

FOR THE PEOPLE
FOR EDUCATION
FOR SCIENCE

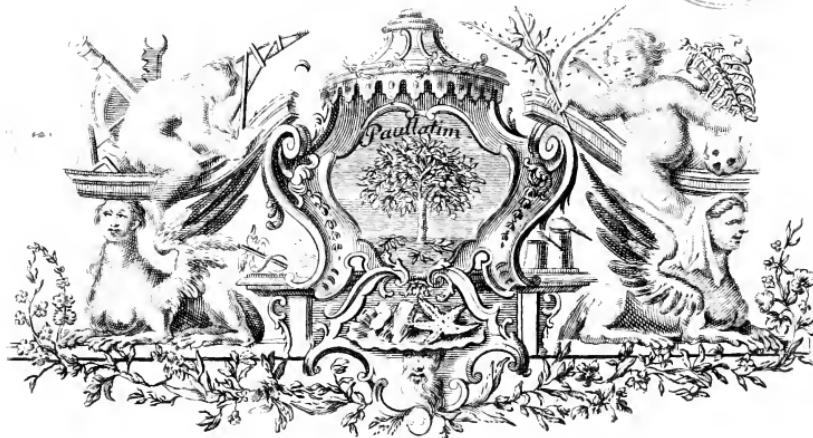
LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY





COMMENTARI
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOMVS II.
AD ANNVM cōlcc XXVII.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE
cōlcc XXIX.



I N D E X
C O M M E N T A R I O R V M .

I N C L A S S E M A T H E -
M A T I C A .

- Iac. Hermanni*, de Constructione Aequationis differentialis primi gradus. 1
F. C. Maieri, Trigonometrica. 12
Christ. Goldbach, de Transformatione Serierum. 30
Io. Georg. Leutmanni, de Bilancibus et nouis inuentis staticis. 35
F. C. Maieri de Planetarum stationibus. 82
Leon. Euleri Problematis Trajectoriarum reciprocarum solutio. 92
Dan. Bernoulli Theoria noua de motu aquarum per canales quoscunque fluentium. 111
Leon. Euleri, de novo quodam curuarum Tautochronarum genere. 126
Iac. Hermanni, Theoria generalis motuum. 139
Christ. Goldback, de diuisione curuarum. 174
F. C. Maieri, de usu interpolationis in solstitiorum momentis indagandis. 180
Iac. Hermanni, de constructione aequationum differentialium. 188
Io. Bernoulli, Theorematata de conseruatione virium viuarum. 200

Io.

- Dan. Bernoulli*, Demonstrationes Geometricae de
Centro virium, oscillationis, et grauitatis. 208
G. W. Kraft, de lineis curuis quae euolutae ipsae se
generant. 216

IN CLASSE PHYSICA.

- Georg Bern. Büßfingeri*, de Tubulis capillaribus. 233
Io. Georg. Du Vernois de Glandulis cordis. 288
Dan. Bernoulli, de Actione fluidorum. 304
I. C. Buxbaum, Noua Plantarum genera. 343
Leonardi Euleri, Tentamen explicationis Phaeno-
menorum aeris. 347
I. C. Buxbaum, Plantae dubiae ad sua genera relatae.
369
Io. G. Du Vernois, de Pene Elephanti. 372
G. B. Büßfingeri, de Frictionibus corporum solidi-
rum. 403
Observationes Anatomicae. 415

IN CLASSE HISTORICA.

- T. S. Bayeri*, de Cimmeriis. 419
Eiusdem Numi decem Erythracorum in Ionia illustrati.
434
Eiusdem Numus Gyrtones illustratus. 459
Eiusdem Vetus Inscriptio Prussica. 470
Vita Nicolai Bernoulli. 482
* * *
Observationes Astronomicae. 489

CLAS-

/

C L A S S I S

P R I M A

continens

MATHEMATICA.

ANNAE

R V S S O R V M

IMPERATRICI

dedicandum putarunt , quos quidem
a proposito non absterruit opusculo-
rum tenuitas atque exilitas , quando
fructus non in alieno solo natos nec
sine cura demesfos , sed quales officii
ac muneris ratio postulabat , TIBI of-
ferre non indecorum visum est.

Interea spem omnem in Tua be-
nevolentia ponimus. Reverte Deo
propitio in urbem patriam et inter ac-
clamationes tot nationum , quarum vo-
tis atque precibus expetita es , solium
Avorum Tuorum PIA, FELIX, AV-
GVSTA concende.

Moscuæ Nonis Febr.
A. cl^o bcc xxx.

Academicorum nomine

Christianus Goldbach.



De Constructione
AEQVATIONIS DIFFERENTIALIS
primi gradus A , in qua a, b, c, e, f, g ,
sunt coefficentes cum suis signis
+ vel —, vt libet dati.
 $A - - - adx + bdy + cx dx + fx dy + ey dx +$
 $gy dy = 0.$

Autore I. Hermanno.



Vm olim in *Phoronomia* Lib. II. Cap. I. Febr.
19. de resistentia medii fusius agerem,
subdidi in Scholio ad Propositionem 72,
nondum constare qua ratione curva re-
sistiliarum construi debeat, ne quidem
concessis quadraturis, cum resistentiae sunt vt celeritates
Tom. II. A mobi-

1727.

mobilis ; coniectabam tamen curuam ex hypothesi ita nascentem fore transcendentem. Dedit hoc occasio-
nem Viris doctissimi nis , Nicolao Bernoulli et Comiti Ricca-
to penitus in hanc rem inquirendi cum successu , nam v-
terque eorum reperit curuam quaesitam algebraicam esse
posse. Ego quoque statim post editam *Phoronomiam* ,
aequationem supra positam A construendam mihi sumsi ,
quae curuam resistentiarum medii , de qua nunc sermo est ,
tanquam casum particularem intra ambitum suum com-
plectitur , et cum ineunte anno 1716 . Ill. *Monmortium*
hac de re certiore fecisset , litteris die 27 . Ian . 1716 .
ad me datis , sequentia rescripsit : *Il est vrai Monsieur , que je suis tres surpris d'apprendre de vous , que cette E-
quation $adx + bdy + cx dx + ey dy + fx dy - gy dy = 0$, est integrable , les lettres a , b , c , etc. exprimant des nom-
bres quelconques , affectés de signes aussi quelconques.*

Cum vero edendae Phoronomiae incumborem et
tantum non omnia per Geometriam linearem absque
calculo in ea tradere conatus sim , constructio autem lineae
resistentiarum in dicta hypothesi per hanc viam pure geo-
metricam non occurseret , ideo tunc scripsi non con-
stare constructionem illius lineae ; quaestionem enim per
calculum , tunc ne quidem tentaueram .

Nunc vero Analysis aequationis A , tanto libentius
Academiae iudicio demum expono , quanto fre-
quentior esse potest usus eius in resolutione multorum
problematum Matheos mixtae . Adducam primum
eam analysis in quam olim incidi , cum primum aequa-
tionem illam construendam mihi proposui .

Mon-

Monstrabo deinceps, quomodo per methodum praeterita aestate exhibitam eadem aequatio tractari debet; ac denique tertium addam modum quo aequatio resolui potest, in difficilioribus quoque egregio usui futurum.

1. Fiant $x=p+b$, et $y=q+i$, ubi p et q sunt variabiles, b et i vero quantitates constantes, surrogandoque in aequatione A --- $adx+bdy+cx dx+fx dy+ey dx+gy dy$, in locum indeterminatarum x et y et elementorum earum dx , et dy , earum aestimationes modo assumtas earumque elementa, mutabitur aequatio A, in sequentem B --- $+cb dp+fh dq+cpdp+eqdp+fpdq+$
 $+ei +gi$
 $+a +b$

$$gqdq=0.$$

2. Ut vero in aequatione B, duo prima membra euanescant, oportet ut fiant $cb+ei+a=0$, et $fb+gi+b=0$, ex qui bus elicuntur valores litterarum assumptiarum b , et i , nempe $b=\frac{ag-be}{ef-cg}$, et $i=\frac{bc-af}{ef-cg}$; ipsa vero aequatio Babit in sequentem C -- $cpdp+eqdp+fpdq+gqdq=0$

3. Ad ulteriore reductionem aequationis C, assumo $q=kp+t$, ubi t est iterum variabilis k vero constans, adeo ut sit $dq=kdp+dt$. Sufficiet enim in aequatione C, $kp+t$, et $kdp+dt$, pro q et dq respective,

A 2

resul-

$$\begin{aligned} \text{resultabit inde aequatio D--- } & +gkk\ pdp + gktdp + gkpdt \\ & +ek \quad +e \quad +f \\ & +fk \\ & +c \end{aligned}$$

$$+gt dt = 0.$$

4. In hac inuenta aequatione iam primus terminus evanescere debet posita aequatione $gkk + ek + fk + c = 0$, ex qua elicetur $k = \frac{-e-f+l}{g}$, facta nempe $\frac{1}{V}(ee + 2ef + ff - 4eg)$, nam aequatio D tunc mutabitur in $+gktdp + gkpdt + gtdt = 0$, vel restituendo inuentum va-

$+ e \quad +f$
lorem litterae k , in sequentem E--- $(e-f+l) tdp + (-e+f+l)pdt + 2gtde = 0$.

5. Ad summationem aequationis E, diuidatur ea per pt , et emerget $(e-f+l)\frac{dp}{p} + (f-e+l)\frac{dt}{t} + \frac{2gdt}{p} = 0$, aequatio composita ex duobus elementis logarithmicis $\frac{dp}{p}$, et $\frac{dt}{t}$; vt vero haec aequatio integrabilis fiat, ponatur $\frac{2gdt}{p} = \frac{du}{u}$, et habebimus $e-f+l\frac{dp}{p} + f-e+l\frac{dt}{t} + \frac{du}{u} = 0$, quae est integrabilis, nam integralis eius est $(e-f+l)\text{Log.} p + (f-e+l)\text{Log.} t + \text{Log.} u = \text{Log.} D$ quantitatis constantis; huic vero aequationi Log. micae competit absolute $p^{e-f+l} t^{f-e+l} u = D$, hinc $p^{-1} = D^{\frac{-1}{e-f+l}} t^{\frac{f-e+l}{e-f+l}}$
 $u^{\frac{1}{e-f+l}}$, adeoque $\frac{2gdt}{p} (\equiv \frac{du}{u}) = D^{\frac{-1}{e-f+l}} t^{\frac{f-e+l}{e-f+l}} u^{\frac{1}{e-f+l}} \times 2gdt$, ex hac vero resultabit facta $D = 1$, sequens
 $2gt^{\frac{f-e+l}{e-f+l}} dt = u^{\frac{-1}{e-f+l}} dt$. Huius vero integralis est $(e-f+l)$

$\frac{(e-f+l)g}{t} t^{\frac{2l}{e-f+l}} = (e-f+l)\Delta + (f-e-l)t^{\frac{-1}{e-f+l}}$, vel
 $\frac{g}{t} t^{\frac{2l}{e-f+l}}, + u^{\frac{-1}{e-f+l}} = \Delta$. Sed aequatio supra inuenta
 $p^{e-f+l} t^{f-e+l} u = 1$, praebet $u^{\frac{-1}{e-f+l}} = p t^{\frac{f-e+l}{e-f+l}}$, pro-
 pterea praecedens aequatio integralis, mutatur in sequen-
 tem $F - pt^{\frac{f-e+l}{e-f+l}} + \frac{g}{t} t^{\frac{2l}{e-f+l}} = \Delta$. In qua Δ significat
 quantitatem constantem.

6. Surrogando praeterea in aequatione F aesti-
 mationes litterarum p et t nempe pro p , $x-h$ vel $x +$
 $\frac{be-ag}{ef-cg}$, et pro t , $bk-i+kv+y$, id est $\frac{f-e+l}{2ef-2cg} a +$
 $(\frac{ee+ef-cl-2cg}{2efg-2cgg})b + \frac{e+f-l}{2g} x + y$. Integralis quaesita expri-
 metur aequatione $G - (x + \frac{be-ag}{ef-cg}) \times$
 $(\frac{f-e+l}{2ef-2cg} a + \frac{ee+ef-cl-2cg}{2efg-2cgg} b + \frac{e+f-l}{2g} x + y)^{\frac{f-e+l}{e-f+l}} +$
 $\frac{g}{t} (\frac{f-e+l}{2ef-2cg} a + \frac{ee+ef-cl-2cg}{2efg-2cgg} b + \frac{e+f-l}{2g} x + y)^{\frac{2l}{e-f+l}} = \Delta$.
 vel etiam
 $(y + \frac{af-bc}{ef-cg}) \times (\frac{ef+ff-fl-2cg}{2cef-2ccg} a + \frac{e-f+l}{2ef-2cg} b + \frac{e+f-l}{2c} y + x)^{\frac{e-f+l}{f-e+l}}$
 $+ \frac{c}{t} (\frac{ef+ff-fl-2cg}{2cef-2ccg} a + \frac{e-f+l}{2l} y + x)^{\frac{2l}{f-e+l}} = \Delta$.

Sed haec posterior H resultat ex hypothesi, quod $p =$
 $kq+t$, cum altera G deriuata sit ex positione ipsius
 $q = kp+t$.

7. Si $2Vcg$ excedit summam $e+f$, ambae aequa-
 tiones G et H inutiles fient, quia constructio aequationis
 A tunc pendet a quadratura Circuli et Hyperbolae, quae

modo sequenti institui potest. In recta indefinita AO, capiatur CA = $\frac{l}{2e}$, et in AD ad AO normali AB = $\frac{e+f}{2e}$. Describantur deinceps centro C, radio CA circulus AFF, et per B, hyperbola QBK inter asymptotas CP, CO : quibus praeparatis, capiatur quadrilineum hyperbolicum ABKI = $\frac{f-e}{l_3}$ sectoris FCE, factaque CG quarta proportionali ad CB, CD, et CA, ducatur per punctum G recta GH aequidistans ipsi AD; et facto quadrilineo ABML = quadrilineo GHKI, fiat tandem, ut CA ad BD ita CL ad CN. Erunt $x = CN + \frac{ag-be}{ef-cg}$, et $y = CL + \frac{bc-af}{ef-cg}$, coordinatae curuae construendae, vbi tamen meminiisse oportet, quod nunc sit $l = \sqrt{4cg-ce-2cf-f^2}$.

8. Itaque integralis aequationis $udu - 2budy + ydy = 0$, quam D. Comes Riccatus dedit pro linea resistentiarum medii cum mobile in caua parte cycloidis delabitur et resistentiae celeritatibus actualibus mobilis proportionales sunt, est tantum casus particularis aequationum G vel H §. 6. exhibitarum; praebent enim hae aequationes $ux(-b-u\sqrt{bb-1})+y\sqrt{b+\sqrt{bb-1}} + \frac{1}{2\sqrt{bb-1}}$
 $(-b\cdot u\sqrt{bb-1})+y\sqrt{b+\sqrt{bb-1}} = \Delta$ pro integrali aequationis D. Riccati. In qua tamen b unitatem excedere debet, alioqui constructio aequationis penderet a quadratura circuli et hyperbolae vt §. 7. ostensum.

9. Integralis aequationis superioris E (§. 4.) etiam hoc modo inueniri poterat, assumendo aequationem
 Apt^4

$Apt^\alpha + Bt^\beta = \Delta$, nam differentialis eius, quae est $At^\alpha dp + \alpha Apt^{\alpha-1} dt + \beta Bt^{\beta-1} dt = 0$, per divisionem cum quantitate $t^{\alpha-1}$, reducitur ad $Atdp + \alpha Apdt + \beta Bt^{\beta-\alpha} dt = 0$, quae eiusdem formae est, excepto membro $\beta Bt^{\beta-\alpha} dt$, cum aequatione E. Quod si vero $\beta - \alpha$ fuerit $= 1$, ambae aequationes eiusdem prorsus formae euident, sint ergo $A = e \cdot f + l$, $\alpha A = f - e + l$, adeoque $\alpha = \frac{f - e + l}{e - f + l}$, et $\beta = \alpha + 1 = \frac{2l}{e - f + l}$, ac denique $\beta B = 2g$, atque adeo $B = \frac{e - f + l}{l} \times g$. Quare aequatio supra assumta mutatur in
 $e - f + l \times pt \frac{f - e + l}{e - f + l} + e - f + l \times \frac{g}{l} t^{\frac{2l}{e - f + l}} = e - f + l \times \Delta$. Nam pro constanti Δ quaelibet alia pro lubito assumi potest. Diuidendo porro aequationem ultimo inuentam per $e - f + l$, resultabit $pt^{\frac{e - f + l}{e - f + l}} + \frac{g}{l} t^{\frac{2l}{e - f + l}} = \Delta$, quae est aequatio integralis aequationis E, quam supra §. 5. iam inuenimus.

10. Integralis aequationis A, inueniri quoque potest per methodum integrandi quam in Tom I. *Comment. Acad. Scient. Imp.* p. 149. exhibui, idque sine praevia aequationis integranda reductione. Nam aequatio A cuius integralis quaeritur, per ea quae ibi in *Scholio generali* dicta sunt, est quantitas, quam per dK illic designo, cumque (*hyp.*) sit $dK = 0$, erit etiam $R^\lambda dK = 0$, vbi R significat quantitatem quamcumque, et λ quoque exponentem quemcumque, sit ergo $R = a + \beta x + y$, habebimusque per dictam methodum aequationem *Canonicam* $dK = \lambda + 1$.

MdR

$M dR + R dM$, ubi dK significat quantitatem $adx + bdy + cx dx + fxdy + eydx + gydy$.

Iam quia in $dR = \beta dx + dy$, inest membrum βdx , diuido omnia membra quantitatis dK per dx , in quibus haec diuisio succedit, inuenientur quoti a , cx et ey , sed loco coefficientium a , c et e scribam A , B et C , adeo ut assumenda sit aequatio $M = A + Bx + Cy$. Sufficiendo iam in aequatione *Canonica* $A + Bx + Cy$, et $\alpha + \beta x + y$, pro M et R , nec non $Bdx + Cdy$ et $\beta dx + dy$, pro dM et dR , mutabitur aequatio *Canonica* in sequentem $cx dx + fxdy + eydx + gydy + adx + bdy = \beta \lambda Bx dx + \lambda Bx dy + \beta \lambda Cy dx + \lambda Cy dy + \beta \lambda Adx + \lambda Ady + 2\beta B + B + \beta C + 2C + \beta A + A + \beta C + B + \beta C + B + \alpha B + \alpha C$

Collatio terminorum homologorum praebet

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{-2a}{f-e+l} + \frac{(e+f+l)b}{(f-e+l)g}, \text{ existente } l = \sqrt{(ee+2ef+ff-4cg)} \\ \beta &= \frac{e+f+l}{2g}, \text{ et } \lambda = \frac{2e-2f}{f-e+l} \\ A &= \frac{(f-e+l)ag}{(e-f+l)l} + \frac{(2ee+2ef-4eg-2el)b}{e-f+l} \\ B &= \frac{2eg-ee-ef+el}{2l}, \text{ et } C = \frac{(f-e+l)g}{2l}.\end{aligned}$$

Integralis vero quaesita, quae per *Theor. I.* loco supra citato est $MR^{\lambda+1} = \Delta$, ubi Δ est constans, iam inuenietur esse $(y + \beta x + \alpha)^{\frac{e-f+l}{f-e+l}} \times (Cy + Bx + A) = \Delta$. Assignando litteris assumtitiis α , β , λ , A , B , C eos valores quos modo indicauimus. Quamuis vero haec ultima aequatio a superioribus G vel H §. 6. exhibitis, discrepare videtur; ad eas tamen facile reduci poterit.

II. Si in aequatione construenda A , infima membra

bra $+adx + bdy$ defunt, euanescent quoque aestimatio-
nes litterarum A et α , et incidemus in casum quem
Cel. Iohann. Bernoulli, in dictis *Commentariis pag. 179.*
pluribus excusit, ostendendo quomodo per methodum
suam integralis aequationis propositae, quam ipse Cano-
nicam primi gradus vocat, inueniri possit, et indican-
do quando aequatio ab ipso inuenta, est ad curuam alge-
braicam, et quando ad lineam rectam.

Ex analysi vero quam praecedenti §. exhibui,
iterum patet, aequationem inuentam cessare, quoties
summa coefficientium $e+f$ deficit a quantitate $2Veg$, quia
hoc casu *l* fit quantitas imaginaria.

12. In §. 16. poterat quoque assumi $M=A$
 $+Bx+Cy+N$, vbi N est noua indeterminata, suffi-
ciendo enim huius M et dM valores modo indicatos in
superiori nostra aequatione *Canonica*, perueniemus ad
aequationem H . .

$$\begin{aligned} &+adx + bdy + cxdx + fxdy + eydx + gydy = (\lambda + 1)NdR + RdN. \\ &- \beta\lambda A - \lambda A - \beta\lambda B - \lambda B - \beta\lambda C - \lambda C. \\ &- \beta A - A - 2\beta B - B - \beta C - 2C. \\ &- \alpha B - \alpha C - \beta C - B. \end{aligned}$$

Si nunc in sinistra parte huius aequationis H omnia mem-
bra, exceptis duobus primis, euanescente faciamus, inue-
nientur pro litteris assumitiis β et λ , et pro B ac C iidem
valores quos iam supra §. 10. eliciuimus, sed re-
manebit aequatio.

$$\begin{aligned} I . . &+ adx + bdy = (\lambda + 1)NdR + RdN. \\ &- \beta\lambda A - \lambda A \\ &- \beta A - A \\ &- \alpha B - \alpha C \end{aligned}$$

Tom. II.

B

Sed

Sed si $a - (\lambda + 1)\beta A - \alpha B$, fuerit ad $b - (\lambda + 1)A - \alpha C$ nt β ad 1, aequatio I integrabilis erit, K . . . $\beta Q dx + Q dy = (\lambda + 1)N dR + R dN$, existente $Q = -(\lambda + 1)A - \alpha C + b$. Atqui $\beta dx + dy = dR$, ergo aequatio K abit in $Q dR = (\lambda + 1)N dR + R dN$, ducatur haec in R^λ ; nasceret inde $QR^\lambda dR = \lambda + 1 NR^\lambda dR + R^{\lambda+1} dN$, quae integrabilis est, nam integralis eius inuenietur esse $= \frac{QR}{\lambda + 1}$
 $+ \Delta = NR^{\lambda+1}$, adeoque $N = \Delta R^{-\lambda-1} + \frac{Q}{\lambda + 1}$.

13. Superior analogia $- (\lambda + 1.)\beta A - \alpha B + a - (\lambda + 1)A - \alpha C + b : \beta$. I praebet $a(-\frac{b\beta - a}{\beta c - b}) = \frac{-2a}{f - e + l} + \frac{(e + f + l)b}{(f - e + l)g}$, ut supra, et $Q = -(\lambda + 1)A - \alpha C + b$ nunc fact $= -(\lambda + 1.)A + \frac{(f - e + l)ag}{(e - f + l)l} + \frac{(2ee + 2ef - 4cg - 2el)b}{e - f + l}$. In hac aestimatione vero quantitatis Q , A est arbitriae magnitudinis : veruntamen si ipsi is valor detur, quem supra pro A inueneramus, euanescet Q ; et ea ipsa aequatio integralis inde emerget, quam paullo ante inueneramus. Sin vero $A = 0$, fiet quidem $M = Cy + Bx + N = Cy + Bx + \frac{Q}{\lambda + 1} + \Delta R^{-\lambda-1}$; et integralis quae sita $(y + \beta x + a) \frac{e - f + l}{f - e + l} \times (Cy + Bx + \frac{Q}{\lambda + 1}) + \text{constantia}$ alii constanti. Verum $\frac{Q}{\lambda + 1}$ eadem est cum quantitate quam §. 10. pro aestimatione litterae assumptiae A inueneramus, adeoque etiam in hoc casu Integralis haec eadem est cum iam exhibita.

14. Tandem constructio aequationis $A . . . adx + bdy + cxdx + \text{etc.} = 0$ etiam sequenti modo obtineri potest

test, ponendo $dy = zdx$, hoc pacto enim aequatio A abbibit in sequentem $adx + bzdx + cxdx + fxzdx + eydx + gyzdx = 0$; quae diuisibilis est per dx , et prodibit aequatio $a + bz + cx + fxz + ey + gyz = 0$, ex hac vero elicitur aequatio L... + $y = -\left(\frac{fx + c}{gz + e}\right)x - \left(\frac{bz + a}{gz + e}\right)$; hinc aequatio differentiata praebet, $dy(zdx) = \frac{(fx + c)dx}{gz + f} + \frac{(cg - ef)x dz}{(gz + e)^2} + \frac{(ag - be)dz}{(gz + e)^2}$

haec vero rite reducta, suppeditat sequentem aequationem M, quac integrabilis est, $M \dots \frac{dx}{x} = \frac{(cg - ef)dz}{(gz + ez + c) \times (gz + e) + f} + \frac{(ag - be)dz}{(gz + ez + c) \times (gz + e) \times \frac{dx}{x}}$

I 5. Ad constructionem eius ponamus $\frac{dP}{P} = \frac{(cg - ef)dz}{(gz + ez + c) \times (gz + e) + f}$, eritque $\frac{(ag - be)dz}{(gz + ez + c) \times (gz + e) + f} = \frac{ag - be dP}{cg - ef P}$, hoc pacto enim aequatio M,abit in hanc alteram $\frac{dx}{x} = \frac{dP}{P} + \frac{(ag - be, dP)}{cg - ef P x}$. Dicatur $\frac{ag - be, dP}{cg - ef, P x} = \frac{dQ}{Q}$, eritque $\frac{dx}{x} = \frac{dP}{P} + \frac{dQ}{Q}$, et ex hac elicetur $x = P Q$, qui val or in $\frac{ag - be, dP}{cg - ef, P x} = \frac{dQ}{Q}$, substitutus dat $\frac{ag - b_2 dP}{cg - ef P P Q} = \frac{dQ}{Q}$, adeoque $dQ = \frac{ag - be dP}{cg - ef, P P}$, et sumtis integralibus $Q = \Delta + \frac{be - ag}{cg - ef, P}$, hinc $x (= P Q) = \Delta P + \frac{be - ag}{cg - ef}$, et $(x + \frac{ag - be}{cg - ef}) P^{-1} = \text{constanti } \Delta$. Sed quid est P?

Est autem $\frac{(cg - ef) dz}{(gz + ez + c) \times (gz + e) + f} \left(\frac{dP}{P} \right) = \frac{g \alpha dz}{gz + m} + \frac{\beta dz}{z + n} + \frac{gdz}{gz + e}$, ubi sunt $l = V(ee + 2ef + ff - 4cg)$, $m = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}l$; $n = \frac{e + f + l}{2g}$; $\alpha = \frac{e - f - l}{2l}$, et $\beta = \frac{f - e - l}{2l}$.

Ipsa vero binomia $gz + m$ et $z + n$, sunt bini factores

trinomii $gz^2 + ez + c$. Hinc est Log. $P = \alpha \text{Log.}(gz + m)$
 $+ \beta \text{Log.}(z + n) + \text{Log.}(gz + e)$, et aequatio ex hac se-
 rie quantitatum Logarithmicarum resultans est
 $P = (gz + m)^\alpha \times (z + n)^\beta \times (gz + e)$. Est ergo integralis
 quaesita
 $(gz + m)^{-\alpha} \times (z + n)^{-\beta} \times (gz + e)^{-1} \times (x + \frac{ag - be}{eg - ef}) = \Delta$.
 In hac vero est $z = \frac{-a - cx - ey}{+b + fx + gy}$.

TRIGONOMETRICA

F. C. Maieri.

I.

M. Febr.
1727.



Ollegi in hoc scripto theorematata quae
 diuersis temporibus in Conuentu nostro
 proposui, ad quae prouocauit aliquoties
 antea, et saepius prouocabo posthac.
 Non omnia quidem nona sunt,
 necessaria tamen ad demonstranda secutura.
 Theorema generale trado, via analytica reper-
 tum, ex quo facili opera omnia, quae vulgo habentur,
 praecepta trigonometriae sphaericae tanquam consepta-
 ria deriuantur. Modum ostendo quo omnes regulas
 Trigonometricas vtcunque compositas solo sinuum ca-
 nonem logarithmico expedire licet, et, quod hactenus for-
 san

san parce factum est, calculum literalem ad trigonometrica problemata difficiliora sic accommodo, ut eius laus et praestantia in hac quoque Geometriae parte clarius dispalescat.

2. Praemittam theorematum quaedam, quae, licet ad prima Trigonometriae elementa spectent, obuia tamen non sunt ubique, et legentem morari possent si alio ablegaretur. Primum itaque hoc est : *Si sinus et cosinus item tangens et cotangens acuti anguli, positivi esse censeantur, obtusi anguli tangens et sinus positivi quidem manent, sed cotangens ipsius et cosinus priuatiui sunt : cadunt enim in plagam respectu centri oppositam ei quam auctorum sinus et tangentes occupant.* Eodem modo intelligitur, quod tangens et sinus aequae ac cotangens et cosinus anguli tres quadrantes non excedentis sint priuatiui omnes. *si vero excedat tres quadrantes tangentem habet et sinum priuatiuos ; sed cotangentem et cosinum positiuos.* Sic et ipse sinus totus, cui sinus anguli acuti, vel gibbi excedentis, *insistit, positivus est ; in duobus reliquis casibus est priuatius.*

3. Quoniam in triangulis non nisi acuti et obtusi anguli considerandi obueniunt, negligam posthac gibbos; Igitur sinus et tangentes constanter positivi, cotangentes, et cosinus indeterminati, ambigui erunt.

4. *Si anguli acuti maioris sinus fit =S et cosinus =C. anguli minoris sinus =s et cosinus =c ; dico, fore sinum anguli ex duobus hisce acutis compositi = $\frac{sc+cs}{r}$, sinum vero residui $\frac{sc-sc}{r}$, posito radio =r.*

Fig. I.

Sit angulus maior (v. fig. 1.) $\angle GCF$, sinus eius $= DF = S$, et cosinus $= CD = C$. Sit porro angulus minor $\angle ACG$, eiusque sinus $= AE = s$, atque cosinus $= EC = c$, erit hoc modo angulus compositus $\angle ACF$ eiusque sinus $= FH$. Producatur iam FD in B, vt obtineantur triangula similia AEC, BDC, CHK et BFH, atque inferatur.

$$EC : AE = DC : BD$$

$$\text{siue } c : s = C : \frac{sc}{c}$$

$$\text{est ergo } BF = BD + DF = \frac{sc + sc}{c}$$

inferatur dehinc denuo

$$AC : EC = BF : FH$$

$$\text{siue } r : c = \frac{sc + sc}{c} : \frac{sc + sc}{r}$$

$$\text{Est ergo sinus compositi } FH = \frac{sc + sc}{r}. \text{ Q. E. Primum.}$$

Si vero in eadem figura maior angulus sit $\angle ACF$, eius sinus $= FH = S$, et cosinus $= CH = C$, minor angulus $\angle ACG$, eius sinus $= AE = s$, et cosinus $= EC = c$, erit sinus anguli residui $= DF$. Est autem

$$EC : AE = CH : HK$$

$$\text{siue } c : s = C : \frac{sc}{c}$$

$$\text{per consequens habetur } FK = FH - HK = \frac{sc - sc}{c}$$

atque exinde

$$AC : EC = FK : EF$$

$$r : c = \frac{sc - sc}{c} : \frac{sc - sc}{r}$$

$$\text{Est ergo sinus residui } = \frac{sc - sc}{r}. \text{ Q. E. alterum.}$$

5. *Datis prioribus, erit cosinus anguli compositi $= \frac{ce - ss}{r}$ et cosinus residui $= \frac{ce + ss}{r}$*

De.

Demonstratio potest ex schematismo prioris propositionis peti facillima; sed iuuat eam alio modo ador-
nare. In primo casu datur sinus (§. 4) $= \frac{sc+sc}{c}$ ergo
per praecepta communia cosinus erit $\sqrt{rr - \frac{sc+sc}{r}}$ quadr.)
 $= \sqrt{r^4 - S^2 c^2 - 2ScCc - S^2 C^2} : r$ est vero $r^4 = (r^2 + c^2) \times$
 $(S^2 + C^2) = S^2 s^2 + S^2 c^2 + C^2 s^2 + C^2 c^2$. Hoc ergo
valore substituto habetur cosinus compositi $=$

$\frac{\sqrt{(C^2 c^2 - 2ScCc + S^2 s^2)}}{r} \frac{Cc - Ss}{r}$. Qui est cosinus
compositi, sicuti demonstrandum erat: Alter vero ca-
sus de cosinu residui eodem modo demonstratur.

6. Notandum est de hoc et similibus casibus, esse
 $\sqrt{(C^2 c^2 - 2ScCc + S^2 s^2)} = Cc - Ss$ non vero $\pm (Cc - Ss)$
formula enim $Cc - Ss$ per se iam est ambigua, et duos ca-
sus, quos debet, contrarios perfecte in se continet, quip-
pe cum $Cc > Ss$, et $Cc < Ss$ esse possit, eoque ipso
formula et positiva et priuativa sit, valensque simul pro
cosinu acuti et obtusi anguli, qui in casibus specialibus
per formulam determinantur.

6. Sit tangens anguli acuti maioris $= T$, tangens
minoris $= t$. erit ita tangens compositi $= rr \frac{T+t}{\pm Tt \mp rr}$ (sc. pro
acuto $rr \frac{T+t}{Tt - rr}$, pro obtuso $rr \frac{T+t}{rr - Tr}$) tangens vero residui
 $= rr \frac{T-t}{Tr + rr}$.

Ponatur praeterea secans maioris $= M$, minoris
 $= m$, erit ex natura sinuum et tangentium sinus anguli ma-
ioris

ioris $= \frac{r^T}{m}$ eiusque cosinus $\frac{rr}{m}$; porro sinus minoris $= \frac{rr}{m}$.
 eiusque cosinus $= \frac{rr}{m}$. ex hisce formatur (per §§4 et 5.)
 sinus arcus compositi $= rr \frac{T+t}{Mm}$ eiusq; cosinus $r \frac{rr-Tt}{Mm}$; i-
 tem sinus residui $= rr \frac{T-t}{Mm}$ et cosinus $= r \frac{rr+Tt}{Mm}$. Cum igi-
 tur sit vt cosinus ad sinum, ita radius ad tangentem (po-
 sitio radio positivo si cosinus positivus et pro acuto fuerit;
 priuatiuo autem si secus (¶. 2) :) habetur Tangens com-
 positi $= rr \frac{T+t}{\pm Tt+rr}$ et residui $= rr \frac{T-t}{Tt+rr}$. Q. E. D.

7. Quoniam tangens est ad radium vti radius ad cotangentem, erit cotangens compositi $= rr \frac{-Tt}{T+t}$ et residui
 $= \frac{Tt+rr}{T-t}$ (vbi de cotangente compositi notandum, eam pro
 acuto valere si sit $rr > Tt$, vicissim vero pro obtuso:)

8. Sit maioris anguli acuti sinus $= S$, cosinus $= C$, si-
 nus anguli minoris $= s$, cosinus $= c$, sit praeterea semisum-
 mae (ex maiore et minore arcu formatae) sinus $= A$, co-
 sinus $= B$ et tangens $= Q$; dico esse $\frac{s-s}{c-c} = \frac{c+c}{s+s} = \frac{B}{A} = \frac{r}{Q}$
 (vbi r = radio)

Fig. II.

In figura secunda sit arcus maioris sinus $= DE = S$,
 et cosinus $= DH = C$, minoris arcus sinus sit $= BC = s$, co-
 sinus $= CH = c$. Prolongetur maior sinus in O, et BM
 fiat normalis ad EO, vt habeatur KO $= S + s$, KE $=$
 $S - s$, KM $= c + C$ et KB $= c - C$. Erit quoque arcus
 OB aequalis summae arcuum propositorum, huius su-
 matur dimidium AB $= AO$ cuius formetur tangens
 BI $= Q$. Sinus AL $= A$ et cosinus HL $= B$. Hoc mo-
 do

do obtinentur triangula rectangula MKO, EKB, HBI et HLA omnia similia, fiet proinde

$$\left\{ \begin{array}{l} KE : KB = KM : KO = LH : LA = BH : BI \\ (S-s) : (c-C) = (c+C) : S+s = B : A = r \end{array} \right\}$$

Q. E. D.

9. *Retentis prioribus, fiat insuper sinus semidifferentiae* $= a$, *eiusque cosinus* $= b$ erit $\frac{s-s}{2a} = \frac{c+c}{2b} = \frac{B}{r}$ et $\frac{s+s}{2b} = \frac{c-c}{2a} = \frac{A}{r}$.

In praecedente figura est chorda EB $= 2a$, hoc est, Fig. II. aequalis duplo sinui semidifferentiae; chorda vero MO est $= 2b$, sive aequalis duplo cosinui semidifferentiae, arcus enim MNO (cui subtenditur chorda MO) est $=$ arcui NOP + arc. NM - arc. PO, vel, (quia PB = NM et PE = PO) $=$ arc. NOP + arc. PB - arc. PE. et quia PB - PE $=$ arc. BE fiet MNO = NOP - BE, est et praeterea NOP = 180° = semicirculo, et BE = differentiae arcuum, fiet itaque $\frac{1}{2} MNO - \frac{1}{2} BE = 90^\circ$ = semidifferentia arcuum, cuius consequenter sinus duplus est = chordae MO. Iam ob similitudinem triangulorum ante (§. 8.) allegatorum est

$$\left\{ \begin{array}{l} KE : BE = KM : MO = HL : AH \\ (S-s) : 2a = (c+C) : 2b = B : r \end{array} \right\}$$

item

$$\left\{ \begin{array}{l} BK : BE = KO : MO = AL : AH \\ (c-C) : 2a = (S+s) : 2b = A : r \end{array} \right\}$$

Q. E. D.

10. *Positis quae supra §. 8. ponebantur sitque*
Tom. II. C *prae-*

præterea tangens semidifferentiae $= q$; dico esse $\frac{s+s}{c-c} = \frac{c+c}{s-s}$
 $= \frac{r}{q}$ et $\frac{s-s}{s+s} = \frac{q}{\mathcal{Q}}$.

Est enim in antecedente figura BI $= Q$ et BR $= q$, itemque triangula HBR, BOK, et EKM similia, vti et similia sunt triangula MKO et HBI. ex quibus sequentes oriuntur analogiae

$$\left. \begin{array}{l} \{ KO : BK = KM : EK = BH : BR \\ (S+s) : (c-C) = (c+C) : (S-s) = r : q \end{array} \right\} \text{item}$$

$$\left. \begin{array}{l} \{ EK : KO = BR : BI \\ (S-s) : (S+s) = q : Q \end{array} \right\} \text{Q. E. D.}$$

11. Si minor arcus in hac praecedente propositione euanescat, erit $c=r$, $s=0$ et $q=tangenti dimidii arcus maioris$ (qui nunc solus adest) per consequens habetur $\frac{s}{r-c} = \frac{r+c}{s} = \frac{r}{q}$.

12. Maneant superiora §. 10. dico quoque esse $\frac{c+c}{c-c} = \frac{rr}{rr} = \frac{b}{\mathcal{Q}} = \frac{rr}{q}$, hoc est, differentiam cosinuum esse ad summam cosinuum vti tangens semisummae adeo tangentem semidifferentiae, vel vti tangens semidifferentiae ad cotangentem semifummae.

Demonstratio posset ex figura priorum propositionum desumi, sed lubet eam hoc modo inflectere: Quoniam $\frac{s-s}{c-c} = \frac{c+c}{s+s}$ per §. 8. erit quoque (ducendo utrumque membrum in $\frac{(s-s)(s+s)}{(c-c)(c-c)} = \frac{c+c}{c-c}$) sed ob $\frac{s-s}{c-c} = \frac{r}{\mathcal{Q}}$ (§. 8.) et $\frac{s+s}{c-c} = \frac{r}{q}$ (§. 10.) erit substitutis aequalibus $\frac{rr}{q\mathcal{Q}} = \frac{c+c}{c-c} = \frac{rr}{\mathcal{Q}} = \frac{q}{q}$. Q. E. D.

13. Euanescente minore arcu, restabit solus maior

ior qui proinde simul est et summa et differentia, ipsiusque dimidium est et semisumma et semidifferentia, hoc igitur casu fiet $c = r$, et $Q = q$ adeoque $\frac{r+c}{r-c} = \frac{rr}{\varrho\varrho} = \frac{rr}{q^2}$.

14. In propositionibus hactenus allatis non nisi acuti anguli suppositi sunt, sed facili opera eae accommodantur quoque obtusis angulis, si nimirum cosinus et cotangentes signo priuatiuo afficiantur (§§. 2, 3.) Sic ex. gr. si maior angulus obtusus sit, erit loco C scriendum $-C$, et sinus compositi (§. 4.) habebitur $= \frac{sc - sc}{r}$.

15. Propositiones ab articulo 8. vsque ad 13. inferiunt regulis trigonometricis decurtandis et ad concinnorem formam redigendis, quod exemplis idoneis, data occasione, ostendam, vnicum nunc sufficit. In elementis sphaericorum Wolfi §. 146. habetur theorema cuius ope ex datis tribus lateribus trianguli sphaericci obliquanguli inueniuntur anguli; in hoc theoremate formanda venit ratio inter differentiam et summam ortas ex cosinibus crurum, quae vero, si cosinus logarithmici dentur, difficulter exprimitur; ast facilis fit eius formatio, si loco crurum sumatur eorum semisumma et semidifferentia, illius enim tangens, atque huius contagens constituent eandem rationem (per §. 12.) Hoc igitur modo calculus logarithmicus contrahitur in regula Wolfiana quae sic neperianae similis fere facta est, et eadem cum illa facilitate gaudet, imo levi attentione perspicitur unam harum regularum posse transmutari in alteram.

16. Habent praeterea dictae propositiones usum non contemnendum in iis casibus, ubi, datis duorum numerorum logarithmis, inveniendus est logarithmus

summae vel differentiae datorum numerorum, idque per solum canonem sinuum logarithmicum. Huic usui maxime inseruit propositio sub articulo 9. quae in has transformari potest sequentes : $c + C = \frac{2Bb}{r}$ $S + s = \frac{2Ab}{r}$, $c - C = \frac{2Aa}{r}$ et $S - s = \frac{2Ba}{r}$.

Ex solo enim intuitu harum formularum patet, in illis summas et differentias duarum quantitatum aequiparari aliis, quae per canonem sinuum datae, et logarithmis simul adaptatae sunt, quippe quae constant ex solis in sece mutuo ductis factoribus datis; Habeantur itaque dati logarithmi pro logarithmis sinuum aut cosinuum, quorum ex canone excerptantur arcus, arcuum formetur et semisumma et semidifferentia, atque pro hisce denuo excerptantur logarithmi competentes, quae secundum formularum antecedentium tenorem sibi mutuo addantur et subtrahantur, ut obtineatur quaesitum. Exempla non addo, quia in sequentibus eorum occasio erit. Iuuat potius explicare hic usum propositionis sub §. 13. quem habet in solutione problematis de triangulo rectilineo cuius dantur duo latera cum angulo intercepto, et quaeruntur anguli reliqui: Ponamus maius latus datum $= r$, minus vero $= c$, tangentem semisummac angulorum quaesitorum $= t$ tangentem vero semidifferentiae quaesitae $= y$, erit per notam regulam $\frac{r+c}{r-c} = \frac{t}{y}$. Nunc habeatur maius latus pro radio, minus pro cosinu alicuius anguli qui excerptatur ex canone, eiusque dimidii tangens denuo excerptatur quae vocetur Q erit itaque (per §. 13) de-

$\frac{r+c}{r-c} = \frac{rr}{QQ}$, ergo etiam $\frac{rr}{QQ} = \frac{r}{y}$ et $y = \frac{rQQ}{rr}$ siue per logarithmos rem exprimendo $ly = lt + 2/Q - 2/r$. Dabo exemplum, utr autem logarithmis neperianis vbi radii logarithmus est $= 0$. Sit igitur logarithmus lateris maioris $= -50899$, logar. minoris $= +460$, angulus interce-
ptus $= 126^\circ$, $41'. 20''$ et proinde semisumma angulo-
rum quaesitorum $= 26^\circ$, $39'. 20''$. Iam conuertatur
minus latus in cosinum simplici analogia hac; vti maius
latus ad minus, ita radius ad cosinum desideratum; quae
per logarithmos sic efficitur.

log. lat. min. — — — 460

log. lat. maioris $- - - 50899$

Cosinus — — — 51359 — — $53^\circ, 14', 55''$
 $26 \quad 37 \quad 27\frac{1}{2}$ tang. $= 69056$
 duplum $= 138112$
 tang. semisummae $= 68920$

Semidifferentia quaesita $7^\circ. 11'. 22''$ — — — 207032

Semisumma — — — $26. 39. 20.$

angulus quaesitorum unus: $19. 27. 58.7$

— — — alter — — — $33. 51. 42.$

Desumptum est exemplum ex tabulis rudolphinis pag. 68. vt constaret artificii huius usus in calculis astro-
nomicis. Incidenter anno, cosinum ex minore late-
re oriundum (51359) esse ipsam proportionem inter-
uallorum, vti Keplerus vocat, duplam vero tangentem
(138112) vocari a Keplero et aliis logarithmum indi-
cis.

Fig. III.

17. In triangulo rectilineo ABC, datis lateribus, scilicet $AB = A$, $AC = a$ et $BC = b$, positoque radio $= r$. erit cosinus anguli ad A $= r \frac{AA + aa - bb}{2Aa}$.

Demifso enim perpendiculo BD, habetur segmentum $AD = \frac{AA + aa - bb}{2a}$ (sicuti ex elementis geometriae constat). Atqui, vti AB ad AD , ita sinus totus est ad cosinum anguli ad A, ergo cosinus ille est $= r \frac{AA + aa - bb}{2Aa}$. Q. E. D.

Notandum vero est cosinum esse positivum si fuerit $(AA + aa) > bb$, atque ita valere pro acuto; valere autem pro obtuso sit fuerit $bb > (AA + aa)$ patet id ex §. 2.

18. Theorema hoc in gratiam sequentium adduxi, vbi eius praecipuus usus erit; lubet tamen, hac occasione data, exemplo ostendere quomodo tales regulae logarithmis tractari debeant. Sit igitur $\log. A = 51083$. $la = 40547$ et $lb = 28768$. est ergo $\log. A^2 = 102166$, $la^2 = 81094$ et $lb^2 = 57536$, quaeratur ab initio $\log. (A^2 + a^2)$, ope §. 9. ex quo adhibeatur aequatio $c + C = \frac{2Rb}{r}$, habeantur iam logarithmi quantitatum A^2 et a^2 pro cosinibus, quorum excerptantur arcus; vti sequitur.

arc.

$$\begin{array}{l} \text{arc. } A^2 = 65^\circ 54' \\ \text{arc. } a^2 = 63. 36. 45'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Summa} & = & 132. 30. 45. \\ \text{Semisumma} & = & 66. 15. 22\frac{1}{2} - \text{cosin. } \dots 90970 = B \\ \text{Semidifferentia} & = & 2. 38. 37\frac{1}{2} - \text{cosin. } \dots 107 = b \\ & & \hline \\ & & 91077 \\ & & 69315 = l. 2 \\ & & \hline \\ & & 1(A^2 + a^2) = 21762 \end{array}$$

Deinde denuo habeantur et $(A^2 + a^2)$ et b^2 pro cosinibus, et pro earum differentia inuenienda consideretur aequatio $c - C = \frac{2Aa}{r}$, (ex. §. 9.) est ergo

$$\text{arc. } (A^2 + a^2) = 36^\circ. 26', 40''.$$

$$\text{arc. } b^2 = 55. 46, 15.$$

$$\text{Summa} = 92 12 55$$

$$\text{Semisumma} = 46 6 27\frac{1}{2} - \text{sinus} 32762 = A$$

$$\text{Semidiff. } \dots = 9 39 47\frac{1}{2} - \text{sinus} 178462 = a$$

$$211224$$

$$69315 = l. 2$$

$$\log. A = 51083$$

$$\log. a = 40547$$

$$1.(A^2 + a^2 - b^2) = 141909$$

$$91630$$

$$1.2 = 69315$$

$$\log. 2Aa = 22315$$

$$1.2Aa = 22315$$

$$\text{ang. ad } A = 72^\circ. 23'. 51'' = 119594$$

Tentanti hunc calculum patescit eum posse contrahi, sed hic volui ductum regularum sequi, vt exemplum eo perfectius sit.

18. *Datis in triangulo sphaerico ABC tribus lateri-* Fig. IV.

teribus quadrante minoribus, positisque sinu cruris AB =S, cosinu eiusdem =C, sinu cruris BC =f et cosinu =c, cosinu baseos AC =q, et radio =r; dico cosinum anguli ad B fore = $\frac{rq - cq}{ss}$ r.

Fig. V.

Subtendantur lateribus suae chordae AB, AC et BC ab angulis ducantur radii ad centrum sphaerae D, eoque ipso pyramis formetur triangularis, cuius hedrae ADB, ADC et BDC sunt triangula aequicrura quolibet crure existente =r. anguli hedrarum ad D, (siue vertices triangularium aequicrurorum) dati sunt, subtenduntur enim ab arcibus datis, nimirum ipsis trianguli dati lateribus. Iam ad lineam BD (ab angulo quaesito ad centrum sphaerae ductam) applicentur duae normales BE et BF, existentes in planis hedrarum ABD et BDC continuatis, et per consequens attingentes arcus trianguli dati AB et BC; productae hae lineae in E et F, (vbi cum lineis AD et DC protensis concurrunt) sunt datae ob arcus AB et BC datos, quorum tangentes sunt; angulus vero EBF ille ipse est quem intercipiunt crura trianguli sphaerici dati AB et BC, et quem inuenire oportet, et cuius cosinus nobis nunc sit =y. Praeterea ob datos sinus et cosinus arcuum AB et BF erit (per regulas tangentium et secantium communes) tangens BE = $\frac{rs}{c}$ et secans ED = $\frac{rr}{c}$. Item tangens BF = $\frac{rs}{c}$ et secans DE = $\frac{rr}{s}$ hisce dati, positaque EF =z, formari potest aequatio ex tribus trianguli DEF lateribus eiusque angulo ad D dato (est enim eius cosinus =q) idque per theorema ante (§. 17) demonstratum: Nimirum fiet

$$1 - q = r \frac{\frac{r^4}{cc} + \frac{r^4}{cc} - zz}{\frac{2r^4}{cc}}$$

qua aequatione decenter reducta, habetur
 $2 - zz = rr \frac{rrcc - 2rqCc + rrcc}{cccc} = EF$ quadr.

atque ita deuentum est ad triangulum EFB in quo iam omnia dantur latera, quibus (vi §. 17.) determinatur cosinus anguli quaesiti ad B sequente aequatione

$$\frac{rrss}{cc} + \frac{rrss}{cc} - rr \frac{rrcc - 2rqCc + rrcc}{cccc}$$

$$3 - y = \frac{2rss}{cc}$$

siue

$$4 - y = \frac{rrsscc + rrsscc - r^4 cc + 2r^3 qCc - r^4 cc}{2rscsc} =$$

et quia $rrSSCc - r^4 cc = rrcc(SS - rr) = -rrccCC$
item quia $rrssCC - r^4 CC = rrCC(f - rr) = -rrccCC$
fiet

$$5 - y = \frac{2r^3 qCc - 2rrccCC}{2rscsc} = r \frac{rq - cc}{ss}. \quad Q. E. D.$$

19. De hac regula notandum est, eam facere cosinum posituum si fuerit $rq > Cc$ et per consequens angulum quaesitum acutum: si vero fuerit $rq < Cc$, fore cosinum priuatiuum qui valet pro angulo obtuso (qui acuto suo deinceps est). Idem quoque obtinet, si crura quadrante maiora sint, licet enim tum eorum cosinus priuatiui sint ($-C$ et $-c$) factum tamen Cc positium est aequa factum cosinuum positiorum. Si sola basis sit quadrante maior, adeoque eius cosinus $= -q$ erit $y = -r \frac{rq + cc}{ss}$ ex

quo patet, hoc casu angulum quaeſitum ſemper eſſe ab-
tusam. Si alterutrum crus fuerit quadrante maius, erit
 $y = +r \frac{rq + Cc}{ss}$ et proinde angulus quaeſitus ſemper acu-
tus. Eodem modo in aliis cañibus praefciri potest cuius
speciei futurus fit angulus quaeſitus.

20. Caeterum praxis huius regulae logarithmica
facilis eſt, obſeruatis artificiis antea (§. 16 et 18) oſten-
fis; eam impraefentiarum vno alteroue exemplo illuſtra-
bo. Sit igitur crus $AB = 69^\circ$, crus $BC = 47^\circ$ et basis
 $AC = 34^\circ$. erit proinde log. $S = 6873$, $Is = 31286$
 $lC = 102620$, et $lc = 38273$. logarithmo coſinus baseos
non indigemus. Nunc formetur log. $(rq - Cc)$ ope ae-
quationis $c - C = \frac{2A}{r}$ deſumtae ex §. 9. fiat nimirum

$$lC = 102620$$

$$lc = 38273$$

$$l(Cc) = 140893 \quad \text{-- eius arcus} = 75^\circ, 51' 12''.$$

$$\text{arcus ipsius } l(rq) \quad \text{-- -- --} = 34^\circ \quad \text{O O}$$

$$\text{Summa} \quad \text{-- --} \quad 109 \quad 51 \quad 12$$

$$\text{Semisumma} \quad \text{-- --} \quad 54 \quad 55 \quad 36 \quad \text{sinus} \quad \text{--} \quad 20038$$

$$\text{Semidiffer.} \quad \text{-- -- --} \quad 20 \quad 55 \quad 36 \quad \text{--- ---} \quad 102953$$

$$1S = 6873 \quad \log \left(\frac{rq - Cc}{2} \right) = 122991$$

$$Is = 31286 \quad 1 \frac{ss}{2} = 107474$$

$$l_2 = 69315 \quad \text{log. Coſinus quaeſiti} = 15517$$

$$l(\frac{ss}{2}) = 107474 \quad \text{angulus ad B} = 31^\circ, 6'.$$

hic

hic angulus est acutus, quia in praesenti casu habetur $r_q > Cc$. Alterum exemplum hoc esto: crus $AB = 46^\circ$, crus $BC = 57^\circ$, basis $AC = 95^\circ$. in hoc exemplo angulus quaesitus erit obtusus (per §. 19) est vero praeterea $lS = 32942$ $lC = 36434$ $ls = 17594$ $lc = 63503$: hinc fit

$$lC = 36434$$

$$lc = 63503$$

$$l(Cc) = \frac{99937}{\text{arcus ipsius } l(rq)} \text{ cuius arcus} = 68^\circ 24' 5''$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Summa} & = & 163 24 5 \\ \text{Semisum.} & = & 81 42 2\frac{1}{2} \text{ sinus} = 1053 \\ \text{Semidiff.} & = & 13 17 57\frac{1}{2} \text{ sinus} = 146953 \end{array}$$

$$lS = 32942$$

$$ls = 17594$$

$$l_2 = 69315$$

$$l_{\frac{ss}{2}} = 119851$$

$$\begin{array}{rcl} l \frac{rq - Cc}{2} & = & 148006 \\ l \frac{ss}{2} & = & 119851 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{cosinus quaesitus} & = & 28155 \\ \text{angulus respondens} & = & 41^\circ 0' 30'' \\ \text{cui deinceps} & = & 138 59 30 \\ \text{qui est angulus quaesitus.} & & \end{array}$$

Ita in reliquis casibus procedendum est quoque; solum hoc, ut moneam, restat: quando alterutrum crus obtusum est, mutatur quoque signum ipsius Cc , nam in formula pro $-Cc$ fit hoc casu $+Cc$. Igitur logarithmus ipsius Cc fit logarithmus alicuius cosinus obtusanguli, qui in prioribus exemplis acutangulus fuit.

21. Possem regulam logarithmis adaptatam ver-

bis efferre quibus calculator dirigeretur; ast quia prolixior est quam altera mox tradenda, effatu indignam censeo. Brevis est nullisque obnoxia cautelis noua mox explicanda et ex priore ita deriuanda: Quoniam cosinus anguli quaesiti $= r \frac{rq - cc}{ss}$ erit eius sinus versus $= r \frac{ss - rq + cc}{ss}$, ex elementis porro constat sinum versum inter et diametrum ($2r$) esse medium proportionalem aequalem chordae dicti anguli quaesiti, huius ergo chordae quadratum habetur ducendo $2r$ in $r \frac{ss - rq + cc}{ss}$ quod proinde est $= 2r r \frac{ss - rq + cc}{ss}$; dimidia haec chorda est sinus anguli quaesiti dimidii, eius ergo quadratum est prioris quadrati subquadruplum et per consequens $= rr \frac{ss + cc - rq}{2ss}$. Hoc quadratum mutari potest in hanc formam $rrr \frac{r - q}{2ss} =$ est autem $\frac{ss + cc}{r} =$ cosinui differentiae crurum (per §. 5.) quem breuitatis causa ponam $= Q$. igitur quadratum sinus dimidii anguli quaesiti fit $= r^3 \frac{2 - q}{2ss}$, formetur porro ex differentia crurum et basi semisumma et semidifferentia, ponaturque illius sinus $= A$, huius $= a$, ita fiet per §. 9. $Q - q = \frac{2Aa}{r}$ quo valore in praecedente formula substituto, habetur quadratum sinus anguli quaesiti dimidii $= rr \frac{Aa}{ss}$; quae quidem regula facillima est et breuissima, qua nimirum duplus logarithmus sinus pro angulo quaesito dimidio inuenitur, quo dato, integer angulus latere nequit. Ceterum hanc ipsam regulam Neperus in canone mirifico (pag. 48) tradidit dudum, cuius demonstrationem ego meo more hic concinnare volui.

22. Ex theoremate superiori (§. 18.) omnia reliqua trigonometriae sphaericae pracepta deduci possunt, tam ea quae de obliquangulis praecipiunt, quam quae de rectangulis. Iucunda maxime est derivatio regulae pro inueniendis lateribus ex datis angulis. Sed talia non sunt huius loci, nolo enim actum agere; in eo sum potius ut iactis his fundamentis noua inaedificem theorematum, quorum in doctrina astronomiae sphaericae aliquis usus esse potest. Ea vero praesenti scripto excludo ne id excrescat nimium, finem igitur imponat sequens problema, quod in medium ideo produco, quia plures mihi ad illud prouocandum erit.

23. *Datis in triangulo rectilineo duobus cruribus et unius angulo intercepto, inuenire angulos reliquos.*

Sit in triangulo ABC crus maius AB=A, crus minus AC=a, sinus acuti anguli BAC=p eiusque cosinus=q. ducto perpendiculo BD erit ut sinus totus ad cosinum anguli ad A, ita latus AB ad segmentum AD, adeoque in praesenti casu, $=\frac{Aq}{r}$ sic fit alterum segmentum DC= $\frac{ra-Aq}{r}$. Est etiam ut sinus totus ad sinum anguli ad A, ita latus AB ad perpendiculum BD, quod exinde fit= $\frac{Ap}{r}$. Tandem inferendo, ut DC ad DB ita sinus totus est ad tangentem anguli ad C, inuenitur tangens dicti anguli= $\frac{rap}{ra-Aq}$. ubi notandum, angulum hunc fore obtusum si sit $ra < Aq$. Eodem quoque modo tangens anguli minoris ad B (qui minori cruri opponitur) inuenitur $=\frac{rap}{ra-Aq}$. Inuenitur praeterea per vulgaria trigonom-

Fig. III.

triæ precepta anguli maioris ad C sinus $\frac{p_a}{\sqrt{AA - 2Aaq; r + aa}}$ eiusque cosinus $\frac{Aq - ra}{\sqrt{AA - 2Aaq; r + aa}}$
itemque sinus anguli minoris $\frac{pa}{\sqrt{AA - 2Aaq; r + aa}}$ eiusque
cosinus $\frac{ra - aq}{\sqrt{AA - 2Aaq; r + aa}}$; in hisce formulis omnibus
pro q ponendum est $-q$. Si angulus datus interceptus
fuerit obtusus.

DE TRANSFORMATIONE SERIÆ V

Auctore

C. G.

M. Mart.
1727.

Transformari seriæ dico, cum in aliam eiusdem summae conuertitur; ex quo patet ad transformationem datae seriei hoc requiri, vt, si singuli termini seriei transformandæ A. auferantur ex singulis terminis seriei transformatae B. singuli termini residui transeant in nouam seriæ C = B - A. cuius summa = 0. E contrario, si series quaecunque C. cuius summa sit = 0. addatur ad seriæ transformandam A. prodibit series transformata B.

Sed eiusmodi series C. cuius summa sit = 0. infinitis modis obtineri potest ex subtractione vnius seriei ab alia

alia, si utriusque summae sint aequales. Consideremus exempli causa duas series

$$D \dots \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \text{etc.}$$

cuius formula generalis est $\frac{1}{x(x+2)}$

$$E \dots \frac{3}{8} + \frac{3}{27} + \frac{3}{80} + \frac{3}{125} + \text{etc.}$$

cuius formula generalis est $\frac{3}{4x(x+1)}$

summam vero utriusque constat esse eandem $\frac{3}{4}$. quod si iam singuli termini unius seriei auferantur ex singulis terminis alterius, residua erit tertia series C = ± D ± E.

cuius formula generalis est $(\frac{+1}{x(x+2)} \mp \frac{3}{4x(x+1)})$

$= \frac{+x+2}{4x(x+1)(x+2)}$ summa vero totius seriei = 0. quam ob

rem formula $\frac{+ax+2a}{4x(x+1)(x+2)}$ ubi a. sit numerus quicunque, dat seriem quae addita ad quamcunque transformandam A. infinitis modis exhibebit transformatam B. Similiter ex formulis $\frac{1}{8x(x+1)}$ et $\frac{1}{x(x+3)}$ quarum utraque dat seriem $= \frac{1}{16}$. deducitur formula seriei C.

$\frac{+7ax+15a}{x(x+1)(x+3)}$ cuius summa = 0. atque iisdem vestigiis insistendo reperientur $\frac{+23ax+52a}{x(x+1)(x+4)}$ et $\frac{+163ax+385a}{x(x+1)(x+5)}$ etc. quarum summae itidem = 0.

Sit verbi gratia series transformanda huius formae $\frac{1}{(4x-3)(4x-1)}$ (quam constat exprimere aream semicirculi cuius diameter = 1.) addatur huic series

C . . . $\frac{+ax+2a}{x(x+1)(x+2)}$ cuius summa, vt supra demonstratum fuit, est = 0. erit series transformata B.

$$\frac{(-15a+1)x^3 + (3+48a)x^2 + 35ax - 5a}{x(x+1)(x+2)(x-3)(4x-1)}$$

quic eandem semicirculi aream exprimet sumto a . numero constante quoconque, ex cuius exempli conspectu facile reli pia similia intelliguntur.

Interea non est necesse ut series illa C. cuius summa requiritur $\equiv 0$, sumatur ex illis in quarum formula exponentes potestatum sint numeri constantes, quales fuere de quibus hacten dixi, sed sumi etiam possunt *exponentiales* quaecunque, hoc est, in quarum formula x . ingreditur exponentem potestatis, ita si ex serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \text{etc.}$$

cuius formula est $\frac{1}{x^2+x}$ auferatur series

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{etc.}$$

cuius formu'a est 2^{-x} . summa vero vtriusque $\equiv 1$. residua series et omnes eius multiplae quas haec formula comprehendit

$$\frac{2^{-x} a - ax^2 - ax}{2^{-x}(x^2+x)}$$

erunt $\equiv 0$.

Quem ad modum vero summa seriei transformationae A. manet eidem, siue ei addatur series alia C. cuius summa $\equiv 0$ siue ipsa A. multiplicetur per seriem D. cuius summa $\equiv 1$. ita ex hac consideratione ad alteram eamque generalem methodum transformationis peruenimus. Sit series quaecunque transformanda

$$A \dots a+b+c+d+\text{etc.}$$

sumatur alia quaevis

D .

$$D \dots \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$

ubi α . β . γ . etc. sint quantitates constantes quaecunque, modo terminus eius ultimus vel infinitesimus nullus sit vel infinite parvus, dico seriem A. transformari in

$$\text{I.} \quad \text{II.} \quad \text{III.} \quad \text{IV.}$$

$$B \dots (a+b) + (c+d) + (e+f) + (g+h) + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{cccc} a+\alpha & (c-a)\alpha & (e-c)\alpha & (g-e)\alpha \\ a+\beta & (c-a)\beta & (e-c)\beta & \\ +\alpha\gamma & (c-a)\gamma & & \\ & & +\alpha\delta & \end{array}$$

erit enim series B. productum ex serie A. multiplicata per

$$D \dots 1 + \alpha - \alpha + \beta - \beta + \gamma - \gamma + \text{etc.} = 1.$$

Sit exempli causa data series

$$A \dots 1 - m + m^2 - m^3 + m^4 - m^5 + \text{etc.}$$

$$\text{si sumatur } \alpha = \frac{m^2 + m - 1}{m+2}.$$

$$\beta = \frac{m^2 + m - 1}{(m+2)^2} = \frac{\alpha}{m+2}$$

$$\gamma = \frac{m^2 + m - 1}{(m+2)^3} = \frac{\beta}{m+2} \text{ etc.}$$

Series A. transformabitur in

$$B \dots \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \frac{1}{(m+2)^3} + \frac{1}{(m+2)^4} + \text{etc.} = \frac{1}{m+1}$$

$$\text{Si vero ponatur } \alpha = \frac{m^2 - m + 1}{m}, \beta = \frac{-\alpha}{m}, \gamma = \frac{-\beta}{m}. \text{ etc.}$$

Series A. transibit in

$$B \dots 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^3} + \text{etc.} = \frac{1}{m+1}$$

Tom. II.

E

Scio

Scio quidem plerosque statuere si in serie A quantitas m . sit maior vnitate seriem totam ex praepostera diuisione $\frac{1}{1+n}$ oriri neque adeo huic quantitati aequalem esse, sed etiam si iste modus exprimendi quantitatem finitam per seriem infinitam numerorum alternatis signis crescentium nescio quid insoliti prae se ferat, non tamen video cur omnino reiiciendus sit, cum ex hoc quod dedimus exemplo appareat eiusmodi series tractabiliores fieri atque in alias aequales terminorum continuo decrementum commutari posse; adde, quod istae series (in quibus termini crescunt alternatis signis) non semper ex praepostera diuisione, sed aliis etiam modis prouenant de qua re alio loco dicemus. Ceterum hac nostra methodo data quaecunque series A. transformari poterit in aliam B. ea lege ut ab initio habeat terminos quoscunque datos, nam ex quantitatibus α . β . γ . etc. tot poterunt determinari per conditionem problematis quot termini dati fuerint in serie B adeo ut haec methodus non solum ad casus transformationis infinitos, sed ad omnes possibles perducat.

DE BILANCIBVS
ET NOVIS INVENTIS STATICIS

Auctore

Ioh. Georg. Leutmann.

I.

Bilancium γνωστις Mathematicum decet, γε- *M. Inn. et
νεσις Mechanico* debetur. Vtraque et in *seqq. 1727.*
Theoria et in praxi fundatur, ita, vt hic
theoria absque praxi inanis, praxis absque
theoria insufficiens reputanda sit.

2. Non loquor de bilancibus vulgaribus atque
crassioribus, minori αρχιτεκτονικαι et attentione elaboratis,
quarum vitia facile dignoscuntur et discernuntur ab accur-
ratiōribus, leui adhibito examine. Desudant in his elab-
orandis opifices, cognitione superficiali imbuti, funda-
mentalitis rudes. Subtiliores et accuratiōres mihi curae
sunt. Illarum structura ad leges mechanicas examinanda,
vitia detegenda, et corrigenda, et tandem leges dandae,
ad quarum ductum construantur, vt perfectior prodeat
Machina, vsibus aptior.

3. Maxime vero ea, quae ad structuram bilan-
cium docimasticarum et truinarum pertinent, explicabo,
et quomodo examina earum rigidiora instituenda;
deinde noua inuenta addam, et discrimen monstrabo

inter haec et bilances iam notas atque vſitatas , tandem ea, quae ad εγχειρησις ſpectant, expositurus. Videamus itaque, quoisque ad maximam ακριβειαν per leges Mechanicas, propriam experientiam ſeu praxin et operam manuariam curatiorem progredi licuit.

Cap. I.

De bilancium constructione et correctione.

Reg. I. *Bilancis ſcapi ſeu iugi brachia , vt exatiffime eandem habeant longitudinem neceſſe eſt.*

4. Putant rerum non fatis gnari ſcrupulosam dimensionem brachiorum bilancium non adeo eſſe neceſſariam , ſed qualemcumque ſufficere , modo aequilibrium vtrique ſit datum. Sed laborant hi praetudicio , non conſiderantes leges de vecte. Non enim corrigitur per aequilibrium brachiis datum praepodium a longiore vectis brachio dependens ; ſed vitium ſe prodit , quando duo pondera ad eiusmodi bilancem aequantur , et deinde commutantur , ita vt ſinistrae lanci imponatur pondus in dextra aequilibratum , tunc cognoscitur brachium longius , per quod praeponderat pondus impositum ante commutationem aequilibre cum altero.

5. Criterium itaque atque proba , vii iam dictum in eo conſiftit , vt duo pondera ſimul in binis lancibus librentur , et reddantur aequalia ; deinde commutentur pondera , et obſeruetur exacte , vtrum aequalitatem ſint conſer-

conseruatura. Si enim praeponderat alterutrum, indicium est inaequalitatis brachiorum. Itaque ex commutatione lancium atque oneris saepius iterata innotescit iusta proportio brachiorum.

6. Corrigitur vulgariter inaequalitas brachiorum, *Tab. II.* si extrema brachiorum auriculis *a* instruantur, quarum inflexione et reflexione tandem aequilibrium brachiis conciliatur.

7. Vitium itaque est in illarum bilancium scapis, quorum extrema tantum foraminulo et clavo traeecto gaudent ad appendendas lances *b*, numquam enim hoc modo ipsis exactitudo aequalitatis conciliari potest, id quod in maioribus non adeo percipitur; in minoribus docimasticis vero magna incommoda atque errores parit. Dimidietur enim duarum drachmarum unum, dimidium eius iterum in duas partes aequales diuidatur, idque saepius cum quouis dimidio continuetur, tandem omnia illorum ponderum dimidia coniunctim vni lanci imponantur, et ultimum dupletur, altera lanx recipiat vnam illam drachmam primo adhibitam, tunc vitium bilancis facile cognoscetur, si drachmae pondus vel non attingunt, vel illud excedunt, cui tamen aequalia esse debent.

8. Quandoquidem vero in maioribus ferreis bilancibus haec incuruatio seu flexio non nisi ignita trabis extremitate fieri potest, ex quo de grauitate materiae aquilid semper decedit, ita ut iusta proportio haberi nequeat grauitatis aequalis brachiorum; in minoribus vero bilancibus e. gr. docimasticis facile frangantur auriculae

flexione saepius vexatae : De novo inuento aliquo sollicitus fui, et illud feliciter me expediuisse autumo, duobus modis , quorum prior bilancibus maioribus et mediis, alter minoribus et docimasticis egregie conuenit, atque ad *αντιβαλλειν* conducit.

9. Prior modus talis est : Incuruentur scapi extrema sursum in A et deinde ad lineam scapo parallelam denuo flectantur. Prodeant extrema hac ratione flexa vtrinque ad, plus, minus, digitum. Applicetur elater recuruatus et temicircularis β , qualem in figura β delineatum dedi. Conficiuntur elateres hi optime ex elatre chalybeo in horologis minoribus usitato , qui aequalis crassitie efformatus inuenitur , id quod maxime necessarium. Addatur deinde canaliculus quadratus D, libere ante et retro mobilis , inferius ad d auricula transuersim posita praeditus, et tandem preeponatur cochlea femina E, qua adducta cedit elater auricula ad axin scapi promouetur , et brachium abbreviatur ; reducta prolongatur brachium , quia elater canalem D cum auricula sua C repellit atque protrudit.

10. Omnes vero hae partes applicandae cum iis, quae alteri brachio conueniunt, seorsim et aequilibrentur, et eandem recipient extensionem atque figuram.

11. Ut vero auriculae vtriusque interior acies cum acie axiculi iugi inferiore lineam fere rectam faciat , id , me etiam non monente , bene obseruandum , et obtinetur per incuruaturam extremorum scapi antea explicatam , et per lineam Iconismi GFH delineatam. Necessarium hoc requisitum recte notauit Leupoldus in
Thea-

Theatro Machinarum Statico. Part. I. p. 72. Quandoquidem, cum de Instrumentis Meteorognosiae scriberem, atque hanc Methodum exponerem, non succurrit haec meditatio, quam deinde in conficienda tali bilance facile animaduertebam, et Machinam iuxta modum hic datum perficiebam; id quod hic loci indicandum duxi.

12. Alter modus seu inuentio in eo consistit, vt quatuor vel quinque helices cochleae incidentur utriusque extremitatis scapi, lineam rectam tenentis, et in extremitatibus non flexi ut antecedens, fiantque binae cochleae feminineae y extremitatibus scapi applicandae. Cochlearum nam feminearum externa figura torno elaboretur, eisque incidentur in extremo cuiusvis externo crena seu cavitas annularis, recipiendo annulo chalybeo; ampliori foramine et intus acie praedito apta, vt in crena haerere annuli latioris acies, cique filamenta lancium annexi possint. Extremum cochleae feminineae desinat in formam rosae, seu rotulae, vt digitis apprehendi et circumduci queat, caeterum Elateres semicirculares β addantur, vt in prioribus indicatum.

13. Priusquam vero cochleae illae feminineae et elateres adduntur, iugi brachia, quantum fieri potest, ad eandem longitudinem efformentur, et aequilibrentur exacte; deinde reliqua applicentur, et iterum aequilibrium ipsis ope cochleae concilietur; tandem lances eiusdem exactissime ponderis apponantur, et obseruetur, utrum aequilibrium sit conseruatura bilanx, saepius lancibus commutatis.

14. Per haec itaque duo inuenta brachium bilancis alter-

alterutrum et elongari et abbreviari potest , donec iusta aequalitas longitudinis intra axiculum iugum et punctum suspensionis lancium obtinetur-

Reg. II. *Lingula, seu examen sit ad scapum perpendicularare, et in medio eius erectum*

Reg. III. *Lingula, quo levior, eo aptior praepondusculis indicandis.*

Reg. IV. *Latior aliquantulum et macilenter lingula praefat rotundae, quia non tam facile vitiatur.*

Reg. V. *Quilibet scapus in medio inferius sub lingula habeat praepondusculum lingulam, a pondere lanci iniecto inclinatam erigens.*

15. Maximi momenti est haec obseruatio in bilancibus accuratiorebus , in primis in trutina docimistica, id quod bene expressit Leupoldus in Theatr. Mach. Aut enim (α) axiculus F iugum altius sit positus, ut tota trabs longe infra lineam appensionis lancium GH dependeat , et grauitate sua lingulam inclinatam erigat , quod tamen pigrum facit bilancem ; aut (β) iugum inferius habeat contrapondium L, quod hoc officio fungatur.

16. Sed caute eius grauitas dimetienda. Maior enim huius contrapondii magnitudo bilanci facile quidem aequilibrium demto onere restituit, sed difficilern inclinationem examini permittit. Onusculum enim lanci impositum hoc maius contrapondium remouere nequit,hinc situm non mutat bilanx, et lingula differentiam minime indicat , maxime si contrapondium hoc longius dependeat. Contrapondium vero minus a minori quidem onere

nere lanci alterutri iniesto dimouetur e situ suo perpendiculari, sed quia illud impar grauitati lingulae, erigere hanc nequit.

17. Necesse itaque est, vt contrapondium hoc aliquantulum praeponderet lingulae, et curta sit eius magnitudo perpendicularis, quae aestimanda et mensuranda ab acie inferiore axiculi iugi deorsum: quo enim longior illa dependet, eo difficilius mouetur.

18. Nam considerandum est vtrumque brachium bilancis, intuitu huius contrapondii longitudinis tamquam vectis recurvatus, cuius brachium minus dat contrapondii longitudo α , matis, brachium alterutrum iugi b ; vis agens est onuscum lanci impositum; onus mouendum; ipsa et grauitas et longitudo contrapondii α . Quo breuior illa α , eo saepius in longiori brachio b continetur; quo maior α , eo potentius resistit virtuti impellenti, cuius nifus in maius contrapondium iranis est, quia imbecillior, quam vt illud a situ perpendiculari remoueat atque lingulam inclinet. E. g. Consideretur iconismus α huius §. ibi contrapondii longitudine est α , quae duodecies continetur in brachio b , ergo onuscum aliquod brachio b additum duodecies maiorem vim exferere potest in contrapondium ope brachii b , quam onuscum nudum absque brachio b . Iconismus β dat brachium minus a sexies in maiori brachio contentum, ergo vis b figurae β , dimidium tantum valet in α , in respectu ad figuram α . Hinc dupla hic onusculi grauitas requiritur ad mouendam lingulam et remouendum contrapondium, id quod in α simplex tantum efficit.

19. Ut itaque proportio contrapondii ad linguam exacte haberi, et curta longitudo brachii minoris esse possit, sequentem excogitaui methodum : In scapi medio sit contrapondium admodum curtum *a*, ex cuius extremitate dependeat contrapondium lingulae adhuc aliud *k*, rotundum seu cylindriforme ad dextram et sinistram facile et libere mobile ope articuli, clavulo quadrangulari instructum, cuius infima acies in crenula foraminis spatiose et rotundi haereat, in cylindro vero fixus sit clauulus, quod quidem contrapondium propter suam leuitatem lingulam *l* inclinatam erigere non valeat, incisa tamen illi sit cochlea mas, cui applicetur cochlea foemina *m*; formae orbicularis, tantae grauitatis, quanta erectioni lingulae sufficiens iudicatur. Haec tam diu grauitate superflua priuetur, donec lingula et a leuissimo pondiusculo lanci imposito differentiam indicet, et tamen demto pondiusculo lingulam iterum erigat.

20. Dico itaque hoc modo facile remoueri contrapondium, linguam inclinari, et onusculi grauitatem praeponderare posse, quia breve brachium *a* vigesies continetur in brachio *b* alterutro scapi, et cum eo constituit vectem recurvatum, cuius hypomochlium est axisculus, vis mouens est aggrauatio lancis, onus mouendum contrapondium *k* lingulae, et quia hoc onus tantum ad latus est mouendum, facilius hoc fieri potest, quam si situs eius perpendicularis in situm obliquum esset conuertendus, cui impar esse vel minimum onusculum facile percipitur.

Reg. VI. *Axiculi inferior acies F, pauculum supra lineam GH, per puncta suspensionis lancium ductam sit posita.*

21. Satis necessarium hoc requisitum ab aliis iam demonstratum, probe obseruandum. α Altius enim positus axiculus iugi, pigritiem inducit bilanci. β in ipsa suspensionis lancium linea situs bilancem dat admodum celerem, et nunquam fere ad quietem redeuntem; γ infra lineam hanc collocatus bilancem plane perdit, vt ea nunquam horizontaliter stare possit, sed demisso alterutro brachio oblique dependeat.

Reg. VII. *Non admodum longe dependcat iugum ab axe, alias pigrum et segnioris motus habebis bilancem.*

22. Egregie quidem nutat atque oscillat diutius antequam ad quietem redit illud iugum quod axiculum altius supra scapum habet positum, si lances nondum sint appositae, ignarisque bilancem promittit celerem atque iustum. Sed spe frustrantur, qui hanc in mobilitate talis scapi ponunt fiduciam. Appensis enim lanchibus pigrum atque inertem experiuntur bilancem. Quo altius enim axiculus supra scapum est positus, eo tardior deprehenditur bilanx, quam vt a minori pondere lingula possit moueri. Contrapondio quidem lingulae non opus habet talis bilanx, quandoquidem dependens trabs vices contrapondii gerit, sed eo ipso difficilius mouetur illa ab onere imposito, cuius ratio Mathematicis clarius patet quam vt prolixa indigeat explicatione. Fiat itaque hoc modo.

23. Ducatur linea quae aciem superiorem claviculorum appensioni lancium dicatorum , et aciem inferiorem axiculi iugi fere tangat. Latitudini igitur iugi sub linea dicta in extrematibus inserantur claviculi ad lances appendendas , ita ut eorum acies superior hanc lineam fere tangat. Deinde diiudicetur et rite ordinetur quantitas contrapondii lingulae, tunc trab recte erit disposita , e. g. bilanx Tab. II. §. 23. delineata difficulter mouetur , si lancibus et pondere aliquo oneratur quanquam lancibus nondum appensis celerrimam edat vibrationem.

Reg. VIII. *Acies axiculi cis et ultra scapum in linea recta sit posita , alias pigram facit bilancem. Prodeat quoque ad angulos rectos ex scapo in utroque latere ne ad aginam allidat lingula, maxime si agina sit latior.*

24. Prius hoc obtinetur , si loco axiculi *a* in medio latioris et in extremis prominentibus utrisque acie praediti , substituatur axiculus figuram parallelepipedi *b* habens. Ille ita per trabem traiiciendus , ut una acies deorsum altera sursum spectet , reliquis duabus ad dextram et sinistram respicientibus. Posterius , ut scil. axiculus ex scapo ad angulos rectos utrinque procedat , circino explorandum , nempe ex ore foraminis , per quod traiiciendus axiculus ad distantiam arbitriariam signentur puncta duo in linea recta utrinque , deinde traiiciatur axiculus et ex punctis his indagetur distantia aciei cuspidis , haec si
ac-

æqualiter distabit, indicio erit, axiculum ad angulos rectos esse positum.

Reg. IX. *Axiculi extrema sint cuspidata, ita tam
en, vt cuspis ex inferiori acie prodeat,
et cum ea in linea recta stet, sursum ve-
ro in declive abeat.*

25. Friccio illa, quae accidere solet α , quando trabs non in medio aginae haeret, vnde ad aginam alludit α , valde detrimentosa existit. Corrigitur illa β , si extrema axiculi vtrinque ad lamellas quasdam bb aginae ab extra apponendas impingunt, et quidem in puncto tantum, vt hoc fiat, conductus, ideoque axiculi extremitates sunt cuspidandæ, quia itaque cuspis in acie est, quae centrum axis scapi in vibratione repraesentat, ideoque nulla fere frictio vel tantum insensibilis contingit.

Reg. X. *Agina perpendiculariter dependeat, ita,
vt, si in superiori nodulo, quem Margarita-
ritam vocant, vel potius ante illum, fi-
lum cum pondusculo suspendatur, illud for-
amen, in quo axiculus mouetur, accu-
rate bifidat.*

26. Observatio haec admodum necessaria est, sed difficultime et non sine magna attentione obtinetur intentio. Si enim in alterutro latere aginae plus gravitatis est, decedit agina a situ perpendiculari, et lingula ad alterum latus margaritæ, seu noduli superioris declinat. Imo tota forma aginarum vulgarium hoc vitii habet, vt vacillet, et situm sibi mutuo oppositorum foraminum axiculo destinatorum vitiet.

Tab.III.

27. Huic etiam malo dupli remedium accommodauit, et aginam a vulgari forma plane alienam adhibui, quam nunc describam: α , β , γ .

Ex lamina vnica latiore A aginam confeci, lamina superius et inferius a et b recuruata: ita, vt antica pars aperta remaneret, et lingula nuda $\gamma\circ$. crure aginae nullo tecta, conspectui se sisteret. In laminaehuius latioris inferiore parte, longum et latum foramen cc incidi, ita vt illud quadret ad recuruatum et sursum inflexum inferius extremum. Illud foramen inferius vbi desinit, et pars aginae ima sursum flexa, recipiunt, tanquam fulcra duo, axiculum scapi, vt in illis haerere et iugum librare se possit. In recuruato illo aginae extremo incidatur semicircellus d , pisi magnitudine, e regione foraminis longioris c laminae oppositae, et in eius medio fiat rimula tenuissima, in qua quiescere poslit axiculus, id quod in longiori foramine ex opposito sito etiam fiat, ita, vt crenae hae duae sibi opponantur mutuo, aptaeque sint excipiendo axiculo scapi, immissaque deorsum trabe in aginam, axiculus haereat in duabus istis crenulis. In superiori aginae spatio inter latum eius dorsum et extremum incuruatum existente, aptetur lamella, et in illa rimula tenuis, duarum circiter linearum longa incidatur, vt per illam lux conspiciri, ad instar lineae lucidae perpendicularis possit. Ex ea iudicatur lingulae perpendicularis, situs, si scil. medium aginae occupat, cum rima ista lucida lineam rectam constituit, et nec ad dextram, neque ad sinistram deflectit. Lamella ista per cochleam perpetuam gg transuersim positam mobilis sit,

vt

vt in vtrumque latus promoueri, et si rectum situm, medium scil. in agina adquisuerit, immobilis manere possit. Prodeat illa lamella rima instructa *f* supra aginam eamque cum articulo mobili *x* excedat *b* et suspendatur ex uno quadrangulari *k* in alia lamina firmiore *l*, ita firmato, vt durius, sed tamen in gyrum moueri atque circumduci possit, id quod obtineri potest, si in tergo laminae firmioris *l* ope cochleae *m* bene adducatur, vt du riorem circumgyrationem nanciscatur. Ope huins vnci circa suam axin mobilis, agina et ad dextram et ad sinistram agi, et ita perpendicularis situs rimulae ad situm axiculi scapi obtineri potest. Cognoscitur vero aginae perpendicularis situs, et recte positam esse lamellam, quae rimam incisam habet, si ex acicula aliqua *n*, ante rimulam *f* in incuruato extremo aginae superiore *a* firmata, demittatur filum *p* perpendicularare, crenam aginae *d*, axiculum recipientem, et rimulam lamellae superioris *f* qui in arcu aliquo magnitudinem aginae situs mutati notet. Tandem ad inferiorem aginae partem anteriorem tegens et occultans. Addatur ad vncum *k* indiculus *q*, et posteriorem lamellulae duae, *s*, *t* ordinentur (v. Tab. II. β. it. Tab. I §. 23. β) ope aliquot exiguarum cochlearum, vt ad illas allidant axiculi cuspides, et scapus in medio cauitatis aginae permaneat. Fundus aginae *u* in medio pateat, vt per foramen patens contraponendum lingulae *vz* transmitti, libereque moueri queat. Ex hac structura agina nouam formam adquisuit, qua mediante et scapus sine frictione maiori facile moueri, allisio ad aginam inhiberi, margarita, vel eius loco rima superioris lamellae *f* ad crenam *d*, axi-

d, axiculum excipientem perpendiculariter agi, totaque bilanx in situm accurarissimum poni potest.

Vitium vero illud leuioribus scapis et aginis docimasticarum bilancium frequens, quod scil. axiculus non semper ad punctum imum et perpendicularare foraminum rotundorum aginae descendit, sed ad alterutrum latus persistit, vnde lingulae deuiaatio accedit, penitus tollitur, alio modo vix corrigibile. Hac enim in agina axiculus semper in crenula sua haeret atque permanet, etiam si leuior sit trabs, perpendiculararem alias descensum ad imum foraminum aginae propter levitatem nonnunquam eludens.

28. Denique ad recte instruendam bilancem hoc modo agatur:

1. Dependeat filum *p* cum pondusculo ex acicula *n* super rimam superioris lamellulae in medio aginae constitutam. Quod si filum tegit hanc rimam, et conspectum lucis inhibet, inferne vero crenam axiculo dicatam etiam occultat, bene sita est agina, et correctio ne non indiget. Sin minus, circumducatur aliquantulum uneus superior quadrangularis *k*, eousque, donec ad datam normam dependeat filum *p*.

2. Imponatur trabs cum contrapondio lingulae in aginam absque cochleis foemineis et elateribus extre mis scapi dicatis, et fiat, vt lingula in linea recta cum rima superiori lucida *f* conueniat, id quod obtinebitur demendo aliquid lima de brachio praeponderante.

3. Conuertatur iugum ita, vt sinistrum quod fuit brachium, fiat dextrum et obseruetur, vtrum rima lucida et

et lingula adhuc rectam teneant lineam. Item ne lingula allidat, ad latam aginae lamellam, seu dorsum aginae.

4. Eximatur iterum iugum, et applicatis extremitatibus, cochleis foemineis et elateribus, exploretur circino, vtrum crenae excipiendis annulis filamentorum lancium destinatae in aequali distantia ab acie axiculifaciapi distent, et accommodentur postulato. Hoc modo parata trabs aginae immittatur, et obseruetur, vtrum adhuc lingula cum rima transparente *f* conueniat. Si illa deuiat, abradatur aliquid de elatere praeponderantis brachii, eousque, donec aequilibrium erit conciliatum.

5. Tandem appendantur lances aequalis plane ponderis, et si alterutra praeponderaret, ope cochlearum (§. 12.) extremitatum, pauculum id, quod restat, corrigatur.

6. Commutentur lances, et si omnia recte fuerint obseruata, differentia nulla dabitur; sin minus, quaeratur vitium, et corrigatur ad datas obseruationes antecedentes.

Dico, hac ratione bilancem bene instructam prodituram, et palam fieri vitia, in antecedentibus notata et bilancibus plerumque adhaerentia esse correcta.

Cap. II.

*Noua bilanx absque lingula admodum
celer atque accurata.*

Tab. IV.

1. Quandoquidem obseruaueram , quod lingula eiusque contrapondium multum impedit bilances , quo minus leuissimum onusculum indicent , eiusque grauitatem prodant , de alia bilancis forma solitus fui , et meditationes meae sequentem optimae spei foetum , vt mihi videtur , conceperunt , ipsa deinde praxi obstetricante Mechanica , in lucem editum , exspectationique omnino respondentem . vid. Tab. IV.

