictum. Neque adeo hoc corpus C, per ictum istum semel in motu positum, ad aequilibrium reducetur per occurrentis aliud aequale E, motum in directione, & cum celeritate EC. Constat hoc per ordinarias de corporum percussione regulas: neque pugnat cum sententia priori, si rem solicite reputes.* 3. *Sin denique abstrahas a modo, quo corpori C impressæ sint vires illæ secundum DC & DC, concipiasque, eidem corpori C insitas esse undecunque vires M & N,*

agentes secundum latera parallelogrammi DC & DC, angulum infinite acutum comprehendentia; erit utique celeritas corporis C exprimenda per diagonalem  $= 2DC$ ; & opponendum huic corpori, pro restituendo æquilibrio, aliud æquale E, cum celeritate & directione EC adveniens. Sed hoc in casu vis corporis C non erit summa singularium  $= 2DC^2 = \frac{1}{2}EC^2$ ; Sed addendum est huic summæ duplum factum ex DC in DC: ut adeo per theorema præsens, vis composita corporis C emergat  $= C \times (DC + DC)^2 = E \times EC^2$ ; uti pro æquilibrio faciendo requiritur per regulam No. 1. huius scholii allegatam.

4. Similes hisce responsiones pertinent ad illos quoque casus, si loco trium eiusmodi corporum, æquales directionibus suis angulos comprehendentium, fingas: *quinque*, aut *septem* &c. corpora impingere in aliquod medium C quiescens: illud unum memineris, quod in hisce casibus attendi etiam ad theor. seq. 10. oporteat; est enim  $C \times (2DC - 2HC)^2 = E \times EC^2$ , pro No. 3. huius scholii: pro No. autem 1. erit, (colligendo A & F in corpus unum, itemque B & G in alterum) A  $(DC - HC)^2 + B (DC - HC)^2 : E \times EC^2 = E : A + B$ . Est enim  $DC - HC = \frac{1}{2}EC$ ; sive  $2DC - 2HC = EC$ : & generaliter pro omni figura regulari laterum numero imparium, uti Goldbachius noster ex hoc ipso theoremate deduxit, cum id Geometrice nonnisi difficilius demonstrari posset, ducta diametro ad unum radiorum v. gr. EC perpendiculari, differentia omnium distantiarum superiorum Aa + Bb + &c. & omnium inferiorum Ff + Gg + &c. est semper æqualis radio EC; id quod obiter indicatum pro novo exemplo esse potest instituti illius Varignoniani, quo usus mechanicæ in geometria ostenditur.

Theo.

Fig. 8.

**Theorema IX.**

Vis composita resultans ex duabus viribus, quarum directiones angulum *obtusum* comprehendunt, est æqualis summæ quadratorum spatiorum, quæ seorsim ab illis eodem tempore percurrerentur, demto duplo facto spatii unius CD in lineam CF interceptam a perpendiculari ex angulo obtuso demissa, & puncto C. Fig. 9.

*Demonstratio.*

Hæc eadem est cum Demonstratione Theorematis VIII. nisi quod ibi prop. 12. Element. II. allegatur, hic autem prop. 13. Est enim  $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2CD \times CF$ ; Adeoque & vis composita ex duabus &c. Q.E.D.

*Coroll. 1.* Patet igitur, si directiones angulum obtusum comprehendant, vim compositam esse minorem aggregato singularum seorsim sumtarum.

*Coroll. 2.* Esse æqualem summæ virium singularium, si CAB fiat infinite parum obtusus, hoc est rectus; adeoque rem denuo recidere in Theor. III.

*Coroll. 3.* Esse minimam, si angulus fiat infinite obtusus, hoc est, si directiones fiant plane contrariæ; eo enim casu CF fit maximum.

**Theorema X.**

Vis composita resultans ex duabus, quarum directiones sunt omnino contrariæ, est æqualis quadrato differentiæ spatiorum, quæ a singulis percurrerentur, sive quadrato differentiæ celeritatum, quas singulæ producerent.

*Demonstratio.*

Fiat angulus CAB infinite obtusus, ut habeamus vires directione sibi repugnantes: fiet  $CF = CA$  adeoque formula Theor. IX.  $CA^2 - 2CD \times CF + DC^2$  erit  $= CA^2 - 2CD \times AC + CD^2$ . Est vero hæc formula Fig. 9.

$(CA - CD)^2$ , vel  $(CD - CA)^2 =$  quadrato differentiæ laterum, quæ exponunt spatia & celeritates. Ergo vis ut  $AD^2$ , composita ex duabus, quarum directiones &c. Q. E. D.

Potest idem, uti hactenus, deduci ex vi simplici secundum Diagonalem. Diagonalis enim hoc in casu est differentia laterum. Et vis composita est æqualis vi simplici secundum Diagonalem ex Def. IV. Ideoque per Theorem. V. vis hæc composita est æqualis quadrato differentiæ spatiorum vel celeritatum. Q. E. D.

### Theorema XI.

Si vires duæ insitæ, directionibus suis indifferentes, ipsæ exponantur per lineas AB & AC, tum directio & celeritas vis ex illis compositæ obtinentur, si in parabola quacunque semiordinata DO pertinens ad abscissam AD ( $= AB + AC$ ) sumatur pro sinu toto, & semiordinatae BN, CM, pertinentes ad abscissas AB & AC respective pro cosinibus BAD, CAD.

### Demonstratio.

Sit AMNO linea parabolica, parametro  $m = 1$  descripta: Erit  $DO = \sqrt{DA}$ , &  $BN = \sqrt{BA}$ , denique  $CM = \sqrt{CA}$ . Fiat iam  $Ab = BN$ , &  $Ac = CM$ , &  $Ad = DO$ . Expriment  $Ab$ ,  $Ac$ ,  $Ad$ , celeritates virium per AB, AC, & AD expressarum, per Theor. V. eritque adeo  $Abdc$  par allelogrammum, in quo latera & diagonalis repræsentant directiones & celeritates virium indifferentium secundum  $Ab$  &  $Ac$ , atque vis ex illis compositæ secundum  $Ad$ . Quodsi igitur actu sumatur  $Ab$  &  $Ac$ , habebitur  $Ad$  positione. Si in gradibus quadratur, manifestum est, sumta  $Ad$  pro sinu toto, esse  $Ac$  sinum rectum, &  $Ab$  sinum complementi Anguli BAD,

&amp;

Fig. 10.  
et 11.

& vice versa,  $Ab$  rectum, &  $Ac$  sinum complementi anguli CAD. Q.E.D.

*Coroll. 1.* Ex his patet, si latera, sibi invicem perpendiculariter insistentia, exprimant ipsas vires, & compleatur rectangulum ACEB, directionem vis compositæ nunquam fore in eius Diagonali, nisi cum rectangulum transit in quadratum.

*Coroll. 2.* In ceteris casibus lineam AD, quæ directionem & quantitatem vis compositæ exponat, cadere versus illud latus, quod minores exponit vires.

*Coroll. 3.* De aliis directionum componendarum angulis rem similiter posse expediri.

*Schol.* Brevior constructio fuisset, si ad alterutram lineam, v. g. AC pro unitate assumtam, & ad alteram AB quæsivisses medium proportionalem AF, & ex hac AF, atque unitate AC complevisses parallelogrammum. Ita enim directiones & celeritates fuissent uti latera AC, AF, AG, quia vero sic pro singulis casibus nova assumeatur unitas; ideoque prætuli constructionem alteram universaliorem. Semel enim descripta omnibus infernit casibus parabola. Utilitatem huius theorematis suo ostendam tempore. Nunc transeo ad motum acceleratum.

### Theorema XII.

Si quod corpus A ex altitudine AB ita cadat motu a quiete incoato in A, ut percurrento spatiū AC in tempore primo adquirat celeritatem CF, & percurrento spatiū CD in tempore secundo adquirat novam celeritatem LG = CF, habeatque adeo in D celeritates secundum eandem directionem duas æquales, scil. DL (=CF) & LG: iterumque percurrento spatiū DE præter priores DL+LG=BM+MN ad-

Fig. 12.

quirat novam singulis prioribus æqualem NH, & sic porro: Dico, vim corporis vivam, lapsu adquisitam, esse ut quadratum celeritatis finalis.

*Demonstratio.*

Supponatur, nova celeritatis incrementa cessare vel in C, vel D, vel E, vel B &c. Certum est, corpus deinceps motum iri æquabiliter descendendo; & vim eius adquisitam fore maiorem in B, quam in E, & sic porro; quoniam major illis casibus est celeritas, & quantitas virium mensurari potest ex functionibus celeritatum similibus per Theor. I. & Cor. eius I. Quæritur igitur solum, quanta sit illa vis? Ostendimus Theor. 5. in motu uniformi vim esse ut quadrata celeritatum. Hic motus est uniformis in suppositione cessantium incrementorum, & peragitur a vi per lapsum adquisita. Ergo vis per lapsum adquisita est ut quadratum celeritatis finalis.

Potest hoc, præmisso Theor. 5. omnino sufficere ad monstrandum rei veritatem: ut tamen intelligatur, quomodo hæc etiam cum cæteris cohærent, placet attendere ad Theorema 8. Vis lapsu a quiete incoato sic adquiritur, ut corpori A, cadendo per AC imprimatur vis celeritatis CF in directione verticali; eidemque cadenti per CD imprimatur vis celeritatis LG, & cadenti per DE vis celeritatis NH in directione priori. Habemus igitur tres vires insitas coincidentes, quarum singularum celeritates sunt  $CF = LG = NH$ : adeoque per Theor. 8. vis ex illis tribus composita est æqualis  $(CF + LG + NH)^2 = EH^2$ , sive uti quadratum celeritatis finalis. Q.E.D.

*Coroll.* Quoniam in hypothesi theorematis præsentis per Galilæanas demonstrationes altitudines lapsus sunt,

ut

ut quadrata celeritatum finalium, per altitudinem illam  
inde a quiete cadendo adquisitarum: igitur manifestum est,  
rectissime celeb. viros, Leibnitum, Hermannum &  
Wolfium, mensuram virium vivarum fecisse altitudinem,  
per quam grave cadens a quiete in hypothesi gravitatis  
naturalis Galilæana adquireret celeritatem datae æqualem;  
itemque, per quam ascendendo consumeret celeritatem  
initialē datae æqualem.

*Schol.* Habemus hoc loco factum naturæ, quod ca-  
sum exhibit Theorematis nostri VIII: Etsi illud for-  
tassis prima fronte satis a consuetudine naturæ alienum vi-  
deri potuisset. Usus autem illius Theorematis spectari  
amplius in hoc negotio potest; siquidem facilis hic via a-  
peritur solvendi difficultatem Leibnitio motam. Suspi-  
catur enim Vir Clarissimus, pugnare secum duas Leib-  
nitii sententias, dum altera gravitatem requirat unifor-  
mem, altera respuat: æqualibus enim temporibus æqua-  
les imprimi celeritates, gravitatem igitur esse unifor-  
mem, & agere æqualiter; nec tamen æquales im-  
primi vires, gravitatem igitur non esse uniformem,  
nec agere æqualiter. Accipe verba, quæ huc  
pertinent: „Supponatur tempus, quod cadendo insumi-  
tur, dividi in partes æquales. Quia gravitas uniformis  
„est, et consequenter æqualibus temporis partibus æquali-  
„ter agit; necessum est, ut actione sua imprimat, et com-  
„municet corpori cadenti vires, celeritates et motus æqua-  
„les temporibus æqualibus. Adeoque vis impulsiva, cele-  
„ritas, et motus corporis cadentis augebuntur pro ratio-  
„ne temporis. — Gravitas ponderis 4 librarum tantun-  
„dem agit uno tempore, ac gravitas ponderis 1. libræ  
„quatuor temporibus. — Dominus Leibnitius agnoscit,  
„quod

„ quod gravitas temporibus æqualibus producat celeritates  
 „ æquales in corpore descendente , quodque tollat æquales  
 „ in ascendentे ; atque adeo sit uniformis. Agnoscit esse

× Hanc parenthesin ego addidi , ut comple-  
 atur sensus , credo omis-  
 sam esse in-  
 curia Ty-  
 pothetæ , ob repeti-  
 tionem vo-  
 cis unifor-  
 mem .

„ uniformem , (cum agitur de imprimenda celeritate;  
 „ et facit tamen non uniformem) × cum agitur de im-  
 „ primenda vi impulsiva. Non igitur secum ipse con-  
 „ venit. „ Hactenus vir doctissimus Solutionem dif-  
 ficultatis peto ex præmissis Theorematiſ 12 & 8. Sin-  
 gulis scil. temporibus imprimitur nova celeritas priori  
 æqualis ; idque ob uniformitatem gravitatis , & quoniam  
 illa in corpus motum agit tanquam in quiescens. Dicam  
 similiter , singulis temporibus imprimitur nova vis viva ,  
 quæ si sola esset in hoc corpore sine priori iam inexisten-  
 te , vel si in alio corpore conciperetur , esset eidem æ-  
 qualis , ob eandem rationem ; etsi enim iam moveatur  
 corpus , respectu tamen caußæ gravificæ potest consi-  
 derari ut quiescens. Perinde igitur est , respectu no-  
 varum caußæ gravificæ impressionum , an concipias il-  
 lam secundo momento agere in corpus prius iam aliqua  
 vi affectum ; an supponas post primum momentum an-  
 nihilari illud , & substitui in eius locum aliud quiescens  
 æquale. Utroque enim casu gravitas tantudem aget in  
 momento secundo. Quoad actionem igitur gravitatis ipsam  
 nulla hic disformitas fingitur. Differentia omnis est in  
 effectu composito. Celeritas enim ex duabus singulatim  
 æqualibus composita facit summam ; adeoque respondet  
 temporum summæ : Sed vis viva , composita ex duabus  
 in eodem corpore coincidentibus , quarum secunda prioris  
 celeritatem sua celeritate addita duplam facit , vis in-  
 quam , hæc non facit summam duarum virium singularium  
 per Theor. 8. adeoque non respondet tempori , sed qua-  
 dra-

dratis temporum vel celeritatum , sive spatiis descensus per Theor. 12. Nihil hic pugnat. Gravitas est uniformis in producenda celeritate nova , & vi nova : discrimen celeritatis compositæ a vi composita aliunde pendet , quam a diversa æqualibus temporibus gravitatis actione. Ista de motibus acceleratis. Nunc de retardatis breviter.

### Theorema XIII.

In motibus uniformiter retardatis vis initialis composita ex pluribus simplicibus coincidentibus per actionem gravitatis eodem modo resolvitur , quo composita est in acceleratis.

#### Demonstr.

Supponatur , corpus celeritate iam adquisita in B fig.12. iterum sursum reflecti , & ascendere : supponatur , illud primo tempusculo ascendere per Bb: & supponatur spatium Bb tam parvum , ut motus per illud faciens possit haberi pro æquabili. Certum est , illud corpus experturum resistantias gravitatis , quales & quantas cadendo ex b in B acciperet impulsus : adeoque id perinde esse , ac si vi , cuius celeritas est BR , directe renitetur vis , cuius celeritas est Rr. Vis igitur viva , quam corpus habet in b est æqualis quadrato differentiæ celeritatum  $\equiv bk^2$  per Theor. 10. Cumque in motibus uniformiter acceleratis vel retardatis post spatia finita eadem obtineant rationes , quæ in spatiolis infinite parvis , vis residua in E similiter æqualis erit vi , quæ emergit ex duabus sibi repugnantibus , quarum altera est vis in B , cuius celeritas est BR , & alterius celeritas est QR. Sed vis ex hisce composita est  $\equiv (BR - QR)^2 \equiv BQ^2$ . Adeoque vis post primum tempus finitum residua est

K

EH<sup>2</sup>.

$EH^2 = BQ^2$ . Et sic porro. Igitur in motibus uniformiter retardatis &c. Q. E. D.

*Idem* breviter ex Cor. 6. Theorem. 8. sequitur: Tollatur enim singulis temporibus vis, cuius celeritas ut 1; vis composita non minuetur tantum vi ut 1, sed simul duplo facto ex vi ablata in vires residuas: Sunt adeo decrementa virium vivarum in retardatis, uti incrementa in acceleratis, inverso solum ordine initii, & finis per Theor. 12. Resolvitur adeoque vis composita in retardatis, eodem modo, uti componitur in acceleratis. Q. E. D.

*Coroll.* Ex hisce consequitur, corpus, vi concepta sursum pergens, ascendere præcise ad altitudinem, ex qua cadendo adquisivisset celeritatem impressam; & tempore eodem, quo illam cadendo accepisset: & in singulis spatii punctis, itemque in singulis temporis momentis, æqualiter ab initio casus, & a fine ascensus distantibus, habere celeritates easdem: & in descriptis temporum momentis versari in iisdem spatii punctis, & habere vires vivas æquales: & in fine ascensus, quemadmodum & in principio descensus, nullam habere vim vivam: hoc est, nostram virium theoriam consentire in omnibus cum recepta gravitatis.

*Schol.* Velim, attendant lectores mei ad discriminem *virium vivarum* per actionem gravitatis acceptarum, vel destructarum, & *gravitatis* ipsius. Neglecto illo Vir insignis ex estimatione virium Leibnitiana voluit deducere, ab initio temporis nullam esse gravitatem, adeoque corpus plane non descendere; & in fine ascensus similiter nullam esse, adeoque corpus post ascensum non recidere in tellurem; sed manere suspensum. *Enimvero recte*

pro-

probat, quod, si *vis lapsu adquisita* sit ut spatium, illa ab initio lapsus nulla sit. Sed ad nostram id sententiam non pertinet, quando eam conclusionem *ad gravitatem transfert* in applicatione. Gravitas enim, vis illa mortua sollicitans, non est ut spatium descensus : Sed *vis viva*, per actionem gravitatis infinito numero replicatam orta, est ut spatium. Per hanc non incipit descendere corpus: sed pergit tamen, per hanc non minus, quam per novas gravitatis solicitationes. Similiterque, quamdiu illa durat in ascensu, tam diu corpus ascendit: cum definit, non ascendit amplius. Hæreret igitur suspensum, si nihil aliud accederet. Sed vis eadem mortua, quæ priorem vim vivam in hoc corpore successive peremit, nunc etiam continuatis impulsibus novam, & priori illi directione sua contrariam successive imprimit. Manent igitur etiam hac in parte sententiæ nostræ in concordia cum

**Theoria Gravitatis Galileana**, si a Cartesio discesseris, universaliter approbata. vid. *Recueil des diverses Pièces par Mrs. Leibniz, Clarke, Newton.*

T. I. p. 178.

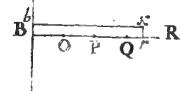
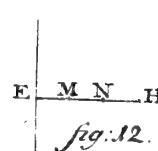
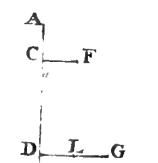
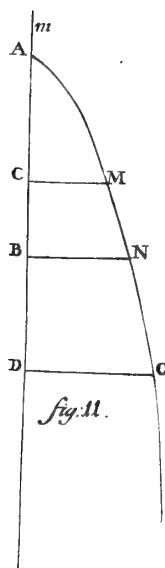
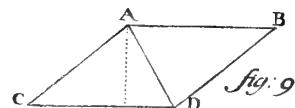
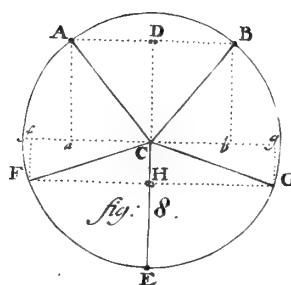
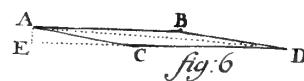
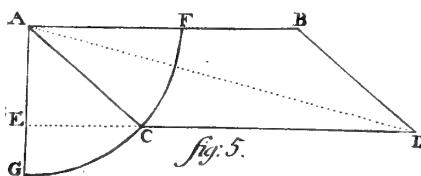
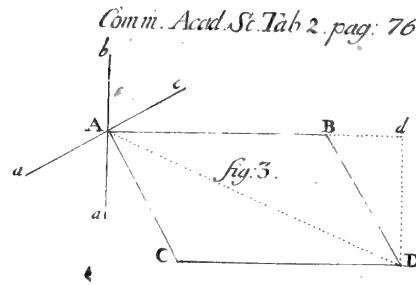
*Sectio Secunda,*

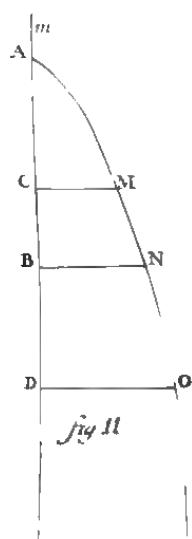
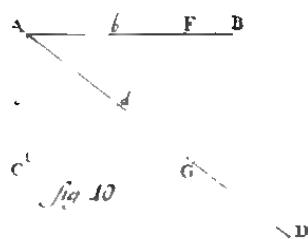
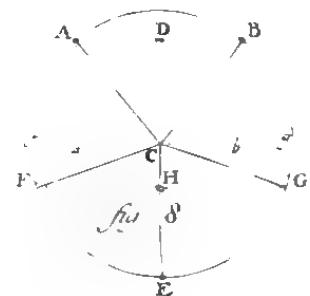
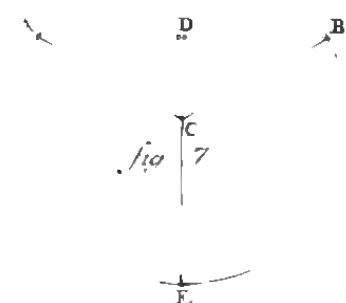
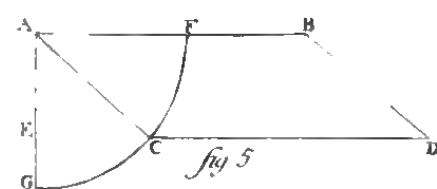
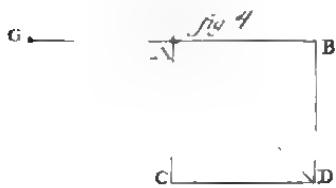
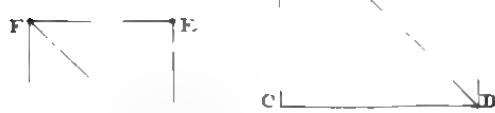
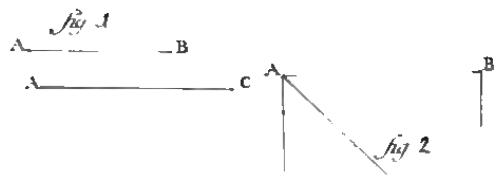
five,

DE VIRIBUS CORPORI MOTO  
INSITIS*Variæ Dilucidationes.*

## I.

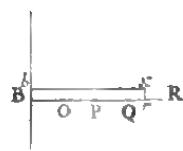
**P**Ræmissis, quæ dixi, ausim sperare, Lectorum aliquos non procul ab assensu sententiæ nostræ abfore. Si hæreant alii : varias id dubium caussas habere potest. Quas divinare licuit, conabor ex eorundem animis revellere. I. Simillima est evidentiæ *species illa veri*, qua blanditur æstimatio mechanicorum recepta : Neque potest illi melius detrahi persona , quam si integrum idearum huic negotio involutarum texere genealogiam liceat. Incipiam igitur ab hoc instituto. §. 2.—20. II. Qui ratiocinium superiore sectione expositum generatim potius intuentur, quam exacte pensitant , illis facile videri potest , pati hunc inferendi modum *instantias* , a vi mortua vel motu sumtas. Itaque secundo loco singula ratiocinii momenta scrupulosius repetam , & quid nostra ab instantiis memoratis illatio differat, ostendam. §. 21.—34. III. Theorema octavum Leibnitianæ æstimationis confectarium est primo





D L G

E M N H  
fig 12



mo intuitu paradoxum: id igitur alienare animos legentium posset, nisi tertio loco exponeretur, quæ sit illius propositionis cum receptis de percussione sententiis cohaesio & consensus §. 35—50 IV. Porro, quo plures sunt ad eandem conclusionem *aditus diversi*, eo gratior ad illam accessus est; igitur quarto novum tentare fontem, & ex ipsa percussionum doctrina mensuram stabilire eandem placebit §. 51—61. Denique V. *difficultatem* ex eodem hoc percussionum argumento deductam necesse erit resolvere. §. 62—67. Prolixior erit omnis hæc disquisitio, ne, *dum brevis esse labore, obscurus fiam.*

### Membrum. I.

II. Vires motrices varie a variis mensurari constat inter eruditos. *Cartesius*, magnus mensurarum artifex, iudicari illas voluit ex massa in spatum elevationis. Testes sunt literæ eius. vid. Tom. I. Epist. 73. Idem contradixit mensuræ virium per massam ductam in celeritatem. v. Tom. I. Epist. 74. p. 255. Edit. Bat. Tom. II. Epist 92. p. 293. & Epist. 109. p. 369. & passim alibi. *Successores* eius, quoniam ad Staticam attendebant solam, ubi celeritates spatiis respondent, utramque estimationem admirerunt. v. *Nic. Poisson*. in *Mechan. Cartes. not.* I. p. 23. Evidem proprie loquendo nec in staticis vires sunt proportionales facto massa in celeritatem: sed momentum virium. Ita vis corporis gravis est massæ proportionalis: sed momentum eius est proportionale facto ex massa in celeritatem. Receptum tamen est vulgariter usū, ut momentum potentiae nitentis in-

telligatur, cum vires mortuæ dicuntur esse proportionales factō massæ in celeritatem. Neque ex hac amphibolia periculum est inter gñaros rerum & ingenuos iudices. Mansit etiam hæc virium æstimatio ad usque *Leibnitium*, qui introducto *virium* novo *discrimine*, de altera illarum specie concessit receptam, de altera novam proposuit mensuram. Fingamus nos priorum omnium oblitos, de novo inquirere in fontes & argumenta utriusque æstimationis.

III. Originem quidem *estimationis* illius, qua vires exprimuntur *per factum massæ in celeritatem*, quæro in hac facili idea. Fac, esse duo corpora **A** & *a*, alterum maius, alterum minus, sitque v. g.  $A=2a$ ; fac illa moveri celeritate æquali per tempus & spatium æqualia: Maior vis est, quæ movet corpus **A**, quam, quæ movet corpus alterum *a*; tantoque est maior, quanto est corpus ipsum maius; potest enim corpus **A** concipi divisum in duo *a+a*, quæ singula arguant vires æquales, æqualia enim in hoc motu sunt omnia. Igitur positis celeritatibus æqualibus, vires motrices sunt ut massæ. *Similiter*, si duo corpora æqualia supponantur moveri uniformiter per tempora æqualia, sic tamen, ut unum **A** percurrat spatium duplum, vel utcunque multiplum alterius *a*, habeatque adeo **A** celeritatem duplam, vel utcunque multiplam alterius *a*: Maior vis erit in primo quam in secundo. Cumque spatium corporis **A** possit dividi etiam in duas vel utcunque plures partes, quarum singulæ sint æquales spatio corporis *a*: Manifestum etiam hoc loco videtur, vim corporis **A**, esse ad vim corporis *a*, uti sunt spatia \*, sive, quod in motibus æquabilibus (de quibus loquimur) idem est, ut celeritates. Ex

\* vid Cart. Tom. I. Ep. 73 par.

quod facile: et in primis Ep. 74. paragr. primum illud

eo itaque sequitur, si corpora A & a habeant massas inæquales, & celeritates quoque inæquales, quod vires in illis motrices sint in ratione composita ex directis massarum & celeritatum.

IV. Evidenter hæc adeo evidenter visa sunt multis, ut vel axiomatis vel definitionis loco hanc propositionem adhibuerint. Allegarem nomina virorum, nisi res nota esset. Puto autem, ipsam hanc evidentiæ speciem, coniunctam cum experimentis quibusdam eidem accommodis, in causa fuisse, ut tam sero, & a paucis hucusque agnita sit fallacia huic ratiocinio intertexta. Consuēvimus, non insignem axiomatis attentionem adhibere: itaque fieri potest, ut fallamur blandiente veritatis specie; maxime, si opinionem nostram videatur experientia confirmare. Atqui certum est, in vecte & potentissimis ad vectem reduci solitis æquilibrium obtineri, quando factum ex pondere vel (posita gravitate naturali) ex massa corporis in spatiū vel celeritatem utrinque est æquale. Habemus igitur experientiam propositioni consentientem: habemus in illa fonte quoque illius Cartesiani axiomatis, quo asseruit, eandem requiri vim ad elevandum corpus duplum ad altitudinem simplam, vel simplum ad duplam. Evidenter hoc in staticis, quando vecte aut similibus utimur machinis, verissimum est.

V. *Duplici tamen methodo* inquire in eius propositionis universalitatem, atque adeo detegi potuisset latens in enunciatione nimium generali vitium; altera a posteriori, a priori altera. Nescio, quam primo loco viam ingressus sit Leibnitius, calcavit utramque; & in publicis quidem scriptis illa a posteriori primum usus est. Ostendit ex hoc principio nimium generaliter adhibito sequi,

sequi, quæ parum inter se consentiant. Ex dictis *Cartesii* 1) æquales sunt vires, quæ unam libram clevant ad spatium quadruplum, & quæ libras quatuor clevant ad simplum: 2) Suntque etiam vires ex *Cartesianorum* sententia ut factum ex massa in celeritatem. Iam suppose corpus A ut 1. descendere gravitate naturali, & incipiendo a quiete, ex altitudine 4. ulnarum, & corpus B ut 4. descendere similiter ex altitudine ulnæ unius: Vis in fine descensus utrinque adquisita erit, ibi quidem tanta, ut simplum pondus possit elevare per quadruplum spatium, hic tanta, ut quadruplum pondus per simplum spatium. Ergo per hypothesin primam erunt hæ vires æquales. Sed per secundam erunt inæquales; est enim massa corporis A=1, & celeritas in fine adquisita per *Galilæanas* demonstrationes=2: adeoque factum ex massa A in suam celeritatem=2. Sed massa corporis B est =4, & celeritas eius adquisita =1: adeoque factum ex massa B in celeritatem suam =4. Quod si igitur vires æstimantur ex hypothesi secunda, deprehenduntur esse inæquales. Vnde *Repugnantia*?

VI. Facile est intellectu, quod aut ex propositione nimium generali hypotheseos primæ enascatur, aut ex falsa virium æstimatione in hypothesi secunda. In primo quæsiverunt responsa sua, qui *Cartesium* defendere instituerunt, Viri celebres & eruditissimi; sic tamen, ut in applicationem *Leibnitii* potius, quam in enunciationem nimis generalem reiceretur culpa. Voluerunt intelligi *Cartesium* de illo casu, ubi tempora ascensuum sunt æqualia; addito, quod in casu per *Leibnitium* obiecto tempora ascensuum sint inæqualia. Et fatendum est sane, differre casum *Leibnitianum* ab enunciatione Car-

Cartesiana, si ad identitatem temporis hæc ipsa restrin-  
gatur. Quæri igitur primo loco & *historice* posset, an  
ex sententia Cartesii principium illud generale de solis il-  
lis valeat casibus, ubi elevationes ad diversas altitudi-  
nes sunt isochronæ? Evidem in exemplis a Cartesio  
allegatis id ita obtinere certum est; videturque id con-  
sequi etiam ex eo, quod in tertia ratione dubitandi idem  
Cartesius exposuit. Tom. I. Ep. 74. p. m. 258. Ex  
adverso autem non minus certum est, illum temporis,  
in utroque casu eiusdem, nec verbo meminisse; quin imo  
repugnasse illi comparationi, qua factum ex massa in spa-  
tium æquipolleat facto ex massa in celeritatem, id quod  
tamen evitari non potest, si identitatem temporis requi-  
sivit. conf. Tom I. epist. 74. p. m 255. 256. Se-  
cundo etiam *philosophice* disquiri potest, an omnino tem-  
poris determinatio necessaria sit ad huius quæstionis de-  
finitionem? Negat Leibnitius, diversitatem temporis,  
quo gravium ascensus §. 5. memoratus durat, in æsti-  
matione harum virium attendendam esse: Aiunt alii.  
Sed *quo iure?* Dicam id, ubi enunciationem Cartesia-  
nam una cum sua limitatione examinabo. Hic *primus*  
controversiæ actus fuit.

VII. Quando semel illi involutus fuit *Leibnitius*,  
successive deinceps ea vulgavit, quæ *a priori* perducere  
possunt ad agnoscendam explicationis aut demonstratio-  
nis §. 3. exhibitæ insufficientiam. Ponamus, esse Phi-  
losophum, qui exemplis didicerit, saepè evidens videri,  
quod distinctius examinatum omnino falum esse depre-  
henditur; eundemque adeo demonstrationem optare &  
aggredi propositionis antea exhibitæ. Num hæc ratio-  
cationum series esse potest? Quæro mensuram virium  
L motri-

motricium : hoc est , quæro , quam rationem habeant vires in corpore moto A præsentes , ad vires in corpore moto B præsentes . Si mensuram quæro , debo invenire unitatem , quæ replicetur in uno , & in altero : Replicetur autem ita , ut quicquid in simplo deprehenditur , bis deprehendatur in duplo vid. Act. Er. 1695. p. 155 Non igitur sufficit pro mensura statim , quicquid crescente mensurando crescit ; sed necessum est , ut , si mensurandum debeat crescere ad duplum sui , etiam mensura sic creverit , ut habeatur præcise duplum eius , quod est in simplo . Hæc igitur regule esse debent examinis & demonstrationis .

VII. Applicando illas ad negotium præsens , facile videmus , cum massa corporis A dupla est corporis  $\alpha$  , & velocitas utrobique = 1. quod in corpore A omnia perfecte replicentur , quæ sunt in corpore  $\alpha$  , habeo enim corpus unum =  $\alpha$  , cum celeritate ut 1 , & corpus alterum =  $\alpha$  , cum celeritate ut 1 ; siquidem ex hypothesi A =  $2\alpha$  . Habeo bis in corpore A , quicquid habeo in  $\alpha$  : celeritatem ut 1 . habeo bis ; massam ut 1 . habeo bis . Quoad hanc igitur partem nihil defiderari potest in ratiocinatione §. 3. Iam porro sint duo corpora A &  $\alpha$  , quorum massæ sint æquales , sed spatia motu æquabili percursa sint inæqualia , & quidem spatium corporis A duplum alterius , sive S =  $2s$  & C =  $2c$  , quæritur , an denuo sint omnia replicata ? Celeritas C est dupla alterius  $c$  . Sed eadem est utrobique massa . Idem corpus cum celeritate dupla latum non replicat exacte id , quod est in eodem corpore cum celeritate simpla lato . Si , missa celeritatis idea , attendas ad spatum , habes hic motum per du-

duplex spatum eodem tempore ; ibi motum per simplex ; sed motum tamen eiusdem corporis. Igitur non omnia tam liquido & **exacte** replicantur , ut in priori mensura obtigerat.

**IX.** *Quid inde* concludi potest ? An minores sunt vires , quam hic supposuit vel Cartesius , vel alii ? quoniam scilicet non omnia exacte replicantur. An maiores sunt ob diversum agendi modum ? Neutrū hactenus consequi video. *Hoc infero* : quoniam nondum video, omnia perfecte replicari ; igitur ex hisce comparationibus nondum sufficienter elucet mensuræ virium allegatæ veritas. Inquiri igitur tum in illius veritatem, tum &, si forte falsa sit , in alterius substituendæ quantitatem de novo & sollicitè debet.

**X.** Circa veritatem mensuræ propositæ primum hoc occurrit sine dubio , ut examinetur *ad exempla* motuum & virium aliunde nota. Hic verum deprehenditur in potentiis ordinariis , quod factum ex massa vel ponde- re in celeritatem eius , si quæ oriatur , exprimat quantitatem pressionis , sive ut alii loquuntur , vim & quantitatem motus. Non licet tamen adquiescere huic exemplo. Novimus, aliquando *ex accidenti* in uno casu fieri, quod in altero secus obtinet. Quid igitur ? *vel a priori* examinandum est, an ratio huius mensuræ in hisce casibus obviae ex ipsa motuum natura universaliter scaturiat , *vel a posteriori* perpendenda sunt exempla etiam alia , & talia, quæ ad vectem & similia reduci non possunt ; *ex illis enim*, quæ eodem reduci possunt, non plus concludi potest , quam ex ipso vecte. Facilius hoc esse videtur , si noris, quales sint eiusmodi motus ? sunt autem motus ex gravitate , ex elastris , ex percussione orti & similes.

XI. Examinemus motum *ex gravitate ortum*. Quanta est vis descensu gravis cadentis adquisita? an respondet facto ex massa in celeritatem? & ex massa in spatium, quæ salvo Cartesii diffensu hactenus habita sunt pro synonymis? Dissident *hoc in casu* factum ex massa in spatium, & factum ex massa in celeritatem. vid. §. 5. Ergo si hæc facta utraque ad mensuram virium lapsu adquisitarum transferre vellemus, falleremur in alterutro, vel utroque. Quid consilii in re ambigua? quando mensura eadem examini subiecta, mox veritati consentit (§. 10.) mox dissentit §. 5: Inquirendum puto, an *eiusdem generis* sint vires in *utroque casu*? & quæ in illis mensura locum habeat, si sint eiusdem vel diversi generis?

XII. Iam vero facile intelligitur, *in potentiis mechanicis* non tam motum esse, cuius vis ex facto illo mensuratur, quam nisum solum; vires igitur nitentes potius, quam impetu concepto moventes. Sed *in casu gravium cadentium* §. 11. esse vires actualiter & concepto impetu moventes. Ibi illas considerari, ut disiunctas a motu actuali, hic autem ut coniunctas. Opus hic est nomine aliquo. Placuit *Leibnitio* molitores imitari, & priores vocare *mortuas*, posteriores *vivas*. His præmissis seorsim examinavit vires mortuas, & deprehendit illarum impetum seu momentum semper esse ut factum massæ in celeritatem: atque in hac æstimatione consentiunt passim auctores mechanici; ostendemusque §. 60. quæ huius mensuræ connexio sit cum æstimatione virium vivarum veriore. Re enim omni perpensa, deprehendimus, mensura mortuarum posita, sequi nostram vivarum mensuram, & vice conversa. Intelligitur itaque, recte auctores calculum posuisse de viribus mortuis. De *vivis*

**vivis** quæstio superest, an similiter illæ estimari debeant? itemque, an vis a gravitate genita respondeat spatio vel celeritati? §. 5 & 11.

XIII. Sequor filum imaginationis meæ, & si minus historiam refero, fabulam tanè philosophicam condò non inutilem. Quæritur, an vis lapsu adquisita sit ut massa ducta in spatium, quod corpus illius ope potest ascendendo contra nisus gravitationis describere? an solidum sit ut missa in celeritatem, quacum incipit ascendere? Comparantur hic duæ vires secundum effectus suos, scilicet vis corporis A ut 1 ascendentis per spatium ut 4, & vis corporis B ut 4 ascendentis per spatium ut 1: similiterque comparantur vis corporis A ut 1 ascendentis cum celeritate initiali ut 2, & vis corporis B ut 4 ascendentis cum celeritate initiali ut 1. An effectus hic sunt æquales? & si effectus æquales sunt, an ideo vires etiam sunt æquales? Ambigua optio est. Audiamus partem utramque!

XIV. Videntur effectus esse æquales. Videturque id Cartesius enunciatione sua generali agnoscere; habemus enim hoc loco corpus quadruplum elevandum ad altitudinem simplam, & simplum ad quadruplam. vid. loc. Epist. cit. Videtur idem sequi ex rei natura: corpori enim simplo per quatuor spatia assurgent, superrandæ sunt totidem gravitatis solicitationes, quot in uno spatio experitur corpus quadruplem; siquidem in omnibus spatii punctis gravitationes experitur massis proportionales. Præterea videntur etiam vires esse æquales effectibus, quos producendo consumuntur: si enim vires maiores sunt, quomodo consumuntur producendo illos effectus? si minores sunt, quomodo possunt illos produ-

cere? Erunt igitur vires ut spatia illa in massas ducta. Hæc sententia est *Leibnitii*; &, quoniam spatia, ascenden-  
do percursa, sunt uti quadrata celeritatum, erunt vires illæ  
uti massæ ductæ in quadrata celeritatum. Differet igitur æ-  
stimatio virium vivarum, & mortuarum ex hisce calculis.

XV. Si alterius partis argumenta audias : ita illi  
rationes subducunt suas. Videntur *effectus non esse aequales*. Corpus enim simplum per quatuor spatia ascen-  
dens duplex insumit tempus quoque, & corpus quadru-  
plum ascendendo per spatium simplex impendit tempus  
tantum simplum. Non igitur utrinque eadem ratio est;  
neque ex spatio simpliciter sumi mensura virium potest in  
hoc casu. Valet axioma Cartesii §. IV. allegatum ,  
quando idem ad ascensum tempus insumitur , cumque  
ascensus est uniformis. Quodsi igitur huc applicari de-  
beat, convenit, ut reducatur casus *retardationis* ad mo-  
tum *uniformem*. Atque tum videamus , quæ mensura  
prodeat ? Notum est, si corpus retineat in ascensiū cele-  
ritatem initialem , illud ascensurum per duplex spatium.  
Ascendet igitur corpus A simplum, celeritate sua dupla,  
ad spatium  $2 \cdot 4 = 8$ . Et corpus B quadruplum celerita-  
te sua simpla ad spatium  $2 \cdot 1 = 2$ . Sed ascendet illud u-  
niformiter per duo temporis minuta , donec spatium sit  $= 8$   
& hoc per unum solum. Igitur primo temporis minuto il-  
lud ascendet per spatium  $= 4$ . & hoc per spatium  $= 2$ . E-  
runt igitur spatia ( $= 4:2$ )uti celeritates ( $= 2:1$ ). Effectus igi-  
tur harum virium vivarum, & consequenter ex Leibnitiano  
assumto vires , sunt ut factum ex massa in celeritatem.  
Non igitur differt æstimatio virium vivarum & mortua-  
rum, si recte instituantur calculi. conf. de hac compara-  
tione *Histor. Acad. Scient. Paris. ad A. 1721.*

**XVI.** Sunt hæc profecto plausibilia utrinque: sed an simul vera esse possunt? In talibus casibus soleo opem *ex distinctionibus* repeterem, & *unicuique parti* aliquid tribuere: neque enim fieri solet, ut tota via aberrent viri solentes, mutuo sibi adversantes. Alteri fere ex una parte, alteri verum assequuntur *ex alia*. Quid gitur? Annon diversi sunt casus §. 14. & 15? Negat Leibnitius, habendam esse rationem temporis in hoc argumento; Aiunt alii. Latet hic amphiboliæ aliquid, evolvetur autem, si singulorum dicta pressius examines. Monent, qui Leibnitianas tuentur partes, se de illis loqui viribus, quæ dum effectus suos producunt, per resistentias sibi oppositas successive consumuntur: has enim vires esse resistentiis illis proportionales, sive magnum, sive parvum temporis intervallum sit, quo illum suum effectum præstant. Quod semel consumtum est, proportionale est resistentiis, quæ ad effectum producendum superari debuerunt, sive alterum simul consumatur, sive non consumatur, sive citius consumatur, sive tardius. Recte igitur Leibnitium potuisse negligere respectum temporis ad producendum effectum requisiti, eo in casu, quo vires motum producentes per resistentias contrarias consumuntur: hoc est in motibus a gravitate retardatis. Quæ hic lectorum sententia est? *Mibi*, verum fatear, et si effectuum æstimatio suis sæpe difficultatibus non careat, videtur tamen, si quis illos dextre noverit discernere, & pro suis singulos classibus metiri; nihil hic Leibnitium peccasse.

**XVII.** Neque tamen hæc sola extricandi sese ex difficultate temporis via est. Primum, quod se mihi obtulit, cum exceptiones de diverso tempore expenderem,

hoc

hoc fuit, facile fieri posse, ut descensus & ascensus illorum corporum A & B fiant temporibus iisdem, si supponas motum fieri vel in cycloidibus, vel in chordis saltim arcuum circuli eiusdem, quarum altitudines habeant se ad invicem ut 1: 4. Demonstratum enim est, ascensus & descensus illos esse isochronos. Postea vero intellexi, & Leibnitium similia privatim admonuisse amicos atque adversarios suos; vidique ex intervallo, *Hermannum nostrum* in dissert. Acad. *de legibus naturae inscripta* etiam ulterius progressum esse, & §. 7. admonuisse, quod facillime curari possit, ut minor altitudo maiori tempore absolvatur, quam maior, atque tempora ascensuum sint in ratione quacunque data inæqualitatis. Unde colligō, vel ex hisce casibus potuisse Viros eruditos intelligere, quod temporis idea in hoc motuum a gravitate naturali retardatorum negotio sit aliena.

XVIII. Sed vero, cum motus retardati convertuntur in æquabiles, res plane aliter se habet. Innibantur priora huic thesi, quod vires, quæ producendo effectum a resistentiis sibi oppositis consumuntur, sint ut effectus illi totales, sive uti translationes massæ per spatium ascensus eæ, quibus plane impenditur, quicquid in corpore est virium. Si motum substituas uniformem, vires illum producentes non amplius concipi possunt, ut inter productionem effectus sui per resistantias contrarias absorbendæ. Adeoque cessat applicatio æstimationis virium ex effectu totali; neque hic indifferens est amplius, an in metiendis ex spatio viribus ratio habeatur temporis, an secus? Maiores sunt vires motum æquabilem producentes, si minori tempore idem spatium absolvunt per axioma 2. Sed vero cum vires concipio

uni-

uniformes , motumque adeo æquabilem producentes: eo ipso nullus earum effectus totalis amplius allegari potest; vires enim, quæ tales producunt motus, numquam consumuntur, ex Axiom. I. quando enim consumi vires effectum producendo debent, necessum est, ut adsint resistentiæ quædam, tanquam ad hoc corpus impediendum applicatæ, atque illarum ut huic corpori oppositarum summa attendatur. Sed in motibus æquabilibus & uniformibus a resistentia omni animum abstrahimus nostrum.

XIX. Quid hinc colligitur ? An dantur *duplicis* generis vires vivæ ? alteræ, quæ, dum effectum suum producunt, a resistentiis illi oppositis consumuntur ? alteræ, quæ non consumuntur ? Si nomina vultis : primas Leibnitius *mixtas* vocavit, secundas vero *puras*. conf. def. I. Pertinent igitur ad vires mixtas omnes illæ demonstrationes , quæ ex effectibus totalibus , vel resistentiis potius vires consumentibus repetitæ sunt , atque de illis immediate intelligi debent , quæ inde a §. 14. diximus pro Leibnitio : De puris autem hactenus eadem mensura per consequentiam solum asserta est : non enim alia est vis cadendo per altitudinem definitam adquisita , si deinceps eadem consumatur iterum ascendendo , vel, si supponatur perseverare in vacuo , semper uniformis. Puto igitur , legitime viros doctissimos evicisse caussam suam, transferendo ad puras , quæ probaverant de mixtis. Si quis tamen hæreat , illi nostræ de viribus puris demonstrationes poterunt inservire.

XX. Audivi Leibnitium *alii* etiam a *priori* argumentis instructum suisse , quibus ex ideis virium & actionis, & effectuum generalibus mensuram obtinuerit eandem. Non est vero præsentis instituti de illis inquirere.

Neque enim historiam scribo universi de viribus vivis argumenti : Alioquin & reliqua virorum magnorum argumenta , præcipue autem illud eiusdem Leibnitii de consequente ex veteri æstimatione absurdo , motu scil. perpetuo pure mechanico , hic evolvenda essent. *Genealogiam* dedi idearum quarundam , quæ mihi visæ sunt nos manu quasi ducere posse ad distinctiones in hoc negotio obvias , et ad rationes mensurarum Leibnitianarum. Præmissis ipsis , transeo nunc ad eam partem , quæ proprius ad meam concludendi rationem , dictorumque dilucidationem accedit.

## Membrum II.

**XXI.** Constat ex §. 18. in motibus uniformibus habendam esse temporis rationem , si ex spatio æstimari vires debeat motrices : Quæritur vero , an ea de caussa dici possit , posito tempore eodem , vires esse ut massas in spatia ductas ? Id vero ex hac tenus dictis nondum definire licet. Admisimus , vires esse proportionales resistentiis , quibus superandis ipsæ impenduntur atque consumuntur : Sed in motu æquabili abstrahimus a resistentiis , neque vires motum illuin producentes consumi iudicamus. Ex immediata igitur ad motus uniformes attentione per superiora nihil *ad bac* inferri potest. Potest autem , si illorum complures casus dextre invicem conferas , eorundemque mutuas relationes animadvertis.

**XXII.** Accidit mihi , cum ad indagandos metaphysice primos legum naturæ fontes animum advertebam , eidemque fini aliquos *Theodicææ Leibnitianæ* paragraphos meditarer , ut sese aliud agenti argumentem

mentum offerret pro Leibnitiana virium mensura, de-  
sumtum a motibus compositis uniformibus. „Ex motu,,  
(inquit Leibnitius l. c. §. 347.) in duobus lateribus trian-,,  
guli componitur motus in diagonali: non vero exinde sequi-,,  
tur, globum in hypotenusa motum producere effectum,,  
duorum globorum sibi æqualium, et in lateribus motorum.,,  
Atque id tamen obtinet in rerum natura,,. Quoniam  
communiter effectus assumuntur viribus suis propor-  
tionales ; ideoque facile erat inferre , quod in casu per  
Leibnitium memorato , ubi effectus diversarum virium  
sunt æquales, etiam vires debeant esse æquales. Sed vi-  
res motum diagonalem præstantes non possunt esse æqua-  
les viribus, quæ motus exhibent laterales : nisi singulæ  
æstimentur per quadrata illarum linearum, quæ motus,  
spatia, celeritates virium suarum exponant. Obtinemus  
igitur æstimationem virium vivarum & purarum, de qui-  
bus hic agitur , eam, quæ consentiat Leibnitianæ. Sic pri-  
mo intuitu iudicavi ; atque id monui in *notula* , pag.  
173. scripti mei superius in *præfatione* allegati.

XXIII. Post maturius examen deprehendo , non  
fallere hanc conclusionem : Ratiocinium vero, nisi evol-  
veretur , nimium *præceps* ire. 1. Non licet ab omni ef-  
fectu ad vires transire proportione simili: æquipollent  
aliquando vires , quæ non sunt æquales. 2. Aliquando  
motus laterales componuntur in motum diagonalem , sed  
effectus unius globi diagonaliter moti non est idem , qui  
duorum æqualium in lateribus motorum. 3. Nifus a viribus  
mortuis pendentes non aliter componuntur , quam motus  
a vivis profecti : neque tamen vires mortuæ & vivæ ha-  
bent mensuras easdem. 4. In parallelogrammis obli-  
quangulis dubitari potest, an vis composita respondeat

quadrato diagonii , an quadratis laterum simul sumtis ?  
 5. Quæri etiam legitime potest , quomodo hæc æstimatione consentiat cum Theoria percusionis ordinaria ; & sic porro . Itaque cautius hic agendum erat . Accipe , quid fecerim ?

**XXIV.** Primo vim ipsam argumenti , §. 22. obiter enarrati , plenius ita proposui animo meo . Sit in globo A vis M , quæ sola illum promoveret ex A in B dato tempore ; sit in eodem illo globo vis N , quæ sola illum deferret ex A in C eodem tempore ; urgeatur globus a vi utraque simul : Promovebitur ille in linea AD ex A in D eodem tempore , per communia . Motus igitur absolutus globi A idem erit , si a duplice vi M & N simul urgeatur , ac si a vi simplici O urgeretur , quæ globum dato tempore deferret ex A in D . *Præterea* , supponatur in D globus D quiescens ; atque in illum directe impingens alius æqualis veniens ex A in D : Movebitur globus D per Da=AD , & A quiescat . Si duos globos æquales B & C supponas simul impingere in D directionibus angulum rectum comprehendentibus , & celeritatibus BD , CD : quiescent etiam hi , & globus D movebitur directione , & celeritate Da . Effectus igitur percusionis idem est in utroque casu . Denique , sit in D globus quiescens , atque in illam oblique impingat globus A directione & celeritate AD veniens , post impactum movebitur D celeritate & directione Db=BD , A vero celeritate & directione Dc=CD . vid . *Mariotte Traité de la percuss. P. I. prop. 3. p. m. 213.* Hactenus omnia sunt utrinque eadem , usque adeo , ut unus casus possit experimento ipso transmutari in alterum : *Annon igitur & vires , utroque casu agentes , sunt inter se*

Fig. I.

se æquales; duæ scil. laterales M & N vi compositæ diagonali O?

XXV. Fateor, me illico existimasse, si post impulsum obliquum corporis A in corpus D, duo illa corpora moveantur in lateribus Dc & Db: per ictum illum vires neque auctas esse, neque minutias. Tantundem igitur virium fuisse antea in corpore A solo, atque nunc sit in utroque; atque vires ante & post ictum hic esse æquales. Similiterque cum unus globus A celeritate AD latus imprimat corpori D celeritatem eandem Da, quam illi imprimunt duo globi C & B celeritatibus CD, & BD lati; atque hi omnes post ictum reducantur ad quietem: vires globi A esse æquales summæ virium in globis C & B. His autem æquationibus semel positis, obtineri æstimationem quæsitam. Vim enim per AD non esse æqualem viribus per Dc & Db, vel viribus per CD & DB, nisi illa sit  $= AD^2$ , & hæ  $Dc^2 + Db^2 = CD^2 + BD^2$ . Ita igitur brevis denuo opera fuit. Nolui vero talibus annotationibus confidere contra adversarium, si quis obtingeret, difficilioriem. Itaque rem ulterius sic evolvi. Habemus in eodem corpore A duas vires M & N, quæ concurrentes idem præstant, quod vis una O: *Aequipollent* igitur huic tertiae; sed an ideo sunt illi quoque æquales? Monent scriptores mechanici, differre hæc duo, & subinde etiam separari. v. Iac. Hermanni Phoron.

### §. 36.

XXVI. Hic igitur necessum fuit, inquirere fontem discriminis illius, eundemque ad easum applicare præsentem. Datur, inquit, *æquipollentia virium*, ubi non adeat earundem æqualitas. Patet hoc ex consideratione vectis in diversa distantia diversis sollicitati viribus:

Patet ex compositione nisum, ubi vires mortuæ laterali trahentes nunquam sunt æquales tertiae diagonali, nisi cum duæ laterales coincidunt directionibus suis in unam: Patet machinarum omnium exemplis. Itaque æquilibrium vel æquipollentia non infert æqualitatem virium. Recte ista quidem: sed *ad iungo*, æquilibrium vel æquipollentiam inferre æqualitatem quoque, si minus virium, tamen actionum. vid. def. XI. Sect. I. *Non possunt vires æquipollere, nisi actio virium ex una parte æquetur actioni ex altera.* Si minores fuerint vires, possunt applicari favorabilius, ut actio illarum maior emergat: itaque possunt æquipollere, quæ non sunt æquales. Sed, si actio sit ex alterutra parte minor, nihil est, quod defectum supplere, & redigere utrumque latus ad æquipollentiam possit. Quid inde conficitur; Nimirum hoc, si ex æquipollentia §. 25. ostensa colligere æqualitatem instituimus, *ad actiones harum virium proprie attendendum esse.*

**XXVII.** *Duplex autem hic respectus* denuo involvitur: semel inquirendum est, quomodo sese vires puræ singulæ habeant *ad suas actiones*; deinde, quomodo se vires in motu composito concurrentes in actione sua habeant *ad se invicem*. Quoniam vires vivæ puræ simplices corpori alicui ita insitæ concipiuntur, ut unaquæque eius particula æque velociter ab illis urgeatur, & promoveatur uniformiter: itaque positis massis æqualibus nulla in applicatione virium harum diversitas esse potest, nisi ad diversitatem temporis attendere velis; iudicari itaque actiones harum virium debent ex intensitate ipsarum, & tempore. vid. Corol. I. def. XI. Ex eo sequitur, si plures inter sese conferantur vires puræ simplices,

plices, per idem temporis intervallum agentes, actiones esse inter se, ut vires. Adeoque in casu motuum compositorum, quo tempora semper æqualia spectantur, nisi ex ipsa compositione aliquid novi discriminis accedit, vires vivas puras sibi invicem æquipollentes esse etiam æquales.

**XXVIII.** Potest autem aliqua discriminis ratio oriri ex ipsa motuum compositione, ob virium concursum. Cum igitur, quæ ex Coroll. I. Def. XI. modo repetiimus, pertineant ad vires ut singulas & simplices: quæro, quid obtineat in *compositis*? Si duæ vires M & N sint in eodem corpore, videndum est, quomodo agant illæ? si enim ita agant singulæ in concurso illo, ut neutrius effectus ab actione alterius sive augeatur sive minuatur; utque adeo motus a diversis illis viribus pendent in nulla re vel consentiant sibi vel repugnant: considerari illæ possunt, ut vires simplices, adeoque ex antedictis iudicari debent. Sin effectus unius vis M augeatur vel minuatur per concursum vis alterius N, attendi etiam illa diversitas debet in iudicanda actione composita.

**XXIX.** *Applicemus cautelam.* Cum in plano ABC, vis M nititur & impellit corpus A in directione & celeritate AB, vis N directione & celeritate AC, & hæc duæ lineæ AB & AC comprehendunt angulum rectum: tum directio & nisus vis unius nulla ratione vel coincidit vel repugnat directioni & nisu vis alterius. Omni igitur respectu perinde est, quoad motum secundum directionem AB, an una cum vi M simul agat vis N, an omnino hæc absit ex corpore A. Possunt igitur utræque hæc vires, et si simul præsentes, considerari tamen ut *simplifices*

ces , neque in vim ex utrisque compositam aliquod sive augmentum infertur , sive decrementum ex concursu actionis utriusque in corpore eodem . Agunt scil . in idem corpus duæ vires , sed neutrius actio afficit , auget , vel minuit actionem , & effectum alterius quocunque respectu . Secus obtinet in casibus angulorum recto maiorum vel minorum ; de quibus deinceps .

XXX. Ex hisce autem dictis hauriri omnia possunt , quæ ad nervum argumenti § . 24 . 25 . incoati pertinent . Accipe seriem illationis . In negotio motus compositi æquipollent duæ vires laterales vi tertiae secundum diagonalem ; per communia . Sed , ubi est æquipollentia virium , ibi est æqualitas actionum , § . 26 . Iam æqualitas actionum in casu anguli BAC recti infert æquallatem virium ; (namque in hoc casu vires laterales agunt uti simplices § . 29 . & actiones virium simplicium , posito tempore eodem , sunt uti vires ipsæ per § . 27 .) Adeat igitur in casu anguli directionum recti cum æquipollentia virium , æqualitas actionum ; & cum æqualitate actionum æqualitas virium . Igitur vires laterales simul sumtæ sunt æquales vi secundum diagonalem . Igitur singulæ estimari debent per quadrata laterum & diagonii , quæ sola faciunt æquationem quæsitam , per Lem . 4 . Sect . 1 . Igitur hæ vires sunt ut quadrata celeritatum . Q . E . D .

XXXI. Non opus fuisset hac nova illationis , sectione prima propositæ , repetitione : nisi ad refellendas pertineret instantias . Diximus in Schol . 2 . Theor 3 . nos hoc loco ostensuros diversitatem argumenti nostri , & instantiæ , quam a viribus mortuis , vel & ipso motu composito obvertere quis posset . Si solum imitari velis § . 22 . posses de vi mortua sic arguere : Datis tribus poten-

potentiis, sive viribus mortuis, quarum & intensitates & directiones, consequenter & celeritates exponantur per latera & diagonalem parallelogrammi cuiuscunque, vires laterales æquipollent vi secundum diagonalem. Id vulgo constat, & iam a *Stevino* usurpatur pro eximio statices principio. Sed in casu anguli recti directio potentiae unius non magis impedit directionem potentiae alterius, quam in viribus vivis factum est : Ergo & hic potentia resultans composita debet esse aggregatum potentiarum lateralium. Id vero est contra hypothesin: igitur in argumento vitium est. Argumentum est simile alteri de viribus vivis : igitur & in illo vitium erit. Similiter *de motu* dixeris : Neque enim motus compositus est aggregatum singularium ; etsi de illo valeant omnia, quæ de viribus dicta sunt vivis.

XXXII. Detrahamus instantiis hisce *larvam similitudinis*. Si quis imitari ratiocinium gestiat nostrum, imitetur *seriem* §. 30. *totam* necesse est : alioquin metus erit, ne fallatur in generalibus. Æquipollentia est potentiarum in casu mox memorato §. 31. & æquipollentia infert æqualitatem : Fateor id, sed addo, æqualitatem actionum, per §. 26. Igitur in casu obiectionis datur æqualitas actionum. Concedo : Atque id ita esse, ostendo ex superioribus. Actio vis mortuæ estimatur ex facto intensitatis in viam : Hoc factum exponitur per quadratum lineæ ; siquidem una eademque linea intensitatem exponit potentiae, & viam, sive celeritatem §. 31. Iam in angulo recto, aggregatum quadratorum laterarium est æquale quadrato diagonii. Igitur omnia se bene habent circa *actiones* virium mortuarum ; neque peccabit instantia, si hic subsistet.

**XXXIII.** Sed vitium est *in progressu*. Cum de vivis agitur viribus, pergo ego: In motibus isochronis actiones sunt, uti vires, per  $\text{C. 27}$ ; igitur cum æqualitate actionum adest virium æqualitas. Hoc imitari de vi mortua non licet. Non est in motibus isochronis actio potentiae, uti ipsa potentiae intensitas; sed est uti intensitas duxta in celeritatem. Non igitur de mortuis concludi per similitudinem potest, quod de vivis dictum fuerat. Etsi igitur *anguli rectitudo* faciat, ut neutrius potentiae momentum sive actio vel augeatur vel minuatur per actionem alterius: non facit tumen, ut potentiae intensitas sit actionis eius proportionalis. Non itaque *idem* utroque in casu *angulus* est, qui efficit, ut aggregatum virium lateralia sit æquale vi secundum diagonalem. In vivis *rectum* id efficer vidimus: In mortuis requiri angulum *infinite acutum*, patet ex relatione actionis vel momenti potentiae ad ipsius intensitatem.

**XXXIV.** De *motibus ipsis* dici varia possent. Considerantur vero motus corporis secundum AB, & AC faciendi, vel ut in hisce lineis, vel ut in plano. Si consideratur motus secundum AB *ut in linea AB* faciendus: impeditur utique per motum secundum AC, quando angulus BAC rectus est. Neque obtineri hoc sensu summa motuum lateralia potest, nisi eo in casu, quo neuter alterum, ut in linea faciendum, impedit: Hoc est, cum angulus directionum infinite acutus latera præstat coincidentia. Sin motus secundum AB & AC concipiuntur, *ut in plano ABDCA*: id utique verum est, quod, sumto angulo BAC resto, neuter motus alterum in sua directione adiuvet vel impedit: v. Schol. 1. Theor. 3. Sect. I. Igitur etiam in motu composito secundum AD debet

Fig. I.

debet adesse aggregatum motus utriusque secundum AB & AC. Sed eo in casu motus secundum AD debet censi*duarum dimensionum*, non unius. vid. def. 2. Sect. I. Non igitur necesse est, ut linea AD sit æqualis aggregato linearum AB & AC : Sed ut directio composita AD satisfaciat utrius directioni simplici AB & AC : sine alterutrius vel augmento vel detimento. Verum ista de instantiis!

### *Membrum III.*

**XXXV.** Tertium huius dissertationis officium est, exponere, quid de casibus *directionum* angulos *non-rectos* comprehendentium existimari oporteat. *Motus* ex duobus lateralibus *componitur* in motum secundum diagonalem, etiamsi angulus sit v. gr. acutus : Quæritur, *an vires quoque?* & quo sensu illæ? Si in eodem corpore A simul inexstant vis M secundum AB agens, & seorsim sumta (per §. 22. seqq.) =  $AB^2$ , & vis N secundum AC agens, & seorsim sumta =  $AC^2$ ; quæritur: an ex utraque simul sumta aggregateetur vis tertia O, secundum AD agens; & =  $AB^2 + AC^2 = AE^2$ ? an vero ex illarum in uno corpore A concursum emergat vis nova P secundum AD agens, & =  $AD^2$ ?

Fig. 2.

**XXXVI.** Videtur *primum*, quoniam intelligi non facile potest, unde sit augmentum vis compositæ  $AD^2$  supra aggregatum utriusque vis concurrentis,  $AB^2 + AC^2$ . Itaque, cum idem corpus A a duplice vi M & N simul urgeatur directionibus AB & AC, directio quidem composita erit in diagonali, sed diagonalis non exponet motum, & celeritatem corporis, neque quadratum

tum eius vim compositam. Videtur vero & secundum: quia enim ex motu per AB & AC componitur motus per AD celeritate AD: itaque etiam ex viribus, quæ motus illos per AB & AC producunt, componitur vis secundum  $AD=AD^2$ . Vires autem, quæ motus illos producunt, sunt vires M & N eidem corpori A insitæ. Itaque ex viribus M & N concurrentibus enascitur vis  $P=AD^2$ . *Vtrum recte?*

**XXXVII.** Quicquid hic difficile est, solvitur **ex eo**, si discrimen attendas, quod intercedit inter hosce duos casus, quando duæ vires sunt *in eodem corpore insitæ*, aut quando demum sunt *imprimendæ ab aliis*. Constat ex receptis percussionum legibus, si, posito angulo BAC acuto, idem corpus A simul percutiatur a duobus corporibus G & H sibi æqualibus, & in directionibus GA, HA, sive AC & AB incurrentibus, quorum illud moveatur vi N, & celeritate ut AC, hoc vi M & celeritate ut AB, corpus A ab illis impulsu pergere quidem in diagonali AD, sed non cum celeritate AD, neque adeo illi impressam esse vim ut  $AD^2$ , sed minorem. Notandum vero etiam est, etsi corpus G, si solum impingat, totum suum motum & vim transferat in corpus A, & corpus H, si solum incurrat, totum suum motum, & vim N imprimat eidem; in concursu tamen illa corpora non imprimere corpori A utramque vim M & N totam; adeoque corpus A non acquirere simul vim M & N; consequenter *bunc casum non esse illum, qui nobis hic consideratur*, & quo supponitur, totam vim M & N inesse corpori eidem A. Que igitur ex hoc casu ducuntur argumenta, nostram hac vice causam non afficiunt. Monui id iam supra Sect. I. Schol. 1. Theor. 8. neque piget tamen, id repetuisse; facilis enim

Fig. 3.

enim est horum casuum commixtio, nisi constanter caveas.

XXXVIII. Nimirum, quando corpus A a duobus illis corporibus G & H simul impellitur, tum illud per vim & motum ab uno G acceptum, iamiam *fugit* impulsum alterius H, quatenus directio huius cum directione prioris coincidit; adeoque sub angulo hocce acuto BAC non potest tota vis alterius corporis H transfundi in corpus A; & vice versa. Secus est, ubi corpus ab una vi M percussum, per hunc ictum *non fugit* impulsum vis alterius N. Atque ita patet, quare sub directionibus angulum rectum comprehendentibus, tota utriusque corporis vis possit transfundi in tertium A, vel etiam ita res dirigi, ut ante ictum corpus unum moveatur in diagonali celeritate diagonalis, & alterum quiescat, post ictum vero utrumque moveatur in lateribus celeritate laterum §. 24. In percussionibus igitur res habet, uti dictum est.

XXXIX. Ex adverso, quando duæ vires M & N concipiuntur *ineffè eidem corpori* A, tum per operationem vis M corpus A non fugit impulsum aut actionem vis alterius N, utpote quæ non insequitur tantum corpus ante se fugiens, sed eidem, etsi translato, inexsistit. Respectu enim vis N eidem corpori A iam insitæ, & quoad motum eius particularem in directione AC, perinde est, si corpus A moveatur etiam in directione AB, siue non moveatur; id quod secus esset, si vis N nondum inexisteret corpori, sed eidem aut iam per AB moto, aut adhuc quiescenti esset demum imprimenda. Maior enim vis corporis secundum leges ordinarias percutientis requiritur, si corpori moto eandem celeritatem superaddere debet, quam si illam quiescenti imprimere.

Fig. 4.

**XL.** *Vt hæc ad principia reducamus communia, alteram directionem, v. gr. illam secundum AB consideremus ut simplicem, alteram AC ut compositam ex duabus, angulum rectum comprehendentibus AE & EC. Aequipollere & æqualem esse vim secundum AC duarum secundum AE & EC aggregato, patet ex superioribus §. 29. similiterque patet, vim secundum AE non afflere vim secundum AB (§. 28.) Resolvitur igitur dubium in hasce duas vires, alteram M secundum AB, & alteram secundum EC, vel BF, quam Q vocabo. Ostendendum autem est, quomodo ex vi M & Q in eodem corpore concurrentibus oriatur celeritas AF, & consequenter vis totalis composita æqualis simplici cuidam  $R = AB^2 + BF^2 + 2AB \times BF = M + Q + 2AB \times BF$ .*

Fig. 5.

**XLI.** *Mensura virium, ope §. 29, pendet ex mensura celeritatis, itaque primo loco videbimus, quænam celeritas oriatur ex concurso illarum virium M & Q? Conferatur ergo casus noster cum alio vulgari. Sit corpus A, quod moveatur in linea HBF vi M, celeritate AB; insequatur aliud H, vi R, celeritate HC = AB + BF: quid hic futurum est? Dicunt regulæ, post aliquod temporis intervallum impingere corpus H in corpus A, & illi communicare gradum celeritatis BF, sic, ut post ictum corpus A moveatur celeritate AB + BF = HC, & corpus H celeritate HC - BF = AB. Habemus igitur casum, quo corpus A ex percussione alterius H adquirit celeritatem AF. Quid, si ostendero, illum coincidere cum nostro, quo supponimus in eodem corpore A inexistere simul vires M & Q tales, ut ope illius solitariæ corpus haberet celeritatem AB, & huius solitariæ celeritatem EC = BF? Num eo facto ostendi, etiam nostro in casu per*

per hancce duarum virium M & Q in eodem corpore combinationem oriri celeritatem ut AF? & consequenter vim ut AF<sup>2</sup>?

**XLII.** *Coincidit vero uterque casus.* Circa casum percussione attende, quid in ictu fiat? Corpus H per celeritatem suam HC—BF=AB non impingit in corpus A; Tanta enim celeritate hoc fugit: ergo quicquid per hunc celeritatis gradum fieri potest in corpore insequenti, id omne in hoc absolvitur, ut per illum corpus H insequens maneat fugienti A præsens, sive, ut fugiens A respectu insequentis H fiat quasi quiescens. Impulsus igitur omnis, qui fit a percutiente, talis & tantus est, qualis & quantus a corpore cum celeritate BF lato fieret in aliud quiescens. Atque inde fit, ut corpori A, et si moto, adhuc illa celeritas BF imprimatur. Videamus, an *eadem* fiant in *nostro quoque casu*? Puto fieri. Per hoc enim, quod vis Q in ipso corpore A insita concipitur, illa non minus ipsi A præsens est, & in ipsa corporis A, celeritate AB moti, translatione illud impellit, quam si aliud corpus H cum summa celeritatum sequeretur, & consequenter cum excessu unius supra alteram impingeret. Corpus enim A motu suo per AB nequaquam fugit impulsu vis Q, ipsi corpori nonexistentis, & cum illo translatæ. Itaque quoad celeritatem corpori A imprimendam perinde est, sive concipias in illo *simul* inexisteret vim M, cuius solitarie agentis celeritas esset AB, & vim Q, cuius solitarie agentis celeritas esset BF; sive dicas, corpori A inesse vim M, qua fugiat cum celeritate AB, & corpus H celeritate HC (=AB+BF) motum, per partem AB, relativam illam fugam in ictu ipso quasi

com-

compensare , & parte altera BF impingere in corpus A tanquam respectu sui non amplius fugiens.

*Fig. 5.* XLIII. Patet , nisi fallor , veritas eorum , quæ §. 37. dixi : *Solutionem* nodi *universam* consistere in hac idea , quod utraque vis concipiatur in eodem corpore. Id alio adhuc modo ostendam. *Potest* ex corpore A & H fieri *unum* corpus : Facto autem illo *vis* resultans non amplius est aggregatum virium singularium ; sed aliquid longe diversum , & præcise tale , ut mediante aliquo theoremate (in seq. §§. a priori deducendo) recidat in estimationem secundam §. 36. allegatam. Suppone lineam HF indefinite productam , concipiatur corpus A in puncto quounque A , & H in H : quæratur , bisecando distantiam HA , commune centrum gravitatis duorum horum corporum in R , & supponantur ibi esse corpus  $R = H + A = 2A$ . Post aliquod tempus concipiatur A translatum uniformiter in B , & H in C , & quæratur denuo commune centrum gravitatis , bisecando lineam CB in S ; erit RS via centri gravitatis , repreäsentans celeritatem corporis dupli 2A.

XLIV. Iam vero *an eadem* est mensura virium , *sive* illæ in uno corpore inexistere concipientur , *sive* in duobus ? *an* utroque in casu obtinetur aggregatum virium singularium ? §. 36. Evidem , si corpora A & H , ut singula concipias , sine aliqua ad se invicem relatione , certum est , haberi in uno vim  $M = A \times AB^2$  , in alterutro vim  $T = H \times HC^2$  . Sin corpora ad se invicem referas , si illa ut systema duorum corporum consideres , si utramque vim ut in uno corpore duplo R concurren tem attendas : exponetur vis composita per factum ex massarum summa in quadratum viæ centri gravitatis ( $= A + H$

$+H) \times RS^2$ . Est autem per communes regulas  $RS = \frac{1}{2}$   $(AB+HC)$  & per hypothesin  $A=H$ . Itaque vis composita ex utraque singulari, cum eidem, sed duplo, corpori inesse concipitur, non est æqualis aggregato singularium. Substitutis enim æequalibus & assumtis  $A=H=1$  erit aggregatum illarum  $= AB^2 + HC^2$ ; vis autem composita  $= \frac{1}{2} AB^2 + AB \times HC + \frac{1}{2} HC^2 = \frac{1}{2} (AB + HC)^2$ . Non est igitur id aggregatum huic vi æquale, nisi cum  $AB=HC$ ; qui unus tantum est ex casibus infinitis. Videmus igitur sane, *quid interfit*, an duæ vires concipientur, ut in uno corpore, an ut in diversis? neque omnem vim *compositam* statim esse aggregatum virium componentium.

XLV. Noli autem metuere æstimationi meæ, quoniam §. 41. dixi, quando vis M producens celeritatem AB, & vis Q producens celeritatem BF concurrant in uno corpore, oriri celeritatem AB+BF, & consequenter vim  $(AB+BF)^2$ ; cum tamen hoc loco §. 44. non emergat vis  $(AB+HC)^2$ , sed eius pars tantum dimidia. Differunt etiam *hi casus*. In priori collegimus utramque vim in corpus *simplum* = A. v. §. 41. in posteriori vero in corpus *duplum* = A+H=2A. v. §. 44. Ostendi autem facile potest, ope motus compositi, quod *vis* ex duabus singularibus composita, si *in corpus duplum collectæ* fingatur, sit tantum *subdupla* eius, quæ resultat, si *in corpus simplum* utraque colligatur. Si enim *in angulo BAC recto* fingas duo corpora A & a moveri secundum AB & AC, viribus M & N; possunt hæ vires dupliciter concipi collectæ in corpus unum: Aut *in simplum* corpus A, & tum eius celeritas est AD, & vis = A.  $AD^2$ ; aut *in duplum* corpus A+a,

Fig. 6.

motum in via centri gravitatis duorum; & tum eius celeritas est  $AE$ , & vis  $= A+a) AE^2 = \frac{1}{2} A \times AD^2$ , pale ne ut supra contigit.

**XLVI.** Fortassis videor obliisci eorum, quæ §.

**26.** & seqq. dixi, *ex actionibus virium repetendas esse difficultatum declarationes*, utpote de quibus altum nunc est silentium? Atqui vero priora omnia eo pertinent, ut liceat intelligere, quod ex ipsa virium harum actione resultet id, quod intendo. Nimirum in æstimatione eius, quod ex utraque vi  $M$  &  $Q$  in corpore  $A$  resultat, non solum attendendum est, quid utraque, si sola esset, seorsim in hoc corpus ageret, sed etiam, quid illæ, si coniunctim eidem corpori insint, *in se invicem agant*. Accipe, quid fiat?

**Fig. 4.** 1. Vis  $M$  in singulis tempusculis transfert corpus  $A$  per spatiolum ut  $AB$ . 2. eadem vis  $M$  una cum corpore etiam transfert vim illi corpori insitam  $Q$ : Atque adeo efficit, ut vis  $Q$  sit corpori, licet fugienti, cum tota sua celeritate præsens. 3. Vis  $Q$  in iisdem tempusculis transfert corpus  $A$ , quod respectu sui non potest considerari ut fugiens, per spatiolum ut  $EC=BF$ : & 4. eadem vis  $Q$  etiam una cum corpore per hoc spatiolum transfert vim illi insitam  $M$ : adeoque fit ut 5. per actionem vis utriusque & corpus & vires illi insitæ transferantur per aggregatum spatiolorum cum celeritate ut  $AB+BF$ ; & consequenter 6. vis simplex idem motus phænomenon præstitura, hoc est, vis ex utraque illa resultans sive composita (vide def. 4. Sect. 1.) sit æqualis  $(AB+BF)^2$ . Ita igitur conficitur, *a diversa virium concurrentium actione pendere diversam virium compositarum & motus absoluti quantitatem, non secus atque a diversa virium mortuarum applicazione*

tione, & consequenter actione, pendebat diversitas momenti & effectus v. §. 33.

**XLVII.** Diximus de casu virium coincidentium, quo fit, ut celeritas resultans æquet aggregatum celeritatum singularum. Ex eo pendent omnia, quæ de directionibus dici debent consentientibus. Ratio enim augmenti, quod in hisce casibus supra aggregatum singularum virium accedit, intelligitur ex resolutione alterius (AC) virium consentientium in duas simpliciores (AE & EC) quarum una est perpendicularis directioni AB, altera coincidens. Duplum scilicet factum, quod per Theor. VII. accedit aggregato virium singularium, ex eo est, quod vis M una cum corpore A transfert vim Q per spatum suæ celeritati AB respondens, & vicissim vis Q una cum corpore A transfert vim M per spatum suæ celeritati EC respondens; hoc est, quod vis utraque in corpore moto insit, atque in illud agat, tanquam respectu sui quiescens. Cum enim ex hoc respectu fiat, ut celeritas composita æquetur aggregato simplicium: Influit ille necessario quoque in estimationem vis compositæ ex utraque oriundæ, hoc est, vis simplicis, quæ sola idem motus phænomenon produceret.

**XLVIII.** *Exemplum eiusmodi virium coincidentium* supra iam Sect. I. Theor. 12. produximus gravitatem corporum naturalem. Ibi enim secundo momento accedit ex actione causæ gravificæ nova vis viva Q seorsim æqualis illi M, quæ primo impressa erat: sed coniunctæ faciunt vim T, prioris M quadruplam, non duplam tantum. vid. loc. cit. Eadem vero *gravitas projectioni coniunctæ* nunc *exemplum esse* potest motus compositi sub duabus directionibus consentientibus quidem, sed

**Fig. 7.** non coincidentibus. Sit directio proiectionis AB obliqua ad horizontem , & faciat cum directione gravium AC angulum BAC acutum. Sit vis proiectionis insita & uniformis ; & vis a gravi cadente acquisita in singulis momentulis indefinite parvis habeatur etiam pro uniformi : percurret corpus *diagonalem Mm* illius parallelogrammuli , cuius latera MR & MN exprimunt celeritates , sive radices virium in M secundum illas directiones urgentium ; scil. MR celeritatem proiectionis æquabilem , & MN celeritatem vis per gravitatem impressæ proportionalem radici lineaæ AC,siveMD. Habemus igitur vim ut  $MR^2$  , & vim ut  $MN^2$  : & ex earum concursu oritur vis ut  $Mm^2$ . Plane, uti supra diximus, fieri in motu composito. Conf. Sect. I. Theor. 8. Schol. 1. num. 3.

#### XLIX. Illud non opus erit prolixius inculcare:

**Fig. 8.** Cum directiones sunt *dissentientes* , angulumque BAC faciunt obtusum ; non hoc dici, vim utramque M & N simul inexistere corpori A ut vivam. Cum enim motus secundum directionem FC , & secundum directionem FD simul realiter fieri in eodem corpore non possit : etiam vires vivæ secundum FC , & secundum FD non dicuntur simul inexistere revera. v. Def. 1. Sect. I. Verum hic sensus est : Si corpori A insit vis M , qua sola dato tempore ex A perveniret in B , & supponatur eidem nunc accedere vis N , qua sola dato tempore ex A perveniret in C , tunc aliquam virium harum partem in corpore A elidi , & remanere aliquam saltem. Resoluta enim vi  $N=AC^2$  in duas  $AF^2+CF^2$  per §. 25. altera quidem pars, secundum AF urgens, integra permanet ; sed altera secundum FC agens resistit vi M se-

M secundum FDd agenti , & eadem retro fert cum corpore , sive effectum eius tantundem sufflaminat. Possent igitur hic similia dici, uti §. 46. diximus ; & exempla sumi a gravibus ascendentibus ex Theor. 13. Sect. I. vel etiam ex proiectionibus sursum factis , uti §. 48. fecimus circa consentientes.

L. Atque hæc sunt, quæ mea opinione non solum *paradoxi speciem* sententiis detrahunt nostris, easdemque cum receptis in concordiam reducunt theoriis ; sed etiam ipsas *virium vivarum origines* aperiunt. Vis finita omnis, cuius celeritas est C, potest concipi tanquam composita ex pluribus coincidentibus, quarum celeritates sunt  $\frac{c}{m} + \frac{c}{n} + \frac{c}{p} + \frac{c}{q}$  &c. modo summa harum celeritatum partialium fiat =C; eo plane modo , quo diximus de vi a gravitate naturali cadendo acquisita. Igitur æstimatio vis ex hac compositione emergentis sequitur Theorema VIII. Inde *quadratum celeritatis totalis*.

### Membrum IV.

LI. Si quis pernosse cupiat ipsam alicuius mensuræ rationem vel originem : debet sine dubio inquirere in *genesim rei mensurandæ*. Id igitur ita imitatus sum. In corpore aliquo A quiescente vires etiam vivæ, & (si rem in vacuo , hoc est materia non resistente concipias) puræ generantur percussione corporis alterius H moti , & in corpus A impingentis. Supponamus aliquem *specialem casum*, &, quid in illo accidat, inquiramus. Sint duo corpora sphærica & elastica, A & H, inter se æqualia ; quiescat A ; moveatur H celeritate HC in directione HC ; impingat H directo impulsu in A : dicunt regulæ, Fig. 9.

post ictum corpus A moveri in directione eadem AB, celeritate  $AB=HC$ , & corpus H quiescere. Ex hoc vero sequitur, *vires vivas*, quae in corpore H ante ictum fuerant, in eo *extinctas esse*; & in corpore A, in quo nullæ erant, *genitas esse æquales prioribus*: sive, si malis, vim vivam ex corpore H *transfuisse* in corpus A. Quæritur, quid eo in casu factum sit, ex quo liceat *mensuram* eruere harum virium?

LII. Hic sciendum est: 1. *Naturam pro veteri sua consuetudine nihil agere per saltum*, hoc est, non transire ab extremis ad extrema sine transitu per intermedia omnia. 2. Non igitur corpus naturale in quiete positum acquirere finitum aliquem celeritatis gradum, nisi *per accelerationem*, similem illi, quam experintur *gravia a quiete lapsum incoantia*. 3. Convenire huic ideae *naturam corporis elastici*; dum enim corpus H *finito velocitatis gradu HC impingit in corpus A*, tendi utriusque corporis elaterem, neque corpus A in primo impulsionis instanti loco suo dimoveri cum celeritate HC, sed cum illa huius velocitatis parte, quæ non impendi ur ad tensionem elateris. 4. *Non itaque una aliqua clementari vel instantanea percussione consumi in corpore H impingente*, & generari in corpore patiente A vim vivam motricem: Sed 5. requiri *percussiones elementares plurimas*, a quibus illa corporis A antea quiescentis successiva acceleratio procedat. 6. Requiri autem, ut percussio quæcunque fiat *cum gradu celeritatis maiorí*, quam est ipsa corporis A iam incoata translatio. Neque enim 7. corpori A cum celeritate AS moto posse novam celeritatem SV per corpus H insequens imprimi, nisi hoc corpus H moveatur cum celeritate AS + SV. Itaque 8. us

8. ut corpus A in quiete positum ex percussione corporis H recipiat gradum celeritatis AB , necesse esse, ut *totidem percussionses elementares* fiant, ac elementula SV contineantur in AB : Necesse etiam 9. ut singularum percussioneum celeritates sint æquales lineis AS, AV &c. Faciendo igitur BC=AB & complendo triangulum ABC 10. *Singula elementula STXY* exprimere singulas percussionses elementares , quæ in corpus A celeritate AS iam latum, pro ingenerando novo gradu celeritatis SV fieri a corpore H debeant : & 11. *Aream trianguli ABC* exponere summam omnium percussionum elementarium , quæ in corporis H incursu versus A fieri , & a corpore A recipi debeant: Adeoque 12. summam illam esse proportionalem quadrato celeritatis AB.

LIII. Esse vero 13. *summam hanc* percusionum elementarium *proportionalem vi vivæ* , in corpore H extinctæ , & in corpore A genitæ ; quoniam omnes illæ procedunt a vi viva corporis H , antequam ipsa extinguitur , & omnes recipiuntur a corpore A ante , quam vis viva celeritatis AB gignitur. Non posse scil. æstimationem vis vivæ *maiorem* esse hac percusionum summa, quoniam per has *solas* in corpore H extinguitur , & in altero A gignitur. Non esse *minorem* , quoniam vis viva corporis H illas omnes exerit, & corpus A eas omnes recipit, atque aptum fit tantumdem exerere: Igitur hanc esse iustam æstimationem, sive 14. *vim vivam esse proportionalem quadrato celeritatum*.

LIV. His positis , quæro , num loco *definitionis* , uti in hoc negotio dari solent , proportionalis, dici possit: *vim vivam esse summam omnium percussionum elementarium*, quæ impendi debent a corpore aliquo moto , donec

donec id alteri quiescenti elastico, & æquali imprimat motum conceptum cum finito aliquo gradu celeritatis?

LV. Evidem, quæ huc usque dicta sunt, ex ipsa percusionis & successivæ accelerationis natura sequuntur, quoquaque illa medio aut modo fieri naturaliter concipias: neque meum est hoc loco, exponere prolixius, quomodo illæ percussionses elementares fiant? Putto tamen, nihil in eo absurdum esse, si *integræ percussionis memoratae æconomiam* sic concipias. Dum corpus H impingit in corpus A tamdiu tenditur elater, quamdiu comprimitur ab ictu: comprimitur autem, donec utrumque corpus feratur celeritate & directione eadem. Ea tensione absoluta restituitur elater motu accelerato, qualis in chorda arcus tensa observatur: & per hanc elateris actionem fit secunda in celeritate corporum mutatio, æqualis primæ; reddit enim elater, quicquid absorpsit. Cumque ab initio facilius cedat elater, minor est corporis impulsus localis translatio, crescens usque ad tempus summæ tensionis, idque ex sola corporum collisione: Hoc autem peracto maneret utriusque corpori celeritas eadem, nisi per restitutionem elateris, etiam acceleratam, alteri decederent, accederentque alteri corporum novi celeritatis gradus.

LVI. Dabimus *schema*. Quiescat corpus A, & Fig. 11. alterum æquale H irruat directe & cum celeritate HA in corpus A: Duretque huius tota impulsio per tempusculum finitum. Per impulsum primum corporis H factum cum celeritate HA, duo fiunt in corpore A: Partim tenditur elater, partim imprimitur corpori A celeritas initialis Aa. Concipi igitur potest, corpori H decessisse gradum velocitatis ba=Aa. In secundo igitur

tur momentulo infinitesimo impingit H cum celeritate  $\frac{bb}{A}$ , & præter novam elateris tensionem imprimit corpori A gradum celeritatis novum  $\alpha\alpha$ : quo a velocitate corporis H detracto ipsi superest celeritas  $\alpha\beta$ , & sic porro, donec tensione ad summum perducta corpus A moveatur celeritate CD, & alterum H sequatur velocitate æquali EF. Atque hic iam cessarent, ut ante dixi, incrementa & decrementa celeritatum, nisi restituens sese elater accederet. Quid igitur ille?

LVII. Dum se utriusque corporis *elater* accelerato motu restituit, duo fiunt: *Primo*, hæc corpora non obstantibus celeritatum suarum novis variationibus per totum restitutionis tempusculum sunt sibi præsentia, sive contigua; *secundo* per elaterem corporis H reagentem accedit nova percussionum summa in corpus A, & per elaterem corporis A retro agentem destruitur celeritas corpori H adhuc residua. Summa illa exprimitur per aream FGK: unde fit, ut in singulis huius tempusculi infinitesimis corpus A impellatur a celeritate  $fg$ ,  $\Phi\gamma$ , &c. Unde tandem ultima corporis A velocitas erit æqualis  $KL=LM=HA$ .

LVIII. Arbitror, hæc convenire cum prioribus §. 52. & 53. neque adversari *receptis* de percussione doctrinis: Sint enim duo corpora M &  $m$ : illorumque celeritates C &  $c$ . Sit  $c=o$ , quoniam ad hunc casum omnes reduci possunt. Sequitur ex dictis nostris, tendi elaterem, donec celeritas corporis utriusque sit  $=\frac{mc}{M+m}$ . Erit autem ictus; consequenter & elater  $=\frac{m^mc}{M+m}$ . Sed elater in utramq; partem reagit: Applicatus itaque ad massam M corporis impellentis, dat per communia

celeritatem  $= \frac{mc}{M+m}$ , & quidem in partem contrariam, ut adeo celeritas post ictum fiat  $= \frac{MC-mC}{M+m}$ , & vis composita per Theor. 10.  $= \frac{M(MC-mC)}{(M+m)^2}$ . Sed applicatus ad massam  $m$  corporis antea quiescentis, dat novam velocitatem  $= \frac{MC}{M+m}$ , quæ priori addita, facit velocitatem totalem  $= \frac{MC}{M+m} + \frac{MC}{M+m}$ , & vim compositam per Theor. 8.  $= \frac{m(MC+MC)}{(M+m)^2}$ . Est igitur hic novum *ex Natura* exemplum virium repugnantium & coincidentium. Sit v. gr.  $M=m=1$ , erit velocitas corporis  $m$  a collisione sola  $= \frac{1}{2}C$ , & vis  $= \frac{1}{4}C^2$ ; eademque erit celeritas & vis ab elatere genita, si seorsim sumatur. Quia enim  $M=m$ , æqualis intrinque corpore effectus est elateris sese restituentis; & effectus in corpore  $M$  est destructio celeritatis  $= \frac{1}{2}C$ , & vis  $= \frac{1}{4}C^2$ : Igitur in corpore  $m$  effectus hic seorsim consideratus, foret etiam celeritatis  $= \frac{1}{2}C$ , & vis  $= \frac{1}{4}C^2$ . Sed additus corpori ut jam moto, per §. 42. facit celeritatem  $= C$ , & vim  $= C^2$ , conformiter theoriæ hactenus expositæ.

LIX. Neque vero per novam hanc percussioneis explicationem improbo illam auctorum consuetudinem, qua ictum concipiunt, ut momentaneum. Faciunt illi pro suo scopo, quærentes celeritatem corpori percussione impressam. Hic enim sufficit attendere percussionses elementarium mearum ultimas. Feci autem & ego proximo scopo, quo ipsam virium vivarum impressionem & illius seriem exponere *sine saltu* necessum erat. Cartesii exceptionem non moror. Ille Galileo successivas acceler-

celerationes urgenti , opposuit *globum e tormento propulsum* , qui globulum quiescentem in via sua positum ante se moveat : Globulum enim eo in casu non propelli tardius ab initio , & successive demum accelerari ; quoniam alias & ipse globus impellens ab initio tardius ferretur , & deinde celerius successive . v. Tom. III. epist. 104. p. 401. 402. Posset credere , ista festinanter scripta esse : Namque alio in loco ipse suppeditat , quæ respondreas . v. Tom. II. epist. 109. p. 367. Mihi sic videtur : Aut de naturalibus quæritur corporibus , aut de aliis fœcunda imaginatione natis . Si de illis : *Elastica* sunt , atque hic dici potest , centrum globi impellantis non ferri ab ictus initio tardius , & deinde velocius . Pendet hoc ab elatere corporum , quo fit , ut *partes* ab ictu *pressæ* cedant . Sin *perfectæ dura* fingas corpora ; nihil ad illa pertinet lex naturæ §. 52. n. 1. enarrata , nihil etiam nostra , quæ exinde fluunt , corollaria . Diu est , quod per illam suppositionem saltus naturæ obtrudi monuerunt eruditi . Ego curiosioribus *questionem* commendo *sequentem* : An corpori duro quiescenti a corpore duro incurrente communicetur vis viva insita ? an illud solum ab insequenti corpore moveatur , uti pondus vecti moto impositum ?

LX. Denique illud operæ pretium est annotare : Ex præsenti dilucidatione dispalescere *vera* virium mortuarum , elementorum vis vivæ , & vis vivæ ipsius *discrimina* . Dixi §. 2. ambiguitatem latere in formula loquendi , cum dicitur , vires mortuas esse proportionales facto ex massa in celeritatem . Est illa plerumque innoxia : Placet tamen hoc paragrapho ab eadem abstinere . Mea sic est sententia . Expono *vim mortuam*,

hoc est , potentiam tantum nitentem *per dimensionem unam* ; atque id in corpore naturaliter gravi fieri potest per massam. *Momentum* huius *vis mortuæ* , sive , quod idem est , actionem potentiae nitentis (v. Sect. I. def. XI) repræsento *per dimensiones duas* , v. g. per rectangulum ex massa in celeritatem nisus. Si nullus generatur ex hoc nisu motus , res omnis manet in hisce terminis , & singuli hi nisus per contrarios & æquales eliduntur. Concipio igitur hæc momenta vel nisus tanquam rectangulum aliquod , quod fluere quidem conatur , sed ab alio æquali impeditur , adeoque solidum generare non potest. Sed *virium vivarum elementa* (hoc est , id novi , quod ex continuata & non impedita virium mortuarum actione , tanquam ex fluxu superficie , generatur) opus habent *tribus dimensionibus*. Præter enim actionis vel momenti fluentis mensuram , attendi etiam celeritas fluxus debet ; siquidem §. 62. patebit , in percussione corporum tanto celerius fluere impetus illos , quanto est celeritas corporis percutientis maior. Itaque elementum vis vivæ exponetur per *prisma elementare* , cuius unam dimensionem facit vis mortua nitens , alteram celeritas nisus , tertiam continuatio & quasi fluxus elementaris huius momenti per contrarios nisus non impediti. Denique vires ipsæ vivæ exprimentur *prismate illofinito* ; quod exsurgit ex integratione omnium horum prismatum elementarium. Ex quo constat , neque ex replicatione additiva virium mortuarum componi vivas ; neque per divisionem redigi vivas in mortuam : non magis atque id de superficiebus & solidis dici potest. Patet etiam , cur & quo sensu vis viva atque mortua sint heterogeneæ?

**LXI.** Patet denique , adeo *non dissentire* mensu-

ram

ram virium vivarum Leibnitianam a vera mortuarum æstimatione, ut potius altera sequatur ex altera.

## Membrum. V.

LXII. Supereft, ut ex hac Theoria rationem redamus, cur vires vivæ inæquales sibi occurrentes faciant æquilibrium? Debeo id propter Sectionis I. Theor. 8. Schol. 2. Id vero ex haec tenus dictis sponte sequitur, si unicam illam Lemmatis loco propositionem addideris, quam §. 60. modo subinnuimus. Ea hæc est. Si duo corpora A & B celeritatibus, quæ sint massarum reciprocæ, in se invicem, vel in corpus medium C directe incurvant, percussionses utriusque sunt isochronæ; id enim nisi foret, alterutrius pressio prævaleret, postquam cessavit impulsio alterius. Consequitur autem ex hoc lemma, quo maior est corporis A impellentis velocitas, eo celerius sibi succedere impetus, sive momenta vis nitentis; ut adeo, si non impedirentur, elementula ex fluxu horum nisuum oriunda §. 52. maiora fierent elementulis ex fluxu impetratum corporis B tardioris eodem tempusculo oriundis. Si vero impedianter illi impetus, ob continuitatem actionis in utroque A & B sequitur, singulos nisus elidi per alios fibi oppositos & æquales, adeoque nasci æquilibrium.

LXIII. Videtur hoc prima specie *paradoxum*, sed nihil tamen absurdī comprehendit. Si nunquam fluant libere momenta corporis nitentis, opponitur rectangulum rectangulo, neque oritur tertia dimensio; itaque si  $MC=mc$  (manendo in denominatione §. 58.) obtinebit æquilibrium; neque generabitur ab eiusmodi im-

Fig. 12.

petibus vis viva in corpore C medio , & utrinque percusso. Sin ita rem concipias, ut corpus A impingat in aliud quiescens æquale D , & corpus B in aliud sibi æquale E : Non impedientur nisus corporum A & B, sed ita recipientur a corporibus D & E , ut ex eorum continuatione generetur vis viva in D & E. *Mensura vero huius vis* , quæ ita gignitur , non tantum sequitur magnitudinem impetuum , sed proportionem fluxus quoque , quo illi se excipiunt. Unde constat, vim genitam, positis licet  $MC=mc$  , tamen inæqualem fore , si differat tertia dimensio , hoc est , celeritas fluxus , quo sibi succedunt hi impetus v. §. 60. Cumque tertia hæc dimensio etiam sequatur proportionem celeritatis : patet ex uno latere , cur vires vivæ in corpore D & E genitæ, exprimantur per  $MCC$  &  $mcc$  , uti vires corporum A & B ; & ex altero , cur sibi æquilibrium faciant hæ vires in se invicem, vel in idem corpus C, impingentes.

LXIV. Perspicuitatis gratia , dicam id in simili quoque. Fingatur *vectis* AB fulcro C impositus. Egradientur ex ipso fulcri centro C duo corpora *a* & *b* , & ferantur per brachia *aA* , & *bB* celeritatibus , quæ sint reciproce massarum , ut habeamus  $MC=mc$ . Hic recte dici potest: corpus *b* in singulis lineæ *bB* punctis exerere impetum, qui sit ut rectangulum ex massa in distantiam a centro. Adeoque posito  $BD=BC$  , si impetus illi omnes recipentur libere a corpore aliquo  $L=b$  : exprimetur earum summa per aream CBD ductam in massam *L*. Similiter corpus *a* in singulis lineæ *aA* punctis exerit impetum proportionalem rectangulo ex massa in distantiam a centro : itaque , facto  $AE=AC$ , si & hos impetus sine obstaculo collectos conciperem in corpus aliquod  $M=a$ ;

$M=a$ ; exponeretur earum summa per aream CAE dampnam in massam M. Atque hic casus obtinet in percussione superius exposita §. 51. — 53. itemque in corporibus libere cadentibus, si corpus  $L=b$  cadat tamdiu, donec acquirat celeritatem ut CB, & corpus  $M=a$ , donec acquirat celeritatem ut CA; in hisce enim casibus impetus causæ impellentis & gravificæ omnes recipiuntur in corpore cadente, adeoque generantur vires proportionales hisce prismatis. Sed quoniam in easu vecis nostri, numquam libere fluunt impetus, sed perpetuo se destruunt, numquam tertia oritur dimensio, neque adeo per impetus hosce successivos generantur areae CAE, vel CBD, & ex illis prismata: sed singula sibi invicem rectangula b. BD, & a. AE, vel generaliter (sumendo,  $C\beta : C\alpha = CB : CA$ : ) rectangula b.  $\beta\tau$  & a.  $\alpha\varepsilon$  sibi invicem æqualia semper sibi opponuntur. Unde necessario oritur æquilibrium. Atque hoc idem sequitur, cum duo sibi invicem corpora occurrent, quorum vires sunt reciprocae massarum.

LXV. Supereft unicum, quod omitti nolim. Qui Leibnitianam æstimationem tuentur, saepius in ore habent, *vires totales esse effectibus suis proportionales*. Iam in easu duorum corporum, cum fuerit  $MC=mc$ , videmus, ponendo corpora non elastica, effectum virium corporis A hunc esse, ut destruant vim corporis B; & effectum virium corporis B esse, ut destruant vim corporis A. Itaque *videri posset*, pro effectu virium in A, poni posse vires in corpore B destructas: Adeoque propter effectus & virium æqualitatem vires utriusque corporis esse æquales. Id in vulgari æstimatione locum habet; est enim  $MC=mc$ , quoties datur eiusmodi æquilibrium: Sed in Leibnitiana

*na* fallit plerumque, quia pro casu æquilibrii , vires  $MC^2$  non sunt æquales viribus  $mc^2$  ; sed  $MC^2 : mc^2 = m : M$ . Quid hic pro Leibnitio dicendum est ?

LXVI. Nimirum *hoc*: vires corporis B, destructæ a viribus corporis A, non possunt haberi pro effectu viribus A proportionali, nisi *massæ* sint æquales. Id *duplici modo* ostendam. *Primo*, cum vires æstimantur ex effectu integro , effectus dicit resistentias, per quas consumuntur vires in corpore moto : resistentiæ igitur illæ debent spectari respectu corporis, cui fiunt : itaque & virium nisus , & resistentia nisum destrucns debet applicari ad massam eandem. *Secundo* enim loco , nisi id feceris, nullam habebis virium mensuram ; ponendo enim  $x$  pro  $m$ , &  $y$  pro  $c$ : æquilibrium erit, quoties  $MC = xy = mc$ ; Sed  $xy^2$  potest hoc non obstante infinitis modis differre a quantitate  $mc^2$  , sic , ut non sit  $Mc^2 : xy^2 = m : M$ , nisi quando  $x = m$ . Igitur vis corporis B æquilibrium facientis cum corpore A ( $=xy^2$ ) non potest assumi pro mensura virium corporis A determinata.

LXVII. *Cautelam* igitur necessum est sequentem attendere : Cum vires æstimantur ex resistentiis, per quas consumuntur, resistentiæ illæ spectantur *ut receptæ ab hac massa*, vel ut profectæ a massa æquali ; nequaquam vero ab alia inæquali. Ita fit in gravibus motu retardato ascendentibus : Ita etiam fieri in percussionibus debet. Patetque novo exemplo , quantum momenti lateat in *discrimine massarum*, cum agitur de viribus, & earundem inter se comparationibus. conf. §. 44. 45.

fig. 1.