2. Fiat scapus seu iugum AA , chalybeum , sed lingula destitutum , inferius latus aa lineam rectam referat , reliqua vero latera in medio scapi b turgescant , et ad triplam partem crassitiae scapi in latum et altum exsurgent , crassioresque ibi relinquuntur.

3. Medio in latere inferiore excavetur scapus ad c , et semicirculare ei incidatur foramen inferne aperatum . Huic foramini c in superiori medio incidatur crena transuersa , vix oculis conspicienda , sed tamen , si cultelli aciei imponatur iugum , vt sensibiliter in ea haeret . Sit illa crena exacte elaborata , lima subtili , angulum in acie 90° habente , leuiter incisa , et tali etiam chalybe politorio optime laeuigata . Crenula haec punctum erit suspensionis , grauitatis , et quietis , quod in aliis bilancibus axiculus suppeditat .

4. Ex

4. Ex hac crenula c utriusque brachio concilietur exacte aequalis longitudo. Inciduntur extremitatibus cochleae mares d , et aptentur cochleae foeminae γ , quales etiam §. 12. Cap. praec. Tab. I. sub litera γ delineauimus, una cum elateribus β et annulis latis x . In quauis extremitate scapi prodeat lata lamellula f , sed non crassa. Demittitur scil. ad duas vel tres lineas digiti cochleae pars crassitiei superior et inferior, relicta in medio latitudine extremitatis, ita ut lamellula ista f , in eius cuspidie ad 3. vel 4. lineas promineat, et scapus bilancis erit paratus.

5. Deinde fiat lineale orichalceum BBB, in extremitatibus ad digitum dimidium incurvietur gg ad angulos rectos ita, ut in antica parte duae pinnulae gg producent, cum lineali angulum rectum constituentes.

6. Cuius harum pinnularum adaptetur ab extra, cochlea perpetua b in suis sustentaculis mn mobilis, insitu perpendiculari, quo mediante lamellula quaedam p , 1 lineam crassa, et 3 lata sursum atque deorsum agi possit. Excedat lamella in longitudine pinnulas, et prodeat k ante eas versus centrum linealis. Rimula etiam admodum angusta q prominentiis istis incidatur, ita, ut lineale cum istis rimulis lineam rectam et parallelam faciat. In linealis latitudine, post illas rimulas e regione fiat foramen r amplum 3 vel 4 linearum in diametro, luci admittendae dicatum, ita, ut per rimulam linea q lucida transpareat.

7. Lineale in medio 1 ex utroque latere crassius reddatur, adfirmatis duobus frustulis orichalceis, ss, et per ea perfringatur foramen t tres lineas longum et

duas latum , inferne duos angulos rectos habens, superne semicirculare. In medio semicirculari incidatur leuisima crenula , quae aciei cultelli imposita in ea haereat, ex qua deinde lineale suspendi atque librari potest.

8. Dependeat etiam ex medio linealis lamina W fiat grauis, vices perpendiculari gerens, quod lineale e crenula t suspensum ad situm horizontalis semper dirigat, atque in eo conseruet. In perpendiculari ista lamina W dimidium digitum infra foramen t suspensionis fiat, foraminulum u, ex quo dependeant filum cum pondusculo y. Et sic lineale hoc etiam erit confectum.

9. Iam de sustentaculo vtriusque et scapi A , et linealis B perpendiculari praediti solliciti simus. Fiat lamella 5 circiter digitos longa C, dimidium lata, et sesquilineam crassa. In superiore extremitate pertundatur foramen x, ex quo suspendi lamina potest, Vnum digitum et semissimum infra hoc foramen x prodeat cultellus z aciem sursum vertens. Huic aciei imponendum primo lineale B, deinde iugum bilancis A.

10. Quandoquidem vero onerato hoc modo cultello z, lamina C, ex situ perpendiculari recedit, et efficit, vt etiam cultellus situm nanciscatur declivem, ideo in infima parte laminae e tergo prodeat cochlea mas e, duos digitos longa , cui applicetur rota O grauior, cochlea foeminea in medio incisa. Reducta ad extrellum cochleae hac rota , contrapondii vices recipit, laminam C ad situm perpendicularis adigens , et cultello z horizontalis restituens; adducta, nimiam laminae propensionem retrahens.

11. Con-

11. Constructionem quod attinet atque iustificationem bilancis, haec sequentem in modum instituatur.

1. Suspenso lineali B super cultellum α sustentaculi C exploretur ope fili perpendicularis γ infra crenam suspensionis t linealis B aptati, vtrum lineale, vel rimae q in pinnulis gg versatiles rectam teneant lineam horizontalem; si non, ea inducenda ope cochleae perpetuae h, cuiilibet pinnulae g applicatae.

2. Imponatur cultello α etiam scapus A, absque elateribus et cochleis, et aequilibretur, donec lamellae extremitatum scapi f cum rimulis lucidis q lamellarum versatilium in recta stent linea horizontali, et conuerso scapo, vt brachium dextrum fiat sinistrum, idem contingat.

3. Scapo hoc modo praeparato apponatur cochleae foeminae γ , absque elateribus, et ex crena suspensionis t ope circini concilietur aequidistancia crenulis δ cochlearum foeminearum γ suspensioni lancium dicatarum.

4. Suspendatur iterum scapus A et aequilibretur; demendo de superflua grauitate cochleae foeminae praeponderantis.

5. Addantur elateres β , et si aequilibrium ab iis fuerit vitiatum, tantum lima ab elateribus dematur, quantum opus fuerit ad aequilibrium scapo restituendum.

6. Tandem addantur lances exacte aequipondantes.

7. Quod vero in aliis bilancibus lingulae officium est, id praestabit in hac lamellula f alterutra in extremitati-

tatibus scapi prominens. Si itaque per rimulam q̄ laminae versatilis p̄ linea lucida conspicitur, iudicetur, vtrum lamellula alterutra f̄ cum ea rectam constitutam lineam, quodsi contingit, onus omnino cum pondere concordat, sin minus, differentia inter vtrumque manifestatur, adiectis ponderibus determinanda. Quod vero celeritate eximia haec bilanx gaudeat, et minimum onuscum prodat, hoc ex eo est, quod onuscum nullum linguae contrapondium obstat, et praepondium eius impedit. Caeterum regulae ad bilances in praecedentibus datae, non sunt negligendae, in quantum applicari hic possunt: e. gr. Vt punctum suspensionis lancium pauxillum infra aciem cultelli adornetur, qui hic vices axis scapi gerit, et quae sunt huius generis alia.

12. Praerogatiuam et usum quod concernit huius bilancis, ille in re Metallurgica maximi est momenti, praecipue in probatione○, vbi minima corpuscula, et fere atomi sub censuram atque examen trahuntur.

13. In ponderibus probatoriis, maxime ad Denarium probatorium conficiendum apprime officio suo satisfacit, adeo, vt, cum vulgarium bilancium probatoriarum celeritas vix vulgaris pondo particulam elementarem sc. $\frac{1}{15\frac{1}{2}0\frac{1}{2}}$ indicet, haec bilanx omnino $\frac{1}{27\frac{1}{2}0\frac{1}{2}}$ particulam vnius Pondo oculis sistat, et $\frac{1}{27\frac{1}{2}0\frac{1}{2}}$ partem vnius Drachmae trahat.

14. In experimentis Physicis accuratiorem indagationem postulantibus, vt et aliis insensibilibus gravitatibus corporum naturalium expiscandis egregie conduit. Et quae sunt reliqua.

15. De

15. De hac bilance vereor, vt quis artificum inueniatur, qui iustificare eam possit, quandoquidem strutura facilis est, iustificationem vero mille difficultatibus implicatam et tantum non impossibilem inueni, re ipsa tamen a me praeslitam et Societati nostrae inclutae in concione demonstratam dedi.

*Exactissima manuductio ad iustificationem
huius bilancis consequendam.*

1. Quandoquidem haec bilanx facilioris quidem elaborationis est quam aliae docimasticae, iustificationem propter summam accurationem atque celeritatem, minimum etiam praepondium indicantem, admodum difficilis, imo, regularum artis ignaro, plane impossibilis erit, hinc modum laboriosum quidem sed certum atque sincerum docebo, quo neglecto nulla alia dabitur via ex his tricis sese explicandi et iustificationem bilancis obtinendi:

1. Scapus A absque cochleis et elateribus extermorum aequilibretur exacte: Id vt fieri possit, quandoquidem lingula destituitur scapus, hoc modo agatur.

2. Suspendatur lineale B ex laminae C cultello z vt perpendicularum linealis w respondeat perpendiculari ipsi addito y et filum hoc cum linea illius perpendiculari concordet, id quod obtinetur gravitatem praeponderantis brachii linealis B minuendo, et tunc recte se habebit fitus linealis horizontalis.

3. Addatur scapus A et ante lineale eidem cultello z

lo z imponatur , absque cochleis γ et elateribus β , et obseruetur quantum illius lamellula f a linea lucida q sinistrae auriculae distet.

4. Linea illa lucida q ope cochleae b lamellam p et rimulam q dirigentis, adducatur ad lamellulam f ex brachiis scapi prodeuntem, et cum ea faciat rectam lineam.

5. Conuertatur scapus et obseruetur quantum scapi lamella altera f distet a rimula q auriculae lucida.

6. Dematur a praeponderantis brachii scapi A granitate, vt lamella f dimidiam partem proprius accedat ad lineam lucidam q.

7. Linea lucida q alteram dimidiam partem accessionis absoluat, et ad lamellam f promoueatur , adducendo et reducendo cochleam eius perpetuam b.

8. Conuertatur scapus et videatur vtrum concordet eadem linea lucida q cum lamellula f alterius brachii , si non , corrigatur vitium ex ante dictorum monitis.

9. Tandem omnia ita disponantur , vt lamellae ff vtraeque cum vtrisque lineis lucidis qq accurate conueniant et conuerso etiam scapo idem semper eueniat, et quando omnia recte se habebunt, scapi correctio et aequilibratio erit absoluta , lineaeque lucidae horizontaliter erunt positae.

10. Cochleae iam foemineae absque elateribus apponantur ad scapum , et ex centro granitatis scapi seu crenula suspensionis t ope circini mensuretur situs seu distantia crenarum cochleis foemineis ii incisarum vt ambae

ambae $\dot{\imath}$ eandem nanciscantur distantiam ab ista crena t scapi.

11. Suspendatur scapus A et de praeponderantis brachii cochlea foeminea γ in extremo tantum abradatur quantum ad aequilibrium brachiis restituendum sufficit, conuersio saepius scapo.

12. Addantur ad cochleas foemineas elateres β et reconciliata crenis $\dot{\imath}$ aequidistantia a crena media t , suspendatur iterum scapus et redigatur ad aequilibrium, grauitatem elateris (non cochleae foeminae) brachii praeponderantis minuendo, et conuersio scapi non negligatur.

13. Appendantur lances diligentissime ad eandem grauitatem redactae et obseruetur vtrum aequilibrium seruet bilanx; si ab eo deflectit dematur aliquid de praeponderantis brachii cochlea foeminea (non de elatere) donec aequilibrium fere, sed non totum, fuerit inductum, et denuo remoueantur lances, et scapus absque lancibus reducatur iterum ad aequilibrium imminuendo grauitatem elateris (non cochleae) praeponderantis brachii.

14. Suspendantur iterum lances et agatur ad prescriptum §. 13. Cap. praecedent. idque quod in §§. 11. 12. 13. dictum repetatur saepius, donec bilanx prodeat omnibus modis absoluta et correcta.

15. Tandem examen rigorosum subeat bilanx. Oneretur vtraque lanx tanto pondere quanto scapus sufficit ferre e. g. cuius imponatur vna vncia, et aequilibrentur ambae exactissime, deinde commutentur lances, quod si aequilibrium iis manet, recte se habet bilanx, si minus,
Tom. II. H quae-

quaeratar error iuxta praecedentium §§. monita et corrigatur donec desideriis erit satisfactum.

2. NB. Observatio lamellarum *f* et linearum lucidarum *q* ita instituatur: Bilanx ad fenestram conclusum loctur, ut per foramen *r* et rimulam *q* lux transpareat. Deinde oculus observatoris ita situetur, ut lineae lucidae *qq* in medio foraminis *r* conspiciantur et neque altiores neque demissiores appareant sed diametrum horizontalem referant foraminis rotundi *r* ad hoc si attenditur, tunc semper ex eodem puncto visionis observationes rite et aequaliter erunt adornatae.

Methodus lances ad aequale pondus redigendi.

3. Cum vero vulgaris trutina seu docimastica minimum illud praepondium alterutrius lancis non prodat, in hac ipsa vero bilance summa aequalitas lancium requiratur tali modo agendum ut lances eandem recipiant gravitatem.

1. Quando scapus, cochleis foemineis *ii* et elateribus suis instructus, aequilibratus est, et, conuersus saepius, cum rimula lucida ad sinistrum latus semper concordat sicuti §. 1. momento 12. traditum tandem appendantur lances cum suis filamentis et annulis latis.

2. Notetur in auriculae *g* margine prominente altitudo lamellae scapi *f*.

3. Deinde commutentur lances ut dextra fiat sinistra

nistra et lamellae *f* altitudo iterum signetur in margine prioris auriculae *g*.

4. Distantia duorum istorum signorum dimidietur et signo notetur.

5. De lance preponderante et infra hoc signum descendente tantum abradatur lima , vt tandem cum signo praedicto conueniat lamella *f*.

6. Commutentur iterum lances , et si lamella *f* ad datum signum repetit suam stationem , res erit peracta , et lances habebis exactissime aequiponderantes.

7. Tandem agatur ad praescripta monitorum §.i. membra 13. ff.

Cap. III.

De bilance cum centro seu axiculo scapi mobili.

1. Quandoquidem vero in accurata bilancium constructione operationem fere impossibilem reddunt, planeque defatigant artificem tria haec necessaria requisita (1) inuestigatio centri bilancis scapi ad aequalem brachiis longitudinem dandam. (2) Inductio aequalis gravitatis brachiorum, quae modo ordinario peragitur lima, aliquid vel a dextro vel sinistro brachio demendo , cum leuiori nihil addi potest. (3) Conciliatio concordiae, inter aequalitatem et longitudinis brachiorum et gravitatis quia inquisitionem in aequalem longitudinem et gravitatem simul, opus longe difficultimum inueni. Elongato enim breuiori brachio, alterius gravitas vitiatur ; corre-

cta grauitate , elongatio iterum est castiganda , donec proportio inter vtriusque correctionem obtinetur , quae si non casu tandem inuenitur , exercitatissimum etiam mechanicum prosternit atque a labore vterius prosequendo deterret , quia trabem saepius limatam graciliorem , et oneri ferendo imparem vt plurimum reddit , ideoque plane inutilem atque deperditum .

P. Annus itaque sum vtrisque prioribus desideratis subuenire , vt tertium eo facilius obtineri possit , et deperditio totius operis praecaueatur . Id sequenti inuentione feliciter consecutus sum , et felicissime expediui , ita vt haec et trutinis seu docimasticis subtilioribus , et bilancibus maioribus , ponderationi centenarii et ultra dicatis , siue illa lingula instructae , siue absque lingula adornatae fuerint , applicari possit , et sic accurationem bilancium ad summum fere perfectionis fastigium adductam arbitror . Inventionem indicabo :

*Tab. V.
et VI.*

3. Fiat scapus A pedem longus cuius extremis cochleae mares *bb* incisae sint , ad longitudinem fere dorsi . Crescant eius brachia pedetentim centrum versus , vsque dum tantum incrementi acquisuerint , vt spissiores cochleae mares *aa* vtrique brachio prope centrum scapi , incidi possint , ad longitudinem dimidii dorsi , vt hoc modo earum foeminae *ee* sine impedimento et libere admittantur ab illius maribus *bb* tenuioribus . Medium d scapi fiat quadrangulare , latitudine crassitatem dorsi superans , longitudo fere semidigitalis sit . In maioribus bilancibus omnia adornentur ad proportionem .

4. Fiat ephippium D dorso scapi proportionale cuius

cuius latera plana anterius *a* et posterius *b* formam habent in fig. D. expressam. Inferior pars laterum in extremitatibus duabus cochleis *cc* transuersis connectantur, cochleae autem cylindrulis cauis *yy*, et mobilibus intra ephippium induantur, ut in cauo ephippii scapus super eos commode porro et retro versari possit. Dependeat vero anterius latus in forma trianguli $\frac{1}{3}$ digiti infra scapum deorsum *k*. Per vtrumque latus ephippii fiat foramen *f* in posteriori latere apertum inferius, in anteriori in angulum perquam acutum desinens, superna in parte sit vtrumque semicirculare, in quorum apicibus incidatur crenula, hypomochlio dicata, perpendiculariter supra angulum inferiorem acutum, ex quo angulo suspendendum erit filum illud orichalceum pondusculo *g* oneratum, quod scapo post librationem situm horizontali restituit.

5. Ad extrema scapi applicentur rotulae cochleis foemineis patulae *zz* ex una tantum parte, ex altera clausae, ut extremis scapi firmiter applicari possint, ex clausa parte rotularum prodeant lamellae *oo* perpendiculariter positae et tenues, horizontalibus crenulis donatae, longae sint 2. lin. latae 1 $\frac{1}{2}$ lin. crassae $\frac{1}{2}$ lin. Rotulis illis crena circularis torno incisa sit ex qua lancium funes annulo latiori *xx* annexi dependeaut, eodem modo ut in praecedenti bilancis descriptione Cap. II. §. 4. et Cap. I. §. 12. indicatum.

6. Ad reliquam partem cochlearum marium *bb* vtriusque extremitatis scapi applicentur binae cochleae foeminae, una in forma rotulae *y* altera *u* in eadem for-

ma, ita tamen ut duo cornua prominant ex latitudine, ad circumducendam cochleam. Hae cochleae foeminae *yy* et *uu* in longioribus cochleis maribus *bb* cis et ultra gyrari possunt ad aequilibrium brachiis induendum. Duplicatae sint, ut una ad alteram durius adducta, utræque sibi firmius incumbant, ne a leui attachu loco depelli possint, sed immotae locum assignatum seruent.

7. His itaque peractis componatur tota bilanx hunc in modum : Scapus A immittatur in ephippium E. Duæ cochleæ maiores *cc* cis et ultra ephippium addantur. Deinde utriusque cruris cochleis masculis minoribus *bb* applicentur binae matres *yy* et *uu*, quæ se inuicem tangant. Porro apponantur ad extrema brachiorum cochleæ *zz* crena annulari donatae, quibus deinceps imponantur annuli *xx* cum dependentibus lancibus. Tandem suspendenda erit tota bilanx per foramen medium f ephippii D.

Tab. VI.

8. Antequam vero suspendatur haec bilanx conficiendum erit lineale BBB cum sua lamina perpendiculari w quemadmodum hoc descriptum extat Cap. II. §. 5. ff. Non tamen necesse est, ut hoc lineale in utrisque extremis eandem habeat formam quam ibi delineauimus sed brachium sinistrum formam illam habeat necesse est, dextrum vero desinat in cochleam crassiusculam marem 2. digit. longam *a*, cui adiiciantur binae cochleæ foeminae, quarum una *b* instar rotæ seu orbiculi, altera *d* cum manubriis binis efformata sit. Hae cochleæ ad centrum scapi ductæ brachium hoc linealis leuius, reductæ grauius faciunt.

9. Sus-

9. Suspendatur hoc lineale ex cultello F tanquam clavo suspensionis et linealis et bilancis; ita ut perpendiculari *y* filum, lineae per medium laminae descendenti respondeat, quod cochlearum foeminarum *b* et *d* promotione obtinebitur His recte sese habentibus suspendatur ex eodem cultello F tota bilanx per foraminis medii *f* ephippii D crenulam superiorem cuius inferiori angulo addatur pondusculum *g* tunc tota machina erit adornata.

10. Iustificatio bilancis hoc modo instituatur: Redigatur ad aequilibrium scapus ; id quod ex crena brachii, crenae linealis BBB in linea recta respondentem cognoscitur. Hoc ut eueniat ducatur ephippium ope adiacentium cochlearum *cc* quantum fieri potest ad medium scapi punctum et cochleae combinatae *yu* brachii praeponderantis vterius versus ephippium promouetur, sic grauius brachium leuius redditur, et alterum leuius grauitate augetur. Non itaque necesse habebis limando grauitatem praeponderantis brachii minuere.

11. Recte constituta hoc modo bilance , binis lancibus imponantur binae vnciae accuratissime iam aequilibratae , et obseruetur vtrum bilanx recte adhuc se babeat, an vero vnum brachium praeponderet, quod si posterius , indicio est , brachia aequalis longitudinis non esse, hinc praeponderans brachium abbrevietur promotione ephippii per cochleas appositas, et aequalitas grauitatis brachiorum,hac ratione per protrusionem ephippii vitiata corrigatur per cochleas compositas *yu*. Idque continuetur tam diu, donec bilanx et cum impositis istis vnciarum ponderibus , et sine istis , situm eundem

dem retineat, crenulaeque extremitatum lineam rectam conseruent et sic iustificatio bilancis erit perfecta.

12. Haec de bilancibus absque lingula. Si vero bilanx lingula expertatur instruenda, firmetur in ephippio lingula exakte super crenula hypomochlio dicata, reliqua omnia fiant vt in antecedenti descriptione traditi, modo per ephippium traiiciatur et prodeat axiculus, ille instruatur vt Cap. I. §. 21. 23. 24. 25. dictum et tunc scapus in ephippio erit mobilis. Trabs vero imponatur in aginam iuxta Cap. I. Reg. X. §. 27. adornatum. Lineali vero BBB cum lamina perpendiculari w hic opus non erit. Ad hunc modum maiores etiam bilances adornari possunt, ita vt ad praepondium oneris minimum indicandum aptae inueniantur.

Cap. IV.

De bilance docimastica singulari ponduscula probatoria mole octies auctiora admittente.

Tab. VI. 1. Animum denique induxi eiusmodi bilancem probatoriam confidere quae ponderibus ordinariis octies maioribus onus octies minus indicare valeat, eum in finem vt pondera probatoria eo exactius in minima dividì possint. E. g. Onus drachma graue aequiponderabit ponderi octo drachmarum seu vnciae. Si itaque drachma in 100 partes diuidenda, tunc loco drachmae vncia

vncia in 100 particulas dispescatur quarum quaevis centesimae drachmae parti aequiualebit. Non difficilis factu mihi res videbatur quam aggressus hunc in modum perfeci.

2. Primo elaborauit lineale BBB cum lamina perpendiculari *w* et perpendiculari ex filo super linea verticali dependente, quale Cap. II. §. 5. et Cap. III. §. 8. descriptum.

3. Scapum confeci cuius brachia inaequalis erant longitudinis, superabat enim sinistrum A octies dextrum Z scil. si spatia intra puncta suspensionis lancium, et hypomochlium seu punctum suspensionis scapi consideres, ulterius vero extendebatur illud brachium Z ad unum digitum a punto illo suspensionis lancis. A sinistro A dependebat lanx ab extremitatis punto fixo, dextrum vero brachium Z prope hypomochlium bilancis erat quadratum *a* et desinebat in cochleam marem *r*.

5. Prope hypomochlium affixum erat elastrum *s* quod nitebatur in cylindrum *t* in medio foramine quadrangulari praeditum, brachio *z* proportionale, ut cylindrus ibi sit mobilis. Ad cylindriextremum transverse traiectus erat axiculus *m* lancis appensioni dicatus, a cuius prominentibus extremis dependebat longior auricula *p*. cum vncō *b*. Ultimo loco cochlea foeminea *q* et *l* addebatur, qua mediante cylindrus *t* cum axiculo *m* suspensioni lancium inseruiente ad crenulam *f* seu punctum suspensionis scapi, propius adduci vel remoueri potest ad elongationem et abbreviationem brachii *Z*.

6. Scapus lingula erat destitutus et suspendebatur
Tom. II. I tur

tur in crenula *f* super cultello *F* vt antecedentes bilances. Brachium longius *A* in vltima extremitate desinebat in tenuem lamellam *z* crena *o* incisam, quae etiam ex antecedentibus iam nota sunt.

7. Tandem ad brachii breuioris *z* auriculam dependentem *p* apponebatur cylindrus *gauus X* in superiori parte cochlea *b* clausus cum foramine *k* quod ad suspensionem cylindri *X* facit, inferius orificium cylindri erat imperium, vncio tamen *g* etiam praeditum ad recipiendam lancem cum suis funiculis. Haec totius machinae structuram absoluebant.

8. Iustificationem huius bilancis quod attinet, ea tali modo adornetur : Suspendatur bilanx ex scapi crenula *f*, spatium intra punctum suspensionis lancis et punctum suspensionis scapi *f* brachii maioris *A* dividatur in octo partes aequales, et fiat alterum illud spatium minoris brachii *Z* octies minus, ita vt $\frac{1}{8}$ tantum longum sit. Deinde tantum iniiciatur plumbi diminuti in lancem minoris brachii *Z* quantum sufficit ad scapum in situm horizontalem ducendum, vt crenulae *o* extremi scapi et *k* linealis BBB horizontalem lineam constituant. Postea in lancem minoris brachii *Z* ponatur 1 uncia seu 8 drachmae, et in lancem maioris brachii *A* 1 drachma, utrisque ponderibus exacte ad trutinam paratis, et obseruetur vtrum scapus seruaturs sit situm priorem scil. horizontalem. Si brachium minus *Z* praeponderabit, eximatur aliquid plumbi ex eius lance, et adducatur cylindrus *t* cum axiculo *m* aliquantulum ad crenulam *f* ope cochleae *g*. Si vero brachium *A* grauitate praeualeat,

adda-

addatur pauxillum diminuti plumbi ad alteram lanceam
brachii Z et simul cochlea q̄ reducatur. Idque tam diu
iteretur atque tentando inuestigetur, donec bilanx et cum
ponderibus et absque ponderibus recte suo fungatur offi-
cio et tunc omne plumbum ex lance eximatur, cylin-
drus X aperiatur eique iniiciatur, vt qui ad eum finem
factus est, claudatur iterum, et bilanx desideratum dabit
effectum.

9. Huius bilancis ope pondera probatoria maio-
ra fiunt mole, et tamen ordinariis ponderibus æqui-
pollent, e. g. 1. vncia vicarius est 1. drach. 1. loth vi-
ces gerit $\frac{1}{2}$ drachmae, et sic porro, ita vt pondera sem-
per octies maiora onere ponderando emergant.

10. Vsum hunc habet bilanx, vt si e. g. una dra-
chma in centrum partes diuidenda sit, ex qua diuisione e-
xiles valde emergunt partes, tunc loco 1. drachmae di-
uiditur 1 vncia in 100 partes et $\frac{1}{100}$ vnciae idem praefat ac $\frac{1}{100}$ drachmae, nisi quod haec particula vnciae
mole octies auctior oculis se sistat. Et sic utilitatem at-
que commoditatem præbebit haec bilanx non spernen-
dam.

Cap. V.

De fulcimento quodam bilancium proba- toriarum commodo.

1. Non possum quin artificibus metallurgis com-
modum fulcimentum proponam cuius ope bilances ad

quietem rediguntur, ita vt non opus sit eas susque deque librare , quod vulgo fit , et nunquam sine vacillatione machinulae peragi potest ; fed sustentaculum , super quo quiescunt lances , deprimitur incommota manente bilance.

2. Afferuatorii seu cistulae bilancis fundus X dividatur in tres partes aequales lineis duabus *a* et *b* secundum longitudinem ductis, quas bifecet transuersim ducta alia, *c*.

3. Ex puncto intersectionis , quod tergo cistulae proximum est *d*, parallelepipedum A $1\frac{1}{2}$ dig. Ruten. decimal. latum, $\frac{1}{2}$ dig. crassum vltra medium cistulae altitudinem normaliter assurgat.

4. Vertici parallelepipedi A crena incidatur 1. dig. long. $\frac{1}{2}$ lata *e*, cui immittatur prominentia alias cuiusdam parallelepipedi B priori similis, haec prominentia exacte quadret in prioris crenam , ita vt duo parallelepipeda , si sibi mutuo immissa fuerint , vnicum parallelepipedum constituere videantur. Inserta crenae prominentia cum ea articulum efficiat ope axis ferrei *g* per copulatorum parallelepipedorum medium crassitatem traiecti , vt parallelepipedum B vltro citroque moueri possit, immobile manente inferiore A.

5. Superius parallelepipedum B in cochleam ligneam *b* desinat , quae per foramen *b* tecti cistulae Y longius transmittatur , vt inclinari et reclinari in foramine longo *b* , et supra tectum cistulae cochlea foemina *c* firmari possit.

6. In-

6. Inferius parallelepipedum A $\frac{2}{3}$ dig. a fundo pertundatur in medio quoad longitudinem fissura d 5 dig. longa $\frac{1}{2}$ dig. lata.

7. Pone parallelepipedum compositum AB fere ad tergum cistulae erigatur aliud parallelepipedum ligneum C $5\frac{1}{2}$ dig. altum et priori aequale in latitudine et crassitie, distet a parallelepipedo A 1. dig, fissuram in superiori parte habeat 5. dig. longam $\frac{1}{2}$ dig, latam e, ita vt respondeat fissurae d prioris parallelepipedi A.

8. Ulterius ordinetur ad fissuram e asserculus D in eam inferendus, vt ibi ex axe g traecto mobilis sit, et per fissuram d parallelepipedi A transeat, longus sit asserculus quantum cistula intus permittit, latus $1\frac{2}{3}$ digit. crassus $\frac{2}{3}$ dig. Axis ferreus g latius caput habeat, postea quadrangularis, in medio cylindriformis et desinat in cochleam marem, vt per cochleam foeminam adductam fissura e cogi possit ad asserculum D arctius amplectendum, motumque eius difficiliorem aliquantulum reddendum.

9. In ea parte qua fissuram d parallelepidi A transfit asserculus D excindatur frustum superius et inferius per totam asserculi anteriorem partem, vt residua eius portio referat prisma f quadrangulare $\frac{1}{2}$ dig. crassum, $\frac{2}{3}$ altum.

10. Huic prisinati f accommodetur aliis asserculus E, longus prout cistulae longitudine admittit, latus 2. dig. crassus $1\frac{1}{4}$ dig. In eius medio latitudinis fiat foramen quadrangulare g vt per illud prisma f asserculi D transmitti possit.

11. Exscindatur et hic asserculus E vtrinque vt tantum in medio clypeus cum foramine g remaneat brachiis bb vtrinque prodeuntibus.

12. Brachia bb per medium crassitatem verticalem a clypeo vsque ad extreme fere brachiorum crenis transfoissis kk pateant cochleis GG ligneis gracilioribus impo-

nendis.

13. Cochleae GG infra medium latiori gaudeant interstitio ii, crenulis brachiorum bb committendo, crassitie cochlearum inferioris partis aequali; superior pars ll cochlearum GG crassior sit, vt in crenularum lateribus insisteret, cochleis foemineis yy inferioribus adductis, possint.

14. Tandem cuius supereminenti cochleae ll accommodentur duae cochleae foeminae mm et nn, quarum superiores mm referant orbicalum inferiores nn, ostangulares sint vt vtraeque n in m adductae sibi incumbant, nec locum situs mutent.

15. Ultimo loco perforetur prisma / asserculi D in anteriori parte o foramine oblongo, transmittatur clavis ferreus p capite perforato vt gyrari possit, et dimidia parti inferiori cochlea sit incisa, indatur illa post transmissionem per prismatis foramen o in cochleam foemineam q que sursum et deorsum moueri possit. Clavis capite suo latiori incumbat in prisma /, et recte constitutis omnibus adducatur cochlea foemina m bilis q ad fundum cistulae X vt firmiter erectus maneat clavis absque vacillatione. Sic prisma / altius attollatur quibit,

quam

quam clavi caput permittit, quanquam depressioni omnino obediatur.

16. Fulcimentum hoc tali modo usui accommodatur: In parallelepipedum superius B pangatur cultellus \approx scapum bilancis recipiens, impositoque lineali BBB cum suo perpendiculo \approx in antecedentibus bilancibus descripto attendatur, utrum cultellus \approx situm horizontalem habeat, si scil. perpendiculum γ linealis BBB aequaliter superius et inferius distet a lamina \approx linealis BBB dependente, hoc si non est, inclinetur vel reclinetur parallelepipedum B usque dum desideratus obtinetur perpendiculi situs, tunc adducitur cochlea foeminea c quae supra tectum est, et firmatur parallelepipedum superius B.

Dependentibus bilancis lancibus subiiciantur cochleae foeminae mm orbiculares protrudendo vel retrahendo afferculum E in prisma f aliquantulum durius mobilem, ut orbiculis mm istis lances immineant.

Porro attollantur gyrando orbiculi mm , ut in istos leuiter incumbant lances, et cochleae nn adducantur ne orbiculi vacillent sed stabiles reddantur. Tandem clavis ferreus p tamdiu circumducatur in sua foemina r , donec caput eius in ea altitudine existat, in qua omnem ascensum prismatis f impedit, quo lances turbari possent, atque hic situs clavi seruetur per cochleam q fundo adductam.

17- Iniectis itaque in lances onere atque pondere deprimatur prisma f , tunc libere pendet bilanx et oneris pondus determinabit. Ad restituendam bilanci quietem, reducatur prisma f , ut in caput clavi impingat, tunc lan-

lances quiescent , nec tamen bilanx alteratur aut com-
mouetur.

Cap. VI.

De Ponderibus.

*maxime quae ad bilancem probatoriam
spectant.*

1. Non tantum de vtilitate , sed et de necessitate mathematico est , scire determinationem nonnullorum ponderum , maxime , quae ad bilancem probatoriam per-
tinent , eaque ratione et indolis et formationis intellige-
re. Hinc sequentem breuem quidem , sed sufficientem
manuductionem ad vtrumque suppeditabo.

2. Centenarius est illud maximum genus ponde-
rum , quo in communi vita , vt in et re metallurgica vtun-
tur artifices in Germania : Est vero pondus commune
vbique locorum vtplurimum eiusdem grauitatis , sed di-
uersis in locis diuersimode distributus in Pondo. Sic
Centenarius Norimbergae et Lipsiae diuiditur in 100.
lbr. Coloniae ad Rhenum in 102. lbr. et tamen vter-
que Centenarius eandem habet grauitatem : pondo vero
Coloniense pendet minus Norimbergensi.

3. Hic vero in Russia vulgarirer maximum pon-
dus est quod vocatur *Pud.* Datur quidem apud Ruthe-
nos adhuc aliud ingens pondus *Perkoiwitz* dictum ,
sed non adeo in vsu est , et fere obliuioni datum , nisi
quod

quod Nautae eo adhuc vtantur quibus vocatur ein Schiff-Pfund. Haec itaque introducta est subordinatio Ponderum Rutenicorum:

I	Percoiwitz	continet	10	Pude
I	Pud	- - - -	40	Pondo
I	Pondo	- - -	32	Loth
I	Loth	- - -	3	Solotnik
I	Solotnik	- - -	6	Gran.

4. Diuiditur vt dixi Centenarius Norimbergicus in

100 Pondo seu libras , et exprimitur signo I C.

I	Pondo	in	2	Marcas	-	I lb.
I	Marca	in	8	Vncias	- -	I Mrc.
I	Vncia	in	2	Lothones	-	I $\frac{3}{2}$
I	Lotho	in	4	Drachmas	-	I L. vel $\frac{1}{2} \frac{3}{2}$
I	Drachma	in	$\frac{3}{2} \frac{2}{2}$	partes	- -	I $\frac{3}{2}$

Drachma dispescitur dimidiando semper partes ita, vt

I	Drachma	seu	Quintillum	(ein Quentchen)	sit	$\frac{3}{2} \frac{2}{2}$	part
$\frac{1}{2}$	Drachma	-	-	-	-	$\frac{1}{2} \frac{6}{2}$	
$\frac{1}{4}$	Drachma	quaec	vocatur				
				denarius	(ein Pfennig pf.)	$\frac{8}{2} \frac{2}{2}$	
$\frac{1}{8}$	Drachma	Obulus	(ein Heller hl.)			$\frac{4}{2} \frac{2}{2}$	
$\frac{1}{16}$	Drachma	$\frac{1}{2}$	Obulus ($\frac{1}{2}$ Heller)			$\frac{2}{2} \frac{2}{2}$	
$\frac{1}{32}$	Drachma	$\frac{1}{4}$	Obulus ($\frac{1}{4}$ Heller)			$\frac{1}{2} \frac{2}{2}$	

5. Ad normam vero Norimbergicorum si examinantur pondera Rutenorum , inueni , talem dari proportionem :

Tom. II.

K

I lb.

1 lb. Ruten. aequatur 28 Loth $\frac{1}{4}$ quentl. Norimberg.

Ergo

512 lb. Rutenica dant	449 lb.	Norimbergica
40 lb. - - -	35 lb.	2 L. 2 $\frac{3}{4}$ N.
10 lb. - - -	8 lb.	24 L. $2\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ N.
1 lb. - - -		28 L. $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ N.
1 Loth. - - - -		$3\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{4}$ N.

6. Medica pondera ita se habent :

1 lb. Medicum est 12 Vnciarum Norimb.

	seu	98304	Elem.
1 $\frac{3}{4}$ - - -	2 L. Nor.	seu	8192
1 L. seu $\frac{1}{2}\frac{3}{4}$ seu $\frac{3}{8}4$ Dr. N.	Dr.	N.	4096
1 $\frac{3}{4}$ - - -	3 Scrup.	seu	1024
1 $\frac{3}{4}$ - - -	20 Grana	seu	$34\frac{1}{3}$
1 gr. - - -		seu	$17\frac{1}{3}$

7. In re Metallurgica et Monetaria artifices vt-plurimum vtuntur Marca vel Norimbergensi vel Coloniensi. Cum Norica conuenit Lipsiensis.

8. Est vero inter vtraque pondera ratio talis :

102 lb. Coloniensia dant 100 lb. Norimbergenfia.

131072 Elementa vnius lb. Col. dant 128512 elementa lb. Noric.

I Marca Colonensis dat 15 Loth. 11 pf.
(seu $\frac{1}{3} \frac{1}{2}$ part. drachmae) Noricas.

67 Ducati Colonensem faciunt Marcam.

68 $\frac{1}{2}$ Duc. faciunt Marcam Nor.

9. Ad $\alpha\kappa\gamma\beta\epsilon\alpha\nu$ ponderum quod attinet, assumerunt artifices particulas minimas, quarum I. lb. continet 131072. Haec elementa ponderum dicuntur, et in eas resoluitur pondo vnius cuiusque ciuitatis, Mihi vero ope bilancis nouiter inuentae et Cap. II. descriptae vterius progreedi licuit, ita, vt 1 lb. diuiserm in 4194304 particulas, quarum differentiam haec nostra bilanx prodit.

10. Solent Metallurgi Argenti pondus efferre, vel per denarii vel per granorum pondus (Pfennig und Gran-Gewicht.)

Est vero 1 Den. Pf. valor $\frac{1}{3}$ vel 256 Element.

I Lothonis valor 6 gran. vel 4096

I gran. 3 graen. vel $682\frac{2}{3}$

I graen - - - $227\frac{1}{3}$ Elem.

11. Auri pondera vocantur Carrath, Grana, et Graena (quasi Granilla.)

I lb. dat 48 Carrath

I Marc 24 Carrath

I Vncia 3 Carrath

I Carrath dat 4 gran. vel 12 graen.

I Granum 3 graen.

K 2 12. Pro.

12. Proportio inter iam recensita pondera ea est,
quam sequens tabula parallela exhibet:

Pondera communia	Denaria Pfennig=Gewicht.	ad ☽	ad ☽ Medica	Elem. comm.	Elementa minima
1 lb.	1 lb.	2 Marc.	48 Carr.	16 3	131072 4194304
1 Mrc.	1 Mrc.	16 Loth.	24	8 3	65536 2097152
1 3	1 3	1 3	3	1 3	8192 262144
1 L.	1 L.	1 L.	1 1/2	1/2 3	4096 131072
1 3	1 3 seu 4 Pf.	18 gr.	18 gr.	1 3	2048 65536
1/2 3	1/2 3	2 Pf.	9	9	1024 32768
1/4 3	1/4 3	1 Pf.	4 1/2	4 1/2	512 16384
1/8 3	1/8 3	1 Hl.	2 1/4	2 1/4	256 8192
1/16 3	1/16 3	1/2 Hl.	1 1/8	1 1/8	128 4096
3/2 3	3/2 3	1/4 Hl.	9/16	3 3/4	64 2048
				1 7/8	

13. Obiter hic notanda aureae monetae determinata grauitas.

1 Marc seu 16 L. Noricae faciunt

65536	Element.	Colonenses item 65536
24	Carath.	24 Carr.
68 1/2	Ducatos	67 Duc.
7 1 1/4	Coronas	70 Cor.
7 3 3/4	Florenos Rhen.	72 Flor. Rhen.

Ducati hoc singulare habent, quod per unitates, sic vocatas (Ducaten Eschen) ponderentur, vocantur vulgariter Eschen.

67	Eschen dant	1-3	Coloniensem
68½	Eschen faciunt	1-3	Norimbergensem.
4288	Eschen dant	1	Marc. Colon. seu 67 Ducatos
64	Eschen	978 $\frac{1}{6}\frac{0}{7}$	El. Colon. 1 Ducat.
	1 Eschen	15 $\frac{1}{6}\frac{2}{7}$	El. Colon.

1 Imperialis argenteus (ein Banco Thaler) aequiponderat 2 Loth Coloniensibus vel 8192 Elem. Colon.

ut et 1 Loth 15½ Vf. Norimberg. vel 8064 El. Noric.

1 Duc. pendet 956 $\frac{4}{6}\frac{8}{7}$ El. Nor. sed Colon. 978 $\frac{1}{6}\frac{0}{7}$ El.

1 Corona 920 $\frac{3}{10}$ 936 $\frac{8}{5}$

1 Flor. Rhen. 888 $\frac{1}{1}\frac{1}{8}$ 910 $\frac{2}{3}$

NB 1 Ducatus Hungaricus seu Cremnicensis constat

963 $\frac{6}{1}\frac{1}{4}\frac{0}{3}\frac{8}{9}\frac{8}{9}\frac{8}{2}\frac{6}{2}\frac{3}{4}$ (seu $\frac{6}{1}\frac{2}{3}$) El. Nor. sed Col 985 $\frac{6}{1}\frac{7}{3}\frac{3}{3}$

14. Metallurgia docimastica singularia pondera minuta habet, vices maiorum gerentia, et eorum proportionatam grauitatem significantia. Assumitur enim ab exercitatis Metallurgis vt plurimum 1 Drachmae ordinariae pondus, et nominatur 1 Centenarius probatorius, ex ea deinde reliqua pondera maioribus proportionalia deducuntur. Item 1 Drachmae pondus aequiparatur 1 Marca seu 16 Loth, ex qua proportiones cæterorum ponderum probatoriorum deriuantur aequisignificantes verorum ponderum proportionibus.

15. Qui fodinarum metalliferarum intestina scruntantur (Berg=Probierer) vt plurimum vtuntur ponderibus probatoriis sequentibus, eaque in cellulis asseruatoriis hoc modo collocant atque disponunt: Diuisam sc. in suas partes drachmam, cui centenarii, partibus vero librarum Lothonum atque Drachmarum nomen imponunt.

1. Drachma valet	100 lb.	et continet elem.	1024
Eius dimidium	50 lb.	-	512
semper dimi-	25 lb.	-	256
diando nume-	16 lb.	-	16 $\frac{2}{2} \frac{1}{5}$
rum antece-	8 lb.	-	8 $\frac{2}{2} \frac{3}{5}$
dentem vsque	4 lb.	-	4 $\frac{2}{2} \frac{4}{5}$
ad 16 lb. quod	2 lb.	-	20 $\frac{1}{2} \frac{2}{5}$
alia methodo	1 lb. vel 32 Loth	-	10 $\frac{6}{2} \frac{1}{5}$
inuenitur de	16 L.		
qua §. 16.	8 L.	&c.	
Postea ad reli-	4 L.		
qua pondera	2 L.		
iterum dimi-	1 L.	&c.	
diando fit	$\frac{1}{2}$ L.		
progressus	I	¶	&c.
	$\frac{1}{2}$	¶	
	$\frac{1}{4}$	¶	
	$\frac{1}{8}$	¶	
	$\frac{1}{16}$	¶	
	$\frac{1}{32}$	¶	

16. Admodum vero difficile est grauitatem 16 pondo inuenire in ponderibus his probatoriis, hinc meam praxin exponam :

1. Fiat ex filo orichalceo ducto et tenui (aus einer dünnen messingenen Clavicordii Saiten) pondus 25. lb. probatoria pendens.

2. Circino diundatur illud filum in 5 partes , et forcicula dividatur per puncta divisionis, partes bilance exami-

aminentur , vtrum aequale inter se pondus habeant , et coniunctim conueniant cum pondere 25 lb. probatorio. Erit hoc modo vnum frustulum aequale 5. lb.

3. Frustulum vnum iterum eodem modo dissecetur in 5 partes aequales, priori modo examinandas. Et dabit 1 frustulum 1 lb.

4. Tandem in lancem eandem imponantur, 3. frusta de maioribus et 1. de minoribus et habebis pondus 16 lb. probatoriorum.

5. His aequilibretur vnicum frustum metallicum, figuram reliquorum ponderum similem referens, et desiderio erit satisfactum.

17. Ulta $\frac{1}{2}$ drachmae probatoriae progredi necesse non est, quandoquidem et haec dispartitio altioris indaginis ast, quam, vt a vulgari bilance docimastica exspectari possit.

18. Monetarii alio modo vtuntur Drachma. Eius enim valorem 1 Marcae ; seu 16 Lothonibus aequalem ponunt, et deinde dimidiatas partes, tamquam pondera probatoria, veris ponderibus substituunt, et tunc tale emergit systema ponderum probatoriorum.

1 Drach-

			Elem. vulg.	Element. minima.
1 Drachma aequalet	16 L. et pendet	-	1024	vel 32768 El.
	8 L. — — —		512	16384
	4 L. — — —		256	8192
	2 L. — — —		128	4096
Vulgariter	1 L. — — —		64	2048
minimum	$\frac{1}{2}$ L. — — —		32	1024
pondus est	1 ™ — —		16	512
$\frac{1}{8}$ ™ Sed	$\frac{1}{2}$ ™ — —		8	256
hic etiam	$\frac{1}{4}$ ™ seu 1 Pf.	Pf.	4	128
$\frac{3}{16}$ ™ ope	$\frac{1}{8}$ ™	1 Hl.	2	64
nouae bilan-	$\frac{1}{16}$ ™	$\frac{1}{2}$ Hl.	1	32
cis detegitur	$\frac{3}{32}$ ™	$\frac{1}{4}$ Hl.		16
atque pro- dit.	$\frac{1}{64}$ ™	$\frac{1}{8}$ Hl.		8
	$\frac{1}{128}$ ™	$\frac{1}{16}$ Hl.		4
	$\frac{1}{256}$ ™	$\frac{1}{32}$ Hl.		2
	$\frac{1}{512}$ ™	$\frac{1}{64}$ Hl.		1

19. Rei Monetariae Magistri (Münz=Baradein) vtuntur in diiudicando seu determinando iusto cuiuslibet monetae pretio Denario directorio (des Richt=Pfenninge) qui ex elementis pondo vnius construitur , cui egregie inseruit diuisio vnius pondo in 4194304 Elementa , quandoquidem diuisio 1 lb. in 131072 Elementares partes vulgares ad hunc denarium determinandum insufficiens omnino deprehenditur , quemadmodum sequens tabula indicat.

1 lb.

Elem. vulg.	Elem. minima.	Elem. vulgaria.	Elem. minim.
1 lb. continet 131072	194304		
1 Marc. - 65536	2097152	$\frac{1}{64}$	16
8 L. - - 32768	1048576	$\frac{1}{128}$	8
4 L. - - 16384	524288	$\frac{1}{256}$	4
2 L. - - 8192	262144	$\frac{1}{512}$	2
1 L. - - 4096	131072	$\frac{1}{1024}$	1
$\frac{1}{2}$ L. - - 2048	65536	$\frac{1}{2048}$	16
1 φ - - - 1024	32768	$\frac{1}{4096}$	8
$\frac{1}{2}$ φ - - - 512	16384	$\frac{1}{8192}$	4
$\frac{1}{4}$ φ - - - 256	8192	$\frac{1}{16384}$	2
$\frac{1}{8}$ φ - - - 128	4096	$\frac{1}{32768}$	1
$\frac{1}{16}$ φ - - - 64	2048		
$\frac{1}{32}$ φ - - - 32	1024		

20. Haec sunt potissima, quae de ponderibus accuratioribus notatu digna atque scitu necessaria iudicau, quandoquidem et Mathematico et Physico multum interest structuram bilancis, et ponderum proportiones intelligere, eamque dijudicare posse, si feliciori passu ad intimiora vtriusque scientiae progredi, et theoriam ad praxin accommodare, vel praxin ex theoria deducere gestuerit.

DE PLANETARVM STATIONIBVS.

Auctore

F. C. Maiero.

I.

M. Jun.
1727.

KEPLERUS in Rudolphinis pag. 72. hoc sibi problema soluendum proposuit: *Cuilibet anomaliae planetae suos commutationis angulos assignare in quibus is fiat stationarius.* Eudem quoque suam nauavit operam Hallaeus, cuius solutionem Keilius in lectionibus astronomicis p. m. 239. protulit. Duo problematis huius sunt casus: Primus tam terrae quam planetae in suis orbitis data assumit loca, sed orbitalium sive apsidum positionem non determinat, quippe quae demum ex inuenta commutatione stationaria determinanda venit; Alter casus datam statuit hanc positionem, vna cum anomalia planetae solius, anomalia autem terrae stationaria inuenienda est. Hunc posteriorem quidem casum in animo habuerunt laudati Astronomi, sed si solutiones eorum specto, non nisi primo, nec ei plene, satisfecerunt: Keplerus solutione uititur indirecta, regula, quam vocant, falsi nixa; item, quae tanquam data assumenda sunt, vt celeritatum ratio, et tangentium anguli, ipsi non nisi vt prope vera cognita fuerunt, ignorabat enim theorema quibus data haec determinantur: Hallaeus telluris orbitam supponit circularem, quod quidem prope verum est,

est, at non verissimum. Ex solutione primi casus adornauerunt solutionem secundi, sed plane indirectam, assumunt enim ambo locum terrae ut cognitum ex conjectura, qui tamen quaeritur, eumque postmodum, si necesse sit, limant. Hisce naeuis, si qui sunt, in praesenti scripto mederi conabor, ostensurus viam directam quavtriusque casus quaesita aequationibus algebraicis definitiuntur, licet id non nemini impossibile visum fuerit. Nullis ad id indigeo principiis nouis, omnia fere iam suppeditat Keilius in lectionibus astronomicis, sicuti ex allegationibus posthac intelligetur. Sunt, praeter hoc problema, alia de stationibus apud Mathematicos celebria, a quibus tamen nunc abstineo, donec, quae meditatus sum de illis, melius digessero.

2. Iuuat ab initio monere, me substruere dicendis systema copernicanum, et leges motuum keplerianas; Supponere etiam orbitas planetarum ad planum eclipticae reducas. Caeterum definitiones stationum aliarumque rerum astronomicarum vulgarium hic non inculco, lectorem postulans astronomiae non ignarum. Id vnicum noto, me per triangulum parallacticum intelligere triangulum rectilineum formatum ab interuallis planetarum a sole, et linea planetas iungente: *Terra* vero in sequentibus etiam sub *planetae nomine* veniet, quod breuitatis causa facio, et dum de duobus loquor planetis superiore uno, inferiore altero, alteruter semper pro terra haberi potest.

3. Propter motum planetarum continuum, anguli, in triangulo parallactico, continuo mutantur; muta-

tionem igitur alicuius anguli tempusculo infinite paruo factam vocabo *mutationem momentaneam*. Item arcum, quem planeta ex sole visus tempusculo infinite paruo percurrere supponitur, vel eiusdem correspondentem angulum ad solem, vocabo *planetae incrementum angularium*.

4. *Mutationes momentaneae angularium, in triangulo parallactico, ad planetas stationarios, sunt aequales incrementis ad solem angularibus eodem tempusculo factis.*

Fig. I.

Triangulo parallactico OSI stationario iungatur aliud Osi, in quod nimirum prius triangulum OSI post tempusculum infinite paruum abiisse censendum est: Ob stationis naturam erit linea visoria IS parallela ipsi is. Fiat porro SP parallela lineae Os, et RI parallela ipsi Oi, vt habeatur angulus PSI = ang. OSi, item angulus Ois = ang. RIS, et praeterea angulus PSO = ang. SOs angulusque RIO = ang. IOi. Sunt autem anguli PSO et RIO mutationes momentaneae angularium ad planetas statonarios, et anguli SOs atque IOi sunt incrementa ad solem angularia, ergo haec illis aequalia sunt statio- num tempore. Q. E. D.

5. Ex sola inspectione figuræ, qua ad demonstrationem vñus sum, intelligitur, vnam mutationem momentaneam esse priuatiam, si altera sit positiva. Ut haec diuersitas tollatur, pro angulo ad planetam inferiorem (OIS) vñsurpabo eiusdem deinceps positum, cuius consequenter mutatio momentanca eodem signo gaudet, quo et altera ad superiorem planetam. Id practerea quoque patet, esse hunc deinceps positum stationis tempore

re semper acutum , aequa ac angulus ad superiorem planetam ISO. Cetera notandum est hoc ipsum theorema , quod demonstrauit , esse fundamentum cui innititur solutio problematis sequentis. Reliqua enim quae sequuntur theorematia motum coelestem in genere spectant , nec ad solas stationes pertinent , faciunt tamen ad solutionis dandae perfectionem.

6. *Incrementa angularia ad solem sunt in ratione composita, ex directa subduplicata parametri orbitae, et inversa duplicata distantiae a sole.*

Distantia superioris a sole OS ponatur $= D$, distantia inferioris $= d$. Parameter orbitae superioris sit $= P$ et parameter inferioris $= p$. Sit praeterea incrementum angulare superioris $= SO_s$, et incrementum angulare inferioris $= IO_i$, demonstrandum est esse $SO_s:IO_i = \frac{\sqrt{P}}{D} : \frac{\sqrt{p}}{d}$. Quia sectores SO_s et OII (qui propter infinitam paruitatem pro triangulis rectilineis haberi queunt) eodem tempore descripti sunt, erit per naturam motus coelestis sector SO_s ad sectorem IO_i vti \sqrt{P} ad \sqrt{p} (vid. Keili lect. Astron. p. m. 364) Centro O radiisque OS et OI describantur arculi infinite parui SQ et IR, qui pro rectis habeantur lineolis ad radios OS et OI normalibus , erit proinde area sectoris superioris ad aream inferioris vti OS . SQ ad OI . RI sive , vt $D . SQ$ ad $d . RI$; est vero $D . SQ : d . RI = \sqrt{P} : \sqrt{p}$. ergo quoque $SQ:RI = \frac{\sqrt{P}}{D} : \frac{\sqrt{p}}{d}$. Describatur porro arcus VT radio OI, ita fiet $VT:SQ = d:D$, hanc ergo

Fig. II.

L 3 con-

conferendo proportionem cum proxima antecedente habetur ex aequo VT : RI = $\frac{\sqrt{P}}{DD} \cdot \frac{\sqrt{P}}{dd}$. Et quia VT : RI = SO_s : IO_i erit etiam SO_s : IO_i = $\frac{\sqrt{P}}{DD} \cdot \frac{\sqrt{P}}{dd}$. Q. E. D.

7. Quoniam stationis tempore mutatio momentanea anguli ad superiorem planetam est ad mutationem momentaneam anguli ad inferiorem deinceps , vti incrementum angulare superioris ad incrementum angulare inferioris planetae , (§. 4. et 5.) erit tempore stationis mutatio momentanea superioris ad mutationem inferioris , vti $\frac{\sqrt{P}}{DD}$ ad $\frac{\sqrt{P}}{dd}$. vi antecedentis theorematis.

8. *Mutatio momentanea sinus anguli ad superiorem, est ad mutationem sinus ad inferiorem , vti distantia inferioris, ad distantiam superioris a sole.* Propter mutationem quae momentanea est , distantiae planetarum nil mutantur , ergo ratio sinuum manet quoque eadem, sunt enim illi vti oppositae distantiae a sole ; manente autem ratione eadem, necesse est augmenta vel decrements sinuum eandem quoque retinere rationem. Q. E. D.

Fig. III. 9. Si arcus vel angulus aliquis quantitate infinite parua crescat vel decrescat , erit tale incrementum arcus, ad incrementum quo sinus eiusdem augetur eodem tempore, vti radius ad cosinum dicti arcus. Sit arcus propositus =BE, sinus eius =AB, et cosinus =AC ; incrementum arcus minimum =Bb, adeoque incrementum sinus =Db habeatur arcus Bb pro recta, erunt hoc modo triangula ABC et BbD similia, consequenter Bb : Db = BC : AC. Q. E. D.

10. Ponaturcosinus anguli ad superiorem planetam

nam $=C$ et cosinus ad inferiorem $=c$. Praeterea sit mutatio momentanea ad superiorem $=m$ et mutatio ad inferiorem $=n$, erit, per antecedens theorema, mutatio sinus superioris, ad mutationem sinus inferioris momentaneam vti mC ad nc .

11. Et quoniam stationum tempore est $m:n = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{D}}$: $\frac{\sqrt{p}}{dd}$ ($\S. 7.$) erit hoc in casu mutatio sinus superioris momentanea, ad mutationem inferioris vti $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{D}}C$ ad $\frac{\sqrt{p}}{dd}c$.

PROBLEMA.

12. *Datis anomalii tam terrae quam planetae inuenire commutationem qua statio accidit.*

Propter datas anomalias dantur quoque planetarum a sole distantiae, nimirum $OS=D$ et $OL=d$. Ponatur anguli intercepti SOI (qui commutationi deinceps est) cosinus $=y$ erit (per trigonometrica mea hisce commentariis exhibita pag. 29. $\S. 23.$) cosinus anguli ad $S=\frac{rD-dy}{\sqrt{(DD-2Ddy;r+dd)}}$, et cosinus anguli ad I deinceps $=\frac{Dy-rd}{\sqrt{(DD-2Dly;r+dd)}}$, ergo mutatio sinus superioris momentanea est ad mutationem sinus inferioris momentaneam (per $\S. 11.$) vt $\frac{\sqrt{p}(rD-dy)}{DD}$ ad $\frac{\sqrt{p}(Dy-rd)}{dd}$, est vero etiam (per $\S. 8.$) vti d ad D , ergo facta aequationis legitima reductione inuenietur $y=rDd-\frac{\sqrt{p}+\sqrt{p}}{DD\sqrt{p}+dd\sqrt{p}}$. Q. E. I.

Fig. I.

13. Lubet inuentam regulam exemplo illustrare
descenso ex tabulis rudolphinis pag. 72. vbi datur
 $D = -32532$ (quae est distantia Martis a Sole) et
 $ld = -1092$ distantia terrae a sole) item $lP = -110550$
et $lp = -69283$. Instruam vero calculum methodo a
me in hisce commentariis pagg. 20. 22. exhibita. Est ita
que $lVp = -55275$ et log. $Vp = -34641$. Ast quia
logarithmi tales priuati sunt, mutantur prius in positi-
uos vicarios, addendo communem maiorem (e. g. 60000)
sic fiet

$$\text{Vic: } lVp = 4725 \text{ cuius arcus} = 72^\circ, 31', 30'',$$

$$\text{Vic: } lp = 25359 \text{ cuius arcus} = 50, 53, 47,$$

Semisumma	$= 61, 42, 38$	log. 12719
Semidiffer.	$= 10, 48, 51$	antil. 1792

14511
dematur - 60000

$\log.(lVp + Vp) = -45489$

log. $D = -32532$

log. $d = -1092$

$\log. rDd(lVp + Vp) = -79113$
log.

log. $DD = -65064$

$\sqrt{p} = -34641$

$DD\sqrt{p} = -99705$

addatur . . 100000

295 arcus eius = $85^\circ, 36', 0''$

log. $dd = -2184$

$\sqrt{P} = -55275$

-57459

addatur 100000

42541 arcus eius = $40^\circ, 48', 22''$.

Semisumma = 63, 12, 11. logar. = 11360

Semidiffer. = 22, 23, 49. antilog. = 7843

19203

dematur 100000

log. ($DD\sqrt{p} + dd\sqrt{P}$) = -80797

log. $rDd(\sqrt{P} + \sqrt{p}) = -79113$

log. $y = 1684$

ergo angulus ad solem = $10^\circ, 29', 10''$.

et commutatio = 169, 30, 50.

Keplerus habet = 169 53, 30.

excessumque committit = - - 22, 40.

Aliud exemplum idem Keplerus l. c. adducit, vbi
mercurium et terram in apheliis ponit et commutatio-
nem stationariam indirecta sua methodo eruit = $25^\circ, 20'$,
quae debebat esse = $25^\circ, 33', 6''$.

Tom. II.

M

14.

14. Atque ita primo casui problematis kepleriani de stationibus abunde satisfactum est. Quod alterum casum attinet, (in quo dantur apsidum ad inuicem positio, vniusque planetae anomalia, quaeritur autem altera stationaria;) attendenti facile patebit, posse, ope antecedentium, solutionem eius exhiberi quoque aequatione algebraica. Verum quia illa ad sextam dimensionem ascendit, nec vlla eam deprimendi spes est, inutilem prorsus ad praxin astronomicam censeo. Quamobrem eius loco commendare malo indirectam solutionem, sumendo anomaliam quae sitam ex coniectura prope veram, atque ita inquirendo commutationem stationariam per problema antecedens, qua inuenta positio prima corrigatur, et calculus repetatur donec sibi consentiat et veritatem exacte prodat.

PROBLEMATIS Traiectoriarum Reciprocarum

Solutio.

Auctore

Leonhardo Eulero, Basil.

I.

*M. Iul.
1727.*

Problema, de quo in hoc schediasmate agere constitui, est celebre illud et in Actis Lips. multum agitatum, de inueniendis curuis, quae intra datas parallelas eaedem recto et inuerso situ positae et secundum parallelarum directionem hinc inde mo-

motaे, mutua intersectione vbiq; angulum eundem consti-
tuunt, Problema in Act. Lips. Suppl. T. VII. a beate hic de-
functo Nicolao Bernoulli propositum Ita autem cum hoc
problemate res se habet, vt infinitae, tam algebraicae,
quam transcendentes curuae satisfaciant. Quapropter ad
plenam eius et perfectam solutionem requiritur, vt exhibe-
atur methodus, qua curuae satisfacientes omnes inueni-
ri queant, simplicissimae autem tam algebraicae quam
transcendentes re ipsa eruantur.

II. Dedi nuper, occasione quaestionis, quae Cel.
Bernoullio cum Anglo quodam est nomen celante, de
inueniendis trajectoriis reciprocis algebraicis simplicis-
simis, in Act. Lips. A. 1727 methodum, qua ex quo-
libet curuarum ordine, excepto secundo et tertio, (ex
quorum posteriore quidem alia via curua satisfaciens in-
ueniri potest), vna ad minimum trajectoria reciproca ex-
hiberi potest, vna cum generali modo, omnes trajecto-
rias reciprocas algebraicas ex curuis cuspidi et circa cu-
spidem ramis similibus et aequalibus praeditis et algebrai-
cas, deriuandi. Animus hic est generalem huius pro-
blematis solutionem largiri, ex eaque infinitas formulas
generales algebraicas easque maxime foecundas deducere.
Quibus adiungam problematis cuiusdam agnati, de
inueniendis trajectoriis reciprocis uno plures axes haben-
tibus, solutionem.

III. Problema ad analysin magis accommodatum Fig. I.
sic sonat: Inuenire curuam CBD circa axem AB, ta-
lem, vt ductis duabus rectis MP, NQ, ab axe utrinque ae-
quidistantibus eique parallelis, summa angulorum PME +
M 2 QND

QND, sit *vbiique constans*, *aequalis nimirum duplo anguli DBA*, quem axis cum curua constituit. Inuersa enim CBD circa axem AB, cadet applicata QN super PM, tum moueatur, donec applicatae QN punctum N incidat in punctum M, et curua sic situ inuersa sit *cbd* oportet angulum intersectionis BMd esse constantem: Sunt autem anguli PMd, et QND aequales, consequenter summa angulorum, PMB+QND, debet esse constans. Crescentibus ergo ex vna parte axis AB, angulis applicatarum cum curua, ex altera parte tantundem decrescere debent.

IV. Ducta ad axem AB, normali PQ, erit AP=AQ, ducantur duae proximae respondentes applicatae, *p_m*, *q_n*. Erit *Pp=Qq*. Ducantur ex M et N, tangentes MR, NS, vt habeantur anguli RMm, SNn, quorum ille est decrementum anguli PMB, hic incrementum anguli QND. Quocirca erit ex conditione problematis *RMm=SNn*. Vnde natura curuae inuestigari debet.

V. Sumatur *vbiique in applicata MP producta*, *PF*, proportionalis angulo RMm, assumto elemento *Pp*, abscissae AP pro constante, erit punctum F in curua quadam, cuius diameter erit axis trajectoriae BA, erit enim *vbiique PF=QG*. Quare tota difficultas eo est reducta, vt ex curua FEG data altera CBD, in qua elementa angulorum BMP sint respondentibus applicatis PF proportionales construatur; Et vt curua CBD euadat trajectoria reciproca, curua FEG debet habere diametrum, et circa eam ramos similes et aequales, cuiusmodi est FEG.

Cur-

Curua MBN ex ea constructa erit trajectoria reciproca, cuius axis est EB, diameter prioris curuae.

VII. Sit $AP=x$. $PM=y$. $PF=u$. Erit augulius RMm , $vtddy:(dx^2+dy^2)$. Ergo $u=ddy:(dx^2+dy^2)$ posito dx constante, ex qua aequatione datis u et x inueniri debet, y . Ponatur $dy=pdx$. erit $ddy=dpdx$. ergo $u=\frac{dp}{dx+ppdx}$ et $udx=\frac{dp}{1+pp}$. Ex qua aequatione, ob u et x datas, p inuenitur, indeque y ; est autem $\frac{dp}{1+pp}$ duplum elementum sectoris circularis, cuius radius est, 1. et tangens p ; erit ergo $\frac{1}{2}fudx$ = sectori isti circulari. Est vero $fudx$ = areae APEF, demta vel addita constante inuenitur ergo per quadraturas, p , indeque rursus per quadraturas y sequenti modo.

VIII. Sit data quaecunque curua IEK diametro EA praedita; super recta AO diametrum EA normaliter secante, accipiatur punctum quoduis O, quo centro et radio arbitrario OD describatur circulus DGH, et ex D ducatur tangens DQ. Ducta quacunque applicata PF, spatio PFID aequalis sumatur sector DOG, et producatur DG in Q. ex Q ducatur ipsi DA parallela QN, occurrens applicatae FP productae in N; Erit punctum N in curua DN tali, vt sit $PN=p$, si sit $AP=x$. Hic dimidium, quod superiore §. inuentum est, negligitur, cum enim $ddy:(dx^2+dy^2)$ saltem proportionetur ipsi u , etiam $fudx$, tantum proportionalis assumi potest, sectori DOG. vnde nihil interest siue dimidius sector siue totus sumatur, et dein siue $fudx$ ab applicata DI, siue ab AF computetur.

Fig. II.

VIII. Inuenta curua DN facili negotio habetur curua DM trajectoria reciproca, cum enim sit $dy = pdx$ accipiatur vbique PM proportionalis areae DPN, erit punctum M, in trajectoria reciproca, cuius axis est AB, diameter curuae IEK assumtae. Apparet hic simul, infinitas, ex vnica assumpta IEK, trajectorias reciprocas inueniri posse, prout enim transuersalis DA aliter ducitur, punctaque O et D aliter assumuntur, ita aliae resultant trajectoriae reciprocae. Dein etiam pro varia ratione, quae ponitur inter PM spatium DPN, trajectoriae variae formantur. Vnde patet data vna trajectoria reciproca, applicatas in eadem ratione augendo vel diminuendo, infinitas inueniri alias trajectorias reciprocas.

IX. Si spatium DPFI aequale accipiatur quadranti ODH, tangens DQ ipsique aequalis applicata PN euadit infinita, eritque tum PN asymptotos curuae DN; Sin spatium illud maius fuerit quadrante, applicata PN erit negatiua. Trajectoriae autem DM applicata PM euadet, vbi PN est infinita, tangens curuae. Et deinde abeunte PN in negatiuam applicata PM decrescit, quare curua DM habebit in M punctum reuersionis. Si spatium DPN, existente PN asymptoto, est infinitum, applicata PM quoque erit infinita, adeoque asymptotos etiam curuae DM. {

X. Sit exempli gr. $u = \frac{ab}{xx+aa}$ et hinc eruaturaequatio inter x et y cum sit u, vt $ddy : (dx^2 + dy^2)$ erit $b^2x^2 + bdy^2 = aadx + xxddy$ ponatur $dy = pdx$ erit $ddy = pdy$

dpx , quibus valoribus substitutis habetur $b dx + b p dx = aadp + xx dp$. Ergo $\frac{b dx}{aa+xx} = \frac{dp}{1+pp}$ cuius aequationis vtriusque membra integratio a circuli quadratura dependet. Huc autem aequatio ea reducetur

$$\frac{b}{a} \left(\frac{dx}{a+x\sqrt{-1}} + \frac{dx}{a-x\sqrt{-1}} \right) = \frac{dp}{1+p\sqrt{-1}} + \frac{1}{1-p\sqrt{-1}} dp. \text{ Quae integrata abit in hanc } bl(a+x\sqrt{-1}) - b(la-x\sqrt{-1}) = al(1+p\sqrt{-1}) - al(1-p\sqrt{-1}) + al \text{ herit ergo } \left(\frac{a+x\sqrt{-1}}{a-x\sqrt{-1}} \right) \frac{b}{a} = \frac{b+b p \sqrt{-1}}{1-p\sqrt{-1}} = \frac{b dx + b dy \sqrt{-1}}{dx - dy \sqrt{-1}}. \text{ Sit } b=a, \text{ et } b=p\sqrt{-1} \text{ erit } \frac{a+x\sqrt{-1}}{a-x\sqrt{-1}} = \frac{dx\sqrt{-1}-dy}{dx-dy\sqrt{-1}} \text{ quae reducta dat } dy = \frac{x-a}{x+a} dx. \text{ Si sit } b=2a \text{ manente } b=p\sqrt{-1} \text{ erit } dy = \frac{2ax+xx-aa}{2ax-xx+aa} dx. \text{ Et ita porro; sed huiusmodi exemplis non immoror, fusius de iis infra agetur.}$$

XI. Quum curuae genitricis IEK diameter EA sit axis trajectoriae inde genitae, manifestum est, si illa curva plures vna diametros habuerit, trajectoriam inde ortam plures axes etiam habituram, si ergo loco curuae IEK curua infinitarum diametrorum adhibetur, trajectoria infinitos etiam axes habebit. Quando autem trajectoria desideratur, quae axium datum habeat numerum, id aliter interpretandum est. Ut enim omnis curua vna plures diametros habens necessario infinitas habet, ita etiam trajectoria reciproca, quae vno plures, infinitos necessario axes habebit. Sed quia trajectoria infinitarum axium infinita habere debet puncta reversionis, datum axium numerus ad vnam tantum curuae portionem intra duo puncta flexus proxima comprehensam referendus

dus est. Desideratur enim curua omni irregularitate, cuiusmodi est flexura et reflexio, destituta.

Fig. III. XII. Sit curua IEKek infinitis praedita diametris, EA, KL, ea, kl. et abscindatur area DBTI = quadranti ODH, linea TB producta asymtotos erit curuae DNV, et tanget trajectoriam in C, vbi est punctum reflexionis. Portio ergo trajectoriae DMC, talis erit, de qua est quaestio numeri axium dati. Haec vero portio tot habebit axes, quot diametri fuerint in spatio DBTI. Quo circa in arbitrio nostro positum erit numerum axium definire hoc modo: Proposito numero axium abscindatur spatium DBTI eundem diametrorum numerum comprehendens, tum describatur circulus ODG tantus ut eius quadrans ODH adaequet abscissum spatium DBTI manifestum est, hoc modo generari curuam desideratam.

XIII. Si loco curuae IEKek adhibetur linea recta ipsi DB parallela, quaelibet applicata FP erit diameter, ergo et trajectoriae DMC quaevis applicata erit axis. Atque haec est illa curua de qua Cel. Bernoullius sub pantogoniae nomine, fusiis in Actis Erud. 1726 egit. Aequatio eius naturam exprimens, erit $1 = addy:(dx^2 + dy^2)$ seu $dx^2 + dy^2 = addy$ cuius haec est proprietas, vt, radiis secundum axium directionem incidentibus, radii reflexi omnes sint inter se aequales. Facilius autem curua haec sic construetur, vt accipiatur $x = \int \frac{aadp}{aa+pp}$ et $y = \int \frac{apdp}{aa+pp}$.

XIV. Methodum hanc inueniendi trajectorias reciprocas per duplarem quadraturam, non eo fine attuli

vt

vt inde trajectoriae reciprocae eruantur , id quod vix praestari posset, si simplices vel algebraicae desiderentur, sed vt inde adipiscar solutionem problematis de inueniendis trajectoriis reciprocis pluribus uno axibus gaudentibus, quod Anonymus Anglus Cel. Ioh. Bernoullio proposuit. At nunc ad alium pergo modum per quam foecundum in exhibendis trajectoriis simplicioribus, et praecipue algebraicis. Persequar autem hic illum tantum problematis casum , quo angulus intersectio- nis ponitur rectus ; cum facillime reliqui casus omnes ad hunc reducantur.

XV. Sit CBD trajectoria orthogonalis, cuius axis sit AB quem ad angulos rectos fecet recta PQ; Du- cantur duae applicatae PM, QN, axi AB parallelae, v- trinque aequae distantes ab eodem, illisque proximae, $pm = qn$, nec non basi PQ parallelae MR, NS. Erunt trian- gula MRM, NSN, similia, ob $SnN + RmM = \text{recto}$. Sint $AP = x$ $PM = y$, erunt $Pp = MR = dx$, $Rm = dy$ nec non $AQ = -x$, $Qq = NS = -dx$; sit $QN = z$, seu $Sn = dz$. Ex similitudine triangulorum MRM, NSN de- ducetur $MR(dx) : Rm(dy) = Sn(dz) : SN(-dx)$ vnde e- rit $dydz = -dx^2$. Ex qua aequatione inveniri debet y. Etenim z ab y dependet , quia in expressione ipsius y, posito loco x, -x, habetur z.

XVI. Ponatur $dy = pdx$, est autem p functio i- psius x. Abeat ea, posito $-x$, loco x in q, erit $dz = -qdx$ et consequenter erit $pq = 1$. Vnde patet, loco p talem sumi debere ipsius x functionem, ex qua factum in ean- dem, sed loco x posito $-x$ adaequet unitatem. Totum Tom. II.

ergo huius solutionis artificium huc redit, vt idoneae eligantur functiones ipsius, x loco p substituendae. Ad hoc autem, nisi fortunae earum inuentionem committere velimus, accurior functionum requiritur cognitio. Cuius, vt quasi prima elementa iaciam, sequenti modo eas discernere commodum visum est.

XVII. Primo loco notandae sunt functiones, quas pares appello, quarum haec est proprietas, vt immutatae maneant, et si loco x , ponatur $-x$. Huiusmodi sunt omnes potentiae ipsius x , quarum exponentes sunt numeri pares, aut fractiones, quarum numeratores sunt numeri pares, denominatores vero impares: Dein quaecunque functiones ex huiusmodi potentiarum vel additione vel subtractione, vel multiplicatione vel diuisione, vel denique ad potentiam quamcunque elevatione componuntur, sunt itidem pares ut $x^{\frac{4}{3}}(ax^2+bx^{\frac{2}{3}})^n$

XVIII. Secundo functiones impares obseruo, quae prorsus sui negatiuas producunt, si x , abit in $-x$. Cuiusmodi sunt x ipsum, x^3 , x^4 etc. omnes potentiae, quarum exponentes sunt numeri impares, vel fractiones, quarum numeratores et denominatores sunt numeri impares, nec non functiones, quae harum potentiarum additione vel subtractione, etiam elevatione ad exponentis imparis dignitatem componuntur, vt, $x^{\frac{3}{5}}(ax^3+bx^{\frac{5}{7}})^3$

XIX. Si functio impar per imparem multiplicatur, factum semper erit functio par, ut x^3 in $x^{\frac{1}{3}}$, dat $x^{\frac{10}{3}}$
At functio par in imparem ducta semper quidem imparem

rem producit, interdum tamen ea simul pro pari haberi potest, vt $x\sqrt{(aa+xx)}$ est functio simul par et impar, quippe eadem cum $\sqrt{(aaxx+x^4)}$, quae est par. Quod autem de elevatione functionis paris ad dignitatem quamvis supra dictum est, quod potentia sit quoque par, si exponentis sit fractio, cuius denominator numerus par, v.g. $\frac{1}{2}$, restrictio adhibenda est, nisi radix re ipsa extrahi queat, vt $(\frac{aa}{xx}+2a+xx)^{\frac{1}{2}}$ non est functio par, convenit enim cum $\frac{a}{x}+x$. De huiusmodi autem functionibus iudicium facile patet.

XX. Praeterea obseruatu dignae sunt functiones reciprocae, quae mihi sunt functiones posito in iis— x , loco x , abeentes in tales, quae in illas ductae producunt unitatem, vt $(\frac{a+x}{a-x})^n$, quae, posito x negatiuo, abit in hanc $(\frac{a-x}{a+x})^n$, cuius in illam factum est $= 1$. Huc referendae quoque sunt exponentiales a^x , $(aa+xx)^x$ etc. omnes nempe functiones pares eleuatae ad functiones impares.

XXI. Hisce de functionibus praemissis manifestum est, p esse functionem ipsius x reciprocam, cum sit $pq=1$. Quemadmodum autem huiusmodi functiones reciprocae inueniendae sint, breui ostendere conabor; Sed primo de functionibus exponentialibus nihil intermissione constitui, cum ante omnia traectorias reciprocas algebraicas eruere animus sit. Postmodum autem de exponentialibus quaedam subiungam.

XXII. Vt autem rem generalius absoluam, assu-
N 2 mo

mo tertiam variabilem t , et inuestigabo, quomodo x et y in t , determinari debeant, vt trajectoria reciproca resultet, pono itaque $dx = rdt$, et $dy = pdt$. Efficiendum ergo est, vt posito t negatiuo, et dx in negatiuum abeat. Quare loco r ponatur oportet functio ipsius t par, quae sit N ; erit $dx = Ndt$, et abeunte t in negatiuum, erit $dx = -Ndt$. Consequenter ob d $dz = -dx^2$, posito in casu $-t$, loco p , q , vt ante, habebitur $pq = NN$.

XXIII. Ponatur $p = (P+Q)^n$ denotante P functione pare et Q impare ipsius t , erit $q = (P-Q)^n$ adeoque $(PP - QQ)^n = N^2$; ergo $PP = N^{\frac{2}{n}} + QQ$, et $P = \sqrt{N^{\frac{2}{n}} + QQ}$ erit ergo $p = (Q + \sqrt{N^{\frac{2}{n}} + QQ})^n$. Nihil contradictorii hic latet in aequatione $P = \sqrt{N^{\frac{2}{n}} + QQ}$ etenim P , quae functio par esse debet, talis etiam in aequatione exhibetur. At si Q erueretur, inueniretui $Q = \sqrt{N^{\frac{2}{n}} - PP}$ id quod contradictionem inuoluit; nam Q , quae functionem imparem denotat, aequatur hic functioni pari. Vt fractio-nes in exponentibus euitem, scribo loco N , N^n et erit $dx = N^n dt$, et $dy = dt (Q + \sqrt{N^2 + Q^2})^n$ potest hic loco Q , scribi NQ , (§. 19) et dein loco N^n , vt ante, N ; habebitur $dx = Ndt$, et $dy = Ndt(Q + \sqrt{1 + QQ})^n$.

XXIV. Vt nouae formulae resultant, tollo irratio-nalitatem, ponendo $\sqrt{N^2 + Q^2} = N + RQ$, erit $Q = \frac{2NR}{1 - RR}$ vnde R functio impar sit ipsius t necesse est, ob Q im-parem, erit ergo $Q + \sqrt{N^2 + Q^2} = \frac{N(1+R)}{1-R} =$ (scripto lo-co R ,

$\text{coR}, \frac{Q}{P})^{\frac{N \cdot (P+Q)}{P-Q}}$. Denotabunt semper P pares et Q impares functiones ipsius t. Erit ergo $dx = N^n dt$, et $dy = dt$ $(\frac{NP+NZ}{P-Q})^n$; altera formula eodem modo tractata dat, $dx = Ndt$, et $dy = Ndt (\frac{P+Q}{P-Q})^n$. Huiusmodi formulae generales infinitae possunt inueniri, alias aequationes loco $p = (P+Q)^n$ assumendo: cuiusmodi est haec formula $dx = Ndt$, et $dy = Ndt (P+Q)^{mn}$.

$(S + \sqrt{SS + (PP - QQ)})^{\frac{1}{k}}$ denotante S functione impari, sed duabus formulis inuentis tanquam simplicissimis et foecundissimis in productione trajectoriarum algebraicarum contentus ero, quarum altera irrationalitate est affecta, altera vero rationalis.

XXV. Accipio formulam priorem, casus quibus dy integrabile redditur, euoluturus. Sit primo $N = 1$ erit $dx = dt$ unde $dy = dx (Q + \sqrt{1 + QQ})^n$. Pono porro $Q = x$ erit $dy = dx (x + \sqrt{1 + xx})^n$ cuius integrale obseruo generaliter haberi posse; ponatur $x + \sqrt{1 + xx} = u$, erit $x = \frac{u^2 - 1}{2u}$, consequenter $dy = \frac{u^n du}{2} + \frac{u^{n-2} du}{2}$ et hinc $2y = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ $+ \frac{u^{n-1}}{n-1} = \frac{(x + \sqrt{1 + xx})^{n+1}}{n+1} + \frac{(x + \sqrt{1 + xx})^{n-1}}{n-1}$ habetur ergo hic aequatio algebraica generalis infinitas curuas suppeditans, numeros rationales loco n substituendo.

XXVI. Antequam autem ad derivationem aequationum determinatarum ex generali pergam; quaedam ex aequatione differentiali deducenda sunt, quae ex in-

grata difficultas eruerentur. Primo palam est , si sit $n=0$ trajectoriam tum esse lineam rectam , cum axe angulum semirectum constituentem , propter $dy=dx$. Dein , si fuerit $n=1$ erit $dy=xdx+dx\sqrt{1+xx}$; unde patet , hanc aequationem esse ad trajectoriam reciprocam , quae methodo Bernoulliana ope rectificationis parabolae construitur , quo vni'co casu non absolute est integrabilis.

XXVII. Tertio , et si loco n ponatur $-n$, aequationem nihilominus ad eandem fore curuam , abscissis saltem ex axis altera parte sumtis , seu existentibus negatiuis. Conueniunt enim duae hac expressiones $(-x+\sqrt{1+xx})^n$ et $(x+\sqrt{1+xx})^{-n}$, vt cuivis examinanti facile patebit. Nihil ergo in posterum lucraturus essem , loco n valores negatiuos substituendo. Quare substitutione numerorum affirmatiuorum tantum vtar , cum ii soli sufficient ad vniuersalem aequationem exhauriendam.

XXVIII. Excussi iam sunt casus , vbi $n=0$, et $n=1$ progredior ulterius , sed integralem aequationem in vsum vocando , et pono $n=2$. Erit $3y=2x^3+3x^2+2xx\sqrt{1+xx}$, quae ad rationalitatem reducta luc reddit $12yx^3+18xy-9yy+3xx+4=0$. Et haec aequatio quatuor dimensionum , sine dubio simplicissima est , post illam paraboloidem tertii ordinis : satisfacit adeo quaestioni , quam Cel. Bernoullius Anonymo Anglo proposuit , et ego repetii in Act. Erud. 1726. de inuenienda trajectoria algebraica , eam tertii ordinis , in simplicitatis ordine proxime excipiente.

XXIX. Si ponatur $n=3$ prodibit aequatio pro linea

linea 5 ordinis haec $128yx^4 + 192yx^2 + 48y - 64yy - 8xx - 9 = 0$. Sit $n=4$ resultabit aequatio 6 ordinis, et hinc legitima inductione inferri potest, aequationem generalem ad rationalitatem reductam esse semper ordinis $n+2$. Id quod etiam in valoribus fractis loco n subrogatis obtinet. Si sit $n=\frac{1}{2}$ aequatio erit ordinis $\frac{5}{2}$. Quae autem, cum adhuc sit irrationalis, reducta erit ordinis quinti, et generaliter si fuerit $n=\frac{p}{q}$ aequatio reducta ascendet ad $p+2q$ ordinem.

XXX. Patet ergo aequationem generalem loco n alios atque alios valores substituendo, ex quolibet curuarum ordine, si excipias secundum et tertium, vnam ad minimum trajectoriam reciprocam exhibere. Et dato ordine curuarum, quot ex eo ope huius aequationis inueniri possint trajectoriae, facile determinare erit, nempe dispiciendum est, quoties $p+2q$ numerum dati ordinis producere queat, sed loco p et q numeri saltem affirmatiui et integri substitui possunt, et eiusmodi insuper ut $p:q$ ad minores terminos reducine queat. Sed de hac formula generali fusius in Act. Lips. 1727. actum est a me, ideoque hic ad alia me conuerto.

XXXI. Adhaereo adhuc aequationi §. XXV. ad hanc reductae $dy=dx(Q+\sqrt{QQ+1})^n$. Circa quam obseruavi, nullis eam substitutionibus potentiarum rationalium, quales sunt x^3, x^5 etc. nec non x^{-1}, x^{-3} etc. loco Q factis, generaliter integrabilem reddi, quanquam vtique passim reperiantur casus particulares integrabiles, quos autem persequi institutum minime permittit. At substituendo loco Q potentias ipsius x irrationales, sed le-

git.

gittimas nempe functiones impares, quales sunt $x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{5}}, x^{\frac{1}{7}}$
et vbi numerator exponentis est vnitas, semper formulam integrabilem reddi obseruauit.

X X X I I. Sit itaque $Q=x^{\frac{1}{3}}$, erit $dy=dx$
 $(x^{\frac{1}{3}}+\sqrt[x^{\frac{2}{3}}+1]{})^n$. Quae vt integretur, pono
 $x^{\frac{1}{3}}+\sqrt[x^{\frac{2}{3}}+1]{t}=t$, erit $x^{\frac{1}{3}}=\frac{t^{\frac{1}{3}}-1}{t}$ unde $x=\frac{t^{\frac{3}{8}}-\frac{3}{8}t^{\frac{1}{8}}+\frac{3}{8}t^{\frac{3}{8}}}{8t^{\frac{1}{8}}}$
 $\frac{1}{8+it}$ adeoque $dx=\frac{3\pi dt}{8}-\frac{3dt}{8}-\frac{3dt}{8it}+\frac{3dt}{8t^{\frac{1}{8}}} : \text{ergo } dy=$
 $\frac{3t^{\frac{n+2}{8}}dt}{8}-\frac{3t^{\frac{n}{8}}dt}{8}-\frac{3t^{\frac{n-2}{8}}}{8}+\frac{3t^{\frac{n-4}{8}}dt}{8} \text{ Consequenter } \frac{8y}{3}=\frac{t^{\frac{n+3}{8}}}{n+3}$
 $=\frac{\frac{n+1}{n+1}\cdot t^{\frac{n-1}{8}}+\frac{t^{\frac{n-3}{8}}}{n-3}}{(x^{\frac{1}{3}}+\sqrt[x^{\frac{2}{3}}+1]{})^{\frac{n+3}{8}}}-\frac{(x^{\frac{1}{3}}+\sqrt[x^{\frac{2}{3}}+1]{})^{\frac{n+1}{8}}}{n+1}$
 $=\frac{(x^{\frac{1}{3}}+\sqrt[x^{\frac{2}{3}}+1]{})^{\frac{n-1}{8}}}{n-1}+\frac{(x^{\frac{1}{3}}+\sqrt[x^{\frac{2}{3}}+1]{})^{\frac{n-3}{8}}}{n-3}.$

XXXIII. Sunt autem quidam casus, quibus integratio a logarithmis dependet, nempe si fuerit $n=1$ vel 3 . Ceterae substitutiones omnes loco n factae suppeditant curuas algebraicas, idque vt superior secundum certam legem. Quod de superiori formula enunciatum est, valores ipsius n , negatiuos superfluos esse; idem etiam de hac, nec non de generalissima tenendum est. Quemadmodum et semper obtinet, si fiat, $n=0$, tum trajectoriā degenerare in lineam rectam.

XXXIV. Casus huius aequationis simplicissimus sine dubio erit, quo $n=2$. In eoque posito breuitatis ergo

ergo loco $x^{\frac{1}{3}}t$, reperietur $5y = 6t^5 + 5t^3 + (6t^4 + 2tt - 4) \sqrt[3]{(1+tt)}$. Consequenter ad rationalitatem reducendo peruenietur ad hanc aequationem, $60t^5y + 50t^3y - 25y^2 - 60t^4 - 45t^6 + 16 = 0$.

Atque haec tandem, substituto $x^{\frac{1}{3}}$ loco t , abibit in aequationem 8. ordinis. Si ponatur $n=4$ aequationem ad 10 dimensiones assurcturam, facile praeuidere potui. Et aequationem generalem ad ordinem linearum $n+6$ esse referendam. Ut adeo et haec formula, ex quolibet curuarum ordine ad minimum vnam, si excipientur 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 9, trajectoriam exhibeat.