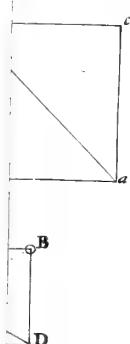


fig. 2.



fig. 4.

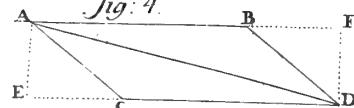


fig. 5.

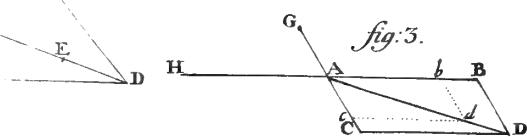


fig. 5.

fig. 9.



fig. 5.

fig. 5.

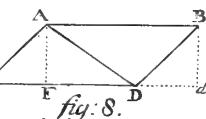


fig. 8.

fig. 10.

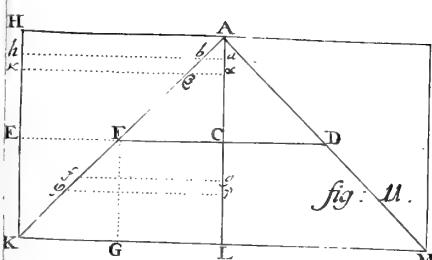
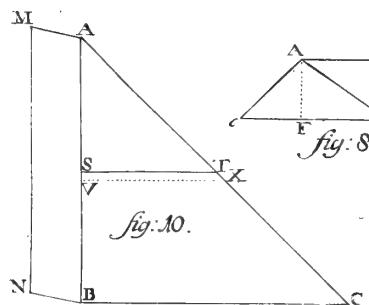


fig. 11.

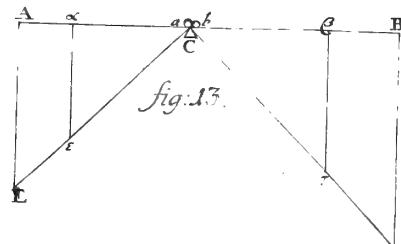
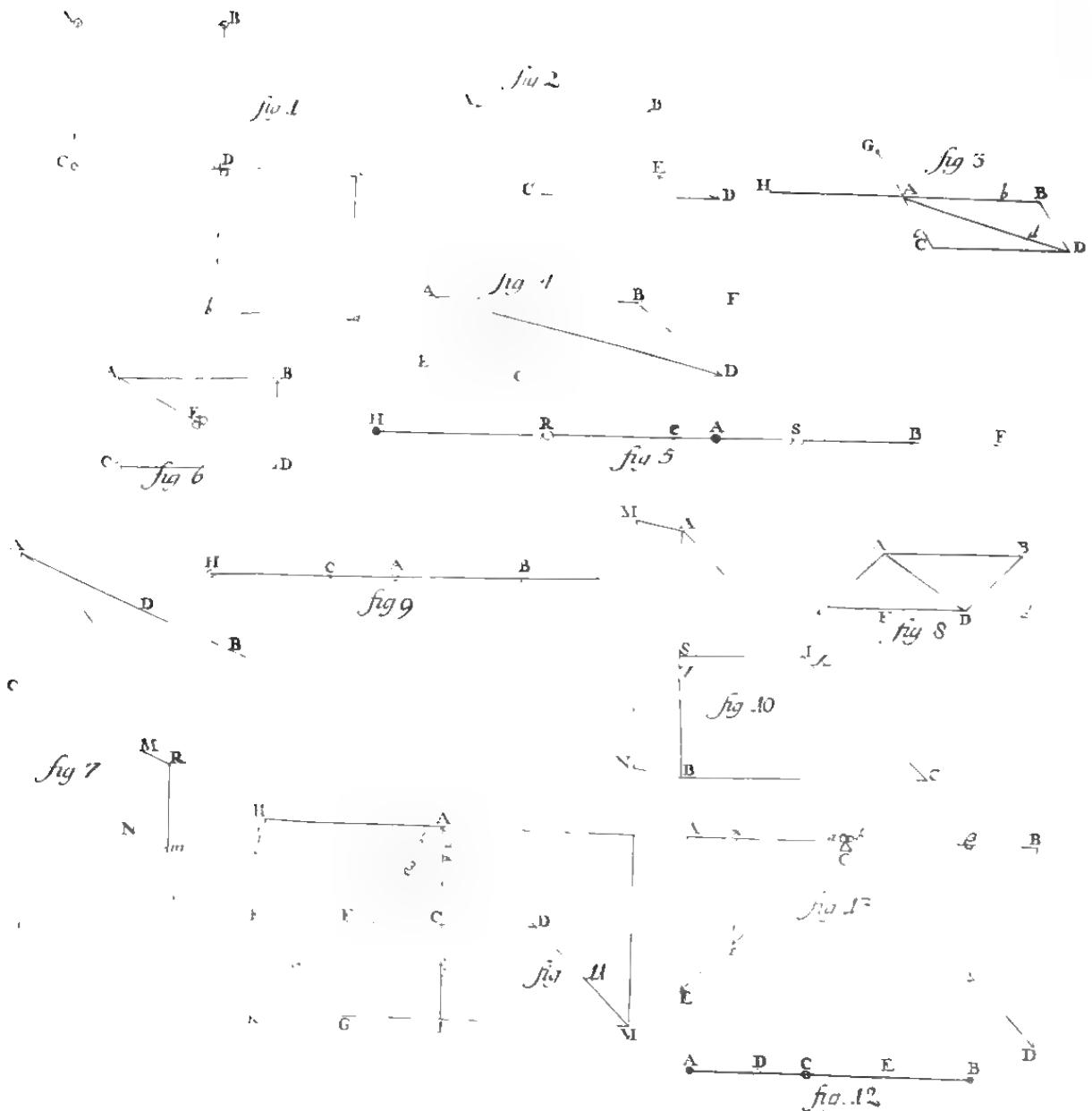


fig. 12.



# DE MOTV CORPORVM EX PERCVSSIONE.

DISSERTATIO,

*Auctore*

Nicolao Bernoulli , Ioh. F.

## Hypotheses.

### I.



Orpora duo, E & F, per altitudines EB,  
FC, ex quiete libere delapsa , si velocitatis ultimo acquisitis direc<sup>t</sup>e ad se invicem impingant in M , eam post ictum velocitatem mutuam habebunt , ut sicut sua singula ascendant , donec velocitate utriusque exhausta pervenerint in situm  $\epsilon\Phi$  , eorum commune centrum gravitatis pristinam unde prius descenderat altitudinem acquirat , neque eam transgrediatur.

Notissimum hoc est Hugenii axioma , quo passim usus est , quodque adeo evidens reputabat, ut in pari occasione incidenter tantum id monuisse ipsi suffecerit, in tractatu suo posthumo de motu corporum ex percussione.

II. Duo corpora æqualia A & C velocitatibus æ qualibus eodem momento contra tertium quiescens B impellantia , æquali etiam post ictum , velocitate resiliunt.

Q

III. Si

M. Nov.  
1725.  
Fig 1.

Fig. 2.

**Fig. 3.**

III. Si duo corpora ad se invicem impingentia velocitatibus  $\alpha\beta$  &  $\phi\lambda$  recedant, eadem vero corpora aliis etiam velocitatibus  $\epsilon\delta$ ,  $MN$  sibi occurentia resiliant velocitatibus  $\epsilon\delta$ ,  $\mu\nu$ . Ipsa quoque hæc corpora se pellentia velocitatibus totalibus  $AB+FL$  &  $ED+MN$ , totalibus  $\alpha\beta+\phi\lambda$  &  $\epsilon\delta+\mu\nu$  repellentur.

Sequitur hinc quod duorum corporum velocitatibus  $a$  &  $b$  post ictum se mutantibus in velocitates  $p$  &  $q$ , etiam earum æque multiplices  $na$  &  $nb$  post conflictum producenturæ sint æque multiplices  $np$  &  $nq$ .

**Fig. 4.**

IV. Duorum corporum velocitatibus  $AB$ ,  $CB$ , degenerantibus post ictum in alias  $\alpha\beta$ ,  $\gamma\beta$ , erunt vicissim  $AB$ ,  $CB$  velocitates post impulsum eorundem corporum quæ ante hunc velocitatibus  $\alpha\beta$ ,  $\gamma\beta$  sibi occurserant.

Pendet hæc hypothesis ab axiomate generali, quo dicimus quod abeunte effectu in causam, vicissim causa in effectum mutetur.

**Fig. 5.**

Hoc illustrant principia Catoptrica & Dioptrica, quod radio  $AB$  reflectente aut refringente secundum  $BC$ , vicissim radius  $CB$  reflexus aut refractus viam lineæ  $AB$  fit initurus.

### *Lemma*

**Fig. I.**

Sint duo corpora quæcumque sibi directe occurrentia in  $M$  velocitatibus  $BM$ ,  $CM$ , quas cadendo per altitudines  $EB$  &  $FC$  acquisiverant. Ponantur eadem corpora post impulsum velocitates acquisivisse quibus ad altitudines verticales  $\epsilon B$ ,  $\phi C$  ascendant. Dico centrum commune gravitatis corporum tam in  $\epsilon$ ,  $\phi$ , quam in  $E$ ,  $F$  constitutorum fore in  $S$ , intersectione linearum  $EF$ ,  $\epsilon\phi$ .

Si

Si enim essent in P & O foret EO. OF::εP. PΦ aut componendo EF. OF :: εΦ. PΦ & alternando EF. εΦ :: OF. PΦ. Dein ob triangula similia ESε, FSΦ est ES. SF :: εS. SΦ, vel EF. SF :: εΦ. SΦ, vel EF. εΦ :: SF. SΦ, unde deducitur OF. PΦ::SF. SΦ, vel OF. SF::PΦ. SΦ. Q. E Abs.

### Propositio I.

Existentibus duorum corporum velocitatibus quibuscunque, erit summa productorum cuiusvis corporis in quadratum suæ velocitatis eadem post istum quem fuerat ante.

Positis enim quæ prius manifestum est ob centrum Fig. 1. gravitatis in S lineas FS & ES fore ut corpora E & F, aut ε & Φ, dum lineæ EB, FC; εB, ΦC sunt ut quadrata velocitatum ante & post istum. His positis erit ES. SF :: Eε. ΦF, adeoque ES×ΦF=SF×Eε, ac consequenter EB×SF+FC×SE=EB×SF+Eε×SF+CF×SE=ΦF×SE=εB×SF+ΦC×SE. Q. E. D.

Qui quantitatem virium in rerum natura constantem asserunt, huius propositionis veritatem tanquam corollarium ex theoremate Leibnitiano, quo quantitatem virium quadratis velocitatum proportionalem dicit, deducere possent.

### Propositio II.

Binorum corporum D & C velocitatibus oppositis Fig. 6. & massis quæque suis reciproce proportionalibus præditorum, eadem erit sigillatim velocitas post impulsū quæ fuerat ante.

Sit corpus D=m, eius velocitas DB=p, corpus  
Q 2 C=n,

$C=n$ , erit eius velocitas  $CB=\frac{mp}{n}$ . Concipiatur corpus maius D divisum in duo corpora  $\alpha$  &  $\beta$ , quorum prius  $\alpha$  sit  $=n$ , ac proin  $\beta=m-n$ , & disponantur ita ut eorum commune centrum gravitatis sit in D. Pateat quod haec duo corpora  $\alpha$  &  $\beta$  virgæ  $\alpha\beta$  rigidæ gravitatis experti atque velocitate DB se moventi adhærentia, eundem plane effectum in corpus C sint exercitura, quem corpus D eadem sua velocitate motum produxisset, nec non, quod hic effectus constans sit permanensurus quomodounque se moveant corpora  $\alpha$  &  $\beta$  durante motu puncti D in linea DB, dummodo centrum commune gravitatis non recedat a punto D.

Ponatur ergo moveri corpus  $\beta$  velocitate  $\beta D=BD=\frac{np}{n-p}$ , & corpus  $\alpha$  velocitate  $\alpha D$  quæ erit  $=\frac{mq-np}{n}$ ; fingatur insuper circumrotari virga  $\alpha\beta$  circa punctum D ut situm acquirat ADB, dum interea punctum D fertur velocitate DB, quo fieri ut corpus  $\beta$  positum in B (utpote duabus velocitatibus æqualibus & directe oppositis gaudentis) prorsus sit quietum, &  $\alpha$  positum in A se moteturum velocitate  $AD+DB=\frac{mp}{n}=CB$ . Corpus ergo C (per Coroll. Prop. 1.) post ictum revertetur eadem velocitate qua gaudebat ante impulsum.

Demonstrata propositionis veritate ratione corporis C, vera etiam erit per Prop. I. ratione corporis D.  
Q. E. D.

### Problema.

Datis duorum corporum directe sibi occurrentium massis & velocitatibus invenire eorundem velocitates post ictum.

Sit

Sit massa corporis in  $A=m$ , eius velocitas  $AB=p$ ; Fig. 7. massa corporis  $C=n$ , eius velocitas  $CB=q$ . Mutentur velocitates  $AB$  &  $BC$  post occursum in alteras  $\varepsilon\alpha$ , &  $\varepsilon\gamma$ , sitque  $\varepsilon\alpha=x$ ,  $\varepsilon\gamma=y$  (per propositionem 1.)  $\sqrt{\frac{mpp+nnq-nqx}{n}}$ . Ponantur iam eadem corpora reverti ad secundum impulsum velocitatibus  $\delta\varepsilon$  &  $\Phi\varepsilon$ , ita ut sit  $\delta\varepsilon. \Phi\varepsilon :: BA. BC$ ,  $\delta\alpha. \Phi\gamma :: n. m$ , seu reciproce ut massæ corporum in  $A$  &  $C$ : reperiatur  $\delta\alpha = \frac{qnx-pny}{pm-qn}$ , &  $\Phi\gamma = \frac{qmx-pmy}{pm-qn}$ . His ita positis exprimantur velocitates post hunc secundum ictum in  $\xi$  per lineas  $BD$  &  $BF$ , & apparebit per secundam partem hypotheseos tertiae quod  $AB. \varepsilon\alpha :: \delta\varepsilon. DB = \frac{mxx-nxy}{pm-qn}$ , &  $CB. \varepsilon\gamma :: \Phi\varepsilon. BF = \frac{mxy-nyy}{pm-qn}$ . Consideratis porro velocitatibus partialibus  $\alpha\varepsilon$ ,  $\gamma\varepsilon$ , patet per hyp. 4. degenerare has in  $BA$  &  $BC$ , reliquas vero  $\delta\alpha$  &  $\Phi\gamma$  (per prop. 2.) manere easdem, & per consequens  $AD=\delta\alpha$ , sicut &  $CF=\gamma\Phi$ . Elicitur ergo etiam (per primam partem hypotheseos 3) quod  $BD=BA+AD=p+\frac{qnx-pny}{pm-qn}$ , &  $BF=BC+CF=q+\frac{qmx-pmy}{pm-qn}$  unde provenit  $\frac{mxx-nxy}{pm-qn}=p+\frac{qnx-pny}{pm-qn}$ , &  $\frac{mxy-nyy}{pm-qn}=q+\frac{qmx-pmy}{pm-qn}$ , quæ duæ æquationes per substitutionem valoris  $y$  supra exhibiti similem producunt æquationem. Primam ergo reduxisse hic sufficiat, & prodibit per debitam terminorum dispositiōnem  $mxx-nxy-qnx+pny-ppm+pqn=o$ , quæ æquatio divisa per  $x-p$  (radicem manifeste inutilem dat  $mx-ny+mp-qn=o$ , vel, surrogato pro  $y$  valore suo,  $mmxx+mnxx+2mmpx-2mnqx+mmp-p-mnpq=o$ , vel tandem dividendo per  $x+p$ , radicem

etiam inutilem ,  $mmx + mnx + mmp - mnp - 2mnq = 0$ ,  
 quæ æquatio monstrat  $x = \frac{mnp + 2mnq - mmp}{mmb + mnb} = \frac{np + 2nq - mp}{m + n} = p$ . Q. E. I.

---

EXAMEN PRINCIPIORVM  
 MECHANICÆ,  
 ET  
 DEMONSTRATIONES GEOMETRICAЕ  
 DE  
 COMPOSITIONE ET RESOLVTIONE  
 VIRIVM,

*Auct.*

Daniele Bernoulli , Ioh. F.

---

*Sectio Prima.*

I.

M. Febr.  
 1726.



Llam Mechanicæ partem quæ versatur circa æquilibrium potentiarum , totam ex sola compositione & resolutione virium deduci posse , abunde monstravit Petrus Varignon ; huic dein principio si adimus alterum , quod incrementa velocitatum proportionalia sint elementis temporum ductis in vires seu pressiones

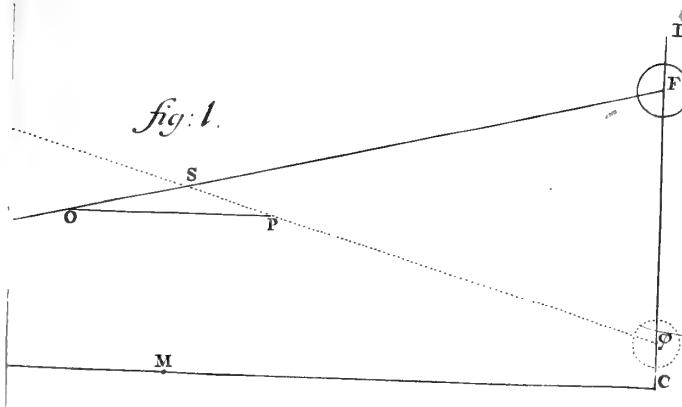


fig. 1.

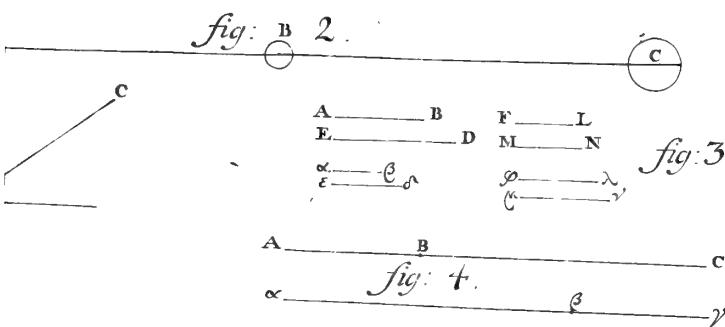


fig. 2.

A ————— B      F ————— L  
 E ————— D      M ————— N  
 $\alpha$  —————  $\beta$        $\varphi$  —————  $\lambda$ ,  
 $\varepsilon$  —————  $\delta$        $\zeta$  —————  $\gamma$ ,

fig. 3.

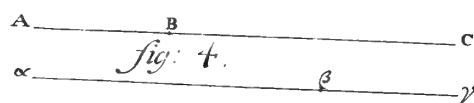


fig. 4.

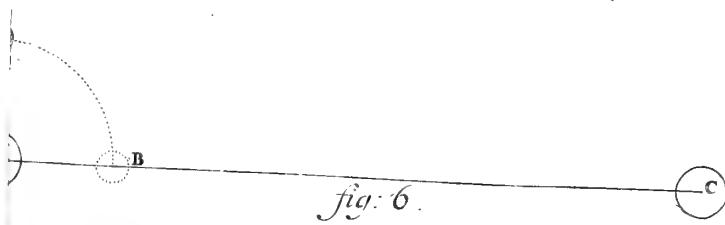


fig. 6.

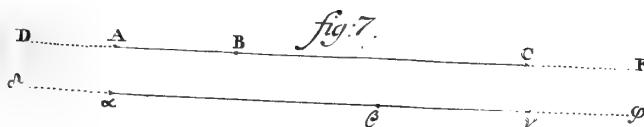
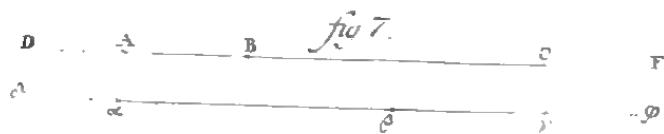
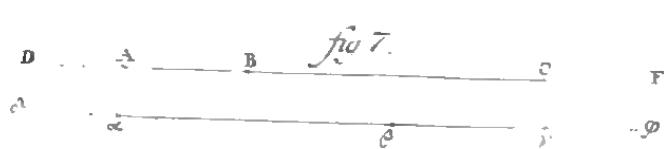
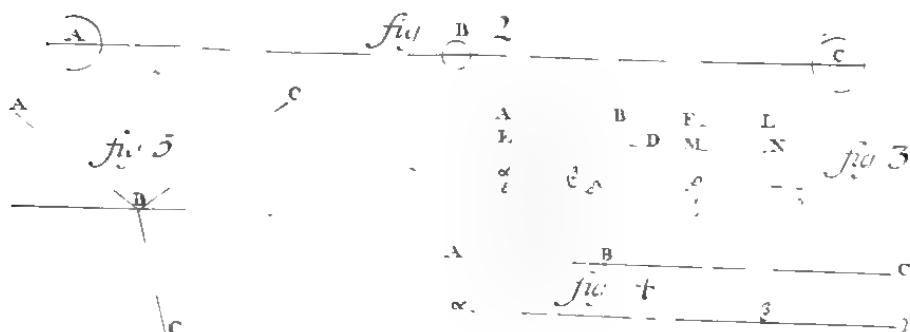
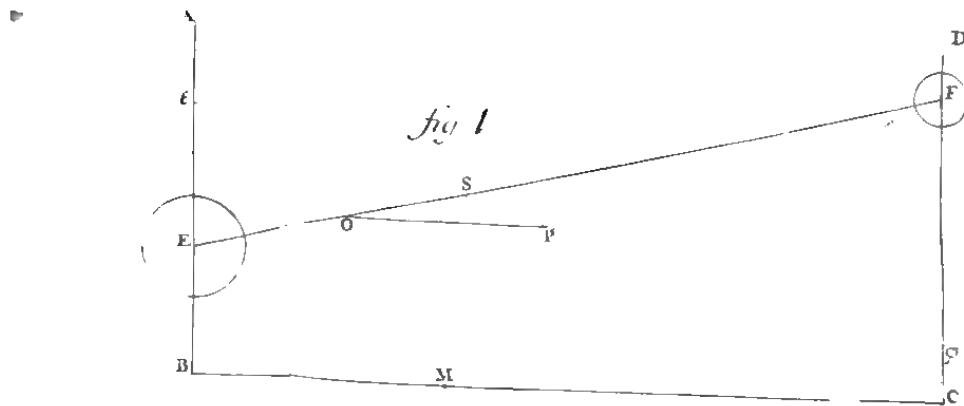


fig. 7.



siones corpora ad motum solicitantes, obtinemus secundam mechanicæ partem circa motum corporum occupatam. Posteriori principio Galileus primum, ni fallor, usus est pro determinando motu corporum uniformiter accelerorum. Possunt quoque exinde deduci regulæ communicationis motuum & alia quam plurima, quæ dein infinitis experimentis egregie fuerunt confirmata; experientia ergo potius, si recte iudico, fundatum est principium Galileanum, quam ratione, atque proin annumerandum illis veritatibus, quæ dicuntur vulgo *contingenter vera*, quibus opponuntur *necessario vera*. Potuisse enim natura efficere, ut incrementa velocitatum in corporibus motis proportionalia essent elementis temporum ductis in functionem quamcunque pressionum, ita ut dicto tempore  $t$ , pressione  $p$  & velocitate  $v$  non amplius esset  $dv = pdt$ , sed verbi gratia  $dv = ppdt$  vel  $dv = p^3 dt$  &c, quarum æquationum singulæ alias atque alias leges motuum subministrant.

II. Alter vero se res habet cum principio compositionis virium, cui priorem mechanicæ partem, vulgo staticam nominant, inniti dixi; illius enim demonstrationem inveni plane geometricam, cuius vi demum cognovi, theorematum statica non minus *necessario vera* esse, quam sunt geometrica. Hactenus a nemine demonstrata fuit compositionis virium, quam ex compositione motus, quod demonstrandi genus tametsi receptum a viris summis, veluti Newtono, Varignonio, aliisque: minime tamen rigore geometrico munitum est, propositionemque non alter quam *contingenter v ram reddit*, uti inferius demonstrabo; nequaquam autem dubitandum, quin viri modo allegati ipsi defe-

defectum istum optime perspexerint, maluerint tamen aliqualem, eamque facilem & brevem, quam nullam vel valde prolixam magnoque propositionum geometricarum apparatu intricatam demonstrationem addere; Hæc ut monerem necesse duxi, ne quis credat me nil nisi actum agere, imo per longos circuitus rem per se obviam petere.

Fig. I.

III. Propius iam examinanda res est; exponam primo demonstrationem ordinariam; dein eiusdem defectum indicabo; denique veram demonstrationem subiungam. Demonstrata hactenus fuit compositio virium ex compositione motus, hunc in modum. “Sint potentiae. “duæ concurrentes in puncto A sub directionibus AB & “AC, quæque se habeant ut AB & AC. Si potentia “AB sola ageret, moveret punctum A in linea AB, & po-“tentia AC, si sola ageret, moveret idem punctum A in li-“nea AC. Erunt autem velocitates primæ, uti ipsæ poten-“tiæ; ergo si primo instanti punctum A solicitatum a po-“tentia AB pervenerit in b, necesse est, ut ab altera poten-“tia solicitatum perveniat eodem temporis momento in c, “ita ut Ab. Ac::AB, AC. Sed quælibet potentia effe-“ctum suum exerit, ergo movebitur punctum A ab ambabus “potentiis animatum primo temporis elemento per Ab & “per Ac. Notum autem est ex compositione motus iam “antiquissimis temporibus demonstrata, punctum ita du-“pliciter motum eodem tempusculo absolvere elementum Ad “que est diagonalis parallelogrammi Abdc; est itaque ef-“fectus potentiarum AB, AC simul agentium post primum “temporis momentum, idem ac si una sola adesset poten-“tia, quæ punctum A eodem momento per spatiolum Ad “movere valeret: Et cum potentiae sint semper ut velocita-“tes.

*tes seu ut elementa iisdem tempusculi descripta, erit potentia illa ad potentiam AB vel AC, ut Ad ad Ab vel Ac; id quod indicat potentiam quæsitam AD esse diagonalem parallelogrammi sub lateribus AB, AC, pariter ac Ad est diagonalis parallelogrammi elementaris Ab d c. Aequivalet itaque actio simplex potentiae AD aetioni compositæ potentiarum AB, AC. Hæc solita illa demonstratio est compositionis virium, quam meis verbis concepi, ne aliena verba afferendo suspicionem alicuius refutationis in me concitarem: Non impugnabo Geometræ, sed Geometriæ defectum. Cæterum confido me in allegata demonstratione nihil omississe, quod eidem aliquid ponderis superaddere potuisset.*

IV. Nihil in illa, ut falsum reiicio, sed quædam ut obscura, quædam ut non *necessario vera*. Præcipuum est, quod velocitates initiales ponantur potentis proportionales, id quod nihil aliud est, quam ponere elementa velocitatum proportionalia pressionibus seu potentis per æqualia tempuscula agentibus. Sed iam indicavi sub fine paragraphi I. potuisse eadem elementa aliæ functioni pressionum esse proportionalia: Nemo enim necessitatem huius rationis identitatis demonstravit, nec unquam, ni fallor, demonstrare poterit. Quod si autem incrementa velocitatum iisdem tempusculis generata ponantur v. gr. radicibus pressionum seu potentiarum proportionalia, alia obtinebitur virium compositio a priori longe diversa nempe talis. Sint duæ potentiae AB, AC abscindantur AN, AM radicibus AB, AC proportionales, Dein fiat parallelogrammum ANQM; producatur AQ donec AD sit quarta proportionalis ad  $AN^2$ ,  $AQ^2$  & AB, & erit AD potentia æquivalens potentius

Fig. 2.

R

AB &amp;

**AB & AC** simul agentibus. Sequitur autem hæc constructio ex ratiocinio simili illi quod *Fig. 3.* expositum est.

V. Opposui hypothesi communi, qua cæteris paribus incrementa velocitatum proportionalia accipiuntur pressionibus, aliam quæ certe attentionem præ reliquis meretur. Quid? an absurdum fuisset ante instituta experimenta spicari, naturam hanc sibi proposuisse legem, ut incrementa vis vivæ dato tempusculo genita proportionalia sint pressionibus; sed demonstrabo mox & iam a viris Cel. Hermanno atque Bülfingero demonstratum est, incrementa vis vivæ exprimenda esse, secundum Leibnitiū per  $vdu$ ; oriretur ergo ex ista hypothesi  $vdu = pdt$ , vel (posita  $p$  constanti)  $vv = 2pt$ , & denique  $dv = dt \sqrt{\frac{p}{2t}}$ , id est, positis temporibus æqualibus fierent incrementa velocitatum proportionalia radicibus pressionum: non itaque sine fundamento hæc a nobis facta fuit hypothesis. Restat ut ostendam elementa vis vivæ exprimenda esse per  $vdu$ , seu quod idem est, vim vivam corporis proportionalem esse quadratis velocitatum; mihi autem mensura virium vivarum est numerus elastrorum, quæ corpus tendere potest priusquam motum suum perdat; hac definitione posita demonstrandum erit, corpus velocitate dupla posse quatuor elastræ similia similiterque posita ad eundem gradum tendere, cum idem corpus velocitate simpla unicum tendit: Id primus Pater meus ostendit, sed per compositionem motus, qui scrupulum movere poterat; Ego vero idem demonstrabo directe, & quidem ex hoc ipso principio a temporibus Galilei ab omnium nationum Geometris recepto, sed tamen, uti credo, contingenter tantum *vero*, quo nimirum ponitur  $dv = pdt$ . En demonstrationem. Sit elastrum,

quod

quod comprimi potest versus initium fixum L. Sit curva BEF talis, ut denotante abscissa LH longitudinem elastrī compressi, indicet applicata HD potentiam requisitam ad elastrum in illo compressionis statu conservandum. Sint dein quatuor huiusmodi elastra  $o, o, o, o$ , Fig. 4. & erit applicata  $b d$  pro simili abscissa quadrupla applicatæ in altera curva. Ponatur in figura tertia elastrum compressum in longitudinem LI, idque sui iuris factum propellere globum A; inquiram ergo velocitatem globi A, cum elastrum acquisiverit statum LH. Sit  $LH = x$ ,  $HD = p$ , velocitas globi pro illo momento  $= v$ , tempus quo elastrī extremitas pervenit ex I in H  $= t$ , & erit  $dv = pdt = \frac{pdx}{v}$ , vel  $v dv = pdx$ , vel  $vv = 2spdx$ , &  $v = V 2spdx$ . Applicetur idem ratiocinium ad figuram quartam, retenitis iisdem symbolis & ponendo tantum  $\frac{4}{3}p$  loco  $p$ , atque ita obtinebitur  $v = 2\sqrt{\frac{2}{3}spdx}$ ; unde liquet velocitates in punctis homologis H & b semper esse ut 1 ad 2, ergo etiam in punto B velocitas subdupla erit velocitatis in punto b, & si motus sit reciprocus, tendet globus A elastrum usque in I & similis globus a velocitate initiali dupla quatuor elastra similiter tendet usque in i. Id itaque extra controversiam positum esse debet, posse corpus quatuor elastra similia similiter tendere cum duplice velocitate & quicunque vires vivas hoc sensu negat (neminem autem esse puto) aut geometra non est, aut definitiō nem impugnat. Sed unum hic observandum est: nimirum, summam omnium pressionum momentanearum, quas corpus sustinuit dum tenderet quatuor elastra non quadruplam sed duplam fuisse, æstimando summam omnium pressionum momentanearum non solum ex ipsis pressionibus, sed & ex temporibus quibus singulæ applicatæ fuerunt

runt, id est, ex  $\int pdt$ ; nam tantum agit libra duobus minutis, quantum duæ libræ uno minuto, seu tanta est summa omnium pressionum momentanearum in priori casu, quanta in posteriori; est vero  $pdt = du$ , ergo  $\int pdt = u$ ; unde si quis vim corpori moto insitam definiat ex summa omnium pressionum momentanearum, quas corpus directe sustinere potest, priusquam motum suum perdat, hic iure illam proportionalem faciet velocitatibus simplicibus; Notandum quoque illam pressionum summam eandem esse semper pro iisdem corporibus iisdemque velocitatibus initialibus modo pressiones sumuntur directe corporis motui oppositæ; habeat enim corpus velocitatem initialem, qua ascendere possit per altitudinem verticali DN; idem corpus eadem velocitate initiali ascendere poterit per curvam DO: dico autem in utroque ascensu corpus eandem pressionum directe oppositarum summam sustinuisse; ductis enim duabus horizontalibus infinite propinquis BM, CN, & verticali BA; erit velocitas in B eadem quæ in M: sit pressio in M =  $p$ , erit pressio in B =  $\frac{B}{BC}p$ ; sit tempus ascensus per MN =  $dt$ , erit tempus ascensus per BC =  $\frac{BC}{B}dt$ ; ergo factum ex temporis sculo in pressionem in utroque casu =  $pdt$ , & aggregatum omnium huiusmodi factorum seu summa omnium pressionum in utroque ascensu eadem est: Et hoc theorema facile mutatur in Leibnitianum, quo afferitur corpus idem eadem velocitate initiali semper eundem numerum elastrorum æqualium tendere, antequam motum suum perdat: Dici non potest, quantum principium hoc *conservationis virium vivarum utilitatis* afferat in rem physicam; Nullo enim negotio eius ope solvuntur problemata physica, alias pro valde difficilibus vel forsitan despe-

Fig. 5.

desperatis habenda. Cæterum has quoque veritates dynamicas non necessario veras esse patet ex eo , quod deducantur omnes ex principio æquationis  $dv=pdt$ .

VI. Pergo in examinandis hypothesibus demonstrationis pro compositione virium : Iam indicavi hypothesin, quæ mihi vera quidem, sed tamen talis quæ demonstrari nequeat videtur. Prouti autem ex unica propositione *contingenter vera*, non potest aliquid deduci, quod sit *necessario verum*, ita aliam similem hypothesin in demonstratione latere necesse est. Latet autem in eo quod ponatur, potentiam eundem velocitatis gradum communicare dato tempusculo, corpori moto & corpori quiescenti ; concedam potentias AB , AC seorsim agentes motus imprimere puncto A proportionales ipsis potentiis, scilicet Ab & Ac ; quid autem si id negem de potentiis simul agentibus : nonne fieri potuisset, ut potentia alium motum imprimaret corpori iam moto, quam corpori quiescenti ? Certe non satis illustratur principium hoc ex eo , quod fingi possit corpus motum in tubo, dum tubus locum suum successive mutat. Fingatur enim tubus CE motus directione Cc non perpendiculari ad tubum, sintque latera tubi perfecte polita, certum est potentiam requiri applicandam in globum a, quæ impedit ne globus locum in tubo mutet ; ergo potentia tubo applicata non potest (saltem non debet) considerari independenter a potentia globo applicata. Si hisce diutius immorari vellem, possem exemplis demonstrare, hanc hypothesin contradictiones involverei, si loco  $dv=pdt$  ponatur v. gr.  $dv=ppdt$ : Sed ad alia properans hæc relinquam ; id adhuc monebo , naturam æ-

Fig. 1.

Fig. 6.

quilibrii equidem sine errore explicari posse, per motum elementarem, id tamen obscure fieri: ubicunque enim est æquilibrium, nullus succedit motus. Sequitur iam pars altera, qua demonstrationes dabo Geometricas pro compositione & resolutione virium.

---

## Sect. II.

**D**efinitiones. Per pot.  $AB$  intelligo potentiam expressam per  $AB$ : potentias sibi æquivalere dico, quando eadem vi & per eandem directionem punctum trahunt.

Hyp. I. Potentiis quibuscumque possunt substitui earundem æquivalentes. II. Duæ potentiae conspirantes æquivalent uni potentiae simplici, quæ est æqualis summæ illarum, & duæ potentiaæ directe oppositæ æquivalent uni potentiae simplici, quæ est æqualis earundem differentiæ. Hæ duæ postremæ hypotheses nil aliud asserunt, quam totum esse æquale partibus & duas potentias æquales & oppositas esse in æquilibrio, quia nulla ratio, cur una alteri prævaleat, quod axioma metaphysicum inter necessario vera est locandum. III. Potentia simplex, quæ æquivalet duabus potentiais æqualibus, æqualiter versus utramque inclinat, id est, ipsius directio fecat bifarium angulum comprehensum inter directiones duarum potentiarum, id quod ex eodem axiome metaphysico sequitur.

*Propositio 1. Lemma.* Si tres potentiae  $DA$ , Fig. 7.  $DB$  &  $DC$  positæ sint in æquilibrio, erunt quoque earum duplæ vel quævis multiplæ,  $Dm$ ,  $Dn$  &  $Dp$  in æquilibrio.

De-

*Demonstratio.* Si enim substituamus loco potentiarum  $Dm$ ,  $Dn$ ,  $Dp$  has alias  $DA+DA$ ,  $DB+DB$ ,  $DC+DC$ , in quibus manifestum est æquilibrium, illico patet propositionis veritas, atque non solum de potentias duplis, sed & triplis, quadruplicis &c. imo quamcunque rationem habentibus cum assumtis  $DA, DB, DC$ . Q.E.D.

*Prop. 2.* Problema Quæritur pot.  $DB$  æquivalens duabus potentias  $DA, DC$  æqualibus sibique ad perpendiculum insistentibus. Fig. 8.

*Solutio.* Cum potentiae  $DA, DC$  sint æquales, nullum est dubium circa directionem tertiaræ potentiae; secabit utique bifariam angulum  $ADC$ ; quæritur ergo tantum magnitudo potentiae  $DB$ ; vocetur itaque pot.  $DB, x$ , nominata pot.  $DA$  seu  $DC, a$ , atque fiat  $DE =$  tertiaræ continue proportionali ad  $DB$ , &  $DA$  sumanturque  $DG$  &  $DH$  æquales ipsi lineæ  $DE$ . Ergo (*per Prop. 1.*) pot.  $DA$  æquivalet duabus potentias  $DE, DH$ , atque  $DC$  duabus aliis  $DG, DH$ . Substituendo itaque loco potentiarum  $DA, DC$ , has alias  $DE, DH, DG, DH$ , oportet ut hæ quatuor potentiae simul agentes æquivaleant potentiae  $DB$ ; sed potentiae  $DE, DG$  se destruunt, restant adeoque pot.  $DH, DH$  seu simplex pot.  $2 DH = DB$ ; seu  $\frac{aa}{x} = x = a\sqrt{2}$ .

*Coroll.* Ergo pot.  $DB$  exprimitur per diagonalem quadrati, cuius latera repræsentant potentias  $DA, DC$ .

*Prop. 3.* Probl. Quæritur potentia  $DB$  æquivalens duabus potentias  $DA, DC$  ad se invicem perpendicularibus sed quomodocunque inæqualibus. Fig. 9.

*Solutio.* Sit  $DA = a$ ,  $DC = b$ ;  $DB = x$ ; ducatur per punctum  $D$  recta  $EG$  perpendicularis ad  $DB$ ; sumatur  $DR = \frac{aa}{x}$  id est, = tertiaræ continue proportionali

ad

ad DB & DA ; & DE fiat  $= \frac{ab}{x} =$  quartæ proportionæ  
li ad DB , DC & DA . His ita positis patet potentiam  
DA æquivalere potentiis DR , DE ; quia DR , DA , DE  
per constructionem proportionales sunt ipsis DA , DB ,  
DC ; sunt præterea similiter positæ tres priores cum tri-  
bus posterioribus ob ang. EDA = ang. CDB . Substitui  
ergo potentiae DA possunt duæ æquivalentes DE , DR :  
Idem etiam fiat ab altera parte substituendo potentiae DC  
duas alias æquivalentes DN , DG tales , ut DC , DB , DA  
sint proportionales ipsis DN , DC , DG ; & sic qua-  
tuor potentiae DE , DR , DN , DG æquivalebunt poten-  
tiae DB ; est autem  $DN = \frac{bb}{x}$  , &  $DG = \frac{ab}{x}$  ; ergo pot.  
DG & DE se destruentibus restant potentiae DR , DN  
æquandæ cum potentia DB ; unde  $\frac{aa}{x} + \frac{bb}{x} = x = \sqrt{aa+bb}$ ,

*Coroll.* 1. Est ergo potentia DB æqualis illi , quæ  
repræsentaretur per diagonalem rectanguli , cuius latera  
exprimunt potentias propositas.

*Coroll.* 2. Constat adeoque de valore seu quantita-  
te potentiae DB , verum nihil adhucdum constat de ip-  
sius directione ; quod si vero demonstrari insuper posset ,  
non posse potentiam DB æquivalere potentiarum lateralibus  
seu illas agendo in oppositam partem in æquilibrio con-  
tinere , nisi agat secundum diagonalem rectanguli modo  
definiti , facillimum demonstratu esset , potentias quas-

Fig. 10. cunque DA , DC quomodo cunque ad se inclinatas  
esse æquipollentes cum potentia simplici DS , quæ est  
diagonalis parallelogrammi DASC . Si enim substituas  
potentiae DA duas DP , DF ad se invicem perpendiculari-  
ares , habebis loco potentiarum DA , DC tres alias  
DP , DF , DC seu (facta SL perpendiculari ad DC pro-  
ductam)

ductam) duas potentias DP , DL æquivalentes potentiae DS; est autem DS etiam diagonalis in parallelogrammo obliquangulo DASC ; ergo potentia æquivalens potentias DA , DC repræsentatur per diagonalem DS.

*Propositio 4.* Probl. Posito potentias BA , BC inter se æquales æquivalere potentiae BE angulum Fig. 11. ABC secanti bifariam ; invenire duas alias potentias inter se æquales BD , BF eidem potentiae BE æquivalentes , & quarum directiones angulos ABE , CBE bisecent.

*Sol.* Sit pot. BA seu  $BC = a$ , pot.  $BE = b$ , pot.  $BD$  vel  $BF = x$ ; fiat, ut  $BE (b)$ .  $BD$  vel  $BF (x)$  ::  $BD$  vel  $BF (x)$ .  $BQ$  vel  $BR = \frac{xx}{b}$ . sumatur  $BS = BQ$ : Erunt potentiae  $BD$  &  $BF$  æquivalentes cum potentias  $BQ$ ,  $BS$  &  $BR$ ,  $BS$ , seu potentias  $BQ$ ,  $BR$ , &  $2BS$ . Præterea, si faciamus  $BT$  talem, ut sit = quartæ proportionali ad  $BA$ ,  $BE$ , &  $BQ$ , erunt potentiae  $BQ$ ,  $BR$  æquipollentes potentiae  $BT = \frac{xx}{a}$ . Ergo posita pro potentias  $BQ$ ,  $BR$  alia  $BT$ , habebitur tandem  $BT + 2BS = BE$  seu  $\frac{xx}{a} + \frac{2xx}{b} = b$  &  $x = b\sqrt{\left(\frac{a}{2a+b}\right)}$

Q. E. I.

*Prop. 5. Theorema.* Si in triangulo ABC rectangulo atque isosceli ducatur BR perpendicularis ad AC, posteaque anguli ABR , CBR bisecentur lineis BD , BF ut & anguli DBR , FBR lineis Bd , Bf & sic in infinitum bisecando semper angulos circa diagonalem. Dico, duas potentias simul agentes BD, BF, vel Bd , Bf &c. æqualiter ad BR inclinatas semper æquivalere potentiae simplici 2BR.

Demonstratio; Potentiae BA , BC æquipollent potentiae 2BR (per Coroll. prop. 2); quærendo nunc per præcedentem propositionem potentias BD , BF eidem

potentiae  $\sqrt{2}BR$  æquipollentes, reperietur (nominando  $BA, a)$   $BD$  seu  $BF = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$ ; si autem geometricè quæratur valor ipsius  $BD$ , invenitur  $BD = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$ ; unde sequitur, lineas  $BD$  &  $BF$  repræsentare potentias æquipollentes potentiae  $\sqrt{2}BR$ . Faciendo nunc  $BD = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = b$  iterumque inquirendo in potentias  $Bd$ ,  $Bf$  æquivalentes potentiae  $\sqrt{2}BR = a\sqrt{2}$ , invenitur  $Bd$  seu  $Bf$  (prop. 4.)  $= \frac{a\sqrt{2}b}{\sqrt{2b} + a\sqrt{2}}$ , quæ quantitas si ponatur  $= c$  invenitur ulterius progrediendo pot.  $B\delta = E\Phi = \frac{a\sqrt{2}c}{\sqrt{2c} + a\sqrt{2}}$ , & sic deinceps; sed si  $Bd$ ,  $B\delta$  &c. seu  $Bf$ ,  $B\Phi$  &c. geometricè quærantur, non aliter illæ exprimentur, quod probat, singula paria potentiarum  $BD$ ,  $BF$ , seu  $Bd$ ,  $Bf$  seu  $B\delta$ ,  $B\Phi$  &c. æquipollentia pot.  $\sqrt{2}BR$  repræsentari per ipsas lineas  $BD$ ,  $Bd$ ,  $B\delta$  &c. &  $BF$ ,  $Bf$ ,  $B\Phi$  &c. terminatas nimirum a linea recta  $AC$ . Q. E. D.

*Aliter.* Quicunque fuerit angulus  $ABR$  sive  $CBR$ , si potentiae  $BA$ ,  $BC$  æquivaleant potentiae  $\sqrt{2}BR$ , fluit ex præcedenti propositione, potentias alias applicatas ad angulos diuidios prioribusque æquipollentes repræsentari per lineas  $BD$ ,  $BF$ . Considerando itaque rursus loco anguli  $ABR$  seu  $CBR$  angulum  $DBR$  seu  $FBR$  iterum manifestum fit, potentias  $Bd$ ,  $Bf$  æquivale-re prioribus  $BD$ ,  $BF$ , & sic de reliquis; ergo cum potentiae  $BA$ ,  $BC$  æquivaleant pot.  $\sqrt{2}BR$ , si sint ad se in vicem perpendiculares (per prop. 2.), eidem quoque æquivalebunt omnes reliquæ  $BD$ ,  $BF$ , &  $Bd$ ,  $Bf$ , &  $B\delta$   $B\Phi$  &c. Q. E. D.

*Coroll.* Demonstrata ergo fuit compositio virium in

in omnibus casibus , ubi potentiae repræsentantur per latera rhombi , cuius angulus æqualis uni ex hac serie geometrica  $\frac{1}{4}R$ ,  $\frac{1}{2}R$ ,  $\frac{1}{4}R$ ,  $\frac{1}{8}R$ , &c. per R intelligo angulum rectum.

*Prop. 6. Theorema;* si duæ potentiae æquales BA, Fig. 13. BC æquipolleant potentiae BF , quam pono bisecari in puncto L a linea AC ; sique per punctum B ducatur perpendicularis DE , cui quoque perpendiculariter insistunt AD,CE , dico potentiam BA æquivale potentiis BL, BD , atque pot. BC potentiis BL, BE.

*Demonstratio.* Si neges potentiam BA æquivale re potentiis BL, BD ; fac illam æquivale duabus aliis, veluti Bl, Bd ; ergo pari ratione pot. BC æquivale ret potentiis Bl, Be—Bd; ergo potentiae Bd, Bl, Be, Bl. æquivalerent pot. BF, seu pot.  $2BL$ . quod est absurdum. Ergo alterutra potentiarum , in quas resolvi debet potentia BA, necessario exprimi debet per BL, quo demonstrato , immediate fluit ex prop. 3. alteram potentiam sumendam esse æqualem potentiae BD , quia nimirum BA  $=\sqrt{(BL^2+BD^2)}$  : eodem modo fit demonstratio ab altera parte. Q. E. D.

*Corol.* Notæ nunc quoque sunt directiones potentiarum compositarum in infinitis rectangulis , nimirum in omnibus illis, quæ sunt circumscripta lineis BA, BD &c. & quorum alterum latus est BR. Fig. 12.

*Prop. 7. Probl.* Si BA , BE atque BC, BD sint latera qualiumcunque rhomborum supra definitorum, invenire potentiam in diagonali , quæ æquivaleat potentiis BF , BG ; ponendo lineas BF , BG bisecare angulos ABC, EBD.

*Solutio.* Producantur lineæ BC , BD donec fiant

æquales ipsis BA, BE; iunctisque punctis M & N, producatur BL in S. Ergo potentias BM, BN æquipollent potentia 2BS (per prop. 1.) & si quatuor potentias BA, BE, BM, BN, simul agere concipientur, omnes simul æquipollere manifestum est potentias 2BL, 2BS. Nunc videamus, quid singulatim valeant potentias BA, BM inquirendo nimirum potentiam BU illis æquivalentem; quia vero BA=BM bisecabit BU angulum ABM, adeo ut BU congruat cum BF: Resolvatur potentia BA in potentias BP & BL (per coroll. prop. 6) atque potentia BM in potentias BO, BS & sic habebimus quatuor potentias BP, BO, BL, BS, ergo (per prop. 3.) BU=

$$\sqrt{(BP+BO)^2+(BL+BS)^2}; \text{ eodem modo reperitur ab}$$

altera parte BW=\sqrt{(BR+BQ)^2+(BL+BS)^2} Cum vero potentias BU, BW æquipolleant potentias BA, BM & BE, BN seu potentias 2BL+2BS, manifestum est, nihil superesse pro plenaria problematis solutione, nisi ut fiat sequens analogia: ut BU seu BW ad 2BL+2BS ita BF seu BG ad potentiam quæsitam in diagonali æquivalentem potentias BF, BC. Hæc nunc, ut effectui demus, sit BA=BE=a; BC=BD=b; AC=ED=c;

$$\begin{aligned} \text{erit } CL=DL=\frac{aa-bb-cc}{2c}; \quad MS=BO=\frac{a^3-abb-acc}{2bc}, \quad BP \\ =AL=\frac{aa-bb+cc}{2c}; \quad BL=\frac{\sqrt{2bbcc+2aabb+2aacc}-a^4-b^4-c^4}{2c} \\ BS=\frac{a\sqrt{2bbcc+2aabb+2aacc}-a^4-b^4-c^4}{2bc}; \text{ ergo } BU=BW= \end{aligned}$$

$$\sqrt{(BP+BO)^2+(BL+S)^2}=\text{radici sequentis quantitatis}$$

tis  $\frac{aa + 2ab + bb}{4bbcc} \times (2bbcc + 2aabb + 2aacc - a^4 - b^4 - c^4)$   
 $+ (\frac{aab - b^3 + bcc + a^3}{2bc})^2$ ; est autem radix totius  
huius quantitatis  $\sqrt{(a^3b + ab^3 + 2aabb - abcc)}$ . Inventa BU  
exprimenda restat ipsa BF, ut quarta proportionalis ad  
EU, 2BL + 2BS & BF haberi possit. Illa vero com-  
mode obtinetur faciendo angulum BFZ = ang. BAF; ita  
enim fit triangulum BAF simile triangulo BFZ, nec  
nec non triang. BFC simile triang. FZC, ex quo-  
rum triangulorum similitudinibus statim provenit  $BF =$   
 $\frac{\sqrt{a^3b + ab^3 + 2aabb - abcc}}{a+b}$ . Est itaque quarta propor-  
tionalis ad BU, 2BL + 2BS & BF, hæc quantitas  
 $\sqrt{2bbcc + 2aabb + 2aacc - a^4 - b^4 - c^4} = 2 BL$ . Q.E.I.

*Coroll* Quia potentiae BF, BG æquivalent potentiae  
 $2BL$ , patet illas æquivalentes esse cum potentiis latera-  
libus BA, BE vel BC, BD.

Fig. 15.

*Propositio 8.* Theorema. Si duæ vires sint æquales,  
veluti BA, BC erit illarum actio semper æqualis poten-  
tiae expressæ per diagonalem rhombi sive potentiae  $2BR$ .

*Demonst.* Si BD, BE sint latera quadrati, erunt poten-  
tiae BD, BE æquipollentes potentiae  $2BR$  (per prop. 2.) & si  
B $\delta$ , B $\Gamma$  biscent angulos DBR, EBR, pariter potentiae BS,  
BT æquivalebunt pot.  $2BR$  (per prop. 4.) & bisectis  
rursus singulis angulis, erunt iterum potentiae expressæ  
per novas lineas secantes terminatas a linea DE, sumtæ  
binæ æquipollentes potentiae  $2BR$  (per coroll. prop. 7.)  
Ergo cum detur progressio in infinitum liquet, non posse  
duas potentias exhiberi æquales intra terminos BD,  
BE concurrentes in B atque terminatas a linea DE, quæ

non æquivaleant potentiae  $\omega$ BR. Duplicatis vero angulis inter BR & quacumque BS seu BT, propositio quoque manifesta fit de illis potentias, quæ transgrediuntur terminos BD, BE. Sicque tota demonstratio absoluta est.

*Schol.* Demonstrata compositione virium pro omnibus rhombis, valebit eadem pro omnibus rectangulis (per prop. 6.) atque pro omnibus parallelogrammis, per coroll. 2. prop. 3.

Geminus Modus directus  
**DIVIDENDI SEMICIRCULVM**  
 in data ratione :

Quibus Keplerianum Problema  
**DE INVENIENDIS PLANETARVM LOCIS**  
 ad datum quodvis tempus,

*Solutum exhibetur.*

*Auctore*

Iac. Hermanno.

25. Febr.

1726.



Obannes Keplerus primus quod sciam docuit planetarum semitam ellipticam esse, & hos planetas ipsos in sua quemque orbita ita circumferri, ut areas verrant temporis motionis proportionales. Pulchra hæc reperta ex Tychonicis observationibus eruta calcu-

lo

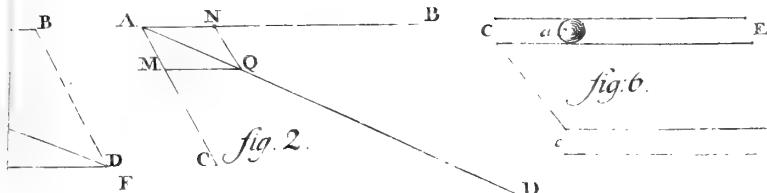


fig. 2.

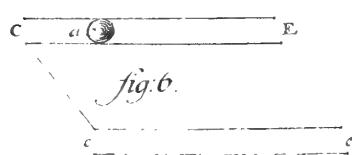
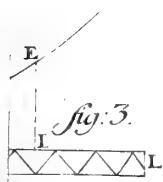


fig. 6.



J

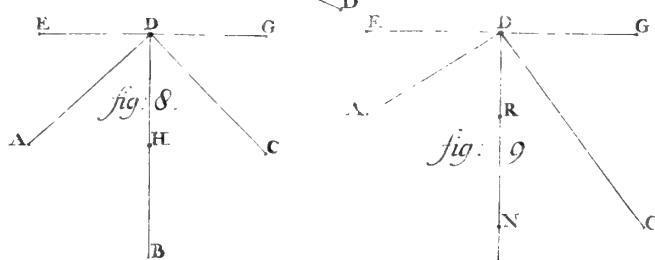


fig. 8.

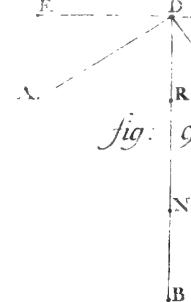


fig. 9.

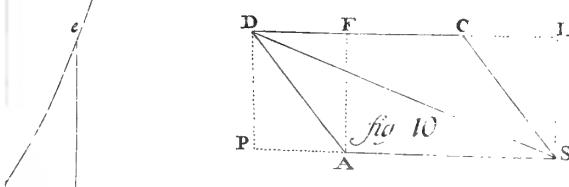


fig. 10.

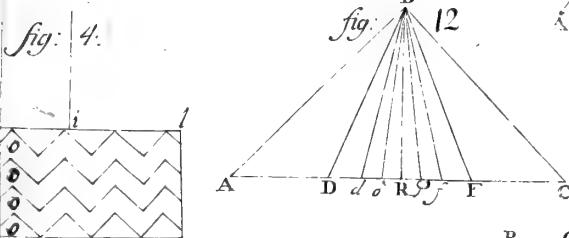


fig. 11.

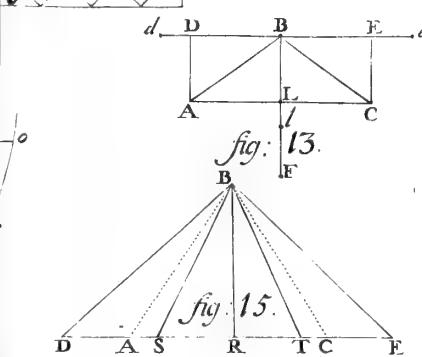


fig. 13.

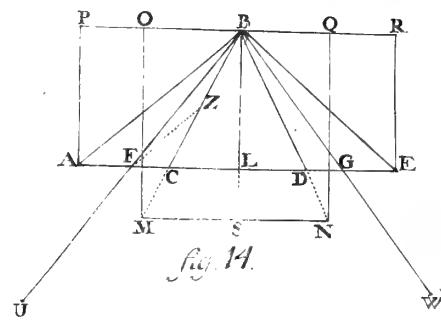


fig. 14.

fig. 15.



lo sagaci industria posito & subducto , recentioribusque observationibus apprime consentanea, Astronomiae plane novam induxerunt faciem. In hac vero difficile sese offerebat problema solvendum, ad cuius solutionem nulla via Keplero patebat directa , quamque proinde per regulam quam vocant *falsi* tentare coactus erat. Keplerus ad finem Partis IV. Commentarii in Stellam Martis fol. 300, problema his verbis enuntiat. *Data area partis Semicirculi, datoque puncto diametri invenire arcum, & angulum ad illud punctum: cuius anguli cruribus, & quo arcu, data area comprehenditur.* Vel, *Aream semicirculi ex quocunque puncto diametri in data ratione secare:* Subiungens: mihi sufficit credere; solvi a priori non posse propter arcus & sinus *ετεγογενειας*. Erranti mihi , quicunque viam monstraverit, is erit mihi magnus Apollonius.

2. Primus, quantum milii constat, qui magni Apollonii laudem mereri conatus est, fuit *Christophorus Wrennus*, qui reapse viam directam inivit & problema ope Cycloidis protractæ construxit ; *Wallisius* enim constructionem eius ad calcem tractatus de Cycloide prodidit, an vero eam potissimum viam, qualem *Keplerus* sibi monstrari optavit, presserit, de eo valde dubito. Ipse enim Cel. *Newtonus* qui eandem fere constructionem Prob. 31. Lib. 1. *Princip. Ph. Nat.* repetiit , fassus est, propter difficultem curvæ huius descriptionem , præstare solutionem adhibere vero proximam , qualem per seriem quandam angularium convergentem exhibuit, nescio tamen, an satis expeditam. Illustrem Geometram, ut in aliis, ita & hic imitati sunt *David Gregorius* & *Job Keill* uterque enim problema Keplerianum per seriem infinitam solutum dedit, hic in Lectionibus Astronomicis , ille

vero

vero in Elementis Astronomiæ Geometricis. Citra scierum usum vero eidem problemati solvendo incubuerunt Duumviri de Astronomia præclare meriti *Phil. de la Hire*, atque *Jacobus Cassinus*, & solutiones suas in Commentariis Academiæ Reg. 1710 & 1719 ediderunt. Alia comparuit in Tomo VI. Supplementorum ad acta Eruditorum Lipsiensia; Autore *Petro Horrebow*.

3. Supervacaneum forte videbitur, quod posteaquam hoc problema tot insignibus autoribus solutum est, id denuo in scenam producere audeam. Audebo tamen, nec hoc faciens actum agere existimò, cum diversi unum idemq; problema solvendi modi utilitate sua non destituantur. Geminum habeo, alterum mere geometricum, alterum vero arithmeticum calculoque astronomico magis accommodum. Problema quod præ manibus habemus est eiusmodi.

*Dividere Semicirculum Aqd per lineam BE ita, ut trilineum ABE sit ad semicirculum Aqd, in data ratione DN ad DH=AD.*

*Construcción.* Semicirculo DGH alteri AQD æquali inscribatur quadratrix DLGH talis indolis, ut ex quolibet eius puncto L ductis LK parallela diametro DH, & LM eidem perpendiculari, sit ubique arcus respondens huius divisionis, nempe DK, ad abscissam DM, ut DKG ad radium DI. Sumatur dein in radio CQ sursum productio & diametro perpendiculari, CP=quadranti AQ, & iungatur PE, ex punto vero N agatur NL alteri EP parallela, quadratrici alicubi occurrens in L, ex quo punto deinceps ducta LB diametro AD parallela, occurret semicirculo AQD in optato punto B, iungendo enim BE, triangulum ABE erit ad semicirculum AQD in data ratione DN ad DH.

De-

*Demonstratio.* Nam ex natura lineæ DLG fit AB (DK) : AQ (DG) :: DM : AC (DI), adeoque  $AQ \times DM = AB \times AC = 2 \text{ Sect. } ABC$ . Propter parallelas PE & LN, triangula PCE & LMN similia sunt, & præbent CP (constr. AQ) : CE :: LM (BF) : MN, quare  $AQ \times MN = CE \times BF = 2\Delta CEB$ , & addendo  $AQ \times DM + AQ \times MN = 2 \text{ Sect. } ABC + 2\Delta CBE = 2 \text{ trilin. } ABE$ , quare  $AQ \times DN = 2 \text{ trilin. } ABE$ ; & 2 Semic. AQDA = AQ  $\times$  AD vel =  $AQ \times DH$ ; quare Trilineum ABE : Semi-circ. AQDA ( $::AQ \times DN : AQ \times DH$ ) :: DN : DH. Quod erat &c.

Curva DLG est quidem transcendens, cum sit species lineæ *Sinuum*, eo tamen rectius ad constructionem adhibetur, quanto facilius Cycloide protracta per puncta describi potest. Per continuam enim bisectionem quadrantis DKG eiusque partium, tot curvæ puncta & tanta propinqua inveniri possunt, quot quis voluerit, ducendo tantum per singulas divisiones quadrantis lineas diametro parallelas & per similes divisiones radii DI lineas eidem diametro perpendicularares, occursum harum perpendicularium diametro, & illarum parallelarum, suppeditant totidem curvæ puncta.

Dixi curvam DLG speciem esse lineæ *Sinuum*: nam LM est sinus arcus DK & DM huic arcui proportionalis, quare abscissæ DM arcus, & ordinatæ LM sinus eorum representant, & hanc ob rationem curva DLG est *linea sinuum*.

Hæc curva, quæ aliis Quadratrix Tschirnhausiana vocatur, quod mentio eius occurrat in *Tschirnhausii Medicina Mentis*, ubi aliquot eiusdem proprietates recensentur; hæc linea, inquam, egregium usum habet in con-

structionibus illorum problematum, quæ ab arcibus circularibus pendent, quod hæc ipsa constructio problematis Kepleriani probat.

Data constructio quoque arithmeticam problematis solutionem subministrat. Nam vocando arcum  $AB=a$ , radius  $AC=r$ , sinum arcus  $BF=s$ , quadrantem  $ABQ=q$ , & tandem  $DN=b$ , ac  $CE=e$ , propter curvam  $DLG$  fiet  $DM = \frac{ar}{q}$ , triangula vero similia  $CPE$ , &  $MLN$ , præbent  $MN = \frac{es}{q}$ ; quare cum sit  $DM+MN=b$ , fiet  $\frac{ar+es}{q}=b$ ; vel  $ar+es=bq$ .

Iam vero per ea, quæ *Ill. Leibnitius* in Actis Erudit. 1693 pag. 179 ex calculo differentiali, & ego occasione problematis angularis per communem geometriam, in Actis 1703 pag. 351 elicuimus, est  $s=a - \frac{a^3}{6rr} + \frac{a^5}{120r^4} - \frac{a^7}{5040r^6} + \text{&c.}$  quare surrogando hanc sinus æstimationem in supra inventa æquatione  $ar+es=bq$ , habebimus  $(r+e)a - \frac{a^3 e}{6rr} + \frac{a^5 e}{120r^4} - \frac{a^7 e}{5040r^6} + \text{&c.} = bq$ .

Si iam in hac serie omnes termini, excepto primo, evanescere intelligantur, resultabit  $(e+r)a=bq$ , hoc est analogia  $AE:DN :: AQ:AB$ , quæ analogia iam commodam præbet approximationem arcus  $AB$ .

Sin vero duo, tres, vel plures ex primis seriei terminis assumantur, orientur æquationes trium, quinque, septem, &c. dimensionum, quæ quidem usui Astronomico non videntur idoneæ. Quare progredior ad modum arithmeticum solvendi hoc idem problema.

5. In secunda figura, exprimat arcus  $AM$  anomaliam

Iam medianam , sitque CE eccentricitas , & iungatur ME ductaque ex centro C semicirculi linea CN parallela ipsi EM , ducatur EN : dico angulum AEN esse anomaliam coæquatam quam proxime : accuratius vero invenietur hæc anomalia ; si iam arcus NM vo-  
 tur  $a$  & radius AC =  $r$ , fiatque  $x = \frac{aa}{6rr} - \frac{a^4}{120r^4} + \frac{a^6}{5040r^6}$   
 — &c. & angulus NEB =  $NC^2 \times ax : BE^2$ ; Angulus AEB erit anomalia coæquata

Nam trilineum NEB fiet = segmento circuli inter arcum NM & eius subtensam contento , quare cum triangula NEC & NMC super eadem basi NC & inter easdem parallelas NC , ME constituta æqualia sint , erit Sector AMC = trilineo ABE ; atqui Sector AMC: Semicirc. AMDA :: AM : AMD ; ergo etiam ANBE: Semic. AMDA :: AM:AMD. Hoc est in data ratione. Quod erat &c.

Quod ad angulum BEN attinet , invenietur is ex eo , quod segmentum circuli inter arcum MN eiusque chordam MN æquari debeat sectori BEN. Iam segmentum illud æquat semissem facti ex differentia arcus MN eiusque sinus in radium CN. Verum cum arcus MN (*hyp*)

$$\text{sit } a, \text{ eiusque sinus } = a - \frac{a^3}{6rr} + \frac{a^5}{120r^4} - \frac{a^7}{5040r^6} + \text{ &c.}$$

$$\text{erit arcus MN — sinus eius } = \frac{a^3}{6rr} - \frac{a^5}{120r^4} + \frac{a^7}{5040r^6}$$

$$\text{ &c. (hoc est propter } x = \frac{aa}{6rr} - \frac{a^4}{120r^4} + \frac{a^6}{5040r^6} \text{ &c.)}$$

=  $ax$ . Sector vero BEN æquat semissem rectanguli ex NE in Bb , demissa ex B in EN perpendiculari ; Sector

enim ob parvitatem anguli BEN instar trianguli rectilinei spectari potest, & perpendiculum Bb instar arculi centro E radio EB descripti. Quum autem segmentum NM æquare debeat factorem BEN, erit  $EN \times Bb = ax$  in CN; adeoque arculus  $Bb = CN \times ax : EN$ . Est vero ut EB ad arculum Bb, ita radius CN ad angulum BEN  $= CN^2 \times ax : EB \times EN$ , vel quia EN & EB iam instar æqualium tractari possunt, erit ideo angulus BEN  $= CN^2 \times ax : EB^2$ ; ut ponebatur.

*Exempl.* Sit cum Keillio CE  $= 0.01691$ , existente AC  $= 1$ , quæritur anomalia coæquata AEB, si anomalia media AM  $= 30^\circ$ . Quare angulus ACM  $= 30^\circ$ , & in  $\Delta^{lo} MCE$  invenietur angulus MEA  $= NCA = 29^\circ 31' 38''$  = arcui AN; quare NM  $= 28'.22''$ . In triangulo vero NCE, invenitur angulus NEA  $= 29^\circ 3'.7''$ , & hæc est anomalia coæquata; nam angulus NEB non æquabit 4 minuta quinta, adeoque attendi non meretur.

Tandem dicatur, ut sinus totus ad sinum anguli PCE (erecta nempe in E normali ad AD) ita tangens anguli inventi AEN vel AEB ad anomaliam coæquatam in Ellipsi. Cl. Keil per suam seriem invenit angulum AEN, qualem hoc loco absque ullo usu seriei per solam resolutionem binorum triangulorum MCE & NCE, asecuti sumus, usus enim præcedentis seriei mihi tantum monstravit, quantus debeat esse angulus NEB addendus iam invento NEA? cum vero is subducto calculo ne quidem ad 4 minuta quinta accedere inveniatur, merito contemnitur.

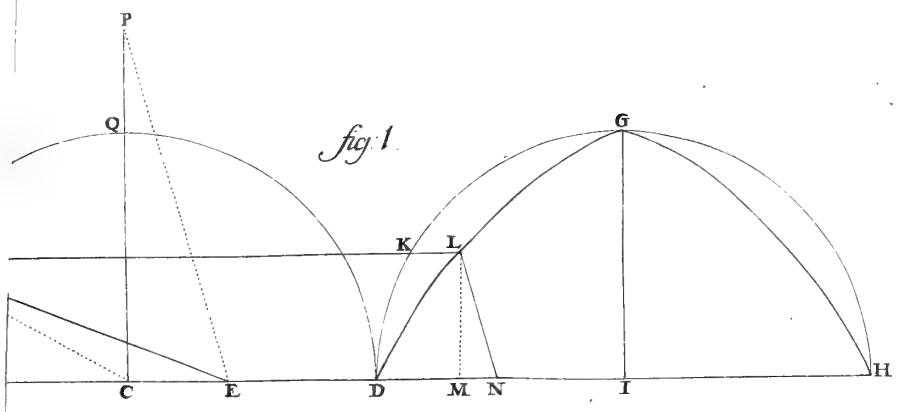


fig. 1.

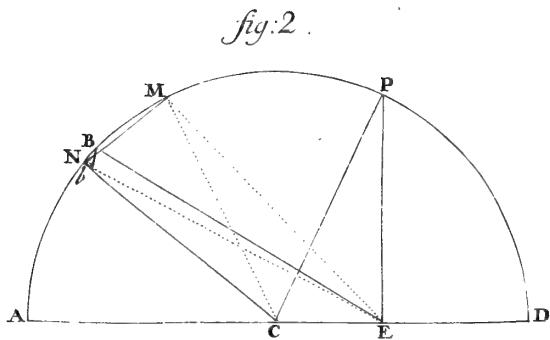
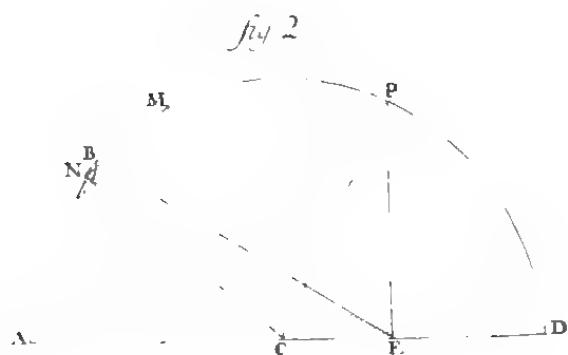
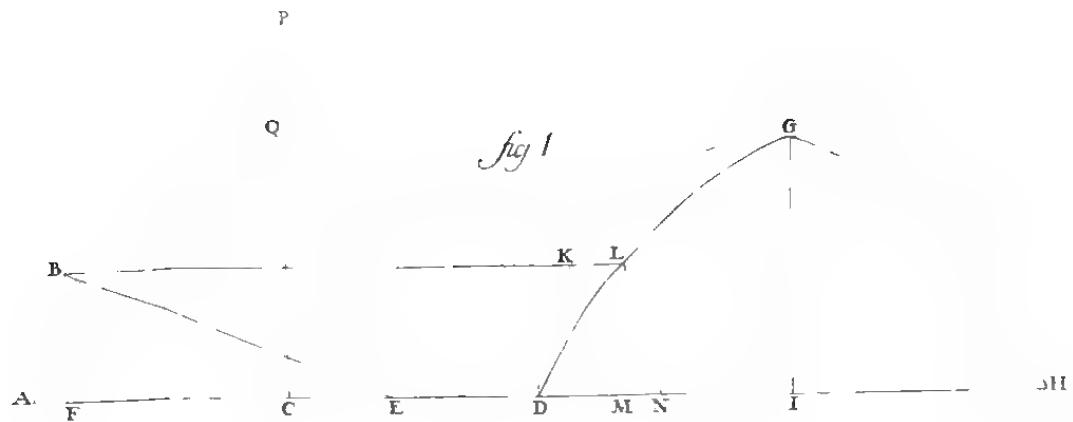


fig. 2.



DE  
CALCULO INTEGRALI.

*Auctore*  
**Iacobo Hermanno.**

**C**Alculus Integralis inversus est Differentialis : **M. Mai.**  
nam modum docet, quo ex proposita quantitate infinitesimali, altera quantitas finita, cuius differentiatione orta est illa, elici debet, **1726.**  
quoties hoc fieri potest. Nam non omnis quantitas differentialis integralem algebraicam habet, sed s̄epissime transcendentem, quæ per quadraturas tantum curvarum exhiberi potest, per artifia hactenus cognita. Itaque genuina methodus calculi integralis media suppeditare debet, quibus certo cognosci possit: an differentialis aliqua proposita integrabilis sit, an vero secus; &, si primum obtinet, quænam sit eius summa algebraica; sin vero talem non habeat, qualis sit figura simplicissima earum, quarum areae exhibent integralem quæsitam, idque non solum tum, cum data quantitas differentialis unicam indeterminatam cum constantibus involvit, sed tunc quoque, cum duas aut plures indeterminatas cum suis differentialibus complectitur. An vero methodus, quam hoc loco communicabo, ea, quæ requiri dixi, præstet, atque hanc ob causam generalis vocari mereatur, intelligentium iudicio & æquitati id omne dijudicandum relinquo.

PRÆNOTANDA.

1. Æquationes integrandas sic generaliter deinceps

T 3

ex-

exprimam. 1°. per  $du=R^\lambda dK$ , 2°.  $du=R^\lambda S^\mu dK$ . 3°  $du=R^\lambda S^\mu T^\nu dK$ , &c. & sic infinitum. In quibus R, S, T, &c. denotant quantitates una, duabus, aut pluribus indeterminatis ut libet compositas; elementum vero  $dK$  non modo easdem indeterminatas, quas quantitates R, S, T, &c. continent, involvere potest, sed etiam plures, aut subinde etiam secunda differentialia. Litteræ græcæ  $\lambda, \mu, \nu$  exponentes indefinitas quantitatum R, S, T, designant, casibus particularibus deinceps definiendas.

2. Logarithmos quantitatum quarumlibet per litteram  $l$  quantitatibus illis præfixam, usitato more, posthac significabo, nisi aliquando expresse monendum sit alio sensu hanc litteram  $l$  adhiberi. Itaque  $lx, ly, lx^m$  significant logarithmos quantitatum  $x, y, & x^m$ . &c.

3. Per litteram vero  $\int$  quantitatibus differentialibus præpositam intelligi volo summam seu integrale quantitatis, cui eadem littera est præfixa. Adeoque  $\int R^\lambda dK$  denotat integralem vel summam elementi  $R^\lambda dK$ .

### Lemma 1.

*Integrale fractionis cuiusque  $\frac{adx}{x}$ , cuius numerator est multiplum a elementi denominatoris, est logarithmus denominatoris x ad potestatem a evecti. Hoc est  $\int \frac{adx}{x} = lx^a$ .*

### Lemma 2.

*Quantitas absoluta, quæ competit seriei cuilibet logarithmorum signis + vel - quomodo cunque connexorum, est factum singularum quantitatum singulis logarithmis respondentium exponente affirmativa vel negativa affectarum, productum logarithmi earum signo affirmativo vel negativo prædicti fuerint.*

Quan-

Quantitas absoluta seriei  $lx + ly - lz$  est  $x^t y^t z^{-t}$ ,  
hoc est  $\frac{xy}{z}$ . Et quantitas absoluta huius  $aR + lM$  est  
 $R^a M$ .

Ambo hæc lemmata notiora sunt, quam ut demonstratione, cuilibet in hisce vel leviter tantum versato facilime invenienda, egeant, sed tanquam fundamenta sequentibus erant præmittenda.

### Theorema 1.

*Integralis æquationis*  $du = R^\lambda dK$ , est  $u = MR^{\lambda+1}$ ,  
in qua  $M$  datur per æquationem bare  $dK = (\lambda+1) M dR + RdM$ .

Hanc æquationem differentialem in sequentibus *Canoniam* vocabo, quia revera regulam suppeditat secundum quam æstimatio litteræ  $M$  tuto inveniri potest.

*Dem.* Differentiando æquationem  $u = MR^{\lambda+1}$ , fit  $du = (\lambda+1)MR^\lambda dR + R^{\lambda+1}dM = [(\lambda+1)MdR + RdM]R^\lambda$  vel propter (*hyp*)  $dK = (\lambda+1)MdR + RdM$ , habetur  $du = R^\lambda dK$ . Q. E. D.

### Theorema 2.

*Integralis æquationis*  $du = R^\lambda S^\mu dK$ , est  $u = MR^{\lambda+1} S^{\mu+1}$ , & æquatio Canonica  $dK = (\lambda+1) MSdR + (\mu+1) MRdS + RSdM$ .

*Dem* Aequatio  $u = MR^{\lambda+1} S^{\mu+1}$  differentiata præbet  $du = [(\lambda+1)MSdR + (\mu+1)MRdS + RSdM] R^\lambda S^\mu$ , hoc est propter  $dK = (\lambda+1)MSdR + (\mu+1)MRdS + RSdM$ , fit  $du = R^\lambda S^\mu dK$ . Q. E. D.

### Theorema 3.

Aequatio  $du = R^\lambda S^\mu T^\nu dK$ , integralem habet  $u = R^{\lambda+1} S^{\mu+1} T^{\nu+1} M$ , cuius æquatio Canonica est  $dK = (\lambda+1) MSTdR + (\mu+1)MRTdS + (\nu+1)MRSdT + RSTdM$ .

De-

Demonstratio huius eadem est ac præcedentium: & similis est processus in infinitum.

*Scholium generale.*

In applicatione horum theorematum ad exempla particularia tota difficultas in eo sita est , ut ex æquatione Canonica eliciatur æstimatio indeterminatæ M. Id autem hoc modo fit : Seligo in elemento  $dR$  aliquod membrum, in quo plures dimensiones respectu indeterminatarum insunt , quam in reliquis membris,& cum hoc membro omnia membra elementi  $dK$  divido , cum quibus hæc divisio succedit , nullaque habita ratione coefficientium & signorum,quantitatibus per divisionem ortis præpono coefficientes indefinitas A, B, C, D, &c. & resultabit inde per additionem omnium,quantitas aliqua, quam voco Z, ponique postea debet  $M = Z + N$ , surrogando enim hanc æstimationem indeterminatæ M in æquatione canonica & conferendo terminos æquationis resultantis cum homologis terminis elementi  $dK$  , definientur æstimationes litterarum assumptiarum A,B,C,D.

Quod de elemento  $dR$  dictum est , similiter intelligendum est de factis  $SdR$  ,  $STdR$  ,&c. Hæc vero omnia exemplis multo magis illustrabuntur , quam prolixioribus præceptis.

Si fuerit simpliciter  $dK = o$  , assumi potest quælibet quantitas  $R^\lambda$  , vel  $R^\lambda S^\mu$  &c. prout hoc vel illud commodum videbitur , est enim etiam  $R^\lambda dK$  , vel  $R^\lambda S^\mu dK$  , &c.  $= o$  . &  $\int R^\lambda dK$  vel  $\int R^\lambda S^\mu dK$  , &c. æquabitur quantitati constanti. Sed veniendum ad exempla particularia.

*Exemplum I.*

Sit ergo  $du = ax^m dx$ , quæritur, quid sit u seu  $\int ax^m dx$ .

Si

Si theorema i ad hoc exemplum applicemus, fient  
 $dK=adx$ ,  $R=x$  &  $\lambda=m$ , & æquatio canonica  $adx=(m+1)Mdx+x dM$ . Quia iam in  $dR=dx$ , est unicum membrum  $dx$ , cum hoc divido  $dK=adx$ , oritur in quociente  $a$ , quantitas constans, huius nulla habita ratione pono A, eritque adeo  $Z=A$ , &  $M(Z+N)=A+N$  quo valore in æquatione canonica  $adx=(m+1)Mdx+x dM$  surrogato, oritur  $adx=(m+1)Adx+(m+1)Ndx+xdN$ . Comparatio terminorum homologorum præbet  $A=a$ :  
 $(m+1)$  Et  $m+1 Ndx+xdN=0$ , quare poni possunt N &  $dN=0$ . Etenim si huius  $m+1 Ndx+xdN=0$ , rationem habere velimus, reducetur ea per divisionem ad  $\frac{(m+1)dx}{x}+\frac{dN}{N}=0$ , & integrando per lemma 1,  $lx^{m+1}+IN=lb$ , ubi b est constans, & abieictis log-mis, fiet per lemma 2,  $Nx^{m+1}=b$ , &  $N=bx^{-m-1}$ . Quare fiet  $M=\frac{a}{m+1}+bx^{-m-1}$ , & integrale quæsิตum  $u=Mx^{m+1}=\frac{ax^{m+1}}{m+1}+b$ . Q. E. I.

Scio probe hoc exemplum nimis obvium & tritum esse, quam ut hoc circuitu opus fuisset, sed ut methodum illustrarem, hæc minutim exponenda esse duxi.

Notandum quoque, quod, quoties post peractam substitutionem quantitatis  $Z+N$  in locum indeterminatae M, eiusque elementi in locum elementi huius in æquatione canonica, & post comparationem terminorum homologorum, sic omnia evanescant, ut aliud nihil, quam æquatio  $-N dR + R dN = 0$  remaneat, toties poni possint N &  $dN=0$ .

### Exemplum 2.

Sint  $dK=mx^{m-1}ydx-nx^m dy$ ,  $R=y$ , item  $\lambda=-n$

V

—n— i. adeoque  $du=R^\lambda dK$ . invenire  $u=\int R^\lambda dK$ .

In hoc exemplo æquatio canonica fit  $mx^{m-1}ydx - nx^m dy = -nMdy + ydM$ . Hoc loco iterum  $dR$  uno membro  $dy$  constat, quare divido æstimationem ipsius  $dK$  per hoc elementum  $dy$ : in quantitate vero  $dK = mx^{m-1}ydx - nx^m dy$  unicum membrum inest  $-nx^m dy$ , cum quo hæc divisio succedat, prodeunte quoto  $-nx^m$ , quare per monitum i Scholii generalis, nulla habita ratione signi — & coefficientis  $n$ , scribo  $Ax^m$  pro  $Z$ , fietque  $M (=Z+N)=Ax^m+N$ , &  $dM=mAx^{m-1}dx+dN$ . Quibus in æquatione canonica surrogatis, oritur  $mx^{m-1}ydx - nx^m dy = mAx^{m-1}ydx - nAx^m dy = nNdy + ydN$ , iam vero facta  $A=1$ , & destructis destruendis, manebit tantum  $-nNdy + ydN=0$ , quare circa omnem scrupulum, pono iuxta monitum ad exempl. i. datum,  $N=0$ , &  $dN=0$ ; eritque adeo  $M=x^m$ , &  $u=R^\lambda+M=x^my^{-n}=x^m : y^n$ .

### Exempl. 3.

Sit  $du=x^3 dx$ :  $V(aa-xx)$ , invenire  $u=\int x^3 dx$ :  $V(aa-xx)$ .

In hoc exemplo fit  $dK=x^3 dx$ ,  $R=aa-xx$ , &  $\lambda=-\frac{1}{2}$ , quare æquatio canonica pro hoc exemplo, inventur esse  $x^3 dx = -Mxdx + (aa-xx)dM$ . Est iam iterum in  $dR$  unicum membrum  $-2xdx$ , cum quo divido  $dK=x^3 dx$ , provenit  $-\frac{1}{2}xx$ . Quare neglecta coeffiente  $-\frac{1}{2}$ , scribo  $Z=Axx$ , &  $M (=Z+N)=Axx+N$ , &  $dM=2Axdx+dN$ ; quibus in æquatione canonica suffectis, prodit  $x^3 dx = -3Ax^3 dx + 2aaAx dx - Nxdx + (aa-xx)dN$ . Quare posita  $i=-3A$ , id est  $A=-\frac{1}{3}$ , remanebit destruendis destruendis, hæc altera  $-\frac{2}{3}aaxdx - Nxdx + (aa-xx)dN=0$ , vel  $\frac{2}{3}aaxdx$

—

$= -Nxdx + (aa - xx)dN$ . Tractetur hæc remanens æquatio, instar præcedentis æquationis canonice; hoc est, dividatur  $\frac{2}{3}aaxdx$  per  $x^2dx$ , quia inest æquationi membrum  $-Nxdx$ , in quo æstimatio litteræ N quæritur, proveniet in quotiente quantitas constans  $\frac{2}{3}aa$ , quare pono  $N = B + O$ . &  $dN = dO$ , quibus in æquatione suffectis nascetur  $\frac{2}{3}aaxdx = -Bx^2dx - Ox^2dx + (aa - xx)dO$ , quare facta  $B = -\frac{2}{3}aa$ , remanebit æquatio  $-Ox^2dx + (aa - xx)dO = 0$ , quare  $O$  &  $dO$  nihilo æqualia ponenda, adeo ut sit  $N = B = -\frac{2}{3}aa$ ; hinc derivatur  $M = Z + N = Ax^2 + B = -\frac{1}{3}xx - \frac{2}{3}aa$ . Adeoque  $u = MR^{\lambda+1} = -(xx + 2aa)V(aa - xx)$ :3.

## Exemplum 4.

Sit generalius  $du = x^{nm-1}dx(a + bx^m)^p$

Habemus ergo  $dK = x^{nm-1}dx$ ,  $R = a + bx^m$  &  $\lambda = p$ , & æquatio generalis Canonica nunc mutabitur in  $x^{nm-1}dx = (p+1)bmMx^{m-1}dx + (a + bx^m)dM$ , & quia in quantitate  $(p+1)bmMx^{m-1}dx$  inest  $x^{m-1}dx$ , dividatur quantitas  $x^{nm-1}dx$  per  $x^{m-1}dx$ , quotiens reperietur  $x^{nm-m}$ , quare facio  $M = Ax^{nm-m} + N$ , &  $dM = nm - mAx^{nm-m}dx + dN$  quibus in æquat. canonica suffectis habetur  $x^{nm-1}dx = (p+n)bmAx^{nm-1}dx + (nm - m)aAx^{nm-m-1}dx + (p+1)bmNx^{m-1}dx + (a + bx^m)dN$ . Quare facta  $A = \frac{1}{(p+n)bm}$ , fiet  $(m - nm)aAx^{nm-m-1}dx = (p+1)bmNx^{m-1}dx + (a + bx^m)dN$ .

Fiat  $N = Bx^{nm-2m} + O$ , &  $dN = (nm - 2m)Bx^{nm-2m-1}dx + dO$ , quibus in æquatione canonica secunda, quæ successit in locum primæ, surrogatis, resultat  $(m - nm)aAx^{nm-m-1}dx = (p+n-1)bmEx^{nm-m-1}dx + (nm - 2m)aBx^{nm-2m-1}dx + (p+1)bmOx^{m-1}dx + V_2$   $(a +$

$(a+bx^m) dO$ . Quare existente  $B = (m-nm) aA$  :  
 $(p+n-1)bm$  invenietur tertia æquatio canonica  
 $(2m-nm)aBx^{nm-2m-1}dx = (p+1)bmOx^{m-1}dx + (a+bx^m)$   
 $dO$ .

Ponatur tertio  $O=Cx^{nm-3m}+P$ , &  $dO=(nm-3m)$   
 $Cx^{nm-3m-1}dx+dP$ . Quare tertia æquatio canonica mu-  
tabitur in  
 $(2m-nm)aBx^{nm-2m-1}dx = (p+n-2)bmCx^{nm-2m-1}dx +$   
 $(nm-3m)aCx^{nm-3m-1}dx + (p+1)bmCPx^{m-1}dx + (a+bx^m)$   
 $dP$ . Idcirco facta  $C = (2m-nm)aB$ : $(p+n-2)bm$ , invenie-  
tur quarta  $(3m-nm)aCx^{nm-3m-1}dx = (p+1)bmPx^{m-1}dx +$   
 $(a+bx^m)dP$ .

Simili progressu pervenietur tandem ad æquationem aliquam canonicaem  $(em-nm)a\Delta x^{nm-em-1}dx = (p+1)bmZx^{m-1}dx + (a+bx^m)dZ$ . In hac vero est  $e$ , terminus quicunque seriei numerorum naturalium 1, 2, 3, &c.  $\Delta$  est terminus seriei coefficientum A, B, C, D cuius ordinem indicat numerus integer  $e+1$ . Ac denique Z est terminus seriei indeterminatarum M, N, O, P &c. cuius idem ordo est  $e+1$ . Sit  $R=a+bx^m$ , & ultima hæc æ-  
quatio canonica mutabitur in æquationem  $(em-nm)a\Delta x^{nm-em-1}dx = (p+1)ZdR+RdZ$ , ducatur hæc in  $R^p$ , fietque  $(em-nm)a\Delta x^{nm-em-1}dx(a+bx^m)^p = (p+1)R^pZdR + R^{p+1}dZ$ , & integrando  $R^{p+1}Z = f(em-nm)a\Delta x^{nm-em-1}dx(a+bx^m)^p$  dicatur hoc = Y, eritque adeo  $Z=Y:R^{p+1}$ . Expansis iam omnibus fiet

$$\begin{aligned} M &= Ax^{nm-m} + Bx^{nm-2m} + Cx^{nm-3m} + \dots \Delta x^{nm-em} + \\ &YR^{-p-1} \text{ quare } u(MR^{p+1}) = (Ax^{nm-m} + Bx^{nm-2m} \\ &+ Cx^{nm-3m} + \dots + \Delta x^{nm-em})(a+bx^m)^{p+1} + Y \\ &\text{ubi sunt} \end{aligned}$$

A =

$$A = (p+n)bm$$

$$B = (m-nm)aA : (p+n-1)bm = (1-n)aA : (p+n-1)b$$

$$C = (2m-mn)aB : (p+n-2)bm = (2-n)aB : (p+n-2)b$$

&c. &c.

$$\Delta = (em-m-mn)a\Gamma : (p+n-e+1)bm = (e-n-1)x \\ a\Gamma : (p+n-e+1)b$$

ubi  $\Gamma$  est coefficiens, quæ ultimam  $\Delta$  præcedit.

Formula igitur gemino casu integrabilis fiet

1°. Si  $n$  sit quilibet numerus integer affirmativus, seu  $n=e$ , tunc enim fiet  $Y=0$ , adeoque  $u=(Ax^{nm-m} + Bx^{nm-2m} + \&c. + \Delta)(a+bx^m)^{p+1}$

2°. Si  $n-p=e$  seu cuilibet integro affirmativo æqualis, fiet enim hoc casu  $u=(Ax^{mn+mp+m} + Bx^{mn+mp+2m} + \&c. + \Delta)(b+ax^{-m})^{p+1}$

in qua sunt  $A=-:mna$ .  $B=(1+p+n)bA : -(n+1)a$

$$C=(2+p+n)bB : -(n+2)a, \&c.$$

Huius rei ratio est, quia  $du=x^{mn-1}dx(a+bx^m)^p$  mutari potest in hanc quoque  $du=x^{nm+p-m-1}dx(b+ax^{-m})^p$ . Sed hic posterior integrabilitatis casus tantum obtinet, cum  $p$  est integer negativus, &  $n$  integer.

Nam, quia  $du=x^{qr-1}dx(b+ax^q)^p$  eiusdem formæ est cum hac  $du=x^{mn-1}dx(a+bx^m)^p$ , ea integrabilis erit per casum priorem, si  $r$  fuerit numerus integer affirmativus; iam si in æquatione  $du=x^{mn+mp-1}dx(b+ax^{-m})^p$  ponantur  $m=q$ , &  $n+p=r$ , mutabitur hæc æquatio in  $du=x^{qr-1}dx(b+ax^q)^p$ , quæ proinde integrabilis fiet, cum  $r=n-p$  æquat numerum quemcunque integrum affirmativum, hoc autem fieri nequit, nisi  $n$  fuerit numerus integer, &  $p$  quoque, sed negativus.

3°. Item æquatio  $du=x^{bm}dx(a+bx^m)^p$  integrabilis fiet, si  $p$  fuerit  $=-e-k-\frac{1}{m}$  existente  $e$  numero integro. Nam  $x^{bm}dx(a+bx^m)^p=x^{bm+pm}dx(b+ax^{-m})^p$ ,

quare ponendo  $m = -q$ , &  $p = -e - b + \frac{1}{q}$ , mutabitur  $x^{bm+p^m} dx (b+ax^{-m})^p$  in  $x^{e+q-1} dx : (b+ax^q)^{e+b-\frac{1}{q}}$ , quæ per casum primum algebraice integrabilis est. In hoc casu numerus  $b$  non est necessario integer, potest enim esse fractus quicunque

4°. Si in formula  $du = x^{nm-1} dx (a+bx^m)^p$ , sit  $n = b + \frac{l+1}{m}$ , mutabitur in sequentem  $du = x^{bm+l} dx (a+bx^m)^p$ , cuius integralis erit  
 $u = (Ax^{nm-m} + Bx^{nm-2m} + \&c. + \Delta x^{nm-em}) (a+bx^m)^{p+1} + T$

Iam si  $b$  fuerit cuilibet numero integro affirmativo  $e$  æqualis, fiet  $em-nm=-l-1$ , &  $nm-em=l$ , adeoque  $Y = -(l+1) \int a \Delta x^l dx (a+bx^m)^p$ . adeoque integrale est  
 $u = (Ax^{bm-m+l+1} + Bx^{bm-2m+l+1} + \&c. + \Delta x^{l+1}) (a+bx^m)^{p+1} - (l+1) \int a \Delta x^l dx (a+bx^m)^p$ . Verum  $\int x^l dx (a+bx^m)^p = \int (ax^l + bx^{m+l}) dx (a+bx^m)^{p-1} = \int (aax^l dx + 2abx^{m+l} dx + b^2 x^{2m+l}) dx (a+bx^m)^{p-2} = \int (a^3 x^l dx + 3aabx^{m+l} + 3abbx^{2m+l} dx + b^3 x^{3m+l}) \times dx (a+bx^m)^{p-3}$  atque ita porro: unde si  $p$  fuerit integer affirmativus, mutabitur  $\int x^l dx (a+bx^m)^p$  in  $\int a^{p-1} x^l dx + (p-1)a^{p-2} bx^{m+l} dx + \frac{p-1}{2} p-2 a^{p-3} b^2 x^{2m+l} dx + \&c.$   $\times (a+bx^m)$  quod integrale vero per præcedentia dependet a serie quantitatum absolute integrabilium  $+ Q \int x^l dx (a+bx^m)$  ubi  $Q$  est quantitas constans ex actuali evolutione formulæ oriunda.

Sed quid eveniet, si  $p$  sit numerus integer, sed negativus? Hæc formula  $du = x^l dx (a+bx^m)^{-p}$  etiam transfor-  
mari potest in  
 $du = (Ex^l + Fx^{m+l} + Gx^{2m+l} + \&c.) dx (a+bx^m)$  cuius integralis dependet iterum a serie quantitatum absolute inte-

integrabilium  $+Q/x^l dx : a+bx^m$ .

Hac ergo ratione huic unico exemplo inclusa sunt singula septem theorematum, quæ in Actis Erudit. 1719. sine demonstratione publicata sunt pag. 269. & theorema octavum inde etiam derivari potest. Scio quidem demonstrationes horum theorematum iam exhibitas fuisse tum a Bülfingero nostro, tum etiam a Nicolao Bernoulli V. V. C. C. pag. 467. sq. Act. Erud. 1720; non inconsultum tamen duxi theorema nostrum generale ad hæc ipsa applicare.

*Exemplum 5.*

Sit  $du=3kdz-lzzdz:zzV(kz-lz^3+mz^4)=-lz^{-\frac{1}{2}}dz$   
 $+3kz^{-\frac{5}{2}}dz:V(mz^3-lzz+k)$  adeoque  $dK=-lz^{-\frac{1}{2}}dz+$   
 $3kz^{-\frac{5}{2}}dz$ ,  $R=mz^3-lzz+k$ , &  $\lambda=-\frac{1}{2}$ ; quare æquatio canonica nunc est  $dK=\frac{1}{2}MdR+RdM$ . Est vero  $dR=3mzzdz-2lzdz$ , dividatur ergo secundum monitum primum Scholii generalis membrum  $-lz^{-\frac{1}{2}}dz$  quantitatis  $dK$  per membrum  $-2lzdz$  quantitatis  $dR$ , orietur in quotiente neglectis signo & coefficiente  $z^{-\frac{3}{2}}$ , quare pono  $M=Az^{-\frac{3}{2}}+N$ , &  $dM=-\frac{3}{2}Az^{-\frac{5}{2}}dz+dN$ , quibus in canonica surrogatis, prodit  $-lz^{-\frac{1}{2}}dz+3kz^{-\frac{5}{2}}dz=\frac{1}{2}Az^{-\frac{1}{2}}dz-\frac{3}{2}kAz^{-\frac{5}{2}}dz+\frac{1}{2}NdR+RdN$ . Quare posita  $A=-2$ , æquatio hæc destructis destruendis præbebit  $\frac{1}{2}NdR+RdN=0$ . Propterea per monitum ad exemplum primum, fient  $N$  &  $dN=0$ , atque adeo  $M=-2z^{-\frac{3}{2}}$  adeo-

deoque  $u(=MR^{\lambda+1})=-2R^2z^{\frac{3}{2}}=-2V(mz^3-lzz+k):$   
 $\sqrt{z^3}.$

### Exemplum 6.

Sit  $du=(z^5dz+z^4dz-8z^3dz):(z^5+z^4-5z^3+8z-4)$ ,  
 id est  $(z^5dz+z^4dz-8z^3dz)(z-1)^3.(z+2)^2$ . Iam  
 cum in denominatore sint duo factores  $(z-1)^3$  &  $(z+2)^2$ ,  
 adhibendum est Theorema secundum, in quo iam  $dK$   
 $=z^5dz+z^4dz-8z^3dz$ ,  $R=z-1$ , &  $S=z+2$ , item  
 $\lambda=-3$  &  $\mu=-2$ , itaque nunc fiet æquatio canonica  $dK$   
 $=-2MSdR-MRdS+RSdM$ , id est,  $z^5dz+z^4dz-8z^3dz$   
 $=-(3zdz+3dz)M+(zz+z-2)dM$ . Quare faciendo  
 $M=Az^4+Bz^3+Czz$ , &  $dM=4Az^3dz+3Bzzdz+2Czdz$ , & substitutis hisce in æquatione canonica, fiet  
 $z^5dz+z^4dz-8z^3dz=Az^5dz+Az^4dz-(8A+C)z^3dz$   
 $-(6B+C)zzdz-4Czdz$ .

Comparationes terminorum homologorum præbent  
 $A=1$ ,  $B=0$ , &  $C=0$ , quare habebimus  $M=z^4$ . Adeo-  
 que  $u(=MR^{\lambda+1}S^{\mu+1})=(z-1)^{-2}.(z+2)^{-1}z^4=z^4:z^3-3z$   
 $+2$ .

### Exemplum 7.

Sit  $du=(3q^5dx-q^4xdx+9q^3xxdx-qqx^3dx-6qx^4dx):$   
 $(qq-xx)\sqrt[3]{(q^3+qqx-qxx-x^3)}$ . Iam, quia  
 $\sqrt[3]{(q^3+qqx-qxx-x^3)}=(q+x)^{\frac{2}{3}}.(q-x)^{\frac{1}{3}}$ ; fiet  
 $du=(3q^5dx-q^4xdx+9q^3xxdx-qqx^3dx-6qx^4dx):$   
 $(q+x)^{\frac{5}{3}}.(q-x)^{\frac{4}{3}}$ . Quare nunc habemus  $dK=3q^5dx$   
 $-q^4xdx+9q^3xxdx$  &c.  $R=q+x$ ,  $S=q-x$ ,  $\lambda=-\frac{5}{3}$ ,  
 $\mu=-\frac{4}{3}$ , & æquationem canonicam  $dK=-\frac{2}{3}MSdR$

$-\frac{1}{3}MRdS + RSdM$ . Hoc est  $3q^5 dx - q^4 x dx + 9q^3 xx dx - qqx^3 dx - 6qx^4 dx = (-\frac{1}{3}qdx + xdx) M + (qq - xx) dM$ . Quare si fiat  $M = A + Bx + Cxx + Dx^3$  æquatio canonica mutabitur in

$$\begin{aligned} & 3q^5 dx - q^4 x dx + 9q^3 xx dx - qqx^3 dx - 6qx^4 dx \\ & = -\frac{1}{3}qAdx + Ax dx - \frac{1}{3}qCxx dx - Cx^3 dx - 2Dx^4 dx \\ & + qqB - \frac{1}{3}qB + 3qqD - \frac{1}{3}qD \\ & + 2qqC \end{aligned}$$

Ex collatione terminorum homologorum eliciuntur estimationes coefficientum, quales sequuntur.  $D = 3q$ ,  $C = 0$ ,  $B = 3q^3$  &  $A = 0$ . Quare invenitur

$$u = (3q^3 x + 3qx^3) : \sqrt[3]{(q^3 + qqx - qxx - x^3)}.$$

Exempla proxime antecedentia 5, 6, & 7<sup>um</sup>. mutuo sumsi ex Newtoni tractatu de Quadraturis, quibus Celeberr. Auctor seriem suam Theoremate III. pro quadraturis exhibitam, illustravit. Sed quid vetat, quomodo hanc seriem ipsam ex primo nostro theoremate derivemus? Est ergo

### Exemplum 8.

Sint  $R = e + fz^q + gz^{2q} + bz^{3q} + \dots$  &c. dein  $Z = a + bz^q + cz^{2q} + dz^{3q} + \dots$  &c. &  $du = R^{l-1} Z z^{m-1} dz$ . Invenire integralem huius formulæ.

Est itaque  $dK = Z z^{m-1} dz$ ,  $\lambda = l-1$ , & per theor. I. æquatio canonica  $Z z^{m-1} dz = IMdR + RdM$ . Ponamus iuxta præcedentia  $M = Az^m + Bz^{m+q} + Cz^{m+2q} + Dz^{m+3q} + \dots$  &c. + N, eritque

$$RM = meAz^{m-1} dz + (m+q)eBz^{m+q-1} dz + (m+2q)eCz^{m+2q-1} dz + \dots + NdN$$

$$+ mfa + (m+q)fB$$

$$+ mgA + flqAz^{m+q-1} dz + 2glqAz^{m+2q-1} dz + \dots + NdR$$

$$+ flqB$$

X

Ergo

Ergo æquatio canonica mutatur in sequentem :

$$\begin{aligned} az^{m-1}dz + bz^{m+q-1}dz + cz^{m+2q-1}dz + & \text{ &c.} = \\ meAz^{m-1}dz + (lq+m)fA z^{m+q-1}dz + (2lq+m)gA z^{m+2q-1}dz + & INdR + RdN. \\ + (m+q)eB. & + (lq+m+q)fB \\ & + (m+2q)eC \end{aligned}$$

Iam comparatio terminorum homologorum præbet :

$$\begin{aligned} A &= \{a\} - \} : (m+0q)e \\ B &= \{+b-(lq+m)fA\} - \} : (m+q)e \\ C &= \{+c-(2lq+m)gA-(lq+m+q)fB\} - - - - - - - - - - - - - - - - \} : (m+2q)e \\ D &= \{d-(3lq+m)bA-(2lq+m+q)gB-(lq+l+2q)fC\} - - - - - - - - - - \} : (m+3q)e \end{aligned}$$

Hæ determinationes cum Newtonianis ad amissim consentiunt.

Verum, quia in ultima æquatione canonica semper aliqua membra remanent, quorum ratio est habenda, adeoque vocabimus hæc membra  $Gz^{m+4q-1}dz + Hz^{m+5q-1}dz + Iz^{m+6q-1}dz$ , eritque ultima æquatio canonica  $-Gz^{m+4q-1}dz - Hz^{m+5q-1}dz - Iz^{m+6q-1}dz = INdR + RdN$ . Ex hac vero elicetur  $-f(Gz^{m+4q-1}dz + Hz^{m+5q-1}dz + Iz^{m+6q-1}dz)R^{T-1}\} = NR^l$ , quare vocando  $dY = Gz^{m+4q-1}dz + Hz^{m+5q-1}dz + Iz^{m+6q-1}dz$ , habebimus  $N = -YR^{-l}$ , adeoque  $M = (A+Bz^q+Cz^{2q}+Dz^{3q})Z^m - YR^{-l}$ , quare integrale quæsitum erit  $u = (A+Bz^q+Cz^{2q}+Dz^{3q}+\&c.)Z^m R^l - Y$

Ubi quidem sunt

$$G = (3lq+m+q)bB + (2lq+m+2q)gC + (lq+m+3q)fD.$$

$$H = (3lq+m+2q)c + (2lq+m+3q)gD$$

$$I = 3lq+m+3q)bD.$$

In casu, quo series R finitur termino, cuius coefficiens est

est b. In aliis casibus omnibus estimationes litterarum G, H, I, &c. facili negotio obtinebuntur.

Si series  $A + Bz^q + Cz^{2q} + Dz^{3q} + \dots$  &c. alicubi abrumpens est, Y fiet = 0, adeoque formula absolute integrabilis erit.

Non absimili modo ex theoremate nostro secundo derivare licet Theorema IV. Newtoni Propositione VI<sup>a</sup> Tract. de Quadraturis exhibitum, sed quia hæc deductio prolixiorem depositit calculum, ab ea nunc abstinebo.

Pergam ergo ad illustrationem theorematum nostrorum per exempla quantitatum differentialium, duas aut plures indeterminatas varie inter se mixtas, vel subinde secunda differentialia involventium, qualia non mihi ipsi ad arbitrium finxi, sed ab amico mihi sine integralibus suppeditata vel alium de desumpta sunt. Ad talia enim perinde sese extendit ac ad ea, quæ in superioribus tractavi. Cuius rei leve specimen exemplo secundo superiori iam exhibui.

### Exemplum 9.

Sit  $du = 3a^3yydy - 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aaxydx + 12ax^3ydx - 6x^5dx$ .

Hæc æquatio æquivalet alteri  $du = (3a^3x^{-5}yydy - 6aax^{-3}ydy + 3ax^{-1}dy - 6aax^{-4}yydx + 12ax^{-2}ydx - 6dx) x^5$ . Quo casu fit  $dK = 3a^3x^{-5}yydy - 6aax^{-3}ydy + 3ax^{-1}dy - 6aax^{-4}yydx + 12ax^{-2}ydx - 6dx$ , R = x, λ = 5, & æquatio canonica  $dK = 6Mdx + x dM$ . Iam ut inveniri possit, quid sit M, in quantitate  $dK$  divido per  $dx$  omnia illa membra in quibus  $dx$  inest, prodibunt neglectis coefficientibus & signis  $x^{-4}yy, x^{-2}y$  & 1, quare pono  $M = Ax^{-4}yy + Rx^{-2}y + C + N$ . Hoc autem valore litteræ M, eiusque elementi  $dM$ , in canonica substitutis proveniet æquatio:

$$\begin{aligned}
 & + 3a^3 x^{-6} yydy - 6aax^{-3} ydy + 3ax^{-1} dy - 6aax^{-4} yydx \\
 & + 12ax^{-2} ydx - 6dx \\
 & = 2Ax^{-3} ydy + Bx^{-1} dy + 2Ax^{-4} yydx + 4Bx^{-2} ydx \\
 & + 6Cdx + 6Ndx + xdN
 \end{aligned}$$

Comparatio terminorum homologorum præbet,  
 $A = -3aa$ ,  $B = 3a$ ,  $C = -1$ , & remanebit æquatio sequens  
 $3a^3 x^{-6} yydy = 6Ndx + xdN$ .

Ducatur hæc æquatio in  $x^6$ , provenietque  $3a^3 yydy = 6Nx^6 dx + x^6 dN$ . Utraque pars huius æquationis est integrabilis, invenietur enim integralis eius

$$\begin{aligned}
 a^3 y^3 &= Nx^6. \text{ Habemus ergo } N = a^3 x^{-6} y^3, \text{ adeoque} \\
 M(-Ax^{-4} yy + Bx^{-2} y + C + N) &= -3aax^{-4} yy + 3ax^{-2} \\
 y - 1 + a^3 x^{-6} y^3, \text{ adeoque} \\
 u(-MR^6 - Mx^6) &= -3aaxxyy + 3ax^4 y - x^6 + a^3 y^3 \\
 &= a^3 y^3 - 3aaxxyy + 3ax^4 y - x^6 = (ay - xx)^3.
 \end{aligned}$$

Hoc idem integrale invenissemus ponendo  $dK = 3ayydy - 6aaxxydy + 3ax^4 dy - 6aaxydx + 12ax^3 ydx - 6x^5 dx$ .

Dein  $R = x$  vel  $= y$ , sed  $\lambda = 0$ , adeoque  $\lambda + 1 = 1$ .

### Exemplum 10.

Sit  $du = \left( -\frac{3}{2} cyydy + \frac{3}{10} abbt y^{-1} dy \right) : V(a^3 b - 2cy^3 + 3abbt)^{\frac{4}{3}}$   
existenti  $t = V accyy$ . Hoc loco est  $dK = -\frac{3}{2} cyydy + \frac{3}{10} abbt y^{-1} dy$ ,  $R = a^3 b - 2cy^3 + 3abbt$ ,  $\lambda = -\frac{3}{4}$ , adeoque  $\lambda + 1 = \frac{1}{4}$ . & æquatio canonica  $dK = \frac{1}{4} M dR + R dM$ . Nunc vero, quia  $\frac{1}{4} dR = dK$ , erit  $M = 1$ , adeoque  $u = MR^{\frac{1}{4}} = V(a^3 b - 2cy^3 + 3abbt)^{\frac{1}{4}}$ .

### Exemplum 11.

Si  $du = (2axyydx + cxyydy - cy^3 dx - 2ccyydy - 4axxydx + 4ax^3 dy + 8ccyydx - 2axxydy) : (y^4 - 8xy^3 + 16xxyy)$ . Quoniam  $y^4 - 8xy^3 + 16xxyy$  est quadratum, cuius radix est

est  $yy - 4xy$ ; fiat  $R = yy - 4xy$ ,  $\lambda = -2$ , &  $dK = 2axydydx$   
 $+ cxyydy - cy^3 dx - 2ccyydy - 4axxydx + \&c.$  & æquatio  
 canonica fiet,  $dK = -MdR + RdM$ . Est vero  $dR = 2ydy$   
 $- 4ydx - 4xdy$ . Respicio nunc ad omnia membra quantitatis  
 $dK$ , quæ per  $ydx$  dividuntur, & præscindendo a coefficientibus & signis, inveniuntur quoti  $xy$ ,  $yy$ ,  $xx$ ,  $y$ . Po-  
 no ideo

$M = Ay + Bxy + Cxx + Dyy$ , & inveniemus æquationem  
 canonica mutari in æquationem

$$+ 2axyydx + cxyydy - cy^3 dx - 2ccyydy - 4axxydy  
 + 4ax^3 dy + 8ccyydx - 2axxydy = + 2Cxxdy - Bxyydy$$

+ 4D

$$+ By^3 dx - Ayydy - 4Cxxdy + 4Cxxdy + 4Ayydx  
 + 6D$$

$$- 2Cxxdy - 2Dy^3 dy$$

Ex comparatione terminorum elicentur  $A = 2cc$ ,  $B = -c$ ,  
 $C = a$ , &  $D = 0$ , quare fit  $M = 2ccy - cxy + axx$ , adeoque  
 $u (= MR^{-1}) = (2ccy - cxy + axx) : (yy - 4xy)$ .

### Exemplum 12.

Si  $du = (4xyzdy - xxzdx - x^3 dz + 2xy^2 zdx + 2xyzdx  
 - 2y^2 zdy - 2y^2 zdy - 2y^3 dz - x^2 zdy + xxydz) : (xx - 2xy + yy)$ .

Erunt  $dK = 4xyzdy - x^2 zdx - x^3 dz + 2xy^2 dz + 2xyzdx  
 - 2y^2 zdy - 2y^2 zdx - 2y^3 dz - xz^2 dy + x^2 ydz$ ;  $R = x - y$ ,  $\lambda = -2$   
 adeoque æquatio canonica fit  $dK = -MdR + RdM$ . Iux-  
 ta superiora invenietur sumendum esse  $M = Ax^2 z + Bxyz$   
 $+ Cy^2 z$ , ope huius mutabitur canonica in æquationem  
 cuius termini homologi inter se comparati præbebunt  
 $A = -1$ ,  $B = 0$ , &  $C = 2$ , adeoque  $M = -xxz + 2yyz$ , &  
 $u (= MR^{-1}) = 2yyz - xxz : x - y$ .

## Exemplum 13.

Si  $-adx = (ydx - xdy)^2 x : (xx + yy)^{\frac{3}{2}}$ , in hypothesi quod  $ydx - xdy$  sit constans. Integrabitur ponendo  $du = -adx : ydx - xdy$ ,  $R = xx + yy$ ,  $\lambda = -\frac{3}{2}$ , &  $\lambda + i = -\frac{1}{2}$  adeoque æquatio canonica pro hoc exemplo invenietur esse  $dK = -\frac{1}{2}MdR + RdM$ , atque adeo  $xydx - xx dy = (-xdx - ydy) M + (xx + yy)dM$ ; Fiat  $M = Ay$ , & mutabitur æquatio in  $xydy - xxdy = -Axydx + Axxydy$ . Quare  $A = -1$ . &  $u (= MR^{-\frac{1}{2}}) = -y : V(xx + yy)$ .

Atqui propter differentiale constans  $ydx - xdy$ , erit etiam  $u = -adx : ydx - xdy$  quare  $\frac{-adx}{ydx - xdy} = \frac{-y}{V(xx + yy)}$ ; hinc  $adx = \frac{yydx - xydy}{V(xx + yy)}$ , vel  $abdx = \frac{byydx - bxydy}{V(xx + yy)}$  ducatur in  $x^{-2}$  fiet  $-abx^{-2}dx = (bx^{-1}ydy - bx^{-2}yydx) : V(xx + yy)$ ; si nunc iterum sit  $R = xx + yy$  fiet pro hac æquatione competens æquatio canonica  $bx^{-1}ydy - bx^{-2}yydx = (ydy + xdx)M + (xx + yy)dM$ ; quare si ponatur  $M = bx^{-1}$ , æquatio hæc fiet identica; est ergo  $c + \frac{ab}{x}$ , integrale ipsius  $-abx^{-2}dx = MR^{\frac{1}{2}}$ , id est  $= \frac{bV(xx + yy)}{x}$ . Quæ æquatio est ad sectiones conicas.

## Exemplum 14.

Si  $f dx = (dx dy^3 + dx^3 dy - xdx dy ddx - xdx^2 ddy) : 2x^3 dy^3$ . Integrare æquationem. Pone  $dK = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dx^3 dy^{-2} - \frac{1}{2}xdx dy^{-2} ddx + \frac{1}{2}xdx^2 dy^{-3} ddy$ ,  $R = x$ , &  $\lambda = -3$ , adeoque  $\lambda + i = -2$ . Quare æquatio canonica nunc fit  $dK = -2Mdx + xdM$ . Elicetur ergo  $M = A + Bdx^2 ay^{-2}$ . Ope huius vero æquatio canonica abit in

 $\frac{1}{2}dx$

$\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dx^3 dy^{-2} - \frac{1}{2}xdxdy^{-2}ddx + \frac{1}{2}xdx^2 dy^{-3} ddy$   
 $= -2Adx - 2Bxdxdy^{-2}ddx - 2Bxdx^2 dy^{-3} ddy$ , quare  $A = -\frac{1}{4}$ ,  
 $B = -\frac{1}{4}$  &  $\int dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{2}$ , vel addita constanti  $n$ .  
 $\int dx = (4nxxdy^2 - dx^2 - dy^2) : 4xxdy^2$ .

Videantur ad hæc duo postrema exempla, *ls Memoires de l'Acad.Royale des Sciences 1710.* circa finem.

## DE INTEGRATIONIBVS AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM,

*ubi traditur*

METHODI ALICVIIS SPECIMEN  
INTEGRANDI

fine prævia separatione indeterminatarum:

Auctore Joh. Bernoulli.

### I.



Uando æquatio aliqua differentialis primi gradus reducta habetur ad  $pdx = qdy$ , ubi  $p$  datur per  $x$ , &  $q$  per  $y$ , hoc est, meo loquendi more, ubi  $p$  &  $q$  sunt functiones qualescumque datæ indeterminatarum  $x$  &  $y$ ; eo casu constructio æquationis nulla premittat difficultate, concessis nimirum quadraturis; quæ & ipsæ generaliter ad extensiones curvarum algebraicarum non ita pridem reductæ sunt, vid. Cel. Hermanni scheidasma in actis Lipf. 1723. meumque de hac materia analyticæ tractanda editum in iisdem actis 1724. Adeo ut hac in parte nihil ulterius ad maiorem perfectionem defi-

*M. Jun.  
1726.*

desiderari videatur , nisi hoc tantum, quod, cum infinitis modis, ceu monstravimus, idem præstari possit, ille eligruta qui exhibeat curvam constructu facillimam , cuius extensione uti lubeat ad quadraturam determinandam . Hanc vero rem , utpote alias negotii , nunc non attingimus.

II. Quod si autem æquatio differentialis  $pdx = qdy$  laborat indeterminatarum permixtione, id est , si utraque quantitas  $p$  &  $q$  vel alterutra saltem componitur diversimode ex indeterminatis  $x$  &  $y$  simul, earumque variis potentia, atque contineant vel non contineant varia signa radicalia; id quidem est , quod hodienum crucem figit geometris, nec quemquam novi hucusque, qui generalem invenerit Regulam (ad praxim applicabilem) integrandi eiusmodi æquationes differentiales , si integrabiles sunt, aut, si non sunt, construendi eas sive per quadraturas sive per rectificationes curvarum datarum; dico notanter *applicabilem ad praxin*, nam cum construcio requirat executionem , nihil pensi haberem alicuius regulæ , quæ in speculatione tantum subsisteret, re ipsa autem nullius esset usus , quæ & totam requireret hominis ætatem, si in levissimis quoque exemplis vellet eam effectui dare. Tales utique regulæ generales, vel potius regularum ideæ, etiam mihi in promtu forent , sed quas ob dictam rationem negligo.

III. Dantur regulæ particulares , et si omnibus casibus in suo quæque genere applicabiles , quæ cum successu adhibentur: Earum multas ac varias iam eo tempore ex cogitavi, quo de nascente calculo vix quisquam aliud cogitabat, nedum ad eius perfectionem animum applicabat. Inventas regulas communicavi paulo post cum amicis, partim coram, partim perlitteras, præsertim cum Illustr.

Mar-

Marchione Hospitalio, in cuius privatam utilitatem initio a me conscriptæ lectiones, in multorum iam manibus versantes, æque ac litteræ meæ cum ipso postea frequenter commutatæ, luculento sunt veritatis testimonio.

IV. Inter prædictas regulas maximam universalitatem sive extensionem habet illa, quæ valet pro omnibus æquationibus differentialibus, quantæcunque dimensionis sint termini, modo ubique sint homogenei, id est, in quibus exponentes indeterminatarum  $x$  &  $y$  simul sumti eundem in quolibet termino componunt numerum, adeoque litteræ constantes, quæ in eiusmodi æquationibus occurunt, nihil aliud designant quam numeros coefficientes, nihilque proin contribuunt ad dimensionum suppletionem. Monstravi namque talem æquationem mutari in aliam indeterminatas separabiles habentem, si assumendo novam indeterminatam  $z$ , substituatur  $zy$  pro  $x$ , &  $zdy + ydz$  pro  $dx$ ; vel contra  $zx$  pro  $y$ , &  $zdx + xdz$  pro  $dy$ . Aut etiam quod interdum simpliciorem reddit æquationem, si pro  $x$  scribatur  $z^n y$ , atque pro  $dx$ ,  $z^n dy + nyz^{n-1} dz$ , vel vice versa  $z^n x$  pro  $y$ , &  $z^n dx + nxz^{n-1} dz$  pro  $dy$ ; ita enim fit, ut, cum  $n$  sit exponens arbitrarius, pro eo aliquis eligi possit, qui exhibeat æquationem tractabiliorem. Quinimo certissimum est, nihil obstat, quo minus adhiberi queat functio quælibet ipsius  $z$  ad arbitrium formata, ponendo ex. gr.  $y\sqrt{(aa+zz)}$  pro  $x$ , adeoque  $dy\sqrt{(aa+zz)} + yzdz : \sqrt{(aa+zz)}$  pro  $dx$ ; aut si mavis  $x\sqrt{(aa+zz)}$  pro  $y$ , &  $dx\sqrt{(aa+zz)} + xzdz : \sqrt{(aa+zz)}$  pro  $dy$ .

V. Dantur sane casus, ubi talis functionum formatio utilitate sua non caret, præcipue in illis aliquando, in quibus signa radicalia reperiuntur: sciendum enim regulam nostram porrigi quoque ad eas omnes æquationes,

quæ unum pluresve terminos habent signis radicalibus affectos. Verbi gratia, sit proposita æquatio inter coöordinatas  $x$  &  $y$  alicuius curvæ hæc  $axdy + dxV(xx+yy) = 0$ , in qua indeterminatæ  $x$  &  $y$  sunt unius dimensionis, quia quantitas  $V(xx+yy)$  non nisi primæ dimensionis esse censetur; si itaque secundum regulam nostram simpliciter ponatur  $zy$  &  $zdy + ydz$  pro  $x$ , &  $dx$ , mutatur æquatio proposita in hanc  $\frac{dy}{y} + \frac{dz\sqrt{(zz+1)}}{az+z\sqrt{(zz+1)}} = 0$ , quæ quidem non amplius laborat indeterminatarum permixtione; at vero irrationalitas adhuc inest, quæ nondum permittit videre, annon forsan ex differentialibus logarithmicis componatur æquatio, unde illa per integrationem ad terminos finitos deinceps reduci possit.

VI. Quam ob rem præstat ut scribam pro  $x$  productum ipsius  $y$  per convenientem aliquam functionem ipsius  $z$  ad asymmetriam tollendam; in hunc finem pono ex. gr.  $x=yV(zz-1)$  ac proinde  $dx=djV(zz-1)+yzdz:V(zz-1)$  quibus substitutis in æquatione proposita  $axdy + dxV(xx+yy) = 0$ , convertetur illa in hanc  $(z^3+azz-z-a)dy + yzzdz = 0$ , quæ per divisionem reducta dat hanc alteram  $\frac{dy}{y} + \frac{zzdz}{z^3+azz-z-a} = 0$ , ab omni irrationalitate immunem: Resolvitur vero posterius membrum  $\frac{zzdz}{z^3+azz-z-a}$  in differentialia logarithmica per methodum quam communicavi in Commentariis Acad. Reg. Scient. Paris. an. 1702, & in Actis Lips. an. 1703: Cum enim denominator huius fractionis  $z^3+azz-z-a$  constet ex ipsis tribus factoribus  $z+a$ ,  $z+1$  &  $z-1$ , faciendum est ex præscripto illius methodi  $\frac{zzdz}{z^3+azz-z-a} = \frac{\alpha dz}{z+a} + \frac{\beta dz}{z+1} + \frac{\gamma dz}{z-1}$ , tum quærendi valores literarum  $\alpha, \beta, \gamma$ .

$\alpha, \beta, \gamma$ , qui reperientur esse  $\alpha = \frac{aa}{aa-1}$ ,  $\beta = \frac{-1}{2a-2}$ ,  
 $\gamma = \frac{1}{2a+2}$ ; Quare æquatio nostra  $\frac{dy}{y} + \frac{z^3}{z+2} + az^2 - z - a$   
 $= 0$ , seu  $\frac{dy}{y} + \frac{\alpha dz}{z+a} + \frac{\beta dz}{z+i} + \frac{\gamma dz}{z-i} = 0$ , (substitutis valoribus  
ipsarum  $\alpha, \beta, \gamma$  & deins singulis terminis in  $2aa-2$  ductis)  
abibit in hanc æquationem  $\frac{(2aa-2)dy}{y} + \frac{2aadz}{z+a} - \frac{(a-1)dz}{z+i}$   
 $+ \frac{(a-1)dz}{z-i} = 0$ , in differentialibus logarithmicis expressam,  
quæ integrata, ut olim docuimus, reddit  $(2aa-2)y + 2aa$   
 $l(z+a) - (a-1)(z+i) + (a-1)(z-i) = lC$ , ubi per  $lC$  intel-  
ligo logarithmum quantitatis constantis pro lubitu assump-  
tæ; reducendo igitur, ut moris est, logarithmos ad po-  
tentias, acquiritur æquatio finita seu in terminis finitis ex-  
pressa  $y^{(2aa-2)} \times (z+a)^{2aa} \times (z+i)^{(-a-1)} \times (z-i)^{(a-1)} = C$ .  
Nunc vero, ut in coordinatis  $x$  &  $y$  exprimatur, resti-  
tuendus est valor ipsius  $z$ , qui ex hypothesi assumta  $x =$   
 $y\sqrt{zz-i}$ , est  $\sqrt{xx+yy}:y$ , hinc enim emergit  $y^{(2aa-2)}$   
 $\times \left(\frac{\sqrt{xx+yy}+ay}{y}\right)^{2aa} \times \left(\frac{\sqrt{xx+yy}+y}{y}\right)^{(-a-1)} \times \left(\frac{\sqrt{xx+yy}-y}{y}\right)^{(a-1)}$   
 $= C$ ; vel quia in denominatoribus habetur  $y$  elevata ad  
 $2aa$ , ad  $-a-1$ , & ad  $a-1$ , quarum summa  $= 2aa-2$ , pa-  
tet tres istos denominatores  $y$  destrui per alteram  $y$  fra-  
ctionibus præmissam, ita ut tandem hæc prodeat æqua-  
tio naturam curvæ determinans  $(\sqrt{xx+yy}+ay)^{2aa}$   
 $\times (\sqrt{xx+yy}+y)^{(-a-1)} \times (\sqrt{xx+yy}-y)^{(a-1)} = C$ ; Quæ si  
dextre tractetur ulterius reduci potest in istam  $x^{(a-1)}$   
 $\times (\sqrt{xx+yy}+ay)^{aa} \times (\sqrt{xx+yy}+y)^{-a} = C$ ; vel etiam in  
hanc  $x^{(-a-1)} \times (\sqrt{xx+yy}+ay)^{aa} \times (\sqrt{xx+yy}-y)^a = C$ : Ubi  
recordandum, per litteram  $C$  intelligi perpetuo con-  
stantem arbitriam in omnibus æquationibus sumendam vel  
eandem vel diversam prout libuerit; quod in sequentibus  
etiam sicubi reperiatur monitum volo.

VII. Singularis casus considerandus hic venit , existente nimirum  $a=1$  , quo fit ut duo priores factores in prima æquatione , qui iam erunt  $(\sqrt{(xx+yy)+y})^2$  &  $(\sqrt{(xx+y)+y})^{-2}$  se mutuo destruant , & tertius  $(\sqrt{(xx+yy)-y})^0$  evadat  $=1$ , unde tota æquatio foret  $=C$ ; sic pariter secunda & tertia, ex prima æquatione deductæ, in casu  $a=1$ , abirent in  $1=C$ , quod esset absurdum, unitas enim non potest esse æqualis quantitati arbitriæ C. Quæritur itaque , quid iam sit statuendum , utrum in hoc casu nulla satisfaciat curva æquationi propositæ , quæ iam est  $xdy+dx\sqrt{(xx+yy)}=0$  , aut si aliqua satisfaciat, quomodo illa determinetur? Hunc scrupulum ut tollam, dico, incommodum istud ex eo venire, quod in præced. §. æquatio  $\frac{dy}{y} + \frac{adx}{z+a} + \frac{\beta dz}{z+\beta} + \frac{\gamma dz}{z-\gamma} = 0$  multiplicata fuerit per  $2aa-2$  , h. e. per 0 in hoc casu , unde totam æquationem evanescere necesse est. Ut igitur hoc evitemus , notandum est quantitatem  $zzdz : (z^3 + azz - z - a)$  , quam æqualem supposuimus hisce fractionibus  $\frac{adx}{z+a} + \frac{\beta dz}{z+\beta} + \frac{\gamma dz}{z-\gamma}$  , continere in se aliquid absolute integrabilis quando  $a=1$ ; illa igitur non potest supponi constare ex meris differentialibus logarithmicis. Quod autem contineat partem aliquam integrabilem, ex eo patet , quod denominator fractionis , qui iam est  $z^3 + zz - z - 1$ , constet ex duobus factoribus  $zz + 2z + 1$ , &  $z - 1$ , quorum ille est quadratum perfectum ; unde  $dz : (zz + 2z + 1)$  fiet integrabile , est enim eius integrale  $= -1 : (z + 1)$ . Oportet itaque , ceu monui in præmemoratis Commentariis Paris 1702. pag. 290. Edit. Paris. separare ex quantitate  $zzdz : (z^3 + zz - z - 1)$  illud quod est integrabile , & tum procedere secundum regulam , quod utrumque simul sic perago : Pono sta-

tim

tim  $\frac{zzdz}{z^3 + zz - z - 1} = \frac{\alpha dz}{z+1} + \frac{\gamma dz}{z-1} + \frac{\pi dz}{zz + z + 1}$ , quibus reductis ad communem denominatorem  $z^3 + zz - z - 1$  habebo æ qualitatem inter numeratorem  $zz$  & summam trium reliquorum, quæ erit  $(\alpha + \gamma)zz + (2\gamma + \pi)z + (\gamma - \pi - \alpha)$ ; instituta comparatione terminorum faciendo  $\alpha + \gamma = 1$ ,  $2\gamma + \pi = 0$ ,  $\gamma - \pi - \alpha = 0$ , invenietur  $\pi = -\frac{1}{2}$ ,  $\alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\gamma = \frac{1}{4}$ . His ita inventis integrerentur, ut olim monstravimus, termini æquationis  $\frac{dy}{y} + \frac{zzdz}{z^3 + zz - z - 1} = 0$ , & prodibit

$y + \frac{3}{4} \ln(z+1) + \frac{1}{4} \ln(z-1) + \frac{1}{2z+2} = IC$ , seu  $4ly + 3\ln(z+1) + \ln(z-1) = \frac{-2}{z+1} + IC$ ; hinc ergo considerando unitatem tanquam logarithmum numeri alicuius qui vocetur  $n$ , habebitur  $y^4 \times (z+1)^3 \times (z-1)^1 = C \times n^{-2} \cdot (z+1)^1$ , quæ, substituto pro  $z$  eius valore  $V(xx+yy)$ :  $y$  & reductis reducendis ut supra factum definit in istam  $(V(xx+yy)+y)^3 \times (V(xx+yy)-y)^1 = C \times n^{-2y} \cdot V(xx+yy)+y$ , transmutabilem porro in  $(V(xx+yy)+y) \times x = C \times n^{-y} \cdot V(xx+yy)+y$ , vel etiam non minus simplici modo in  $(V(xx+yy)-y)^{-1} \times x^3 = C \times n^{-y} \cdot V(xx+yy)+y$ ; quarum autem quælibet si evolvatur, & homogeneitatis gratia scribatur  $bbRR$  pro quadrato quantitatis exponentialis, hanc induit faciem  $x^4 \pm 2bRyx - bbRR = 0$ . Aio igitur hanc æquationem  $x^4 \pm 2bRyx - bbRR = 0$  oriri ex vera integratione huius differentialis  $xdy + dxV(xx+yy) = 0$ ; quod confirmabitur a posteriori, si nimirum illa differentietur & quod provenit cum hac comparetur. Unde videmus curvam propositæ æquationi satisfacientem non esse algebraicam sed exponentialem, & ita quidem, ut ipsæ indeterminatæ ingrediantur exponentem, qua in re differt ab omnibus aliis casibus particularibus æquationis generaliter propositæ  $axdy +$

$dxV(xx+yy)=0$ , utpote quæ in quovis alio casu semper admittit curvam aliquam algebraicam, modo  $\alpha$  sit rationalis; aut si  $\alpha$  non est rationalis, erit quidem curva exponentialis, sed exponentem nulla quantitas variabilis (sicuti in casu  $\alpha=1$ ) ingreditur, cuiusmodi curvæ dici possunt algebraicis proximæ.

VIII. Paulo fusior fui quam forsan necesse videbatur in discussione huius exempli, quod, cum olim Lutetiæ agerem, multum agitabatur inter Geometras eius loci, ex occasione problematis Beauniani, mihi tunc quoque cum aliis ab Hospitalio propositum atque feliciter solutum, postquam a Geometris insolutum ad me pervenisset: Fusior igitur in hoc fui, ut fieret manifestum, qua dexteritate evitari possit ingens aliquando calculus, in quem intricaremur, si regulas generales, prout primo intuitu se offerunt, sine ulla circumspectione sequi vellemus: Præterquam quod multoties accidat, ut credamus curvas quæ prodeunt per incautam regularum applicationem esse transcendentes, nonnisi per quadraturas aut rectificationes construibles, quæ tamen si rite tractentur evadunt algebraicæ aut saltem exponentiales, hoc est, tales quæ sunt finitæ & non aliter transcendentes quam ex sola exponentium irrationalitate. Quis enim prima fronte non crederet, æquationem supra §. 5. expressam  $\frac{dy}{y} + \frac{dz\sqrt{(zz+1)}}{z+z\sqrt{(zz+1)}} = 0$ , quæ oritur ex suppositione  $x=zy$ , deducere ad curvam transcendentem? nisi ante omnia id curet, ut sublata irrationalitate  $\sqrt{(zz+1)}$  per methodum Diophanteam acquirat fractionem rationalem, quam deinde per nostram methodum in §. 6. traditam in differentialia logarithmica resolvat: sed & hic processus operosi

rosi foret calculi; quare tutissimum erit ut statim ab initio dispiciatur, prout exempli cuiusque natura exigit, de commoda aliqua functione assumtae  $z$  substituenda in locum alterutrius indeterminatarum  $x$  vel  $y$ , quo immedia te preveniatur ad æquationem rationalem & simplicem, sicuti hic factum vidimus, ubi sola substitutione  $y=x\sqrt{(zz-1)}$  obtinuimus hæc tria simul, nempe indeterminatarum separationem, rationalitatem terminorum & maximam possibilem æquationis simplicitatem  $\frac{dy}{y} + \frac{zzdz}{z^3 + azz - z - a} = 0$ .

**IX.** Pergo ad methodum a me inventam integrandi æquationes differentiales sine adhibita indeterminatarum separatione, aliave ulla earum in alias transmutatione per substitutionem facienda; loquor hic de illis æquationibus  $pdx + qdy = 0$ , in quibus  $p$  &  $q$  designant functiones rationales & homogeneas indeterminatarum  $x$  &  $y$  utcunque inter se complicatarum atque permixtarum, modo indeterminatæ in singulis terminis eandem habeant exponentium summam, propter quod functiones, quæ ita sunt comparatae, ipsasque æquationes differentiales ex illis compositas voco *homogeneas*.

**X.** Postquam eiusmodi æquationes a fractionibus liberatae sunt ope multiplicationis, erunt illæ ordinis vel primi, vel secundi, vel tertii, vel cuiuscunque altioris; voco autem *ordinem primum, secundum, tertium &c.* ubi exponentium summa in quolibet termino obtinet dimensionis gradum primum, secundum, tertium &c. His ita definitis, formo sequentem tabellam, quæ conspectui offerit ordines æquationum canoniarum; per æquationem *canonicam* intelligo talem, quæ omnes æquationes particula-

culares alicuius ordinis in se complectitur ope coefficien-  
tium universalium singulis terminis præfixorum.

Tabella æquationum Canonicarum differentialium.

- I.  $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0.$
- II.  $(axx+bxxy+cyy)dx+(exx+fxy+gyy)dy=0.$
- III.  $(ax^3+bxxy+cxyy+ey^3)dx+(fx^3+gxxy+hxyy+iy^3)dy=0.$
- IV.  $(ax^4+bx^3y+cxyyy+exy^3+fy^4)dx+(hx^4+ix^3y+kxxyy+mxy^3+ny^4)dy=0.$
- V.  $(ax^5+bx^4y+cx^3yy \dots +hy^5)dx+(ix^5+kx^4y+mx^3yy \dots +qy^5)dy=0.$

XI. Ex hac tabella patet, æquationem canonicam cuiusque ordinis tot habere terminos præfixos ipsi  $dx$ , totidemque præfixos ipsi  $dy$ , quot habet unitates numerus ordinis unitate auctas. Sic æquatio ordinis primi, habet terminos utrobique duos; ordinis secundi, terminos tres; Tertii, quatuor; Quarti, quinque; & ita porro: Itaque in ordine primo sunt coefficientes universales quatuor, in secundo sunt sex, in tertio octo, in quarto decem &c. Iam dico has omnes æquationes posse integrari seu reduci ad æquationes finitas, exprimentes naturam linearum, quæ singulæ conveniunt suis respective æquationibus canonicis differentialibus. Istæ vero æquationes finitæ erunt semper algebraicæ vel saltem exponenciales, prout exponentes indeterminatarum fuerint vel rationales vel irrationales. Quandoquidem igitur æquationes canonicae in hac tabella continuanda comprehensæ, includunt omnes quæ dari possunt æquationes differentiales homogeneas & rationales, liquet, si ostendero modum canonicas integrandi, rem generaliter confessam fore pro quacunque eiusmodi æquatione differentiali integranda sine prævia indeterminatarum separatione: Hoc vero est, quod iam docere volo.

XII. In

XII. In antecessum notare convenit , cuicunque æquationi differentiali homogeneæ , sive sit rationalis,sive irrationalis,satisfacere lineam aliquam rectam , id quod ex eo patet, quia, si ponatur  $y=rx$ , adeoque  $dy=n dx$  (assumto coeffiente invariabili  $n$ ) iique valores pro  $y$  &  $dy$  in æquatione differentiali surrogentur , prodibit utique æquatio quæ divisa per  $dx$  , & per potentiam ipsius  $x$ , cuius exponens est ipse ordinis index, dabit æquationem algebraicam,ab indeterminatis liberam,inter cognitas  $a,b,c,$  &c. & incognitam  $n$  , eiusque varias dimensiones ; unde supposita radicum extractione ex æquationibus algebraicis , erit illius æquationis radix  $n$  coefficiens quæsitus in  $rx$  , quod ipsi  $y$  æquale ponebatur.

XIII. Ut res exemplo illustretur , capiamus æquationem differentiale canonicam ordinis secundi  $(axx+bxy+cyy)dx+(exx+fxy+gyy)dy=0$  , atque in ea substituamus  $rx$  pro  $y$  ;  $mxx$  pro  $yy$  &  $ndx$  pro  $dy$  : Quo facto habebitur  $(axx+nbxx+nncxx)dx+(exx+nfxx+nngxx)ndx=0$  ; Dividendo igitur ac more solito secundum ordinem dimensionum incognitæ  $n$  disponendo , resultat æquatio cubica  $gn^3+fn^2n+en+a=0$  , cuius radix  $n$  ducta in  $x$  dabit valorem ipsius  $y$ . Adeoque si construatur triangulum rectangulum (supposito coordinatas angulum rectum facere) cuius basis ad cathetum habeat rationem ut 1 ad  $n$  , dico hypotenusam huius trianguli in utramque partem prolongatam esse lineam satisfacentem æquationi differentiali canonicæ ordinis secundi , cuius coordinatæ sunt parallelae basi & catheto.

XIV. Loco alterius exempli ex homogeneis irrationalibus sit æquatio in §. 5. proposita  $axy+dx$

$\sqrt{xx+yy}=o$ . Ubi si ponatur  $nxxx$  pro  $yy$  &  $ndx$  pro  $dy$ , ac postea dividatur per  $x dx$ ; emerget  $na + \sqrt{1+nn}=o$ , quæ resoluta dat  $n=1:\sqrt{aa-1}$ . Facto itaque triangulo cuius basis ad cathetum sit ut  $1$  ad  $1:\sqrt{aa-1}$ , hoc est, ut  $\sqrt{aa-1}$  ad  $1$ , erit hypotenusa utrimque prolongata conveniens linea æquationi differentiali propositæ  $adx + dx\sqrt{xx+yy}=o$ , eiusque coordinatæ lateribus parallelæ. Si  $a=1$ , abit hypotenusa in rectam applicatis parallelam, abscessæ vero evanescunt: Hicque casus omnino fluit ex æquatione ad curvam quam supra §. 7. invenimus  $x^4 + 2bRyx - bbR^2 = o$ , faciendo enim  $b$  (quia est arbitraria) = 0, habetur  $x^4 = o$ , adeoque  $x = o$ .

XV. Propero nunc ad methodum eruendi quoque lineas curvas, æquationibus canonics differentialibus cuiusque ordinis respondentes, h. e. integrandi illas æquationes universaliter, idque sine interventu separationis indeterminatarum. Hoc ut præstetur, forma da est æquatio finita, in quam ingrediantur tot litteræ assumptiæ constantes, quot sunt termini in æquatione canonica integranda, & quæ differentiata easdem cum hac obtineat dimensiones indeterminatarum  $x$  &  $y$ . Illa autem æquatio finita talem (ceu cuilibet attendenti haud ægre patescit) habere debet formam  $(x+\alpha y)^\pi \times (x+\beta y)^\tau \times (x+\gamma y)^\varrho \times (x+\epsilon y)^\Phi \times \&c. = C$ , ut nimirum constituatur productum ex factoribus binomialibus  $x+\alpha y$ ,  $x+\beta y$ ,  $x+\gamma y$ ,  $x+\epsilon y$  &c. ad potentias  $\pi$ ,  $\tau$ ,  $\varrho$ ,  $\Phi$  &c. elevatis, quod æquale fiat quantitati constanti  $C$ , ubi coefficienes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\epsilon$ , ut & exponentes  $\pi$ ,  $\tau$ ,  $\varrho$ ,  $\Phi$ , &c. sunt assumptiæ per calculum investigandi. Quod attinet ad numerum factorum horum binomialium, assumendi sunt duo

duo pro canonica primi ordinis, tres pro canonica secundi ordinis, quatuor pro canonica tertii ordinis, atque ita consequenter. Hoc nempe pacto fit, ut tot simul habeantur assumti coefficientes & exponentes, quot sunt termini in proposita æquatione canonica. Unde differentiando, eum in modum quem statim exponam, assumtam æquationem formatam ex factoribus binomialibus, prodibit æquatio differentialis eiusdem ordinis & tot præcise terminorum, quot canonica habet, adeo ut totidem institui possint comparationes inter utriusque terminorum coefficientes, quæ determinabunt assumtos coefficientes & exponentes, ipsamque adeo æquationem finitam, quæ desideratur, pro data canonica differentiali.

XVI. Dabo exemplum unicum & quidem omnium facilissimum, quod abunde illustrabit methodum: Sit æquatio canonica primi ordinis  $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0$  integranda, cui suppono convenire hanc æquationem finitam  $(x+ay)^{\pi} \times (x+\beta y)^{\tau}=C$ ; indagandi ergo sunt valores litterarum  $\alpha, \beta, \pi, \tau$ . Hoc ut commode fiat, sumo, priusquam differentietur, logarithmos assumtæ æquationis finitæ, & habebo  $\pi/(x+ay)+\tau/(x+\beta y)=1/C$ , quæ postea more solito differentiata mihi dat  $\frac{\pi dx+\alpha\pi dy}{x+ay} + \frac{\tau dx+\beta\tau dy}{x+\beta y} - d\ln C = 0$ ; seu peracta reductione, multiplicando scilicet per crucem, ut denominatores tollantur,  $(\pi+\tau)x dx + (\beta\pi+\alpha\tau)y dx + (\alpha\pi+\beta\tau)x dy + (\alpha\beta\pi+\alpha\beta\tau)y dy = 0$ . Itaque hanc inter & canonicam  $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0$  instituenda est comparatio terminorum similium ad determinandos coefficientes & exponentes assumtos  $\alpha, \beta, \pi, \tau$ , unde hæ quatuor emergent æqualitates  $\pi+\tau=\alpha, \beta\pi+\beta\tau=\beta, \alpha\pi+\beta\tau=\gamma, \alpha\beta\pi+\alpha\beta\tau=\delta$ .

Computo iam recte instituto , reperientur valores optati tam coefficientium quam exponentium, quemadmodum sequitur, scilicet

$$\begin{aligned} a &= \frac{b+c-\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}}{2a} \\ c &= \frac{b+c+\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}}{2a} \\ \pi &= \frac{ab-ac+av(bb+2bc+cc-4ae)}{2\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}} \\ \tau &= \frac{-ab+ac+av(bb+2bc+cc-4ae)}{2\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}} \end{aligned}$$

Ubi notandum , posse hos valores simplicius exprimi, reducendo nempe  $x$  in utroque factore binomiali ad communem denominatorem  $2a$ , & hunc postea omittendo ; sicuti etiam dividendo exponentes inventos percommunem quantitatem  $a : 2V(bb+2bc+cc-4ae)$ . Liquet enim , si  $(x+ay)^\pi \times (x+cy)^\tau$  fuerit  $=$  constanti , fore etiam  $(2ax+2axy)^\pi \times (2ax+2acy)^\tau =$  constanti. His ita monitis , & scripto brevitatis gratia  $m$  pro  $\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}$  atque  $C$  maiusculo pro quantitate constanti arbitraria , dico hanc æquationem finitam  $(2ax+(b+c-m)y)^{(b-c+m)} \times (2ax+(b+c+m)y)^{(-b+c+m)} = C$  , esse integralem æquationis differentialis canonicae primi ordinis  $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0$  , omnes possibles casus particulares huius ordinis in se complectentis. Potest vero inventa illa æquatio finita mutari in hanc formam , adhibita aliqua dexteritate ,  $(axx+byx+cxy+eyy)^{(-b+c+m)} \times (2ax+(b+c+m)y)^{(2b-2c)} = C$  , vel in hanc aliam nonnihil diversam  $(axx+byx+cxy+eyy)^{(b-c+m)} \times (2ax+(b+c+m)y)^{(-2b+2c)} = C$ .

*Coroll. I.*

XVII. Hinc si  $b=c$  , erit tunc in prima æquatio-

tione inventa , neglecto communi exponente  $m$  utriusque factorum ,  $(2ax+(2b-m)y) \times (2ax+(2b+m)y) = C$  ; hoc est , multiplicatione actualiter peracta , erit  $4a^2xx + 8abxy + (4bb-mm)yy = C$ , sive, restituto valore ipsius  $mm$  & dein per  $4a$  diviso , proveniet  $axx+2bxy+eyy=C$ , quod idem etiam ex duabus mutatis provenit ; sicuti omnino provenire debet per vulgarem integrandi modum, qui hoc in casu locum habet, cum enim nunc sit  $adx + b(ydx+xdy) + eydy = 0$ , cuius singulæ partes sunt integrabiles ; integrantur ergo , & erit duplum sumendo,  $axx+2bxy+eyy=C$ ; ut modo habuimus.

## Coroll. 2.

XVIII. Esto iam alterutra  $a$  vel  $e=0$ ; erit  $m=b+c$ , quo substituto in prima nostra æquatione mutabitur illa (posito  $e=0$ ) in hanc  $x^b \times (ax+by+cy)^c = C$  vel (posito  $a=0$ ) in hanc  $y^c \times (bx+cx+ey)^b = C$ . Idem dant duæ reliquæ, in quas prima illa mutata fuit.

## Coroll. 3.

XIX. Si  $m=0$ , hoc est , si  $bb+2bc+cc=4ae$  ; prima nostra generalis æquatio finita respondens differentiali canonice primi ordinis , migraret in hanc quæ absurdum quid contineret  $(2ax+(b+c)y)^{b-c} \times (2ax+(b+c)y)^{-b+c} = C$ : Quia enim factores nunc sunt æquales, exponentes vero, utpote alter alterius negativus, se mutuo destruuntur, haberetur  $(2ax+(b+c)y)^0 = C$ , sive  $1 = C$  i.e. unitas=quantitati arbitrariæ, quod utique esset absonum & nihil indicaret, idemque etiam ex reliquis duabus emerget. Quocirca cautela aliqua hic opus est , ne quis credit nullam prorsus in hoc casu dari æquationem inter coordinatas  $x$  &  $y$  ; sic itaque statuo : Fingamus loco exponentis  $e$  haberi exponentem generalem  $p$  , ita ut sit

$(2ax + (b+c)y)^p = C$ ; atque cum  $C$  denotet quantitatem arbitrariam, vocatur illa  $C^p$ ; eritque  $(2ax + (b+c)y)^p = C^p$ , unde extracta radice exponentis  $p$ , fiet  $2ax + (b+c)y = C$ ; hoc autem valet qualiscunque sit  $p$ , ergo etiam quando  $p=0$ . Proinde dico, æquationem  $2ax + by + cy = C$  satisfacere in casu quo  $m=0$ , seu quo  $bb+2bc+cc=4ae$ . Atqui hoc ita se habere apparebit, si in æquatione  $(ax+by)dy + (cx + \frac{bb+2bc+cc}{4a}y)dy = 0$ , pro  $x$  &  $dx$  ponantur eorum valores ex æquatione inventa eliciti,  $-(b+c)y : 2a$  &  $-(b+c)dy : 2a$ , etenim evanescet ut fieri debet æquatio proposita  $(ax+by)dx + (cx + \frac{bb+2bc+cc}{4a}y)dy = 0$ . Hinc videmus, nullam lineam curvam huic casui inservire, sed rectam tantum ex hac æquatione  $2ax + by + cy = 0$  describendam. Quæ eadem quoque reperitur, si adhibetur regula in §. 12. tradita pro determinandis lineis rectis, quas in universum omnes æquationes canonicae admittunt, ut ibidem ostendi.

#### Coroll. 4.

XX. Quod si quatuor coefficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $e$  sint proportionales, adeoque si  $ae=bc$  in hoc casu erit  $m=b-c$ ; id quod quamlibet ex tribus nostris æquationibus finitis mutat in  $(2ax+2cy)^{2b-2c}=C$ , vel, neglecto exponente, in  $ax+cy=C$ , quæ iterum est ad lineam rectam. Quod quidem immediate colligi potest ex proposita æquatione differentiali, quæ in præsenti casu est  $(ax+by)dx + (cx + \frac{bc}{a}y)dy = 0$  divisibilis per  $ax+by$ ; prodit enim  $dx + \frac{c}{a}dy = 0$ , seu  $adx+cdy=0$ ; adeoque integrando, erit  $ax+cy=C$ , ut ante. Et hic quidem casus cum altero §. præcedentis sunt fortasse soli, qui per

per solas lineas rectas solvi possunt , omnemque adeo curvam excludunt.

*Coroll. 5.*

**XXI.** Cum in æquatione canonica indeterminatae  $x, y$  earumque differentiales  $dx, dy$  simili gaudean habitu & relatione inter se invicem , manifestum est posse mutari æquationem finitam in aliam æquipollentem , scribendo tantum in illa  $y$  pro  $x$  ,  $e$  pro  $a$  ,  $c$  pro  $b$  & vice versa. Quo facto prima nostra æquatio finita  $(2ax+by+cy-my)^{b-c+m} \times (2ax+by+cy+my)^{-b+c+m} = C$ , induet hanc aliam formam, licet re ipsa non diversam  $(2ey+bx+cx-mx)^{c-b+m} \times (2ey+bx+cx+mx)^{-c+b+m} = C$ . Quod verum esse comperietur , si utraque differentietur eo modo quo usi sumus in §. 16. reducendo nempe ad logarithmos ante differentiationem. Ita quoque reliquæ duæ in has æquipollentes permutantur,  $(axx+byx+cyx+eyy)^{b-c+m} \times (2ey+(b+c-m)x)^{-2b+2c} = C$ ; &  $(axx+byx+cyx+eyy)^{-b+c+m} \times (2ey+(b+c+m)x)^{2b-2c} = C$ .

*Coroll. 6.*

**XXII.** Illud quoque notatu dignum reproto, quod omnes curvæ , quæ respondent æquationibus nostris finitis , habent areas suas quadrabiles, uno tantum casu excepto , quando scilicet  $b=c$ . Quod sane pro parodoxo haberi posset , nisi res admodum facile demonstraretur ex ipsa æquatione canonica  $(ax+by)dx+(cx+ey)dy = o$  apte disposita. Liquet enim , illam ita posse ordinari ,  $adx+cydx+cx dy+eydy = (c-b)ydx$ , ut integrabilis fiat per partes prioris membra , alterum vero designet elementum areae  $ydx$  in  $c-b$  ductum ; integrando ita-

itaque per partes prodibit  $\frac{1}{2}axx + cx\gamma + \frac{1}{2}eyy = (c - b)$   
 $sydx + C$ , unde  $sydx$  seu area curvæ erit  $= \frac{axx + 2cxy + eyy - 2c}{c - b}$   
& proinde quadrabilis, præterquam in casu  $c = b$ , in quo  
haberetur  $= \infty$ , h. e.  $=$  infinito, quod ipsum indicio est  
in illo casu aream curvæ esse inquadrabilem; etiamsi hoc  
iam concludi possit ex ipsa æquatione ad curvam, quam  
in §. 17. hanc esse invenimus  $axx + 2bxy + eyy = 0$ , &  
quæ si examinetur, ad hyperbolam vel ellipsin spectare  
observabitur.

### Scholium.

XXIII. Ex hoc, quod ad longum deduximus, spe-  
cimine pro integranda æquatione canonica primi ordinis,  
sine præcedanea indeterminatarum sequestratione, nemo  
non videt, methodum esse generalem pro quocunque ordine,  
assumendo pro secundo ordine hanc æquationem  $(x + ay)^\pi$   
 $\times (x + \beta y)^\tau \times (x + \gamma y)^\vartheta = C$ ; pro tertio hanc  $(x + ay)^\pi$   
 $\times (x + \beta y)^\tau \times (x + \gamma y)^\vartheta \times (x + \epsilon y)^\phi = C$ , & ita pro cæteris,  
sic enim fiet, ut pro quolibet ordine tot reperiantur lit-  
teræ assumtiones  $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \&c. \pi, \tau, \vartheta, \phi, \&c.$  quot  
sunt coëfficientes in æquatione differentiali canonica illius  
ordinis, atque hoc modo obtineantur totidem æqualita-  
tes ad determinandos tam coëfficientes  $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \&c.$   
quam exponentes  $\pi, \tau, \vartheta, \phi, \&c.$  In altioribus evadit  
calculus operosior quidem, ac propterea molestior, sed  
ideo methodus haud quaquam difficilior, quippe quæ uni-  
formis est in omnibus.

C. G.  
DE CASIBVS

quibus integrari potest

ÆQVATIO DIFFERENTIALIS

$$ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy.$$

OBSERVATIONES QVÆDAM.



Um Anno 1721. Venetiis inviserem Cl. Zendrinum Medicum & Mathematicum celebrem eo die quo ab urbe discedere constitueram, accidit ut Nicolai Bernoulli Ioh. Fil. mentionem faceret, eumque iam ab aliquo tempore Venetiis esse mihi affirmaret; igitur mox, ut optaveram, in amicitiam humanissimi viri perveni, ea- que causa abitum meum in sextum diem distuli.

Inter colloquia quæ illo tempore habuimus, & ex quibus me multum profecisse semper fatebor, æquationem quandam differentialem ab Ill. Riccato olim propositam mihi ostendit huiusmodi :  $ax^m dx + by^2 x^p dx = dy$ . ut tentarem, an quo casu illam vel separare vel integrare possem. Inveni igitur paullo post, si æquatio generalior ponatur  $ay^f x^m dx + by^n x^p dx = dy$ .  $y$  determinari posse per  $x$  quoties  $m = \frac{fp + f - p - n}{n - 1}$ , nempe si  $c$  fuerit radix huius æquationis  $bc^{n-1} + ac^{f-1} + \frac{p-m}{n-f} = 0$ . esse  $y = cx^{\frac{-p-1}{n-1}}$  qui casus omnium facilissimus est. Deinde datis 30. Iul. A. 1721. litteris ad Cl. Nicol. Bernoullum, tres alios ca-

A a

fus

sus integrabiles æquationis  $ax^m dx + by^n x^p dx = dy$ . detexi, nimirum (1) si ponatur  $n=1, p=-1$  esse  $y = \frac{a}{b+m+1} + fx^b$  ubi  $f$  sit quantitas constans quæcunque. (2) Si  $n=2, m=-3p-4$  esse  $y = \sqrt{\frac{-a}{b}} x^{-2p-2} - \frac{(p+1)}{b} x^{-p-1}$ . (3) Si  $n=2, m=-\frac{p-4}{3}$  esse  $y = 1: \sqrt{\frac{-a}{b}} x^{\frac{2p+2}{3}} - \frac{(p+1)}{3a} x^{\frac{p+1}{3}}$  quas integrationes ut novas placere sibi testatus est Vir Cl. in responso quod ad meas dedit; paullo post aliis litteris significauit se præter casus mihi observatos modum inventisse peculiarem ex æquatione  $ax^m dx + by^2 x^p dx = dy$  alios quotlibet casus integrabiles eruendi & pro iis æquationes algebraicas assignandi, rem simul exemplo confirmavit, posito nempe  $m = -\frac{1-p-8}{3}$  esse

$$y = \frac{x^{-2p-2} + \left(\frac{p+1}{-b}\right)x^{\frac{-1-p-5}{3}} \sqrt{\frac{b}{-a} + \frac{(p+1)^2}{-3ab}} x^{\frac{-4p-4}{3}}}{x^{\frac{-2p-2}{3}} \sqrt{\frac{b}{-a} + \frac{(p+1)}{3a}} x^{\frac{-p-1}{3}}}$$

Tandem litteris 6. Dec. A. 1721. ad me datis statuit æquationem illam differentialem esse integrabilem si  $m = \frac{-2np-4n+p}{2n+1}$  ubi per  $p$  intelligit numerum rationalem, per  $n$  vero numerum integrum quæcunque. Atque hæc ipsa est formula quam ad separationem indeterminatarum huius æquationis dedit Cl. Daniel Bernoullius in Exercitation. Mathemat. p. 77. s. ubi per duo lemmata alternatim casus omnes methodo per quam ingeniosa & facili deduxit.

Consideravit autem æquationem huiusmodi  $ax^n dx + uudx = bdu$ . alteri illi æquivalentem ex qua scilicet non solum exponens  $p$ , sed etiam uterque coefficiens  $a$  vel  $b$  pro lubitu in alium quæcunque transmutari potest.

Pona-

Ponamus exempli causa datam æquationem  $cu^g du + fu^b y^2 dy = dy$  reducendam esse ad hanc formam (A) ...  $x^n dx - y^2 dx = dy$  sumatur  $u = ex^k, z = by$ . ubi sit

$c = -(b+1)^{\frac{2}{g+b+2}} c^{\frac{-1}{g+b+2}} f^{\frac{-1}{g+b+2}}, b = \frac{ce}{b+1}, k = \frac{1}{b+1}$   
 fiet  $m = \frac{g-b}{b+1}$  vel, si reducenda sit eadem æquatio ad hanc formam (B) ...  $dx - y^2 x^n dx = dy$  sumatur  $u = ex^k, z = by$  ubi  
 sit  $c = -(g+1)^{\frac{2}{g+b+2}} c^{\frac{-1}{g+b+2}} f^{\frac{-1}{g+b+2}}, b = \frac{ce}{g+1}, k = \frac{1}{g+1}$   
 fiet  $m = \frac{b-g}{g+1}$  ubi observandum est in æquatione Bernoulli.

$ax^{\frac{-4n}{2n+1}} dx + y^2 dx = bdy$  casus omnes exponentis  $\frac{-4n}{2n+1}$ , si  $n$  sit numerus affirmativus, & casus omnes  $\frac{-4n}{2n+1}$  si  $n$  sit negativus reduci posse ad formulam A, omnes vero casus exponentis  $\frac{1-4n}{2n+1}$  si  $n$  sit negativus & omnes  $\frac{-4n}{2n+1}$  si  $n$  sit affirmativus redigi ad formulam B.

Iam posito  $2n-1=p$  fiat

$$x^{\frac{-2n+1}{p}} + Ap_{\frac{n-0}{n+0}} x^{\frac{-2n-0}{p}} + Bp_{\frac{n-1}{2n-1}} x^{\frac{-2n-1}{p}} + Cp_{\frac{n-2}{3n-3}} x^{\frac{-2n-2}{p}} \\ + Dp_{\frac{n-3}{4n-6}} x^{\frac{-2n-3}{p}} + Ep_{\frac{n-4}{5n-10}} x^{\frac{-2n-4}{p}} + Fp_{\frac{n-5}{6n-15}} x^{\frac{-2n-5}{p}} + \text{etc.} \\ = 1 + Ap_{\frac{n-1}{n-1}} x^{\frac{-1}{p}} + Bp_{\frac{n-2}{2n-3}} x^{\frac{-2}{p}} + Cp_{\frac{n-3}{3n-6}} x^{\frac{-3}{p}} \\ + Dp_{\frac{n-4}{4n-10}} x^{\frac{-4}{p}} + Ep_{\frac{n-5}{5n-15}} x^{\frac{-5}{p}} + Fp_{\frac{n-6}{6n-21}} x^{\frac{-6}{p}} + \text{etc.}$$

leges quibus progrediuntur harum serierum termini per spiculæ sunt, crescunt enim omnes numeri in coefficientibus ordine naturali præter ultimos denominatorum qui servant progressionem triangularium 1, 3, 6, 10, &c. litteræ maiores A, B, C, &c. recepto more indicant coefficientes quæ proxime antecedunt.

His præmissis considero æquationem generalem

$cu^8 du + fu^5 y^2 du = dy$  ut iam reductam ad alterutram formularum A vel B & infinitorum illorum casuum integrationes uno theoremate complector: Aequationis different.

$$x^{\frac{-(n+2n)}{2n-1}} dx - x^{\frac{(-2n+2n)}{2n-1}} y^2 dx = dy \quad (\text{ubi } n \text{ sit numerus integer affirmativus})$$

Signum  $\Leftrightarrow$  denotat divisionem ambiguam, si enim in formula æquationis diff. ex signis  $\mp \pm$ , datum fuerit superius (qui est casus formulæ A) sumendus est in integrali divisor quem indicat angulus a linea superiore ad horizontalem factus nempe  $\beta$ ; si inferius siquidem in æquatione diff. datum fuerit, sumatur in integrali divisor quem inferior linea ad horizontalem ascendens designat ut fiat  $y = \frac{\beta}{\alpha}$ .

Ne quis vero in usu huius canonis hæsitet, exemplis nonnullis eundem illustrabimus quibus intellectis ulteriores casus non erunt difficiles.

I. Sit integranda æquatio  $x^{-4} dx - y^2 dx = dy$  quæ pertinet ad formulam A, fiet  $n=1$ .  $p=1$ .  $\alpha=x^{-2}$ ,  $\beta=1$ . Ergo integralis quæsita  $y = \frac{\alpha}{\beta} = x^{-1} + x^{-2}$  unde sequitur æquationis  $dx - y^2 x^{-4} dx = dy$  integralem esse  $y = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{x^{-1} + x^{-2}}$ .

II. Sit integranda æquatio  $x^{-\frac{8}{3}} dx - y^2 dx = dy$ , fiet  $n=2$ ,  $p=3$ ,  $\gamma = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{x^{-3}}{x^{-4} + 3x^{-\frac{4}{3}} + 3x^{-\frac{5}{3}}} = \frac{x^{-3}}{1 + 3x^{-\frac{1}{3}}}$ , unde sequitur æquationis  $dx - y^2 x^{-\frac{8}{3}} dx = dy$  integralem esse  $y = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{x^{-\frac{1}{3}}}$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1+3x^{\frac{-1}{3}}}{x^{\frac{-3}{3}} + 3x^{\frac{-4}{3}} + 3x^{\frac{-5}{3}}}$$

III. Eodem modo æquationis  $x^{\frac{-(6+6)}{5}} dx - y^2 x^{\frac{-(6+6)}{5}} dx = dy$  integralis invenietur

$$y = \alpha \Leftrightarrow \beta = (x^{\frac{-5}{5}} + 5x^{\frac{-6}{5}} + 10x^{\frac{-7}{5}} + \frac{25}{3}x^{\frac{-8}{5}})$$

$$\Leftrightarrow (1 + 5x^{\frac{-1}{5}} + \frac{25}{3}x^{\frac{-2}{5}})$$

IV. Æquationis  $x^{\frac{-(8+8)}{7}} dx - y^2 x^{\frac{(8+8)}{7}} dx = dy$ .

integralis est

$$y = (x^{\frac{-7}{7}} + 7x^{\frac{-8}{7}} + 21x^{\frac{-9}{7}} + \frac{98}{3}x^{\frac{-10}{7}} + \frac{343}{15}x^{\frac{-11}{7}})$$

$$\Leftrightarrow (1 + 7x^{\frac{-1}{7}} + \frac{98}{5}x^{\frac{-2}{7}} + \frac{343}{15}x^{\frac{-3}{7}}).$$

Quod si iam progrediamur ad æquationem differentialem uno termino ampliorem  $ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy$  (ex qua tamen duæ coefficientium  $a, b, c$ , pro lūbitu in alias transmutari possunt, ut supra indicatum fuit) similiter varii se offerunt casus integrabiles quorum non-nullos explicabimus.

I. Si  $ax^{\frac{4n+2b+4}{-2n+1}} dx + byx^{-1} dx + cy^2 dx = dy$ . æquatio erit integrabilis dato  $n$  numero quo cunque integro.

Demonstr.

Ponatur  $y = \frac{-(b+1)}{c} x^{-1} + x^{-b-2} u$  transformabitur æquatio data in hanc

A a 3

ax

$$\begin{aligned}
 & ax^{\frac{4n+2b+4}{2n+1}} dx - \left( \frac{b^2+b}{c} \right) x^{-2} dx + bx^{-b-3} u dx \\
 & + (b^2+2b+1)x^{-2} dx - (2b+2)x^{-b-3} u dx + cx^{-2b-4} u^2 dx \\
 & = \left( \frac{b+1}{c} x^{-b-2} \right) dx + (b+2)x^{-b-3} u dx + x^{-b-2} \\
 & \text{sic destructis terminis æqualibus, } ax^{\frac{4n+2b+4}{2n+1}} dx + cx^{\frac{-2b-4}{b+2}} \\
 & u^2 dx = x^{-b-2} du, \text{ multiplicentur omnia per } x. \text{ fit} \\
 & ax^{\frac{-2nb+b+2}{2n+1}} dx + cx^{-b-2} u^2 dx = du, \text{ tandem ponatur} \\
 & x = v^{\frac{-1}{b+1}}. \text{ fiet } \frac{-a}{b+1} v^{\frac{-4n}{2n+1}} dv, \frac{-c}{b+1} u^2 dv = du, \text{ quam constat} \\
 & \text{esse integrabilem si } n \text{ fit numerus quicunque integer.}
 \end{aligned}$$

Potest etiam sic demonstrari : sit  $ax^{\frac{-4f+2b}{2f+1}} dx$   
 $+ byx^{-1} dx + cy^2 dx = dy$ , (quæ æquatio non differt a  
priori, si ponatur  $n=f\pm 1$ ) fiat  $y=x^b u$  mutabitur æqua-  
tio in hanc  $ax^{\frac{-4f+2b}{2f+1}} dx + cx^{2b} u^2 dx = x^b du$ , divisis omni-  
bus per  $x^b$  fit  $ax^{\frac{-4f+b-2fb}{2f+1}} dx + cx^b u^2 dx = du$ . Ponatur  
 $x = z^{\frac{1}{b+1}}$ . fiet  $\frac{a}{b+1} z^{\frac{-4f}{2f+1}} dz + \frac{c}{b+1} u^2 dz = du$ , quam con-  
stat esse integrabilem si  $f$  sit numerus quicunque in-  
teger.

*Exempl. 1.*

Si  $m=2b$  (cui respondet  $n=1$ ) hoc est, si æqua-  
tio data sit  $ax^{2b} dx + byx^{-1} dx + cy^2 dx = dy$

$$\text{erit } y = (-ax)^{\frac{1}{2}} x^b.$$

*Exempl. 2.*

Si  $m=\frac{2b-4}{3}$ , (cui respondet  $n=-2$ ) hoc est si æ-  
qua-

quatio data sit  $ax^{\frac{2b-4}{3}}dx + byx^{-1}dx + cy^2dx = dy$ .

$$\text{erit } y = \frac{1}{(-c:a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{-b+2}{3}} - (\frac{b+1}{3a})x^{\frac{-2b+1}{3}}}$$

*Exempl. 3.*

Si  $f=1$  hoc est, si æquatio data sit  $ax^{-2b-4}dx + byx^{-1}dx + cy^2dx = dy$ , erit  $y = (-a:c)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{b-2}{2}} - (\frac{b+1}{c})x^{-1}$ . atque sic in similibus exemplis determinari poterit valor  $y$  per  $x$  & constantes; singularis autem casus est ubi  $m$  non determinatur per coefficientes datas, scilicet si fuerit  $ax^{-2}dx + byx^{-1}dx + cy^2dx = dy$ , ubi fit

$$y = \left( \frac{-(b+1) + \sqrt{(b+1)^2 - 4ac}}{2c} \right) x^{-1}. \quad \text{Gabriel Manfredius}$$

in tract. de constructione æquationum differ. primi gradus p. 167. art. 105. cum incidisset in æquationem  $nx^2dx - ny^2dx + x^2dy = xydx$ . hæc, inquit, æquatio non apparet quomodo construibilis sit, neque enim videmus quomodo illam integremus, nec quomodo indeterminatas ab invicem separamus. Sed integrari potest per formulam nostram hoc modo: dividatur æquatio per  $x^2$ , fiet  $ndx - x^{-1}ydx - nx^{-2}y^2dx = dy$ , positoque  $x = z^{-1}$  erit  $-nz^{-2}dz + z^{-1}ydz + ny^2dz = dy$ . Ergo  $y = \frac{(-1 + \sqrt{n^2 + 1})z^{-1}}{n}$ .

II.

Si æquatio A...  $ax^{p-1}dx + byx^pdx + cy^2dx = dy$  integrari potest, erit etiam æquatio

$$B... \frac{(\frac{abp+a^2c}{p}x^{2p})}{p} + \frac{(2ac+bp)}{p}x^pudx + cu^2dx = du$$

integrabilis.

*Demonstr.*

## Demonstratio.

$$\begin{aligned}
 & \text{Ponatur } y = \frac{a}{p}x^p + u, \text{ fiet} \\
 ax^{p-1}dx & - - - ux^{p-1}dx \\
 byx^pdx & \qquad \qquad \qquad \frac{ab}{p}x^{2p}dx + bux^pdx \\
 cy^2dx & \qquad \qquad \qquad \frac{a^2c}{2}x^{2p}dx + \frac{2ac}{p}ux^pdx + cu^2dx \\
 = dy & \qquad \qquad \qquad du + ax^{p-1}dx
 \end{aligned}$$

quæ est ipsa æquatio B. si pro  $u$  ponatur  $y$ , atque similiter, si aliqua æquatio integrabilis revocari possit ad B demonstratum est æquationem A esse integrabilem.

## Exempl. 1.

$$\begin{aligned}
 & \text{Cum æquatio } ax^{p-1}dx + hyx^pdx + \frac{b}{a}y^2dx = dy, \\
 & \text{sit integrabilis (fit enim } y = \frac{-a}{b}x^{-1}) \text{ erit etiam} \\
 & \left( \frac{ab+abp}{pp} \right) x^{2p}dx + \left( \frac{2b+bp}{p} \right) yx^pdx + \frac{b}{a}y^2dx = dy \text{ integrab. quæ æquatio revocari potest ad hanc formam} \\
 & ax^{\frac{(b^2-4ac)}{ac}+\frac{b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}dx + byx^{\frac{(b^2-4ac)+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}dx \\
 & \qquad \qquad \qquad + cy^2dxdy.
 \end{aligned}$$

$$\text{unde eruitur } y^{\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})x^{\frac{(b^2-4ac)+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}-c}{2c}}.$$

## Exempl. 2.

$$\begin{aligned}
 & \text{Quoniam æquatio } ax^{\frac{-2b-ac}{b}}dx + byx^{\frac{-b-ac}{b}}dx \\
 & \qquad \qquad \qquad + cy^2dx = dy \\
 & \text{est integrabilis, (fit enim } y = \frac{-b-ac}{c}x^{\frac{-b-ac}{b}} - \frac{1}{c}x^{-1}) \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{erit}
 \end{aligned}$$

$$\text{erit etiam } \frac{-ab^3}{(b+ac)^2} x^{\frac{-2b-2ac}{b}} dx + \frac{abc-b^2}{(-b+ac)} x^{\frac{-b-ac}{b}} u dx \\ + cu^2 dx = du.$$

$$\text{integrabilis } \& u = \frac{-bb}{bc+ac} x^{\frac{-b-ac}{b}} - \frac{1}{c} x^{-1}.$$

*Exempl. 3.*

$$\text{Quoniam ex æquatione } ax^{\frac{ac-2b}{b}} dx + byx^{\frac{ac-b}{b}} dx \\ + cy^2 dx = dy, \text{ fit } y = \frac{ac-b}{ab} x^{\frac{ac+b}{b}} - \frac{b}{a} x$$

$$\text{Erit etiam } \frac{(2a^2c-ab)b^2}{(ac-b)^2} x^{\frac{2ac-2b}{b}} dx + \frac{(3abc-b)^2}{ac-b} x^{\frac{ac-b}{b}} u dx \\ + cu^2 dx = du,$$

$$\text{integrabilis } \& u = \frac{b^2}{ac-b} x^{\frac{ac}{b}}.$$

### III.

In quibusunque casibus integrari potest  
**A** —  $ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy$ .  
 poterit etiam integrari

$$\text{B} -- \frac{-c}{m+1} v^{\frac{-m}{m+1}} dv - bu^{\frac{-bu}{m+1}} v^{\frac{p-m}{m+1}} dv - \frac{a}{m+1} u^{\frac{2}{m+1}} dv = du.$$

*Demonstr.*

Ponatur  $y = u^{-1}$  mutabitur æquatio A in  
 $ax^m dx + bu^{-1} x^p dx + cu^{-2} dx = -u^{-2} du$ .  
 Hæc multiplicetur per  $-u^{-2}$  fiet  $-adx - bux^p dx - ax^m$   
 $u^2 dx = du$ . positoque  $x = v^{\frac{1}{m+1}}$  prodibit

$$\text{B} -- \frac{-c}{m+1} v^{\frac{-m}{m+1}} dv + \frac{-b}{m+1} uv^{\frac{p-m}{m+1}} dv - \frac{a}{m+1} u^{\frac{2}{m+1}} dv = du.$$

B b

*Exempl.*

## Exempl. 1.

Quoniam æquatio  $ax^{\frac{-2b-ac}{b}}dx + byx^{\frac{-b-ac}{b}}dx + cy^2dx = dy$  est integrabilis, ut antea dictum, poterit etiam integrari  $\frac{bc}{ac+b}v^{\frac{ac+2b}{ac-b}}dv + \frac{b^2}{ac+b}v^{\frac{b}{ac-b}}udv + \frac{ab}{ac+b}u^2dv = du$ . quæ reduci potest ad  $ax^{\frac{-ac-2}{ac+1}}dx + byx^{\frac{-1}{ac+1}}dx + cy^2dx = dy$ .

## Exempl. 2.

Quoniam æquatio  $ax^{\frac{ac-2b}{b}}dx + byx^{\frac{ac-b}{b}}dx + cy^2dx = dy$  est integrabilis (vid. sup. Ex. 3.) erit etiam  $\frac{-c}{ac-b}x^{\frac{2b-ac}{ac-b}}dx - \frac{b^2}{ac-b}ux^{\frac{b}{ac-b}}dx - \frac{ab}{ac-b}u^2dx = du$ . quæ revocari potest ad hanc formam

$$ax^{\frac{2-ac}{ac-1}}dx + byx^{\frac{1}{ac-1}}dx + cy^2dx = dy \text{ integrabilis.}$$

## Exempl. 3.

Quoniam  $ax^{-2}dx + byx^{\frac{-1+\sqrt{1-4ac}}{2}}dx + cy^2dx = dy$  est integrabilis, fit enim  $y = \left(\frac{-1+\sqrt{1-4ac}}{2c}\right)x^{\frac{-1}{2}}$   
 $\frac{-b}{c}x^{\frac{-1+\sqrt{1-4ac}}{2}}$  erit etiam integrabilis.

$$ex^{-2}dx + bux^{\frac{-3+\sqrt{1-4ac}}{2}}dx + ay^2dx = dy$$

$$\& fiet y = I: \left(\frac{(-1+\sqrt{1-4ac})}{2a}x - \frac{b}{a}x^{\frac{1+\sqrt{1-4ac}}{2}}\right)$$

## IV.

Si in æquatione generali ponatur  $c=0$  æquatio erit integrabilis dato  $\frac{m-p}{p+1}$  numero integro affirmativo, potest autem hæc æquatio ad simpliciores terminos reduci, si po-

Si ponatur  $x = z^{\frac{1}{p+1}}$ , fiet enim  $az^{\frac{m-p}{p+1}} dz + bydz = dy$ . Ergo  $ax^n dx + bydx = dy$  erit integrabilis si  $n$  sit numerus integer positivus.

*Exempla.*

$$\text{Si } n=1 \text{ erit } y = -\frac{a}{b}x - \frac{a}{bb}$$

$$\text{Si } n=2 \text{ erit } y = -\frac{a}{b}x^2 - \frac{2ax}{bb} - \frac{2a}{b^3}$$

$$\text{Si } n=3 \text{ erit } y = -\frac{a}{b}x^3 - \frac{3ax^2}{bb} - \frac{6a}{b^3}x - \frac{6a}{b^4}$$

& generatim dato  $n$  numero quocunque erit  $y =$  seriei infinitæ

$$-\frac{a}{b}x^n - \frac{an}{2}x^{n-1} - \frac{an(n-1)}{3}x^{n-2} - \frac{an(n-1)(n-2)}{4}x^{n-3} - \&c.$$

quæ toties abrumpitur quoties  $n$  est numerus integer positivus.

Si vero ponamus

$$y = ax^e u + \beta x^f u^2 + \gamma x^g u^3 + \delta x^h u^4 + \epsilon x^k u^5 + \&c.$$

transmutabitur æquatio  $ax^m dx + bydx = dy$  in

$$ax^m dx + bux^e u dx + b\beta x^f u^2 dx + \&c.$$

$$= (ax^e + 2\beta x^f u + 3\gamma x^g u^2 + \&c.) du +$$

$(ax^{e+1} u + \beta x^{f-1} u^2 + \gamma x^{g-1} u^3 + \&c.) dx$ . quæ similiter erit integrabilis si  $m$  sit numerus integer positivus ; ad quam formam reduci possunt plurimi casus particulares quorum integratio sine hoc theoremate non facile succederet.

*Exempl. I.*

Sit data æquatio  $x^3 dx + (2x-1)udx - 2u^2 dx = (x-2u)$   
 $du$  hoc est  $a=a=e=1$ .  $f=\gamma=\delta=\&c.=0$ .  $\beta=-1$ .  $b=2$ .

$$m=3. \text{ habebitur } u = x \pm \sqrt{2x^3 + 4x^2 + 3x + 3}$$

B b 2

*Exempl.*

## Exempl. 2.

Sit æquatio data

$$ax^2 dx + \frac{2}{3} u x dx - \frac{b}{5} ux^2 dx + u^3 dx - bu^3 x dx - bu^5 dx \\ = -\frac{1}{5} x^2 du - 3xu^2 du - \frac{1}{5} u^4 du.$$

erit  $\alpha = -\frac{1}{5}$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = -1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\varepsilon = -1$ , & reliqui coeffi-  
cientes  $= 0$ ,  $e = 2$ ,  $g = 1$ ,  $k = 0$ ,  $m = 2$ . quam ob rem ipsa  
æquatio dextre tractata perducetur ad

$$u = \left( \frac{(-ab^2 x^2 - 2abx - 2a) + \sqrt{(ab^2 x^2 + 2abx + 2a)^2 + x^5}}{2b^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$+ \left( \frac{(1+ab^2 x^2 + 2abx + 2a) + \sqrt{(ab^2 x^2 + 2abx + 2a)^2 + x^5}}{2b^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

## V.

Æquatio  $ax^{\frac{-2ac-b}{b}} dx + bx^{\frac{-2ac}{b}} u dx + cu^2 dx = du$   
est integrabilis, si  $\frac{-ac}{2ac-b}$  sit numerus integer.

## Demonstr.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si ponatur } u = y - \frac{b}{2c} x^{\frac{-2ac}{b}} \text{ ficit} \\ ax^{\frac{-2ac-b}{b}} dx \\ + bx^{\frac{-2ac}{b}} u dx = by^{\frac{-2ac}{b}} dx - \frac{b}{2c} x^{\frac{-4ac}{b}} dx. \\ + cu^2 dx = -by^{\frac{-2ac}{b}} dx + \frac{b^2}{4c} x^{\frac{-4ac}{b}} dx + cy^2 dx \\ = du = ax^{\frac{-2ac-b}{b}} dx - - - - - + dy. \end{array} \right.$$

hoc est, omissis terminis qui se se destruunt,

$$-\frac{b^2}{4c} x^{\frac{-4ac}{b}} dx + cy^2 dx = dy.$$

quam constat esse integrabilem si  $\frac{-ac}{2ac-b}$  sit numerus in-  
teger.

## VI.

## VI.

Æquatio  $ax^{2e} dx + bux^e dx + \frac{b^2}{4a} u^2 dx = du$  est integrabilis si  $\frac{+e+1}{2e+2}$  sit numerus integer.

Demonstr.

Si ponatur  $u = y - \frac{2a}{b} x^e$  fiet

$$\begin{cases} \int ax^{2e} dx \\ + bux^e dx = -2ax^{2e} dx + byx^e dx \\ + \frac{b^2}{4a} u^2 dx = ax^{2e} dx - byx^e dx + \frac{b^2}{4a} y^2 dx \\ - du = -\frac{2ae}{b} x^{e-1} dx - - - - + dy. \end{cases}$$

seu omissis terminis qui sese destruunt  $\frac{2ae}{b} x^{e-1} dx + \frac{b^2}{4a} y^2$   
 $y^2 dx = dy$  quam constat esse integrabilem si  $\frac{+e+1}{2e+2}$  sit numerus integer.

ANALYSIS AEQVATIONVM  
QVARVNDAM  
DIFFERENTIALIVM,

*Auctore*

Nicolao Bernoulli Ioh. F.

I.

1.Iul.1726

A

Equationes differentiales quæ indeterminatas habent ad simplices potentias elevatas , si ex tribus constent terminis , omnes ad hanc formulam reduci possunt per divisionem

$$(A) \ ax^m y^n dx + bx^p y^q dx = dy$$

& simplicius ad hanc

$$(B) \ ax^m y^n dx + by^q dx = dy$$

acquirit enim æquatio (A) formam æquationis (B) si loco  $x^{p+1}$  ponatur simplex quædam littera : Denique si æquatio (B) dividatur per  $y^n$  , considereturque  $y^{-n+1}$  ut quantitas simplex , apparent posse æquationi (B) aliam conciliari formam simpliciorem , scilicet talem

$$(C) \ ax^m dx + by^q dx = dy.$$

II Si quis generaliter æquationem (C) ad algebraicam reducere vel saltem in aliam transmutare posset ab indeterminatarum commistione liberam rem faceret meo iudicio utilissimam omnique laude dignam. Nemo autem , quantum scio , haec tenus fuit , qui id præstiterit : Illud tamen a Cel. Hermanno , Patreque meo iam monstra-

stratum fuit, admittere æquationem (C) indeterminatarum separationem, quoties  $q=1$ , hancque restrictionem quodammodo compensarunt eo, quod loco  $x^m$  in primo termino possit accipi quæcunque functio ipsius  $x$ . Idem postea ego quoque inveni diversa via, quam in sequenti §. exponam. Tametsi enim viri allegati methodos suas publico non denegarint, puto tamen posse rei analyticæ aliquid emolumenti accedere, quotiescunque nova analyticæ antea nemini usitata theorematæ eruuntur.

III. Sit ergo æquatio (D)  $X dx + bydx = dy$ , sitque  $c$  ille numerus, cuius logarithmus est unitas: ponatur  $y = c^{bx}$   
 $z$  &  $dy = bc^{bx}zdx + c^{bx}dz$ ; erit ergo  $X dx + bc^{bx}zdx = bc^{bx}zdx + c^{bx}dz$ , vel  $X dx = c^{bx}dz$ ; vel (F)  $dz = c^{-bx}Xdx$ , in qua posteriori æquatione indeterminatæ iam sunt a se invicem separatae.

IV. Sunt præterea casus infiniti, in quibus æquatio (F) ad algebraicas per integrationes reduci potest, quando scilicet  $X$  denotat potentiam quandam rationalem ipsius  $x$ ; id est quando posito  $b$  numero integro & positivo habetur  $X = x^b$ , ita ut deinde sit (G)  $dz = c^{-bx}x^b dx$ . Est autem  $c^{-bx}x^b dx = c^{-bx}x^b dx - \frac{b}{b}c^{-bx}x^{b-1}dx + \frac{b}{b}c^{-bx}x^{b-1}dx - \frac{b(b-1)}{b(b-1)}c^{-bx}x^{b-2}dx + \frac{b(b-1)}{b(b-1)}c^{-bx}x^{b-2}dx - \frac{b(b-1)(b-2)}{b(b-1)(b-2)}c^{-bx}x^{b-3}dx + \frac{b(b-1)(b-2)}{b(b-1)(b-2)}c^{-bx}x^{b-3}dx \&c.$

quod si  $b$  sit numerus integer positivus abrumpitur hæc series, quæ talis est indolis ut semper bini termini integrari possint; mutabitur ergo æquatio (G) post integracionem non omessa constante  $a$  in hanc aliam (H)  $z+a$

—

$= -\frac{1}{b}c^{-bx}x^b - \frac{b}{bb}c^{-bx}x^{b-1} - \frac{b,b-1}{bbb}c^{-bx}x^{b-2} - \frac{b,b-1,b-2}{bbbb}$   
 $c^{-bx}x^{b-3}$  &c. Pro reductione ulteriori æquationis (H) substituemus pro  $z$  valorem ipsius  $c^{-bx}y$  (nam ab initio §. 3. positum fuit  $y=c^{bx}z$ ) & sic habebitur æquatio talis (L)  $c^{-bx}y+a=-\frac{1}{b}c^{-bx}x^b - \frac{b}{bb}c^{-bx}x^{b-1} - \frac{b,b-1}{bbb}c^{-bx}x^{b-2}$   
 $- \frac{b,b-1,b-2}{bbbb}c^{-bx}x^{b-3}$  &c. quæ nimirum satisfacit generaliæ æquationi (D) §. 3. posito  $X=x^b$ . Est vero æquatio finalis (L) mediæ naturæ algebraicam inter & differentialem, scilicet est ex ordine æquationum exponentialium. Sed omnino algebraica fit, si constans ad libitum assumenta  $a$  ponatur  $=0$ ; tunc enim tota æquatio dividi potest per  $c^{-bx}$  & obtinetur  $y=-\frac{1}{b}x^b - \frac{b}{bb}x^{b-1} - \frac{b,b-1}{bbb}x^{b-2}$   
 $- \frac{b,b-1,b-2}{bbbb}x^{b-3}$  &c. quæ æquatio pure algebraica etiam satisfacit æquationi differentiali  $x^b dx + b y dx = dy$ , sed illam non totam complectitur, quod pariter iam Celeb. Christianus Goldbach alia via usus acute observavit.

V. Redeo ad æquationes §. I. expositas, quarum una semper ad alteram reduci potest. Dicendum ergo æquationem (A) non minus quam aliam (C) separationem indeterminatarum admittere generaliter, modo sit  $q=1$ ; hic id notari meretur, quod si vel in unico alio casu idem præstari posset, succederet res generalissime; solus casus  $q=1$  talis est: ut non mutari possit in alium. Id ut intelligatur plenius ponemus verbi gratia in æquatione hac  $ax^m y^n dx + bx^p y^q dx = dy$ , posse semper indeterminatas separari si  $q=3$ ; multiplicentur termini per  $y^r$  & orietur  $ax^m y^{n+r} dx + bx^p y^{3+r} dx = y^r dy$ ; ponatur  $y=z^s$  ita ut habeatur  $ax^m z^{ns+rs} dx + bx^p z^{3s+rs} dx = z^{rs+s-1} dz$ ; di-  
vida-

vidatur æquatio per  $sz^{rs+s-1}$  & erit  $\frac{a}{s} x^m z^{ns-s+1} dx + \frac{b}{s} x^p z^{2s+1} dx = dz$ , quæ iam æquatio non minus generalis est, quam ipsa æquatio (A).

VI. Considerabimus imposterum æquationem (C) ad quam omnes §. I. expositæ reduci possunt. Si in illa consideretur  $q$  tanquam numerus datus, intveniri poterunt valores ipsius  $m$ , ut formula reductionem desideratam admittat. Ita v. gr. nemo non videt posse semper esse  $m=0$ ; facile quoque apparet, posse idem præstari, si sit  $m=\frac{q}{1-q}$ , quia ponendo  $y=z^{1:1-q}$  mutatur hæc æquatio  $ax^{q:1-q}dx+by^qdx=dy$  in hanc  $ax^{q:1-q}dx+bz^{q:1-q}dx=\frac{1}{1-q}z^{q:1-q}dz$  cuiusmodi æquationum homogenearum reductionem Pater meus iam diu docuit: Poterunt forsan alii valores præter dictos unicuique obvios erui, an vero infiniti dubito, nisi cum  $q=2$ , quem solum casum hanc prærogativam habere suspicor, dignum proin particulari Geometrarum attentione. Commendatus publice examini eorum fuit a Cl. Com. Riccati in Actis Lips. Suppl. Tom. 8. p. 73. Nemo autem observata sua cum publico communicavit præter fratrem meum, qui ostendit modum reducendi æquationem Riccatianam ad indeterminatarum separationem usque, quoties  $m=\frac{-4c}{2c+1}$ , ubi  $c$  potest denotare quemcunque numerum integrum; & nuperrime etiam coram Societate monstravit Cl. Christianus Goldbach methodum inventi

niti pendeant omnes a quadratura circuli vel hyperbolæ, ita ut non desit suspicioi locus, æquationes algebraicas ex-hiberi non posse nisi simul vel circuli vel hyperbolæ quadratura innotescat. Dabo in sequentibus paradoxi solutionem, nunc ipsam analysis aggrediar.

VII. Cum fuerit  $q=2$  fit æquatio (C) talis

$$(M) ax^m dx + b y y dx = dy$$

ponatur  $m=0$ , & erit (N)  $adx + b y y dx = dy$ , vel  
 $dx = \frac{dy}{a + b y y}$ , cuius æquationis constructio pendet a qua-dratura circuli, si ambæ quantitates  $a$  &  $b$  sint affirmati-væ vel ambæ negativæ, secùs postulat quadraturam hy-perbolæ. Nunc ostendam quomodo ex casu  $m=0$  infi-niti alii deduci possint. In æquatione (M) ponatur  $x = (m+3)^{\frac{1}{m+2}} p^{\frac{1}{m+3}}$  &  $y = -\frac{1}{b} \times (m+3)^{-\frac{2}{m+2}} p^{-\frac{1}{m+3}}$   
 $= -\frac{a}{b} \times (m+3)^{\frac{m}{m+2}} p^{-\frac{2}{m+3}} q^{-1}$ , atque sic obtinebitur nova æquatio priori plane similis, nempe talis

$$(N) a p^{-\frac{m-4}{m+3}} dp + b q q dp = dq.$$

Ex hac autem similitudine æquationum (M) & (N) concluditur quod quoties  $m$  est casus separabilitatis, sit quoque  $\frac{m-4}{m+3}$  talis: hincque statim infiniti oriuntur; si enim  $m=0$ , fit  $\frac{m-4}{m+3} = -\frac{4}{3}$ ; dein si  $m = -\frac{4}{3}$ , fit  $\frac{m-4}{m+3} = -\frac{8}{5}$ , & sic porro: omnes hi casus  $m=0, m=-\frac{4}{3}, m=-\frac{8}{5}$  &c. continentur in hac formula generali  $m = \frac{-4n}{2n+1}$  intelligen-do per  $n$  numerum integrum.

VIII. Ex præcedenti §. patet posse hanc æ-quationem  $ax^{-4n: 2n+1} dx + b y y dx = dy$  semper geome-trice ope quadraturæ circuli vel hyperbolæ construi, quoties  $n$  est numerus integer, quia semper potest reduci ad hanc æquationem  $a ds + b t t ds = dt$ ; sed pro hac re-ductio-

ductione requiruntur & plures substitutiones , quo maior fuerit numerus  $n$  , unde non nisi magno labore desiderata reductio obtinetur , nisi lex generalis observetur pro requisitis substitutionibus , qua mediante dein unica substitutione res perfici potest. Cæterum me non monente patet, quod sicuti ex æquatione (M) deducta fuit altera (N) ita reciproce ex hac illa deduci possit , unde si  $\frac{-m-4}{m+3}$  fit casus separabilitatis erit quoque  $m$  talis ; hinc novus eruitur casus & ope huius infiniti alii ; fiat ergo  $\frac{-m-4}{m+3}$   
 $=0$  & erit  $m=-4$  ; dein fiat  $\frac{-m-4}{m+3}=-4$  , & erit  $m=-\frac{8}{3}$  ; & sic continue alii separabilitatis casus eruuntur , qui continentur in hac formula generali  $m=\frac{-4n}{2n-1}$  , quam combiniando cum priori fit denique  $m=\frac{-4n}{2n+1}$ . Ita quoque invenerunt Cl. Goldbach & frater meus præter ipsum problematis Auctorem ; nemo autem nostrum alios insuper reductionis casus invenire potuit.

IX. Hactenus methodum tradidi, qua appareat esse formulam  $ax^{-4n}: 2^n \pm dx + b y y dx = dy$  , separabilem quoties  $n$  est numerus integer , atque eandem exprimere æquationem ad curvas quarum constructio dependet vel a quadratura circuli vel a quadratura hyperbolæ. In hac re id notatu dignum puto , quod si  $a$  &  $b$  sint quantitates altera negativa altera affirmativa , semper æquationes algebraicæ dari possunt pro eadem illa æquatione modo allegata , cuius constructio postulat quadraturam hyperbolæ : Neque tamen exinde fluit (quod prima fronte videtur) hyperbolæ quadratura : Demonstrarare autem possum , solas æquationes differentiales a quadratura hyperbolæ pendentes tales esse posse, ut contineant æquationes partim algebraicas , partim non algebraicas : Exem-

plum iam superius dedi §. 4. ubi demonstravi æquationem  $x^b dx + bydx = dy$ , posito  $b =$  numero integro positivo continere æquationes partim algebraicas partim a quadraturæ hyperbolæ pendentes ; iam alterum exemplum apponam atque æquationes algebraicas dabo pro hac æquatione differentiali  $-ax^{-4-n: 2n+1} dx + b y y dx = dy$ .

X. In §. 7. monstravi omnes separabilitatis casus expressos per  $\frac{-4^n}{2n+1}$  ita inter se cohærere ut semper unus ad alterum reduci possit , quapropter si in unico casu æquatio algebraica desiderata erui potest, poterit per reductiones idem præstari in omnibus reliquis. Inquiram itaque æquationem algebraicam satisfacientem casui particulari huius æquationis  $ax^n dx + b y y dx = dy$ . Sit æquatio algebraica talis

$$y = ax^n + \alpha x^{n+1} + \beta x^{n+2} - \dots + \delta x^{n+p}$$

per  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  &c. intelligo coefficientes incognitas ; & per  $n$  &  $p$  itidem numeros determinandos pro exponentibus indico ; determinabo primo  $n$  &  $p$ : substituantur in æquatione proposita differentiali valores pro  $y y$  &  $dy$  , & habebit æquatio resultans neglectis coefficientibus talem formam

$$x^m dx + x^{2n} dx + x^{2n+1} dx + x^{2n+2} dx - \dots + x^{2n+2p} dx \\ = x^{n-1} dx + x^n dx + x^{n+1} dx - \dots + x^{n+p-1} dx.$$

ut hæc æquatio fiat identica , efficiam ut primus & secundus terminus sint homogenei , dein quoque ut tertius sit talis respectu primi ab altera parte , nec non ultimus ab una parte respectu ultimi ab altera parte ; ita fient omnes intermedii homogenei ; exinde obtinentur huiusmodi æquationes  $m=2n$ ,  $2n+1=n-1$ . &  $2n+2p=n+p-1$ ; vel  $m=-4$ ,  $n=-2$  &  $p=1$  ; hi valores indicant, posse æqua-

æquationem talem  $y = ax^{-1} + bx^{-2}$  satisfacere huic æquationi differentiali  $-ax^{-4}dx + bxydx = dy$ , modo  $a$  &  $b$  recte definitur ; definientur autem ex comparatione æquationum post substitutionem valorum pro  $yy$  &  $dy$  ; fiet nimirum  $a = -\frac{1}{b}$  &  $b = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$  ; habemus itaque pro hac æquatione differentiali (P)  $-ax^{-4}dx + bxydx = dy$ , hanc algebraicam (Q)  $y = \frac{b}{a}x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{a}{b}}x$ . Si porro fiant substitutiones §. 7. indicatæ tam in æquatione differentiali (P) quam in integrali (Q) poterunt successive æquationes algebraicæ erui pro singulis casibus huius æquationis generalioris  $-ax^{-4n: 2n+1}dx + bxydx = dy$  : Imo si recte observetur lex substitutionum, in seriem redigentur omnes illæ æquationes algebraicæ magis minusve compositam pro ratione magnitudinis numeri  $n$  ; verum factendum est, magnam attentionis perspicaciæque vim pro illa obtinenda requiri ; felicem tamen successum expertus est Cl. Christ. Goldbach. (vid. p. 187) : hanc seriem considerans, ut & naturam substitutionum pro separationis negotio requisitarum, inducor ut credam plane impossibile esse, semper in æquatione generali Riccatiana ( $ax^m dx + bxydx = dy$ ) æquationes algebraicas eruere vel separare indeterminatas ; cæterum cur in caſu particulariori  $m = \frac{-4n}{2n+1}$ , necesse sit, ut  $a$  &  $b$  affirmative sumtæ habeant signa diversa liquet ex eo, quod in æquatione algebraica (Q) habeatur  $\sqrt{\frac{a}{b}}$  quæ secus fieret imaginaria ; confirmatur hinc quod dixi §. 9. solas æquationes quæ pendunt a quadratura hyperbolæ posse partim esse pro curvis algebraicis, partim pro transcendentibus.

XI. Hæc iam inveneram cum Venetiis agerem eademque cum fratre Daniele per litteras communicave-

ram, qui alia methodo æquationes illas algebraicas dire-  
cte, id est, integrando eruit, postquam prius iam casus  
separabilitatis reperisset: transcribam hic ipsius verba in  
latinum sermonem versa excerpta ex litteris, quas Basilea  
ad me dedit.

„ Libenter, inquit, intellexi ex ultimis tuis  
 „ Te dare posse æquationes algebraicas pro æquatione  
 „ Riccatiana  $-ax^{-4^n} \cdot 2^n \pm 1 dx + b y y dx = dy$ ; hoc ego minus  
 „ fieri posse putasse; sed eius rei certior a Te factus  
 „ mox idem inveni; mitto Tibi methodum meam, quo  
 „ illam cum Tua comparare possis. Sit (A)  $-ads$   
 „  $+bttds = dt$ ; ergo  $ds = \frac{dt}{a - bt}$ , & integrando cum ad-  
 „ ditione constantis C, erit  $C - s = \frac{\log \sqrt{a} + i\sqrt{b} - \log \sqrt{a} - i\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}$ ,  
 „ vel si n dicatur numerus, cuius logarithmus est unitas,  
 „ habebitur (B)  $n^{\frac{C-s+2\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}}} = \frac{\sqrt{a} + i\sqrt{b}}{\sqrt{a} - i\sqrt{b}}$ , est ergo æquatio (B)  
 „ identica cum proposita (A). ponatur in utraque  $s = -x^{-1}$   
 „ &  $t = \frac{1}{b}x + xxy$ , & erunt æquationes resultantes adhuc i-  
 „ denticæ: differentialis quæ prodit talis est  $-ax^{-4}dx$   
 „  $+b y y dx = dy$ , altera exponentialis ita se habet, si recte  
 „ reducatur (D)  $n^{(\frac{Cx+1}{b}+1) \times 2\sqrt{ab}} = \frac{x+bxx y+\sqrt{ab}}{x-bxx y+\sqrt{ab}}$ ; sed cum C  
 „ sit quantitas arbitraria & constans, faciamus illam infi-  
 „ nitam & erit primum æquationis exponentialis mem-  
 „ brum infinitum; oportet ergo ut & alterum sit ta-  
 „ le, idque est, cum denominator ipsius = 0, seu  $-x$   
 „  $-bxx y+\sqrt{ab}=0$ ; seu  $y = -\frac{x+\sqrt{ab}}{bxx}$  seu  $y = -\frac{1}{b}x + \frac{1}{b}x\sqrt{\frac{a}{b}}$   
 „ quæ proin comprehenditur in hac æquatione  $-ax^{-4}$   
 „  $dx + b y y dx = dy$ . Si vero C ponatur quantitas infinita  
 „ negativa, erit primum æquationis (D) membrum = 0,  
 „ quapropter iam numerator alterius memtri debet esse  
 „ = 0, unde  $y = -\frac{1}{b}x - \frac{1}{b}x\sqrt{\frac{a}{b}}$ , & combinando utrumque va-  
 „ , lorem

valorem ipsius  $y$ , habebitur denique  $y = -\frac{1}{b}x + \frac{1}{b}x\sqrt{\frac{a}{b}}$ , quæ,, ultima æquatio plane eadem est cum illa , quam mihi „ perscrisisti ; de reliquis casibus nihil dico ; nosti enim „ illos per methodum nostram reductionum facile habe „ ri ope unius iam inventi .,

---

### C. G.

### METHODVS INTEGRANDI AEQVATIONEM DIFFEREN- TIALEM

$$aydx + bx^n dx + cx^{n-1} dx + ex^{n-2} \\ dx + \text{etc.} = dy.$$

ubi  $n$  sit

NVMERVS INTEGER POSITIVVS.

**P**ostquam Cel. Ioh. Bernoullius demonstravit, 20. Sept. æquationem quamcunque differentialem , in 1726. cuius terminis licet  $x$  &  $y$  permixtæ sint , si modo in quocunque termino eadem reperiatur exponentium summa , esse integrabilem, patet hoc ipsum theorema ad innumeratas alias æquationes, in quibus summa exponentium non est constans per idoneas substitutiones extendi posse , nam si v. gr. sit æquatio

$$(a + bxy + cx^2y^2 + ex^3y^3 + \&c.)dx \\ + (lx^2 + mx^3y + nx^4y^2 + \&c.)dy = 0.$$

vel  $(ay + bxy^2 + cx^2y^3 + \&c.)dx \\ + (lx + mx^2y + nx^3y^2 + \&c.)dy = 0.$

in

in quarum ultravis parte summa exponentium continuo ctescit, sola substitutione  $y=z^{-1}$  ad eandem exponentium summam revocari possunt; & generatim, data æquatio  $(ax^\pi + bz^\tau x^{\pi-1} + \&c.)dx + (mx^\pi z^{\tau-1} + nx^{\pi-1} z^{2\tau-1} + px^{\pi-2} z^{3\tau-1} + \&c.)dz = 0$ . ad æqualem exponentium summam reducitur si fiat  $z=y^{\frac{1}{\pi}}$ .

Præterea licet huiusmodi substitutione quæ omnium facillima est non obtineatur reductio quæsita ad æqualem summam exponentium, non illico existimandum est reductionem nullam succedere, fieri enim potest ut natura terminorum substitutiones magis complicatas postulet, sic v. gr.

$$adx + bdy + cx dx + ex dy + fy dx + gy dy = 0.$$

indiget his substitutionibus

$$\begin{aligned} x &= z + \frac{bf - ag}{eg - ef} \\ y &= u + \frac{ae - bc}{eg - ef} \end{aligned}$$

ut redigatur ad formam

$$(cz + fu)dz + (ez + gu)du = 0.$$

Æquatio

$$\left. \begin{array}{l} ax dx + ec x dz \\ + bc z + 2exz \\ + bz^2 + e^2 z \\ + 3cz^2 \\ + 2z^3 \end{array} \right\} = 0$$

indiget substitutione

$$z = -c + \frac{\sqrt{c^2 + 4y}}{2}$$

ut redigatur ad formam

$$adx + by dx + ex dy + y dy = 0.$$

Theo-

Theorema vero, quod iam proponimus in hoc cum Bernoulliano convenit, quod nullo terminorum numero, nulla coefficientium determinatione limitetur, sed eo differt, quod non requirat constantem summam exponentium in uno quovis termino, neque ad eandem reduci possit.

Ut ostendamus æquationem nostram in quocunque casu non solum separabilem esse, sed etiam integrabilem, a facilitoribus exemplis incipiemus.