XXXV. Haec eadem formula, vt et reliquae, quae ex substitutionibus §. XXXI determinatis deducuntur, alia via ex altera aequationis generalis forma deriuntur. Et qnam ideo paucis hic complectar, quod insuper ex ea plures formulae algebraicae generales, aliunde altioris indaginis, fluant. Aequatio generalis haec est, $dx = Ndt$, $dy = Ndt(Q + \sqrt{QQ+1})^n$. In qua si fiat $Q=x$, et successiue $N=$ vel 1 vel xx , vel x^4 etc. nec non vel $a+bx$, $axx+bx^4$ et eiusmodi compositae functiones pares ipsius x subrogentur, aequatio generalis semper erit integrabilis et algebraicarum aequationum summopere foecunda.

XXXVI. Exposito modo, quo ad aequationes algebraicas generales perueniuntur, examinandi sunt alii casus, quibus quidem aequatio generalis non integrabilis
Tom. II. O reddi-

redditur, nihilo tamen minus infinitis modis facilibus determinatu, algebraicas exhibere potest acquationes. Assumo hanc formulam $dx = N^n dt$ et $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} dt = (Q + V(QQ + NN))^n$, fiat $N = tt$ et $Q = t$ erit $dx = t^{2n} dt$ et $x = \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ et $dy = dt(t + tV(1+tt))^n$. Vnde patet hanc aequationem semper esse integrabilem si fuerit n numerus integer impar; id quod facile videre est, si reipsa ad dignitatem eleuetur.

XXXVII. Sunt autem insuper alii casus, quibus formula nostra integrabilis redditur, quos sic inuenio ponatur $t + tV(tt + 1) = ut$, erit $t = \frac{2u}{uu-1}$, ideoque, $dt = -\frac{2uudu - 2du}{(uu-1)^2}$; consequenter $dy = -\frac{2^{n+1} u^{3n} du(uu+1)}{(uu-1)^{2n+2}}$ vnde patet si fuerit n numerus negatius par, fore aequationem integrabilem, id quod patebit, si $(uu-1)^{-2n-2}$ ipso facto eleuetur. Plures casus elicentur, si fiat $t + V(tt + 1) = ut$; et obtinebitur $dy = du(u^{\frac{3n+1}{2}} - u^{\frac{3n-1}{2}})$ $(u-2)^{\frac{n-1}{2}}$; quae erit integrabilis, primo si sit n quilibet numerus impar: dein si $\frac{3m+1}{2}$ fuerit numerus integer. Fiat ergo $\frac{3n+1}{2} = m$; erit $n = \frac{2m-1}{3}$ adeoque loco n poni potest fractio cuius denominator = 3 et numerator numerus impar.

XXXVIII. Vnicum exemplum attulisse sufficiat, sit $n = 1$. erit $dx = tt dt$, et $t = \sqrt[3]{3x}$; deinde $dy = t dt + t dt V(1+tt)$: ergo $y = \frac{tt}{2} + \frac{(1+tt)V(1+tt)}{3}$ vnde elicitur
haec

haec aequatio ordinis sexti $(12yy - 12xx)^3 = 3456y^6 + 12528x^2y^3 - 432yx^4 - 2304y^4 - 288x^2y^2 + 81x^4 + 512y^3$. Possunt itaque infinitae aequationes algebraicae etiam ex hac aequatione $dy = dt(t + \sqrt[2n]{1+tt})^n$ erui, et simili modo ex aliis formis, loco N vel Q; alios valores substituendo, casus quibus hoc contingit, non superiori absimili modo detegentur.

XXXIX. Quae de priori duarum generalium formularum, irrationali hucusque tradita sunt, usum eius et foecunditatem satis superque commonstrant. Progedior nunc ad alteram formulam rationalem quae est, $dx = N^n dt$ et $dy = dt \left(\frac{N \cdot (P+Q)}{P-Q} \right)^n$ seu quod eodem reddit, $dy = dt \left(\frac{N \cdot (1+Q)}{1-Q} \right)^n$. Non immoror hic deriuandis hinc curuis transcendentalibus nempe logarithmiae semirectangulae, si $Q=t, N=1$. et $n=1$. aut cycloidi; si $n=\frac{1}{2}$. quippe quae ab aliis iam fusi pertractatae sunt, propositum mihi est, ut in priori, quas ea sub se comprehendit curvas algebraicas, persequi, et regulas, quibus algebraicæ inueniri queant, eruere.

XL. Ne autem fractio in causa sit, cur difficilius casus algebraici dignoscantur, eam tollo loco N. ponendo $N(1-QQ)$. Debet enim N esse functio par, ipsius t habebitur $dx = dt(N-NQQ)^n$ et $dy = dt(N(1+Q)^2)^n$ seu $dx = N^n dt(1-QQ)^n$ et $dy = N^n dt(1+Q)^{2n}$. Ut hinc aequatio algebraica deriuari queat, oportet ut et dx et dy integrabile fiat. Ponatur $N=1$; erit $dx = dt(1-QQ)^n$ et $dy = dt(1+Q)^{2n}$; sit $Q=t$ erit $dx = dt(1-tt)^n$ et $dy = dt(1+t)^{2n}$ unde $y = \frac{(1+t)^{2n+1}}{2n+1}$; ergo $\sqrt[2n+1]{(2n+1)y}$

$-1=t$. Ut igitur dx integrari queat, patet loco n substitui debere numerum integrum affirmatum.

XLI. Cum n sit numerus integer affirmatus, constituet $(1-tt)^n$, si in seriem conuertatur, progressionem numeri terminorum finiti, hanc $1 - \frac{n}{1}tt + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}t^4 - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}t^6$ etc. Vnde obtinebitur $x = t - \frac{n \cdot t^3}{1 \cdot 3} + \frac{n \cdot n-1 \cdot t^5}{1 \cdot 2 \cdot 5} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot t^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}$ etc. in qua si loco t substituatur valor inuentus $\sqrt[n+1]{(2n+1)y-1}$ habebitur aequatio inter y et x adeoque pro curua quae sita.

XLII. Sit $n=1$ erit $x = t - \frac{1}{3}t^3 = \sqrt[3]{3y-1} - \frac{1}{3}(\sqrt[3]{y-1})^3 = \sqrt[3]{9yy-y-\frac{2}{3}}$; ergo $(x+y+\frac{2}{3})^3 = 9yy$. Quae aequatio euadit tertii ordinis, et exprimit parabolam cubicalem semirectangulam, quae pro simplicissima omnium trajectoriarum reciprocarum algebraicarum habetur. De qua Cel. Ioh Bernoullius in Act. Erud. 1725. peculiari schediasmate egit. Sunt autem reliquae substitutiones loco n factae minus felices in exhibendis curuis simplicibus, posito enim $n=2$, aequatio iam ultra trigeminum gradum assurgit.

XLIII. Possunt loco Q aliae functiones ipsius t substitui, ut t^3, t^5 aut $t^{\frac{1}{3}}$ etc. quae omnes formulam infinitis modis integrabilem reddent, semper nimirum quando n fuerit numerus affirmatus integer. Simili modo res se habet si alii loco N valores subrogentur. Sit nimurum $N=tt$ erit $dx=t^{2n}dt(1-QQ)^n$ et $dy=t^{2n}dt(1+Q)^n$. Ponatur $Q=t$, erit $t^{2n}dt(1-tt)^n$ et $dy=t^{2n}dt(1+t)^n$

$(1+t)^{2n}$. Vnde patet et x et y haberi posse modo sit $2n$ numerus integer. Si enim fuerit numerus par, facile patet omnia esse in simplices terminos resolubilia, si $2n$ fuerit numerus impar erit $(1-tt)^n$ irrationale, sed licet $2n$ sit numerus impar, nihilominus $t^{2n}dt$ $(1-tt)^n$ erit integrabile.

XLIV. Sit $2n=1$ erit $dx=t dt \sqrt{1-tt}$ et $dy=t dt + tt dt$. Quare $x=-\frac{1}{3}(1-tt)^{\frac{3}{2}}$ et $y=\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3$. Erit igitur $t=\sqrt[3]{1-\sqrt{9xx}}$ ponatur $y+\frac{1}{8}=x$ habebitur reductione per acta, haec aequatio sexti gradus $(12uu+24xx)^3=6912u^6-7344u^3xx-11232ux^4-9216u^4+7488uuxx+10125x^4+4096u^3$. Alii loco n , numeri substituti alias exhibebunt curuas algebraicas, deinde innumerabiles aliae loco Q et loco N substitutiones fieri possunt, quae semper, si n est numerus affirmatiuus integer, algebraicas efficient aequationes. Et haec praecipua sunt, quae de Algebraicis curuis afferti possunt.

XLV. Hisce coronidis loco subiungo alias formulas generales, quae resultant, si loco (vid. §. XXII.) p et q functiones exponentialies subrogantur. Habentur autem in exponentialibus et functiones pares et reciprocae, vt P^R est functio par, si sint et P et R functiones pares, at si fuerit R functio impar; erit ea functio reciproca, priori in casu abeunte x in $-x$ manet P^R , in posteriori mutatur in P^{-R} .

XLVI. Quibus ergo in locis, antea functiones pares substituere opus fuerat, poterunt huiusmodi ex-

ponentiales adhiberi , et loco functionum imparium similes exponentiales ductae in functionem imparem quan-dam vt P^RQ , existentibus P et R paribus functionibus et Q. impari.

XLVII. Cum functiones reciprocae ita sint comparatae, vt factum earum in se ipsas , sed loco x positō $-x$, aequetur vnitati, patet, quicquid sit p , semper ei insuper eiusmodi functionem reciprocā multiplicatione adiungi posse , nempe vbi fuerat $dy=pdt$ potest etiam sumi $dy=T'pdt$. denotante T functione pari et V impari. Nihilominus enim factum ex dy in se, sed abeunte t in $-t$, idem erit ac ante.

XLVIII. Formulis ergo generalibus §§. XXIII. XXIV. inuentis adiungi poterit functio reciproca , immutato earum vsu. Et habebitur $dx=Ndt$ et $dy=T'Ndt(Q+V(1+QQ))^n$ deinde loco formulae rationalis habebitur $dx=Ndt$ et $dy=T'Ndt(\frac{P+Q}{P+Q})^n$. Atque his formulis in amplissimos curuarum exponentialium, quae problemati traectoriarum reciprocarum satisfa-ciunt, campos deducimur.

XLIX. Exemplum nobis sit , hypothesis , qua, $n=2, N=1, T=a$, et $V=t=x$; erit $dy=a^t dt=a^x dx$ quae est aequatio ad logarithmicam ordinariam , quae satisfa-ciet applicatam subtangenti aequalē pro axe conuersio-nis assumendo. Pluribus exemplis, quippe curuas igno-tas exhibentibus, haec persequi minime consultum duco.

L. Hisce tandem, quae hactenus attuli, quaestio-ni exasse me satisfecisse non dubito , quaecunque enim ad

ad enodationem huiusmodi quaestionum iure requiri possunt, abunde hic exhibuisse mihi videor. Dedi enim primo generalissimas aequationes applicatu facile: secundo methodum dedi infinitas aequationes vniuersales algebraicas inueniendi, ex quibus simplicissimas re ipsa deduxi.

Tandem, quae ex transcendentalibus curuis cognitae sunt, etiam ex aequationibus generalibus facile deriuantur. Hisce omnibus praemisi solutionem duorum problematum agnitorum, de Pantogonia infinitorum axium traectoria et de traectoriis datum axium numerum habentibus, quippe quae ex consideratione naturae traectoriarum reciprocarum sponte fluunt.

*Theoria Nova
DE MOTV AQVARVM
PER CANALES QVOSCVNQVE
FLVENTIVM*

Auctore

Daniele Bernoulli, Ioh. Fil.

Motum aquarum per tubos determinare agressi sunt multi Geometrae iisque celeberrimi; sed pauci aliquid dederunt, quod experientiae esset conforme, nemo autem integrum theoriam stabiliuit. Aquam in tubo stagnantem per

*M. Ian.
1727.*

per foramen valde paruum ea exilire velocitate, qua possit ascendere ad altitudinem superficie aqueae supra foramen, a Mathematicis quibusdam recte fuit definitum; qui vterius progredi voluerunt, nihil praeter coniecturas omni experientiae repugnantes protulerunt. Ego vero postquam saepius intellectissimum ex Patre summum vsum, quem habeat principium conseruationis virium vivarum pro infinitis problematis Physico-Mathematicis soluendis, quicq; alias pro valde difficultibus, ne dicam desperatis, habenda essent, mentem subiit, num non idem principium pro cruenda theoria aquarum fluentium per tubos tantopere desiderata infernare possit, neque evenitus spem meam fecellit. Verum vt iam paulo propius ad rem ipsum accedam, dicam ante omnia, quid per vires viuas earumque perpetuam conseruationem intelligendum sit; Dicitur itaque vis viva, quae inest corpori moto atque mensuratur ex producto velocitatis quadrati in corporis massum: si plura corpora moueantur, vis totalis seu quantitas virium erit aestimanda ex aggregato omnium productorum modo definitorum. Demonstrauit autem Hugenius post eumque multi alii esse hoc aggregatum constans quomodo cunque se inuicem percussiant ipsa corpora, modo sint perfecte elasticia atque in vacuo mota concipientur. Conseruantur ergo etiam vires viuae in corporibus elasticis. Pono autem corporis minima fluidum aliquod componentia esse perfecte elasticia; nisi enim essent durissima summaque elasticitate proinde praedita, possent vterius subdiuidi. Hisce praemonitis manifestum factum est, quid fieri debeat,

quan-

quando aqua fluit horizontaliter per tubum non cylindricum, sed v. gr. conicum; nempe cum omnis aqua motum suum in linea recta continuare nequeat, particulae ipsius impingunt in latera tubi, et inde reflectunt, rursusque alias fluidi partes percutiunt; interim durante hac agitatione eadem quantitas virium perpetuo conseruabitur hacque lege motum suum in tubo continuabit aqua. Notandum tamen probe est, praedictos motus omnes esse minimos, ita ut nulla particula locum suum mutet, nisi quatenus cum tota fluidi massa motum habet progressum; haud secus, ac videmus multis globis elasticis in linea recta iuxta se dispositis et aequalibus, quorum extremus si percutiatur, non totam globorum seriem, sed solum extreum oppositum moueri. Et hac ratione haud difficulter quisque videt, posse quoque in motu fluidorum eandem quantitatem virium perpetuo conseruari, omnino sicut in motu corporum elasticorum se inuicem percutientium; imo necessario id fieri ob summam elasticitatem fluidorum corpusculis minimis insitam. Iam vero rem ipsam aggrederer, nisi quibusdam vel solum conseruationis virium viuarum nomen stomachum mouere perspectum haberem. Horum in gratiam monendum duco principium hoc conseruationis virium viuarum minime differre a principio quod primum ab Hugenio usurpatum dein ab omnibus Geometris sineulla controversia receptum fuit; nimirum corpora vi gravitatis ad descensum vtcunque sollicitatae am acquirere velocitatem ut si singula rursus velocitate sua finali directe ascendant, vsque ad statum quietis commune centrum gravitatis ad Tom. II. P pri-

pristinam altitudinem redeat ; cui hoc Hugenii principium magis arridet, is eadem facilitate rem expediet, addendum autem est hoc alterum , velocitates fluidorum per vas inaequaliter amplum fluentium ubique esse amplitudinibus reciproce proportionales : Hisce itaque duobus principiis totum argumentum absoluemus.

Prop. I. Problema. Data celeritate, qua superficies aquae in tubo quocunque mouetur , inuenire vim viuam totius massae aqueae.

Solutio. Sit (Fig.I.) vas ABGH , per quod fluat liquor CDFE , cuius situs proximus fit *cdfe*; habeat superficies CD velocitatem , quam acquireret graue cadendo ex altitudine NO. Patet autem, fore velocitatem in LM ad velocitatem superficiei CD in ratione reciproca amplitudinum CD et LM vnde si totum fluidum concipiatur diuisum in strata infinita eiusdem altitudinis, quale est LM_{ml}, erit vis viva cuiuslibet strati, sicuti ipsius massa ducta in quadratum velocitatis, id est , sicuti $\frac{LM}{CD} \times \frac{CD^2}{LM^2}$, seu vt $\frac{CD}{LM}$. Sunt ergo ubique vires viuae in reciproca ratione amplitudinum: Hinc intelligitur , quod facta super eodem axe AH alia curua QST tali, vt sit MS ubique aequalis tertiae continue proportionali ad LM et CD fore vim viuam totius massae aqueae CDFE =spatio DQTF \times NO. Si symbolis vti velimus, habebimus vim viuam quaesitam = $aavf\frac{dt}{s}$, vbi a denotat superficiem CD, v altitudinem , qua graue cadendo acquirit

rit velocitatem istius superficie; dt significat elementum Mm , et s amplitudinem vasis in ML. Q. E. I.

Prop. 2. Theor. Si tubus (fig. 1.) ABGH verticaliter positus sit, atque massa aqua suo pondere descendat in situm CDFE, quem mox commutet cum situ $cdfe$; erit differentiale vis viuae seu incrementum vis viuae illo tempore acquisitum aequale ei, quam acquirit lapsu per Dd cylindrus aqueus cuius basis est CD et altitudo DF.

Dem. Vis viua acquisita aestimanda est ex massa et altitudine descensus: dum vero CDFE peruenit in situm $cdfe$, idem est ac si aqua cdFE in suo loco permanisset et aqua CDdc in situm EFfe peruenisset; est itaque vis viua de nouo acquisita $= CD \times dD \times DF$ seu, quod perinde est, $CD \times DF \times Dd$. Q. E. D.

Prop. 3. Probl. Determinare velocitatem aquae qua fluidum singulis momentis effluit per tubum vtcunque formatum et quoconque foramine perforatum.

Solutio. Sit curva quaecunqua BDFG (fig. 2.) cuius applicatae horizontales DC representent respectivae amplitudines tubi; Descenderit aqua ex A in C sitque $AC = t$, $CD = s$ amplitudo foramins designata per LM sit $= b$, altitudo tota $AM = c$; vis viua totalis insita fluido dum est in situ DCMG = M: velocitas, quam habet superficies DC, aequalis illi quam corpus acquirit cadendo ex alt. v ; concipiatur nunc aquam ex situ DCMLGD peruenisse in situm FEONLGF; Erit ergo per Prop. Sec. differentiale vis viuae $= DC \times CM \times CE = s \times (c-t) \times dt$ sed potest idem incrementum aliter sic definiri. Dum

aquae superficies esset in DC, erat velocitas in FE = $\frac{s}{s+ds} Vu$ (sunt enim velocitates in reciproca ratione amplitudinum) et vis viua aquae FEMLGF erat = $M - svdt$; Iam postquam superficies aquae ex DC peruenit in FE, habet velocitatem $Vu + \frac{du}{2Vu}$; vnde cum vires viuae sint in duplicata ratione velocitatum, erit aquae FEMLGF vis insita = $(Ms - vdt) \times (Vu + \frac{dv}{2v}) : (\frac{sv}{s+ds})^2$ = (neglectis negligendis) $\frac{Msv - ssvvvdt + Msdv + 2Mvds}{sv}$, cui quantitati si addatur vis guttulae LMON modo e tubo egressae, habebitur vis, quam habet aqua post situs mutationem; est autem particula aquae LMON = DCEF = sdt et habet velocitatem quacum ascendere posset ad altitudinem $\frac{ss}{bb}v$; vnde ipsius vis = $\frac{s^3}{bb}vdt$; ergo vis viua totalis aquae FEONLGF = $\frac{Msv - ssvvvdt + Msdv + 2Mvds}{sv} + \frac{s^3}{bb}vdt$, aqua proin si auferatur M, habebitur differentiale vis viuae quod adeoque erit $\frac{Msdv + 2Muds - ssuudt}{su} + \frac{s^3 udt}{bb}$. Hinc habetur talis aequatio $s(c-t) dt = \frac{Msdv + 2Muds - ssuudt}{su} + \frac{s^3 udt}{bb}$. Potest autem per prop. 2. haberi M et datur s per t; habetur itaque aequatio inter t et u, qua mediante potest determinari velocitas aquae in quocunque situ. Q. E. I.

Prop. 4. Problema. Determinare velocitates, quibus aqua singulis momentis effluit e tubo cylindrico verticalli,

li , siue ipsius foramen sit finitum siue infinite paruum.

Sol. Sit amplitudo seu sectio cylindri ad axem perpendicularis $=n$, amplitudo foraminis $=1$, altitudo totius cylindri aquei ante effluxum $=c$, altitudo per quam suprema superficies iam descendit $=t$: Erit ergo vis viua aquae in tubo residuae (quam supra vocauimus M) $=n(c-t)v$ et quod antea vocauimus generaliter s iam constanter est n ; substitutis adeoque hisce valoribus in aequatione canonica prodibit

$$n(c-t)dt = n(c-t)du - nudt + n^3udt; \text{ ponatur } (c-t) = z$$

et $m-1=m$ et orientur $-zdz = zdu - mudz$, quae formula ad differentialia logarithmica iuxta methodum paternam reducta atque rite pertractata dat $v = \frac{c}{(n-2)^c} \frac{z-z}{(n-2)}$

Q. E. I.

Coroll. 1. Si $n=1$, id est, si nullus sit fundus in tubo erit $v=c-z$, ita vt velocitas aquae eadem sit, ac si graue motu naturaliter accelerato descendisset per altitudinem $c-z$; id quod quilibet sine instituto calculo assequi potuisset; fuerunt tamen, qui et in hoc casu crediderunt, aquam effluere eadem velocitate statim ab initio , quam corpus acquirit cadendo ex tota altitudine aquae.

Coroll. 2. Datur semper locus in tubo , vbi si peruenierit superficies aqua , sit velocitas aquae effluentis maxima; is locus obtinetur, cum sumitur $\frac{z=c}{1:(n-2)}$: fitque tunc $v = c:\frac{n-2 \times n-1}{(n-1)}$

$-c : \overline{nn-1} \times \overline{nn-2}^{(nn-1);(nn-2)}$ siue $= c : \overline{nn-1}^{(nn-1);(nn-2)}$ et haec quantitas dat maximam velocitatem, qua superficies aquae in tubo descendere potest; si vero eandem quantitatem multiplicemus per nn , habebitur altitudo pro generanda maxima velocitate aquae effluentis quae semper minor est quam c ; quod si vero n sit infinitum, degenerabit eadem in c ; vnde per nostram methodum etiam manifestum fit, in casu foraminis infinite parvi aquam ea exiliare velocitate, qua corpus ascendere possit ad altitudinem aquae. Hicque solus est casus, quem scriptores hydraulicae recte asssecuti sunt. Quod si n sit numerus non infinitus, sed tamen sat magnus, erit maxima velocitas aquae effluentis haud multum minor, quam si foramen esset infinite paruum; nam si n fiat $= 10$ poterit aqua, maxima sua velocitate effluens, ascendere ad $\frac{9}{10}$ ipsius c , hancque velocitatem maximam statim ferre a fluxus principio acquireret, nimirum postquam aqua descendit in tubo per spatium $\frac{4}{10} \frac{7}{7} c$. Haec omnia conueniunt egregie cum experimentis.

Coroll. 3. Si n sit numerus magnus, et aqua in tubo iam aliquousque descendere coepit, erunt velocitates quam proxime vti radices altitudinum aquae; quam regulam illi assumserunt, qui de diuisione clepsydrarum egerunt, veluti Cel. Varignon, Mariotte; mihi quoque de clepsydra Sphaerica mari adhibenda aliquando agentes ita considerata fuit; sed falleret tamen paulisper regulam a principio effluxus, nisi n esset numerus admodum magnus. Pro vera diuisione requiritur, vt integretur

$$\frac{dz}{\sqrt{u}}$$

$\frac{dz}{\sqrt{u}}$ id quod semper fieri nequit ; series tamen pro hoc negotio dari possunt quibus mediantibus tempus quoque ab solutum evacuationis habetur quam proxime in singulis casibus. Idque mihi occasionem dedit, experimenta quam plurima instituendi cum variis tubis, diuersisque foraminibus; et semper tempus depletionis experientia atque calculo idem fuit deprehensum, ita, ut nunc extra dubium posita sit nostra theoria ; habeo autem alia experimenta in promptu, quibus res non minus secure ad examen reuocari potest.

Coroll. 4. Dederunt allegati Authores curuam pro clepsydra aequabilis descensus, id est, in qua superficies fluidi aequalibus temporibus aequaliter descendit ; sed fallit illa et in fine et in principio; atque circa medium satisfacit tantum cum foramen est valde paruum. Vera curua deducitur ex nostra aequatione canonica prop. 3. assumendo pro v constantem et delendo terminum vbi ingreditur dv ; sed tantum abest quin sit algebraica, ut perueniatur ad differentialia secundi ordinis, si quantitatem M . eliminare velimus, eique substituere aequivalentem. Notabile interim est problema circa aequabilem effluxum, quod fit algebraicum : Si nimirum (Fig. 3.) *A N D.* curua quaeratur cuius rotatione circa axem *BF* generetur solidum tale, ut si fluidum in illo descendat, tanquam in clepsydra, aequalibus temporibus aequales quantitates effluant, seu, quod idem est, ut velocitate constante aqua effluat. Sit igitur $FM=t$, $MN=y$, $e=l$ altitudini FB , l altitudini qua graue cenden-
do acquirit velocitatem aquae effluentis, et erit curua aequabilis effluxus expressa tali aequatione $y^4t - y^4l + c^4l$

==

$\equiv o.$ habet haec curua multas proprietates , quarum enumeratione , ne nimis sum longus , supersedeo ; sed quod minime tacendum puto , est quod figura haec pro vase aequabilis effluxus eadem est , quae Anglorum cataracta , qua phaenomena aquarum effluentium explicare contenderunt . Caeterum pro maiori confirmatione theoriae nostrae , dicam etiam breuibus de vasis cylindricis , quibus tubi alii cylindrici angustiores annexi sunt , sive verticaliter positi (quorum phaenomena nuper publice exposuit Cel. Bulffingerus) sive horizontaliter : sive abrupti , sive indefinite longi , quorum posteriorum considerationem in rem physiologicam haud parum facere , alia occasione ostendam .

Prop. 4. Probl. Aqua currente per cylindrum ACDB (fig. 4.) cui tubus cylindricus EF infixus , determinare ubique velocitatem , qua superficies aquae GH descendit .

Sol. Potest hic casus tanquam corollarium considerari propositionis tertiae , atque ita determinari ubique velocitas superficie aqueae , donec tota effluxerit aqua ex vase ACDB ; motus autem reliquus per tubum EF per se facile determinatur , quia fit iuxta leges motuum corporum uniformiter acceleratorum . Quod si itaque vas ab initio repletum fuerit usque in AB dicatur que $AG=t$, $AC=e$, $EF=c$ superficies $GH=n$, amplitudo tubi $EF=1$, altitudo pro generanda velocitate superficie $GH=v$, mutabitur aequatio canonica factis ubique rite substitutionibus in talem ad casum propositum fa-

facientem $(c + e - t) \times dt = (e - t + nc) \times du + (nnv - u) \times dt$. Exinde aequationem modo particulari ita erui. Vis viua totius aquae fluentis GCEFEDH est $= n \times (e - t) \times v + nnv$, cuius differentiale est $(ne - nt + nc)du - nvdv$, cui si additur vis viua particulae FP effluxae, quae est $n^3 u dt$ habetur totum incrementum vis viuae illo momento generatum, quod per Prop. 2. aequale est $(e - t + c)ndt$, et diuiso v-trobie per n , oritur iterum $(c + e - t) \times dt = (e - t + nc) \times du + (nnv - v) \times dt$. Inter has methodos ea differentia est, quod priori res multo generalius expediri potuisset, quam posteriori, ponendo neque vas neque tubum cylindricum sed alia figura praeditum. Pro reducenda posteriori hac aequatione ad quantitates finitas ponatur $t = q + e + nc$ et $v = r - \frac{c}{n+1}$, atque sic illa mutabitur in hanc $-qdq = -qdr + (nn-1)rdq$, quae iterum obseruata debitae constantis additione abit in hanc $q^{1-nn} \times (2r - nnr - q) = (-e - nc)^{1-nn} \times (\frac{ne + e + nc + 2c}{n+1})$ vel $\frac{nnr - 2r + q}{q} = (nc + 2c + ne + e) : (-n-1) \times (-e - nc)^{nn-1}$. Et

$$\begin{aligned} & \text{reassumtis quantitatibus } t \text{ et } v \text{ oritur } (t - e - nc)^{1-nn} \\ & \times (-nnv + 2v + c - t + e + \frac{c}{n+1}) = (-e - nc)^{1-nn} \\ & \times (\frac{ne + e + nc + 2c}{n+1}) \text{ seu } v = (e + c + \frac{c}{n+1} - t) : (nn-2) \\ & - (e + c + \frac{c}{n+1}) \times (t - e - nc)^{nn-1} : (nn-2) \times (-e - nc)^{nn-1}. \end{aligned}$$

Coroll. I. Si ponatur $c = 0$, oritur theorema prop. 4.

Tom. II.

Q

Cor.

Coroll. II. Si comparetur velocitas maxima cum velocitate maxima aquae effluentis in casu $c=0$, inuenietur illa multo maior hac ; et quidem differentia eo maior est, quo longior est tubus EF. Vnde non mirum, si tempora exinanitionum eo sint minora, quo tubi annexi sunt longiores. Possunt autem haec omnia calculo exactius subiici tum ratione velocitatum , tum ratione temporum.

Coroll. III. Si tubus EF sit indefinite longus, inuenietur alio ratiocinio sed non multum absimili talis aequatio $edu - tdu + mudt + nntdu - udt = edt - tdt + nt dt$.

Coroll. IV. Si tubus EF in F paulo amplior sit, quam in E tempus depletionis adhuc minus erit ; potest vero amplitudo in F eo vsque augeri , donec aqua inter effluendum lateribus tubi adhaerescere desinat.

Coroll. V. Si tubi EF sint inclinati paucis mutatis idem est calculus ; quapropter hosce casus non attingam excepto illo, quo tubus est indefinite longus et horizontalis, quia is in aliis occasionibus vsui venire potest. Quod si itaque cylindrus ACDB (fig. 5.) aqua plenus vsque in AB tubum habeat annexum horizontalem DE, indefinite longum , atque aqua in cylindro descenderit vsque ad MN , in tubo autem progressa fuerit vsque in R , dicitur $AC=a$, amplitudo $AB=n$, foramen $=1$, $cm=z$ et celeritas aquae MN talis quae acquireretur lapsu ex altitudine v , dico aequationem inter z et v fore talem

$$\frac{zv-nnzv}{aa-zz} + nnav - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{2}aa = 0 \quad \text{vel } v = \frac{2}{2(z-nnz+nn)}.$$

Scholium. Experimenta quoque institui cum vasis, cui tubi strictiores annexi sunt, sed contigit, quod praeuidi, tempora exinanitionum semper maiora esse, quam pro calculo esse deberent; id autem frictionibus tribendum est, ubi enim aqua per foramen exilit nulla fere est frictio; sed cum per canales strictiores fluit, obstacula sunt latera tuborum. Est mihi methodus etiam ad calculum reuocandi huiusmodi resistentias facto uno experimento; sed omni accuratione instituendo; neque enim difficulter apparet esse resistentias in reciproca ratione diametrorum; et directa velocitatum atque tuborum longitudinum hasque resistentias subtrahi debere a pressione aquam ad motum sollicitante, atque ut specimen methodi exhibeam ponam vas aqua repletum *amplissimum*, cui tubus strictus cylindricus horizontaliter infixus, esseque altitudinem aquae supra tubum = a , diametrum tubi = b , longitudinemque = c , velocitatem aquae exilientis talem quae debeatur altitudini x et erit resistentia tubi = $\frac{ncvx}{b}$ (per n intelligitur numerus experimento erutus), qua subtracta a pressione aquae (quae in hypothesi foraminis respectu vasim minimi proportionalis est altitudini aquae supra tubum) oritur $\frac{ncvx}{b} - a$, quae quantitas simul exprimit altitudinem ad quam aqua velocitate sua ascendere posset; unde $\frac{ncvx}{b} - a = x$; et $x = \frac{nncc - 2abb + nc\sqrt{(nncc - 4abb)}}{2bb}$.

Prop. 5. Potest alio modo concinnius problema generale propositionis tertiae solui. Sit nimirum (fig. 6.) BDG curua, cuius axis verticalis est AM; abscissae MC denotent altitudines aquae residuae et applicatae CD exprimant amplitudines vasis in eodem loco seu superficiem aquae: GM representet fundum vasis et LM foramen: fiat nunc alia curua SRP super eodem axe talis, ut ubique sit $CR =$ tertiae continue proportionali ad DC et LM: sitque $MC = t$; $CD = s$, $GM = c$, $LM = b$, velocitas aquae effluentis LNOM talis, quae generatur lapsu libero corporis ex altitudine v , et erit $CR = \frac{bb}{s}$, et (per prop. I.) vis viua insita fluido $DCMG =$ spatio $CRPM \times v$; ponamus autem spat. $CRPM = N$, consideremusque de crescente MC decrescere N, t et v : ita habetur incrementum vis viuae aquae in vase residuae $= -Ndv - vdN$ seu (ponendolo loco $-dN$ valorem $\frac{bbdt}{s}$) $= -Ndv - \frac{bbvdt}{s}$, cui si ad datur vis viua particulae LNOM, quae est $= -svdt$, ostinetur incrementum totale vis viuae aequandum cum $-stdt$; ergo $-Ndv - \frac{bbvdt}{s} - svdt = -stdt$, vel $dv + \frac{bb+ss}{N} vdt = \frac{stdt}{N}$; ponatur $\frac{bb+ss}{N} dt = dP$ et $\frac{stdt}{N} = dQ$, ergo $dv + vdP = dQ$, fiat $v = b^{-P} R$ (intelligendo per b numerum cuius logarithmus est vniuersitas) et erit $b^{-P} dR = dQ$ et $R = \int b^P dQ$, et denique $v = b^{-P} \int b^P dQ$. Q.E.I.

Supressent plura alia dicenda; veluti de fluidis elasticis, de fluidis ex vase per duo foramina vtcunq; posita effluentibus (quod ultimum problema difficultissimum est) aliisque; haec autem nunc sufficient. Caeterum sequitur quoque

ex

ex theoria praesente, ut corollarium, doctrina fluidorum in tubis oscillantium, quod argumentum Newtonus attigit in theor. 35. lib. 2. princ. Math. Phil. nat. p. 363. edit. 3. vbi motus iste oscillatorius recte definitur, atque conformiter cum nostris, quae ita egregie confirmantur: neque certe quicquam minimam patitur exceptionem, modo duo principia *conservationis virium viuarum et velocitatum reciprocce amplitudinibus proportionalium* concedantur; prius in dubium vocari nequit, si ad frictiones alias resistentias extrinsecas non attendatur; qui aliter sentit, totam mechanicam reiicit, quippe conservatio virium aliis verbis ab omnibus fuit accepta; quod ad alterum principium, quamuis id non ad rigorem verum sit, potest tamen in plerisque vasibus sine ullo scrupulo accipi, nempe omnibus illis, in quibus nullus fit transitus subitaneus: at si v. g. vas acciperetur (Fig. 7.) ABCD perforatum in E, cui quasi saccus quidam adhaereret in O, nemo non videt motum aquae facio O inclusae longe alium fore quam principium istud postularet; neque adeo theoria extendi potest ad huiusmodi vasa valde irregularia; puto autem in hisce casibus nihil certi statui posse.

Disseratio

de nouo quodam

CVRVARVM TAVTOCHRO-
NARVM GENERE

Auctore

Leonh. Eulero.

I.

M. Iul.
1727.

EDidit ante annum et quod excurrit D. Sully Parisiis descriptionem noui cuiusdam horologii; quod peculiari modo fabricatum ad dimerienda mari tempora, et inde determinandam locorum longitudinem, perquam idoneum iudicat. Praecipuum eius inuentum, consistit in nouo quodam oscillationum genere a vacillatione trochleae circa axem petito. Idque efficit ope ponderis, trochleam semper versus certum situm sollicitantis. At quomodo istae oscillationes isochronae efficiendae sint, de eo nondum plane certus est, cum id pendeat ab accurata descriptione curuae cuiusdam lineae ad id requisitae; quam autem aliter non nisi crebra tentatione cognovit, eiusque figuram crassa Minerua determinauit. De hac curua ad tautochronismum desiderata in praesenti dissertatione agere animus est, aliosque exhibere modos, quibus aequalitas oscillationum conseruari poterit.

II.

II. Huc fere autem reducitur modus, quo Sully in trochlea oscillationes obtinere conatur. In centro trochleae C applicat duas laminas incuruatas CE, CF inter quas dependet filum CP, pondere P oneratum, et hic situs, quo filum neutrā laminam tangit, est naturalis. Ex quo si pellatur, vt filum in M alterutram laminam tangent, ex natura vectis pondus P vim habebit trochleam in situm naturalem sollicitandi. Et ea propter oscillationes orientur, dum trochlea nunc cis nunc ultra situm hunc naturalem extrauagabitur.

Fig. I.

Fig. II.

III. Hae oscillationes, siue minus siue magis sunt ampliae, vt isochronae reddantur, id pendet a curvatura laminarum affixarum, vt haec rite determinetur: et id ipsum est, quod D. Sully desiderat. Est autem hoc problema valde intricatum, plurimaque diuersa complectens, quae diligenter sunt euoluenda et distinguenda: Quod rotam attinet, ea cum laminis ita debet esse comparata, vt indifferens sit ad quemvis situm recipiendum, vnde centrum commune gravitatis in axe trochleae positum sit oportet. Atque id in posterum assumam, vt nimiam calculi prolixitatem euitem.

IV. Circa filum consideranda sunt, an sit semper verticale? an semper versus eandem plagam dirigatur? an vero secus? Circa potentiam autem filo applicatam sequentia. 1. An ipsa habeat vim inertiae? vt si pondus appendatur; an vero non, vt elastrā fere. Haec probe sunt distinguenda, potentia enim vi inertiae praedita non omnem vim ad trochleam mouendam impendit, sed quidquam ad sui ipsius motum requiritur. Cum econtra

po-

potentia inertia destituta omnem vim ad motum trochlea impendere queat.

Fig. III. V. 2. An uniformiter, i.e. semper aequali vi trahat, ut pondus, vel elastrum maxime tensum, cuius vis in remissionibus non nimis magnis quasi eadem persistit; an autem modo magis modo minus agat, ut elater, chorda tensa, aer condensatus, vel rarefactus. Quae considerationes omnes diligenter in computum duci debent, ut laminarum curvatura intentiatur. Machina Sulliana maxime ex hisce est composita. Filum CD vecti AD circa A mobili, in B est alligatum, et vecti in D pondus P incubit, unde fit, ut nec filum semper verticale maneat, neque pondus uniformiter trahat, et insuper vis inertiae non exigua adsit.

VI. Casum autem simplicissimum hic primo examini subiicere animus est, et pro eo curuam quaesitam determinare, nec non modum monstrare, quo in praxi commode applicari possit: dein quantitatem cuiusvis partis definitam, ut oscillationes absoluuntur dato tempore. Et tandem alium euoluam casum, qui non contemnendum in re nautica usum mihi praestare videtur. Simplicissimus vero mihi est casus, quo filum perpetuo verticale persistit, potentia uniformiter agens et omni inertia destituta applicatur.

Fig. IV. VII. Problema hoc sensu acceptum sic soluo. Designet linea CM laminam alterutram in quois situ non naturali, sitque CB linea verticalis, cui parallela erit filii directio MR curuam in M tangens; ex puncto contactus M ducatur in CB perpendicularis MT; erit haec etiam normalis in curuam. Ducatur recta CO, designans angulum

gulum BCO, quo machina ex situ naturali est deturbata. Centro C radio arbitrario CB describatur circulus BO, cuius arcus BO metietur angulum BCO, quibus factis hoc modo curuam detego; patet potentiam secundum MR trahentem trochleam in situm naturalem perducere conari. Sit ea potentia P, erit illa vis ut P. TM. Est PM perpendiculum ex M in verticalem CB.

VIII. Cum autem haec vis continuo aliter respectu hypomochlii C applicetur, ei quaero aequipollentem radio CO in O normaliter applicandam. Producatur RM in N usque, ubi occurrat horizontali ex C ductae, potentia P eundem edit effectum ac si radio CN in N applicata versus NR traheret. At ex natura vectis est potentia in O applicanda et secundum normalem ad CO agens, aequipollensque potentiae P, ad potentiam P ut CN siue TM ad CO. Erit ergo ea $\frac{P \cdot TM}{CO}$ seu proportionalis, ob P et CO constantes, ipsis TM.

IX. Nunc ad curuam determinandam isochronismum considerare oportet, qui obtinetur, si acceleratio spatio percurrendo semper proportionatur, possunt autem oscillationes trochleae tanquam oscillationes penduli CO spectari, quae si sint isochronae, et trochleae oscillationes tales erunt. Percurrendus vero est puncto O arcus BO, et huius puncti O acceleratio est ut vis applicata $\frac{P \cdot TM}{CO}$ i. e. ut TM; ad obtainendum ergo isochronismum oportet, ut arcus BO vel angulus BCO proportionetur ipsis TM.

Tom. II.

R

X.

X. Quum linea TM sit in curuam normalis, in eamque CT , ex punto fixo C , perpendicularis, atque linea CO ad curuam habeat ubique eundem situm; Problema huc reductum est, vt, data recta CO positione, in eaque punto C , inueniatur curua CM huius proprietatis, vt, ducta normali MT , in eamque ex centro C perpendiculari CT , sit linea TM proportionalis angulo TCO , seu differentiale ipsius TM elemento anguli TCO .

*Fig. IV.
et V.*

XI. Vt obtineam haec elementa, punto M accipio proximum m , et ex eo duco normalem mt , priori occurrens in R centro circuli osculatoris; in eamque demitto perpendiculari Ct priorem normalem in p tecans; erit pt elementum lineae TM ; at elementum anguli TCO est angulus TCp ; vt ergo pt elemento ang. TCp proportionale sit, oportet, vt sit CT constans, quae est proprietas specifica curuae inueniendae. Patet hinc puncta T et t in R cadere debere, vt pt elementum ipsius CT sit $=0$.

XII. Vt ad huius curuae cognitionem proprius accedam, centro C interuallo $CB=1$ describo circumflexum BS , qui secatur a radiis CM Cm in S et s . Vocetur BS, x et CM, y ; erit $Ss=dx$ et $mr=dy$, ducto arcu Mr centro C ; vnde ob triangula CSs , CMr similia, obtinetur $Mr=ydx$. Cum CT constans esse debeat, ponatur $CT=1$. Erit $TM=\sqrt{yy-1}$. Dein ob similia $\triangle Mrm$, MTC habetur $CT(1):TM[\sqrt{yy-1}]=mr(dy):Mr(ydx)$; vnde elicitur haec aequatio $dy\sqrt{yy-1}=ydx$; seu $dx=\frac{dy}{y}\sqrt{yy-1}$)

XIII. Ad construendam succinctius hanc aequationem, pono $\sqrt{(yy-1)}=z$; erit $y=\sqrt{(zz+1)}$ et $dy = \frac{dz}{\sqrt{(zz+1)}}$. His valoribus substitutis obtineo hanc aequationem $dx = \frac{zzdz}{zz+1} - dz - \frac{dz}{zz+1}$, quae aequatio ergo operrectificationis circuli construi potest. Centro C radio $CB=1$ describatur circulus NBST, quem in B tangat recta BP; in qua accipiatur utcunque $BP=z$, ducaturque CP secans circulum in N; erit arcus BN/ $\frac{dz}{zz+1}$, et $CP=\sqrt{(zz+1)}=y$. Est autem $x=z-\int \frac{dz}{zz+1}$: sumatur ergo a puncto B arcus BS=BP-BN; erit $BS=x$. Radius CS in M producatur, vt sit $CM=CP=y$ erit punctum M in curua quaesita.

Fig. VI.

XIV. Curuam hoc modo constructam ex ipsius circuli NBST euolutione generari obseruo. Ducatur enim ad curuam in M normalis MT, tanget ea circulum in T, cum ex §. 11. perpendiculum CT ex C in eam normalem demissum sit=1. Et insuper ex eodem §. normalis TM est ipse curuae in M radius osculi, qui cum circulum continuo tangat, liqueat, circulum esse euolutam huius curuae inuentae: adeoque ea facilius et commodius euolutione fili circulo circumducti describetur.

XV. Quod iam attinet ad tempus absolutum, id quoque supputandum est, vt liqueat, quo modo trochlea et potentiae sint instituendae, vt oscillationes dato tempore absoluantur. Quare ad tempus totius oscillationis inueniendum considerabo accelerationem quamuis momentaneam. Sit trochlea CBS homogenea et aequa-

R 2

bilis

Fig. VII.

bilis vbiuis : sit eius pondus $= Q$; et radius eius $CB = 1$. Praestet potentia eundem vbiique effectum ac pondus P hoc modo innotescet tempus vnius oscillationis.

XVI. Ducta verticali CB consistat curuae initium in loco quovis S ; sitque curua SM , in cuius puncto M tangens MQ sit verticalis : adeoque radius osculi BM erit horizontalis in B terminatus. Erit itaque MQ directio potentiae. Descendat curua in situm proximum, nempe punctum S in s , abibit M in m et MQ in mq ; erit denuo Bm radius osculi horizontalis. Ducantur radii CS, Cs , et rectae Cm, CM ; centro C , interuallo Cm , describatur arcus $m\mu$ curuae in altero priori situ in μ occurrentis, erunt puncta m, μ duo puncta homologa et respondentia; ergo ang. $mC\mu = SCs$.

XVII. Peruenit porro potentia ex Q in q descripta ad eo spatiolum $Qq = m\mu$, quare ducta qn parallela BM ; erit $Qn = M\mu$ propter eandem fili longitudinem et ob $CSM - Csm = M\mu$. Descendit igitur potentia hoc momento per Qn ; unde generari debet vis viua $P.Qn$, quae tota in trochleam transferetur : quia potentia inertiae expers supponitur. Vis ergo viua in trochlea, dum motu angulari SCs gyratur, augeri debet vi $P.Qn$.

XVIII. Sit velocitas puncti S , aequalis acquisitae ex altitudine v . Erit vis viua totius trochleae $= \frac{Qv}{2}$; unde eius differentiale $\frac{Qdv}{2} = P.Qn$; ergo $dv = \frac{2P.Qn}{Q} = \frac{2P.M\mu}{Q}$. Est autem ob $\Delta\Delta$ similia $M\mu m$, et $BmC, M\mu : Mm = Bm : BC$

BC ; ergo $M\mu = \frac{Bm, Mm}{BC}$: at $Mm = Ss$; vnde $M\mu = \frac{Bm, Ss}{BC}$.
 Ergo $dv = \frac{2P, Bm, Ss}{Q, BC}$, consequenter momentum $\frac{dv}{Ss} = \frac{2P, Bm}{Q, BC} = \frac{2P, BS}{Q, BC}$, ob BS euolutam curuae SM , adeoque aequalem radio osculi BM seu Bm .

XIX. Inuenito momento $\frac{dv}{Ss}$ facili negotio reperietur longitudo penduli isochroni hoc modo: sit pendulum isochronum OA oscillans in cycloide NA . Sitque arcus $AN =$ arcui BS et contemporaneus. Sumatur $Nn = Ss$, ducaturque verticalis nt , erit momentum per $Nn = \frac{nt}{Nn}$: id quod aequari debet momento $\frac{2P, BS}{Q, BC}$: Sed ex natura cycloidis est $\frac{nt}{Nn} = \frac{AN}{AO} = \frac{BS}{AO}$; ergo $AO = \frac{Q, BC}{2P}$. Fiat ergo vt pondus potentiae aequiualens, ad pondus trochleae, ita dimidius radius BC ad quartam, quae erit longitudo penduli isochroni.

XX. Potentiam ideo adhibui inertia destitutam, ne ad velocitatem in ea generandam vis requiratur. Hinc igitur facile patet, si potentia ita sit exigua, vt pondus ei sufficiunt nullam ad trochleae pondus habeat rationem sensibilem, vim in eo generandam reiici posse; adeoque loco P poterit, vt Sully vult, pondus substitui, modo valde exiguum respectu Q . Ut autem nihilominus oscillationes trochleae dato tempore absoluantur BC , inde determinari debet, fiat enim, vt Q ad $2P$ ita AO ad BC : sit Q centies maius quam P , sitque AO longitudo penduli oscillantis singulis minutis secundis, nempe = 3166 scrup. ped. Rhen. erit $BC = 63$. scrup. quae est quantitas satis magna pro radio BC . Atque hoc sensu

pondus satisfaciet appensum , vt Sully desiderat. Id vt ad sensum verticale perseveret, neque oscilletur , cautelac ab Autore exhibita locum obtinebunt; praecipue vero filum satis longum esse debet, vnde ob radium BC exiguum , directio fili semper fere verticalis obtinebitur.

Fig. VIII. XXI. Quin et hoc modo commode isti difficultati medebimur. Construatur trochlea ED multo maior, quam circulus generator BF curuae laminis tributae, hoc modo trochleae ingens erit imprimendus motus, cum tamen pondus appensum ob circuli BF paruitatem vix moueat, vt motus in eo generandus merito respectu motus trochleae reiici queat , praecipue si insuper pondus P ad trochleae pondus exiguum habuerit rationem. Illo autem casu dicto radio trochleae CD=a erit longitudo penduli isochroni = $\frac{Q \cdot a^4 \cdot BC}{2P}$. Hac ergo ratione horologium Sully emendatum , multo maiorem praestare poterit utilitatem.

XXII. Ex dictis patet praecipuam difficultatem circa directionem fili, quod non semper verticale persistat, versari. Hoc vero incommodum sequentis curuae constructione tolletur. Ducatur filum ante, quam ipsi potentia applicetur, per foramen quoddam fixum, hoc modo fiet, vt filum perpetuo versus datum punctum directum sit. Quae si igitur pro hoc casu curuam tautochronismum producentem , et incidi in sequentem proprietatem. Sit C centrum trochleae, BM curua quaesita A punctum illud fixum seu foramen, per quod filum semper transit

transit. Dictis uncn $AC = \alpha$, et quoquis radio $CM = y$. Sit porro PM normalis in curuam, et CP normalis in MP positis $CP = p$ et $PM = t$, designanteque b constantem pro lubitu accipiendam; hanc obtinui aequationem naturam curuae experimentem $bV(aa-tt) - bp = pV(aa-tt)$. Ex hac aequatione, cum sit algebraica, per notas regulas curua desiderata ope circuli rectificatione construetur, simili modo, quo in §. 13. curua ibi inuenta erat constructa.

XXIII. Obtinetur autem data aequatio $bV(aa-tt)$ Fig. X.
 $-bp = pV(aa-tt)$ hoc modo : Sit C centrum trochleae, O punctum fixum ad quod filum semper tendit, seu in O sit foramen per quod filum est ductum, cui infra foramen potentia inertia carens sit applicata, vt filum perpetuo per hoc foramen O transeat : Sit CM situs quiuis curuae inuenienda, quam tangat recta OM, directio fili, in hoc curuae situ ex centro trochleae C demittatur in OM productam, perpendicularum ; CN exprimet haec CN quantitatem vis, quam potentia filo infra foramen applicata, ad trochleam mouendam impedit, cum potentia ea ponatur constans.

XXIV. Ex isochronismi principio autem vis ad trochleam mouendam applicata debet esse, vt via describenda, donec in situm naturalem reuertatur, haec via describenda mensuranda est ex angulo, quo situs hic CM a naturali distat, ducatur linea CB quae ex naturali situ peruenit in CO; erit angulus BCO ille, qui exprimit viam describendam, oportet ergo vt sit linea CN, quae exprimit vim ad mouendam trochleam in situ CM, pro-

portionalis angulo BCO , seu ex punto M ducatur MP normalis in curuam in punto M , et ex C in eam demittatur perpendicularis CP , erit $MP=CN$ adeoque debet esse MP , vt angulus BCO .

Fig. XI.

XXV. Sit iam CB in situ naturali, fiatque ea aequalis distantiae foraminis a centro trochleae C , sitque CM curua inuenienda, accipiatur punctum quodvis M in curua, in eoque tangatur curua a linea MO , centro C , radio CB describatur arcus circuli secans tangentem in M in O , erit hoc punctum O foraminis situs respondens puncto curuae M . Ducatur linea CO ; erit angulus BCO idem cum angulo BCO in fig. X. ex M erigatur perpendicularis in curuam MP , cui in P occurrat perpendicularum CP ex C in eam demissum, oportet hanc MP proportionalem esse angulo BCO , seu elementum ipsius MP proportionale elemento anguli BCO .

XXVI. Vt obtineam haec elementa assumo puncto M proximum m , et ducantur lineae respondentes mo , mp , illa tangens in m , et haec mp perpendicularis in m , quae in p secetur a perpendiculari Cp in ipsam; seccabit haec Cp priorem perpendicularem in t , eritque Pt incrementum normalis PM . Iungantur puncta C et o , recta Co , erit angulus OCo , incrementum anguli BCO : ad determinationem curuae CM quaesitae igitur requiriatur, vt sit Pt proportionale elemento angulari OCo . Est autem Pt vt angulus PCt ductus in radium PC , erit ergo ang. OCo ad PCt . CP in data ratione, quae sit i ad b vt per consequens sit $OCo : PCt = CPt : b$.

XXVII. Concurrant perpendiculares MP , mp
in R ,

in R, centro circuli osculatoris in M erit ang. PCt = MRm ob $\Delta\Delta$ PCt et pRt similia, sed angulus MRm = ang. OM_o, qui formatur a tangentibus proximis OM, om; ergo PCt = OM_o, oportet ergo sit OC_o:OM_o = CP:b: producatur tangens OM in S, donec occurrat perpendiculari CS in se demisso, erunt demisso ex O in mo perpendiculari On, triangula OnO, OSC similia; ergo O_o : On = CO : OS. Sunt autem anguli OC_o : OM_o = $\frac{O_o}{OC} : \frac{On}{OM} = \frac{CO}{OC} : \frac{OS}{OM}$ (substitutis loco O_o et On proportionalibus OC et OS) = OM : OS. Est ergo OC_o : OM_o = OM : OS.

XXVIII. Cum autem requiratur, vt sit OC_o : OM_o = CP : b, obtinebitur haec analogia CP:b = OM : OS, quae tota ab angulis libera est, et inde habetur haec aequatio CP.OS = b.OM. Est autem ob Δ COS ad S rectang. OS = $\sqrt{(CO^2 - CS^2)}$ = (ob OC = CB et CS = PM) = $\sqrt{(CB^2 - PM^2)}$. Dein est OM = OS - SM = OS - CP = $\sqrt{(CB^2 - PM^2)} - CP$; vnde haec aequatio obtinetur CP $\sqrt{(CB^2 - PM^2)} = b\sqrt{(CB^2 - PM^2)} - b.CP$. Vnde curua desiderata determinari debet.

XXIX. Applicentur symbola, et vocetur CB distantia centri trochleae a foramine a, CP, p, et MP, t; habebitur pro curua quaesita haec aequatio $p\sqrt{(aa - tt)} = b\sqrt{(aa - tt)} - bp$, quae eadem est cum ea quam §. XXII. exhibui. Erit ergo $p = \frac{b\sqrt{(aa - tt)}}{b + \sqrt{(aa - tt)}}$. Ex qua aequatione curua construi poterit atque ad usum applicari. Si foramen ponatur infinite distans a centro trochleae, erit Tom. II. S fli

fili directio sibi semper parallela, adeoque habetur casus prior, quo inuenta erat CP semper constans. Posito enim a infinito, abibit $V (aa - tt)$ in a et obtinebitur $p = \frac{ab}{a+b}$ ob b respectu ipsius a in denominatore euaneſcens.

XXX. Si etiam in hac machina loco elateris pondus applicare commodius viſum fuerit, id vt in priori casu quoque praefesti poterit, iisdem obſeruandis monitis, vt pondus ſatis exiguum appendatur, radius trochlea diminuatur, aucto eius pondere, idque tantum, quoad error a vi inertia ponderis oriundus insenſibilis euadat, machinaeque irregularitatem, quae animaduerit nequeat, inducat. Cum autem curuae ad istam machinam requifitae constructio valde ſit operosa, contra vero curua priori casui, quo directio fili ad eandem perpetuo plagam tendit, constructu ſit facillima, priorem modum huic posteriori fere praferendum existimo.

THEO-

THEORIA GENERALIS MOTIVVM

Qui nascuntur a Potentiis quibusuis in Corpora indesinenter agentibus , siue haec Corpora in vacuo ferantur siue in medio resistenti.

Auctore

Iac. Hermanno.

ET si multa eorum quae in hoc schediasmate *M. Iun.*
traduntur , a celeerrimis quippe Geome-^{1727.}
tris iamdudum praeoccupata , nunc peruulgata , vsu trita et vix digna iudicabuntur,
quae denuo hoc loco exhibeantur , non tamen abs re fo-
re arbitratus sum , si principiorum instar praesternerem
solutionibus meis Problematum quorundam nouorum ,
quae in hoc argumento de motibus variatis proponi pos-
sunt et in hac Dissertatione expedientur , Geometrarum
curiositate forte non minus digna , quam ea quae iam pas-
sim cognita habentur.

Lemma Generale

1. *Potentia indefinenter agens (P) ducta in elemen-*
tum temporis (dt) aequipollefacto ex massa corporis (M)

S 2

cui

cui potentia applicata est, et elemento celeritatis (de) quod tempusculo illo producitur.

Dem. Potentia quaecunque matrix eatenus tantum potentia est quatenus corpori applicata motum aliquem producit, et per potentiam indesinenter agentem intelligitur illa quae ad producendum suum motum tempore opus habet. Factum ex hac potentia et tempore actionis, denotat quantitatem actionis, et factum ex massa corporis et celeritate, seu quantitas motus producti, significat id, quod actione illa effectum est, et quantitati actionis aequipollent; necessarius enim est nexus et individuus inter quantitatem actionis et quantitatem effectus, et hunc nexus per aequipollentiam unius cum altero interpretor; hancque aequipollentiam per notum signum aequalitatis deinceps indicabo, quod semel monuisse sufficiat.

Hoc posito si tempusculo ddt , potentia P producit motus quantitatem $MddC$, ubi ddt , et ddC , sint elementa temporis et celeritatis secundi gradus, possent eorum loco adhiberi elementa vteriorum graduum; habebimus vi eorum quae iam probata sunt, formulam $Pddt=MddC$. Eadem haec potentia P producet secundo tempusculo ddt aequali primo, eandem ac prius, motus quantitatem $MddC$, quia inter aequales quantitates actionis unius eiusdemque potentiae idem individuus est nexus, qui inter earum effectus, adeoque fiet iterum $Pddt=MddC$, et addendo hanc formulam ad priorcm, resultabit $2Pddt=2MddC$, pro tertio tempusculo ddt , reliquis aequali, reperitur pariter $Pddt=MddC$, quae prior-

ri formulae addita praebet, $3Pddt = 3MddC$; pari argumen-
to eliciuntur $4Pddt = 4MddC$, $5Pddt = 5MddC$, etc.,
imo $nPddt = nMddC$, vbi n designet numerum quemcun-
que; si n est infinitus, fient $nddt = dt$, et $nddC = dC$, a-
deo vt ultima formula $nPddt = nMddC$, iam abeat in
 $Pdt = MdC$. Quod erat etc.

Haec conclusio ex praemissis aequo necessario fluit,
ac necessaria veritas est, quod aequalitas sit inter totum
et omnes eius partes simul sumtas. Sed obicietur for-
te, quid, si Deus talia corpora creasset in quibus non
potentia ipsa, sed eius quadratum, cubus vel alia quae-
cunque functio in temporis elementum ducta celeritatis
elemento proportionalis esset, vt sane talia creare po-
tuit, nonne propositio ista, potentia mobili applicata
in tempusculum ducta, proportionatur elemento celeri-
tatis; est tantum contingenter vera? ego iudico quod
non, et huius rei ratio est, quod non id, quod potentia
vel si maiis pressio dicitur, reapse sit potentia agens;
sed (vi suppositionis) eius functio sit vera potentia acce-
lerans.

2. *Coroll. I.* Si singulae moleculae corporis cu-
jusque urgentur potentia aequali, quam nominabimus p ,
in direct onibus parallelis versus eandem plagam, po-
tentia P vniuersum corpus urgentes fiet $= pM$, designante
littera M , vt supra, corporis massam; hoc per se li-
quet, potentia enim totalis P aequat omnes potentias
partiales p in corpus agentes, sed hae omnes aequantur
facto ex potentia p in massam totius corporis M . Quod si

est, formula $P.t = M/C$, quam elicimus, iam mutabitur in $pMdt = MdC$ vel dividendo per M , in $pdt = dC$.

Ex hac formula vero cognoscitur, quod omnibus corporibus, siue magna sint, siue parua, ab aequalibus potentiis p tempore aequali, aequales acquirantur celeritates; seposita resistentia aeris etc.

3. *Coroll. 2.* Iisdem positis, sequitur vim viuam et absolutam (V) corporis cuiusque cuius massa est M , et celeritas C , esse $= \frac{1}{2} MCC$. Nam 1. nemo non fatetur, corpus istud nullis externis rebus impeditum, nullaque alia vi; quam quae ipsi propter celeritatem C insita est, citum motum suum cum celeritate C , aequaliter continuare, in quaunque demum linea recta moveatur, vimque eius durante hoc motu neque intendi neque remitti, sed eandem manere. Adeoque 2. si vis eius vel minimum incrementum dV capere debeat, id a potentia aliqua nouiter in corpus agente tantum prouenire posse. Itaque 3. si potentia singulas minimas corporis moleculas incessanter vrgens dicatur p , et duratio actionis dt , erit iam $dV =$ quantitati motus iam corpori insiti MC in pdt , id est $= MCpdt$, atqui per *Coroll. praec.* est $pdt = dC$ quod in aequalitate suffectum praebet $dV = MCdC$, quare sumtis integralibus, fiet $V = \frac{1}{2} MCC$.

Problema generale.

4. *Si mobile quocunque vrgetur potentias incessanter agentibus sed pro lubitu variantibus (P), quarum directiones conuergunt in punctum positione datum, definire*

mo-

motus variatos inde prouenientes , in quacunque demum linea recta vel curua feratur , in vacuo aut in pleno.

Hoc Problema duas habet partes quatuor una respicit motus in vacuo altera vero motus in medio utlibet resistente.

5. Consideremus ergo primum motus rectilineos in vacuo , quo nomine intelligendum est medium quod motui corporum nullum impedimentum aut adiumentum afferat.

Moueatur ergo mobile quocunque in linea quacunque AO transeunte pro centrum G in quod directiones potentiarum P conuergunt , motumque suum a quiete incipiat in puncto A , dicantur spatium AB tempore quocunque t , transmissum $=S$, celeritas corporis in B acquisita $=C$, eius elementum $=dC$. His positis erit (§. 1.) $Pdt = MdC$, vel (§. 2.) $pdt = dC$, et $pCd t = CdC$, sed $Cdt = dS$, ergo $pdS = CdC$, et sumtis integralibus $CC = 2fpdS$, adeoque $C = \sqrt{2fpdS}$.

Hoc significat , quod si ordinatae Aa , BD figurae Fig. I. curvilineae AadDF exponantur per p , celeritas mobili in B acquisita exponatur per latus quadratum duplae areae AadDB.

6. Igitur in hypothesi grauitatis uniformis in qua p est quantitas constans linea curua AadDF abit in lineam rectam axi AG aequidistantem , et celeritas in B acquisita est ut \sqrt{AB} , atque hinc omnia ea facile deriuantur , quae Galileus de descensu grauium in lineis rectis more suo demonstrauit , quae tamen utpote iam satis cognita inta-

intacta praeteribo. Hoc vnum vero ex ista hypothesi, quippe in sequentibus vsui futurum adhuc deducam, nempe:

7. Quia aequatio $pdt = dC$, praebet $pt = C$, et C est $V2pS$, erit $t = \frac{\sqrt{2}ps}{p} = V(\frac{2s}{p})$.

8. Si p est vt BQ distantia loci B a centro G, et $Aa = b$, item $AG = a$, $AB = S$, erit $BD (= p) = \frac{ab - bs}{a}$, et $2 \times Aa \cdot DB = \frac{2abs - bss}{a}$; adeoque celeritas in B, hoc est, $C = V(\frac{2abs - bss}{a})$ per §. 5. et t seu tempus per $AB = \int \frac{ds}{C} = \frac{ds\sqrt{a}}{\sqrt{(2abs - bss)}} = \frac{dQ\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, posito $dQ = \frac{ds}{\sqrt{(2as - ss)}}$, atque adeo $t = \frac{Q\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, atqui $dQ = \frac{ds}{\sqrt{(2as - ss)}}$ significat angulum cuius sinus est $= V(2aS - SS)$ existente radio $= a$. Adeo querendo AG ducto circulo AH, tempus per AB erit $= \frac{\text{ang. } AG \times \sqrt{AG}}{\sqrt{Aa}}$, et temp. per AG $= \frac{\text{ang. rect. } \times \sqrt{AG}}{\sqrt{Aa}}$.

Similiter si mobile descensum a quiete in B inchoaret, inuenietur temp. per BG $= \frac{\text{ang. rect. } \times \sqrt{BG}}{\sqrt{BD}} = \frac{\text{ang. rect. } \times \sqrt{AG}}{\sqrt{Aa}}$.

Hanc ob causam singulae AG, BG, bG, etc. aequali tempore percurrerentur, si mobile in his punctis A, B, b, etc. descensum a quiete inchoauerit.

Fig. II. 9. Si mobile incedat in linea recta ABO quae est tota extra centrum G directionum secundum quas potentiae p in corpus agunt, motusque a quiete incipiat in A. Ducantur ex centro directionum recta GA per initium motus A, et altera GO normalis ad AB, et dicantur AO

$AO = a$, $GO = b$, $GB = x$, eritque $BO = V(xx - bb)$. His positis.

Resoluenda est potentia (p) secundum BG in suas laterales OG et BO quarum haec, quae secundum BO motum accelerat, illa vero secundum OG retardatur a piano vel linea AB , nihilque ad motum generandum confert, est vero potentia per BG ad potentiam per BO ut $BG(x)ad BO[V(xx - bb)]$, quare potentia accelerans in directione BO fit $= \frac{pV(xx - bb)}{x}$. Et $AB(=S) = a - V(xx - bb)$; adeoque $dS = \frac{-xdx}{\sqrt{xx - bb}}$. Surrogatis ergo in formula (§. 5.) $C = V(2pdS)$, inuentis aestimationibus $\frac{pV(xx - bb)}{x}$ et $\frac{-xdx}{\sqrt{xx - bb}}$ pro p et dS , inuenietur $C = V(2f - pdx)$. Hoc est, facta vbiique $G\beta = GB$, descrip-
tive circa AG tanquam axem curua aDF cuius applicatae βD potentias centrales p exponunt; Celeritas (C) in B acquisita descensu per AB , ex quo et §. 5. cognoscitur, quod celeritas in B acquisita, descensu obliquo per AB , et velocitas in β acquisita descensu recto per $A\beta$ aequales sint, existentibus punctis B et β centro G aequidistantibus, in uno eodemque potentiarum accelerantium Systemate.

Ex demonstratis etiam sequitur motum in hac linea obliqua AB fore acceleratum a punto A vsque in O , atque deinceps a punto O versus b retardatum vsque dum in H penitus evanuerit in distantia OH a punto O aequali, distantiae AO . A punto vero H regredietur

mobile versus A accelerato motu vsque in O et abhinc retardato motu vsque in A ; haecque motus reciprocatio qua corpus inter puncta A et H a medio O aequaliter distantia vltro citroque mouetur, continuaretur in infinitum, nisi medii resistentia vel alia impedimenta externa huic motui obstarent. Haec tenus de motu rectilineo in vacuo ; dispiciendum quales sint leges motus curuilinei.

10. Descendat nunc mobile citum potentis ut libet variantibus (P) directis ad punctum positione datum G; in curua quacunque ABO, et definire oportet motum corporis in hac linea

Delapsum sit corpus in arcu curuae AB motum suum a quiete incipiendo , et dicatur celeritas in B acquisita $= u$; centroque G descripti intelligantur arcus circulares AE, BF, bf, etc. porro descripta sit circa axem EG , scala potentiarum accelerantium, EOKIH cuius applicatae FI exponunt potentias centrales p , quibus mobile ad centrum G vrgetur. Repraesentet BN potentiam P in mobile agentem secundum directionem BG, cum est in G , ductisque per N recta NL parallela tangentи curuae in B, et BL huic tangentи perpendiculari et exponet recta NL potentiam tangentialem iuxta quam motus corporis in B acceleratur ; Sit Bb elementum curuae per cuius terminum b ductus fit centro G arculus $b\beta$, et fient triangula NBL et Bbβ similia, propterea fiet $LN = \frac{P \times B\beta}{Bb}$; adeoque si in formula (. 1.) $Pdt = MdC$, pro P et dC , iam ponantur $\frac{P \times B\beta}{Bb}$, et du , inuenietur $\frac{P \times B\beta}{Bb} \times dt = Mdu$, vel quia $P = pM$, $\frac{p \cdot B\beta}{Bb} \times dt = du$, ducatur hoc

hoc in u , fietque $\frac{p \times B\beta}{Bb} \times udt = udu$, atqui $udt = Bb$ in figura, quare $p \times B\beta$ (Constr.) $= FI \times li = udu$, et $uu = 2 \times EHIF$, ac per consequens, u seu celeritas in B acquisita fit $= V(2EHIF)$.

Tempus vero descensus per AB exponetur per $\int_{\sqrt{(2EHIF)}}^{\frac{ds}{ds}}$ vbi ds significat elementum arcus AB.

11. Si in eadem fig. 4. potentia tangentialis LN $= bs$, existente $s = OB$, et $BN = FI = p$, erit area EHIF $= \frac{1}{2}aab - \frac{1}{2}bss$. Nam supra §. 10. inuenimus $LN = \frac{p \times B\beta}{Bb} = \frac{FI \times Ff}{Bb} = \frac{FI \times Ff}{ds} = bs$, ergo $FI \times Ff = bsd$, quare area EHIF $= bsd$ respectu arcus AB, hoc est $= \frac{1}{2}aab - \frac{1}{2}bss$, si arcus totus ABO dicatur $= a$. Cum autem generaliter inuenerimus $u = V(2EHIF)$ erit in praesenti casu $u = V(aab - bss)$ celeritas in B acquisita descensi per AB; adeoque celeritas in O acquisita descensi per totam ABO inuenietur aVb . Tempus per AB ($= \int_{\sqrt{(2EHIF)}}^{\frac{ds}{ds}}$) iam est $= \int_{\sqrt{(aab - bss)}}^{\frac{ds}{ds}} = \frac{Q}{\sqrt{b}}$, vbi Q denotat angulum cuius sinus rectus est $= V(aa - ss)$ et radius $= a$, quare si $s = 0$ fiet angulus Q rectus, et tempus descensus per totam ABO exponetur per $\frac{\text{ang. rect.}}{\sqrt{b}}$. Per eandem hanc fractionem exponeretur tempus descensus per alium quemcunque arcum curvae BO, terminatum in imo ad punctum O, si mobile descensum suum in superiori arcus termino B a quiete inchoauerit. In hac ergo curua omnes eiusmodi arcus AO, BO etc. aequali tempo-

re describentur, ipsaque adeo curua est Tautochroa in omni possibili potentiarum accelerantium systemate.

12. Sit in ead. fig. 4. arcus curuae infimus RO indefinite paruuus, adeo vt instar arcus circularis centro X descripti, spectari possit, centro G ducatur per punctum curuae R arcus RS qui aequabitur alteri RO, vt demonstratu facile est. Sint $OX = e$, $GO = f$, $OK = g$, arcus RO vel $RS = dm$, erit OS summa sinuum versorum arcuorum OR, $RS = \frac{e+f \times dm^2}{2ef}$. Iam sicut (c. 11.) area EHKO = $\frac{1}{2}aab$, ita etiam FIKD = $\frac{1}{2}bss$, atque adeo SkKO = $\frac{1}{2}bdm^2$. Atqui area SkKO = $OK \times OS = \frac{e+f \times gdm^2}{2ef}$ ergo $\frac{e+f}{2ef} \times gdm^2 = \frac{1}{2}bdm^2$, atque adeo $b = \frac{e+f}{ef} \times g = \frac{gb}{ef}$, posita $b = e+f$.

13. Si π designet peripheriam circuli cuius radius est = 1, erit $\frac{1}{4}\pi$ mensura anguli recti, cum vero temp. desc. per AO, vel BO, aut RO sit = $\frac{\text{ang. rect.}}{\sqrt{b}}$ fiet hoc = $\frac{\pi\sqrt{ef}}{4\sqrt{gh}}$, cuius duplum $\frac{\pi\sqrt{ef}}{2\sqrt{gh}}$ exponit durationem vnius oscillationis minimae penduli XO = e , in omnigravitatis hypothesi, et si centrum grauium sit infinite distans, aequabuntur f et h , et duratio vnius oscillationis penduli exponetur per $\frac{\pi\sqrt{e}}{2\sqrt{g}}$, quod semper rationem circumferentiae ad radium inuoluit, quantaecunque exilitatis sint oscillationes penduli.

14. Hoc ideo tantum monere volui, quod Cl. Parent in suis Disquisitionibus Mathematicis Hugenium de errore accusare sustinuit, eandem durationem vnius pen-

duli oscillationis mensuram assignantem in Horologio Oscillatorio, quam modo in praecedentibus eruimus ; arbitrabatur enim *Parentius* tempus dimidiae oscillationis minimae non differre posse a tempore descensus accelerati ex dupla penduli longitudine. Sed falsus est *Vir doctus* fundamento in se vero sed male applicato , *quod arcus circuli indefinite parvus subtensa sua aequalis censeri possit*, nam ab aequalitate huiusmodi arcus cum subtensa argumentari non licet , vt *Vir Cl.* fecit, ad aequalitatem inter tempora descensus per arcum et per eius chordam, nam tempus per arcum est ad tempus descensus per chordam eius, vt circumferentia circuli ad quadruplam diametrum. Ostendi hoc potest ex ipsissimo principio *Dn. Parent* , aequalitatis inter arcum indefinite parvum et eius subtensem.

15. Sit ergo Pendulum GO, faciens circa punctum G dimidiad oscillationem in arcu ABO, quaeritur duratio huius dimidiae oscillationis , si arcus AO et omnes eius partes subtensis suis aequales statuuntur. Sint $GO = e$, sinus versus OD arcus $AO = f$, grauitas g , et ponamus descendisse mobile in arcu AB, ductaque BE parallela GO, dicatur $=x$, adeoque $FO = f - x$, et subtensa arcus OB vel *hyp*) arcus ipse $= V(2ef - 2ex)$, eiusque elementum negativum , id est elementum arcus AB , quod est $Bb = \frac{+edx}{\sqrt{2ef - 2ex}} = \frac{+dx\sqrt{e}}{\sqrt{2(f - x)}}.$ Celeritas descensi per AB acquisita, seu $u = \sqrt{2gx}$, ergo tempus per elementum Bb ($= \frac{Bb}{u} = \frac{+dx\sqrt{e}}{2\sqrt{(fx - xx)}}$) $= \frac{\frac{1}{2}dQ\sqrt{e}}{\sqrt{g}}$, existente $dQ = \frac{dx}{\sqrt{(fx - xx)}}$, adeoque temp. desc.

Fig. V.

per $AB = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{Q}\sqrt{e}}{\sqrt{g}}$, vbi Q est angulus cuius sinus $= \sqrt{fx - xx}$ ad radium $\frac{1}{2}f$. Cum vero x sit $= f$, angulus Q aequat duos rectos seu $= \frac{1}{2}\pi$, et $\frac{1}{2}Q = \frac{1}{4}\pi$. Quare temp. desc. per $AO = \frac{\pi\sqrt{e}}{4\sqrt{g}}$, eiusque duplum, seu $\frac{\pi\sqrt{e}}{2\sqrt{g}}$ exponit durationem oscillationis minimae penduli, vt supra iam (§. 13.) inuenimus.

Tempus vero descensus per duplam penduli longitudinem, vel per chordam arcus minimi (§. 7.) exponitur per $\sqrt{\frac{e}{g}}$; quare tempus dimidiae oscillationis minimae, hoc est, tempus per arculum indefinite paruum, est ad tempus descensus per chordam eius, vt $\frac{\pi\sqrt{e}}{4\sqrt{g}}$ ad $\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{g}}$, hoc est, vt π ad 4, seu vt peripheria circuli ad quadruplam diametrum, vt dicebatur. Haec vero obiter dicta sint, reuertor ad *Isochronas*.

16. Quoniam (§. 11.) est area $\angle FIKO = bss$, si arcus OB dicatur $= s$, et si haec dupla area dicatur $= R$, fiet $ss = \frac{R}{b}$, et $s = \sqrt{\frac{R}{b}}$, et differentiando $ds = \frac{pdz}{\sqrt{bR}}$, vocando ordinatam $FI = p$, $GB = z$, adeoque $\beta B = fF = dz$, sit praeterea arculus $b\beta = dy$, inuenieturque $dz^2 + dy^2$ ($= ds^2$) $= \frac{ppdz^2}{bR}$, atque inde $dy = \frac{dz\sqrt{(pp - bR)}}{\sqrt{bR}}$. Et haec est generalis aequatio differentialis pro omnibus *Isochronis* in vacuo. Nam p algebraice data est in z et constantibus, R item, sed saepissime transcenderer tantum, et $b = \frac{gb}{ef}$, quare curua optata per quadraturas construi potest.

17. Si p constans est et $=g$, ac manente, vt supra,
 $GO=f$, fiet $R=^2gz-^2fg$, et aequatio generalis $dy=\frac{dz\sqrt{(pp-bR)}}{\sqrt{bR}}$, mutatur in $dy=\frac{dz\sqrt{(g-2bz+bf)}}{\sqrt{(2bz-2bf)}}$, vt haec aequatio construi possit fiat fractio $\frac{g-2bz+bf}{2bz-bf}=xx$, inuenieturque $2bz=\frac{2bfxx+2bf+g}{xx+1}-\frac{2bfxx+2bfk}{xx+1}$, posita $k=\frac{2bf+g}{2bf}$; adeoque $z=\frac{(xx+k)f}{xx+1}$; et $\frac{dz}{z}=\frac{2xdx}{xx+k}-\frac{2xdx}{xx+1}$. Ipsa vero aequat. different. Isochronae abit in $dy=xdz$, vel $\frac{dy}{z}=\frac{x dz}{z}-\frac{2xx dx}{xx+k}-\frac{2xx dx}{xx+1}-\frac{2dx}{xx+1}-\frac{2kdx}{xx+k}$ atqui $\frac{dy}{z}$ designat in figura 4. angulum elementarem BGb , ergo ang $BGb=\frac{2dx}{xx+1}-\frac{2kdx}{xx+k}$. Sint $dA=\frac{fdx}{xx+1}$, et $dB=\frac{dx\sqrt{k}}{xx+1}$, et fiet ang. $BGb=2dA-2dB\sqrt{k}$, adeoque angulus $BGO=2A-2BVk+\Delta$. Sunt vero A et B anguli quorum communis tangens est $=x$, sed diuersos radios habent, cum anguli A radius sit 1, alterius vero B, $=\sqrt{k}$. Assumta vero Δ denotat constantem aliquem angulum addendum vel subducendum atque sequenti argumento eliciendum, si $BG(=z)$ euadit $=OG(f)$, euascit angulus BGO , sed hoc casu x fit infinita, et anguli A et B quorum communis tangens facta est infinita sunt ambo recti, quare si r sit nota anguli recti, praecedens aequatio ang. $BGO=2A-2BVk+\Delta$, iam abit in $(2-2\sqrt{k})r, +\Delta=0$, et $\Delta=(2\sqrt{k}-2)r$ adeoque aequatio ang. $BGO=2A-2BVk+\Delta$, mutatur in ang. $BGO=2(r-B)\sqrt{k}-2(r-A)$. Quae concinnam praebet constructionem, capiendo nempe in linea indefinita CE partes $CA=1$, $CD=\sqrt{k}$, et in excitata perpendiculari ex punto

Fig. VI.

sto C, abscindendo $CB=x$, ductisque BA et BD, construendo deinceps angulum CBE, qui sit ad angulum CBD vt Vk ad 1, nam alio non opus est, quam vt in fig. 6. et in linea GN capiatur $GB=z$, erit enim punctum B in *Isochrona* quaesita.

Est vero $k = \frac{2bf+g}{2bf} = 1 + \frac{g}{2bf} = \frac{3e+2f}{2e+2f}$ restituendo pro $2bf$ suum valorem $\frac{2gb}{e}$ et pro $b, e+f$.

18. Sin vero sit $p = \frac{gz}{f}$, fiet $R = \frac{gzz-ffg}{f}$, adeoque formula generalis $dy = \frac{dz\sqrt{(pp-bR)}}{\sqrt{p}}$ nunc mutatur in

$$dy = \frac{dz\sqrt{(g-bf)zz+bf^3}}{\sqrt{(bfzz-bf)^3}}; \text{ ponatur iterum } \frac{(g-bf)zz+bf^3}{bfzz-bf^3} = xx,$$

et inuenietur $zz = \frac{(xx+1)ff}{xx+l}$, posita $l = \frac{bf-g}{bf}$; adeoque

$$\frac{dz}{z} = \frac{x dx}{xx+1} - \frac{xdx}{xx+l}; \text{ atqui ang. } BGb(\frac{dy}{z}) = \frac{xdz}{z} - \frac{xx dx}{xx+1} - \frac{xx dx}{xx+l} - \frac{l dx}{xx+l} - \frac{dx}{xx+1} = dBVl - dA, \text{ factis } dA = \frac{dx}{xx+1} \text{ et}$$

$$dB = \frac{dxvl}{xx+l}; \text{ quare fit iterum ang. } BGO = BVL - A + \Delta,$$

existentibus etiamnunc A et B angulis quorum radii sunt 1 et Vl , quique communem tangentem x habent. Et hi quoque anguli resti fiunt, si z fit=f, quo casu reperitur per simile ratiocinium, vt supra $\Delta = (1-Vl)r$, atque adeo ang. $BGO = (r-A) - (r-B)Vl$, quod hanc suppeditat constructionem: Capiantur iterum in linea aliqua indefinita partes $CA=1$, et $CD=Vl$, et perpendicularis $CB=x$, ductisque BA et BD, fiat angulus CBE ad CBD, vt Vl ad 1, et in fig. 4. angulus OGN aequalis angulo ABE in fig. 7, factaque in fig. 4, $GB=z$, erit

Fig. VII.

rit punctum B in *Isochroona* optata. Inuenietur haec curua ABO, ex *Epicycloidum* genere, nam existentibus $XO=e$ (fig. 4.) $OG=f$, $XG=b$, $GE=\sqrt{fb}$ et hoc radio circulus AE describatur, curua ABO orietur rotatione circuli cuius diameter $OE=f+\sqrt{fb}$, in caua parte circuli AE. Hoc idem iam alia via geometrica ostendi in *Phoronomia* Prop. 19 Lib. I.

19. Pergo ad alteram partem Problematis con- *Fig. III.*
cernentem motus variatos in medio quocunque resistenti. Initium faciam a motu rectilineo. Movereatur ergo corpus in linea recta AH citum potentias p , quarum directiones in punctum aliquod G, extra lineam AH situm, convergant. Sit quaelibet $BG=x$, et perpendicularis $GO=b$, eritque $BO=\sqrt{(xx-bb)}$, et potentia accelerans in B, vt supra (§. 9.) $\frac{pv'(xx-bb)}{x}$, resistentia in loco $B=R$, celeritas ibi acquisita $=u$, et du eius incrementum; tempuscum vero quo id generatur $=dt$. Potentia ergo in medio resistenti motum accelerans erit nunc $\frac{p'v'(xx-bb)}{x}-R$ quare (§. 2.) habebimus $\frac{pdv'(xx-bb)}{x}-Rdt=du$, et ducendo hanc in u , fiet $\frac{pudv'(xx-bb)}{x}-Rudt=udu$, at vero $udt=dS$ elemento spatii percursi, quod elementum aequatur elemento negatiuo lineae $BO=\sqrt{(xx-bb)}$, id est, $\frac{-xdx}{\sqrt{(xx-bb)}}$; surrogato ergo hoc valore pro udt , in praecedenti aequatione differentiali, inuenietur $-pdx+\frac{Rxdx}{\sqrt{(xx-bb)}}=udu$, hinc varia deriuantur.

i. Si $p=o$; fiet $\frac{Rxdx}{\sqrt{(xx-bb)}}=udu$, pro motibus in
Tom. II.

medio resistenti a primitiue vuniformi atque insito deriuatis , nam posita $z = V(xx - bb)$ formula mutatur in $Rdz = udu$, sit vero spatium absoluendum $AB = y$ eritque $dz = -dy$ et $-Rdy = udu$. Ex hac formula omnia deduci possunt , quae passim ab Autoribus tradita et demonstrata sunt ; imo plura ; nam ad quamcunque resistentiarum hypothesin extendi potest , sed specialioribus non immorabimur.

2. Si p et R in x et constantibus datae sint, celeritas vbique acquisita u per quadraturas exhiberi potest. Sed quaestio paulo altioris indaginis est cum resistentiae medii per celeritates iam acquisitas sed nondum determinatas dantur. Nam

3. Si $R = eu^{2n}$, vbi n quemcunque numerum significat , formula in hoc §. inuenta mutabitur in $-pdःx + \frac{eu^{2n} x dx}{\sqrt{(xx - bb)}} = udu$, vel posita $uu = s$, erit $-2pdःx + \frac{2es^n x dx}{\sqrt{(xx - bb)}} = ds$.

Si $n = 1$, $2eV(xx - bb) = Log. Q$, erit $s = Q \int \frac{2pdःx}{Q}$; adeoque $u = V(Q / \int \frac{2pdःx}{Q})$. Et hoc ita obtinet in hypothesi , quae plerisque aliis magis verisimilis est , quod resistentiae medii sint vt euu , id est in composita ratione densitatum et duplicatae celeritatum actualium mobilis.

4. Si $b = 0$, mutatur aequatio N. 3. inuenta in $-2pdःx - 2es^n dx = ds$, vel mutando signum elementi dx , in $2pdःx - 2es^n dx = ds$, ex qua obtinetur $dx = \frac{ds}{2p - 2es^n}$, quae concessis quadraturis construi potest , si p constans est,

est, hic casus obtinet, cum mobile in linea per centrum potentiarum transeunte incedit.

Generalissima tantum hic refero, nam si ad specia-
liora et specialissima descendendum esset; vix integrum
volumen huic rei sufficeret. Pergo ad motus curui-
lineos.

20. Cadat ergo mobile in caua parte curuae ABO, Fig. IV.
cicum a potentibus p iuxta lineas BG in punctum G ver-
gentes ipsum urgentibus, et inquirendum sit quanta futu-
ra fit velocitas (u) in quocunque curuae punto B acqui-
sita si eo in punto resistentia medii dicatur R. Dicatur
 $BG = z$ et curuae AC elementum $Bb = ds$, item $BN = p$,
et resoluenda hanc BN in suas laterales potentias BL et
LN, quarum haec elemento Bb parallela altera vero BL
eidem normalis. Est vero propter triangula similia
BLN et $Bb\beta$, linea $LN = \frac{-pdz}{ds}$, et haec exponit poten-
tiam acceleratricem, abstrahendo a resistentia medii,
quia nunc vero ratio eius quoque habenda est, potentia
acceleratrix nunc erit $-\frac{pdz}{ds} - R$, detracta nempe resi-
stantia medii R a priori potentia tangentali, erit ergo
(§. 2.) $-\frac{pdz}{ds} dt - Rdt = du$, vel ducendo hanc in u , ista
 $-\frac{pdz}{ds} udt - Rudt = udu$, vel quia $udt = ds$, habetur $-pdz -$
 $Rds = udu$, quae aequatio construi potest, concessis
quadraturis si p , R et ds datae sunt in z , constantibus
et dz .

Sed si, vt supra (§. 19. n. 3), R est vt eu^{2n} , aequa-
tio $-pdz - Rds = udu$, abit in hanc $-pdz - eu^{2n}ds = udu$,

vel in istam $-2pdz - 2er^n ds = dr$ facta nempe $uu = r$. Ex hac vero elicetur, si $n=1$, vel $R \propto euu$, et Log. $Q = es$, aequatio $r = \frac{s^2 + Q^{dz}}{Q}$, er $u(\pm \sqrt{r}) = \sqrt{\left(\frac{s^2 + Q^{dz}}{Q}\right)}$. Verum in aliis resistentiae hypothesibus vbi R modificatur celeritatibus actualibus mobilis, hae celeritates per quantitates finitas hoc modo non aequa facile exhiberi possunt.

Fig. VIII.