Sit  $aydx + bx dx + cdx = dy$ .

$$\text{Invenietur } y = -\frac{b}{a}x - \frac{(b+ac)}{a}$$

Sit  $aydx + bx^2 dx + cx dx + edx = dy$ .

$$\text{erit } y = -\frac{b}{a}x^2 - \frac{(2b+ac)}{aa}x - \frac{(2b+ac+a^2e)}{aaa}$$

Sit  $aydx + bx^3 dx + cx^2 dx + ex dx + f dx = dy$ .

$$\text{erit } y = -\frac{b}{a}x^3 - \frac{(3b+ac)}{a^2}x^2 - \frac{(6b+2ac+a^2e)}{a^3}x - \frac{(6b+2ac+a^2e+a^3f)}{a^4}$$

Ex quarum coefficientium progressionе facile eruitur integralis nostræ æquationis, dato pro  $n$  numero quocunque integro positivo

$$y = -\frac{b}{a}x^n + \frac{nA-c}{a}x^{n-1} + \frac{(n-1)B-e}{a}x^{n-2} + \frac{(n-2)C-f}{a}x^{n-3} + \&c.$$

ubi litteræ maiores A, B, C, &c. indicant coefficientes terminorum proxime antecedentium.

D d

DE

DE EPICYCLOIDIBVS  
IN SVPERFICIE SPHAERICA  
DESCRIPTIS.

*Auctore*

Iacobo Hermanno.

M Nov.  
1726.

**T**RIGINTA quatuor iam effluxere anni, ex quo ænigma geometricum de miro opificio te-studinis quadrabilis Hemisphæricæ Autore D. Pio Lisci Posillo Geometra Florentiæ exiit in publicum. Sub hoc nomine, quod per anagramma significat Postremo Galilæi Discipulo, Vincentius Vivianus Magni Ducis Hettruriæ Mathematicus latere voluit. Is enim impresso programmate ænigma suum peritioribus Analystis examinandum comen-davit his verbis : Cuius (ænigmatis) divinatio a secretis artibus illustrium Analystarum vigentis ævi expectatur, quod in Geometriæ pura historia versatus, ad tam re-condita videatur invalidus.

Ipsum vero ænigma ita habebat : Inter venerabilia olim Græciæ monumenta extat adhuc, perpetuo quidem duraturum , Templum augustissimum ichnographia circuari ALMAE GEOMETRIAЕ dicatum , quod te-studine intus perfecte hemisphærica operitur : Sed in hac fenestrarum quatuor æquales areæ (circum ac supra basin hemisphæræ ipsius dispositarum) tali configuratione am-

amplitudine, tantaque industria, ac ingenii acumine sunt extuctæ, ut his detractis, superstes curva testudinis superficies, pretioso opere musivo ornata, Tetragonismi vere geometrici sit capax.

Præsentis ænigmatis enodatio (quod spectat ad huius admirabilis fornicis tum constructionem expeditissimam, tum quadraturam, *Sereniss. FFRDINANDO Magno Principi Etruriae, Scientiarum & Nobiliorum Artium Cultori ac Patrono Generosissimo*, ab eodem ænigmatisa oblata iam est; qui quidem simul non dubitat, quin hoc ipsum ænigma a singulis litterario in orbe degentibus hodie præclarissimis Analystis sit statim divinandum, proprias quadrationes impertiendo singularis testudinis huius tetragonisticæ ab hemisphæra dissectæ, & ipsorum peracutas indagines, multiplicesque industrias ad hoc unum idemque collimantes impatienter expectat, ut hinc, qui temere contumelias in Geometriam iacere audent, silere discant, vel potius maxima cum voce exclament: *oh! unica verorum sciscitabilium scientia a Divina in hominum mente infusa, ut hæc imperviis, mutabilibus, fallacibusque contemtis, æterna ista, quæ semper & unicuique sunt eadem, tantum appetat, nihilque aliud unquam magis innocuum scire perquirat.* Hucusque Vianus.

Ex hoc proponendi modo, & ex eo, quod ad celeberrimos ævi sui Geometras programma suum mitti curavit, facile quis in opinionem venerit, hoc ænigma arduum & difficile solutu Autori suo visum fuisse; verum tamen cum non dubitarit, quin recentioribus analystis statim sit solvendum, forte non tam a difficultate quam ele-

gantia problema hoc suum tanti fecit , & credibile quoque est, hoc ænigma Præclarissimo Viro in veterum geometria innutrito & magna diligentia cuncta excutere folio plus negotii dedisse quam aliis Analystis , qui methodos infinitesimales magis in promtu habebant. Illustris enim Leibnitius eodem die, quo notitiam problematis natus est, eius solutionem invenit, quam peculiari scheda scriptam & *Magno Etruriae Principi inscriptam* proximo cursore Florentiam miserat, & paulo post totidem verbis in Acta Eruditorum 1692. transtulit ; occurunt quoque quinque solutiones diversæ, quas *Iac. Bernoulli* in eodem Actorum Anno Mens. Augusto exhibit. Dedit quoque *Wallisius* aliquot solutiones in Cap. 192. suæ Algebrae. Sed omnium fere elegantissimæ videntur esse constructiones, quas *Vivianus* ipse in peculiari opusculo Italicò sermone Anno 1692. Florentiæ edito, sed sine demonstrationibus, publico impertivit , vid. Act. Erudit. 1694. pag. 207. Demonstrationes a Viviano suppressas ex propria penu depropmsit deinceps & dedit P. Abbas *Guido Grandus* in singulari opere, quod *problemata Vivanea* inscrispit. Totius ænigmatis solutio eoredit, ut testudo iis fenestris aperiatur, quibus de superficie tota hemisphærii detractis ut residua maneat superficies geometricè quadrabilis, quod infinitis diversis modis fieri potest. Iam olim *Pappus Alexandrinus* Collectionum Libr. 4. Prop. 32. ostendit, portionem sphæricæ superficie quædam spirali interceptam, dati cuiusdam trianguli octuplam esse ; & facile fuit posteris alias in sphæræ superficie portiones invenire, quæ datis planis rectilineis æquales essent.

Sed difficilius videri poterat problema, si loco spatio-

tiorum in superficie sphærica quadrabilium, quærerentur lineæ geometrice rectificabiles. Ita saltē sentit Carol. Ernestus Offenburgius, qui in Actis Erudit. 1718. pag. 175. hoc problema proposuit : *Testudinem Hemisphæricam fenestrī ovalibus perforare, quarum unaquæque peripheriam absolute rectificabilem habeat.* Utrum hic Autor problema suum solverit nec ne, de eo mihi nihil constat, hoc saltim novi, problema non esse tantæ difficultatis, quantæ illud esse Autori videtur; solutio enim facilis manat a consideratione Epicycloidum Sphæricarum. Quid vero per has Epicycloides intellectum velim, explicatur in definitione sequenti.

*Definitio.*

Epicyclois Sphærica est curva in superficie sphærica descripta a puncto in peripheria basis alicuius coni recti assumto, dum coni huius perimeter basis volvitur in circumferentia alicuius circuli immoti, vertice coni in centro sphæræ (cuius radius æquat latus coni) immoto manente.

Basis coni dicatur itidem *Circulus generator*, & circulus, super quo circulus generator volvitur, ita ut singulæ partes peripheriæ generatoris singulis partibus peripheriæ huius successive applicentur, dicatur *Circulus immobilis*. Hoc motu planum circuli generatoris constanter dato angulo ad planum circuli immobilis inclinatum est.

Si conus rectus ABC, cuius basis est circulus HI revolvatur circa verticem suum C, ut circumferentia basis BIAH moveatur in circumferentia BDM alterius circuli BM centro C & radio CB descripti, erit circulus HI *generator*, & circulus DM is, qui *immobilis* vocatur, & punctum L in perimetro circuli generatoris re-

volutione huius circuli super peripheria LDE, describet in superficie sphærica curvam LFE, quam *Epicycloidem Sphæricam* appello.

Radius Sphæræ in cuius superficie Epicyclois Sphærica describitur, est ubique æqualis lateri coni CB.

Non autem necesse est ut circulus immobilis sit circulus in sphæra maximus ut fig. 1. Potest etiam esse circulus minor, ut fig. 2. circulus ex diametro BS, nam si in circumferentia huius circuli, circulus ex diametro AB qui est basis coni recti BAC dicto modo volvatur, ut singulæ partes huius singulis partibus peripheriæ circuli immobilis successive applicentur, punctum describens etiamnunc incedet in Epicycloide in superficie Sphæræ BAS descripta, sive circulus generator, extet supra planum circuli immobilis BS, sive subter idem planum depresso fit.

In omni casu planum circuli generatoris ad planum circuli immobilis dato angulo inclinatum est, in fig. 1. angulo ABC, in secunda vero angulo ABR, si circulus AB sit super plano BS, vel supplemento anguli ABR si sit subter plano BR. In omni ex hisce casibus longitudine Epicycloidis est ad diametrum circuli generatoris in ratione data. Ad id ostendendum sequentibus lemmatis opus habemus.

### *Lemma 1.*

*Fig. 3.* Datis lateribus trianguli obliquanguli  $b\beta$ , nempe  $\beta e$  &  $be$ , & angulo intercepto  $be\beta$ , invenire tertium latus  $b\beta$ . Fig. 3.

Dicantur  $e\beta=p$ ,  $eb=q$ , sinus anguli  $be\beta=g$ , sinus complementi  $=h$ , ad radium  $=1$ , eritque latus quæsumum  $b\beta=V(pp-2hpq+qq)$ .

*Lem-*

## Lemma 2.

Si arcus BOL semicirculi BLA, in sua elementa  $Lm$  distributus intelligatur, erit summa omnium  $BL \cdot Lm$ , quam summam iam usitato more, per  $\int BL \cdot Lm$  designabo, erit inquam  $\int BL \cdot Lm = AB \cdot BP$ , facta nempe  $AP = AL$ . Fig. 4. Fig. 4.

Nam triangula similia ABL &  $mLn$  præbent AB :  $BL :: Lm : Ln$ ; ergo  $BL \cdot Lm = AB \cdot Ln$ , ergo  $\int BL \cdot Lm = \int AB \cdot Ln$ ; atqui  $\int AB \cdot Ln = AB$  in omnes  $Ln$ , omnes vero  $Ln$  sunt  $= AB - AL$  (constr.  $= AB - AP = BP$ ), ergo  $\int BL \cdot Lm = AB \cdot BP$ , Quod erat &c.

## Theorema.

Pars Epicycloidis Sphaericæ EL descripta a puncto describente L provolutione circuli generatoris HL super immobili EB ex E ad B, est ad  $2BP$ , facta  $AP = AL$ , ut  $V(aa - 2bab + bb)$  ad  $a$ , si nempe radius circuli BE, hoc est BC sit  $= a$ , radius BG circuli HL  $= b$ , ac cosinus inclinationis circuli huius ad circulum immobilem  $= b$ , ad radium  $= 1$ .

Per B ducatur tangens BV circuli immobilis BE, & hæc tanget etiam circ. generatorem HL in eodem puncto B. Intelligantur in circ. generatore & in circulo immobili duo arcu<sup>i</sup> indefinitely parvi & æquales  $B\beta$  &  $Bb$ , ductaque ex  $b$  in BV normali  $be$ , iungatur  $\beta e$ , eritque angulus  $\beta eb$  mensura inclinationis plani HL ad planum BEC circuli immobilis. His positis

Si circulus generator HL promoveatur, lineola  $B\beta$  rotabitur circa punctum B usque dum cadat super  $Bb$ , interea vero describet BL sectorem LB/ similem sectori  $B\beta b$ , in quo sectore arcu<sup>i</sup>  $Ll$  est elementum Epicycloi-

cloidis hoc motu genitum , habemus ideo  $BL : Ll :: B\beta : b\beta$  ; vel  $Ll \cdot B\beta = BL \cdot b\beta$ .

Iam dicendo radium circuli immobilis  $BE$  , qui est  $BC=a$ , radium circuli generatoris  $BG=b$ , arcum  $Bb=Be=B\beta=ds$ : erunt  $eb=\frac{ds^2}{a}$  ,  $e\beta=\frac{ds^2}{b}$  & cosinus anguli  $\beta eb=b$  ; surrogatis ergo in lemm. 1.  $\frac{ds^2}{b}, \frac{ds^2}{a}$  pro  $p$  &  $q$  , invenietur  $b\beta=\frac{ds^2\sqrt{(aa-2hab+bb)}}{ab}$  , & æquatio  $Ll \cdot B\beta = BL \cdot b\beta$  mutabitur in  $ab \cdot Ll = ds \cdot BL$  in  $V(aa-2hab+bb)$ , hoc est  $= BL \cdot Lm V(aa-2hab+bb)$ , ergo  $abs/Ll$  hoc est  $ab \cdot EL = V(aa-2hab+bb)$  in  $\int BL \cdot Lm$  (id est per lemm. 2.)  $= AB \cdot BPV(aa-2hab+bb) = b \cdot 2BPV(aa-2hab+bb)$  & dividendo per  $b$ , habetur  $a \cdot EL = 2BPV(aa-2hab+bb)$ . Quare  $EL : 2BPV(aa-2hab+bb) : a$ . Q. E. D.

*Coroll. 1.*

Ergo tota epicyclois est ad duplam diametrum  $AB$  circuli generatoris ut  $V(aa-2hab+bb)$  ad  $a$ .

*Coroll. 2.*

Si  $b=1$  seu sinui toti , quod contingit, cum ambo plana circuli generatoris & immobiliis coincidunt , tunc erit Epicyclois ad duplum diametri generatoris, ut  $a-b$  ad  $a$  , id est ut differentia radiorum circuli immobilis & generatoris, ad radium immobilis.

### *Problema.*

Invenire in plano Sphæræ ichnographico quotcumque puncta ichnographica Epicloidis. Vid. Fig. 6.

*Fig. 6.* Sit  $ALB$  circulus generator seorsim descriptus , ad terminum  $A$  diametri  $AB$  erecta normaliter indefinita  $AQ$ , capiantur in eadem partes  $AO$  ,  $AQ$ , quæ sint ad dia-

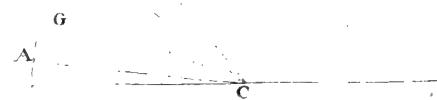


fig. 2.

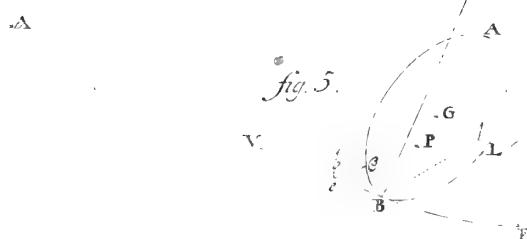
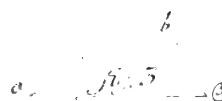
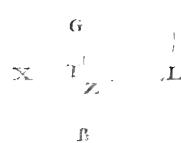


fig. 5.

Q      O      A

fig. 6.



E



diametrum AB ut sinus rectus & sinus complementi ad radium, & ducantur OB, QB. Postea accepto quolibet arcu BL ductoque eius sinu LZ protendatur hic sinus usque ad occursum X cum recta BQ. Quibus factis in plano sphæræ ichnographico ad radium CE fiat angulus ECB qui sit ad angulum BGL ut radius GB ad CE, capiatur in radio BC portio  $Bt = XZ$ , & perpendicularis  $tu = LZ$  ad radium BC, dico punctum  $u$ , esse punctum optatum ichnographiæ epicycloidis: id est erecta in  $u$  ad planum CBE perpendicularis per punctum epicycloidis transibit; distantia vero huius puncti a puncto  $u$ , æquat ubique respectivam TZ. Hoc pacto tot puncta ichnographiæ Epicycloidis invenientur, quot quis voluerit: & Offenburgi problema in tota sua latitudine solvitur, describendo supra & infra circulum immobilem RS (fig. 2.) epicycloides, nam binæ oppositæ formabunt fenestram ovalem; & constructio geometrica fiet, si in fig. 6. BG ad BC fuerit ut numerus ad numerum. Q. E. F.

---

## PRINCIPIA DYNAMICA,

Autore

*Christiano Wolfio.*



On ignotum est, Illustrem Leibnitium mensuram virium demonstrasse per motum gravium ascendentium: quam eius demonstrationem una cum alia Cel. Johannis Bernoulli in Elementis Mechanicæ exhibui. Monuit quoque Leibnitius in Actis Eruditorum A. 1695.

p. 154, se ad eandem virium estimationem ex simplissima consideratione spatii, temporis & actionis pervenisse: id quod mihi ansam dedit iam A. 1710 mensuram virium ex motu æquabili eruendi. Repereram autem in motu æquabili vires æstimari posse per impetus ad spatia applicatos, seu in hypothesi mobilium æqualium per celeritates ad spatia applicatas. Hinc enim eandem, quam *Leibnitius* dedit, prodire virium mensuram evidens est. Omnis vero cardo rei in eo vertitur, ut ostendatur, quod impetus ad spatia applicare liceat. Ut igitur id appareat, *Principia Dynamica*, quæ hactenus desiderantur, summa, qua fieri potest, perspicuitate demonstrare constitui. Quoniam vero fœcunda virium definitio latet, unde earundem mensuram eruere licet, eius loco axiomata quædam sumo: Et cum ex intentione *Leibnitii* in Dynamicis, ea, quæ vires & actiones corporum spestant, independenter a phænomenis, abstrahendo quam maxime ab omni re sensibili, ex solis notionibus derivemus, ne cui iā demonstrationibus theorematum fundamentalium noster arguendi modus videatur parum evidens, notandum est, nos data, per quæ quæsitum determinatur, sumere tanquam unitatem, & quæsitum tanquam unitatem alteram, atque toties ponendo data, quoties ponitur quæsitum, rationem quæsitorum determinare per rationem datorum; cum sic in casu rationali ea prodeat relatio, quæ est numeri ad unitatem, in irrationali ea, quæ est rectæ ad rectam quandam datam. Sicuti enim data simul sumta, per quæ determinatur quæsitum, arithmeticè considerantur ut unitas; ita geometricè ut linea quædam data. Unitas cum sit indivisibilis, data omnia in replicatione simul sumenda, prout ponuntur

tur in unitate : alias enim ex replicatione non enasceretur homogeneum, quod numero respondet, & ad unitatem positam rationem habere potest. His notatis, & evidentes erunt nostræ illationes, & abusus evitabitur, in quem alias facilis est prolapsus.

*Axioma 1.*

1. *Si duo vel plura mobilia æqualia, eadem celeritate moveantur, vis eorundem eadem est.*

*Scholion.*

2. Vim corporis, quæ in motu locali sese exerit, a massa & celeritate pendere, ita ut pro massa vel celeritate maiore maior sit, nemo in dubium vocat. Quodsi ergo mobilia fuerint æqualia, hoc est, si eadem fuerit utriusque massa; virium quantitas a sola celeritate pendet. Quamobrem, si eadem fuerit celeritas, eadem quoque esse debet virium quantitas, sive vires sint in ratione simplici, sive in quacunque multiplicata vel submultiplicata celeritatum.

*Axioma 2.*

3. *Eadem vi eodem tempore eadem absolvitur actio.*

*Scholion.*

Eadem vi longiori tempore maiorem absolvit actionem quam breviori, & contra eodem tempore vi maiore actionem maiorem absolvit quam minori, nemo dubitat. Quantitas adeo actionis pendet a quantitate virium & temporis. Quamobrem, si vires fuerint æquales & tempus idem, actio quoque eadem esse debet.

*Definitio 1.*

4. *Vim vivam cum Leibnitio, vel etiam simpliciter vim appollo, quæ motui locali adhæret.*

E c 2

Defi-

*Definitio 2.*

5. *Vim vero mortuam cum eodem dico, quæ in solo cœnatu ad motum consistit. Unde etiam Conatum appellare soleo.*

*Definitio 3.*

6. *Vis pura est, cui in agendo contraria nulla resistit.*  
*Corollarium.*

7. *Vis igitur pura toto actionis tempore invariata manet.*  
*Scholion.*

8. *Istiusmodi vis in motu æquabili sese exerit, si concipiatur fieri in medio non resistente. Quantocunque enim intervallo mobile promoveatur, eadem tamen semper subsistit celeritas, consequenter vis motrix eadem. Effectus adeo, quem producit, eam minime absorbet. Secus sese res habet in motu gravium, ubi vis in ascensum tota impenditur.*

*Definitio 4.*

9. *Actio pura dicitur, quæ exercetur vi motrice pura.*  
*Scholion.*

10. *Talis est actio mobilis motu æquabili latè in medio non resistente (§. 8)*

*Definitio 5.*

11. *Actio uniformis est, quæ duplo tempore dupla, triplo tripla & ita porro, seu in genere, quæ est ut tempus.*  
*Scholion.*

12. *Istiusmodi actio in motu æquabili locum habet, ubi mobile continuo eadem celeritate moveri permit, si nempe motus fieri concipitur in medio non resistente.*  
*Definitio 6.*

13. *Effectus vis motricis extra conflictum est translatio mobilis per spatium.*

*Scholion*

*Scholion 1.*

14. *Papinus* negat dari aliquem effectum vis motricis, ubi nulla resistentia superanda, neque enim admittit eius effectum aliud, nisi qui in superanda resistentia sese exerit. Vid. Acta Eruditorum A. 1691. p. 7. Ex definitione effectus in genere, quae metaphysica est, erroris redarguitur. Ipso etiam usu loquendi refellitur. Quilibet fateri debet, idem fuisse effectum, sive mobile vi impressa a termino A usque ad terminum B progrediatur, sive ab homine ex loco A in locum B transferatur. Ecquis vero dixerit, hominem nihil egisse, dum corpus quoddam ex loco A in locum B transtulit. Enim vero non opus est, ut ea de re disputemus. Utemur descriptione praesente tanquam nominali, quae adeo arbitraria est. Si quis igitur translationem mobilis per spatium effectum vis motricis appellare renuit, is non invitis nostris demonstrationibus aliud quodcumque nomen voci huic substituat.

*Scholion 2.*

15. Si motus sit in medio non resistente, effectus purus est, qualem nos in sequentibus constanter supponimus. Si vero in medio resistente, idem mixtus est, cum pars virium continuo resistentiae medii impendatur, donec tandem vis omnis prorsus consumatur.

*Definitio 7.*

16. *Effectus nocuus* est, qui vim motricem absorbet: *innocuus*, qui eam intemeratam relinquit.

*Scholion.*

17. Effectus innocuus est in motu æquabili: nocuus in ascensu gravium, & in superanda resistentia.

*Axioma 3.*

28. *Si idem mobile per idem spatium transfertur, effectus idem est.*

*Scholion.*

19. Supponimus nempe motum fieri in medio non resistente, aut saltem abstrahimus ab actione, quæ impenditur in superandam resistentiam medii: id quod licet, quamdiu temporis nulla habetur ratio, quo effectus producitur.

*Theorema 1.*

20. *Si corpora inæqualia eadem celeritate moventur, vires sunt ut massæ.*

Sit corporis  $m$  celeritate  $c$  moti vis  $v$ . Ergo corporis alterius æqualis  $m$  eadem celeritate  $c$  moti vis etiam  $v$  est (§. 1.) consequenter corporis bis  $m$  celeritate  $c$  lati vis est bis  $v$ . Eodem modo patet, fore corporis ter  $m$  celeritate  $c$  moti vim ter  $v$ , & in genere corporis  $nm$  ( $=M$ ) celeritate  $c$  moti  $nv$  ( $=V$ ). Est igitur  $V: v = M: m$  hoc est, corporum inæqualium eadem celeritate motorum vires sunt ut massæ. Q. E. D.

*Theorema 2.*

21. *Actiones uniformes eodem tempore absolutæ sunt inter se ut vires.*

*Demonstratio.*

Absolvatur vi  $v$  actio  $v$  tempore  $t$ . Ergo eadem vel æquali vi  $v$  eodem tempore  $t$  absolvetur alia actio a priori æqualis (§. 3.) consequenter vi bis  $v$  absolvetur eodem tempore  $t$  actio bis  $a$ . Similiter patet, vi ter  $v$  eodem tempore  $t$  absolvvi debere actionem ter  $a$  &c. Immo in genere, vi ut  $nv$  ( $=V$ ) absolvvi debere actionem

ut

ut  $na$  ( $=A$ ) eodem tempore  $t$ . Est igitur  $A : a = V : v$ ,  
hoc est, actiones eodem tempore absolutæ sunt ut vi-  
res. Q. E. D.

*Corollarium 1.*

22. Si corpora inæqualia eadem celeritate mo-  
ventur, vires sunt ut massæ (§. 20.) Actiones igitur  
corporum, quæ eadem celeritate moventur, eodem tem-  
pore absolutæ sunt in ratione massarum (§. 21.)

*Corollarium 2.*

23. Si  $A=a$ , erit  $V=v$ , hoc est, si actiones eodem  
tempore absolutæ fuerint æquales, vires æquales sunt.

*Theorema 3.*

24. Actiones uniformes viribus æqualibus absolutæ  
sunt inter se ut tempora, quibus absolvuntur.

*Demonstratio.*

Absolvatur vi  $v$  tempore  $t$  actio  $a$ . Ergo eadem  
vi  $v$  eodem vel æquali tempore  $t$  absolvetur actio alia  
 $a$  eidem æqualis (§. 3.) consequenter vi eadem  $v$  tem-  
pore bis  $t$  actio bis  $a$ . Eodem modo patet, vi eadem  
vel æquali  $v$  tempore ter  $t$  absolvvi debere actionem ter  
 $a$  & quadruplo tempore  $t$  actionem quadruplam  $a$ , immo  
in genere tempore quocunque  $nt$  ( $=T$ ) actionem  $na$   
( $=A$ ). Est igitur  $A : a = T : t$ , hoc est, actiones vi-  
ribus æqualibus absolutæ sunt ut tempora, quibus absol-  
vuntur. Q. E. D.

*Theorema 4.*

25. Actiones uniformes sunt in ratione composita  
temporum & virium.

*Demonstratio.*

Actiones uniformes  $A$  &  $a$  eadem vi  $V$  productæ  
sunt

sunt inter se ut tempora  $T$  &  $t$ , quibus producuntur (§. 24.) Producatur iam actio alia  $a$  eodem tempore  $t$ , quo  $a$  producitur, vi quacunque  $V$ . Erit  $a : a = V : v$  (§. 21.) Ergo  $A : a = TV : tv$ , hoc est, actiones uniformes sunt in ratione composita temporum & virium Q. E. D.

#### *Corollarium.*

26. Si corpora inæqualia eadem celeritate ferantur, vires sunt ut massæ (§. 20.) Actiones igitur uniformes in hypothesi mobilium inæqualium eadem celeritate latorum sunt in ratione composita massarum atque temporum.

#### *Theorema 5.*

27. *Vires inæquales eandem actionem absolvunt temporibus sibi reciproce proportionalibus.*

#### *Demonstratio.*

Actiones uniformes  $A$  &  $a$  sunt in ratione composita temporum  $T$  &  $t$  atque virium  $V$  &  $v$  (§. 25.) quare cum sit  $A = a$  per hypothesin; erit  $TV = tv$  consequenter  $V : v = T : t$ , hoc est, vires sunt ut tempora reciproce. Q. E. D.

#### *Corollarium.*

28. Quodsi mobilia eadem celeritate moventur, vires sunt ut massæ (§. 20.) adeoque actionem eandem absolvunt temporibus eorum massis reciproce proportionalibus (§. 27.)

#### *Theorema 6.*

29. *Si duo mobilia æqualia per spatia inæqualia transferuntur, effectus sunt ut spatia.*

#### *Demonstratio.*

Transferatur mobile  $m$  per spatum  $s$  & denotet effectum. Ergo si idem vel æquale mobile  $m$  per idem vel

vel æquale spatium  $S$  transfertur, erit effectus etiam ut  $e$  (§. 18.), consequenter si mobile  $m$  transfertur per spatium bis  $f$ , erit effectus bis  $e$ . Et eodem modo pateat in genere, si mobile  $m$  transfertur per spatium quocunquè  $nf$  ( $=S$ ), fore quoque effectum ut  $ne$  ( $=E$ ). Quare si mobilia fuerint æqualia, erit  $E:e=S:f$ , hoc est, effectus sunt ut spatia. Q. E. D.

*Theorema 7.*

30. *Si duo quæcunque mobilia per idem spatium transferuntur, effectus sunt inter se ut massæ eorundem.*

*Demonstratio.*

Transferatur mobile  $m$  per spatium  $f$  & denotet  $e$  effectum. Ergo, si idem vel æquale mobile  $m$  per idem vel æquale spatium  $f$  transfertur, erit denuo effectus  $e$  (§. 18). Si igitur mobile fuerit ut bis  $m$ , quod cum simplici  $m$  per idem spatium  $f$  transfertur, effectus erit ut bis  $e$ . Quare cum eodem modo pateat, esse in genere effectum ut  $ne$  ( $=E$ ), si mobile, cum alio  $m$  per idem spatium  $f$  translatum, fuerit ut  $nm$  ( $=M$ ); evidens est, quod sit in hac hypothesi  $E:e=M:m$ , hoc est, effectus sint ut massæ mobilium per idem spatium translatorum. Q. E. D.

*Corollarium.*

31. *Quando corpora inæqualia eadem celeritate moventur, vires sunt ut massæ* (§. 20). *Quod si ergo per eadem spatia transferuntur, effectus sunt ut vires* (§. 30.)

*Theorema 8.*

32. *Si duo quæcunque mobilia per spatia quæcunque transferuntur, effectus sunt in ratione composita massarum atque spatiorum.*

F f

De-

*Demonstratio.*

Si duo mobilia æqualia, quorum massæ sunt ut  $M$ , transferuntur per spatia quæcunque  $S$  &  $s$ , erunt effectus  $E$  &  $e$  uti spatia  $S$  &  $s$  (§. 29.) Transferatur iam mobile, cuius massa ut  $m$ , per idem spatium  $s$  cum altero  $M$ ; erunt effectus  $e$  &  $e$  ut massæ  $M$  &  $m$  (§. 30.) Quare  $E : e = MS : ms$ , hoc est, effectus quicunque sunt in ratione composita massarum & spatiorum, per quæ mobilia transferuntur. Q. E. D.

*Corollarium.*

33. Si  $E = e$  erit  $MS = ms$ , adeoque  $M : m = s : s$ , hoc est, si effectus fuerit idem, spatia sunt massis reciproce proportionales **Theorema 9.**

34. In motu æquabili effectus sunt in ratione composita massarum, celeritatum atque temporum.

*Demonstratio.*

In omni motu, adeoque & in æquabili, effectus  $E$  &  $e$  sunt in ratione composita massarum  $M$  &  $m$  atque spatiorum  $S$  &  $s$  (§. 32.) Sunt vero spatia  $S$  &  $s$  in motu æquabili in ratione composita celeritatum  $C$  &  $c$  atque temporum  $T$  &  $t$ . Quare effectus  $E$  &  $e$  sunt in ratione composita massarum  $M$  &  $m$ , celeritatum  $C$  &  $c$  atque temporum  $T$  &  $t$ . Q. E. D.

*Corollarium 1.*

35. Quodsi fuerit  $T = t$ , eñt  $E : e = MC : mc$ , hoc est effectus innocui eodem tempore producti sunt in ratione composita massarum  $M$  &  $m$  atque celeritatum  $C$  &  $c$ .

*Corollarium 2.*

36. Cum impetus  $I$  &  $i$  sint in ratione composita mas-

massarum  $M$  &  $m$  atque celeritatum  $C$  &  $c$ ; effectus innocui  $E$  &  $e$  sunt in ratione composita impetuum  $I$  &  $i$  atque temporum  $T$  &  $t$  (§. 34.)

*Corollarium 3.*

37. Effectus adeo innocui eodem tempore producunt ut impetus.

*Corollarium 4.*

38. Si  $C=c$ , erit  $E:e=MT:mt$ , hoc est, si duo mobilia eadem celeritate moveantur, effectus innocui sunt in ratione composita massarum atque temporum.

*Corollarium 5.*

39. Quodsi ergo mobilia  $M$  &  $m$  fuerint æqualia & celeritate eadem moveantur, erunt effectus innocui ut tempora  $T$  &  $t$ , quibus producuntur.

*Corollarium 6.*

40. Si mobilia æqualia eadem celeritate moveantur, vis eorundem eadem est (§. 1). Effectus adeo innocui viribus æqualibus producti sunt ut tempora, quibus producuntur (§. 39.)

*Corollarium 7.*

41. Actiones uniformes viribus æqualibus absolutæ sunt etiam in ratione temporum, quibus absolvuntur (§. 24). Actiones adeo uniformes viribus æqualibus absolutæ sunt ut effectus, qui per eas producuntur (§. 40).

*Corollarium 8.*

42. Si  $M=m$ , erit  $E:e=CT:ct$ , hoc est, si duo mobilia fuerint æqualia, effectus sunt in ratione composita celeritatum  $C$  &  $c$  atque temporum  $T$  &  $t$ .

*Corollarium 9.*

43. Si  $E=e$ , erit  $MCT=mcT$ , consequenter

F f 2

MC:

$MC : mc = t : T$ , hoc est effectu existente eodem, impulsus  $MC$  &  $mc$  sunt ut tempora  $T$  &  $t$  reciproce.

*Corollarium 10.*

44. Eodem modo patet, esse  $C : c = mt : MT$ , hoc est, effectu existente eodem, celeritates  $C$  &  $c$  esse in ratione composita reciproca massarum  $m$  &  $M$  atque temporum  $t$  &  $T$ .

*Corollarium 11.*

45. Quodsi igitur ulterius  $m = M$ , erit  $C : c = t : T$ , hoc est, si duo mobilia fuerint æqualia, effectus idem producitur temporibus, quæ celeritatibus reciproce proportionales sunt.

*Corollarium 12.*

46. Si vero fuerit  $T = t$ , erit  $C : c = m : M$ , hoc est, si idem effectus innocuus eodem tempore producitur, celeritates  $C$  &  $c$  sunt reciproce ut massæ  $m$  &  $M$ .

*Theorema 10.*

47. *Actio*nēs, quibus idem effectus producitur, sunt ut celeritates.

*Demonstratio.*

Si duobus mobilibus  $M$  &  $m$  diversa celeritate  $C$  &  $c$  latis idem producitur effectus, tum is aut eodem tempore producitur, aut tempore diverso.

I. Quod si mobilia fuerint æqualia & effectus idem diverso tempore producatur, celeritates erunt ut tempora reciproce, quibus is producitur (§. 45), hoc est, corpus, quod tempore  $\frac{1}{2}T$  effectum producit, movetur celeritate  $2C$ , cum alterum, quod effectum tempore  $T$  producit, moveatur simplici celeritate  $C$ , & ita porro. Iam evidens est, actionem uniformem esse duplam, quæ

di-

dimidio tempore effectum producit; triplam, quæ subttriplo, & ita porro; hoc est, actiones in eadem ratione crescere, in qua decrescit tempus, quod effectui ab eodem mobili impenditur consequenter  $A:a=t:T$ . Quare cum sit  $C:c=t:T$  per demonstrata; si ab eodem mobili existente idem effectus producitur diverso tempore, actiones sunt ut celeritates. *Quod erat unum.*

II. Si idem effectus producitur eodem tempore, mobili existente diverso; celeritates  $C$  &  $c$  sunt reciproce ut massæ  $M$  &  $m$  (§. 46.) scilicet si  $m=\frac{1}{2}M$ , erit  $c=2C$ , seu corpus dimidium movetur celeritate dupla. Quoniam hic eadem ratio massarum, quæ in casu priori erat temporum, ratio vero celeritatum eodem modo fese habet; perinde est, siue massæ sint eædem & tempus diversum, siue massæ diversæ & tempus idem. Sed in casu priori actiones  $A$  &  $a$  sunt reciproce ut tempora, directe ut celeritates, *per modo demonstrata*. Ergo & in hoc posteriori eædem actiones  $A$  &  $a$  erunt reciproce ut massæ, vel directe ut celeritates. *Quod erat secundum.*

III. Denique si idem effectus diverso tempore producatur, mobilibus  $M$  &  $m$  existentibus diversis; ponamus effectum eundem  $e$  eodem tempore  $T$  produci actionibus  $A$  &  $a$ : erit  $A : a = m : M$  *per cas. 2.* Producatur idem effectus  $e$  tempore  $t$  actione  $a$ , mobili existente  $m$ , qui tempore  $T$  actione  $a$  producebatur: erit  $a : a = t : T$ , *per cas. 1.* Est igitur  $A : a = tm : TM$ . Sed effectu existente eodem,  $C : c = tm : TM$  (§. 44). Ergo  $A : a = C : c$ , hoc est, actiones, quibus idem effectus producitur, sunt ut celeritates. *Quod erat tertium.*

*Corollarium.*

48. Actiones eodem tempore sunt ut vires (§. 21.) Ergo si idem effectus innocui eodem tempore producitur, vires sunt ut celeritates (§. 47.)

*Theorema II.*

49. Si duo mobilia eadem celeritate feruntur, actiones sunt ut effectus innocui.

*Demonstratio.*

Producatur actione  $a$  effectus  $e$  celeritate  $c$ . Ergo eadem celeritate actione bis  $a$  producetur effectus bis  $e$ ; actione ter  $a$  effectus ter  $e$  & ita porro, consequenter actione  $na$  ( $= A$ ) effectus  $ne$  ( $= Z$ ). Sunt igitur actiones  $A$  &  $a$  ut effectus innocui  $E$  &  $e$ . Q. E. D.

*Theorema I2.*

50. Actiones uniformes sunt in ratione composita effectuum & celeritatum.

*Demonstratio.*

Effectus  $E$  &  $e$  eadem celeritate  $C$  producti sunt ut actiones  $A$  &  $a$ , quibus producuntur (§. 49.) Producatur iam actione  $a$  idem effectus  $E$  celeritate  $c$ , qui actione  $a$  celeritate  $C$  producitur: erunt actiones  $a$  &  $a$  ut celeritates  $C$  &  $c$  (§. 47.) Ergo actiones uniformes  $A$  &  $a$  sunt in ratione composita effectuum innocuorum  $E$  &  $e$  atque celeritatem  $C$  &  $c$ . Q. E. D.

*Corollarium.*

51. Quoniam  $EaC = eAc$  (§. 50.) erit  $E : e = Ac : aC$ ; hoc est, effectus innocui sunt in ratione composita ex directa actionum & reciproca celeritatum.

*Theo-*

**Theorema 13.**

52. Actiones uniformes sunt ut impetus ad spatia applicari, que motu æquabili describuntur.

**Demonstratio.**

Actiones  $A$  &  $a$  sunt in ratione composita effectuum  $E$  &  $e$  atque celeritatum  $C$  &  $c$  (§. 50.) Sed effectus  $E$  &  $e$  sunt in ratione composita massarum  $M$  &  $m$  atque spatiorum  $S$  &  $s$  (§. 32) Ergo actiones sunt in ratione composita massarum  $M$  &  $m$ , celeritatum  $C$  &  $c$  atque spatiorum  $S$  &  $s$ . Quamobrem, cum in motu æquabili impetus  $I$  &  $i$  sint in ratione composita massarum  $M$  &  $m$  atque celeritatum  $C$  &  $c$ ; erunt actiones  $A$  &  $a$  in ratione composita impetuum  $I$  &  $i$  atque spatiorum  $S$  &  $s$ , seu ut impetus ad spatia applicati. Q. E. D.

**Corollarium.**

53. In motu æquabili spatia  $S$  &  $s$  eodem tempore absoluta sunt ut celeritates  $C$  &  $c$ , & impetus in ratione composita massarum & celeritatum seu ut  $MC$  &  $mc$ . Actiones igitur eodem tempore absolutæ sunt in ratione composita ex simplici massarum  $M$  &  $m$  atque celeritatum duplicata  $C^2$  &  $c^2$ , hoc est,  $A : a = MC^2 : mc^2$ .

**Theorema 14.**

54. In motu æquabili vires sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum.

**Demonstratio.**

Actiones uniformes eodem tempore absolutæ  $A$  &  $a$  sunt in ratione composita ex simplici massarum  $M$  &  $m$  atque duplicata celeritatum  $C^2$  &  $c^2$  (§. 55) Sed eadem sunt ut vires  $V$  &  $v$  (§. 21). Ergo etiam vires  $V$  &  $v$  sunt in ratione composita ex simplici massarum  $M$  &  $m$  atque

*m* atque duplicata celeritatum  $C^2$  &  $c^2$ . Q. E. D.

*Corollarium 1.*

55. Mobili igitur existente eodem, vires sunt in ratione duplicata celeritatum.

*Corollarium 2.*

56. In motu quomodocunque accelerato in fine cuiuscunque temporis vires sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum in fine istius temporis acquisitarum.

*Corollarium 3.*

57. Quoniam gravia per altitudinem quamcunque cadendo eam celeritatem acquirunt, qua ad eandem ascendere possunt; igitur vires projectorum, quibus ascensus inchoatur, sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum, quas per altitudines, ad quas ascendunt, cadendo acquirere valent.

*Scholion.*

58. Atque hæc est illa demonstratio, quam in hypothesi mobilium æqualium & rationis duplæ celeritatum A. 1710. cum Illustrissimo Comite ab Herberstein, illustri Leibnitio, atque aliis communicavi, æstimans actionem motricem per impetus ad spatia applicatos, quamque Leibnitius in suam cum viris celeberrimis Iohanne Bernoulli atque Iacobo Hermanno aliisque communicatam, recidere scripsit d. 12. Ian. A. 1711. datis litteris dicto fidem his verbis faciens : “ Calculum virium purarum “ seu actionum talem instituo. Sit spatium  $s$ , tempus  $t$ , “ velocitas  $v$ , corpus  $c$ , effectus  $e$ , potentia  $p$ , actio  $a$ , “ In motu æquabili erit  $tv$  ut  $s$ ,  $e$  ut  $cs$ ,  $tp$  ut  $a$ . Atque “ hæc quidem sine demonstratione assumi possunt. Accedit,

cedit, quod demonstrandum,  $ev$  ut  $a$ . Hinc porro plurimi theorematum demonstrari possunt, e. gr.  $p$  ut  $cv^2$ . „ Nam  $tp$  ut  $ev$ : sed  $e$  ut  $cs$ , &  $s$  ut  $tv$ . Ergo fit  $tp$  ut  $ctv^2$ , „ seu  $p$  ut  $cv^2$ . In motu inæquabili res etiam procedit; „ sed ordinatim invicem ducenda sunt, quorum rationes „ componuntur, & in elementaribus, unde deinde summa „ dat æstimationem totalem. Atque in his continetur „ pars meorum dynamicorum, abstracta maxime a rebus „ sensibilibus, etsi deinde per experimenta verifice- „ tur. „ Nullus itaque dubito, me hic principia *Dynamicae* menti *Leibnitii* conformia proposuisse, quibus via ad ulteriora sternitur.

### Theorema 15.

59. *In motu gravium seu æquabiliter accelerato vires sunt in ratione composita spatiorum, per quæ gravia descendunt, atque massarum.*

### Demonstratio.

In tempusculo infinite parvo, quo grave per spatium infinite parvum descendit, motus supponitur æquabilis, adeoque duorum mobilium  $M$  &  $m$ , quæ per inæquales altitudines descenderunt, actiones motrices  $A$  &  $a$  sunt in ratione composita tempuscularum  $dT$  &  $dt$  atque virium  $V$  &  $v$  integro descensu acquisitarum (§. 25). Eadem vero etiam sunt ut impetus  $MC$  &  $mc$  ad spatia  $dS$  &  $ds$  applicati, quæ ulterius descendendo tempusculis  $dT$  &  $dt$  celeritatibus temporibus  $T$  &  $t$  per spatia  $S$  &  $s$  acquisitis  $C$  &  $c$  describerent (§. 52.) Habemus itaque  $VdT : vdt = MCds : mcdf$ , consequenter  $VCdT : vc dt$

G g

$vc dt$

$vcdt = MC^2 dS : mc^2 df$ . Est vero in motu gravium ex hypothesi Galilæana, seu æquabiliter accelerato,  $C^2 : c^2 = dS : df$  &  $C : c = dT : dt$ . Ergo  $VdT^2 : vdt^2 = Mds^2 : mdf^2$ , consequenter  $dTVV : dtVv = dSVM : dfVm$ . Quoniam itaque in tempusculo infinite parvo vires V & v perinde ac massæ M & m constantes sunt; erit  $TVV : tVv = SVM : fVm$ , consequenter  $T^2V : t^2v = S^2M : f^2m$ ; &, ob  $T^2 : t^2 = S : f = C^2 : c^2$  ex natura motus æquabiliter accelerati,  $VC^2 : vc^2 = MSC^2 : mfc^2$ . Est igitur  $V : v = MS : mf$ , hoc est, vires sunt in ratione composita spatiorum, per quæ gravia descendunt, atque massarum. Q. E. D.

### Corollarium 1.

60. Quoniam grave vi cadendo acquisita ad eam altitudinem adscendit, unde decidit: Vires gravium ascendentium sunt in ratione composita massarum & altitudinum, ad quas ascendunt.

### Scholion 1.

61. Atque hoc est illud principium, quod in vi-  
rium aestimatione a Leibnitio suppositum constanter nega-  
runt Papinus, aliique antagonistæ.

### Corollarium 2.

62. Quoniam ascensus gravis ascendentis est effe-  
ctus nocivus (§. 16), est autem ut massa ducta in altitu-  
dinem, per quam ascenditur (§. 32); vires sunt ut effe-  
ctus nocui in ascensu gravium ex hypothesi Galilæana.  
(§. 60.)

### Scho-

*Scholion 2*

63. Perperam igitur omnis effectus statuitur causæ proportionalis.

*Theorema 16.*

64. Effectus innocui sunt in ratione composita, ex simplici temporum & subduplicatis virium atque massarum.

*Demonstratio.*

Effectus innocui  $E$  &  $e$  sunt in ratione composita massarum  $M$  &  $m$ , celeritatum  $C$  &  $c$  atque temporum  $T$  &  $t$  (§. 34.). Sed vires  $V$  &  $v$  sunt in ratione composita massarum  $M$  &  $m$  simplici atque celeritatum duplicita  $C^2$  &  $c^2$  (§. 54), adeoque celeritates  $C$  &  $c$  in ratione composita ex subduplicata massarum reciproca & subduplicata virium directa, nempe ut  $\frac{v_v}{\sqrt{M}}$  ad  $\frac{v_v}{\sqrt{m}}$ . Quamobrem effectus  $E$  &  $e$  sunt in ratione composita temporum  $T$  &  $t$  directa, atque virium & massarum subduplicatis  $VVM$  &  $Vvm$ . Q. E. D.

*Corollarium 1.*

65. Si  $T=t$ , erit  $E:e=VVM:Vvm$ , hoc est, effectus innocui eodem tempore producti sunt in ratione composita ex subduplicatis virium atque massarum.

*Corollarium 2.*

66. Si præter  $T=t$  etiam  $M=m$ , erit  $E:e=VV:vv$ , hoc est, effectus eodem tempore, mobilibus existentibus æqualibus, producti sunt in ratione subduplicata virium.

## Theorema 17.

67. Vires sunt in ratione composita effectuum eodem tempore productorum & celeritatum.

## Demonstratio.

Sunt enim ut actiones eodem tempore absolutæ (§. 21). Sed eadem actiones sunt in ratione composita effectuum eodem tempore productorum atque celeritatum (§. 50). Ergo vires sunt in ratione composita effectuum eodem tempore productorum atque celeritatum  
Q. E. D.

## Corollarium.

68. Effectus  $E$  &  $e$  sunt in ratione composita massarum  $M$  &  $m$  atque spatiorum  $S$  &  $s$  (§. 32). Ergo vires  $V$  &  $v$  sunt ut MSC ad  $msc$ , hoc est, ut impetus  $MC$  &  $mc$  ad spatia  $S$  &  $s$  applicati.

## Theorema 18.

69. Conatus seu vires mortuæ sunt in ratione composita massarum & celeritatum.

## Demonstratio.

Per legem continuitatis *Leibnitianam* conatus considerari potest instar vis vivæ moventis corpus per spatiolum infinite parvum, hoc est, revera nullum. Quare, cum conatui sic considerato applicari possit theorema de viribus vivis puris attenta differentia, quæ inter casum hunc ultimum & ceteros intercedit, vires puræ autem sint ut MSC ad  $msc$  (§. 57), evanescentibus spatiis  $S$  &  $s$ , in præsenti casu revera nullis, erunt conatus ut  $MC$  ad  $mc$ . Q. E. D.

Scho-

*Scholion. I.*

70. Obtinet hoc in ueste ceterisque potentiis mechanicis. *Leibnitius* in Actis Erudit. 1. c. p. 150. paulo aliter rationem reddit, cur conatus sint celeritatibus proportionales : putat enim, in ipso initio motus descensus seu ipsas quantitates spatiorum descensu percursorum, nempe adhuc infinite parvas seu elementares, esse conatus descendendi proportionales. *Enimvero* quoniam nostra principia cum suis concordare agnovit (§. 58), immo agnoscere debuit, cum nullum dederimus theo- ma, quod non cum mensura virium Leibnitiana consentiat, nondum videtur illo tempore Dynamica ex primis suis principiis constituisse. Sane nec vires vivæ in omni hypothesi gravium sunt spatiis proportionales : neque enim solum ex demonstratione superiori (§. 59) pater, id tantum convenire hypothesi Galilæanæ ; verum, si demonstrationem generaliter concipias, patebit ulterius, fore vires in ratione composita ex simplici massarum, duplicata spatiorum directa, & duplicata temporum reciproca. Quoniam igitur in hypothesi Galilæana spatia sunt in ratione temporum duplicata ; singulari hic ratione contingit, ut vires spatiis proportionales evadant.

*Corollarium I.*

71. Si uestis ponderibus in A & B onustus mo-



ponderum per spatia AD & BE fit eodem tempore. Sunt adeo effectus E & e, seu  $M \times AD$  &  $m \times EB$ , hoc

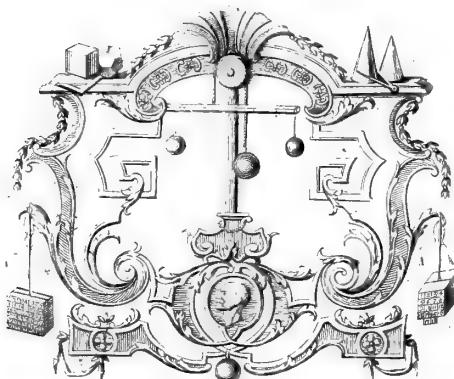
est,  $M \times AC & m \times CB$  ut impetus  $MC & mc$  (§. 37), consequenter  $M \times AC$  ad  $m \times CB$ , ut conatus descendendi (§. 69).

*Corollarium 2.*

72. Quodsi ergo conatus descendendi fuerint æquales, erit  $M \times AC = m \times CB$ , consequenter  $M : m = CB : AC$ .

*Scholion. - 2.*

73. En igitur demonstrationem theorematis mechanici & fundamentalis ex principiis Dynamicis deducam. Mittimus alia, quæ inde derivari poterunt. Neque enim in præsenti nobis propositum fuit, quam principia Dynamicæ constituere.

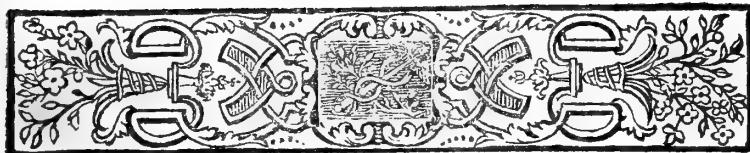


*C L A S S I S*  
S E C U N D A,

*continens*

P H Y S I C A.





NOVA  
PLANTARVM GENERA,

*Auctore*  
I. C. Buxbaum.

I.

Chamædaphne.

**F**requens est Ingricæ & Careliæ uliginosis & terra turfacea scatentibus ericetis frutex, Botanicis hucusque minus notus, qui merito novum constituit genus, cuius notæ sunt: Flores monopetalii, campaniformes globosi, fructus in quinque loculamenta divisi, seminibus fœti exiguis subrotundis. Adeo modum nascendi, qui Polygonato vulgari respondet. Descriptio sit sequens: Radix lignosa, tortuosa, repens, ramosa, quæ hinc inde fibras in fasciculos congestas dimittit, novos quoque iuxta stipitem emitit stolones. Caudex digitæ fere crassitie, spadiceus, dodrantali spatio

H h ter-

terram superans, in duos vel tres maiores, hique rursus in minores brachiantur ramos arcuatos & versus terram inclinatos. Folia ex summis egrediuntur ramis, alternatim posita, oblonga, ex rotundo paulum acuminata, rigida, granulis albidis adspersa, quasi pustulata, superiori parte obscure, inferiore vero dilutius viridia, glabra, hyemisque patientia, petiolis brevibus adhaerentia & erecta. Inferiora sunt maiora, eque horum alis gemmæ novorum surculorum prodeunt quatuor vel quinque, superiora vero successive, quo altius adscendas, minora & magis rotunda, tandemque Serpilli foliorum æmula evadunt. Ex singulis horum alis singuli enascuntur flores, brevi petiolo reflexo insidentes, penduli, nivei, quinque laciniis acutis conniventibus disiecti, calyce quinquifido, brevi, fusco, & ab alio bifido sustentato cincti, decem staminibus, pistillum breve quinquetrum ambientibus praediti. Sequuntur capsulæ quinquangulares, quinqueloculares, & quinque valvis ab apice dehiscentes, perianthio instar stellæ expanso insidentes. Mirum in hac planta est, quod folia, quæ tota retinet hyeme, media demum æstate abiiciat. Floribus enim ultimis Maii & primis Iunii diebus emarcidis, iam novi ex alis foliorum inferiorum rami frugiferi surgunt surculi, qui maius incrementum sumentes Iulio producunt folia & florum gemmas, prioris interim anni foliis delapsis, ramulisque nudis cum solo relictis fructu. Gemmæ vero novi surculi eo perveniunt, ut, si calycem, quo obvolvuntur, immaturum aperias, stamina florum futuri anni clare se conspicienda exhibeant. Videtur autem tota planta temperate accidente frigida, Augusto nempe & Septembri,

exa-

exarescere. Vere tamen sequenti, si aliquot saltem dies sol læte fulserit, folia ante nigra viridem acquirunt colorēm, & planta floribus onusta elegantissimis non sine stupore conspicitur. Ramulus, qui ante annum floruerat, est aridus, foliis orbus, capsularum seminalium saltem vestigia brevi etiam interitura ostendens, terræque proximus, licet ante annum in summitate fruticis locatus. Quamvis enim singulis annis hic frutex procrescat, nunquam tamen evadit altior, sed caudex semper versus terram inclinatur & novas agit radices. Ob foliorum aliquam cum Lauro similitudinem nomen hactenus vacuum, olim tamen variis tributum plantis, revocamus & Chamædaphnen nominamus. Vid. Fig. I.

## II.

## Potamopitys.

Planta hæc palustris facie externa convenit cum I. Bauhini Equiseti facie Polygono foemina, seu Limnopevce Cordi, ob florem & fructum vero longe diversa, uti patet ex descriptione sequenti: Radix fibroſa. Caulis palmaris fere, interdum ramosus, (qualem nostra figura exhibet) rectus, rotundus, concavus, ex multis articulis pyxidatis confiatus. Ex his ipsis articulis egrediuntur folia radiatim posita, sex, septem vel octo, quæ radici proxima & inferiora, sunt angusta, mollia atque virentia, Gallii foliorum æmula; superiora vero multo latiora, quatuor, tria vel interdum duo saltim coniuncta. Ex foliorum alis exeunt flores parvi, albicantes, ex petalis quatuor, angustis & acutis, cruciatim positis, constantes, sessiles, calyce pariter quatrifido sustentati, in floris

medio pistillum rotundum, quatuor staminibus cinctum. Fructus sequitur rotundus, quadricapsularis, seminibus gracilibus lunatis foetus. Character itaque huius plantæ est: Folia stellata, flores tetrapetali & fructus in quatuor loculamenta divisi. Pertinet iuxta Raium ad Herbas flore tetrapetalo anomalias. Occurrit in palustribus Thraciæ, non longe a Bosphoro prope pagum Boiusteri, floret Maio. Fig. II.

## III.

*Ceratocarpus.*

Huius notæ sunt: Folia graminea. Flores apetalici, calyce destituti, embryoni insidentes. Fructus triangulares depresso, capsulæ Bursæ pastoris fere similes, bicornes & bivalves, semine foeti unico, singularis figuræ, longum enim est, gracile & teres, cuius extremitates instar arcus inflexæ & sibi invicem adductæ intermedia coniunguntur membrana. Descriptio vero est sequens: Radix parva, fibrosa, ut mihi videtur, annua, ex qua caulinus unicus, lignosus & angulosus, ab exortu statim ramosus. Folia angusta, graminea, unum vel duo, singulo ramo nec non singulæ capsulæ aut flori ex caule emergenti singulum apposita, rigida, in medio carinata. Ex alis foliorum aut ramulorum nascuntur flosculi staminei, exigui, lutei, nullo obvoluti calyce, sed fructum stipantes tenerum, qui deinde abit in capsulam bicornem supra descriptam. Crescit in locis fqualidis, salinis & arenosis, circa mare Caspium, in regione Tagestan, nec non circa Astrakan. Auctamno caulis a radice a ventis divellitur & vagatur per campos, more Eryngii aut Echinophoræ. Ob duos capsulæ aculeos seu

cor-



fig:1.

fig:2.



fig. 1



fig. 2



fig:3.

fig. 5.

cornua sic appellare placuit. Describitur a Tournefortio in Corollario novum genus, Ceratoides, a fructu cornuto. Diu hæsi dubius, anne Ceratocarpus noster sit eius Ceratoides folio Psyllii. Sed fructum dicit bicapsularem a flore remotum. Suspectus tamen mihi est, quod nullam Ceratoidis dederit figuram. Forsitan vidit plantam immaturo adhuc fructu & deceptus est.  
Fig. III.

D E  
**DIRECTIONE CORPORVM  
 GRAVIVM  
 IN VORTICE SPHAERICO,  
 ET  
 FIGVRA NVCLEI,**  
*Disertatio Experimentalis,*  
*Auct.*  
**G. B. Bülfingero.**

*Occasio et Destinatio Experimenti.*

I.



Vnt anni complures; ex quo occasione *M. Nov.* epistolæ a *Iac. Bernoullio* ad *I. Chr. 1725.*

*Sturmum scriptæ*, & in *Actis Erud.* *Lipf. 1686.* *M. Febr. p. 92.* seqq. exhibitæ, visum mihi est, recte illos subducere rationes suas, qui *ex motu vorticis*, quam

H h 3

*Car-*

*Cartesius* statuit, *Sphærici*, circa sphæræ axem gyrante, concludant, *gravia illius* ope potius *ad axem*, quam ad centrum telluris tendere debere. Posito enim, uti *Cartesius* voluit, ætherem aëremque constare corpusculis ad concipiendum motum vehementiorem aptioribus, quam sunt terrestria, additoque, quod vulgaribus constat experimentis, corpora vehementiori motui apta fortius niti ad peripheriam, si in circulo illa moveri contingat, adeoque cætera ab illis propelli ad centrum motus illius circularis: certum erat, terrestria per impulsum illum colligi a peripheria *ad centrum*. Sed quale centrum? centrum ipsius *sphæræ*, & vorticis totius? an centrum *circuli* cum æquatore vorticis paralleli?

II. *Cartesiani*, ut explicatio propius accederet ad Phænomenon gravitatis, cui scil. explicando hæ vorticum hypotheses a *Cartesio* destinabantur, ex illa vorticis actione derivarunt nisum *ad ipsius Sphæræ centrum*; eoque facto & directionem gravium, & figuram telluris sphæricam conati sunt exponere.

III. Contradixit *Cartesianis* inter complures alios præcipue *Christ. Hugenius*, ratus, ex isto vorticis motu sequi impulsum gravium non ad centrum totius sphæræ, sed ad centrum circulorum æquatori parallelorum, sive ad axem; plane uti *Keplerus* dixerat, & ante *Cartesium Schematismo* expreßerat, in Epit. Astron. Copern. p. 97.

IV. Plausibilis hoc est primo statim intuitu, videatur enim rationi congruum, si duo corpora in circulari ali-

aliquo plano simul mota inæquales nisus habeant, adeoque imbecillius a fortiori repellatur, ut illud repellatur in eodem plano, in quo utrumque nititur ulterius progredi. Placuit itaque id argumentum non paucis.

V. *Hugenius*, ne in sola refutatione falsi subsistere videretur, & explicando phænomeno aliquid accommodum inveniret, pro obtinendis directionibus gravium ad horizontem perpendicularibus, & figura telluris prope sphærica per vorticem generanda, substituit gyrationi Cartesianæ aliam, qua materia subtilis superficie sphericæ inclusa, infinite variis sub illa superficie directionibus movetur, secundum arculos circulorum sphæræ maximumrum. Cuiusmodi fere illud est, quo *Ioh. Christ. Sturmius* in Colleg. Curiof. P. II. Epist. ad *Henr. Morum* §. 23. p. 23. innuit: circulos vel arcus potius, a singulis materiae subtilis partibus descriptos, ita concipiendos esse, ut omnes gyrationis sive impetum ab uno sphæræ puncto nactæ intelligantur. Secuti sunt Hugenianam nisum rationem plures alii, & novissime *Cel. Wolflus* in Physico Systemate; difficultatem vero, vel, si manavis, impossibilitatem vorticis eiusmodi opposuerunt *Sturmio* *Jac. Bernoullius*, l. c. Actor. Lips. & *Hugenio Saurinus*.

VI. Novas scil. Cartesianæ causæ suppetias tulit *Cel. Saurin*, eandemque vacillantem conatus est omnino stabilire, editis diuinabus in hanc rem commentationibus, quarum prima in *Ephemerid. Erud. Gall.* ad A. 1703. p. 38. seq. obvia, non modo solvere Hugenianum adversus Cartesianos vortices ratiocinum, sed etiam demonstrare fategit, ex reactione superficie sphericæ, vor-

ticem

ticem fluidum ambientis, generari nisum ad ipsius sphæræ centrum. Secunda in iisdem *Ephemerid. Gall. ad A. 1707. m. Maio p. 327.* & seqq. excusa, primo quidem pro Cartesio vrget, si vel maxime vortex conciperetur ab initio Cylindricus, illum tamen ipsa sui in vicinum fluidum pressione redactum iri in figuram sphæricam, vel spæroidicam ; Deinde vero phænomenis naturæ multo magis respondere motum vorticis circa telluris axem ex occidente in orientem gyranter, quam interruptas illas gyrationum, in circulis maximis factarum, portiones Hugenianas. Intelligo ex *Commentariis Acad. Scient. Paris. ad A. 1709. p. 167. edit. Batav.* opposuisse Saurinianæ meditationi primæ nonnulla viros Clar. Parentium & Montreum, sed quæ ingeniosissimum Auctorem a sententia sua adeo non dimoverint, ut potius pro perfecte demonstratis habeat, quæ A. 1703. in Hugenianas Demonstrationes dixerit.

VII. Liceat sine cuiusquam iniuria fateri, me in re adeo lubrica, & variis composita circumstantiis, *semper nonnihil hæfisse* circa demonstrationum hactenus existantium evidentiam, adeoque subinde optasse, ut res *experimento* decidi luculento posset ; maxime cum viderem, summos viros v. g. *Jac. Bernoullium l. c.* ambiguo esse, an ex fundamento superficiei sphæricæ deduci possit, quod ad centrum potius sphæræ, quam circuli parallelī tendat nisus corpusculorum a peripheria propulsorum. Etsi enim mihi videbar intelligere rationem, cur futurum non sit, ut ad centrum sphæræ tendant corpuscula ; nolui tamen in re difficulti meum interponere iudi-

iudicium; aut præcipitare conclusionem, nondum consulta per experimentum natura.

8. Succurrit facile animo *notissimum Hugenii experimentum*, in causa gravium frequenter adhiberi solitum: quo is, assumto vase Cylindrico Diametri 8-10". & altitudinis 4-5", idem aqua & ceræ hispanicæ abrasis particulis replevit, vitro superne obtectum, & tabulæ ligneæ impositum, cuius ope in gyrum agi celerrime poterat. Facto enim motu vasis pernicissimo, & inhibito iterum repente eodem motu, accidit, ut aqua diutius adhuc gyros continuaverit suos, & hispanicæ ceræ particulas circa centrum baseos cylindri in cumulum quasi hemisphæricum coegerit. Non id tamen instituto *satisfecit* meo, quod subinde mihi videbatur, circumstantias in hoc experimento tales misceri, quales non admittant vortices sive Cartesiani sive Hugeniani, si qui in rerum natura occurrant sphærici. Præcipue nuclei tantum hemisphæroidici productio, & cylindricus vortex, & sustentans corpora fundus vasculi, ad huius quæstionis definitionem minus convenire videbantur.

IX. Cœpi igitur primo cogitare, annon ita insti-tui res possent, ut vice dimidiati *nucleus* prodiret *integer*; finis enim assumtorum a Cartesio & Hugenio vorticum cœlestium est sphæræ genesis. Atque hic facile animum subiit cogitatio, si vas cylindricum in medio esset divisiūm diaphragmate basibus parallelo, & in parte eius inferiori miscerentur aquæ corpuscula non multo leviora specificē, quam est aqua: futurum fortassis, ut inferne non minus dimidia nuclei pars in medio diaphragmatis colligeretur, quam superne; maior aut minor pro mate-

riæ, quæ adhiberetur, maiori aut minori quantitate, aut diversitate gravitatis specificæ. Tentavi aliquid in eam rem, non sine omni successu: sed difficilior tamen huius experimenti dextre capiendi ratio est, & vortex non desinit esse cylindricus; ut de influxu gravitatis & levitatis corpusculorum aquæ mixtorum in figuram nuclei nihil dicam. Quos enim ego obtinui nucleos, sphærici profecto non fuerunt.

X. Visum igitur est, vortices eiusmodi cylindricos, tanquam ab hoc naturæ facto remotiores, adhuc missos facere, eandemque *propius* imitari; *excitato vortice* potius *sphærico*, in quo ad imitationem Hugeniani experimenti, corpuscula specifice graviora primo quidem ab aqua in vase gyrante mota abriperentur; adeoque, ut coniecturâ erat, durante quidem vasis gyratione extreum occuparent; sed cessante illa ab aqua diutius motum continuante ad interiora pellerentur; exhibitura figuram, ut facile coniicere licebat, sive sphæricam sive cylindricam.

XI. Id consilium, iam ante tres vel quatuor annos captum, non licuit executioni dare, nisi paucis abhinc hebdomadis; adhibitis in eam rem vitris & machinis, quibus ad lumen manus affrictu excitandum *Hauksbeius* primo & deinde cæteri hucusque usi sunt: *feliciori*, quam prius divinaveram, successu. Cum enim animus esset attendere ad figuram, quam cessante vitri motu, gyrente autem sola in illo aqua, partes ceræ hispanicæ, ab aqua propulsæ, acquisitæ essent; aër, qui se invito mihi obtruserat, & passim ab aqua se separaverat, durante & vitri & aquæ motu gyrente talem induit figuram,

ut

ut non gravate ferrem, turbari ab illo motum ceræ & aquæ ad quietem redeuntis; consequenter genesin figuræ, quam a ceræ memoratæ particulis expectaveram, eludi.

XII. Experimenti illius aliquoties, & *coram Societate*, facti circumstantiæ potiores hæ sunt:

### *Experimentum.*

Assumpsi vitrum utcunque sphæricum; diameter enim æquatoris maior est cæteris, & Poli desinunt in conum quasi quandam truncatum. Instructum illud est circa polos suos cylindris metallicis, prominente axiculo dotatis, in quorum altero conspicitur rotula minor fixa, cui filum circumduci potest, præfente in eum finem crena. Id vitrum per foramen cylindri alterius implevi aqua, paucō pulvore ceræ hispanicæ nigræ & scobeferreæ aptavique ad machinam, cuius ope alioquin pro excitando per affrictum lumine rotationes similium sphærarum vietearum fieri solent.

XIII. His factis cœpi versare manubrium machinæ prædictæ, ut gyros agere vitrum inciperet, vidique:

1. Superius in vitro fese ostendere bullam (uti dicitur, vel potius segmentum) aëris, quæ instituta rotatio deflechteret in eam partem, in quam dirigebatur rotatio.

2. Scindi vero illam in medio sui, antequam deflectat, per aquam extima sphæræ loca affectantem.

3. Continuato paululum motu, ceræ & ferri pulverem adhærere lateribus vasis circa æquatorem motus, per modum zonæ; postquam antea iam

Fig. 4.

4. Aliquot impulsibus superne proiectus iterum sua gravitate decidisset.

5. Cessante vitri motu aërem interturbare ascensu suo motum aquæ, & sic impedire, quo minus succedere sperata ceræ & scobis ad centrum vel axem impulsio regularis fieri posset. Hoc *primum* tentamen erat.

XIV. Repleto igitur *iterum* vitro, sic, ut, cum inverteretur, nulla superius bullula aërea conspici amplius posset, incoavi denuo gyrationem, & observavi :

6. Passim erumpere in aqua bullulas aëris minores, & colligi in maiusculas, & cessante deinceps motu, vidi earum plurimas adhærere particulis ceræ hispanicæ

7. Facto concitatiore motu aëreas illas particulas ex latere, in quod nro. 1. deflectebant, proprius subinde ad axem sphæræ & rotationis accedere.

8. Tandemque elegantem visui exhibere cylindrum, eundemque

9. Prout motus gyrationis fieret velocior, graciorem; in quo tamen

10. Bullulæ illæ aëreæ inter se contigæ non erant, sed inter aqueas gyrabant.

11. Remittente nonnihil motus celeritate cylindrus ille aqueo-aëreus reddebatur Diametri amplioris, adeoque laxioris, ut sic dicam, mixtionis.

12. An aucta motus pernicitate colligi bullæ illæ in cylindrum continuum possint, nolui tentare metu damni, quod fortassis vitro inferri possit, hactenus unico ad hoc experimentum.

13. Si motu remissori bullulæ antea separatae coibant in maiores, figura earum sphérica non fuit, sed latior

tior ex ea parte, ex qua aquæ rotantis impulsus adveniebat, auctior ex opposita.

14. Elegantissimum fuit spectaculum, quod admisso in maiori copia aëre, & cylindro adhuc valde ampio, conspiciendum fese præbuit, dum bullulæ quædam aëreæ non transibant centrum vorticis sphærici, sed ex latere dextro, quorsum descendens aqua tendebat, faciebant gyros quasi ellipticos, aliæ centrum vorticis transgressæ spiras, quales pro motu planetarum Cassinus descripsit in Memoir. de l'Acad. 1709. p. 328. Sit LMNO sectio æquatoris, vel circuli ad illum paralleli in vitro sphærico : Sit ABCD sectio Cylindri: repræsentabit abcd gyrum unum, & EFGHI gyros alteros utcunque expressos imitatione liberiori.

15. Cum sisteretur motus vitri, & cylindrus aëreo-aqueus esset nonnihil amplior, vidi post parvulam morulam coarctari cylindrum illum adhuc gyranter, & tum demum fieri iterum ampliorem, & distolvi.

16. Ascendere tandem bullulas aëreas ad summittatem, sed maiores plerasque motu retrogrado potius, quam directo. Exprimat ABC directionem aquæ in vase iam quiescente. Sit B summitas eius, rotetur bullula secundum pqrs: rarissime fiebat, ut veniret ex p per q in B, sed venientes ex q per r in s, inde regrediebantur in B ibidem postmodum hæsuræ.

XV. Cætera, quæ in hisce tentaminibus ex occasione observavimus, fere huc redeunt:

17. Cera Hispanica & limatura Martis faciebant zonam, sive zodiacum quasi quendam circa æquatoriem.

18. Inæqualis tamen densitatis, & si ad minutias respicere placeat, latitudinis.

19. Erat pars eius, quæ sese, remittente paululum velocitate rotationis, a reliqua separabat, & ab æquatore plus vel minus recedebat, Tropicum repræsentans, aut Polarem circulum.

20. Mobilis illa, prout intendebatur motus, vel remittebatur nonnihil, adeoque spiras agens in superficie sphæræ concava, &

21. Si multum minuebatur motus celeritas, abscondebat sese pars illa in cylindros polares.

22. Si motus vitri inhibebatur, pars pulveris circa æquatorem vorticis hærens decidebat gravitate sua, sed irregulariter, ob turbas ab ascendentibus hinc inde bululis aëreis factas.

XVI. In prioribus tentaminibus nequidem  $\frac{1}{\tau\sigma\sigma}$  capacitatis vasis repleta erat aëre, sed cum aëris copia maior admittebatur, ut  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{6}$  partem vasis occuparet, & velocitas gyrationis nonnihil intendebatur :

23. Collectus est aër in cylindrum, circa medium sphæræ, ab omni aqua liberum, cuius intima superficies apparebat politissima ;

24. Neque magna rotationis celeritas requisita est, ad conservandum huncce nucleus cylindricum, postquam semel genitus erat ;

25. Manebatque, inhibito licet sphæræ motu, tamdiu, donec aqua gyrans ob affrictum ad vitri latera motum & nisum suum amitteret.

Con-

*Conclusiones.*

**XVII.** Enarratis hucusque Phænomenis facile foret, in causas uniuscuiusque singulatim inquirere ; facile etiam, ostendere leges vorticum, quibus obtineri possunt phænomena pro desperatis habita ; v. gr. spirales alternatim maiores, minoresque corporum cœlestium, & similia. Non id vero præsentis instituti est, quo hoc unum agimus, ut figuram nuclei a vortice sphærico generandi definiamus ; eoque ipso viam sternamus ad solvendum *Problema Mechanicum*, quo leges vorticum tales requiruntur, ut nucleus oriatur sphæricus.

**XVIII.** Duas igitur *conclusiones* hic potissimum inferimus : altera rem spectat, altera pertinet ad modum ratiocinandi de vorticibus : Vtraque in exponenda gravitatis causa utilis & necessaria videtur.

**XIX.** Constat igitur experimenti fide, & oculorum testimonio ; *in vortice sphærico circa axem sphæræ rotato, corpuscula cedentia*, hoc est, ea, quæ ab impulsu fluidi vorticosi a peripheria versus medium pelluntur, *non coire in nucleus sphæricum, sed cylindricum* : Itaque ex solo eiusmodi vortice non satis exæcta deduci directionem corporum cedentium versus centrum vorticis, sed illam tendere ad axem gyrationis.

**XX.** Cessat itaque *dubium*, quo haetenus in diversa distracti fuerunt eruditi, postquam natura exemplo oculis obvio prodidit, quid in obscuro faciat, cum vortices rotat ex Cartesii præcepto. Puto autem, satis comode in hoc experimento exprimi conditiones desiderati vorticis. Habemus fluidum, superficie sphærica comprehensum, & actum in gyros circa axem sphæræ.

**XXI.** Verum est, motum rotatorium imprimi aquæ per actionem superficie ambientis, eandemque simul cum aqua ferri in eadem plagam; Fortassis pro Cartesio dicas, motum vorticis in natura aliter impressum esse, & superficiem concludentem quiescere. Non id vero illationi nostræ officet. Quicquid sit de modo, quo vortici motus ab initio imprimitur, consideramus illum in statu manenti. Quo casu neque officit superficie extimæ quies, ut vidimus nro. 15. & 25. in experimentis. Manet igitur, quod §. 19. diximus.

**XXII.** Alterum hoc esto: Pro iudicanda directione vis centrifugæ particularum fluidi circa axem rotantium considerari debet illud planum, quod æquatori parallelum est, non vero planum meridiani, vel alterius circuli in sphæra maximi. Patet id ex figura nuclei cylindrica, vi cuius directio corporum cedentium est perpendicularis ad axem in planis æquatori parallelis.

**XXIII.** Iuvat autem hoc attendere, quoniam, si ratione agere solo vellemus, posset res videri dubia. Ex una quidem parte sic infero: quoniam ipse motus, a quo vis centrifuga oritur, non fertur secundum meridianum vorticis, vel circuli alterius maximi æquatorem secantis, sed secundum circulos æquatori parallelos: igitur & directio vis centrifugæ particulæ cuiuscunque erit in planis æquatori parallelis.

**XXIV.** Ex altera autem parte superficiem attendo sphæricam alia ab aliis æstimatio eruta est. *Jac. Bernoullius*, loco superius citato ingeniose monet, plana circuli paralleli, v. g. tropici, & circuli maximi v. g. eclipticæ sese intersecare in linea, quæ utriusque circuli tan-

tangens sit. Si ergo punctum contactus , rotari incipiens iuxta ductum tropici , conatum habeat recedendi per tangentem , haec tenus æque æstimari posse , quod recedat a centro Eclipticæ , atque a centro tropici , cum eadem sit utriusque tangens. Nullam igitur rationem esse , cur pulsio globulorum fiat in plano verticali potius , quam in plano circuli parallelī , vel quovis alio , cum tangens illa , secundum quam recedere conatur globulus , infinitis planis sit communis. Ambigit itaque hoc loco Vir eximius ob sphæræ rationem.

XXV. *Alibi* ex hac ipsa consideratione pronunciat pro Cartesio. Postquam enim in iisdem Actis A. 1695. p. 547. de pressione fluidorum adversus latera vasorum annotaverat , fieri illam perpendiculariter ad superficiem continentem , ex eo intulit , directionem corpusculorum retro impulsorum ferri erga centrum sphæræ , quæ scilicet sola sit ad superficiem perpendicularis.

XXVI. *Alio nonnihil modo* ad eandem pervenit conclusionem *Cel. Saurinus* , Iourn. des Savans , A. 1703. M. Ian. p. 40. 41. Ille , concessō , quod particulae cedentes ferrentur directe ad axem , si circulus æquatori parallelus conciperetur seorsim , aut in vortice cylindrico constitutus : negat , idem obtinere , si fluidum superficie comprehendatur sphærica. Meretur ingeniosa Viri *Cel.* annotatio , ut & hoc loco legatur :

*Il est clair , que la matiere fluide , qui dans le plan , du cercle parallele , dont le Diameter est DN , fait effort , pour s'éloigner du point O suivant OD , & qui par son , effort pousse au point C la surface sphérique , dont le cercle PAQE est une section par l'axe ; il est clair dis-je , , , que*

" que cette matiere n'est pas autrement repoussée par la  
 " surface , qu'elle pousse , qu'elle le seroit par un plan , qui  
 " toucheroit cette surface au point D. Ainsi selon les loix  
 " de la Mechanique , son effort en ce point est reflechi con-  
 " tre le fluide , qui est a coté , suivant la corde DM egale a  
 " DN ; or cet effort étant soutenu par la reaction du flu-  
 " de suivant la meme corde MD , il s'ensuit , que la surfa-  
 " ce sphérique est presée au point D par deux forces ega-  
 " les , dont l'une agit suivant OD , & l'autre suivant MD ,  
 " d'où resulte dans ce point de la surface une impression sui-  
 " vant la direction CD , qui est celle de la Diagonale du  
 " parallelogramme fait par les deux cordes MD , ND. Si  
 " l'on met donc maintenant au point D un corps grossier ,  
 " qui ne fasse aucun effort par lui même , la matiere flu-  
 " de , qui agit suivant OD , & celle , qui exerce sa reaction  
 " suivant MD prendront le dessus avec un égal effort , &  
 " le pousseront suivant DC vers le point C , qui est le centre  
 " du tourbillon , & non pas vers le point O , qui est le cen-  
 " tre du cercle parallele. Et comme le même raisonnement  
 " a lieu , quelque plan du cercle que l'on considere , & dans  
 " quelque point du plan que l'on suppose le corps grossier , il  
 " me paroit démontré , que dans l'hypothèse de Mr. de  
 " Cartes les corps pesants doivent suivre par tout en tom-  
 " bant la même direction , qui tend au centre de la terre ,  
 " conformément à l'experience , & contre l'objection pro-  
 " posée. &c.

XXVII. Quorsum ista ? scilicet ut intelligatur ,  
 quod dubium esse poterat Viris utique magnis , sed ratio-  
 cinantibus tantum , id vel tyroni experimentum capienti  
 obvium & in aprico suisse. Nimirum ex peripheria po-

tius

tius circuli rotando descripti sumendas esse perpendiculares lineas , quam ex superficie ambiente ; quia non tam ad superficiem concludentem perpendicularis est directio corpusculorum cedentium, quam ad axem gyrationis. §. 19. Quid futurum putas , si superficies fuerit Elliptica , si Parabolica , aut utcunque genita ex rotatione curvæ ABCDE Fig. 9. circa axem ? Fallor? an concipi illa debet , ut composita ex infinitis cylindrulis contiguis rotatione elementorum PMmp genitis ? vel , si mavis , ex infinitis annulis cylindricis sese ambientibus , & eundem axem habentibus ?

XXVIII. Saltim hoc certum est , per vortices Cartesianos generari nucleos cylindricos.

### Coniectura.

XXIX. Quæritur , quid fieri debeat , ut nuclei ex-surgant sphærici ? Hoc artis esse communiter existimant; credo , quoniam simplicibus neglectis maiora sectantur artificia. Præmissis , quæ dixi , non est problema hoc difficile. Accipe methodum , quæ me ad solutionem perduxit.

XXX. Vidimus, excitato vortice Sphærico , cuius axis AB sit horizonti parallelus , obtineri cylindrum quoque abcd , cuius axis AB horizonti parallelus est. Supponamus nunc axem rotationis EF verticalem horizonti , & abstrahamus ab eo , quod sive gravitas sive levitas corporum inducere potest , discriminé : obtinebitur cylindrus quoque esgb , cuius axis EF est ad horizontem verticalis. Si utrumque motum supponas coniungi , ob actionem alteram , quæ a rotatione secundum axem AB pendet , cogetur cylindrus esgh ab h versus i , & ab ever-

sus *k*, a *g* versus *l*, & ab *f* versus *m*; vice versa ob actionem a rotatione secundum axem EF pendentem, urgebitur pars cylindri *abcd*, ab *a* & *d* versus *i* & *l*, atque a *b* & *c* versus *k* & *m*: *qualis* inde figura enascitur?

**XXXI.** Primo quidem intuitu videtur, emergere *communem* duorum *cylindrorum abcd* & *efgb* (sed qui diametrum nonnihil ampliorem acquirant) *sectionem*, hic per *iklm* utcunque repræsentatam: futurum adeoque corpus angulosum, cuius anguli in *i. k. l. m.* cadant in medio quadratum AE, EB, BF, FA. Quique adeo evitari non possint, nisi per novam rotationem secundum axes *no* & *pq*, qua supposita anguli iterum incident in medio spatiorum EO, OB & sic porro: ut adeo ad evitandos tandem angulos omnes deveniendum sit ad hypothesis *Hugenianam*, de rotatione secundum axes omnes possibles, sive quod idem est, de recessu fluidi gyranus secundum omnes circulos maximos.

**XXXII.** Sed vero facile est, evitare isthæc *devia*, si attendatur ad genesis cylindrorum *abcd* & *efgb*. oritur nimirum cylindrus *abcd* ex eo, quod facta gyratione circa axem AB unaquæque bullula nititur versus punctum aliquod axis AB: & cylindrus *efgb* ex eo, quod facta gyratione circa axem EF unaquæque nititur versus punctum aliquod axeos EF. Coniuncta igitur utraque rotatione unaquæque bullula nititur *in utrumque axem*.

**XXXIII.** Ut in *punctum* utriusque axi *commune*, adeoque in centrum sphæræ nitatur, sic obtineas. Sit uterque vortex æqualiter fortis; sit fluidi gyrantis & particularum illi immersarum ea ratio, ut vires corpusculorum cedentium centripetæ fiant directæ uti distantiaæ ab axe:

mani-

manifestum est , in corpusculo cedente nisum oriri compositum , cuius directio TO est diagonalis laterum TQ & TP ad centrum sphæræ tendens. Duplici igitur hac rotatio- ne combinata, *nucleus* orientur *sphæricus*; namque illud re- ceptum est , ut sphærica nuclei figura derivetur ex direc- tione corpusculorum versus centrum.

**XXXIV.** Si tamen hæreas : finge corpus angu- Fig. II.  
losam , cuius sectio fit, v. g. abcd. Per hypotheses §. 33. vis cuiusque particulae nitentis versus centrum , erit pro- portionalis distantiae eius a centro bo , eo , fo , itaque remotior b dimovebit lateraliter proximas sibi particulas e & f : donec omnes sint in æquilibrio & æquidistantes a centro ; hoc est , donec nucleus sit sphæricus.

**XXXV.** Hæc abstracte dicta eo sufficient , ut in- telligas , quid ad genesis nuclei in vortice sphærici requi- ratur , & quid sufficiat ? Quomodo id obtineri experimen- to possit , sequenti dissertatione exponam. Tum vero si- mul indicabo , quoisque hæc ad doctrinam gravitatis Me- chanicam aut Physicam applicari possint , & non possint ? Putamus enim , nos in eo argumento aliquid profecisse , sed plura etiamnum restare.

---

### Annotation ad §. 35.

**Ita suo tempore.** Quae autem hic de *gravitate* pollicor , singulari dissertatione postea persecutus sum. Ea nunc Lutetiae Parisiorum excuditur , quoniam nuperime praemio affecta est ab *In. Academia Scientiarum Parisina*. In sequentibus igitur non tam ad huius doctrinae applicationem respicio , quam ad eius confirmationem et amplificationem.

M. Jun.  
1728.

\* Ad §. 16. lin. 1. nota ,  $\frac{1}{TODO}$  legendum esse  $\frac{1}{TDO}$  , et in marg. §. 3. ad lin. ult. fig. 1.

# DESCRIPTIO VASORVM CHYLIFERORVM.

*Auct.*

Joan. Georg. Du Vernois,

M. Iun.  
1726.

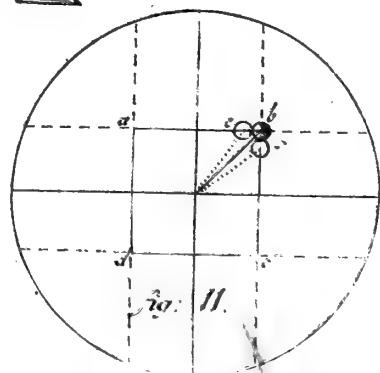
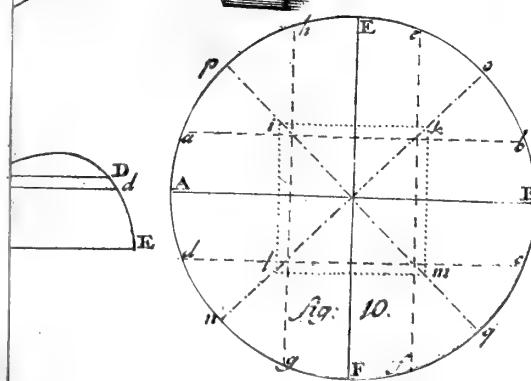
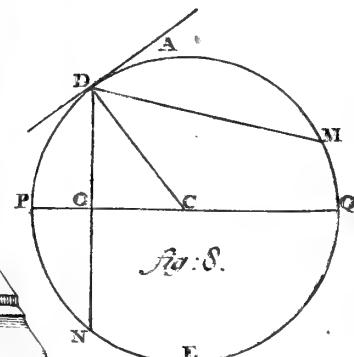
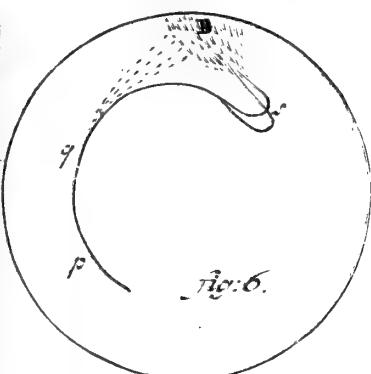
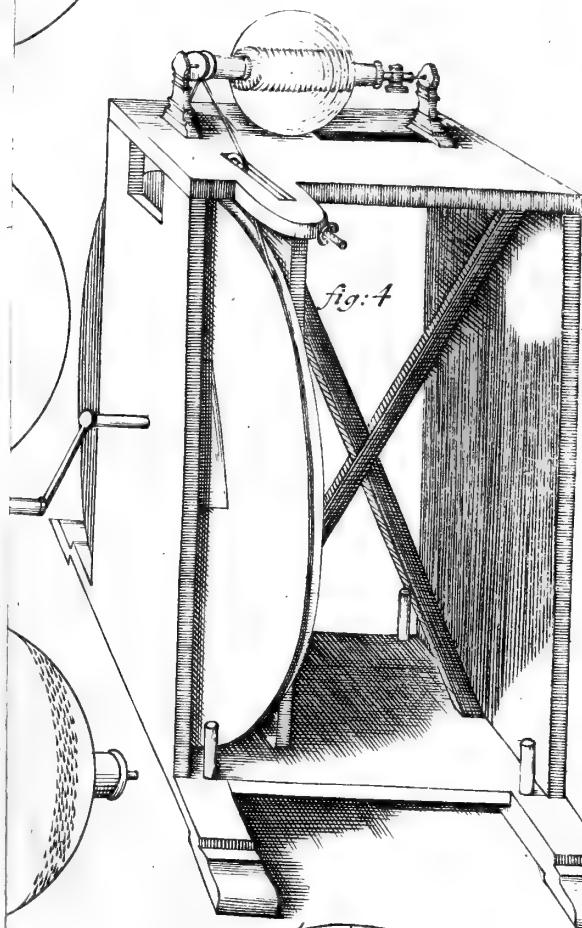
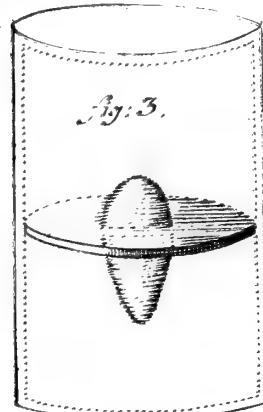
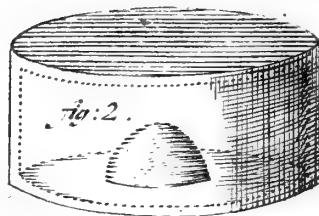
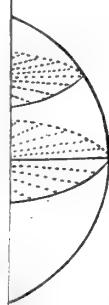


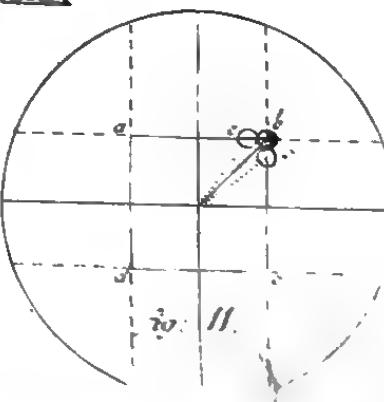
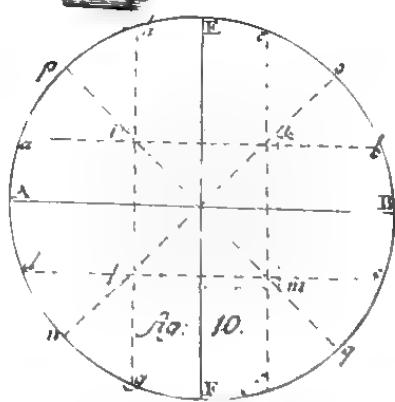
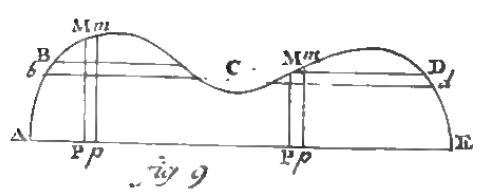
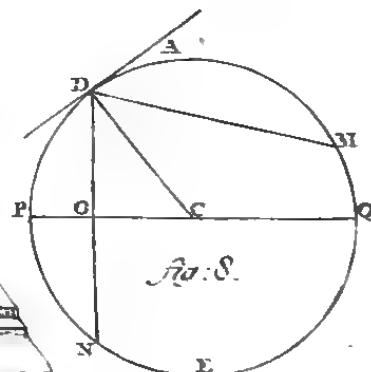
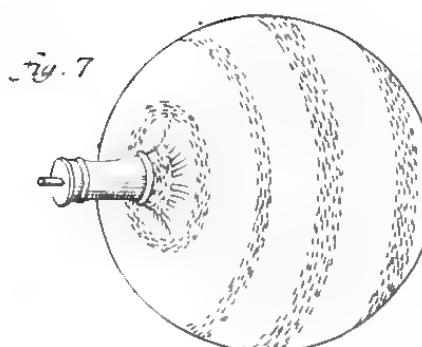
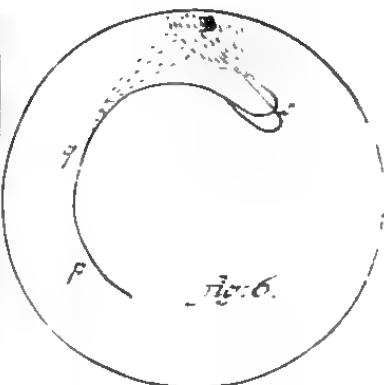
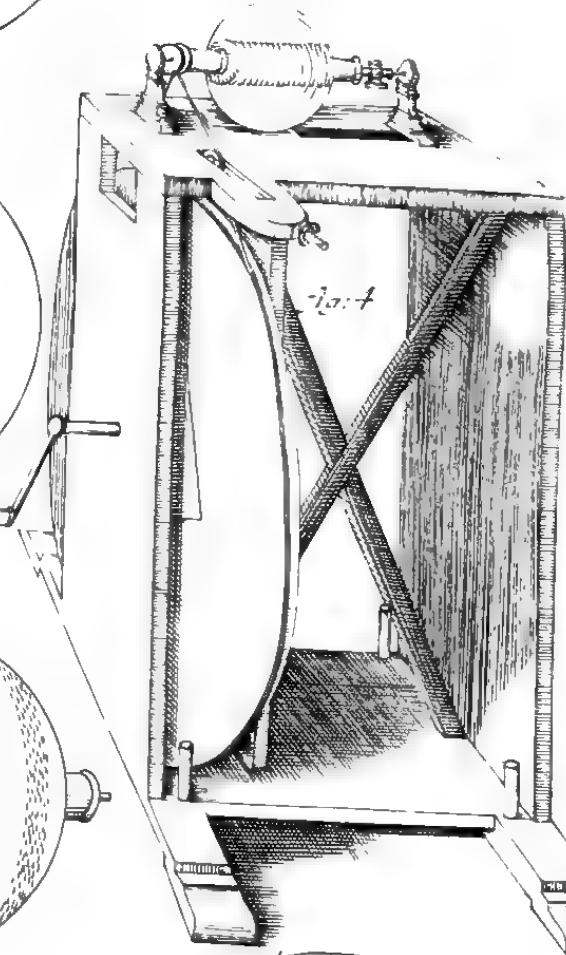
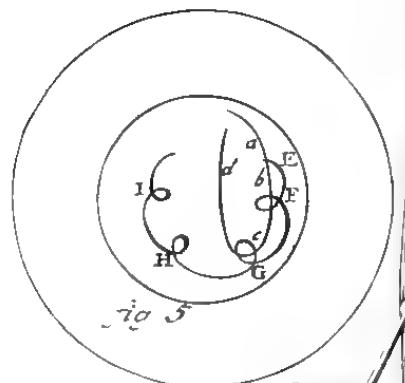
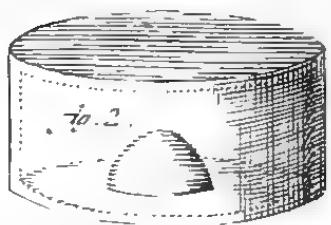
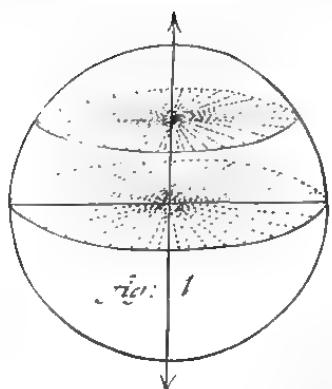
Dvitam Animantium conservandam, et omnes certatim partes unitis viribus conspirent, organa tamen nutritioni dicata præcipua vitæ fulcra dici, eamque ob causam in Anatomiis publicis choream ducre merentur. Quamobrem hæcce iterum exactissime oculo perlustrare, ultimamque manum illis speciatim partibus imponere, quibus ad cor alibilis succus naturaliter deferri solet, haud supervacaneum nobis visum est. Namque, id obiter dixerim, de eo minime dubitandum est, dissectiones hominum non unius tantum, sed diversarum terrarum, Rei universæ anatomicæ magnam utilitatem allaturas, quia fieri potest, ut vis climatis, aut educationis, partes variis modis immutet, quibus dein variationibus anatome plurimum aut adiuvari, aut impediri potest, quod æque de anatome comparata affirmandum est.

Origines  
vasorum  
chylifer.  
hactenus  
incognitæ  
& quare?

Si qua in re, certe in venarum tum in genere, tum in specie chyliferarum originibus investigandis vehementer laborant anatomici: Difficultatis tamen veram causam non declarant, quam plurimorum cadaverum inspecio-

ne





ne eductus hanc esse deprehendi. Illi valde hallucinantur , qui putant , vasa chylifera , quæ super intestina niveo colore extus apparent , intus eodem colore infecta esse , quæ opinio me ipsum sæpius quoque fecellit , quando aperiebam cadavera optima , in quibus tota superficies exterior , copiosissimis vasculis , eaque chylo in iis conglaciato referta erat. Intestina sine mora incidebam , postea fotu calidæ emolliebam , & alia eiusmodi artificia , in spem origines quæsitas inveniendi ; sed incassum omnia. Huius infelicitatis successus causa , in chyli diversitatem , potius reiicienda est , quam in exilitatem vasorum , quæ quidem maxima est : Nam albedo chyli ea minus inconspicua fineret , verum potius specie filorum argenteorum manifestaret. Res equidem notissima est , eam chyli proprietatem esse , ut chameleonte mutabilior sit , hoc est , varians secundum differentiam locorum seu partium , quas inhabitat: Raro enim aut nunquam eius color , dum in intestino adhuc fluctuat , cum colore eiusdem iam convoluti coincidit. Ille ob substantiarum heterogenearum admixtionem cineritio flavescentis , hic lactei coloris est , ut dissectiones cadaverum me edocuerunt ; & quia colore flavescente interior superficies intestini ante infecta est , ob hancce causam infelix quædam obrubilatio exoritur , conspectum horum vasorum præpediens , & fere impossibilem efficiens. Obvium est filtri exemplum , quo hocce phœnomenum illustrare licet. Quando liquores colorati probe agitati filtro inueniuntur , alio colore tingi internam , alio externam superficiem observamus , quoniam in transitu purificatio seu depuratio , sicque immutatio coloris producitur :

Par-

Particulæ enim tenuiores & magis dilutæ solæ transeunt, crassiores vero intus retinentur. Idem fere accidit, in intestinis chylum transcolantibus, ut experientia testatur.

Aliud non infrequens impedimentum occurrit, quo obstante ad optatam metam pervenire non licet. Interdum enim accidit, ut vasa chylifera, quæ super intestina deambulant, chylo distenta videantur; E contra parte, qua cavitatem respiciunt, vacua & inanita, adeoque inconspicua reperiantur, quod a variis causis provenire potest.

Propter dictas rationes, origines vasorum chyliferorum, sive locum, quo enascuntur, nemo adhuc assetus est. Per locum non intelligimus hoc vel illud intestinum, prout titulo gracilis aut crassi insigniri solet: Nam controversiam istam de ortu chyliferorum inferius aptiore occasione pertractabimus. Hic per locum intelligendum est, pars illa determinata intestini, in qua radices seu oscula chyliferorum ductuum implantantur. Unumquodque enim intestinum amplissima superficie, variisque particulis in ea contentis a natura præditum est; quæ particulæ modo iuga, modo profunditates effor-mant, ut satis notum est. Quare iure postulo, ut certus locus assignetur, ex quo origo chyliferorum derivari possit. Omnes Anatomici, quotquot a temporibus *A-sellii* & *Pecqueti* de vasis chyliferis commentati sunt (excepto uno *Cowpero*, qui ex arteriis Mesaraicis novam eorum suppeditavit originem) adeoque nuperrimus quoque isque diligentissimus Prosector Italus, a tota intestini superficie chyliferorum ortum derivant, hancque in-nume-

numerabilibus osculis pertusam esse absque dubitatione pronuntiant. Experimenta tamen non invenio , uti necessarium est, ad dubitationem omnem tollendam , nulla quoque rationum momenta , quibus experimentorum defectus suppleatur. Nam , quod chyli copiam attinet, novimus distributionem chyli non raptim , sed successive perfici , hinc non tanto vasculorum numero opus esse , ad chylum exhauriendum. Quod poros attinet creberrimos , in intestinis observatos , novimus certo , a poris in palato , oesophago & stomacho extantibus , haud diversos adeoque glandularum intestinalium tantum emissaria esse. Quod denique frequentiam chyliferorum in extima superficie attinet , etsi ea super totam intestini superficiem , magna copia sine ordine discurrere nonnullis visum sit , incertum adhuc est , quanam intus lege enascantur ? an numerus internus respondeat exteriori &c. Plura non addam, quia satis appareat , non ut assertum , sed ut coniecturam accipiendum esse , quicquid super origine vasorum chyliferorum ab anatomicis hactenus divulgatum est. Si nostræ observationes ægre fidem invenerint , quia vel novæ vel difficilioris indaginis sunt , non sumus valde succensi , quia singulari artificio nobis revelata sunt , quæcunque hocce scripto continentur.

Locus aliquis separatus in cavo intestini existat ; in *Origines* quo , reliqua tota superficie exclusa , radices chylifero- vasorum ductuum seu eorum oscula implantata sunt. Hæc chylif. de- iam pridem celeberrimi Angli cogitata fuere , uti verba *testæ* ipsius testantur : “ *Fortasse lacteæ in plicas intestini termi-,, natae, tenuiorem & magis aquosam chyli partem absorbent;* ” *sunt* Glissonius.

"sunt enim spongiosæ , & nonnihil prominent in ipsum chylum , qui iisdem in suo descensu affricatur . Verisimile est  
 "hic loci aquas , quæ mox ab ingurgitatione profusa per u-  
 "rinam redduntur , primo abliguriri . Necesse enim est,  
 "ut in transitu non diu morentur , cum parum immutatae  
 "mox mihi excernantur . Si vero descenderent per totum  
 "tractum ilei ad initium coli , certe non per urinam , ast per  
 "sedem egrederentur . , De valvulis quidem intestini ,  
 quæ hactenus chyliferorum consortio destitutæ credeban-  
 tur , præcipue hic sermo est , quæ opinio nostro satis  
 invento præludere videtur . Hocce tamen inventum ,  
 quod sensuum testimonio nititur , quodque industriae , non  
 vero opinioni debemus , longe alia includit , uti mox su-  
 mus exposituri .

**Valvulae** Intestinales valvulae , non solum chyliferorum  
 intestinal. consortio participant , sed ausim dicere , has solas  
 originem isto frui privilegio in toto intestino . Nam per novam  
 dant omni rationem præparandi intestina , vasorumque chylifero-  
 bus vasis rum semitas in cavum usque intestini , uti saepius factum est ,  
 chylum ve- persequendi , ne umbram horum vasculorum in cava su-  
 bientibus. perficie intestini , et si exterior iis satis referta esset , in-  
 ternoscere potui , nonnisi fero veram huius effectus cau-  
 sam , quam ab initio difficultati regressus tribuebam , in-  
 telligens . Nequaquam vero propter hanc difficultatem  
 regressus , quam probe novi , conatus in hacce disquisi-  
 tione irriti fiunt , ut plerique sibi imaginantur : Hæc enim  
 difficultas tandem vinci & superari potest . Verum id  
 accedit propter impossibilitatem res inveniendi & videndi ,  
 ubi non sunt , aut ubi acies oculorum pertingere non va-  
 let . Vnicum fontem ac originem , nimirum valvulas  
 intestinales , in quibus tanquam aptiore & editiore loco

Vasa chylifera prudentissime disposita sunt, animadverte-re nobis licuit. In summa valvularum crepidine seu fi-ne, oscula chyliferorum sic conpleximus, ut pressione di-gito, deorsum versis dictam crepidinem facta, liquor fo-ras injectus, e quibusdam osculis sub tenuissimi roris specie in cavum intestini prosiliret. Quum porro, adhibita summa diligentia, exitum materiae in nulla alia parte valvulae, quam in ima, fieri cognosceremus, hic proinde statuen-dum esse principium chyliferorum iudicavimus. Intentio quoque erat numerum, dispositionem & conformatio-nem minimorum osculorum simul observandi, si per incre-dibilem eorum angustiam lubricitatemque valvularum, licuisset. Summa osculorum, quae unaquaque valvula comprehenduntur, incerta est, attamen mediocris, quan-tum ego coniicere valeo. Numerare eorum plexus per cava intestini distributos non ita difficile est, quoniam in unaquaque valvula unus plexus naturaliter continetur, qua-re necesse est, ut summa plexuum æqualis sit summæ valvularum, simulque distantia plexuum, ut distantia val-vularum, quae trium linearum est. Plexuum figura cir-  
*Oscula*  
*cularis* est instar coronæ: Nam sicuti in palpebrarum *vasorum*  
*tarsis*, ita in limbo valvularum, orificia chyliferorum ea *chylif. in*  
*ratione* disposita sunt, ut totum ambitum compleant, *coronam*,  
*quod ex eo satis evidens est, quia nulla alia parte valvu-* *disposita.*  
*lae*, quam *ima*, exitus materiae injectæ observatur.

Totum itaque artificium, quod sub hacce chyliferorum detecta structura contentum est, in hoc consistere videtur. Primo, quum chylifera distinctum vasorum genus, cuius actio, parenchyma intestini proprie non spectat, sed chy-lum solummodo vel liquida eius cavo innatantia, con-

stituant, ob hanc causam sic disposita sunt, ut extra superficiem intestini multum promineant & caput, ut ita loquar, erigant, quia valvulae per circulos concentricos dispositae, profunde in cavum intestini sese demittunt. Propterea quando intestinum chylo aut substantiis quibuscumque liquidis abundat, motuque peristaltico cietur, quando in systole eius parietes propius accedunt, valvularumque diameter minor; viceversa in subsecente diastole latera recedunt, adeoque valvularum diameter maior efficitur, necesse est, ut valvulae una cum orificiis in coronam dispositis, liquidis praeterlabentibus sapienter intingantur, sicque repetitis immersionibus & emersionibus, pars fluidissima, quae orificiis chyliferorum quasi afficitur, ingressum inveniat, regressum vero impediant valvulae frequentissimae dictis vasis inclusae. Secundo quia plurimum interest, ut talis dispositio chyliferorum, quam minime labefactetur, ideo duplicatura valvulae, ceu theca, inclusa sunt, quia primae viæ magis quam cæteræ partes iniuriis obnoxiae & expositæ sunt: Præcipue vero tubulis chyliferis in situ perpendiculariter retinendis, latera valvulae multum inservire videntur, prout natura actionis requirit.

His omnibus circa ortum chyliferorum prolatis manifestum est, in toto intestino valvulas nobilissimas & primarias partes esse, licet usus cæteros hiscō assignatos capropter falsos esse minime cendum sit.

*Incessus  
chylif. in  
dorso in-  
testini.*

Quod ad reptatum chyliferorum super intestini dorsum spectat, quamquam non ea industria & sedulitate pro reptatu, quam pro ortu inveniendo opus sit, nec rarum sit hodie, intestina videre chyliferis refertissima, in quibus

bus adeo eorum reptatum observare facillimum est; attamen, si recte iudico, tum descriptione, tum delineatione, satis naturæ consentaneis caremus: Nam primo, inter intestinorum chylifera & sanguinea vasa, respectu copiæ & dispositionis, ingens discrimen invenio. Comparavi in hunc finem utriusque generis vasa, postquam liquoribus convenientibus ea replevissem; & primò intuitu chylifera, sanguineis inferiora numero esse deprehendi; dico primo intuitu: Nam tardare non oportet, quia quum citius dispareant quam sanguinea, facile hæc ipsique nervi, pro illis imponunt & pro chyliferis ab incauto pictore accipiuntur, quales errores non infrequenter committii ab eiusmodi hominibus sibi relictis solent. Cavendum est deinde, quando vasa ista chylo adhuc distenta contemplari volumus, a motu, nec non spiritus ardentis affusione, ille enim chylum in fugam vertit; hic vero tingit colore rubente, sicut hocce phænomenon cum admiratione aliquoties observavimus. Quo pacto per simplificationem spiritus ardentis ex frumento destillati affusionem, absque admixtione, color albus in rubrum transmutetur, id equidem conceptu arduum est. Vero simile est, quadam principii salino-sulphurei, per poros vasculorum penetrantis admixtione, hocce phænomenon generatum fuisse, eodemque forte modo in viventibus, principiorumve haud dissimilium accessione & actione, sanguificationis negotium institui, quia sicuti a succorum alterantium permixtione albedo chyli in intestinis generatur; ita etiam conversionem chyli in sanguinem, a simili causa licet ignota pendere, rationi consonum videtur. Si a nostro scopo minus alienum esset hic inquirere,

rere, num inter alias causas, ab usū spirituum ardentium, quorum in toto Imperio tanta est consumtio, incolarum optimus habitus & cutis color florentissimus procedant, uti in hancce sententiam propendemus, amplam sane dicendi materiam haberemus, tum de hacce consuetudine perantiqua, tum de aliis scitu dignis, quæ de Russicæ Gentis victus ratione, sanitate, morbis, remediis, partim Doctiss. Medicorum aliorumque hominum relationibus, partim experientia propria didicimus. Hæc vero in aliā occasionem commodius reiiciuntur.

*Duplex chylif. ordo in superficie intestini.*  
Tab. II.  
Fig. I.  
Lit. a.

Itaque, quod ad incessum chyliferorum spectat, quacunque parte intestini, sive anteriore sive posteriore investigatio instituatur, duplex chyliferorum ordo seu ramificatio in conspectum venire solet, de qua tamen haec tenus nemo quod sciam, sive iconem, sive descriptionem communicavit. Tum sede, tum forma a se invicem plurimum discrepant. Una, quæ profundior adeoque origini propior est, inter vasculosam & musculosam tunicam continetur, ideoque minus conspicua est, & tantum per nebulam internosci potest. Pone unquamque valvulam conniventem, talis ramificatio arbusculam referens, ad utrumque intestini latus, situque transversali, seu quod idem est, cum fibris annularibus parallelo, locata est, hæque ramifications sibi tum in uno, quam in altero latere simillimæ sunt, absque sensibili tamen communicatione. Per haec vero ramifications earumque truncum chylus recta via ad mesenterium tendit.

*Lit. b.*

Super hæcce chylifera, quædam alia deambulare vidimus sub extima tunica, quæ instar vitri transparens est, quorum ea propter conspectum obtinere facilissimum est

est. Hæc, quia a priorum forma & incessu plurimum  
discrepant, nervi potius quam ductus chyliferi esse  
videtur. Nam veluti filamenta in longum extensa, ra-  
mificationes prius descriptas ad angulos modo rectos,  
modo obliquos secant atque propagine penitus carent;  
**ex** adverso amplitudine illas superant, hancque fere ab  
una extremitate ad alteram, ubique æqualem servant. *Tab. II.*  
Quamobrem hancce speciem chyliferorum ad singula- *Fig. I.*  
**rem** finem comparatam esse minus dubitandum est. Id *Lit. b.*  
equidem ex eo satis clare apparet, quod per hosce canalicu-  
los incurvos, magis liberos, manifesta inter subiacentia chyli-  
fera communicatio locum habeat, quibus adeo chylus via  
ampliore versus mesenterium deferri potest. Deinde  
non inter propinquos solummodo, sed etiam inter re-  
motiores ductus, hancce communicationem obtinere  
eaque uniformi tendentia, ut a ramificationis unius prin-  
cipio seu radicibus versus finem seu truncum alterius, qui  
in principio mesenterii est, hi protendantur, non minus per-  
spicue observavimus. Finem quod attinet, ad quem  
veritatis quadam specie, descripta chyliferorum structura  
referri potest, is esse videtur, ut, si quando propter  
varia obstacula, chylus per intimiora vasa, quibus ad me-  
senterium recta via devolvi assuetus est, minus progre-  
di potest, ne retrorsum pelleretur, per altera vasa ab-  
duci possit, quæ ideo ampliora sunt & nulla divisio-  
ne gaudent. Propterea officii quadam similitudine, emis-  
sorum nomine satis noto, non immerito appellari possunt.

Proximum nunc est, ut originibus & speciebus chyli-  
ferorum, una cum eorum super intestini parietes dispo-  
sitione perlustratis, nonnulla circa rem satis obviam, sed

*Cur du-*  
*plex chy-*  
*lif. ordo?*

*Tam ant.* sed hactenus prætermissam , scilicet de chyliferorum egressu ex intestino , paucis expediamus. Quum facies intestini duplex sit , anterior & posterior ac in una totidem chyliferorum ramifications existent , ac in altera , non immerito quæritur , num prope intestini finem , ubi mesenterium incipit , utriusque lateris chylifera in communem truncum confluant ? an e contrario trunco diversos & distinctos efforment . Facile error & lapsus committitur , si perfunctorie & sine ea circumspectione , qua ad hancce disquisitionem opus est , hoc negotium suscipitur . Ideo factum est , ut sine ullo fundamento a plerisque prior sententia adoptata aut silentio prætermissa ,

**Tab. II.** nemini vero altera , quæ sola vera est , quæque **Fig. I.** nostris confirmata est observationibus , perspecta . **Lit. a.c.**igitur duplarem truncum chyliferorum prope finem intestini , unum anteriorem , alterum posteriorem , demonstrante oculo , luculenter conspeximus . Nullum vero inter illos sensibile discrimin datur , nisi quoad locum egressus : ille enim superiori . a. hic inferiori . c. intestini latere ad mesenterium tendit , hancque dispositionem uterque in mesenterio retinet , uti in seqq. palam fiet . De cætero amplitudine quæ setam porci æquat nec non externa conformatio ne , perfecte convenient .

*Egressus chylif. per paria* Per paria itaque , ex intestino versus mesenterium , vasa incedere chylifera , ex modo dictis manifestum est , quod non minus de vasis sanguiferis intestini verum esse deprehendimus . Attamen rariores sunt chyliferorum quam sanguineorum obstrunctiones , cuius differentiæ ratio , tum a copia , tum a qualitate sanguinis procedere potest . Interdum etiam ipse chylus in suis vasis sistitur , uti

ut exemplum cuiusdam Senis constat “cuius intestina,,  
preter belle conspicua ac turgentia vasa chylifera ,,,  
frequentissimos passim candentes globulos , pannici ,,  
magnitudinem æquantes continebant , ex quorum singu- „  
lis singula chylifera vascula emergebant , qui eodem mo- „  
do turgebant atque ipsamet vascula. Verum talia ex-  
empla rarissima sunt : Nam ad liberiorem chyli per  
angustissima & compressa vasa transitum , duo ostia cum  
duplici trunco concessa sunt : Etsi una harum via-  
rum deficit , per alteram adhuc , quamquam parcus , suc-  
ci alibilis dispensatio fieri potest.

Quibus intestinis concessa sint chylifera , an  
omnibus promiscue & qua proportione , an gracilibus  
duntaxat? id postremo expediendum est. De gracilibus  
nulla amplius lis est , uno excepto duodeno. Circa re-  
liqua vero hoc notandum est , ea quidem chyliferis non  
destitui , sed chylo tantum rarissime distendi, ob quam  
causam inconspicua sunt eorumque existentia in dubium  
revocatur. Id vero a duplice causa provenire putandum  
est : Quarum prima est , quod non satis iusto post pastum  
intervallo , tales homines occidentur & aperiantur ; vel  
enim distributio chyli peracta , vel incipiens est. An mi-  
rum in oculos non venire crassorum intestinorum chy-  
lifera adeo diffusa , ad quæ serius & post satiata de-  
mum reliqua omnia descendit chylus : Porro ad aliud  
impedimentum , quod admodum sensibile nobis visum  
est , hic attendendum est , ad differentiam scilicet in-  
testinorum , item ad raritatem chyliferorum super ea in-  
cedentium Quo enim magis versus finem intestinorum  
accedis , eo chyliferorum numerus magis decrescit , in-

*Intestina  
crassa & q;  
ac tenuia  
chylifera  
dent.*

crescit e contra crassities intestinorum , quo fit ut vascula non eadem facilitate in crassis internoscantur quam in tenuibus quæ fere transparent . Ea propter tamen non statim eorum existentia in dubium revocanda est.

*Incessus  
chylif. in  
mesente-  
rio per  
paria.*

Ad mesenterium , cœu vasorum chyliferorum cam-  
pum , seu quod idem est , ad chyli per cavitatem abdo-  
minis incessum , & quæ circa hunc forte minus perspecta  
sunt , ordo nos perducit . Prima observatio numerum  
chyliferorum in limine mesenterii incidentium , nec non  
locum hisce proprium respicit , quarum quidem rerum  
cognitione hactenus destituti , necesse est ut circa chylife-  
rorum & chyli motum , tendentiam , phænomenaque  
varia , multa falsa & incerta prolata exstent . Quum ea sit  
mesenterii humani structura , ut duabus a se invicem di-  
stantibus membranis seu lamellis constet , septo crassiore  
adiposo interposito ita distinctis , ut veluti duplex locula-  
mentum , unum ventrem , alterum dorsum spectans efforme-  
tur , jurè meritoque Anatomico incumbit , ut quanam potissimum  
camera chylifera inclusa sunt , an superiore , an inferio-  
re , an vero in utraque simul ? ita ostendat , ut demonstratio-  
nis loco haberi possit , secus circa chyliferorum nume-  
rum maximopere hallucinabimur . Iam supra diximus ,  
gemono trunco ex intestino prodire vasa chylifera , uti de-  
tracto intestini extimo involucro , quod utriusque mesen-  
terii lamellæ productio est , clare appareat . Ex eo sequi  
videtur , duplarem in mesenterio seriem chyliferorum ad-  
esse , unam quidem supra septum , alteram vero inferius  
infra septum , id quod a nullo Anatomicorum hactenus in-  
dicatum est , cuius quidem causa est , quoniam nemo chy-  
liferorum truncorum ex intestino egredientium duas series  
adhuc

adhuc vidit & determinavit, quamquam nexus mesenterii cum intestino idem edocere videatur, quemadmodum experimenta anatomica plus quam una vice instituta, id extra omnem dubitationis aleam ponunt. Sic connexum est mesenterium intestino, ut huius medietati septum adiposum, quod duabus mesenterii lamellis interpositum est, firmiter alligatum hacque ratione intestinum in duas partes æquales quasi divisum sit, reflexis supra infraque prædictis mesenterii lamellis, quæ intestinum involvendo, in parte mesenterio opposita denuo coniuncta, tunicam extimam efficiunt. Ex eo perspicuum est, ea chylifera, quæ e parte intestini anteriore prodeunt, commercium nullum cum posterioribus habere, neque horum coniunctionem cum illis ob crassitiem septi, possibilem aut facilem esse, neque etiam opus esse ad sui exitum, ut tunicam extimam intestini pertundant, uti consideranti patet.

Postquam specie tubuli capillaris, vix setæ porcinæ mediocris crassitiem æquantis, ad confinia mesenterii uterque truncus pari passu ambulans pervenit, peracto duarum fere linearum itinere, faciem suam subito permutat. Nam momento truncus talis exilis in duos tres quatuorve surculos, vix truncō minores scinditur, qui integrum manipulum tubulorum capillarium constituant. Eorum nonnulli mox coeuntes, insulas oblongas efformant; alii separatim incedunt, obviamque factis aliis propaginibus inosculantur, mox novus iterum tubulus exsurgit, qui postremo cum plurimis aliis ex toto intestinalium ambitu concurrentibus sic confunditur, ut eum internoscere ac discernere amplius impossibile sit. Cæterum a vasis sanguineis, quæ pinguedine obiecta

M m 2

funt,

*Facies chylif. in mesenterio Tab. II.*

*Fig. I.*

*Lit.ddd.*

sunt, chylifera satis distare observavimus: Inter ambo enim, tota mesenterii pinguedo sic interiecta est, ut ad contactum pervenire non possint, quod multo magis de superiore & inferiore chyliferorum serie intelligendum est, quoniam adhuc magis a se invicem distant, siquidem immediate sub mesenterii lamella in pinguedinis superficie locata sunt. Attamen communicatio omnis inter chylifera primæ & secundæ speciei, eapropter non deneganda est, nam semel propaginem vidi mus, e facie mesenterii superiore versus inferiorem, perfecti substantiam contendentem & glandulæ corpus subeuntem, quæ adeo pro communicatione, non tamen immediata haberi potest.

**Confluxus chyliferor.** Talis chyliferorum incessus est toto illo spatio, quod est inter intestina & aream illam quæ ad universi ductuum chyliferorum systematis congregationem destinata est. Singuli enim trunci, e tota intestinorum circumferentia huc convolantes, quando ad aream istam plurimis glandulis consitam & admodum concentratam perveniunt, ad tantam, ut ita loquar, confusionem ac implicationem rediguntur, quæ non solum intuentium oculos mirum in modum afficit, sed quoque singularem in se continere usum significat.

**Ufus.** Quamobrem, ut usum paullisper attingamus, non hunc solummodo contextum admirabilem omnium undique ad angulos acutos confluentium vasculorum pendere oportet, sed hoc etiam considerationem mereatur, quod eadem dispositio in utraque mesenterii facie oculis se sistat. Nam quia bis occurrit, necesse est, ut magnæ utilitatis transitusque adeo chyli per hosce meandros indispensabilis sit necessitatis, alias, si una infusio-



ex Phoca

ex Catoparde

120

Canalis thoracicus ex Elephante quadri partu

FIG I.



sionis chyli ratio esset, minime istis ambagibus opus fuisse. Itaque suppono chylum qui ex intestinis successive vasa chylifera ingreditur homogeneum seu similem sibi non esse adeoque in vasculis illis maximam chyli differentiam dari, quia dum chylus in intestinis elaboratur, aliæ & aliæ particulæ variæ indolis extricantur, quæ emancipatæ avolant, vasisque chyliferis successive transportantur; Et hoc quidem eousque non malum aut damnum esse videtur, quamdui scilicet vasis adhuc vehitur chyliferis; Sed si chylus sub tot contrariis formis massæ sanguineæ ingeritur, tum ita tutum non amplius est, quoniam duplex inde malum subsequi potest, vel enim particulæ divisim sanguini immixtæ nimis dissociantur ac divelluntur adeo, præter naturæ consilium, ut vel nunquam vel tardissime in nexum convenientem pervenire queant, vel particulæ sic dissociatæ, tumultus & perturbationes excitant, quas servato vinculo minus fuscitare valuissent. Quamobrem, ut me expediam, situs, numerus, contextus chyliferorum, verbo, singula quæ in præfata dispositione occurrunt, nihil aliud quam prudentem exactamque commixtionem significare videntur: contrariis enim motuum directionibus crebrisque anastomosibus hic occurrentibus necesse est, ut chyli particulæ millies locum mutent, suique generis particulis ob viam veniant, iisque maritentur, ac probe inter se miscantur, antequam libertatem obtineant effugendi versus loca destinata, hoc est, receptaculum & ductum *Pecqueti*.

Quamquam versus receptaculum & ductum *Pecqueti* omnem chylum contendere verum ac indubium sit, mo-

*Progressus* dus tamen incedendi chyliferorum in homine fere igno-  
*chylifer.* tus aut perperam descriptus est. Præter generales difficul-  
*versus re-* tates, quæ ordinarie in horum ductuum administratione ob-  
*eptac.* stant, novum impedimentum hic suggeritur a partium  
superincumbentium molesto situ, & facilitate læsionis,  
quæ ob incredibilem implexum simulque profundam im-  
mersionem raritatemque vasculorum chylum vehentium,  
uti evitari, ita reparari vix potest. Hisce non obstan-  
tibus, optatum tamen successum in hacce difficiili ad-  
ministratione obtinuisse nobis visi sumus. Præter usum no-  
bilem, quem præstare diximus laudatum chyliferorum  
concursum alius non prætermittendus est, scilicet  
reductio chyliferorum ad minorem numerum; nam chy-  
lum per tot distinctos & disiunctos canaliculos in massam  
sanguineam difficulter ingredi posse, ipsa ratio & cetero-  
rum vasorum leges persiadent. Igitur numeruin chyli-  
ferorum imminui & reduci, eorum contra amplitudinem  
augeri omnino concedendum est. Missis, quæ super hoc  
numero, a variis prosectoribus divulgata sunt, ea, pro-  
ut nobis oblata sunt, paucis describam. Ut chylifero-  
rum numerus ad unitatem se reduci non patitur, ita nu-  
merum quinarium ea excedere nunquam observare potui:

*Eorum  
reductio  
ad nume-  
rum qui-  
narium.*

**Tab. 12.** Quamquam lusum in hisce vasis fieri concedam, quinque  
**Fig. 1.** perpetuo vasa in cadaveribus ad hunc finem incisis, ver-  
**N. 1. 2. 3.** sus receptaculum conteridentia clare & distincte numera-  
**4. 5.** vi: Sed cavendum est a lymphæ ductibus, ne hos cum  
illis confundamus & sic chyliferorum numerum temere  
augeamus. Quod eorum magnitudinem attinet, exce-  
pto uno quod capacious est, æqualem inter se proportio-  
nem obtinent, ad eoque a vasis, quæ vocantur primi ge-  
neris

neris, vix differunt. Denique, quanam in abdomine via ad memoratum receptaculum incedant, probe affec-  
tus sum. Nam, postquam remotis removendis, ad pan-  
creas per ventum est, ibi ad dextram eius extremitatem cui incubit oblique & ligamentis tendineis annexum est principium iejuni, vasa nostra ex mesenterii finibus egredi & apparere incipiunt. Vnum, quod patentius est, 5. sub posteriore & inferiore pancreatis facie sinistrorum ver-  
sus incedit, mox venam renalem sinistram adsitasque lumbares glandulas transcendens in proximum receptacu-  
lum, eiusque anticam partem terminatur. Reliqua, in antica magis pancreatis facie conspicua sunt, eique veluti fundamento incumbunt: Oblique enim inter duas extre-  
mitates pancreatis ascendunt, hinc per partem posterio-  
rem rursus pari numero descendunt, distinctisque canali-  
bus, ad exortum arteriæ mesentericæ superioris, non quidem in medio receptaculi, sed in eius apice seu prin-  
cipio ductus thoracici inseruntur. Quidam veterum, me-  
moratum incessum super corpus pancreatis in canibus observantes, ea pancreati singularem usum præstare sunt imaginati; Verum potius pancreas illis inservire dicen-  
dum esse videtur: Nam, quia pancreas septo transverso & stomacho proprius adstat, necesse est, ut chylifera vim & pressionem utriusque sentiant, sicque motus chyli adjuvetur. Deinde a violentis intestinalium distractioni-  
bus eo tutiora sunt, quo pancreatis firmiore basi gau-  
dient.

*Transitus  
chylif. su-  
per pan-  
creatis  
dorsum.*

Hactenus de universo systemate chyliferorum, tanquam re adhuc nova & ardua, cui anatomicus metu in-  
fau-

fausti eventus manum admovere detrectat , ne eius fama inde periclitetur. Minus ardua res est chyli receptaculum & thoracicum ductum investigare : Nam hodie a quovis soleri anatomico id postulatur , ut in singulis cadaveribus tam hominum quam brutorum quæ sua parvitate se non excludunt , ea perpetuo ante oculos sistere & demonstrare valeat. Varia in hunc finem a viris exercitatissimis excogitata & divulgata sunt artificia , quæ hic nolo repetere ; ea tantum quæ in theatro nostro in usu sunt , communicabo.

*Requisita  
pro de-  
monstra-  
tione re-  
ceptac. &  
ductus  
Pecqueti.*

In omnibus dissectionibus qua publicis qua privatis ad id semper respiciendum est , ut quæ invicem naturaliter cohærent , ea si fieri potest , quam minime disiuncta , seu per fragmenta demonstrentur : Pulchrum enīm est ac utile , partes videre integras , quoad universam structuram quæ ad ipsas pertinet , absque mutilatione , cum omnibus administrantibus & ad functionem necessariis particulis , uti in vivente corpore id sese habet. Ex hacce regula sequitur , dupli tantum ratione seu methodo vere anatomica posse tradi seu demonstrari partes , de quibus præcipue hic sermo est , altera cum tota chyliferorum congerie ac proinde cum universo systemate vasorum chylum vehentium , uti modo fecimus & tradidimus ; altera cum systemate vasorum lymphaticorum inferioris & medii ventris , uti nunc sumus exposituri.

*Novame-  
tbodus  
proponi-  
tur.*

Incipiendum est in alterutro inguine , quoniam electio arbitrio prosectoris relinquitur. Hinc si in uno difficilius succedit experimentum , in altero tentare idem proclive est. Arbitrio quoque prosectoris reliqui-

quitur , an velit ante iniectionem ventrem cadaveris prius aperire nec ne , quia ad successum experimenti id indifferens est. Si denique in utroque inguine ob pinguedinis copiam vel aliud impedimentum irritum fiat experimentum , aperiendum erit abdomen , & detracto peritonæo ad alterutrum latus pelvis vasa quæsita momento adsunt. Quando propter effluxum lymphæ in conspicua sunt , hocce signo internoscere licet nempe albescentis & plani filamenti umbra super venas crurales aut iliacas oblique incidentis , quas ea propter Soli aut luminis obvertere non inutile erit. Quod restat , una iniectione absolvitur. Si in utroque latere iniectio facta sit , omnium lymphæ ductuum ex femoribus *aa.* ex cavo pelvis *bb.* ex peritonæo *cc.* visceribusque totius abdominis prodeuntium incessum , societatem cum vasis sanguineis , transitum per varias glandulas , crebras anastomoses & inde formata retia , plexus & truncos , ipsamque cisternam & continuatum ductum thoracicum uno conspectu observare licet , uti inferius explicabimus. Beneficio huius methodi universalis incidi in rem admodum curiosam , quæ forte ob defectum solum prædictæ methodi rarius offerri solet : Pauca enim pluralitatis receptaculorum ductuumque thoracicorum tam in brutis quam hominibus exempla prostant. Vid. *Pecquetus* , *Bartholinus* , *Blancardus* , *Kerkringius* qui triplicem vidit , *Louverus* , *Sylvius* , *Bourdonus* , *Tauvrius* , *Eduardus Vium* in *Ephemerid. nat. Curios.* *Muraltus* in *exper. anat. Saltzmannus.* \*

*Tab. 12.*  
*Fig. I.*

Nn

Bis

---

\* Excerptum Epistolæ a Celeberrimo Io. Saltzmanno d. 4. Iunii 1727. ad nos datæ. En babes ea quæ su-

**Duplex receptac.** Bis primo in virili , ex quo figura desumta est , & deinceps in foemino subiecto , duplex receptaculum cum dupli- dupli canali thoracico perspicue observavimus & præ- ci canali sentibus *Illustissimis Blumentrostiiis* aliisque demonstravi- thoraci- mus. Vasa utriusque lateris lymphatica *aaaa*. non uti co, *in vitro* moris est in unum alveum confluebant, sed duplex erat am- & *fæmina* pulla dextra & sinistra , in quas separatim terminaban- tur. Nullam inter eas sive in figura sive in longitu- dine

---

periore anno de ipsis hisce viis in homine observavi , ut ta- ceam multa alia præcedentibus detecta temporibus. Vidi nempe, multisque Medicinæ Doctoribus & Cultoribus , qui- bus eum intueri volupe erat , demonstravi ductum thoraci- cum prorsus extraordinarium , receptaculum erat duplex, alterum a latere corporis 2<sup>dae</sup> lumborum vertebræ satis am- plum & oblongum referebat sacculum , qui mox angustior redditus sub arteriæ aortæ trunco eo in loco , ubi emulgens utrinque ab eo abscedit , ascendebat super medium eius- dem vertebræ corpus , dein iterum dilatatus in saccum ob- longum & capacem ordinarium receptaculum constituentem abibat. Ex hoc 4 canales , duo maiores & totidem mi- nores emergebant ultimæ dorsi vertebræ incumbentes. Præ- terea duplex etiam insertio in utramque venam subclaviam conspiciebatur , ductu in duos ramos diviso eosque insignes & non uti alias fieri solet,rursus coeuntes insulamque veluti efformantes, dexter longior erat sinistro & arteriam subcla- viam illius lateris supergressus anfractu tortuoso literam S maiusculam satis accurate referebat. Sinister plures pa- riter anfractus describens vene subclaviae eius lateris in loca

dine differentiam sensibilem deprehendimus , præ- Tab. 12.  
ter hoc unum , quod sinistra A. tumidior, amplior & Fig 3.  
quoad situm eminentior dextra B. erat, quæ profundius ver- Lit. A. B.  
sus pelvim inclinabatur quartæ fere vertebræ lumbari  
infistens. Hæcce inæqualitas in causa est , quod ductus  
thoracicus dexter ad eum gradum altitudinis quo si-  
nister haud assurgat , quoniam scilicet versus infe-

Nn 2

ordinario inferebatur, nempe parti superiori prope insertio-  
nis venæ iugularis internæ locum. Quæ uti & plura  
alia & vivo repleta iucundissimo spectaculo sese exhibebant.  
**I**dem & ius in infinita etiam vascula lymphatica tum in hoc  
tum in aliis subiectis penetraverat, nimurum quæ a glandulis  
dorsalibus, oesophagi, iugularibus pullulant, item myriades  
a confiniis thymi, a medulla spinali per specum osseam verte-  
brarum prodeentes, plures in utroque latere aorta nec non  
ex aquaticulo ad latus arteriæ iliaceæ sinistræ ascendentibus ver-  
sus receptaculum. Quod vero hisce omnibus anteferendum  
esse iudico visum repertum, est quod d. 20. Febr. huius an-  
ni in vasa lactea primi generis prope intestinum ieu-  
num inquisiverim & post diuturnum laborem omni adhibita  
diligentia, & qua in eiusmodi labore opus utique est patien-  
tia, unum tandem detexi insigne, in quod & ius immisso in  
pleraque vasa lactea per mesenterium dispersa penetravit  
tum primi tum secundi generis, quorum plurima in fascicu-  
los & glomeres velut collecta, curiosorum oculis se sistebant  
Quæ mibi spem faciunt fore, ut integrum vasorum &  
arteriorum & lymphaticorum sistema & vivo repletum in abdomi-  
ne exhibere & demonstrare mibi aliquando liceat.

riorem extremitatem longiore est, viceversa quoniam extremitas inferior sinistri brevior est, superioris econtra longitudine maiore esse debet, ut veluti mensuræ inter utrumque & æqualitatis ratio servaretur.

Reliqua sive receptaculorum sive ductuum thoracicum conformatio-  
nem & communicationem spectantia, non minus curiosa & attentione digna erant. Etsi enim per transversas & laterales anastomoses *bb.* ambo receptacula communicare videantur, communicatio tamen talis est, ut non indiscriminatim ex uno in alterum, sed ex dextro solummodo in sinistrum circuitus liquorum locum habeat. Per diverticula *cc.* deinde utrinque forma arcuum receptaculo appensa, quandam diversio-  
nem qua pars liquoris a transitu per totum cavum vesiculæ dispensatur, fieri manifestum est, quod pariter de tribus parallelis ductibus *ddd.* ex summo vesiculæ dextræ una cum ductu thoracico, ad certam altitudinem ascendentibus intelligi debet: Propterea tota liquoris quantitas non recta seu immediate e receptaculo in ductum thoracicum exsilire potest, sed pars eius aliquanto spatio per memoratos particulares ductus elevatur, antequam ad du-  
ctum principalem perveniat.

**Fig. 3.** Quod ductus attinet thoracicos, sicuti duo receptacula ad  
**Lit. C.D.** utrumque vertebrarum latus sibi parallela, ita etiam duo ca-  
nales unus **D.** a dextris sub vena cava, alter **C.** a sinistris sub  
aorta per totam spinæ longitudinem decurrentes in con-  
spectum veniebant, quorum etiam in conformatione & in-  
cessu observata diversitas, non sine diversi usus ratione com-  
parata nobis visa est: Nam præter altitudinis, quæ in-  
fini-

sinistro ut supra indicavimus maior erat quam in dextro differentiam, id discriminis quoque evidentissime adparebat, quod in dextro ea fere restitudo esset quam in fistula barometri observare solemus. Ad secundam dorsalem vertebram demum insignem efficiebat angulum seu flexuram nec non bifurcationem seu insulam, ex qua nova propago versus sinistrum canalem Fig. 3.  
 sese inclinans simulque cum duobus aliis ramis ex sinistro prodeuntibus ad venam subclaviam sinistram contendens, abscedebat. Dexter sinistro crassior & amplior erat: Sinister econtrario admodum sinuosa & flexuosa via cum crebris & prolixis bifurcationibus \* \* \* \* duplarem fere ductum thoracicum mentientibus totoque eius tractu conspicuis incedebat. Priusquam sententiam nostram de hac conformatio-  
 nis diversitate simulque pluralitate receptaculorum & ductuum generaliter exponamus, indicare modum oportet, quo ad exemplum receptaculorum duo thoracici canales in nostro subiecto inter se invicem communica-  
 bant. Tribus locis, prope ortum, & in medio per brachia seu tubulos transversos e nec non per memoratam propaginem F e dextri canalis fine productam eam institui communicationem, qualis supra inter duo receptacula descripta est, luculenter conspeximus. Inter plurima vasa lymphatica simul in conspectum venientia, unum mon-  
 struose distentum sub clavicula sinistra locatum occurrebat, quod una cum cæteris eo fine repræsentari curavimus, ut quantam lymphæ ductus absque ruptura distractio-  
 nem pati possint, uno hoc exemplo intelligi possit. Ex eo ta-  
 men formationem tumorum vesiculosorum, cuiusmodi

Lit. E.

Lit. F.

Lit. G.

articulo observationum anatomicarum exemplum exstat, nondum explicari posse censemus.

Postremo, ut historiæ finem imponamus, in iis subiectis in quibus pluralitas tum receptaculorum tum canalium thoracicorum, ad similitudinem descripti casus occurrit, determinandum est quis duorum proprie chyliferus sit? Nam improbabile videtur utroque simul chylum sursum devehi. Quare, si nullum aliud signum, quo differentia hæc internosci queat occurrit, suspicari licet (modo conformatio dispar sit) illum proprie pro chylifero habendum esse, cuius sive situs sive conformatio cum cognita structura & situ ordinario maxime convenit, quia nulla ratio est ut in duobus canalibus eundem liquorem tranantibus diversa insit conformatio. Fig. 3. Propterea in nostro subiecto non immerito pro chylifero sinistrum C. agnoscimus, per quem chylus sicuti per alterum canalem D. lympha, devolvitur.

Cæterum per exempla citata incertum dubiumque fieri videtur, quisnam genuinus & naturæ magis consentaneus numerus harum viarum sit? quia infiniti casus dari possunt, in quibus duplice receptaculo ductuque thoracico carere periculosem videtur; Et quia recens & in paucis hominibus tentata fuit hæc encheiresis anatomica (ad minimum qua nos proponimus methodo) suspicari licet, an defectu methodi & diligentiae potius quam naturali defectu viæ de quibus sermo nunc est, duplices rarius inventæ sunt. Quam ob rem suademos, ut vel in utroque inguine, vel ad utrumque latus aqualiculi ut supra dictum est, hæcce disquisitio sæpe instituatur.

Nunc

Nunc tempus est ut ea , quæ secundante laudata  
 methodo tum circa receptaculum tum canalem thoracicum  
 specie quadam novitatis nobis innotuere , solo veritatis  
 studio exponamus. De differentia inter marem & fœ-  
 minam prout in utroque sexu hæ viæ nobis oblatæ  
 sunt, et si ab aliis prætermissa, verba primum facienda sunt.  
 Eandem vero quam in cæteris partibus duorum sexuum,  
 differentiam proportionemque observavimus: In fœminis  
 enim contractiores & exiliores sunt pro maiori parte quam  
 in viris, et si huius inæqualitatis causam ignoremus. Co-  
 gitare licet in fœminis , propter evacuationes solennes  
 quibus obnoxiae sunt necessitatemque alendi fœtus , mino-  
 rem lymphæ copiam ex partibus inferioribus refluere,  
 eamque ob causam tanta ductus amplitudine opus non es-  
 se quam in viris diversa temperie gaudentibus. Cæ-  
 terum in individuis , salva illa generali in sexu dif-  
 ferentia , eam constantiam & varietatem quæ a so-  
 lertibus alias anatomicis obiicitur iconibusque eorum re-  
 præsentatur , invenire non potuimus: Nostra enim me-  
 thodo quæ absque flatu & liquoribus spissis , absque  
 expansione perficitur , ea uniformitas semper apparuit,  
 quæ communiter in organis nutritioni dicatis , in quibus  
 variationes raro contingunt, observari solet. Loquor de  
 variationibus vere talibus , quæ structuram & faciem pe-  
 rigrinam conciliant : Nam quoad variationes minoris  
 momenti, uti sunt crassities, amplitudo, inclinatio maior  
 vel minor &c. tales utique dari concedendum est.

De Receptaculo Pecqueti eiusque vera conforma- Tab. 12.  
 tione per anatomen detecta nunc dicendum est , quæ si Fig. 1.  
 cum anatomicorum descriptionibus & delineationibus mi- Lit. A.  
 nus

*Similitudo receptac. cum vesiculis seminali.*

nus concordant, soli naturæ & difficultati præparationis tribuendum est. Postquam tum pinguedinis tum succingentis membranæ velamenta, præmissa iniectione, remota sunt, ea receptaculi configuratio appareat, qualis a nemine adhuc observata & delineata fuit, quæ idcirco non nisi adhibita singulari attentione ac circumspectione videri & cognosci potest. Non melius quam cum feminis masculini receptaculis comparari illud potest, si tantum multitudinem intestinorum demas. Plurium enim intestinorum transparentium per fibrillas colligatorum partim anfractuosorum partim perpendicularium atque inter se communicantium aggregatum est, in quo proinde contenta fluida in quendam circuitum agi videntur: Namque primo basis seu fundum A. intestinulo circulum efformanti simile est, cuius duæ extremitates dd. superius intertiam quandam cavitatem e. dehiscent: Cæterum toto ambitu hocce intestinulum clausum adeoque cœcum est. Eiusdem dextro lateri intestinulum aliud f. connascitur, quod mox iterum receptum parvam insulam producit. Conspectus prædictarum extremitatum insigni vase chylifero 5. quod ante iacet, impeditus est. Illud enim sinistrorum veniens, postquam ad receptaculi confinia pervenit, versus latus eius dextrum oblique contendens eo quem diximus loco ad angulum acutum implantatur chylumque in huncce gyrum evomit: Hoc pacto necesse est, ut chylus cui hicce gyrus destinatus est, e dextra in sinistram partem devolutus circuitum instituat.

Parte postica eiusdem gyri, aliud capacious intestinulum g. annexum est, quod particularem cavitatem constituere videtur. Ut huius formatio seu connexio ususque rite ex-

po-

ponantur , ab ima pelvi originem repetere necessum est. **Tab. 12.**  
 Utrinque remota peritonæ lamella, ex femoribus, ex tota **Fig. 1.**  
 pelvi contentisque in hac visceribus , numerosi lymphædu-  
 ctus *abc*. qui super vasa iliaca oblique ad latus eorum exter-  
 num transeunt , sursum progredi observantur , quorum  
 dextri ad venarum , sinistri ad arteriarum iliacarum concur-  
 sum , iuxta venæ cavæ & aortæ truncos glandulasque ilia-  
 cas *hhbb*. exstant; Quando eosque pervenerunt , ut propter  
 multam pinguedinem qua memoratae glandulæ ob sitæ  
 sunt ab ulteriore quasi transitu prohibeantur , tum ne-  
 xus & retia efformant quorum pulchritudinem non parum  
 augent diversa hisce immixta lymphatica rioris speciei,  
 uti sunt peritonæi *cc*. & medullæ spinalis, quæ a nonnul-  
 lis pro vasis lacteis seu chyliferis perperam accipiuntur.  
 Huic plexui deinde succedunt duo vel tria vascula gran-  
 diora *ii*. pinguedine libera , tum lateri tum dorso ve-  
 næ cavæ & aortæ accumbentia mox facto exiguo pro-  
 gressu visui sese proripientia , quoniam reliquam viam  
 usque ad partem receptaculi posticam sub vena  
 & sub arteria absolvunt quas ideo prius remo-  
 vere necesse est , ut tum incessus tum insertio quam  
 utriusque lateris lymphatica dextrorum & sinistrorum  
 distincto caudice in receptaculi posteriorem partem,  
 de qua supra, instituunt, in conspectum venire queant. Hæc  
 pars postica receptaculi. cum anteriore A. quam chylo di-  
 catam esse diximus , nulla parte communicat.

Ex eo perspicuum fieri videtur , pro utraque flui- *Aliud chy-*  
*dorum specie conceptacula propria condita esse , li , aliud*  
*unum in chyli gratiam quod anterius est & ven-* *lymphæ*  
*trem respicit , alterum huic subiacens capacius & receptac.*  
*dorsum respiciens in lymphæ gratiam adeoque*  
 O o ambo

*Necessitas  
duplicis  
receptac.*

que ambo fluida invicem non commisceri uti hoc fieret, si in unum alveum effunderentur uti hactenus visum est. Ex una autem contemplatione decursus & tendentiae utriusq; fluidi simulque ductuum advehentium præfatae dispositionis causam intelligere facillimum est: Nam quia in homine chylus superne descendit, lympha e contra ascendit, talis motuum contrarietas duplicitis conceptaculi necessitatem omnino indicare videtur, ne scilicet alter alteri impedimento eset vel etiam, ne confluentium simul massarum onere cisterna nimium gravaretur aut laceraretur.

*Quod denique receptaculi finem attinet, animad-  
vertendum est vice appendicis duos ei canales perpendicu-  
lares *kk.* anteriori posteriorique receptaculo respondentes,  
in quibus proinde adhuc inpermixta ac divisa fluida devolvi-  
videtur continuatos esse, qui postremo aliquot linearum  
progressione facta usque ad arteriarum cœliacæ &  
mesentericæ superioris glandularumque lumbarium confinia  
elevantur unumque in truncum confluunt, quem tum  
situs tum aliorum indiciorum testimonio pro fine recep-  
taculi non immerito reputamus, cuius proinde tota lon-  
gitudo 19 linearum est. Cum duobus prædictis canalibus  
non confundendus est tertius hisce parallelus vasque insigne  
lymphaticum quod ad receptaculi corpus non pertinet, ve-  
rum e sinistri renis regione sumto principio ibidem  
quo duorum prædictorum canalium confluxum esse dixi-  
*Glandulae  
lumbares.* mus, terminatur. Cæterum, ut nihil intactum relinquamus, unam circa glandulas receptaculo adsitas *mm.* quæ to-  
ties errandi ansam præbuere, animadversionem subiungere non inutile visum est: Primo conspectu inter glandu-  
las*

las lumbares ipsumque receptaculum nulla distinctio apparet , quia propter circumfusam pinguedinem unum veluti corpus continuum efformare , quam suspensionem augent superambulantia vasa chylifera quæ ad glandulas æque ac receptaculum pertinere creduntur : Ex quo factum est, ut singularem inter glandulas & receptaculum familiaritatem in chyli gratiam institutam esse multis persuasum sit. Verum enimvero si ulla in parte certe in locis hisce inaccessis cunctatione opus est; Equidem in glandularum ad receptaculum positu tum vero incessu chyliferorum super glandulas, quid opus est mysterium quærere ? ab una namque situs partium ac dispositionis abdominis ratione potius quam necessitudine aut familiaritate pendere hancce chyliferorum & lumbarum glandularum viciniam unicuique consideranti patet.

Vena alba *Eustachii* quæ immediatæ succi alibilis *Tab. 12.* dispensatricis seu ultimæ portæ ad sanguinem ductusque *Fig. 1.* thoracici seu chyliferi nomine hodie nota est, et si no- *Lit. B.B.* varum accessionum minus indiga sit , eam tamen silentio *B. B.* præterire nostri instituti ratio minus patitur. Idcirco eius quæ supra inter receptaculum chyli & seminis virilis *Similitudo* receptacula instituta est comparationis memores, præ- *do canalis* dictam venam albam *Eustachii* cum parastata variis lo- *thorac.* cis distracta & evoluta variisque hinc inde spiris & cir- *cum pa-* cumvolutionibus lateralibus constante , non male con- *raftata* venire deprehendimus : Propterea omnium gyrorum *eiusque* & anfractuum ratione habita , hancce venam (ad *longitudo.* minimum hominis longitudinem) quæ alias in suo situ & connexione naturali thoracis longitudinem adeoque *14.* pollices vix excedit , æquare necesse est.

*Differen-  
tia in aliis  
animali-  
bus.*

est. **Talis vero in aliis animantibus nostra manu disse-**  
**cetis e. gr. in phoca, in catopardo *Americanorum*, in**  
**elephantō dispositio nobis haud oblata est ; Cuius dis-**  
**criminis ratio in eo forte consistit, quod in hisce animan-**  
**tibus voracioribus motus chyli raro intermittit , pro-**  
**ptraea in ductu thoracico semper pleno tales circumvolu-**  
**tiones seu anfractus minus necessarii sunt quam in ho-**  
**mīne, in quo chylus statis temporibus ac minori copia di-**  
**stributus minus præcipitanter per huncce canalem devol-**  
**vitur. Deinde , quum in homine maior quam in ani-**  
**mantibus ratione destitutis perfectio seu concoctio chyli**  
**requiri videatur , ideo fortasse singularis illa fabrica com-**  
**parata est, ut chyli particulæ melius sese expandere cer-**  
**tumque caloris gradum in hisce mæandris acquirere va-**  
**leant priusquam sanguini ingerantur. Denique in illis**  
**casibus ubi chylus vel lympha exitum facilem e ductu**  
**thoracico invenire minus potest tales anfractus utilissi-**  
**mi sunt, quia sursum nitentibus & in ascensu perpendicu-**  
**lari impeditis humoribus locum cedunt donec illud ob-**  
**staculum sublatum sit. Si id cito non tollitur, tum sane pe-**  
**riculosum est : Nam ut de totali fluxus abolitione quæ**  
**metui potest nihil dicam , duo funesti status inde enas-**  
**cuntur 1. imminutio succi alibilis & roris in sanguine**  
**necessarii , cuius sane defectu sanitatis & virium labefactio**  
**& que certo quam illius affluxu earum conservatio**  
**producitur 2. eorundem succorum in partibus va-**  
**riis stagnatio contra naturæ consilium , unde destillatio-**  
**nes & congestiones hydropticæ , quæ minus ab hepatis**  
**aliorumque viscerum labe quam a prædicto canalis tho-**  
**racici aliquali infarctu eti ignoto proxime generantur.**

Tri-

Tribus tantum locis præmemorati in vena *Eustachii* anfractus seu plexus in conspectum veniunt, reliqua canalis parte simplicis ductus parum flexuosi speciem referente, cuius integrum & naturalem dispositionem accurate delineatam hic sistimus. Præter generalem gyrorum compagem quædam alia in eodem contextu non minus curiosa & scitu digna quæ propterea minus prætermittenda sunt, visui se offerunt. Vertebris non ita annexus est canalis thoracicus uti vulgo traditur: Nam plures ex singulis gyris secedentes propagines sub illo ita reflectuntur, ut a dextro latere ad sinistrum progradientur indeque rursus super eundem via retrograda ad dextrum latus incedant, quibus proinde tam superius quam inferius circumvolutus canalis pyramidis armillarumque laxe cingentium speciem exhibet: Ex quo perspicuum est tum a prædictis orbibus tum vasis sanguineis subtensis & pinguedine substrata suspensum teneri canalem thoracicum, ne contactu spinæ humorum præterlabentium cursus immoraretur. Ulterius res animadversione dignissima circa memoratos plexus nobis oblatæ est, qua nova ratio ascensus humorum per ductum thoracicum hactenus ignota luculenter demonstratur: Inter inferiorem medium & summum plexum qui minimus est, ea communicatio intercedit qua aditus ex uno in alterum ita patet, ut a trunci principalis ductusque ingressu fluida dispensari hisque gyris absorberi queant: Hanc vero communicationem per quasdam propagines seu rivulos ab uno fasciculo ad alterum usque protensos institui, evidentissime conspeximus: Quamobrem exta-

Tab. 12.  
Fig. 1.  
L. CCC.

li dispositione minus dubitandum est comparatim hanc esse, ut quædam humorum præterfluentium divisio in ea contingere ea quidem lege, ut minor pars per ductum seu truncum principalem, maior vero ad latera per memoratos anfractus cursum suum absolvat, donec ad superiorem partem canalis perventum sit.

Cæterum satis perspicuum est in homine chylum non perpendiculariter ascendere uti hactenus traditum est, neque talem ascensum cum humana figura convenire, econtra necesse est ut is a motu recto & perpendiculari multum declinet eique consequenter adiumenta externa ab autoribus assignata parum aut nihil inserviant. De septo quidem transverso pulcherrimam observationem subiungere non abs re erit. Etsi huic ita adaptatus sit canalis thoracicus, ut in medio processuum ex abdomine versus thoracem ambulare eaque de causa actionem septi indesinenter pati videatur ut omnibus in confessu est, aliquid tamen adiiciendum est sine

*Tres fasciae musculares* seu lacerti insignes canalis thoracici principio applicati a nemine descripæ circa ultimam vertebra dorsalem in conspectum veniunt, earumque finis finitimi processui seu appendici alligati versus oppositum nus. latus sic inclinantur, ut a dextris ad levum & a levo ad

dextrum latus oblique vergentes, super ductus thoracici principium crucem seu decussim efficiant cum hocce solummodo discrimine, quod trium harum fasciarum duæ ad dextrum, una ad sinistrum diaphragmatis processum pertineat: Etsi ad regendum forsan lymphæ chylique motum promovendumque, hasce fascias comparatas esse satis probabili-

babile sit , eodem tamen tempore id forte efficiunt ne in magnis compotationibus aliisque occasionibus nimiam plenitudinem receptaculo inducenibus , disrumpi illud aut supra modum dilatari possit.

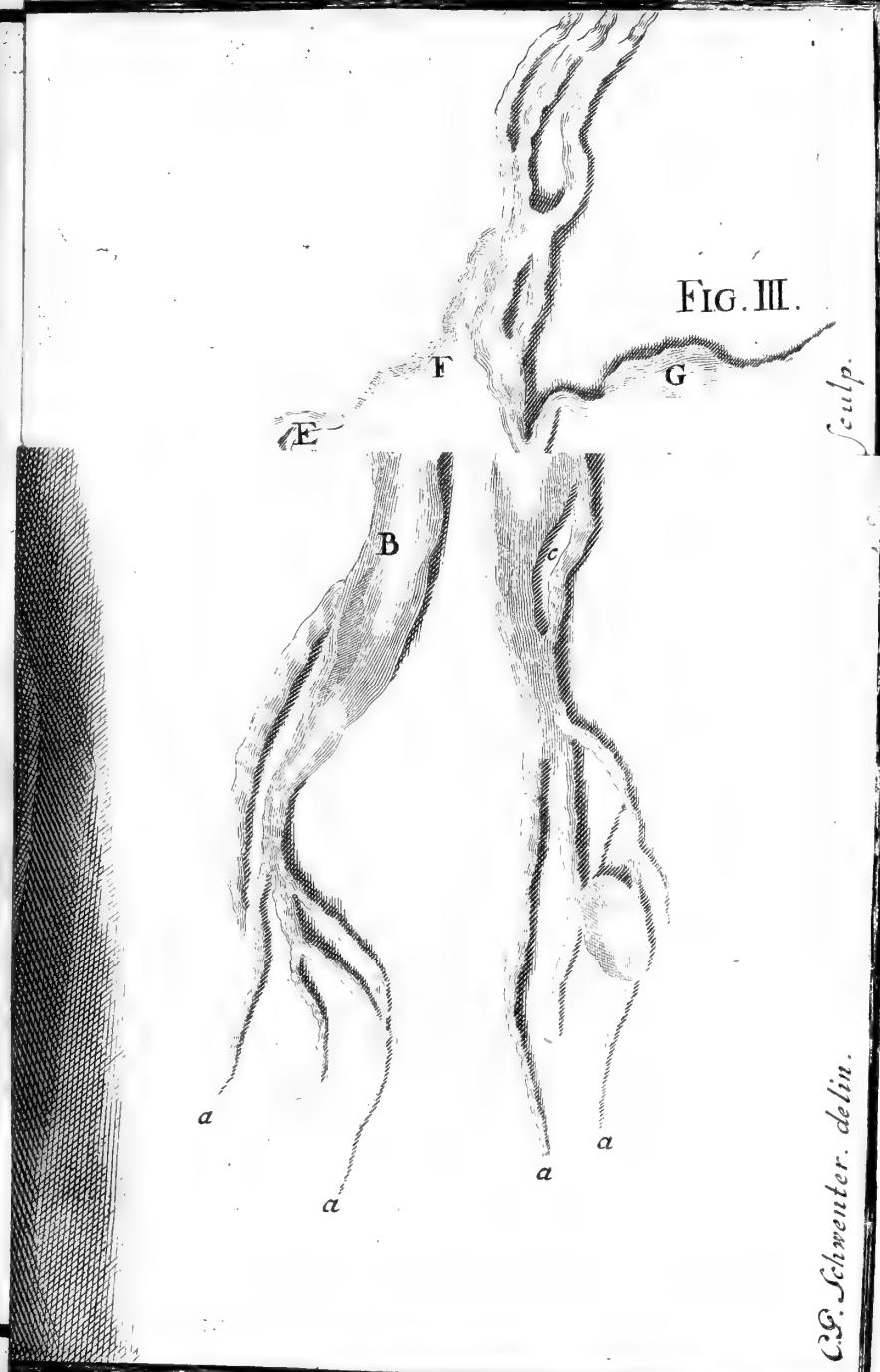
In canalis thoracici fine seu insertione aliud æque artificiosum , æque ignotum quodque pariter usui singulari comparatum est machinamentum observare proclive est . Ante osculum eius *a* , quod in subclaviæ parietem posticum implantatum est , chordæ species *b* . e venæ iugularis regione veniens dictoque osculo circumducta apposita est . Eius principium gemino processu seu crure constans sub valvula prædictæ venæ ostio accumbente conspicuum est , uti diducta valvula id conspicere fas est : Hinc facta crurum coniunctione chorda seu lacertus ad ductus thoracici osculum recta contendens illudque zonæ seu annuli instar cingens ambiensque producitur ; Evidem in hocce exili sed eleganti lacerto singularis artificii characteres satis luculentos adeoque sive ad dispepimentum sive munimentum osculi sive directionem chyli aut sanguinis sive actionem propriam valvulæ aptissimos internoscere licet : Nam ad valvulæ basin chorda memorata sic prætensa & alligata est , ut propter fibram tendineam specie futuræ per medium eius ductam , necesse sit valvulam contracta chorda simul contrahi & vicissim explicari ; Cuius proinde chordæ conformatio & dispositio tam certa tam constans est , ut quando plura oscula occurrent , quemadmodum tria a nobis observata sunt aliquando , totidem valvulis totidem simul chordarum appendices respondentes in conspectum veniant.

Po-

*Valvula canalis thoracici.* Postremo iuxta fibram istam tendineam, veram ac integrum habitudinis & configurationis valvulae cognitio-  
nem nihil tale opinantes assecuti sumus. Ea quidem primo aspectu speciem valvulae bivalvis refert, quia propter subtilitatem administrationisque difficultatem difficultate est omnia promte ac sufficienter uti decet perspicere: Postmodum adhibita maiore diligentia constat eam neque ad bivalvium neque ad semilunarium sed distinctum valvularum genus reducendam esse: Namque super foramen seu osculum ovale quod transversim locatum est, sic adaptatam vidimus valvulam ut fimbriæ totam osculi circumferentiam occupanti similis esset; Ad hæc non æqualiter lata & ampla est prædicta fimbria, sed ea parte seu extremitate, qua fibra tendinea chordæ supra memoratæ eam pertransit amplior latiorque est quam totò alias ambitu, quo efficitur, ut singularis cuiusdam ac novæ valvulae characterem præ se ferat.

Ten-

FIG. III.



Sculp.

C.P. Schwenter. delin.

FIG I.

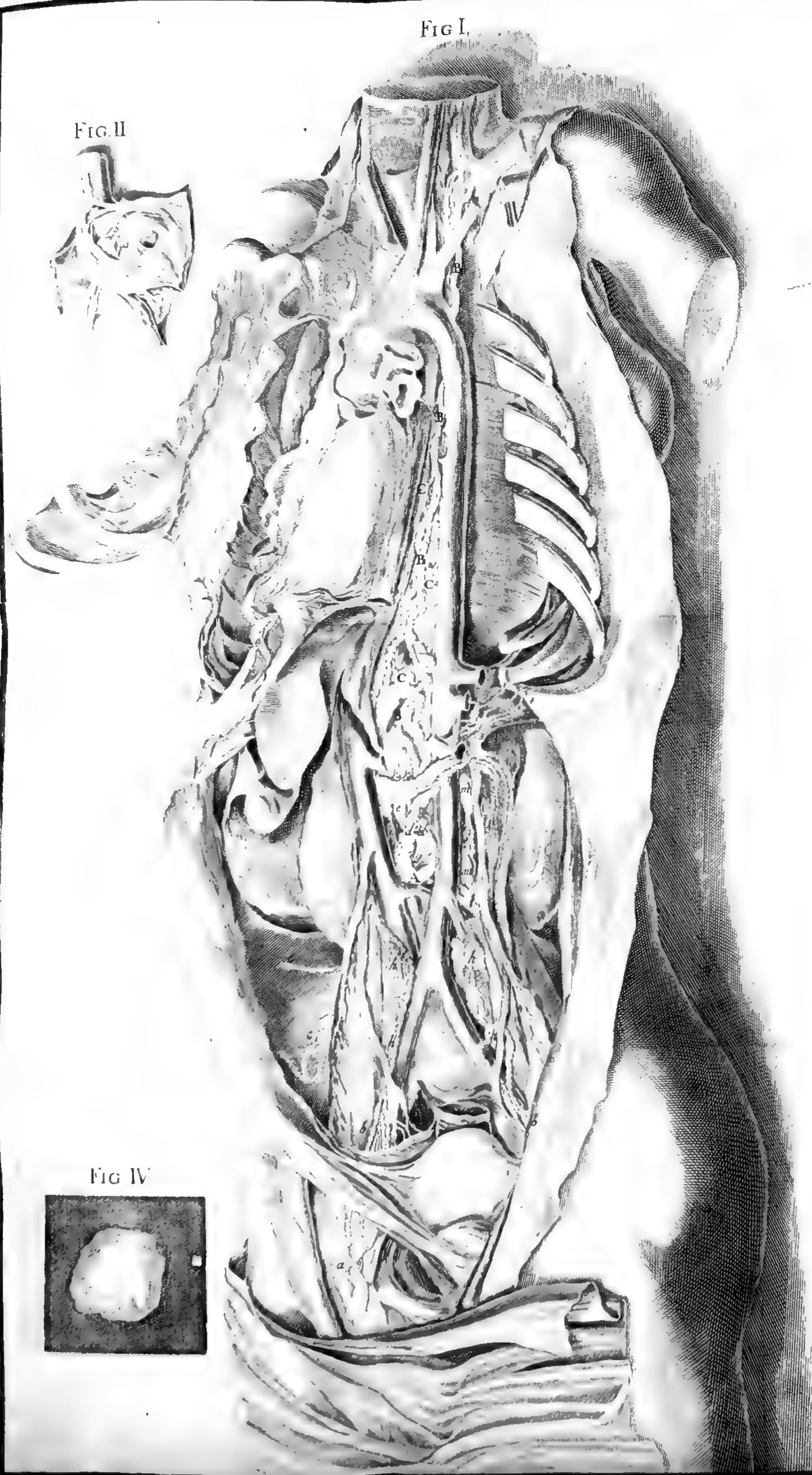
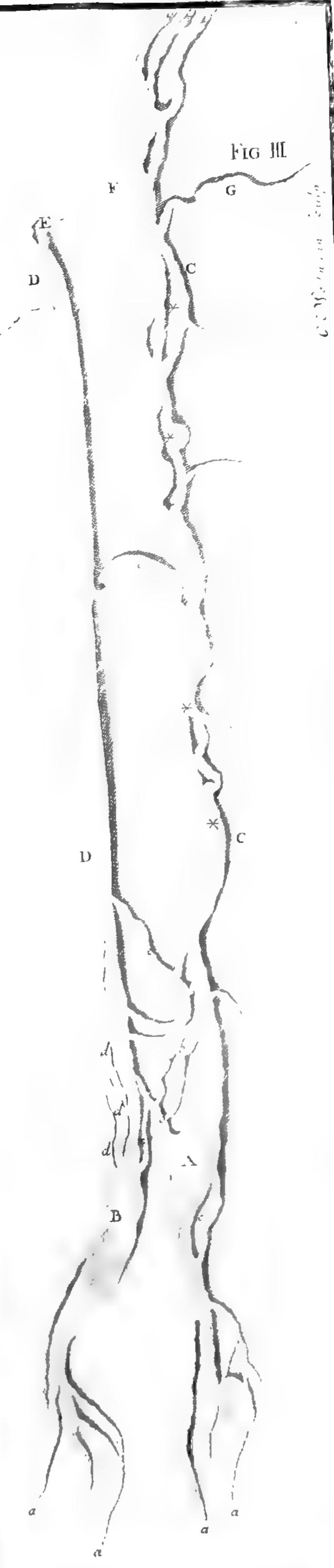


FIG II



FIG III



# TENTAMEN NOVAE DE MOTU MVSCVLO- RVM THEORIAE

*Auct.*

Daniele Bernoulli Ioh. F.

## Sectio I.

### I.



Nflationem muscularum sine prævio *M. Aug.* spirituum animalium per nervos in fibras 1726. musculares influxu fieri non posse Physiologorum statuunt plerique, idque præsertim colligunt ex eo, quod impedito per ligaturam nervi spirituum influxu, nullus plane succedit musculi illius, ad quem nervus tendit, motus. Argumenta alia attuli quam plurima in dissertatione *de Respiratione*. Prouti autem in hoc satis conveniunt, ita e contrario maxime ambigunt de modo, quo spiritus musculos inflare brevioresque reddere possint: Alii autem, spiritus facere in fibras muscularares, quod aqua infunes: (funes enim madefacti intumescunt, contrahuntur & pondera ingentia elevate) Sunt qui vasa sanguifera a spiritibus comprimi, sicque ob motum sanguinis impeditum muscularos turgere dicunt; multi denique, quorum sententia invaluit maxime, putant effervescentiam in sanguine subitaneam oriri a spirituum mixtura talem, quæ machinulas, quas dicunt, seu loculamenta in cavitatibus fibra-

P p

rum

rum muscularium recondita inflare possit ; alii rursus alter senserunt , quæ sententiarum diversitas satis probat , vix aliud quam coniecuturas in hoc argumento incerto dari posse , hasque inter illam optimam esse dicendam , quæ minimas patitur difficultates .

II. Problemata , quæ circa motum muscularum proponi possunt , talia sunt : 1. quomodo musculi notabiliter breviores fieri possint ? 2. quomodo minima spirituum quantitas & sine ullo fere sui dispendio subsequente musculos ita decurtare valeat ? 3. quo pacto musculi brevissimo tempore & contrahi & restitui queant ? Theoriam admitti posse nullam , quin hisce quæstionibus plane satisfiat , quilibet videt : Sunt dein alia phænomena non ita stricte ad propositum pertinentia , quorum tamen genuina explicatio non parum roboris theoriæ conciliare potest : Nullam denique motus muscularum rationem excogitabimus , quin in multa problemata Geometrica pertrahamur , si veras mensuras , sine quibus nihil unquam certi statui potest , desideremus : Eiusmodi sunt illa , quæ in Sectione secunda tradam .

III. Incipiam a structura musculi quantum id instituti nostri ratio postulat ; constat ex anatomicis , nullum esse muscūlūm , ad quem non tendat ramus arteriæ , a cuius ligatura (quod hic in transitu dixerim) non minus quam ab ligatura nervi musculus motum suum perdit , quamvis non ita promte . Ipse vero musculus maxima parte constat ex fibris longitudinalibus , tum etiam ex minimis fibrillis transversalibus : de utroque genere monenda & notanda quædam habeo speciatim .

IV. Fibræ longitudinales dividi facile possunt in alia

Ia filamenta multo magis subtilia atque ita disposita, ut cylindrum cavum efforment; concipio hæc filamenta ut laxe quidem inter se connexa, sed quæ tamen non facile extenduntur: ita fiet ut cum cavitas fibræ longitudinalis inflatur, filamenta circa medium aliquantulum a se invicem recedant, sed in longitudinem parum vel nihil crescant. Concpice *filamenta quamplurima*, quorum extrema sint *ac* & *bd* ita laxe inter se connexa ut facile *bd* possit deduci ab *ac*, quæ autem in longitudinem difficulter extenduntur. Cogita dein ista filamenta in cylindrum convolvi ita, ut *ac* & *bd* ad se invicem accedant, & sic habebis fibram longitudinalem, qualem vides representatam per A.B. Cavitas autem quæ interne relinquatur semper repleta est sanguine, id quod satis apparet ex fibrarum rubidine & superveniente colore albicante, si per musculi arteriam injectiones fiant cum aqua tepida. In tendinibus fibræ solidiores sunt & compactiores nec proin sanguis illarum cavitates subire potest; unde color albus.

V. Pergo ad *fibrillas transversales*: has videmus perpendiculariter incedere super fibris longitudinalibus ad certas quasdam distantias: connectuntur earundem opero fortiter *filamenta* fibras longitudinales componentia: ponendo enim fibrillas transversales ab uno filamento ad aliud procedere sicque totam fibram longitudinalem amplecti instar annuli; tales fibrillæ transversales in figura prima exprimuntur per lineas *ef*, *gh* &c. & in figura secunda per circellos *EF*, *GH* &c. atque sic dividitur cavitas totius fibræ longitudinalis in plura *loculamenta* (alii *machinulas* dicunt) quale est v. gr. *EFGH* comprehensum inter duas fi-

brillas transversales vel annulares EF, GH : Cæterum non dubito , quin hæ fibrillæ transversales meræ sint nervorum propagines , sunt enim , ut ex anatomicis constat , tenaces & duræ , distractiōni & rupturæ resistunt , dum apice acus eas discindere tentamus . conf. Borell. de mot. anim. part. I. prop. I.

**VI.** Quæ de structura musculi præmisi fere omnia ab anatomicis iam fuere demonstrata ; pauca mente supplenda supposuimus , sed certe nihil quod cum observationibus celeberrimorum quorumvis Anatomicorum vel minimum repugnet : Tuto proin amplectemur , quicquid ex iis eliciemus . Dixi in præcedente §. cavitatem fibræ longitudinalis dispesci in plures *machinulas* terminatas ab utraque parte a *fibrilla transversali* vel potius *annulari* ; talis exhibetur in figura secunda pér EFGH ; sed ut distinctius appareret , illam seorsim repræsentavi in figura tertia sub forma cylindri , cuius basis est circulus EFM vel HGN & cuius altitudo est EH vel MN vel FG . Ostendendum est , quo modo minimo spirituum influxu talis machinula cylindrica possit acquirere formam dolii valde ventricosi , atque sensibiliter decurtati , qualis figura quarta exhibetur .

Fig. 3.

Fig. 4.

**VII.** Cogitemus hunc in finem fibrillas annulares EMF & HNG paululum contrahi (hanc autem contractionem explicabo inferius) in longitudinem alterius figuræ emf & hng ; mutabitur figura cylindrica in aliam convexam & talem , ut 1<sup>mo</sup> singula *filamenta eph* , mn &c. longitudinem conservent quam ante habuerant ; Difficulter enim extenduntur : & 2<sup>do</sup> ut capacitas *machinulæ* in utroque casu sit eadem : Est enim *machinula* sanguine repleta

pleta, qui neque erumpere neque aeris instar in minus spatiū redigi potest ? Ad hæc requiritur , quod in Sectio-ne secunda demonstrabo , ut machinula in longitudine contrahatur nempe ut acquirat longitudinem *mn* , cum ante haberet longitudinem *MN* , tum etiam necesse est, ut intumescat circa medium ita ut amplitudo media *PQ* excrescat in maiorem *pq* ; nihil vero est quod impedit i-stam intumescentiam ob laxam, quam inter se habent filamenti, cohærentiam. Confer ubique §. 4.

VIII. Videtur iam tota quæstio eo reducta, ut indicitur modus , quo fibrillæ transversæ contrahuntur: hunc vero ex ipso spirituum animalium influxu imme-diate deduco : Spiritus enim utcunque subtile , spatiū tamen occupent necesse est, possunt itaque minimas ca-vernulas fibrillarum transversalium replere, sicque aliquam in hisce fibrillis contractionem producere ; minima certe spirituum quantitas ad hoc negotium sufficiet 1<sup>mo</sup> quia exigua contractio requiritur , ostendam enim deinceps parvulas in *fibrillis transversalibus* contractiones sat magnas producere posse in *fibris longitudinalibus* , si certæ proportiones assumantur ; 2<sup>do</sup> quia cavernulæ fibril-larum transversalium minimæ sunt & plane non compa-randæ cum cavitatibus fibrarum longitudinalium. Huc quoque facit, quod dixi in fine §. 5. *fibrillas transversa-les* meras nervorum videri propagines. Cæterum non o-pus puto ut moneam , de singulis machinulis intelligen-dum esse , quod de unica dixi , & sic quamlibet fibram longitudinaliæ totumve musculum contrahi posse.

IX. Dispiciamus nunc in quantum hæcce nostra sententia satisfaciat desideratis §. 2. expositis ; præcipuum

*est, an musculus notabiliter decurtari possit?* De hoc ipse dubitaveram ante institutum calculum, facile videns capacitatem machinulæ alicubi maximam esse; sed docuit me postea calculus, fieri posse, ut musculus plane quinta totius longitudinis suæ naturalis parte brevior fiat, ita ut si quis musculus quinque pollices longus sit, is maxima sui contractione ad quatuor pollicum longitudinem reducatur. Sufficit autem hæc contractio abunde phænomenorum explicationi: dubito enim num experimentis demonstrari possit esse vel unicum musculum qui maiori quam quinta longitudinis suæ parte contrahi queat. Experimentum feci, quod videre est in fine huius sectionis, quo maximam muscularum rectorum oculi contractionem exploravi, & inveni, quod ipse vix sperassem, & de quo hæsito, an non casui potius attribuendum sit, quam alicui necessitati, inveni, inquam, contractionem maximam in dictis musculis tantillo minorem, quam quæ modo definita fuit; dabitur forsitan occasio alia plura de hac re experimenta instituendi.

X. Pergo ad alteram quæstionem, *an contractioni musculi minimo spirituum influxu & sine ullo fere eorundem dispendio succedere possit?* partem quæstionis primam ex §. 8. satis confirmari puto; circa alteram vero partem observo, quod motus muscularum sine minima spirituum iactura omnino fieri possit, siquidem nihil impedit, quo minus spiritus post musculi actionem a fibrillis transversalibus versus principia nervorum refluant: id ipsum autem ideam nostram non parum commendat. Apparet denique & contractionem & restitutionem musculi momento citius absolvri posse, neque enim aliud ad id tempus requiri-

requiritur quam quod a fluxu & refluxu spirituum impeditur, id est, brevissimum. Interim quid sit, quod spiritus a nervorum principiis ad ultimas extremitates fluere faciat id aliis indagandum relinquo, refluxum autem deduco a virtute elastica *fibrillarum transversalium*; sic dicendum est musculum in contractionis statu permanere, quamdiu æquilibrium adest inter illud prius motus principium, quodcunque sit, & conatum qui inest minimis *fibrillarum transversalium* particulis sese restituendi.

XI. Supersunt alia quædam indicanda, quæ presentia nostra facere videntur: Dein huic primæ sectioni finem imponam. Dixi supra, fieri posse, ut spiritus omnes, vel saltem maxima eorundem pars, postquam in musculum egerunt, refluant; Si enim avolare dicas, unde tanta spirituum quantitas, qua continuo reparari possint? Solum cor plus centies millies contrahitur quotidie, cogites de homine pedibus iter ingrediente, de actione continua plurium aliorum musculorum vitalium; fingas haud exiguam alimentorum partem in spiritus converti, vix tamen millesimam grani partem obtineas pro una cordis systole, de qua ego non video, quomodo tantæ contractioni sufficere possit. Facile porro intellegitur cur ligata arteria motus pereat in musculo, ad quem arteria tendit, nisi enim *machinulæ fibrarum* sanguine repletæ sint, motus succedere nequit, unde novus ab arteriis suppeditetur continuo sanguis necesse est, sequitur exinde quoque ligatura arteriæ motum in musculo paulatim non protinus tolli, quod experientia confirmatur. Quod in tendinibus nulla contractio vel intumescentia observatur, id peti debet ex ultimis verbis §. 4. Denique cur nullus

nullus musculus in continuo contractionis statu vel per horulæ quadrantem permanere possit non a defectu virium, sed ab impedita circulatione sanguinis per *machinulas* ducendum esse existimo. Superest experimentum, de quo in fine §. 9. mentionem feci.

### Experimentum

#### Pro inveniendis maximis contractionibus muscularum rectorum oculi.

**F**ig. 5. IN plano verticali duxi lineam horizontalem *bm*, in cuius extremitatibus *b* & *m* affixi utrobique chartulam characteribus notatam, dein in eadem ab horizonte altitudine inquisivi, locum, in quem oculum dextrum (clauso sinistro) ponere possem, ita ut in utraque chartula characteres distinguere valerem immoto capite, sed moto bulbo oculi, modo versus internum modo versus externum canthum. Locum autem solcite exploravi proximum, quantum fieri posset, linea *bm*; omni porro, qua poteram, vi oculum detorsi in utramque partem, curans ut in neutram partem inclinarem caput, tandem exactissime locum detexi: Dicam quid invenerim. Repræsentet circellus *cdfe* sectionem horizontalem bulbi in eodem plano cum linea *bm* constitutam, sitque linea *op* perpendicularis in lineam *bm*, inveni  $op=7$ ,  $hp=8$ , &  $pm=6$ , ibi cum oculus constitutus erat poteram detorquendo oculum pro lumen in utraque chartula characteres distinguere, at appropinquando caput tantillum versus *p*, in neutra distin<sup>tio</sup> apparebat, & declinando caput in alterutram partem

tem motu parallelo cum *lm* in altera schedula distincte in altera confuse apparebant characteres.

Ut intelligatur, quid ex isto experimento sequatur, ad duo attendendum est; 1<sup>mo</sup> quod oculus dum in orbita sua movetur, ipsius centrum *o* immotum manet; 2<sup>do</sup> quod in retina sive, ut alii volunt, in choroidea unicus sit loculus puta *q*, in quo distincte imaginem percipimus, qui fere pupillæ *n* oppositus est. Ut itaque obiectum in *b* distincte videamus, requiritur ut locus *q* perveniat in *f* seu *n* in *c*, hicque motus fit ope musculi adducens *bxg*, extenditur autem simul ipsius antagonista seu abducens *asg*; & si abducens agit, quantum potest, pervenit punctum *q* in *d* seu *n* in *e*, extenditurque musculus adducens: ergo dum oculus movetur v. gr. a *c* in *e* dimidium motus fit a restitutione musculi adducens, reliquum ab eiusdem contractione, invenitur autem angulus *hom* ex trigonometricis esse 89 grad. 26 min. eiusque dimidiis 44°. 43'. dicendum ergo musculum adducentem maxima sua contractione rotationem produce-re in oculo 44°. 43'. totidemque alterum adducentem.

Porro prædicti musculi *asg*, *bxg* inferuntur bulbo oculi haud procul ab iride puta in *a* & *b*, cum eodemque uniti sunt usque in *s* & *x* ita ut *gs*, *gx* fere tangant circumflexum, observavi etiam esse *sg* vel *xg* ad diametrum bulbi fere ut 20 ad 9; ex his datis haud difficulter inferuntur, quanta sit maxima adducens contractio, sumatur nimirum arcus st 44°. 43'. & ducatur *gt*, erit *gt* ad *gs* proxime ut 9 ad 11. hincque sequitur maximam musculi adducens contractionem esse æqualem  $\frac{2}{11}$  seu pa-lo minorem quinta longitudinis naturalis parte. Experi-

rimentum simili modo circa musculum attollentem & de-  
primentem institui potest, si loco *bm* horizontalis alia ver-  
ticalis ducatur.

---

### Sectio II.

## QVA VARIAE DILVCIDATIONES GEOMETRICAE IN PRAECE- DENTEM THEORIAM EXHIBENTVR.

### I.

**T**heorema I. curva quam singula *filamenta* fa-  
ciunt durante *machinulæ* inflatione semper  
est elastica, cuius axis coincidit cum axe  
*machinulæ*.

*Demonstratio.* Concipiamus duo plana  
infinite propinqua, quorum intersectio communis sit axis  
*machinulæ*, erunt singuli arculi circulares in superficie  
*machinulæ*, a duobus planis resecti ut distantiæ ab axe,  
si iam porro consideremus fluidum *machinulæ* inclusum  
ut elasticum, necesse est per leges hydrostaticas, ut flu-  
idum ubique eundem habeat elasticitatis gradum, qua-  
propter potentia*x* *filamentum* illud comprehensum inter duo  
plana extendentes, erunt ubique ut latitudines *filamenti*  
seu ut arculi intercepti inter duo plana sive ut distantiæ ab  
axe, id est, ut applicatae ad curvam quæ sitam, constat au-  
tem ex mechanicis, potentias semper esse reciproce ut  
radii osculi, erit itaque curva, quam *filamentum* induit,

huius

huius indolis ut habeat ubique applicatas suas reciproce proportionales radiis osculi, quam proprietatem elasticæ convenire constat.

II. *Schol. 1.* Differt itaque curva, ad quam *filamenta* se componunt in nostra hypothesi ab illa, quam induunt in hypothesi effervescentiæ; in hac enim *filamenta* durante musculari inflatione eandem latitudinem conservare assumitur, & sic hiatum inter duo quævis *filamenta* proxime intervenire, per quem aer postquam impetum fecit in *filamenta*, avolare possit, atque in hac hypothesi circularem figuram *filamentis* attribuendam esse, certissimum est; quod nuper demonstravit Cel. Petrus Antonius Michelotti in apologia, quam pro Patre meo conscripsit contra Cl. Mead, quem tamen pro sua hypothesi recte conclusisse minime negamus.

III. *Scholion 2.* Cavendum, ne hic ordinaria æquatio elasticæ accipiatur, quæ minus generalis est; nam sequeretur exinde, nullam in machinulis succedere posse mutationem si *filamentum EPH* & *solidum* ex ipsis revolutione circa axem MN generatum considerantur ut invariabilis & constantis magnitudinis. Tradam itaque æquationem generalem pro omnibus elasticis instituto nostro satisfacientibus. Sit MN axis curvæ bisectus in R, ducantur perpendicularis RP, eique parallelæ duæ applicatae proximæ ca, db, sit  $Rc=x$ ,  $ca=y$ ,  $Pa=s$ ,  $cd=dx$ ,  $oa=dy$ ,  $ab=ds$ : habemus itaque posito elemento  $ds$  constante radium osculi  $= \frac{dyds}{ddx}$ . ergo per proprietatem elasticæ erit productum ex applicata in radium osculi constanti, ponamus quantitatem illam constantem  $= \frac{1}{2}aa$ , & habebitur  $-ydyds = \frac{1}{2}aaddr$  & integrando cum additione constantis cuiusdam homogeneæ qualis est  $\pm \frac{1}{2}bbds$

Fig. 6.

habebitur  $\frac{+bbds - yyds}{dx^2 + dy^2} = aadx$ , & sumendo quadrata ponendoque  $dx^2 + dy^2$  pro  $ds^2$ , posteaque reducendo æquationem obtinebitur æquatio finalis  $-dx = \frac{(+bb+yy)dy}{V(a^4 - b^4 + 2bbyy - y^4)}$ ; sumo  $-dx$ , quia vi æquationis utrumque signum accipi potest, crescente autem  $x$  ponitur decrescere  $y$ .

IV. Coroll. In puncto P debet elementum abscissæ infinite esse maius quam elementum applicatæ, hoc autem fit, si in prædicta æquatione  $-dx = \frac{(+bb+yy)dy}{V(a^4 - b^4 + 2bbyy - y^4)}$ , ponatur denominator  $= 0$ ; unde obtinetur  $a^4 - b^4 + 2bbyy - y^4 = 0$ ; vel  $aa = +bb + yy$ , vel deniq;  $y = V(aa + bb)$ , est itaque  $RP = V(aa + bb)$ .

V. Quoniam pro maxima possibili contractione musculi eruenda requiritur ut algebraice exprimatur tam solidum quod generatur ex revolutione curvæ EPH sive dimidiæ PH circa axem MN, quam longitudo curvæ, quoniam etiam hæ algebraicæ expressiones valde sunt prolixæ & non nisi magno labore obtinentur per appropinquationes, ideo aliam curvam loco elasticæ accipiemus tractabiliorem, sed quæ tamen a figura elasticæ parum recedat. Pro idonea substitutione duo requiruntur, 1<sup>mo</sup> ut curva in P sit perpendicularis, & 2<sup>do</sup> ut radii osculi crescant decrementibus applicatis, ita ut ubique radii osculi fere sint in reciproca ratione applicatarum. Posteriori conditioni satisfacit huiusmodi æquatio  $c-x = (3bb + y^3) : 3aa$ , quæ dat radium osculi ubique  $= (a^4 + (bb + yy)^2)^{\frac{3}{2}} : 2a^4y$ , quæ expressio indicat esse proxime

xime radium osculi applicatae reciproce proportionalem, modo y valorem non habeat plus quam mediocrem respectu quantitatum  $a$  &  $b$ . Sed haec curva nullibi est ad applicatam perpendicularis, aut itaque ad altiores aequationes deveniendum erit aut in alia curva acquiescendum non ita stricte desiderato secundo satisfaciente. Credo autem melius fieri non posse ob multas rationes quam considerando curvam PH tanquam parabolam cuius axis est PR & cuius vertex P. Est enim haec curva perpendicularis in P ad PR; crescent quoque radii osculi decrescentibus lineis  $ac$ ; suntque fere in reciproca constanti ratio ne si parameter parabolæ magna sit & ramus PH exiguus accipiatur, quod utrumque sit in hypothesi nostra. Denique hoc commodi accedit, quod tam solidum rotacione curvæ circa RN generatum quam ipsa curvæ longitudo possint quantitatibus finitis exprimi.

**VI.** Sit iam  $RN=c$ ,  $RP=b$ , parameter  $=a$ , & erit  $NH=\frac{ab-cc}{a}$ ; sit porro quadratum radii ad aream circuli ut 1 ad  $m$  & erit solidum circumvolutione curvæ PH circa RN descriptum  $= (15maabb - 10mabc^3 + 3mc^5) : 15aa$  & longitudo curvæ PH  $= \frac{a}{\pi} \log. (\frac{a}{\sqrt{(aa+4cc)-2c}}) +$

$\frac{a^3}{16(\sqrt{(aa+4cc)-2c})^2} - \frac{-(\sqrt{(aa+4cc)-2c})^2}{16a}$ ; & cum utraq; quantitas (solidum & curvæ longitudo) sit constans priorem faciemus  $= mn^3$ , posteriorem  $= 100$ , prior aequatio quam deinceps vocabo (A) dat  $b = \frac{cc}{3a} + V(\frac{45aa^3 - 4c^5}{45aac})$ : altera

$$\text{æquatio (quam vocabo B) talis est } 4a \log. \left( \frac{a}{\sqrt{aa+4cc}-2c} \right) + \frac{a^3}{\left( \sqrt{aa+4cc}-2c \right)^2} = 1600.$$

VII. *Theor. II.* Non potest musculus contrahi ultra quintam longitudinis suæ naturalis partem.

*Demonst.* Si in æquatione (B) consideretur  $a$  ut quantitas variabilis, facile tentanti apparebit esse alicubi radicem totius quantitatis complexæ maximam. Si dein  $c$  ponas esse maiorem quam 80, erit illa radix maxima maior quam 1600, secus erit minor, unde liquet æquationem B nullam habere radicem realem, quoties  $c$  minor est quam 80. Sed  $c$  est  $=RN=$  dimidiæ longitudini musculi contracti, &  $PH=$  dimidiæ longitudini musculi non contracti  $=100$ ; summa itaque contractio non potest excedere quintam longitudinis naturalis partem.

VIII. *Scholion.* Quoties  $c$  maior est quam 80 habet æquatio B duas radices, id est, duo valores litteræ  $a$  assignari possunt qui æquationi (B) satisfaciunt, inter quos maior est accipiens. Assignavi autem valorēm litteræ  $c$  vero paulo minorem, propius ad verum accedes, si definito numero addas 4 centesimas. Possunt vero huiusmodi minutæ negligi. Feci quoque calculum in hypothesi, esse curvam PH arcum circularem & tum inveni maximam contractionem partium 18, cumque parabola magis accedat ad naturam elasticæ quam circulus radios suos osculi constantes habens, statuendum est admissa elastica, maximam contractionem paulo maiorem esse quam illa quæ oritur, cum PH consideratur ut arcus parabolicus; unde ut numerum rotundum habeamus, illam faciemus partium 20 seu unius quintæ totius musculi longitudinis.

**IX. Theor. III.** Ut musculus quantum fieri potest contrahatur, requiritur ut longitudo machinulæ sit ad eiusdem diametrum in maiori ratione quam 100 ad 77.

*Dem.* Theorema manifestum fiet considerando quid fiat si successive minor accipiatur diameter machinulæ posita eiusdem longitudine constanti; determinatur autem diameter machinulæ ab ipsius soliditate; unde statim ponemus loco  $n^3$  numerum sat magnum, dein minorem continuo. Sit primo loco  $n^3 = 4000000$  & cum in statu naturali musculi sit PH linea recta seu arcus parabolæ cuius parameter infinita, ponendum statim est  $a = \infty$ ; & sic mutatur æquatio A in hanc  $b = n\sqrt{\frac{n}{c}}$ , sed est quoque in statu naturali RN = PH seu  $c = 100$ , ergo  $b = 200$ , &  $NH = \frac{ab - cc}{a} =$  (in præsenti casu) 200, unde posito  $n^3 = 4000000$  fit semidiameter machinulæ ad eiusdem semilongitudinem ut 200 ad 100, seu ut 2 ad 1; hæc ita se habent antequam musculus contrahatur, ponatur iam contrahi musculum, ita ut RN, quæ antea fuerat centum partium, nunc habeat v. gr. 99. id est, ponatur  $c = 99$ , & ope æquationis (B) inquiratur in valorem ipsius  $a$ ; dein per æquationem (A) innotescet quoque valor ipsius  $b$  seu RP, & tandem quoque ipsius NH seu  $\frac{ab - cc}{a}$ . Sic invenietur RP, iam maior & NH minor quam 200 part. hocque pacto semper aliquid accedit linea PR diminueturque linea NH (ponendo successive  $c = 98, c = 97, c = 96$  &c.) donec tandem ponas  $c = 89$ ; hunc enim si transgrediaris terminum, non amplius decrescere sed crescere rursus lineam NH deprehendes; unde haud difficulter infertur non posse  $c$  minorem esse quam 89 neque proin musculi contractio-

nem

nem maiorem quam 11 partium. Ponamus iam valorem minorem pro  $n^3$  quam 4000000 & sic maior obtinebitur contractio ; est autem eo usque diminendum  $n^3$ , donec maxima contractio fiat 20 partium ; id erit , cum facies  $n^3 = 600000$  ; fitque tunc semidiameter machinulae non contractae 77 part. patet proin requiri pro maxima contractione ut longitudo machinulae sit ad diametrum in maiori ratione quam 100 ad 77.

X. *Coroll.* Ut fibra longitudinalis contrahatur quinta parte oportet ut fibra transversalis brevior fiat  $\frac{27}{77}$  totius suæ longitudinis. Positis enim  $n^3 = 600000$  &  $c = 100$ , fit  $NH = 77$  & facto  $c = 80$  fit  $NH = 50$  ; est ergo contractio fibræ transversalis  $\frac{27}{77}$  longitudinis suæ totius. Si ad maiorem distantiam fibrillæ transversales essent collocatae , magis contrahi deberent, queritur ergo an tanta contractio , quæ viginti septem partes septuagesimarum septiminarum exæquat, fieri possit in fibra transversali ? De hoc autem nequaquam dubitandum : Nam cum cavernulae fibrarum transversalium spiritibus replentur , disponuntur ad figuram solidi , quod generatur ex rotazione elasticæ circa axem ; & quando prædictæ cavernulae spiritibus maxime sunt repletæ , fit elastica rectangula ; est autem longitudo elasticæ rectangulæ ad axem proxime ut 11818 ad 4741 : ergo maximæ cavernularum contractiones esse possent  $= \frac{77}{11818}$ , seu valde propinque  $= \frac{3}{5}$ , quæ quantitas multo maior est quam  $\frac{27}{77}$ .

XI. *Theorem.* IV. Si longitudo machinulae muscularis habeat ad eiusdem diametrum rationem minorem quam 100 ad 77, nunquam ad quintam partem decurtari musculus potest ; & quo minor fuerit ratio longitudinis ad dia-

me-

metrum, eo minores contractiones requiruntur fibrarum transversalium pro similibus contractionibus fibrarum longitudinalium.

Demonstratio prioris propositionis partis constat ex §. 9. altera vero pars clucescet, si diversos assumendo valores pro  $n^3$  videatur, quanta contractio fibræ transversalis requiratur in singulis casibus pro contrahenda machinula v. gr. una centesima. Reperietur autem quod in propositione dictum est. Ita vidimus in §. 9. quod posito  $n^3 = 4000000$ , maxima contractio fibræ longitudinalis sit undecim illarum partium, quarum machinula in tota longitudine naturali habet centum, & quod pro illa obtinenda fibra transversalis debeat decurtari novendecim ducentesimis, quæ quantitas minor est illa, quæ pro simili effectu requireretur si  $n^3$  esset  $= 600000$ .

XII. *Coroll.* Vero simile est, diversam structuram inesse fibris muscularum longitudinalibus: Scilicet illas minus frequenter decussari a fibrillis transversalibus in musculis, qui maioribus contractionibus destinati sunt, frequentius in aliis. Distantiam autem fibrillarum transversalium a se invicem nunquam excedere  $\frac{1}{7} \text{--} \frac{2}{7}$  partes diametri fibræ longitudinalis; & cum per experimentum Sectioni primæ subiunctum constet, maximam muscularum rectorum oculi contractionem fere tantam esse quanta vi theoriz nostræ esse potest, statuendum est in his muscularis distantiam fibrillarum transversalium parum deficere a  $\frac{1}{7} \text{--} \frac{2}{7}$  partibus diametri fibræ longitudinalis.

R r

Eius-

*Eiusdem*  
**EXPERIMENTVM**  
**CIRCA NERVVM OPTICVM.**

**E**xstat in Act. Lips. A. 1683. pag. 68. experimentum, quo demonstratur, spatiolum esse in media choroidea (sive, ut alii volunt, retina) ad imaginem obiectorum percipiendam plane ineptum, eoque D. Mariotte usus est contra D. Pecquet in examinando primario visus organo. Disceptatum autem fuit a viris clarissimis, an perforationi choroideæ a nervo optico, an vero plexui vasculorum sanguiferorum in retina conspicuo tribuendum sit, quod experimento monstratur. vid. *Hist. Reg. Sc. Acad. Paris. conscriptam a D. Du Hamel.* Ego autem putavi, id diiudicandum esse ex figura, situ & magnitudine loci illius extra radiorum actionem positi; possunt enim hæc omnia exactissime determinari sequentem in modum.

**Fig. 7.** In pavimento (cuius parti aliquot pedes longæ ad meliorem experimenti successum pannus niger insterni potest) ponatur moneta argentea O : ducaturque recta OA; Dein accipiatur pendulum, cuius altera extremitas oculo dextro admoveatur, altera ad pavimentum non omnino pertingat. Tandem clauso oculo sinistro directaque constanter dextri acie in imam penduli partem, ita paulatim corpus versus sinistram promoveatur, ut penduli extremitas continuo sit in recta OA, quæ dum fiunt, ex-  
acte

acte observetur locus, ubi obiectum O visu perdi incipit. Sit ille in C; posteaque continuando motum, accurate quoque notetur punctum A, in quo obiectum O iterum percipitur: Bisecta linea AC in D, ductaque perpendiculari BH, fiat in BH, quod ante in linea OA, id est, diligenter observentur puncta B & H tanquam limites intra quos cum existit penduli extremitas, obiectum O visui se surripit: linea BH denuo bisecetur in F linea perpendiculari GE, & in hac pari conditione quærantur puncta E & G; idem fiat in aliis lineis LP, MN &c. Atque per omnia ista puncta ducatur linea curva HEBGH, quæ erit huius indolis, ut quamdiu oculus correspondet puncto intra curvam, obiectum O nullo modo appareat, si extra curvam cadit axis visionis, idem mox percipitur. Dicam nunc, quæ ipse experiundo observavi reductis singulis quantitatibus ad longitudinem penduli, quam voco 100. Inveni ergo OC=23, AC=10, BD=3, DH=13, & EG=14: Ex quibus liquet, curvam accedere ad ellipsin. Cuius centrum est in F, & cuius axis maior est ad axem minorem ut 8 ad 7.

Restat nunc indagandum, quomodo ex observatis his determinari possint situs, figura & magnitudo spatii illius ad visum inutilis. Id vero nullo negotio obtinetur; cognitis enim lineis AC, EG, LP, MN, HB &c. determinantur lineæ analogæ in oculo. Quamvis autem BH maior sit quam EG, fient tamen ipsarum analogæ in oculo æquales, adeo ut figura elliptica in circularem mutetur: & erit diameter circelli illius æqualis septimæ parti diametri totius bulbi. Centrum eius distabit septem vigesimalis quintis partibus diametri bulbi a puncto pupillæ op-

posito , eritque simul supra medium oculi paululum elevatum. Hæc omnia exacte cum nervo optico in oculo humano convenient adeo, ut iam sententia D. Mariotte sit hac in parte extra omne dubium posita.

Quod si ergo insertio nervi optici sit causa phænomeni illius a D. Mariotte observati, planum est , non debuisse nervum hunc directe e regione pupillæ in bulbum inseri: ita enim omnia obiecta in medio perforata nobis apparerent, illudque, in quod oculos defixos nunc habere solemus, non videremus : dum vero nervus opticus lateraliter bulbo insertus fuit, efficitur , ut illa tantum obiecta perdamus, quæ sub certo angulo ad latus sunt posita. Neque unquam unum idemque obiectum amborum oculorum sensui se surripere potest , si nervi optici a latere sint oculo implantati; id vero semper fieret , si essent pupillæ e diametro oppositi.

Alterum Corollarium , quod deduco ex eodem experimento , tale est. Non potuit nervus opticus aliter quam ad perpendicularum oculo inseri. Nam cum locus insertionis sit ad visum inutilis , natura in id intenta esse debuit, ut fieret inter omnes possibiles minimus: hocque obtinetur , dum perpendiculariter bulbum nervus ingreditur.

Quod si nervi recta ab originibus suis , scil. cruribus medullæ oblongatæ ad oculos tetendissent, necessario contra alterutrum præmissorum lemmatum peccatum fuisset ; cum enim principium nervi optici sit fere e regione oculi constitutum , uti hic in A , manifestum est , esse nervum AB (quem perpendicularem pono ad sphæram seu bulbum oculi) e regione pupillæ positum. Sed si nervus late-

fig: 1.



fig: 2.

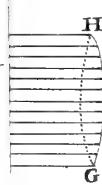
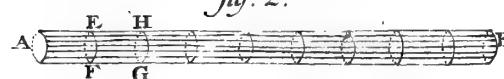


fig: 5.

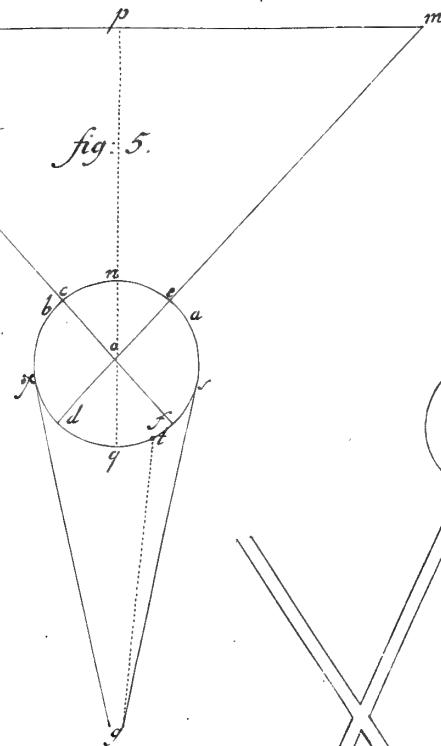


fig: 8

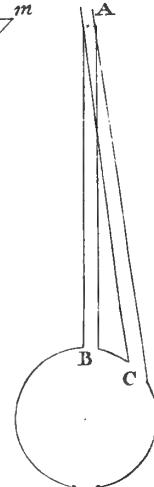


fig: 9

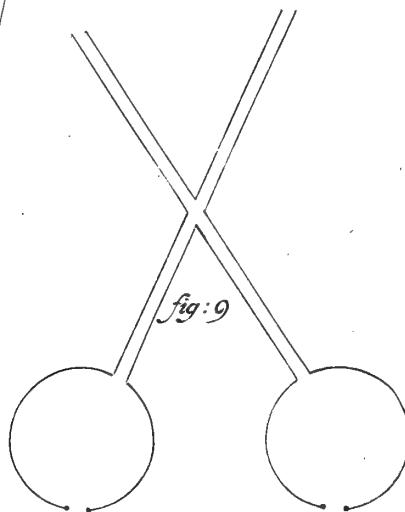
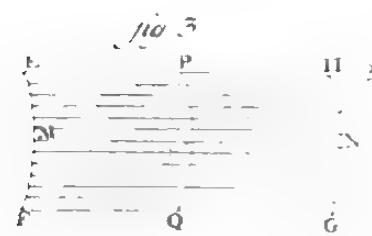
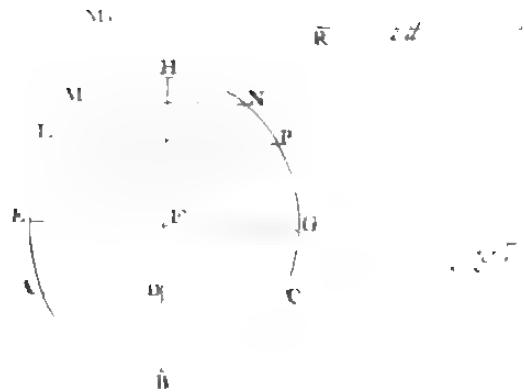
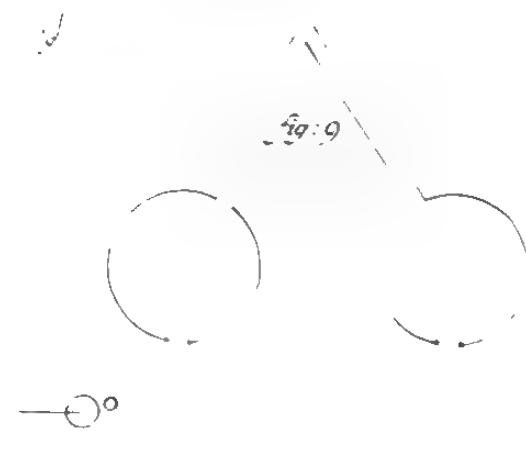
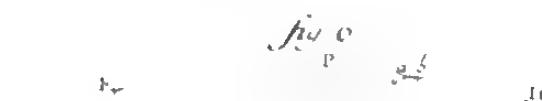


fig: 7





*fig. 5*



lateraliter in C fuisse oculo insertus , eo ipso obliquus evasisset.

Dum vero nervi non recta tendunt ad oculum , sed Fig. 9. prius coniunguntur, utrius postulato ex aſſe ſatisfit, uti id ex ſola inspectione figuræ nonæ appetat.

Si quis exinde rationem coniunctionis nervorum opticorum deducere volet , ei facile ſuffragabor.

DE  
VARIIS BAROMETRIS SENSI-  
BILIORIBVS,  
ET  
EORVM NOVA SPECIE, AC VSIBVS:  
*Auctore*  
G. B. Bülffingero.

*Recensio Barometrorum.*

I.



Riginem Barometrorum & species expo- *M. Aug.*  
ſuit *Dalencéus* singulari libello. *Pauca 1726.*  
ex illo tempore nova acceſſerunt , ſed a-  
liqua tamen , eaque digna Eruditorum at-  
tentione. Præcipua Virorum cura fuit ,  
ut variationes altitudinum fiant *sensibiliores* ; huic enim o-  
peræ incubuerunt *Cartesius* , *Hoockius* , *Hugenius* , *Amon-*  
*tonius* ,

*tonius, la Hirius, & Io. Bernoullius.* Alterum *Amon-tonii* præ reliquis studium fuit, ut ab effectu gravitatis discerneret, quæ *calori* debentur, & liquorum expansio-ni. Neque exciderunt conatibus viri solertes; præsto sunt varia illorum artificia, alia tamen aliis meliora. Suc-currit & mihi aliquod; videamus, utrum id calculum me-reatur intelligentium?