21. Si mobile descendens in quacunque curua ABO vrgetur in quolibet eius punto B, potentia tangentali, quam generaliter T nominabo, quae sit vt bs , vbi b est quantitas aliqua constans, s vero designat arcum curuae BO, inter punctum assumtum B et infimum O. Celeritas mobilis in O acquisita descensu ex AO incipiente motu a quiete in A, exponetur per $AO \times \sqrt{b}$ et si mobile descensum a quiete in B inchoet, celeritas eius descensu per arcum BO in O acquisita exponetur per $BO \times \sqrt{b}$; et ambo arcus AO et BO omnesque reliqui ad punctum O terminati, aequali tempore percurrentur, hoc est curua ABO Isochrona erit, et hoc ita esse videtur siue mobile in *vacuo* moueat, siue in *Pleno*, et si potentiae tangentiales T aliae sint in vacuo, quam in medio resistenti. Nam in vacuo ipsae T non modificantur per celeritates actuales mobilis u , quemadmodum in medio resistenti fiet, hoc tamen non obstante $Tdt = du$, et $Tudt = udu$, vel $Tds = udu$, si T designet potentiam tangentialem in B, u celeritatem acquisitam in B descensu mobilis ex arcu AB, et ds elementum curuae Bb, quomodocunque T exprimatur per functiones celeritatis aliasque quantitates indeterminatas, nam quia etiam est $T(hyp.)$

T (hyp.) $= bs$, erit $bsds (= Tds) = udu$, adeoque $uu = (aa - ss)b$, et $u = \sqrt{(aa - ss).b}$, nominando arcum $\text{AO} = a$; inuenietur ergo celeritas in O descensu ex AO acquisita $= aVb$, existente hoc casu $s = o$. Simillimo argumento inuenietur celeritas ex BO acquisita $= aVb$, si a arcum BO significet. Et supra iam demonstratum est, quod stantibus hisce, arcus AO , BO , etc. aequali tempore describantur, si mobile in vacuo descendit.

Videamus iam an haec cum praecedenti §. 20. consistere possint. Centro G ducti sint per puncta B et O , arcus BM et OP , si linea AG iungat initium curuae A centro G . Et lineas AM , AP , etc. per z indicabimus, cum antea lineas GA , GB , etc. hoc nomine insignierimus vocandoque iam arcusactu descriptos $AB = r$, eorum elementa $Bb = dr$, et residuos $\text{BO} = s$, vt ante. Cum vero supra §. 20. T fuerit $= \frac{pdz}{ds} - R$ iam fiet $T = +\frac{pdz}{dr} - R = bs$; adeoque $pdz = Rdr + bsdr = Rdr - bsds = eu^{2^n}dr - bsds = -b^n(aa - ss)^n ds - bsds$, propter $uu = (aa - ss)b$, vel conuertendo binomium $(aa - ss)^n$ in seriem inuenietur $pdz = -a^{2^n}b^n eds + na^{2^n-2}b^2cssds - \frac{n \cdot n - 1}{2 \cdot 4}a^{2^n-4}b^n es^4 ds + \text{etc.} - bsds$, et integrando $\int pdz = -a^{2^n}b^n es + \frac{1}{3}na^{2^n-2}b^n es^3 - \frac{n \cdot n - 1}{2 \cdot 4 \cdot 5}a^{2^n-4}b^n es^5 + \text{etc.} - \frac{1}{2}bss + \Delta$, vbi Δ est quant. constans $\int pdz$ significat omnia pdz quae in AM continentur, sed definienda est quantitas Δ ,

in A vbi $\int pdz = 0$, fit $s = a$, adeoque $\Delta = (a^{2n+1} - \frac{1}{3}(an^{2n+1} + \frac{n \cdot n-1}{2 \cdot 4 \cdot 5} a^{2n+1} - \text{etc.})b^n e + \frac{1}{2}baa)$, aut si ponatur ad abbreviandum $C = 1 - \frac{1}{3}n + \frac{n \cdot n-1}{2 \cdot 3 \cdot 5} - \text{etc.}$ erit $\Delta = Ca^{2n+1} b^n e + \frac{1}{2}aab$. Quare $\int pdz$ contentarum in $AM = Ca^{2n+1} b^n e + \frac{1}{2}aab, -a^{2n}b^n es + \frac{1}{3}na^{2n-2}b^n es^3 - \frac{n \cdot n-1}{2 \cdot 4 \cdot 5} a^{2n-4}b^n es^5 + \text{etc.} - \frac{1}{2}bss$, et $\int pdz$ contentarum in tota AP $= Ca^{2n+1} b^n e + \frac{1}{2}aab$; vbi $a =$ arcui AO; euangeliente s . Similiter $\int pdz$ contentarum in MP $= Cb^n es^{2n+1} + \frac{1}{2}bss$. Atqui $\int pdz$ cont. in AM $+ \int pdz$ cont. in MP $= Ca^{2n+1} b^n e + \frac{1}{2}aab, -a^{2n}b^n es + \frac{1}{3}na^{2n-2}b^n es^3 - \frac{n \cdot n-1}{2 \cdot 4 \cdot 5} a^{2n-4}b^n es^5 + \text{etc.} - \frac{1}{2}bss = \int pdz$ cont. in tota AP $= Ca^{2n+1} b^n e + \frac{1}{2}aab$ et deletis delendis, inuenietur $Cb^n es^{2n+1} - a^{2n}b^n es + \frac{1}{3}na^{2n-2}b^n es^3 - \frac{n \cdot n-1}{2 \cdot 4 \cdot 5} a^{2n-4}b^n es^5 + \text{etc.} = 0$, vel diuisa hac serie per $b^n es$, $Cs^{2n} - a^{2n} + \frac{1}{3}na^{2n-2} ss - \frac{n \cdot n-1}{2 \cdot 4 \cdot 5} a^{2n-4}s^4 + \text{etc.} = 0$, quare indeterminata s , es est simul determinata, quod est absurdum. Itaque eo quem exposui modo *Tautochroa* in medio resistent non obtinetur. Hanc deductionem vel discussionem ideo suppressimere nolui, quia expositus *Tautochronam* inuestigandi modus mihi ipsi specie sua imposuit et alios adhuc decipere posset, meliorem tamen methodum non exhibeo quia nunc primum defectus illius animaduersus mihi est dum schedam in Academiae Conuentu praelectam re-video et transcribo, et tempore nunc excludor quo minus in aliam inquirere possum.

22. Communicabo tamen eius loco modum inueniendi *Brachistochronam*, seu lineam celerrimi descensus in omni possibili gravitatis variabilis hypothesi cum mobile in *vacuo* mouetur, et pro casu particulari gravitatis uniformis et directiones parallelas habentis, cum in medio resistenti incedit. Ad id autem necesse est inquirere quanam lege duo curuae elementa ad lineam aliquam positione datam inflectenda sint, vt , dum vnumquodque eorum particulari sua celeritate motu uniformi absoluatur, breuiori tempore percurrentur ambo , quam si iisdem celeritatibus duo elementa aliter inflexa transmissa fuissent. Ad hoc propositum sequens faciet lemma.

23. *Datis positione circulo DBE centro O descripto, et duabus punctis A et C, hoc in causa circuli parte, altero in conuexa, ex quibus ductae sint ad punctum aliquod B circuli modo nominati, duae rectae AB, CB hac lege, ut sinus anguli ABG sit ad sinus anguli OBC in data ratione MadN.* Dico quod mobile describens lineolam AC celeritate vt M, et deinceps lineolam BC celeritate vt N, breuiori tempore peruenturum sit ex A in C, quam si iisdem celeritatibus per quaslibet alias alias Ab et bC incessisset.

Etsi hoc lemma in casu simpliciori nempe quando linea positione data DBE quae hic circularis est, est recta, Hugenius iam pridem demonstratum dedit in Tractatu de Lumine p. 40, 41. Eius tamen demonstrationem hic apponere e re visum est. Sit punctum b alteri B indefinite vicinum, ductisque Ab, Cb, et centris A et C de-

Fig. IX.

C descripti sint per B et b , arculi $B\beta$ et $b\gamma$. His iam positis ex natura *Minimi*, oportet ut temp. per $AB+$ temp. per BC sit = temp. per $Ab+$ temp. per bC , et t. per $Ab-$ t. per $AB=t.$ per $BC-t.$ per bC , vel quia ambae AB , Ab eadem celeritate uniformi, M , et BC , bC eadem celeritate N pertransiri supponuntur, erit t. per $\beta b=t.$ per $B\gamma$, atque adeo $\frac{\beta b}{M}=\frac{B\gamma}{N}$, seu $N\times\beta b=M\times B\gamma$, considerando vero arculum Bb instar sinus totius, erit βb sinus anguli βBb vel ipsi aequalis ABG , et $B\gamma$ sinus anguli $Bb\gamma$, vel OBC , quare sufficiendo in aequalitate $N\times\beta b=M\times B\gamma$, pro βb et $B\gamma$, $\int ABG$, $\int CBO$, nascetur $N\times\int ABG=M\times\int CBO$, atque adeo $\int ABG$, $\int CBO::M.N.$ Q. E. D.

Fig. IV. 24. Hoc lemimate iam posito, *inuenire oportet curuam ABO in qua descendens graue minori tempore a termino A ad terminum O perueniat, quam si in omni alia curua intra hos terminos ducta descendisset.*

Per ea quae supra (§. 10.) ostensa sunt, celeritas mobilis descensi per AB in B acquisita exponetur per latus quadratum ex duplo areae $EHIF$, dicatur hoc latus quadratum Q , et exponet Q celeritatem mobilis in B , sed per lemma praecedens propter breuissimum descensum, exponitur quoque eadem celeritas per sinus anguli βBb , quem vocabimus m , et cosinum $n=V(1-mm)$ radio existente 1 , est ergo $m=\frac{Q}{a}$, et $n[V(1-mm)]$
 $=\frac{V(aa-QQ)}{a}$, dicantur $B\beta=-dz$, et arculus $b\beta=dy$; erit que $m.n::b\beta(dy) B\beta(-dz)$, vnde elicitur $dy=\frac{-Qdz}{\sqrt{aa-QQ}}$.

In

In grauitate vnumiformi fit area EHIF rectangulum $fg-gz$, si OE dicatur f , OB vel OF $=z$, et FI $=EH=g$, adeoque $Q=V(2fg-2gz)$, et $dy (= \frac{-Qdz}{\sqrt{aa-2gg}}) = -dz\sqrt{2fg-2gz}$, vel $\frac{dy}{z} = \frac{-dz\sqrt{2fg-2gz}}{z\sqrt{aa-2fg+2gz}}$, fit $\frac{2fg-2gz}{aa-2fg+2gz} = ss$, eritque $2gz = \frac{(ss+b)(2fg-aa)}{ss+1}$ existente $b = \frac{2fg}{2fg-aa}$, adeoque $\frac{dz}{z} = \frac{-2sds}{ss-k} + \frac{2sds}{ss+1}$, et $\frac{dy}{z} (= \frac{-sdz}{z}) = \frac{-2ssds}{ss+b} + \frac{2ssds}{ss+b} - \frac{2bds}{ss+b} - \frac{2ds}{ss+1} = 2dAVb - 2dB$, positis $dA = \frac{dsyb}{ss+b}$, et $dB = \frac{ds}{ss+1}$, eruntque A et B anguli communem tangentem s habentes, quorum radii sunt \sqrt{b} , et 1. Fractio vero $\frac{dy}{z}$ designat angulum BGb , adeoque $BGb = 2dAVb - 2dB$, et integrando ang. $BGO = 2AVb - 2B + \Delta$, vbi Δ est quantitas constans quae dete. minatur ex suppositione anguli $BGO = o$, quod contingit in puncto O. Sit $GO = e$, fietque hoc casu $z = e$ adeoque $s = \frac{\sqrt{2eg}}{\sqrt{aa-2eg}}$, dicantur anguli quorum communis tangens $e = \frac{\sqrt{2eg}}{\sqrt{aa-2eg}}$ et radii sunt \sqrt{b} et 1, G et H, inuenietur $2GVb - 2H + \Delta = o$, adeoque $\Delta = 2H - 2GVb$, item ang. $BGO (= 2AVb - 2B + \Delta) = +2AVb - 2GVb + 2H - 2B$, quae hanc constructionem suppeditat. Abscindantur in Fig. X. linea indefinita partes $AC = \sqrt{b}$, et $DC = 1$, et in perpendiculari ad has capiantur $BC = \frac{\sqrt{2eg}}{\sqrt{aa-2eg}}$ et $CF = \frac{\sqrt{(2fg-2gz)}}{\sqrt{aa-2fg+2gz}}$, ductisque ex A et D ad puncta B et F, lineis AB, AF et DB, DF, fiat angulus NAF qui sit ad angulum BAF, vt \sqrt{b} ad 1, et in fig. II. constituantur Tom. II. X angu-

angulus BGO $=2$ BDB -2 NAF, erit facta GB $=z$, punctum B, in *Brachistochrona* quaesita.

Si h est numerus quadratus unitate maior *Brachistochrona* fiet *Algebraica*.

25. Generalius si sit

$$z = [(ss+aa)^{\frac{\alpha}{2a}} \times (ss+bb)^{\frac{\beta}{2b}}]^b : s^{\frac{ba+\alpha\beta}{ab}}, \text{ vel}$$

$$z = [(css+aa)^{\frac{\alpha}{2a}} \times (ss+bb)^{\frac{\beta}{2b}} \times (ss+cc)^{\frac{\gamma}{2c}} \times \text{etc.}]^b :$$

$s^{\frac{\alpha}{a}} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c}$ etc., et potentia accelerans $p=-aast$: $(ss+1)^2$, existente $t=\frac{ds}{dz}$, *Brachistochrona* semper algebraica erit, quoties α, β, γ , etc. fuerint numeri rationales quaecunque fuerint quantitas constantes $a, b, c, \&c.$ et b .

Haec vero de lineis celerrimi descensus in vacuo sufficient, pergo ad eas quae in medio resistenti describuntur.

26. Sit ABO *Brachistochrona* quaesita in qua ductis ad centrum potentiarum accelerantium G, radiis AG, BG, etc. OG, centroque G descriptis arcibus BM, OP, vocentur nunc AM $=z$, arcus AB $=s$, et sic formula §. 20. reperta — $pdz - Rds = udu$, iam mutatur in $pdz - bu^{2n} ds = udu$, existente nunc $R=bu^{2n}$. Dicatur sinus anguli GBO $=l$, sinus complementi $m=V(1-l)$ si radius sit $=1$. Iam cum l sit (§. 23.) vt celeritas in B acquisita accelerato in arcu AB, fiat ergo $u=al$, est etiam $ds=\frac{dz}{m}$, qui-

quibus in aequatione $pdz - bu^{2n}ds = udu$ suffectis, orietur
 $pdz - \frac{a^{2n} bl^{2n} dz}{m} = aal dl$, in qua p datur per z et constantes, et m per l , nam a et b sunt constantes perinde ac exponens $2n$, sed aequatio ita generaliter spectata irreducibilis est. Sed si p sit constans, fiet $dz = \frac{aalmdl}{mp-a bl^{2n}}$,

adeoque $z = \int \frac{aalmdl}{mp-a bl^{2n}}$ et $dy (= \frac{1}{m} dz) = \frac{aal dl}{mp-a bl^{2n}}$, et angulus AGB, $= \int \frac{aal dl}{mpz-a bl^{2n}} z$. Verum si directiones

grauium parallelae sint, et in figura 12 siant abscissa Fig. XII.

$AE = \int \frac{aal dl}{mp-a bl^{2n}}$, et applicata EB $= \int \frac{aal dl}{mp-a bl^{2n}}$,

punctum B erit in Brachistochrona quaesita.

Atque hoc est problema quod Doctiss. noster Eu-
lerus Geometris proposuit in Actis Erudit.

Sed si sint $p = \frac{kl^{2n+\alpha}}{\sqrt{(1-l^2)}} + 1$, et $z = \frac{aal^{\alpha+2}}{\alpha+2} \frac{+(a+2)acc}{\alpha+2}$,

curua construi potest: Fiat enim angulus AGB Fig. VIII.

$\int \frac{\frac{\alpha+2}{\alpha+2} l^{\alpha+2} dl}{(1-\frac{\alpha+2}{\alpha+2})^2 + (\alpha+2)c \times \sqrt{1-l^2}}$, et capiatur AM ($= z$) =

$\frac{aal^{\alpha+2}}{\alpha+2} \frac{+(a+2)acc}{\alpha+2}$, erit punctum B in Brachistochrona,

modo α non sit $= -2$. Possunt inueniri adhuc aliae leges potentiarum p ad id ut Brachistochrona in medio resistenti describenda, concessis quadraturis, construi possit. Sed his iam non vacat diutius immorari.

27. Si directiones potentiarum (p) non sint convergentes ad punctum aliquod positione datum, vt hucusque assūmimus, sed curuam quamcunque FGg contingant, inquiremus iam in legem variationis potentiarum (p), quae efficiant, vt mobile secundum lineam quamcunque proiectum in medioresistenti curuam ABO describat.

Fig. XIII. Tendat missile ex A in B, et huc delatum urgetur secundum directionem BG curuam EG in G contingentem, potentia aliqua quam nunc g nominabimus, adhibituri deinceps alio sensu litteram p qua eiusmodi potentis hucusque designauimus, ad exprimendas perpendiculares GD in tangentes curuae BD demissas. Dicantur praeterea tangentes BD a punto contactus usque ad perpendicula in ipsas demissa $=q$, radii vectores GB $=s$, radius osculi in B, hoc est, BC $=r$; celeritas in eodem punto B acquisita $=u$; elementum curuae Bb $=ds$, tempusculum quo percurritur hoc elementum $=dt$. Per alterum terminum elementi curuae ducta sit tangens bd, et huic perpendicularis gd, item gE aequidistans GD, ac denique Gb parallela BE. Nominentur praeterea Ee $=di$, gb $=dl$, et Gg elementum curuae FG $=dm$. His potitis.

i. Potentia tangentialis cuius directio BE ex centrali g deriuata est $\frac{gq}{z}$, a qua detracta resistentia medijs R, restat potentia accelerans mobile in punto B $=\frac{gq}{z}-R$, itaque (§. 2.) $\frac{gq}{z}dt-Rdt=\pm du=adu$, vbi a significat

ficit vnitatem affirmatiuam vel negatiuam pro vtroque casu descensus et ascensus mobilis in curua, atque inde elicitor $\frac{gqds}{z} - Rds = audu$, existente $udt = ds$,

2. Ducatur per b rectula $b\beta$ parallela BG tangenti BD occurrens in β , motusque in elemento curuae Bb spectari potest tanquam compositus motibus isochronis per tangentem B β et per lineolam βb , quorum hic acceleratus est potentia g , ille vero vuniformis, quare ($\S. 7.$) $dt = V\left(\frac{2\beta b}{g}\right)$ vel analytice $= V\left(\frac{zds^2}{gpr}\right) = dsV\left(\frac{z}{gpr}\right) = \frac{ds}{u}$, vel $uu = \frac{gpr}{z}$. Nam βb inuenietur $= \frac{zds^2}{2pr}$.

3. Diuidatur aequatio (N. 1.) inuenta $\frac{gqds}{z} - Rds = audu$ per modo inuentam $uu = \frac{gpr}{z}$, reperietur $\frac{\alpha du}{u} = \frac{qds}{pr} - \frac{Rzds}{gpr}$ (aut quia proportionalitas linearum BC(r), Bb(ds), BD(q), et Ee(di) praebet $qds = rdi = \frac{di}{p} - \frac{Rzds}{gpr}$ (vel quia $+dp = adp = gd - GD = gE - gE - GD = -di + dl$, atque adeo $di = -adp + dl = \frac{adp}{p} + \frac{dl}{p} - \frac{Rzds}{gpr}$ (aut si $\frac{dl}{p} = dm$ fiat $= \frac{\alpha dk}{k}$) $= \frac{adp}{p} + \frac{\alpha dk}{k} - \frac{Rzds}{gpr}$, adeoque $\frac{\alpha du}{u} = \frac{-adp}{p} + \frac{\alpha dk}{k} - \frac{Rzds}{gpr}$, quae per transpositionem terminorum et per multiplicationem cum fractione $\frac{kpu}{\alpha}$, mutetur in $k pdu + kudp - pudk = \frac{-kzRuds}{agr}$ (vel propter $R = eu^{2n}$ et $g = \frac{uu z}{pr}$) $= \frac{-ekpu}{\alpha} \frac{2n-1}{2} ds$ (dicatur hoc) $= kkdp$, et habebimus $d\left(\frac{pu}{k}\right) = \frac{k pdu + kudp - pudk}{kk} = dp$, et sumtis integralibus $\frac{pu}{k} = P$,

vel $u = \frac{kp}{p}$, hinc $\frac{-ek^{2n} p^{2n-1} ds}{\alpha p^{2n-2}} \left(-\frac{-ek p u^{2n-1} ds}{\alpha} \right) = kkdP$,
 ista vero ulterius reducta, praebet $P^{1-2n} dP = \frac{-ek^{2n-2} ds}{\alpha p^{2n-2}}$,
 sumtisque integralibus, debitisque reductionibus institutis
 inuenietur $P = \left(\frac{2en-2e}{\alpha} \int \frac{k^{2n-2} ds}{p^{2n-2}} \right)^{1/2-2n}$. Sed si $n=1$,
 fiet Log. $P = \int \frac{eds}{\alpha}$.

4. Inuenimus ergo aestimationem litterae assumptiae P per indeterminatas ad curuam AB pertinentes, et reperta est (N. 3.) $u = \frac{kp}{p}$, et (N. 2.) $= g(-\frac{uz}{pr}) = \frac{kkzPP}{p^3 r}$. Quae omnia erant inuenienda.

28. Si curua FG contrahitur in punctum G, vt in Fig. 14. Mutabitur k in 1, fientque adeo $u = \frac{p}{p}$, et $g = \frac{zPP}{p^3 r}$, vel $gp^3 r = zPP$, et hoc nobis viam stermit inueniendi lineam projectorum in medio resistenti. Sit enim l sinus anguli GBb, et $m = V(1-l)$ eius cosinus, eritque $p = lz$, et formula $gp^3 r = zPP$ abit in $gl^3 rzz = PP$, vel posita $M = l^3 r$, in $gMzz = PP$, et differentiando logarithmice $\frac{dg}{g} + \frac{2dz}{z} + \frac{dM}{M} \left(-\frac{2dP}{P} \right) = \frac{2P^{1-2n}}{P^{2-2n}}$ (vel quia $P^{1-2n} dP = \frac{-ek}{\alpha p^{2n-2}}$, et $P^{2-2n} = g^{1-n} M^{1-n} z^{2-2n}$)
 $= -\frac{2ek}{\alpha} l^{2-2n} g^{n-1} M^{n-1} ds$, id est $\frac{dg}{g} + \frac{2dz}{z} + \frac{dM}{M}$

==

$\frac{-2eg}{al} \frac{k^{2n-2}}{2^{n-2}} \frac{M^{n-1} ds}{ds}$, haec aequatio sic generaliter sumta irreducibilis est.

29. Sed si g sit constans, et directiones potentiarum g ad infinitam tantum distantiam sint conuergentes, id est, parallelae, euanescent ambo membra logarithmica ex aequatione, quae ideo in $\frac{dM}{M} = \frac{-2eg}{al} \frac{k^{2n-2}}{2^{n-1}} \frac{M^{n-1} ds}{ds}$ mutabitur, ex ista vero propter $k=1$, et $ds=\frac{Md}{l^3 m}$, positisque $g=1$, fit $\frac{dM}{M} = \frac{-2eM}{al} \frac{dl}{2^{n+1} m}$ et haec praebet M^{-n-1} $dM = \frac{-2edl}{al} \frac{1}{2^{n+1} m}$, et sumtis integralibus $M^{-n} = \int \frac{2endl}{al} \frac{1}{2^{n+1} m}$, quare $M = \left(\int \frac{2endl}{al} \frac{1}{2^{n+1} m} \right)^{-1:n}$. Inuenta sic aestimatio ne literae assumpta M, coordinatae lineae projectorum non difficulter inuenietur, concessis quadraturis.

Fiant enim (Fig. 15.) $AC = \int \frac{Mdl}{lm}$, et $CB = \int \frac{Mdl}{l^3 nm}$, vbi $m = V(1-l)$, eritque punctum B in linea projectorum quae sita. Huius lineae constructionem iam dedi in *Phronomia* Anno 1715 edita pro casu resistentiae secundum duplicatam rationem celeritatum mobilis procedentis, eiusdemque constructionem dederunt Cel. Iohannes et Nicolaus Bernoulli, in Actis Erudit. 1719. Mens. Maio pro casu quando $R = eu^{2n}$, sed nihilo difficultior est analysis pro hoc casu generaliori quam pro altero.

In praecedentibus vbi quantitates integrandae occur-

current, integralibus earum quantitates constantes breuitatis caussa non additi, quae alias addi solent, adeoque per summam vbiique intelligendum est integrale compleatum quale quaestioni cuique competit. Quod hoc loco monendum esse duxi; ne quis existimet additionem illam quantitatum constantium per incuriam omissam fuisse.

30. Sed si directiones potentiarum g conuergunt in punctum G , vt in fig. 14. et dicantur $O = \frac{Ldl}{l}$, existente L quantitate vt libet data per l et constantes, $M = \frac{uL(3 - 2n)}{L + (3 - 2n)O}^{1:3-2n}$, $N = \left(\frac{2en - 2e}{\alpha} f_l^{2-2n} dO\right)^{1:1-n}$, et $z = (3 - 2n)O^{1:3-2n}$ sitque $g = M^{-1} N z^{-2}$, curua projectorum etiam construi potest. Fiat enim angulus $AGB = \frac{l d\phi}{f_{3-2n}^3 \cdot mO}$, et capiatur in linea GM pars $GB = (3 - 2n)O^{1:3-2n}$, erit punctum B in curua quae sita.

In hac curua erit $r = \frac{L(3 - 2n)O}{l(L + 3 - 2n)O}^{1:3-2n}$. Quod si vero L fuerit $= l^\beta$, et $\frac{\beta}{3-2n}$ quilibet numerus rationalis, curua erit algebraica. Sed de his satis.

Fig. XVI. 31. Ex similibus principiis varia alia Problematia facilem solutionem admittunt. Vt si corpus B incurua quacunque CB gravitate sua descendat post se tamen trahens alterum minus corpus A filo ACB super trobleam C mobile annexum, quodque ascendere cogatur in altera curua AC , et quaerantur celeritates horum corporum vbiuis acquisitae. Analysis institui potest, vt sequ-

quetur, postquam lineis et lineolis ad rem facientibus nomina dederimus: Sint ergo $CB=x$, $EB=y$, elem. curuae $bB=ds$, $Bn=dx$ et $BO=dy$, celeritas in curuae puncto $B=u$, celeritas corporis A in directione $AC=v$ item $am=dp=dx$; $al=dq$, et $Aa=dr$. Sunt vero Am et bn arculi centro C descripti, et Al ac bo lineolae horizontali DE parallelae. His positis ita argumentor.

1. Inquiero in potentiam qua corpus B propter gravitatem vrget secundum directionem bB , ad id dico ut $Bb(ds)$ ad $Bo(dy)$ ita pondus B ad $\frac{Bdy}{ds}$, et haec est potentia qua grauitas corpus B vrget secundum bB . Sed nondum est tota vis accelerans, nam corpus A grauitate sua ipsi resistit.

2. Propter similem rationem $\frac{Adq}{qr}$ est potentia quae corpus A propter grauitatem suam vrget iuxta Aa et si fiat $Aa(dr)$: $ma(dp) :: \frac{Adq}{dr} :: \frac{Adpdq}{dr^2}$, et hoc exponet potentiam qua filum Ca vel BC trahitur ex B in C. Dicatur praeterea $Bb(ds)$: $Bn(dx) :: \frac{Adpdq}{dr^2} :: \frac{Adpdqdx}{dr^2 ds}$ et haec ultima fractio exponit resistantiam, quam descendens corpus B ab altero A in directione bB subit. Hanc ob causam potentia mobile B accelerans reperitur $= \frac{Bdy}{ds} - \frac{Adpdqdx}{dr^2 ds}$.

3. Incrementum celeritatis in AC vel CD est $= dv$, adeoque incrementum celeritatis corpori A com-

Tom. II.

Y

peten-

petentis in directione $bB = \frac{dx dv}{ds} = \frac{v dv}{u}$, quia $u : v :: ds : dx$, ergo quantitas motus in utroque corpore geniti $= Bdu + \frac{Avdv}{u}$.

4. Cum potentia accelerans ducta in tempus cum $\frac{ds}{u}$, producat motus quantitatem $Bdu + \frac{Avdv}{u}$, habebimus $\frac{Bdy}{u} - \frac{Adpdqdx}{udr^2} = Bdu + \frac{Avdv}{u}$, atque adeo $Bdy - \frac{Adpdqdx}{dr^2} = Budu + Avdv$, et sumitis integralibus $By - \int \frac{Adpdqdx}{dr^2} = \frac{1}{2}Buu + \frac{1}{2}Avv$ (vel propter $v = \frac{udx}{ds}$) $= \frac{1}{2}Buu + \frac{Avudx^2}{2ds^2}$; Atque hinc elicetur $uu = \frac{(2By - 2\int \frac{Adp^2 dq}{dr^2}) \times ds^2}{Bds^2 - Adx^2}$. Quare si fiat $TV = \frac{(By - \int \frac{Adp^2 dq}{dr^2}) \times ds^2}{Bds^2 + Adx^2}$, et graue libere cadat ex hac altitudine TV , in V acquiret tantam celeritatem, quam tam corpus B acquisivit in curua CB .

Si curua CA fiat linea recta verticalis parallela ipsi EB , singulae dp , dq et dr fient $= dx$, et habebimus hoc casu $TV = \frac{(By - Ax) \times ds^2}{Bds^2 + Adx^2}$.

Hoc unum est ex Theorematis illis quae V. Cel. Job.

Iob. Bernoulli litteris XI. Oct. 1727. datis sine demonstratione misit, et ex conseruatione virium viuarum ipse deduxit.

32. *Sit graue aliquod figurae cuiuscunque BFG, cuius centrum grauitatis sit in C, ex quo et radio CA, descriptus circulus AHL repraesentet axem cui circumvolutum intelligatur filum secundum ordinem litterarum EALHALHAL etc. Ipsum vero corpus grauitate sua descendat, quod aliter fieri nequit quam rotando circa centrum C, filo sese euoluente secundum ordinem litterarum AHLH etc. Quaeritur quanta sit celeritas centri C postquam graue ex altitudine EC vel EA cecidit.*

Sint EC vel EA altitudo ex qua mobile rotando cecidit $=R$, eius elementum $Cc = dR$, velocitas centri $C = u$, eius incrementum tempusculo dt ortum $=du$. Radius axis $CA = a$. Massa totius corporis compositi ex BFG et axe ALH $=M$. Distantia eius centri oscillationis a puncto A $=D$; quodlibet elementum P totius massae $M = dp$, eius distantia PA ab axe rotationis in A parallelo axi cylindri ALH $=q$. Eritque centrum grauitatis totius massae M etiam in C quia corpus BG eiusque axis ALH commune habent grauitatis centrum C. His positis

Quia vniuersum corpus $BG + ALH$, rotatur circa axem A, incrementum celeritatis cuiusque particulae eius P inuenietur $= \frac{qdu}{a}$, et eius momentum respectu axis $A = \frac{qqdpdu}{a}$, quare summa momentorum, id est vniuers-

sus motus genitus fit $=du\frac{qqdp}{d}$ (id est, propter $\int qdp$ ex natura centri oscillationis $=aDM$) $=DMdu$.

Sed potentia accelerans est $=M \times AC = aM$ si grauitas sit $=1$, erit ergo $aMdt = DMdu$, vel $adt = Ddu$, seu $adu = Dudu$, id est, propter $udt = dR$, habetur $adR = Dudu$, vel summis integralibus $2aR = Dun$; atque adeo $uu = \frac{2aR}{D}$. Iccirco corpus in vacuo libere cadens grauitate naturali ex altitudine $z = \frac{aR}{D}$, in imo huius altitudinis celeritatem acquirat aequalem illi, quam centrum gravitatis C massae M acquisiuit cadendo ex altitudine EC.

Et hoc quoque vnum est ex theorematibus illis quae laudatus Bernoullius per Cl. Filium Academiae communicauit, sed sine demonstratione.

F. XVIII. 33. Sed quanta celeritas acquiretur globo DBE, si in caua parte curuae cuiuscunque ABO rotando descendat? Sint iterum celeritas globi in B $= u$, radius globi BC $= a$, radius circuli osculatoris curuae in B, seu BF $= r$; Bb $= Be = ds$; B β $= dx$; inuenietur arculus $be = \frac{(r-a)ds}{ar}^2$, et si sectores bBe et CBe similes sint, erit Cc elementum spatii tempusculo describendi, $= \frac{(r-a)ds}{r}$. Est vero potentia accelerans vis tangent. gravitat. $\times BC \times M$, sed si gravit. $= 1$, erit $\frac{dx}{ds}$ vis tang. grau. quare potentia accelerans est $= \frac{Mdx}{ds}$; motus vero genitus inuenitur iterum vt in praeced.

==

$\equiv DMdu$, si D centri oscillationis distantiam a puncto B vel alio quocunque superficie puncto, et M massam globi designent, erit ergo $\frac{aMdxdt}{ds} \equiv DMdu$, seu $\frac{audxdt}{ds} \equiv Dudu$, atqui est $udt = Cc = \frac{(r-a)ds}{r}$, ergo $(\frac{ar-aa}{r})dx \equiv Dudu$, sumtisque integralibus et postea institutis reducti-
nibus inuenietur $uu = \frac{2ax}{D} - 2\int \frac{aadx}{rD}$ (propter $D = \frac{7a}{\zeta}$) $= \frac{10}{7}x - \int \frac{10adx}{7r}$. Verum vocando sinum anguli ABH quem applicata vB cum curva facit $= l$, fiet $dz = rdl$, ex-
istente sinu toto $= 1$, adeoque $\frac{adx}{r} = adl$, hinc uu
 $= \frac{10x + 10ab - 10al}{7}$, si b significet sinum comple-
menti anguli quem curva AB cum axe AH facit. Vo-
candoque $BH = x$, $AH = y$, erit $l = \frac{dy}{ds}$, hanc ob cau-
sam habebimus $uu = \frac{10xds + 10abds - 20ady}{7ds}$.

Itaque graue quodcumque libere cadens in vacuo ex
altitudine $z = \frac{\zeta xds + \zeta abds - \zeta ady}{7ds}$ celeritatem acquiret ae-
qualem illi quam globus DE rotando acquisivit in curuae
puncto B.

Sed si idem globus DE rotando descendisset in
plano inclinato, tunc fuisset $z = \frac{x}{7}$; nam hoc casu fit bds
quoque $= dy$.

DE DIVISIONE CVRVARVM

In partes quotcunque quarum subten-
sae sint in data progressionē.

Auct.

C. G.

M. Int.
1726.

ET si non ignorabam iam diu a Celeb. Iohanne Bernoullio inuentas esse formulas ad divisionem anguli in datas quascunque partes, tamen quia easdem memoria non tenebam, feci ipse inueniendi periculum.

Fig. I. Sit diuidendus arcus BD in partes quotcunque aequales DE, EF, FG etc. dataque sit perpendicularis $CD=m$ et radius circuli $AB=a$, ponatur subtensa partis quaesitae $DE=x$.

Primum quaero perpendicularē EK determinandam per x et quantitates datas hoc modo: ponatur $EK=y$, erit (pro angulo acuto) EL vel (pro angulo obtuso) $DL=KC=\sqrt{x^2-(m-y)^2}$, sed $AC=\sqrt{a^2-m^2}$ ergo $AK=\{\pm AC \mp KC\}=\{\pm\sqrt{a^2-m^2}\pm\sqrt{x^2-m^2+2my-y^2}\}=\sqrt{a^2-y^2}$ ex qua aequatione fit $y=\frac{(2a^2-x^2)m\pm x\sqrt{(a^2-m^2)(a^2-x^2)}}{2a}$, haec y si ponatur $=o$ obtinebitur valor x determinatus per

per quantitates datas a et m pro angulo in nullas partes diuidendo seu subtensa ipsius arcus dati BD =

$$\sqrt{2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - m^2}}.$$

Ex perpendiculari EK iam determinata per x et quantitates datas, simili modo eruuntur deinceps reliquae FM, GN, HO donec perueniatur ad perpendicularē ex B ducendam quae fit =o atque ex hac aequatione tandem determinatur subtensa quaesita x .

Ponamus igitur compendii causa $\frac{\frac{2a^2 - x^2}{2a^2}}{2} = f$ et

$$\frac{\pm x\sqrt{\frac{4a^2 - x^2}{2a^2}}}{2a^2} = p.$$

$$fm + p\sqrt{a^2 - m^2} = a.$$

$$fa + p\sqrt{a^2 - a^2} = \beta.$$

$$f\beta + p\sqrt{a^2 - \beta^2} = \gamma.$$

$$f\gamma + p\sqrt{a^2 - \gamma^2} = \delta. \text{ etc.}$$

pro arcu in duas partes diuidendo determinabitur x per aequationem $\beta = 0$; pro arcu in tres partes diuidendo determinabitur x per aequationem $\gamma = 0$; in quatuor, per aequationem $\delta = 0$. etc.

Si vero numerus partium, in quas diuidendus est arcus non sit rationalis, sed surdus quicunque n statuatur series terminorum quos modo produximus

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$

et per methodum interpolandi quaeratur terminus medius

dius exponenti illi surdo n respondens, qui terminus abicit in seriem infinitam

$$\begin{aligned}x &= \alpha \\&+ (\beta - \alpha)(n-1) \\&+ (\gamma - 2\beta + \alpha)(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right) \\&+ (\delta - 3\gamma + 3\beta - \alpha)(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right) \\&+ \text{etc.}\end{aligned}$$

Fig. II. Ex diuisione arcus facile deducitur modus eundem multiplicandi. Sit datus arcus multiplicandus BH. Rad. AB = a , perpendicularis HO = m , BO = $a - \sqrt{a^2 - m^2} = b$. Sumta HG = BH = $\sqrt{b^2 + m^2}$ ponatur perpendicularis quae sita GN = y , fiet GL = $y - m$, HL = $\sqrt{b^2 - y^2 + 2my}$. = ON.

$$\begin{aligned}\text{Ergo } AN &= AB - BO - ON = a - b - \sqrt{b^2 - y^2 + 2my} \\&= \sqrt{AG^2 - GN^2} = \sqrt{a^2 - y^2}.\end{aligned}$$

Vnde fit $y = \frac{2am(a-b)}{(a-b)^2 + m^2} = GN$ perpendiculari arcus duplicati BG, ex qua per similem aequationem AM = AN - MN = $\sqrt{AF^2 - MF^2}$ eruitur FM perpendicularis arcus triplicati BF etc.

Haec diuisione et multiplicatio arcus quamuis generalius sit, tamen cognito fonte inuentionis considerari potest ut casus singularis huius problematis multo generalioris: data ratione inter abscissas et applicatas alicuius curuae, dividere eandem curuam in partes quotcunque datas, ita ut subtensae partium sint in ratione data quacunque.

Sit

Sit curua data AB, diuidenda in partes quocunque *Fig. III.*
 quarum subtensae sint in ratione data numerorum 1, e, f,
 etc. Abscissa data AC=a, applicata BC=b, ponatur
 subtensa incognita BD=x et determinabitur ex natura
 curuae perpendicularis seu applicata DF per x et quanti-
 tates datas a et b, atque si in hanc ipsam formulam omni-
 bus locis vbi reperitur a substituatur valor inuentus pro
 AF; vbi reperitur b substituatur valor inuentus pro
 DF et omnibus locis vbi reperitur x, substituatur ex, ha-
 bebitur applicata EG determinata per x et quantitates
 datas a, b, e et simili modo reliquae inuestigabuntur, do-
 nec perueniatur ad ultimam euanescentem, qua posita=o
 determinabitur subtensa x per datas quantitates a, b, e, f,
 etc.

Exempl. I.

Diuidatur arcus circuli datus BD in partes quo- *Fig. VI.*
 cunque DE, EF, FG, etc. quarum subtensae sint in ra-
 tione data numerorum 1, e, f, etc. Sit datus vt supra
 radius AB=a, perpendicularis DC=m, ponatur subtensa
 incognita DE=x, erit perpendicularis.

$$\text{Prima EK} \left(\frac{(2a^2 - x^2)m + x}{2a} \right) \sqrt{\left(\frac{a^2 - m^2}{2} \right) \left(\frac{4a^2 - x^2}{2} \right)} = a.$$

$$\text{Secunda FM} \left(\frac{(2a^2 - e^2 x^2)m + ex}{2a} \right) \sqrt{\left(\frac{a^2 - \alpha^2}{2} \right) \left(\frac{4a^2 - e^2 x^2}{2} \right)} = \beta.$$

$$\text{Tertia GN} \left(\frac{(2a^2 - f^2 x^2)m + fx}{2a} \right) \sqrt{\left(\frac{a^2 - \beta^2}{2} \right) \left(\frac{4a^2 - f^2 x^2}{2} \right)} = \gamma. \text{etc.}$$

*Tom. II.**Z*

donec

donec perueniatur ad perpendiculararem euanescentem. Quodsi igitur datus arcus diuidendus sit in duas partes quarum subtensae sint vt 1 ad e determinabitur subtensa quae sita x (euancescente scilicet perpendiculari secunda) per aequationem $\beta=0$, vel, si totam aequationem explicare placeat;

$$\begin{array}{r}
 e^8x^8 - 8e^6x^6 + 8m^2e^4x^4 - 32m^2e^2x^2 + 16m^4 = 0. \\
 + 4m^2e^4 - 16m^2e^4 + 16e^4 - 32m^2 \\
 - 2e^4 + 8e^4 + 64m^2e^2 \\
 + 1 - 16m^2e^2 - 32e^2 \\
 + 8e^2 + 8m^2 \\
 - 8 + 16
 \end{array}$$

si datus arcus diuidendus sit in tres partes quarum subtensae sint in ratione numerorum datorum $1, e, f$, determinabitur x per aequationem $\gamma=0$. etc.

Exempl. 2.

Fig. V. Sit diuidenda curua AB cuius abscissae ad applicatas sint vt cu ad u^n (abscissa data $AC=ca$, applicata $BC=a^n$) in partes quotcunque, quarum subtensae sint in progressione data numerorum $1, e, f$, etc. Ponatur subtensa quaesita $BD=x$, $DE=ex$, $EH=fx$. etc. si fiat $DF=y$, erit $AF=cy^{\frac{1}{n}}$, ergo $FC=DL=ca-cy^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x^2-(a^n-y)^2}$ et quadrando vtrumque

$$e^2a^2-2e^2ay^{\frac{1}{n}}+e^2y^{\frac{2}{n}}=x^2-a^{2n}+2a^ny-y^2.$$

iam valor ipsius $y=DF$ per hanc aequationem expressus ponatur $=\alpha$, et fiat $EG=z$, erit $DK=\alpha-z$, $DE=ex$,

EK

$EK = \sqrt{e^2 x^2 - \alpha^2 + 2\alpha z - z^2} = FG$, ergo $AG = AF - FG = \alpha^{\frac{1}{n}} - \sqrt{e^2 x^2 - \alpha^2 + 2\alpha z - z^2}$ quae si diuidatur per α et quotiens eleuetur ad potestatem n dabit

$(\alpha^{\frac{1}{n}} - \frac{\sqrt{e^2 x^2 - \alpha^2 + 2\alpha z - z^2}}{e})^n = z$, = perpendiculari secundae EG et similiter applicatae reliquae inuestigabuntur donec perueniatur ad ultimam euanescensem, qua posita $= 0$ determinabitur x per datas quantitates.

Vt casum aliquem determinatum huius exempli euoluamus, propositum sit datam parabolam AB vbi abscissae ad applicatas sint vt cu ad u^2 et data abscissa AC $= ca$, BC $= a^2$, ita diuidere in D vt subtenfa BD sit applicatae DF. Fiet $n=2$, $y=x$, ergo subtenfa quaesita BD $= x = \frac{2a^6 + a^2 c^4 + a^4 c^2 + 2a^3 c^2 \sqrt{2a^2 + c^2}}{(2a^2 - c^2)^2}$.

Atque ex his iam satis constare arbitror quomodo data aequatione inter abscissas et applicatas alicuius curvae diuidi possit ipsa curva in partes quotunque datam progressionem subtenarum seruantes, nam quae supra de numero surdo partium in quas diuidendus sit arcus et de multiplicatione ipsius arcus diximus, ea in quavis curva cuius datur aequatio, succedunt. Negari interea non potest, si in multas partes diuidenda sit curva proposita, aequationes pro determinandis subtenfis mirum in modum crescere et differri, sed haec qualiscunque difficultas ex ipsa curvazum natura, non vitio methodi quam secuti sumus, oritur.

Fig. VI.

DE VSV INTERPOLATIONIS
IN SOLSTITIORVM MOMENTIS
INDAGANDIS

Auctore

F. C. Maiero.

M. Sept.
1727.

Difficilis et anceps ab Astronomis iudicari solet solstitiorum inuentio ; nam ob insensibilem fere declinationum solstitialium mutationem , incertum est , quo die et momento sol in maxima declinatione extiterit. Halleius tamen modum excogitauit , quo solstitiorum momenta certius deteguntur quam ab aliis vnam factum fuit : (vid. D. Greg. Elem. Astr. p. 221. etc.) Contigit et mihi vnum alterumue modum comminisci queis forsan paria praestare licet. Primus nititur interpolationis methodo a Neutono tradita (vid. Pr. Ph. N. p. m. 446.) quem et hoc scripto exponere constitui. Cum vero theorema Neutoni ad aliam formam redegerim, opportunum mihi vitum est totam interpolandi doctrinam meo more breuiter recensere prius, eique superstruere solstitiorum inventionem. Alterum modum quem reperi alio tempore communicabo quoque.

Ca-

Caput. I.

De Interpolationibus.

1. Exponantur duae quantitatum datarum series
quaecunque

1	-	-	-	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	-	-	-
2	-	-	-	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	-	-	-

ita vt cuius quantitati prioris seriei respondeat sua competens in secunda serie, quae sit ex priori secundam certam legem genita , dicantur autem prioris seriei quantitates *radices*, posterioris seriei *functiones* suarum radicium. Hic igitur duae poterunt oriri quaestiones ; si enim intermedia alia quaeuis radix assumatur , quaeri potest quae sit eius functio competens ? et vicissim , si intermedia quaeuis alia functio assumatur , quaeri potest, quae sit eius radix competens ? Solutio harum quaestionum vocatur alioquin *Interpolatio*.

2. Si lex cognita sit qua functiones ex suis radicibus generantur , in promtu est quaestionum solutio. Eo igitur res redit , vt lex quaedam pro seriebus expositis inueniatur. Eiusmodi legi inueniendae Neutonus theorema generale praescripsit. Quomodo vero tale theorema inueniri possit , in eo sum vt ostendam.

3. Ponam primo series datas duabus solum constare quantitatibus, sint eae tales:

$$1 \quad - \quad - \quad - \quad m \quad n$$

$$2 \quad - \quad - \quad - \quad a \quad b$$

Supponatur lex qua functiones ex radicibus generantur hac exprimi formula, $\alpha + \beta x$, ubi x quamcunque radicem significat, α autem et β sint constantes ex datis m , n , a et b determinandae hunc in modum.

posito $x=m$ erit

$$1 \quad - \quad - \quad - \quad \alpha + \beta m = a \quad \text{adeoque}$$

$$2 \quad - \quad - \quad - \quad \alpha = a - \beta m$$

deinde posito $x=n$ erit

$$3 \quad - \quad - \quad - \quad \alpha + \beta n = b \quad \text{adeoque}$$

$$4 \quad - \quad - \quad - \quad \alpha = b - \beta n$$

ex secunda et quarta aequatione fit porro

$$5 \quad - \quad - \quad - \quad b - \beta n = a - \beta m$$

$$6 \quad - \quad - \quad - \quad b - a = \beta n - \beta m$$

$$7 \quad - \quad - \quad - \quad \beta = \frac{b-a}{n-m}.$$

ex hac et secunda siue quarta habetur

$$8 \quad - \quad - \quad - \quad \alpha = \frac{an - bm}{n - m}.$$

ergo lex quaesita erit

$$9 \quad - \quad - \quad - \quad \frac{an - bm}{n - m} + \frac{b - a}{n - m} x \text{ siue } a - (a - b) \frac{x - m}{n - m}$$

4. Secundo ponam duas series trimembres tales

$$1 \quad - \quad - \quad - \quad m \quad n \quad p$$

$$2 \quad - \quad - \quad - \quad a \quad b \quad c$$

earumque legem generalem $\alpha + \beta x + \gamma x^2$. Valores itaque constantum α , β , et γ eodem modo reperiuntur quo

quo ante, (§. 3.) ut necesse non sit calculum integrum hoc apponere ; istis legitime substitutis habebitur lex quae-sita $= a - (a-b) \frac{x-m}{n-m} + [a(p-n) - b(p-m) + c(n-m)]$

$$\frac{(x-m)(x-n)}{(n-m)(p-m)(p-n)}$$

5. Tertio , positis duabus seriebus quadrimembribus

$$\begin{matrix} 1 & - & - & - & m & n & p & q \\ 2 & - & - & - & a & b & c & d \end{matrix}$$

earumque lege $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ eruetur, sicut ante, quae-sita lex

$$= a - \left\{ \begin{matrix} +a \\ -b \end{matrix} \right\} \frac{x-m}{n-m} + \left\{ \begin{matrix} +(p-n)a \\ -(p-m)b \\ +(n-m)c \end{matrix} \right\} \frac{(x-m)(x-n)}{(n-m)(p-m)(p-n)} -$$

$$\left\{ \begin{matrix} +(p-n)(q-n)(q-p)a \\ -(p-m)(q-n)(q-p)b \\ +(n-m)(q-m)q-n)c \\ -(n-m)(p-m)p-n)d \end{matrix} \right\} \frac{(x-m)(x-n)(x-p)}{(n-m)(p-m)(q-m)(p-n)(q-n)(q-p)}.$$

Sic pergere licet ad reliquas ferierum species , sed eo opus non est, quia ex inuentis formulis earum cognatio mutua iam affulget. Quaelibet enim sequens maioris seriei formula constat ex antecedenti formula novo aucta membro. Huius autem noui membra genitura ex formatione reliquorum cognosci potest leui adhibita attentione.

7. Supersedeo ergo descriptione generationis membrorum , addoque hic duntaxat membrum quod acce-

accedit priori (§. 5.) formulae, vt ex ea formetur lex se-
rierum quinquimembrium.

Ecce illud!

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} + (p-n)(q-n)(r-n)(q-p)(r-p)(r-q)a \\ - (p-m)(q-m)(r-m)(q-p)(r-p)(r-q)b \end{array} \right\} x \\
 + & \left. \begin{array}{l} + (n-m)(q-m)(r-m)(q-n)(r-n)(r-q)c \\ - (n-m)(p-m)(r-m)(p-m)(r-n)(r-p)d \end{array} \right\} y \\
 & + (n-m)(p-m)(q-m)(p-n)(q-n)(q-p)e \\
 & (x-m)(x-n)(x-p)(x-q) \\
 \hline
 & (n-m)(p-m)(q-m)(r-m)(p-n)(q-n)(r-n)(q-p)(r-p)(r-q)
 \end{aligned}$$

8. Hoc illud theorema est, quod (§. 2.) inuenien-
dum mihi proposui, quodque, vt appareat, alias est for-
mae quam theorema Neutoni. Speciale fit hoc theorema
si loco radicum generalium m , n , p etc. Suntur nu-
meri naturaliter progredientes 1. 2. 3. 4 etc. Erit
enim hoc casu $a + (b-a)\frac{x-1}{1} + (c-2b+a)\frac{(x-1)}{1} \cdot \frac{(x-2)}{2}$
 $+ (d-3c+3b-a)\frac{x-1}{1} \cdot \frac{x-2}{2} \cdot \frac{x-3}{3}$. etc.

9. Possunt radices pro abscissis et functiones pro
applicatis alicuius curuae haberi, (quod fecit Neutonus)
atque ita problema soluere licet de inuenienda curua
parabolici generis quae per data puncta transeat. Sed
propositum meum non fert vt plura de hac
re

re dicam. Supereft , vt vſum interpolationis in ſolſtiis indagandis commonſtem.

Caput II.

De inueniendis ſolſtitiorum momentis.

10. Obſeruentur ante et post ſolſtium altitudines ſolis meridianae, ex quibus eligantur quatuor qualescunque. Ex. gr. hoc quem agimus anno 1727 Petroburgi obſeruatae fūnt ſequentes altitudines superioris limbi ſolaris

Iunii die, ft. v.

4to erat alt. ☉	=	53°. 39'. 40".
7 - -	=	53. 46. 10.
11 - -	=	53. 49. 10.
14 - -	=	53. 46. 45.

eligo autem quatuor, quia hic numerus omnium comodiffimus eſt. Possem plures, ſi prolixum calculum non fastidirem; possem pauciores ſi laxus eſſe vellem.

11. Porro, vt calculus omnium fiat compendioſiſimus, pro numero qui diem primae obſeruationis signat (hic pro 4.) ponatur ☉, itemque pro altitudine meridianā prima. Reliqua ſequantur ſuo ordine. Hoc nimirum:

Dies	Altitudines
○ - - -	0" = 0.15
3 - - -	390" = 26.15
7 - - -	540" = 38.15
10 - - -	425" = 29.15.

Tom. II.

A a

Imo

Imo vt omnis vitetur prolixitas , negligendo communem factorem functionum, fiant

$$\begin{array}{rccccc} \text{dies} & - & - & - & 0. & 3. & 7. & 10. \\ \text{altitud.} & - & - & - & 0. & 26. & 38. & 29. \end{array}$$

12. Habeantur dies pro radicibus et altitudines pro functionibus, vt formula condi possit generalis quae omnes altitudines ad datos quoscunque dies dierumque momenta contineat , idque per formulam §. 5. exhibtam , in qua $m=0$, $n=3$, $p=7$, $q=10$, $a=0$, $b=26$, $c=38$ et $d=29$. Quia vero in hoc negotio breuitatis gratia semper ponitur $m=a=0$ ideo formula dicta commodiori hac forma poterit exhiberi

$$\begin{aligned} & + \left(+ \frac{bqp}{n(p-n)(q-n)} - \frac{cnq}{p(p-n)(q-p)} + \frac{dnp}{q(q-n)(q-p)} \right) x \\ & - \left(+ \frac{b(p+q)}{n(p-n)(q-n)} - \frac{c(n+q)}{p(p-n)(q-p)} + \frac{d(n+p)}{q(q-n)(q-p)} \right) x^2 \\ & + \left(+ \frac{b}{n(p-n)(q-n)} - \frac{c}{n(p-n)(q-p)} + \frac{d}{q(q-n)(q-p)} \right) x^3. \end{aligned}$$

13. Surrogatis surrogandis habebitur communis formula omnium altitudinum $= \frac{2309x - 160xx - x^{xx}}{210}$, quae sua vniuersalitate etiam complectitur maximam altitudinem, hoc est, solsticialem.

14. Ut igitur momentum maxima altitudinis (h. e. valor ipsius x .) impetretur , formulæ elementum nihilo aequandum est, sicuti praecipitur in methodo de maximis et minimis, quo facto sequens emergit aequatio.

$$3x^2 + 320x - 2309 = 0.$$

15. Reducta hac aequatione , fiet,

$$x = 6.784.$$

maxima ergo altitudo incidit in diem 6. 784 sed huic diei

diei quaternarius est addendus (ob §. 11.) ut emergat
 $\frac{D}{H}$
 solstitii momentum factum Iunii die $10.784 = 10.48.19.$

16. Substituto hoc valore ipsius $x.$ (§. 15.) in formula altitudinum, (§. 13.) adhibitaque dexteritate, cuius te admonet articulus 11, erit superioris solaris marginis altitudo maxima

auferatur semidiam. \odot	\equiv	$53^{\circ}.$	$49'.$	$11''.$
alt. max. centri \odot	\equiv	$53.$	$35.$	$20.$
auferatur refractio	\equiv			$56.$
alt. max. \odot . vera	\equiv	$53.$	$32.$	$24.$
auferatur declinatio \odot max.	\equiv	$23.$	$29.$	
alt. aequat.	\equiv	$30.$	$3.$	$24.$
alt. Poli Petroburg.	\equiv	$59^{\circ}.$	$56'.$	$36.$

17. Manfredi Ephemerides hoc momentum statuunt ad Iunii diem $10.$ $16.$ $32.$
 meae vero tabulae solares ad Iunii D. $10.$ $15.$ $26.$

18. Ex aliis altitudinibus inueni idem momentum
 $\frac{D}{H}$
 solstitii incidisse in Iun. $10.$ $15.$ $21.$ quibus ta-
 item ex aliis, in Iun. $10.$ $15.$ $7.$ bulae
 meae pulcre congruunt.

De Constructione Aequationum Differentialium primi gradus per viam separationis indeterminatarum.

Auct.

I. Hermanno.

M. Aug.
1726.

Poste aquam in Commentariis superioris Anni pag. 149. seqq. theorematum quaedam pro inuenientis integralibus quantitatum differentialium exhibui, quae pluralitas indeterminatarum et secunda differentialia non morantur, atque adeo late patentia sunt, ut pluribus exemplis ibi adductis id monstravi. Communicabo nunc aliud Theorema non minus vtile, cuius ope innumerarum aequationum differentialium primi gradus, quae forte aliis methodis inaccessae haberi possint, per viam separationis indeterminatarum cum suis differentialibus a se invicem, constructio, concessis quadraturis, exhiberi potest. Omnes aequationes illae ad hanc $y = Px + Q$ reuocantur, in qua x et y sunt coordinatae curuae construendae, P vero et Q vtlibet compositae sint ex tertia indeterminata z et constantibus. Ex hac aequatione inueniri possunt aestimationes indeterminatarum x et y per z et constantes (saltem transcendenter) in hypothesi, quod $dy = zdx$. Huc facit sequens

Theo-

Theorema.

Si sint Log. R = f(dP : zR - PR) et dy = zdx, erunt x = RS, et y = PRS + Q indeterminatae aequationis y = Px + Q. Posset hoc statim synthetice demonstrari, sed malo analysin eius hoc loco adducere. Aequatio y = Px + Q differentiata praebet dy = Pdx + xdP + dQ, et diuidendo hanc per (z - P)x proueniet $\frac{dx}{x} = \frac{dP}{z-P} + \frac{dQ}{(z-P)x}$ (aut faciendo $\frac{dR}{R} = \frac{dP}{z-P}$, et $\frac{dQ}{(z-P)x} = dZ = \frac{dR}{R} + dZ$), et multiplicando aequationem per Rx, inuenietur Rdx = xdR + RxdZ, vel etiam $\frac{Rdx - x dR}{RR} = \frac{x dZ}{R}$ (vel restituto valore dZ) = $\frac{dQ}{zR - RP} = dS$, et sumitis integralibus $R^{-1}x = S$, et $x = RS$, abit ergo $y = Px + Q$, in $y = PRS + Q$, quare si Log. R = f(dP : z - P), et $S = f(dQ : zR - PR)$ erunt $x = RS$, et $y = PRS + Q$. Primo intuitu hoc theorema nullius aut exigui saltem usus esse, videbitur, sed exempla quae sequuntur, et plura alia, quae propter temporis angustiam intacta praeterire cogor, ostendent quam late patens sit.

Exemplum 1.

Sit $adx + bdy + cxdx + exdy + fydx$ aequatio construenda; haec vero per hypothesin $dy = zdx$, mutatur in $a + bz + cx + czx + fy = 0$. Ista vero ad formam theorematis redigetur, ponendo $P = (-ez - c) : f$, et $Q = (-bz - a) : f$, inueniuntur autem $dP : z - P = -edz : (e + f)z + c = R^{-1}dR$, hinc $R = [(e + f)z + c]^{-e:f}$, et $dS (= dQ : zR - PR) = [(e + f)z + c]^{-f:e+f} \times bdz$, cuius

integralis est $S = \Delta - \frac{b}{e} [(e+f)z + c]^{e:e+f}$, existente Δ constanti quantitate, hinc elicetur $x (= RS) = \Delta [(e+f)z + c]^{-e:e+f} - \frac{b}{e}$, ex ista vero deriuatur sequens $[(e+f)z + c]^{e:e+f} \times (ex + b) = e\Delta = ex$ acquatione vero $a + bz + cx + exz + fz = 0$, obtinetur $(e+f)z + c = \frac{-efx - (cef + ff)y - ae - af}{ex + b}$ quare inuenta aequatio abit in $(efx + efy + fzy + ae + af + bc)^e \times (ex + b)^f = C$, vbi C est alia quantitas constans.

Exemplum 2.

Si quaeratur curua huius proprietatis, vt quaelibet eius tangens, sit ad partem axis inter tangentem et initium curuae, in data ratione n ad 1, inuenietur aequatio differentialis eius esse $nx dy - ny dx = y ds$, quae iterum construi potest ponendo $dy = z dx$, et si praeterea fiat $r = \sqrt{(zz+1)}$, mutabitur aequatio in $nzx - ny = ry$, eritque adeo $P = \frac{nz}{n+r}$, et $Q = 0$. Atqui $\frac{z \cdot dP}{z - P} = \frac{n dz}{rz} - \frac{ndr}{nr+rr} = \frac{dr}{r}$ (propter $zz = rr - 1$) $\frac{n dr}{rr-1} - \frac{ndr}{rr+nr} = \frac{1}{2} ndr - \frac{1}{2} ndr = \frac{-dr}{r} + \frac{dr}{r-\frac{n}{r+n}}$, hinc elicetur $R = (r-1)^{\frac{n}{2}} \times (r+n) : (r+1)^{\frac{n}{2}} \times r = x$. Vel $(r-1)^{\frac{n}{2}} (r+n) = rx(r+1)^{\frac{n}{2}}$, vel $(r-1)^n \times (r+n)^2 = rrxx(r+1)^n$, sed aequatio $nzx - ny = ry$, praebet $z = z = nnxx + Qy : nnxx - yy$, existente $Q = V(nnxx + nnyy - yy)$ adeoque $r (= nzx - ny : y) = ny + nQx : nnxx - yy$. Quod si in praecedenti aequatione substituatur, proueniet $(nyy + yy - nnxx + nQx)^n \times (n$

$\times (n^3 xx + n Qx)^2 \times C = (nnxx + nyj - yy + nQx)^n$
 $\times (ny + nQx)^2 xx$. Aequatio curuae quaesitae, ex qua cognoscitur eam fore algebraicam quoties n est numerus rationalis.

Si $n=1$, fiet $Q=x$, et praecedens aequatio mutabitur in $xx=2cy-yy$, facta nempe $C=c$.

Si $n=2$, fiet $Q=\sqrt{4xx+3yy}$ et aequatio generalis mutabitur in sequentem ($3y^2-4xx+2Qx$)
 $\times (4xx+Qx) \times a = (4xx+2Qx+yy) \times (Qx+yy)x$.

Plures solutiones Problematis huius exempli, quod Cel. Ioh. Bernoulli Geometris olim proposuit, a praestantissimis eorum iam pridem exhibitae fuere, sed nulla adhuc, quod sciam, analysis eius publice extitit.

Exemplum 3.

Sit construenda aequatio $xdx+ydy=dx\sqrt{xx-4yy}$, quae facta $dx=zy$ mutatur in $xz+y=z\sqrt{xx-4yy}$, ex qua elicitur $x=-(4zz+1)y:2z$, quare $P=-(4zz+1):2z=-2z-\frac{1}{2}z$, et $z-P=3z+\frac{1}{2}z$, propterea inuenitur $R^{-1}dR=(-dP:z-P)=\frac{dz}{z}-\frac{1}{6}\frac{zdz}{zz+1}$, adeoque $(6zz+1)^{\frac{1}{2}}\times R=az$, sed propter $xz+y=z\sqrt{xx-4yy}=Qz$, posita nunc $Q=\sqrt{xx-4yy}$, et $z=y:Q-x$, et $(6xz+1)=2xx+2yy-2Qx:2xx-4yy-2Qx$; fiet
 $(2xx-2Qx+2yy)^{\frac{1}{2}}\times (Qx-xx)=(2xx-4yy-2Qx)^{\frac{6}{7}}ay$, haec

haec vero aequatio, institutis debitibus reductionibus, reducitur ad simpliciorem $(\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}Q) \times (x - Q)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{6}{5}}$.

Hoc exemplum ex Cel. *Gabrielis Mansfredi Tract.* de Constructione aequationum differentialium primi gradus pag. 137. sumtum est, vbi etiam curuae aequationem algebraicam ab hac in specie differentem, sed reapse consentientem non modo inuenit, sed analysin suam quoque exposuit. Haec aequatio naturam illius lineae explicat quae omnes parabolas circa communem axem descriptas quarum Parametri distantiis verticum a dato in axe punto aequales sunt, ad angulos rectos traicit. Huius Traectoriae Cl. *Ioh. Bernoulli* etiam aequationem algebraicam exhibuit in Comm. Acad. Scient. Parisiensis.

Exemplum 4.

Dividere Parabolam Conicam cuius Parameter est $=a$, in data ratione n ad 1. Dicantur abscissae, maior y et minor x , et inuenietur aequatio differentialis dy $\sqrt{4y+a} = ndx\sqrt{4x+a}$, fiat nunc iterum $dy = zdx$, et inuenietur $y = \frac{nnx}{zz} + \frac{ann-4azz}{4zz}$, quare sunt in hoc exemplo $P = nn : zz$, et $Q = (ann-azz) : 4zz$, adeoque $dP = -2mdz : z^3$, et $z - P = (z^3 - nn) : zz$, hinc $R^{-1} dR$ $(= dP : z - P) = -2mdz : z^4 - nnz$, et $dQ = -anndz : 2z^3$.

Fiat $z^3 = nnu$, seu $z = n^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}}$, et fieri $\frac{dR}{R} (= \frac{dP}{z - P}) = \frac{-2du}{3uu - 3u} = \frac{2du}{u} - \frac{2du}{3u-3}$; atque adeo $R = u^{\frac{2}{3}} \times (u-1)^{-\frac{2}{3}}$, et dS $(= \frac{dQ}{zR - PR}) = -\frac{1}{6}adu : u^{\frac{5}{3}} \times (u-1)^{\frac{1}{2}}$, et sumtis integralibus $S = \Delta - \frac{1}{4}au^{-\frac{2}{3}} \times (u-1)^{\frac{2}{3}}$; vbi Δ est constans. Verum x $(=$

$(=RS)=\Delta \times u^{\frac{2}{3}} \times (u-1)^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}a$, adeoque $(4x+a)=4\Delta \times u^{\frac{2}{3}} \times (u-1)^{-\frac{2}{3}}$. Aequatio vero $y=\frac{n nz}{zz} + \frac{ann-azz}{4zz}$, praebet $z=u \times (4x+a)^{\frac{1}{2}} \times (4y+a)^{-\frac{1}{2}}$, adeoque $u(=z^3 : nn)=n \times (4x+a)^{\frac{3}{2}} \times (4y+a)^{-\frac{3}{2}}$, qui valor in aequatione paulo ante inuenta $4x+a=4\Delta \times u^{\frac{2}{3}} \times (u-1)^{-\frac{2}{3}}$ sufficitus, et reliquis necessariis reductionibus peractis, suppeditabit aequationem $y=-\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}[n(4x+a)^{\frac{3}{2}} - (n-1)a^{\frac{3}{2}}]^{\frac{2}{3}}$, qua magnitudo abscissae y definitur, arcus parabolae, qui debet esse ad alterum arcum cuius abscissa x , in data ratione n ad 1.

Hoc theorema est prorsus nouum, et si enim Cel. *Job. Bernoulli* in *Actis Erudit.* 1698. elegantem modum exposuit, quo per comparationem trapeziorum Hyperbolicon cum arcibus Parabolicis, duo arcus assignari possunt, datam ad se inuicem rationem habentes, et post ipsum *Illustr. Hospitalius* ex eodem fundamento, sed aliam viam secutus in *Traclatu Analytico de Sectionibus Conicis*, tales arcus pariter elicuit, non sunt tamen hi arcus datam rationem habentes terminati ad verticem, immo neuter eorum, sed maior minorem semper includit. In hac vero formula ambo arcus parabolae datam rationem seruantes incipiunt in vertice parabolae.

Scholium I.

Methodus nostra in altioribus aequationibus non
Tom. II. B b ces-

cessat , modo hae aequationes altiores in duos factores discerpi possint , quorum vnuis indeterminatas y et x tantum in primo gradu consistentes contineat , quod , si non semper , saepe tamen effici potest . Sit v. gr. aequatio $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$, in qua litterae capitales A, B, C, D etc. quantitates ex tertia indeterminata z et constantibus utlibet compositas denotant . Aequatio duos factores $\alpha y + \beta x + \gamma$, et $y - \delta x + \varepsilon$ admittet , existentibus

$$\alpha = A$$

$$\beta = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}K , \text{ posita } K = \sqrt{(BB - 4AC)}$$

$$\gamma = (-2AE + BD) : K$$

$$\delta = (-B + K) : 2A$$

$$\varepsilon = (2AE - BD + DK) : 2AK , \text{ modo } F \text{ sit}$$

$$= (2AE - BD + DK) \times (-2AE + BD) : 2AKK .$$

Vterque factor ad rem faciet , nam ponendo $\alpha y + \beta x + \gamma = 0$, inuenientur $P = -\beta : \alpha$, et $Q = -\gamma : \alpha$, vbi singulae α , β , γ per A, B, C, D , E (quae ipsae continent indeterminatam z et constantes) datae sunt , adeoque aequationes Log. $R = \int dP : z - P$, et $dS = dQ : zR - PR$, concessis quadraturis construi possunt.

Sin vero misso factore $\alpha y + \beta x + \gamma$, alterum $y - \delta x + \varepsilon$ adhibere velimus fient $P = \delta$, et $Q = -\varepsilon$, ethae quantitates etiam datae erunt per z et constantes atque adeo per quadraturas aequatio ipsa construi potest.

Scholium 2.

Quia vero modus scholii praecedentis conditione aliqua limitatur , quae impedit quo minus aequatio generalis

ralis $Ayy + Bxy + Cxx + Dy + Ex + F = o$ construi possit, alia via est indicanda.

Si assumantur $M = y + ax - b$, et $N = cy + x + f$, vbi a, b, c et f sunt coefficientes assumptiae, inuenientur $y = -M + aN - af - b$: $ac - 1$, et $x = cM - N + bc + f: ac - 1$. Hinc $AMy + CNx = Ayy + Aaxy + Cxx - aby + Cfx$
 $+ Cc$
 $= -AMM + AaN - CNN - (Aaf + Ab)M + (Cbc + Cf)$
 $+ Cc$

$N : ac - 1$ (aut positis $Aa + Cc = B$, $\alpha = -Aaf - Ab$, et $\beta = Cbc + Cf$) $= -AMM + BMN - CNN + \alpha M + \beta N : ac - 1$. Quod si praeterea sint $-Ab = D$, vel $b = -D:A$, et $Cf = E$ seu $f = E:C$, fiet $Ayy + Bxy + Cxx + Dy + Er = -AMM + BMN - CNN + \alpha M + \beta N : ac - 1 = o$, sed aquatio $-AMM + BMN - CNN + \alpha M + \beta N = o'$, praebet $2AM = +BN + \alpha + \sqrt{[KKNN + (2B\alpha + 4A\beta) \times N + \alpha\alpha]}$, existente, vt antea, $K = \sqrt{BB - 4AC}$, sed vt haec ultima rationalis fiat, faciamus $K\alpha = B\alpha + 2A\beta$, aut scribendo ad abbreviandum G pro $B - K$, erit $-G\alpha = 2A\beta$, vel restituendo aestimationes litterarum α et β , fiet $AGaf + AGb = 2ACbc + 2Acf$, (vel propter $Ab = -D$, et $f = E:C$) $\frac{AG}{C}a - DG = -2CDc + 2AE$, hinc enim eliciuntur,

$a = (2ACE + CDG - 2CCDc) : AGE$, et propter $Aa + Cc = B$, reperietur

$c = (2ACE - BEG + CDG) : 2CCD - CGE$. et

$a = (8ACCDE - 2BCDEG - 2ACEEG + 4CCDDG - CDEGG) : (2CD - EG) \times AFE$. Item

$a = (8ACDE - 2BDEG - 2AEEG + 2CDDG - DEGG) : (2CD - EG) \times G$

$b = (-AEEG + BDEG - CDDG) \times (2CD - EG) \times A$

Ex aequatione vero $2AM = BN + a + \sqrt{[KKN + (2Ba + 4A\beta)N + aa]}$ fit $2AM = (B + K)N + 2a = HN + 2a$ posita $H = B + K$. Atqui $2AM = 2Ay + 2Aax + 2Ab = 2Ay + 2Aax - 2D$, et $HN + 2a = Hcy + Hx + Hf + 2a$, Ergo $2AM = HN + 2a$ producit

$y = \left(\frac{2Aa - H}{cH - 2A}\right)x - \left(\frac{D + fH + 2a}{cH - 2A}\right)$; quare si fiant

$P = (2Aa - H) : cH - 2A$, et $Q = -(D + fH + 2a) : cH - 2A$ habebimus $y = Px + Q$, et sic reducta est aequatio $Ayy + Bxy + Cxx + Dy + Ey + o$, ad formulam requifitam, si litterae capitales A, B, C, D et E datae fint per indeterminatam z et constantes, nam singulae a , b , c , f , α et β perhasce A, B, C, etc. datae sunt, atque adeo aequatio $Ayy + Bxy + \text{etc.} = o$ construi potest per quadraturas. Sed constructio secundum hunc modum perficienda aliquas restrictiones patitur, nempe excipiendi sunt casus ubi $a = \frac{1}{c}$, aut $c = 2A : H$, vel $2CD = EG$.

Ex-

Exempl. 4.

Si construenda sit aequatio $ayydy + bxydx + cxdy + exydx + fxxdy + gxxdx + hydy + kydx + lxdy + mxvdx = o$. Fient facta $dy = zdx$, $A = az + b$, $B = cz + e$, $C = fz + g$, $D = bz + k$, et $E = lz + m$, hae quantitates in formulis praecedentibus, valores litterarum assumptiarum definientibus surrogatae, praebebunt P et Q per z et constantes expressas, adeo ut aequatio per quadraturas construui possit. Sed ad vitandam prolixitatem in aequatione differentiali construenda, sint a, g, b et m singulae $= o$, et $bf = ce$, et $bf = ce$ reperientur salvo errore calculi litterae assumptiae, nempe

$$b = k : b ; c = +b : cz ; f = l : f$$

$$a = (bfkl - bell)z + cekk - 2ell : efk - eel ; G = 2e \text{ et } H = 2cz,$$

$$a = (2ccekk - cefk - ceel)z + 2cffkk : befkl - beell$$

Sed hoc casu fit $cH = 2A$, quare praecedentes determinationes in casu quod $ce = bf$, non inferuiunt, sed si b, c, e, f sint quaecunque aliae quantitates aequatio per praecedentia construui poterit.

Aliter adhuc aequatio $Ayy + Bxy + Cxx + Dy + Ex + F = o$, deprimi potest, quomodo cunque coëfficientes A, B, C, D, E, et F compositae sint ex tercia indeterminata z , et quantitatibus constantibus, affumendo has duas aequationes $y = t + au - b$ et $x = t - u + c$, in quibus, ut appareat, t et u sunt nouae indeterminatae, et a, b, c sunt coëfficientes assumptiae. Nam si hae nouae indeterminate t et u , in aequationem datam $Ayy + Bxy + Cxx + Dy + Dx + F = o$, introducantur, nascentur alia aequatio, quae, factis

$$e = (ABE - 2ACD + BBE - 2BCD + BCE - 2CCD) : \\ (4AAC - ABB + 4ABC + 4ACC - B^3 - BBC).$$

$$f = (BDE + BEE + CDD - CEE - (B + 2C)^2 F) : \\ 4AAC - ABB + 4ABC + 4ACC - B^3 - BBC$$

$$b = -e + \sqrt{ee + f}$$

$$c = [(2A + B)b - E] : (B + 2C)$$

$$a = (Bb - 2Cc - E) : (2Ab - Bc - D)$$

mutabitur in $(A + B + C)tt + (2Aa + Ba - B - 2C)tu + (Aaa - Ba + C)uu = 0$, haec vero, factis

$$2f = (2Aa + Ba - B - 2C) : (A + B + C),$$

$g = (Aaa - Ba + C) : (A + B + C)$, et $k = f + \sqrt{(ff - b)}$ abit in $t = ku$. Sed aequationes assumtae $y = t + au - b$, et $x = t - u + c$, praebent quoque $t = (y + ax + b - ac) : a + 1$, et $u = (y - x + b + c) : a + 1$. Adeoque ex aequatione inuenita $t = ku$, elicetur $(1 \cdot k)y = -(a + k)x + ac + bk + (ck - b)$, erunt ergo $P = (a + k) : (k - 1)$ et $Q = (ac + bk + ck - b) : (1 - k)$ et aequatio finalis $y = Px + Q$ quae inuenienda erat. Nam ex catalogo praecedenti liquet singulas litteras assumtas a, b, c, e, f, h , et k atque adeo P et Q datas esse in A, B, C, D, E , et F : itaque per theorema nostrum aequatio proposita $Ayy + Bxy + Cxx + Dy + Ex + F = 0$, concessis quadraturis, construi potest.

Sub hac eadem aequatione continetur quoque ista
 $dy = ax^m dx + bx^p y^q dx$ circa quam tum Nob. Com. Riccatus,
 tum

tum *Cl. Cl. Bernoulli* Fratres *Nicolaus* et *Daniel*, multa curiosa et elegantia iam inuenientur, nemo autem quod sciam, generaliter eius constructionem obtinuit, aut saltem dedit. Alia vero occasione eam exhibebo.

Hac occasione monendum esse duxi, in utroque meo schediasmate de Theoria generali Motuum variatorum, et in praesenti de Constructione Aequationum, praecipua quidem in Conuentibus Societatis ordinariis praelecta fuisse, nonnulla vero quoque occasione sic ferente recens accessisse. Huius pertinent Theorematata nonnulla Bernoulliana quae in Schediasmate illo demonstrata exhibentur, quae Celeberr. eorum Autor diu postquam scriptum illud in Conuentu legi, hic misit, sed ob materiae affinitatem tamen ea in dicto Schediasmate attingere volui. Sic reuidendo alteram schediam de Constructione Aequationum differentia- lium, non abs re iudicauit si nonnulla exempla iis quae praelegeram nunc recens adiicerem.

THEO-

THEOREMATA SELECTA
PRO CONSERVATIONE VIRIVM
VIVARVM DEMONSTRANDA ET EXPE-
RIMENTIS CONFIRMANDA.

Auct.

Io. Bernoulli,

*Excerpta ex Epistolis datis ad filium Danielem, 11. Oct.
et 20. Dec. (stil. nou.) 1727.*

Theorema I.

VELOCITAS aquae, per foramen valde paruum in fundo vasis exilientis tanta est, quantam graue acquirit libere cadendo ex altitudine aquae supra foramen.

Theorema II. Sit curua data CbB , (fig. 1.) per quam descendat graue B post se in altum trahens aliud graue minus A ope funiculi ACB trochleam C ambientis. Quaeruntur velocitates ponderum A et B . Sit $CB=x$, $EB=y$, earum differ. $Bn=dx$, $Bo=dy$, $Bb=ds$, altitudo verticalis TV , per quam graue liberum cadens celeritatem acquirit, quam mobile B habet $=t$, erit $t = \frac{ds^2 + By - Ax}{Bds^2 + Adx^2}$. Haud difficilius est problema, si etiam graue A super curua aliqua data moueatur.

Theor. III. Sit tubus cylindricus $ACBH$ (fig. 2.) utrobique apertus atque inflexus in duo crura BA et CH ad

ad partem horizontalem BC; sit sinus anguli ABC = p et sinus anguli HCB = q existente nimis sinu toto = 1. Sit porro ille tubus aqua plenus usque ad horizontalem MN, voceturque L longitudo partis tubi MBCN aqua plenae. Erunt agitati liquoris in hoc tubo oscillationes tam maiores quam minores omnes tautochronae atque eiusdem durationis cum oscillationibus minimis penduli alicuius simplicis, cuius longitudo = $\frac{L}{p+q}$.

Coroll. Si anguli ABC et HCB sunt recti, qui unus casus est a Newtono solutus, erit longitudo penduli simplicis, quod oscillanti aquae isochronum est, = $\frac{1}{2}L$ ut inuenit Newtonus.

Theorema 4. Chorda musica datae longitudinis et ponderis tensa a dato pondere inuenit facere vibrationes, quemadmodum definit Taylorus in transactiobibus Londin.

Theorema 5. Sit iam chorda ALB (fig. 3) crassitie et ponderis expers, onerata in medio pondusculo dato per exiguo L tensa autem dato pondere P magno; dico numerum vibrationum huius chordae durante una oscillatione penduli datae longitudinis D fore = $2V\left(\frac{D \times P}{A B \times L}\right)$.

Theorema 6. Iisdem positis sit chorda AB (fig. 4.) onerata duabus pondusculis aequalibus et aequidistantibus, cum a se inicem tum ab extremitatibus A et B. Vocetur vnumquodque pondusculorum $\frac{1}{2}L$, dico fore numerum vibrationum (oscillante semel pendulo dato D) = $V\left(\frac{6D \times P}{A B \times L}\right)$.

Tom. II.

C c

Theo-

Theorema 7. Si manentibus reliquis , sint tria ponduscula singula $= \frac{1}{3}L$, erit numerus vibrationum chordae $= 2V\left(\frac{6 - 3\sqrt{2}D \times P}{AB \times L}\right)$. Si ponduscula sint quatuor singula $= \frac{1}{4}L$ erit numerus vibrationum , quem vocabo, $N = 2V\left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} \times D \times P}{\sqrt{5} + \sqrt{3} \times \frac{1}{4}AB \times L}\right) = 2V\left(\frac{2\sqrt{5} - \sqrt{3} \times D \times P}{\sqrt{5} + \sqrt{3} \times AB \times L}\right)$. Si fuerint quinque ponduscula, quorum unumquodque $= \frac{1}{5}L$, habebitur $N = V\left(\frac{60 - 3\sqrt{3} \times D \times P}{AB \times L}\right)$. Sint tandem ponduscula sex , singula $= \frac{1}{6}L$, erit $N = V\left(\frac{42xx - 126ax + 168aa \times D \times P}{2xx + ax + aax \times AB \times L}\right)$, ubi notandum , per a me intelligere numerum quemlibet pro libitu assuntum , atque tum x esse radicem huius aequationis $x^3 - axx - 2axx + a^3 = 0$. Eadem methodo, quam habeo , progredi possum ad determinandos numeros vibrationum pro pluribus pondusculis quibus chorda, oneata supponi potest , sedpergo ad alia.

De grauibus rotando descendantibus in plano inclinato vel in curua aliqua vel etiam verticaliter suspensis ex filis circa axes circumvolutis sese euoluendo, sequentia habe.

Theor. 8. Sit graue aliquod cuiuscunque figurae BFG, (fig. 5.) cuius centrum gravitatis sit C, ex quo et radio CA descriptus AHL circulus representet axem, cui circumvolutum intelligatur filum aliquod secundum ordinem litterarum EALHALHAL etc. Ipsum vero graue sua gravitate descendere concipiatur, id quod fieri non potest nisi rotando, dum nimirum axis ex filo sese euol-

euoluit hoc litterarum ordine AHLAHL. Quaeritur, postquam ex altitudine EA quacunque descenderit graue, quanta sit velocitas centri C.

Solutio. Vocetur D distantia centri oscillationis figurae rotantis a puncto suspensionis, quod vbiunque in circumferentia AHL sumi potest. Sit radius CA=a; EA altitudo verticalis, per quam graue rotando descendit =R, altitudo quæsita per quam graue aliquod liberum descendere debet, vt acquirat velocitatem æqualem illi quam habet grauis rotantis centrum gravitatis C=z; dico fore $z=\frac{aR}{D}$.

Coroll. 1. Si grane BFG est circumferentia circuli vel superficies cylindrica, cuius radius CB=b, erit $z=aaR:(aa+bb)$.

Coroll. 2. Si vero sit ipse circulus vel cylindrus, erit $z=2aaR:(2aa+bb)$.

Coroll. 3. Si sit superficies sphærica, habebitur $z=3aaR:(3aa+2bb)$.

Coroll. 4. Et tandem si sit globus grauis, fiet $z=5aaR:(5aa+2bb)$. Notandum, in his omnibus, ponit axem AHL gravitatis expertem.

Scholion. Possent experimenta institui, vt pateret an centrum C haberet velocitatem, quam hic assignauimus, quo ipso cuilibet manifesta fieret conseruatio viuum viuarum, cum præsertim pro lubitu temperare licet descensum, vt centrum tam lente, quam volumus, descendat, adeoque tempus descensus per quamlibet al-

titudinem EA commode comparari possit cum descensu naturali grauium cadentium , quae nimurum uno secundo 15. ped. Reg. Paris. circiter a quiete delabuntur. Ut enim lentissime descendat , minuenda est tantum quantum satis ratio CA ad CB. Possunt quoque ex principio conseruationis virium viuarum determinari leges communicationis motus pro corporibus perfecte elasticis, quae rotando se mutuo impellunt , sed breuitatis gratia eas hic non exprimo , sufficit monere eas ex parte dependere a figura corporum rotantium. Multa alia nunc taceo , quae commode per theoriam virium viuarum explicari aut solui poslunt , quae vero ex aliis principiis difficulter nec sine ambagibus determinantur , quibus annumerio , quae superius dixi circa vibrationes chordarum et oscillationes fluidorum in tubis reflexis , nec non ea , quae de grauibus rotando descendantibus vel de corporibus rotando in se inuicem impingentibus exposui. Caetera argumentum plane est nouum et nulli haec tenus quantum scio consideratum. Demonstrationes alia vice mittam.

Monitum.

„ Experimenta desiderata in scholio Theorematis 8.
 „ fuerunt instituta accuratissime in diuersis corporibus,
 „ eaque plane cum Theoria conuenire obseruatum fuit.
 „ In sequenti epistola ad filium data talia ad hoc argu-
 „ mentum pertinentia atque in latinum sermonem versa
 „ rescripsit horum theorematum Auctor.

Non dubitaui , quin facile inuenires demonstratio-
 nes

nes theorematum meorum ope principii conseruationis virium viuarum et gaudeo, te alia eruisse similia: gratum quoque fuit ex te intelligere, tam egregie theoriam istam experimentis confirmari. Sententiam meam de tensione fili corpus rotans sustinentis in theoremate octauo, quam scire cupis, iam tecum communicabo, ex qua patebit, esse tensionem fili constantem durante toto descensu mobilis rotantis, cuiuscunque sit figurae. Sit IKL (fig. 6.) scala velocitatum naturalium, cuius nempe applicatae MK, NL designent velocitates acquisitas mobilis libere cadentis ex altitudinibus IM, IN. Sit alia curua IRS, cuius applicatae PR, QS exprimant velocitates centri gravitatis mobilis alicuius ex filo suspensi rotando ab initio I descendenter per euolutionem fili. A gantur ex punctis infinite propinquis K, L rectae KT, LS axi IQ parallelae secantes curuam IRS in R et S; erunt ductis applicatis RP, SQ ex natura velocitatum mobilis rotando descendenter (nominatis IP vel IQ=R, et IM vel IN=Z, PQ=dR, MN=dZ) $Z = \frac{aR}{D}$ (vid. epistolam meam anteriorem), hoc est, D. a :: R. Z :: IQ IN :: IP. IM :: PQ. MN; vnde ob constantem rationem inter IQ et IN vel inter IP et IM, patet curuam IRS esse etiam parabolam; hinc ob velocitates PR, MK aequales erit tempusculum per PQ ad tempusculum per MN vt PQ ad MN, seu vt IP ad IM :: R. Z :: D. a. Sumta iam PO = MN, ductaque applicatis parallela OV secans KR productam in Y et elementum parabolae RS in X; fingamus filum, quando mobile peruenit in P subito rumpi, ita

vt acquisita sua velocitate $PR=MK$ perget libere descendere, quare in O habebit velocitatem $OV=NL$, et incrementum velocitatis momentaneum erit $YV=ZL$. Quia autem non rupto filo, incrementum velocitatis, eodem momento acquisitum est tantum YX , liquet reliquum XV impediri a filo, idemque adeo impendi in tensionem fili. Vnde ita argumentor: Incrementa et decrementa velocitatis in eodem corpore et eodem tempusculo producta sunt vt vires, quae ea producunt; est ergo tensio fili, quae dicatur T , ad vim gravitatis mobilis rotantis, hoc est, ad eius pondus, quod vocetur P , vt VX ad $VY=ST$, adeoque vt SV ad RT vel vt OQ ad PQ h. e. vt $PQ-MN$ ad PQ . Vnde T ad $P::dR-dZ$. $dR::R-Z.R::D-a.D$, proinde $T=\frac{D-a}{D}\times P$; Q. E. I.

Coroll. 1. Si mobile graue BFG (vid. fig. 5.) est circumferentia circuli vel superficies cylindrica, cuius radius $CB=b$ erit $D=\frac{aa+bb}{a}$, adeoque $T=\frac{bb}{aa+bb}\times P$.

Coroll. 2. Si BFG sit ipse circulus vel cylindrus, cuius radius $=b$, erit $D=\frac{2aa+bb}{a}$, vnde $T=\frac{bb}{2aa+bb}\times P$.

Coroll. 3. Si sit superficies sphaerica, cuius radius $=b$, erit $D=\frac{3aa+2bb}{3a}$; Hinc $T=\frac{2bb}{3aa+2bb}\times P$.

Coroll. 4. Si sit globus solidus, cuius radius $=b$, erit $D=\frac{5aa+2bb}{5a}$, proinde $T=\frac{2bb}{5aa+2bb}\times P$.

Corollar. 5. Sit iam mobile graue BFG (fig. 7.) non rotundum, sed ex. gr. triangulum isosceles rectangulum in G, recta perpendicularis ex G in hypotenusam demis-

missa $= c$. CA radius circuli AHL (qui repreäsentat axem, cui filum circumvolutum est, et qui pro centro habet centrum gravitatis trianguli BFG) $= a$: Erit D $= \frac{2cc+9aa}{9a}$, ideoque T $= \frac{2cc}{2cc+9aa} \times P$, sumendo hic etiam P pro pondere trianguli. Atque ita in aliis.

Scholion. Haec Corollaria tanquam totidem theoremata non parum curiositatis habent, siquidem facilium est ea per experientiam confirmare; appendatur ex. gr. praedictum triangulum quod rotando descendere debet ad extremitatem vnius brachii librae et ad alteram cius extremitatem alligetur pondus $= \frac{2cc}{2cc+9aa} \times P$. Dico enim pondus hoc minus in aequilibrio seruaturum pondus maius trianguli P, quamdiu hoc rotando descendit. Vel etiam hanc in modum institui posset experimentum: sint duae trochleae in centris suis parieti infixa, quas ambiat filum QMNA axi ALH involutum, sitque huius axis centrum C in centro gravitatis trianguli isoscelis BFG rectanguli in G, cuius pondus $= P$; ad alteram fili extremitatem Q appendatur pondus S $= \frac{2cc}{2cc+9aa} \times P$. Dico pondus S in quiete mansurum, dum triangulum BFG per euolutionem fili rotando descendit.

Dan.

Dan. Bernoulli I. F.
DE MVTVA RELATIONE CEN-
TRI VIRIVM , CENTRI OSCILLATIONIS
ET CENTRI GRAVITATIS
Demonstrationes Geometricae.

I.

CVm perlegerem theorematum Paterna ex principio conseruationis virium viuarum deducta, haud difficulter vidi, omnia illa, quae circa motum corporum rotantium versantur, pendere a debita centri virium determinatione. Intelligo autem per centrum virium punctum tale, in quo si tota massa concipiatur unita, eadem ex motu ipsius oriatur virium viuarum quantitas, quae corpori moto inest.

II. *Theorema generale.* Distantia centri virium a puncto siue axe suspensionis aequalis est mediae proportionali inter distantias centri grauitatis et centri oscillationis ab eodem puncto seu axe.

Demonstratio. Sint duo corpora M et N (Fig. 8.) quorum centrum grauitatis sit in B : Rotentur corpora circa punctum fixum A ; dicatur massa corporis M=M massa alterius corporis =N , distantia prioris a puncto A=a , distantia alterius corporis ab eodem puncto =b; AB=C et erit AD seu distantia centri oscillationis a puncto suspensionis = $\frac{aaM+bbN}{Mc+Nd}$. Sit iam centrum virium in

* M. Nov.
1726.

in C, dicatur AC = x , concipiaturque corpora ita rotari, vt velocitas centri grauitatis sit = v ; et erit velocitas corporis M = $\frac{av}{c}$, velocitas corporis N = $\frac{bv}{c}$ et velocitas centri virium = $\frac{xxv}{c}$; vis viua autem corporis M erit $\frac{aavvM}{cc}$, vis viua alterius corporis $\frac{bbvvN}{cc}$, et si vtrumque corpus haberet massam suam concentratam in puncto C esset ipsius vis viua $= \frac{xxvvx(M+N)}{cc}$; vnde habetur talis aequatio $\frac{aavvM}{cc} + \frac{bbvvN}{cc} = \frac{xxvvx(M+N)}{cc}$; seu $x = V(\frac{aaM+bbN}{M+N}) = V(\frac{aaM+bbN}{Mc+Nc} \times c)$ id est = radici ex producto distantiae centri oscillationis in distantiam centri grauitatis. Patet porro posse corpora quotunque considerari siue in eodem plano siue in planis diuersis, adeo vt theorema generale sit.

II. *Corollarium.* Si circulus cuius radius = 1 ex puncto in peripheria sumto suspendatur, erit distantia centri virium a puncto suspensionis $= V\frac{3}{2}$. Si iisdem conditionibus peripheria circuli suspendatur, fiet distantia illa $= V2$; si sphaera, fiet $= V\frac{7}{3}$, si ex alio puncto figurae siue corpora suspendantur, aliud habebitur centrum virium; quaeritur autem vbinam sit hoc centrum futurum, si axis suspensionis transeat per centrum grauitatis; regula generalis ostendit esse distantiam centri virium aequalim mediae proportionali inter nihilum et infinitum; ex quo cum nihil cognosci possit, hic casus specialiter tentandus est; solutionem illius dabo in sequentibus.

III. *Scholion.* Triangulum AMN consideratur vt rigidum, grauitatis expers et duobus ponderibus M et N.

D d

No-

N oneratum: his autem positis manifestum est , pondera non aliter moueri , ac si sola virga MN rigida esset , oscillareturq; punctum B circa punctum A,dum interea rotatur motu angulari simili et contrario virga MN circa punctum B: et cum motus angularis similis sit, erit MB ad BA , sicuti velocitas , qua corpus M rotatur circa punctum B ad velocitatem , qua punctum B fertur circa A : data itaque relatione quae est inter velocitates , determinare licebit rationem distantiae corporis a centro grauitatis ad distantiam centri grauitatis a puncto suspensionis.

Lemma. Si corpora M et N circa centrum grauitatis B rotentur velocitate vniiformi quacunque, simulque ipsum centrum B feratur alio motu cuiuscunque velocitatis vniiformis , dico vim viuam ex toto motu resulantem in omni situ esse eandem et aqualem illi , quae prodit , si vterque motus singulatim consideretur.

Demonstratio. Sint (fig. 9.) duo corpora in M et N, quorum centrum grauitatis est in B , circa quod rotentur , ita vt corpus M describat circulum MGO et corpus N aliud concentricum NHS moueaturque simul punctum B secundum directionem lineae BK, quam suppono eandem habere rationem ad BM , quae est inter velocitatem puncti B et velocitatem qua corpus M rotatur circa punctum B , unde BM et BN repraesentabunt velocitates corporum M et N ratione motus rotatorii et BK exprimet velocitatem puncti B ratione alterius motus ; et ipsa corpora M et N exprimentur per lineas BN et BM , quia massae recipro-

proce proportionales sunt velocitatibus. His ita dispositis, sint corpora in situ M et N quoconque: sitque GH perpendicularis ad MN; factis parallelogrammis BGLK et BHIK, ductisque diagonalibus BL et BI, patet has ipsas diagonales exprimere posse velocitates corporum M et N ex utroque motu resultantes; hincque vim viuam corporis M exprimendam esse per $BL^2 \times BN$ seu $BL^2 \times BH$ et vim viuam alterius corporis per $BI^2 \times BM$ seu $BI^2 \times BG$: unde demonstrandum restat esse $BL^2 \times BH + BI^2 \times BG$ constantis magnitudinis. Per centrum B ducatur QR perpendicularis ad HI et ad productam GL, sic erit $BL^2 = BG^2 + BK^2 + 2GR \times BK$, atque $BI^2 = BH^2 + BK^2 - 2HQ \times BK$, unde $BL^2 \times BH + BI^2 \times BG = (BG^2 \times BH + BK^2 \times BH + 2GR \times BK \times BH) + (BH^2 \times BG + BK^2 \times BG - 2HQ \times BK \times BG)$. Sunt autem in quantitatibus parenthesibus inclusis duo ultimi termini aequales, quia $GR \times BH = HQ \times BG$; est itaque summa virium viuarum ex motu composito oriunda $= (BG^2 + BK^2) \times BH + (BH^2 + BK^2) \times BG$; et consequenter in omni situ eadem; quod erat primo loco demonstrandum. Nunc si uterque motus singulatim consideretur, habetur vis viua motus rotatori pro corpore M $= BG^2 \times BH$ et pro corpore N $= BH^2 \times BG$ et denique vis viua alterius motus $= BK^2 \times (BH + BG)$, ergo summa virium viuarum ex utroque motu sed non composito oriunda $= BG^2 \times BH + BH^2 \times BG + BK^2 \times (BH + BG) = (BG^2 + BK^2) \times BH + (BH^2 + BK^2) \times BG$, ergo eadem quae ante: quod erat secundo loco demonstrandum.

V. Corollarium. Sequitur ex hoc lemmate et ex scholio §. 3. posse corpora M et N considerari tanquam oscillantia circa punctum K ita ut angulus KBN constans sit: vnde si ponatur corporum ita oscillantium centrum oscillationis esse in U, erit T (facta KT media proportionali inter KB et KU) centrum virium, et proinde tanta erit summa virium viuarum, quanta foret, si ambo corpora essent in puncto T concentrata oscillarenturque circa punctum K velocitate tali, ut punctum B pristinam suam velocitatem conseruet.

VI. Problema. Determinare centrum virium in corporibus circa centrum grauitatis rotatis.

Solutio. Sint corpora in M et N rotata circa centrum grauitatis B: Concipiatur centro grauitatis alium motum imprimi, cuius velocitas sit ad velocitatem, qua corpus M rotatur sicuti BK ad BM: ergo (per praeced. lemma et coroll.) erit vis viua totius motus eadem ac si corpora concentrata in T mouerentur circa punctum K velocitate quae est vt KT; ergo vis viua totius motus erit vt KT^2 seu vt $KB \times KU$, a qua si auferatur vis viua (quae orta fuit ex motu concepto, quasi impressus suis est puncto B, quaeque est vt KB^2) remanet vis viua corporum rotatorum, quae proin erit vt $KB \times KU - KB^2 = KB \times BU$: ergo velocitas centri virium debet esse vt $\sqrt{KB \times BU}$; adeoque distantia centri virium a centro suspensionis seu centro grauitatis erit $= \sqrt{KB \times BU}$. Vnde talis oritur regula; assumatur arbitraria quaecunque KB, considereturque punctum K vt punctum suspensionis

sionis, erit media proportionalis inter assumtam et distantiam centri oscillationis a centro grauitatis aequalis distantiae centri virium a centro grauitatis. Q.E.F.

VII. *Scholion.* Patet iterum demonstrationem procedere, quotunque fuerint massae M, N, siue sint in eodem plano et superficiem efforment, siue in diuersis planis et corpus constituant; si itaque circulus e centro suo suspendatur, erit distantia centri virium a centro, posita vnitate pro radio $= \sqrt{\frac{1}{2}}$; si peripheria circuli, fit $= 1$, et si sphaera sumatur, fit $= \sqrt{\frac{2}{3}}$.

VIII. *Coroll. I.* Cum KB sit arbitraria, et tamen quantitas haec $\sqrt{KB \times BU}$ vel etiam eiusdem quadratum $KB \times BU$ sit constans, statim apparet propositio quam Cel. Hugenius horologio suo oscill. inferuit p. 125. prop. 19. his verbis: „Si magnitudo eadem nunc brevius nunc longius suspensa agitur; erunt, sicut distantiae axium oscillationis a centro grauitatis inter se, ita contraria ratione distantiae centrorum oscillationis ab eodem gravitatis centro. Eadem facilitate ex theoria nostra deducitur eiusdem propositio 16. p 119. quae talis est „figura quaevis siue linea fuerit, siue superficies, siue solidum; si aliter atque aliter suspendatur agiteturque super axibus inter se parallelis, quique a centro grauitatis figurae aequaliter distent, sibi ipsi isochronae est. Cum enim in hac propositione postuletur, vt KB sit constantis magnitudinis, erit quoque BU constans et consequenter etiam $KB + BU$. Sequitur quoque hinc theorema non inelegans, quod in sequenti propositione complectar.

IX. *Theorema.* Corpus quocunque si e centro virium §. 6. determinato suspensum agitetur brachistochronum est, id est, oscillationes facit minoris durationis, quam si ex quocunque alio puncto suspendatur; et erit tunc semper distantia centri oscillationis a centro grauitatis aequalis distantiae centri grauitatis ab axe suspensionis.

Demonstratio. Sit punctum A (fig. 8.) punctum suspensionis; B centrum grauitatis; D centrum oscillationis; sit $AB=x$, $BD=y$; et erit longitudo penduli isochroni $x+y$, quae cum sit minima, erit $dx=-dy$; sed xy est = constanti (per §. 8.) ergo $xdy=ydx$, quae duae aequationes combinatae dant $x=y$; vnde iam patet secunda pars propositionis. Porro centri virium §. 6. definiti distantia a centro suspensionis est $=\sqrt{xy}=x$; ergo AB debet eidem distantiae esse aequalis; vnde iam quoque prior pars propositionis manifesta est. Q.E.D.

X. Quae hactenus dicta sunt, inferuent ad recte intelligendum motum corporum, quorum partes situm parallelum non seruant; sic motus pendulorum, corporum gyratorum, rotando progradientium etc. inde deduci potest et saepe aliter fere non potest.

XI. Placet hic adiicere theorema simile illi, quod inter theorematum Patris octauum est, et in cuius gratiam problema §. 6. praemisi, ope cuius facile demonstratur; sit graue aliquod cuiuscunque figurae (fig. 10.) CBA, cuius centrum grauitatis sit in D, ex quo et radio DM descriptus intelligatur circulus MNP, cui filum circumvolutum est PMNPBM etc. cuius filii extremitati appensum sit pondus

Q,

Q, quod descensu suo graue CBA in gyrum agit circa centrum grauitatis D, dico velocitatem corporis Q sequentem in modum determinare posse. Sit $MD = a$; consideretur corpus suspensum ex puncto M oscillari, esseque centrum oscillationis in O, sitque $DO = b$; pondus grauis totius CBA = P; pondus corporis appensi = p, altitudo ex qua corpus Q delapsum est = R; altitudo quaefita per quam graue aliquod libere cadendo acquirere possit velocitatem corporis $Q = z$; dico fore $z = \frac{apR}{ap + bp}$ et si tempus quo corpus naturaliter cadit per altitudinem R dicatur t , erit tempus insumtum a corpore $Q = t \frac{\sqrt{ap} + \sqrt{bp}}{\sqrt{ap}}$, id quod experientiae conforme esse plurimis institutis experimentis semper inueni.

XII. Scholium. Liquet ex determinatione praecedente velocitatis corporis Q, haud secus illud descendere dum corpus ABC circumagit, ac si libere caderet in fluido cuius grauitas specifica esset ad grauitatem specificam ponderis Q ut bP ad $ap + bP$. Sed manifestum est, tantum tendi filum NQ inter descensum corporis Q, quantum hoc corpus sustinetur a fluido si in fluido moueri ponatur : est autem vis, qua sustinetur a fluido, $= \frac{bPp}{ap + bp}$, ergo et tensio fili $= \frac{bPp}{ap + bp}$: si $a = 0$, fit illa tensio $= p$. Eodem modo inuenitur tensio fili EA (fig 5.) in theoremate 8. Patris pag. 203. (vocando P pondus corporis rotati BTG et retinendo

caeteras denominaciones a Patre adhibitas) $= \frac{D-a}{D} \times P.$ Idem quoque et quidem directe, inuenit Pater, vti postmodum ex ipsius litteris ad me datis intellexi. vid. pag. 206.

DE LINEIS CVRVIS, QVAE EVOLVITAE IPSAE SE GENERANT

Auctore

G. W. Krafft.

M. Dec.
1727.

CVRAE , quae euolutae ipsae se generant, non uno die in lucem protractae sunt; sed originem suam diuerso tempori et diuersorum sagacitati debent quaelibet tamen earum Nobilem Inuentorem nausta est. Prima quidem Cyclois vulgaris a Chr. Hugenio talis deprehensa fuit, a qua deinde mox non exigua utilitas ad temporis momenta accuratius distinguenda permanauit. Cum vero dubitaretur pluresne viae possibiles sint huius indolis, nec ne: non longe post Tschirnhusius Causticis fortasse suis probe intentus secundam inuenit, Causticam nempe semicirculi quae Epicyclois est, quam protulit deinde in Actis Lips. 1682. M. Nouembri. Tertia denique Logarithmica Spiralis, Iacobo Bernoullio ob mirabilis huius proprietatis inventionem insignis laetitiae argumentum praebuit, vti appareat ex iisdem Actis 1692 M. Maio. Cum vero non meminerim, vlibi publice existare talem methodum

dum, quae Problema hoc, difficile tamen Leibnitio dictum in Commercio Epist. p. 92, ita excutiat, vt per eam singulae supra dictarum eruantur, probeturque plures in posterum inueniri non posse; quanquam priuatum praeclaros huius rei modos cognitos esse non dubitem; quorum vnum, a sequenti quidem diuersum, apud Celeberr. Iac. Hermannum videre licuit, Quem non sine grata recordatione auctae scientiae qualiscunque meae nomino; existimauit non abs re futurum esse, si, quid in hoc Problemate non plane iniucundo proficere mihi contigerit, hic commemorem.

Problema 1. Inuenire curuam AFB Fig. 1. eius naturae, vt 1. Flexum contrarium non habeat; 2. Si ducatur radius osculi quilibet DE, capiaturque a termino quodam fixo B arcus BF in ratione quacunque data ad hunc radium DE, demittantur deinde ex punctis F et D perpendiculares DC, FI, ad rectam GH quamcunque, positione datam: Anguli CDM, ILF, aut anguli CDM, IFL, comprehensi radiis osculi DE, FK, atque rectis DC, IL, FI, semper habeant differentiam datam.

Resolutio. Quoniam duplex casus Problemate continetur, sit 1. angulorum CDM et ILF differentia constans, quaeritur natura curuae AFB. Ponantur in hunc finem radii dE, fK , prioribus infinite propinquai, cum suis perpendicularibus dc, fi , voceturque radius DE, r , alter vero FK, R ; et ratio data sit $a:b$. Erit itaque, $DE(r):BF=a:b$, hoc est, $BF=\frac{br}{a}$, et $Ff=\frac{bdr}{a}$. Cum vero

Tom. II.

E c

ra-

radius FK eandem naturam habere debeat, quam habet alter DE; erit quoque FK(R) : BD = $a : b$, vnde BD = $\frac{bR}{a}$ et $Dd = \frac{bdr}{a}$, vbi signum priuatuum ponitur, quia crescente arcu BF, alter BD decrescit. Quoniam porro differentia angulorum u et x constans esse debet, erit $u - x =$ angulo constanti, adeoque $du - dx = 0$ et $du = dx$; hoc est, incrementa aut decrements angulorum in situ infinite propinquum, sunt aequalia; quapropter ob angulum externum $x = y + E$, erit $x - y = E$; et pariter, ob $u = t + K$, $u - t = K$, hoc est, incrementa angulorum CDM et IFL sunt anguli ad E et K, qui ob aequalitatem suam efficiunt sectores EDd, KFf similes, quapropter erit $DE(r) : Dd(-\frac{bdr}{a}) = FK(R) : Ff(\frac{bdr}{a})$ hoc est $-RdR = rdr$, et Integrando habebitur $C^2 - R^2 = r^2$, adiecta constanti C ne Problema ob $\sqrt{C^2 - R^2} = r$ imaginarium fiat; vnde emergit $\sqrt{C^2 - R^2} = r$, et $\frac{br}{a} = BF = \frac{\sqrt{C^2 - R^2}}{a}$. Ob vtrumque autem radium osculi semper eodem signo affirmatio acceptum, versus eandem partem illi semper respicient, adeoque curua flexum contrarium non admittet.

2. Sit iam angulorum CDM et IFL differentia constans, quaeritur natura curuae AFB. Manifestum est, quod rursus ut ante, ob $n = m + K$, sit $n - m = K$, adeoque ob decrements angulorum CDM et IFL in situ infinite propinquum, aequalia, iterum sectores EDd, KFf similes habentur. Oritur itaq; denuo, $DE(r) : Dd(-\frac{bdr}{a}) = FK(R) : Ff(\frac{bdr}{a})$, atque $-RdR = rdr$, vel integrando $\sqrt{C^2 - R^2} = r$

et

et $\frac{br}{a} = BF = \frac{\sqrt{CC-RR}}{a}$. Cum igitur in utroque casu idem valor arcus BF emergat, patet unam eandemque curvam utriusque casui satisfacere.

Corollarium 1. Ut vero construatur arcus inuenitus BF, ponatur constans $C = \frac{2a+k\times u}{b}$, in quo valore noua constans indeterminata k assumitur; et radius osculi $R = \frac{2a+k\times u}{b}$, cui valori iam noua variabilis u inest, habebitur $BF = \frac{2a+k\cdot\sqrt{(k^2-u^2)}}{a}$, quem dico esse arcum Epicycloidis Fig. 2. in qua radius circuli immobilis $OB=a$, diameter circuli mobilis $AB=k$. Sit enim chorda quaevis $BE=u$, radio OE , centro O , descriptus arcus circuli EM, et MC conueniens radius osculi: Erit ex natura Epicycloidis (§. 101. Analyt. Infinitor.) arcus AM ad chordam AE ($\sqrt{kk-uu}$), vti est summa diametrorum $2a+k$ ad radium baseos OB (a), itaque $AM = \frac{2a+k\times\sqrt{(k^2-u^2)}}{a} = BF$. Fig. 1. Ob assumptum vero $R = \frac{2a+k\times u}{b}$, elicetur $b = \frac{2a+k\times u}{R}$; in Epicycloide autem est, $OA : OB = MG : GC$, ergo inuertendo et componendo $OB+OA : OA = GC+MG : MG$ hoc est: $2a+k : OA = R : MG(u)$, ob $MG=EB$, per §. 100. l. c. n. 3. ergo $OA = \frac{2a+k\times u}{R} = b$. Vnde patet, rationem datam problematis $a : b$, esse ipsius OB ad OA.

Corollarium 2. Quodsi ratio data $a : b$ sit aequalitatis, habebitur $BF = \sqrt{CC-RR}$, et si statuatur $C=2e$, $R=2u$, erit $BF = 2\sqrt{ee uu}$, qui est arcus Cycloidis ordinariae.

dinariae, in qua diameter circuli mobilis $=e$. Sit enim Fig. 3. Cyclois BDE, atque in ea $AB=e$, chorda quaelibet $AC=u$, erit arcus $BD=$ duplo chordae $BC=2\sqrt{e^2-u^2}=BF$. Fig. 1. Sunt igitur curuarum quaeſitarum duea, nempe Epicyclois, sub quauis proportione circuli mobilis ad immobilem, et Cyclois ordinaria; quarum vtrique vterque Problematis casus respondet. Q.E.D. Cum vero hae proprietates vtriusque Cycloidis animaduersae haſtenus fortaffe non ſint: ex ipſa harum curuarum natura eas adhuc deducere conabor.

Theorema 1. Sit Fig. 4. Cyclois ordinaria BFMA, ducatur in ea radius osculi quicunque MC, capiaturque huic aequalis arcus BF, et ducantur applicatae MP, FI, ad axem AD perpendiculares, cum normali ad curuam FG: Brunt triangula PMH, IFG, similia, ita vt angulus IFG aequalis angulo PHM.

Demonstratio. Ad diametrum circuli generatoris BD ducantur perpendiculares FR et MS, quae ſecabunt circum in T et V. Sint igitur chordae per puncta intersectionum ductae BT, BV, TD, VD; atque erit per naturam Cycloidis radius osculi $MC=2$ chordae VD, et arcus $BF=2$ chordae BT, hinc ob $BF=MC$ per hyp. erit $2VD=2BT$, hoc est, chordae VD, BT erunt aequales, vnde triangula DTB et DVB similia et aequalia ſunt. Ob parallelas autem FG et TD, MH et VD, per naturam Cycloidis, triangula IFG et DTB, PMH et DVB ſunt similia; igitur etiam ipſa PMH et IFG triangula ita ſunt similia, vt angulus $PHM=GDV=VBD=TDB=IFG$. Q.E.D.

Co-

Corollarium. Sit iam recta YD positione data, sub angulo quoconque ADY cum axe AD ; prolongentur normales ad curuam in E et N, et demittantur perpendiculares MK , FL. Erit $d-a=e$, et per Theor. 1. $f+g=e$, hinc $d-a=f+g$, et $d-a-f=g$. porro $b+g=c+d$, et $b-c=d-g=d-d+a+f=a+f$. Ob triangula autem FIO, OJD similia, est $f=\text{angulo constanti } a$, hinc $b-c=2a$, hoc est, differentia angulorum b et c subcontrarie positorum est constans. Est autem porro $b=90-g$, ergo ob $b-c=2a$, erit $90-g-c=2a$, et $-g-c=2a-90$ vbi angulus g signum priuatum accipit, quia in alteram partem radii FG cadit ; igitur differentia quoque angulorum g et c directe positorum est constans. Quamobrem manifestum est, quod in Cycloide ordinaria semper duci possit recta aliqua YD , in quam demissae perpendiculares MK , FL, efficiant modo aequalitatem, modo differentiam constantem , angulorum subcontrarie aequae ac directe positorum , sicut calculi effatum id iubet.

Theorema 2. Sit iam Epicyclois AmMD genita ex revolutione circuli mobilis AeEB supra immobilem BGd, cum radio osculi MC producto in L, atque arcu Am ad radium osculi MC in ratione constanti ipsius OB ad OA. Sit deinde puncti m normalis mN, et applicata mp, nec non puncti M applicata MP : Dico, differentiam angulorum pmN et PML esse in quolibet Epicycloidis puncto constantem , nempe aequalem angulo dOD; si scilicet BDd sit circuli quadrans.

Demonstratio. 1. Centro O, radiis OM, Om de-

scribantur arcus circulares ME, me , et ducantur chordae BE, Ae , cum radiis KE, Ke , vocenturque OB, b KA, a . Atque erit per naturam Epicycloidis $MG : GC = 2a + b : b$, et $GC = \frac{b}{2a+b} MG = \frac{b}{2a+b} BE$, ob $BE = MG$, igitur $MC = MG + GC = BE + GC = \frac{2a+2b}{2a+b} BE$. Per hypothesin est $MC : Am = OB : OA = b : 2a + b$, ergo erit $Am = \frac{2a+b}{b} MC = \frac{2a+2b}{b} BE$. porro per naturam curuae habetur $Am : Ae = 2a + 2b : b$, vnde $Am = \frac{2a+2b}{b} Ae$. Erit itaque $\frac{2a+2b}{b} BE = \frac{2a+2b}{b} Ae$, hoc est, chordae BE et Ae erunt aequales.

2. E centro circuli mobilis R ducatur in contactum G recta RG , atque e centro F in contactum H recta FH , quae productae concurrent in centro O . Et quoniam arcus circulares sunt in ratione composita angulorum et radiorum; erit $Hn : HB = HF_n \times a : HOB \times b$, inde ob $Hn = HB$ deducitur $HOB = \frac{a}{b} HF_n$.

3. Est itaque angulus $mNP = HOB + OHN = HOB + mHF = HOB + \frac{1}{2} HF_n = \frac{a}{b} HF_n + \frac{1}{2} HF_n = \frac{2a+b}{2b} HF_n$. Quoniam autem chordae mH, eB aequales sunt, ex natura Epicycloidis, erit quoque $Hn = Ae = EB$. dem. n. 1. et $HF_n = EKB$; igitur $mNp = \frac{2a+b}{2b} HF_n = \frac{2a+b}{2b} EKB$, atque ob rectum in p , angulus $pmN = 90 - mNp = 90 - \frac{2a+b}{2b} EKB$.

4. Pari modo angulus $PML = MGR - MQG = EBK - MQG = EBK - dOG = EBK - DOG - dOD$; sed ob

ob arcum MG=DG, angulus DOG= $\frac{a}{b}$ MRG= $\frac{a}{b}$ EKB;
 Ergo PML=EBK $-\frac{a}{b}$ EKB $-d$ OD=EBK $+\frac{b}{2b}$ EKB $-\frac{b}{2b}$
 EKB $-\frac{a}{b}$ EKB $-d$ OD=EBK $+\frac{1}{2}$ EKB $-\frac{2a+b}{2b}$ EKB $-d$ OD= $90^\circ - \frac{2a+b}{2b}$ EKB $-d$ OD.

5. Ergo tandem elicitur $pmN - PML = 90 - \frac{2a+b}{2b}$
 EKB $-90 + \frac{2a+b}{2b}$ EKB $+d$ OD; hoc est, $pmN - PML =$
 angulo constanti d OD. Q. E. D.

Corollarium 1. Quoniam DB : BEA = DOB $\times b$: $180 \times a$; erit ob DB=BEA, DOB= $\frac{a}{b} 180$; et angulus DOd= $90 - DOB = 90 - \frac{a}{b} 180$. Sit iam differentia data angulorum nulla, vt triangula pmN , PML siant similia, erit $90 = \frac{a}{b} 180$, aut $b=2a$ hoc est, OB=BA, qui est casus simplicissimus, vbi nempe Epicyclois terminatur in fine quadrantis d .

Corollarium 2. Poterit vero in qualibet Epicycloide obtineri, vt sub iisdem conditionibus Theorematis, anguli intra radios osculi et perpendiculares ad rectam aliquam positione datam demissas, sint aequales, consequenter triangula illorum angulorum similia. Ducatur enim Fig. 6. recta AN, sub quovis angulo NAO, atque ad eam perpendiculares demittantur MS, mQ, erit per Theorema 2, $e+f-c=k$, et ob triangula MSR, RAP similia, $b=f=d$. igitur $e-c=k-b$, et $e-c-d=$ angulo constanti $k-2b$. Itaque si ponatur $b=\frac{1}{2}k$, erit $e-c-d=0$, et $e=c+d$.

Por-

Porro habetur $e=90-x$, itaque ob $e-c-d=k-2b$, erit $90-x-c-d=k-2b$, et $x-c-d=k-2b-90$. Vbi x iterum signo priuatiuo afficitur, quia in alterum latus radii osculi cadit. Adeoque apparet, quod etiam in Epicycloide quauis semper duci possit recta aliqua AN, in quam demissae perpendiculares MS, mQ efficiant modo aequalitatem, modo differentiam constantem, angularium subcontrarie aequae ac directe positorum.

Theorema 3. Sit Fig. 7. curua AFB talis, vt 1. flexum contrarium non habeat; 2. ducto pro lubitu radio osculi DE, sumptoque arcu BF a puncto quodam fixo B in ratione quacunque constanti ad radium DE triangula DGP, FHI, comprehensa normalibus ad curuam FI, DP, atque perpendicularibus FH, DG, ad rectam SC positione datam, sint similia: dico, curuam hanc generari euolutione alterius similis ipsi curuae AFB, sed situ inuerso positae. Et si curua AFB euolutam sibi similem habeat situ inuerso positam: habere ipsam quoque praedictam proprietatem.

Demonstratio. Quoniam enim curua AFB flexum contrarium non habet, adeoque versus eandem partem concava est: admittet euolutam, quae conuexitatem continuo obuertat puncto C, et quae, vti prior, concavitatem habeat continuam. Cum autem nulla pars curuae libera sit a proprietate assignata: opus est, vt radius osculi ab initio in A nullus sit, consequenter euoluta ipsius AFB principium suum capiat ab A. Sit igitur haec euoluta AEK, tacta a radio osculi in E. Ducatur KL ipsi SC parallela, sitque normalis EN, atque ad rectam

KL

KL demissa perpendicularis EM, producta in *b.* Eterit ob rectum DEN, angulus $u=y=z$, adeoque triangula DGP et ENM similia. Sed per hyp. triangulum DGP simile est ipsi HFI, igitur HFI et ENM triangula sunt similia; utriusque autem horum simile est triangulum curuae infinite paruum fFQ et EeR, ergo et haec similia sunt. Denique ob DE=AE, arcus AE, BF, sunt in ratione constanti, per hyp. ergo etiam hypothenusae triangulorum Ff et Ee in eadem ratione sunt. Idem demonstrari potest de triangulo infinite paruo proxime sequenti utriusque curuae, nec non de reliquis omnibus, continua serie procedentibus. Constatit ergo utraque harum curuarum ex hypothenusis constanti ratione sese respondentibus, triangulorum respectivae similia, et continua serie progredientium; igitur curuae erunt similes, ita, ut pars euolutae A, respondeat parti genitae B, hoc est, habebunt situm inuersum. Quod erat primum.

Sit iam euoluta AEK similis genitae AFB, sed situ inuerso posita: Erit itaque arcuum aliquis a B computatorum similis arcui AE. Sit ille arcus BF; erit itaque triangulum HFI simile ipsi ENM. Sed huic simile est triangulum GDP, perindependenter ab his demonstr. et arcus AE=radio DE; igitur triangula HFI, et GDP sunt similia, sub hac conditione, ut radius DE (=arcui AE) sit in ratione eadem ad arcum BF, in qua est arcus AE ad similem arcum eundem BF, hoc est, in ratione constanti. Q.E.D.

Tom. II.

F f

Co-

Corollarium. Cum igitur per Problema 1. proprietas haec, ad curuas, quae euolutae ipsae se inuerso situ generant, requisita, nullis competit, nisi Cycloidi ordinariae, et Epicycloidi: patet, has solas esse, quae euolutas suas habeant sibi similes, aut aequales, situ inuerso positas, nec praeter has dari posse alias.

Problema 2. Inuenire curuam, quae euoluta ipsa se generet, ita quidem, ut immediate arcus geniti et euoluti semper sint aequales, aut similes.

Resolutio. Sit Fig. 8. curua AGB talis, ut genitam suam AC habeat aequalem et similem. Quoniam curuae AC axis AD perpendicularis esse debet ad elementum primum curuae ex euolutione genitae AC, elementum autem hocce primum coincidit cum elemento rectae AM, evidens est, axem AD etiam ad rectam MAP hoc est ad axem euolutae perpendicularis esse debere. Constituant igitur axes AD, AE, angulum DAE rectum, et ducatur radius osculi FG; congruet igitur arcus genitus AF aut ipsi AG, aut cadet supra G in H, aut infra G in I. Cadat primo in H, ita ut arcus aequales et similes sint AF et AH, sitque in H radius osculi HK, contingens euolutam curuae AB, quae eadem erit cum vtraque priorum, in K; producantur KH in L, GF in M, et sint applicatae GN, KO. Quoniam igitur $AF = AH$, in curuis iisdem; erit puncti F radius osculi aequalis radio osculi in H, adeoque $FG = HK$; est autem $FG = arcui AG$,

AG, et HK = arcui AK, ergo arcus AG et AK sunt aequales et similes, vnde angulus OLK = NMG. Triangula ALP et MPQ habent angulum MPQ communem, et angulus M = L per demonstr. ergo tertius tertio aequalis, hoc est, ob rectum in A, per hyp. erit etiam ad Q vtrinque rectus. Ducatur puncti H tangens HR, secabit ea radius FG alicubi, ex. gr. in S; quia, nisi curua AIB habeat alicubi flexum contrarium, quem vero casum excludo, elementum curuae in H cum nullo alio parallelum esse potest. Verum ita angulus KHR, et consequenter LHR erit rectus; ergo in triangulo HSQ sunt duo recti ad basin HQ, quod est absurdum. Idem facile euincitur, in casu secundo, si arcus AF congruat arcui AI: Ergo neuter horum casuum est possibilis.

Congruat ergo arcus genitus AF ipsi euoluto AG, Fig. 9. et ducantur rectae AF, AG, quae aequales erunt. Ducantur quoque applicatae GC, FB, ad axes homologos AR, AD; erunt etiam hae aequales, nec non abscissae AC, AB; itaque habentur triangula AFB, AGC aequalia et similia, vnde angulus $a = b$, et $a + c = b + c$. Est autem $b + c$ rectus per demonstr., ergo etiam $a + c$ rectus est, atque ob $AF = AG$, angulus AFG semirectus. Sit iam puncti F tangens FE erit etiam FEA semirectus in omnibus curuae punctis. Curua igitur AF ta-

lis est , vt ex eius puncto quousque F , ducta tangens FE , cum recta alia FA ducta in punctum fixum A , faciat angulum constanter semirectum , quae nulla alia est , quam Logarithmica spiralis ; igitur ea ipsa est curua quaesita .
Q. E. I.

Corollarium 1. Quodsi desiderentur arcus similes solum , eadem curua proueniet . Sit enim arcus AF similis arcui AG ; erit triangulum AFB adhuc simile ipsi ACG , et angulus FAG iterum rectus ; producatur GA , vsque dum occurrat tangentia in E : erit ob EFG et EAF rectos , EA : AF = AF : AG = AB : AC . Sed AB : AC ratio constans est , quia sunt abscissae arcuum similium ; igitur etiam EA ad AF in ratione eadem constanti , et angulus EFA iterum constans est , quae generalis est proprietas Logarithmicae spiralis .

Corollarium 2. Sit autem Fig. 10. arcus AF similis et aequalis ipsi AG , directe sumpto , axes homologi vero AD , BE sint paralleli , et assumantur alii duo arcus aequales et similes AK , AL , euidens est , ita , crescentibus applicatis HF , KM , homologas alteras GI , LN decrescere , quod similitudini curuarum omnino repugnat , adeoque casum praesentem excludit .

Theo-

Theorema 4. Curuae, quae euolutae ipsae se generant, sunt 1. Epicycloides omnes, sub quavis proportione circuli mobilis ad immobilem. 2. Cycloides ordinariae. 3. Logarithmicae spirales omnes, sub quocunque angulo tangentis et rectae ad punctum fixum ductae; neque praeter has dantur aliae.

Demonstratio. Linea curua, quae euoluta similem aliam generat, posita erit ad integrum hanc genitam in situ vel inuerso vel directo. Ad situm inuersum requiritur per Theor. 3. ut ducto radio osculi quoconque, et capto a constanti quodam punto eiusdem curuae arcu in data ratione ad hunc radium, triangula comprehensa radio osculi primum, deinde ab altero extremo arcus inuenti, ducto, atque perpendicularibus ex utroque horum punctorum curuae, ad rectam positione datam, demissis, sint similia: Sed per Probl. 1. nullae aliae huius naturae inueniuntur curuae, quam Epicycloides, sub quavis proportione circuli mobilis ad immobilem, Cor. 1. et 2. Probl. 1. et Cycloides ordinariae Cor. 2. Probl. 1. Igitur hae duae solae sunt, quae situ inuerso suas genitas referunt. Ad situm vero directum requiritur, ut axes homologi sint inter se normales; nam axes paralleli deducunt ad absurdum per Probl. 2. Coroll. 2. Si vero axes homologi normales sint, requiritur necessario cur-

ua , cuius tangens cum recta in punctum fixum ducta faciat angulum constantem , per Probl. 2. quae sunt Logarithmicae spirales. Itaque hae enumeratae foliae, euolutae generant sibi similes , nec praeter has dantur aliae. Q. E. D.

Corollarium. Ex praecedentibus manifestum quoque est , quod Cyclois ordinaria; et Logarithmica spiralis , cuius angulus constans est semirectus , generent euolutae alias non modo similes, sed etiam aequales; Epicycloides vero omnes, et Logarithmicae spirales, quarum angulus constans est maior aut minor semirecto , referant tantum genitas sibi similes.

CLAS-

C L A S S I S

S E C V N D A

Continens

P H Y S I C A.



DE
TVBVLIS CAPILLARIBVS
Dissertatio Experimentalis

Prima

Georgii Bernhardi Bülfingeri.

I.



Ccidit aliquando , vt visa naturae obscuriora , cum earundem genesis requiriatur , ad phaenomena tubolorum capillarium reducantur. Sic vsu venit, cum indicari caufsa debet , quae in sponsa aquam attollit , quae in pannorum laciniis , in terra secca et porosa , in pane variis generis , in vasis arena plenis; in plantis quoque, et in ipsis montium interioribus. Ipsa Tom. II. G g autem

MM.Febr.
et Aug.
1726.

autem aquae in fistulis gracilioribus ultra libellam eleuatio variis modis explicari vulgo solet.

II. Non admodum diu est, quod eruditis innotuit, exceptionem dari pro tubulis gracilibus a recepta alioquin hydrostaticae regula, quae postulat, ut fluida in tubis communicantibus eleuentur ad altitudinem gravitati specificae reciprocam. Cum *Pascalius* superiori seculo de liquorum aequilibrio commentaretur, nondum id experimenti cognitum erat publice. Testatur id opusculorum *Pascalii* postumorum Editor, Monito I. post prefationem; idemque primae observationis gloriam Galliae suae, inuentorum physicorum feraci, vindicat; stipulante, qui primam phaenomeni notitiam Angliae intulisse creditur *Rob. Boyle*; repugnante autem, qui Florentiam experimenti patriam nominat, *Honorato Fabri* apud *Sturmium* in Coll. Curios. P. I Auctar. ad Tent. VIII p. 77.78.

III. Vix innotuit elegans phaenomenon, cum varie illud a variis exponeretur. Non possumus ire per omnia: placet tamen ita rem persequi, ut intelligatur, quomodo a rudioribus initis subinde *magis magisque exculta*e sint facti huius explicationes. Nam primi fere in generalibus substiterunt: et successores eorum, quae primos incommoda presserunt, nouis semper aut restrictionibus aut supplementis conati sunt euitare. Praecipue illud attendi meretur, mensurarum apud anteriores mentionem esse rarissimam; apud recentiores scriptores perpetuam. Quodnam utriusque methodi momentum sit, id vero ex sequentibus patebit.

IV. *Phaenomena tuborum capillarium generalia*
haec fere recenset Sturmius in Colleg. Curios. P. I. Tent.
VIII. p. 44. 45.

1. Obseruatum est, in canaliculis vitreis angustioribus, e. gr. cavitate sua pisi aut lenticulae magnitudinem, plus minus, adaequantibus, cum aperti vtrinque in aquam aliquousque demitterentur; hanc, siue calida esset, siue frigida, *supra reliquae aquae*, canaliculum extra ambientis, *superficiem* notabiliter eleuari; et quidem,

2. Quo arctior esset canaliculus, eo altius. Confer AB, CD, EF. fig. 1.

2.

Quo altius emineret tubulus super aquae superficiem, eo altius in ipso ascendere aquam, ceteris paribus contendit vir doctissimus, vid. Tubulos GH et IK. fig. 1. Sed fallitur; forte, quod id ita futurum ratus ex hypothesi sua, non satis solicite attenderit facto naturae; forte etiam, quod inaequalis tubi amplitudo, vel superficie internae humectatio ex accidenti diuersitatem fecerint in eleuatione aquae. Certum enim est, repetitis solicite experimentis:

3. Si tubulus fuerit longior GH, fig. 1. idemque mersus usque in G. Si altitudo eleuationis fuerit GO, eandem illam fore, ceteris manentibus paribus, postquam pars HX a tubulo illo separata fuerit, et tubulus in G usque sub aquam immersus. Cessant vero hic suspicione de circumstantiis negotio alienis: estque haec naturae conuenientior correctio, quam illa ipsius Sturmii in Auctario p. 79. qua differentiam eleuationis in natura minus, quam in schematismo suo; imo vix ac ne vix qui-

3.

dem sensibilem esse confitetur. Pergit autem Vir Clariſſ. memorans , l.c.

Phaen. 4. 4. Assumto licet breuiore tubo ML , et eousque immerso , vt pars eminens LM minor effet segmentis aliorum longiorum et aequē amplorum, ab aqua supere minente IN vel GO occupatis : non tamen ascendere aquam ultra canaliculi labia , nec effluere.

5. 5. Canaliculum humectatum prius, altius admittere aquam in cauitate sua ascendentem , quam id fiat ab exficcato.

6. 6 Si canaliculus *digito* superne *tegatur* ante immersionem , non ascendere aquam : remoto autem digito statim ascendere, etiam post immersionem.

7. 7. Dum *intra* tubulum *laxiorem* aqua plenum mergatur *angustior*, accidere, vt nunc intra laxiorem, nunc intra angustiorem altius eleuetur aqua, prout scil. maior minorue sit cauitas laxioris residua, quam cauitas minoris. v. fig. 2.

V. Ista igitur generaliora sunt tubulorum capillariorum phaenomena , quae ex Honorato Fabri Sturmius excerptis. Addam subinde plura , partim accepta ab aliis , partim nouiter excogitata. Sed intertexam illa explicationum vulgarium examini, vt varietate dicendorum nulli potius lectorum patientiam, quam fatigari contingat. Sunt vero tres explicationum classes *praecipuae*. Prima filido prementi externo imputat hōc effectus. Secunda adhaesionem aquae ad vitri latera caußatur. Tertia accusat vitri et aquae mutuas ad se inuicem attractiones. Singulae in ramos abeunt, sed nolo omnia minutim screare:

care: Faciat id, et ex dicendis discerpat, cui volupe est.

VI. Explicationem ab *Honorato Fabri* propositam talem in compendio *Sturmius* exhibet, et approbat, saltim ab initio; namque in Auctario mutat sententiam. “Constat, inquiunt *Viri Docti*, aerem non strum esse non grauem solum, sed et compressum. Grauitatem agere non secundum molem, sed altitudinem, posita basi eadem. Sed compressum corpus, quaquaversum agere, et tanto magis, quo est copiosus. Id fontes artificiales per compressum aerem operantes, et bombardas testari pneumaticas, quo enim plus aeris istorum compellas cogasque, tanto fortiorum esse effectum. Aquam igitur in tubulis capillaribus attolli ab aere externo, non quatenus grauitet, perpendiculariter deorsum; sed quatenus compressus, valde quaquaversum vrgeat. Exteriori accessum esse, liberum, et in maxima copia ad vrgendam aquam sibi, subiectam; sed interiore aquam non nisi ab ea parte, aeris attingi, quam conus ibk complectatur: itaque eleuari aquam interiore ab exteriore, quam magis vrgeat incumbens maior aeris moles.” Fig. I.

VII. Sapit aetatem suam haec explicatio: abutitur enim ambigua locutione; negligit mensuras; impingit in theorema hydrostaticum, nunc vulgo notum; et ad commune superioris aeui asylum, aeris operam, confugit. Verum est, corpus compressum agere tanto fortius, quo est (in eodem spatio) copiosius, id est, compressius. Falsum, agere fortius, si (in maiori spa-

tio) copiosius est , sed aequa densum. Indubium est scriptoribus hydrostaticis , posita basi eadem , et aere aequa compresso , tantundem agere vim aeris restituti- uam siue parua , siue magna aeris copia adfuerit. Id a- liis in locis ipse *Sturmius* annotauit , cum *Henrico Mo- ro* aeris grauitatem et elaterium neganti occurreret in Coll. Curios. P. II. Epist. ad Morum §. 63. p. 82. Non igitur ob maiorem aeris externi copiam fortius vrgebitur aqua exterior , quam interior. An liberior accessus a- liquid efficere valeat, mox dicam.

VIII. Illud primo statim loco annotari debet: *Aerem* accusari praeter meritum. Monet *Boylus*, et ex illo vniuersi scriptores Physici.

Phaen.8. 8. Si tubulus sub campana aere vacua collocetur, aquam in eo suspensam haerere. Vidi etiam ipse non semel,

9. Si tubulus antea humectatus in vacuo demum aquae immergatur ; (quomodo id fieri possit , nemo ho- die ignorat) aquam perinde in tubulo ascendere sub cam- panam , ac in libero aere ; saltu vtique celerrimo : nec profundam hic immersionem requiri , sed sufficere con- tactum tubuli et aquae subiectae. Conficitur autem ex dictis , nisi aetherem aeri substituas, actum esse de fluidi prementis ad hoc phaenomenon explicandum auxilio.

IX. Non id vero sine exemplo est , vt in eius- modi casibus aerem suum vsque adeo subtilem faciant auctores, vt aetheri similis cum illo trans campanam ire, si non liberrime possit , possit tamen. Excluditur igitur

tur per dicta prius phaenomena crassioris opera, nondum subtilioris et aetherei aeris. Excluditur discrimen pressionis internae atque externae, a maiori minorie aeris acque densi copia oriundum. v. §. 7. Quod ipsum etiam, si vel maxime inuitis hydrostaticae legibus admisseris, non tamen phaenomenis consentiet. Neque enim conuenit tertio, superius §. 2. enarrato, cuius contrarium ipse ex hac sua hypothesi intulerat inuentor hypotheses. v. Sturm. Coll. Cur. P. I. p. 46. Conclus. 3. Accedunt autem et alia, quae *istam per conulos* sive aeris sive aetheris incumbentes, et eorundem premendi differentias *explicationem* respunt. Talia sunt:

10. Assumto tubulo longiori, cuius cavitas ab v- *Pbaen. 10.*
na extremitate ad alteram nonnihil minuebatur successiue, aequalis erat aquae supra libellam eleuatio, sive pars angustior mersa fuerit, sive amplior; modo suprema aquae eleuatae superficies vtroque in casu eundem tubuli locum attingeret.

Iam si hoc ad hypothesis contuleris, primo in casu ob partem tubi ampliorem aquae supereminente amplior conus est, quam in secundo: itaque minor debbat esse eleuatio aquae, ob minorem aeris eo conulo contenti differentiam ab externo in aquam vasis premente. Tum vero etiam illud notari debet, quod mediante hoc tubulo fieri possit, vt conulo existente minore eleuatio aquae supra libellam sit minor; cum deberet per hypothesis maior esse. Nimirum fig 3.

11. Si pars tubi strictior erat extra aquam, mi-
nor

11.

nor subinde fiebat eleuatio aquae supra libellam, quo magis extrahebatur tubulus. Eo autem in casu minorem semper conulum fuisse incumbentem, id vero erat extra dubium.

X. Non itaque naturae congruit aut satisfacit hypothesis Fabriana rudior: Fortasse *cultior facta conueniet?* Bina mihi emendatio innotuit, vtraque digna ingenio Auctorum. *Iac. Bernoulli*, ex diuersa fluidi pressione fontem repetiit horum phaenomenorum in *diss. de Grauitate aetheris* iam A. 1683. edita, p. 239. f. Verba haec sunt: „Sit *abcd* fistula cylindrica immersa super perficie aquae stagnantis *ed*, cui insistat aliis praeterea cylindrus similis atmosphaericus *efgh*. Fingamus autem utrumque diametrum in se recipere certum numerum particularum aeriarum, v. g. septem, ita ut septem tales particulae (quas sphaericas nunc esse suppono) in directum positae exhaustant cylindrorum latitudinem, notabimusque rarissimum esse contingens, si globuli isti ita sint dispositi, ut extremi praecise radant tubi latera, atque omnes septem sine obstaculo in eius cavitatem admittantur (vti sit in serie globulorum *il*) plerumque enim, imo semper continget, ut summi cylindrorum margines vtrinque primum et octauum excipientes nonnisi sex intermediis transitum praebent. Quod et intelligendum de quauis alia assignabili serie globulorum, quorum perpetuo bini extremi in cylindrorum margines incidere subsumi debent. Hinc etenim fiet, vt totus ille globulorum orbis, qui circumferentiam superamenti orificii fistulae occupat, cum tota globulorum

„ca-

catena perpendiculariter sibi imminente *am, bn*, omnem,, suam pressionem terminet in summitate laterum fistulae , neque possit pertingere ad liquorem subiectum *qr*;,, qui proinde ea tantum pressione afficitur, quae profunda, cisci potest a cylindro aero , diametrum *op* sex dunum, taxat globulorum obtinente. Aliter vero se res habet,, in cylindro aero *efgh* , extra fistulam assumto in alia,, quadam parte superficie stagnantis aquae, vbi extremi,, globuli ab eius lateribus *ge*, et *hf*, quae pure sunt imarginaria , non impediuntur , quin libere defluant, et tota sua latitudine super liquore subiecto grauitent. Cui,, consequens est , vt liquor extra fistulam tanto maiore,, pressione afficiatur, quam qui intra fistulae latera conclusis est , quanto numerus globulorum illi incumbentium excedit numerum globulorum super hoc prementium: Vnde liquor ab externa pressione praeualente semper nonnihil altius impellendus in tubum. „

XI. In sequentibus monet Vir Cl. I. differentiam hanc pressionum in tubis *amplioribus* esse *insensibilem*; in strictioribus vero portionem aeris impeditam a tubi marginibus maiorem semper rationem habere ad portionem aeris non impeditam : 2. sequi etiam ex hac hypothesi, quod *liquores* specificē *leuiores* ceteris paribus *altius* attollī debeat grauioribus , ea proportione , quae est inter specificas eorum leuitates: 3. *aquam* superne non posse effluere , etsi minuantur tubi supra aquae superficiem elevatione ; orificio enim tubi utriusque aequalē imminere aeris portionem : 4. porro superficiem *mercurii* in talibus fistulis debere consistere *infra libellam* , si particulas

Ton. II.

H h

eius

eius concipias grossiores aereis , vt extremis earum s et tubi margini implicatis plus decrementi patiatur pressio mercurii ex imo sursum , quam pressio aeris desuper : 5 . Denique ex his dictis superficiem aquae in fistula concavam fore , et mercurii conuexam . vid . fig . 5 .

XII. Addam curiositatis cauſa vſum hypotheseos rariorem . *Mensurauit* Vir ingeniosus ex hisce assumtis diametrum vnius globuli aerei , ex cognita latitudine fistulae , et altitudine eleuationis aquae ſupra libellam . Sit enim diameter cavitatis fistulae $=a$, altitudo aquae internae ſupra libellam $=b$; altitudo cylindri aquei aequi ponderantis cylindro aeris atmosphaericuſ eiusdem baseos $=c$, diameter globuli aerei quaesita $=x$: Erit diameter cylindri aerei ſuperius in aquam prementis $=a-x$, et area eius $=\frac{11aa-22ax+11xx}{14}$, area autem totius cavitatis $=\frac{11aa}{14}$, et conſequenter area annularis vitro contigua , cui nullus aer incumbit , $\frac{22ax-11xx}{14}$. Iam vero per experimenta aer areae huic annulari infiſtens ad altitudinem atmosphaerae aequatur columellae aqueae eiusdem baseos ad altitudinem datam c porrectae : et per hypothefin haec columna aequatur aquae in tubulo ſupra libellam eleuatae . Igitur $\frac{22ax-11xx}{14} \times c = \frac{11aa}{14} \times b$; adeoque $2acx - cxx = aab$, et aequatione reducta $x = a - aV^c \frac{-b}{c}$. Quodſi igitur $a = \frac{1}{8}$ poll $b = \frac{1}{2}$ poll . $c = 400$ poll . erit $x = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{800}$ poll . exprimens diametrum vnius globuli aerei , vel potius diſtantiam a centro vnius globuli ad centrum alterius ; quoniam globuli ob interfluentem materiam

riam aetheream non sunt contigui. Quin imo , cum ex alio arguento idem Vir doctissimus , libro cit. p. 102. intulerit , inter duo quaevis corpuscula aerea quatuor aequales materiae subtilis portiones interiectas esse, ideo diameter vnius globuli aerei emerget = $\frac{1}{\sqrt[2]{2}\sqrt[3]{5}\sqrt[5]{5}}$ poll.

XIII. Non poenitet me prolixae recensionis: meretur illam sententiae amoenitas ; cui praeter haec tenus dicta etiam illud commode accidit, quod calculus experimento respondeat , vi cuius cognitum est, quod

12. Altitudo aquae supra libellam in pluribus fit *Pbaen. 12.*
stulis sit inuerte vti diameter cavitatis, hoc est, si duorum tubulorum T et t diametri sint a et α , atque altitudines aquae b et β , quod sit $a : \alpha = \beta : b$.

Dicam inferius , quomodo hoc experimentum fieri debeat : hic illud moneo , per computum §. prioris esse $a - a\sqrt{\frac{c-b}{c}} = x = a - a\sqrt{\frac{c-\beta}{c}}$: ex quo sequitur $\alpha : a = 1 - \sqrt{\frac{c-b}{c}} :$
 $1 - \sqrt{\frac{c-\beta}{c}}$, quae analogia vix differt a priori $\alpha : a = b : \beta$, ob quantitatem c admodum magnam respectu b et β . Sit enim per experimenta mea $a = 1''$, $b = 3''$, $\alpha = \frac{1}{10}''$,
 $\beta = 30''$ et $c = 4800''$ erit $\alpha : a = 1 : 10$. et $\sqrt{\frac{c-b}{c}} =$
 $\frac{69,2603}{69,2820}$, $\sqrt{\frac{c-\beta}{c}} = \frac{69,0651}{69,2820}$, adeoque $1 - \sqrt{\frac{c-b}{c}} : 1 -$
 $\sqrt{\frac{c-\beta}{c}} = 217 : 2169$, quod cum analogia priori conuenit.

XIV. Fateor tamen , esse aliquae etiam , quae assensum morantur nostrum , alia aliis fortiora. Quod particulae aereae sint aqueis maiores, dubium videri debet , donec id liquidis euictum fuerit experimentis. Haec tenus in ambiguo res est. vid. *Memorias Acad. Scient.*

Paris. ad A. 1714. p. 71. seqq. Fluida leuiora ceteris paribus altius eleuari sequitur ex hypothesi, et ab inventore ipso infertur : sed in experimentis cognoscitur,

Pbaen. 13. 13. Fluida specificē leuiora , vinum et sp. vini minus alte eleuari , quam aquam. Sic exempli gratia vidi, eleuationes in spiritu vini , vino rubro, et aqua se habuisse vt 4,7, et 12.

Igitur aut sententia detrimentum patietur , aut dicendum erit , cetera non esse paria ; quod de oleis non difficulter concessero , quorum fīgi minor diuisibilitas potest : an de vino , et spiritu vini idem valeat , non dixerō cum fiducia. Illud, fateor , me anxium habere, quomodo dici possit , quod „ totus ille globulorum orbis , qui „circumferentiam supremi orificii fistulae occupat , cum „tota globulorum catena sibi perpendiculariter imminen- „te *am* , *bn* , omnem suam pressionem terminet in sum- „mitate laterum fistulae , neque possit pertingere ad li- „quorem subiectum *qr* , qui proinde ea tantum pressione „afficiatur , quae proficisci possit a cylindro aereo , dia- „metrum *op* , sex duntaxat globulorum obtinente. „ Aut totus ille annulus cylindricus , spatio *oq* vel *pr* circa axem rotato genitus aere vacuus concipitur , aut non: Si vacuus , cur non ad altitudinem 30 pedum ascendit aqua vitro contigua , adeoque ad supremam usque tubuli extremitatem ? Si vacuus : quis ita ordinate globulos collocavit aerios , vt in nulla cylindruli sectione totam tubi latitudinem occupent , in tanta praecipue aeris agitatio- ne interna et elateris vi ? Si vacuus: cur in spatium illud annu-

annulare non succedit aqua , cum tubulus mergitur dígito obturatus ? Sin vacuus non est ab aere: premet v-tique aer non solum pro basi suprema *op* , sed pro ea , quam obtinet aer aquae proximus; vel quae ratio est, cur in vicinia aquae non totam occupent tubi latitudinem globuli aerei , cum certum sit, fluidum elasticum et compressum accommodare se spatio, cui includitur, ea methodo, vt maximum, quod potest, spatium occupet:

XV. Quid si tubis assumatur, cuius interna cauitas sensim sensimque minuitur ; et pars amplior extra a-quam collocetur , mersa strictiore : annon aer superne intrans ope sectionum successiue minorum ita fese spatio interno accommodabit , vt totam tubuli amplitudinem repleat , non relicto eiusmodi vacuo , cui integrae possent particulae inseri aereae ? saltem certum est , quod hoc in casu dici non possit , impediri aerem ab *orificiis supremi* circumferentia : et eleuatur tamen aqua supra libellam. Vidi,

14. Siue amplior pars mergatur , siue strictior , *Pbaen. 14.* semper eleuari aquam , quantum conuenit illi sectioni fistulae , quam suprema attingit aqua ; vnde pro immersio-nis profunditate plus, minus, vel aequaliter eleuatur emi-nente extra aquam parte tubi ampliore , aut strictiore.

Conuenit id hydrostaticae , vi cuius neque amplior in tubulum ingressus nocet, neque strictior iuvat eleuatio-nem , sed tota res redit ad basin aeris prementis: Non id vero conuenit explicationi a supremo fistulae orificio desumptae, si ad litteram intelligatur ; mox enim videbimus,

quid pro adiumento explicationis dici aduersus hunc inferendi modum possit.

XVI. Nimirum vbi experimenta mea de capillaribus coram societate institui , et de caussa eorum sententias amicorum rogaui , vt ad illas meam , si opus eset, exigerem : Clariss. Collega, *Daniel Bernoullius*, nescius adhuc , quid de hoc argumento Patrius scripserit, *explicationem* priori similem , sed *castigationem* hanc suppeditauit. Repetit aquae internae supra libellam cum externa elevationem ab impedita superne in fistula fluidi incumbentis, non aerei solum, sed praincipue aetherei, pressione libera. Vult basin fluidi huius aereo-aetherei aquae contiguam , non tam plenam esse ad margines usque internos fistulae , quam plena est eodem fluido superficies priori aequalis, sed in libero aere sita , vel quam plena est fluido aqueo suprema aquae superficies. Id vnde cunque eueniat, perinde est. Interim seu exempli seu coniecturae loco ponit , particulas eius fluidi esse aqueis maiores. Quodsi enim super plano aliquo positos concipias globulos maiores , super altero minores , utrosque sine ordine, sed sibi contiguos; si apertura circini quacunque , in plano prioribus parallelo , et per medium horum globulorum transeunte , describas circulum : transibit utique peripheria haec per globulos complures. Erigatur super hac peripheria superficies cylindrica ; et sunt globuli illi indivisibilis : excludentur e cavitate cylindri omnes illi globuli, per quos peripheria transit modo memorata ; et maius relinquetur vacuum in illo circulo, qui per globulos ductus est maiores. Minor

nor itaque , aut minus repleta basis est , quam globuli formant maiores , ac altera minoribus formata. Quodsi igitur maiores sunt aqueis globuli aereo aetheri , sectio tubuli globulis istis deorsum prementibus minus adaequate plena erit , quam aqueis sursum vrgentibus. Hinc elevatio , donec aliunde redeat aequilibrium. Quae autem ratio aquam eleuat in fistula fluido immersa , eandem vult esse suspensionis caussam , in eadem extracta. Cumque mercurius aequa ac caetera fluida suspendatur , vult eandem mercurii et ceterorum fluidorum fortem esse. Phaenomenon vero mercurii , intra fistulam mercurio mersam , depresso potius infra libellam , quam eleuati supra eandem , aliunde deriuat ; ratus , mercurium in vase contentum tanta vi ad se trahere mercurium , vt et resistat priori caussae , et eandem excedat.

XVII. Idem Vir Cl. eodem tempore *sequentibus* hypothesis suam *phaenomenis* applicuit. Observauit :

15. Altitudinem liquoris supra libellam esse constantem , siue fistulam profunde mergas , siue secus ; quinimo etiam , cum extrahatur tubulus ; quo in casu saepe accidat , vt in extremitate tubuli gutta pendeat aqua. *Phaen. 15*

16. Hanc guttulam diminui , si inclinetur tubulus ; quod aqua tamdiu fistulam ingrediatur , donec altitudo perpendicularis in fistula inclinata aequetur altitudini priori. *16.*

17. Euanescente guttula liquorem non amplius ascendere , et si augeatur inclinatio , nisi tubus versus superiora stricior fuerit ; quo in casu liquor non cesset progredi , quamdiu tubulus inclinetur. *17.*

Phaen 18. 18. Mox memorata duo experimenta succedere quoque in mercurio, postquam is suetione in tubulum attractus, et tubulus linguae attractu clausus extra mercurium in vasculo stagnantem extractus fuerit; esse vero altitudinem mercurii ita suspensi inter subsextuplam et subseptuplam altitudinis aquae.

19. Eundem ita suspensum, si vasculo fistulam denuo velis immergere, effluere omnem e tubulo, quam primum mercurii stagnantis superficiem contingit; quod argumento esse possit, esse in mercurio vim attrahendi seipsum, quae etiam renitur eleuationi eius in fistula ad libellam cum externo.

Denique monuit, non absolutam particularum aereum vel aetherearum magnitudinem ex huiusmodi phaenomenis inferendam esse, v. §. 12. sed proportionem solum magnitudinis particularum in fluidis diuersi generis. Ita per phaen. 18. collata altitudine mercurii subseptupla cum pondere bisseptuplo respectu aquae, inferri posse, ob duplex mercurii suspensi pondus, duplo subtiliores esse illius, quam aquae particulas.

XVIII. *Multa huic hypothesi commode eueniunt.* Cessant difficultates a vacuo venientes §. 8.; nequit enim huic fluido trans campanam iter denegari. Euitantur pleraque omnia, quae §. 14. et 15. opposuit sententiae priori: non enim vacuus ab aere fingi annulus vitro proximus debet; non eadem globulorum in omni sectione positio; non impedimentum repeti a supremo tubuli orificio. Non est impossibile, ut aqueis maiores sint globuli aereo aetherei, tanto etiam rariores: neque fortassis necessarium

cessum est ad magitudinem referre causam baseos minus plenae. Conuenit etiam huic sententiae cum mensura altitudinis phaen. 14. §. 15. sequitur enim aquae in diversis fistulis eleuatae quantitas proportionem peripheriae superioris ; cui aequum est proportionalem credi exclusionem globorum aereo-aethereorum a peripheria oriundam. Conuenit cum phaenomenis §. superiore enarratis : Conuenit etiam cum aliis.

XIX. Fateor tamen , indulgente veniam istam Cl. Autore , quod *in nonnullis haeream*. Fortasse minus difficile est occurrere illis, quae ad hanc expositionem attinent *specialiter*. Itaque *quaestibnibus* illa comprehendo, non obiectionibus. Si particulis aereo-aethereis trans vitrum aditus patet , cur spatiū fēse vacuum relinquunt in vitri vicinia , et maius quidem , quam aqua aut mercurius ? An aeris crassioris nulla plane opera accedit in hac hypothesi ? Saltem in experimentis nulla deprehenditur, ob eandem fluidi in vacuo et in aere eleuationem. Cum in tubo humectato aer aut aether vitro proximus mediante illa crusta aqua lateribus vitri adhaerente aut fortius, aut saltem aequaliter premere deorsum possit, ac in siccō , cur altius euehitur aqua in humido , quam in siccō ? Cur circa extimam tubi superficiem aqua ambiens non assurgit, cum siccus est ; eleuanda, si madidus fuerit ? Si eadem est fors mercurii et ceterorum quoque fluidorum , cur aquae in tubulo suspensae altitudo sequitur proportionem peripheriae superioris , et altitudo mercurii proportionem inferioris ? Nimirum :

20. Si tubis inaequaliter amplius mergatur in Phaen. 20
Tom. II. I i aquam

aquam totus, et extrahatur digito obturatus: remoto dige-
to aqua ad eam altitudinem suspensa haerebit, quae con-
uenit tubulo cylindrico eius diametri, quam habet su-
prema aquae in tubulo adhuc pendulae superficies.

Phaen. 21. 21. Si mercurio idem tubulus impleatur, et ex-
tracto tubulo sibi relinquatur mercurius, altitudo suspen-
sionis erit ea, quae conuenit tubulo cylindrico eius dia-
metri, quam habet infima mercurii in tubulo superficies,
hoc est, orificium tubuli inferius.

Haec duo experimenta et mihi casu obtigerunt, cum
phaenomeno 13, et similibus attenderem, et fistula v-
terer inaequaliter ampla: sed et eadem ab aliis, praecipue
Iac. Iurinio iamiam annotata fuisse, postea cognoui.
vid. *Transact. Abrigd. by Henr. Jones T. IV. P. I. pag.*

426. et 434.

XX. Sunt alia vero, quae generaliter videntur ob-
stare, quo minus a differentia pressorum superae et in-
fereae deriuetur eleuatio aquae aut suspensio supra libel-
lam. Viderint, qui huic sententiae accedunt, an ea suffi-
ciat eleganti phaenomeno, quod *Iac. Iurinius* annotauit

Fig. VI. l.c. Sit tubus amplior AB desinens superne in capilla-
rem BC; sit altitudo aquae supra libellam, quae ampli-
tudini partis AB conuenit $\equiv a$, et altera, quae angustiae
partis BC competit, $\equiv b$.

Phaen. 22. 22. Immergatur aquae pars tubi amplior: erit
altitudo eleuationis supra libellam ea, quam per a deno-
tauimus; extractoque paululum tubo descendet in illo a-
qua, quantum tubulus extrahitur, sic ut eadem semper
altitudo eleuationis supra libellam maneat. Madesiat su-
perio-

perior tubuli capillaris extremitas, dum vel e digito pendens guttula illi admouetur, vt supremum obtegatur aqua orificium fistulae capillaris C. Poterit tubus extra aquam extrahi, sic vt aqua in DE contenta non descendat, donec columna aquae supra libellam eleuatae supere ret altitudinem b antea designatam.

Velim autem, meminerint, qui hoc phaenomenon examinabunt: idem in vacuo non minus, quam in acre libero, succedere. Namque scio, difficultorem eius in vacuo explicationem fore: Impossibilem tamen non dico. Faciant rei periculum, quibus volupe est: aduertant vero simul ad ea, quae inferius dicemus, in tertiae classis examine, §. 52. et seqq.

XXI. Grauioris, sic arbitror, momenti est phaenomenon, quod, nescio, annon *experimentum crucis* vocare liceat in hac explicationum classe. Inquisitus, an omnino liber aeri aditus pateat in tubos capillares, cogitauit, id ope Barometri posse decidi, si in vasculi locum tubus substitueretur capillaris, per quem atmosphaera premere subiectum sibi mercurium deberet. Si enim aer trans fistulam capillarem suspendere mercurium potest ad altitudinem ordinariam, non utique ab eius impedita pressione oritur eleuatio aquae supralibellam in tubulis ordinariis multum capillari meo amplioribus. In eum finem

Fig. VII.

23. Adhibui tubum longiorem ordinariis, et gracilem, Barometri simplicis recurui in modum, nisi quod vice vasculi tubus desineret in fistulam vere capillarem et

I i 2

aper-

Phaen. 23

tam. * In crure longiore mercurius est , et supra eum vacua ab aere tubi portio adhuc satis longa. Instrumento ad modum Barometri erecto , guttatum effluxit e capillari fistula mercurius , qui in tubo nimius erat. Ces-
fante

* *Fortasse maius huic experimento pretium statueretur ab aliquibus Lectorum , si methodum construendi tubos eiusmodi reticerem. Malo autem , vt et ab aliis facile fiat , quod a me factum est sine industria singulari. Sume tubulum Barometricum longiorem , et nonnihil graciliorem , vt facilior eius inflexio fieri possit. Sit ille in altera extremitate clausus hermetice , in altera apertus. Impleatur mercurio , more quidem recepto , sed diligenter et exacte , ad altitudinem usque quatuor pedum , aut amplius. Pars mercurio vacua inflectatur ad perpendiculum tubi reliqui , applicando lampadis flamman in aliquali a mercurio distantia , v. gr. 1. pollicis , si tubus fuerit gracilis ; in maiori , si crassior. Pars reflexa denuo in distantia circiter $1\frac{1}{2}$ pollicis ab angulo , liquefiat ad lampadis vim , et in tubulum capillarem ducendo extendatur. Tubus ita paratus , si pro uno solum aut altero experimento seruire deberet ; relinqu in hoc statu posset , et inuerti in situm erectum. Mibi placuit , crus horizontale una cum annexa sibi fistula capillari denuo reflectere , vt alteri cruri parallelum excurreret : atque tum demum erigere tubum more Barometri , et spectare eius phaenomena.*

sante fluxu mensuraui altitudinem eius in tubo longiore supra libellam eiusdem in crure capillari : et deprehendi eam duobus et amplius digitis exceedere altitudinem mercurii in Barometro simplici. Variata postmodum atmosphaerae grauitate , mutata etiam est altitudo mercurii in hoc tubo. Obseruaui id in capillari fistula, namque in altero crure id non succederet: neque proportionales sunt hae mutationes illis , quae in Barometro sunt simplici ; quoniam capillaris tubuli amplitudo vix supponi potest eadem per spatium nonnihil longius.

Fallor ? an inferre licet ? Si aer in vere capillaribus potest suspendere mercurium *ad totam* , quae grauitati eius respondet , altitudinem : cur in ordinariis multo amplioribus non sufficit eiusdem pressio ad componendam fistulae interiorem aquam cum externa ad libellam ? Dixi , *ad totam* : quod enim maior fuit altitudo mercurii ; id alteri tribuendum est caussae , quam pressioni aeris.

XXII. Succurrit et aliud, quod attendi meretur, experimentum.

24. Assumsi fistulam valde gracilem , fregi eam *Phaen.* 24. in medio , et obseruaui altitudines, ad quas eleuaretur oleum oliuarum in uno , et vinum rubrum in altero frustulo , immersis scil. extremitatibus , quae prius cohaeserant, vt sensibiliter eadem esset fistularum capacitas. Erat olei altitudo 1. poll. $3\frac{1}{2}$ lin. vini rubri 1. poll. 8. lin. pedis Regii Paris. Admisi in alterum vini columellam ad altitudinem circiter 8. lin. et mersi orificium inferius sub oleo ad profunditatem trium linearum. Intrauit oleum ad libellam cum exteriori ; ibique substitit. Ex-

tractam igitur fistulam vino iterum immersi ad profunditatem fere eandem : vidique vinum ingredi non solum pro submersionis profunditate; sed altius longe, donec vini superi atque inferi, et intercepti inter utrumque olei columna aequaret altitudinem memoratam 1. poll. 8. lin. Annotauit simul columellam olei fuisse superne et inferne sensibiliter conuexam.

Phaen. 25. 25. Idem obseruare phaenomenon licuit, quocties fistula oleo non fuerat madefacta ab initio : Si oleum trans fistulam fuxi ante, quam vino immersi, ascendet oleum quoque supra libellam, et vinum ante se protrusit. Tota tamen eleuationis altitudo minor fuit, quam est altitudo solius vini, aut olei. Repetit haec tentamina in diuersae cavitatis fistulis : et deprehendi satis constantia.

26. Vbi alteram adhibui fistulae partem, quae ab initio statim oleo, non vino tintata erat, admisique in eam olei columellam ad $5\frac{1}{2}$ lin. et extractam vino immersi ad profunditatem linearum circiter 4. nonnihil inclinatam : ascendit vinum ad lineas omnino decem, sic ut tota altitudo extra liquorem fieret 12. lin. Haesitque extracta fistula omnis hic liquor suspensus ad altitudinem lin. 16. Repetitis tentaminibus altitudo vini supra libellam varia fuit, sed semper tamen notabilis.

Fateor hic, si a differentia pressionum fluidi superne et inferne urgentis pendet eleuatio liquorum, nescire me, cur oleum vel plane non ascendet supra libellam *phaen. 24.* vel saltim minus ascendet, quam sine vi-

ni

ni praesentia fecisset? phaen. 25. Mihi quid in hoc negotio videatur, suo tempore indicabo.

XXIII. Accedo ad classem explicationum secundam: et simili ordine a rudioribus initii ad maiorem hypotheseos culturam successive pergo. Sumit haec classis, quantum memini, principium ab Isaaco Vossio, et per Borellum transit ad Carréum, nouissimum eius et ingeniostissimum cultorem. Notam huius classis characteristicam facio adhaesionem aquae ad vitri latera, cuius ope minus grauitare censetur aqua fistulis inclusa gracilioribus, quam externa amplioris vasculi libere circumfusa tubulo. Isaacus igitur Vossius L. de Nili aliorumque fluminum origine cap. 2. ita philosophari dicitur apud I. C. Sturmum in Colleg. Cur. P. I. Auctar. p 81. "Aquam,, natura sua viscosam esse; adhaerere illam vitro, et ab,, eodem sustineri; partem aquae sic suspensam non pre,, mere in aquam subiectam, sed grauare vitrum; patere,, id cum fistula aquae mersa iterum extrahatur, neque,, enim omnem decidere humorem; suspendi a vitro, quan,, tum latera valeant sustinere: Aquam igitur in angustio,, ribus fistulis ideo assurgere, quoniam prima aquae por,, tiuncula fistulam ingressa, cum iam sustineatur a fistu,, la, adeoque respectu portiunculae succidentis ponde,, re careat, ab illa attollatur supra libramentum aquae,, ambientis. Quanto minutiores fuerint fistulae, tanto,, altius aquam ascendere, quia minores plus habeant su,, perficie, et plura puncta contactus pro sua capacitate,, quam maiores, et sic aquam e pluribus sui punctis su,, spensam tanto facilius sustineant. Hydrargyrum care,, re,,

, re ea viscositate respectu vitri, eiusque insuper aequilibrium retundi ab angustia fistulae minoris; ideoque minus alte ipsum in fistulis, quam in spatiis latis eleuari. Ista loc. cit.

XXIV. Eamus per singula. Vult aquam esse viscosam *Vossius*, et adhaerere vitro: sic vulgo videmus. Vult sustineri ab eodem, et grauare vitrum. Hoc vero est, quod multi negant. Quos hactenus audiuimus, non a vitro aquam suspendunt, sed mediante fluido externo sustentant in vitro. Quid ergo? Examinetur quaestio *ad bilancem*. Sic facile cuivis videbitur, saltem primo intuitu. Accipe igitur, quid gestum sit? Est *Vir eximius*, qui adhaesionis istius veritatem cognoscere ex tubuli aqua sua instructi pondere instituit hac methodo. Tubulum superne cera obturatum, ne scilicet ingredi per inferius orificium aqua possit, nonnihil aquae immersum reduxit cum contrapondio ad aequilibrium: Remota autem cera, et in lancem congruam reposita, elevata est in tubulum antea humidum aqua, et pondus fistulae auctum. Id solers indagator expectauerat, eo quidem consilio, ut ex aucto pondere adhaesionem aquae et suspensionem a vitro cognosceret. Animaduertit autem, re denuo expensa, nihil hic concludi posse. Tubulus enim clausus ante ingressum aquae tantum a pondere suo perdiderat, quantum aqua, spatium a tubulo et cauitate eius submersa occupatum aequans, ponderauerat: sed aperto superiori orificio et ingressa in fistulam aqua, perdidit solum pro massa ipsius tubuli. Itaque auctum videri debuit pondus fistulac, etiam indepen- den-

denter ab adhaesione aquae ad latera. Conf. *Memorias Academ. Scientiarum Paris. A. 1705.* p. 318. edit. Batav.

XXV. Posset in mentem venire, quoniam hic impedimento est diuersitas tubuli superne clausi vel aperti; itemque profunditas immersionis: Tentandum id experimenti sub aliqua variatione in tubulis semper apertis, et minus profunde immersis. Videri enim posset, si suspensio aquae a diuersitate pressionis fluidi ambientis pendeat, fore idem tubuli vacui, et aqua instructi pondus: Videri etiam, ex mensura praepondii, si quod fuerit, facile judicium fore, an illud toti, quae tubulum intravit, aquae respondeat, an secus? Si enim vitri lateribus aqua adhaereat, pondus aquae totum accessurum esse ponderi ipsius tubuli. *Feci periculum rei,* assumtis tribus tubulis ad sensum aequam amplis, et superne in modum siphonum inflexi illos, ut ope fili serici suspendi ad bilancem possent. Reduxi illos cum contrapondio ad aequilibrium vacuos quidem, sed interne humidos: Tum vero obseruaui,

27 Quamprimum inferiora tuborum orificia, quae *Phaen. 27* sensibiliter in eodem horizontali plano erant, aquam attingerent, eleuari illam, et rumpi aequilibrium bilancis grauioribus factis hisce tubulis. Vidi etiam, mansisse diutius praepondium, et si paulatim immersi in aquam tubuli de pondere suo aliquid amitterent.

28. Mansit praepondium, cum extraherentur fistulae extra aquam, et singulae aliquid secum afferrent; Licuit autem annotare, re ad mensuram exacta,

29. Augmentum ponderis tubulorum adhuc non-
Tom. II. K k nihil

28

29.

nihil mersorum maius fuisse, quam eorundem extractorum : Illud grani vnius, et amplius; hoc ab uno grano non nihil deficiens. Quod augmentum, ut id obiter dicam, arginibus imputo, qui externae tubulorum superficie adhaerebant.

XXVI. Certum igitur est ponderis augmentum: sed nihil tamen egimus omni *hoc conatu*. Vraque nimirum sententia idem ponderis augmentum requirit. Quicquid vitro *adhaeret*, grauat in vitrum, si ab eo suspenditur. Inde ponderis augmentum. Sed idem vitro accedit, si aqua suspenditur a differentia *pressionum fluidi* supra et infra vrgentis. De *hoc* si dubites, rem sic habe: Cum in libero aere vacuus et cylindricus pendet tubulus, eadem est prementis atmosphaerae actio in utramque basin, superiorem et inferiorem. Vocetur illa $A = a + b + c$; exprimatque a partem pressionis, quae lateribus tubi semper incumbit, siue mersa sint orificia sub aquam, siue secus; exponat b eam portionem, quae per hypothesin innititur interiori laterum superficie, cum in aere est orificium, et quae aquam dicitur eleuare, cum inferius orificium aquae immergitur: denique c significet partem pressionis, quae fit in cavitatem tubi. Mergatur tubulus vna sui extremitate sub aquam, manet superior pressio inuariata, $= a + b + c$. Sed in pressione inferiori accedit variatio. Vrget adhuc tubi latera nisus a , vrget cavitatem pressio c : Verum pressio b non amplius tubum vrget, sed aquam sustentat. Igitur pressio tubi deorsum excedit pressionem, qua sursum vrgetur, parte ea, quam b diximus, et quae per hypothese-

thesin aequalis est ponderi aquae in tubulum eleuatae. Idem obtinet, quando tubus vnâ cum eleuata intus aqua extrahitur, eandemque suspensam conseruat. Non igitur hoc experimentum quicquam concludit aduersus illos, qui elevationem aquae a differentia pressionis perpendicularis sursum et deorsum factae deriuant. Forsan illis obest, quos §. 6. diximus causam elevationis non in hac pressione, sed in libera vel impedita aeris motitate et ad expansionem conatu quaerere.

XXVII. Demus Vossio tamen, aquam adhaere-re, et suspendi a lateribus vitri; demusque id tanto lumen-
tius, quod experimentis sollicite factis mihi constat, tantundem praecise aquae eleuari in tubulo, quantum comprehendit gutta maxima, quae ex tubo illo pendens adhuc sustentatur, casura quam primum augeatur. De-
dit huic tentamini occasionem vox vnicā, apud Mariot-
tum obvia *du Mouvement des Eaux* P. II. p. 105. lin. 6.
edit. Parif. 1700. Examen hoc fuit. Sumsi tubulum capillare satis aequabilem, et annotavi altitudinem, ad quam aqua haereret suspensa in tubulo: tum vero mersi eosque tubulum sub aqua, ut denuo supra libellam aqua ascenderet, quantum prius fecerat. Sic duplum aquae in tubulo continebatur; quem digito superne obturatum extraxi; vidique remoto digito

30. Descendentem successiue aquam colligi ad *Phæn.* 30. inferius tubuli orificium in guttulam et suspensam haere-re, si cauerem a succussione aut tremulatione tubuli. Si plus aquae in tubulum admissum fuerat, cadere guttulam:

K k 2

Sin

Sin minus, suspendi eam facile, nec diuelli a motitatione tubuli non nimis violenta.

Ita igitur intellexi, tantum aquae ingredi in tubulum, quantum ab eius orificio suspendi possit, non amplius. Velim autem, ut, quibus ista placebit repetere, caueant circumstantias alienas, et fallaciam accidentis facillime generaturas. Ceterum non diffiteor, me vel ob hanc caussam facile admittere, quod pendeat a lateribus vitri et sustentetur aqua.

XXVIII. Nondum tamen consequitur, quod *solum* grauet *vitrum*, neque subiectam sibi aquam premat. Si prima aquae portiuncula fistulam ingressa pondere caret respectu succedentis secundae: carebit et secunda fistulam ingressa respectu tertiae: namque et secunda lateribus adhaerebit sibi contiguis. Sic item tertia respectu quartae: et quis erit finis successionis? Quae ratio est, cur non in omni fistula ad summitem aqua ascendit, cum nulla fistulam ingressa deorsum premit in sibi subiectam? *Fig. VIII.* Suspenditur, *inquis*, quantum latera valent sustinere. Bene est. Si latera inde ab A ad B possunt sustinere quantitatem AB: poterunt et latera ab A ad C sustinere quantitatem AC, et sic porro, donec ad finem laterum in D peruenias. Quodsi columella Aa eleuata est in aB, quoniam vitrum solum grauauit, non subiectam sibi aquam pressit: cur non eleuatur aB in BC; namque et aB vitrum solum grauat, non subiectam sibi aquam premit. *Praeterea*, si aqua vitrum ingressa illi adeo tenaciter adhaeret, ut nihil deorsum premat, cur aqua in tubulo

bulo extracto suspensa , deorsum fertur , si tubulum in-
uertas :

31. Quodsi enim fistula fuerit nonnihil longior *Phaen.* 31. altitudine ea , ad quam eleuatur aqua supra libellam , ea-
demque extracta inuertatur , defluet aquam ex vna fistu-
lae extremitate ad alteram . Idemque accidet , si extra-
cto tubulo aqua suctione nonnihil eleuetur , et ea cessan-
te sibi denuo relinquatur : descendit enim sine mora . Igi-
tur non ita adhaeret , vt deorsum premere non possit , si
ceterae faueant circumstantiae .

XXIX. Esto autem , *adhaereat prima aquae por-*
tio vitri lateribus adeo , vt sustentetur ab ea adhaesione
tota deorsum grauitans pressio : Non ideo eleuabitur a
succedente . Cessauerit grauitas : successit illi vis aequi-
pollens , et eleuationi renitens ; ipsa scil . ad vitrum ad-
haesio , quae non minus diuulsioni suaे renititur , quando
sursum vrgetur a succedente aqua , quam vbi deorsum ni-
titur suo pondere . Quae est vis illa , qua vincit
haec resistentia , dum aqua sursum vrgeri debet , et
omnino eleuari grauis simul , et adhaerens vitri lateri-
bus .

XXX. Praeterea , etsi recte dicitur §. 23. in fi-
stulis angustioribus plura esse contactus puncta pro
capacitate fistulae : non tamen inde sequitur , aquam
e pluribus suspendi punctis , et ideo facilius sustine-
ri . Patebit in sequentibus , aquam non suspendi a
tota superficie interna tubuli , verum a sola supremae
sectionis peripheria . Cumque per *phaen.* 12. §. 13.al-

Kk 3 titu-

titudines elevationis sint reciproce proportionales diametri cavitatum*, patet in fistulis amphoribus aut angustioribus

* Saepe utar hoc phaenomeno, itaque operae pretium fuerit, vel in notis monere, qua methodo id cognouerim. Altitudinem mensura difficultatis nihil habet; sed mensura diametrorum, praecipue minorum. Evidem mensurazione per circinum actuali non potest exacte definiri diameter adeo pusilla. Vulgare artificium per insertionem setarum vel pilorum equi omni caret accurate. Mensura capacitatis per pondus liquoris datam in fistula altitudinem occupantis, pluribus obnoxia est difficultatibus, ob defectus bilancium in minutis, et inaequalitates tuborum in maiori longitudine, qualis necessaria esset, vix evitabiles. Substitui igitur aliud facilius et simul exactius mensurandi genus. Adhibui tubulum longiorem circiter 30 poll. angustum satis, sed cuius amplitudo ab una extremitate ab alteram sensim sensimque nonnihil minueretur; hunc etiam illum fugendo aquam trans totum tubulum: tum vero mersa nonnihil extremitate ampliore admodum leniter extraxi tubulum, ut aqua ultra debitam altitudinem ingressa efflueret, neque in extractione saltus fieret, ubi aquam tubulus deferebat. Mensuraui altitudinem aquae in tubo suspensae a: et converti tubulum in situm horizonti inclinatum sic, ut superiorum partem aqua occuparet, clauso hanc etenus orificio tubi opposito. Remoto postea digito, vidi descendere aquam pro inclinationis mensura satis tarde: clau-

ribus nec plura nec pauciora esse suspensionis puncta
pro

clausoque et aperto alternis orificio alterutro potui illam
sistere in loco tubi quocunque, et ex mensurata columel-
lae aqueae longitudine definire rationes diametrorum ca-
uitatis. Cum ad extremitatem tubi angustiorem aqua
peruenisset, mensus sum longitudinem, quam in tubo oc-
cupabat, $\equiv b$: et erecto verticaliter tubo vidi effluere
nonnihil aquae, et reliquum suspendi. Annotauit hanc
altitudinem $\equiv c$, et conuerti denuo tubum, ut eadem a-
quae copia in parte ampliori consisteret, mensuranda de-
nuo illius longitudine $\equiv d$. His factis potui conferre a
et b, itemque c et d, competentes eidem aquae moli, ma-
iori primo, dein minori. Fuit autem a: $b \equiv d : c$, vt de
bonitate operationis nihil dubitarem. Potui vero etiam
contendere a: c, vidique esse sine sensibili discrimine a: c \equiv
 $\sqrt{a} : \sqrt{b} \equiv \sqrt{d} : \sqrt{c}$. Iam ex elementis notum est, posita dia-
metro maiore p, minore q, esse p: q $\equiv \sqrt{b} : \sqrt{a}$. Unde
sequitur a: c \equiv p: q. hoc est: altitudines elevationis esse re-
ciprocas diametrorum amplitudinis. Obiter noto, cauen-
dum esse, ne et externa tubuli latera aliquid aquae sup-
pedient: post succionem aquae trans tubum praeflare, ut
et aer saltem semel trans fugatur per fistulam, et quae
funt similia, attento scrutatori facile obvia. Praeterea
etiam diuersis haec methodus adhiberi potest fistulis, si
earundem orificia dextre noris sibi inuicem applicare. De-
nique, cum vniuersa hoc mensurandi ratio sit, qualis hic
quaerimus, relativa, potest absoluta fieri, si unius solum tu-
buli diametrum noris definire in lineis, aut lineaee partibus.

pro quantitate aquae suspensae. Sunt enim hae quantitates peripheriis , quas diximus , omnino proportionales. Suspendatur autem , si ita velis , aqua ex tota tubuli interna superficie : erunt per idem phaen. 12. §. 13. superficies absolute loquendo aquales , et respectu capacatum in angustioribus maiores. Cur igitur in angustioribus minor aquae moles suspenditur , et maior in amplioribus ; si praecipue facilius sustinetur in gracilioribus ? vti *Vossius* auctor est . §. 23.