II. Primo dicam *de alienis.* Refero autem ad duas potissimum classes, quicquid mihi innotuit. *Alii* sola ma-chinæ *forma* variationes reddere sensibiores laborarunt; *alii* adhibitis diversæ gravitatis specificæ *liquoribus.*

III. Si pro Mercurio adhiberetur *aqua*, & tubi fierent triginta tres pedes alti, quales in Collegio Cur. I. C. Sturmii \* videntur: essent variationes utique sensibiliores multo, quam in Barometris esse solent mercuriali-bus simplicibus. Verum quis toleranter feret incom-modum altitudinis? quis aere aquam purgabit, ut nihil eius ad summitem avoleat? & quis in ordinem rediget extensio[n]es aquæ calori debitas? conglaciationem impe-dire aliquando possumus.

IV. Qui cum *Cartesio* tubum ea in parte, qua Mercurius ascendendo & descendendo ludit, ampliorem faciunt, eidemque aquam vel oleum innatare volunt, va-riationes in strictiori tubo indicatura; non facile effugiunt incommoda aeris suprema occupantis, patiunturque tum ab illo aere, tum ab ipso liquore variationes a calore oriundas, observationemque gravitatis turbaturas. Osten-dit utique *Io. Poleni*, \*\* repetitis tubi inversionibus, posse

præ-

\* *P. II. Tent. V. p. 76 seqq.* \*\* *Giornale dei Let-ter. d'Italia, T. 5. p. 300.*

præcipuum aeris, ex aqua evolantis, portionem expelli: an universus ita excludi aer possit, nec dixerim asseverare, nec negavero. Illud certum est, hoc remedium esse magni faciendum, si quis uti Cartesiano velit Barometro: Eo enim adhibito præter caloris influxum vix puto superesse alias difficultates sensibiles: irregularitates nimirum a diversa fluidi supra Mercurium altitudine pendentes facile licet ad regulam revocare, & in ipsa graduum scala simul attendere: ut adeo laudem omnino mereatur illa *Io. Poleni* emendatio.

V. Evitavit priorum aliquot incommoda duplicando tubos *Christianus Hugenius* \*. Admonuit vero *la Hirius* \*\* quæ supersint in Hugeniana constructione imperfectiones. Ipse *la Hirius* eodem duplicationis tuborum artificio, in eum, quem & *Hookius* \*\*\* adhibuerat, modum inflexo, evitavit aut imminuit pleraque superiorum incommoda; mediis ingeniose excogitatis, non tamen ab omni difficultate liberis. Conf. cum ipsius *Viri erudit commentatione allegata Hermannus* quoque in *Phoron.* §. 324. & infra §. 12.

VI. Duplicavit alio quidem consilio tubos *Amonianus*, sed ea ipsa methodo sensibiores fecit variationes quoque, & nonnulla priorum incommoda penitus evitavit. Legimus artificium construendi Barometrum, cuius altitudo

\* *Journal des Savans A. 1672. d. 12. Dec. p. 173.*  
 ed. Bat. \*\* *V. Memoir. de l' Acad. des Sciences A. 1708.*  
*p. 207. 208. edit. Batavæ.* \*\*\* *Philosophical Transactions Abrig'd by Iohn Lowthorp. Vol. 2. p. 10. ex Trans.*  
*n. 185.*

do sit 14 vel 7 tantum pollicum , in ephemeridibus Gal-  
lorum \* , impletoque intermedio tubo duobus, si placet,  
liquoribus possumus variationes multo sensibiores redde-  
re , ac in simplici Barometro . Curavi aliqua fieri ab  
egregio Societatis huius artifice , *Luca de Cossa* ; Neque  
fefellit spem nostram successus : Sed fatendum est , in i-  
psa huius Barometri structura expertos nos esse difficul-  
tates , quas non facile omnes superabunt ; ut adeo non  
mirer , idem , et si curiosum & elegans , repetitumque  
magnis encomiis & peculiari libello ab anonymo Gal-  
lo \*\* , passim tamen non innotescere ; nec describi in  
compendiis vulgaribus .

VII. Ista pertinent ad classem unam . Ex sola  
Barometrorum figura auxilium alii quæsiverunt , & dupli-  
ci quidem methodo ; alteri maiores Mercurio variationes  
inducere studuerunt ; alteri ordinarias observare saltim ac-  
curatius . Illud fecerunt , qui superiorem tubi partem  
*inclinarunt* a perpendiculo ad horizontem . Antiquum  
est artificium , cuius primum inventorem nescio ; Inve-  
nitur autem propositum ab Anonymo in Transact. An-  
glie. n. 236. \*\*\* describiturque passim ab aliis . Quo-  
niam facile est paratu , & augendo inclinationem potest  
reddi subinde sensibilius , itaque commendari meretur .  
Supremam tamen exactitudinem variis intercedentibus  
impedimentis non assequitur . Inter illa sunt frictions vi-  
tri auctæ ; cohæsio Mercurii , quæ diffluxum eius in tubis  
angu-

\* *Journal des Savans. A. 1688. d. 10. Maii.*

\*\* *Vid. omnino Acta Erudit. Lips. ad A. 1711. M. Jul.  
p. 319. 320. \*\*\* Trans. Abrig'd Vol. 2. p. 12.*

angustioribus impedit, in amplioribus irregularem præstat; incommoda caloris per inclinationem sensibili-  
ra &c.

VIII. Optimum in hoc genere sine dubio illud est, quod *Ioh. Bernoullio* debemus, expositum in *Phoronomia Iac. Hermanni* §. 324. Constat superne, ubi variatio-  
nes fiunt altitudinis, vasculo ad libitum ampliore, infer-  
ne tubus incurvatur, ut horizonti parallelus excurrat; vel, quod in praxi commodius est, super plano horizon-  
tali ad arbitrium reflectitur. Monuerunt Academici  
*Parisini*, *Ioh. Dom. Cassinum* ante complures annos talia  
molutum esse, sed neglexisse deinceps hanc methodum,  
quoniam sese aer Mercurio miscuerit in tubo horizontali  
nonnihil ampliore. vid. *Phoron.* l. c. p. 180.

IX. Feci periculum rei, & deprehendi, *illam suc-  
cedere*, quando tubi horizontalis diameter lineam non ex-  
cederet. Metui ab initio frictionum incommoda ob tubi  
angustiam, solitus, ne illæ minores variationes sufflam-  
narent: sed experimento didici, in Barometro *probe* pa-  
rato tanta non esse. Quando enim Barometro antea  
quiescente Mercurii altitudinem visurus *ex la Hirii* præ-  
cepto \* illud paululum percusseram, observavi aut nihil  
aut parum differre loca, in quibus hæreat Mercurius an-  
te & post succussionem. Scala variationum in eo, quod  
primum fieri curavi, est septies maior ordinaria. *Ar-  
tificium* meum *construendi* hæc Barometra, quia plurimum  
differt ab iis, quæ proponuntur ab aliis, *Ioh. Bernoullio*

S s apud

\* *Vid. Memoir. de l' Acad. des Sciences. A. 1712.  
p. 4. edit. Bat.*

apud Hermannum l. c. & Chr. Wolffio in Experimentis Tom. II. §. 33. p. 63. quia simul facile & exactum est, in notis \* dabo.

## X. Ex-

- \* *Affumatur portio tubi amplioris 3. digitos longa, & ex uno latere claudatur hermetice, ex altero mediante lampade affigatur tubo cuidam graciliori longitudinis 28. pollicum. Meum quidem instrumentum ex utraque cylindri amplioris parte habet tubum graciliorem: Superiorem vero non esse necessarium facile intelligas. Tubus ita paratus & inversus impleatur Mercurio usque ad altitudinem unius vel duorum pollicum, cautelis iisdem respectu aeris, quæ vulgo attendi solent. Hoc factō sumatur tubus novus tantaē longitudinis, ut nonnihil supereret spatium, quod pro ratione diametri eius & vasis superioris amplioris percurret in variatione sua Mercurius. Sit autem diameter luminis tubi huius circiter unius linea. Iungatur hic ope lampadis ad tubum priorem, loco, quo is a Mercurio vacuus est. Ex medio tubi amplioris mensuretur media Mercurii altitudo, v. g. 27. pollicum; atque in hac distan-  
tia mediante lampade inflectatur tubus ita, ut pars u-  
na sit ad alteram perpendicularis. Inflexa hæc pars,  
quæ instrumento debite erecto futura est horizontalis,  
ne nimium occupet spatium, aut a linea horizontali fa-  
cile sursum aut deorsum deflectat, in varias iterum in-  
clinari partes potest; quas ope tabulae alicuius planæ  
facile est examinare, &, si quæ a plano deflectant,  
ignis ope reducere. Inverso instrumento Mercurius e  
tubo ampliori descendens implebit non solum id, quod*

X. Exactiores facere observationes , variationum licet in Mercurio aut liquore adhibito non maiorum, studuerunt Rob. Hookius , Hauksbeius , Steph. Gray , & fortasse alii. Illi adhibuerunt pondera , filo circa axem ducto appensa , quorum alterutrum Mercurio incumberet, alterum libere penderet. Axi indiculum affixerunt, qui gradus circuli , vel minores quascunque divisiones in tabula circulari designaret\*. Admonuit vero ipse Hookius \*\* non respondere spei successum, quoniam per saltus indicentur variationes.

S s 2

XI.

*in tubo verticali supererat, sed partem etiam tubi horizontalis , in quo deinceps ultro citroque movebitur. Illud probe notandum, in iungendis atque inflectendis tubis gracilioribus cavendum esse a nodis & angulis acutioribus, ne augeantur frictionum impedimenta, uti in eiusmodi casu factum memini. Ceterum ex datis tubi amplioris, & graciliorum diametris facile est determinare punctum inflexionis tuborum , & longitudinem tubi horizontalis, ut metus nullus sit, ne Mercurius vel extra horizontalem sursum propellatur ab aere graviori, aut ob leviorum extra tubum horizontalem profluat. Cautionis tamen loco sursum reflexi extremitatem tubi horizontalis ad altitudinem unius pollicis , & contra periculum pulveris supremum apicem denuo deorsum converti.*

\* Vid. Hauksbee in *Cursu Experim. Tab. I. Pneumat.* \*\* Vid. *Philosopb. Transactions Abrig'd, by Lowthorp. Vol. 2. p. 10.*

XI. *Grayi* artificium elegans est , & accuratum, si solerti manu fabrefiant machinæ\* ; potest etiam adhiberi , ubicunque observari altitudo Mercurii in aliquo tubo exacte debet : neque aliis premitur incommodis, quam illis , quæ in Barometro simplici occurunt ; eo autem ipso abest a perfectione sensititatis, quæ queritur. Quid si minoribus aeris variationibus non obsequatur Barometrum simplex , uti passim eruditæ consentiunt ? Eo certe in casu destituet spectatores suos machina , alioquin peringeniosa.

XII. Diximus, quæ hactenus eruditæ articia proposuerint, ut, si minus nostra placeant, placeat tamen a liquid ex memoratis. Illud prius admoneri debet, in quo pleraque *omnia* convenient. 1. Omnia hoc habent, ut Mercurii summitas variet ; itaque nisi tubus sit perfecte æquabilis ( quis autem hoc speret ) irregularitates oriuntur a frictione ; &, nisi sit perfecte eiusdem amplitudinis, accedunt aliae ob rationem tubi capillaris : Notum enim est, Mercurium non ascendere ad libellam in tubis paulo angustioribus, idque pro ratione diametrorum. Queritur de hoc incommodo non præter rationem *Iurinius*\*\*. 2. Omnia patiuntur difficultatem a diversitate ascensus & descensus Mercurii, qui eo casu convexam, hoc concavam induit superficiem ; adeoque etsi in lateribus vitri eandem attingat altitudinem , gravitatem Atmosphæræ eandem tamen non indicat. Miror, id nondum esse compositis exprobratum Barometris. 3. Omnium variationes tur-

ban-

\* *Vid. Phil. Trans. Abr. l. c. p. 12. ex Trans. n. 240.* \*\* *Philos. Trans. Abrig'd. by H. Jones Vol. IV. P. 1. p. 435. 436. ex Trans. n. 363.*

bantur a calore & frigore , ob diversas & irregulares li-  
quorum expansiones , atque condensationes . 4. Com-  
posita omnia urgentur difficultate cognoscendi diametros  
tuborum , idque per totam variationis longitudinem . 5.  
Necessaria succusso \* generat oscillationes in compositis  
minimum æque incommodas , quam in ipsis simplicibus .  
Denique 6. difficultates parandi a prioribus omnibus sunt  
pæne inseparabiles .

XIII. Non soleo difficultates imputare aliorum  
inventis , nisi methodus mihi succurrat , qua tolli illas vel  
imminui posse autumo . Ut intelligam , quam prope ad  
veritatem accedam , aut ab ea absim , accipe scopum , &  
structuram novi cuiusdam Barometri , quod non ita pri-  
dem animo succurrit .

### *Scopus et Structura novi Barometri.*

XIV. *Mens est*, habere Barometrum , quod va-  
riationes gravitatis etiam minores indicet ; nihil a tubi in-  
æqualitate incommodi patiatur ; nihil a diversitate ascen-  
sus & descensus Mercurii ; quod expansiones & conden-  
sationes a calore & frigore oriundas discernat ab effectu  
gravitatis ; quod non indigeat mensura diametrorum in  
tubis ; in quo oscillationes minimum impedimenti faciant ;  
quod ab exhalatione , putredine , congelatione &c. nihil  
patiatur ; quod paratu non sit difficile ; quod denique exa-  
men suæ exactitudinis secum vehat .

XV. Pro hoc fine assumatur *Barometrum vulgare*

S § 3

sim-

\* *V. supra §. 9.*

*Tab. 15.*  
*Fig. 3.*

simplex *recurvum*; annotetur in illo locus supremæ altitudinis, idque vel ex observatione, si iam tum per aliquot annos facta est; vel ex mensura actuali altitudinis tubi. Attendatur autem, ut non plus Mercurii sit in tubo & vasculo, quam ut ille in parte recurva attingat *d*, locum tribus minimum lineis inferiorem vasculo *b*, quando ad summam possibilem altitudinem *a* ascendit; Potest autem loco altitudinis *a* assumi quæcunque non nihil maior illa, quam Mercurius ad summum attingit, sic ut altitudo *da* sit maior paulo omni hactenus observata.

*Fig. 4.*

XVI. Affigatur hic tubus *tabulæ æneæ*, ABCD latitudinis non multo maioris quam est ipse tubus. Dividatur illa incipiendo a linea horizontali *c d* in pollices & gradus, ductis scil. lineis ad *c d* parallelis. Excavetur etiam hæc tabula, ut tubus eidem quasi immitti possit, non omnino tamen, sed pro sui dimidio, sic ut tubus ubique stringat divisiones ex utroque sui latere in tabula factas.

XVII. Immergatur tabula cum tubo v. gr. *in aquam*, donec Mercurius attingat locum *a*. & notetur, ad quam profunditatem tubus sub aqua mersus sit. Dico, si fiat: uti gravitas Mercurii ad gravitatem aquæ, ita altitudo aquæ supra lineam *c d* ad profunditatem Mercurii sub linea *a*; hanc quartam proportionalem a tota altitudine *a c* sublatam, relinquere veram *Mercurii altitudinem*, ad quam dato tempore per Atmosphæræ gravitatem suspensus hæret.

XVIII. *Demonstratio* facilis est; elevatur enim Mercurius a pondere Atmosphæræ & aquæ incumbentis: detracta igitur altitudine, que pressioni aquæ debetur, refi-

residuum æquipolleat pressioni aeris. Ne calculis opus sit, dabo facile remedium §. 39.

XIX. Patet autem, hoc Barometrum esse tanto sensibilius simplici, quanto liquor, cui tubus immergitur, est Mercurio levior specificē. Igitur, et si non possit in infinitum augeri sensititas, potest tamen eousque, ut sufficiat scopo observationum.

XX. Potest etiam sine alio medio indagari ipsa liquoris specifica ad Mercurium gravitas; quod si enim attenderis, quanta requiratur submersionis profunditas, donec Mercurius elevetur ad altitudinem unius digiti, ratio gravitatum specificarum erit inversa altitudinum memoratarum.

XXI. Atque ut hoc exacte observari possit, adhibere vitrum licebit convexum, simplex aut duplicatum, cum aut sine filis, affixum tabulæ, sic tamen, ut sursum, deorsumque moveri sibi parallelis possit; ita enim fiet, ut videri exactius possit terminus Mercurii in tubo, & illius cum linea tabulæ adpositæ, ad quam examinatur, congruentia. Atque hic usui esse potest artificium Steph. Grayi, superius §. 11. memoratum. Facilior tamen est simplex alicuius lentis convexæ usus.

XXII. Difficile est, cum tabula mergitur in liquore, impedire omnino oscillationes & Mercurii & ipsius liquoris. Duo tamen hic adminiculo esse possunt. Primo optarem, ut tota hæc tabula suspenderetur in tubo vitro satis longo & nonnihil ampio; ut deinceps ope fili, quod circa axem in supremitate tubi positum circumvolvit, mediante manubrio rotatili & cochlea sine fine, tubus leniter, & sine violenta concussione, posset a-  
que

quæ immersi successive, aut ex eadem attolli. Ita enim fieret, ut oscillationes essent breviores. Secundo, si periculum in mora non est, licebit expectare, dum finitæ sint; finientur autem citius, quam in Barometris vulgaribus simplicibus, ob resistentiam liquoris in altero crure. Si in mora periculum est, attendantur oscillationes duæ pluresve, se invicem insequentes, & pro altitudine vera assumatur medium excursuum. Ita vel nihil vel minimum errabitur, præcipue in æstimatione, & ad Mercurium transferenda altitudine liquoris, e. g. aquæ; fac enim in æstimatione altitudinis aquæ aberrare te integra linea a vero, reductione absoluta hoc ne duodecimam quidem linea partem faciet in æstimatione altitudinis Mercurii.

XXIII. Si cui difficile est, nancisci tubos vitreos, satis & longos & amplos, potest ille *ex quacunque* materia *vas oblongum* parare, idemque in anteriori facie tabulis vitreis claudere, ut observari immersiones tubi Mercurialis valeant. Vasculum, vel tubus amplior superne infundibulo, inferne epistomio instrui potest, ut substituere liquorem unum alteri liceat, cum volupe fuerit. Pars autem liquoris tubulo in *d b* innatans potest siphonis ope extrahi quoties libuerit liquores immutare: Dantur enim siphones, etiam sponte fluentes, quos non ingreditur Mercurius, quibus omnem aquam licet extrahere. Si & hoc difficile est parare vas eiusmodi, potest Barometrum mergi in vase quocunque aqua pleno; & observari submersionis profunditas. Observandum vero isthoc in casu summitatem *a sic* assumendam esse, ne mergi illam in experimento profundius sub aquam continetur.

**XXIV.** Ex dictis autem conficitur, *nullum* hic *incommode* adesse oriundum a tubi inæqualitate, semper enim elevatur Mercurius ad locum præcise eundem; *nullum* a diversitate concavitatis & convexitatis supremæ superficie, in descensu & ascensu Mercurii, semper enim ascendit & superficiem acquirit convexam; *nullum* ab exhalatione liquoris, semper enim adest, quantum sufficit; *nullum* a putredine, potest enim liquor antiquus commutari novo; *nullum* a congelatione, potest enim liquor quicunque assumi, & illius gravitas specifica ad Mercurium explorari; *nullum* a mensura diametrorum, quæ in compositis multum difficultatis parit, non quidem quoad calculos abstractos, sed quoad executionem in praxi.

**XXV.** Fateor enim, *mensuras* actuales sumi circino non posse satis exacte: Si liquoribus ipsis sumantur ita, ut observes, quantum ascensus vel descensus Mercurii, in tubo ampliore per unum pollicem factus, spatii percurere faciat in graciliore; pro toto illo spatio obtinebis exactitudinem, quam supra §. 20. in examine gravitatis liquorum ostendimus; sed pro singulis tuborum partibus idem nondum obtines, nisi supposito, tubos per illud spatium esse æquabiles exacte. Sin per singulas altitudinem Mercurii lineas examinare loca liquoris in tubo graciliore velis, laboriosa & multiplex opera erit, & non semper in potestate posita; neque enim altitudines omnes obtinere pro lubitu possumus, nisi maiores per tubi inclinationem, sed quæ in ampliori vasculo plurimis obnoxia est difficultatibus.

**XXVI.** Supereft *unum*, sed cæteris omnibus *dificilius*, momentum. Quomodo discernuntur effectus

*caloris ab effectibus gravitatis Atmosphæræ?* alii gene-  
rose negligunt hanc difficultatem, & incommoda dissimulant: alii palliant nævum superficiariis excusandi rationibus; *solus*, quem sciam, *Amontonius* ex instituto rem persequitur. Liceat mihi hic esse prolixiori.

XXVII. Quibus Amontoniana Barometrorum *simplicium correctio* placet, \* eandem facile ad nostrum applicare poterunt. Curent, ut linea *c d* incidat in medium vasculi amplioris ad recurvam tubi partem affixi; & habebunt Barometrum *simplex ordinarium*, cui omnia convenient, quæ ordinariis competunt. Neque impedit felicem successum aquæ vel alterius liquoris adhibiti expansio. Ex §. enim 20. semper erui potest relatio eius ad Mercurium præsentem, adeoque præsens eius altitudo vera inveniri, non secus, imo melius & exactius, qnam si illa simplici Barometro investigata esset. Obtenta autem altitudine Mercurii in hac tempestate, per Amontonianam deinde tabulam reduci potest ad altitudinem Mercurii calidioris aut frigidioris, tempore constructionis adhibiti.

XXVIII. Visum est aliquando, rem omnem facilius & brevius sic inveniri posse. Assumatur ex definitione Amontoniana, \*\* Mercurium transeundo a summo frigore ad calorem summum augeri parte  $\frac{1}{15}$  sui voluminis. Patet, illum, si frigidissimus occupet spatium *acd*, calidissimum non posse eodem illo contineri, sed posita eius

Tab. I 5.  
Fig. 3.

\* v. *Memoir. de l' Acad. des Sciences A. 1704. p. 230. edit. Bat.* \*\* v. *Memoir. de l' Acad. des Sciences A. 1704. p. 225.*

eius summitate in *a* ascensurum tribus minimum lineis supra *d*. Posset igitur expansio eius a calore veniens subinde agnosciri per altitudinem *ed* supra *d* assurgentem: eademque ad totum spatium *acde* comparari; idque vel simpliciter pro longitudine horum spatiiorum *ed* & *acde*, si tubulum supponas sensibiliter, & quoad hos respectus æquabilem; vel si hasce etiam minutias respicere velis, operosiori examine. Ita igitur ratio densitatis Mercurii ab uno tempore ad aliud innotesceret: Consequenter præcisa gravitatis Atmosphæræ mensura omni tempore definita foret. Haberentur enim pro omni tempore altitudines Mercurii & densitates.

XXIX. Favet huic methodo sententia *Amontonii*, qui monet,\* se experimento didicisse, quod *tubi Barometrorum ordinarii nullam a frigore constrictiōnem*, aut a calore ampliationem sensibilem patiantur. Hoc enim pharmaco prioribus addito, nihil amplius ad attingendum scopum nostrum desiderari posse video. Solum enim hoc anxios nos habere posset, quod & vitrum a frigore contrahatur, & a calore expandatur, atque adeo incrementum voluminis Mercurii semper maius sit in calore, quam est soliditas cava tubuli *ed* memorata. Optandum itaque foret, ut & altera hæc *Viri egregii* sententia modo indicata, & prior expansionis mensura §. 28. essent exploratæ.

XXX. Fateor autem *invitus*, me nondum omni dubio liberatum esse, per experimenta ll. cc. proposita. Persuasum mihi est per experimenta thermometro-

T t 2 rum,

\* v. *Memoir. de l'Acad.* 1704. p. 373.

trorum , \* quod a calore amplietur cavitas phialæ ; ut id vulgo infertur ex descensu subitaneo fluidi, cum thermometrum aquæ calidæ immergitur. Itaque ratum etiam erit, in experimento Amontoniano \*\* spatiolum illud , per quod Mercurius subsidit , non explorare totam Mercurii contractionem ; constrictus enim & tubus fuit a frigore. Maior itaque est expansio & contractio Mercurii & spiritus vini , quam loco mox memorato definitur. Similiter itaque metuas , ne in experimento altero , quo austera vasis vitrei capacitas inquirebatur , expansio liquoris contenti simul facta eandem exhibuerit iusto minorem. Nolim vero id pertinaciter contendere , quoniam tota experimenti illius ratio descripta non est.

XXXI. Illud facile iudices , cum tanta huius sententiæ Amontonianæ pro meo scopo utilitas esset, me nihil intentatum reliquisse, sed omnino præoptasse, ut eandem, si fieri posset , confirmarem . Neque enim omnis statim spes decollabat. Differunt phialæ pro thermometris adhibitæ a tubis Barometrorum , soliditate laterum , & capacitate interna plurimum. Non igitur impossibilem iudica-

\* v. *Memoir. de l' Acad. A. 1700. p. 153. & A. 1705. p. 101.* cui conf. præcipue *A. 1710. p. 563.* ubi recensetur experimentum prioris conversum. Repetit utramque experimenti classem , occasione dubitationis subortæ circa veram phænomeni caussam : immissoque alternis vicibus coram Societate nostra in aquam fervidam & glaciale thermometro Flrentino , factum comperi ita habere , uti traditur.

\*\* v. *Memoir. A. 1704. p. 225.*

dicabam Amontoniani huius experimenti cum thermometricis conciliationem.

XXXII. Pro hoc autem fine sumsi tubulos aliquot *graciliores*, sed *longiores*, eosdemque inflexi, ut Fig. 7. *Tab. 14.* videtur; eo saltem fine, ut longior tubus in breviori spatio contineretur: extremitatem unam infundibulo *ab instruxi*, alteram diduxi in tubulum capillarem *cd*. Infundibulo sufficientem Mercurii quantitatem simul insidi; ut, cum semel inciperet fluere, nullus se aer immiscere posset. Quoniam cedere aer per tubuli capillaris orificium poterat, momento temporis implebatur tubulus, & effluebat ex tubulo capillari; donec in crure altiore *be* esset ad libellam: Tum vero ope lampadis ob-signabatur hermetice tubus capillaris, sic, ut non plus aeris remaneret, quam ut id acutissimo visu vix agnosci posset. Instrumentum ita paratum *alternis vicibus aquæ fervidæ & glaciali* coram Societate nostra immersi, sed nullum in frigida ascensum subitaneum, aut in fervida descensum Mercurii licuit distinguere. Examinavi vero tubulum, an ullibi bullula aeris aut particula solum eius intercepta sese dilataret in fervida; neque id observare potui. Sicui desit facultas acquirendi sibi aut efficiendi tubulum cum infundibulo; itemque hermetice, & satis caute ob-signandi tubulum capillarem: potest is glutine adhibito satis exacte tubum claudere, postquam eum suetione (quod semper facile, & in tubis amplioribus fere necessarium est) implevit.

XXXIII. Pater igitur, adhiberi methodum posse, quam §. 28. descripsimus, non sine fructu. Non tamen hæc sola est. Suppetit & alia, quam eo fine de-

scribam , ut conferri invicem utraque , & , quænam me-  
lior sit , *ex praxi ipsa* possit definiri. *Duo autem sunt,*  
*quæ hic requiro ; Primo* necessum est , ut dato quocun-  
que tempore queas definire altitudinem Mercurii supra li-  
bellam. Id ope liquoris fieri exacte sic potest.

*Tab. 15.* Merge Barometrum , donec Mercurius  
*Fig. 4.* attingat lineam *a* & nota altitudinem liquoris supra  
lineam *cd* in scala divisionum apposita. §. 17. Si hoc in casu  
Mercurius supra lineam *cd* elevatus est , merge amplius; si  
depressus infra *cd* extrahe tubum , donec Mercurius per-  
fecte respondeat lineæ *cd*. Examina , quid singulæ hæ alti-  
tudines (pro gravitate liquoris specifica , per §. 20. de-  
finita) faciant reductæ ad altitudines Mercurii. Tum ve-  
ro , pro obtainenda vera ad hoc tempus altitudine Mercu-  
rii supra libellam in altero tubo deme in priori casu , in  
posteriori adde altitudinem ultimam ad primam. Ne-  
gligo hic altitudinem liquoris *ed* ut contemptibilem: si no-  
lis , facile est illam simul considerare ; sufficit enim sumi  
illam , cum ad liquorem pertinet , simplici oculorum iu-  
dicio.

*XXXV.* Ita primum obtainemus. *Secundum* po-  
stulat , ut densitatem quoque Mercurii præsentem perno-  
scas. Perge igitur hoc ordine : Si aqua vel liquor ad-  
hibitus quicunque eandem semper densitatem servaret ,  
posset ope §. 20. inquiri densitas Mercurii præsens ad præ-  
teritam. Cum id de nullo adhuc liquore cognitum sit ,  
methodo illa §. 20. hoc solum intelligitur , quæ sit uno-  
quoque tempore Mercurii & liquoris mutua densitas. Pro  
scopo autem præsenti requiritur adhuc aliquid amplius.  
Quodnam illud ? dicis ; nimirum hoc , ut densitas alter-  
utrius

utrius sub diversis temporibus spectati possit invicem con-  
ferri. Ita enim, si densitatem Mercurii calidi possis cum  
densitatate aquæ eiusdem temporis calidæ ; densitatem a-  
quæ calidæ cum densitate frigidæ ; densitatem aquæ frigidæ  
cum Mercurio eiusdem temporis frigido exacte compa-  
rare : poteris quoque densitatem Mercurii uno tempore  
calidi cum densitate eiusdem alio tempore frigidi confer-  
re eadem exactitudine.

XXXVI. Primum & tertium possumus ope §. 20.  
Quæritur adhuc secundum. Atque ita reducitur omnis  
tandem difficultas ad hoc , ut *densitatem aquæ* diversis  
temporibus variam possis invicem *conferre*. Hoc diu &  
a pluribus & diversimode solutum est problema. Placet  
*ex illis hanc feligere methodum*, qua *corpus solidum*, v. g.  
*metallicum*, in utraque aqua solicite ponderatur, & ex a-  
misso pondere iudicatur fluidi densitas. Pondus illud ne  
& ipsum contrahi frigore , & calore expandi obiciias,  
potest assumi in statu medio, quo calorem v. g. manus or-  
dinarium neque multum excedit, neq; ab illo multum deficit.

XXXVII. Atque ita tandem effectum puto , ut  
*problema in se difficillimum*, adhibitis operationibus qui-  
dem pluribus, (tribus scil.) sed facilibus , reduxerim *ad  
problema* ab omnibus facile semper habitum. Postulo  
etiam hac de causa , ut , si *Areometra* dari concedunt *Phy-  
sici* , concedant quoque hanc meam machinam , separa-  
to a gravitate caloris effectu, esse non *Baroscopium* mo-  
do , sed *Barometrum* , quo non discernere solum varia-  
tiones gravitatis in Atmosphæra liceat, sed etiam *metiri*.

XXXVIII. Unicum illud addo , si quis non sum-  
mam quærat exactitudinem, posse illi sufficere dicta §. 28.  
vel

vel etiam , adhibito pro liquore altero , oleo Tartari per deliquium , cuius non magna dicitur esse rarefactio \* , posse negligi operationem §. 35. Error enim a calore oriundus , uti facile calculus docet , præmissa solum operatione §. 20. parum erit sensibilis. Quin imo , si liquor fuerit valde obnoxius expansioni , ut v. g. Spiritus vini , tum etiam neglecta cautela §. 20. adhibita sola operatione §. 34. error a calore & frigore minor erit , quam in Barometris simplicibus. Prout igitur ad maiorem spectator exactitudinem adspirat , ita pluribus cautelis adhibitis ad eandem potest pertingere.

XXXIX. *Quotidianus vero Barometri usus potest etiam hoc artificiolo reddi commodior ; si ex altero latere quidem a linea horizontali cd numerentur lineæ & digitæ incipiendo ab unitate.* Ex altero autem ita , ut adscribantur pollices altitudinis Mercurii ab Atmosphæra suspensi ad ea loca , in quibus aqua supra tubum consistet , atque intermedium spatium deinceps in 12. partes maiores dividatur , quarum singulæ lineis Mercurii respondeant , iterumque in 12. partes divisæ duodecimas linearum indicent. Sufficient hæc , ubi ad calorem attendere non oportet ; cum autem hoc fieri utile est , non gravaberis diligentiam adhibere maiorem , sequendo §§. 33.

34. 35.

XL. Non succurrunt nunc animo difficultates aliae , ad quas in superioribus nondum attenderim , nisi hæc una , an hoc *Barometrum fit etiam portatile?* Est vero , si velis. Non solent obambulare Barometra quotidie ; igitur

\* v. *Memoir. de l' Acad. 1704. p. 369.*

tur Barometrum portatile dicitur , quod data occasione possit ex loco uno in alium deferri sine detimento. Simplicia habentur pro portatilibus, præcipue, si recurva sunt. Extrahe nostrum ex liquore suo , & inverte, habebis Barometrum simplex recurvum. Si metuas , ne aqua, quæ in vasculo ampliori stagnaverat, in alteram tubi partem intret (etsi hic metus præcaveri possit , si tubus sit angustior, & Mercurii ea copia , ut nequeat omnis intrare in crus longius) potes per §. 23. aquam prius extrahere ope siphonis recurvi capillaris.

XLI. Commodius hoc est : relinque tubum Mercurialem cum tabula sua in altero ampliori , si vasculum inferius sit ita amplum , ut Mercurius a succussione latoris oscillans in descensu non effluat , & tubus a vasculo ad inflexionem ita longus , ut , si Mercurius ad summitem ascendat , non tamen recedat ad usque inflexionem tubi. Hoc modo potes *erectum* transportare Barometrum.

XLII. Si *inversum* aut *inclinatum* transferre ideo malis , ne a succussionibus Mercurii ascendentis frangatur tubi summitas ; cura , ut tubus inferne bis inflexus sit , & Mercurius, cum ad summitem ascendit, non ultra crus primum recedat. Fieri hæc omnia facile possunt.

XLIII. Illud pro difficultate non reputo , si quæras , quomodo suspendi debeat tabula, ut *crus* Barometri *longius* sit *perpendiculare* ? Cura , ut linea suspensionis transeat per centrum gravitatis tabulæ & tubi communè illud, quod obtinet cum tabula est ad dimidium sui mersa. Differentias enim illius centri, ob inæqualitatem laterum tubi, pro maiori aut minori eius immersione variantis facile

U u

negli-

negliges sine incommodo. Sin omnem velis scrupulum evitare , affige pendulum tabulæ , atque sic ad parietem firma machinam, ut id designet lineam axi Mercurialis tubuli parallelam ; talem enim antea describes. Atque ista hucusque de structura novi nostri Barometri dicta sunt: quibus unum illud epimetri loco subiungam.

**XLIV.** Si non requiras , ut calorem a gravitate discernat Barometrum , sed tamen vulgari & simplici sensibilius evadat, careatque nonnullis Barometri simplificis defectibus , (vid. §. 12. n. 1. 2.) & structuræ sit non difficilis: potest ita satisfieri petito Tuo. Sint duæ tabulæ ad angulum rectum iunctæ , sic tamen , ut altera maneat fixa , altera circa axem rotari , & rotando radere priorem possit. Tabulæ rotatili affigatur Barometrum simplex , sed ordinario longe maius, superne si placet sphærula instrūtum , sed tubi tamen strictioris. In eo tubo assumatur punctum aliquod v. g. in altitudine quatuor pedum ab inferiore bullula Mercurio plena: in maiore , aut minore, prout Barometrum sensibilius desideratur aut minus sensibile. Tum vero inclinetur tabula mobilis cum affixo sibi Barometro , donec Mercurius attingat punctum memoratum ; & observetur magnitudo anguli comprehensi inter situm tubi inclinatum & horizontem. Si enim hic maior est , Atmosphæræ maior gravitas est pro ratione sinus anguli inclinationis. Non igitur difficile erit , construere scalam super tabula immobili , quæ exhibeat altitudinem Mercurii in mensuris usitatis. Ita novam obtainemus Barometri structuram , quam tamen superiori postponendam esse putamus.

*Uſus*

*Uſus Barometrorum ſensibiliorum.*

**XLV.** Sufficiant illa tandem : Dicamus nunc , *cui uſui?* Facilis subinde quæſtio , nec æque facilis ſemper reſponſio ! Hoc loco attendimus vel ad uſus Barometrorum omnium ſensibiliorum vel ad noſtrum singulariter. Certum eſt , plures de machinis ſolicitos fuiffe , quam de uſibus earum. Igitur non ineptum puto , id problematis loco proponere Eruditis , ut indiſtent , *qnibus* potiſſimum *utilitatibus Physicis* , adhiberi exactior variationum gravitatis cognitio poſſit ?

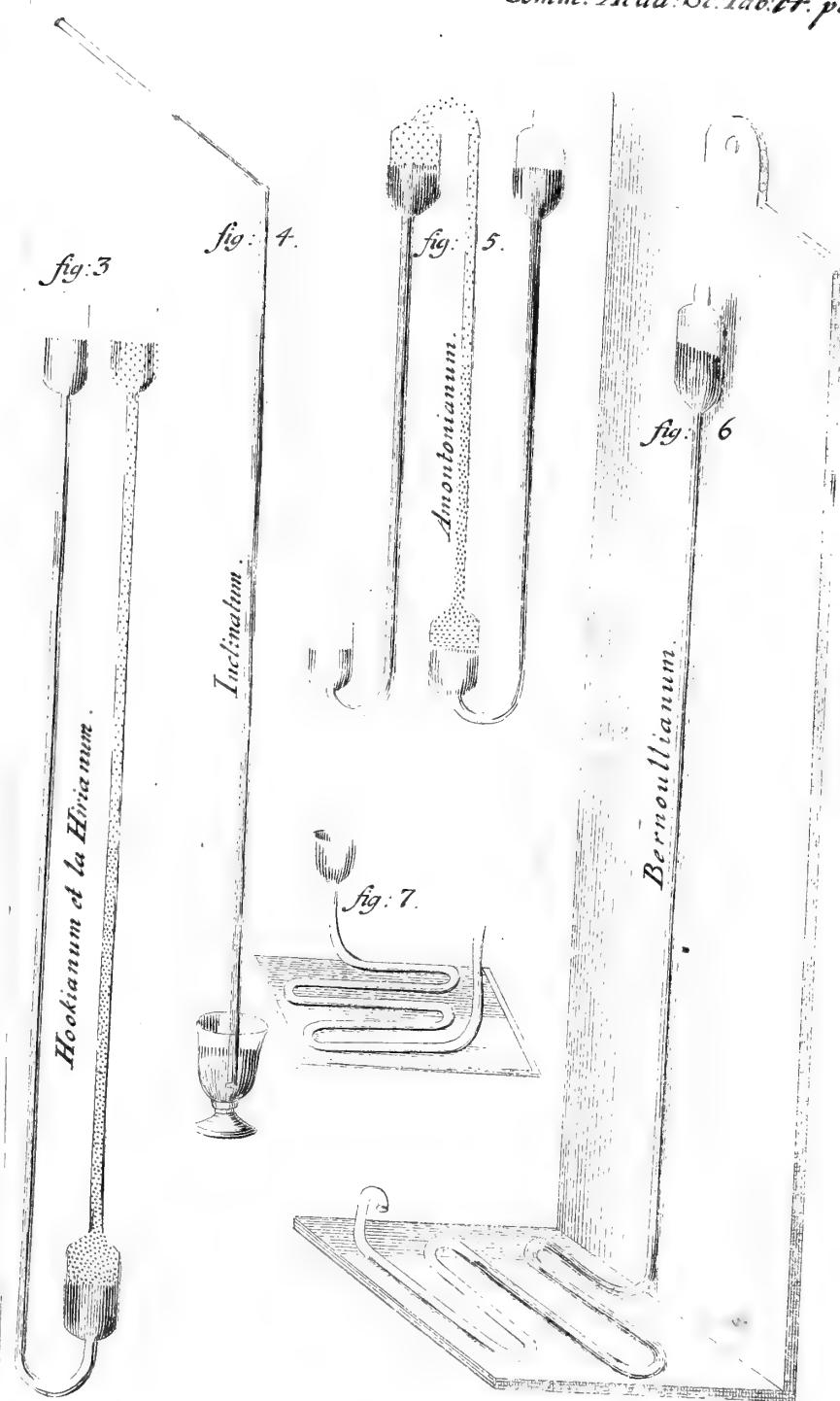
**XLVI.** Mea , ſalviſ melioribus , hæc fere ſententia eſt : etſi Barometra proprie dicant ſolum , non prædicant ; huſ usque tamen ad prædicendas tempeſtates adhiberi præcipue conſueverant. Cum ſæpe fallerent di‐ vinationes , accusari contigit machinas ; non fecus atque ſenſus accusari ſolent , cum præcipitata fallunt de uſibus iudicia. Igitur emendationes quæſitæ ſunt ; atqui non dantur aliæ , niſi ut ſensibiliores fiant mutationes , & ab ir‐ regularitate caloris atque frigoris liberentur. Id quidem bene ſe habet , ſed ad *præcognoscendas* tempeſtates *nihil* confert. Observamus , ne quidem ad illas Mercurii va‐ riationes , quæ in ſimplici Barometro facile diſcernun‐ tur , conſequi ſemper ſensibiles tempeſtatum diſferentias ; igitur neque ex minoribus adhuc variationibus prædici illæ probabiliter poſſunt. Ad hunc igitur finem imme‐ diate nondum adhiberi poſſe Barometra illa ſensibilia exiſtimo .

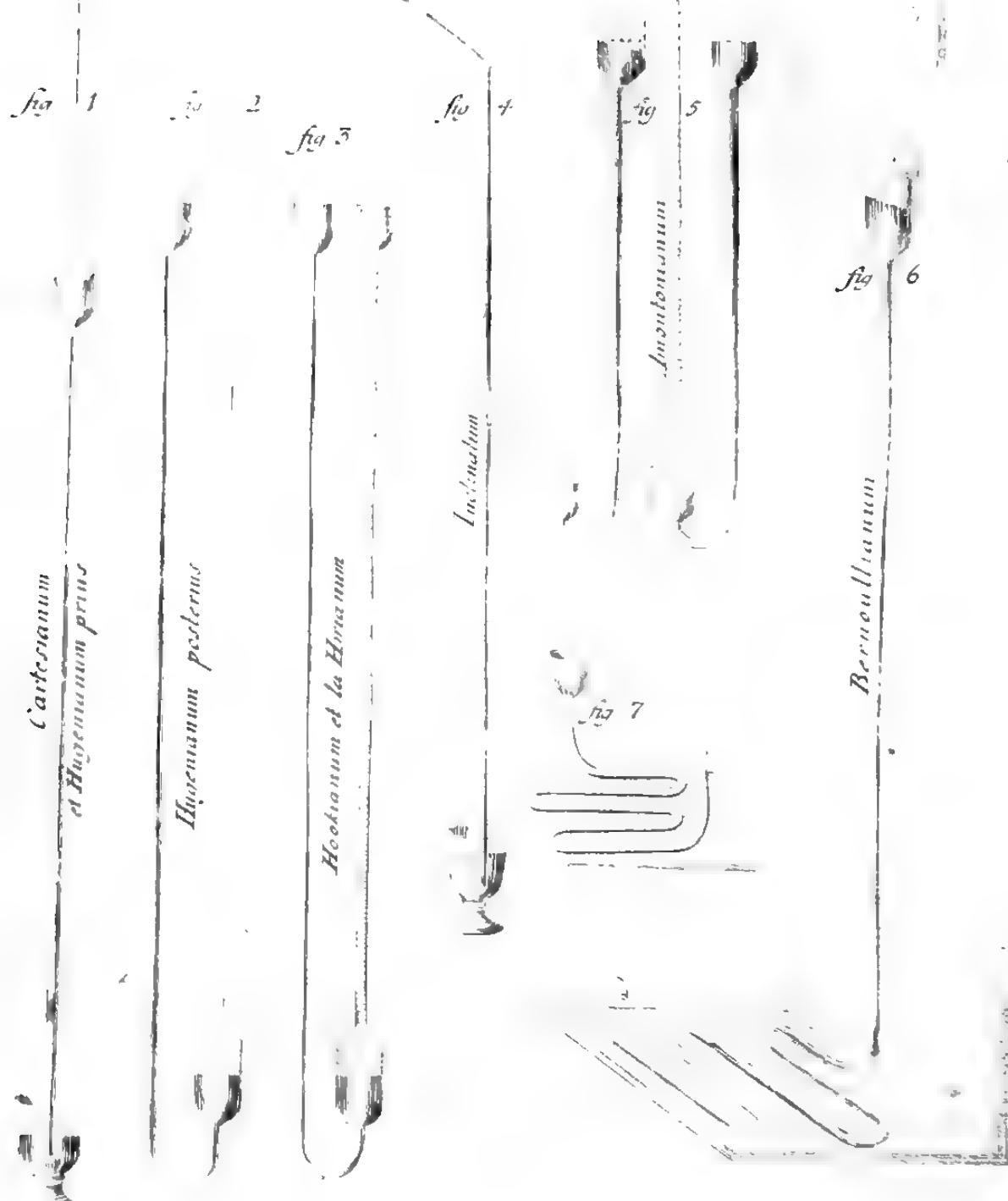
**XLVII.** Fortaffis tamen id *mediate* fieri aliquan‐ do poſſet , ſi quis detegeret artificium **ex variatione**

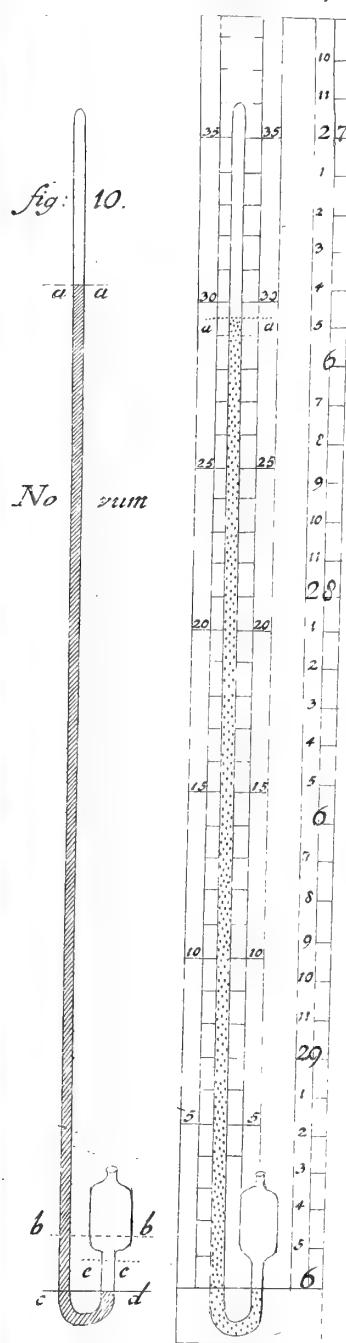
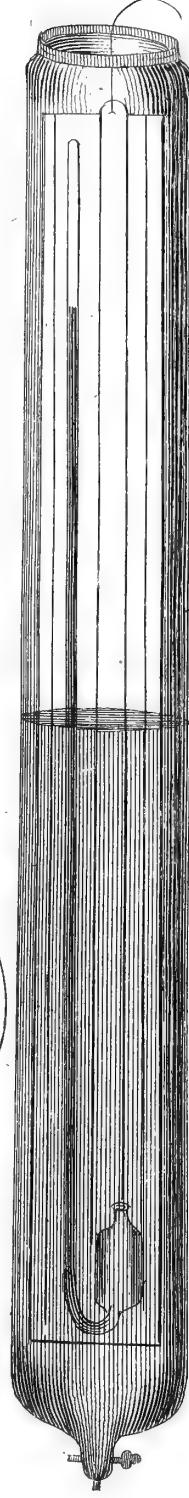
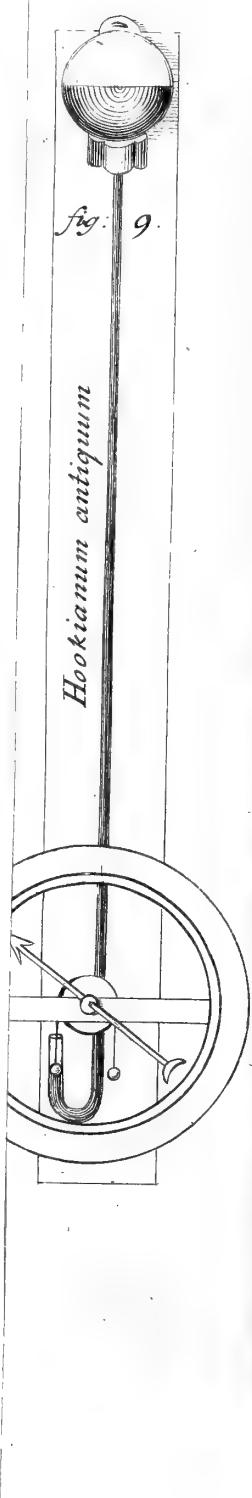
gravitatis eruendi *ventorum successiones*, ab hisce enim plurima pendet tempestatum varietas. Sed vero ventorum ortus & effectus mage sunt compositi, quam ut ex sola Atmosphæræ gravitate hauriri earum cognitio possit. Dubium etiam est, an ex cognito per complura instrumenta, reliquas aeris proprietates indicantia, statu Atmosphæræ nostro, probabilis de vento aut statu Atmosphæræ futuro coniectura fieri possit?

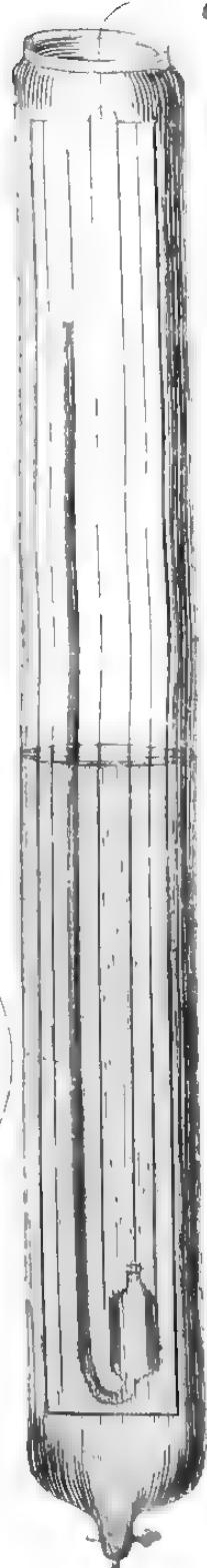
XLVII. Hactenus igitur illum placet usum assignare, ut ope sensibilioris Barometri accuratior *scala variationis* pro maiori minorive *montis*, & *metalli fodinae* altitudine & profunditate habeatur, eo consilio, ut inquiratur, an fortasse assumptis hisce differentiis, observatione cognitis, tanquam elementis alicuius loci geometrici possit regula aliqua inveniri pro altitudinibus quoque maioribus, quam per experimenta possunt indagari? Pro hoc fine necessariæ sunt observationes eorum, quibus non debet *commoditas locorum*, iuga montium & fodinarum profunda. Curandum vero; ut altitudines & profunditates illæ explorentur mensura actuali per partes, non calculo ex angulis (præter unam stationem mensuratam) solis factō: Videlum quoque, ne in circulum incidamus vitiosum. Cum enim ob fallacias visus in iudicandis altitudinibus, oriundas ex radiorum refractionibus, aliquando Barometra ad metiendas montium altitudines adhibeantur, manifestum est, altitudines hoc modo cognitas nostro scopo minime conducere.

XLVIII. Posset etiam *suspicio* moveri, annon radii luminis per Atmosphærām transeuntes maiorem minoremve refractionem patiantur, sub diverso gravitatis statu?









statu? Gravior enim est aer, vel ob auctam altitudinem  
vel densitatem; utraque variat refractionum quantitates,  
altera ob refracti radii longiorem viam, altera ob  
maiorem refractionis angulum. Quæritur itaque: an  
illa, si quæ est, refractionis variatio a diversa Atmo-  
sphæræ gravitate veniens, observationibus & experimen-  
tis solicite institutis sit sensibilis? & alicuius in *Astronomia*  
momenti?

XLIX. Ad cognoscendam naturæ consuetudinem in transitu ab uno gradu gravitatis ad alium; ad observandas varietates gravitatis a vento pendentes; quin etiam a nube una vel pluribus ad horizontem vel verticem positis, usurpari utiliter & cum fructu posset novi generis Baroscopium *Caswellianum*, \* cæteris omnibus sensibilius & præstantius, si in illo liceret caloris atque frigoris effectus vel evitare, vel discernere. Id igitur si quis possit, rem præstiterit omni laude dignissimam.

L. De nostra Barometri correctione illud speciatim dicere licet, posse illud inservire pro cognoscendis eodem tempore diversorum liquorum gravitatibus specificis; pro indaganda veritate sententiæ Amontonianæ §. 29. memoratae; pro definienda contractionis tuborum, si quæ est, mensura, ut, quamnam illa proportionem sequatur, intelligas &c. de quibus, si quid utile cognovero, suo tempore dicendi locus non deerit.

U u 3

CATO-

\* v. *Transact. Abrig'd by Henry Jones Vol. IV. P. II. p. 6. - 10. ex Trans. n. 290.* Prolixior structura & demonstratio est, quam ut hic describi possit. Itaque unum hoc agimus, ut eandem attentioni Lectorum de meliori commendemus.

CATOPARDI  
PHOCAE & ELEPHANTI\*  
CISTERNA & CANALIS THORACICVS  
*primum detectus*  
a Io. Georgio Du Verno.

M. Sept.  
1726.



Anis, equus, lupus, leo, lynx, felis odorata & non odorata, cuniculus, porcus, erinaceus, vitulus adeoque undecim solummodo animantium genera eo cum successu incisa sunt, ut viarum chyliferarum conspectus in iis aliquando oblatus sit. Ex hisce vero non omnes, sed paucae solummodo delineatae; aliæ neglectæ uti ex historia animalium abunde patet. Propterea differentiae viarum chyliferarum in variis animantium speciebus notitiam perexiguam nos tenere fatendum est. Nemo interea scire potest, in quibusnam speciebus canalis thoracicus latus dextrum potius quam sinistrum vel utrumque simul occupet? Num eius insertio contraria sit? Num chylus alia via quam per thoracem in sanguinem perveniat, & quæ forte aliæ sunt innumeræ proprietates circa huncce chyli transitum observandæ oculove minus indifferenti considerandæ. Itaque quum in Elephanto chylus haud diversa ratione quam in pennatorum genere sine ope ductus thoracici ad massam sanguineam contendit; quum in Phoca canalis thoracicus sub forma arcus offertur; quum denique singularem in Catopardo huius con-

\* Anno 1727. demum instituta fuit Anatome Elephanti, cuius ductus thoracicus aptiorcm hic locum obtinere visus est.

conformationem deprehendimus: magna sane suspicio est, in cæteris quoque animantibus magnum circa vias chyliferas discrimen a conditore animantium constitutum esse.

Quælibet animantia, quæ tantum non subtilitate sua visus aciem effugiunt, quounque morbo ac tempore defuncta ad hancce disquisitionem adhibere licet, sicuti tribus hisce exemplis comprobavimus.

Prima dissectio fuit cuiusdam feræ in vivario SVAE IMP. MAI. defunctæ, a Parisiensibus *Chatpard.* vocatæ; vid. *Mémoires pour servir à l'histoire des Animaux.* Raio *Catus pardus* seu *Catus montanus Americanor.* *Synops. animal. quadrup.* pag. 169. In hacce dissectione præter vias chyliferas quædam sponte oblata sunt, quæ ad perficiendam magis ornandamve huius quadrupedis historiam, adeoque pro supplemento ad laudatam Parisiensium descriptionem conferre visa sunt.

Effigiem felinam aut lynceam, caput rotundum, rostrum breve, auriculas felinas, duos prælongos dentes caninos in utraque mandibula, sex incisores qui in superiore maxilla crassiores sunt, totidem molares in inferiore & octo in superiore, quorum duo utrinque positi vix apparent, digitos denique in singulis pedibus quaternos unguibus cinereo aduncis instructos obtinet, magnitudine lyncem aut vulpeculam æquans. Quem mensi sunt Parisenses, uno pollice altitudinis & dimidio pede longitudinis nostro cedit. Cauda felinæ similis est, cum unius pedis longitudo & trium pollicum peripheria. Pellis maculosa est & tricolor ex pilis flavescentibus nigris & albis, non asperis neque longis, picturam mixturamve macularum admirabilem efficientibus. Dorsi maculæ nigrae & flavescentes,

tes, ad ventris latera albæ & flavæ, in ventre partim flavæ & nigrescentes, quales etiam in pedibus conspicuae sunt. Figura macularum veluti in Tigride oblonga seu virgata, quo charactere hæc fera æque ac Tigris a Pantheris differt. In medio dorsi macula una præ aliis notabilior est instar fasciæ in longum protensa, quædam minus longæ sunt uti in ventris lateribus aliæ minores & breviores, figuræ ovalis, maculis prioribus inclusæ, quatuor in cervice, quarum duæ mediæ serpentum instar flexuosa prope occiput ad invicem inclinatæ mox in duo cornua figuræ V terminantur duæ aliæ exteriæ pariter flexuosa, posterius ad radicem auricularum terminantur: eo loco quo desinunt, duæ tenues fasciolæ inter duas auriculas usqué ad palpebræ superioris medium protenduntur relicto vacuo seu area in vertice plurimis punctis nigricantibus seu maculis conspersa. Prope angulum oculi exteriorem, duæ utrinque fasciæ incipiunt, per medium genæ oblique sub auribus descendentes invicemque coeuntes. Cauda maculosa ex annulis imperfectis exteriore seu superiore parte flavis nigrisve, inferiore vero canis nigrisve pilis ornata. Denique notandum est, non solum mystaci sed etiam superciliis genisve infixas esse setas partim albas partim nigras easque valde rigidas, pellemque fortem exspirare odorem.

Non licuit in nostro similem imperfectionem seu defectum deprehendere, qui in Catopardo Parisiensibus secto conspicuus erat, quique variis præbuit ansam ratiociniis puta utriusque testiculi & vasorum præparantium deferentiumve defectum absque ullo apparente castrationis signo

gno. Excepto thymo, qui in utroque deficere visus est, nec non vesiculis spermaticis glandulisque sublingualibus, omnium partium apparatu bene instructus erat. Præter penem vagina sua inclusum sed admodum gracilem, testiculos duos bursa continebat avellanam æquantes, una cum parastatis, ductibus deferentibus in prostatæ corpus desinentibus arteriisq; & venis spermaticis, quæ propter suam exilitatem ægre inveniri possunt. Quod reliquas partes attinet, nimirum ossa, musculos, caput, pectus cum inclusis visceribus, ea fere eadem sunt cum iis, quæ partim in laudata descriptione, partim in descriptionibus hyænæ odoriferæ seu cati zybethici \* iam tradita sunt. De exquisito huius animalis odoratu suspicionem facit, ampla turbinatorum ossium ossisque cribrosi superficies, item sinuum frontalium numerus auctus. De acie visus, punctum nigricans in fundo choroidis, quod in lynce pariter observatum est, nec non undecim musculi oculum moventes, una cum magnitudine glandulæ lachrymalis. De voracitate & cita dissolutione ciborum testantur dentes, lingua valde aspera & quasi spinosa, aculeis versus gulam inclinatis, glandula magna salivalis musculo oculi deprimenti adeoque orbitæ adhærens, cum ductu excretorio iuxta ultimum dentem molarem hiante, item duæ aliæ glandulæ conglomeratæ in cœlo palati conspicuæ, quæ glandularum sublingualium officio defunguntur, ventriculi pinguedo, crassities nec non foramina varia magnitudinis, quorum nonnulla granum hordei facile, alia vix setam admittunt, qualia in

X x prin-

\* item Leonis, cuius dissecatio bis sub prælo sudantibus administratur.

principio duodeni simul conspeximus. Denique pancreatis amplitudo hepatisque seu potius vasorum biliariorum singularis fabrica silentio minus prætermittenda est: Nam præter superficiem hepatis plurimis punctis seu maculis albicantibus respersam, id notatu dignum visum est, quod singuli ductus hepatici in unum ductum haud confluunt, sed distinctis orificiis ductui cystico inosculantur, specie ductuum hepatico-cysticorum. Ductus pancreatici & cholidochi ingressus communis in duodeni cavitatem quatuor digitis infra pylorum, in quo loco tunica intestini in tumorem oblongo-rotundum elevata est, sub qua species receptaculi in conspectum venit, in quo bilis & succus pancreaticus invicem permisceri videntur, antequam in cavum intestini effluent. Vesicula ipsa biliaria sic conformata est, ut duobus segmentis horizontalibus, certa distantia remotis ac in medio foramine pertusis, in duas veluti cameras distincta sit. Postremo Lienis 8. transversos digitos longi situs admodum curiosus visus est: Nam in medio ventris sub umbilico quasi fluctuat, sicuti omento ablato, quo instar panni omnia intestina obvolvuntur, luculenter conspeximus.

*Tab. 11.  
Fig. 2.*

Hisce præmissis Pecquetiani receptaculi & canalis thoracici, prout in hac rarissima fera hæ viæ nobis oblatæ sunt, descriptio accurata suppeditanda est. Tum vasa lymphatica ex imo ventre utrinque ascendentia *aa*, tum tria 4<sup>ve</sup> vasa lactea mesenterii *bb* in fasciculum collecta, ex A sellii pancreate sub arteria mesenterii superiore incedentia, primo in conspectum veniunt iisque cisterna continuata est. Cisterna ipsa c vesicula simplex, parva, oblonga, transparens, digiti minimi apicem vix admittens, cuius situs

situs ordinarius est , factoque 9. linearum itinere ductus thoracici formam assumens : Pulchrior ac ornatior tum fabrica tum situ tum insertione minus ordinaria canalis thoracicus *ddd* visus est. Triquetram laternam referens ex tribus tubulis in medio distantibus ac denuo infra & supra coeuntibus constat, hæcque conformatio tribus in locis *eee* perspicue appareat. Duo hinc efformantur canales *ff* diversæ capacitatis distantia aliquot linearum separati, qui non super dorsi spinam iuxta venam sine pari, sed iuxta latus sinistrum aortæ super radices costarum usque ad cordis basin incedunt. Eodem tempore arteriæ intercostales modo sub illis modo super illos decurrere obseruantur. Porro duo prædicti canales tandem coeunt, sique unus efficitur ductus straminis crassitie, prope arcum aortæ incipiens, & iugulum versus sub carotide sinistra ad venam iugularem contendens g. Evidem quum in animantibus hactenus notis canalis thoracicus haud supra altitudinem vasorum axillarium aut subclaviorum ascendet , Catopardo paucisque aliis id proprium est ut ultra memorata vasa subclavia notabiliter excurrat, (huicce vero animantium generi claviculæ concessæ sunt) maioremque adeo longitudinem acquirat , quippe ad medium fere cervicis perveniens, facta levi inclinatione in venam iugularem internam sinistram desinit.

## Phoca.

Phoca incola est Maris Balthici & Newæ fluminis isque in omnibus piscinis Petropolitanis ad curiositatem alligatus venalis prostet. Exemplo itaque Eruditorum ma-

Tab. II.  
Fig. 3.

ris Balthici Academiæque Parisinæ in hac quoque urbe Imperiali vitulus marinus nuper dissectus est. Instituti autem ratio postulat, ut de viis chyliferis a nobis primum detectis solummodo idque quam brevissime agamus, quumque primum amphibium sit in quo receptaculi ductusque *Pecqueti* demonstratio facta est, nihil obstat re videtur, quo minus in aliis huius speciei animantibus tam minoribus quam maioribus, uti sunt equus marinus, rana, lutra, castor &c. easdem vias existere dicamus.

1. Observari meretur inferiorum partium lymphatica ad cisternam contendentia vix ultra pelvim ascendere, quia situs cisternæ talis est, ut proxime ad pelvis confinia ortum suum habeat. 2. Cisterna a omni artificio vacua est, ampullam valde amplam oblongamve simulque pellucidam seu hydatiformem referens. 3. Non dispar habitudo canalis huic continuati *bbb*, siquidem magna simplicitate, unaque bifurcatione in principio, altera prope extremitatem, cum duplo ramo ad venam axillarem contendente praeditus est. Eius porro notabilis amplitudo excedens proportionem corporis; Arcus denique quem efformat, cuiusmodi exemplum antea nunquam visum est, singulari attentione digna sunt.

### Elephantus.

Inter omnia Animantia terrestria Elephantus ob summum eius pretium molemque corporis maximam cultro anatomico dignissimum aptissimumque censendum est. Quis vero non putet sibi facile esse, absque cognitione inventorum *A sellii* & *Pecqueti*, clausis fere oculis, vias chyliferas in tam vasto corpore invenire? nisi dissectiones trium

trium quatuorve Elephantorum a *Pecqueti* temporibus institutæ contrarium edocerent. Causa nulla alia esse potest quam i. quia ad canalis thoracici præparationem necessaria est talis resolutio, ut Prosector non manibus sollempmodo, sed pedibus & toto suo corpore intra ipsum corpus Elephanti sese demittat in eoque ceu carcere aut ventre balænæ per aliquot horarum spatium perduret. Atqui sub talibus conditionibus vias chyliferas videre nemo cupit. Altera causa est quod Prosectores Elephantorum, eos viis prædictis penitus destitutos esse fortassis credant; Evidenter aliquam rationem seu fundatum huicce opinioni inesse fatendum est: Nam distinguere inter vias *Asellianas* & *Pecquetianas* omnino necesse nobis videtur: Etsi incredibile & conceptu arduum sit Animantia dari ductum habentia thoracicum sed vasis lacteis destituta, id tamen certo certissime affirmare possumus quacunque arte diligentia & præparatione adhibita, ea per integrum oculiduum frustra quæsita fuisse. Si quis de nostra diligentia potius quam de naturæ defectu dubitet obiiciens, vasæ lactea non tam defuisse quam latuisse, is consideret nihil fuisse quod eorum conspectum difficilem nobis reddere posset: Non earum parvitas, siquidem in Cuniculis & Erinaceis Elephanto milles magnitudine inferioribus ea conspicua sunt: Non pinguedo neque concidentia: Talia enim obstacula non amplius hodie curamus. Verum enimvero, ut minor hallucinationis suspicio supersit, illud etiam probe attendendum est, in toto mesenterio quod admodum amplum & vastum erat, non solum vasæ lactea sed etiam glandu-

las mesaraicas, lacteorum perpetuas in aliis animantibus comites ita defuisse, ut ne vestigium earum appareret.

*Tab. 11.*

*Fig. 4.*

Unius hac vice canalis thoracici eique appensorum lymphæ ductuum carotidem hominis fere æquantum existentiam certo statuere possumus: Nam quod receptaculum attinet, ambiguum est quid proprie hocce nomine appellari debeat, siquidem eo in loco ubi ordinario cisterna adesse solet, nihil præter quatuor canales *aaaa* ductui thoracico appensos invenire & observare licet. Prædictis ductibus canalis thoracicus *bbbb* simplex sed magnitudine sua Elephanto respondens continuatus est. Is ductu simplici absque divisione & bifurcationibus magnamque rectitudinem observans, super spinam dorsalem vena sine pari & aorta stipatus incedit. Postquam ad 3. dorsi vertebram pervenit, notabilem dilatationem *c* duos pollices longam in eo observavimus, cuius causa proinde seu naturalis sit sive præternaturalis incerta est. Canalis porro in eo loco paulisper a spina dorsi recedens obliquo incessu summum thoracis iugulumve petit, tandemque in latere colli sinistro duos in ramos *dd* breves dispescitur, qui ad venæ iugularis cum axillari confluxum desinere visi sunt. Tractus itaque seu longitudo canalis thoracici fere 4. ped. diameter 4. lin. æquat. Postremo haud prætermittendum est in toto eius tractu nullas nobis valvulas oblatas fuisse, etsi amplitudo canalis tanta fuerit, ut digitum minorem facile admitteret. Vice versa substantia ductus post detractam pinguedinem eam crassitatem obtinebat, quæ ordinario in vena iugulari hominis observari solet.

## DE LVCE BOREALI.

*Autore*

Fr. Chr. Maiero.

## I.



Um in borealibus nostris oris apparitio lucis huius tam frequens sit, ut & vulgus eam non admiretur amplius, facile mihi fuit intra breve temporis spatium magnum observationum numerum colligere. Has in praesenti scripto communico, una cum meditationibus meis de origine lucis borealis, quas , cum novae sint, publico intelligentium iudicio exponere decrevi, ut sic, quantum eae valeant , ex aliis cognoscam.

M. Oct.  
1726.

II. Propositum mihi est rem ita pertractare, ut primo succinctam phænomenorum omnium descriptionem adornem, ex observationibus meis hactenus habitis collectam. Deinde, ut conclusiones aliquot inde deducam, quarum ope, adhibitis in subsidium propositionibus ex scientia physica petitis, in arcana huius lucis penetrare annitar.

III. Ob duplarem lucis borealis apparentiam duæ eius species constitui possunt. Prima vulgaris est & in his terris crebrior , sub arcus forma septentrionem occupat, radios sive virgas lucidas ad verticem mittit, & hinc quieta splendet. Altera quæ rarior est, cœlum versus omnes plagas occupat, in partes dissipata est, quibus brevissimæ aut nullæ ut plurimum adhærent virgæ , splendor

dor eius ut plurimum undulare aut tremulare putatur. **E**x dicendis postea palam fiet, has duas species reipsa non differre, soloque situ duplicem hanc apparentiam effici.

**IV.** Primæ speciei phænomena sequentia sunt:

1. Arcus lucidus versus boream ita disponitur, ut eius cavitas horizontem spectet, convexitas verticem.

2. Altissima arcus pars boream ad sensum semper exacte tenet.

3. Ut plurimum crura horizontem attingunt.

4. Quo altior est arcus, eo amplius expanduntur crura.

5. Altitudinem arcus nunquam ultra 40.gr. observavi, nec amplitudinem crurum ultra semicirculum.

6. Quo depressior est arcus, eo concinnior & regularior est eius rotunditas; ut plurimum quo altior est, eo magis vitiari solet ab intercedentibus fissuris, hiaticis, protuberantiis, flexuris, &c. Interdum, altitudo nil mutata, inconcinnus arcus sensim in ordinem componitur, & vicissim.

7. Accidit saepè, ut novi arcus generentur, qui priori aut altiores aut humiliores esse solent, semper tamen priori coalescunt; quo ipso fit, ut humilior aut altior evadere videatur.

8. Altior tamen & humilior quandoque fit sine novis accendentibus arcubus observabilibus.

9. Spatium intra arcum & horizontem conclusum semper est tenebricosum; stellarum tamen radios clarissime transmittit, nisi nubibus oppleatur atris.

10. Interior arcus margo obscurus est plerumque, exterior lucidus; confinium vero lucis & obscuritate-

ritatis distinguere non licet, quia una alteri sensim confunditur.

11. Virgæ, vel & interdum latores tractus lucidi in longum exorrecti, exteriori arcus margini insistunt, & paulo debilius lucent quam ipse arcus. Accidit autem sæpiissime, ut ea arcus pars ex qua virgæ exeunt magis luceat quam reliquæ.

12. Omnes recta ad verticem tendunt, quem attingunt sæpe, imo traiicere quandoque videntur.

13. Eiusdem pene latitudinis est unaquæque virgæ tam in fine quam in principio.

14. Aequabilis fere splendoris virga est quælibet; nisi quod prope arcum lucidior interdum videri solet quam prope verticem.

15. Duratio unius virgæ brevis & incerta est; decem circiter minutorum secundorum esse solet ordinaria.

16. Ortus earum & interitus ut plurimum subitanus est. Quandoque tamen apud arcum prius apparent quam in vertice, quandoque hic ordo inversus est: sic etiam mox hoc illove ordine intereunt.

17. Interdum, sed raro, integræ non sunt, & in frusta quasi dissectaæ videntur.

18. Moventur plerumque, aut versus ortum, aut versus occasum; mox tardius, mox celerius; interdum una celerior est altera, ita ut seâ mutuo affequantur, vel cursu antevertant. Interea vero nec virgarum rectitudo nec directio ad verticem mutatur.

19. Raræ interdum adsunt aut nullæ, lucido licet  
Y y arcu

arcu existente ; Interdum tam copioſe adsunt, ut arcus pectinis instar appareat.

20. Sæpe accidit ut multæ simul orientur, & evanescent iterum simul.

21. Stellæ ubique transparent , excepto obſcuro arcus margine interiore , qui stellas tegit, si adest.

22. Sæpe accidit, ut nubes aliquæ appareant, quæ altiores sunt quam quas lux borea sub ſe reliquit. Quod quidem ex diversis coloribus & motibus manifestum fit; impossibile enim eſt ut nubes in eodem cœli loco viſe diversimode ferantur & illuminentur , niſi ratione altitudinis a terra multum differant.

V. Secundæ speciei phænomena ſequentia ſunt :

1. Primo aspectu cœlum flammis conflagrare videtur , Lux tremula & corruſcans appetet , eo fere modo , quo in acervo prunarum cudentium lux tremula vagari ſolet : Hæc vero corruſatio interdum magis, interdum minus, interdum vix ſenſibilis eſt.

2. Attentione adhibita diligentiori, lucidas nubeculas hinc inde diſpersas notare liſet. Interdum facilis eſt hæc observatio , interdum diſſicilis ; prout ſc. nubeculæ aut ſpiſſæ ſunt aut ſubtiles ; item prout vel tarde, vel cito deflagrant.

3. Cum aliquando nubeculam talem in ipſo vertice hærentem contemplarer, eaque mox accenderetur, mox extingueretur iterum , observavi , eam ſubinde obſcuriorem evadere , ſenſimque nubem nigricantem ſub ſe relinquere, qua obtegebatur tandem.

4. Idem poſtea in aliis nubeculis animadverti, deprehendi autem, quod interea, dum accenduntur & extin-

tinguuntur, locum & figuram suam aut parum aut nihil mutant.

5. Dum ascenduntur, tamdiu fere accensæ manere solent ac virgæ prioris speciei durant (§. 4. n. 15.)

6. Nubeculæ quæ a vertice remotæ sunt proiiciunt interdum virgas lucidas, sed breves & graciles: eo breviores quidem quo propiores sunt vertici.

7. Ex relatione aliorum habeo, quod luculis talibus fulgura quandoque interspergantur cœrulea.

8. Hanc lucis borealis speciem raro observavi solam, socia fere semper adfuit prima species prius reconsita; una alteram aut præcedit aut sequitur.

9. Lux nubecularum harum tanta est nunquam quanta arcus esse solet. (§. 4. n. 1.)

10. Lux hæc versus horizontem sæpe saturior est quam in vertice, ita ut interdum horizon undiquaque splendeat, eo fere modo ut arcus boreus ipse. (§. 4.)

## VI. Utrique speciei communia phænomena sunt sequentia.

1. Apparere solet utraque species ab æquinoctio autumnali ad æquin. vernale. Æstate enim vidi nunquam.

2. Ut plurimum luci succedere solent nubes ab initio squammatim dispositæ, postea augmentur & coacervantur sensim sensimque.

3. Utraque species sereno aut semisereno cœlo plerumque apparere amat; animadverti eam tamen quandoque per densas, & cœlum ubique tegentes nubes hinc inde dehiscentes.

4. Utriusque lucis splendor est pallidus, aut subalbidus.

5. Utraquæ lux levi vento interdum versus aliquam mundi plagam ferri solet, quæ tamen semper contraria est plagæ versus quam ventus in inferiore aeris regione spirat. Nullam huic phænomeno contrarium exemplum expertus sum hucusque.

6. Non raro animadverti tepidam tempestatem antecedere solere aut & comitari, gelidam sequi.

7. Si accidat ut continuis aliquot noctibus apparet, (quod sæpe fit) sequentes luces subinde fiunt debiliores, ut tandem vix conspicuæ sint.

8. Duratio utriusque lucis variabilis est valde, sæpe pernoctes sunt, sæpe & paucarum horarum, prout nempe aer quiescit, aut agitatur.

VII. Ex consideratione enarratorum phænomenorum concludo, quod hæ duæ species non nisi apparenter differant. *Communes enim utrinque sunt proprietates plurimæ (§. 6.) & quæ cilibet peculiares esse putantur, ex sola situ diversitate postmodum explicabo, quæ quidem diversitas ipsa observatur (§. 3. §. 4. n. I. 2. 3. §. 5. n. I.)*

VIII. De virgis lucidis dico, quod generentur reflexione radiorum emissorum a materia lucida, quæ ibi non existit, ubi virgas videmus. *Quicquid videmus, id radius videmus aut directis, aut refractis, aut reflexis: Si virgæ viderentur radiis directis, necesse foret, ut materia earum lucida in longum extensa I°. existeret in planis cuivis observatori verticalibus (ob §. 4. n. 12), hæc autem plana in aliis locis spectantium inclinata sunt ad horizontem, sequeretur ergo quod materia ubique in verticalibus simul simul*

simul etiam in planis inclinatis hæreat; quod impossibile est.  
 2° Necesse foret ut materia hæc, in partibus a spectatore remotis, esset latior, & in propinquis proportionaliter gracilior, alias enim non possent apparere ubique æquatae; (§. 4. n. 13.) at qui pro diversis spectatoribus deberet hæc latitudinis varietas eodem tempore varia esse, (quod ex regulis opticis constat) & materia disponeretur pro situ locorum, quos spectatores diversi occupant; hoc vero impossibile est, ergo & visio directa virgarum impossibilis est. Si loco diversorum spectatorum assumas aliquot phænomena ab eodem spectatore diversis temporibus observata, idem concludendum erit; nam nulla ratio est, cur omnes ignes eidem spectatori in directione constanti semper disponantur? Si visio refracta foret, deberet ultra vaporum refrangentium regionem materia lucida existere quæ mox accenditur mox extinguitur (§. 5. n. 3. & 4.) quæ ventis agitatur. (§. 6. n. 5.) quæ vapores crassos post se relinquunt (§. 5. n. 3. §. 6. n. 2.) & quæ fulgurat (§. 5. n. 7.) ; Atqui hæc omnia isti regioni non convenire videntur. Addo, quod sol, luna, aut stellæ lucidiores tales virgas etiam producere deberent quandoque per refractionem, quod tamen nunquam hoc modo fit, nec quomodo fieri possit per principia optica, aut per similes casus ostendi potest. Ita excluditur quoque visio refracta & sola reflexa relinquitur: quod quidem probandum erat.

IX. De loco materiæ lucidæ dico, quod existat in ea aeris regione ubi nubes hærere solent. Nam inferior arcus margo obscurus, cui lucidus semper contiguus est, pro nube aut vapore censendus est. (§. 4. n. 10.) maxime ideo quia ventis agitatur (§. 6. n. 5.) cum præterea ipsa lux in nubes abire soleat (§. 6. n. 2.) imo sub nubeculae aut

*vaporis lucidi forma appareat (§. 5. n. 2.) & versus horizontem densior fiat (per §. 5. n. 10): patet hanc materiam nubium conditiones babere omnimodas, consequenter & locum & distantiam a terra.*

X. Ut plures conclusiones formare liceat, introducam subsidiarias propositiones aliquot ex physicis petitas, quarum prima hæc sit: Nubes in aere quieto ita pendent, ut inferior earum superficies plana sit & a terræ centro ubique æquidistet. *Quia enim gravitas aeris specifica in æqualibus a terræ centro distantiis eadem est, nubes autem, quæ constant ex eiusdem generis vaporibus, ibi subsistunt, ubi earum gravitas specifica coincidit cum gravitate aeris, patet, nubes subsistere in loco qui æquidistat ubique a centro terræ, adeoque in planitatem expandi terræ superficie ad sensum parallelam, eoque exactiorem quo aer quietior est.*

XI. Fidem huic propositioni facit experientia, qua constat, nubes, quo propiores sunt horizonti, eo & basim magis rectilineam habere, quæ horizonti semper parallela est; Hoc ideo fit, quia planities nubium inferior eminus posita a latere spectatur atque ita tanquam linea appetat.

XII. Cæterum & ratione & experientia constat, quod nubes nubibus immineant; hoc est, quod planities unius nubis longius a terra distet quam planities alterius: Id quod & eo tempore evidenter observatur quandoque, quo lux borea appetat (§. 4. n. 22).

XIII. Aliud lemma hoc est: Obiecta quæ in aere æque alta sunt, horizonti eo propria esse videntur, quo sunt remotiora ab oculo spectatore; & vicissim obiecta æque alta, quo horizonti apparent propiora, eo quoque sunt remoto-

motiora a spectatore oculo. *Hæc ex scientia optica demonstrata sunt, ubi rigide demonstrantur.*

XIV. Ex priori lemmate intelligitur & hoc: Si linea in aere pendula, eminus a vertice posita, secundum parallelum orbis terrestris extensa, & a terra ubique distans sit; ea sub arcus forma apparebit, eo modo uti arcus lucis boreæ (§. 4. n. 1. 2. 3. 4.) Et vicissim; si linea a terra æquealta sub arcus forma appareat, cuius summa altitudo sit exacte versus boream posita, illa erit secundum parallelum terrestrem in aere expansa. *Hæc ab iis qui opticam callent facile intelliguntur, quapropter a demonstratione nunc abstinere licet tuto.*

XV. Hisce positis dico, quod materia lucis borealis secundum parallelum terrestrem fere in aere disposita sit. *Nam hæc materia in nubium regione versatur* (§. 9.) *ergo a terra ubique distat æqualiter* (§. 10). Porro, sub arcus forma appetat, cuius summa altitudo est ad boream directa (§. 4. n. 1. 2. 3. 4.) inde per §. 14. sequitur quod occupet tractum in aere secundum parallelum terrestrem extensem. Dico autem fere, nam curvedo arcus borealis non semper est exactissima (§. 4. n. 6.)

XVI. Ex opticis porro notum est, quod corpus figuræ irregularis inconcinnæ & inæqualis, figuram magis regularem, concinnam & æquabilem habere putetur, quo longius ab oculo removetur: Intelligitur inde cur arcus boreus eo exactior adpareat, quo propior est horizonti (§. 4. n. 6.) *Eo enim casu est remotior.* (§. 13.)

XVII. Si corpora aliquot in aliqua planicie utcumque dispersa & disiecta sint, apparebunt quoque oculo tanquam disiuncta, si quidem perpendiculariter ad il-

Iud planum positus sit ; quo magis autem oculus hoc planum oblique intuetur, eo proprius coire videbuntur obiecta, imo continuum corpus tandem constituere videbuntur : Item, lux sive color obiectorum singulorum augebitur & saturior evadet. *Hæc iterum tanquam certissima ex opticis suppono.*

XVIII. Nubium planities circa verticem hærentes perpendiculariter aspiciuntur ; sed quæ ad horizontem vergunt eminus & oblique aspiciuntur. *Intelligitur hoc lemma ex §§. 10. & 11.*

XIX. Hisce superstruo sequentem de luce borea propositionem. Materia lucis huius in nubeculas lucidas est dispersa & disiuncta ; prior autem lucis species continua (§. n. 1.) & clarior (§. 5. n. 9.) appareat ideo, quod in hoc casu materia eminus & oblique aspicitur. Quia enim hac materia in planitiem terræ parallelam diffusa est, (§. 9. & 10.) appareat in vertice eo modo quo diffusa est, (per §. 18. & 17.) appareat autem disiecta (§. 5. n. 2.) ergo & disiecta est. Porro cum prior species a posteriori non nisi apparenter differat (§. 7.) necessario sequitur quod & materia prioris speciei sit disiecta ; Itaque utriusque speciei materia in nubeculas lucidas est dispersa. Prior autem species ad horizontem vergit semper (§. 4. n. 5) adeoque oblique aspicitur (§. 18.) necesse est ergo ut tanquam continua & clarior appareat. (§. 17.) Q.E.D.

XX. Ex dictis intelligitur quomodo explicanda sint phænomena quibus inter se sunt differentia ambæ species.

XXI. Nunc pro explicandis virgarum phænomenis præmittam unam & alteram propositionem. Prima est : Si punctum aliquod lucidum in planum horizontale crispatum non-

non nihil, & partibus politis constans, de super irradiet, radiosque ad oculum spectatorem reflectat, tum oculo apparebit linea aut virga lucida quæ a lucido puncto ad oculum recta extenditur. *Ex regulis opticis demonstrari potest propositio; verum & quotidiana experientia eam docet: Luna enim, aut stella lucida quævis in superficiem aquæ tranquillioris irradians, oculo repræsentat talem virgam quallem descripsi.*

**XXII.** Huic alia innititur propositio; quod scilicet inferior nubium, aut vaporum, superficies lucida puncta sursum splendentia, sub virgæ lucidæ forma, iterum deorsum reflectat. *Crispa enim est, plana, & particulis aquæ aut glacialibus politis constat (§. 10.) planities nubium inferior.* Sed præterea experimento didici veritatem propositionis huius: Noctu enim aliquando, sub ortu incendio, duas vel tres verfas a domicilio, quod Petroburgi habeo, distante, excitatus rumore solito ad fenestram cum amico spectandi gratia accurri, mox sublatis in cælum oculis, virgam vidimus ambo candentem, a plaga incendii ad oculos nostros, sive ad verticem cæli, extensam, reflexam a nubibus nivem parturientibus, crescentem mox, mox & decrescentem, prout incendium augebatur quoque.

**XXIII.** Confirmatur hæc propositio alio phænomeno, quod Petroburgi ita rarum non est, uti in Germania aut Gallia esse solet. Accidit nimirum quandoque hyemali tempore, ut sol in ortu aut occasu constitutus lucidam & candicantem caudam verticaliter sursum proiecere putetur; describitur ea in Commentariis Academiæ Scientiarum Gallicæ (Anno 1703. pag. 78.) ei que simillima fuit quam incendium supra memoratum formavit

mavit (§. 22.) Oritur autem hæc cauda a radiis solariis, in planities vaporum ex particulis glacialibus constantium ab horizonte sursum vibratis, & ad oculos spectantium reflexis, eo prorsus modo quo virgæ lucidæ in superficiebus aquarum generantur. (§. 22.)

XXIV. Hisce præmissis dico : Quod virgæ lucis borealis orientur a reflexione lucis quæ existit in nubeculis lucidis (§. 19.) dum nimirum hæ nubeculæ radios sursum proiecent in planities vaporum superimminentium subtilissimorum, a quibus deinde reflectitur sub formis virgarum. Oriuntur virgæ reflexione (§. 8.), ergo a nubeculis lucidis (§. 19.) oriuntur ; nulla enim alia tum temporis lux in aere existit , & virgarum splendor tamdiu durat quamdiu nubecularum coruscatio : (§. 4. n. 15. §. 5. n. 5.) Planities autem vaporum reflectens supra nubeculas existit , quod intelligitur ex phænomenis allegatis §. 4. n. 9. 10. 11. 22. item §. 12. consequenter illa virgas eo modo format quo dictum est §§. 21. 22. 23. Hac propositione explicantur phænomena adducta §. 4. n. 11. 12. 13. 14. §. 5. n. 6.

XXV. Quod si præterea supponatur , quod planities tam imminentes , quam nubeculæ lucidæ , leví vento agitantur , in promtu erunt explicationes phænomenorum §. 4. n. 16. 17. 18. 19. 20.

XXVI. Item quia materia lucida supra se vapores habet , quos illustrat , infra nullos , patet ratio phænomeni §. 4. n. 9.

XXVII. Si liquor in vase aliquo contentus in superiori sua parte versus plagam aliquam agitetur , fieri ut inferior

ferior pars liquoris ad fundum, moveatur in plagam contrariam. *Veritas buius & ratione & experientia facile adstruitur. Cæterum ex eo primum est concludere, quomodo producatur phænomenon §. 6. n. 5. allegatum.*

XXVIII. Quas dedi hucusque explicationes certitudinis gradum aliquem habere arbitror; restant autem alia phænomena, quorum explicationes æque certas non promitto: Quid de ipsis sentiam paucis declarabo; præmissis aliquot propositionibus subsidiariis.

XXIX. Aerem ubique inflammabilibus scatere spiritibus seu vaporibus subtilissimis, constare puto ex fulguribus; ex perpetuis exhalationibus telluris, sulphure, nitro, & salibus ubique abundantis; ex capitibus mortuis, quæ ex aere vitriola, salia &c. fugunt.

XXX. Si tales inflammabiles spiritus copiosi in spatiū nimis arctum congregentur, flammatam concipiunt & desflagrant ultro. Hæc quoquæ propositio multis probatur experimentis physicis vulgo notis.

XXXI. Chymia quoque teste, subtiliores quivis spiritus a frigore in minus spatiū colliguntur: quidam facilius quidam difficilius. Non loquor hic de ea spirituum collectione qua condensantur & in fluidi formam rediguntur, sed qua solummodo proprius ad se invicem coeunt.

XXXII. Dum sol ab æquatore versus meridiem recedit, regiones aeris boreales frigidæ evadunt, idque eo magis quo sunt borealiores, & quo longius sol recedit. Præterea regiones aeris eiusdem parallelī sive climatis eodem fere frigoris gradu afficiuntur. Dico fere, nam aliæ quoque præter solem sunt causæ huc concurrentes,

solis tamen absentia sine dubio præcipua frigoris causa est. *Manifesta est hæc propositio, nec probatione ulterior indiget.*

XXXIII. Hicce subiungo propositionem, quam quidem pro certissima venditare non audeo, supponere tamen cogor in gratiam sequentium; ea hæc est: Spiritus inflammabiles vaporibus aqueis, caloris ope, commiscetur & implicantur, separantur postea iterum, accedente frigore dum aquei citius coeunt quam spiritus inflammabiles.

XXXIV. Nunc dico: Sole in regionibus borealis versante, vel ventis calidis spirantibus, aer calefit, vapores aquei subtilissimi in aerem attolluntur, miscenturque spiritibus inflammabilibus (§. 33. & 29.); recedente sole ad meridiem, frigus succedens, in eodem climate æqualiter distributum (§. 32.), Spiritus inflammabiles aqueis mixtos in nubeculas subtilissimas colligit (§. 31. & §. 19.), ex quibus spiritus inflammabiles sensim sese expendunt, & supra illas congregantur (§. 33.), quorum sufficiens copia collectaflammam concipit & deflagrat (§. 30.) qua consumta nova colligitur & accenditur, & fabula hæc tamdiu luditur quam possibile est: *Hicce convenire puto quæ Celeberrimus Prof. Wolfius dixit, dum materiam lucis borœ immaturam fulguris materiam nominavit.*

XXXV. Ex dictis facile intelligitur generatio materiae lucideæ; (§. 19.) Eiusdem dispositio secundum tractum climatis alicuius (§. 15.) & tam crebro repetita accensio extincioque nubecularum lucidarum (§. 5.n.3. & 4.) Forsan etiam repetita fulgura in tempestatibus æstivis similem habent ortum.

XXXVI.

XXXVI. Dum aquei vapores ab inflammabili-  
bus successive destituuntur , graviores fiunt, subsidunt &  
visibiles evadunt ; quo posito adscitisque quæ supra (§. 17.)  
dicta sunt , intelligitur ratio phænomenorum §. 4. n. 10. §.  
5. n. 3. & 4. §. 6. n. 2.

XXXVII. Hoc pacto fere cuncta , quæ luci bo-  
reali accidere solent, utcunque explicata dedi. Copio-  
fior autem hæc materia est, quam ut omnem exhauire  
potuerim , coactus proinde fui multa concise dicere ut  
brevis fierem. Si occasio & rei dignitas id tulerint, plura  
aliquando de distantia materiæ lucidæ a terra proferre  
licebit , eam enim determinare possum geometrice , da-  
tis altitudine arcus, crurumque amplitudine horizontali ,  
& concessa mea hypothesi , quam supra (§. 15.) attuli. Sit  
enim sinus elevationis poli =q. Sinus maximæ arcus al-  
titudinis =m. Sinus dimidiæ amplitudinis crurum =g.  
Semidiameter terræ =a & sinus anguli qui æquatur alti-  
tudini arcus maximæ , & æquatoris altitudini simul sum-  
tis =b , sic fiet distantia materiæ in vertice arcus existen-  
tis ab observatore =  $\frac{2amqgb}{r(rrbb-ggqq)}$ . Inventionem huius re-  
gulæ, eiusdemque applicationem ad exempla dabo alio  
tempore.

XXXVIII. Sub finem annotare lubet , quod bo-  
realis lux antiquis temporibus æque ac nostris nota fuerit;  
Erant qui eam in prodigiorum numerum retulerunt, erant  
& qui meteoris accensuerunt, eiusque causam investigave-  
runt. In posteriorum numero Aristoteles est , qui in  
Meteorol. Lib. I. cap. 4. & 5. eam clarissime describit: Lu-  
cem, quam ego verticalem voco, ille comparat flammæ

in area ab accensis stipulis ortæ , flamasque tremulas  
vocat capras , alteram vero arcuatam speciem chasma  
nominat , vocabulo tum temporis usitato & desumto ab  
interiore nigro arcus spatio , quod voraginem apte repræ-  
sentat ; virgæ nostræ illi trabes sunt quas ex chasmate  
ascendere dicit. Plurima quoque lucis borealis phæno-  
mena describit Plinius in Hist. Nat. Lib. II. capitibus 26.  
& 27. Qui meteorum hoc pro extraordinario & mira-  
bili phænomeno habuerunt plures sunt. Duo addam an-  
tiquitatis testimonia a Bayero nostro mihi suppeditata.  
Primum extat in Chronico Edeffeno f. 407. (quod habe-  
tur in Iosephi Simonii Assemani Biblioth. Orient. Tom.  
I.) his verbis : „ Anno Seleucidaram 813. ignis multus  
„ visus est in boreali plaga , qui tota nocte arsit „ . Ake-  
rum est Roberti Monachi , qui in Libr. V. Historiarum  
Hierosolymitanarum ad A. C. 1097. ita fatur : „ Sub  
„ illa nocte Cometa inter alia cœli sidera rutilabat & suæ  
„ lucis radios producebat , & inter Septentrionem & O-  
„ rientem igneus rubor in cœlo corruſcaba t. „ Addo  
hisce Marcum Squarcialupum , qui in dissertatione de Co-  
metis , figuram lucis satis bonam dedit , cum hac descri-  
ptione : “ Cœlum Anno 1575. in Vindemia Mensis O-  
„ ctobre per noctem integrum arsit , vel ardere visum  
„ est. Res mihi nunquam prius visa , & omnibus certe  
„ mortalibus tremenda. Lux magna , latitante luna,  
„ ad Slesiam & Sarmatiā extitit, instar crepusculi ma-  
„ tutini. Erat in horizonte plaga in arcum eminens &  
„ oblonga : Atque ex lucido isto tractu a summa extre-  
„ mitate radii ingentes modo hic modo ibi rectissimi e-  
„ rumpebant. Qui radii vel diu immoti ac turbinati sta-  
“ bant

„ bant , vel dissipabantur & novi subinde prodibant. Et  
„ (quod cum stupore contemplabar) ex radiorum inter-  
„ vallis emicabant flammæ ingentes , tremulæ , quæ mox  
„ in cœli verticem una post aliam cursu celerrimo fere-  
„ bantur. In quo loco non pauci aliquamdiu manebant,  
„ mox aliquæ evanescabant. Vidi ego nocte concubia  
„ ab utraque lucis extremitate radios ad medium spatum  
„ (*ad Zenith*) festinantes atque inter se aduersos & in-  
„ festos tanquam duas acies inimicas acerrime concurren-  
„ tes. Factus ibi conflictus & radiorum confusio , se se  
„ inclinantium , aduersos prementium , mox refugientium ,  
„ se attollentium & contorquentium cum incredibili colo-  
„ rum ; punicei , violacei , flavi , rubei varietate. In  
„ hac pugna & cœlesti certamine , inclinata orientis par-  
„ te radii occidentes valentiores , fortiores & victores a-  
„ paruerunt. Qui facile sibi credunt , bellum horrendum  
„ iam iamque inter nos & Mahometanos fore dicebant &c.  
Huc referendas puto plurimas alias relationes antiquas &  
recentes de exercitibus , de hastis , armis militaribus &c. in  
cœlo visis.

# RARI AC PROPE INAVDITI EX VTERO MORBI HISTORIA

## VNA CVM NECESSARIIS MEDICIS ANIMADVERSIONIBVS

a  
Petro Antonio Michelotto  
perscripta.

*M. Nov.  
1726.*

**E**X utero potissimum fœminis diversa vehe-  
mentiaque mala nasci, & experientia notum,  
& a Græciæ Medico Hippocrate animad-  
versum est. Perdiuturnæ , & haud vulga-  
ris, nervorum in splendidissima muliere distensionis nervo-  
rum observationem cum Luca Scroekio Celeberrimo,  
hoc tempore , Augustæ Vindelicorum Medico , & A.  
C. N. C. meritissimo Præside hos ante quatuor annos  
communicavi. In præsentia insolitæ , pene incredibilis,  
&, nisi me amor negotii suscepit fallit, in omni medici-  
næ parentum cum Græcorum tum Arabum memoria  
inauditæ ex vulva ægritudinis historiam legentibus sisto.

Iudæa virgo duos & viginti annos nata , cui Riccam  
parentes *Caravalei* cognominati dixerunt nomen , hos ante  
quinque & viginti menses, in morbum incidit suppressæ  
**ex tristibus** animi affectionibus menstruæ purgationis: in-  
de primum angina ; tum , interposito aliquo tempore,  
rheumatismo ; deinde sinistri latéris dolore per hyemem  
cor-

correpta sanguinis ex brachiis pedibusque detractione, aliisque idoneis medicamentis ab spectato, qui assidebat, Medico Moysé Coheno præscriptis curatur. Manente vitio mensium suppressionis cum vehementi ventris intentione, moeroreque cum crebro, difficilique spiritu concitatarum arteriarum pulsibus, continentibusque musculorum ad brachia pertinentium exiguis tremoribus, continuante, medicamenta mulieribus hysterico morbo ferre examinatis præberi solita, & nominatim remedium, cui *uterino elixiri* nomen autor Crollius imposuit, data. Sub eo auxilio singultus, & cuiusquemodi generis sive solidam, sive fluidam formam habentium alimentorum vomitus exortus est: adversus quem medicamentorum, tum opium recipientium, tum ventriculum confirmantium, compositionibus frustra tentatis, quem modo laudabam Medicus, diffisus reliquis præsidiis, ad gelidas ex aqua, in qua modo subacidorum cerasorum, modo fragorum, modo limoniorum malorum succus cum modica portione solutus erat, potiones prudenter configuit: quibus, in stomachi resolutione vomitum neque calidis neque anodynais remedii cedentem coniunctum habente, a me quoque prospero successu non semel adhibitis, consecutus quidem est, ut ægra & continere, & coquere cibos posset, non tamen ut reliqua mala se remitterent: ad quæ ineunte Autumno Anni **cicccxxiv** rerum omnium, sive cibi, sive potus, sive medicamenti speciem obtinentium, insigne fastidium, urinæ suppressio, inexpugnabilisque alvi adstrictio accessere. Eo tempore mollientia olea, aliaque medicamenta ducendæ alvi causa in anum per clysterem infundebantur, quæ, quam repellerentur, de-

speratis pene rebus , nutrientia quoque iuscula ex capo, gallinaceisve pullis, recentium óvorum vitellos intus solutos habentia, in ultima intestina (ex quibus etiam lactea vasa oriri , non esse negandum summus nostræ ætatis Prosector Io.B. Morgagnus apprime animadvertis) semel atque iterum die agere tentatum est. Verum enim vero, sive postremo coli tractu , & fortasse continuati etiam recti magna parte , a præpollente inclusorum flatuum vi reliqua intestina, & peritonæum vehementius distendente (quod verosimilius hoc in casu mihi videtur) ad dextrum sinistrumve infimi ventris caveæ latus compulsis , atque ad id arcte oppressis : Sive illis ipsis intestinorum partibus, ob valentissimas nervorum in thoracis, ac ventris impenitiora pertinentium , quibus ægra in præsentia quoque vexatur, distentiones, maximopere contractis , renitentibusque : sive hac , inquam , sive illa de causa, nequæficiencia, quæ dicebam , clysmata admitti quibant. Ita affectam, ita conflictatam nulla edendi , aut bibendi, nulla meiendi , nulla deiiciendi neque proximo hyeme , neque subsequente vere cupido cepit : Sorbilia ova , calida tepentiave iuscula , cuiusquemodi generis vinum , gelidæ potiones etiam ex cioccolatte, (sic enim a nostratis appellatur) lac mistum cum saccharo vel frigidissimum, hæc , inquam , atque horum similia , aut ex toto in fastidio erant , aut reficiendarum virium causa, non ex appetitu, interdum assumta protinus reddebantur. Anni tempore verno acutissimo sinistri lateris dolore prehenditur : Alii Medici ad consilium adhibiti sanguinem ad eum levandum , pondo circiter unciarum trium, ex respondentे pede iacenti , morbo , longissimaque abstinen-  
tia

tia confectæ mittere non verentur : ipso dolore per istiusmodi anceps auxilii genus , sub quo vires haud multum admodum labefactari visæ sunt , sublato, sanguinis paulum tussi extunditur. Post hæc singultus , seu potius quidam vomendi conatus , per quem humor colore sub-obscurò, odoreque urinæ ad longum tempus in ischuria retentæ perfamilis sèpius evomebatur , subortus est : qui sine medicamentis brevi postea finivit. Subsequenti æstate , sive raptim mutatione morbi aliqua ex parte in contrarium facta , sive blandis assidentis matris alia atque alia pro cibo & potionē assidue offerentis hortatibus , sollicitationibusque tandem decumbens filia commota modo tenuem ex citreis malis aquam , modo liquorem ex subacidorum cerasorum cum mele , ac vini spiritu fermentato succo (Wisna vulgo hic appellatur) ad cochlearia aliquot haurire cœpit : atque intra hos quidem liquores substitit , donec ad medium circiter Octobrem anni proxime exacti , quo constrictorio ventriculi motu sursum versus cum atrifere humoris vomitu , reverlo , nec cibos , nec potionēs , nec remedia devorare poterat , pervenatum est. Quum eam tum una cum curante Medico viderem , uti memoratum ventriculi motum remedio liquidì Helmontii *Laudani* ex stillatitia citrei mali aqua septem , octove gutterum numero potui dato cohibere , & pergelidam ex capi succo citrei mali odore imbuto , certa ratione cum saccharo misto sorbitione pro cibo offere tentarent , suasi. Sed ne hæc quidem tenuit. Nihilo minus tamen intra octo dies , quibus mente iam turbata , brachia & crura inæqualiter dispersgens , seque huc illuc violenter interdum convertens , modo obdormire , modo

tristibus veluti exterrita imaginibus eiulare videbatur, ventriculus ex toto conquevit, atque ita quidem, ut & aquam & liquorem, de quibus mentionem feci, continere octavo die posset: post quod tempus mentis quoque turbatio, terroresque remoti sunt, & ventris intentio, tametsi interim neque feces, neque urina emittebantur, paulum imminui visa est. Silentio hic præterire non decet: duabus circiter mensibus antequam huius admirandi morbi historiam perscribere inciperem, ægram, &c., de quo supra scripsi, lateris dolore denuo exceptam, & ab eo, sanguine ad duas tresve uncias ex brachio dolenti lateri respondentem extracto cito liberatam esse. Verum hoc ilud est præcipue scitu necessarium: ipsius ægræ, quæ a Septembri Mense 1515ccxxiv. in præsens tempus vitam sine omni fere potu transegit, corpus neque ex toto languere, neque notabiliter emarcescere: quanquam insignis seri sanguine tincti copia cum ex pede, tum ex brachio summæ quoque cutis lymphæ ductibus scalpello in sanguine mittendo laceratis, cicatriculisque (quarum ea quæ in lævo brachio existit in profundum ulcus versa est) tardissime forsitan ob malum universi corporis habitum confirmatis quotidie longissimum tempus manavit.

Facies in præsentiarum quoque colore est quidem fere naturali, at vero eam una cum reliquo corpore neque in speciem, quemadmodum ante hos tres menses videbatur (distendente scilicet tunc aere ex omnium pene corporis capillarium arteriarum cruento, animalium spirituum cuneolis, quam sanis hominibus esse debent, acutioribus pulso, atque muscularium fibrarum interstitiis, invisibilibusque cutis foraminibus intercluto) naturaliter ali, cutis

cutis cum subiectis musculis ubique locorum præterquam in abdomen aliquantum collapsa clave ostendit. Cuncti sensus, si unum tactum, qui una cum motu in dextro femine & crure hebes est, excipias, vigent; vigor animi nequaquam obtusus; supinum corpus semper, viribus muscularum affectis, iacet; ventriculus, præcordiaque cum reliqui imi ventris magna parte, & vehementer intenta sunt, & ad tactum leviter sonant; persistit quidem menstruorum, & urinæ suppressio: veruntamen nulla omnino urinariæ vesicæ turgescentia manu percipitur; venter ne spiritum quidem per inferiores partes reddit; neque cibi, neque potus cupiditas ne in præsentia quidem est: attamen tremoris ex contusis dulcibus amygdalis aqua ex citreo malo expressi paulum, sic affectam a matre assidue rogitatam, solicitatamque ante hos undecim menses per diem noctemque degustare cœpisse, idque nunc quoque continuare, certissimum est: nullus quidem sudor præterquam in palmis manuum, pedumque plantis neque interdiu, neque noctu oritur: verumtamen oleagineam materiam ex sebaceis universæ ferme cutis glandulis erumpere, cum ex totius pene corporis graveolentia, tum præcipue ex unctuosa illa sorditie, quam suis indusijs inhæscere, ægra hactenus se observasse mihi retulit, certo constat: nullus fere ex naribus mucus, nulla pene ex ore saliva emittitur: difficilimus somnus est; corripit interdum quidam frigoris sensus; saepè ventriculi, saepius capitis dolor torquet; brachiorum, manuumque musculi in dextra præcipue parte continenter intremunt, crebra difficultisque respiratio est; coagitantur semper cum corde arteriæ; tristitia saepè infestat, interdum tamen hilaritas

est: nutrientia autem , de quibus supra scripsi , clysmata in rectum intestinum indita ut protinus repelluntur , sic cuiusquemodi generis & alimenta & medicamenta vi degluta-  
tia extemplo in præsenti quoque redduntur. Verunta-  
men illud ignorare non oportet : Acidulæ aquæ ex fonte  
*Lælio Recobarii* importatæ cyathum unum alterumve  
mense circiter antequam huic historiæ finem imponerem  
potui datum , ventriculum retinuisse , eoque tempore u-  
rinam obscuri coloris exigua ægram (quod tamen & pro-  
xime præterito anno , quo ne guttam quidem illius mi-  
neralis aquæ assumpsit , non semel accidit) quantitate red-  
didisse.

Quod genus , quæ natura , per quas causas factus &  
auctus hic morbus sit , ad ea , quæ hactenus retuli acriter  
intendentibus animum , haud difficulter admodum , uti  
opinor , innotescet. Lotii , eorum , quæ per alvum exce-  
dere consuerunt , sudoris , menstruarumque purgationum  
suppressio ; narium muci , salivæ insigniter imminuta se-  
cretio : hæc , inquam , omnia , incomprimentium morbo-  
rum numerum , eorum nimirum , qui ob fluidorum in no-  
stris corporibus , aut ex toto deficientibus , aut notabili-  
ter decrescentibus cooriuntur separationibus , referendum  
esse , præclare demonstrant : cepisse vero a tristitia , & sup-  
pressis mensibus , artuum tremores , agitationes arteria-  
rum , crebram , difficilemque respirationem , intentionem  
ventris ; insolitam abstinentiam , mentis motionem eius-  
modi malis intervenisse ; exanimari interdum ægram in-  
de ad se redire ; odoribus cum suavibus , tam fœdis lædi-  
queri modo de corde , modo de ventriculo , sæpe de ca-  
pite ; modo tristem , modo hilarem esse ; interdum sopo-

re premi, plerumque vigilare ; dextro femine, dextro-  
que crure interdumque resolutam videri, inde se dextror-  
sum, sinistrorumque violenter convertere ; varios appo-  
sitost cibos potionisque summo fastidio habere : hæc , in-  
quam, atque his similia, virginem nostram vehementissi-  
me ex vulva laborare hand obscure declarant. Quod ad  
abditas, continentesque huiusmodi morbi causas attinet:  
invisibilis fluidi ex cerebro, ac cerebello euntis, redeun-  
tisque particulas in vehementes, dissonosque redditus mo-  
tus summa mœstitia a primordiis morbi una cum nervis  
tum in extériora, tum in penitiora corporis, & in ute-  
rum præcipue finitimasque partes pertinentibus repente  
actas esse coniecerim. Incremento deinde paulatim mor-  
bo, continuantibus nerveorum filamentorum per thora-  
cem, ac vèntrem discurrentium contractionibus separa-  
tionum, excretionumque fluidorum naturales leges ire  
cœpisse præcipites donec ad omnium pene, qui in nostro  
corpore sunt humorum suppressiones, imminutasve se-  
cretiones per ventum sit. Ad hæc ingenti aerearum par-  
ticularum copia, animantium spiritum impetu, acreidine-  
que (quæ longam abstinentiam sequi consuevit) ex arte-  
riarum ad ventriculum, intestina, iecur, splenem, uterum,  
peritonæum spectantium, arteriis reliqui corporis ob ve-  
hementes, in quas a morbi utique primordiis continenter  
aguntur, distractiones forsitan laxiorum : ex harum, in-  
quam arteriarum sanguine expulsa, inque earum partium  
sinus ac caveas nequaquam resistentes compulsa, univer-  
sum pene ventrem vehementer intentum, & ventriculum  
ad eam distensionem redactam esse, ut motiones ad fa-  
mem excitandam, retinendos, concoquendosque cibos  
per

pernecessarios iam obire non possit. Porro ut ex memoratorum spirituum in cor, arterias, thoracis, aliarumque partium musculos influxibus, quam naturaliter esse debeat, celerioribus, velociores cordis & arteriarum motus, crebram difficilemque respirationem, muscularum tremores, continentesque pene vigiliae enatas credidimus : Sic inaequales vehementesque membrorum, quas una cum temporariis mentis commotionibus ægram non semel hoc in morbo exceperis ante retuli, coagitationes ex dissimilibus, præcipitibusque illorum ipsorum spirituum motibus exortas esse, existimaram. Sed illud potissimum interrogari me a legentibus posse sentio : qui fieri queat, ut iuvenis haec, & tamdiu sine ullo omnino alimento vixerit, & solo liquoris, dede quo supra memoratum est, potu vitam tot menses traxerit, in præsentia etiam sustineatur ? Quibus pro ingenii mei modulo respondeo : eam non multo secus ac viperæ in vitreis vasculis vere, æstate, atque autumno inclusæ, seu potius terrestres cochlearæ partem autumni, totamque hyemem in opertis testaceis tabernaculis sine omni plane esca viventes vitam trahere, verisimillimum esse. Namque & continuo iacet in lectulo, & visibilium humorum pene nihil excernit. Manare vero exigua corpuscula, tum per invisibilia cutis foramina, tum per os ex pulmonibus, ut omnino negare non ausim, sic eorum corpusculorum, speciem vaporum habentium, haud multum admodum hoc in morbo extra corpus ferri : ex summa tabis, sudoris in universa ferme cute absentia maxime probabile censeo. Quandoquidem itaque iacens haud insigniter tenuatur, paulum admodum movetur, &

visi-

visibilium quidem humorum fere nihil , invisibilium vero pauxillum reddit : Manifestum est , nec sanguinem , nec humores maximopere absumi ; ac propterea neque villos , membranas , nervos , sanguinis aliorumque liquorum ductus , musculosque constituentes , mobilium particularum ex illis ipsis villis manare , atque per aera dispergi iugiter conantium eruptione insigniter exinaniri , seu in talem resolvi ; atqui assumendi cibi necessitas in universis animantium generibus ex villorum memoratas partes compingentium , continua inanitione , notabilive continenter decedentium particularum naturales operationes sive animales motus subsequi solita excretione dependet : Iuvenem igitur de qua hactenus retuli , in qua fortasse oleaginosi quoque humoris in sebaceis universæ cutis glandulis , Celeberrimo animadvertisente Morgagno , separari soliti aucta præter naturam crassities insensibilem (quemadmodum Medici loquuntur) transpirationem insigniter minuit , & ieunium septem amplius menses sustulisse , & pauco fluido alimento etiam nunc sustineri , sine aliquo commento prodigii edifferi potest .

Ratione haud multum admodum dissimili , quemadmodum præstantissima virgo ex Patricia Gente Foscarenna Patavii inpræsentiarum in cœnobio D. Marci commorans , triennem ferme (quod a viris amplissimis eius consanguineis accepi) tulerit abstinentiam , aliæque virgines , quæ referentibus Fr. Citesio , eruditissimoque Fortunio Liceto , plures annos nihil plane assumpsere , vitam traxerint , per causas mechanicas similes exponi posse , mihi videtur ; nedum enodate explicari complurium diorum , mensiumve abstinentiæ a Ioh. Quercetano , R. Donato

donæo, Valesco, Tharautano, Henrico Sampsonio, aliisque observatæ.

Ex proposita historia, aliisque consimilibus a modo allegatis rei medicæ scriptoribus perscriptis primum omnium constat, haud esse fabulam: Homines interdum mulieresque præsertim, quas uterus diutius male habet, ab cuiusquemodi generis cibis & potionibus in adversa valetudine abstinentes, non duos tantummodo, tres pluresve dies, quemadmodum credebat Hippocrates, verum etiam complures menses annosque vitam ducere posse. Hoc illud deinde colligitur, nostræ ægræ corpus (mirum dictu) pro ratione longitudinis abstinentiæ haudquaquam esse tenuatum, secus ac in puellis a Citesio, Quercetano, & Sampsonio productis, in quibus flavescens abdomen cum arescentibus inclusis visceribus longissimo jejunio extenuatum ad spinam collapsum observabatur. Verumtamen de virgine quadam Patavina nostræ quod ad abstinentiæ tempus, aliaque morbi symptomata spectat haud multum admodum dissimili ex Alessandro Vigontia Medico narrans ante laudatus Licetus, nequaquam eam tabidam, sed vivido colore, & in speciem sanæ extitisse ait. Venetiis Quarto Kalendas Quintiles 1515ccxxvi.

*Vid. Hippocr. Lib. de Flatibus, & M. C. N. C. Deour. I. A. 111l & Fort. Licet. Libr. de iis, qui diu vivunt sine aimento.*

# OBSERVATIONES ANATOMICAES.

## I.

**G**lobuli cavi, pellucidi, qui unionum forma visceribus appensi sunt, quoad eorum producendi modum a Viris eruditis excogitatum, nova hodie difficultate laborare videntur: Nam hydatides hodie ostenduntur, quæ non in superficie solummodo sed in profundo partium generatæ sunt, uti autopsia testatum facit. Hæ in cavitate quadam cuiuslibet visceris aggregatæ, serum continent purum, pedunculis modo annexæ modo liberæ iacent. vid. *Ruyshius. Courtil. Iourn. des Sc. An. 1697. fol. 442. 457. Histor. Reg. Acad. Paris. fol. 454. Mem. de l'Acad. Roi. des Sc. A. 1704.* Iam manifestum est in hacce specie notio nem glandularum ac lymphæductuum paulo infelicius applicari, sicuti rationes tum ex partium structura tum ex obstructionibus artificialibus desumptæ demonstrant. Omnium vero gravissima difficultas illa est, quæ in certa specie hydatidum nobis oblata est, cuius nullum exemplum forte exstat. Hæ magno numero & sub varia magnitudine amplo sacco inclusæ sunt, omni nexu solutæ & liberæ, nullo pediculo præditæ nec sibi invicem cohærentes, & (quod attentione dignissimum est) in sua cavitate alias vesiculas minores, quæ similiter cavæ aliisque vesiculis exiguis fœtæ sunt, continent. De hisce seqq. historia legi meretur.

Exeunte Anno 1726. in hepate viri sumo carbonum extincti, cuius reliqua viscera nullo sensibili vitio

Tumo-  
res ves-  
culoſi.

rupta erant, prope fundum vesiculæ felleæ magnus eminebat tumor globosus, cuius alterum hæmisphærium substantiæ hepatis firmiter incorporatum erat. Post eius separationem, antequam incideretur, lanci impositus est, isque unam libram & quatuor drachmas pendebat, ex cuius proinde mollitie & albo colore magnam humoris quantitatem in eo collectam esse visum est. Incisione facta rem secus se habere humoribusque vacuum tumorem esse admirati sumus. Tota eius cavitas ab imo usque ad summum incredibili numero vesicularum compressarum & pelliculas uvarum vacuas mentientium infarcta erat, hancque vesicularum congeriem unus saccus globosus cute admodum dura & crassa eaque exterius lœvi & polita, interius vero aspera constans, septemque drachmas pendens continebat. Eo aperto odore omni vacuum deprehendimus, et si vesiculæ colorē viridescentem obtinerent. Quamquam earum prodigiosa quantitas esset, sui omnes iuris hoc est liberæ & solutæ absque ulla sive cum sacco sive inter se invicem connexione, mutuo tantum sese exosculantes & complices iacebant, verbo, exactissime pelliculas uvarum vacuas tum figura tum colore herbaceo seu viridescente æmulabantur. Substantia pellicularum minime fibrosa seu organica, sed concretum quoddam gelatinosum esse videbatur. Quoad magnitudinem, sub triplici differentia oblatæ sunt nempe maiorum, minorum & minutissimarum, quæ invicem permixtæ acervo eodem comprehendebantur: Ovum nonnullæ columbinum, aliæ fabam, aliæ denique pisum æquabant.

Exteriore harum vesicularum dispositione sic perlunga-

strata ad interioris quoque cavitatis contemplationem de-  
venire necesse fuit, successu minime pœnitendo, siquidem  
in phænomeni extraordinarii & forte inauditi cognitio-  
nen præter spem incidimus. Postquam vesicularum  
nonnullarum expansio seu insufflatio immissa aere facta  
est lucique hæ exponerentur, aliud in earum cavo  
quod flatu sese movebat, includi nobis visum est: Ves-  
culis igitur apertis, nihil aliud quam minores vesiculæ ab  
omni nexu liberæ, inæqualis magnitudinis, minime inter  
se cohærentes, in vacuo fluitantes, numero ternario qua-  
ternariove, magna cum lætitia spectatorum oblatæ sunt.  
Cæterum tum colore, tum figura, tum substantia, a con-  
tinente vesicula quæ ovarii vices tenebat, haud absi-  
miles erant. Postremo ne quicquam intactum relinque-  
retur, cupidus incessit eas omnes vesiculos toto acervo  
comprehensas enumerandi earumque summam extra-  
hendi. Itaque sine respectu magnitudinis, portio ha-  
rum vesicularum permixtarum usque ad unius drachmæ  
pondus lanci imposita est. Quæ numeratæ præter mi-  
nores earum cavo contentas septuagenarium numerum  
cum uno aut altero completum, efficiebant: Ex quo ve-  
sicularum summa, quæ quidem ultra 9000. ascendit,  
facile colligi potest.

Hoc certe phænomenum etsi solutu difficile, ex bul-  
lis humorum vitiosorum magis quam fragmentis orga-  
nicarum partium originem suam trahere verosimile  
est.

## II.

Eousque quorundam hominum stultitia excedit, ut  
*Exsplenii*, hoc est, sine liene vivere pro summo bono ali-

Tab. 12.

Fig. 4.

B b b 3 quan-

*Ruptio  
Lienis.*

quando teneant. Idcirco in generis humani perniciem quædam operatio, transfusoria funestior inventa est quam *Excisionem lienis* vocant. Culter ligneus super hypochondrium applicatur, quem una manu suspensum tenet artifex, deinde malleum altera manu prehendit, ac cultrum magna vi, unaque cum ipso lienem, uti fabulatur, percutit. Quo facinore perpetrato, non solum disruptio nem lienis ab ictu factam esse impudenter affirmat, sed talia etiam exhibet remedia quæ vim habent totam massam lienis dissolvendi eamque sic comminutam modo per vomitum modo per alvum vel quacunque via alia expellendi. De hacce invisibili excisione lienis vid. *Journ. des Savans* 1672. Quum in hocce negotio non de ære solummodo, sed de vita hominum certo certius agitur, periculum saltem indicandum est: Etsi enim tales impostores disruptionem lienis neque intendant neque forte possibilem aut noxiā esse putent, lienum tamen ex levi causa diffractorum mortemque inferentium exempla contrarium demonstrant, laterisque percussiones periculo plenas evidenter significant. In hunc modum Vir iuvenis, pugnis cum altero sese excercens in hac urbe subito mortuus est: Vix enim cultro incisis abdominis tegumentis quæ vehementer distenta erant, tanta copia cruris exiit, ut pelvis omnes praesentes vix sufficerent, unde venter statim detumuit; Lienem in medio ruptum, ea parte qua stomacho obversus est, hocque proinde vulnere hæmorrhagiam excitatam fuisse perspicue observavimus.

## III.

*Hemorrhagia omenti.* Sub eodem tempore, percussionis Abdominis infelicem exitum alia dissectio foeminæ a milite percussæ & subito mor-

mortuæ nobis exposuit. Postquam enim totum abdomen sanguine effuso oppletum esset, ex omenti hæmorrhagia hanc occubuisse ex hoc uno constabat, quia inter folia omenti parvi grumuli intercepti & inclusi erant. Cæterum in rarissima hacce lœsione, illud forte in considerationem trahendum est, quod præter naturæ institutum, omentum fundo uteri connatum esset. vid. Ruysh. Obs. Anat. Chirurg. LXIII. & LXXXIII.

## IV.

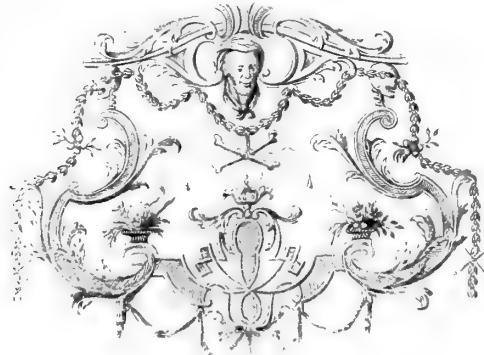
Inter mortes subitas hominum insolens exemplum Hæmorhæmorrhagiæ occultæ Stomachi se sistit, non ea de causa lethalis, quia sanguis extra nimium in modum stomachi. prorumpit; sed quia stomachus citius sanguinis copia opprimitur & suffocatur quam eius sive per os sive per intestina effluxus excretiove fieri potest. Eo autem modo homo sexagenarius enecatus est improviso absque ultra suspicione causæ in stomacho latentis, hoc est, sine vomitu, sine deiectionibus cruentis. Tota cavitas ventriculi uno prægrandi & formam eius referente grumo eum in modum obsessa & oppleta erat, ut spatium nullum vacuum inter pylorum & sinistrum orificium relinqueretur. Cæterum prædictam massam nihil aliud esse quam purum sanguinis grumum absque alterius substantiæ permixtione tum visu tum experimento cognovimus. In stomacho mirum dictu! perfectæ integratis: In Liene e contra putredinis notæ deprehensæ sunt.

## V.

Notas seu impressiones fulminis tam externas quam interiores in variis regionibus annotatas, forte non omnino contemnere licet, ut natura huic stupendi phænomeni paulo nes fulminis.

clarus elucescat: Abdominis & membra genitalis inflatio: Cutis lateris sinistri in durum corium igne torrefactum commutata , in reliquis partibus purpurea , in collo rubra: Sanguinis ex aure dextra stillicidium : In summo vertice vulnus lacerum absque cranii lœsione, non penetrans, 2. lineas longum &  $\frac{1}{2}$  latum , externe conspectui oblata sunt. Interne præter copiam sanguinis insolitam in crani apertione erumpentem , sanguis in duræ matris sinus instar aquæ fluidus , item in ventriculis & basi cerebri , inque vertebrarum theca seri magna copia inclusa apparuit. Pectore aperto uterque Pulmo mediocriter collapsus nigricansque ; Cordis ventriculi, auriculæ, vasaque communia sanguine vacua. Separatis denique abdominis tegumentis intestina una cum stomacho præ inflatione magno impetu proiecta sunt. Hepar , Lien ac Renes vitio carebant: Sed vesica tum fellea tum urinaria vacuæ & collapsæ , cum ureteribus retentione urinæ valde distentis.

Hæcce in viro super fluvium navigante fulmineque perempto observata fuere.



CLAS-

*CLASSIS*

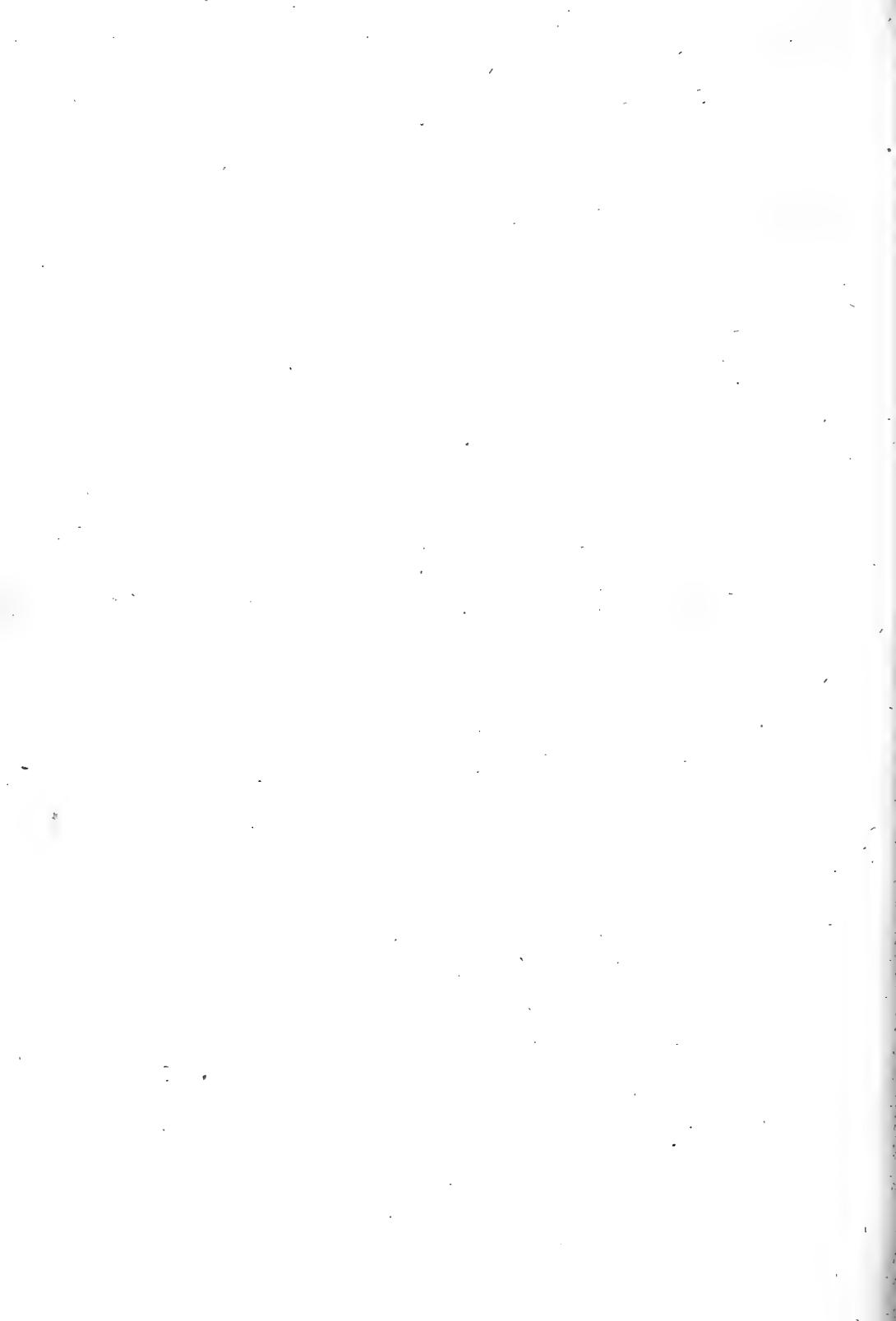
*TERTIA*

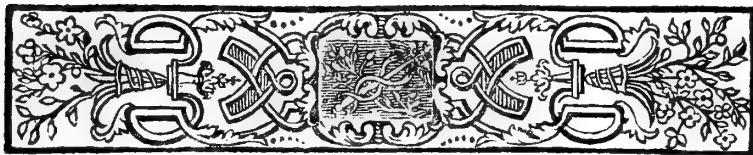
CONTINENS

HISTORICA

et

CRITICA.





## DE ORIGINE ET PRISCIS SEDI- BVS SCYTHARVM.

*Auctore*

Theophilo Sigefrido Bayero  
Regiomontano.



T omnes intelligent iam inde a principio, *M. Mart*  
quae mea de Scythicis gentibus opinio  
fit, ita praedico, me nequaquam ex ea  
rum stirpe Sarmaticas, Russicas & Scla-  
uonicas gentes , aut Hunnos veteres no-  
strosque Hungaros, aut denique Tattaricos populos re-  
petere, sed Lituanos & veteres Prussiae incolas, (1) tum  
Ccc 2 Cu-

(1) Non tuli inique ea, quae eruditii viri in Memoriis  
Treuultinis in me iecerunt, cum nostram de Priscis origi-  
nibus sententiam attingerent : spero enim eos pro aequitate  
sua, plus mibi, cognita caussa, concessuros esse.

**C**urones, Liuones, Aestios, Fennos, & Lappones, & paucos alios. Ista tam directa confessio obuersabitur animis haec nostra legentium; donec in progressu id a nobis paullatim constitutum reperient. Cum Ruthenos non patior supposititiam Scytharum esse prolem, iam frustum eum refero, quod turbari stirpes & inseri nobilissimam per se gentem alienis populis non sino. Simul et illud operae pretium facio, quod de ea regione, quae a Scythico nomine antiquitus nobilitata fuit, nunc accessio ingentis Russorum imperii est, exquirendo veterem memoriam elicio & quasi exprimo, quod aut verum sit, aut ad veritatem quam proxime accedat, ne dicam, illis me adiumento esse, qui in edifferendis Hungarorum, Polonorum, Tattarorum, Turcarum, aliorumque populum originibus, ad Scythes veluti tempestate delati, tamquam ad saxum adhaerescunt.

Nam, qui ante nos de Scythicis rebus commentati sunt, vno insigni maxime errore implicati constrictique fuerunt, a quo nisi prouidemus, oleum & operam in restituenda veteri gentis illius memoria perdimus, multorumque aliorum populorum origines aut proxima originibus coinquinamus. Multos & magnos viros citare possem, ni satius sit, eorum nomina, ex quibus quotidie in aliis proficimus, in hac aberratione silentio obtegere, quam quasi pompam hac praeterducere. Extendunt autem Scythicum nomen vastissimis terrarum spatiis ab Istri propemodum fontibus & Vistula Balticoque mari, iuxta Oceanum septentrionalem & Pontum Euxinum Caspiumque mare, vsque ad extremum orientem. Eo in errore vetusti quoque scriptores praeluserunt, nostrisque fue-

fuerere offensioni. Primus eorum de quibus constat, Ephorus in quarto historiarum libro, orbem terrarum inter Scythas, Indos, Aethiopas & Celtas diuisit. Fragmentum eius loci Cosmas Indicopleustes in Topographia christiana conseruauit. (2) Non sum nescius, quod a Diodoro Siculo (3) obiecta est Isocrateo illi Ephoro veri negligentia & quidam quasi stupor: sed quam lenissime pronunciari velim, postquam historiae eius intercederunt, ut iudicari non possit. Video igitur Ephorum, cum locorum positus per certa capita distribuere & explicare constitueret, insigniorum nomina gentium vastioribus spatiis adhibuisse, nulla mala fraude, at successu infelici. Nam Ephoro quoquo modo dicta, pro exploratis habebant Graeci plerique & Romani, ita gliscebat error posteritate. Igitur tot tamque diuersae stirpis gentes non modo intra communem quandam regionem definitae, vnum omnes Scytharum nomen his auctoribus subierunt, sed etiam ab illa regionis appellatione in eandem nationem sunt conflatae. Sic Cimmeriorum res cum Scythicis, Scytharum cum Sarmaticis, Russicis, Hunnicis, Tattaricis commiscentur. Sunt qui deinceps non modo regiones, sed etiam tempora confundunt. Nam quaecumque regionum aut gentium illarum nomina apud omnis aevi scriptores reperiunt, ea ad describendam geographiam adhibent, tamquam aleatores tesseras, quibus temere in tabulam ia-

CCC 3

ctis

(2) f. 148. (3) f. 26. ed. Steph. ἀλλ' ἐκ ἦν τις παρ<sup>3</sup> ΕΦόρῳ ζητήσαντεν ἐν παντοῖς τεόπται τάπειρες, ὅρῶν ἀντὸν ἐν πολλοῖς ὠλιγωρημάτα τῆς ἀληθείας. *Apud Ephorum accurrationem consummatam frustra quis quesiuerit, qui videat in multis eum parvi pendisse veritatem.*

ctis, quaecumque fors exit, situm illarum definiat, τρίς  
ιτεῖ, ἡ τρέῖς κύβοι, quae quidem secum, si verum spe-  
ctant, commentata & meditata habere debebant. No-  
bis adhibenda diligentia est, ne noster labor in easdem  
reprehensiones iure meritoque incurrat, neue quis nos de-  
bito testimonio priuet, nihil nos ex vano haurire voluisse &  
inexplorata non edidisse pro compertis.

Scythes plerique a Magogo Iapeti filio ortos refe-  
runt, quorum in numero Samuel Bochartus facile princeps  
est. In ea opinione nemo est antiquior Iosepho, (4)  
qui quidem Scythes nomine cieat. Haussisse autem vide-  
tur ex Ezechiele (5) qui terram Magog ad septemtrionem  
Caucasi inter Tanaim & Volgam ponit. At idem il-  
le cum populum Scythicum *Gog in terra Magog* adpel-  
lat, satis perspicue ostendit, alium populum Magog ante  
Scytharum irruptionem illa loca incoluisse, quae adhuc  
priscum nomen apud gentes Asiaticas retinuerint. Tan-  
tum igitur abest, ut Ezechiele auctore Scythes a Mago-  
go repeti conueniat, ut is etiam adversarius huic opini-  
oni fit. Alii Turcas quoque & Tattaros Magogicae stir-  
piadserunt, quos quasi ab aboriginibus suis Ezechiel *Ma-  
gog* nuncuparit. Itaque de primis Scytharum paren-  
tibus & auctoribus non liquere puto. Hoc tamen mihi  
visus sum ex argumentis minime vanis conjectura conse-  
qui, Scytharum maiores ex Armenia descendisse ad au-  
strum atque tum orientem petuisse hibernum, donec ad se-  
ptemtrionem Caspii maris, a tergo vrgentibus alijs fami-  
liis,

(4) *Antiq. Iud. Lib. I. c. 7.* (5) *c. xxxviii.*  
**XXXIX.**

liis, concesserunt. Ex eo tempore ad septemtrionem maris Caspii & ad Volgam eos degisse reperio , iuxta Massagetas & Issedonas. Scythaes ipsi se mille ante Darii expeditionem annis ortos tradidere apud Herodotum. (6) Interferitur huic loco a Scythis fabula : Targitaum Scytharum patrem Ioue & Borysthenis fluminis filia natum, tres habuisse filios. Nomina eorum hæc sunt: Leipoxais, Arpoxais & minimus natu Colaxais. Colaxais imperium caelesti prodigio adeptus est , a quo inter Scythes nobilissima domus οἱ βασιλῆς οἱ καλέονται Παραλάται reges, qui dicuntur Paralatae: a Leipoxai Αυχάται, ab Arpoxai , Κατίαραι καὶ Τράσπιες. Colaxais rursum in tres diuisit filios gentem. Vniuersi se Σκολόται τῷ βασιλῆος ἐπωνυμίνῳ Scolotos, quod regum cognomentum est, adpellarunt. Scythaes sunt vocati tantummodo a Graecis, ut diserte monet Herodotus. Inde autem manauit vocabulum, quod cum Graeci , qui inter eos in coloniis Ponticis degebant , admirabilem eorum in sagittando artem & industriam cernerent , sagittariosque ab iis Scythes dici audirent, id nominis toti genti attribuerunt. Et manet adhuc vocabulum in Scythicae originis linguis. Hodie Lituanis Szauti iaculari & iaculatorem significat , a quo est apud Constantimum Szyruidum Szaudu, arcu, sagittis iaculor & Szaudikie sagitta, spiculum, Fennis & Lilonibus sagittarius est Skytta & Kytta seu Kyt, sic Curonibus & Aestiis & Lapponibus. Veteribus denique Prutenis , vt Praetorius in orbe Gothicō nos docet , fuit Szythi. Manauit etiam in aliorum & diuersae stirpis po-

pu-

(6) L. IV. c. 7. ed. Gron.

pulorum linguas. Et apud Graecos Scythurum nomen per monumenta eius sit celebrius; quam Scolotorum, verum quidem, sed obscurum nomen. Mansit tamen Scolotorum nomen apud Athenienses in ludibrio. Nam publici ministri & vigiles Athenis dicti sunt Τολόται, iidem & Σκυθαι & Τοξόται. Tolotae a Scolotis deprauatum. Scythaes iidem, quod sagittarii essent & in medio foro habitarent sub pellibus. Sic apud Romanos per contemptum a Phrygibus, Daeis, Syris, Getis, serui nomina habuere.

Quantum in hac Scythurum narratione apud Herodotum verum esse videatur, quaerendum nobis duco. Ego vero eiusmodi veteres gentium memorias contemnere non soleo. Forte, quod a Ioue & Borysthenide Herodotus interpretatus est Targitaum prognatum fuisse, id eo factum, quod pater ei Pappaeus aliquis (Pappaeum autem summum deum dixere Scythaes, Iouem suum Herodotus putavit) & mater e Cimmeriis ad Borysthenem, regia domo oriunda esset. Sub Targitao Scythae in unum corpus & rempublicam coaluere, diuisi postea in tres eius filios totidemque tribus. Plerique populi a constituta primum republica aut insigni aliqua conuersione originem repetierunt. Chaldaeis Callistheni de vetustate eorum sciscitanti, mille nongentorum trium annorum summam edidere, teste Porphyrio apud Simplicium de caelo. Ex quo colligitur, Chaldaeos centum et quindecim annis diluvio posteriore gentis suae originem posuisse, ab eo tempore cum reipublicæ formam subie- runt. Ergo cum Scythaes mille annis ante Darii expeditio nem se ortos tradunt, initium reipublicæ suae nobis appen- siunt.

riunt. Si expeditionem Darii ante annum periodi Iulianae 4200 collocamus, historia Scythica caput tollit circa annum 3200, siue annis 1514. ante epocham Dionysianam, extremo tempore seruitutis Israelitarum in Aegypto.

De prisca autem Scytharum regione Herodotus (7) ita acceperat: Scythes, Nomadas fuisse, et in tigris passim circum opportuna pascuis loca trans Araxem coluisse, inde pulsos a Massagetis bellum intulisse Cimmeriis super australi mari seu Ponto Euxino habitantibus. His veluti parum consonantia ex Arimaspeis Aristae Proconnesii addit: Arimaspos pepulisse Issedonas, Issedonas a tergo vrsisse Scythes, Scythes, non, nisi cedendo ab infesta Issedonum vicinitate se defendere potuisse, idcirco inuasisse Cimmeriorum regiones. Hic vero Herodotus: (7) ἃδες ὅτος συμφέρεται περὶ τῆς χώρης τάντης Σκύθησι ita nec Aristae cum Scythis conuenit in regione, quam primitus incoluerint, constituenda. In quo autem, Herodote, Aristaeas Scythaeque dissentunt? Scythaes, se primitus ultra Araxem coluisse tradunt: at Aristaeas iuxta Issedonas, hoc est, ad orientem Caspii maris. Ita videlicet est. Araxem quem Scythaes dicerent, Herodotus ignorauit, putauitque, illum esse in Media ἐν Μαντινῶν, (8) quae ad meridiem vicina Armenis prouincia est. (9) Is autem Araxes longissime utique ab Issedonibus & oriente distat. Sed non vidit Herodotus, Scythes ab hoc flumine non potuisse se in Cimmeriorum regiones infundere. Quae enim illa fuit discursatio, si Scythaes per

Ddd

Me-

(7) *L. IV. c. 13.* (8) *L. I. c. 202. seu potius Matinwv ut Gronouius recte edidit.* (9) *L. V. c. 48*

Medicas prouincias patefacto itinere, traiecto Araxe, in Cimmeriorum terras irrupissent, atque inde persequentes hostium agmen, fallentibus fugientium vestigiis, per errorem viae in Medium, eadem qua iuerant, reuersti, ex inopinato incidissent. Hoc ne obiiceretur, timuisse videtur Herodotus. (10) Igitur regionem ab Istro ad Cercinitin vocat *veterem Scythiam*, tamquam ex ea regione Scytharum maiores per Bosporum Thracicum in Asiam minorem superioremque & Araxetraiecto per claustra Caucasea in Cimmeriorum terras conesserint. Siue ita scenam, seu quemcunque in moduni instruxerit Herodotus, vndique haeret & tenetur.

Dicam, sicuti sentio, neque tam Herodotum, quam eos, quorum testimonio est usus, producam quasi in forum ad tribunal, exquisitusque tamquam in iudicio testes admotis quaestionibus percunctabor. Dicebant Herodoto, Scythes trans Araxem iuxta Issedonas & Massagetas coluisse: pulsis Scythis Massagetas vteriora Araxis (1) sub oriente Caspii maris tenuisse e regione Issedonum, qua in latissimam planitem terra se diffundit. (2) Eum Araxem dicebant cum Istro de magnitudine certare & in ostiis multas amplecti insulas, Lesbo aequales magnitudine. Nihil horum ad Araxem Mediae conuenit: non Massagetarum situs, non magnitudo fluminis, non tot et tantae in ostiis insulae. Omnia autem ad Volgam. Ad Orientem Massagetae veteres: longitudo fluminis Istrum tertia parte superat: ostia ad octoginta et amplius, (3) quae insulas

(10) *L. IV. 99.* (1) *L. I. 201.* (2) *L. I. 202.* (3) *Nicol. Vitzenii Noord en Oost Tartarye f. 700.*

fulas ingentes circumdant. Quod ait Herodotus: Αράξης λέγεται καὶ μέζων καὶ ἐλάσσων ἔνοι τῷ Ισρε. *Araxes et maior et minor esse Istro dicitur*, id quoque confirmat, de duobus fluuiis eum inaudiuisse, quorum alter, hic Volga maior Istro, alter, qui nunc quoque Rus, minor fuit. Et fuisse utique Volgae vetustis temporibus nomen *Araxes* sive *Rus*, *Ros*, & *Rhas*, satis exploratum habeo. Onomacritus & incertus auctor peripli Ponti Euxini Tanaim dicunt ex Araxe flumine in Maeotin exonerari. Aristoteles quoque in meteorologicis (4) auctores habet, ἐν Παρηνάσῃ (ex Paropamiso dicere se putat) maximo omnium ad orientem hibernum monte, Bactrium, Choaspen & Araxem fluere τέττας δὲ ὁ Ταναϊς ἀποχίζεται, μέρος ὅν, εἰς τὴν Μαιῶτιν λίμνην, ab hoc Araxe Tanais diuisus (*pars enim eius est*) in Maeotin paludem exoneratur. Ortus est error e Tanais & Araxis vicinitate. Accedit Agathemerus (5) qui *Iaxartem*, *Oxum*, *Rbynnum*, *Rhos* (qui est Mediae *Araxes*) *Cyrum* (qui est *Kur*, cum hoc Araxe se miscens) & denique *Araxem* Caspio mari infundi scribit. Quis non videt, eum ab oriente littora Caspia obire, donec ad septentrionem desinit in Volga? Claudio autem Ptolemaeus Volgam vocat *Pæ Rha*, quod nomen adhuc frequenter in ore habent Rutheni, ut ne ab aetate quidem et temporum populorumque miris conuersationibus oblitterari potuerit. Inter caetera sic loquitur Claudio: ἔσι καὶ ἐτέρα τῷ *Pæ ποταμῷ* ἐκβολῇ πλησιάζεσσα τῇ τῷ Ταναϊδος. Vossius ad Melam in eo emendat vocem ἐκβολῇ & rescribit

Ddd 2

ἐπι-

(4) L. I. c. 13. (5) p. 235 ed. Gron.

Ἐπιεροφῆ. Sed relinquendus est suus Ptolemaeo error, qui Volgam & Tanaim misceri atque orientalem quidem Volgae alueum in Caspium mare, occidentalem autem in Tanaim exonerari credidit. Duo quoque fluminis illius ostia Pomponius Mela habet (7) sed in Caspicio tantum mari : multi, inquit, in Caspicio sinu magni parvique amnes fluunt : sed, qui famam habet, ex Cerauniis montibus uno alveo descendit, duobus exit in Caspium, Rha. Ammianus Marcellinus (8) huic Tanai Rha vicinus est, amnis, in cuius supercilii quaedam vegetabilis eiusdem nominis gignitur radix, proficiens ad usus multiplices medelarum. De Rha barbaro eum loqui intelligo. Videlur autem illud nomen Rhos et Rhaeique alia similia ex antiqua mortalium communique lingua ad Scythas aliquaque populos permanasse, quo fluum dixere. Apud Arabas est Roha, apud Turcas et Persas est Rud, apud Ruthenos Ῥѣка Reca. Quae fluminis appellations, et apud Graecos PEIN et fortassis Rhenus, Rhodanus, Rhaduna apud Gedanum, tum Eridanus seu Rhudon Ptolemai et Marciani Heracleotae, (nunc Duna apud Rigam) et Russa in Prussia, non nisi reliquiae priscae linguae sunt. Est eodem referendus Εὔξ fluvius apud Lycophronem, (9) cum Cassandra canit Amazonas Εὔνη Lagmum Telamam & Thermodontem reliquisse et inuasisse Athenenses. Vbi Ioannes Tzetzes Εὔξ Λάγμας Τήλαμος Θερμώδων, ποταμοὶ Σκυθίας. Ex vicinitate Thermodontis Eris ille cognoscitur situs fuisse in Ponto. Xenophon  
tis est

(7) III. c. 9. (8) L. xxii. c. 16. (9) v. 1333.

ti est Iēs (10) & ex eo fortassis, etiam Plinio. In Mesopotamia duo flumina fuere, quae Arabes appellauere *Roba*, hoc est nihil aliud quam *fluvios*. Alter apud Edeßam quem Scirtum Macedones coloni dixere, alter eo inferior, qui a Ptolemaeo et nunc ab Arabibus *Chaboras* dicitur. Ex illo fecere Graeci Καλλιρόην, ut in historia Edeßena ostendi, ex hoc ipse Xenophon (1) fecit *Araxem*, alium vtique ab *Araxe Mediae*, quem Xenophon non attigit. Mansit etiam postea corruptum *Araxis* nomen. Nam geographus Arabs, quem Iosephus Scaliger inspexit (2) Carcesiam urbem ait allui a flumine

الْأَرْبَاسُ الْمَدِيُّ الْخَبُورُ

*Al Harias cognomento Al Chabor.* *Harias* est ab *Araxe* Graecorum in Mesopotamia, *Araxes*, ab *Roba*. Graecarum autem aurium tam admirabile fuit fastidium, vt barbaros vocabulorum sonos non ferrent. Itaque seu noua nomina gentium locorum hominumque e lingua sua effingebant, seu barbara ita ori aurique Graecae aptabant, vt vix tenue remaneret vestigium, vnde essent ducta. De ea consuetudine Plato in Cratylō disputat. Is quoque in *Timaeo* vocabula Atlantici sermonis retinere non audet, nisi Graece enuntiata. Sed vaga fuit enunciandi talia lubido, nullis definita praeceptis, vt in primis e Persicis et Medicis et Armenicis nominibus intelligi potest.

Est igitur *Volga*, ille *Araxes*, cuius ad orientem prisci Scythaे vicini Massagetis et Issedonibus degerunt.

Ddd 3

Mas-

(10) ἐν ἀναθάσῃ L. V. c. 6. (1) ib. L. I. c. 4. (2)

*De emendat. temp. f. 399.*

Massagetas enim non modo Herodotus, sed etiam omnis veterum turba ad borapelioten Caspii maris collocat. Laonicus Chalcocondylas ad septemtrionem Caspii maris ponit, (3) et praeterea adiicit, eos ante id tempus ad alteram Araxis ripam egisse, nunc autem traecto flumine citeriore partem tenere. Quis non videt Araxem illum esse Volgam? ni cui visum sit quoque, meridie non lucere. Hic fluuius cum latissime pateret et a multis gentibus accolletur, mirum non est, si quosdam suo insigniuit nomine. Ut nunc Bulgari a Volga profecti, nomen a fluuiio tractum conseruant, ita Russos opinor ab eodem dictos et Roxalanos, quasi Alanos ad Russum fluuium. Ptolemaei Βογδσηνοι, quasi *ad Russum* populi.

Hunc quoque illum esse Araxem iudico, ad quem contra Massagetas male res gessit Cyrus. Herodotus, cum audiuisset, Cyrus transmisso Araxe petiisse Massagetas et petiisse a Babylone, illum ipsum in Media Araxem dici putauit in Clio. Qui eum non satis intellexere, Araxem alium sibi quaesiuere sub oriente, ut traecto eo, petere Massagetas posset Cyrus. Isaacus Vossius Oxum sibi elegit, quem Christophorus Cellarius fecutus est. Nihil tamen habent, quod pro ea sententia pugnet, et longius ab Oxo siti fuere Massagetae, quocirca veteres quidam, teste Plinio, (3) ultra Iaxartem posuere aras Cyri, veluti ille esset Araxes. Iaxartem autem Scythae, ut ait Plinius, (4) seu quicumque alii fluminis accolae, Silyn vocarunt, aut fortassis Sibyn quod nomen adhuc permanet. Neque tamen etiam pro Iaxarte aliqua idonea verosimilitudo

(3) f. 62. et 67. ed. Paris. (4) L. VI. c. 16.

litudo pugnat. Profectus autem est Cyrus in hanc expeditionem , vt nobis videtur, non contra solos Massagetas , sed in primis contra Scythes. Haesit enim temper Regum Periarum animis, quam impotenter Scythae deuictis Medis in Asia superiori egissent. Atque illud tot bellorum initium est ab Herodoto indicatum, qui summa cura hoc egit , vt ostenderet, per quas caussas bella ex bellis seminata fuerint. Babylonem Cyrus cepit secundum Vſterii rationes anno periodi Iulianae 4176. Anno vno post et paullo amplius , si Xenophonti credimus, gentes a Syria vsque ad mare Erythraeum sibi subiecit. Inde adhuc sunt anni minimum septem vsque ad extrema Cyri. Hoc omni tempore tum in Asia minori , tum ad Caucasum & in Scythia res potuit gerere, donec apertis per arma regionibus, traiecto nauibus et per pontem a se factum , Volga, Massagetas est adortus.

Quo autem tempore Scytha Araxem traiecerint et Tanaim , ostendam postea. Nam id potius & prius quaerendum est , quibus regionum spatiis Herodoti aetate coluerint.

DE SCYTHIAE SITV,  
QVALIS FVT  
SVB AETATEM HERODOTI.  
*Auctore*

T. S. Bayero.

M. Maio.  
1726.

**Q**ui primi omnium Graecorum , quos ex veteris memoriae miserabili strage relictos accepimus , de Scythis aliquid prodiderunt , Onomacritus et Aeschylus , post Anacharsidis Scytha in Graeciam aduentum scripsere . Is , vt Herodotus testatur , Gnuri filius , Saulii regis Scytharum frater fuit : Gnurus autem Lyci , Lycus Spargapithis . Quamquam Samosatensis in Scytha , patrem non Gnum , sed Daucetam , nescio quo auctore , citat , et Diogenes Laertius fratrem Caduidem regem . Athenas venit , teste Sofistrate Rhodio et Ολύμπιάδων ἀναγραφῇ Olympiadis XLVIII. anno primo , archonte Eucrate , qui anno vno interiesto , Soloni successerat : annis admodum XVII , postquam Asiae imperio exciderunt Scytha et seruile bellum reperere domi . Ex quo opinor factum , vt nullae res Scytharum , ita Graecorum monumentis celebarentur , quam quod de bello ciuili recens gesto ab Anacharside audierant . Erat autem Graeca natus matre : vt potius credam Diogeni Laertio , Graece locutum , quam Luciano aut commentitiis Anacharsidis epistolis , non

non nisi Scythicae linguae facultatem habuisse. Situs tamen locorum Scythicorum nondum planissime explorari potuisse videntur. Anacharsin Athenis aut in alia Graeciae vrbe cognoscere poterat Anaximander Milesius, haud minor viginti annis. Is inter primos ab Agathemero (1) refertur, qui geographiam tabulis comprehendenterunt. Ab eo fortassis Onomacritus sua mutuatus est, cum argonautica, Orphei nomine, Athenis Olymp. LXV. ederet. Pindarus quidem Abarin quoque, quem alii Scytham, alii Hyperboreum putant fuisse, sub Croesi temporibus Athenas venisse cecinit, sed videtur Anacharsin habuisse in animo, qui iis fere temporibus in vrbe fuit. Nec dubito, quin illius auctoritate decepti fuerint Eusebius & Hieronymus, cum ad Olymp. LIV. annum II. et initia Croesi, Abarin ponunt e Scythia venisse in Graeciam. Hippostratus III. Olympiade, alii apud Harpocrationem Olymp. XXI. eo venisse contendunt. Immo Firmicus Maternus, vt eum Iosephus Scaliger et Maussacus emendarunt, Troianis temporibus aequalem facit. His autem temporibus nulli Scythae noti esse potuerunt, vt cum Herodoto, Harpocratone et scholia Aristophanis *ἰπτέων* malim Abarin Hyperboreum dici, atque ex Graecis ad Pontum coloniis repetere, quos ego Hyperboreos in Delum et Athenas sacrificia legatosque misisse censeo, vt in alia dissertatione postea ostendam. Nisi Herodoti Melpomene potius vera nobis cecinit, Abarim illum inficetam esse fabulam. Anacharsin vtique nullus Scytha videtur secu-

Eee

tus

(1) p. 1. ed. Hudson.

tus in Graeciam , si eum frater in nemore Graecis sacris operantem, odio externarum religionum sagittis, traiecit: quamquam me non fugit , alios auctores esse, ad centum vsque annos vitam produxisse Anacharsin. In Onomacrito autem , siue ab Anaximandro , siue ab alio acceperit, multa iejuna et futilia sunt, vt in ignotis adhuc regionibus et populis . Quaedam tamen , vt explorata , ab Herodotea narratione proprius absunt. Nam quoad Onomacriti heroes cursum nauigationis per Ponti littora meridionalia peragunt, nota et vera locorum nomina legimus: cum autem ad occidentem et orientem flectunt iter, tum nec Amazones, nec Tauri suis in sedibus colunt , et ab Araxe fluvio scaturigines Thermodontis, Phasidis Tanaisque deriuantur , quod in tanta antiquitate et longinuitate , non abhorrente a commentis fluiiorum cursu , feren- dum est. Ad septemtrionem autem Onomacritus per- miscet omnia, populosque, quos fando audiuerat, hac illac temere proiicit. Quod autem in eo vitium est maximum, Maeotin paludem cum mari septemtrionali coniungit perpetuo alueo. Illic ponit Pactos , Arcteos , Lelios cru- deles : illic

Τοξοφόρες τε Σκύθας , Αρεως πιγίς θεράποντας , & Argonautas per Tauros , Hyperboreos , Nomadas, Caspios, Riphaeos in oceanum Hyperboreum seu Mortuum ad Macrobios dicit & ad Cimmerios intra Riphaeum et Caspium montem in tenebris viuentes , deinde in Hiberniam perque Herculeum fretum ad columnas Her- culis, idque quo magis sit ridiculum, paucorum dierum de- cursu. Haec imperite fingendi licentia patescit Ono- macriti inicitiam, cui nihil fere praeter nomen Scytharum  
vici-

vicinorumque quorundam populorum intotuerat. Itaque caendum est sedulo, ne hunc hominem ignotis rebus vanisque figmentis oblectantem alios, tamquam bonum et accuratum de illis terris testem citemus, vt secerre ante nos nonnulli eruditii viri. Qui secundum eum Argonautica scripsierunt, non quae gentes reuera antiquissimis temporibus isthic coluerint, sed quas sua aetate aut quoconque alio tempore isthic recenserit acceperant, ab Argonautis petitas tradiderunt. Itaque in iis maiori etiam opus est cautione, quam quae ab illis eruditis viris, quos dixi antea, adhibita est, qui dissonantia in Onomacrito et ceteris argonauticis scriptoribus comparando fecere, vt erroribus plena essent omnia.

Aeschylus Onomacrito concinit in Prometheus vincito, Scythes supra Maeotin coluisse. Sic enim canit:

Καὶ Σκύθης ὄμιλος  
Οἱ γᾶς ἔχατον πόρον ἀμφὶ<sup>i</sup>  
Μαιῶτιν ἔχοσι λίμναν  
*Et Scythica turba,*  
*Quae terrae extremam regionem, circum*  
*Maeotin tenet paludem.*

Idem Scytharum regionem in solitudinibus collocat et ad oceanum usque producit, quocum misceatur Maeotis. Noti isthic sunt ei Scytha Nomades

Οἱ πλευταὶ σέγυς  
Πεδάρσιοι νάισσιν ἐπ' ἐυκύκλοις ὄχοις  
Ἐκηβόλοις τόξοισιν ἐξηρτημένοι  
*Qui casas vitiles*  
*Incolunt, sublimes super rotundis curribus,*  
*Arcibus longe iaculantibus instructi.*

Noti eidem Chalybes et Amazones et angustiae Maeoticae.

Ista Scythicarum regionum ignoratio mansit usque ad Darii expeditionem : tum enim per Ionas ceterosque Graeci corporis , qui in exercitu eius erant, inuestigatum est, quodin eum latierat diem. Ex eorum numero Scylax Caryandensis circum littora exploratum est a Dario missus , cuius periplus exstat. Pontica littora multo solertius descripsit quam Onomacritus et quaedam eorum tractuum alia , conuenientius Herodoto. Herodotus Scylacem nouerat a Dario Hytaspe ad describenda Asiae littora missum : Europae autem et Scythiae littora eundem obiisse non nouerat. Aelius vero Dionysius Halicarnassensis in libro de Alexandria primo auctor est, Sylacem Europae et Scythiae periplus dedicasse Dario, ut habet incertus auctor in elogio Scylacis edito primum ab Hoeschelio. Siue Darii mandato , siue priuato consilio littora illa obierit, seu ab aliis nautis tradita tantum consignauerit (Caryanda autem patria eius, Cariae iuncta fuit, et Carum nauigationes sunt notissimae (2)) nihil tamen est verius , quam ad hanc aetatem referri debere eius periplus. Haud sum ignarus , Henricum Doduekum , quem ego virum semper feci maximi , Scylacem hunc longe infra Herodoti aetatem ponere , sed is nescio quomodo mihi in tota illa disputatione , tamquam in fallo sine remigio et velis iactari videtur. Quae enim sunt tanta argumenta , ut eius sententiam preeferam Isaacii Vossii ceterorumque opinioni? Quia, inquit , quaedam in periplo Scylacis leguntur , quae memoriam inferiorum

(2) L. I. c. 171.

rum aetatum attingunt. Fateor id ita esse, sed ex iis quaedam acutissimi iudicio viri ad Olympiadem CXI. a-  
lia ad Olymp. CXVI. nonnulla ad Olymp. CXXXV.  
referenda sunt, quod sex et nonaginta annorum interual-  
lum est. E contrario in Scylace reperias certas antiquio-  
ris aei notas. Agnouit id Doduellus quoque in multis  
et in vno maxime, quod Scylax Tyrum vocat insulam,  
quae peninsula post Macedonis expeditionem Persicam  
fuit. Vixit igitur ante id bellum. Praeterea Sylacem  
scripsisse ea aetate necesse est, cum Africæ omnis A-  
siaeque littora notiora essent, quam Italiae, Galliae, Hi-  
spaniaeque. Idcirco apud eum Volsci tantum et Cam-  
pani et Samnites, at Roma nulla, fama vrbis nondum  
per Graeciam peruvulgata. Ex quo mihi res fit sine con-  
trouersia, cetera aliis temporibus conuenientia, scriba-  
rum curiositate allita fuisse Sylaci, deinde in librum rece-  
pta, vt multis aliis, praesertim huiusmodi scriptoribus  
accidit. Post hoc tempus tantum Athenis cognoscendi  
has regiones desiderium obtinuit, vt optimates consu-  
merent in foro totos dies, ἐν τοῖς Θαύμασι, καὶ πρὸς  
τὰς ἐκ τῆς Φάσιδος καὶ Βορυθέντες καταπλέοντας spe-  
ctandis praestigiis et cum iis qui a Phaside aut Borysthene  
admirauerant, vt ab iis cognoscerent miracula, vt ha-  
bet apud Athenaeum Aristoteles. (3) Haec vero Θαύμα-  
τα peperere insanis de Scythis fabulas, quo non imme-  
rito Heraclidis Abarim retulisse videtur Maussacus.

At Herodotus alio ingenio fuit, qui cum Olbitis Pon-

ticisque aliis sic est versatus, vt non omnino fabulas sper-

Eee 3

neret

(3) f. 6.

neret omnes, haud ignarus, in iis nonnumquam veritatis aliquid recondi, tamen, quod esset in omni re verissimum, sagaciter inuestigaret. Quibus igitur in locis sub Darii expeditionem Scythae degerint, vt ab Herodoto est vulgatum, explicabo. Tenuere autem regiones inter Borysthenem et Tanaim. Ad meridiem illis Tanais, vt noster ait, nulli vero ad eius vltiorem ripam Scythae, nisi exules a reliquo corpore et rebelles, sed longius ad orientem a ripa Tanais reiecti. Iam Herodotus ab Istro ad Borysthenem decem dierum iter esse scribit, a Borystheni ad Maeotin paludem decem quoque dierum, ab oriente Scythiae ad occidentem viginti numerat dies, a Ponto totidem ad Melanchlaenos, ad septemtrionem Scythiae oppositos. In diem ducena stadia numerat. Quem nunc in modum nos expediemus, cum omnis de stadiis quaestio difficultatibus maximis impedita est? Videor mihi viam reperisse, qua quam potest fieri proxime accedam ad veritatem. Eratosthenes, vt Strabo auctor est, in gradum vnum aequatoris stadia locc dabat, at Claudius Ptolemaeus ex diligenti, vt ait, obseruatione, tantummodo stadia lō. quem magna veterum turba consequitur. Herodotea stadia concordant cum stadiis Ptolemaei, vt patet perspicue, comparantibus Herodoti dimensiones, quas subieci, cum exaftissimis tabulis Delilianis, quas in his terrarum tractibus collocandis fecuti sumus.

Ait autem Herodotus

Pontum Euxinum latum esse qua

est latissimus

3200 stadia

Os

<b>O</b> s Ponti seu Bosphorum esse latum	4
<b>O</b> s Ponti esse longum vsque ad Pro-	
pontidem, admodum	120
Propontidem esse latam	500
Et longam	1400

Secundum has igitur Herodoti rationes, in iis regionibus, de quibus quaerimus, in gradum longitudinis vnum stadia CCXLVII erunt numeranda, singula pedum sexcentorum, vt Herodotus diserte postulat: seu pedes 208200 Nunc dimensionem Scythiae ad calculum exigemus.

*dies, stadia, gradus cum pedibus*

**A**b Istro ad Borysthe-

nem	10	2000	5	159000
-----	----	------	---	--------

**A**Borysthene ad

Maeotin	10	2000	5	159000
---------	----	------	---	--------

**A**b oriente ad occi-

dentem Scythiae	20	4000	11	109800
-----------------	----	------	----	--------

**A**Ponto ad Melan-

chlaenos seu septemtr.	20	4000	8	5
------------------------	----	------	---	---

Duae dimensiones Herodoteae, quas primo loco posui, non admodum abhorrent a veritate, si ab Istro ad Borysthensem propter littus iter instituas, quae caussa est, vt Maeotis quoque a Borysthene aequali spatio dirimatur. Nam vtrobique, per littorum in interiora recedentium sinus, cursus interceptus fuit. At in agris Scythicis libero patentique campo, qui nec sylvis nec montium iugis impeditur, rectum erat iter. In vno ambigi potest, cum ab occidente orientem versus viginti viam dierum esse Herodo-

rodotus scribit , a quibus quasi carceribus suos curosres in stadium hoc emittat. Egregie autem aperit sententiam suam Herodotus , cum Scythiam intra Agathyrsos , Neuros, Androphagos, Melanchlaenos includit. Quod eius dictum nisi in oculis feramus , nusquam cohaerebit res : nunc autem omnia inter se optime colligata a nobis comparataque reperiatis , vt aut sic fuisse Scythes sitos putem , aut , quoniam in his nulla tanta esse certitudo potest , haud longe nos a veritate aberrasse. Est igitur Scythia sita intra 45. et 57. fere gradum longitudinis, at 47. et 55. gradum latitudinis , e qua coloni transgressi Borysthenem, aliquantum terrarum, vsque ad Tiram occuparunt. Ego vero haud grauate non modo eius Scythiae , sed et vicinarum gentium , quae seu intra huius imperii proximos fines , seu aliquanto etiam longius sitae fuerunt , regiones ex Herodo exhibebo in tabula.

Primum omnium is ordo est fluminum , quae Herodotus habet, (4) Ex Scythia, quinque fluuii decurrentes augebant Istrum. Porata , (Ammiano Marcellino Porota,) magnus fluuius , ab oriente descendens, ad hoc tempus priscum nomen retinet. Quis enim ignorat Prutam ? Magnus vtique fluuius in quem incident Colazinus, Cosmanus, Zuzur, Zur, Bassenus , Caroccia, Caminea, Caldaruissa, Zizia , Valemare , Valebratulenii, Mosna , Nirnoua, Calmazuia, Sapusna , Strimba, Serata orientalis et occidentalis , Cigieza, Larga et Ilana, vt eos nomine recenset Demetrius Cantemirus princeps eruditissimus in historia Moldaviae MSta. Graeci postea nomen

(4) IV. 47. 48.

men Poratae Herodoto teste inflexerunt, vt deprauatum esset Πυρετὸς quasi *Igneum* dicas, vnde Constantino Porphyrogenetae est Βέρτος<sup>(8)</sup> et nunc *Prut*. Tiarantus Herodoti, *Alaut* fluuius est. Nam ab Herodoto inter Tiarantum et Poratam tria magna flumina ponuntur, quot vndeque inter hunc fluuium et Alautam intersunt. Quo accedit, quod Ptolemaeus quoque Alautam suum sic posuit. Ex tribus autem Ordissius est is, qui adhuc nomen vetustum retinet: *Argischa* enim vocatur. Post Herodotum dictus a Graecis Αρδασκός, vt adparet e scholiis in Hesiodum. (9) Naparis Herodoti est *Ialoniza*. Ararus, Ptolemaeo Hierastus (quod nomen vetus Prutae fuisse Cantemirus putauit) Constantino Porphyrogenette Σέρτος, corrupto veteri vocabulo, nunc quoque *Siretus* et *Moldaua* quibusdam dicitur. Est enim fluuius Moldauiae proprius ex ultimis finibus versus Poloniam profluens atque duobus ostiis in Danubium se exonerans, vndeque montibus et saltibus cinctus, vt Cantemirus Princeps testatur. Secundum hos fluuios Maris nos aduertit, qui adhuc a fontibus ipsis retinet nomen vetus *Marosch* seu *Merisch*, donec ad Segedinum, amissio nomine, Tibisco miscetur, quocum in Istrum se exonerat. Maris autem Herodoto separatur a Scythicis fluminibus, nec nobis memorandus, nisi ad eum Agathyrsos ponebat Herodotus. Fluuios, qui ab Haemo et a Thracia exonerantur in Istrum, non attingo, quoniam nihil ad propositum nostrum conferunt. Sequitur Tiras, qui apud

Fff

Tur-

(8) *De administr. imperio f. 108. ed. Band.* (9)  
p. 261. ed. Heinzi.

Turcas in *Turlae* cognomento aliquantum veteris nominis retinet, Constantino Porphyrogennetae et Graecis aliis *Danastris*, vnde nunc *Dnister* dicitur. Oritur e lacu, Scythes a Neuris separante. Ex lacu dico, Herodoti fide, qualscunque scaturigo fluminis sit. Secundum Tiram est *Hypanis* fluuius, qui nunc *Bog.* Rudbequius Pripelium esse censuit: cui alibi satisfecisse mihi videor. (10) *Hypanis* oritur e lacu, qui Μήτηρ Υπάνιος Herodoto dicitur et in Scythica regione ad occidentem est situs, iuxta quae loca ἄγριοι ἵπποι λευκοὶ. Ostium fluminis huius Dio Chrysostomus (1) sic describit: prope a mari efficere ingens stagnum, limosum et tranquillum serena tempestate; fluuum ipsum esse profundum et vehementem, ripam paludosam, arundine et arboribus obsitam, adeo ut arborum quaedam in stagno quoque adpareant, malis nauium similes: isthic salis esse copiam. In *Hypanim*, teste Herodoto, infunditur parvus et amarus riuus *Amaxampes* dictus *Scythis* (quod ille Graecis ἡ ερας ὁ δύξ significare scribit) qui terminus est *Alazonum* et *Scytharum Aratorum*. Abest autem a mari octingentis stadiis: nam quatuor dierum cursu ad mare usque ab *Amaxampe* amarus dicitur fluxisse *Hypanis*. Alio loco (2) Εξ αμωῆρ regionem ponit Herodotus intra Borysthenem et *Hypanim*, dicitque ex ea regione fluere *Examperiuum*, quem auctea *Amaxampem* vocauerat. Cum ad hunc usque riuum paene aequali interuallo *Hypanis* et *Tiras* fluunt, paullo infra riuum amarum, *Tiras* in ambitum deflectit et *Hypanis* quoque diuergit secundum Herodotum.

(10) *de nimo Rhadio p. 9.* (1) *f. 437.* (2)  
*f. 157.*

tum. Quae signa me induxerunt, ut Amaxampem ea in regione ponerem, vbi nunc fluuiolus *Sinauda* situs est. Borysthenes Hypanim excipit, incerto auctori peripli Ponti Euxini Danapris dictus, ex eoque nunc *Dniper* veteri Scythico vocabulo. Post Herodotum quidam qui longinquiora, quae comperta non habebant, tradere tamen sunt ausi, ex montibus, quos Alaunicos vocant, fontes Borysthenis repetunt. Sed mirandum non est, si omnium capita fluminum aut in lacubus et paludibus aut in montibus ponuntur a priscis geographis, ne quid ignorare videantur. Et Borysthenis quidem fontes Matthias Miechouius Canonicus Cracouiensis annotauit, in Sendomiriensis agri planicie scaturire, non in montibus, quales eo in agro sunt nulli. Borysthenes fluuius est, teste Herodoto, nulli nisi Nilo secundus: purissimo alueo labitur et sata penes se foecunda habet salisque copiam in ostio καὶ κήτεα μεγάλα ἀνάκαυθα τὰ Αντακάους καλέσσι, quem piscem torrent accolae fluminis. Cognoscebatur Graecis fluuius ab Gerrheo regione, quae quatuordecim nauigatione dierum distabat a mari. Ab eadem regione Gerrheo decem dierum via Scytha Aratores ad Borysthenem colebant. In ostio Borysthenes et Hypanis eodem lacu miscebantur, priusquam in Pontum se exonerabant. Ostiorum vtriusque fluuii latitudo aequalis, lacus ducentorum stadiorum tractu porrigebatur. Promontorium, quod est extreum, medio inter vtrumque fluuium situ, Hippoleon vocabatur, Cereris delubro insigne. In eo autem promontorio, cuius e regione in mare se praecipitabant e lacu flumina, propugnaculum Alestoros (coniuix ea Sauromatarum regis fuit) Dionis Chrysostomi aetate

tate erat. Ad ortum solis Panticape ex lacu quodam a borea fluens Hylaeamque regionem stringens infundebatur Borystheni. Situm eius isthic pono, vbi *Samara* nunc est, aut paullo infra hunc riuum. Nam Scythae *Agricolae*, cognati Scytharum *Agricolarum* ad occidentalem Borysthenis ripam degentium, a Panticape undecim itinere dierum, hoc est ad Gerrhum usque colebant. Igitur haud longe a mari Panticape absuit. Dionysius utique Periegetes aliquique haud longe a Ponto ostia eius describunt, ex quo opinor factum, ut quidam Panticapen comparantes cum Hypani, dicerent, infra Olbiam seu Borysthenem urbem Borystheneis misceri fluctibus. (3) Secundum Panticapen Hypacris ex lacu per medios Scythes Nomadas delapsus a dextero relinquens Hylaeos, ad Cercinitin urbem infundebatur Ponto. Gerrhus autem fluuius in ipsis fontibus regionem Gerrhum attinens, medius inter Scythes Nomadas & Regios fluebat, donec in Hypacrin aquas fundebat suas. Apud Claudiump Ptolemaeum confusa sunt omnia: Hypanis aliquot gradibus orientalior Borysthene describitur, ut possit ex eo suspicari, Hypacrin esse in Ptolemaeo scribendum. Diuersus ab eo apud Ptolemaeum est Cercinitis fluuius, qui in sinum Cercinitin Pontumque se exonerat, ut de Gerrho et Hypaci Herodotus habet: at Gerrhus a Ptolemaeo longe hinc reicitur ad orientem, veluti qui miscetur Maeoti. Quod ne quis adeo miretur, in Ptolemaeo sciat numeros graduum esse deprauatos. Si enim Alexandrinum geographum recte inspicias, Hypanis ad occi-

(3) *Plinius L. IV. c. 12.*

occidentem Borysthenis collocatur, disertis verbis. Est ergo Cercinitis Ptolemai, idem, qui erat Herodoti Hypacris. Qui autem factum sit, ut Gerrhus in Maeotin defluere videretur Ptolemaeo, qui Herodoti testimonio Hypacri & Ponto miscebatur, illum scrupulum facile tollam e Plinii egregio quidem, sed corrupto loco (4) *Sinus*, inquit, *Carcinitis appellatur, flumen Pacyris, a tergo lacus Buges fossa emissus in mare, Ipse Buges a Coreto, Maeotis lacus sinu, petroso discluditur dorso. Recipit amnes, Gerrhum, Hypanim, ex diuerso venientes tractu. Nam Gerrbus Basiliadas et Nomadas separat: Hypanis per Nomadas et Hylaeos fluit, manu facto alueo in Bugem, naturali in Coretum.* Vbi Pacyrin esse Herodoti Hypacrin, Harduinus iam annotauit: Bugen esse Βύκην λίμνην, Bycen Flacci et Bucen Melae idem monuit. Sed manet scrupulus, quod Coretum non animaduertit esse legendum *Cercinitin*, idque ex Herodoto, quem Plinius hoc loco fecutus est. Nam qui poterat Gerrhus ad orientem in Bycen lacum, Hypacris ab occidente in Coretum seu ultra Bycen exonerari et duo tamen flumina, vt Mela loquitur, uno ostio effluere, diuersis fontibus & aliunde dilapsa, et quidem influere in Cercinitin, vt non obscure Plinius innuit. Ita igitur est: Hypacris et Gerrhus uno ostio in Cercinitin et Pontum voluebantur, ducta tamen vsque in Byzen & Maeotin paludem fossa, per quam altero ostio, sed manu facto, exonerabantur. Haec est celebris illa fossa, quam a vernis Scytharum ductam Herodotus commemorat. Constan-

Fff 3

tinus

(4) L. IV. c. 12.

tinus Porphyrogeneta ait (5) illam sua aetate fossam terra obrutam fuisse πατεχώθη ἡ ἀυτη σύδα καὶ ἐσδάσος ἐγένετο τολὺ. Tanais ultimus fluuiorum Scythicorum, nunc **Tan & Don**, ἐκ λίμνης μεγάλης, Herodoto teste, fluebat, (quae λίμνη nunc Juan nomen habet) & precipitabat se in Maeotin. Sed perquam est obscurum, quos Herodotus dicat fluuios *Lycum Oarun: et Syrgin* in Maeotin incidere. Lycum etiam Ptolemaeus habet ad occidentem, tribus citeriorem gradibus Tanai, itaque forte est fluuius *Silik*, qui aliquid veteris nominis retinuit, nisi illud ipsum vetus nomen est, ex quo Graeci pro consuetudine sua inflexo fecere Lycum, ut minus barbare sonaret. Oarus autem, si est Ptolemaei Agarus, rationes Herodoti turbat: esset enim ad occidentem Lyci ponendus. Nunc obscurum est quidem, quo in loco eum positum fuisse oporteat, certum est tamen, inter Lycum & Tanaim ab Herodoto collocari. Syrgis alibi Σεγις dictus Herodoto (6) influit in Tanaim. Necesse est igitur esse eum, quem Tanaim minorem vocant & *Seviersky*, quod vestigium veteris est vocabuli. Haec flumina Herodotus dicit a Thyssagetas fluere; (7) non utique ex ipsa Thyssageterum terra, sed ex vicina regione, nam paullo postquam id dixerat, Oarum fluuium in desertis ponit, quae infra Thyssagetas, seu ad meridiem iis erant. Reliquis est Araxes seu Volga, ut supra demonstravi. Duo maria Pontus Euxinus & Caspium mare notiora sunt, quam ut de iis quidquam dicendum

(5) *I. c. f. 113.* (6) *L. VI. c. 123.* (7) *L. IV. 123.*

dum esse videatur. Aristeas ille Proconnesius Νοτίνη  
 Σάλασταν vocat Pontum, *australem* Scythis respicien-  
 tibus: at Herodotus Βορηίην, a Graecia. In Herodoto  
 id quoque summam hominis accurationem & fidem in-  
 dicat, quod Caspium mare non ut nostrum nonnulli  
 quadratum, sed quod paucis ante annis deprehensum est  
 a Ruthenis, longius porrectum prodit, pro portione la-  
 titudinis. Ad occidentem Caspii maris Caucasum collo-  
 cat, ad orientem vero immensam planitatem, cuius par-  
 tem non minimam Massagetae teneant. Haec planities  
 celebratissima est apud Arabas Persasque scriptores no-  
 mine *Kapbjak* et *Dascht*, quod *planitem* significat. De-  
 scribit denique, sine nomine tamen, montes ad  
 remotiorem orientem. Volga enim ad occidentem,  
 altiori ripa includitur, vnde ea regio *Nagorna*, id est,  
*montana* hodie dicitur. Nequaquam isthic montes  
 sunt, sed planities altiori cum ripa. Ad orientem au-  
 tem ingens est planities, quae regio idcirco *Lugavoia*  
 hoc est *campestris* vocatur. Sunt igitur montes illi ab  
 Herodoto memorati, nulli alii, quam qui nunc dicun-  
 tur *Vergaturii*, olim *Riphaei* dicti.

Postquam haec, quae nulla vis temporum, nulla  
 fortunae iniuria labefactare potuit, maria, flumina  
 montes, planitem, suis in locis terminavi, his v-  
 tar adiumentis ad describendas suis regionibus gen-  
 tes. Timonax primo de Scythis libro (8) quin-  
 quaginta diuersas Scytharum gentes esse scribit. Cum  
 autem incertum est, qua aetate Timonax haec scripserit,  
 sitne hoc de sua aetatis populis intelligendum, an ita a  
 supe-

(8) ap. *Schol. Apollonii Rhodii L. IV. v. 321.*

superiorum temporum scriptoribus acceperit, nihil compendii ex eius testimonio facio. Sequare igitur naturae quasi ordinem, ac positus populorum ex Herodoto definitiam, confirmaturus opinionem meam idoneis argumentis, vbi opus esse videbitur. Iam ab Istro, in littore Ponti Tiritae occurrunt iuxta ostia Tirae, vbi nunc Bielogrodum et Butziaki populi. Mediterranea Scythae Aratores tenuere a fluvio Tiaranto vsque ad Tiram, quos fluvios Herodotus idcirco Scythiae annumeravit. Tenuere igitur Valachiam, Moldauiam et exiguum tractum Transyluaniae. Magis ad occidentem erant Agathyrsi, gens et ipsa a Scythis profecta, ultra Marin fluum, hoc est in Transylvania occidentali. Transgressis Tiram, ad littus Callipidae et supra eos Alazones, utriusque intra Tiram et Hypanim. Alazonum situs certioribus notis intelligitur, quam Callipidarum. Nam mater Hypanis secundum Herodotum discernit Alazonas a Scythis: ad orientem, Alazonum fines sunt e regione Amaxampes. Relinquitur nunc regio ad mare vsque Callipidis iuxta Olbitas, ut Halicarnassensis habet. Olbitae populi επὶ τῷ Τιτανίῳ supra Hypanim, Alazones πάρα τὸν Τιτανίῳ ad Hypanim, utriusque ad occidentem Olbiae urbis, Alazones tamen boreiores Callipidis. Ergo Alazones in palatinatus Podoliae meridionali parte ad Caminiecum et in Braclatensi, qua inter Bogum et Nisterum porrigitur, Callipidae vero in orientali Braclatensium tractu et in Ozacouensi agro. Intra Hypanim et Borysthenem Olbitae Graeca colonia, vbi nunc Dzike Pole campi deserti et Ozacouensis agri aliqua pars est. Ulteriora insederant Scythae Αγορῆρες Aratores, cognati Scythis, quos

quos supra in Valachia et Moldauia constitui, tum necessitudine proxima tum morum similitudine. Dirempta erat vtriusque quasi Scytharum Aratorum corporis coniunctio, ad septemtrionem apud fontes Tirae per Neuros, ab Alazonibus per fontem Hypanim ipsum, vsque ad Hamaxampen. Gerrhus ad Borysthenis fluvii orientem regio, aberat a mari quatuordecim dierum iter. Ab ea regione decem dierum itinere, Scythaes Agricolae colebant vsque ad Olbitas. Incoluere igitur palatinatum Bracławensem, quidquid regionum a fontibus Bogi ad Kiouiam vsque inter Borysthenem et Hypanim est, praeterquam quod ad confluentes vtriusque fluminis Olbitae coluere. Neuri a fontibus Tirae supra Scythaes Aratores vsque ad Borysthenem egerunt, in parte palatinatus Leopolienensis Belzensis et Volhyniensis orientali. Quae regio ab iis est Neuris dicta. (9) Magis ad occidentem Geloni et Budini, vbi nunc Chelmensis et Brescianensis palatinatus est. Antiquitus Neuri ad orientem Borysthenis sedes habuerunt, supra Scythaes Agricolias, (10) Neugoi sūi Νευγῶν̄ dicti Graecis scriptoribus. (1) Sed vna γενεᾶ ante Darii expeditionem, quoniam tanta vis serpentium ex eorum terra naſcebatur et a septemtrione e solitudine adueniebat, vt persistere amplius ea in regione non possent, ad Budinos commigrarunt, a quibus in vicinitatem agrorum admissi sunt. Anno periodi Iulianae 4199 Babylonem recuperauit Darius atque ex eo tempore profectus ad bellum Scythicum, vt Herodotus

Ggg . in-

(9) *Herodotus L. IV. c. 51.* (10) *ib. c. 105.* (1)  
*Eustathius ad Dionysii v. 310.*

initio Melpomenes testatur. Vnam γενεὰν ab annis tribus et viginti describere videtur Herodotus, (2) vsque ad annos quatuor et triginta. Ergo Neuri circiter annum periodi Iulianae 4176 aut 4165 traiecerunt Borysthenem. Nihil tamen addit Herodotus, ex quo satis constet, vbi Neuri antea coluerint, seu vbi suas Geloni Budinique habuerint sedes. Ego quibus rationibus inductus suis eos locis posuerim, dicam. Budini, magna gens, Scythicae stirpis fuere, pulsi autem priscis temporibus a ceteris sui corporis, ex Scythia ad occidentem Borysthenis concesserunt. Ex eo enim nata est fabula Graecorum de Gelono et Agathyrso fratribus Scythia pulsis, quae ab Herodoto commemoratur. Ut autem Agathyrsi ad occidentem, ita Budini eodem se receperunt. Geloni autem Graeca colonia, teste Herodoto, misti Budinis, partem quiddam Graecæ consuetudinis retinuerre, partem adsciuere a barbaris mores Scythicos. Ex ea re euénit, vt Budini Gelonorum quoque nomine cierentur. Perperam vero hoc, iudice Herodoto, cum diuersae stirpis, diuersorum morum essent Geloni mistaque Graecis et Scythicis lingua vterentur, Budini tantum Scythica; cum Geloni agrum colerent, hortos haberent, vrbesque frequentarent, Budini autem tantummodo pecuariae rei operam darent. Ex ea tamen confusione fabula est excusa de Gelono, tamquam Scythicae familiae patre, cum nihil ad Budinos pertineret, nedum ad Scythes.

Vrbs

(2) Nam L. I. c. 7. in duas et viginti γενεὰς ἀνδρῶν nondum integras numerat annos 505. et L. II. c. 42. ait tres γενεὰς efficere annos centum.

Vrbs Gelonus in Budinis sita , Gelonis illis cognomen-  
tum originemque debuit. Muro circumdata fuit , cuius  
singula latera triginta stadiorum erant , aedes omnes e la-  
teribus , templa deorum Graecorum et aiae , simulacra  
autem lignea. Stephanus Byzantius vrbem in Sarmatis  
ponit : Γελωνοὶ πόλις Σαρματίας . Haec Budinorum  
et Neurorum migratio memorabilis est in septemtrionali  
historia. Nam , vt ex mythologis septemtrionalibus in-  
telligimus , ab eo tempore Odinus primus et Fenni , seu  
Neuri et Budini profecti sunt ad sinum Bothnicum et in  
ipsam Scandinauiam. Ergo Neuri coluere antea ad  
Desnam fluuium , postea vero in imo pede Lithuaniae et  
parte quadam Volhyniae , Budini autem et Geloni in Po-  
lesiae finibus. Supra Neuros et Budinos Herodotus defer-  
ta ponit ad septemtrionem , interserens , quantum consta-  
ret sibi. Nam , vt habet in Theseo Plutarchus , qui ve-  
terum situs regionum describebant , si qua figerent cogni-  
tionem eorum , arenis et siccitate squalere agros , limosas  
esse paludes et Scythica iuga et mare glaciatum fingebant ,  
ne in tabulis inane spatium pro incomperto relinquere-  
tur. Venedi tamen et Electrides insulae ad mare Bal-  
thicum et Eridanus , qui nunc Duna est ad Rigam , no-  
ta fuere Herodoto nomina , sicuti alibi nobis dictum  
est. (3)

Ultra Borysthenem ad littus , Hylaea est regio , quae  
a Panticape et Hypacri includitur , sola totius Scythiae  
sylvestris. Nunc isthic locorum Tattaria Minor est. Su-  
pra eum tractum Scythaē Γεωγύοι seu Agricolae , trium

(3) *V. dissertationem de numo Rhodio*

itinere dierum, iuxta Panticapen porrecti in orientem, et Borysthene aduerso vndecim dierum, itaque fere ad fluum vsque, quem Desuam nunc vocant, in tractibus Vcraiae orientalis. Isthic Gerrhus regio et sepultra regum Scythicorum erant. Supra vero ἔρημος ἐπὶ πολλὸν ingens solitudo & ultra eam Androphagi ἔθνος ιδιον καὶ σδαρῶς Σκυθικόν, gens peculiaris et minime Scythica, in agri Smolensensis Vitepcensisque tractibus. Postea iam sola et inculta loca, ὅσα ἡμεῖς οὐδεν quantum scimus, inquit Herodotus. Traiecto Panticepe, Scythae Nomades iuxta Gerrhum fluum ad septemtrionem vergunt, pars et ad occidentem Hypacris sita. In Chersoneso Tauri colebant magnam partem ad occidentem, nam orientem peninsulae Scythae Regii Αγιστού seu Optumi dicti tenebant, qui inde usque ab hac regione ad Gerrhum et Cercinitin sinum, ultraque fossam e Gerrho ductam in Bycen, boream versus ad lacum, ex quo Tanais oritur, atque ad orientem ad ostia Tanais se porrigebant, quas regiones nunc Tattari Crimenses, Nogaici, Cosacique incolunt. Supra Scythas Regios Melanchlaeni, gens minime Scythica in agro Mosquensi vicinoque ad orientem tractu. Quod ad boream pergebat magis, lacubus, paludibus et desertis ab Herodoto repletum. Plutarchus, (5) ab his, qui Scythiam et Thraciam peragrauerant, frequentes lacus et paludes iis in locis reperiri compererat, ex quo Posidonius frigoris vehementiam per has regiones oriri credidit. Satis frigide hoc, ut opinor, Posidonius. Ultra lacus et deserta πτερὰ κεχυμένα plumas effusas aerem obtinere fe-

(5) T. II. f. 951.

rebant, ut prospectus iter facientium interciperetur: quod de niuis copia Herodotus interpretatur. Posteritas tamen huic Scytharum ioco indulxit, quae Pterophoron regionem appellavit, *ab assiduo niuis casu, pinnarum similitudine*, vt ait Plinius. (6) Regionem ad Maeotin, per quam Lycus et Oarus fluunt, Maeotida vocat Herodotus. Ultra Tanaim in intimo sinu Λάξιοι aut potius Λάξιοι Sauromatae colebant. Intimus sinus est, qua Maeotis longissime recedit intra Asiae littora, vbi Tanaim accipit. Hi Lazii Sauromatae boream versus coluere quindecim dierum via. Quo minus ad stadia hos dies comparem, obstaculo mihi est, quod, cum omnis ea regio montana est, plura in gradum vnum stadia et incerto numero consumuntur. Ut, cum Herodotus a Maeoti ad Phasin triginta dierum iter esse dicit, id vero quatuor admodum graduum spatium est, per montes et divertigia viarum, cum in planicie triginta dies gradus duodecim efficerent Herodoto. Posui itaque Lazios eo in loco vbi multis post Herodotum temporibus coluerunt. Herodotus(7) hic errauit, cum λαξίσς παρα τὴν λάξιν seu fortitionem, nescio quam, dictos esse, opinatus est. Nam veluti ad hoc ἐτυμον ludens δευτέραν τὴν λάξιν nactos ait Budinos, supra Lazios, magis ad boream. Amazonas Herodotus scribit profectas a Sarmatis iuxta Istrum et Ponti Maeotisque littora ad septemtrionem, apud Cremnos excensionem fecisse, et praedatorum more emensas spatium, quod a Cremnis ad ostia Tanais est, ad septemtrionem confedisse et commistas postea cum Scythis, consilium cepisse traiciendi Tanaim. (8) Hic sedes posuere suas inter Lazios

Ggg 3

et

(6) *L.IV.c.12.* (7) *L.IV.21.* (8) *Herod. L.IV.c.110.*

et Budinos, vtrisque ad meridiem. Lingua vsae sunt Sarmatica: Scythicam aegre didicere a Budinis, quorum concubitus petebant, ita ut σολοικίζην dicantur Herodoto. Supra Budinos ad boream desertum est septem diebus continuatum, videlicet a Syrgi fluuio et scaturigine Lyci atque Oari fluuiorum. Altius deserto illo Thyssagetae, Valerio Flacco Thyrsgetae, populus magnus, nec a Scythica stirpe, & cum iis Iyrcae, iisdem in tractibus colebant, apelioten versus. Orientaliores his Scythaæ Rebelles seu Exules, qui a Regiis Scythis profugerant. Omnis eorum regio πεδίας καὶ βαθύγεως campestris. A Scythis Exulibus incipiebat scrupera & confragosa regio, quae denique in excelsos montes surgebat. Iam in his regionibus montes sunt nulli, nisi ultra Volgam Riphæi, quos nunc Vergaturios vocant. Hi nobis in ordinando situ illarum gentium pro cynosura erunt. Est quidem tota ripa occidentalis Volgae dicta *Nagorna* seu *montana*: sed qui eo in fluuio nauigarunt, montes nulos videruut, tantummodo ripam altiorem, cum orientalis ripa palustris est et vna ingens planities. Ergo montes praeter Riphæos, reliqui sunt nulli. Sub radicibus horum montium Argippæi ab Herodoto ponuntur, iidem Sacri dicti et Calui a caluitie, quam et viri & mulieres ab incunabulis perpetuo seruarunt. Hi Calui καὶ σιμοὶ καὶ γένεα ἔχοντες μεγάλα, juris aequique periti legumque magistri, inuiolabiles non armis, quae nulla habent, sed religione omnium circa eos populorum. Ad eos Scythaæ et Graeci mercatores a Borysthene et Pontio omni commebant. Scythaæ ad eos se proficiisci dicebant, per septem interpres et linguas. Necesse est  
igi-

igitur, multos populos minores diuersarum stirpium interiectos fuisse, qui nunc ignorantur. Ultra Argippaeos ad boream nemo peruenit ob altitudinem montium, quorum ad radices Argippaei agebant. Argippaei ferebant, intra eos montes colere Aegipodas, ultraque esse, qui sex menses dormiant, quod extremam indicat septemtrionem. Ad orientem Argippaeorum Arimaspi erant, ita, ut his quoque essent ad boream Aegipodes et Gryphes auri custodes. Supra omnes Hyberborei incertis sub arcto spatiis collocantur. Omnes hae gentes supra Argippaeos et Issedonas neque Scythis neque Graecis mercatoribus noti fuere: soli Argippaei et Issedones de iis aliquid ferebant. Iam Massagetae sub ortu solis, trans Araxem, ad Caspium mare e regione Issedonum amplissimis terrarum tractibus continebantur. Issedones autem ad occidentem habebant Argippaeos vicinos, ad boream Arimaspos, ad meridiem, forte et ad orientem Massagetas, et pertingebant ad Caspium mare, ut haec dilucidius ex subiecta a nobis tabula adparebunt.

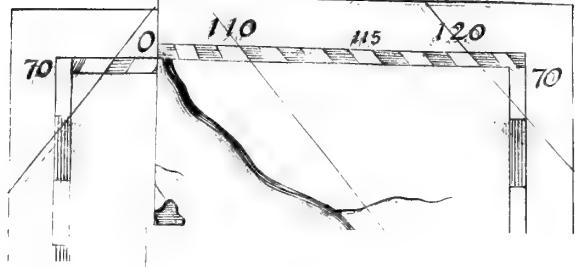
Sic igitur Herodoto duce gentium illarum situs descripsimus, ut natura spatiorum et indicia probabilia pati sunt visa. Quantum a nobis dissentiat Olaus Rudbequius et quam vagis ratiociniis populos illos per omnem septemtrionem ferat, in compendio dicam. Calipidae, inquit, sunt ad Borysthenem. Halizones, ubi nunc Halizum est. Scythae Aratores in Polonia Liuoniaque. Neuri ad Vistulæ orientalem ripam, ad Naruam usque, denique Scythae Agricolae, qui ad orientem Borysthenis erant, in Moscuensibus agris. Scythae Regii sunt Tatari Crimenses. Melanchlaeni sunt Moscuenses ad Lado-

gam

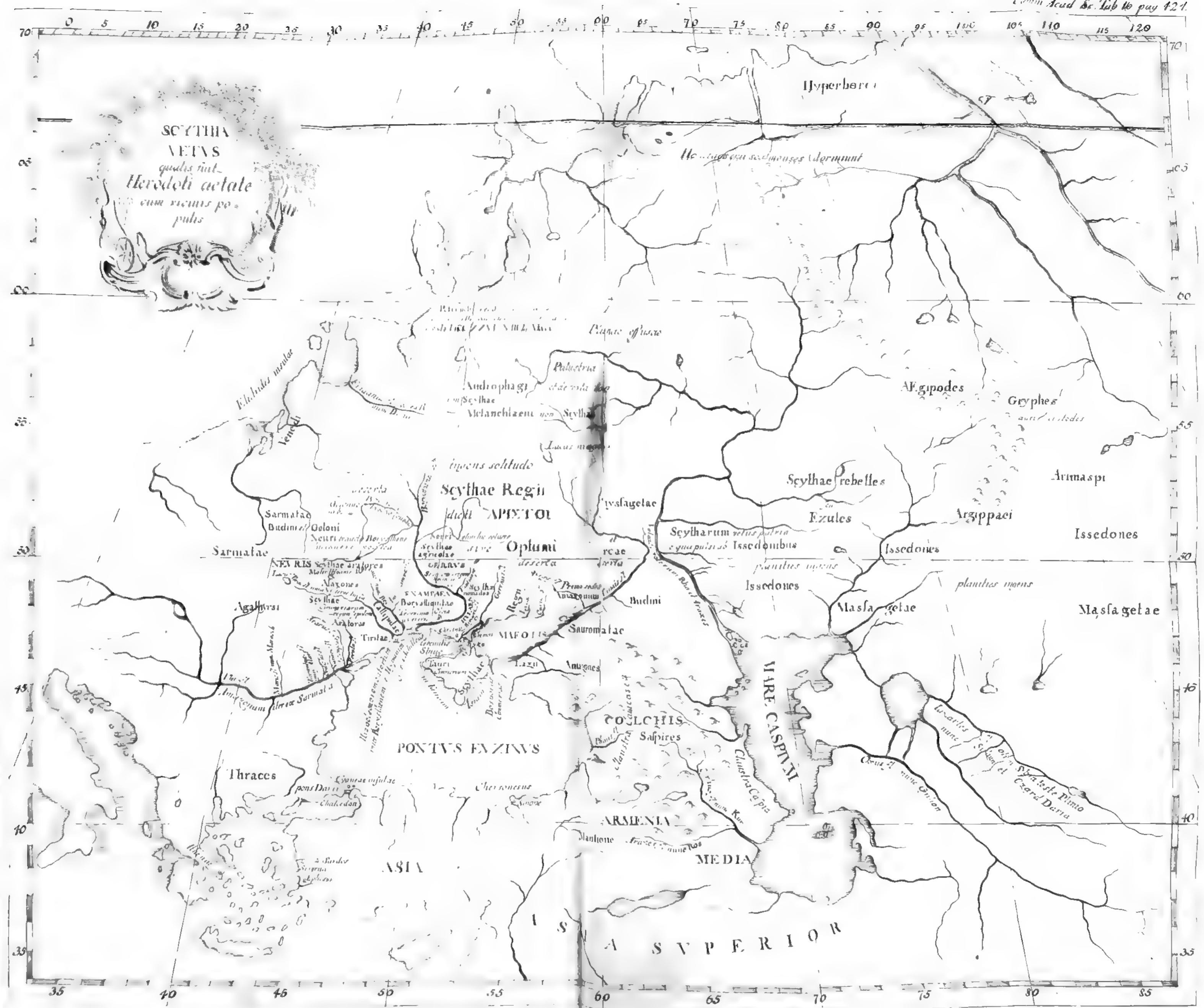
gam usque et Onegam. Budini sunt ad Balticum mare. Thyssagetae in Carelia et Sauolaxia. Iyrcae sunt in Russia ad Iyrgowitz. Scythae Calui sunt Lappones, Sacri sunt Vpsiunes. Argippaei sunt Sueci qui ab Arkippar Suecico vocabulo *telis pugnare* dicti, ad quos Scythae per septem linguas commearunt, Polonicam, Russicam, Lituanicam, Esthonicam, Finnicam, Lapponicam. Isedones denique sunt in Estonia. Quibus ego confutandis non immorabor, cum per se quisque nullo negotio intelligere potest, ex iis, quae diximus, nimis soluto vagoque cursu tetendisse a Borysthene in Scandinaviam, ut nec flumina, nec montes, nec paludes retardarent euro leuorem vento, atque eo in cursu seminasse passim Scythes Herodoti, veluti dentes Cadmei draconis.

Nicolaus Vitsenius in prima editione septentrionalis et orientalis Tartariae (9) parte prima de regionum harum antiquis incolis egit Herodotumque produxit, sed nusquam explicuit. In altera autem editione (10) partem illam primam prorsus omisit. Ne quis denique miretur a nobis Eridanum Herodoti et Venetos iis in locis ponit. Diximus caussam in dissertatione de numo Rhodio, et dicendi erit locus alias, cum multa praeterea, quae hic praetermissimus, explicandi potestas dabitur.

(9) *Noord en Oost Tartarye Amst. 1692. f. 107.*  
 (10) *Amst. 1705.*



Conn Acad Sc Lib No pag 424.



# DE MVRO CAVCASEO.

*Auctore*

T. S. Bayero.

C Vm PETRVS MAGNVS Derbentum et cir-  
cumiectas regiones bello Persico ditione in M.Octob  
potestatem accepit , vt erat animo non mo-  
do in belli pacisque consilia erecto , sed etiam  
qui grauissimas imperii curas tali otio temperaret , ex quo  
aliquis doctrinae honos , artibus accessio , publice priu-  
atimque fructus et vndique gloria compararetur , quidquid  
spectatu dignum in illa expeditione occurrebat , partem  
per se contemplatus est , partem per fidos industriosque  
homines explorauit . In primis aduertere exercitus Rus-  
sici oculos inacceſſa Cauſi iuga , communita castellis et  
muro , vt adparebat , firmissimo et vt tradebatur a gna-  
ris regionum , vasta longitudine porrecto inter Caspium  
mare et Pontum . Pars muri , quae subiecta erat oculis ,  
de omni reliqua mole coniecturam mouebat , quanta et  
quam admirabilis effet , praesertim in illa solitudine , su-  
per illis montium fastigiis et cum praeterea hominum ser-  
mo et ipſe lapidum color ad vetustatem ultimam tam in-  
signis artificii opus referret . His rebus incensus ad spe-  
ctandum muri situm Demetrius Cantemirus Moldauiae  
Princeps ad Imperatorem se contulit , ostenditque cupere  
se , suscepta circum murum excursione , tam nobile gentis  
alicuius rerum dominae monumentum explorare . Col-  
laudatus ab Imperatore cum viginti admodum dimachis

H hh mu-

murum , qua potest , obit , tractum eius , diuergia , pro-  
 pugnacula et vicina muri describit , viam metitur . Longius processuro metus obiciebatur a Dagestanorum insidiis , quas manipulus ille , si vndeque in ignota et confragosa regione barbari coorirentur , effugere non poterat . Rediit Cantemirus e discrimine tanto sub vesperam incolumis , et quae cognouerat , in commentarios retulit . Ad ceteras virtutes eo in Principe summa animi magnitudo erat , multo vsu periculisque exercita , et doctrinae eruditio-  
 nisque incredibiles amores , vt , quae ad veterum supe-  
 riorumque temporum memoriam in horum populorum  
 rebus requireres , haud aeque ex alio cognoscere posses :  
 cuius laudis testes sunt commentarii , quos partem per-  
 fecit de Turcarum et Moldauorum rebus , partem de  
 antiqua Dacia , aliosque complures adfectos reliquit . Char-  
 tas in quibus muri situm descriperat , communicatas ac-  
 ceipi ab Antiocho Cantemiro Principe patris virtutum  
 aemulo et imitatore studiorum : commentariorum quoque  
 laceras schedas , in quibus per pauca , quae memoriam fu-  
 gitura sunt visa , notauerat , eiusdem beneficio Principis  
 excussi , interea dum caremus maxima parte eorum , quae  
 sapientissimus Demetrius ab se animaduersa , e memoria  
 repetiturus fuerat , nisi diabetes , cum eum in Derbentina  
 expeditione inuaserat , paullo post incomparabilem vi-  
 rum extinxisset . Elaborandum igitur mihi videbatur , vt  
 monumentum , quod doctissimi Principis eruditione et  
 luce ingenii multo illustrissimum futurum erat , ita ex an-  
 tiquitate explicarem , vt desiderium illius aliquantum leni-  
 rem mea opera .