XXXI. Melior est *Ioh. Alph. Borelli* causa; non enim generalissime solum aduocavit aquae ad vitri latera adhaesionem , sed mechanicam magis magisque determinatam molitus est explicationem. Pertinent huc verba eius in Tract. de Motionibus a Grauitate naturali pendentibus : Propos. 185. p. 239 edit. Lugd. Batav. „ In „cauitatibus , inquit , subtilium fistularum internus aquae „contactus grandis est et amplus, respectu illius aquae moleculae ibidem existentes: ergo subito ac infimum fistulae orificium attingit aquam , efficitur in eius interna „et cana perimetro efficacissimus contactus, a cuius adhaesione fulciri sustinerique potest maius pondus, quam „habet pusilla aquae particula insinuata , et ideo gradus „praedictae virtutis suspensiuae et adhaesisionis exercetur „in aqua subiecta , et proinde ea reddetur aliquo pacto liberis , seu minus ponderosa , quam sit aqua collateralis libere premens. Et, quia minimae aquae particulae, porositatibus et asperitatibus internis fistulae innixaeruntur operanturque , vt totidem *vectes* , quae fleti possunt et interne rotari , necesse est , vt partes aquae ,

quae collaterales magis compresiae a totali energia su*i*, ponderis vim faciant , impellendo sursum particulas a-,, quae, quae minus comprimuntur a vestibus supra dictis;,, et ideo rotando excurrere possunt inferius efformando,, tumorem , vel monticulum aqueum, qui excurrendo la-,, teraliter altioribus fistulae porositatibus insinuabitur,ad-, haerebitque , et ideo denuo imminuetur eius vis com-, presiua , renouabiturque caussa ulterioris suspensionis;,, et proinde altius aqua intra fistulam impelletur , et sic de,, nouo eminentioribus lateribus adhaerendo successiue al-, tius impelletur , quousque ad supremam et maximam,, illam altitudinem aqua perducta , in qua aequilibrium,, cum aqua collaterali libere premente efficiatur :tunc,, quidem quies eius subsequetur , nec altius eleuari pot-, erit.,,

XXXII. In hac eleuationis oeconomia *multa bene* habent : sunt *aliqua* tamen , quae *auxilium* aliunde requirunt. Adhaeret , *ais*, vitro aqua fistulam subingressa, et ex hac alia quoque quasi pendula sustinetur : Eoque columnae aquae fistulae subiecta non adeo fortiter deorsum premit, ac circumfusa collateralis. Esto id, si ita velis. An inde sequitur, eleuari altius columnam aquae priorem? Videtur id expectare Borellus : sed credo, grauitatem columnae huius aqueae intercedere huic fiduciae. Sit pondus columellae ita pendulae absolutum $=a+b$, et pars eius , quae per adhaesionem non fulcitur $=b$. Sequitur subiectam huic columellae aquam premi sola portio-*b*: sed non ideo eleuabitur haec columna per alteram si-*bi* vicinam , cuius pondus est *a+b*. Ad eleuationem

enim non hoc solum requiritur , vt pressio b superetur, sed vt totum pondus columellae ($=a+b$) eleuetur ab actione alterius contiguae , cuius pondus itidem est $=a+b$. Finge pro particulis aquae globulos maiores solidos, et pro viadhaesione ac viscositate aquae funiculos, quibus globuli vitro proximi ex parte sui suspendantur a vitro : Minor erit illarum pressio in sibi subiectos, sed non ideo tamen eleuari poterunt a collateralibus. Dum enim eleuari debent, totum illorum pondus sursum vrgeri debet, nec adhaesio eleuationem *per se* adiuuat.

XXXIII. Fortassis inde peti subsidium potest: quod particulae porositatis innixa efficiuntur operanturque *vt totidem vectes*, qui flecti possunt etc. Vellem Vir egregius hanc rem distinctius et specialius enuntiasset , vt conferri cum effectu suo caussae mensura posset. Est, quid id fecerit : cuius dicta mox expendam curatius. Hic illud nota, monticulos et tumores, quos appellat Vir Clar. in eleuatione aquae , si recte mentem assequor, non ita obseruari. In tubulis madefactis celerior est eleuatio , quam *vt definiri figura supremae superficie certius possit*. De siccis autem hoc notaui :

Phaen. 32 32.Dum aqua in fistulis siccioribus successiue eleuatur , in parietibus primo ascendiit, et valde inaequilater ; non in medio tubuli.

33.Eademque in omnibus tubulis post eleuationem habet superne concavam potius , non vero conuexam superficiem.

Vtrumque hoc ideae repugnat Borellianae, si monticulos suos intelligit de eleuatione aquae in medio tubi.

Sin

Sin fortassis sola particulae vnius aqueae crassitie distare tumores illos a vitri parietibus voluerit, fatendum utique est, contrarium per obseruationes immediatas deprehendi non posse. Videtur autem huic theoriae minus congruere phaenomenon aliud a me obseruatum.

34. Sit siphon capillaris, et statuatur ita, ut crucis breuioris orificium *a* pauxillum tantum sub aqua mergatur; sitque fistula interne madida: ascendit aqua ad *Fig. IX.* altitudinem eandem *dc* in crure longiore, siue integrum conserues siphunculum, siue abrumpas in *b* a longiore crus brevius.

Hic duo sunt, quae Borelliana explicationi officiunt: non est hic pendens ex orificio immerso guttula, e cuius suspensione rumpatur aequilibrium; neque est altior aquae columna orificio incumbens aperto. Tum vero ipsa aquae columna *ab* in siphone isto non agit liberrime, sed pars eius nonnihil sustentatur a lateribus vitri in crure breuiore. Quid igitur est, quod aquam eleuat ex *d* in *c*?

XXXIV. Deficit etiam Borelliana expositio in hoc, quod nescias, *an ex mente Viri* eximii adhaesio aquae *ad totam tubuli superficiem* attendi debeat, vel *secus*? Primum videtur ex discursu eo, quo maiorem aquae in fistulis gracilioribus altitudinem explicat. Namque Propos. 188. p. 243. id phaenomeni hinc infert, quia adhaerentia et connexio aquae *parietibus internis,, canalium* maiorem proportionem ad molem aquae in-, sinuatae extensiue et intensiue in canaliculis subtilissimis,, habet, quam in amplis et capacioribus.,, *Extensiue*

L 1 2

quia,,

„quia vis adhaesionis mensuratur a contactibus , et ideo
 „a superficie interna canaliculorum ; e contra resistentia
 „mensuratur a pondere cylindri aquei contenti in iisdem
 „canaliculis ; estque proportio cylindrorum aqueorum
 „eiusdem altitudinis duplicata eius rationis , quam habent
 „eorum perimetri internae etc. , „ *Intensiae* „ quoniam
 „facultas et energia adhaesionis minus efficax est , quan-
 „to magis a parietibus remouetur. „ Evidet hic , nisi
 me omnia fallunt , adhaesio consideratur respectu totius
 superficie internae , quam aqua contingit.

XXXV. Secus rem definire videtur , cum alteri
 phaenomeno explicando incumbit. Memorat Propos.
 187. p. 241.

Phaen. 35. 35. Aquam in fistula magis demersa non altius eleuari , quam in ea , quae aquam aut aerem tangit ; quin imo pag. seq. tradit , aquam in aere altius suspendi , quam cum inferius orificio aquae immersitur.

Vt haec cum adhaesione aquae ad vitri latera reducat in concordiam , contendit , aquam fistula comprehensam „ non reddi leuorem ob internum contactum fistulae ; nam internam fistulae superficiem , cum sit madida „ nibil aut parum impedire vim grauitatis aquae contentae „ intra fistulam ; patere id experimento , cum in aere „ transferatur fistula , tunc enim aquam intra cavitatem eius madidam libere moueri et descendere : praecipuum „ impedimentum in extremo fistulae orificio reperiri ; non „ intra aquam , sed postquam aerem contigerit. „ Vult enim infimas aquae particulas quasi aliquod rete tensum et resistens constituere in libero aere , cui adeo inniti portio-

tiuncula quaēdam aquae superioris possit : sed dum illae aquam contingant, solui rete, et descendere hanc portiunculam etc. Hic, fateor, videri mihi, quod non amplius tota tubuli interna superficies veniat in computum Viri. Quid ergo ? Dicendum est, aut me non assequi mentem eius : aut illam sibi non penitus constare ; saltem non omnia hic esse ad liquidum deducta.

XXXVI. Excoluit hypothesin Vir ingeniosus, *Ludovicus Carré*, cuius meditata legi possunt in *Memo-riis Acad. Scient. Parif. ad A. 1705. p. 317. seqq. edit.* Batau. Summa huc redeunt capita. Primo adhaesio-
nem aquae ad tubi latera , eiusdemque ad eleuationem aquae concursum ex eo probat, quoniam.

36. Si sebo liquefacto internos tubuli parietes in- *Pbaen. 36*
unxeris, non ascendit aqua interior vltra libellam cum exteriore.

37. Atque si partem solum superficie internae sic illeueris : aqua ex eo latere non eleuabitur ; eleuabi-
tur autem ex altero, quo nihil sebi tubulus accepit.

37.

38. Praeterea , si profundius aquae immergatur fistula , quam sebo vñcta est , ascendet aqua supra libel-
lam in tubulo.

38

39. Denique , si guttula aquae per exteriorem fistulæ superficiem descendat, illa tubum intrabit dilapsa ad vsque infimum eius orificium, si sebo non inunctus fuerit ; sin fuerit, non vtique haec guttula fistulam ingredietur.

39

Secundo ipsam eleuationis oeconomiam sic concipit:
Dum vitri parietibus adhaeret contigua aquae portio : su-
stentatur illa , et minus gravitat in fundum vasis , quam

collaterales aquae columellae. Itaque ab hisce prae-
 uentibus elcuatur. Sit AB superficies verticalis ; et
 fig. X. corpus quocunque FD vna sui extremitate innitatur
 puncto D ; Sit C eius centrum grauitatis : certum est, si
 hoc corpus debeat sustentari in puncto F per potentiam
 quamcunque x , fore DF ad DC, vti est grauitas cor-
 poris DCF deorsum nitens, ad potentiam praedictam.
 Ita igitur particulae aqueae vitro proximae sustentantur
 ex parte a fistulae lateribus; neque tota sua vi grauant fun-
 dum vasis : igitur eleuantur a lateralibus columnis tam-
 diu , donec altitudo reddat, quod per adhaesionem de-
 cessit, atque adeo iterum emergat aequilibrium.

*Tertio ex hisce principiis resoluti quaestiones huic
 argumento connexas.* *Cur non eadem fit eleuatio in su-
 perficie tubuli externa , cui non minus adhaerent parti-
 culae vitro contiguae ?* Quoniam intra tubum sese mutuo
 sustentant particulae , atque sic eleuationi suae auxilian-
 tur : non item extra tubulum ; vbi accidit , quod intra
 ampliores etiam tubos fieri videmus. *Cur in graciliori-
 bus altior est aquae supra libellam eleuatio ?* quoniam vis
 adhaesionis mensuratur a superficie interna fistularum, et
 resistentia ex pondere columnarum aquae contentae ;
 sunt autem hae in ratione duplicata diametrorum cava-
 tatis , illae in simplici ; itaque superficies amplioris tubi
 minor est respectu aquae suae, et minor vis adhaesionis.
*Cur spiritus vini , leuior aqua , non eleuatur altius , quam
 aqua ?* Credibile est, aquae maiorem esse contactum ad
 vitri latera , quam spiritus vini , etsi leuioris, et fortasse
 diuisibilioris. Si a columnis aquae collateralibus eleua-
 tur

tur aqua , cur extracto ex aqua tubulo eadem non effluit, sed suspenditur in fistula ? quoniam paruum eius pondus non sufficit ad superandam resistentiam , quam aer diuulsioni suae opponit , aut pressionem, qua corpora se leuiora sursum pellit. *Cur in tubis aequalibus aequaliter aut inaequaliter inclinatis aqua semper ascendit ad eandem altitudinem perpendicularem ?* Quia momentum aquae non ex pondere eius absoluto mensuratur, sed per altitudinem verticalem, vti constat ex hydrostaticis. Deinde

40. Si in tubo sicco ascendat aqua vsque in C, *pbaen. 40*
eadem in madefacto ascendet altius, v. g. in D. Si mergus tubum , vt aqua amplius ascendat, et denuo illum extrahas , descendet aqua et formabit pendulam in B *Fig. XI.* guttam ; ipsa tamen haerebit ultra D v. g. in E. Si aquam denuo attingat gutta B, descendet aqua ex E in D; et ex aduerso, si in tubulo extracto haeserit ad C , ascendet illa vsque in D, cum aquam attigerit.

Quae istius rei ratio est ? Nimirum sequuntur haec ex perpetuo rerum ad aequilibrium nisu , quo fit, vt aqua nimium alte sublata in E vsque descendat, cum potest ; et minus alta ex C in D ascendat. Haec est Viri Praestantissimi *Theoria*, in compendium redacta: applicationem eius ad secretionis animalis negotium non est huius loci attingere.

XXXVII. Evidenter haec ita animo blandiuntur, vt neminem nisi inuitum huic expositioni contradicere posse arbitrer ; adeo vt mirum non sit, et ipsum Auctorem , et ex eo tempore plures alios eidem acquieuisse.

Sunt

Sunt aliqua tamen, quae *diffimulari non debent*. *Praecipuum* hoc est. Ex sententia Carréana sequitur: Cum tubulus acqualiter amplius immergitur aquae profundius, aquam eleuari debere ad altitudinem maiorem. Intuli id ex eo, quod maior hoc in casu superficies est interna tubuli, cui aqua innititur; adeoque plus decedit ponderi columnulae in fistula contentae; namque totam superficiem internam vocari in subsidium vidimus. Suspicerer, me in hac illatione falsum, aut minus perfecte mentem Viri assecutum esse, nisi bonam esse hanc consecutionem *Illiustris Academiae Historicus* testaretur.

„Sequitur, inquit, ex hisce principiis, altius eleuari aquam, quando cuitas tubuli est angustior, aut immersio tubuli profundior.... Secundo casu maior columnae aqueae, tubum ingressae, pars fulcitur a lateribus. Atque hic casus explicari per inaequalem aeris pressionem non potest., Optime ista, sed appellemus experientiam. Vidi repetitis saepe tentaminibus:

Phaen. 41 41. In tubulo aequo ampio et humectato aquam eleuari ad eandem altitudinem, siue mersus sit profunde tubulus, siue attingat solum supremam aquae superficiem, idque in vacuo non minus, quam in libero aere; et in omnibus hisce casibus ascensum esse promptissimum. Vidi eadem omnia fieri, cum tubuli loco siphonem adhibui, qualem *phaen. 24*. descripsimus.

Ego vero, ne fallerer apparentibus, adhibui tubulum omnino longiorem, eundemque alternis ita immersi, ut aqua eleuata eundem semper locum in tubulo attingeret, mergendo nunc ex vna parte 27. poll. nunc duos

ex

ex altera. Cum enim cylindrici perfecte tubuli vix occurant, fieri utique potest, vt pro maiori immersione maior sit aquae supra libellam eleuatio, si scil. tubulus extra aquam eminens sensim angustior fiat: potest etiam fieri, vt pro maiori immersione minor eleuatio sit, si augeatur sensim cauitas tubuli extra aquam residui. Vidi exempla facti utriusque, vt adeo necessum non sit, si qui congrua hypothesi phaenomena vidisse se testentur, solicitare fidem eorum: sed coniicere caussam liceat in differentias nonnisi post multam cautionem sensibiles.

XXXVIII. Ut haec pressius examinentur, reduci ad calculum possunt sequentem. Hypothesis Carréana annulo aquo cylindrico, superficie internae vitri contiguo, minorem asserit grauitationem deorsum, quam pro pondere suo naturali. Est enim potentia sustentans particulam quamcunque in DF, quae aequatur pressioni eius in F, ex €. 36. ad pondus absolutum particulae ($=p$) vti DC ad DF. Sit igitur diameter luminis tubi $=2b$. Altitudo aquae capillaris, hoc est, eleuatio eius supra libellam cum exteriore $=d$. Profunditas immersionis orificii inferioris in aquam $=a$. Latitudo annuli cylindrici memorati $=c$. et ratio radii ad peripheriam circuli $=\frac{c}{\pi}$. Erit tota pressio columnae aquae externae, cuius basis aequatur orificio tubuli, et altitudo profunditati mersionis tubuli, $=\frac{\pi abb}{2c}p$: Et huic per hypothesin aequari debet pressio columnae, aqueae in tubulo contentae. Haec autem pressio fit partim ab annulo praedicto, lateribus vitri contiguo, cuius basis

$= \frac{\pi}{2\varrho} (2bc - cc)$ et altitudo $= a + d$, et pressio ad pondus absolutum, vti DC:DF. Ponendo igitur DC:DF = m erit pressio huius annuli in subiectam sibi aquam $= \frac{\pi}{2\varrho} (2bc - cc)(a + d)mp.$ atque haec una pars est pressionis aquae internae: altera fit a nucleo aquae cylindrico, intra hunc annulum comprehenso, cuius basis $\frac{\pi}{2\varrho} (b - c)^2$ et altitudo $= a + d$; adeoque pondus absolutum et pressio in aquam sibi subiectam $= \frac{\pi}{2\varrho} (b - c)^2 (a + d)p.$ Habetur igitur per hanc hypothesin aequatio fundamentalis

$$\frac{\pi}{2\varrho} abb p = \frac{\pi}{2\varrho} (b - c)^2 (a + d)p + \frac{\pi}{2\varrho} (2bc - cc)(a + d)mp.$$

$$\text{Siue } abb = (b - c)^2 (a + d) + (2bc - cc)(a + d)m.$$

XXXIX. Hic iam sponte fluunt pleraque. Si aequationem reducas ad literam d pro inuenienda altitudine capillari sub datis circumstantiis, fiet

$$d = \frac{2abc - acc - am(2bc - cc)}{bb - 2bc + cc + m(2bc - cc)}$$

vbi patet, valorem ipsius d fieri variabilem, variata a profunditate immersionis: manente enim tubuli amplitudine eadem, b eadem est per hypothesin, et c eadem sine fine dubio: adeoque valor ipsius d propter litteram a numeratori formulae inuolutam maior erit pro maiori fistulae immersione, vti §. praecedente 37. iam admonui. Viceversa, si assumta d constante ex phaenom. 40. reducas aequationem ad c latitudinem annuli vitro adhaerentis, erit

$$c = b - bV \frac{a - ma - md}{a + d - ma - md} = b - bV \frac{md + ma - a}{md + ma - a - d}$$

fictque annuli latitudo, in tubo etiam cylindrico, inaequalis pro immersionis profunditate; quod etsi in calculo

lo nihil adhuc absurdii inuoluat , physice tamen minus congruum est. Cur enim plus aut minus adhaereat la- teri per asperitatem lateris et glutinositatem aquae , si plus aut minus profunde mersa fuerit eadem fistula ? vt nihil dicam de proportione admodum complicata , quae obtineret inter a et c , si curari deberet , vt posita a arbitraria semper idem valor ipsius d prodiret ?

XL. Melius ista patent , quando substitutis litera- rum loco numeris absolutis et per experientiam definitis intelligimus prodire valores minus vtique commodos. Dabit experimenta Vir solertissimus.

42. Monet enim , se adhibitis tribus tubulis , quo- rum diametri cavitatis fuerint $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ vnius lineae , obseruasse altitudines capillares 10, 18, 30 linearum. vid. Memorias Acad. Scient. Paris. ad A. 1705. p. 318. Liceat quartum addere prioribus , quo cognoui , in fistula diametri 1. lineae altitudinem capillarem fuisse 3. lin.

Quae vtique omnia satis conueniunt cum proposi- tione §§. 13. et 30, qua iniungitur , vt altitudines capil- lares sint reciprocae diametrorum cavitatis. Potest ve- ro examen propositum institui dupliciter. Certum est , c siue latitudinem annuli minimam fore , si singas totam illius annuli pressionem sufflaminari , et vitro adhaerere ; adeoque $m=0$. Videtur vero etiam , naturae id esse prae ceteris conueniens , vt centrum grauitatis C singa- tur in medio particulae DCF , adeoque vt fiat DC : DF = 1:2 , et consequenter $m=\frac{1}{2}$.

XLI. Sit primo loco $m=0$. adeoque $c=b-bV\frac{a}{a+d}$.

Sitque $a=1$. lin. namque ita licet, per phaen. 41. §. 37. erit c in primo experimento $=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}= \frac{1}{6}-\sqrt{\frac{1}{3}\frac{1}{6}}$ id quod excedit $\frac{1}{6}$ lin. In secundo erit $c=\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\sqrt{\frac{1}{1+9}}=\frac{1}{12}-\sqrt{\frac{1}{27}\frac{1}{3}}$, quod superat $\frac{1}{12}$ lin. In tertio est $c=\frac{1}{20}-\frac{1}{20}\sqrt{\frac{1}{1+3}}=\frac{1}{20}-\sqrt{\frac{1}{4}\frac{1}{5}}$, quod paulo plus est, quam $\frac{1}{25}$ lin. Denique in quarto erit $c=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}$ lin. Sit iam secundo loco, $m=\frac{1}{2}$ prodibit valor ipsius $c=b-b\sqrt{\frac{a-d}{a+d}}$, hoc est in primo casu $=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}}}$, in secundo $=\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}}$, in tertio $=\frac{1}{20}-\frac{1}{20}\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}}$, in quarto $=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}}$, neque posito $m=\frac{1}{2}$, euitari poterunt imaginarii valores, nisi a sit maius, quam d ; vel posito $a=1$, et d numero quounque maiore, nisi m sit minor, quam $\frac{a}{a+d}$, quorum utrumque necessitates obtrudit ab experientia alienas. Notandum vero est circa hos valores imaginarios, intelligi hac ratione, quod latitudo illa annuli non facile concipi possit ut composita ex pluribus aquae particulis sibi inuicem innexis. Etsi enim hac excusatione euitari posset incommodum de nimia vnius particulae aqueae mole: non facile alterum poterit caueri de valoribus imaginariis; hic enim credibile est, fore valorem ipsius $m=\frac{1}{2}$, vel etiam omnino maiorem.

XLII. Est et aliud, quod dubium habere lectorem potest. *Latitudo annuli* a lateribus fistulae sustentati penitus aut ex parte, per ipsum huncce computum *maior* prodit in tubis *amplioribus*, quam in strictioribus. Patet id ex modo dictis. Sed vero scriptoribus de hoc argumento omnibus, ipsique etiam Auctori sententiae constan-

stanter visum est , angustiam tubuli magis sauere suspen-
sionis liquorum , quam amplitudinem . Audiuitus Bo-
rellum §. 34. et Carreum §. 36. cui adde dicta Illustris
Historici , ad A 1705. p. 30. med. Incubuerunt sci-
licet Viri industriae haic curae ut maiorem in fistulis an-
gustioribus altitudinem explicarent : Cur non etiam illi,
ut maiorem aquae quantitatem in amplioribus tubulis e-
leuatam reducerent in concordiam sententiae suae ? Ea-
dem est in vitroque tuborum genere superficies interna:
Si facilior est in angustioribus adhaesio , cur plus aquae
adhaeret amplioribus ?

XLIII. Possent plura addi specialia , cuiusmodi
forent de tubulis sibi mutuo insertis , vbi calculo non vi-
detur cum experientia conuenire ; vel vbi tubulus adhi-
betur inaequalis sub aqua amplitudinis , et similia , quibus
nolo immorari . Si quis enim , quae hactenus dixi , sciat
cum hypothesi Carréana , rectius fortassis intellecta , com-
binare , de ceteris non despero phaenomenis . Vide-
rint itaque , quibus id volupe est , an recte intellexerim
meditata Viri , et consequenter , an , quae hic attuli , ad
rem pertineant , vel fecus ? Facile cedam rectiora monen-
tibus .

XLIV. Supereft *tertia* explicationum *classis* . Sup-
peditant illam Philosophi quidam *Angli* , gens mensura-
rum et curiosissima et scientissima . Ili cauſam huius
phaenomeni quaerunt in attractione corporum mutua .
Creditur enim , a vitro aquam sibi proximam attrahi , et
attrahi fortius , quam aqua trahitur ab aqua : Ex aduerso
mercurium trahi quidem a vitro , sed trahi debilius , quam

a mercurio. Itaque supra libellam elevari ab hac vitri virtute aquam ; et mercurium renitentia sua obstante consistere infra libellam, quando fistulae sunt graciliores.

XLV. Primus, qui attractionem istam in subſidium hoc loco vocauit, quod ego sciam, *Hauksbeius* est. Opinatur vero, totam tubuli internam superficiem aquae contiguam trahere aquam. Id experimentis minus conuenire, ciuis eius, Iac. Iurinius admonuit. Nimirum propter phaen. 12. §. 13. et 30. superficies interna tuborum, aquae ultra libellam eleuatae contigua, eadem est in omni tubo, eademque fauorabilius constituta in angustioribus, quoniam minor est particularum aquae mediariū distantia a parietibus : Cur igitur plus aquae attollitur in amplioribus ? an eadem cauſa fauorabilius applicata effectum producit minorem, quam applicata debilius ? Potuifset hoc incommodum Hauksbeius praeuidere, namque et ipſe rationem diametrorum inuersam obſeruari in altitudine aquae capillari annotauerat. v. Curs. Experim. Tab. 10. Pneumat. fig. 4. et 5.

XLVI. Fortius adhuc argumentum est sub iis circumstantiis, quibus id Iurinius produxit l. c.

*Phaen. 43.
Fig. XII.*

43. Si tubus CDE constat duabus partibus ampliore et angustiore, sitque altitudo, ad quam aqua in angustiore cylindrico ascenderet, aequalis altitudini totius tubi; altitudo vero, ad quam in ampliore cylindrico eleuaretur, non nihil maior altitudine partis angustioris in tubo DE : Repleatur tubus aqua, et mergatur pars angustior sub aquam, cadet aqua tubo inclusa vsque ad eam

eam altitudinem, ad quam eleuaretur in tubo ampliori cylindrico; si pars amplior mersa fuerit, omnis in tubo DC suspensa haerebit aqua.

Hic eadem est superficies attrahens, non solum aequalis, et diversimode constituta: Cur igitur in uno casu omnis suspenditur aqua, in altero non item?

XLVII. Praestat igitur hypothesi priori *Iuriniana*, quae et suspensionem aquae repetit ab attractione ea, quae fit a sola superficie supremae peripheria, et eleuationem a proxime contigua. Primo id rationi magis conuenit, haec enim sola tubi pars est, a qua subsidens liquor teneretur recedere? sola, ad quam ascendens liquor accedit proxime: sola igitur, quae vim suam attractiuan' exercere ad sustentationem aquae vel eleuationem nouam potest. Secundo mensuris respondet. Infinita sunt phaenomena, quae docent altitudinem eleuationis respondere diametro, adeoque et peripheriae superficie supremae, cum de aqua quaeritur, et infimae, cum de mercurio; vtrumque ita, vt altitudines sint inuerse, et quantitates aquae vel mercurii suspensi in tubulis cylindricis directe ut diametri. Accipe experimentum Viri eximi.

44. Sit EDC tubis parte ampliori et strictiori instructus; denotet AF altitudinem eleuationis, quae respondet parti strictiori, et GB altitudinem capillarem tubi amplioris: Sit autem DC minus, quam AF. Mergatur tubi orificium amplius, et impleatur tubus ad altitudinem maiorem quam GB, descendet aqua quamprimum libera erit, vsque ad altitudinem GR supra libellam. Mergatur denuo tubus, vt aqua attingat partem fistu-

Phaen. 44.

Fig. XII.

fistulae graciliorem et extrahatur iterum successiue , suspendetur tota aquae columna DC.

Evidem hic nihil est , quod aquam altius suspendere possit , quam contactus eius ad peripheriam tubi strictioris . Vnde etiam fit , vt in uerso tubo , meritoque officio strictiore , altitudo aquae eleuatae maior obtineri non possit , quam GB , si suprema aquae superficies constituitur in tubo ampliore .

XLVIII. Est haec adeo amica naturae proportio , vt , si tubi amplioris loco *magnum* fistulae graciliori *vas* adiunxeris , possis tamen suspendere aquam ad altitudinem peripheriae strictioris tubuli conuenientem . Debeo hoc moriti eidem *Iurinio* , qui obseruat ,

Phaen. 45

45. Si vasi amplissimo , sed altitudinis paulo minoris , quam q̄i ae conueniat eleuationi aquae in tubulo mox memorando , affigatur superne tubulus capillaris minutae admodum diametri ; si vas illud aquae immergatur , donec aqua t̄ bulum ingrediatur : posse omnem illam in vase contentam aquae molem ope huius vasis eleuari supra libellam cum exteriori .

Vnde Corollarium satis *paradoxum* sequitur , posse scil . molem aquae quantamcumque ope tubuli capillaris eleuari supra libellam ambientis .

XLIX. Non debet obici his dictis : Si peripheria tubi strictioris nonnisi columnam aqueam altitudinis AF sustentare potest in tubulo gracili cylindrico : quomodo illa sufficit columnae aequae altae , cum tubus inferne amplior , et moles aquae maior est ? Vel vice versa : Si peripheria tubi amplioris CD potest eleuare columnam aequae

aeque amplam ad altitudinem GB; cur non altius eleuare potest aquam, si pars huius altitudinis occupatur a tubo strictiore, atque adeo minor est aquae moles? *Respondet Vir iudiciosus ex vulgari hydrostatica.* Molem quidem aquae in his casibus inaequalem esse: Sed praeter molem considerari et velocitatem debere, qua descendere deberet suprema aquae superficies, si inferior aqua efflueret. Momenta, *inquit*, utriusque columnae aqueae fig. 12. §.,, 47. eadem sunt, ac si tubuli ED et CD usque ad aquam, in AB stagnantem conseruarent amplitudinem eandem; „ siquidem velocitates aquae, ubi ampliantur vel contra-„ hundur tubuli, sunt ad velocitates prope peripheriam, attrahentem reciproce vti sectiones harum columnarum.,, v.l.c. p. 427.

L. Non possum dissimulare, *hypothesin* hanc adeo commode phaenomenis *respondere*, et eorum *mensuris*, ut omnino doleam, misceri et officere illi vulgarem de attractionibus item. Placet industria Viri praestantisimi, qua *hypothesin* suam sic instruxit, ut ea data sequantur, quae debent. Displacet imbecillitas mea, qua attractionem proprie dictam in corporibus concipere non datur. Sed fortassis solui hoc vinculo possumus indulgentie Auctore egregio. Quid si hoc solum velit: Attractionem aquae ad vitrum esse phaenomenon generale, quo posito specialia ordine suo omnia sequantur; ipsius vero attractionis caussam dari corpoream, sed nobis incognitam. Nihil in ea excusatione indignum est *hypothesi*, nihil a regulis philosophandi alienum. Nimis, ubi plenam dare caussarum analysin non licet, subsistendum

Tom. II.

N n

est

est in causa proxima speciali , aliquando etiam in phaenomeno generali.

LI. Cum haec prima vice expenderem , visum est dari phaenomenon aliud , quod *impedit fortiorum aquae ad vitrum , quam ad seipsam concedi attractionem , et fortiorum mercurii ad se , quam ad vitrum.*

Phaen. 46. 46. Cum aqua trans tubum fugitur gracilem , idemque madidus horizontaliter reponitur ; obseruare licet , *particulas aquae* lateribus fistulae internis adhaerentes , sensim sensimque *coire* in *cylindrulos* aqueos , totam internam cavitatem replentes ; terminari illos vero superficiebus concavis.

Ex aduerso mercurius , a quo coitum in bullulas expectaueram , non coire , sed longa serie continuatus inordinate in tubo ampliore visus est quiescere. Id maiorem vitri attractionem ostendisset ratione mercurii , nisi postmodum animaduertissem , impurum eum esse , quem diducere etiam super charta vel ligno ~~ligno~~ , ^{ligno} , ^{ligno}

47. 47. Mercurium puriorum in fistula etiam angustiori coire primo in *sphaerulas* , et si illae augeantur , in columnulas cylindricas , superficie autem conuexa terminatas manifeste patuit repetitis tentaminibus.

Postremum hoc plane conuenit *Iuriniana* hypothesis , neque phaenomenon aquae penitus aduersatur , si huc transferas , quod alia occasione *Vir ingeniosus* monuit , cum de gutta mercurii inter duas aquae superficies constituta differeret. Ait enim

48. 48. Si guttulam mercuriale ex oppositis lateribus contingas binis tubulis vitreis , attractionem oriri inter ^{vitra}

vitra et mercurium ; sic , vt diductis paulisper tubulis figura guttulae sphaerica in oblongam transeat , sequente vitri latera mercurio ;

Non , quia fortius attrahitur *ceteris paribus* a vitro mercurius , quam a seipso ; sed quia maior est numerus particularum mercurii , quae vitrum contingunt , quam earum , quae a se inuicem recedunt . Hic enim maior non est , quam pro differentia superficie genitae ex mutatione figurae prioris ; ille autem responderet integræ superficie planæ , quae vitrum contingit . v. 1 c p. 435 . Si hoc , aut simile aliiquid applicari ad aquam in phænomeno nostro 46. potest , salua est etiam hac parte sententia .

LII. *Difficillimum* fortassis in omni sententia phænomenon est , ipsi , quem commendauimus , Auctori sollicitate expensum , illud , quod §. 20. ph. 22. recensuimus : unque non solum in aere , sed

[¶]Etiam in vacuo succedit experimentum l. c. *Phaen.* 49. memoratum . Sit tubus inaequaliter amplius , et immagratur in aquam aere suo purgatam nonnihil profundius , madefiat superne tubulus in vacuo , et extrahatur aliquantum : apparebit altitudinem utriusque aquae simul sumtam respondere altitudini , quae conuenit tubulo angustiori , et multo maiorem esse , quam quae ampliori debetur .

Hic vero artis est , ostendere caussam facti . Situbulus esset *cylindricus* totus , facile negotium foret ; dici enim posset , actionem peripheriae D destrui per actionem peripheriae C , adeoque rem perinde esse , ac si co-

Fig. XIII.

lumella AD et BC essent contiguae : Fateor tamen etiam hic quaeri posse , annon similiter dicere liceat , actionem peripheriae A destrui per actionem peripheriae D , adeoque columellam AD , *saltem in vacuo* , debere descendere ; quodsi enim aer occupat locum DE , potest peripheria C sustentare columellam AD , mediante aeris interpositu.

LIII. Pro tubis *inaequabilibus* difficilior res est etiam *in ipso aere*. Nihil potest esse amoenius explicatio *Iuriniana* , quam p. 429. libri citati legimus. Reducit non sine artificio hunc casum ad alium faciliorem , quo non interrupta est aere intermedio columna aquae angustior et amplior. Pressioni scil. atmosphaerae in basin BC opponitur cum pondere aquae in FGCB etiam e-later aeris inter DFG conclusi. Minor itaque est hic e-later quam grauitas atmosphaerae pro ratione altitudinis FB. Idem vero opponitur etiam , et cum attractione peripheriae in A aequivalet grauitati aeris externi super A prementis : itaque haec attractio aequatur pressioni aquae ad altitudinem FB , et super basi A , eleuatae. Egregie vero ista omnia , superest *scrupulus* tantum. Cur nulla fit mentio *peripheriae inferioris* D guttulae AD ? annon dici potest , quantum guttula A sarsum trahitur a contactu peripheriae superioris , tantundem trahi illam quoque deorsum a contactu inferioris : destruere igitur se inuicem contrarias tractiones , et rem omnem resolui in peripheriam FG , quae non sufficiat altitudini FB ? An omnino negligi debet haec superficies D deorsum trahens ? et , cur eo casu altitudo aquae , non sit maior,

ob

ob duas superficies attrahentes in A et in FG? An peripheria FG sursum trahens , et peripheria D deorsum vrgens semper sibi aequivalent? et quae caufsa est, vt amplior FG non pro sua diametro trahat, sed pro altera in D , aut vice versa? An etiam hic recte dicitur , quod §. 49. dictum est? momenta harum peripheriarum trahentium esse aequalia , et contraria ; itaque destrui tractio nem alteram ab altera : fieri hic tractionem pro supraena peripheria , non obstante , quod fluidum aqueum aereo interruptum sit; vti in vulgari hydrostatica pressio fit pro infima superficie , et si diuersa sibi incumbant fluida.

LIV. Notari tamen , si recte diuinauit , etiam hoc debet , aeris operam huic expositioni necessariam esse. Quid igitur factu opus , cum *in vacuo* experimenta succedunt eadem ? Hic aqua haeret : et haeret pertinacius , quam velles. Nondum licuit repetere experimentum Viri Clarissimi , sed memorabilius est , quum vt hic omitti possit.

50. Assumto tubo , cuius longitudo erat 35. *Phaen. 50.*
poll. diameter cavitatis $\frac{1}{4}$ poll. et summitas in tubulum vere capillarem diducta ; impleuit tubulum aqua ab aere suo perpurgata , et vidit omnem hanc aquam suspendi in vacuo , vt ante diximus phaen 49. Hic vero iustum est requirere , quae suspensionis illius oeconomia sit ?

Non deest sibi aut sententiae suae ingeniosus Auctor. Accipe verba: „optima, quae mihi succurrit, ad hanc diffi-,,
cultatem *responso* haec est : cohaesionem inter aquam,,
fistulae supremae capillaris, et tubi inferioris, sufficere „

„ad sustentandum pondus columnae suspensae. Sed quo-
 „usque haec cohaesio dependeat a pressione alicuius me-
 „dii subtilis adeo, vt penetrare campanam possit, id ve-
 „ro meretur considerationem. Etsi enim eiusmodi me-
 „dium non minus aquae quam vitri poros peruidat, a-
 „git tamen integra sua pressione in particulas, vt sic di-
 „cam, solidas superficie aquae in cisterna contentae :
 „cum ex aduerso omnes illae aquae in tubo particulae,
 „quae directe subiacent particulis aquae superioribus (*in*
 „capillari fistula contentis) per easdem tutae redduntur
 „ab isthac pressione. Consequenter pressio huius medii
 „in superficiem quamcunque tubuli amplioris sub capilla-
 „ri fistula positi minor erit pressione eiusdem medii in
 „superficiem priori aqualem, sed in vase ampliore as-
 „sumtam; adeo vt differentia harum pressionum suspen-
 „tet columnam aquae in tubulo contentam..”

LV. Evidenter dari fluidum premens aere subtilius, cui trans vitrum via pateat, multa nobis phaenomena persuadent, quorum partem loco citato videoas ab ipso Viro Egregio allegatam. Vnum me habet anxium.

Fig. X II Non potest hoc medio vacuum concipi spatium DFG; quia vitrum peruidat. Quodsi vero plenum est eo medio spatium DFG, non video, quomodo pressio eius in superficiem FG impediatur ab aqua fistulae capillari AD inclusa? Cur fluidum hoc subtile non agit in totam superficiem FG, et tota sua pressionis vi, si contiguum est huic superficie non minus, quam alteri in cisterna sumtae? Facilius feram, ab eiusmodi fluido deriuari effectum suspensionis mercurii aere suo purgati in tubo Barome-

metrico vltra consuetam altitudinem, ad vsque 70 , vel 75 pollices , quod phaenomenon Clar. Autori placuit huc referre : Dicerem eo casu , particulas mercurii vitro superne contiguas defendi a vitreis illis contra pressionem huius fluidi ; vnde etiam accidat , vt mercurius leui succussione a supremo tubuli contactu semel auultus non nisi ad ordinariam sustentetur altitudinem ; nimirum pro mea coniectatione , hoc fluidum , vbis semel tubum intrauit aliqua sui copia , aequaliter supremam mercurii superficiem in tubulo vrget , ac infimam in vase ampliore aeri expositam . Quid ergo , *inquis* , de phaenomeno hactenus memorato fiet ? commendo illud repetito Autorum examini .

LVI. Ista vero de praecipuis phaenomenorum explicationibus . Vidi plures , quas nolim examinare ; alias , quoniam nimis commentitiae sunt ; alias , quoniam minus specialiter expositae ab Auctoribus suis . Quid mibi videatur , exponam dissertatione secunda , quae plura etiam de his tubulis experimenta continebit , et conclusiones aliquot eisdem superstruet . Dum id in sequenti Commentarij Volumine fiat , cogitabunt Lectores , fungi me vice cotis , acutum reddere quae ferrum solet , exsors ipsa secandi .

DE

DE GLANDVLIS CORDIS

Auctore

Io. Georg. Du Verno.

M. Nov.
1727.

POst Elephanti vias chyliferas, quarum in Commentariis Academiae ad An. 1726. descriptio data fuit, alterum nobile phaenomenum, quod in huius aequa ac aliorum Animantium dissectionibus a nemine visum est nomenque forte rarae acquisitionis aliquando obtinebit, hac vice exponendum est. Si in genere Elephantorum dissectiones rarissimae sunt, id multo magis de illis dicendum est, ad quas diligentia, tempus sumtusque necessarii tanquam ad diuitem fodinam insumti sunt. Propterea, qui aliquando tale munus suscepturni sunt, sciant, non facilem, sicuti initio appareret, in haecce antra seu sepulchra descensum esse, vbi forte parum fausta ad longum tempus perniciale auram inspirare ac id sollicite curare oportet, vt postquam magnō molimine solutae et extractae ordinataeque fuere partes singulae, (id antem molis ratione, quae terribilis est, factu quam dictu difficilius est, siquidem ex solis visceribus ossibusque vidimus haud mediocrem cymbam totam repletam fuisse,) hae inquam partes plurium mensium spatio incorruptae floridae et succulentae conseruentur, retineantque toto illo tempore eam, quam ab initio obtinebant, perfectionem integratatemque. Hisce sub-

subsidii omnes difficultates vincere metamque optatam attingere fas est.

Incredibile statim videtur, quod quis circa pericardii mediastinique existentiam, in re tam evidenti et facili, *Elephantis* *pericar-*
suum non *obseruatum.*
 ad quam oculis tantum apertis opus est, lapsum committere possit: Nam proclive est, quando pectus aper-
 tum est, videre aut palpare nudum sit nec ne cordis pa-
 renchyma. Quanquam nulla difficultas in eo appareat,
 fors Anatomicis saepe contraria tulit, vt inter eos peri-
 cardii Elephantini notio adhuc incerta esset, sicuti Acta E-
 dimburgensia Cl. *Moulins*, nostraque declarant. Aliam
 itaque Elephanti dissectionem ad hancce litem compo-
 nendam exspectare satius est, quam leuiter supponere, a
 vitioprimae conformatio[n]is huncce mihi oblatum defectum
 pericardii originem forte trahere, sicuti exempla quorun-
 dam animalium ac hominum aliquando visa fidem faciunt.

Ad cordis Elephantini massam simul ac vasorum *Dimensions*
 amplitudinem iure meritoque obstupescendum est, sicuti *cordis*
 tabulae sequentis inspectio comprobat. *et vasorum.*

Pondus cordis a sanguine polypisque mundati 25. T. XVIII
 lb. Russic. aequabat.

Eiusdem circumf.	poll. 26.	
A basi ad conum longit.	15.	
Ventriculi dextri longit. int.	10.	4. lin.
Eiusdem semicircumf. super.	12.	2. lin.
- - semicircumf. inf.	7.	
- - crassities		5. lin.
Ventriculi sinistri longitudo int.	13.	
Eiusdem semicircumf. super.	9.	1. lin. semi-

- - semicircumf. inf.	poll. 6.	2. lin.
- - crassities		11. lin.
Septi crassities		16. l.
Auriculae dextrae longit.	3.	6. l.
Eiusd. semicirc.		13. lin.
Auriculae sinistrae longitudo	3.	9. l.
Eiusdem semicirc.		11. lin.
Arteriae magnae diameter inter.	2.	2. l.
Eiusdem crassities		3½. lin.
Arteriae pulmon. diameter int.	2.	8. l.
Eiusdem crassities		2½. l.
Venae pulmon. diameter interior	2.	3. l.
Eiusdem crassities		2. l.
Venae cavae ascend. diameter int.	4.	2. l.
Eiusdem crassities		2. l.
Venae cavae descend. diameter int.	3.	
Eiusd. crassities		2. l.

Caetera, vti sunt, propria Vasa Cordis, Valvulae, Pinguedo, Nerui, ea magnitudine et copia erant, qua ad veram nobilissimi huius visceris naturam rimandam aptior toto mundo inueniri vix potest.

Sententia
Eruditorum de na-
tura et pro-
prietatibus
cordis
quaenam
sit?

Eruditorum, fateor, de Corde speculationes in se spectatae a vero tanto magis recedunt, quo notio omnium eius recessuum magis ignota ac imperfecta semper fuit. Imperfectam notionem eam voco, quae vna tantum seu particulari proprietate nititur, cuiusmodi de ventriculo, de intestinis, liene, glandulis, vtero etc. a doctissimis viris reiectae et derisae sunt notiones, postquam dictarum partium maturatae magis ac completae descriptio- nes

nes editae sunt. Tota itaque cognitio cordis ad tria capita fere reducitur. 1. Quod vna homogenea massa constet, sicuti musculus. 2. Quod in motu solo operationes eius confistant, et 3. quod ventriculi nec non sociae auriculae nihil aliud sint, quam simplices cavitates nullum in fluida praeterlabentia ius peculiare seu proprium obtinentes, adeoque pura receptacula.

Graues autem causae sunt, quae ad hancce doctrinam in dubium reuocandam me impellunt, quae vt ad sensum qua licet perspicuitate exponantur, diuersorum animalium Corda a prima sua constitutione vsque ad perfectionis, quam in adultis consequuntur, gradum perscrutari operae pretium est. Ac primum, in foetus exordio, quum partium prima stamina formari incipiunt, pulchra obseruatio sententiam nostram egregie confirmans hoc trahenda est: Totum Cor nihil aliud, quam vesiculam puram crystallinam nudam exhibet, cuius tamen alterna turgentia ac concidentia sensibilis est; Huic postmodum vesiculae, parenchyma seu cortex superoritur, sicuti Natura in nonnullis partibus, organum purificationi aut transcolationi alicuius fluidi inferiens, firmiore et crassiore tegumento inuestire solet. Ex eo quid inferendum sit luculenter apparet: Duplex nimirum seu mixtum organum, vnum interius, cuius existentia actioque anterior est, et cum vita incipit, laesionesque mortiferae sunt; Alterum, exterius, solidum ac densum, volumen seu massam cordis efficiens, cuius vulnera teste experientia minus periculosa sunt. Sed ne quis imaginationi, quae rebus quidem anatomicis non infrequenter se immiscet, hancce for-

*Dubia ad-
uersus do-
ctrinam re-
ceptam pro-
ponuntur.*

*Cor ex dua-
bus parti-
bus valde
diuersis
constat.*

te opinionem tribuat, non aliter cuiuslibet cordis status seu fabrica, quoties satis diligentiae adhibetur, quam praedicta forma oculis apparitura est, mixta nimirum ex dupli organo, in quod sponte sua resolui se patitur. Et

*Illustratur
exemplio os-
sium.*

hoc quidem, cum ex simplici intuitu exterioris interiorisque structuræ cordis satis clare intelligitur, tum ex contemplatione osium illustratur, siquidem vna ex parte, quae corticalis est, simulque durissima, motus et firmatatis instrumenta sunt: Altera autem, medullæ laboratoria magno artificio constructa, iucundaque visui existunt. Cur rogo in osse solummodo, non aequa in corde, idem discrimen a natura constitutum, quodque non minus in eo palpabile ac perspicuum est agnoscimus? Aut si agnoscimus, cur non inculcamus serio? etiamsi usus forte adhuc fuerit occultus: Sufficit enim, si solummodo praedicta fabricæ differentia vera sit et satis conspicua. Hanc vti dictum est, primo intuitu obseruare ac digito monstrare fas est: Nam quemadmodum pro fibroso corpore seu lacertorum fasciculo conuexa seu exterior cordis substantia optimo iure habetur, iusque illud eousque extendi, quoisque directio faciesque lacertorum continua- ta ostendi potest et viceversa, sic architecturam istam ultra, in causa cordis usque pretendere nimium est: Non quidem ac si ad motum cordis, chylique ac sanguinis circuitum, parietes utrinque constipati ac solidi minus apti et conuenientes forent: Contrarium enim perspicue, cum ex contemplatione Aortæ, tum quoque exemplis mechanicis patet, siquidem ad fortiorem arctationem, latera quo strictiora et compactiora sunt, eo aptiora esse credim-

*Exterioris
seu cortica-
lis substan-
tiae cordis
structura,*

duntur. Ecce autem loco parietum compactorum, spon-
giosos, cauernosos, vbique terebratos paries? Argu-
mento, ad contractionem eos minus inferire, quam vul-
go assueratur: Ecce fistularum, meatuum, fovearum
prodigiosam multitudinem, breuiter, compagem singu-
larem, diuersamque ab exteriori, quam satis dilucide
verbis exprimere haud possibile est, cuius tamen, opinor,
et reliquarum proprietatum, quas in excellenti hac cor-
dis regione et speciatim in membrana interiori, sedulitas
anatomica detexit, a nemine praetexi potest ignoran-
tiae causa.

Vt hancce modo citatam cordis fabricam, prout naturae conuenit, perspectam habeamus, illud dili-
genter obseruandum est, quod in solius membranae inter-
nae gratiam, tota illa admirabilis compages compa-
rata sit; Evidem huius membranae ea conditio est, vt
minima sui portione ventriculorum cavitatem inuestiat,
maxima vero rimas, anfractus, sinusque omnes antea me-
moratos, vna cum minoribus intra hosce latentibus, qua-
quaerens peruidat, superficiemque amplissimam hac ra-
tione obtineat: In hunc finem, in fistulas innumerabi-
les seu processus veluti digitos chirothecae excavata et
diuisa est: Hi postmodum loculos, ceu vaginas aptatas,
quibus firmiter agglutinati sunt, subingredientes, mox
novas fistulas haequae alias progerminant inuicem conca-
tenatas et continuas, ac per vniuersam loculorum, cum
quibus eandem directionem terminationemque nanci-
scuntur, syluam dispersas: Hi loculi mirum in modum
multiplicati, non solum in ventriculorum superficie
Verum etiam in plures ordines seu strata sibi in-

*Interiorum
recessuum
cordis stru-
ctura.*
*Vulgaris
sententia
de huius
struturae
vsi refur-
tatur.*

*Nova inte-
rioris stru-
cturae cor-
dis, inspecie
membranae
descriptio.*

uicem succendentia sic distributi sunt , vt sub vna loculo-
rum serie, mox altera , posthanc tertia in conspectum
veniat, fereque tertia crassitie cordis pars huicce mea-
tuum dispositioni inferuiat , vnde admodum fungosa ac
spongiosa euadit : Nam id a singulari dispositione ac
tendentia horum meatuum potissimum prouenit , quae
talis est , vt eorum terminus aeque ac initium simul
respiciant cavum ventriculorum , vnuisque in a-
lium , ab imo vsque ad summum , vtraque sua extremitate,
per continuatam inosculationem sese insinuet , vnde
prodigiosa fossularum multitudo, ex eaque rara ac laxa
substantia emergit. Ultimo, annotatione dignum est,
quod in tanto numero meatuum , omnes vnam tenden-
tiā obseruent , quantum quidem in variis animantibus
obseruare potui : Nullos a cuitate ad medium vel ex-
tremam superficiem penetrantes , verum sic dispositos vi-
di , vt in longum latumque protensi , ad superficiem in-
ternam paralleli essent.

*An mem-
brana cor-
dis interior
peruvia sit ?
inquiritur.*

Hisce praemissis, ad alias proprietates in membra-
na cordis interiore contemplandas progredior , inter
quas summorum Virorum autoritate haec collocata est,
quod per eam veluti per cribrum naturaliter sanguinis de-
pluuium in cuitates cordis fiat , hiantibus eum in finem
vasculorum extremitatibus, quas tamen oculis percipere
graue est. vid. *Nouvelles decouvertes sur le coeur. Traité
nouveau de la structure et des causes du mouvement naturel
du coeur par Mr. Raymond Vieussens.* in quo certe tra-
ctatu Vir summus ita se geslit, vt nemo non admiretur:
Quae enim recordis partiumque eius constituentium tex-
tura

tura, proprietatibus, muniisque, in specie, de singulari incessu arteriarum venarumque coronariarum in eo enarrantur, ea absque ingenti animi voluptate ac utilitate legi non possunt, ut adeo Triumphum cordis iure meritoque appellares. Quod itaque vasa huius membranae sanguinea attinet, membranae superficiem internam terminantis indispensabilis functio esse videtur, omnem in cordis substantia diffusum sanguinem, cuius per vasa coronaria exteriorem membranam perreptantia ingens copia sine intermissione affluit, in sinu suo colligere, quia vasorum progressus hic sistitur ac interrupitur, uti consideranti patet: In huncce finem, per ampla superficie summaque tenuitate haec membrana instructa est, ut supra diximus, ad praedictam sanguinis eo tendentis copiam continendam: Quare huius intuitu (ut calorem cordis seu flamulam vitalem hic non resuscitem) ad minimum concedendum est, membranam cordis interiorem insolita humorum quantitate praegrauatam et saturatam esse, attento incredibili numero vasorum, quae ex omnibus cordis locis adueniunt: Ex foueis enim, tanquam ex testis floribus, quaedam propagines arbuscula mentientes prodire obseruantur, haecque in egressu suo mirum in modum luxuriantes, modo ad latera fovearum, modo circa columnas chordasque capreolorum instar, variis modis implicantur, quemadmodum multiplex experientia testatur.

Vnum solummodo restat, an vere et naturaliter ductus seu pori in praedicta membrana adsint, per quos sanguis aut succus qualiscunque in ventriculos cordis ex-

primi-

*Functio
praedictae
membranae
est, omnem
in substantia
cordis dif-
fusum san-
guinem in
sinu suo col-
ligere.*

*Eiusdem
membranae
vasa san-
guinea.*

Lit. A. A.

A. A.

primitur, prout fama huius noni inuenti initio seculi increbuit: Inuentum sane, multis egregiis meditationibus ansam praebens, quo pulchrius, nobiliusque vix ac ne vix excogitari potest. Quam ob rem sententiam meam ut exponam, prius experimenta affero, ex quibus illa origine simul ac fundamentum mutuat: Experimenta, vti spero, beneuoli lectors cogitabunt, minus errori et fraudi obnoxia, perspicua, veritatisque notam secum aduehentia: Nam certum est, quod experimentum in minutis animalculis saepe incertum ac fallax, in maioribus e contra, in quibus sensuum suffragia minus impedita sunt, sine dubio et ambiguitate institui possint. Per Iustratis itaque cordis Elephantini, de quo supra mentio injecta fuit, partibus maxime obuiis, exempli gratia foueae, quarum nonnullae pollicis diametrum aequabant, columnae pollicem latae, valvulae peramplae et crassae sine globulis tamen seu corpusculis, in sigmoidearum limbo deficientibus, etc. Primum experimentum hoc fuit, *Experi-*
mentum 1. videre, an post expurgationem ac elotionem cordis, quod antea exsangue pallidumque apparebat, detersa prius omni humiditate aduentitia, sanguis per compressionem cordis arteriarumque et venarum coronariorum, quarum amplitudo maxima erat, e membranae poris exprimi posset; sed conatus irritus fuit. Post haec, vnum ventriculum cordis aliquamdiu aqua assisa maceraui, ad tollendum, si possibile esset, omne genus impedimentorum; Alter, vti erat, intactus permanxit; cavitas vtriusque aperta et diducta fuit, vt quicquid fieret intus, statim in conspectum veniat. Hinc aquam flauo colore tintam

et

et tepidam per venosa aequa ac arteriosa vasa ad vtrumque ventriculum tendentia diuersis temporibus, omissa ligatura; hocque secundum fuit experimentum, in quo et *Experi-*
mentum 2. si iniectiones diligenter continuatae ac reiteratae essent, successus tamen desuit. In vna enim aequa ac in altera cavitate, effluxus per poros membranae, in quam defixos oculos tenebam, erat imperceptibilis; e conuerso aqua per venam citato cursu redibat. Tertium experi-*mentum 3.* mentum praememorato simile fuit, excepta sola ligatura, quam hic necessariam esse duxi, sicuti mox euentus docuit: Nam quum in praecedente experimento, praeter refluxum aquae per venam, mutatio nulla in superficie interiori consecuta sit, nunc in quibusdam locis membranae praedictam superficiem inuestientis, exilia vascula comparere incipiebant, quae adeo continuata aquarum iniectione increscendo, intra breve tempus per vniuersum ambitum conspicua facta sunt, absque tamen aquae sensibili effluxu aut humiditatis apparentia. Pro quarto *Experi-*
mentum 4. experimento, in spem melioris fortunae, aquam non adhibui; sed spiritum coloratum; Deinde mercurium prius per alutam traiectum; Postremo flatum. Successus tamen nihil melior fuit, resque in eodem statu permanebant. Attonitus quare hic omnes mei conatus irriti, in minoribus contra animantibus transitus liquorum facilis esset, sortem meam infelicem deplorare coepi, experimentis istis valedicturus, ne alia aequa necessaria per obstinationem meam neglecta pessum darentur. Quum postero die, sub aliis negotiis, cor mihi obuium factum esset, semel adhuc curauit, ut iniecta & quantitate
Tom. II. Pp suffi-

Experi- sufficiente , id quod factum est in ventriculo macerato,
mentum 5. vascula , vti decet , satis turgida redderentur , hisque
 praeter flatum , compressionem manu factam superaddi-
 di , eamque solummodo blandam , citra violentiam . Ac-
 cedit non diu post dictam encheiris in , quum spes nulla fer-
 me residua esset , vt ex quibusdam fossis , globuli mer-
 curiales , ex aliis humores , in cauitatem utramque subito exi-
 lirent , de quo vehementer laetus sum .

Praedi- exper- menta im- probantur. Sed quia amor ardor que experiundi , veritatemque
 quoconque pretio extorquendi , nos eo saepe abripit , vt
 triumphum ante victoram canamus , quando ex solo e-
 uento , sine examine experimentorum , de naturae operi-
 bus iudicium ferimus , incertus animi adhuc haereo , quid
 concludendum sit , postquam adeo aegre et tarde , et post
 tantas vexationes eruptio liquoris facta sit . Non infi-
 cior , liquores in cordis caua vias tandem inuenisse ; sed
 nescio , quid effluxum in principio et usque ad
 vasculorum summam distensionem retardare potuit .
 Magna forte viarum angustia ? concedo , sed caete-
 ris paribus , minor esse debebat in Elephanto , quam in Oue
 difficultas ; Deinde saepe accidit , vt tunica membra-
 nam aut tubulum efformans , a variis causis praeternat-
 uralibus , soluta eius compage , eum in statum perueniat ,
 vt cedat contranitenti fluido , quod postea per rimas aut
 hiatus , modo sensibiles modo insensibiles , praeter naturae
 institutum elabitur . Pari ratione , de nostra membrana
 cordis , vasculisque intertextis cogitandum est : Nam , quum
 huius membranae minima sit resistentia propter summam
 eius mollietatem , idque in minoribus adhuc magis quam in
 gran-

grandioribus animantibus , periculose erit, rem cum ipsa habere , quoniam aucta mollitie et plenitudine va- scularum, nisum perferre amplius nequit , eamque ob causam succumbens, in speciem filtri commutatur. Ade- de, quod ruptura vel excoriatio in nonnullis locis sensi- bilis fuerit. Tantum de membranae interioris cordis va- sis fanguiferis.

Nunc insignis proprietatis , quae inopinato in ea- dem Elephanti dissectione oblata est, mentio postremo facienda est , videlicet, exiguarum glandularum ad praefatam membranam pertinentium. Dux inauditam pro- prietatem , quia cum morbo et sine morbo defunctorum Elephantorum, aliorumque animantium hominumque dis- sectiones, eam silentio praetermittunt: Etenim, quum haud maiorem cordi immunitatem a morbis concessam esse quam caeteris partibus, omniaque hasce affientia mala, cordi communia esse constet, vt primum in haecce cor- puscula incidi , statim ambigebam, vtrum impressioni seu characteri vitioso imputandum sit phaenomenum nec ne: Quare ad veram huius inuenti causam inueniendam, cor eius- que singulas partes internas et externas diligenter examina- bam , spe fore , vt vitium clarius et certius innotesceret; Ast incassum: Pallore enim excepto, concretionibusque lardo similibus, maximis , e cordis ventriculis usque ad vasorum cavitates protensis, reliqua satis bene valere vi- sa sunt, nullo sensibili vitio, nulla inflammatione aut cau- stica malignitate extus vel intus apparente ; E contrario, notae glandularum seu character hisce proprius adeo ma- nifestus erat, vt de earum existentia amplius non dubi-

*Glandu-
lae cordis
primum
inuentae.*

*Cor an ob-
noxium
sit morbis?*

tans, potissima nunc cura eo conuersa sit, vt noui huius inuenti notitiam accuratam, vna cum delineatione bona in visum anatomiae acquirerem.

*Descrip.
glandula-
rum cordis.
Lit. BBB
BBB.*

Harum glandularum obseruatio sine microscopii ope facta est: Eae enim in superficie vtriusque cavitatis cordis, intuentium oculis statim apparuere, veluti Tabula XVIII. exhibet suntque tubercula, caput aciculae aquantia, albicantia, quae propter membranam instar vitri transparentem inconspicua esse nequeuerunt, et si tumorem perexiguum efficiant. Pone hancce membranam, cui agglutinata sunt, veluti incarcerrata et compressa iacent, speciemque glandularum solitariarum constituant, quia non coniugatim, sed in diuersa a se inuicem distantia hinc inde disposita sunt. Quamobrem, quid initio de hacce raritate seu sterilitate, pro tam vasta superficie, in qua nimis visae sunt disgregatae, coniicerem, incertus fui. Numerus enim amplitudini cavitatis minus respondebat. Tandem cogitatio incidit fossularum, in quibus nonimprobabile visum fuit, naturam forte aequalem numerum talium glandularum collocasse, sicuti alias in occultandis suis operibus non infreuenter hocce artificio vti solet, quemadmodum in glandulis intra cauernulas sinuum durae matris contentis, quas vix ac ne vix eruere fas est, conspicimus. De facto, plures eiusdem generis glandulae praecedentibus perfecte similes, in praefatis fossulis inuentae sunt, prout dissectio comprobauit, neque alia lege eas dispositas vidi, quam vt sunt illae, nimirum discretae et solitariae: Duas enim simul iunctas obseruare non potui. Porro memini, in dextro ventriculo maiorem quam laevo earum fre-

Lit.CCCC

*Plures
glandulae
in dextra
cavitate
inuentae.*

frequentiam sese manifestasse, cuius discriminis causa, et si forte solus Deus nouerit, ex iis, quae de vsu harum glandularum, in fine expositurus sum, diuinanda est.

*Earum
notae.
externae.*

De caetero in colore, magnitudine, distributione, nullum ratione ventriculorum discrimen internoscere potui, quamquam haud dissimulandum sit, nonnullas prae aliis minus compressas ac magis fastigiatas apparuisse, unde hanc spem concipiebam, fore, ut succum per leuem expressionem obtinerem, ex quo ipsius naturam cognoscere possem; At successus defuit, idque varias ob causas contingere potuit, vti experientia testatur: Vidi eodem tempore (non tamen in omnibus,) in medio apicis, punctum exiguum nigricans, quod, vti puto, folliculi glandulosi, vel accuratius loquendo, ductus excretorii in membrana desinentis verum orificium seu emissarium est, quod in omnibus in quibus conspicuum erat, uniformem faciem obtinebat: Substantia autem seu corpus ipsum glandulae, albicans erat, firmitatem seu consistentiam, quam consimiles glandulae habere solent, adeoque instar earum, quae in durae matris receptaculis, aut in intestino continentur, obtinens. Quali conformatio[n]e seu compage instructae sint praedictae glandulae, propter earum paruam molem sensu assequi non licuit. Inutiles ad hunc scopum fuere adhibitae iniectiones, sectiones, vitra melioris notae, quibus postquam satis diu me exercuisse, nihilque praeter lucidam, et nebulae similem substantiam, in qua indistinctum et confusum quoddam chaos apparuit, detexisse, nouo hoc exemplo edoctus sum, in maximis aeque ac minimis animantibus, *aequalance Naturam sua[m]*

et orificium

*Interna
com[par]ages
inconspicua*

micrologiac minera contulisse, quae forte mortalium oculis nunquam patebunt.

Cur in aliis animantibus glandulae cordis inconspicuae

Haec sunt, quae experientia duce, ad cordis cognitionem promouendam, in Elephanti dissectione, nobis non infausta forte oblata sunt. Sed, ais, ex uno particulari exemplo nihil concludi potest, concedo: Neque is sum qui tales auctoritatem mihi tribuo. Interim, quum in omnibus animantibus reliqua bene concordent, solaque forsitan magnitudinis ratio hoc in casu consideranda sit, iusta est causa accusandi obscuritatem in aliis animantibus, potius quam absentiam realem: Addo non extraordinarium esse, glandulas conspicere in organis analogis v. gr. in sinubus durae matris. Propterea missis ambagibus, concludere fas est, praeter impulsum cordis, et transfusionem sanguinis per pulmones, et reliquas partes corporis, aliam cordi insitam esse facultatem, prout summi Philosophi et Medici olim solo rationis lumine coniectati sunt. Hancce facultatem considero, tanquam summum naturae arcanum, quo nullum implicatius et obscurius esse potest: Hunc de eo conceptum mihi formo. A quacunque causa motus cordis in vitae primordiis suscitetur, necessarium est, ut vi huius impulsus, ad teneram membranam in cor abituram ante omnes alias partes pertingente, glandulae cordis eodem temporis momento exsuscitatae et vivificatae, paululumque compressae, virtutem suam prima vice, et ante omnes totius corporis glandulas exerceant, quod ex earum situ patet. Ante momentum, quo illa prima functio glandularia perficitur, in corde et ductibus sanguineis, succi purpurei nullum vestigium percipere licet; E conuerso, limpida, et crystallina lympha solummodo apparet,

Functio carum glandularum proponitur. Scilicet sanguinem turum secernere.

paret , quae fossularum loculorumque cavitates replet.
 Pulmonis aliarumque partium functiones, veluti emortuae,
 ius in hancce lympham haud exercent. Ex ipsa denique *Lymphha in sanguinem transmutari non potest.*
 lympha, ceu materia, purpurac originem derivare minus etiam probabile est , quoniam naturam alienam, lympha propria virtute sibi dare non potest. Consideretur enim in homine, vel animali adulto, lympha in dupli statu in quo inueniri solet, nimirum vasis lymphaticis inclusa ac motu perpetuo circumacta, aut vasis arteriosis venosisque contenta et massae sanguineae confusa. In utroque statu, lympha natuum colorem, nunquam nisi casu fortuito permutat, quin e contra, magis clara et pellucida euadit. Hunc colorem non solum retinet in vasis propriis, in quibus impermixta et pura est; sed etiam in vasis sanguineis ubique , nec obstante diurna fame. Quare erroneum est credere, chylum et lympham, per certam metamorphosin quam *sanguificationem* vocant , in purpureum humorem commutari substantialiter , seu in purum sanguinem conuerti. Sub titulo sanguinis, non intelligo vniuersam massam sanguineam, sed succum quendam specificum, certo et determinato organo praeparatum, more aliorum succorum, ex. gr. bilis, semenis, lactis etc. a quibus colore intense coccineo , indelebili, sibi soli proprio discrepat, quales fere succi sanguinei, in nonnullis animantibus intra peculiares folliculos ab Anatomicis dudum inuenti sunt , ex quibus pretiosa pigmenta ac tincturae postmodum praeparantur. Huius itaque succi originaliter coccinei, cuius depositariae et dispensatrices sunt praefatae glandulae cordis , miscella,
*Sanguifica-
tio in cul-
gari sensu
nulla datur.*
*Quid pro-
prie sanguis
sit, exponi-
tur.*
 lym-

lymphā quidem vel chylus, in sanguinem nunquam neque in primordiis, neque in progressū vitae mutatur; Ast, quemadmodum alii succi ex gr. Bilis, Semen, Lac. etc. sic succus iste rubicundus lymphae aut chylo solummodo associatur, et si insipienti, tota massa purus putus sanguis appareat, quem effectum tribuere oportet, excellentiae ac virtuti praefati succi, a cuius colore, reliquorum succorum colores absorbentur etc.

Disseratio
DE ACTIONE FLVIDORVM
 IN CORPORA SOLIDA
 ET MOTV SOLIDORVM IN FLVIDIS
Auct.
 Daniele Bernoulli I. F.

Pars Prima
De Pressione Aquarium fluentium.

I.

*M. M. Jun.
et Oðobr.*

1727.

Fluida, quae occurunt solidis quiescentibus, eadem remouere conantur: Istum conatum voco pressiouem seu actionem. Cum solida mouentur in fluidis stagnautibus, resistentiam patiuntur, quam caeteris paribus eandem esse debere cum praedicta pressione, nemo non videt. Quantimomenti sit pressionem illam seu resistentiam exacte definire,

re , ex sequentibus patebit ; haec autem determinatio pendet omnino a modo , quo fluida agunt in solida ; sed potest diuersimode haec actio concipi , non sine vario successu. Vnde nihil statuendum mihi proposui , quod non experientia esset confirmatum.

II. Si concipiatur fluidum constare ex particulis elasticis , quae statim post impulsum ad latus desiliant locumque faciant particulis subsequentibus , tunc pressionem fluidorum sequentem in modum determinare licet.

Impingat fluidum ABDC (fig. 1.) perpendiculariter in planum BD ponderis expers , cui annexum est ope trochleae R pondus MN quod fluidi impetum sustinere possit. Sumatur in fluido longitudo quaevis BA = a , cuius pondus ponatur = p , tempus autem , quo fluidum longitudinem assumentam describit = t minutis sec. expressum , spatium quod graue libere cadendo a quiete describit tempore vnius minuti sec. = s . Nunc ut determinetur pondus MN , considerabo planum BD tanquam alternis vicibus cedens in situm bd iterumque in locum pristinum rediens , huncque itum et redditum toties fieri , quoties particulae fluidi impingunt in planum. Fingam porro fluidum diuisum esse in multa strata pp , oo etc. tenuissima et solida , quorum latitudo fit = l . His ita positis patet fluidum absoluere latitudinem vnius strati pp , interea dum pondus MN semel ascendit motu uniformiter retardato per altitudinem Mm , iterumque per eandem altitudinem motu simili et reciproco descendit. Potest autem corpus MN eodem tempore quo ascendit et de-

scendit per Mm absoluere spatium $4Mm$, si vniiformiter progrediatur velocitate sua initiali seu finali, quam nimirum habet in situ MN . Est itaque velocitas fluidi ad velocitatem initialem ponderis vt l ad $4Mm$. Manifestum quoque est, quod modo notaui, velocitatem finalem corporis MN post descensum eandem esse cum velocitate initiali pro ascensu; vnde cum velocitas sit eadem ante et post ictum, sequitur pondus strati pp seu $\frac{lp}{a}$ esse ad pondus MN reciproce vt eorundem velocitates, seu directe vt $4Mm$ ad l . Vnde pondus $MN = \frac{lp}{4axMm}$; superest itaque pro absoluta ponderis determinatione, vt exprimatur valor ipsius Mm . Is vero ita obtinebitur: tempus quo fluidum absoluere spatium l est $= \frac{lt}{a}$; ergo tempus, quod pondus insumit cadendo per Mm est $= \frac{lt}{2a}$. Sed spatium tali tempore a corpore vniiformiter accelerato descriptum est $= \frac{litts}{4aa}$, ergo $Mm = \frac{litts}{4aa}$, quem valorem substituendo in aequatione pro pondere MN , habebitur tandem pondus quaesitum $MN = \frac{ap}{tts}$.

III. Cum a sit quantitas arbitraria, potest illa accipi $= s$, id est, $= 16\frac{1}{9}$ ped. Lond. et sic erit pondus $MN = \frac{p}{t^2}$, est itaque pondus fluidi longitudinis $16\frac{1}{9}$ ped. Lond. ad pondus MN , quod sustinere valet, vt quadratum numeri experimentis minuta secunda, quibus fluidum absoluere praedictam longitudinem $16\frac{1}{9}$ ped. ad unitatem. Et haec propositio conuenit cum propositione quam habet Cel. Newtonus in Princ. Math. Phil. Nat.

p. 325. edit. 3. his verbis ; et propterea globus resistentiam patitur , quae sit ad vim , qua totus eius motus vel auferri possit vel generari , quo tempore duas tertias partes diametri suae uniformiter progrediendo describit , vt densitas medii ad densitatem globi . Ista conuenientia manifesta erit iis , qui significationem verborum Newtoni asecuti fuerint . Caeterum , si basis ponderis MN eadem fuerit cum sectione perpendiculari fluidi , atque insuper cum fluido eandem habeat grauitatem specificam , erit ipsius longitudo $= \frac{a}{\pi}$, ponendo semper $a = s$.

IV. Ut experimento cognoscerem num haec vera sit determinatio pressionum fluidorum , consideravi fluida ex cylindro perforato erumpentia . Demonstratum autem est , quod si cylindri sint satis ampli vel si semper pleni conseruentur , velocitatem fluidi erumpentis fere tantam fore , quantam graue libere cadendo per altitudinem fluidi supra foramen acquirit . Sit ista altitudo $= L$, et erit $t = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{L}}$, vnde $\frac{a}{\pi} = 4L$. Oporteret itaque pro hypothesi hactenus assumta , vt pondus quod vena fluidi per foramen erumpentis sustinere potest , esset aequale quadruplo ponderi cylindri fluidi foraminis superincubentis . Impleui proin aqua cylindrum AD (fig. 2.) cuius pondus prius exploraueram vna cum ratione quam habebat amplitudo AB ad foramen circulare o , impletumque rursus ponderauit , adeo ut iam scirem pondus totius cylindri aquei ABDC , ex quo facile erat colligere pondus cylindri or foraminis superincubentis . Dein regulam MG ad aequilibrium positam super fulcro

in F , oneraui pondere E , quod cum in aequilibrio esset cum impetu venae aqueae ad distantiam aequali-
brio ab Hypomochlio F incidentis in regulam (id quod
cognosci potest, quando regula tantum non eleuatur)com-
paraui illud cum pondere cylindri *or*, et vidi ista pondera
esse exacte inter se aequalia cum tamen prius quadruplum
esse debuisse alterius , adeo ut hypothesis assumta locum
habere non possit. Experimentum ab aliis iam fuit insti-
tutum.

V. Si strata *pp, oo* etc. (fig. 1.) habeant naturam corpo-
rum mollium , tunc insistendo iisdem vestigiis reperietur
pondus MN duplo minus. Haec vero hypothesis praeter-
quam quod cum experientia nondum conueniat , vel
ex eo quoque refutatur quod ultimae particulae fluido-
rum tanquam maxime durae, necessario summa elastici-
tate sint praeditae. Si denique concipiatur stratum *pp*
post impulsu suum in planum BD iterum recta resilire
(neque enim statim ad latus desilire potest) atque ita im-
pingere in stratum proximum *oo* et tunc demum parti-
culas utriusque strati ad latera dispergi , fiet ut strata al-
terna inutilia perdauntur , et pressio fluidi iterum duplo
minor erit, quam quae determinata fuit §. 2. effetque haec
hypothesis satis verae similis, si modo experientiae ma-
gis conueniret.

VI. Existimo itaque non posse pressiones seu resistentias
fluidorum continuorum fingi ut ortas ab impetibus mi-
nimis et saepe repetitis particularum ultimarum fluida
componentium ; Neque aliter actionem suam exerunt
fluida pro mea opinione, quam grauitando in obstacula.
Id autem , ni fallor, ex sequenti explicatione vnicuique
mani-

manifestum fiet Sit cylindrus ABDC (fig 3.) aqua repletus, et in fundo habeat foramen *on*; cui respondet obstatum *am*, quod venam aqueam excipit. Sed iam particulae aquae non percutient obstatum, quin potius praeterfluent, sicut *oha* et *nbm*. Possimus itaque concipere, circellum *am* pertinere ad cylindrum ipsique esse firmiter annexum, rimam vero seu hiatum inter fundum CD et circellum *am* iam esse foramen per quod aqua effluit; et ita cuilibet obuium est, non posse *am* aliter premi, quam a superincumbente cylindro aqueo *orsn* (negligendo particulam *onma*) pariter ac omnes cylindri partes premuntur a cylindro aqueo sibi incumbente.

Caeterum possunt omnia fluida, quae sunt in motu, considerari tanquam si continuo ex cylindro constanter pleno per foramen in ima parte cylindri constitutum effluenter; altitudo autem istius cylindri fictitii ea sit, ut graue per illam libere cadendo acquirat velocitatem fluidi.

VII. Ex praecedente paragrapho sequitur pressionem fluidorum esse quadruplo minorem, quam determinata fuit in paragrapho secundo, vnde retentis symbolis ibidem assumitis erit verum pondus $MN = \frac{ap}{4ts}$, siue facto iterum $a = s$, $MN = \frac{p}{4t}$, vbi per t intelligitur numerus minutorum sec., quibus fluidum absoluit motu uniformi spatiuum seu $16\frac{1}{9}$ ped. Londinenium. Si velocitas fluidi alio modo determinetur, alia obtinebitur formula. Ponatur v. gr. velocitas talis ut tempore unius min. sec. fluidum ab-

soluat $n\alpha$, erit pond. $MN = \frac{1}{4}nnp$, vel si α non sit $= s$, erit $MN = \frac{nnap}{4s}$; sed calculus fit maxime commodus, si α exprimitur per s , adeo ut ponatur vel $\alpha = s$ vel $\alpha = 4s$ vel $\alpha = ls$, oportet autem mensuram semel assumtam retinere, et omnes magnitudines ad illam reducere. Interim patet ex praedictis formulis esse pressiones fluidorum in ratione superficierum quas premunt, densitatum fluidorum et celeritatum quadratorum.

VIII. Et haec hactenus de fluidis perpendiculariter in plana incidentibus: pauca iam addam circa casus reliquos, cum nimirum fluida vel oblique incident in plana vel sub quacunque directione in superficies quascunque. Hic ante omnia monendum puto, quo usque extendendum sit id quod dixi §. 6. scilicet posse considerari obstaculum *am* tanquam pertinens ad ipsum cylindrum ABDC. Scilicet fluidum premit ubique perpendiculariter latera cylindri, excepta illa fluidi parte, quae iam egressa ex cylindro nisum facit tantum secundum directionem cursus sui, qui si non sit perpendicularis ad obstaculum erit pressio fluidi resoluenda in duas alias, quarum altera sit perpendicularis ad obstaculum, altera eidem parallela, solaque prior adhibenda. Vnde sequitur esse caeteris paribus pressiones in ratione anguli incidentiae sinus. Ponamus nunc esse filum ADB (fig. 4.) cuiuscunque curvatura, sed cuius rami AD et DB sint similes et aequales illudque excipere fluidum sub directione DC et quaeritur ratio pressionis fluidi ad illam pressionem quam exerceret perpendiculariter fluendo in AB.

AB. Sit elementum curuae $or=ds$, elementum abscisae $gb=op=dx$, $AC=b$, pressio fluidi in $AC=p$, ergo pressio in gb vel $op=\frac{pdx}{b}$, et pressio in $or=\frac{pdx^2}{bds}$, quae resoluenda est in duas alias secundum directiones eg et op ; posterior destruitur a simili pressione a parte opposita agente; vnde prior sola consideranda est, quae fit $=\frac{pdx^3}{bds^2}$, cuius integrale $\int \frac{pdx^3}{bds^2}$ dabit integrum pressionem in arcum Ao , ponendoque dein $x=b$, orietur tota pressio in AD , quae comparata cum p dabit rationem quaesitam.

IX. Eadem ratio subsistet si integra superficies generata concipiatur ex motu curuae ADB circa axem DC . Sed si haec eadem curua ADB rotando circa axem DC superficiem generet in quam fluidum impingit, erit pressio in annulum $or=\frac{npxdx^3}{bds^2}$ et pressio in annulum $gb=\frac{npxdx}{b}$ (n denotante semicircumferentiam circuli, cuius radius = unitati); est itaque pressio in totam superficiem Ao ad pressionem in superficiem planam Ag vt $\int \frac{npxdx^3}{bds^2}$ ad $\frac{npxx}{2b}$. Sequitur exinde esse pressionem in superficiem sphaericam dimidiam totius pressionis perpendicularis in circulum maximum. Haec ut notissima, indicare tamen volui, quia explanare et intellectu facilitiora reddere possunt ea, quae in sequentibus dicentur.

Pars

*Pars Secunda*De vltimis velocitatibus corporum
in mediis resistentibus.

I.

VIdimus ex praecedentibus quomodo aestimanda sit ex grauitate et velocitate fluidorum, eorundem pressio: In sequentibus dabo mensuras effectuum, quos huiusmodi pressiones producere valent in diuersis corporibus variis legibus motis. Haec autem secunda pars considerabit potissimum corpora in statum permanenter et invariabilem posita: tametsi enim corpora vi aequabili sollicitata in mediis resistentibus nunquam perueniant ex quiete ad statum permanentem, attamen plerumque citissime ad illum conuergunt, ita ut deinceps nulla sensibilis differentia in motu corporum obseruari possit. Caeterum iam monui resistentiam, quam corpora in motu suo a fluidis stagnantibus patiuntur, non differre a pressione fluidorum eadem velocitate contra corpus quiescens motorum.

II. Si in fluido infinito corpora grauitate sua deorsum mouentur, conuergunt ad illum statum, quo resistentia aequalis est eiusdem ponderi in fluido. Pondus equidem constans est, quaecunque sit figura corporis, modo habeat eandem molem. Sed resistentia in corporibus diuersae figurae varia est. Nos vero considerabimus tantum

tum globos. Methodi applicatio ad alias figuras facilis erit ex §§.8. et 9. part. I. In his itaque si quaeratur velocitas vltima, sequentem in modum erit procedendum. Retineantur symbola §. 7. part. I. et ponatur velocitas quae sita tapis, vt absoluta intra min. sec. spatium na . Erit resistentia globi $\frac{nnap}{s^3}$ (nam resistentia globi dimidia est quam resistentia circuli maximi per §. 9. p. I. et resistentia circuli maximi est $\frac{nnap}{4s^3}$ per §. 7. p. I.) ; sit praeterea diameter globi $=m$, et ratio grauitatum specificarum inter solidum et fluidum vt b ad c , atque pondus absolutum globi $=1$, erit pondus globi similis fluidi $=\frac{c}{b}$ et pondus cylindri fluidi globo circumscripti $=\frac{3c}{2b}$; unde $p=\frac{3ac}{2mb}$, et consequenter resistentia globi $=\frac{3nnaac}{16msb}$, quae debet esse $=$ ponderi globi in fluido, quod est $=\frac{b-c}{b}$; ergo $\frac{3nnaac}{16ms} = b-c$, vel $na = 4V\frac{ms \times b-c}{3c}$, et posterior haec formula denotat spatium, quod globus vltima sua velocitate intra min. sec. perficere potest.

III. Si m sit $=\frac{3}{16}s$, id est, si diameter globi sit 3. ped. cum quarta parte vnius pollicis, erit praedictum spatium $=sV\frac{b-c}{c}$, et si globus sit duplo grauior mole aequali fluidi, erit $na=s$, id est, globus perficiet velocitate sua vltima $16\frac{1}{3}$ pedes Anglicos, hancque celeritatem corpus libere cadens acquirere potest lapsu ex altitudine $\frac{1}{4}s$. Et generaliter vltima celeritas corporis acquiri potest lapsu suo libero ex altitudine $\frac{4ms(b-c)}{3c}$; unde si

Tom. II.

R r

 $b=$

$b = 2c$, globus delapsus in fluido ex altitudine infinita non maiorem acquireret velocitatem, quam in vacuo haberet post lapsum ex altitudine quatuor tertiarum partium quae diametri.

IV. Eadem methodo etiam solui possunt quaestiones de ultima velocitate nauis in mari. Tot autem reuiruntur data, ut haec fere omni usu careant in praxi, nisi adhibeantur quaedam artificia, quibus breuius desiderata determinantur. Si nauis a vento propellitur, oportet nosse velocitatem venti, numerum et magnitudines velorum una cum eorundem positione; ab his pendet vis nauem propellentis determinatio; possunt autem, nisi fallor, satis accurate haec haberi. Id unicum obtentum difficillimum est, ut habeatur figura exacta illius partis in naue, quae aquae submersa est; ab hac vero pendet resistentia aquae, quae vi nauem propellenti debet esse aequalis. Ponamus tamen haec omnia data in exemplo quodam particulari, ut saltem pateat modus, quo in his casibus procedendum. Sint v. gr. vela omnia perpendiculariter ad spinam et directionem nauis posita, habentque in uniussum mille pedes quadratos in superficie, sit velocitas venti talis ut possit quinquaginta pedes intra min. sec. absoluere. Habeat pars nauis submersa talem figuram, ut resistentia eadem sit, quam haberet planum quadraginta pedum quadratorum, cuius directio est perpendicularis ad planum. Sit denique gravitas specifica aquae ad gravitatem specificam aeris ut 800 ad 1, atque numerus pedum (quos nauis velocitate sua minima percurrit tempore unius min. sec.) = x. Oportet

tet autem, vt vis venti eadem sit, quae resistentia aquae: Suntque pressiones fluidorum in ratione quadrata velocitatum, et simplici superficierum nec non densitatum. Ergo pressio venti erit exprimenda per $(50-x)^2 \times 1000 \times 1$ et resistentia seu pressio aquae per $xx \times 40 \times 800$. ergo $2500000 - 100000x + 1000xx = 32000xx$; vel $50-x=x\sqrt{32}$, vnde $x=7\frac{1}{2}$. ped. proxime. Igitur talis nauis poterit singulis minutis secundis conficeri circiter $7\frac{1}{2}$. pedes.

V. Ad normam praecedentis exempli omnes causas possibles calculo subiici possunt; cum autem positio velorum est ad nauem obliqua, res est altioris indaginis; poterit tamen quodam modo solui, si praedicta conferantur cum Patris mei manuaria naut. Caeterum velocitas venti cognoscitur ex vi venti, haec autem ex anemometro haberi potest, et determinatio illius superficie planae, quae eandem habet cum parte nauis immersa resistentiam ex eo potest deduci, si experimento innoteat, quantum in aqua stagnante nauis dato tempore et data vi tracta promoueatur. Ista deductio patebit ex sequenti paragrapho.

VI. Pes cubicus Londinensis continet circiter 76 libras romanas aquae dulcis. Posito iam planum contine-re tot pedes quadratos, quod continentur vnitates in f , illudque moueri directione perpendiculari in huiusmodi aqua dulci et quidem tali velocitate, vt singulis min. sec. conficiat certum numerum pedum designatum per n . Erit pressio aquae contra planum $= \frac{nnp}{4f}$ (per §. 7. p. 1.)

et si per a intelligere velimus mensuram vnius pedis, erit
 $\frac{p}{s}$ tot libris quot continentur vnitates in $76f$, vnde
 pressio aquae contra planum iam est $\frac{76\text{nnf}}{4s}$ seu $\frac{19\text{nnf}}{s}$,
 quae est aequalis ipsi pressioni mediante qua planum in
 motu suo conseruatur, quaeque proin si aequetur cum vi
 nauem propellente, habebitur numerus desideratus f .
 Ponamus v. gr. esse nauem ita formatam et oneratam,
 vt illam decem homines (quorum actionem aequipollere
 ponemus 1000 libris) tempore duorum minutorum pri-
 morum in aqua stagnante trahere possint per spatium mil-
 le pedum; erit in hoc casu $n = \frac{10}{2}$, et habetur $\frac{19\text{nnf}}{s}$
 $= 1000$, vnde habebitur ponendo pro s valorem $16\frac{1}{9}$;
 $f = 12\frac{4}{9}$. Ergo haec nauis eandem habebit resis-
 tentiam ac haberet planum $12\frac{4}{9}$ ped. quadratorum per-
 pendiculariter contra aquam motum. Liceat hic in
 transitu monere, inepte machinas adhiberi ad protra-
 hendum nauem in aqua stagnante neque utilius vim impen-
 di posse quam manibus trahendo funem vel naui alliga-
 tum, si homines consistant in ripa, vel alicubi fixum, si
 in naui trahant. Quoties autem machinae adhibentur
 perditur inutiliter vis in frictiones impensa: Si tamen
 aquae notabilem tenacitatem inesse ponere vellemus, non
 reiiciendus esset illarum usus.

VII. Videmus quoque corpora fluminibus innata-
 tia non omnino eandem habere velocitatem, quam ha-
 bet aqua. Id ex nulla alia causa deducendum quam ex
 resistentia aeris. Hinc si quaeratur velocitas quam cor-
 pus innatans flumini habeat respectu fluminis, illa ob-
 tine-

tinebitur si detur in corpore tam figura partis aquae submersae quam figura partis extra aquam positae. Si resistentia prioris sit ad resistentiam posterioris vt 1 ad m , et si velocitas aquae dicatur n , velocitas corporis x , corpus mouetur contra aquam velocitate $n-x$ et contra aerem velocitate x ; et cum resistentiac vtriusque fluidi in corpus debeant esse aequales, habebitur $800 \times (n-x)^2 = mx^2$, vel $n-x = \frac{x\sqrt{m}}{\sqrt{800}}$, et $\frac{n\sqrt{800}}{\sqrt{m}+\sqrt{800}} = x$, et retardatio ab aeris resistentia, quae exprimitur per $n-x$, erit $= \frac{n\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{800}}$, ex qua pressione patet, non posse hanc retardationem omnino negliri, cum m est numerus admodum magnus, veluti in nauibus, ubi non facile minor erit m quam 50 seu 49 . Vnde in his resistentia aeris haud minorem quam quintam partem velocitati (quam alias habitura esset nauis) demet. Quod si vero corpus totum fluido est submersum, non potest non eandem cum fluido velocitatem habere.

VIII. Non abs re fore puto hic quaedam obiter monere circa vortices coelestes. Statuitur vulgo planetas a materia subtili circa solem acta abripi. Si ita sit, oportet vt planetae habeant eandem celeritatem cum materia subtili. Alii insuper fingunt, materiam istam inaequali velocitate ferri, exinde deducturi motum planetarum circa axes suos. Videamus autem quanta ista inaequalitas velocitatum esse deberet. Sit distantia terrae a sole $= 12000$ diametrorum terrae; et sic centrum terrae mouebitur $\frac{24000}{365}$ vicibus celerius motu annuo quam punctum aequatoris motu diurno; vnde maxima

Rr 3

diffe-

differentia velocitatum materiae subtilis in regione terrae esse deberet $= \tau \frac{3}{2} \frac{6}{5} \frac{1}{5}$ velocitatis mediae, cum differentia distantiarum exaequat tantum partem duodecies millesimam distantiae mediae; quae rationum inaequalitas vix concipi potest. Si fingatur planetas moueri in fluido quiescente, oporteat ut fluidum illud sit minimum 3000000 vicibus rarius quam materia planetae, quia alias non posset non sensibiliter planetae motum perturbare. Quis autem tantam subtilitatem concipiat? Motum planetarum in vacuo, multo minus probo.

IX. Notari quoque meretur, quam insufficiens sit hypothesis Cartesiana pro explicando descensu corporum a grauitate. Praeterquam enim quod corpora non versus centrum sed versus axem tendere deberent, non possent non abripi a materia subtili unaque cum illa in vorticem agi. Commodo admodum fingeretur motum istum horizontalem esse infinites minorem motu verticali, si modo id stare posset cum solutione sequentis problematis. *Probl.* Si in vorticis BCD (fig. 5.) cuius centrum A, quiescat globus E grauitatis expers, quaeritur ratio impulsus fluidi in superficiem globi secundum directionem tangentialem ad pressionem, quam fluidum ob vim suam centrifugam exercet. *Sol.* Sit distantia globi a centro vorticis $= r$, numerus pedum quos fluidum vorticis in illa distantia absoluit tempore unius minutis sec. $= n$; denique pondus globi fluidi $= p$. Monstrauit autem Hugenius, quod si globus feratur ea velocitate, quam acquirit lapsu suo libero per altitudinem $\frac{1}{2}r$, eius vis centrifuga aequalis sit suo ponderi. Ergo cum i-

dem

dein corpus mouetur ea velocitate quam acquirere cadendo ex altitudine $\frac{nn}{4s}$, tunc vis centrifuga erit ad pondus vt $\frac{nn}{4s}$ ad $\frac{1}{2}r$ (per s autem semper intelligo numerum pedum, quos graue cadendo describit intra minutum secundum). Sed habet fluidum hanc velocitatem modo definitam, est itaque vis centrifuga globi fluidi, seu pressio fluidi in globum solidum, $= \frac{nnp}{2rs}$. Ut iam determinare possumus pressionem tangentiale fluidi in globum; ponemus diametrum ipsius $= a$, et cum sit pondus cylindri globo circumscripsi $= \frac{2}{3}p$, atque pressio fluidi in superficiem sphaericam dimidia sit pressionis perpendicularis in circulum maximum, erit (per §. 7. p. 1) pressio tangentialis fluidi $= \frac{3nna^2p}{16s}$. Est itaque ratio quaesita vt $\frac{3nna^2p}{16s}$ ad $\frac{nnp}{2rs}$, vel vt $8a$ ad $3r$. Sed a seu diameter ultimarum particularum grauitantium est incomparabiliter minor quam r seu distantia corporum grauium a centro terrae: ergo tantum abest, vt motus horizontalis evanescere possit praे verticali, quin contrarium potius obtinere debeat. Caeterum si corpus in vortice constitutum et quiescens haberet figuram cubicam, esset praedicta ratio vt r ad $2a$ siue vt duplum latus cubi ad distantiam corporis a centro vorticis.

Pars Tertia.

De motu corporum grauitate vel leuitate sua deorsum vel sursum motorum.

I.

QUAMVIS hoc argumentum ita iam sit pertractatum a plurimis Geometris, ut vix aliquid noui superaddi posse videatur, minime tamen haesitauit mea quoque meditata circa hanc rem cum Societate communicare, ideo quod non solum varias motuum relationes, sed ipsas eorundem quantitates atque mensuras, ad Newtoni exemplum definio. Et cum calculus experimentorum formulis seu aequationibus innitatur prolixissimus, conatus sum illas multo compendiosiores reddere; Occurrent quoque theorematum plane noua, quibus occasionem dederunt experimenta ab Excellentissimo Domino Gynthero cum tormentis bellicis instituta, quae videre est in parte 4. vbi ea ad calculum reuoco. Non itaque deerit campus in tritissima re, noua nec antea obseruata adiiciendi.

II. Constat, incrementa velocitatum in motu corporum semper proportionalia esse vi animanti ductae in elementum temporis. Si itaque velocitas corporis carentis in fluido resistenti dicatur v (exprimam autem deinceps v per numerum pedum, quos motu aequabili conficere posset corpus tempore unius minuti secundi) et tempus lapsus designetur per t , spatium a corpore praedicto

dicto tempore descriptum $=s$, et vis corpus animans in illo momento sit $=p$, erit $dv=pdt$: et habebitur p subtrahendo de actione grauitatis resistentiam fluidi; sit grauitas corporis in fluido, seu differentia grauitatum specificarum corporis et fluidi, quae constanter eadem est, $=a$, et resistentia fluidi, quae proportionalis semper est quadratis velocitatum, $=nvv$ (potest autem n determinari ex grauitate specifica fluidi et figura corporis cadentis per §. 7. part. I. et seqq.) et degenerabit aequatio $dv=pdt$ in hanc aliam $dv=(a-nvv)dt$, vel $dt=\frac{dv}{a-nvv}$; et $ds=vdv=\frac{v^2 dv}{a-nvv}$. Oporteat nunc aequationem eruere inter s et t purgatam a quantitate v , vt nimurum ex altitudine lapsus, tempus determinari possit vel reciproce. Atque hoc praestabimus in sequenti paragrapho.

III. Ponatur breuitatis ergo $\frac{a}{n}=mm$, et cum sit $dt=\frac{dv}{a-nvv}$ erit iam $ndt=\frac{dv}{mm-vv}$, ergo $nt=\int \frac{dv}{mm-vv}=\frac{1}{m}\log.(m+v)-\frac{1}{2m}\log.(mm-vv)+$ Const. C. Sed si corpora a puncto quietis delabuntur, euaneant simul t et v , ergo $C=0$, vnde aequatio ita se habebit $2mnt=2\log.(m+v)-\log.(mm-vv)$ vel (posito $c=$ illi numero cuius logarithmus est unitas) $c^{2mnt}=\frac{m+v}{m-v}$; vnde $v=(c^{2mnt} m-m):(c^{2mnt} + 1)$. Consideremus iam alteram aequationem $ds=\frac{v^2 dv}{a-nvv}$, vel $nds=\frac{v^2 dv}{mm-vv}$; sumendo autem integralia habetur $ns=\frac{1}{2}\log.(mm-vv)+$ const. C: et cum s et v simul euaneantur debeant, erit $C=\pm\log.m$; est ergo $2ns=\log.mm-\log.(mm-vv)$; et $c^{2ns}=\frac{mm}{mm-vv}$, vel denique $v=mV(c^{2ns}-1):c^{ns}$. Ex combinatione vtrius-

Tom. II.

S s. que

que valoris ipsius v orientur haec aquatio ($c^{2mn}m-m$) :
 $(c^{2mn}+1)=mV(c^{2ns}-1):c^{ns}$: quae recte pertractata dat
 $2c^{mn}+ns=c^{mn}+1$; vel $2c^{ns}=c^{mn}+c^{-mn}$; vel c^{mn}
 $=c^{ns}+\sqrt{c^{2ns}-1}$, aut denique $t=(\log c^{ns}+\sqrt{c^{2ns}-1}):mn$, et si pro m substituatur ipsius valor V_n^a , erit $t=(\log c^{ns}+\sqrt{c^{2ns}-1}):Van$. Poterit itaque ope vltimae
 huius formulae cognosci t ex s . Si vero reciproce spa-
 tia quaerenda sint ex datis temporibus inseruierat haec ae-
 quatio $s=(\log(c^{mn}+c^{-mn})-\log 2):n=(\log(c^{tVan}+c^{-tVan})-\log 2):n$.

IV. Aequationes, quas dedi in praecedente pa-
 ragrapho, si calculo numericō subiici debeant, vti fecit
 Newtonus, calculus fit plerumque admodum prolixus.
 Notandum autem est in omnibus fere experimentis ha-
 c tenus institutis, esse n et s tales numeros vt vnitatis possit
 negligi prae c^{2ns} , idque omnino absque vlo sensibili
 errore; tunc autem fit simpliciter $t=(ns+\log 2):Van$ et $s=(tVan-\log 2):n$. Sunt v-
 tique hae aequationes simplicissimae, possuntque
 facile ad omnes casus particulares applicari, alias laborio-
 fissimo calculo vix superabiles, quod appareret ex methodo
 accuratiori qua Newtonus experimenta se instituta ad
 calcu'um reuocat in lib. 2. princ. phil. edit. 3. Non
 potest vero semper tuto negligi illa vnitatis respectu c^{2ns} ;
 praesertim cum experimenta instituta fuerint in medio
 valde leui, veluti in aere et si altitudo, qua corpus de-
 scendit, sit valde mediocris, ac denique cum corpus sit
 sat magnum. In his tamen casibus (in quibus nempe n
 est numerus binarium seu ternarium haud superans) cal-
 culus

culus absque praedicto compendio non admodum laboriosus fit.

V. In omnibus praecedentibus aequationibus intelligitur per n talis quantitas, quae multiplicata per quadratum velocitatis dat resistantiam absolutam; pendet itaque determinatio ipsius n a magnitudine et figura corporis, tum etiam a grauitate specifica fluidi; his autem pro lubitu assumitis desiderata quantitas n petenda est ex iis, quae monui §§. 7. 8. et 9. part. I. Hac vice considerabo saltem corpora sphaerica, quandoquidem cum huiuscemodi corporibus maxima experimentorum pars cum a Newtono tum etiam ab aliis instituta fuit.

VI. Vidimus in §. 7. p. I. quod posita velocitate tali, ut corpus absoluat motu uniformi intra minutum secundum spatium expressum per na , resistantia sit $= \frac{nna^p}{4s}$ (vbi per p intelligitur pondus cylindri fluidi datae cuiuscunque longitudinis a , atque cuius basis est superficies cui fluidum impingit et s designat spatium, quod corpus libere cadendo in vacuo a quiete perficit intra min. sec.). Assumamus a designare mensuram vnius ped. Angl. et erit resistantia $\frac{nnp}{4s}$, et quia n exprimit velocitatem, est numerus multiplicatus cum quadrato velocitatis $\frac{p}{4s}$; quod si autem resistantia in globum sumatur, erit idem numerus duplo minor, seu $\frac{p}{8s}$, (vel ponendo pro s $16\frac{1}{2}$ ped. Angl.) $\frac{9}{1100}p$. Si loco ipsius p denotantis pondus cylindri fluidi longitudinis vnius pedis, cuius basis est aequalis circulo maximo globi, velimus introducere pondus fluidi,

Ss 2

cuius

cuius moles est aequalis globo cadenti, ponemus mensuram vnius pedis se habere ad diametrum globi vt 1 ad m , et sic erit pondus cylindri fluidi $= \frac{2}{3}mp$; vnde si tale pondus dicatur b erit $p = \frac{3b}{2m}$ et $\tau^{9}{\overline{1}}{\overline{0}}{\overline{0}} p = \frac{27b}{23{\overline{2}}{\overline{0}}}m$. Quod itaque vocauimus §§. 2. 3. et 4. part. 3. n, id posito figuram corporum cadentium esse sphaericam degenerabit in hanc quantitatem modo dictam $\frac{27b}{23{\overline{2}}{\overline{0}}}m$. Ergo reassumendo litteras ibi assumtas, erit

$$t = [\log(c^{\frac{27bs}{23{\overline{2}}{\overline{0}}m}} + \sqrt{(c^{\frac{27bs}{23{\overline{2}}{\overline{0}}m}} - 1)})] : \sqrt{\frac{27ab}{23{\overline{2}}{\overline{0}}m}}$$

$$\text{et } s = [\log(c^{\frac{t\sqrt{\frac{27ab}{23{\overline{2}}{\overline{0}}m}}}{23{\overline{2}}{\overline{0}}m}} + c^{-t\sqrt{\frac{27ab}{23{\overline{2}}{\overline{0}}m}}}) - \log.2.] : \frac{27b}{23{\overline{2}}{\overline{0}}m},$$

his autem aequationibus, vti notaui §. 4. fine sensibili errore sequentes substitui possunt multum simpliciores,

$$t = (\frac{27bs}{23{\overline{2}}{\overline{0}}m} + \log.2.) : \sqrt{\frac{27ab}{23{\overline{2}}{\overline{0}}m}} \text{ et } s = (\log(\frac{27ab}{23{\overline{2}}{\overline{0}}m}) - \log.2.) : \frac{27b}{23{\overline{2}}{\overline{0}}m}.$$

VII. Et ita quidem determinauimus motum corporum in fluidis resistentibus respectu corporum libere cadentium. Supereft praecipuum, scilicet, vt motus ille definiatur absolute ita vt ex dato tempore, v.gr. numero quodam minutorum secundorum inferri possit spatium exprimendum per certum et definitum numerum pedum Anglicorum. Idque obtineri poterit ex comparatione temporum requisitorum pro lapsu per certam quandam altitudinem tam in medio resistenti quam non resistenti: posset adeoque deduci ex vnico experimento; sed possumus quoque eo carere, considerando quod primo momento, dum velocitas corporis cadentis adhucum infinite parua est, medium plane non resistat, vnde

aqua-

æqualia sunt prima lapsus tempuscula , tam in hypothesi
resistentiae quam non resistentiae, si nimirum spatiola sunt
æqualia ; potestque exinde inueniri valor ipsius a in nu-
meris absolutis , vti id in sequenti §. patebit.

VIII. Denotet AQ (fig. 6.) spatium in vtraque
hypothesi emensum ; QO autem repreäsentet tempus pro
medio resistenti et QP tempus pro medio non resistenti;
et erit (ponendo $AQ=s$) $QP=V\frac{a+b}{16\frac{1}{9}a}s$ et $QO=$

$[\log.(c^{\frac{27}{2}\frac{b}{20}m}+V(c^{\frac{27}{11}\frac{ab}{20}m}-1))]:V\frac{27ab}{23\frac{b}{20}m}$. Oportet au-
tem harum quantitatum (QP et QO) sumere differentia-
lia , eademque posito $s=0$, inter se aequare : est diff.
 $QP=ds\sqrt{a+b}:2V16\frac{1}{9}as$ et diff. QO est (ponendo vbi-
que breuitatis ergo e pro $\frac{27b}{23\frac{b}{20}m}$) $= [c^{es}eds V(c^{2es}-1)$
 $+c^{2es}eds]:[c^{es}V(c^{2es}ae-ae)+c^{2es}Vae-Vae]$. In hisquan-
titatibus differentialibus si ponitur $s=0$, fit vtraque infi-
nita atque adeo nihil ex earundem comparatione cognosci
potest. Vt huic incommodo obuiam eatur, multiplico
æquationem per $V16\frac{1}{9}as$, vt habeatur $\frac{1}{2}ds\sqrt{a+b}=$
 $(c^{es}edsV(c^{2es}-1)+c^{2es}eds)\times V16\frac{1}{9}as :$
 $(c^{es}V(c^{2es}ae-ae)+c^{2es}Vae-Vae);$ vel diuidendo per ds
atq; negligendo primum terminum in numeratore posterio-
ris quantitatis, erit $\frac{1}{2}\sqrt{a+b}=c^{2es}eV16\frac{1}{9}as:[c^{es}V(c^{2es}ae$
 $-ae)+c^{2es}Vae-Vae]$. In hac æquatione si ponitur $s=0$
atque simul obseruentur ea quae iuxta Patrem meum mo-
nuit Ill. Hospitalius in Analyſi sua infinite paruorum p.
145. edit. primæ, reperietur $a=2\times 16\frac{1}{9}-b=32\frac{2}{9}-b$.

Denotat vero a pondus corporis in fluido et b pondus similis molis fluidi. Vnde si grauitas specifica corporis in vacuo sit ad grauitatem specificam fluidi ut q ad 1, erit $a = 32 \frac{2}{9} - \frac{3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{9}}{q}$, et $b = \frac{3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{9}}{q}$: Atque si hi valores substituantur in aequationibus pro s et t circa finem §. 6. part. 3. datis, habebuntur aequationes finales, quarum ope ex data diametro globi vna cum ipsius grauitate specifica respectu grauitatis specificae fluidi, potest relatio absoluta haberri inter tempus minutis secundis expressum et spatium iam absolutum numero quodam pedum Anglicorum definitum. Hic tantum apponam, quas dixi proxime veras esse. Erit ergo $t = \frac{sv^{2/7}}{\sqrt{2320m(q-1)}} + \frac{q \log. 2\sqrt{2320m}}{322\sqrt{27q-27}}$ (quam proxime) $(108sV^{\frac{1}{m}} + 199qV^m)$: $\frac{1000Vq-1}{108}$: et $s = \frac{1000tVmq-\sqrt{m}-199mq}{108}$.

IX. Si quisam velit hasce formulas simplicissimas experimentis confirmare, is deprehendet consensum inter calculum et experimenta, quem vix ipse sperasse: indicio certissimo et rectam a nobis assumtam esse resistentiae mensuram et nos omni cum successu eadem viros fuisse pro eruenda theoria motus corporum in mediis fluidissimis, id est, omni tenacitate expertibus. Extant autem experimenta quampluriina exactissime instituta a Cl. Newtono in eiusdem *Princ. Math. Phil. Nat.* p. 346. et seqq. edit. 3. Apponam hic unicum experimentum ut pateat formularum nostrarum applicatio.

Experimentum. Globus cuius pondus in vacuo erat $156\frac{1}{3}$

156 $\frac{1}{2}$ gran. et 77. gr. in aqua cadebat per altitudinem
112. digitorum tempore quatuor minut sec. et diameter
globi erat $\frac{7}{100}$ pedis Angl.

In hoc casu est $q = \frac{4}{2} \frac{6}{3} \frac{9}{8}$; $s = \frac{1}{1} \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ et $m = \frac{7}{100}$.
Substitutis autem hisce valoribus in aequatione priori re-
peritur $t = 3 \frac{9}{10}$ cum experientia fuerit $t = 4$.

Caeterum feci ipse plura experimenti, et mire con-
uenerunt cum theoria. Aliquando tamen de corpore
cylindrico ita studiose fabricato, vt dum descenderet
ipsius basis non posset extra situm horizontalem se po-
nere, obseruaui, multo tardius descendisse, quam pro
theoria debuisset (deberet autem ipsius resistentia duplo
esse maior, quam superficie sphaericae eiusdem diamet-
ri) Vnde tunc iudicauit theoriam non posse applicari, nisi
ad illa corpora quae findenda aquae aptiora sint; potest
enim in his tenacitas fluidi negligi, cum in superficiebus
planis fluidorum tenacitas vtcunque exigua sensibilem ta-
men retardationem producere possit. Postea vero conside-
raui, fuisse corpus ita temperatum, vt grauitas ipsius
specifica vix aliquantulum maior esset grauitate specifi-
ca aquae in qua descendit, vnde fieri potuit vt tenaci-
tas aquae iam non amplius negligenda esset respectu re-
sistentiae quae ob lentissimum corporis descensum mini-
ma erat. In eo deinceps plurimis aliis experimentis con-
firmatus fui.

X. Quod si corpora in fluidis sursum tendant, id
est, si fluida sint specificē grauiora quam solida corpora,
non aliter mutandae erunt aequationes nostræ, quam
quod loco $\sqrt{q-1}$ ponatur $\sqrt{1-q}$, ita vt habeatur $t =$

$(108sV\frac{1}{m} + 199qVm) : 1000V\sqrt{1-q}$. et $s =$
 $\frac{1000tV\sqrt{m-mq}-199mq}{108}$. Ratio est, quod in hoc casu loco
 aequationis $a = 2 \times 16\frac{1}{9} - b$ in paragrapho octauo huius
 partis erutae, habetur $-a = 2 \times 16\frac{1}{9} - b$, quem valorem
 substituendo in aequationibus circa finem paragraphi 6.
 appositis, oriuntur modo dictae aequationes pro s et t .

Circa ascensum corporum ob grauitatem suam ne-
 gatiuam sursum tendentium experimenta nulla extant a-
 pud Newtonum; feci itaque quamplurima, quae cum
 praedictis aequationibus omnino conueniunt, si differentia
 inter grauitates corporis et fluidi sit grandiuscula; sed si
 differentia sit valde parua, deprehenditur ascensus cor-
 porum multo tardior, quam pro theoria nostra esse de-
 beret; quod phaenomenon me diu ancipitem tenuit, do-
 nec tandem obseruauerim, id tenacitati fluidorum tribuen-
 dum esse, hancque nullo modo negligendam esse neque
 in ascensi neque in descensi corporum, cum iam diffe-
 rentia grauitatum infra trigesimam vel quadragesimam
 partem grauitatis fluidi esse incipit, probe intelleixerim,
 vti in praecedente paragrapho monui. Caeterum hic
 loquor de ascensi corporum fluidis specifice leuiorum;
 nam corpora grauiora sursum proiecta aliam theoriam,
 quam quae ex hactenus dictis pateat, postulant. Atque
 de his agam in sequenti capite.

Pars Quarta

De motu corporum sursum proiectorum, vbi ad calculum reuocantur experimenta ab Excellentiss. Dno Günthero cum tormentis instituta.

I.

Retinebo hic significationes, quas dedi litteris a , n , v , s et t . Sic se sponte offerunt sequentes aequationes initiales pro ascensu corporum $-dv = (a + nvv)$ dt vel $dt = \frac{-dv}{a + nvv}$ atque $ds = vdt = \frac{v dv}{a + nvv}$. Oportet nunc iterum ope harum duarum aequationum tertiam eruere inter s et t , quam non ingrediatur littera v . Hunc in finem analysis praemittemus posterioris aequationis $ds = \frac{-v dv}{a + nvv}$: multiplicetur haec aequatio per $-2n$ et habebitur $-2nd s = \frac{2^n v dv}{a + nvv}$, et sumendo integrales quantitates $-2ns = \log. (a + nnv) \pm$ quantitate constanti, quae pendet a velocitate initiali; ponemus ergo velocitatem initialem $= q$ et erit $-2ns = \log. (a + nvv) - \log. (a + nqq)$; vel $c^{-2ns} = (a + nvv) : (a + nqq)$; vel $v = \sqrt[n]{\frac{x a + nqq - a}{n}}$.

II. Postquam ita inuenimus valorem ipsius v ; possumus huius loco ponere inuentum valorem in aequationem II.

T t

ne

ne $dt = \frac{-dv}{a + nvv}$, atque sic statim obtinebinus aequationem desideratam, nempe $dt = dsV \frac{n}{\sqrt{a + nqq - a}}$ vel $dt = \frac{c^{ns} ds \sqrt{n}}{V(a + nqq - c) \sqrt{a + ns}}$. Exinde fluit constructio sequens. Fiat quadrans circuli AGE (fig. 7.) cuius radius AC $= V \frac{a + nqq}{a}$; sumatur CF $= c^{ns}$, et CB $= 1$: ex punctis F et B erigantur perpendiculares FG et BD, et erit arcus DG diuisus per $V \frac{a + nqq}{a} \times n$ aequalis tempori insumto in ascensum per spatium s.

III. Ex praecedente constructione sequitur esse tempus constanter proportionale angulo GCD: et cum tempus est maximum tunc correspondet angulo ACD. Caeterum ratio inter AB et BC eo maior est, quo velocitas initialis expressa per q maior est. Vnde si haec velocitas sit infinita evanescit BC atque angulus maximus sit rectus habetque proin rationem finitam ad quemcumque alium maximum angulum ACD. Exinde colligatate theorema nouum atque elegans

Theorema. *Corpus vi infinita verticaliter sursum projectum in medio etiam tenuissimo tempore finito totum ascensum ut ut infinitum absolutum secus ac in vacuo.*

IV. Ex praedictis patet, quaenam futura fit maxima altitudo ad quam corpus in medio resistenti data vi projectum verticaliter ascendere potest: habebitur nimirum maxima illa altitudo cum sit $v=0$; est autem per §.

i. p. 4. $v = \sqrt{\frac{c}{n} \times \frac{a + nqq - a}{a}}$; est ergo s in hoc casu $= \frac{\log \frac{a + nqq - a}{a}}{2n}$. Si hanc quantitatem vnica littera B indica-

dicare velimus , habebitur $\frac{\log.a + nqq - \log.a}{2n} = B$ vel $q =$

$V^c \frac{2^n B}{n} \frac{a-a}{a}$: quem valorem substituendo vbique pro q erit radius $AC = c^{nB}$, in quo sumendo iterum $CF = c^{ns}$ et $CB = 1$ erit arcus DG diuisus per $c^{nB} Van$ tempori insumto in ascensum per spatium s . Ex his liquet nihil posse affirmari de temporibus absque praecognito valore ipsius B ; hoc autem cognito omnia reliqua facile determinantur. Sed valde difficile est in experimentis obseruare altitudines maximas ad quas corpora ascendunt , imo id plane fieri nequit , cum altitudines illae sunt admodum magnae , quales sunt in globis ferreis ex tormentis bellicis explosis. Id solummodo obseruari potest exacte , quantum temporis corpora insumunt in i- tu suo atque reditu , id est , quot minuta secunda in ae- re commorenentur. Cogitaui igitur de sequenti problema- te nodoso equidem sed utilissimo.

Problema I. *Dato tempore , quo datum corpus in medio dato verticaliter sursum projectum , ascensum et descensum absolutum , inuenire altitudinem totam ad quam corpus ascendit.*

Ex solutione primi huius problematis facile deducitur

Problema II. *Datis iisdem inuenire seorsim tempus ascensus et tempus descensus.*

Neque maiori industria opus erit pro solutione alterius problematis sequentis

Problema III. *Datis iisdem inuenire tempus*
T t 2 *quod*

quod corpus in vacuo eadem vi projectum in ascensum impenderet atque altitudinem ad quam ascenderet.

V. Quod ad primum problema, solutionem illius dabo per seriem quandam. Sit itaque tempus ascensus et descensus simul sumtum $= T$ manente significacione reliquarum litterarum. Ergo (per §. 4 part. 4.) erit tempus totius ascensus $=$ arcui AD (sumendo radium $= c^{nB}$) diuisio per $c^{nB} V an$. Sinus huius arcus est linea BD seu $V(c^{2nB}-1)$: exprimam itaque arcum AD per A S. $V(c^{2nB}-1)$ quod significat, arcum correspondentem sinui $V(c^{2nB}-1)$. Assumis his symbolis tempus ascensus totius tale erit (A.S. $V(c^{2nB}-1)$): $c^{nB} V an$. Porro tempus descensus est (per §. 3. p. 3.) $= (\log. c^{nB} + V(c^{2nB}-1))$: $V an$. Quod si aggregatum vtriusque temporis aequetur cum dato tempore T habebitur aequatio mediante qua valorem ipsius B colligere dabitur. Est autem illa aequatio talis
 $(A.S. V(c^{2nB}-1)):c^{nB} V an + (\log. c^{nB} + V(c^{2nB}-1)) : V an = T$, cui tentando satisfieri potest; sed dabo insuper methodum, qua ad huius modi aequationum radicem approximandi potest, quoisque libuerit, quaeque in omnibus fere casibus utiliter adhiberi potest.

VI. Immutetur aequatio ita, vt ab una parte habeatur B purum et ab altera parte sint quantitates vtcunque compositae atque signis siue a logarithmis siue a circulo pendentibus inuolutae, quarum complexum considerabo vt functionem quandam ipsius B: In hac functione substituatur vbique loco B eiusdem functio inuenta per primam aequationem; In noua aequatione idem repetatur; atque sic habebitur seriei species, donec tandem sine sensibili

sibili errore loco quantitatis B possit quaelibet ad lubitum substitui. Haec magis fient manifesta, indicando functionem ipsius B per $F(B)$. Dico itaque conciliandam esse aequationi propositae huiusmodi formam $B = F(B)$, inque hac posse loco posterioris B poni valorem ipsius, ita ut habeatur $B = F(F(B))$ et sic porro, atque haec vestigia premendo fore ut habeatur species seriei $B = F(F(F(F \dots B \dots)))$, vel $B = F(F(F(F \dots C \dots)))$; potest enim loco vltimi B poni quaelibet quantitas, si saepius ipsius functio repetatur. Notandum tamen est, posse functionem tales accipi, ut eiusdem repetitio diuergere faciat a vero valore quantitatis quae sitae quod vbi animaduertitur, alia functio ex aequatione proposita deducenda est, et sic poterit appropinquari ad valorem ipsius B , quo usque libuerit, non obstante quod aequatio in praecedenti paragrapgo data ita sit composita, ut vnicuique statim appareat, fieri fere non posse, ut aliquid ex illa cognoscatur. Nunc ipsam aequationem aggrediar.

VII. Ponatur in aequatione nostra breuitatis causa $c^n B = x$, et habebitur

$(A.S.\sqrt{xx-1})xVan + (\log x + \sqrt{xx-1})Van = T$; ex hac aequatione deducenda est functio quae sit aequalis x . Id vero obtineri potest diuersis modis, sed cauendum netalis felicatur, quae saepius repetita magis magisque reddit ab assumto valore ipsius x : poterit ergo aequatio vltimo loco posita transmutari in hanc

$$A.S.\sqrt{xx-1} = TxVan - x\log(x + \sqrt{xx-1}).$$

vel transferendo signum A.S. ad alteram partem id quod fit inuersione litterarum, ponendo scilicet S. A. (quod significat sinum arcus dati, cuius radius = x) habebitur

Tt 3

$\sqrt{xx-1}$

$\sqrt{xx-1} = S.A.(Tx\sqrt{an-x}\log(x+\sqrt{xx-1}))$, vel sumendo quadrata, transferendoque unitatem ad alteram partem atque extrahendo denique radicem, erit

$x = \sqrt{1 + \square S.A.(Tx\sqrt{an-x}\log(x+\sqrt{xx-1}))}$, quae aequatio ut recte intelligatur, dicam esse x talē numerū, vt si sumatur radix ex $xx-1$, eidemque addatur, summaeque sumatur logarithmus, qui multiplicatus per x subtrahatur de $Tx\sqrt{an}$, deindeque differentia consideretur tanquam arcus circuli, cuius radius $= x$, huiusque arcus accipiatur sinus, vt, inquam, sit radix ex quadrato praedicti sinus unitate aucto aequalis ipsi x . Cæterum cum de logarithmis sermo est, intelliguntur logarithmi hyperbolici, qui habentur diuidendo logarithmos tabulae Vlaccianæ per 0,4342944819.

VIII. Ad illustrandam methodum quam dedi paragr. 6. pro approximatione ad radices aequationis *vt* cuncte compositae, monstrabo exemplum pro ultima nostra aequatione ita perplexa *vt* prima fronte facile videatur nihil fere ex illa intelligi posse. Exemplum autem, quod apponam non est ad libitum selectum sed ad experimentum, cuius deinceps mentionem faciam, accommodatum; quaeritur itaque valor ipsius x in casu quo $T\sqrt{an}$ est $= 2,771884$. Pono statim $x = 2$, vnde $\sqrt{xx-1} = 1,73$, et $x + \sqrt{xx-1} = 3,73$, cuius logarithmus $= 1,3395$: quem subtrahendo de $T\sqrt{an}$, remanet, $1,432384$, quod residuum iam deberet multiplicari per x , quia autem hic compendium aliquod obseruandum est, indicabo tantum multiplicationem hanc ponendo interim resi-

residuum illud $= R$; atque ita habebitur Rx ; haec vero quantitas consideranda est ut arcus circuli cuius radius $= x$; quaeritur ergo quot graduum futurus sit arcus ille; is reperietur sumendo quartam proportionalem ad $\frac{7}{1} \frac{1}{3} x$, 360 et Rx , quae quarta proportionalis fit 57, 296R. Potest adeoque semper negligi multiplicatio quantitatis R per x , statimque multiplicari eadem quantitas R per 57, 296 ut habeatur numerus graduum arcus definiti. Dein sumatur in tabula sinuum ille sinus qui respondet isti arcui, multipliceturque sinus per $\frac{x}{100000}$: et sic habebitur S. A. (Rx) in nostro casu $= 1, 98$, cuius quadratum unitate auctum dat 4, 9204, huiusque radix 2, 20; Oportet ergo per regulam §. 6. datam ponere secunda vice $x = 2, 20$, atque singula repetere, quae modo facta sunt, et sic fiet $x = 2, 37$, dein $x = 2, 48$, dein $x = 2, 53$, postea fit $x = 2, 55$ et denique $x = 2, 56$, deinde posui $x = 2, 570$, exindeque resultauit $x = 2, 573$. Potest itaque tuto assumi $x = 2, 575$, atque sic certi erimus hunc numerum vix aberrare in millesimis a vero numero. In his calculis obseruandum est, esse eo exactiores vbique numeros accipiendo, quo maius iam appropinquatum fuerit ad valorem ipsius x . Cognita autem x , faciendum est $B = \frac{\log x}{n}$, quia positum fuit in praecedente paragrapho $c^n B = x$. Vnde si n fuerit 0, 0002063 erit $B = 4550$.

Et haec sufficient pro primo problemate; id tantum addidero, quod si x incipiatur esse tanti valoris, ut vnitatis possit negligi prae ipsius quadrato, tunc aequatio no-

stra

stra §. 7. data statim ab initio degenerat in hanc (A.S.x):
 $x\sqrt{an} + (\log x + \log 2) \sqrt{an} = T$; Sed (A.S.x):x , nihil
 aliud est ob radium = x , quam ratio quadrantis circuli
 ad radium seu $355:226$; habetur itaque $355:226 +$
 $\log x + \log 2 = T\sqrt{an}$, vel $\log x = T\sqrt{an} - \log 2 -$
 $\frac{355}{226}$, et consequenter $B = \frac{\log x}{n} = T\sqrt{\frac{a}{n}} - \frac{\log 2}{n} - \frac{355}{226n}$,
 quae aequatio admodum simplex est, sed tamen non acci-
 pienda, nisi praeuideatur fore x iam numerum grandius-
 culum, qualis fit, cum corpus vi vehementissima sursum
 iactum fuerit.

IX. Problema secundum paragrapho 4to propo-
 situm postulat tempus ascensus et tempus descensus seor-
 sim. Tempus autem totius ascensus est (A.S. $\sqrt{(c^{2nB}-1)}$): c^{nB}
 \sqrt{an} quod iam ob cognitum valorem ipsius B facile sumi
 potest; et si tempus ascensus subtrahatur de T habebitur
 tempus descensus. Vel poterit etiam primo loco in-
 quiriri tempus descensus, quod est ($\log c^{nB} + \sqrt{c^{2nB}-1}$):
 \sqrt{an} , hocque auferri a T vt habeatur dein tempus ascen-
 sus, et hic alter modus praferendus est priori; quia ta-
 bulae logarithmorum frequentiores sunt tabulis arcuum,
 et praesertim quia in ultima operatione, qua valor x pro-
 xime fuit determinatus , iam sumptus fuit logarithmus ex
 $x + \sqrt{xx-1}$, quem logarithmum diuidendo per \sqrt{an} , ha-
 betur tempus descensus ; nam valores duo proximi ipsius
 x vix differre debent.

X. Solutio problematis tertii petenda est ex para-
 grapho 4. part. 4. vbi vidimus , esse q velocitatem ini-
 tia-

tialem designantem $= V^c \frac{a-a}{n}$, vnde tempus, quod globus eadem vi proiectus in vacuo in ascensum atque descensum impendisset, numero minutorum secundo-
 rum expressum est $= \frac{1}{g} V^c \frac{a-a}{n}$, significante littera g numerum pedum, quos graue libere a quiete cadendo tempore vnius minuti secundi conficit. Ipsa vero altitudo, ad quam globus definita vi sursum proiectus ascendere potuisse, est $= \frac{c}{4ng} \frac{a-a}{n}$.

XI. Hisce tribus problematis omnia continentur, quae circa ascensum corporum notatu digna censui. Cæterum me non monente id cuique manifestum est, positis corporibus sphaericis, esse iterum $n = \frac{27b}{2320m}$, vbi m denotat quoties diameter globi continet vnum pedem Angl. et b significat pondus globi fluidi eiusdem diametri cum globo solido, vti illud exposui paragrapho 6. part. 3. et a erit $= 2g - b$ seu $a = 32\frac{2}{9} - b$ per paragr. 8. part. 3. Hisce meditationibus haud parum utilitatis accedere posse existimauit, si ad calculum reuocarem aliquot experimentorum quae Excellentis. Dominus Güntherus coram Academicis quibusdam institui curauit, ex quibus apparebunt stupendi effectus, quos aer in corpora gravitatis specificae octies millesies fere maioris exercere valeret; poterunt quoque exinde vires pulueris pyrii exacte inter se comparari multaque alia utiliter colligi. Experimenta autem instituta fuerunt quamplurima variique generis, de quibus ea feliciter, quae in hanc rem facere possunt, qualia sunt cum tormentorum situs omni cura

Tom. II.

Vv

ad

ad perpendiculum accommodatus fuit, simul obseruan-
do quantitatem pulueris pyri et tempus, quod globus in
ascensum et descensum impendebat. Continebat au-
tem diameter globi $23\frac{3}{4}$ centesimas particulas pedis Angli-
ci ipseque globus vtpote ferreus grauitatis specificae
ponetur in calculo respectu aeris, ut 7650 ad 1. aerem
quoque vbiique eiusdem esse densitatis fingemus. Note-
tur insuper longitudinem cavitatis internae tormenti fuisse
 $7\frac{7}{10}$ ped. Angl. Patet ergo, esse a ad b ut 7649 ad 1; et cum
 a sit $= 32\frac{2}{9}$, b erit $b = \frac{2}{7}\frac{9}{8}\frac{3}{5}$, et $a = \frac{221821}{6885} = 32,218$.
Porro diameter globi dat $m = 0,2375$; ergo $n = \frac{3793835}{3793835} = 0,0002063$ et $Van = 0,081526$. Hae positiones
in sequentibus experimentis erunt eadem; et si ponitur
 $T = 34$. vti in exemplo 2. habentur positiones §. 8.

Quantitas pulueris pyri in vniuersitatibus Hollantibus expressa.	Tempus totum ascensus et descendens.	Altitudo ad quam globus peruenit in aere resistente.	Tempus ascensus in aere resistente.	Tempus descendens in aere resistente.	Altit. ad quam globus eadem vi proiectus in vacuo ascendere potest	Tempus, quod eadem vi projectus in ascensum et descensum impedit
$\frac{1}{2}$	11	486	5,42	5,58	541	11,6
2	34	4550	14,37	19,63	13694	58
4	45	7819	16,84	28,16	58750	121

Prae-

Praedictae obseruationes factae fuerunt in tormento longitudinis 7, 7 ped. Angl. Dein cum eodem tormento eodemque globo, sed priori diminuto 1, 7 ped. ita ut longitudine animae residua esset praecise 6. ped. sequentia experimenta instituta fuerunt

Quantitas pulue- ris pyrii numero vncia- rum ex- pressa.	Num. min. sec. per quae globus in aere per- mansit per ob- servatio- nes.	Alt. ad quam glob. in aere per- uenit per calculum ped.	Temp. ascensus num.	Temp. desc. min. sec.	Alt. glo- bi eadem vi proie- cti in va- bus ea- cuo ped. Angl.	Nun- min.sec. quae glo- bus vi proiectus in vacuo in asc. et desc. im- pend.
$\frac{1}{2}$	8	257	3, 95	4, 05	274	8, 2
2	20, 5	1665	9, 74	10, 76	2404	24, 5
4	28	3187	12, 5,	15, 5	6604	40, 5
6	32, 5	4304	13, 9	18, 6	11810	54, 3
8	38	5643	15, 54	22, 46	22394	74

XII. Vtraque tabula exacto calculo construeta fuit: Supereft vt iam quaedam conjectaria ex ipsis deducamus prae aliis notabiliora: Maximum tempus ascensus fuit 16, 84 min. sec. et post hoc tempus ascensus maximum est 15, 54: differentia est tantum 1, 30 m. s. cum

tamen differentia altitudinum, ad quas in vacuo peruenit globus, sit minime contemnenda, quippe quae exaequat 2176 ped. Angl. Ex hoc solo vnicuique manifestum fit, dari tempus, quod globus in ascensu $v_t cunque$ magno nunquam excedit; quod demonstravi §. 3 part. 4. tempus maximum autem est pro ascensu $= \frac{255}{226 \sqrt{an}}$, quod in globo nostro fit $= 19, 27$ min. s. Exinde quoque confirmatur sequens

XIII. Theorema. *Tempus ascensus et descensus simul suntum maius est in vacuo quam in pleno; positis iisdem ab utraque parte velocitatibus initialibus: potest autem in utroque casu esse infinitum; quamvis in vacuo infinites maius tunc sit quam in pleno.*

Quod autem tempus ascensus et descensus globi vi infinita in medio aequabili et resistenti sursum proiecti infinites minus sit, quam cum vi eadem in vacuo sursum projectum fuerit, et si vires gravitatis eaedem fuerint ex illo elucescit, quod praedictum tempus in priori casu sit $= BV^{\frac{a}{n}}$, dum in posteriori fit $= c^{nB} V^{\frac{a}{n}}$. Sed si vis explodens sit infinita, erit etiam velocitas initialis seu q infinita; porro $B = \frac{\log.a + \pi q q - \log.a}{2n}$ per §. 4. part. 4. Ergo etiam B erit infinita existente q infinita. Constat vero esse c^B infinites maiorem quam B , si B sit infinita, ergo etiam tunc $c^{nB} V^{\frac{a}{n}}$ erit infinita maior quam $BV^{\frac{a}{n}}$. Q.E.D.

XIV. Theor. *Positis iterum viribus explodentibus seu velocitatibus initialibus aequalibus et infinitis, erit etiam altitudo ad quam globus peruenit in vacuo infinites maior*

*ior altitudine , ad quam peruenire potest in medio resi-
stanti. Vtraque vero iterum est infinita.*

Hae propositiones partim iam in praecedenti pa-
ragrapho demonstratae fuerunt , partim eadem metho-
do adhibitis formulis ascensuum quantitates denotanti-
bus demonstrari possunt. Caeterum notari meretur ,
aerem quem posuimus ferro 7650 vicibus leuiorem , tan-
tam tamen resistantiam exeruisse in globum ferreum ,
cum 45. min. sec. in aere commoraretur , vt eidem $\frac{1}{8}$
partes abstulerit in ascensu.

XV. Licet quoque ex tabulis praemissis quaedam
colligere circa vim pulueris pyrii: Sunt vtique vires im-
pressae globis vt altitudines ad quas in vacuo globus ascen-
dere potest : In prima autem tabula vidimus altitudines
illas esse vt 13694 ad 541 seu fere vt 26 ad 1 , cum
quantitates pulueris erant vt 4 ad 1. Vnde apparat vi-
res pulueris in globum propellendum multo maiori ra-
tione crescere quam eiusdem pulueris pondera. Ratio-
nem huius phaenomeni aliam assequi nequeo , quam
quod maxima pars pulueris accensi transeat per lumen
accensorium et per hiatum illum inter globum et animam
tormenti interceptum , quodque haec pulueris pars inuti-
lis in longe minori adsortatione , cum ingens pulueris quan-
titas adhibetur , quam cum parua. Caeterum id quoque ex
experimentis colligere licet , considerando puluerem vt
aerem condensatissimum , scilicet vires aeris densissimi
in multo maiori ratione , quam densitates , crescere ;
subducto enim calculo , inueni aerem naturali quingen-

ties densiorem elasticitate praeditum esse naturali aeris elasticitate minimum sexies millies maiorem.

Adnectam hic alia quaedam experimenta cum mortario instituta : Si quis ad calculum ea reuocare voluerit, id eo plane modo, quem indicaui §. 8. fieri poterit : erat autem diameter animae mortarii 1, 05 ped. Angl. diameter globi 1, 01 ped. pondus globi 200 libris Holland.

Quantit. pulv. pyr. in lib. Holl.	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
Tempus, per quod globus in aere man- sit in min. sec.	3	7, 5	12	16, 5	20	23	25

*Reliqua, quae Auctor circa motum corporum in mediis
resistentibus coram Societate praelegit, in sequentem To-
num differentur.*

NO-

NOVA PLANTARVM GENERA

Auct.

I. C. Buxbaum.

Prostant in officinis pharmaceuticis Mosquae frustula spongiosi cuiusdam vegetabilis, quod Rutheni vocant *Badiaga*, et multi ipsis usus est in liuoribus oculorum aliarumque partium a verberibus, quos huius puluis impositus vna nocte tollere dicitur.

Est autem haec *Badiaga* planta sui generis perpetuo submersa, spongiosa, ex multis fibrillis herbaceis quasi contexta, fragilis et digitis, sicca inprimis, facile friabilis, qua in re differt a spongia, cuius textura tenax et veluti ex lana compacta. Praecipuam autem differentiam constituunt grana rotunda, quibus nostra *Badiaga* referta est, quaeque pro seminibus haberi possunt. Et haec etiam ipsam ab Alcyonio separant.

Tres haec tenus obseruauimus *Badiagae* species, quarum prima nobis audit *Badiaga maior*. Figura huius occurrit in Löselii Flora Prussica, vbi appellatur *Muscus aquaticus*, *Ceratooides*, de quo Breynius in Praefatione Florae Quasimodogenitae notat, quod sit *Spongiae species elegans noua*. Addidit quoque breuem descriptionem Löselius, nullam tamen mentionem facit seminum, quod fecit Ruppius in Flora Ienensi, qui pariter figu-

figuram exhibet. Exhibere quoque talem videtur Plukenetius Tab. CXII. fig. 3. sub nomine *Spongiae fluuiatilis*, *anfractuosa*, *perfragilis*, *ramosissimae*. Sed nulla adest descriptio, quae etiam desideratur in Raio et Historia Oxoniensi, vnde nihil certi determinare possumus. Granula ista seu semina in hac maiori specie rotunda sunt coloris albidi, in altera parte instar lapidum cancri excavata. Odor plantae recentis est teter et pisculentus.

Secunda species conuenit cum praecedente colore ex atro viridi et odore graui, differt vero, quod minor minusque ramosa et quod granulis croceis et splendentibus rotundis, quales in *Hippuride* seu *Equiseto foetido sub aquis repente* C. B. obseruatur. Adhaeret limo aut Lenticulae trisculae, praecedens vero lignis adnascitur putrescentibus sub aquis latentibus. Pigrarum aquarum alumna est et a nobis dicitur *Badiaga minor*.

Badiaga cinerea appellari potest tertia species, quae *Spongia ramosa fluuiatilis* Newtoni Rai. Hist 81. Haec reliquis longe elegantior cinereo aut albicante colore ad spongiam accedit, sed friabilitate et fragilitate Badiagae similis. Rami interdum inter se coalescunt et vacua quaedam spatia relinquunt. Semina in hac non vidi, quae a similia cum praecedentibus ferat, nescio, ob conuentiam tamen in reliquis huc referre placuit.

Secundum genus plantarum nouum a nobis appellatur *Lupinaster*, cuius notae sunt: Folia instar Lupini digitata. Flores papilionacei, in capitulum, longo petiolo ex foliorum alis egresso, sustentatum, congesti siliquae longae depressae, seminibus reniformibus foetae,

tae, quae notae ipsum a congenibus satis euidenter separant.

Caules profert hic *Lupinaster* semipede altiores, non raro pedales, rotundos et striatos, virides, paruis ramis ex alis foliorum egredientibus praeditos. Folia longa, acute serrata, glauca, non tamen hirsuta, eleganter striata et rigida. Quinque, sex, septem, imo plura digitatim, instar foliorum *Lupini*, communi insident pediculo breui, ex vagina sublutea caulem amplectente prodeunte. In summo caule et ramulis nascuntur flores purpureo coerulei in capitulum collecti, exacte flores *Trifolii* bituminosi referentes, pediculis vncialibus aut longioribus sustentati et calyce in multa segmenta acuta scisso excepti. Sequuntur siliquae longae depressae, seminibus reniformibus nigris repletae. Crescit haec elegans planta ad ripas Wolgae intra Astrakanum et Czarinam, ob similitudinem cum Lupino hoc nomen impnere placuit. vid. Tab. XX.

Poliifolia tertium constituit genus notasque gerit Flores monopetalos campaniformes globosos et capsulam in quinque loculamenta diuisam, seminibus foetam subrotundis. Et vt breuiter dicamus, *Poliifolia* est plantae genus flore *Arbuti*, fructu *Cisti*.

Mutuati sumus *Poliifoliae* nomen ex I. Bauhino, a quo haec planta vocatur *Viti Ideae affinis Poliifolia montana*. A Raio in Synops. dicitur *Ledum palustre nostras flore Arbuti*, vbi haec planta optime describitur, cui descriptioni nos addimus petiolos flores sustinentes et calycem breuem floribus esse concolores, hoc est ele.

Tom. II.

X x

gan-

ganter purpureos. Figura I. Bauhini non adeo bona, nec meliorem multo dat Plukenetius. Occurrit foliis angustioribus et latioribus, posterior vacatur a Scherardo *Ledum palustre* foliis latioribus succulentis in Raii Synopsis.

Pertinet ad frutices fructu sicco vbi post Chamaerhododendron potest collocari. Differt a Chamaedaphne dispositione foliorum et florum imo toto habitu Ledi nomen a Raio impositum ideo cum Poliiifolia commutani, quia illud longo vsu iam occupauit *Cistus Ledon* foliis *Rosmarini ferrugineis* C. B. qui iure nouum constituit genus. His cognata videtur planta Erica Cantabrica flore maximo, foliis Myrti, subtus incanis Tournef. Inst. et Erica Hibernica foliis Myrti pilosis subtus incanis Petiv. Gazoph.

Additur hic figura plantae Africanae, quam pro Poliifoliae specie, ex floribus coniecturam faciens, habeo. Dicatur itaque *Poliiifolia Africana fruticosa*. Flores huic purpurei campaniformes, magis patuli quam nostratis flores, in quatuor lacinias secti; folia angusta acuta, caules sine ordine cingentia. Frutex est humilis cortice vestitus dilute rubente vid. Tab. XXI.

Describit et delineat C. Bauhinus in Prodr. Campanulae speciem quam nominat *Campanulam serpillifolian*, quae etiam sub Campanulae speciebus recensetur a Tournesortio in Inst. Occurrit haec copiose in sylvis uliginosis circa Petropolim, et ego fructum eius examinans ipsum longe a Campanulae fructu diuersum reperi. Capsula nempe est oblonga, ouata, foeta semi-

ne

ne vnicō albo similis figurae, in medio secundum longitudinem sulcato. Haec capsula præter ea instructa est duobus foliolis hispidis ceu scutis, quae omnia melius describuntur quam delineantur ob exiguitatem, hinc nullam figuram adiecimus. Flos etiam tubulosus magis infundibuliformibus quam campaniformibus accenseri metetur. Abiesto igitur Capanulae nomine *Serpillifoliam* vocare visum est.

TENTAMEN EXPLICATIONIS PHAENOMENORVM AERIS.

Auctore

Leonh. Eulero.

I.

QVanquam ad intima rerum penetralia et cognitionem ultimae partium structurae aditus non ita patet, vt phaenomenorum, quae in de oriuntur ratio reddi queat: Tamen, vt plerumque a Physicis factum est, a corporum natura-
lium proprietatibus, quas obseruauimus, quodammodo ad ipsam eorum structuram concludere licet. Ex qua percepta corporum structura, quo plura phaenomena explicari possunt, eo perfectior ea est; Et, si ex qua Theoria omnes prorsus proprietates, quas quidem co-

Xx 2

gnos-

M. Sept.
1727.

gnoscere impossibile est , deriuari possent , dubium non est , quin ea vera sit , et re ipsa existat.

II. Aeris quam plurima nota sunt phaenomena , eaque parum a se inuicem dependentia ; vt is profecto multum praestitisse censendus sit ; qui eadem theoria omnibus satisfacere posset . Sed theoriam ita maxime confidere conuenit , vt primum excogitur partium structura , ex qua vna tantum proprietas fluat ; id quod plerumque pluribus modis fieri potest : et deinceps inquiratur , num ea caeteris quoque proprietatibus explicandis sufficiat ? et , si plures primum theoriae conceptae sunt , tum quaeratur , quae maximaee parti vel quae omnibus satisfaciat .

III. Inter alias aeris , quas cognoscimus , proprietates ea in primis idonea visa est , secundum quam structura aeris adornetur , qua aer sese continuo expandere conatur , et re ipsa se expandit , si quae impedimento fuerant , remoueantur . Haec enim aeris elasticitas prae caeteris proprietatibus maxime explicatu difficilis videatur , vt eius ratione cognita reliqua facile fluere videantur .

IV. Nisi velimus hoc aeris phaenomenon occulta cuidam particularum proprietati et vi insitae adscribere , alia via non supereft , nisi vt conatus iste a motu materiae cuiusdam subtilis deriuetur . Conatus autem seu vis mortua , vti a Leibnitio vocatur , a materia mota ortum trahere potest , si ea in gyrum moueatur ; quo fit vt quaevis particula a centro aufugere conetur , atque ita huius medi vortex vim sese expandendi acquirat . Hoc vsus principio Cel. Ioh. Bernoulli omnem vim elasticam

ex-

explicare instituit in schediasmate *de communicatione motus* Lutetiae nuper impresso. Quo vim elasticam a vi centrifuga materiae subtilis oriri afferit.

V. Sequor itaque hac in re , istam , vti mihi videtur , maxime probabilem elasticitatis aeris causam , atque in hac dissertatione examini subiiciam , quantum aeris structura ex hoc fundamento formata reliquis aeris proprietatibus explicandis sufficiat , quantumue minus , vt appareat , vtrum aer hanc partium structuram habere possit , an vero non ? Quo in casu meliorem oporteret excogitare aeris constitutionem .

VI. Suppono igitur aerem constare aceruo infinitarum minimarum bullularum , in quibus materia subtilis motu circulari gyratur et vi centrifuga bullulas continuo expandere conatur , easque reipsa semotis obculis , expandit . Suppono porro bullulas esse pellicula obductas ; quod quidem opus non esset , cum huiusmodi vorticuli sine pelliculis constare possent et tamen mutuo non permiscerentur . Vnus enim alterum impedit , quominus extrauagetur : Attamen propterea bullulas pelliculis obductas suppono , quod aer nunquam tam purus sit , vt prorsus a vaporibus liber sit . Vapores autem particulas aeris ad instar pellicularum obducere valde probabile est .

VII. Constat itaque aer infinito bullularum minimarum numero , quarum crusta exterior sit aquea pro diuerso aeris statu maior minorue ; intra hanc crustam gyretur materia subtilis certa cum velocitate , quae subinde ab alia subtiliori adhuc materia omnes poros pene-

trante accelerationes nanciscitur, ne motus tandem consumatur et euanescat. Constat enim aerem calorem semel acceptum sensim amittere, cum autem aer calore rarefiat, sequitur materiam subtilem motu vehementiore agitari; cessante ergo calore, indicio id est, motum materiae esse retardatum.

VIII. Ex hisce de structura aeris praemissis consequitur, eum in infinitum se expandere debere atque extreum raritatis gradum accipere, quando nihil est quod eius conatum compescat. Sed accedente grauitate, aliter se res habebit, eritque, quod vi aeris elasticae se opponet. Quum enim aer superior inferiorem premat pondere suo, inferior ulterius se expandere nequit, quam quoad eius vis elastica, quae expansione continuo diminuitur, aequalis sit vi incumbentis aeris comprimenti.

IX. Patet porro ex concepta aeris constitutione, eum in infinitum comprimi non posse, propter grauitatem specificam, quae in infinitum augeretur. Nam cum in qualibet bullula certa et determinata materiae subtilis quantitas comprehendatur, eaque semper superficie adhaereat ob vim centrifugam, necesse est ut circa centrum spatium vacuum relinquatur; id quod eo maius esse debet, quo magis aer rarus fuerit: Contra autem continuata aeris compressione, id spatium vacuum continuo diminuetur, donec tandem prorsus euanescat, ultra quem densitatis gradum aerem comprimere impossibile erit.

X. Quod ad velocitatem materiae subtilis attinet, opor-

oportet singulis eius particulis eandem attribuere velocitatem, neque quae a centro remotiores sunt, iis maiorem et proprioribus minorem adscribere velocitatem. Praeterea enim, quod hinc theoria nascatur experientiae penitus contraria, ob vim centrifugam in maioribus bullulis maiorem, ex hoc elucere potest, quod bullulam condensando vel expansioni relinquendo velocitas materiae subtilis eadem manere debeat, cum nihil sit, quod eam immutet; Huc enim non pertinet retardatio, de qua §. 6. quae non propter immutationem bullulae, sed propter resistentiam quandam contingit. Quare cum velocitas materiae subtilis non a distantia a centro pendere queat necesse est eam ubique constantem statuere.

XI. Sit CAB bullula aerea, quoad fieri potest *Fig. I.*
compressa, quae proin est materia subtili vorticosa penitus repleta. Circumdata vero sit crusta aquea ADEB, ut ergo reliquum spatium CDE materia subtili impletatur. Sit $AC = g$, $CD = b$. Sumatur pro ratione radii ad peripheriem, $1 : \pi$, pro grauitate specifica materiae subtilis, n et pro grauitate specifica aquae seu crustae m . Erit capacitas globuli CAB $= \frac{2\pi g^3}{3}$, et capacitas globuli CDE $= \frac{2\pi b^3}{3}$. Ergo soliditas crustae ADEB $= \frac{2\pi}{3} (g^3 - b^3)$. Quamobrem erit massa materiae subtilis spatium CDE implentis $= \frac{2\pi nb^3}{3}$, et massae crustae $= \frac{2\pi m}{3} (\frac{g^3 - b^3}{2})$. Ethac massarum quantita-

tates in quantum vis expansis bullulis eadem manere debent.

XII. Exprimat k altitudinem, ex qua graue caddendo velocitatem acquirit, materiae subtilis velocitati aequali; Vnde sequenti modo vis centrifuga, seu vis, qua superficies globuli CDE premitur, inuenietur. Sumatur a centro indeterminata $CP=x$ cuius differentiale $Pp=dx$. Erit crusta sphaerica crassitie Pp et radii $CP=2\pi xx dx$, quae si ducatur in densitatem materiae subtilis, dat massam $2\pi nxx dx$, seu pondus. Quum haec materia gyretur velocitate ex altitudine k acquisita, fiat secundum Hugenium, vt radius x ad duplam altitudinem, $2k$ ita pondus materiae gyrantis, $2\pi nxx dx$ ad pondus vi centrifugae huius crustae aequale, quod ergo erit $=4\pi nkx dx$. Huius ergo integrale $2\pi nkx^2$ exprimit vim centrifugam sphaerae radii CP . Consequenter vis centrifuga bullulae DE erit $=2\pi nkbb$.

Fig. II.
XIII. Consideremus nunc bullulam aeream quomodounque expansam CAB: Cuius extrema crusta ADEB designet materiam aqueam, media DFGE materiam subtilem circa centrum gyram, et tertia seu intima CFG, spatium vacuum, vel quod ad minimum materiae gravitatis expertis repletum. Dicantur $AC=a$, $CD=b$, et $CF=c$. Erit, computo vt supra instituto, soliditas crustae extremae seu aqueae ADEB $=\frac{2\pi}{3}(a^3-b^3)$. Dein soliditas crustae mediae seu quantitas materiae subtilis DFGE $=\frac{2\pi}{3}(b^3-c^3)$. Tertio autem capacitas totius bullulae erit $=\frac{2\pi}{3}a^3$. Sit gravitas specifica aeris seu totius bullulae, i erit pondus eius $\frac{2\pi i}{3}a^3$, id quod aequale est summae pon-

ponderum partium, nempe $\frac{2\pi m}{3}(a^3 - b^3) + \frac{2\pi n}{3}(b^3 - c^3)$.
Est igitur $ia^3 = ma^3 - mb^3 + nb^3 - nc^3$.

XIV. Cum et quantitates materiae aquae, et quantitas materiae subtilis aequales esse debeant iis, quae supra erant inuentae in casu bullulae maxime compressae, sequentes obtinebuntur aequationes $\frac{2\pi}{3}(g^3 - b^3) = \frac{2\pi}{3}(a^3 - b^3)$ et $\frac{2\pi}{3}b^3 = \frac{2\pi}{3}(b^3 - c^3)$. Quamobrem $g^3 - b^3 = a^3 - b^3$ et $b^3 = b^3 - c^3$. Vnde $b = \sqrt[3]{(a^3 - g^3) + b^3}$ et $c = \sqrt[3]{(b^3 - b^3)} = \sqrt[3]{(a^3 - g^3)}$. Si haec substituantur in superioris §. ultima aequatione, reperietur $ia^3 = mg^3 - mb^3 + nb^3$. Vnde $b^3 = (ia^3 - mg^3) : (n - m)$. Et porro $b = \sqrt[3]{(i - m + n)a^3 - ng^3} : (n - m)$ ac $c = \sqrt[3]{(a^3 - g^3)}$. Hoc ergo modo ex calculo excluduntur litterae b , c , et h denotantes interiorum bullulae partium a centro distantias.

XIV. Vis centrifuga materiae subtilis in spatio DFGE gyrantis velocitate ex altitudine k producta ex §.
II. inueniri potest hoc modo: Vis centrifuga materiae globum radii x impletis inuenta est $= 2\pi nkxx$. Quare se materia subtilis totum spatium CDE impleret, foret eius vis centrifuga $= 2\pi nkbb$, a qua si auferatur, vis centrifuga materiae spati CFG $= 2\pi nkcc$, restabit vis centrifuga materiae subtilis in spatio FDEG gyrantis, cuius quantitas proin erit $= 2\pi nk(bb - cc)$ et subrogatis loco b et c valoribus §. 13. inuentis, erit ea $= 2\pi nk$
 $\left[\left(\frac{(i-m+n)a^3 - ng^3}{n-m} \right)^{\frac{2}{3}} - (a^3 - g^3)^{\frac{2}{3}} \right]$. Ponatur $b^3 = pg^3$ erit, ob $ia^3 = mg^3 - mb^3 + nb^3$, $ia^3 = (m - mp + np)g^3$

Tom. II. Y y vnde

vnde $g^3 = ia^3 : (m - mp + np)$. Erit ergo pondus vi centrifugae aequiuale*s* $= 2\pi n kaa \left[\left(\frac{m-i+pi-mp+pn}{m-pm+pn} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{m-pm+pn-i}{m-pm+pn} \right)^{\frac{2}{3}} \right] = \frac{2\pi n kaa}{\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2}} \left(\sqrt[3]{(mi+pi-pm+pn)^2} - \sqrt[3]{(m-pm+pn-i)^2} \right)$.

XVI. Cum vi centrifuga efficiatur, vt bullulac aereae se*e* continuo extendere conentur, erit ea aequalis vi elasticae aeris; ex inuenta igitur aequatione, quanta sit aeris elasticitas, inueniri poterit. Verum cum hoc loco primum legem duntaxat, qua aeris vis elastica pro diuersis densitatibus, humoris et celeritatis gradibus immutetur, persequi conueniat, factor $2\pi n$ vtpote constans negligi poterit, eritque vis aeris elastica vt $\frac{kaa}{\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2}} \left(\sqrt[3]{(m-i+pi-pm+pn)^2} - \sqrt[3]{(m-pm+pn-i)^2} \right)$. Cum autem sit $ia^3 = (m-pm+pn)g^3$, loco a in computum duco g , vt ea tanquam constans abiici possit; Erit ergo $aa = gg \sqrt[3]{\frac{(m-pm+pn)}{i}^2}$, quo substituto erit vis elastica aeris vt $k(\sqrt[3]{\frac{(m-i+pi-pm+pn)}{i}^2} - \sqrt[3]{\frac{(m-i-pm+pn)}{i}^2})$. Coeteris igitur paribus est aeris vis elastica vt altitudo k , velocitatem materiae subtilis in bullulis gyrantis graui descendenti imprimens.

XVII. Verum cum vires aeris elasticae inter se comparantur, id fit aeris vim expansi*uam* in eandem basin agentem explorando. Quamobrem, vt mensuram aeris vis elasticae, vt consuetum est, exhibeam, necesse est, vt

vt pressionem aeris in datam basin inuestigem. Nam, quae hucusque de ista mensura tradidi, huc non quadrant, quia vis tota globuli aeris elastica est supputata, quae propterea in tanto maiorem basin agit, quanto magis bullula est extensa. Sunt autem hae bases vt quadrata radiorum' bullularum; Et iis etiam vires elasticae proportionantur. Quocirca assumatur constans quidam sphaerae radius e , fiatque vt a^2 ad e^2 ita vis aeris elastica inuenta paragr. praeced. ad vim in datam basin agentem. Multiplicetur ergo oportet formula praecedens per e^2 :

a^2 at vero est $a^2 = gg\sqrt{\frac{m-pm+pn}{i}}^2$. Quamobrem absolute diuisione, abiectisque e^2 et g^2 tanquam constantibus obtinebitur vis aeris elastica absoluta, quae erit vt $k\left(\sqrt{\frac{m-i+pi-pm+pn}{m-pm+pn}}^2 - \sqrt{\frac{m-i-pm+pn}{m-pm+pn}}^2\right)$.

XVIII. Euanescat pars bullulae aquea; erit $g=b$ et ideo $p=1$. Quamobrem vis aeris elastica hoc casu erit $k\left(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{\frac{n-i}{n}}^2\right)$ seu multiplicato per constantem $\sqrt[3]{n^2}$, erit ea vt $k\left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$. Ponatur k seu velocitas constans, vt obtineatur lex elasticitatum pro solis aeris diversis condensationibus, erit tum vis elastica, vt $\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-i)^2}$. Et hinc sequentes duco consequentias. Si status aeris quam proxime ad maximam condensationem accedat, erit $n-i$ tantum non $=0$, ergo vis elastica hoc in casu erit vt $\sqrt[3]{n^2}$ i. e. ea erit constans. Aere ergo iam vehementer compresso, vis elastica amplius sensibiliter non immutatur.

XIX. Deinde si i respectu ipsius n valde paruum sit, seu si densitas aeris ad densitatem materiae subtilis admodum exiguum habuerit rationem erit $(n-1)^{\frac{2}{3}} = n^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}n^{-\frac{1}{3}}i$, consequenter vis aeris elastica erit $vt^{\frac{2}{3}}n^{-\frac{1}{3}}i$ siue neglecto $\frac{2}{3}n^{-\frac{1}{3}}$ vt i . Aere ergo valde rarefacto elasticitates erunt vt densitates aeris. Quare cum circa aerem naturalem obseruemus quantumuis is comprimatur elasticitatem propemodem in eadem ratione crescere, dubium non est, quin aer noster admodum sit dilatatus respectu materiae subtilis, atque rationem specificam aeris ad grauitatem specificam materiae subtilis perquam esse exiguum.

XX. Attamen cum ea prorsus negligi nequeat, Oportet seriei, inquam $(n-i)^{\frac{2}{3}}$ conuertitur, non tantum duos primos, sed tres accipere terminos, qui variationes obseruatas satis exacte monstrabunt. Hoc ergo pacto erit $(n-1)^{\frac{2}{3}} = n^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}n^{-\frac{1}{3}}i - \frac{1}{9}n^{-\frac{4}{3}}i^2$. Atque hinc vis elastica erit $vt^{\frac{2}{3}}n^{-\frac{1}{3}}i - \frac{1}{9}n^{-\frac{4}{3}}i^2$ seu multiplicando per $9n^{\frac{4}{3}}$, $vt 6ni + i^2$. Dicatur vis elastica v fiatque $fv = 6ni + ii$. Ex hac igitur aequatione ope experimentorum, qua circa aeris incrementum vis elasticae eo continuo magis condensato, instituta sunt a Boyleo, inuenietur ratio $n:i$. Ex quo intelligetur extremus et maximus densitatis gradus, ad quem aerem comprimere possibile est.

XI. Consultum ergo esse duxi experimenta Boyleana huc transcribere, vt ex iis de densitate seu gravi-

uitate specifica materiae subtilis concludere liceat, et quānnam ad aerem rationem habeat. Aer primo in tubo spatium 12. digit. Angl. replebat postea vero cum columna mercuriali comprimebatur altitudines aeris et mercurii superaffusi in sequenti tabula exhibentur, cuius prior columnā A indicat spatium aeris in tubo, et altera B altitudinem mercurii comprimentis aerem: hae vero in dīgitis Anglic. exprimuntur.

A	B	A	B	A	B
12	0	8	$\frac{1}{16}$	5	$41\frac{9}{16}$
$11\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{16}$	$7\frac{1}{2}$	$17\frac{15}{16}$	$4\frac{3}{4}$	45
11	$2\frac{1}{16}$	7	$21\frac{3}{16}$	$4\frac{1}{2}$	$48\frac{1}{16}$
$10\frac{1}{2}$	$4\frac{6}{16}$	$6\frac{1}{2}$	$25\frac{3}{16}$	$4\frac{1}{4}$	$53\frac{1}{16}$
10	$6\frac{3}{16}$	6	$29\frac{1}{16}$	4	$58\frac{1}{16}$
$9\frac{1}{2}$	$7\frac{14}{16}$	$5\frac{3}{4}$	$32\frac{3}{16}$	$3\frac{3}{4}$	$63\frac{15}{16}$
9	$10\frac{2}{16}$	$5\frac{1}{2}$	$34\frac{15}{16}$	$3\frac{1}{2}$	$71\frac{5}{16}$
$8\frac{1}{2}$	$12\frac{8}{16}$	$5\frac{1}{4}$	$37\frac{15}{16}$	$3\frac{1}{4}$	$78\frac{1}{16}$
				3	$88\frac{7}{16}$

XXII. Exhibet igitur haec tubula columnam mercuriale, quae pondere suo aerem in datum spatium redigit. Hoc vero pondus non solum aerem comprimit, sed ei insuper adiici debet pondus atmosphaerae, quod simul cum mercurio in aereum agit. Cum ergo summa ponderis mercurii et atmosphaerae ea sit, vis qua aer comprimitur, erit ea aequalis vi aeris elasticae Unde, si numeris tabulae B addatur altitudo mercurii ponderi atmosphaerae aequalis, quam Boyleus se $29\frac{1}{8}$ dig.

Y y 3 obser-

obseruasse scribit ; habebitur relatio inter densitates aeris et elasticitates. Sed cum ad istud accurate praestandum , exactissime altitudinem mercurii atmosphaeram aequilibrantis obseruasse necesse sit ; idque multis difficultatibus perturbetur : Mallem relicta hac altitudine $29\frac{1}{8}$ dig. ex experimentis ipsis , quum numerus eorum abunde sufficiat , deducere pondus atmosphaerae : Sed quia ad hoc accuratissima requiruntur experimenta , (in quibus praesentia haberi nequeunt) altitudinem $29\frac{1}{8}$ dig. retinere cogor.

XXIII. Sed densitates aeris sunt reciproce ut volumina eiusdem mastae aereae ; volumina vero columnae A exhibeantur: Ergo densitates erunt reciproce ut numeri columnae A. Si igitur densitas aeris in statu naturali ponatur , 1 ; reliquae densitates habebuntur si numerus 12 per reliquos respondentes numeros columnae A dividatur. Deinde elasticitates , ut vidimus , sunt ut numeri secundae columnae B aucti numero $29\frac{1}{8}$. Cum vero sit $f v = 6ni + ii$, atque ex obseruationibus allatis habeantur in quolibet casu et v et i , duae hae literae f et n determinari debent ; Id quod duobus quibusvis experimentis praestabitur. Sumatur ad literam f determinandam experimentum primum; Et erit $i = 1$, et $v = 29\frac{1}{8}$, vnde $29\frac{1}{8}f = 6n + 1$. Ergo $f = \frac{48n+8}{233}$. Quo valore in aequatione substituto habebitur $48nv + 8v = 1398ni + 233ii$, consequenter $n = \frac{8v - 233ii}{1398v - 233ii} = \frac{233ii - 8v}{1398v - 233ii}$.

XXIV. Ut hinc inueniatur n , oportet experimentorum allatorum aliquod adiungere. Sumatur igitur

tur ultimum , erit $i=12: 3=4$, et $v=88\frac{7}{16}+29\frac{1}{8}=117\frac{9}{16}$. Vnde $n=\frac{940\frac{1}{2}}{559\frac{1}{2}}=\frac{3728}{3643}=\frac{2787+5}{51}$ hinc erit $n=54, 64$. Ut pateat, quantum experimenta inter se conueniant vel disconueniant , accipiatur id quod aer in triplo minus spatium est redactum; Erit ergo $i=3$, et $v=58\frac{1}{2}+29\frac{2}{16}=87\frac{7}{8}$. Vnde habetur $n=\frac{2097}{4218}=\frac{103}{194}=\frac{139}{24}=58\frac{1}{2}$. At experimentum quo aer duplo tantum densior exhibetur paulo plus quam 17 pro valore ipsius n exhibit. Ex qua ingenti discrepantia intelligi potest, quam parum accurata haec sint experimenta: Id quod praeterea ex saltibus , qui in iis deprehenduntur, satis colligi potest.

XXV. Id autem ex reliquis experimentis calculum instituens obseruaui, inde quo minus aer erat compressus , eo minorem ipsius n valorem inuentum. Ex quo intelligi potest, reliquis in numeris saltibus neglectis, vel altitudinem mercurii atmosphaerae aequiponderantis non satis accurate esse assumtam, vel tubum nimis fuisse angustum , vt ne facillime quidem mercurius in eo descendere potuerit. Prius quidem vix credi potest: Sed posterius eo magis verisimile est, quod tanta insit difformitas experimentis : Vnde concludi debet, mercurium non successive , sed quasi per saltus descendisse. Eandem difformitatem in Boylei experimentis circa rarefactionem aeris aduertens, inde quicquam concludere nolui : sed plenius de densitate materiae subtilis iudicium tamdiu differam , donec vel accuratiora experimenta in manus veniant , vel ipsi instituere vacauerit.

Fig. III.

XXVI. *Vt autem clarius ob oculos ponatur, qua lege elasticitates aeris pro diuersis densitatibus crescant, tota res figura geometrica repraesentari potest. Neglectis pelliculis aqueis inuenta est aeris vis elastica proportionalis $\sqrt[3]{n^2 - \sqrt[3]{(n-i)^2}}$: Vnde patet, id per parabolam cubicalem secundam praestari posse. Sit AMC parabola cubicalis secunda super axe AB, in qua applicatae PM ferit in ratione subfesquic平ata abscissarum AP. Capiatur AB = n et erecta applicata BC, ducatur axi parallela CD. Dico si in ea capiatur CQ = i , applicatam correspondentem QM repraesentare vim aeris elasticam. Nam est QM = BC - PM. Sed BC est vt $\sqrt[3]{AB^2}$ seu $\sqrt[3]{n^2}$, et PM vt $\sqrt[3]{AP^2}$, seu, ob AP = AB - BP, (CQ) = $n-i$, erit PM vt $\sqrt[3]{(n-i)^2}$. Vt ergo sit QM vt $\sqrt[3]{n^2 - \sqrt[3]{(n-i)^2}}$ cui quantitati etiam, vt patet, proportionalis est vis aeris elastica.*

XXVII. *Si ea accipiatur regula, qua vires aeris elasticæ in ratione densitatum ponuntur; Ex hac figura patebit quantum ea a vero, si modo hanc theoriam veram appellare licet, aberret. Ducatur per puncta C et M recta CMR perpendicularē AD ex A in AB ductam secans in R; exprimet haec recta distantiis suis a CD vires elasticas secundum istam regulam aeris iuxta abscissas in linea CD condensato respondentes. Si igitur QM naturalem aeris vim elasticam denotet, regula ista in condensationibus iusto minorem exhibebit vim elasticam, at in rarefactionibus iusto maiorem, donec vtraque regula aeris infinite rarefacto elasticitatem nullam attribuat.*

XXVIII.

XXVIII. Si certo constaret ratio quam n ad i habet, quantum haec regula in quois casu a vero aberret, assignari posset: Nec non aeris vis elastica maxima AD, seu ratio AD : QM. Ob hunc defectum pono saltem $n : i = q : 1$. eritque $n = qi$, adeoque vis elastica QM erit $\sqrt[3]{q^2 i^2 - \sqrt[3]{(qi-i)^2}}$, diuidatur per $\sqrt[3]{i^2}$ vtpote constantem, erit vis elastica aeris naturalis $\sqrt[3]{q^2 - \sqrt[3]{(q-1)^2}}$. Assumatur quiuis alias condensationis gradus, quo densitas sit ad naturalem vt s ad 1. Erit ea densitas si , adeoque vis elastica respondens erit $\sqrt[3]{qi^2 - \sqrt[3]{(qi-si)^2}}$, erit ea igitur $\sqrt[3]{q^2 - \sqrt[3]{(q-s)^2}}$. Vnde sequitur, elasticitatem aeris naturalis esse ad elasticitatem aeris s vicibus densioris vt 1 ad $\frac{\sqrt[3]{q^2 - \sqrt[3]{(q-s)^2}}}{\sqrt[3]{q^2 - \sqrt[3]{(q-1)^2}}}$ sed secundum regulam vulgarem oportere esse vt 1 ad s , si $s = q$ tum erit DR = q QM, et AD = $\frac{\sqrt[3]{q^2}}{\sqrt[3]{q^2 - \sqrt[3]{(q-1)^2}}}$ QM. Quia vero q valde est magnum respectu 1, erit $\sqrt[3]{q^2 - \sqrt[3]{(q-1)^2}} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{q}$; erit itaque AD = $\frac{3}{2} q$ QM. Regula ergo ea plus dimidio nunquam a vero aberrare potest.

XXIX. Cognita pro quois condensationis gradu aeris elasticitate, poterit inde inueniri quanta esse debeat aeris densitas in data quacunque altitudine. Cum enim aer naturalis comprimatur a pondere aeris superincumbentis, necesse est, vt, quo altius ascendatur, aer ob imminutum ibi atmosphaerae pondus rarius fiat. Nam

Tom. II.

Zz

vbi-

Fig. IV. vbiue eousque aer dilatatur , quoad pressio aequalis fit eius elasticitati. Sit igitur curua BMV scala densitatum aeris, cuius nimirum applicatae PM exprimant aeris densitates in altitudinibus P. Sit A is locus , quo densitas aeris est maxima , adeoque vbi $AB=n$. Accipiat locus quicunque P, cuius altitudo AP super A dicatur x ; densitas vero ibi seu $PM=y$, erit ibi aeris vis elastica vt $\sqrt[3]{n^2 - V(n-y)^2}$, cui proportionalis esse debet pressio ab aere superiore PT orta. Pressiones autem sunt vt densitates et altitudines coniunctim : Quamobrem erit pressio aeris superioris vt area MPTV i. e. vt $-sydx$. Est itaque $afydx = \sqrt[3]{n^2 - V(n-y)^2}$, adeoque $aydx = \frac{2dy}{\sqrt[3]{n-y}}$; vnde $adx = \frac{2dy}{3y\sqrt[3]{n-y}}$ seu positio $a = \frac{2}{3}$, erit $dx = \frac{dy}{y\sqrt[3]{n-y}}$ quae hoc modo integrari debet , vt posito $x=0$, y fiat $=n$.

XXX. Si fiat $n=y$ erit tum dx infinites maius quam dy , ergo tangens in B parallela erit axi verticali AT. Propterea haec curua alicubi punctum flexus contrarii habere videtur ; id quod hoc modo inuenietur. Quia est $dx = \frac{dy}{y\sqrt[3]{n-y}}$; erit $dy = ydx\sqrt[3]{n-y}$. Assumto dx pro constante , erit $ddy = dydx\sqrt[3]{n-y} - \frac{1}{3}ydx dy$ $(n-y)^{-\frac{2}{3}} = 0$. Vnde $3n - 3y = y$. Consequenter $y = \frac{3}{4}n$. Quam ob rem punctum flexus contrarii eo erit loco, quod densitas aeris est ad maximam vt 3 ad 4. Appli-
cetur

cetur igitur $CD = \frac{3}{4} AB$, erit in punto D punctum flexus contrarii. Est deinde subtangens huius curuae $\frac{y dx}{dy}$
 $\frac{1}{\sqrt[3]{(n-y)}}$. Vnde colligitur si y fuerit respectu ipsius n val-

de paruum, tum esse subtangentem constantem; Ut adeo
 hoc in casu haec curua cum logarithmica confundatur.

XXXI. Potest quidem aequatio pro ista curua
 $dx = \frac{dy}{y \sqrt[3]{(n-y)}}$ ad quadraturam circuli et logarithmos re-
 duci: sed inde multo difficilior enascitur eius curuae
 constructio, quam si per quadraturas construatur. Desi-
 gnet igitur AMC parabolam cubicalem secundam, vt in Fig. V.
 fig. 3. sitque $CD = n$. Assumatur aeris densitas quae-
 uis in CD, puta CQ, ponaturque $CQ = y$. Cuius appli-
 cata respondens QM erit $\sqrt[3]{n^2 - V(n-y)^2}$, cui proportiona-
 lis accipi $-sydx$ debet. Dicatur QM, z , breuitatis ergo: erit
 que $-ydx = dz$ et $dx = \frac{-dz}{y}$, atque $x = \int_{y_0}^{-z} \frac{dz}{y}$. Ducatur
 PM, quae erit y , et in ea producta, si opus est, capia-
 tur PN = $\frac{1}{y}$, erit area PBEN = $\int_{y_0}^{-z} \frac{dz}{y}$. Quapropter in
 MQ prolongata accipiatur QL, quae sit vt area PBEN.
 Erit punctum L in curua quaesita. Est enim in ea, ducta
 LH, CH = LQ = $\int_{y_0}^{-z} \frac{dz}{y} = x$, et HL = CQ = y . Hoc igitur
 modo curua DLV determinabitur.

XXXII. Quae hucusque aeris proprietates ex
 theoria exposita deriuatae sunt, eae nihil absoluti in se
 continent, sed tantum rationem dant, secundum quam elas-
 ticitas aeris pro diversis densitatibus, humiditatibus
 et materiae subtilis celeritatibus existimari debeat. Ve-

Zz 2 rum

Fig. VI. rum nunc absoluti quid tradam altitudinem columnae mercurialis determinaturus, quam datus aereus globulus sustinere valet. Sit itaque AB diameter horizontalis bullulae aereae, de qua intelligi debent, quae §. 14. inventa sunt. Incumbat ei columna mercurialis ABED altitudinis $AD = f$, quae tanta sit, ut in aequilibrio consistat cum vi, quam bullula habet, sese expandendi. Haec autem columna in singulis bullulae punctis perpendiculariter agit in eius superficiem, idque vi, quae est ut altitudo columnae f , et basis seu superficies bullulae, quam premit, atque gravitas specifica coniunctim. Cum autem semidiameter AC sit $= a$; erit circulus maximus bullulae $\frac{\pi aa}{2}$, adeoque semisuperficies eius $= \pi aa$, quae est basis, quae a columna mercuriali premitur. Expri-
matur porro gravitas specifica mercurii, respectu habitu ad reliquas gravitates specificas, litera r , erit pressio, quam columna mercurialis in bullulam exercet $= \pi aarf$.

XXXIII. Haec autem pressio destrui debet pres-
sione a vi centrifuga materiae subtilis orta, quae etiam in singula superficie puncta aequaliter agit. Quamob-
rem vis, qua vis centrifuga in haemisphaerium agit, idque extendere annitur, aequalis esse debet vi comprimenti columnae mercurialis. Vis autem ea est dimidium vis elaticae totius bullulae, cuius aequale pondus §. 14. in-
uentum est, $\frac{2\pi nkaa}{\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2}} [V(m-i+pi-pm+pn)^2 -$
 $V(m-i-pm+pn)^2]$; huius ergo dimidio aequari debet pondus columnae mercurialis $\pi aarf$. Vnde sequens e-
nasci-

$$\begin{aligned} \text{nascitur aequatio : } & r f^{\frac{3}{2}} (m - p m + p n)^2 = n k \\ & [V(m-i+pi-pm+pn)^2 - V(m-i-pm+pn)^2] \text{ seu } f = \frac{n k}{r} \\ & \left(V\left(\frac{m-i+pi-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2 - V\left(\frac{m-i-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2 \right). \end{aligned}$$

XXXIV. Ut haec aequatio tractatu facilior euadat saltem pro naturali aeris statu, pono i admodum paruum respectu n ; et propterea erit $V(m-i+pi-pm+pn)^2 = V(m-pm+pn)^2 + \frac{2(pi-i)}{3\sqrt{m-pm+pn}}$. Atque eodem modo $V(m-i-pm+pn)^2 = V(m-pm+pn)^2 - \frac{2i}{3\sqrt{m-pm+pn}}$. Quibus valoribus substitutis, orietur haec aequatio $rf(m-pm+pn) = \frac{2pnik}{3r}$, vnde $f = \frac{2pnik}{3r(m-pm+pn)}$. Sed si ponatur humiditas in aere euanescens, erit $p=1$. Tum igitur erit $f = \frac{2ik}{3}$. Si autem acr vaporibus fuerit infectus p eo minor erit vnitate, quo plus vaporum in aere hospitatur; ponatur itaque hoc in casu $p=1-q$, erit $f = \frac{2nik(1-q)}{3r(qm+n(1-q))} = \frac{2ik}{3r} - \frac{2qnik}{3r(qm+n(1-q))} = \frac{2ik}{3r}(1 - \frac{qm}{qm+n(1-q)})$.

XXXV. Cum autem f indicet altitudinem columnae mercurialis in aequilibrio consistens, exprimet eadem litera f altitudinem mercurii in barometro. Ex inventa igitur aequatione, datis velocitate materiae subtilis in bullulis gyranter, aeris et materiae subtilis grauitatis specificis, atque quantitate aquae in aere versantis, inueniri poterit altitudo mercurii in barometro. Nam r grauitas specifica mercurii, vt et m grauitas specifica aquae aliunde iam constant. Percurrat itaque casus,

quibus mercurius ascendere, et quibus descendere debet; vt inde pateat, quid in aere acciderit et ascendentem et descendente mercurio in barometro. Ad hoc cum tantum ratione opus sit, negligo factorem $\frac{2}{3}r$ tanquam constantem, eritque f vt $ik(1 - \frac{qm}{qm+n(1-q)})$.

XXXVI. Hinc igitur consequitur manente facto, ik mercurium in barometro ascendere decrescente fractione $\frac{qm}{qm+n(1-q)}$. Haec vero fractio crescente q etiam crescit, decrescente vero q decrescit: Nam crescente q elemento dq , fractio crescat elemento $\frac{mndq}{(qm+n(1-q))^2}$. Quamobrem manente facto ik mercurius in barometro ascendere decrescente aeris humiditate; ea vero aucta mercurius descendere debebit. Atque hanc puto esse rationem, cur ascensus mercurii in barometro plerumque coelum serenum, descensus vero pluuiam aduersumque tempestatem praenunciet: Illo enim casu aer maximam partem a vaporibus vacuus est, hoc vero iis magis infectus.

XXXVII. Possunt quidem aliae concurrere rationes, ob quas mercurius ascendere vel descendere queat immutata vaporum quantitate: Quando scilicet factum ik crescit vel decrescit. Sed fortasse hoc factum sensibiliter neque crescere neque decrescere potest, propter alterutram literam eadem fere ratione auctam, qua altera diminuitur. Nam velocitas materiae subtilis, cuius quadratum est vt k , augmenta accipit aucto calore, sed idem calor aerem rarefacit, et quantitatem i minorem efficit, vt ergo factum ik quasi semper constans permaneat. Ex quo

quo intelligitur tute semper ascensum vel descensum mercurii diminutae vel auctae vaporum in aere versantium quantitati attribui posse, quanquam negari non possit et factum *ik* quodammodo effectum humiditatis et augere et diminuere posse.

XXXVIII. Neque vero hinc inferre licet, barometrum idem ac hygrometrum praestare oportere; cum et hoc humiditatem aeris monstrret. Sed id considerandum est, barometri effectus a tota aeris massa seu totius atmosphaerae statu pendere; hygrometri autem a solo aere id ambiente. Quamobrem altitudo mercurii in barometro incrementa accipit, si vniuersus aer a vaporibus liberatur, decrementa vero si is vaporibus impraeagnatur. Vnde colligitur hygrometrum fere summam siccitatem ostendere posse, cum altitudo mercurii minima sit; et similiter hygrometrum humiditatem indicare posse, cum mercurii summam altitudinem attigerit. Plus enim immensa aeris altitudo in barometrum valet, quam infima haec regio, quae sola in hygrometrum agit.

XXXIX. Si humiditas aeris euanescat, habetur iuxta §. 33. haec aequatio $f = \frac{2ik}{3r}$, quam n non ingreditur. Ex ea igitur cum experimentis ratio $r: i$, vt et altitudo f constet, inueni potest altitudo k , ex qua graue caddendo velocitatem acquirit ei, qua materia subtilis in bulbulis aeris gyratur, aequalem; Est enim $k = \frac{3rf}{2i}$. Circa quam expressionem obseruo eam excepto coefficiente numero $\frac{3}{2}$ eandem esse cum altitudine generante velocitatem, qua sonus per aerem promouetur, vt ergo velocitas materiae subtilis constantem habeat rationem ad velo-

velocitatem soni. Hic autem animum abducaere oportet humiditate aeris, qua accedente & alio modo exprimetur.