Demetrius igitur tractum muri , quem obiit et orgyis  
 sta-

stadiisque Ruthenicis dimensus est , et montium vicinorum conualliumque situs et viarum anfractus recessusque inter equitandum tumultuario opere consignauit, in castris autem paullo exactius descripsit. Sunt fortasse in his quoque , quae retractaturus ad amissim erat : sunt quae nos dubios relinquunt. Quia autem nihil, quod eo pertineret, in schedis Principis repertum est , maluimus ita, ut consignatam accepimus tabulam publice exhibere, quam priuatim quidquam ex coniectura immutare. Atque ut inde ab urbe incipiamus, a qua est profectus , et quam ex eius schedis diligenter descriptam habemus, Derbentum caput Schiruani (quae prouincia a Cyro flumine ad territorium urbis porrigitur , ex quo Dagestan, hoc est, montana regio ad Circassios vergit) ad mare est situm in loco declivi. Inde iam occidentem versus mons in asperam rupem surgit, in qua arx locata est. Eam ex urbe petunt per portam *Kyrlar*, et via media est fossa per durissimum excissa saxum , quadraginta in longum orgyias, in latum quatuor, tres in profundum. Ab summa arce ad centesimam orgyiam pagus est *Piridimisky*, quasi *genium* seu *daemonem* *Damascenum* dicas. Est enim in illo pago monumentum cuiusdam *Piridimisky*, quem Damasceni filium regis fuisse perhibent. Titulum in ingenti sculptum lapide Demetrius legere non potuit, quod litteras Cuficas et ipse ignorabat et nemo aliis, qui interpretaretur , erat. In urbe turris diuerso a ceteris et squalidiori lapide ad septentrionem constructa , ultimam antiquitatem referebat : et adfirmabant ciues , hic Alexandrum coepisse fundamenta urbis iacere. Sunt autem, si ab arce descendas ad mare , in septentrionali mu-

ro hae vrbis portae. Prima *Driardizi Capusi*, altera *Kyrlar Capusi*, tertia *Babulbab seu porta portarum*, magnificae structurae opus, quod adhuc vetus nomen vrbis conseruat. Latum est duas orgyias, altum vnam. Superius limen non arcus in modum testudine firmatur, sed lapides ingentes postibus ad rectos angulos innituntur, nullis inter se ferramentis deuincti. In subterranea portula (*Babulkyiamar, portam extremi iudicij vocant*) figurae, incertum an hieroglyphicae, exstant. Ferunt autem, portulam aequali cum ceteris altitudine exstructam paulatim subsedisse, et cum tota hausta fuerit, censorium illum humano generi adfore diem. Ab vrbe prefectus Demetrius per septem stadia Ruthenica, (\*) ut ipse testatur, murum exploravit. Adparet enim e tabula, exploratas ab eo fuisse 3285 orgyias, quae efficiunt sex stadia et ducentas octoginta quinque orgyias reliquas. Nam cum excelsa iuga, scrupeam viam et saltus vallesque studiose perreptat, dum metitur murum, dum sub meridiem corpus curat, eundo redeundoque dies effluxit. Addit tamen in schedis Demetrius, certo constare, murum ad fontes Ihrani fluminis in finibus Georgiae per quadringenta et quinquaginta stadia produci. Illius ego fluminis nomen nusquam locorum in Georgiae limite reperio, igitur venit mihi ex dimensione illa De-

me-

(\*) *Stadium Ruthenicum dicitur* веpста *Voersta* et continet 500 сажень *Saschen seu Orgyias Ruthenicas*. *Vnum Saschen habet 3.* аршинъ *Arschin seu vlnas Ruthenicas*. *Vlna vna Ruthenica est aequalis 28, <sup>8</sup> 00 digitis Londinenibus*.

metrii et ex ipso situ in mentem, esse fluum *Tori* in tabulis Delilianis ad 63. gradum longitudinis et  $44\frac{1}{2}$  gradum latitudinis. Montes conspicuntur ad Derbentum diuersa altitudine: summum fastigium est montis *Schadagy*, quasi *Regium dicas montem*, quia Nusriuanus filius Kieicubat in eius vertice domum condidit, in quam animi caussa recreandi nonnumquam diuertit. Altitudinem quadrante dimensi, octodecim stadiorum obseruasse sibi sunt visi. Secundus ille ab Ariarathie habetur, medium amplius partem niuibus obiectus. Montes plerique in Caucasi tractu, ut a Constantino Principe Demetrii filio, qui cum patre murum obiit, accepimus, praerupti et asperi rupibus virgultisque consiti, nonnumquam in cacumine planitiem protendunt. In conuallibus sunt vineae. Vnum vicum se videre Constantinus meminit, in quo Iudaei Persicae Ebraeaeque linguae callentes. Per montium iuga et valles murus continuatus, nunc in rui nisia-  
cer. Turres quaedam cum portis integrae, praesertim in vallibus, Moscuensis vrbis turribus non dissimiles. Crassus est murus orgyiam Ruthenicam tantummodo vnam. Lapides sunt, ut Xenophonte verbo vtar, κογχυλιάτοι, quales ea in regione reperiuntur, trium vlnarum Ruthenicarum longitudine, crassitie vnius vlnae: lateres nulli vsqvam visi. Nec ferramentis aut caemento deuineti sunt lapides, sed politura sola et struendi artificio ita commissi, ut vix rima adpareat. Non omittendum duxi hoc loco, qiod cognitum est ab interprete Georgiani Principis, qui in hac vrbe aliquanto tempore egit. Hic Princeps cum cogeretur, ab insidiis in tuta se recipere, Teflisio septemtrionem versus Ossetum pe-

tiit et inde ad radicem Caucasi vertit in Tuchetum, tum in Tianetum et Eretum, donec in finibus Schamachiae urbis superata asperitate montium, planitem tenuit. Tum vero Bacuam concessit atque inde nauigiis Derbentum. Ab Offeto octo dierum itinere Caucasm a sinistro, et in cacumine eius, muri rudera conspexerunt. In Delilianis tabulis, (1) ad Pontum Fuximum sub 44. gradu latitudinis et  $58\frac{1}{2}$  gradu longitudinis, prope ab Dandaro urbe muri vestigia notata sunt, quae secundum Cudurum fluuum ab austro in boream vergunt, atque ad extremum paullulum inflectunt in orientem, quinque admodum et septuaginta stadiorum Ruthenicorum tractu. Siue a Soscamo Sabba principe Georgiae, siue a Crusio aut Zurbeco eius muri notitiam clarissimus geographus habuerit, est profecto insigne argumentum continuati inter utrumque mare Caucaeui muri. Inueni postea P. Archangelum Lambertum missionarium e congregatione de propaganda fide, in itinere Iberico (2) murum illum, quem in tabula exhibet, ita fere describere: *regionem esse vastam, et murum supra sexages mille passus ductum: passim ab turribus et custode milite defendi: a praecipuis urbis Odisi ciubus, singulis mensibus, delectos milites eo mitti, qui dimisis superioris mensis excubitoribus, custodiam agant: a mari regionem paullatim assurgere usque in altissimum Caucasi culmen: inferiorem regionem, partem a natura et paludibus, partem ab arte et ligneis arcibus muniri, ne cui inui-*

(1) *Regionum vicinarum maris Caspii A. 1723. editis.* (2) *Dans le Recueil de voyages au Nord T. VII. p. 176.*

*inuitis militibus iter pateat. Iam ab hoc muro vsque ad eum fluum, ad quem Cantemirus certo compererat murum ab oriente protendi, non magnum spatium intercipitur, in quo seu deleta sunt vestigia muri, seu non explorata et memoriae prodita.*

Non dubito, multos fore, qui mirentur, cum relatrum legent de tam nobili vetustatis monumento, per PETRI M. expeditionem ab obliuione vindicato: alios, qui scire cupiant, quantum de eo ante hoc tempus cognitum fuerit, plerosque qui conquerantur de totius muri situ tractuque non penitus omnia exacta et comperta teneri. Quibus ego, quantum in me est satisfaciā expli-  
caboque quae memoria teneo: nam quae exploranda adhuc sunt, ea posteritatis cura esto.

Graeci sero aliquid de Caucaso monte, (quem Scythae *Graucasum a candida niue*, quasi Alpes quasdam appellarunt, (3) per Ponticas colonias cognouere. Eum igitur, quod in regione longinqua (vt tum erat) atque idcirco fabulis apta situm existimabant, duriori suppicio multatum Prometheum credidere, si e Iouis mandato ad Caucasm alligaretur, quo vtique liberatum eum veniret nemo, nisi Hercules aliquis. Hesiodus Prometheum tantummodo columnae alligauerat: at Aeschylus, primus, quod quidem constat, relegauit in Caucasm illum, qui inter Pontum et Caspia littora assurgit. Herodotus, quod Halicarnassi natus et in Asia multum versatus esset inter praefectos regios, earum conditionem terrarum, quae sub Persis continebantur, exactius quam quisquam alias co-  
gnoscere.

(3) Plinius L. VI. c. 17.

gnouit. Is in Euterpe Caspium mare tradit quindecim dierum longitudine et octo dierum latitudine comprehensum, ad occidentem habere Caucasum praetentum vastitate et altitudine eximia, multisque diuersarumque nationum mortalibus frequentatum, qui vestes pingebant succo, ita ut animantium figurae non pictae, sed intextae viderentur, durabili lanae colore. Eo monte, (ut is in Thalia ait) Persarum imperium terminabatur, et ab eius incolis quinto quoque anno centeni pueri et totidem puellae tributum mittebantur regi. Ad septemtrionem Caucasii nihil iam Persici iuris erat et ad orientem Caspii maris planities immensi spatii, Massageterum sedes, nota erat. Claustra quoque duo in Clio obscure attingit, per quae Cimmerii Scythaequae diuersis regionibus viisque effusi sunt in superiorem minoremque Asiam. Nihilo notior Caucasus per expeditiones Alexandri imperiumque Lysimachi aut Asiae Syriaeque regum, quoniam illorum quoque res in obscuro iacent. L. Lucullus, rebus aduersus Mithridatem gestis, haud longe ab eo monte absuit. Cn. Pompeius Romanorum primus prope a Caucaseis claustris consedit. Lucanus (4) Pompeium ita loquenter inducit in Pharsalicis:

*Si vos, o Parthi, peterem cum Caspia claustra,  
Et sequerer duros aeterni Martis Alanos,  
Pausus Achaeeniis late decurrere campis.*

Ex eo tempore claustra duo Caucasii, ad orientem Caspia (a vicino mari, a quo etiam tractus montis ad orientem diuergens, Caspius dictus, si qua Eratostheni fides) (5)ad

(5) ad occidentem Caucasea innotuere, temere inter se confusa a scriptoribus, quod Plinius non uno loco reprehendit. Ita Lucanus perperam vocat Caspia, cum ea Pompeius, aut Romanus quisquam imperator numquam attigit. Nam, ut de Pompeio dicam, is, quod ex Appiano et Plutarcho liquido constat, postquam ad Euphratem assecutus Mithridatem, magno nocturno praelio superauit, fugientis vestigiis inhaerens, primum diuertit in Armeniam, progressus deinde in Albaniam, (quae intra Caucasum Armeniamque sita erat) in Iberos ad opprimendum Mithridatem mouit. Mithridates autem, cum interim Dioscuriade hibernasset, perlustrata in circuitu ora Pontica, profugit in Bosporum et ad Scythas. Ea via sequi oportebat Romanos. Itaque, ut Appianus dilucide habet, (6) claustra Scythica, qua nemo penetrauerat antea, Pompeius insedit et in reditu Albanis ob defctionem bello illato, illico vertit in Armenos. Cum ad Caspium mare tenderet, obiecta ei sunt terriculamenta ab aliis alia, et praecipue serpentum multitudo, teste Plutarcho: (7) misit tamen tuorum aliquos exploratum, atque aquam e Caspio mari allatam, ut ante eum Alexander, ut nuper Ruthenicus quoque exercitus, dulcem reperit. Ita enim est in littoribus, qua flumina accipiuntur, nondum amissio sapore. Eodem errore Plinius (8) etiam eos, qui Corbulonis res in Armenia sub Neronе gestas enarrauerunt, Caspia et Caucasea claustra

Iii

con-

(5) *Ap. Strab. f. 568. ed. Henr. Petri.* (6) p. 400. *ed. Tol.* (7) *f. 638.* (8) *Plinius e Varrone* (9) *L. VI. c. 13.*

confudisse indignatur. Addit deinde etiam tabulam eārum regionum a Corbulone missam in urbem, nomen Caspiorum claustrorum isthic ponere, vbi Caucasea erant. Ergo Cornelius Tacitus quoque alicubi (10) ab errore eo circumuentus est. Claudius Ptolemaeus Caucaseas portas in Iberia Sarmaticas dixit, Caspias vero, Albanias, et has nimis longe remouit a mari Caspio, nisi fortassis aditum, vbi primum Caucasi iuga separantur et conualli locum faciunt, indicare voluit.

Quales autem illae portae fuerint, e Varrone (sive is, quo vsus est Plinius, M. Terentius, sive P. Atticus fit, vterque Pompeio usque ad summum discrimen familiaris) e Varrone igitur et M. Agrippa nobis constaret, nisi commentarii eorum intercidissent. Nunc incertum est, quantum ab alterutro acceperit Plinius, quantum e Corbulonis commentariis inseruerit. Nam Corbulo rebus magnis in Armenia gestis, adeo Romanos impleuit fama claustrorum Caucasi, vt Nero in vanis gloriis, expeditionem in Sarmatas moliretur per Caucaseas portas, quas Caspias peruerse dicebant, quamuis, ut ait Plinius, (1) a portis Caucaeis vix pateret aditus ad Caspias, per oppositos montes. Plinius igitur, seu ab expeditionis Pompeianae comitibus et exploratoribus, sive a Corbulonis militibus acceperit, Caspias portas, scribit, „(2) inter iuga praerupta angusto transitu fitas, longi- „tudine VIII. milium passuum, *toto opere manu facto*, ita „vt vix singula plausta commearent: dextra autem lae- uaque

(10) *Annal. L. VI. c. 33.* (1) *L. VI. 13.* (2)  
*L. VI. 14.*

uaque ambustis similes scopulos impendere: aquae ino-,  
 piam in XXXVIII millia passuum (in quibusdam codi-,  
 cibus tantum XXVIII. M.) perdurare: angustias im-,  
 pedire corriuatum e cautibus salis liquorem, tum ser-,  
 pentum multitudinem transitum, praeterquam hieme,,  
 non permittere., De portis Caucaseis autem Plinii  
 apponam verba: (3) portae Caucaseae magno errore a  
 multis Caspiae dictae, ingens naturae opus montibus inter-  
 ruptis repente, vbi fores obditae, ferratis trabibus, sub-  
 ter medias amne diri odoris fluente, citraque castello, quod  
 vocatur Cumania, communio, ad arcendas transitu gen-  
 tes innumerar: ibi loci, terrarum orbe portis discluso, ex  
 aduerso Harmastis oppidi Iberum. Praecipua illa Iberiae  
 vrbs est, quam Ptolemaeus Harmacticum vocat.

Post id tempus nihil magnopere de Caucaseis Caspiisque portis est relatum, vsque ad CPlin sedem imperii Romani constitutam, vbi et vicinior Caucasus erat vrbi rerum orientis potenti et barbarorum irruptiones in Armeniam Asiam Syriam consecutae sunt frequentes, de quibus tam Graeci quam Syri scriptores commemo- rant. Itaque Claudianus sub Arcadio, paullo ante Stili- conis caedem, de bello Getico canens, inquit:

*Nonne videbantur, quamuis adamante rigentes,  
 Turribus inualidis fragiles procumbere muri,  
 Ferrataeque Getis ultro se pandere portae?  
 Nec vallum densaeque fudes arcere volantes  
 Cornipedum saltus, iamiam descendere puppes  
 Sardoniosque habitare sinus et inhospita Cypri  
 Saxa parant, vitamque fretos spumante tueri.*

Iii 2

Se-

(3) L. VI. c. 11.

Secundum cum Procopius Caesariensis multis rebus in oriente admotus, Caucasi portas duas Tzur et Caucaseam in bello Gothicō (4) nominat. In bello Persico autem (5) portas Ćaucaſeas ampliſſime deſcribit. Ait enim: Taurum Ciliciae excurrere in Armeniam Persarmeniam, Albaniam et Iberiam et quanto procedit longius, tanto accrescere in altitudinem: trans Iberiae fines inter arctissimas angustias eſſe tramitem, ſeu clauſtra quaedam L.ſtadiorum longitudine et definere in monte praerupto et inſuperabili, niſi, quod per eum natura ſic eſt molita extum, vt manu patefactus videatur. Eam portam Caspiam ab antiqua vsque memoria adpellari ait. Egressis portam aperiri campum vbertim irriguum, ampliſſimo regionis ſpatio et alendis aptum equis, in eoque Hunnos ad Maeotin vsque colere, qui inoffenſo itinere vsque in Iberiam hac excurrere poſſint equites, alia via nec fine ſumma moleſtia, nec niſi omiſſis equis penetrari eodem poſſe: neceſſe enim eſſe praecipitia montium et anfractus cum diſcrimine perreptari. Eam montis clauſtrorumque naturam Alexandrum contemplatum portam muniuiſſe valuis et caſtellum ſuper ea poſuiſſe, vt ſeptemtrionales populos includeret. Cum Procopius Caspiam portam dicit, quae erat Caucaea, ea vetus mulitorum fuit offenſio, vt ſupra e Plinio docui. Et iſ error adeo infecit omnes scriptores, vt cum nomine memoria ipsa Caucearum portarum paullatim aboleretur. Caſpiarum autem portarum (quae ex eo tempore celebriores euafuerunt) hanc deſcriptionem Eustathius Theffaloni- cen-

(4) L. IV. c 3. (5)f. 28. ed. Parif.

censis in parecbolis Dionysianis (6) dedit : Medos in orientem esse versos vsque ad Caspias portas, quae intra Medium continentur clavesque Asiae appellantur : mon tes autem esse , aut potius praeruptas rupes in modum portarum, et seu a mari, siue a Caspiis incolis nomen habere: hac a septemtrione in Hyrcaniam et Caspiam Persiamque iter esse , gentesque boreales transitu prohiberi.

Haec fere ita de Caucaseis et Caspiis claustris nostri homines prodiderunt, nemo autem ex omni vetustate, seu Latinus, seu Graecus scriptor , muri, qui ductus esset in Caucaso, mentionem iniecit. Arabes vero et Persae murum hunc celebrant scriptis et nomine

سَرْبَاجُونْ وَ سَاجُونْ

*seu aggeris obiecti Gogo et Magogo.* Thomas Hyde in epistola de mensuris et ponderibus Sinensium, existimauit se illum murum in Sinis reperiisse. In eo autem eruditissimum virum ratio fugit. Abulgasus Bagadur Chan in *Schagjare Turki, genealogia Turcarum* de muro Sinico fatus ait:

سَرْبَاجُونْ دِيرْ قَرْجَهْ بِرَانْ دُورْقُورْقَهْ  
بِرَانْ خَطَابِي خَلْقَيْ أَوْنَكُوْ دِهْ

Arabice vocatur Sed, quod Persice est Dir seu porta, veteri lingua Turcica Turcurga, Chataica seu Simica lingua, Vnguli. Haec ita corrupte scripsit Abulgasus, corruptius in Ruthenicam, ex ea in Germanicam, sic denique in

Gallicam linguam translatus editusque. (7) Nam illud *Vngu li*, est *Van li*, quod *decies mille stadia* significat, quo nomine Sinenes regni sui quasi moenia vocant. Ab eo muro autem Abulgasus distinguit hunc, quem Alexander Magnus opposuit gentibus *Zagjugj et Magjugj*, (8) quas Tattari dicunt, habere nares similes caninis, et murum aeneum nequidquam lingere adhuc: proxime autem ante illum *extremum* et censorium diem perrupturas moenia naribus esse. Ab hoc denique distinguit murum, quem *Nuschiruan* (9) e regione Schamachi circa regnum suum daxit.

Hic ille est, quem in ruinis adhuc iacere compemus. Alter ab eo non est diuersus, sed fabuloso nomine et commentis Mahometanis obscuratus. Nam cum Mahometes in Surata decima octaua ab Alexander intra duos montes murum conditum ait, ex eo est quaesitum ab sectae illius et superstitionis hominibus, vbi terrarum is esset. Eledrisus multa ridicula tradit, Alsalemo Altargjenian (seu Interpretē) auctore. Alsalemus ait, se missum esse a chalipha quodam, qui in insomnio aggerem hunc Alexandri inter terras suas et inter Gogum Magogumque medium, veluti patere viderat, ut qui ille esset agger, diligenter exploraret: dedisse sibi chaliphām praesidium quinquaginta equitum et quinque millia denariorum et munus praeterea decies

(7) p. 118. 119. (8) In Germanico et Gallico interprete *Iadsutz-madzutz* l. c. (9.) Ex quo illi fecere *Nau-Schiruanadill Sultanum Sazaarem Schamathiae*, inuito Abulgafo.

ties mille drachmarum; equitum autem vnicuique quinque mille drachmas stipendum et commeatum in annum vnum, centum denique mulos, qui aquam et necessaria alia portarent. Quis ille chalipha fuerit, neque Abdalla Ebn Chordaba, neque Eledrisas, qui memoriam rei ex Alsalemo conseruarunt, prodidere. Quoniam autem Alsalemus prosectorum se refert ab vrbe Sermentraia, ex eo notam temporis duco. Nam Motasemus chalipha Abbasidarum octauus, sub auspicio principatus, quem A. C. ICCCCXXXIV. iniit, sedem imperii Bagdado transtulit Sermentraiam, haud longe a Bagdado sitam ad Tigrim. Ceteri chaliphae deinceps ad Motadedum, eadem in vrbe commorati sunt. Motadedus A.C. ICCCCXCIII. sedem imperii Bagdado restituit. Sex igitur chaliphae, annis fere sexaginta, Sermentraiae egerrunt, eoque tempore plerosque interpretes Graecos inter Arabas suisse ex Albulpharagio intelligimus, quorum numero hic Alsalemus Altargjeman inferendus est. Alsalemus Sermentraia cum litteris chaliphae prosectorus est ad Isaacum Eben Ismael Armeniae dominum, *Tephlisum*. Ab Armeno cum commendaditiis litteris ad regulum *Alfarir*, atque deinceps ad regulum *Lan* et dominum *Philaschae* peruenit. Ab hoc quinque impetratis ducibus, septem et viginti diebus ad extremos fines regionum *Besegert* penetravit. Haec tam obscura nomina in Romana editione (in qua Eledrisus pessime hab. tūs truncatusque meliori parte est) interpretari nos oportet. A Tefliso venit in *Alfarir*, quae regio sita est ad Caspium mare et *Alferir* *Aldebeb* (*thronus aureus*) vocatur, in qua censetur Derbentum. *Lan* videtur cor-

ruptum

ruptum ex *Lahgjan*, quae vrbs in Gilana regione est, Luginum Europaeis dictum, quadritui via a Casbino. *Pbilaschab* quale sit, augurari non possum. At *Besegerd* est regio *Besa*, seu vt Arabes pronunciant, *Phasa*, quasi *borealem* dicas, quod ad ortum brumalem Persepoleos vrbis sita est. Hinc in regione nigra, (Cimmerias tenebras inaudiuerauit vanissimus homo) decem itinere dierum adeo foetere aerem sensit, vt aegre dirum odorem balsamis temperaret. Itinere mensis vnius, per loca a Gogo Magogo vastata confecto, denique post sex alios dies ad Chacanum *Otcos* venit, qui propinquā monti huic tenuit, cuius in hiatu agger erat. Hic ille murum inspexit duobus fere stadiis ab vrbē situm. Ex eo consequitur, comminisci eum iter per Persiam Indiaeque aliquam partem. Nam in redditu quoque se ait ductum ab illis castellis versus Chorasanum in Samarcandiam. Et cum ad Gihonem seu *Orxanthum*, in regione *Ilak*, a Schabalegico agro vsque ad exitum vallis *Alschasch*, etiam muri vestigia, teste Abulfeda, reperiuntur, hinc ille *A-salemus* fabulae totius apparatum petuisse videtur. Agite ergo, inspiciamus cum *Alsalemo* murum. Mons considerabat in vallem centum quinquaginta Sauadicis seu Eracensisbus latam cubitis. Isthic porta erat ferrea, quinquaginta cubitos alta, duabus perastatis munita, quarum vnaquaque lata erat XXV. cubitos, extraque portam prominiebat, crassitie decem cubitorum. Tota porta constructa erat lateribus ferreis aere inductis. Parastatae autem quinquaginta cubitos altae, tectum impositum habebant centum et viginti cubitorum. Super tecto eminebat aliud aedificium vsque ad cacumen montis, cuius in summo

summo culmine ferreae pinnae conspiciebantur et in pinna quavis summa, cornua duo sibi obuersa. Valuae clavae erant, vnaquaeque quinquaginta cubitos lata, quinque crassa. Pessulus quoque cernebatur septem cubitos longus, vnum in ambitu crassus. Is pessulus viginti quinque cubitis a terra aberat, et quinque cubitis pessulo altior sera et clavis longa cubitum vnum et semis, cum duodecim ansis de catena pendentibus. Limen portae inferum decem cubitorum latitudine et longitudine certum cubitorum. Praefectus illarum arcium cum decem equitibus obire solitus portam, et malleis pessulum percutere, tum ut audiant populi ultra portam, adesse custodes, tum ut ipsi, quid geratur, rescient. Ibi vero se rebant, se admotis auribus, murmur animaduertere ingentis populi, qui ultra colat. Non longe a loco illo castrum a se visum refert, decem stadiorum amplitudine et arces duas prope portam, altas latasque ducentos cubitos, interque eas fluum manare. In vna earum asseruari instrumenta, quibus exstructum sit propugnaculum et ferrea caldaria et cochlearia adesse, in quibus lateres ferrei sint apparati. Lateres quoque aliquot ab Alsalemo sunt visi, longitudine cubiti vnius et amplius, palmae autem vnius altitudine. Denique, ut fabula desinat in risum, vi fam narrat aliquando super pinnis muri, multitudinem hominum e gente Gogi et Magogi, quos adeo metuebant, quibus tanta claustra, tot arces, tot turres opposuerant, ferrea et aenea omnia, contra quos inaccessum natura sua montem muro et arte firmauerant: eorum autem tres vento adflatos decidisse de pinnis. Viros fortes et bel-

K k k

lato-

latores optimos opinabimini ? immo vero duorum cum  
semisse palmorum pumiliones fuere.

*Spectatum admissi risum teneatis amici.*

Ita ex somniis chaliphiae exorsa fabula , in somniis Alsa-  
lemi desinit.

Gregorius Malatiensis quanto propius a Caucaso  
aberat , tanto probabiliora , quam ille Africanus Ele-  
drus , de situ muri protulit : neque is tamen sine commen-  
to. Alexandrum , ait ( 10 ) rogatum , vt aggerem Jag-  
jugj exstrueret , murum condidisse ex lapidibus ferreis et  
aeneis , qui accenso igne in vnum solidum faxum coalue-  
re , cubitos duodecim longum , octo latum : vbi autem  
eum perfecit , venisse ad locum aggeris magni Babol-  
abuab , in conuallibus regionum Kaphgjak , effossoque fun-  
damento , per montes ipsum produxisse vsque ad mare

Romanum seu CPlitanum *Colzum*. Regio قباق

*Kaphgjak* ab Arabibus Persis et Armenis etiam *Dascht*  
(quod Antonius Giggaeus *solitudinem* interpretatur , Go-

lius autem *planitiem desertam*) et قباق

*Daschte Kaphgjak* vocatur. Situm eius Arabiades in hi-  
storia Timuri ita describit : ( 1 ) *Regio Dascht ab austro*  
*mare Colzum, impetuosum et naufragii infame habet, et ma-*  
*re Mezri, porrectum inde a regione Romanorum seu CPlita-*  
*norum.* Haec duo maria se contingerent , nisi montes Cir-  
cassii interiecti essent , quo minus miscerentur : ab oriente  
babet fines regnorum Chouaresmiae et Otrar et Sagnak , et  
post

( 1 ) p. 103.

*post ceteras regiones pertingit ad Turcestaniam, et terram Getarum, porrigitque se ad confinia Sinarum, in regnis Mogul et Chatai. A septemtrione autem Emirus Siberiae et Berar et Kaphar et arena est, sicut montes: et postea cingitur deserto, in quo ferae et aues sylvestres vagantur, quae sunt recreationi principibus: nemo persequitur fines eius deserti et extrema eius nemo obit: ab occidente attingit regio Russiae et Bulgariae et quidquid christiani nominis prouinciarum est.* Hanc regionis *Kaphjak* descriptionem obscuram faciunt quaedam locorum ignota nomina, quae explicanda nobis sunt. Et primum ab austro est *mare Colzum*. Mohammed Alfraganus (2) alii que ita vocant sinum Arabicum, ab urbe in littore Aegypti, quae Ptolemaei est *Clysm*. Arabiades autem mare Caspium dicit. Est enim Arabi huic familiare, ut, quod vocabulum alienissimum est ab usu, id maxime usurpet. Bernardus da Parigi, (3) Angelus a S. Iosepho et Meninskius Persis Turcisque *Calsun* et *Colzum* mare Caspium vocari testantur. Thomas Hyde autem (4) Persam quendam producit, qui eius nominis tamquam imperite exhibiti caufsa, reprehendit populares suos. Gregorius Malatiensis *Colzum* vocat Pontum Euxinum: sed aut Gregorius se fefellit, aut imperiti scribae manu hoc insertum fuit. Mare *Mezri* non Aegyptiacum est, sed Magnae Vrbis siue CPoleos: nam  *Mez* quamcunque *urbem magnam* vocant. Montes Circassii  
K k 2 est

(2) p. 36. (3) *Vocabulario Italiano Turchesco* p. 1321. (4) *Commentario in R. Abraham Peritsol.* p. 65.

est ipse Caucasus. Ad orientem terminatur notis regionibus. Chouaresmia et Turcestania non ignobiles. Regio Getarum est قاتا Kata, vt Arabsiades et quidam alii, vt plerique autem, *Chata*, in quo auctor Logat Mesnau cauillans ait, qui sic scribunt, reuera خاتا Chata, hoc est *errorem* scribere. Cataia illa est extra Sinas, vetus Getarum nomen, vt alibi euictum dabo: Paullo obscu-rius Arabsiades Cataiam hanc et Mogulensem terram vsque ad Sinarum regiones intra Kaphgjak includit. Sed Tagj Altauarich Saadi Effendi in annalibus Ottomannicis et ex eo auctor Nimetullah seu lexici Persici, in voce *Turc* testantur, Cataeos et Chotenos incolere

بستان قپچاق Desti Kaphgjak. Abulgasus Bagadur Chan in شجر قرقج Schagjare Turki regionem hanc describit intra flumina

تبن و اتیل و یاپق Tin et Atil et Iaik. Tanaim dicit et Volgam, qui Etel etiam CPlitanis scriptoribus vocatur et notum nomine suo Iaicum. Praeterea scribit in Kaphgjak coluisse *Vrussos et Olacos et Magjaros et Baskiros*, pulsos autem esse a Kaphgjako, qui filius fuit ducis cuiusdam in exercitu Ogusi Chani. Is quia postumus a matre in caua arbore editus, ab eo nomen habuit. Nam veteri lingua Turcica *caua arbor* est Capschak. Ab hoc regio, vt is ait, dicta, quod eam et ipse et posteri eius tenuerunt quatuor mille annos, vsque

que ad Gingiscanum. Sunt in his fabulosa, praesertim quod diluum excedit ille Abulgasi calculus : attamen fatis vetus id regionis nomen est, nec Graecis ignotum. Nam cum Polybius *Aspasiacas Nomadas* inter Tanaim et Oxum commemorat , (5) Ασωασιαναὶ plane corruptum est ex *Kaphgjak*. Planities autem ipsa Herodo-  
to et Procopio quoque innotuit , eamque R. Abraham Peritsol vocat *deserta continentis terrae, pertinentia ad Gomer et Magog* , Plinius (6) autem *planitiam immensam et Aegypto similem*.

Me non poenitet a proposito esse digressum ad ex-  
plicandum huius situm regionis, quod et geographiae pars,  
quae magna obscuritate vrgetur , explicatiō mea opera  
euasit ad historiae lucem , et simul id effeci , vt nobis con-  
staret , quibus in conuallibus aggerem Gogi et Magogi  
Gregorius reponat. Quod autem scribit ductum fuisse a

**باب البواب** Babolabuab ad Pontum vsque  
Euxinum , id nos magis confirmat. Nam Derbentum  
**در بندر** recentius nomen est a Persis inditum et

*Derbend, ianuae seu portae vinculum significat, Germanicis  
fere vocibus. Turcae Demir capi, ferri portam dicunt.  
Et Haytho Armenus: (7) Miralis, inquit, dicitur por-  
ta ferri , quam Alexander firmavit propter nationes gen-  
tium varias et diuersas in profundo Asiae habitantes, quas  
nolebat posse babere ingressum in Asiam maiorem absque suo  
mandato. Et est illa ciuitas sita in quodam districtu maris  
Caspii et tangit magnum montem Cocas. Cocas est Cau-*

K k k 3

ca-

(5) p. 862. ed. Gron. (6)L. VI, c. 17. (7) p. 9.

casus. At Arabes hanc vrbem haud fere aliter quam veteri nomine Babolabuab, portam portarum nuncupant, in quibus Nassireddinus Tusaeus et Vlugbegus Tattarus eam longitudinis et latitudinis dimensionem ponunt, quae adhuc Derbento eorum auctoritate in tabulis tribuitur.

Quoniam illum adeo celebrem aggerem suis spatiis et regionibus definiuimus, de eo quaeramus, quod opinionibus et sermonibus orientalium populorum vulgatur, Alexandrum Magnum auctorem conditoremque eius muri esse. Non opus est, ut commoueamur, cum tot testes Arabas, Persas, Tataros nos circumfistere et vrge-re videmus. Nam fieri aliter non potest, quam ut fabulentur, cum Mahometem suum sequuntur, fibulatorem inficetum et ridiculum. Gregorius Malatiensis quidem e Iacobitarum secta Maphrianus fuit, sed et is adulatus est Mahumetanis, quocumque potuit in loco, vsque ad turpitudinem et tantum non fuit eius iudicium, ut satis sciret, *quid distent aera lupinis*. Mahometes autem in Surata XVIII. ita scenam instruit: Dulkarnainum ex mandato Dei progressum vsque ad eum locum, vbi primum sol oritur, inde prosequentem iter intra duos venisse montes, intra quos populi, nescio, qui, eum exorauerint, ut se contra Gogum et Magogum defenderet ducto aggere: illum vero ope eorum ferrum liquefactum ad murum construendum adhibuisse, vaticinatum praete-re, fore aliquando, superante Gogo et Magogo murum, ut ferrea illa moles in cineres subsidat. Quid huic homini facias? Elephanti corio circumtentus fuit, non suo. Interim assentatores eius illud Artotrogi mussitasse vi-den-

dentur: *affentandum est, quidquid hic mentibitur.* Verum in hoc loco interpretes non nihil dissentiant. Sunt, qui illum Dulkarnainum contendunt fuisse Arabiae Felicis regem, filium Harethae et patrem Abrahae regum, quorum ex genere Balcais regina Sabae fuisse fertur, quae ad Salomonem venit. (8) Maior autem meliorque pars Alexandrum a Mahomete hic indicari sentiunt, quem cur *Dulkarnain seu bicornem dicant*, multae sunt sententiae ab eruditis explicatae. Nec vero haec de Alessandro finxit Mahometes, sed aniles fabulas e Iudeorum, Arابی, Graecorum scholis et circulis acceptas, tamquam Palladia intulit in commentarios suos *summaque in arce locauit*. Iosephus autem inter Iudeos primus est, qui tribus verbis Alexandrum claustra Caspia ferreis portis communiuisse tradidit. (9) Cuius quanta in his fides sit, vel ex eo puto liquere, quod Alessandro Pamphylium mare scribit ita ad transitum se apperuisse, ut Iudeis, Mose duce, sinus patuerat Arabicus (10) καὶ τῷτο inquit πάντες δύο λογγῆσιν διὰ τὰς Αλεξάνδρες πραξίας συγγραφάμενοι. Quae illa est impudentia! Rem eandem de Alessandro, auctore muri et debellatore Caucaseorum populorum orientales omnes in scripta retulerunt, quo etiam illud spectat, quod Musladinus Sadus Schirasensis in Gulistan canit, Alexandrum magnis cum molestiis ingressum esse Cimmeras tenebras. (1) Samaritani autem in libro Iosuae, seu chronico gentis sua sub primis CPlitani im-

(8) *Abrahamus Ecchellenſis in cbronico orientali f. 254.* (9) *de B. I. L. VII. c. 29.* (10) *in archaeol. L. II. c. 7.* (1)f. 503.

imperii temporibus edito (quod e codice Goliano descriptum habeo) Alexandrum comminiscuntur, Indiam Persiam et *BiladilRum* hoc est, Asiam minorem et quidquid in Syria Mesopotamiaque Romani iuris eo tempore erat, ceterasque prouincias sub iugum misisse, tum autem desiderio videndi *terram Seir* ingressum esse tenebras: *Et ingressi sunt* (Macedones) *iter trium dierum in tenebris,* *dein tenuerunt terram, quae supra regionem hanc sita erat* *et hostiliter inuaserunt contemplati que sunt in luce.* Tum vero gemmarum, vniōnum, aurique montes visi sunt: quid enim e Cimmeriis tenebris repente prodeentes et ad desuetam lucem caecutientes non videresibi viderentur? De muro tamen illo nihil Samaritani. At Hegesippus, non ille quidem adeo antiquus, sed qui plurima a Iudeis, hoc est, e vano hausit, ita omnia narrat: per claustra ferreae „portae, quae Alexander praerupto Tauri montis iugo „imposuit, cum ceteris gentibus fuisse coercitos Alanos: „incoluisse autem eos Scythicum Tanaim finitimaque „eius et Maeotin paludem, et veluti quodam carcere illius arte et ingenio inclusos, ut suis se continerent terris, „alienas non incursarent. Haec ita in oriente percrebuerent, ut ad Procopii quoque aures peruenirent. Et Geruasius Tilberiensis sic fatur: (2) *in India est mons Caspius a quo mare Caspium vocatur, inter quem et mare, Gog et Magog, ferocissimae gentes a Magno Alexandre inclusae fuerunt, quae humanis carnibus et belluiniis crudis vescuntur.*

Iam quae ex incorruptis Graecorum monumentis comperta tenemus, ea minime nobis permittunt credere illis

(2) *T. I. Script. Brunswic. f. 911.*

illis, Alexandrum ad hunc Caucasum excursionem fecisse. Alexander Olympiade CXI. 2. primo vere Eleunte soluit et ad Sigeum adpulit, ad Granicum autem pugnauit Thargelionis sexto die, seu Maii Iuliani die XXII. Inde Cariam Phrygiam Lyciam Pamphyliam ingressus, superatis Ciliciae et Amanicis Tauri claustris in Syria ad Issum mense Macmacterione, qui nobis October est, praelium alterum commisit. Ex eo per se quisque intelligit, tempus Alexandro superfuisse nullum, quo velluti otiosus excurreret ad Caucasum. Post ea Tyrum obsedit septem menses et summa vi cepit, Olymp. CXII. 1. Hecatombaeonis τετρακοσίη, seu Sextilis Iuliani vicesimo. Vrbe ea occupata Aegyptum petiit, ordinatisque rebus ab ora Hellesponti vsque in Aegyptum, ad Thapsacum rediit Olympiadis CXII. 2. Hecatombaeone, seu Quintili Iuliano. Cum exercitu Persico pugnauit ad Arbelam seu Gaugamala, Pyanepstone, seu Nouembri mense. Darius eo praelio victus mulieres et reliquum regiae suae apparatum ad Pylas Caspias misit. (3) Alexander autem magnis itineribus Persepolin festinauit, et Darium in Media castra habentem secutus, cum isthic neque Scythas<sup>3</sup>, neque Cadusios auxilia ei misisse, vt fama vulgauerat, ab Ecbatana cognouit, cum paucis equitibus persecutus est fugientem in Parthiam. Hic quidem Arrianus scribit, (4) Alexandrum ex Media in Parthiam irrupisse per Pylas Caspias, sed quaecumque illa intra Medium Parthiamque claustra fuerunt, non vtique sunt Caspia, quae quaerimus. Quod sane Plutarchus vidit,

LII

dit,

(3) Arrianus p. 205. ed. Blanc. (4)p.208.

dit , (5) qui ex eo argumentum ducit, Iberos Macedonum imperium declinasse, Αλεξάνδρος διὰ ταχέων ἐν τῆς Υενανίας ἀπάργοντος , quod Alexander raptim excessit ex Hyrcania. Inde vero Bactrios et Indos adiit et ex his terris redux Babylone decessit. Non satis mihi est, coarguisse fabulam , nisi ipsam originem eius patefaciam. Alexander Zopyriona miserat in Pontum , belli ducem. Is mouit in Scythes,(6) hoc est , ad Caucasea claustra, et, si Macrobio credimus,(7) vsque ad Borysthenitas peruenit in armis. Cæsus autem est cum XXX. millium exercitu. Nunc fabularum *accipe insidias, et crimen ab uno, disce omnes.* Habes enim insigne exemplum ingenii eorum , qui superioribus seculis, ex minimis quibusque argumento suspicandi capto , alia commenta ex aliis seuerunt. Scythæ (vt illi interpretabantur) et Sarmatae et Poloni, gens eadem vnumque corpus. Ergo victoria Scythica vertitur in gloriam Polonici nominis. Victi superatique sunt graui bello Macedones a Polonis , vt Vincentio Cadlubeco visum est , victus (quid enim dissimullem?) Alexander. Porro Quirites ! veritatem amittimus. In XXX millibus non est verosimile caesos fuisse ad vnum omnes, sed aliquos cladi superfuisse. Quonam existimemus, eos se recepisse ? Inclusi erant ab aspermis regionibus et infestissimis gentibus. Spes omnis terrestri itinere per inuictos populos reuertendi conciderat. Ergo tutius mari Caspio et nauibus se cōmittebant. Quo autem exitus patebat ? Nempe in orientalem et septem-

(5) in Pompeio f. 637. (6) Iustinus L. XII. 2.  
(7) p. 238.

ptemtrionalem oceanum. Iam in portu nauigabant, cum Balticum e septemtrionali mari tenerent, et expedita erat via in Franconiam Saxoniam Prussiamque meain. Nam Scandinaua, vt veteribus visum, insula est. Vnum ego testimonium adponam e geographo Rauennate, (9) qui ea hausit ex Graecis, *a parte septemtrionale habet totus mundus finem praedictum oceanum, qui venit de India Serica Baetriana et portas Caspias,* (lege portis Caspiis) *qui oceanus tangit Scythiam eremosam, iterum Amazones, vbi eas postquam egressae sunt de montibus Caucasis, suis fe legimus: postmodum tangit ipse oceanus Roxolanos, nec non Sarmatas, item Scythes, postmodum Rerefenos, et Sidefenos: verum etiam Germani, vbi egit habitare, (fortassis etiam Germanos ibi diunt habitare,) Danos, nec non Saxos (Saxones) etiam Frixos (Frisios.) Amazonas autem egressas, vt ait e Caucasis montibus, iuxta Colchidem ponit (10) et Scanziam seu Scandinauiam non aliter quam insulam vocat.*

Quid, malum, inquies, his coniecturis potest ex cogitari pinguius? Verum illud quidem, attamen verte re haec in historiam iis temporibus, cum tam infeliciter scriptores vtebantur vetustarum rerum monumentis Itaque Otfridus monachus Francicas stirpes, Vitechindus Corbeiensis et Gotofredus Viterbiensis Saxonicas repetunt a Macedonibus. Albertus Stadensis etiam Prussicas, Rugianas et Holsatias. Inuenitur, inquit,

quit, quod reliquiae fuerint Macedonum et mortuo *Alexandro*, per totum orbem sint dispersi: quia enim Alexander virtute eorum deuicerat *Aiam*, eo defuncto, se illi terrae amplius committere non audebant, sed cum trecentis nauibus recesserunt, quae omnes perierunt, exceptis quatuor et quinquaginta, quarum octodecim *Pruciam* occuparunt, duodecim *Rugiam*, quatuor et viginti applicuerunt ad *Albiam*, quarum una, trans *Albiam*, *Syluam* incoluit et succidit, in qua postea sunt inuenti et *Holsati* appellati. Nondum satis exculta fabula, accessit *Gobelini Personae* nobile ingenium: iter enim aditusque omnes patefecit δαιμόνιος Macedonibus fugitiuis in *Prussiam*. *Macedones*, inquit, quos Alexander apud montes *Caspios*, tamquam sibi fideliores ad custodiam patriae reliquerat, audientes eum esse mortuum, turbati sunt valde et perpendentes odium incolarum, per terram redire in *Macedoniā* desperabant: quare trecentis nauibus praeparatis, miserunt se in mare *Caspium* et diu nauigantes per mare oceanum, sedes sibi quaerebant: sed dum longius oberrabant, maris tempestate omnes naues eorum praeter **LIII** perierunt, de quibus tandem **XVII** naues intrabant *Pruziam* et **XII** naues terram *Rugen* et littora maris propinqua. Intelligitis, opinor, fabulas similes esse lolio, satas & paruo semine, naestasque vbera, sed luxuriantia magis quam culta ingenia, in immensum illis temporibus accreuisse, nunc vbi messis facienda est, purum historiae frumentum fecernendum esse a lolio.

Est praeterea alia fabulae illius et huius origo. *Alexandrum* res gesisse ad *Caucasum*, a Graecis quibusdam

dam Arabes acceperunt. In iis est Dexippus , (1) qui Alexandrum ad Caucasum et Maeotin, partis victoriis, in Indiam vertisse scribit. Dexippum Diodorus Siculus sequutus est , (2) vt ex fragmentis illius colligo. Ceteri scriptores tantummodo Caucasum commemorant, omissa Maeotide. Vocant autem Caucasum , non hunc nostrum, sed Paropamisum supra Indiam et Bactriam. O. originem erroris apperuere Strabo (3) Plutarchus in Alexander (4) et Arrianus in Indicis (5) quamquam hic in historia Alexandri incautius egit, Aristobuli auctoritate deceptus, qui adeo stolide se dederat in historia , vt , cum in Hydaspe Alexandro recitaret , is librum eum abiiceret in fluum, parum vt abeslet, quin Aristobulum simul daret praecepitem prae indignatione. (6) Cum Alexander superatis Bactris , in Sogdianam et ad Paropamisum deflexisset , venit Macedonibus in mentem Caucasus, quem in scena audiuerant Athenis, vt per Graeciam omnem, celebrari , atque vt eum in partem gloriae traherent, Paropamisum vocauere Caucasum , fluumque Orxantum , vt Plutarchus putat, credidere esse illum Scythicis armis terribilem Tanaim. Iam ad Tanaim et Maeotin audiuerant Amazonas antiquitus degisse. Ergo eas quoque Alexandri rebus sine pudore miscuerunt elegantes homines. Venisse reginam cum magno comitatu quaesitum ex Macedone liberos, et vt impletam se

LII 3

sen-

(1) Excerpta Eusebii Graeca f 57. et Cedrenus (2)  
L. XVII. 83. (3)f. 787. (4)f. 690. 691. (5)p. 511.  
(6) Lucianus quoniodo historia conscribenda p. 610.

sensit, rediisse ad Tanaim suum. Apud Plutarchum multa exstant, ex quibus haec vanitatis coarguntur. Quis enim grauior est auctor Alexandro ipso? e cuius accuratissimis ad Antipatrum mandatis hoc vnum proditum est, Scytharum regem nuptias filiae obtulisse. Et cum Onesicritus haec de Amazonibus historiae suaee inferuisset, Lysimachus rex, qui expeditionis ad Paropamisum comes fuerat, recitantem Onesicritum memorabili dicto repressit, καὶ τὸτε ἡμην ἐγώ; atqui, ubi, malum, ego, cum hoc accideret, fui? Ut autem ille de Caucaso error Macedonum animis se insinuaret, magna regionuum imperitia effecit. Nam Graeci post Herodotum, ut ex Argonauticis maxime scriptoribus et Dionysio Periegeete et Eustathii parecbolis Dionysianis liquido intelligimus, Asiam sub septemtrione omnem arctioribus spatiis contrahebant, ut Pontum Euxinum proxime ad Caspium mare et aliquanto borealiorem ponerent, Maeoti palude Caspioque mari alueo quodam communis coniunctis. Ita Tanaim ab oriente ducebant, et Caucasum montem sub Tanai porrigeabant usque ad extreum orientem. Turbato totius orbis situ, Chorasmios prope Colchos et Scythes ponebant et Pharaesmenem Chorasmiorum regem, ut est apud Arrianum, narrabant, ad Ponticam et Scythicam expeditionem se Alexandro obtulisse dum, veluti viarum, ob tantam regionis vicinitatem, gnam. Nempe Diodorus (7) in descriptione Asiae, ad orientem et septemtrionem prouinciam recenset ultimam Sogdianam et Bactrianam, haud longe a Tanai et Indiam Cau-

(7) L. XVIII. 5.

Caucaso terminat. Idem ille Diodorus (8) Alexandrum tradit sedecim diebus traecto Paropamiso, vrbem condidisse Alexandriam in Caucaso , qua in Medium via aperiatur. Habuit igitur in animo claustra Caspia et Derbentum vrbem. Ab hoc quoque orientali Caucaso Polybius (9) Oxum fluere tradit. Praeter hanc geographiae adeo perturbatam faciem, alia res etiam Macedonas in errorem seduxit , Strabone iudice. Inuenient in Paropamiso sacra quandam et horribilem speluncam: eam illico comparabant cum tragediis suis, in eaque Prometheus fuisse vincatum et ab Hercule liberatum serebant. Talibus cothurnis incessit fides rerum ab Alexandro ad Caucasum gestarum. Neque id adeo mirandum est. Sunt enim in Alexandri rebus multa alia incredibilia, vt Hieronis alicuius aut Gelonis aut Clearchi res multo celebratores euaserint fide et auctoritate prodentium, quam tanti herois, sicuti Arrianus censet. Et adhuc indignabitur quisquam, si orientales multo his vaniores, temere omnia credidisse dicimus , et confusa perturbasse magis, et fabulis assuisse fabulas?

*Quae neque futura, neque facta sunt, tamen illi sciunt.  
Falso' av vero?*

*Non flocci faciunt: dum illud, quod lubeat, sciunt.*

Ex quo fonte igitur opinio illa manauerit, inuicte declaravi. Simul adparet,qua caussi Derbentum ab Alexander conditum ferant. Nam , vt Arrianus (10) habet, ad Paropamisum Alexandria ab eo est condita. Plinius (1) oppidum illud supra Indiam collocat. Eius rei

(8) L. XVII. 83. (9)p. 863. (10)p. 230. (1)  
L. VI. 23.

rei memoria conseruata est, sed tracta in diuersa, gentium ambitione. Nam Mugalenses quoquē contendunt in regione ea, quam tenent, Alexandrum res gessisse et vrbes condidisse. Testimonio illis sunt loca, nunc deserta quidem, sed ruinis ingentibus aduentitia oculos iter facientium, quorum octo numero nonnemo cum per Selengam Sinas peteret, se animaduertisse Nicolao Vitse-nio (2) retulit. Nec tantum eductas e saxo domos, sed stratas quoque lapide vias. Haud longe a muro Sinico rudera et columnae lapideaeque turres adparent. Haec oppida Alexandrum euertisse Mogalenses opinantur. At in alia Mugalensium desertorum regione (3) vrbs est *JKi Burchan Koton* seu *Trimingzing*. (Rutheni Bogatiri, hoc est, heroum vrbem vocant) eam autumant vrbem Alexandrum condidisse. At, vt diximus supra, alii Alexandriam eam ponunt ad Caspia claustra, rursum alii ad Caucasea, vbi adhuc nominis illius oppidum est. Non, quo ab Alexandro conditum putem, sed quod seu nomen eius in omni fere Asia illustre, impositum est vrbibus etiam posteriori tempore conditis, seu quod alii principes eodem nomine, vrbes a se conditas, a se dici voluere. Fuere autem in Georgia, et Mingrelia multi principes Alexander.

Quaeret nunc quisquam, quem ego conditorem murū huius fuisse censem? Ego vero vtinam vera ita confirmare possim, quam facile aliena a fide destruxi. Sed in

(2) Nic. Vitsenius in Tattariae descriptione *Noord en Oost Tartarye tweede druk t' Amsterdam 1705.* parte II. p. 98. (3) ib. f. 127.

in tam obscura et incorruptis monumentis destituta re, malim conuellere popularem opinionem, quam meam inserere. Si quis Medos prima fundamenta claustrorum iecisse autumat, ego non intercedo. Nulli enim populo concessere in magnificis sumptuosisque operibus. Haud procul a Babylone absuit τὸ Μηδέας τὰ χρόνος Mediae murus latitudine XX pedum, altitudine C. longitudine XX parasangarum, totus operelateritio. (4) At Larissae et Mespiolorum rudera Xenophonti visa, illa, C pedum hæc L, pedum altitudine, fundamentum ostentarunt λίθοις ξενογχυλιάται, vt in hoc muro Caucaseo. Super eo fundamento lateritius murus fuit. (5) Forte ab Medis quoque claustra Ciliciae Syriaeque, muro ducto castellisque usque in mare communita sunt, quae Xenophon eleganter descripsit. (6) Et Medos Scythæ graui bello ac seruitute sex annorum adfixerant, vt eos non modo naturae munimentis, sed etiam artis moliminibus coerceri consultum videretur. A Medis ad Persas claustrorum illorum possessio transiit. Quapropter Ibn Phacreddin Angjou homo Persa, (7) totius regni Persici tractum a Babolabuab ad Omanicum usque mare, hoc est, ad sinum Arabicum definit et ab Oxo usque ad Euphratrem. Ultra Caucasm satis constat Persas nihil tenuisse. Deinde Persis, haec claustra et mare Caspium in Macedonum potestate fuerunt. Nam de Seleuco Nicatore Plinius tradit, (8) circumiectum eum esse Caspium mare, circumiectum et Mmm iam

(4) Xenophon in expedit. Cyri L. II. c. 4. (5) ib. L. III. 4. (6) ib. L. I. 4. (7) apud Thomam Hyde in historia religionis Persarum p. 418. (8) L. VI. c. 17.

iam Antiochum Seleuci filium et praefectum classis eorum Patroclen. Et erat regnum eorum usque in Indiam protensum, mari Adriatico et Ponto Caucasoque inclusum, quantum antea Persarum fuerat. Murum autem ante Seleucum Nicatora ductum in Caucaso fuisse nullum, ex eo mihi fere videor intelligere, quod in Plinio(9) extat his verbis : *Claudius Caesar a Cimmerio Bosporo ad Caspium mare CL millia prodidit : eaque perfodere cogitasse Seleucum, quo tempore a Ptolemaeo Cerauno est interfectus.* Nam illud consilium non tantummodo videtur pertinuisse ad utriusque maris coniunctionem, verum etiam ad munimentum regni aduersus barbaras gentes, quo veluti ripa striga esset. Si igitur ab Antiocho Sotere aut ab Antiocho Theo murus primum ductus fuerit, non est mirandum, quod Alexandri vocatur. Nam quaedam, quae ἐπίγονοι eius gesserunt, huic tribuuntur Alexander. Luculentum exemplum est, quod orientales aeram *Alexandream* et aeram *Dulkarnain seu Bicornis*, dicunt eam epocham, quae a Seleuco Nicatore, duodecimo post Alexandrum defunctum anno instituta est. Sub Seleuco Callinico Nicatoris pronepote iam fractae sunt vires Seleucidarum, cum Parthi defecerunt. Armeni quoque et Hyrcani extulere caput. Et *Hyrcanum regem τῆς παρόδης δεσπότην Caspiorum claustrorum dominum*, Vespasiano imperante fuisse, Iosephus auctor est.(10) Caucasea tenebantur a Ponti regibus et deuicto Mithridate in Romanis ditionibus censebantur. Iberi autem custodie-

(9) *L. VI c. 11.* (10) *de B. I. L. VII. c. 29.*

studiebant. (2) Eo autem tempore murum iam concidisse credibile est, quoniam mentionem eius fieri non inuenimus apud illos, qui portas tamen Caucaseas non ignorarunt.

Cum Mahometani duce Gjerai Chano Derbentum et Anderum vrbes occupassent, Muhamed Auabi Akraffi iussus est, vt, excussis Arabum Persarumque scriptis, antiquitates Dagestanas Turcice commentaretur. Is liber a praefecto vrbis dono datus est PETRO Augusto, atque nunc in collegio exterorum negotiorum asseruatur. Scribit autem, murum Caucaseum ab Alexander conditum denique ita corruisse, vt vix vestigia extarent. Cubadem autem, patrem Nusreuanii, Persarum regem, bellum gessisse cum Hacano, rege Turcarum et Hyrrorum. Hacanum illum dominatum fuisse regno Nucrato et Russis vniuersis, exercitum quadricies mille milium habuisse: tandem pace composita, Hacanum in matrimonium dedisse Cubadi filiam, actumque esse inter socios reges de muro condendo, quo secernerentur provinciae: Cubadem autem a Gabriele angelo admonitum de Alexandri muro, super ipsis fundamentis, ab arena aggesta perpurgatis, inaedificasse partem muri meridionalem, intra annum vertentem, atque deinceps quod reliquum erat a mari vsque ad vltiorem partem Tibriferani (quae vrbs a Derbento nonaginta agas distet, stadiis Ruthenicis admodum quadringentis et quinquaginta) perduxisse et ferreis portis communiuisse intra annos septem, vt centum milites aduersus centies mille hostes se defendere possent. Ab eo

M m m 2

tem-

(2) Iosephus de Antiq. L. XVIII. 6.

tempore Armeniae Mediamque ab incursionibus hostium tutas fuisse. Cubadem, ordinatis ad utriusque muri portas custodiis, filiam Hacani post unius conditionem noctis remisisse ad patrem, dissimulantem hanc tam grauem iniuriam, et reuersum esse in Aderbeidrianam, seu Medianam et Arak seu Parthiam. In his quaedam accedunt ad veram historiam. Versamur enim iam in illis temporibus, in quibus historia Persica et orientalis paene omnis, et fabulis ad veritatem, veluti de nocte vergit in diluculum. Erit igitur operae pretium, ista exigere ad nostrorum testimonia scriptorum. Quod de Chacano Turcarum Hirrorumque rege habet, is est titulus, qui Hunnis Turcis et Tattaris summae maiestatis fuit. Hirri autem sunt *Oigur*, populus, cuius res nunc ex Abulgaso Chano nobis factae notiores. Haec leuiter attingo, quod, nisi temperarem impetum, praeuideo me abreptum iri in prolixam rerum illarum commentationem. Iam licebit Procopium comparare cum Acrasio. Is, postquam bella Ephthalitarum Hunnorum cum Peroze patre Cubadis attigit, proditque Perozen per insidias ab Hunnis circumuentum caesumque cum omni exercitu, et Cubadem annos duos tributa Hunnis pependisse, venit ad mentionem Caucasearum portarum, quas, ut dixi supra, confundit cum Caspiis. Hoc etiam ex ipsa re elucet, quam e Procopio narraturus sum. Loca enim, quae ad Caspia claustra vergebant, in Persarum potestate erant, una cum Armenia orientali, quam idcirco illorum scriptores temporum Persarmeniam vocant. Scribit igitur Procopius (3) portas Caucaseas multorum in potestate fuisse, donec

eas

(3) f. 28.

eas tenuerit Ambazuces Hunnus, Anastasio et Romanis impense amicus. Is extrema iam aetate legatos misit ad Anastasium, pecuniae certam summam petiit, portas et arcem Romanis traditurus. Anastasius consilio inito deprehendit, molestam militi Romano earum custodiam fore, quod commeatus in loco rebus omnibus nudo aegre subueheretur, quodque gentes circum illa loca Romanis non essent subiectae, legatis humaniter appellatis, carere se castello posse ostendit. Post mortem Ambuzacis (4) Cobades ex castello filios eius eiecit Persicumque praesidium imposuit. Post id tempus Iustiniano imperante et rebus orientis a Belisario praeclare administratis, missus est ad Cubadem Rufinus legatus de pace. Cubades autem multa questus est apud Rufinum de Iustiniano et Romanis. Se claustra Caucaſi, cum Anastasius emere nollet, ne, alendo ad eorum praesidium milite, sumptus faceret, occupasse, communii Romanorum suoque commodo, ne ea barbari in Romanas suasque prouincias irrumperent, se numerosissimum exercitum tutandis illis angustiis imposuiffe et aluisse suis sumptibus, Romanorum compendio. Ita, dum exercitum vnum obiicit barbaris, ne omnia ferre et agere in suo Romanoque agro possint, iniustum esse, Romanos non quiescere, vt necesse sit, alium exercitum iis obiici, quos aduersus externam vim tutaretur. Diu se postulasse, vt Romani aut finibus Persicis (tota Mesopotamia) excederent, aut, si bellum facere suis prouinciis vellent, cura alterius exercitus alendi se leuarent, aut saltem ad tuenda

Mmm 3

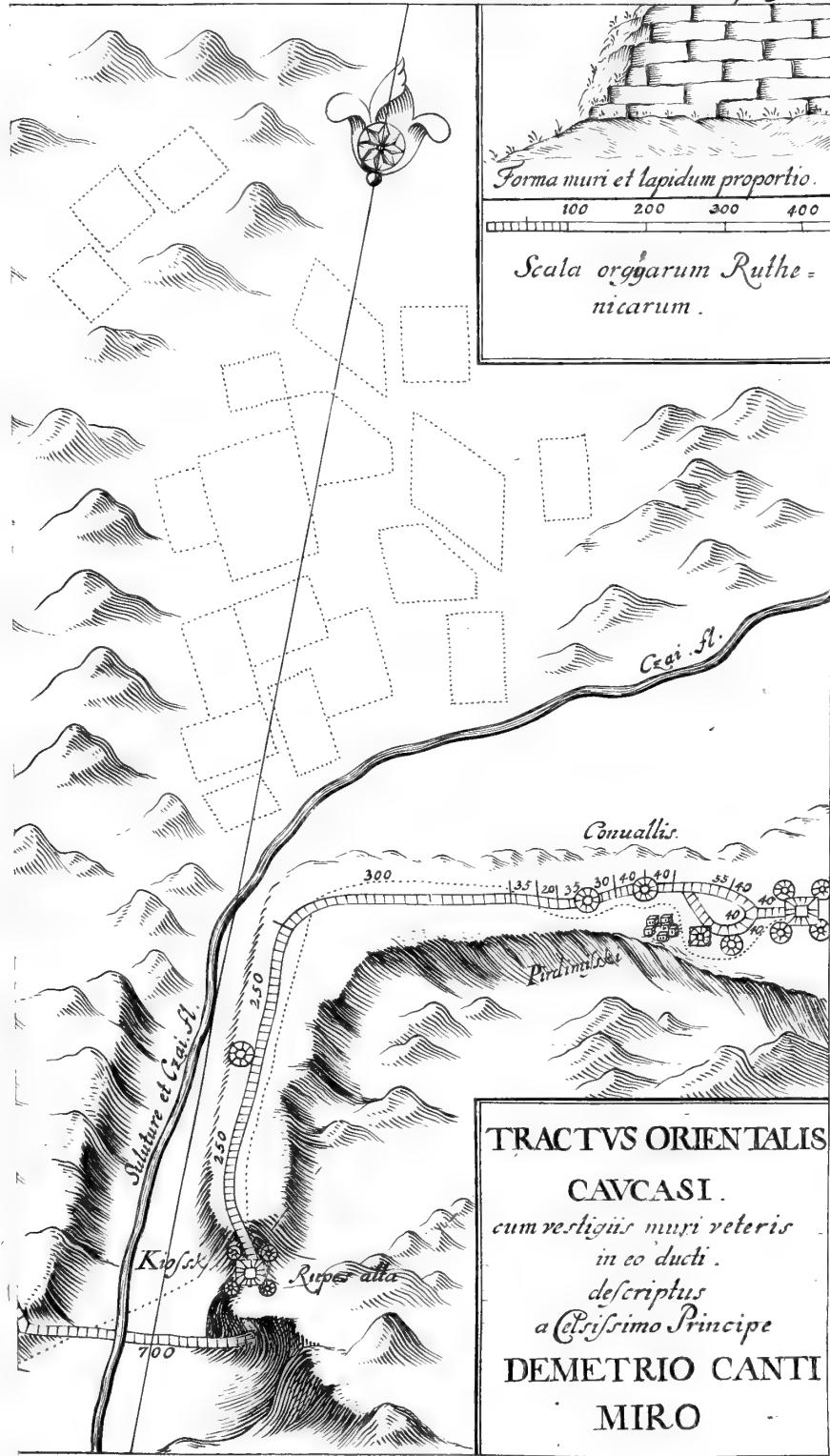
Cau-

(4) *ib. f. 46.*

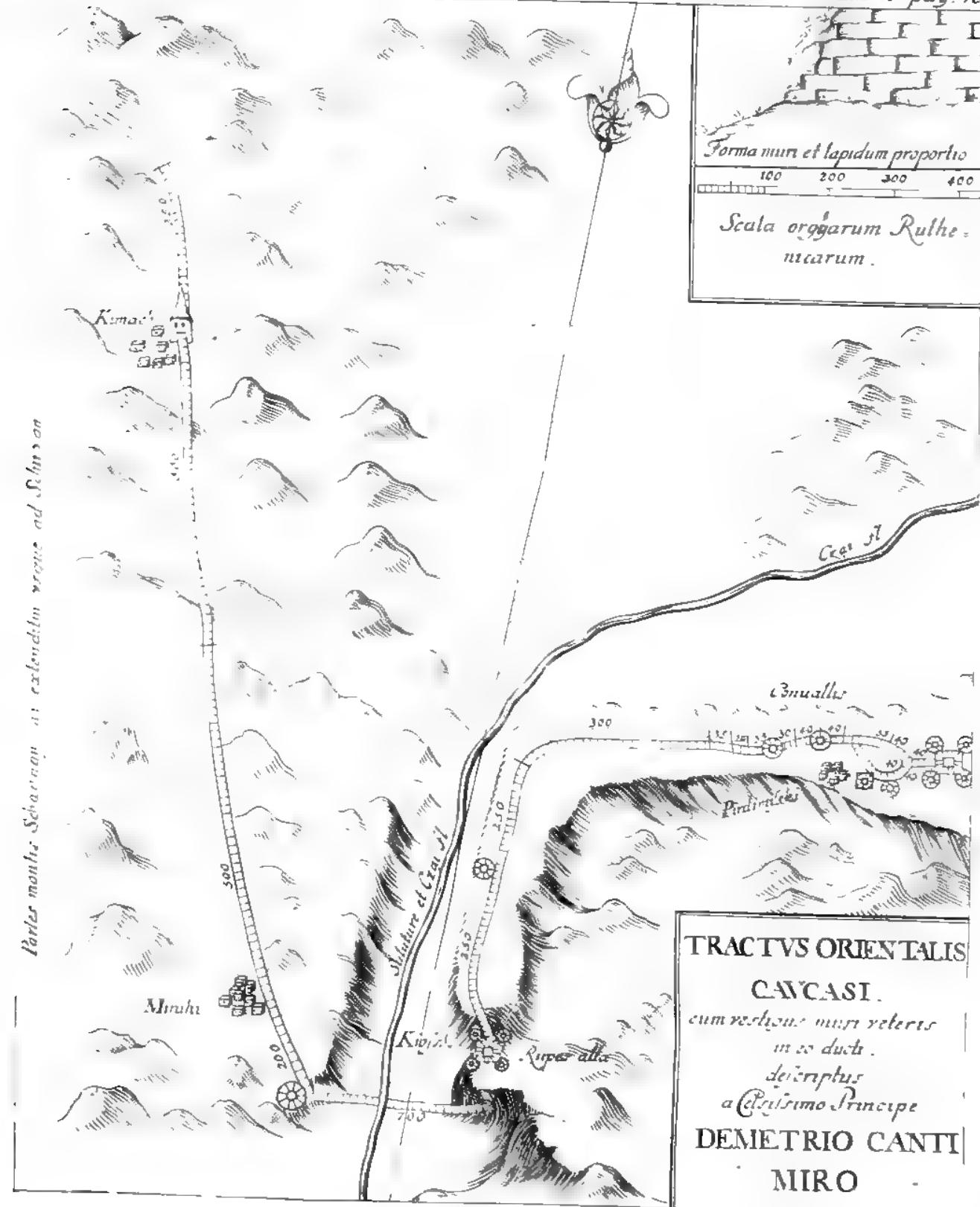
Caucasi claustra parem militum numerum mitterent, sumptusque alendi praesidii secum partirentur. Pacem coitaram non esse, nisi alterutrum Romani faciant. Haec anno quarto Iustiniani Cubades a Rufino postulavit. Infecutum est bellum, Romanis neutram conditionem acipientibus. Id bellum Romanis prouinciis excidium attulisset, ni Cubades vita defunctus et Chosroes Hunnorum irruptionibus fuisset exagitatus. (5) Ad eum cum legati a Iustiniano essent missi, de pace conuenit. Inter ceteras conditiones latum, ut, nisi Romanis videretur communi cum Persis praesidio claustra Caucasi tutari, centenaria CX hoc est, vndeies centena millia auri pondo Persis appenderent. Nec diuturna pax fuit. (6) Chosroes enim haud ita multo post Syriam inuasit et Antiochiam cepit. Ad Antiochiam de pace actum. Chosroes Romanis eam legem tulit, ut in praesenti quingenta, in singulos autem annos quinque centenaria auri tributum penderent Persis ad praesidium Caucasi excubantibus. Is Chosroes est, quem Persae Nusriuanum cognomento Cosres vocant, omnium ante se regum longe maximus. A cuius potentia non abhorret tanti muri machinatio: et longum fuit illius imperium, ut perficiendo operi sufficeret. Nam, teste Georgio Syncello, (7) annos octo et quadraginta regnauit. Ad postremum non praetermittendum duxi locum Gregorii Malatiensis, qui postquam murum ab Alexandro conditum perhibuit, in eam sententiam fatus est. Reges Persarum non destitisse, quærendo muro, donec eum reperiret Jazdegerdus filius Bahram

Ju-

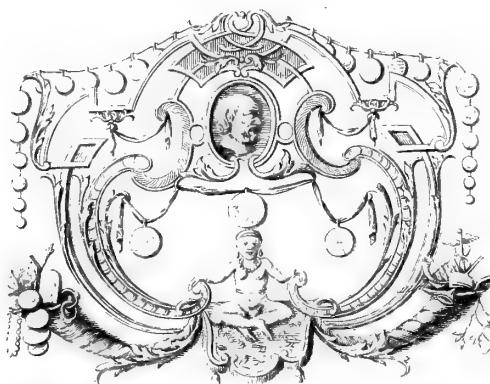
(5) *ib. f. 64.* (6) *f. 112.* (7) *f. 360.*



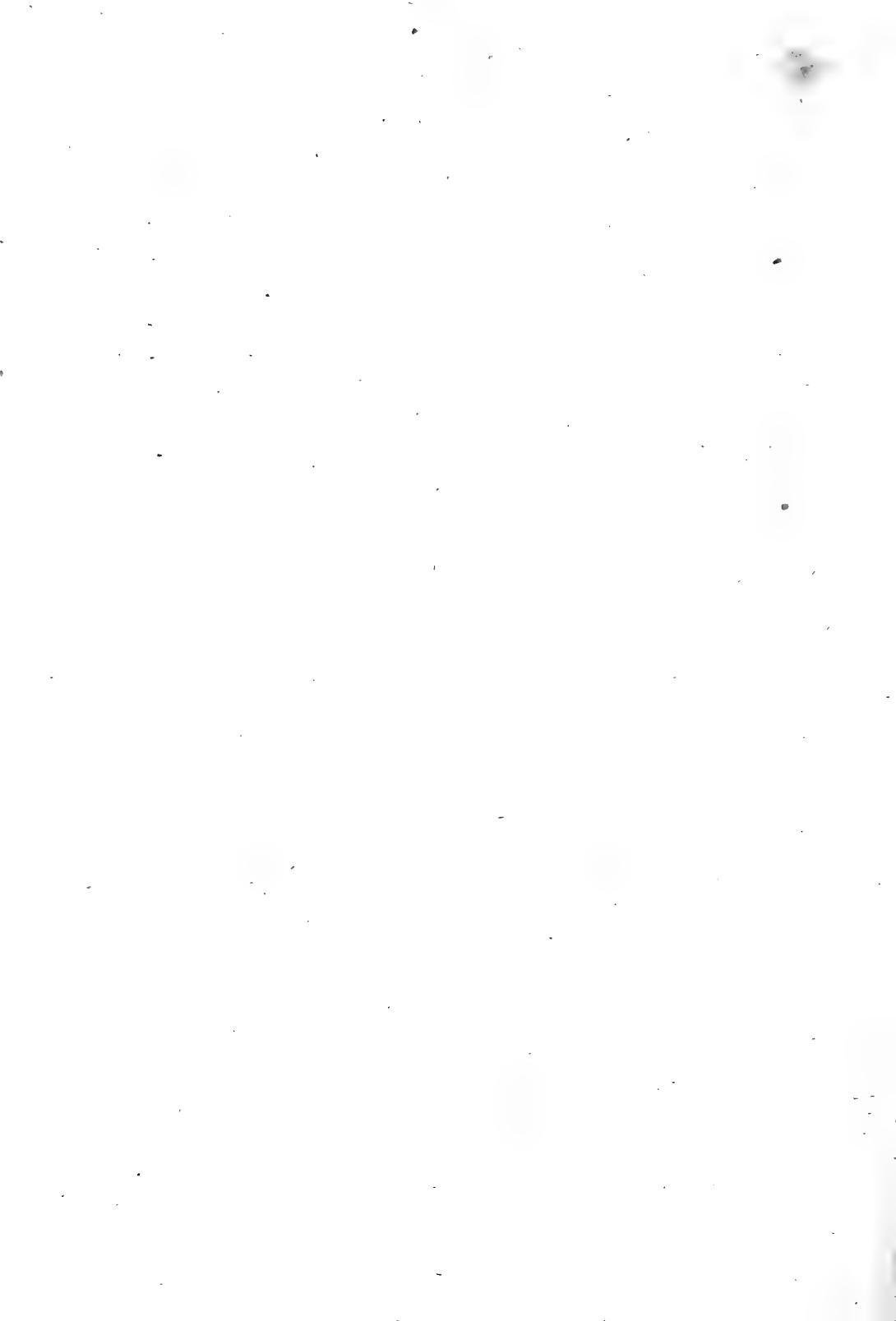
PÄRSMONIES SÉJOUR A L'EXTERRITON VERSUS AD SICURIS, 10



Juri, Jesdegerdi nepos, Saporis pronepos : eum vero murum lapidibus ex aere et plumbo exstruere coepisse, nec tamen perfecisse. Cosroam Nusriuanum denique summis montium fastigiis murum adiunxit, et in mare produxisse mille passus, portisque ferreis clausisse, ut a centum hominibus ea regio obsideretur, quam vix centies mille defendissent antea ab excursionibus : perfecto opere statuisse eum, ut praefectus regionis honoris caussa, folio aureo insideret. Quae postea acciderunt, praesertim sub Iustiniano Rhinotmeto, ea breuitatis caussa consulto praetereo. Hunc enim industriae nostrae modum statuimus.



OBSER-



OBSERVATIONES  
ASTRONOMICAE  
PETROPOLI  
FACTAE

## Monitum.

**A**d calcem cuiusque Tomi horum Commentariorum Academicorum reservabitur Diarium Observationum Astronomicarum; idque potissimum hunc in finem, ut tempus suppetat recipiendis Exterarum Regionum Observationibus, respondentibus illis, quæ quolibet anno fient Petropoli in Observatorio Imperiali, aut aliis in locis Imperii Russici. Inserentur igitur ex his Observationibus peregrinis illæ, quæ aut coincident cum nostris, aut quarum comparatio cum nostris utilitatis aliquid ad promovendam Astronomiam et Geographiam afferre videbitur.

Recensentur autem in primo hoc Tomo non nisi Observationes Satellitum Jovis, quarum ope stabilita fuit differentia Meridianorum Petropolitani et urbium totius Europæ celeberrimarum, e quibus Observationes nostris congruas accepimus. Differuntur in proxime sequentem Tomum horum Commentariorum, illa, quæ facient ad determinandas buius nostræ urbis Latitudinem et Refractiones.

Ecli-

**ECLIPSES SATELLITVM IOVIS,  
OBSERVATAE PETROPOLI,**

a

Fratribus

*Iosepho Nicolao deL'Isle*

&

*Ludovico deL'Isle de la Croyere.*

Ann. N. S. temp. vero.

1726 Julio. 10 12 47 °

Aug. 9 14 51 30



Mmersio primi satellitis, observata per Tubum Campanianum 15. ped. nocuerunt autem eo tempore nimia crepusculi claritas, atque adhuc alia; unde ultra minuta prima in definiendo tempore non licuit assurgere.

Immersio primi satell. per eundem Tub. 15. ped. aliquique  $20\frac{1}{2}$  ped. observata. Ob eadem vero quae antea impedimenta, fides haberi assignato tempori non potest, nisi extra  $\pm$  minutius primi.

Nnn 2

Im-

## OBSERVATIONES

1726 Aug. 18 11 15 46 <sup>b.</sup>

Immersio primi per Tubum  
15. ped.

11 15 52

Per Tubum  $20\frac{1}{2}$  ped. cœlum  
serenum & aër tranquillus erat,  
non procul autem a Iove Luna.

Sept. 10 11 32 51

Immersio primi per Tub. 15.  
ped.

11 32 56

per Tub.  $20\frac{1}{2}$  ped. tempestate  
valde serena & tranquilla.

22 16 13 20

Immersio secundi per Tub.  
15. ped. tempestate satis serena,  
non obstantibus nubeculis quibus-  
dam.

Oct. 19 12 21 46

Emersio primi. per Tub. 15.  
ped. Satelles autem Iovi valde  
vicinus erat.

28 8 47 8

Emersio primi. per Tub. 15.  
ped. intra aliquot minuta secunda.

Dec. 6 7 11 18

Emersio primi, per Tub.  $20\frac{1}{2}$   
ped.

10 30 31

Emersio secundi, per Tub.  $20\frac{1}{2}$   
ped. exacta.

10 30 38

per Tub. 15. ped. exacta.

29 7 15 36

Emersio primi, Tub.  $20\frac{1}{2}$   
ped. exacta.

7 15 48

Tub. 15. ped. exacta.

1727 Ian. 2 10 59 46

Immersio tertii per Tub. 15.  
ped. cœlo nebuloso.

per

1727 Ian. 2. <sup>b</sup> **II** <sup>11</sup> **O** <sup>17</sup>

per Tub.  $20\frac{1}{2}$  ped. puto autem hanc alteram observationem certiorem, & exactam intra pauca minuta secunda. Quamvis enim cœlum serenum videretur, non ita tamen distinete apparebat Iupiter uti alias solebat, transiens nempe subinde per vapores, qui ipsum deformabant, coloribusque inficiebant.

**7** **10** **9** **56**

Emersio secundi per Tub.  $20\frac{1}{2}$  ped.

**10** **10** **4**

per. Tub. 15. ped.

Febr. **1** **7** **17** **15**

Emersio secundi per Tub.  $20\frac{1}{2}$  ped. exacta.

Aug. **5** **11** **52** **23**

Immersio tertii per Tub. 22. ped. cælo sereno & tranquillo; tardus autem huius satellitis motus impediebat certitudinem immersionis usque ad aliquot minuta secunda. Præterierant iamiam 4 aut 5 minuta prima ab initio diminutionis.

**7** **10** **59** **27**

Immersio primi per Tub. 22. ped. nocuit autem Iupiter horizonti proximus.

**8** **13** **37** **9**

Immersio secundi, per Tub. 22. ped.

**21** **14** **50** **30**

Immersio primi, per Tub. 22. ped.

Nnn 3

Immer-

## OBSERVATIONES

1727 Aug.	30 11 15 18	Immersio primi per Tub. 22. ped. cœlo sereno & quieto.
Sept.	2 10 43 57	Immersio secundi. Tubo 22. ped. cœlo sereno & tranquillo.
	6 13 11 24	Immersio primi per Tub. 22. ped. non detegebatur autem prius Iupiter, nisi imminuto iam Sa- tellite.
	9 13 21 35	Immersio secundi per Tub. 22. ped. cœlo sereno.
	10 9 34 30	Emersio tertii per Tub. 22. ped. cœlum erat tranquillum, sed non ubique serenum.
	15 9 36 32	Immersio primi per Tub. 22. ped. cœlo sereno & tranquillo.
Oct.	31 10 8 48	Immersio primi, per Tub. 15. ped. Dubia non nihil ob ventum, nubes & viciniam Lunae.
Dec.	2 8 46 30	Emersio primi. per Tub. 22. ped. exacta, tempestate valde se- rena, nec obstante vicinia Sa- tellitis & Iovis.
	12 14 6 0	Emersio tertii. per Tub. 22. ped. cœlo tranquillo, sed non plane sereno.
1728 Ian.	8 12 14 44	Emersio secundi per Tub. 15. ped. certa non nisi intra aliquot min. secunda ob impetus venti.
	12 33 34	Emersio primi per Tub. 13. ped. intra aliquot min. secunda ob eundem ventum.
		ped.

1728 Ian.	10	5	58	7	Emersio tertii per Tub. 22. ped. aliquot min. secundis incer- ta, ob ventos vehementes.
	7	○	12		Emersio primi, per Tub. 22. ped. nocebant venti.
17	7	56	31		Immersio tertii, per Tub. 13. ped.
	8	53	4		Emersio primi, per Tub. 22. ped. exacta.
	9	55	14		Emersio tertii, per Tub. 22. ped. bona.
Febr.	16	10	59	26	Emersio primi, Tub. 22. ped. intra pauca m. sec.
	18	5	28	20	Emersio primi. Tub. 15. p. cœlo sereno, sed claro adhuc cre- pusculo.
	25	7	24	10	Emersio primi Tub. 22. p. cœlo sereno.
	27	6	40	5	Emersio secundi Tub. 22. p. cœlo sereno & tranquillo.
	29	8	○	29	Immersio tertii per Tub. 22. ped. cœlum serenum erat & tran- quillum, incerta tamen est hæc observatio intra 10. aut 15. min. secunda, evanescente, & redeun- te Satellite aliquot vicibus.
Mart.	10	11	18	19	Emersio primi, per Tubos 13. & 15. ped. cœlo sereno & tran- quillo.

Im-

## OBSERVATIONES

1728 Apr. 12	8 16 12	Immersio tertii per Tub. 15. ped. cœlo sereno & tranquillo.
	10 30 40	Emersio tertii, per Tub. 15. ped. cœlo sereno & tranquillo; quamvis autem Jupiter non mul- tum supra horizontem elevatus fuerit, observatio certa est intra paucula quaedam min. secunda.

*Notae ad has Observationes.*

Primæ harum Observationum usque ad mensem Fe-  
bruarii 1727. factæ sunt per Telescopia 15. &  $20\frac{1}{2}$   
pedum, a Fratre meo de la Croyere & a me. Frater  
meus sæpiissime adhibebat Telescopium Campanianum  
15. ped. ego vero aliud  $20\frac{1}{2}$  ped. cuius ope immersiones  
primi & secundi satellitis sex aut septem min. secundis tar-  
dius observabam quam frater meus ope sui Tubi; Emer-  
siones contra citius ego detegebam, plane ita, ut huius  
rei sæpius experimentum cepimus in Gallia, utque etiam  
apparet ex his nostris Observationibus, Augusti 18. Sept.  
10. Decembr. 6. 1726. nec non Ianuarii 7. 1727. Ob-  
tulit sese interim quoque differentia 12. min. secundorum  
in Emersione primi Dec. 29. 1726. ut alias maiores ad-  
huc taceam, nempe 21. min. secundorum in Immersione 3.  
Ian. 2. 1727, tribuenda vero est hæc ultima differenria  
tarditati motus huius satellitis, circumstantiisque etiam  
temporis, quæ in latere observationis notatæ sunt.

Postquam deinde Frater meus mandato Imperiali  
hinc

hinc Archangelopolin profectus esset mense Apriti 1727. deportassetque secum Telescopium  $20\frac{1}{2}$  ped. ego in reliquis Observationibus frequentissime usus sum Tubo 22. ped. cuius ope, ut multis vicibus Parisiis expertus sum, Immersiones primi & secundi satellitis 5. aut 6 secundis tardius animaduertere mihi licuit, quam ope Tubi  $20\frac{1}{2}$  ped.

Inseruit mihi quoque aliquando in ultimis hisce Observationibus Telescopium Campanianum 15. ped. aliudque in Anglia elaboratum 13. ped. quod multa claritate obiecta exhibet. Quin etiam saepissime observationes habitæ sunt per tres hosce diversos Tubos 13. 15. & 22. ped. adiuuantibus me post abitum Fratris mei Dnis Krafftio & Vignon ; at vero cum non semper accideret ut momenta Observationum tanto præcise intervallo inter se distarent ac Tuborum longitudines illud requirebant : adscribendum id esse putauit diversæ oculorum constitutioni ; itaque consultius esse credidi ut recenseam ex omnibus his observatis ea, quæ maximam partem ipse ego definivi ope Telescopii omnium nostrorum longissimi. Ab initio etiam cum meus adhuc frater mecum esset, hoc aliquoties premebamur incommodo, ut per quosdam dies, in hieme præsertim, Sol non conspicuus esset, quod etiam sufficiebat ad errorem aliquem tempori inducendum. Eiusmodi Observations, quarum tempus verum incertum est ex hac ipsa causa quam allegavi, sunt maxime Octobr. 19. 28. 1727.

Sequentibus temporibus anni nempe 1727. & 28. certior magis fui de tempore vero, exigendo saepius quam

Ooo

alias

alias motum horologiorum ad Solem, favente nimirum occasione, ut ineunte vere anni 1727 lineam meridianam ducere potuerim, iuxta methodum a me designatam in Commentariis Acad. Reg. Scient. Paris. 1719. p. 54.

**ECLIPSES SATELLITUM IOVIS  
NOSTRIS RESPONDENTES,  
OBSERVATAE  
IN OBSERVATORIO REGIO PARISINO  
A D.D.  
CASSINO ET MARALDO  
per Telescopia 17. & 18. ped.**

N.S. temp. vero      *Prima Observatio.*

1726 Aug. 912 59 49

14 51 30

---

1 51 41

**I**Mmersio primi observata Pa-  
risiis.

Eadem observata Petropoli,  
per Tub. 15 & 20 $\frac{1}{2}$  ped.

Differentia meridianorum.

Quoniam vero Petropolitanum  
tempus illa vice non exactum erat  
nisi intra quadrantem minuti pri-  
mi, obstante nimirum nimio cre-  
pusculo aliisque impedimentis,  
quæ Satellitem iusto citius e con-  
spectu nostro removerunt, diffe-  
rentia meridianorum exinde pau-  
lo maior emergere debet. Sup-  
ponam itaque illam vi huius ob-  
servationis 1. 51. 50.

*Se-*

*Secunda Observatio.*

1726 Aug. 16<sup>b.</sup> 14 55 4"

1	18	28	53
---	----	----	----

18	9	23	57
----	---	----	----

11	15	49
----	----	----

1 51 52

Immersio primi exakte Parisii Observata.

Periodus huius Satell. per Tabulas.

Emerfio 1. veluti Parisii apparere debebat.

Emersio observata Petropoli, capiendo tempus medium inter Telescopia 15 & 20 $\frac{1}{2}$  ped.

Differentia meridianorum, quam veræ valde propinquam credo, quamvis enim mihi heic loci Lunæ viciniæ nocuisset; idem etiam Parisii accidit, adeoque differentia meridianorum exinde variari non potuit.

*Tertia Observatio.*

Sept. 8<sup>b.</sup> 15 12 5"

1	18	29	10
---	----	----	----

10	9	41	15
----	---	----	----

11	32	54	"
----	----	----	---

1	51	39	"
---	----	----	---

Immersio primi obseruata Parisii.

Periodus primi Satellitis iuxta tabulas.

Immersio, uti Parisii observari debuit.

Observata Petropoli, capiendo medium inter tempora Tuborum 15 & 20 $\frac{1}{2}$  ped.

Differentia meridianorum.  
Quar-

1726 Oct. 19      <sup>b</sup> 10 29 53  
                       <sup>b</sup> 12 21 46  


---

                      1 51 39

*Quarta Observatio.*

Emersio primi, observata Parisiis, dubia non nihil.

Eadem observata Petropoli per. Tub. 15. ped.

Differentia meridianorum.

Dixi in notis antecedentibus ad meas observationes, quod non plane certus sim de vero tempore huius observationis. Eadem Parisiis habita, dubia non nihil est, quia scilicet Satelles in utroque loco nimis vicinus Iovi erat, qui non nisi ante sex dies in oppositione Solis fuerat. Cum tamen differentia meridianorum exinde prodeat non nimis diuersa a praecedentibus, observatione haec non adeo erronea credenda est; auferam tamen 3. secunda, cum breviori Tubo, Emersio haec Petropoli quam Parisiis observata fuerit, ut adeo differentia meridianorum sit vi hu-

<sup>b</sup>      "      "  
 ius observationis 1 51 50.

*Quinta Observatio*

Emersio primi Parisiis.

Eadem Petropoli, per Tub. 15. ped. intra pauca secunda.

Dif-

28      <sup>b</sup> 6 54 35  
               <sup>b</sup> 8 47 8  


---

b    "    "  
I 52 33

Differentia meridianorum,  
quæ minui debet tribus secundis,  
ob diuersam Tuborum longitudi-  
nem ; aliisque adhuc quibusdam  
ob errorem qui in Petropolita-  
nam irrepit observationem , qui-  
que effecit ut serius iusto mihi ap-  
paruerit emersio; utcunque autem  
tractetur hæc Observatio , diffe-  
rentiam tamen meridianorum  
producit, non minorem quam

b    "    "  
I. 52. 20. quæ multo maior est  
quam reliquæ præcedentes, credo  
autem præcipuum errorem ex-  
inde esse, quod aliquot dies sine  
Sole hic exegimus circa hoc tem-  
pus, uti antea iam annotavi, qua-  
propter non rationem huius ob-  
servationis habendam censeo.

### Sexta Observatio.

Emersio primi Parisiis.

Eadem Petropoli, per Tub.  
 $20\frac{1}{2}$  ped. dubia nonnihil.

Differentia Meridianorum,  
quæ aucta 5. secundis veluti di-  
versa Tuborum longitudo id re-

b    "    "  
quirit, efficit differentiam I. 51. 3.  
reiiciendam rursus, quia dubia  
nonnihil fuit nostra observatio.

Ooo 3

Septi-

1726 Dec. 6    b.    "    "  
7    11    18

---

I 50 58

## OBSERVATIONES

*Septima Observatio.*

1727 Ian. 7 8 19 0

Emersio secundi Parisiis inter nubeculas observata.

10 10 0

Eadem Petropoli, capiendo medium inter Tubos.

1 51 0

Differentia Meridianorum, quæ ob nubes, Parisiensem observacionem sine dubio retardantes, augeri aliquot secundis debet; cum autem quantitas huius retardationis æstimari nequeat, etiam hæc observatio in computum finalem admitti non debet.

*Octava Observatio.*

Aug. 21 12 58 30

Immersio 1. Parisiis, ubi satelles dum intraret umbram amissus fuit vento Tubum agitante.

14 50 30

Eadem Petropoli, per Tubum 22. ped.

1 52 0

Differentia Meridianorum, quæ minui debet 7 ant 8 secundis ob diversam longitudinem Tuborum, atque adhuc aliis quibusdam secundis ob agitationem venti quæ Parisiensi Tubo nocuit, atque iusto citius Satellitem e conspectu removit. Poterit itaque

que supponi differentia a reliquis  
non multum diversa, <sup>b.</sup> I. 51. 50.

### *Nona Observatio.*

1727 Aug. 30	<sup>b.</sup> 11 15 18
	1 18 29 5
	<hr/>
	28 16 46 13
	<hr/>
	14 54 7
	<hr/>
	1 52 6

Immersio primi observata Petropoli per Tub. 22. ped. cœlo sereno & tranquillo.

Periodus huius Satellitis iuxta Tabulas.

Immersio uti Petropoli accidere debebat.

Immersio observata Parisiis, ubi Satelles ex oculis elapsus, Iove inter tenues nubeculas vertente.

Differentia Meridianorum, minuenda 7. aut 8. secundis uti præcedens ob diversam Tuborum longitudinem, atque adhuc quibusdam ob nubeculas Iovem Parisiis impedientem, unde satis tum erit supponere vi huius observationis differentiam meridiano-

<sup>b.</sup>  
rum I. 51. 50.

*Dif-*

*Differentia Meridianorum Parisiensis  
& Petropolitani, cum Longitudine Petropoleos a Pri-  
mo Meridiano per Insulam Ferri transeuntem.*

**Q**Vodsi iam a novem observationibus modo recen-  
fitis auferantur 5ta, 6ta & 7ma ob rationes ibi  
allatas, medium inter sex reliquas non multum  
*b , "*  
ab ludens emerget 1. 51. 50. unde non dubito hanc dif-  
ferentiam Meridianorum Parisiensis & Petropolitani pro  
vera assumere, in Tempore nimirum. Non exactior e-  
nim haberi potest, nisi per maiorum Observationum  
non interruptarum quantitatem utriusque loci, secus  
atque in paucis correspondentibus, quas attulimus, ac-  
cidit. Per Observationes vero Rev. P. Feuillée in Insulis  
Canariis habitas Anno 1724. comparatasque cum Par-  
siensisibus, Longitudo Parisiorum respectu, partis ma-  
xime Occidentalis in Insula Ferri, quæ & ipsa Canaria-  
rum maxime occidentalis est, inventa fuit præcise 20  
graduum, plane sicuti Frater meus natu maior no-  
mine Guilielmus amplius quam 20 annis antea prædi-  
xerat, uti videre est in Diario Eruditorum an-  
ni 1700 quam etiam determinationem semper  
adhibuit in construendis suis Mappis Geographicis,  
reclamantibus omnibus aliis Astronomis & Geographis;  
Conversa igitur in Gradus differentia modo inventa Tem-  
poris Parisiensis & Petropolitani, additisque 20 gra-  
dibus prodibit vera longitudine Petropoleos in gradibus a  
primo Meridiano 47. 57 30.  
*b , "*

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS  
 PETROPOLITANIS RESPONDENTES,  
 ET OBSERVATAE  
 BONONIAE IN ITALIA,  
 A DOM. EUSTACHIO MANFREDI.

*Prima Observatio.*

N. S.

1726 Aug. 18 11 15 46

**I**Mmersio primi observata Petropoli per Tub. 15. ped. cœlo sereno & tranquillo , vicinis inter se Luna & Iove.

18 28 53

Periodus huius Satellitis eo tempore.

16 16 46 53

Immersio primi , veluti Petropoli apparere debuit.

15 29 0

Eadem observata Bononie per Tubum 11. ped. Bononiensem aut 13. ped. Paris. dubia

3 17 53

*Differentia Meridianorum,*

quæ minui debet 3 ob diversam longitudinem Tuborum , erit igitur eadem numeris rotundis

**I.** 17. 50. sed Bononiensis observatio dubia erat , uude etiam a Dno Mansfredi non nisi minuta prima notata sunt.

Ppp

Secun.

*Secunda Observatio.*

1726 Dec.	6	<sup>b</sup> 7	11	18	Emersio primi Petropoli per Tub. $20\frac{1}{2}$ ped. dubia.
		18	28	9	Periodus Satellitis eo tempore
		<u>4</u>	12	43	Emersio uti Petropoli appare- re debuit.
Dec.	<sup>b</sup> 4	11	27	45	Observata Bononiæ per Tub. 13. ped. dubia.
		<u>1</u>	15	24	Differentia meridianorum, quæ differentia augeri debet circiter
		"	10,	propter diversam tuborum longitudinem, prodibit eaigitur	
			1. 15. 34.	sed dubia erat obser- vatio Petropoli & Bononiæ.	

*Tertia Observatio.*

Dec.	29	7	15	48	Emersio primi observata Pe- tropoli per tub. 15 pedum exacte.
		5	59	26	Eadem observata Bononiæ per Tub. 13. ped.
		<u>1</u>	16	22	Differentia meridianorum,
					cui adiicienda sunt 3 ob di- versam Tuborum longitudi- nem, emerget itaque differentia
			<sup>b</sup> 16.	25.	quæ recte sese habere videtur, cum Petropolitana ob- servatio exacta fuerit, neque Bo- nonensem dubium aliquod tur- baverit.

*Quar-*

*Quarta Observatio.*

1727 Ian.

7 <sup>b</sup> 10 <sup>o</sup> 10 <sup>"</sup> 4 Emersio secundi observ. Petropoli per Tub. 15. ped.

8 54 12 Eadem Bononiæ per Tub. 13. ped.

---

1 15 55 Differentia Meridianorum.  
Hæc quoque observatio nulli dubio subiecta est , retinenda igitur

pro iusta , aucta prius 3 pro diversa Tuborum longitudine , unde meridiani distabunt ex hac

observatione 1. 15. 55.

*Quinta Observatio.*Aug. 21 <sup>b</sup> 14 <sup>o</sup> 50 <sup>"</sup> 30

Immersio primi observata Petropoli per Tub. 22. p.

13 34 39 Eadem observata Bononiæ per Tub. 13. ped.

---

1 15 51

Differentia Meridianorum. Observatio hæc , cum dubia non sit notata , retineri debet , abiecitis tantum 12. sec. pro diversa Tuborum longitudine ; erit adeoque differentia meridianorum per

hanc observationem 1. 15. 39.

*Sexta Observatio.*Sept. 6 <sup>b</sup> 13 <sup>o</sup> 11 <sup>"</sup> 24

Immersio primi , Petropoli ,  
Ppp 2 per

## OBSERVATIONES

per Tub. 22. ped. ubi Jupiter  
non prius apparuit , quam Sa-  
telles iamiam minui cœperit.

1727

11 55 17 Eadem Bononiæ per Tub. 13.

ped.

---

11 16 7 Differentia Meridianorum, mi-

nuenda ob diversos Tubos 12.

ut prodeat eadem 1. 15. 55. quæ<sup>b</sup>  
pro legitima assumenda est.  
Quamvis enim hic Petropoli Iupi-  
ter non nisi minuto iam Satellite  
apparuerit, non tamen id meim-  
pediat quo minus persequeret eum  
usque ad totalem immersionem.

*Septima Observatio.*

1728 Febr. 16 10 59 <sup>b</sup> 26 Emersio Imi, Petropoli, per  
Tub. 22. ped. intra aliquotsec.

9 43 8 Eadem Bononiæ per Tub. 13.  
ped.

---

11 16 18 Differentia Meridianorum, 12.  
augenda ob diversos Tubos , ut

<sup>b</sup>  
adeo proveniat 1. 16. 30. intra  
aliquot secunda, ultra quam ex-  
actitudinem Petropolitana hæc  
Observatio sese non extendit.

*Dif-*

*Differentia Meridianorum Petropolitani  
& Bononiensis in Italia.*

Per septem Observationes paulo ante enumeratas inventa fuit hæc differentia uti sequitur: nempe

		<sup>b</sup>	<sup>m</sup>	<sup>s</sup>
per primam	- -	1	17	50
secundam	- -	1	15	34
tertiam	- -	1	16	25
quartam	- -	1	15	55
quintam	- -	1	15	39
sextam	- -	1	15	55
septimam	- -	1	16	30

E quibus si auferatur prima, tanquam nimis diversa a ceteris, capiaturque medium inter sex reliquias, habebimus

<sup>b</sup>  
differentiam horum Meridianorum quam proxime 1 16 0  
quæ amplectenda tamdiu est, dum in utroque loco exactiores habeantur Observationes.

**ECLIPSES PRIMI SATELLITIS  
IOVIS**

PETROPOLITANIS RESPONDENTES,  
OBSERVATAE ULYSSIPPONE

A REV. P. CARBONE S. I.

Per Tub. Campan. 30 palm. Rom. aut  $20\frac{1}{2}$  ped. Regior.

*Prima Observatio.*

1726 Aug. 9 14 51 30 **I**Mmersio primi obs. Petropoli  
Tub.  $20\frac{1}{2}$  ped. dubia 15 sec.  
ob crepusculum.

Eadem

## OBSERVATIONES

$$\begin{array}{r}
 12 & 13 & 30 \\
 \hline
 2 & 38 & 0
 \end{array}$$
 Eadem observata Ulyssippone.  
 Differentia Meridianorum,  
 quæ augeri potest aliquot secundis  
 ob crepusculi claritatem, quæ Pe-  
 tropoli Satellitem sine dubio iusto  
 citius e conspectu removit, sup-  
 ponam itaque vi huius observa-  
 tionis, 2.  $\frac{h}{38}$ . 10.

*Secunda Observatio.*

1726 Sept. 10 11 32 56 Immersio primi obs. Petropoli  
 per Tub.  $20\frac{1}{2}$  ped.  

$$\begin{array}{r}
 8 & 54 & 54 \\
 \hline
 2 & 38 & 2
 \end{array}$$
 Eadem Ulyssippone.  
 Differentia meridianorum, ve-  
 ræ sine dubio valde propinqua,  
 cum nihil excipi possit, contra  
 utramque observationem, ipsaque  
 hæc differentia cum præcedenti  
 etiam fere consentiat.

*Tertia Observatio.*

Oct. 28 8 47 8 Emercio primi, observata Pe-  
 tropoli per Tub. 15. ped. intra  
 aliquot secunda.  

$$\begin{array}{r}
 6 & 8 & 52 \\
 \hline
 2 & 38 & 16
 \end{array}$$
 Eadem Ulyssipone.  
 Differentia meridianorum mi-  
 nuenda 7. secundis pro diversa  
 Tuborum longitudine erit igitur  
 hæc differentia correcta. 2  $\frac{h}{38}$  9.  
 In-

Inventum est per Observ.	1	<sup>b</sup>	38	10
per	2	<sup>b</sup>	38	2
	3	<sup>b</sup>	38	9
ubi medium est		<sup>b</sup>	38	7

*Annotatio ad has Observationes, in qua deducitur, quantum tota fere Europa in Longitudinem sit extensa.*

Observationes quas modo recensuimus factæ Ulyssipone & congruentes cum Petropolitani, primæ omnium forsitan sunt, quæ in Europa unquam factæ sunt cum aliqua exactitudine, tanta in distantia; cum igitur Ulyssippo urbs maxime occidentalis sit totius Europæ; neque in Russia, parte Europæ maxime Orientali, hucusque aliæ observationes accuratæ factæ sint, quam Petropolis; poterit præcedens Meridianorum Ulyssiponensis & Petropolitani differentia haberi, pro maxima extensione totius Europæ in Longitudinem, quantum hucusque accurate definiri potuit, per immediatas observationes. Supra dicta meridianorum differentia in partes circuli conversa fit. 39° 31' 45".

Acce-

Accepi etiam quasdam observationes Satellitum Iovis , Berolini a D. Kirch , Norimbergæ a D. Rost, Madriti à P. Nicasio Grammatici, & Pekini à P. Ignatio Kögler Soc. Iesu, tribunalis Astronomiæ in Sinis præside , habitas ; cum vero paucæ sint , necesse est ut in sequens volumen horum Commentariorum situm Petropoleos respectu harum celebrium totius Terræ Urbium , differam ; ubi spero me interea temporis novas exinde Observationes accepturum esse , quarum ope securius stabilire possim has Longitudines.

F I N I S.



- |   |
|---|
| Commentarii T. i.-XIV.<br>Novi Comment. T. i.-XX.<br>Acta 1777-82 6 vols.<br>Nova Acta T. i.-XV.<br>Mémoires T. i.-X.<br><hr/> VI <sup>e</sup> Série T. i-X.<br><hr/> VII <sup>e</sup> Série T. i.-XXI. |
|---|

Sulam 7°  
July 1881.