XL. Observatur altitudo mercurii in barometro a 22. usque ad 24. et ultra dig. Pedis Rhenani. Cum autem aerem a vaporibus vacuum supponam, attribuo literae f maximam, quam habere potest altitudinem, nempe 2460 scrup. Ped. Rhenani. Dein rationem r ad i pono ut 10000 ad 1. Quemadmodum ex experimentis de grauitate aeris concluditur. Quibus positis erit $k = \frac{30000 \cdot 2460}{2} = 36900$ pedibus. Adeoque materia subtilis velocitate mouetur tanta, quanta a graui ex altitudine 36900 ped. in vacuo descendente acquiritur. Si ergo haec materia sua velocitate in directum pergeret, conficeret uno minuto secundo 1518½ ped. Rhenanos.

XLI. Isto hanc dissertationem finio, cum desint accurata experimenta, ex quibus reliqua adhuc desiderata determinentur, et quibus Theoria haec plenius confirmetur. Incerta est adhuc ratio n ad i, seu quam habet grauitas specifica materiae subtilis ad grauitatem specificam aeris. Ad hanc vero inuestigandam accuratis experimentis ad id facientibus instituendis operam studiumque adhibeo. Quantitas autem n si haberetur, facile formulae inuentae ad praxin applicarentur; atque aliis idoneis instrumentis adhibendis quoquis tempore, quantum aquae in aere contineatur, assignari posset. Et forsitan multa insuper alia, ad quae, iis quae sufficiunt cognitis, quasi manu duceremur.

PLAN-

PLANTAE DVBLIAE
AD SVA GENERA RELATAE

Auct.

I. C. Buxbaum.

Primo loco sese hic offert *Iuncifolia sub aquis nascentes*, *Cochleariae capsulis Raj.* *Syn.* qui sat bene describit. Graminibus adnumeratur in Historia Oxoniensi, vbi est *Gramen Hibernicum*, *Thlaspios capsulis Scherardi*, et figura sine floribus proponitur, nec melior est figura quam dat Plukenetius. Ex nostra obseruatione est genuina Alyssi species, quae potest nuncupari *Alissum palustre folio Iunci*. Capsulae seminales accurate respondent capsulis *Alissi foliis Polygoni*, *caule nudo Tournef. Inst.* Reperitur sub aquis et extra aquas inter Scirpos minores et Stellarias vbi aquae stagnarunt. Quia in Morisonii et Plukenetii figuris flores omissi sunt, nos perfectiore dare allabramus vid. Tab. XXIII. fig. 1.

Androsaces speciebus addenda plantula, quam C. Bauhinus *Alaines* speciem fecit et in Prodromo nomine *Alaines verna* *Androsaces capitulis* describit. Parkinsonius equidem *Androsacen minimam* vocat, sed postea obliuioni haec planta tradita, omissa etiam est in Tournefortii Institutionibus. Iuuat itaque hanc suo loco restituere et *Androsacen montanam flore minore* appellare. Cre-Tom. II. Aaa scit

scit in montosis Naruae ripis et primo floret vere, vid.
fig. 2. Tab. XXIII.

Alia adhuc specie noua genus *Androsaces* augere,
ab hoc loco non erit alienum. Est illa *Androsace Africana*, *flore magno*. Descriptio quantum ex planta sicca colligere licet sequens est. Radix crassa, albicans,
recta in terram descendens. Folia subrotunda crenata,
leuiter incana, determinate nascentia, intra quae produc-
ent caules aliquot (duo in nostra) rotundi, virides, fo-
liis destituti, nisi superius vbi corolla foliorum exiguo-
rum non crenatorum cingit flores monopetalos quinque
fidos albos, vid. Tab. XXIII. fig. 3.

Plukenetius in *Phytographia* delineat folia plantae
quae vocatur *Ceratiae quodammodo affinis Benghalensis*,
foliis bigemellis, subrotundis siliquis admodum intortis et in
orbes circumflexis ex minis nigricantibus fructu rubro ma-
cula nigra insignito. Flores huius sunt pentapetali ex vi-
ridi albescentes, tribus petalis latioribus et duobus angu-
stioribus in orbem positis conflati, calyce pariter quin-
quesido sustentati, in spicam dispositi. Hinc non ine-
pte refertur ad Cristam Pauonis Breynii seu Poincianam
Tournef. Inst. Licet vim aliquam patiatur Tournefor-
tii definitio quatenus stamina et calycem adiungit, nu-
merosa equidem in nostra adest staminum congeries sed
non sicut incurva et multo breviora quam in Crista Pauo-
nis Breynii, inferius quoque calycis folium aduncum
deest. His adde, nostrae petala esse acuta manifeste ir-
regularia et colore diuersa, superius enim viride omnium
maximum, cuius lateralia duo paulo angustiora, inferiora
vero

vero angustissima. His non obstantibus huc referre maiori quam nouum fabricare genus, in primis quia Crista Pauonis nondum specierum multitudine laborat. Nostra Tab. XXIV. exhibet ramulum cum foliis minoribus (maiora enim angustia tabulae non capit) et siliquis iunioribus.

Equisetis accensuit Breynius plantam Africanam, quae ipsi *Equisetum iunceum nigrinodum Capitis bonae speci*, an *Arundinis gramineae aculeatae Alpini genus?* Pertinet potius ad Gramineum genus quam ad Equiseta quod iam suspicatus est Raius. Nostra figura profert ramum capitulis multis squamosis spadiceis onustum. Potest referri ad Scirpum cuius peculiare genus subalternum constituit. Dicatur itaque *Scirpus Africanus Equiseti foliis*. vid. Tab. XXV. Cum hoc idem videtur *Iuncus Africanus lignoso calamo ad nodos involucris nigris circumvoluto, panicula arundinacea ex Prom. bonae speci Pluk. Mant.* In hoc scirpo habes nodos.

DE PINGVEDINE , PROSTATA,
 MVSCVLIS , NERVIS , VASIS SANGVI-
 NEIS, CORPORIBVS NERVEO- SPONGIOSIS
 EORVMQVE SEPTO, BALANO PENIS, VRE-
 THRAE BVLBO, EIVSQVE CORPORE
 SPONGIOSO

Auct.

Io. Georg. Du Vernois.

M. Nov.
1727.

ANimaduersione non indignum est , quod in dissectionibus ordinariis, omnium membrorum vnum sit Genitale , cum quo minus familiares sunt suosque inde oculos et manus magis retrahunt Anatomici. Hocce fastidium fere vniuersale est, illud que cum ex descriptionibus datis, tum praesertim ex rerum optimarum obliuione obseruatu haud difficile est : Verum enim vero optandum esset , vt homines illud serio considerent , quia alias necesse est , vt quando praefatae partes vitiatae sunt , inter imperitorum manus poenas huant. Caeterum, prout viscerum in genere , sic Genitalium investigationes , euidentiae et certitudinis causa, non in homine solummodo , sed si fieri potest, in Elephanto et consimilibus animantibus insti-
 T.XXV! tui merentur : Namque Penis Elephantinus fere longitu-
Penis Ele- dinem hominis, et cruris crassitatem aequare visus est, quam-
phantinus. uis animal pudibundum sit, vti *Plinius* refert, aetasque Ele-
 phanti a me dissecti 11. annorum tantum fuerit : Ex
 quo

quo, praeter naturali forte causae tribendum esse videtur,
id quod a *Rao* in synopsi animalium p. 136 narratur.
Penis, inquit, in vagina reconditus minusculus, nec tan-,,
to animali proportionatus videbatur: verum vagina,,
discissa expositus et liber *Equino* maior erat, non tamen,,
longior.,, Quem ab osse pubis resectum ponderauimus
et mensurauius, 80. lb. Rusticas pendebat, nec non 6. *Eius pon-*
dus et lon-
ped. x. poll longus erat. Ex qua longitudine nec non
facili recurvatione versus caudam, quae breuissima est, i-
tem ex statu eiusdem pendulo, ex defectu testiculorum
et scroti, et denique ex rostro seu processu fere recurvo
in extremitate parteque superiore balani existente col-
ligi potest, Elephantum animal retromingens ac retro-
coiens esse. Figura eius conica est, cuius maior ambi-*Craffities,*
tus $2\frac{1}{2}$ ped. in medio $1\frac{1}{2}$ ped. in extremitate $10\frac{1}{2}$ poll. Pro-
pterea si non longissimus, saltem crassissimus omnium
Animalium Penis iure salutari potest. Ista crassities a
quibusnam partibus procedat, haud difficulter detracta
pelle inuestigari potest: Nam ipsius pellis litt. A A. cras-
sities quam exigua sit, hanc singularem praerogatiuam
in caeteris animantibus Pene gaudentibus rarius obserua-
tam in eo vidimus, nempe adipem seu membranam adi-*Pinguedi-*
posam, quae post separationem telae crassioris nerueae
ei superimpositae conspicua facta est, lit. BB. Hoc no-*nis copia.*
uo exemplo manifestum est, non impossibile esse, prout
Eruditissimi Anatomici contendunt, vt in pene aequo
ac aliis partibus pinguedo naturaliter colligatur, quod
adhuc magis ex eo elucet, quoniam in cute et scroto,
cum quo continua sunt penis inuolucra, praefata membra-

*Utilitas
pinguedi-
nis.*

na adiposa minime desideratur. Eum vero in finem forte data est, ut non solum crassitiem membra augeat, **ve-**rum etiam, ut contra vim frigoris, quam perferre minus valet, illud tutum fartumque conseruet, simulque siccitatem corporum neruo spongiosorum arceat.

Fig. I.

*Musculi
transuer-
sales.*

Tumorem et crassitiem Penis maximam efficere videntur massae carneae praegrandes, quae quum in parte tam superiore quam auersa, propter molem earum insignem valde conspicuae sunt, silentio minus praetermittendae sunt. In hac autem figura, quae dorsum penis repraesentat, soli musculi attollentes seu erectores litt. CC. et transuersales litt. DD. cum portione musculi bulbum vrethrae comprimentis litt. E. delineati sunt. Transuersalium non is erat situs et incessus, qualis vulgo traditur: Nam ad penis latus cum dextrum, tum sinistrum adeoque inter musculum bulbi comprimentem et attollentem seu Erectorem, instar duarum manuum aperatarum aut alarum oblique collocati, et prout distincte vidi, sine tendine, fere a suo principio, corporibus nervis toto suo progressu implantati erant, reliquo suo corpore, quod planum ac liberum erat, instar alae expanso. In medio eorum sedet.

Prostata.

Corpus globosum, durum, pomum maius aequans, uniusque nouem ponderans, quod siue situs, siue numeri, siue inuolucrorum, siue tandem substantiae ratione, pro vera Prostata haberi potest litt. F. Bulbo enim vrethrae contiguum, pauloque altius supra eum et musculum vrethrae comprimentem situm est, ubi prostatae fedes ordinaria inuenitur. Deinde illud Prostatae etiam satis

fatis conuenit , vt tunicis admodum crassis et validis inuestiatur : Extima , connexioni cum vrethra et corporibus nerueo spongiosis in'eruiens tendinea aut neruea visa est litt. *a* eique ex quadam arteria huc tendente plurima vas*a* sanguinea, speciesque corporis spongiosi intertexta sunt. Post hanc capsulam, musculus concavus admodumque crassus , qui in tres facile partes secatur , totum praefatum corpus inuestit litt. *bb*. Vtraque enim facie antica et postica, scutum crassum carneum instar Zonae conspicuum est , cuius fibrae tam exteriores quam interiores in obliquum ductae et decussatae, verticem mediumque prostatae circumambiunt, et tantum non ad eius partem inferiorem perueniunt. Ad utrumque latus apposita et annexa est massa carnea, triangularis figurae, eiusdem crassitiei, quae a summo vertice ad imum usque, assumta tereti figura descendit , ac infra prostatam , pone vrethram in praememoratam capsulam tendineam vtraque simul inferi videtur. Postquam tres hae fasciae remotae sunt , mollis et pulposa substantia, quae tenui membranula tota obducta est, in conspectum venit , haecque rursus non male ad naturam prostatae referri posse videtur. Verum quoad intimam eius structuram, etsi propter amplitudinem res facilis appareat, longo tamen tempore opus fuit , antequam aliquid effatu dignum acquirerem asseueraremque ut verum. In parte igitur postica, duo spatia parenchymate intermedio seiu*n*ta , profunda, ad imum usque descendantia, ac *Duo sinus* in parte sua ampliore digiti minoris apicem admittentia, *profundi* clare et distincte conspectui oblata sunt , etsi talia in figu-

ris

Inuolucra et corpus spongiosum exterum prostatae.

Eius tem interior substantia et structura.

Duo sinus profundi.

ris, et scriptis anatomicis inconspicua sint. **I**stos sinus ex membrana firma, lucida, albuginea efformatos, cum ductu Higinoriano in testiculis non inepte comparare licet. Horum autem sinuum ope id assecutus sum, ut nunc parenchima praefatis sinibus circumfusum paulo clarus cernebam, quam alias ante illorum notitiam solebam : Post quam enim iniecta sufficienti aquae copia, materia intus contenta rite expurgata fuisset, quoties aerem impellebam, perspicue obseruabam, illud nihil aliud esse, quam cellularum seu cauernularum lit. cc. multiplicem congeriem, ex variis pelliculis tenuissimis, vario foraminum genere perforatis, efformatam eaque lege dispositam, vt per foramina singularia in sinibus excavata, humor per totam cellularum congeriem effusus, in praememoratos sinus delabi, vel e converso, per eosdem iniectus in omnes cellulas diffundi possit, prout aliquoties obseruauit.

*Pelliculae
cellulas ef-
formantes*

*Cellula-
rum si-
num que-
vus.*

*Quil sit
substantia
pelliculis
superex-
tensa?*

Porro citatarum pellicularum vnam vel alteram propius examinanti, quaedam substantia veluti sub rubra nubecula pelliculis superextensa apparuit, a qua color instar carnis in tota compage excitatur. Sed impossibile mihi fuit, inuitis omnibus meis artificiis, perfectiorem eius rei cognitionem assequi ; Suspiciari saltem cum ex colore, tum ex succo in cellulis contento, tum ex ductibus excretoriis fas est, opificium esse secretioni aptum, hoc est, ex vasis sanguinem vehentibus constans, de caetero valde occultum et impenetrabile, prout omnia huius generis organa esse, si mentiri non volumus, ingenue fatendum est. Quod ductus excretorios attinet, grauis nunc difficultas sece offert, quae dubitare fecit, an

vera

vera prostata , aut aliud glandosum corpus , an *Dubitatio
circa hanc
glandulam.*
vero aggregatum ex *Cowperi* glandulis dicen-
dum sit , quoniam notum est , in iis animanti-
bus , quae prostatam obtinent , in ea vrethrae parte
cui agglutinata est , plures breuissimas fistulas aream ef-
formantes sociatim aperiri. E conuerso , duo solum-
modo emissaria ad vtrumque latus vrethrae inter hanc et *Eius duo
emissaria.*
bulbum descendantia , (quorum sinistrum dextro paulo
longius est) stylum aeneum maiorem admittentia con-
spicua sunt : Ad haec , verumontani in hoc loco absen-
tia : diligens sed frustranea cum aliarum , tum *Cow-
peri* glandularum inuestigatio: item duo vesiculis semina-
libus subiecta et contigua globosa corpora , quae forte
prostatae vices replent , difficultatem supradictam ad-
augere videntur. Propterea , an glandularum *Cowperi*
melius quam prostatae idaea hac in parte congruat nec
ne,in dubio relinquitur.

Vltimo circa huius glandulae in medio muscularum *Hanc mu-
sculi trans-
uersalia* positum arbitrari fas est , in illa actione *sculi trans-
uersales
compre-
munt.*
qua hi musculi inflati penem retrahunt , pressionem quo-
que laterum praefatae glandulae effici , sine praeiudicio
tamen illius potentiae , quam inuolucra muscularia ei su-
perextensim immediate exercent.

Muscularum alterum , omnium maximum par , in *Musculi
Penem at-
tollentes.*
dorso penis conspicuum est litt. CC. Singuli enim bra-
chii humani crassitatem facile aequantes , postquam me
diante ligamento crasso neruo litt. G anterius ligati
sunt , praegrandem massam efformant , qua dimidia mem-
bri longitudo coniecta est . Toto praefato spatio non
Tom. II. B b b aliter

aliter ac duo cylindri parte anteriore connexi, posteriore autem liberi, absque connexione cum corporibus nerueis Peni tam laxe incumbunt, ut soluto eorum ligamento, pondere et grauitate sua deorsum rapiantur ac diuellantur, prout in figura cernitur. Abhinc praediti ventres subito aliam figuram assumunt: Nam ex crassulorum

Horum musculorum tendines in unum unti so et per amplio corpore subito intermittente, gracilis tendo instar pollicis crassus exit, ac postquam aliquot

" pollicum spatio vterque progressus est, unus tendo ex duobus conflatur, isque per medium dorsi, (sicuti vrethra per oppositae partis medium), rectilineo cursu ad extre-
mum usque progrediens tumorem excitat non abs-

Canali nerueo inclusi. milem tumoris vrethrae, qui in auersa parte esse solet. litt. H. Ne ex sede sua dimoueatur, semicanalis ner-
veus crassissimus e corporum nerueo-spongiosorum fibris

transuersis in arcum ab uno latere in aliud reflexis con-
textus factus est, ad tendinem praememoratum in alio se-
micanali minus profundo superdorsum penis excavato
firmius continentum, quia talis rectitudo ad motum ge-
nitalis omnino necessaria videtur. Prioris semicanalis
principium denotatur litt. I.

Eorum atque quantum sit? Ex hacce descriptione euidens est, quod si in homine aliisque animantibus musculorum erectorum litt. CC. constitutio huicce conformis est, actio compri-
mendi vas a Viris solertissimis excogitata satis infirmo
talo nitatur, non solum quia ad illam compressionem
duorum musculorum combinatae vires excessivae ac pe-
riculosae videntur, quum unius vis sola sufficiat; verum
etiam, quia tempore quo accidit, tensio a sanguine disten-
dente

dente facta , iam adest , quae proprie *cei* vera causa compressionis praedictae vasorum , propter auctam membra conuexitatem et duritatem , potius quam muscularum actionem , considerari debet : Comprimatur enim quantacunque vi manus penis flaccidus ad osa pubis , flacciditatem conseruabit , prout experientia testatur . Quare concludendum est , quoties sanguinis intra penis corpora neruo-spongiosa influxus originatur , tunc temporis solos neruos in vasa imperium exercere , prout ex structurae intuitu manifestum est , a quorum proinde robore virilitas , quae vulgo signum sanitatis vocatur , vnicē dependet . Musculi ergo eum in finem solummodo conditi videntur , vt impedian ne membra sanguine aestuante inebriatum vacillet , magisque versus vnam partem quam versus alteram inclinet .

Tertium vulgo dictum par muscularum , in penis auersa seu posteriore parte qua muscularum vrethram comprimentium sedes constitui solet , specie praegrandis massae in conspectum venit Litt . Eaque quantum discernere potui , ex gemino musculo haud conflata est , sicuti de aliis animantibus hactenus traditum est ; Verum singularem videtur constituere musculum azygon , qui ephippio aut fornici per amplio similis dimidiā penis longitudinem contegens , in scissuram terminatur , qua canalis vrethrae sub eo latitans , deposito bulbo , egreditur , iterque suum versus extremitatem penis absolvit . Bulbus itaque vrethrae in praefati musculi sinu , inter hunc et corpora neruo-spongiosa veluti detentus ac incarceratus iacet , eoque prout consideranti patet , speciali instituto

*E' usd.
musculi a-
gio*

vt quando canalis vrethrae vna cum bulbo per contractionem praedicti musculi proprius ad memorata corpora neruæo - spongiosa vrgetur , eiaculationes praeterlabentium liquorum fortius velociusque peragantur , ad quas seu amplitudinis longitudinisque viae , seu liquorum seminalium causa , valida vis necessaria erat : quae vt cognoscatur , modum implantationis ductumque fibrarum respectu bulbi considerare oportet : Arcus enim pene efformant , qui bulbum amplexi , mox filamentorum coerulescentium specie , cum cortice neruæo - spongiosorum corporum similibus fibris in longum ductis contexto sic committuntur , vt fibrarum inuicem permixtarum discrimen agnoscere amplius haud liceat .

Infertio

Nerui.

Accuratam neruorum penem Elephanti stipantium inuestigationem abs me institutam fuisse , absque iactantia effari licet , ad quam rara ac infrequens eorundem magnitudo , quæ instar minoris digitierat , simulque huius Nevrologiae in homine aliisq; animantibus desideratae vsus generalis me sollicitauit . Propter easdem causas , in ea statim re solutione fui , in maximis Elephanti neruis omnem lapidem mouendi , ad cognoscendum artificium , quo admiranda haec motuum sensuumque instrumenta , in quorum inuestigatione Anatome parum honoris aut lucri adhuc reportauit , a natura compaginata sint . Videre itaque et distincte percipere licuit , neruum filorum in circulum dispositorum fasciculum esse , quorum copia post eorum euolutionem e quidem parua , singulorum e contra crassities nec non intermixta pinguedo ad molem nerui conflandam iusta ac

com-

commensurata visa est. Pinguedinem neruo inclusam esse dixi, quod sane a nemine antea dictum fuisse recordor : E contrario , ei infensam ac noxiā esse, sensumque infringere Anatomici timere videntur. Interim veram pinguedinem eamque copiosam obseruui , postquam exterius inuolucrum Nerui, quo laxe inuestitur detractum esset : Singula enim filamenta, pinguedinis manifesto folio seu lamina obducta in conspectum veniunt, in qua exilium simul vasculorum sanguineorum capillamenta distincte oculis apparent. Atque ex eo euidens est, quam late se extendat pinguedinis visus , quae eum forte in finem praefatis filis seu chordis nerueis circumfusa est, vt eorum flexilitatem incorruptam seruet , vimque adeo impulsuum vehementiorum non nihil retundat, praecebatque, ne vnum filamentum ab altero comprimatur. Caeterum inter praedicta filamenta singularia , quorum numerus in eiusdem magnitudinis neruis semper aequalis obseruatus est, scil. (9. aut 10.) commercium instar duorum communicantium per transuersos funiculos intercedit , qui ex uno filamento enati , alteri implantantur, hacque ratione prope canalicularis structurae, (adeoque influxus) idaeam subministrant.

Nunc de trium insignium neruorum super dorso penis deambulantium dispositione admodum curiosa et a nemine indicata, dicendum est. Et quidem , quod praeformatum numerum ternarium attinet, diu fateor , in ea opinione fui, ac si duo tantum nerui, unus super dextrum, alter super sinistrum corpus nerueo spongiosum , peni proprii essent, prout apud Anatomicos receptum est :

Bbb 3

Sed

*Pinguedo
in neruis
detecta.*

*Eiusdem
viss.*

*Tres insi-
gnes nerui.*

sed reuera tres esse postliminio cognoui ; Praeter duos enim praememoratos, qui super corpora nerueo spongiosa in societate vasorum sanguineorum incedunt, vnum aequum insignis in medio prope iunctionem seu concursum praefatorum corporum iacet, qui demum in conspectum venit, postquam vasa sanguinea superincubentia dimota, pelliculaeque plurimae inuolentes separatae sunt. Ab isto prius incipiam, quoniam sine pari ac plane singularis est. Is igitur spatio praedicto, quod inter duo penis corpora spongiosa medium est, inclusus, assumta loco teretis quam initio habet, figura plana, super tegumentum nerueum seu corticem penis, a quo vix distingui potest, mirum in modum diffunditur, adeo ut spatium quatuor digitos latum iuxta totam penis longitudinem, solo huius nerui contextu repletum sit. Istius contextus, ac reliquarum rerum quae in Tab. XXVI. fig. I. continentur, aspectu, partim naturae magnificentiam, partim delineatorem *Schwenterum** depraedicare fas est.

Eius enim solertiae ac humauitati debemus, quod partium Elephanti internarum figuram optimas ac elegantissimas totidem tabulis comprehensas nunc possideamus : Figuram propterea praememorati contextus aspicere solummodo oportet, in qua id clare expressum est, quod alias vix ac ne vix describi potest. Haud enim absimilis est telis acu pictis seu texturis artificiosis, incredibili fibrarum neruearum implexu constans, ac ea tenacitate

*Is p. t.
Medici
Castrensis
officio or-
natus ad
mare Cas-
pium dis-
cessit. **

**Viri Cl. et amicissimi Iob. Georg- Gmelin, M. D. diligentia colla-
taque opera toto disfectionis tempore hic quoque laudandu est.

tate corporibus cauernosis agglutinatus , vt auelli ne- *A & volu-*
queat. Caeterum tum praefatum situm seu agglutinatio- *ptatem*
nem , tum prodigiosam foecunditatem vnius nerui , tum *praeceps*
funicularum contextum haud satis admiratus sum , quo-
niam dum caeteri neruorum funiculi mox mox de-
scribendi , in gratiam hinc muscularum , hinc vasorum
sanguineorum dispositi sunt , hic otiosi ac sibi relicti ad
voluptatem solummodo destinati esse videntur. Ast ne
errorem committam , id quoque repraesentandum est ,
quod per huius contextus cancellos seu foramina va-
sa plurima sanguinea ex truncis dorso penis incumbenti-
bus emissas , ac corpus vtrumque cauernosum perforantia
transeant , vnde non male actio coniici potest , qua san-
guinis transitus in veneris actu determinari debet.

De duobus aliis neruis lateraliter super corpora ca- *Caeteri*
uernosa in societate magnorum vasorum incidentibus res *Nerui pe-*
clara ac euidentis est , si rem (vti decet) contemplari *nis.*
placeat : Vtrique corpori neruoso-spongioso , praeter v-
nam arteriam duasque venas , neruus maximus cum praedictis
vasis intra vnum fasciculum comprehensus incum-
bit , in qua societate recta deorsum , ad penis extremi-
tatem vsque descendens , singularem respectu vasorum
dispositionem , quae pariter haec tenus ignota fuit , obtinere
visus est : Nam toto itinere , tum e dextro quam sinistro
neruo , frequentes propagines abscedunt , quarum nonnullae
ad contextum medium supra memoratum tendentes
in eo terminantur , aliae ad truncum recurrentes , eum-
que amplexae compedes efformant , quibus vasa socia
veluti carcere includuntur , ac in potestatem suam re-
ducun-

*Tensionis
penis cau-
sa assigna-
tur.*

ducuntur. Quamobrem non ab alia causa, quam ab ista mirabili neruorum dispositione, totum negotium penis tensionem spectans, pendere manifestum est, absque musculorum attollentium seu erectorum ministerio, vt supra diximus: Nam certum est, quod in hoc casu Natura vasa sanguinea intra nerueos cancellos minime inclusisset, in quibus necesse est, vt ad quoslibet neruorum invigorationes cedant, hincque via sanguinis in corporibus nerueo spongiosis, per vicissitudines libera vel impedita sit, prout huius luculentum exemplum in Liene prostat, de cuius vsu aliquando loquendi occasio dabitur.

*Neruorum
interior
structura
inquiritur.*

Hisce, quae de Neruis ad penem spectantibus, pro instituti ratione exarata sunt, relationem obseruationum Nevrologicarum; seu structurae neruorum intimae, prout in maximis Elephanti neruis, ea constanter mihi oblata est, descriptionem subiungo, eamque, vt spero, errori minus obnoxiam, quia moles filamentorum insignis (selegi enim talia, quae diametro sesquilineae aut lineac respondebant) simulque probitas et praestantia instrumentorum opticorum perspecta fuit. Attentio quoque maxima fuit, vt in extractione aut resectione et expositione talium filamentorum, quam minima vis inferretur. Nerui tum crudi, tum longa maceratione emollii et laxati in hunc usum vocati. At in utrisque phaenomena eadem obseruata sunt. 1. Effluxum succi aut humoris. 2. Tenuissima filula. 3. Tubulosam structuram obseruare nunquam valui, et si sectiones optimae fuerint. 4. Neruo transuersim secto superficiem medullarem obseruaui, in qua inaequalitas veluti plu-

plurium globulorum seu capitulorum conspicua fuit, quae vestigia seu indicia plicarum mihi visa sunt. 5. In nervo per longum secto, substantiam pariter medullarem obseruavi, in qua striae subtilissimae, ceu fibrae, parallelae, in longum ductae ac parum protuberantes visae, quas pro totidem etiam plicis habeo. 6. Vtique modo dissectum filamentum, postquam sub microscopio qua licuit celeritate, expansum fuit, ecce nihil aliud oblatum est, quam tela seu membranula pellucida, sed ineffabili miraeque tenuitatis et pulchritudinis pictura ramulorum nigricantium infinitis modis concurrentium ornata, ac plurimum similitudinis obtinens cum corticali substantia cerebri, vel cum pia matre ad Rhuychii methodum praeparata. Quamobrem cogitatio incidit, an ne nervus ex membranis puris, aut laminis medullaribus complicatis solummodo constet, prout in oculo pisces Xyphiae a Summo Malpighio * obseruatum esse legimus. Rogauit autem, huius Academiae Socios, Viros amicissimos Georgium Bernhardum Bulffingerum Physices Professorem, ac Fridericum Christoph. Maierum, vt cum observando, tum delineando mecum facere vellent. Illius haec de phaenomenis verba sunt.

Poscis, Vir Eximie, vt ego, quid viderimus, exponam. Gratiior Anatomicis Tua erit descriptio, propior scil. recepto inter ipsos sermoni, et aptior conclusionibus. Sed intelligo, quid velis? Meum est enarrare visa, quibus vti Tuum erit. Contineo me intra historiam, si bina exceperis vocabula, quae tanquam aliena carcere Rhe-

Tom. II.

Ccc

tori-

*An Nervus
ex puris
membranis
aut laminis
medullarib.
compositus
sit? Con-
iectura.*

* Epist. de Cerebro ad Carol. Fracassatum.

torico () conclusi. Nihil dico, nisi quod uterque vidimus; nam et ultima, quae singulariter hic enuncio, ex eo tempore iuncti saepe spectauimus Res omnis hic credit. Subiecta est Microscopis fibra nerui Elephantini, ad Diaphragma pertinentis: Eam tunica omni nudatam sine vtri auxilio spectator oculus homogeneam iudicauerat.

1. In transuersa fibrae sectione, cuius diameter unam facile lineam aequabat, superficies mediocriter aucta albicans apparuit vniuersa. Quando minoribus vitris amplius atque amplius expansam vidiimus, tractibus obscurioribus tanquam maculis passim interstincta fuit, latioribus illis et strictioribus, varieque inflexis, nec ad sensum cohaerentibus. Area omnis reliqua videbatur limpida, infinitis farcta corpusculis nitescentibus, et roris in medium colores spargentibus. Papillularum illa, vel bullularum dimidia sui parte prominentium, speciem referebant, visa in extremitatibus sectionis, aut in fibrillis ab reliqua mole distractis. Erant autem eiusmodi puncta micantia ipsis etiam, quos dixi, tractibus obscurioribus passim, sed rarius, intexta. (Quare etiam) usu venit, ut pro varia superficie aduersus solem expositione magis aut minus obscurae, latiores etiam aut graciliores viderentur maculae memoratae.

2. Secta in longitudinem fibra, iisdemque obiecta microscopis, simplicibus quidem sed bonis, vidiimus utique strias in longum porrectas obscuriores, quarum interstitia splendentibus, ut ante, corpusculis plenissima apparetur. Non istae multum a parallelismo abludebant: Sed distributae erant inaequaliter. Alicibi plures latiores-

que

que obscuri tractus , subtilissimis tantum lineolis micantibus , neque illis percōte continuis , distincti: Alibi ampliores erant nitidi , in quibus obscurores discernere līneas hac methodo non licuit.

Hactenus autem obuersa erat soli superficies , quam intuebamur. Postea in mentem venit , excusione et connexione horum tractuum melius perceptum iri , si inter solem et oculum tenuissimus fibrae orbiculus transuersim sectus interponeretur. Id utique egregium foret , scrivretque ad texturam nerui certius defniendam , si plures orbiculi se se inuicem excipientes microscopio examinarentur. Sed intercedit huic consilio fibrarum tenacitas , qua sit , ut sine multa structurae subtilissimae ofensa tales a nero cylindrus tenuissimos non facile liqueat rescindere. Placuit igitur , subtilem a fibra portiunculam cultelli acie , ut fieri tum potuit , separare , et vitro affixam suo glutine ad microscopium aptare compositum. Radios solares conuexa lens excipit , iisdemque collectis obiectam Soli particulam , quoties opus fuit , illustriorem reddidit.

3. Hic vero texturam apparere mirabilem , tractibus obscruisculis , per vniuersam portiunculam excurrentibus , et mirum in modum sibi implexis , formantibus insulas micantibus punctis resertissimas. Negabant lumini transitum obscuri tractus , nisi directum illud a sole veniret. Fines areolarum translucidarum , et obscurorum tractuum nitebant conspicui iridis coloribus ; plane ut fieri solet , cum res opacae soli expositae trans vitreum triangulare prisma spectantur. Posui ad latus parti-

culae prioris portiunculam membranae, qua nervus integratur. Erat haec vulgari oculo nigricans, in quam nihil licet distinguere. Beneficio collecti luminis, et subsidiorum oculi facies apparuit priori simillima, nisi quod micantium punctorum longe visa sit pauperior haec portiuncula.

- 4.** Denique repetitis tentaminibus, adhibitaque cura, ut secundum fibrae longitudinem abscederetur filum microscopio aptandum, licuit et hoc percipere; strias obscuriores, quales iuxta nerui longitudinem porrectas vidi mus n. 2. etiam inter se connecti aliis gracilioribus lateraliter discurrentibus, rete simul elegantissimum et inordinatissimum referentibus. Vtus sum microscopio, quod tenuis pili crassitatem adlineare latitudinem extendebat; neque tamen excedebat trachium obscuriorum latitudinis subtilis pilis speciem. Illud dici non potest, quanta micantia particularum copia apparuerit, et si filum hoc nerueum simplici oculotantum non exsuccum videretur. Ultimum hoc phaenomenon, prima vice, qua pluviuum tempus erat, ad candelae flammarum obseruauit. Nostri autem, quoties ad id sereno coelo post modum attendimus, id simile nobis et constans apparuisse. Hactenus Celeb. Büllslingerus.

Sanguinis et vasorum copia. Ea sanguinis tenacis copia Elephanti genitale inebrium ac infarctum deprehensum est, ut ex hoc solo iudicauerim de copia et magnitudine vasorum ad tantam vim humorum tam aduehendam quam resorbendam, prout etiam disiectio iniectione comprobavit. Praecipua autem cura fuit, veram inuestigandi huins partis angiologiam interiorem exterioremque: vasorum diuersas

fas species , communicationes , retia , excursiones per varias regiones penis , conformatio[n]emque internam externamque , quae omnia cum in homine , tum caeteris animantibus difficultioris indaginis esse compertum est . Totus penis , detractis solummodo inuolucris communibus , hoc est , cute , panniculo et membrana adiposa , in *Vasa extera* . Eorumque origo , numerus , divisiones .
 crate seu reticulo vasis innumeris per amplis incredibili artificio contextis exstructo , ac super vniuersum penem omnibus suis partibus instructum expanso tam stricte inclusus est , ut p[ro]ae ipso ad partes subiectas viam seu aditum inuenire impossibile sit . Hocce autem spectaculo nil pulchrius ac elegantius in hocce genere imaginari fas est . Cuius formatio talis mihi oblata fuit ; Ex vtroque balani latere eiusque spongiosa seu interiori substantia , tres quatuorue propagines , mediocris styli magnitudine , distinctae apparere incipiunt , quae mox prope balanum in duas insignes venas digito minimo aequales commutabantur . Haec itaque quatuor vasa , ad latera penis in distantia pollicis a se inuicem disposita , praefati reticuli firmamenta , et veluti quatuor angulares columnas , (quibus textura reliqua vascularis super totum penis ambitum expansa , interiecta et firmata est) , constituunt : Nonnisi vero ad certam altitudinem (fere dimidii pedis) tales trunci distincti manent , et a subtiliore interiecto rete eos dignoscere licet : Nam dum illud sursum ascendit , adeo increscit tum numerus , tum magnitudo , tum varietas directionum vasorum reticularium , ut quatuor praefati trunci evanescant , discernique amplius minime queant , id quod circa medium penis praecipue obser-

vatur. Illa enim regione , nihil quam ductuum duplo maiorum crassiorumque sese mutuo subingredientium variasque cancellorum angulorumue species seu figurae circa totum penis ambitum efformantium contextum cerne-re licet,in quo hoc solummodo discrimen oblatum est,quod anteriori parte praefati contextus, facies amplior ac pleni-or simulque robustior, quam posterior appareat. Ei-dem porro magno contextui , alii particulares subtilioresque ac minus ampli inter panniculum et adipem consipi-cui , ex venis cutis integumentorumque omnium conflati, continuati sunt ; Verbo, tanta reticulorum frequen-tia passim occurrit, vt finem seu metam eorum inuenire vix liceat, quam tandem feliciter in medio muscularum erectorum, vbi tendinea aponeurosis litt. G. eos iungit, assecuti sumus : Nam eo loco vena magna versus pu-bem incedens, quam ideo pudendam seu externam appellare libet , conspicua est ; In hanc manifesto , ex vtroque latere, nonnullas propagines ex descripto reticulo emis-sas , (quae NB. contraetiores sunt iis, quae dictum reticu-lum efformant), ascendere ac terminari vidimus. Ut haecce insertio , simulque contextus, quem descripsimus, vniuersus, vno istu oculi, ac momento in oculum caderet, prope balanum flatum venae inieci, qui cito omnes ple-xus et reticula venosa haec tenus descripta peruidens, per dictam venam magnam redire visus est. Neque hoc tantum sufficit : Verum adhuc quaedam alia , circa eun-dem contextum haud incuriosa mihi oblata sunt : Nam communicationem admodum euidentem obseruavi, inter praedictum contextum externum internumque , quoties

*Præter
magnum
Rete penem
incluens,
plurus ple-
xus mino-
res.*

*Vena ma-
gna, ex o-
mnism ra-
morum con-
curlu for-
mata.*

in-

insufflatio facta est, qua per vtrumque simul flatus penetravit, idque gemina via, vna per duplicem venae ramum, qui anterius e reticulo abscedens, ambagioso itinere musculos erectores hederae instar amplexus, posterius tendit, seseque penem inter et musculos praefatos insinuans, in sinum maximum vasorum internorum definit. Altera, per ambas itidem propagines, quae mox iunctae breuiori cursu, per medium muscularum erectorum ad praedicta vasa interna penetrant, venamque peramplam, de qua mox, efformant. Ulterius in diuersis In quibusdam locis fabrica venarum um singularis, a communi structura venarum admodum recedens oblatata est, (prout fig. 2. ostendit), cuius infra occasione venarum internarum simili structura gaudentium, dicensi locus erit. Postremo, singulae venae in contextu memorato contentae, peculiari capsula adiposo-tendinea crassiore, admodum sensibili inuestitae sunt, qua fit, ut crassorum et ampliorum quam reuera sunt, apparentiam vasorum obtineant. Quamobrem, in subsidium forte venarum data sunt praefata inuolucra, vt partim calorem foueant, partim vim ac resistentiam ipsarum augeant, sicuti in pluribus casibus id necessarium ac utilissimum esse cendum est.

In vasis internis profundius sitis, ad quae nunc trans-eundum est, talem capsulam (quae autem neruea visa est:) ua. Item talia venarum receptacula, prouti citata fig. ostendit, contemplari fas fuit, distractis tantummodo muscularis erectoribus super ea positis, sicuti in fig. 1.litt.CC. designatur.

Venis

Communi-
cacio inter
vasa exter-
na et inter-
na.

In quibus-
dam locis
fabrica ve-
narum um sin-
gularis.

Capsula
adiposo-
tendinea.

Eiusque
vasis.

*Defcri-
ptio singu-
laris fabri-
cae in ve-
nis obser-
uatae.*

Venis itaque, nonnullis locis, machinamentum (quod admodum insolens visum) a natura concessum est, forte ad sanguinem ex variis penis regionibus refluum, magna que proinde varietate notatum probe miscendum; vel compendii gratia etiam, ad ingentis vasorum multitudinis reductionem; ac forte aliquando in talem visum, ut turgentibus illis conceptaculis, tumor ardorque penis diutius perseueret, prout eius actioni conuenit. Est vero crassa et ampla cuitas circularis seu foccus ad verticilli figuram accedens, quoniam in medio foramen pisso aequale vtrinque apertum habet fig. 2 litt. a. Cum ramis bbbb ei annexis, prout delineatus est, consideratus, potius figuram quadratam mentitur. Eorum maximus facta dimensione 14. lin. latus, 11. longus erat. Alios atque praecipue illos, qui in venis exterioribus conspicui sunt, tum figurae quae magis oblonga est, tum amplitudinis respectu, cum priore comparare haud licet. Cuitatis (cuius diameter 4. linear.) nuda ac polita superficies valuulis chordisque destituta visa est: Neque ad ostium rimatorum vllae valuulae obliquatae sunt: Verum solummodo, in notabili ab hacce cuitate distantia, in venis supra et infra eam incidentibus apparere incipiunt, eaeque coniugatae seu duplices, fancibusque suis versus pubem obuersae sunt. Omnes portero venae internae, hisce receptaculis cum supra tum infra alligatae sunt, eorumque ope in duos veluti ordines distinguuntur. Quae infra sunt, illae communi venarum exteriorum ortu, scil. ex vtroque balani latere progenitae, ductus vtrinque binos arteriae neruoque antea de-

*Venae in-
ternae du-
plicis or-
dinis.*

descripto associatos, ac nerueo-spongiosis corporibus secundum eorum longitudinem suffultos, efformant L. KK, atque hi toto illo itinere, non solum longam seriem ductuum verticalium breuium, per interualla aequalia e corporum praefatorum interiori substantia emergentium, sub forma pectinis annexam habent L. dddd: (Haud enim aliter, quam praedicta forma, venae, arteriae Lit. LL. nerui, L. MMM penis substantiam subeunt: excepta arteria bulbi propria, quae secundum eius longitudinem incedit.) Verum etiam frequentissimis ramificationibus inosculationibusque, contextum admiratione dignissimum, qui supra praedictos venarum, arteriarum, neruorumque trunco*s* retis instar expansus est, efformant, I. NNNN. cuius retis plures propagines, (praeter duas principales venas supramemoratas, L. KK. secundum penis longitudinem ad utrumque latus tendinis muscularum erectorum communis incedentes), hinc dextrorum, hinc sinistrorum, in illis receptaculis seu cavitatibus L. OO earumque parte inferiore desinunt. Ex altera, hoc est, ex superiore eorundem receptaculoru*m* parte, nouae ac ampliores venae exsurgentes, (quarum prope pubem abscissarum orificia trium fere linearum diametrum aequalibant) paucum, quod de itinere versus pubem restat, sex distinctis truncis 1. 2. 3. 4. 5. 6. (tribus nempe in unoquoque latere) absoluunt. Quam ob rem, quum iuxta sex venas tresque neruos haec tenus descriptos, 7. 8. 9. duae adhuc arteriae, 10. 11. (quarum probe pubem abscissarum diameter fere 2. linear. est,) simul hic conspicuae sint, quae de caetero, ad instar venarum sociarum, toto itinere per intervalla aequidistantia verticale*s* propagines L. eee. cor-

*Nonea-
rum trunci,
verum ra-
mi latera-
les penem
subeunt.*

*Rete vena-
rum ele-
gantissimum*

*Sex earum
trunci pro-
pe pubem.*

*Duae arte-
riæ earum-
que incessus
interior ex-
teriorve.*

poribus nerueo -spongiosis suppeditando , formam pe-
ctinis aut rastri aemulantur , transmissis quoque ad partes vi-
cinas, ad integumenta, quibusdam ramis litt. *fffff*. Quum-
que etiam exterioribus penis partibus vena insignis pag.
390. bulboq; duae arteriae totidemque venae propriae 15.
concessae sint , summa omnium truncorum arteriosorum,
venosorum , nerueorumque peni priorum , sedecim
erit, de quibus iam satis.

*Summa
omnium
truncorum.*

T. XXVI.

Fig. 3.

*Penis tex-
tura inte-
rior.*

Eiusque

*Capsula
describitur.*

*Incertum,
an vasa
lymphatica
a sint.*

Hicce perlustratis, nunc penis textura interior, pro-
vt haec per institutas quam plurimas ac diuturnas inuestiga-
tiones mihi oblata fuit, exponenda est. Penis capsula est Litt.
AA conicae figurae, septo perpendiculari L. BBB. secundum
totam longitudinem aequaliter diuisa, admodum crassa
ac coriacea¹, duo corpora spongiosa L. CC. proprio inuo-
lucro tenui cincta continens. Singulorum diameter tres pol-
lices facile aequabat , praeter crassitatem capsulae , quae
digito minori aequalis erat. Quare haec , cum praefatae
crassitiei, tum soliditatis causa , ligni duritiem habebat.
In eo striae eminentes, rectae ac parallelae, coeruleae, se-
cundum longitudinem excurrentes extus conspicuae sunt,
quibus tota propemodum superficies quasi contexta ac
nonnihil exasperata est : sed adhuc aliae transuersales fi-
brae pariter coerulescentes iisdem intermixtae ac inter-
textae in locis obseruantur, ubi tendines muscularum ter-
minari videntur , quibus mutuo sese intersecantibus ac
contortis validissima textura efficitur. Vascula et-
iam subtilissima , pellucida , conspicua sunt (an
lymphatica an sanguinea incertum), quae facto cir-
cuitu , in venam versus dorsum excurrentem finire
visa sunt. Atque ex talibus fibris tenacissimis textura
totius

totius capsulae composita est, in qua maiorem solummodo fibrarum implexum resistentiamque inueni. Parte capsulae interna seu concava, duplex cavitas, ad locandum utrumque corpus nerueo-spongiosum, conspiciua est, eaeque septo insigni adeo interstinctae sunt, ut *v-* partita est. num corpus ab altero penitus seclusum ac sequestratum sit, amboque corpora facile extrahere sic liceat, vt septum immotum ac integrum maneat, pateatque evidenter partem esse, a dictis corporibus perfecte distinctam ac independentem, etsi de coetero ad eorum functionem forte adiuuandam haud inutilis sit, prout ex eiusdem haud vulgari textura hariolari licet.

Etenim, cum ex imatum supra *Septum a corporibus distinctum est.*ma internaque capsulae facie L.D.D.D, secundum totam longitudinem penis, chordarum insignium, sibi contiguarum, spatiaque *aaaaaa* inter se ferelinquentium series, vna ascendens, altera descendens exoritur L. E.E.E.E, quae facto breui itinere, propius iunctae ac inuicem confusae, in vnum planum solidum L. F.F.F. coeunt, quod veluti in serra aut pectine utring; dentato, vel lamina utraque parte in multas lacinias diuisa, intermedium est, cuius propterea crassities dupla est chordarum, duarum nimirum linearum. Originem structuramque intersepti praefatam consideranti, haud credibile amplius appareat, tanta industria constructum fuisse, vt simplicis ac immobilis parietis seu claustrum vices ageret: Ad hoc, opus ne est tot fissuris laciniisque seu divisionibus, a chordarum distantia seu diuulsione oriundis? An ad cruoris commatum reciprocum, ab vna cavitate in alteram? Hunc vero sine tali fabrica Auctores explicant, quamquam v-

sum huncce ego haud penitus improbem, caeteris solummodo, quae hic simul obseruanda sunt, probe explicatis. Nam tales vtrique ac tam grandes fissurae secundum totam longitudinem, ad solum sanguinis transitum minime necessariae videntur, quia per pauciora ac *Nouis vissus
septi expo-
nitur.* minora foramina transitus non solum, sed vis etiam ac soliditas maior septi fuisset. Quare per hasce amplas fissuras, ceu ianuas apertas, substantiam corporum spongiosorum transmitti, ab uno latere in aliud adeoque confundi, distincte obseruabam *bb*, quod reuera annotatione dignissimum est: Propterea, hisce visis, credere incipio, huicce intersepto vim aliam nobiliorem insitam esse, qua supramemoratae chordae veluti totidem lacerti, aliquando contrahi ac proximiores effici, spatiaque iis interiecta arctari possunt, quod toties euenire necesse est, quoties substantia spongiosa, quae praefatis spatiis inclusa est, alteraque toti septo contigua, compressione opus habet. Ad huius compressionis necessitatem ostendendam, texturam cauernosam, ac per eam effusam sanguinis copiam vnaque difficultatem regressus duntaxat considerare oportet. Ad haec, si structura corporum spongiosorum probe perspecta sit, tunc demum res clara ac eidens fiet.

*Corpora
spongiosa
penis.* Ad praefata igitur corpora spongiosa L.CC.fig. 1.PP. nunc transeundum est. Ac primo involucro membranaceo-musculari, quod cum capsula, cui agglutinatum est, haud confondere oportet, utrumq; inuestitum est L.GG: In eo etiam illud pro raro ac insolentenendum est, quod fibris carneis proprium rubentibus totum conflatum sit, haec adeo conspicuae factae

*Vtriusque
involutrum
proprium
carnosum.*

factae sunt , vt musculum cauum referrent : De cætero, quamvis in earum contextu quaedam confusio apparuerit, haud difficile tamen fuit , sub fibris exterioribus, quas ideo remouere oportet obliquum incessum , vt potentiam ac insigniorem animaduertere. Itaque, hancce *Eiusdem* texturam non ad simplex velamentum , destinatam esse, *alio*, evidentissimum est ; siquidem crassissimus cortex capsulae ad id sufficiens videtur : Quid ergo ? Ad comprimentum, sollicitandum vel agitandum contextum spongiosum, cuius, vt et sanguinis in eo contenti, moles magna , vires tamen paruae sunt: Etsi enim extra huncce contextum viarum libertas integra esset , sanguis tamen intus effusus, sola cellularum vi, (prout e spongiae vel arundinis indicae exemplo patet) non exprimetur , verum in stagnationis periculo versabitur.

Actionem cellularum, e quibus tota compages *cellularum* porum spongiorum conflata est, vna concurrere, non *actio*. quidem simplici conjectura , sed ex diligentia earum perillustratione mihi compertum est. Etenim, in amputata ac probe mundata orbiculari penis particula, totam compaginem perlustrare fas fuit. (Si e contrario, secundum longitudinem dissectio facta sit, priorem cellularum faciem ac regularitatem videre amplius non licebat.) Eae, veluti in spongia aut arundine indica , sine certo ordine figurave haud dispositae sunt. Nam, sicuti primae cellularum areae seu orbis, sic omnium reliquarum sequentium per totam longitudinem conformatio non dissimilis appetet ; adeoque cauernulae fortuito ac sine consilio haud factae sunt, quemadmodum in homine ac aliis An-

Cellularum mantibus Anatomici tradunt; Verum singulae cellulae, *strutctura* apum alveolis similes, e tenuissima membranula conflatae, pentagoni figuram induunt, sicque inuicem iunctae et adaptatae, nexus contextumque admirabilem efformant. Eodem tempore, inter praedictas cellulas, quae-dam filamenta carnea, (Warthono* carnis glandulosae species) in conspectum veniunt, exterioribus supra memoratis fibris in superficie extima conspicuis melius comparanda, quam vasis sanguineis in rete expansis: Vi-sum enim est, inter exteriores interioresque fibras aliquem nexus ac cognationem intercedere, nihilque adeo obstarre, quo minus hisce aequa ac illis communem actionem tribuamus. Vtraque ergo actione cum externa, tum interna opus fuit, ad euitandum, ne sub tanta mole sanguinis, cellularum compages cito enerueretur. Fal-lor, an non propter eandem causam illud quoque, de quo nunc dicturus sum, ab animantium Conditore fabri-catum sit. Transuersi vel obliqui, ac vna extremitate septo, altera capsulae annexi funiculi seu chordae, (qua-les supra in descriptione septi, ac in lamella penis *Balaenae* a Ruy schio delineatae sunt,) per interualla, secundum totam longitudinem penis, praeformatum cellularum con-textum peruidunt litt. HH. fig. 1. gg. Harum maxime, seu crassiores in ima seu posteriore penis facie, numero ter-no aut quaterno locatae sunt, minores seu tenuiores e-contra medium occupant. Magno insuper robore seu firmitate, constant. Ad haec, tota cellularum compa-ge, iis instar uvarum racemi adhaerente, inuestitae et obses-sae, istam molem vt et vasorum transuersos ramos vel-

* Adenograph. Cap. 3.

vti sustinere videntur. Has tamen ad fulciendum solummodo conditas esse minus credibile est : Verum illud potius agere videntur , vt spongiosum contextum comprimendo , cruem exprimant , ac intra venas cogendo , penem ab onere citius liberent.

*Chorlarum
at�io.*

Restat , vt in praefato contextu , venarum arteriarumque statum , prout is mihi oblatus fuit , postremo exponam. Postquam itaque , in dorso penis , duplex series venarum arteriarumque (vid. pag. 393.) ad contextum interiore spectantium formata est , (quarum alterutra breibus verticalibusque instar clavorum , secundum totam penis longitudinem , vtrinque peni insixis ramis , constat,) omnes distinctis et transuersum digitum a se inuicem distantibus foraminibus , penis cauitatem ingressi in ea terminantur ; Arterias primo , ad introitum usque cauitatis persequenti , nihil aliud conspectui oblatum est , quam iidem rami subito extenuati , ac in capillamenta mox visum effugientia conuersi , quibus propterea usque ad eorum insertionem cognoscendis , labor frustra insumtus fuit : Quare iniectiones etiam institutae sunt , quarum vero successus haud prosperior fuit ; Liquor enim cito quidem cellulas peruadebat plurimas ; sed per vias obscuras ac inconspicuas ; Vice versa , viae reducentes adeo patulae et manifestae , et a structura venarum consueta adeo discrepantes visae sunt , vt ad suscipiendas mutationes easque subitas quibus obnoxius est , nouum veluti circuitus genus in pene a natura constitutum sit , prout ex tota eius fabrica fere perspicuum est . Arteriae singulari capsula inclusae , lacertis similes sunt . E contra

*Vasorum
conformatio
ne in celu
lis.*

*Distincta
pro singu
lis vasis
foramina.
Arteriae
mox dispa
rent.*

*Earum ca
psula.*

loco

Venae cri- loco venarum ductus solummodo cribiformes, forami-
nibus vndique pertusi ac veluti erosi, a cellulis aegre di-
scriminandi, extra capsulam penis, venarum (seu bre-
vium tubolorum verticalium) formam induentes, in con-
spectum veniunt. Caeterum, in homine, praefata vena-
rum penis proprietas, iam pridem inuentore *Ruyssch* de-
tecta fuit, hodie autem obliuioni data est. vid. *Ruyssch*. Obs.
Anat. Chirurg. pag. 134. Act. Erud. A. 1691. p. 69.
Ioh. Guil. Pauli Annot. ad *Ioh. van Horne Microcosm.*
Lips. A. 1707. excus. p. 243 not. 11 *Godof Bergeri Phys.*
Med. pag. 453. „ Sanguis per penem et glandem re-
„dux non per minutissimos ramulos, neque per corpus
„reticulare ut loquitur *Malpighius* regreditur, sed per ve-
„narum patentia et visibilia oscula aut foramina. Ve-
„nae enim per penem distributae, si non omnes, saltem
„tot, quot vñquam offendit, sunt poris magnis et visi-
„bilibus foraminibus pertusae cribri instar, que emadmo-
„dum quoque in vena splenica vitulina (vid. fig. 83. et
„84.) conspicitur, quod nunquam hactenus obseruatum
„esse putem. Eiusmodi venarum perforatio in causa
„est, quod sanguis per penem redux citissime possit a pe-
„ne regredi, pene momento flaccescente. Addo, quod
An ob san- quum in pene tum in splene, (in quo venarum similis fa-
guinis cras- brica a *Malpighio* detecta) sanguis forte e cellulis refluxus
sitiem. paulo crassior et pigrior factus fit, magna opus sit mea-
tuum libertate, ne is praeternaturalem moram ageret.

Antequam historiae penis finem imponam, de altera
quoque penis parte essentiali, prout in Elephanto fere habet,
postremo commemorandum est. Huic itaque parti, quae
verti-

verticem penis imum, totamque vrethram ambit, tria successiue nomina tanquam rebus distinctis imposita sunt, bulbus, corpus spongiosum minus, et balanus, etsi nihil aliud sit, quam homogenea continuataque substantia, crassitatem figuramq; variam ab imo vsque ad summum fere penis assumens. Ea exterius, prope finem penis, (vbi extenuatio magna in eo obseruatur) ad manu transuersae longitudinem *Descriptio Balani.* incipiens, fig. 1.L. QQQ. penis solam posteriorem faciem adeoque semicircumferentiam inuoluit, anterius vero L. R. deficit, cuius locum tendo musculorum erectorum L. H. occupat.) Dumque tumore suo, praefata substantia aequalitatem penis amissam restituit, neque commissura aut interstitium, quale vulgo inter glandem et penem obseruatur, apparet, falsam opinionem glandem deficere, prima fronte ante dissectionem cutis (qua perinde ac reliquum penis corpus obiectus est L S) excitat. Caeterum supra iam annotatum fuit pag. 389. eidem substantiae, quum se se expandere incipit, vasorum in dorso penis incedentium extremitates annexas ac implantatas, eaque proinde cum peni, tum balano communia esse. Quare *Cum pene commer- cium.* etiam, quin hisce partibus commercium concessum sit, haud dubitaui, non obstante eo, quod distincta quoque ac propria huic substantiae vasa insint, quae autem vrethrae magis inseruire visa sunt. Porro nerui omnes, quotquot iuxta longitudinem penis descendunt (vid. pag. 383.) hic terminantur: Propterea, seu papillarum neruearum, seu villorum a Celeb. Anatomicis Ruyschii et *Causa sen- sus acutissimi.* Cowpero inuentorum, adeoque sensus, qui in hac parte viuidissimus est, causa perspicua est. Ad haec non im-

*Causa com-
pagis stri-
erioris.*

probabile est , quod propter eandem causam textura in hoc loco, seu in balano strictior sit, quam in alio, et si fibrae quoque tendinis supramemorati Lit. H. ad idem efficiendum idoneae esse possint.

*Corpus
spongiosum
minus vre-
thrae.*

Eiusque

Quum sic origo seu formatio mihi satis patueret, obseruabam ulterius, quod in spatio , quod pro transitu vrinæ et feminis perforatum est, substantia consimilis, ceu appendix , ad totam vrethram inuoluendam , abscedat, quae propterea cum praecedente continuum corpus efficit . Attamen distincto nomine, corpus spongiosum minus , ab Anatomicis vocatur , quod eam vrethrae partem, (quae inter musculum comprimentem ac balanum inclusa est), instar diploe complectitur ; soloque proinde crassitie ac firmitatis gradu discrepat. Postquam enim praefatum musculum attingit , eandem crassitatem amplius non habet. Haec pars Bulbus appellata est, qui tamen nihil aliud est , quam extremitas corporis spongiosi sub musculo comprimente vrethrae, cui firmiter agglutinatur incedens, prout pag. 379. indicaui, sed in molem maximam tumefacta. Eius namque circumferentia 7. poll. et 2. lin. Longitudo 14. poll. aequabat. Figura eius instar magnae pastinaceae : Vrethram inter fig. 1. litt. V. (cui ope vasorum sanguineorum annexitur), ac praefatum musculum Litt. E. situs , lateraliterque ad penein fibrarum suarum ope firmatus est. Texturam denique , quod attinet , exterius capsula fibris carneis obliquis contexta, totum bulbum ac reliquum corpus spongiosum vrethrae inuestit Interius vero, textura cellularum, (prout in penis capsula), sed subtiliorum in conspicuum

*Bulbus.
Fig. I.
Lit. T.
Fig. III.
Lit. I.*

et

Textura.

etum venit , quam vtrinque peruidit arteria vsque ad extremitatem excurrens, vrethrae magis quam bulbo inseruiens , sicuti vascula numerosissima ad eam transmissa testantur. Plurima porro venarum peregregui ramuli bulbo egressi, vtrinque venam N. 15. sub bulbo ad latus vrethrac incedentem efformant. . . .

DE FRICTIONIBVS CORPORVM SOLIDORVM

Specimen

G. B. Bülfingeri.

I.

Non admodum diu est , quod de *Frictionibus M. Sept.*, corporum solidorum coeperunt aliqui Erudi-^{1727.} torum commentari. Vulgares libelli statici exponunt machinarum vires sepositis frictionibus. Inde fit , vt magnos in praxi errores committant, qui potentiarum effectus ex solis illis regulis computant : non sane , quod fallat inutilis theoria , sed quod eandem minus completam applicari ad naturam contigat. Pretium igitur est operae, quae cognoscendis corporum frictionibus impenditur. Inter Gallos *Amontonius* experimenta instituit , et conclusiones intulit nonnullas : quas diuerso instituto examinarunt *La Hirius* et

Eee 2

Paren-

PARENTIUS. In Germania de machinarum frictione non nihil differuit *Leonth. Christoph. Sturmius*: et *Leibnitius* diuidendo frictionum classes aliqua rectius distinxit. Laudabilis omnium cura fuit, cui nihil detractum volo. Dabo hoc loco accessionum aliquid; si non alio, saltim eo fine, vt refricetur Eruditis frictionum memoria.

II. Non est incongrua methodus examinandi frictionum momenta, quam *Amontonius* sequitur in *Memo-riis Acad. Scient. Paris.* ad A. 1699. Placet tamen varietatis caussa nouam adiungere, in quam incidi, cum plana inclinata tractarem alio consilio. Habebit vnaquaeque suos prae altera usus in diuersis casibus; dantur enim, quibus nostra videtur esse simplicior; dantur etiam, quibus altera est commodior. Vtor autem planis inclinatis, quibus imposita vel quiescunt vel mouentur corpora, pro magnitudine eleuationis plani, et potentiarum corporibus applicatarum.

III. Inueniatur experimento saepius instituto angulus eleuationis ille, quo dato corpus piano impositum tantum non descendit; descensurum, si non nihil augeatur; et haesurum cum aliqua aduersus descensum renitentia, si minuatur angulus eleuationis. Dicatur autem hic angulus breuitatis caussa *angulus quietis*. Eoque invento sic inferatur:

Vti sinus totus ad finum rectum anguli quietis; ita pondus absolutum est ad frictionem eius super planum ad praedictum angulum inclinato.

Atque iterum:

Vti sinus totus ad tangentem anguli quietis; ita pon-

pondus absolutum est ad frictionem eius super plano horizontali, cum trahitur in directione ad horizontem parallela.

IV. *Demonstratio propositionis utriusque perfaci- Fig. I.
lis est. Sit AB, ab, planum inclinatum: BAC, bac an-*
gulus quietis memoratus, et corporis P, p, pondus ab-
solutum = a: Erit per ordinarias de plano perfecte polito
demonstrationes, vis corporis P nitens ad descensum in
directione plano parallela $\frac{a \cdot DG}{DF} - \frac{a \cdot BC}{AB}$; quodsi enim pon-
deri P in directione memorata GDH opponatur aliud
pondus Q = $\frac{a \cdot BC}{AB}$, quiescat corpus P super plano polito.
Iam in plano aspero in vicem ponderis Q subit frictio
ponderis P, faciens aequilibrium cum vi deorsum niten-
te. Itaque frictio corporis P = $\frac{a \cdot BC}{AB}$, hoc est, vti sinus
totus AB, ad sinum rectum anguli elevationis BC; ita
pondus absolutum a, ad frictionem corporis super pla-
no ad dictum angulum inclinato, quod erat primum.

V. *Iam vt idem transferatur ad planum horizontale: debet grauitas naturalis secundum lineam DF ni-*
tens reduci ad grauitatem fictitiam, quae agat secundum
directionem DE, vt adeo planum inclinatum AB sit il-
lius respectu horizontale: siue generaliter loquendo, vice
ponderis naturalis absoluti a debet considerari vis alia b,
qua corpus P ad planum AB apprimitur perpendiculariter. Hic notum est ex staticis, pondus illud vicarium,
siue vim appressionis b esse = $\frac{a \cdot DE}{DF} - \frac{a \cdot AC}{AB}$. Frictio au-
tem huius ponderis, cum trahitur in directione ad pla-

num AB parallela, modo inuenta est $= \frac{a \cdot BC}{AB}$. Adeoque pondus vicarium, sed absolutum b erit ad frictionem eius tanquam tracti super plano horizontali in directione ad planum parallela vti $\frac{a \cdot AC}{AB} : \frac{a \cdot BC}{AB} = AC : BC$, hoc est, pondus quocunque absolutum est ad frictionem eius horizontalem, vti sinus totus AC ad tangentem anguli quietis BC ; *quod erat secundum.*

VI. Possunt haec duo theorematum inferuire examini propositionum hactenus publice exhibitarum. *Amontonii* sententia est, ab aliis tamen non semel reuocata in dubium, quod 1. *frictiones* sint *pressionibus proportionales*; quod 2. aequentur tertiae parti pressionum; et quod 3. superficiei magnitudo frictionem ceteris paribus nec augeat, nec minuat. Possunt singulae hae propositiones examinari facile per plana nostra inclinata; et, si quae ab ludat a vero, emendari. Incipiamus a facillimis.

VII. In duobus, quos memoraui §. 4. et 5. casibus sunt vtique, ceteris omnibus paribus, frictiones proportionales pressionibus. Est frictio super piano inclinato $= \frac{a \cdot BC}{AB}$, et frictio super horizontali $= \frac{a \cdot PC}{AC}$, adeoque illa ad hanc $= AC : AB$, hoc est, vti pressio corporis P super planum hoc inclinatum ad pressionem eius super planum horizontale.

VIII. An id *de omni situ plani* vtcunque inclinati verum sit, manente corpore et piano eodem: ita experimentis definiri potest. Fingatur, frictiones esse pressionibus proportionales, et computetur, si angulus elevationis sit maior, quam qui §. 3. inuentus est, quantum pon-

pondus S requiratur, ad retinendum corpus P in quiete super plano inclinato; Sin minor fuerit angulus eleuationis, quantum pondus R requiratur ad hoc, ut corpus P tantum non deorsum trahatur super plano suo.

IX. Sit pressio ad frictionem $= m:n$. Pondus naturale absolutum $= a$. Sinus totus $= m$. Sinus rectus anguli eleuationis $= x$. Erit pressio corporis P in planum $= b = \frac{ax}{m} = \frac{a\sqrt{mm-xx}}{m}$ §. 5. adeoque frictio eius $= \frac{an\sqrt{mm-xx}}{mm}$. Haec frictio addita ponderi S debet aequaliter nisum corporis deorsum super plano. Hic nisus $= \frac{ax}{m}$ §. 4. igitur $S = \frac{ax}{m} - \frac{an\sqrt{mm-xx}}{mm}$. Ex aduerso pressio ponderis P deorsum ($= \frac{ax}{m}$) vna cum pondere R aequalatur frictioni corporis: itaque $R = \frac{an\sqrt{mm-xx}}{mm} - \frac{ax}{m}$.

X. Primum obtinet, quando x maius est valore formulae $\frac{nm}{\sqrt{mm+nn}}$: Secundum, quando x minus est. Cum vero $x = \frac{nm}{\sqrt{mm+nn}}$ evanescunt pondera S et R, manetque aequilibrium inter frictionem et nisum corporis deorsum: Inservitque haec formula, tum ad inueniendam ex dato angulo relationem frictionis ad pressionem, tum ad determinandum ex data hac relatione angulum quietis. Esto enim ex Amontonii sententia pressio ad frictionem, vti $3 : 1$. emerget $x = \frac{3}{\sqrt{10}} = 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1000}{1057}$. Igitur dicendum: vti sinus totus m , ad sinum rectum x ($= 3 : \frac{1000}{1057} = 3162 : 1000$) ita sinus totus tabularis 100000 ad sinum rectum eleuationis quae sitae, 31657, cui in tabulis respondet angulus 18. grad. 27. min. Sit porro ex sententia Parentii $m : n = 20 : 7$, erit

$$x =$$

Fig. III.

$$x = \frac{mm}{\sqrt{mm+nn}} = \frac{140}{\sqrt{449}} = \frac{140}{21.178}. \quad \text{Vnde fit } m:x = 20: \\ \frac{140}{21.178} = 423.78 : 140.00 = \text{sinus totus } 100.000 : \\ \text{sin. eleuationis quae sitae } 33036, \text{ cui in tabulis respondet} \\ \text{angulus } 19^{\circ} 17'.$$

XI. Si angulum hucusque mutauimus manente pondere, potest nunc *pondus mutari* manente angulo. Si enim frictiones sunt proportionales pressionibus: debet angulus quietis manere vnuis idemque, posita superficie eadem et aucto pondere absoluto. Manente enim angulo pressiones ad planum sunt proportionales ponderibus absolutis: sunt etiam nisu corporum, quibus descendere super piano conantur. Obvia haec sunt omnia: velim autem, ut in experimentis caueatur a circumstantiis alienis.

XII. Inserviet etiam haec methodus ad *comparanda* inuicem diuersi generis *corpora*. Eandem fere frictionem esse ferri, cupri, plumbi, ligni mutuo combinatorum, si axungia illinantur, annotat *Amontonius*. Id etiam examinari hac methodo potest, et cum et sine axungia: nimirum quaeritur, an idem sit pro omnibus angulus quietis?

XIII. Denique eadem anguli constantia requiritur pro corporibus homogeneis et aequaliter politis, aequae aut minus grauibus, *sed diuersa superficie extensio* gaudentibus; si ex vero dixit Vir Egregius, quod diuersa superficie extensio frictionem ceteris paribus nec augeat nec minuat. §. 6. Potest id tentari cum corporibus aequae grauibus: potest vero etiam cum inaequaliter grauibus

bus ob §. 11, modo fint homogenea, et aequaliter polita.

XIV. Notari etiam meretur, posse hac ratione inueniri relationem frictionum in motu *voluente*, et *radente*. Possunt enim super eodem plano inclinato successively poni corpora, quae voluendo se descendunt et quae radendo. Si enim pro vtroque casu inuenias angulum quietis: erit frictio corporis sese voluentis fig. 2. $= \frac{axbc}{ab}$ et corporis radentis fig. 1. $= \frac{a \cdot BC}{AB}$. Est igitur illa ad hanc, pro corporibus in experimento adhibitis $= bc \times AB : BC \times ab$ hoc est (propter $ab = AB$) $= bc : BC$, hoc est, vti sinus recti angularum quietis.

XV. Praeterea, posito frictiones esse pressionibus proportionales, inquiri potest, quantum requiratur *Pondus T* ad corpus *P* super plano suo sursum trahendum in directione plano parallela. Patet enim, pondus *T* debere nonnihil excedere corporis nisum deorsum, et frictionem eius super plano: proximus igitur ante ascensum hic casus est, quando $T = \text{frictioni et nisui simul sumtis}$, hoc est ex §. 9. cum $T = \frac{an\sqrt{(mm - xx)} + amx}{mm}$. Vnde de novo ex dato *T* et *x* definiri potest relatio frictionis ad pressionem; vel ex data relatione et angulo inueniri pondus *T*; vel ex data relatione et pondere *T* inueniri angulus eleuationis.

XVI. Habet autem haec consideratio *maximum* aliquod: differentiata enim solito more, et reducta aequatione per methodum de maximis et minimis prodit $x = \frac{mm}{\sqrt{(mm + nn)}}$ pro maxima vel minima sursum trahendi

difficultate. Sed maximam esse patet utique ex valorum substitutionibus. Sit enim ex. gr. $m:n=3:1$ ex §. 10. atque $x=\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn)}}$, vel $=\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn-1)}}$, vel $\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn+1)}}$ erit in primo casu difficultas $=\frac{\sqrt{10}}{3}$ ponderis absoluti; in secundo $=\frac{5}{3}$, in tertio $=\frac{9+\sqrt{2}}{3\sqrt{11}}$, qui uterque valor *primo* minor est.

XVII. Conuenit autem cum hac maxima ad sursum trahendum difficultate vis minima sustentans S, cuius hunc valorem deprehendimus §. 9. $S=\frac{amx-an\sqrt{(mm-xx)}}{mm}$

Haec enim formula differentiata, et reducta dat $\frac{dS}{dx}=\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn)}}$: vbi notandum est, adhibito signo *positivo*, quaestionem de pondere S motam statim transire in quaestionem alteram de pondere T ex eodem latere positam, adeoque non minimum aliquod, sed maximum inueniri, ut patet ex comparatione operationum pro paragrapho superiori, et praesenti. Adhibito autem signo *negativo*, primo quidem planum AB mutari in planum LAK, posita scil. CK $=-x=\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn)}}$, atque tum demum pondus S transire in alterum latus, et conuerti ibidem in pondus T2. id quod vel sine calculo ex ipsa quaestiones natura poterat erui. Dum enim $x=\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn)}}$, evanescit S; et si x fiat adhuc minus, fiet S negativum, hoc est conuertetur S in R super plano AB, donec etiam $x=0$, quo casu R aequatur toti ponderis frictioni horizontali; quod si autem porro x fiat negativum, sumendum infra AC, tum pondus R reuera transit in pondus T sphi antecedentis, sed ex latere prioris opposito pendulum.

Fig. IV.

XVIII.

XVIII. Destinavi hunc computum cautelae practicae , vt scilicet in ponderibus ope plani inclinati elevandis caueatur angulus , cuius sinus rectus $x = mm : \sqrt{mm + m}$; si sub arbitrio Artificis Mechanici sint vires trahentes , nec euitato hoc angulo maiores aliunde generentur molestiae. Evidem tantus prodiit pro motu radente hic angulus , vt nihil facile ab illo metuendum sit , nisi forte iis in casibus , quibus onera funis ope super trochleam ducti sursum trahere potentia debet. Iis igitur commodum est nosse , quod in hypothesi Amontoniana , qua $m : n = 3 : 1$, angulus maxima difficultatis sit 71. gr. 35. min. in Parentiana , qua $m : n = 20 : 7$, angulus fiat 70. gr. 44. min. Sin fuerit $m : n = 4 : 1$, vti postea memorabimus , emergat angulus 86. gr. 1. min.

XIX. Fatendum etiam , in praxi frictionum incommoda plurimum detrahere utilitati planorum inclinatorum , cum de motu agitur radente. Quodsi enim angulus eleuationis sit verbi gr. 10. grad. iam tum dimidium oneris trahere debet potentia eleuans in hypothesi Amontoniana , cum sine frictionibus nondum quinta pars requireretur. Cumque angulus est 50. grad. oneris eleuandi resistentia iam prope aequat pondus corporis absolutum , vt adeo , nisi aliae rationes accedant , praestet planum non adhibere , sed eleuare corpus perpendiculariter , quoties maiorem 50 gradibus angulum eleuationis circumstantiae deposcerent.

XX. Etsi autem in maiori angulo difficultas eleuationis ipsum pondus corporis absolutum supereret : In casu tamen necessitatis solatii loco esse potest , quod hic

ipse excessus nunquam ingens euadat. Si enim in formula generali qua $T = \frac{an\sqrt{(mm-xx)} + amx}{mm}$ substituatur pro x valor eius $= mm$: $V(mm+nn)$ emerget $T = aV(mm+nn)$: m . Adeoque in sententia Amontonii erit summa difficultas $= aV 10:3$ paulo maior pondere absoluto, habens se ad pondus absolutum a , vti ($V 10 = 3$, 163 ad $3,000$). Vnde excessus $= \frac{\sqrt{10} - \sqrt{9}}{3} = \frac{3.163 - 3.000}{3} = 0,054 = \frac{1}{18}$. In Parentiana autem fit $T = \frac{a\sqrt{449}}{20} = \frac{ax21.189}{20}$. Vnde $T:a = 21.189 : 20,000$ et excessus ipsius F super $a = \frac{1.189}{20} = 0.059 = \frac{1}{18}$ prox.

XXI. Patet etiam, quo minor fuerit n respectu ipsius m , hoc est frictio ratione pressionis, eo minorem esse hunc excessum. Et, si vel maxime frictionem velis magnam supponere, fingendo exempli gratia $n=m$, fore summam difficultatem ad pondus absolutum $= V 2:1 = 141:100$, vt adeo excessus non possit ad dimidium absoluti ponderis excrescere, nisi frictio sit ipsa pressione maior. Ceterum in hypothesi $n=m$, notari potest, quod summa ad eleuandum difficultas §. 16. cadat in ipsum angulum quietis §. 10. vbi aequilibrium est inter frictionem corporis, et eius nisum deorsum. Accidit vero utrumque, cum angulus eleuationis est semirectus.

XXII. Quicquid haec tenus dixi, pertinet ad motum radentem, et supponit, potentias, quae sursum aut deorsum trahunt pondera planis imposita, agere in directione plano parallela. Ad ceteros directionum casus extendere dicta non lubet, quoniam id nemini non facile est. De motu voluente nihil certum licuit definire

finire hactenus, instrumenti accuratioris defectu; quemadmodum et de radente per eandem caussam determinare omnia, vti destinaueram, nondum valeo.

XXIII. Vnum hoc licet de meis asserere tentaminibus: Cum super plano buxino, aut quercino, corpora examinarem varia; prismata eiusdem speciei lignea, quorum nec aspera basis erat, nec polita, sed sic satis glabra; eiusdemque generis orbes metallicos; cylindros item eburneos secundum longitudinem positos: eundem fere angulum quietis prodiisse, non obstante basium et ponderum differentia; nec mutatum, cum oleo corpora et plana inungerem, atque iterum probe abstergerem. Vnum me male habuit, quod omnes hi anguli inter 12. et 15. gradus caderent: adeoque frictio esset ad pressionem, vti 1 : 4, secus atque visum est Antecessoribus nostris.

XXIV. Nolim vero praecipitare sententiam, donec omne examen absoluero. Illi sequentem destinavi tabulam, quam ad hypotheses alias accommodare facilissimum est. Hic Amontonium secutus facio $m:n=3:1$, estque R §. 9. aequalis differentiae, quae prodit, cum Fig. III. sinus rectus aufertur a cosinu ducto in rationem $n:m$, S §. 9. aequalis differentiae, quae prodit, vbi cosinus ductus in rationem $n:m$, subducitur a sinu recto anguli: et T aequalis summae sinus recti, et cosinus ducti in rationem $n:m$, vt adeo facile sit, aut continuare tabulam, aut ad alias aptare frictionum hypotheses.

Tabula pro hypothesi frictionis Amon-
toniana , posito pondere absoluto
10000 partium.

Ang.	Eleuat.	Potentia R	Potentia S	Potentia T.
gr.	min.	§. 9.	§. 9.	§. 15.
0	0	0.3333		0.3333
5		0.2449		0.4191
10		0.1546		0.5018
15		0.0631		0.5807
18	27	0	0	0.6325
20			0.0287	0.6551
25			0.1217	0.7246
30			0.2113	0.7886
35			0.3005	0.8465
40			0.3874	0.8980
45			0.4714	0.9427
45	45		0.4999	0.9568
50			0.5517	0.9802
55			0.6279	1.0102
60			0.6993	1.0326
65			0.7654	1.0471
70			0.8256	1.0535
71	35		0.8435	1.0539
75			0.8796	1.0519
80			0.9269	1.0426
85			0.9771	1.0251
90			1.0000	1.0000

Ob-

Obseruatio Anatomica De Receptaculis Castorei.

1. Quum in dissectione Castoris foeminae , folliculi Castoreum continentis visui oblati essent, optabam , vt non solum , quae a Viris doctiss. circa structuram patefacta sunt, sed quoque (si fieri posset) eorum , quae adhuc desiderantur notitiam , qua naturae in istius succi nobilissimi confectione consilium perspicuum fieret, acquirerem. Quamquam omnia , quae ad hanc rem spectant, (quod sane prima vice et vnica dissectione difficillimum est) haud affecutus sim, obseruationis tamen, quam hic afero , eam vim vsumque fore puto , vt sensuum imbecilitati opem lucemque ferre valeat.

2. Geminæ capsulae verum castoreum includentes, separata pelle fasciaque musculari eas inuestiente,(iuxta duas alias subiectas materiam seu succum diuersum continentes) in conspectum veniunt. Earum longitudo 3. poll. latitudo 1½ poll. aequabant. Ad tactum durae et ponderosae , in superficie plicis oblongis, quarum sex numeraui , ornatae. Coloris albido-flauescens. Primum inuolucrum musculare visum est. 2dum Nerueum argenti instar resplendens, villosum, nec non squamulis tenuissimis constans, quarum singulæ papillam subiectam , corpori reticulato fascio nigricanti incidentem, continent 3um Vasculo sum, ac instar piae menyngis, plicis fere insinuans. Duo ostia hisce capsulis respondentia, (praeter 5. alia), intra communem cloacam , pollicem lata et rugosa , conspicua sunt.

3. Post haec, contenta capsularum inspicienti, ecce ca-
vita-

vitatem, resinofo succo flauescente, admodum fragrante, cui nomen *Castorei* est, haud turgidam, sed, prout cuitas stomachi, solummodo inuentam ac profunde imbutam; gyros quoque seu plicas, quae eodem succo infectae erant. Ingentivero (intuitu huius succi), admiratione me perculsum fuisse fateor, in eo inuiscata corticum ramenta aliaque inueniens, qualia in ventriculo intestinisque paulo ante collecta obseruaueram. Si, prout initio suspicabar, sub finem vitae, impetu morbi, aut casu quoconque, eo compulsa fuissent, aliae impuritates, vel signa praeternatura ita simul obseruata fuissent: Aliique (ante me) iam pridem inueniissent, eiusque mentionem fecissent.

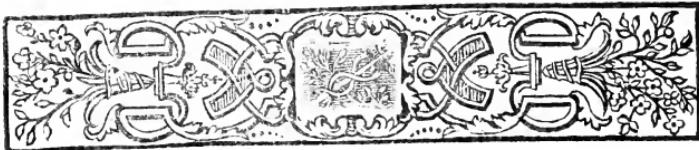
4. Antequam ad coniecturam transeam, nonnulla de Castore prius memoranda sunt, quae eam haud improbabilem esse, testari videntur. Primo, qui ventriculum dissecuerunt, nihil intus inuenerunt praeter segmenta **ex** corticibus et radicibus arborum. 2. Ventriculi superficies instar panni sericei tonsa vira est, succus vero *Castorei* odore praeditus. 3. Castorem, aiunt, ad acuendum et excitandum appetitum languentem, folliculo pede expresso, castoreum ore lambere et deglutire; Indosque laqueos, quibus vtuntur ad castores capiendos eo oblinire.

5. Quamobrem, quia Castoris alimentum exsuccum, et concoctu difficultimum est, 2. quia structura ventriculi et receptaculorum Castorei, item succorum odores conueniunt; 3. quia praefatus succus ventriculo horum animalium adeo amicus est, vt eum saepe deglutiunt; Quaeri potest, num ex noua, quam attuli, obseruatione opinari licet, haecce receptacula forte data esse, vt paruorum ventriculorum instar, quaedam ramenta alimentorum, in intestinis residua, Castorei ope, dissoluant ac incident, posteaque, immediate sanguineis vasis super ea ambulantibus infundant.

* * *

Monstra duo, Casani et Petropoli in lucem edita, hoc anno examini subiecta fuere, quorum descriptiones in seqq. annum referare necesse fuit.

CLASSIS
TER TIA
CONTINENS
HISTORICA
ET
CRITICA



DE CIMMERIIS

Auctore

T. S. Bayero

Regiomontano.



Ixi Cimmerios ante Scytharum irruptio- *M. Febr.*
nem inter Borysthenem et Tanaim co- *1727.*
luisse , pulsos deinde, eas regiones reli-
quise victoribus. (1) Quae gens Cim-
merii , vnde orta , quas terras petierit
postea , exquirendum nunc duco. Ni-
hil est magis vero consentaneum, quam quod Bochartus,

Ggg 2

ma-

(1) In Actis superioris anni p. 407. linea 8. scriptum fuisse
CCCXLVII. et linea 19. fuisse scriptum 8. *Gradus cum pelibus*
o. per se quisque facile animaduertet; monendum tamen duxi.

magno vir ingenio, et multiplici doctrina, nos docuit e Genesi, Cimmerios esse diuini scriptoris Gomeritas, a Gomero Iapeti filio, profectos ex Armenia septemtrionem versus, donec campos illos ad vtramque Tanais ripam perungati a longo errore conquieuerunt. Eorum cognati fuere Iones a Iauane, et Thraces a Tira, qui ante eos profecti, vrgentibus Gomeritis a tergo, Graeciam et regiones ad Istrum occuparunt. Id accidit ante Iosephi Patriarchae tempora. Nam si Genesin recte inspicias, tum illa tibi non vnius Mosis commentarios, sed ante eum, patriarcharum omnium diaria continere videtur, quae Iosephus denique in vnum corpus collegit, Moses autem in pentateuchum recepit. Non id nunc ago, vt hanc meam opinionem de sanctissimo libro operose explicem aut stabiliam, dicam tantummodo quod sentio, a Iosepho patriarcha, non modo extrema illa de vita sua, verum etiam totum caput vndecimum de coloniis priscis et quasi noui orbis geographia inserta videri, vt tum res erat notissima in Aegypto et populo Israelitico. Iisdem in locis Homerus sua aetate Cimmerios degere acceperat. Ita enim cecinit:(2)

Ἐνθα δὲ Κιμμερίων ἀνδρῶν δῆμος τε πόλις τε
Ηέρι καὶ νεφέλην κεκαλυμένοι, οὐδὲ ποτ' ὀντάς
Ηέλιος Φαέθων ἐπιδέρμεται ἀκτίνεσσι,
Αλλ' ἐπὶ νύξ ὀλονή τέταται δειλοῖσι Βροτοῖσι.
*Isthic Cimmeriorum gens est et urbs Cimmerium
Nebula nubeque obducta : neque enim eos*

Sol

(2) Odyss. A. v. 15.

*Sol omnia colluſtrans, radiis ſuis respicit,
Vt pote cum miserabilis miserabilibus populis incubat
nox.*

Orta est fabula ex vocabuli interpretatione. E Gomeritis Ionici populi Κιμερίς fecere, inde posteritas credidit, Χεμερίς dictos fuisse ab hyeme et tempeſtatibus. Et ſic quoque in quibusdam Homeri exemplaribus scriptum fuisse minora ſcholia teſtantur, pro quo Κερεζίς repoſuit Crates Malleota. Ad vim illius vocis accedet aliquid eorum narratio, qui in Ponto nauigauerant. Nam quod Thomas Hyde in itineribus mundi animaduertit,

(3) quodque ab oculatis accepi testibus, totum Pontum regionesque littorum illorum densa et tenebroſa nebula infestat.

Idcirco Pontus Turcis كاراب قرچ Karab Dekſi et hodie Graecis Μαυροθάλαſſa, vt nobis Mare nigrum vocatur. Id e vetustis clariffime conformat Hippocrates in libro de *aere, aquis et locis*: (*) aerem enim in Scythia plerumque totos dies nubilum eſſe ſcribit, fed in immenſum quoque exaggerat, tamquam vix paucis diebus aëſtas ſit, ceterum hiems in his regionibus defauiat, et quae ſunt ex eo genere alia apud Hippocratem. Ob rem tam paruam, tot de Cimmeriis tenebris ἐπιΦυλλίδες καὶ σωμύλματα e fertili poetarum ingenio propullarunt. Scriptores argonautici his fabulis ſcenam instruxerunt. Iidem Cimmerios ſuper Ponto ad Tanaim protendunt, vt tum fuere ſiti, cum heroes

Ggg 3

illi

(3) p. 57. (*) c. 45.

illi Colchida peterent : Dionysius Periegetes autem Φλυαρίζη, cum iisdem in tractibus Cimmerios sua aetate reponit, deceptus fortassis a nomine Cimmerii urbis, quae a veteribus incolis appellationem ad id tempus retinuit. Maeotin, inquit, *Scythaæ vocant matrem Ponti.*

Ἐκ τῆς γὰρ Πόντοιο τὸ μυξίον ἐλκεταῖ οὐδῶρ
Οξθὲν Κιμρέγιος διὰ Βοσπόρος. οὐ πάρω πολλοὶ
Κιμρέγιοι ναίστιν, ὑπὸ Ψυχεῷ ποδὶ Ταύρου.

*Nam ex Ponto multam aquam trahit per medium Bosporum Cimmerium, iuxta quem sub algidi radicibus Tauri Cimmerii frequentes colunt. Ad quem locum Eustathius plane sui similis est, cum ait Κιμρέγιοι, τὸ Σκυθικὸν ἔθνος. Cum postea has Cimmerias tenebras ad Pontum, ita ut Homerus in maius extulerat fingendi licentia, non sentirent Graeci, pro sua in poetam religione, ne fefellerent videretur, altius sub septentrione quaerebant Cimmerios et tenebras illas horribiles, ut Onomacritus in Argonauticis, parum sibi constans, (**) de Cimmeriis ait :*

διάρχετε μῆναι
Αἴγλης ἀμμοῖσι ἄστι πυριθεόμενος ἡλίοιο
Ἐν μὲν γὰρ Ρίπαισι ὅρος γέ Κάλωιος ἀυχήν
Αντολίας ἐγγύστι,

et quae apud eum plura sunt in eam sententiam. Quare Pytheas Massaliota, ut est apud Cosmam Indicopleusten in topographia christiana, gloriatus est, barbaros ostendisse sibi παραγενομένων τοῖς Βορεοτάτοις τόποις,

(**) v. 1118.

τὴν

τὴν ἡλίαν κοίτην, ὡς ἐκ τῶν νυκτῶν ἀῃ γενομένων παρὰ ἀντοῖς. Quamquam, si ea, quae Cleomedes in meteorologicis ex Pythea habet, inspicias, non ille perpetuas sine sole noctes in Thule et septentrione prodidit, sed hanc vicissitudinem diei noctisque, quae pro anni tempestatibus obtingere extremis sub polo regionibus solet. Alii Cimmerios ad tartarum et Plutonios campos relegarunt, simul cum Acheronte fluvio, qui haud procul ab Heraclea in Pontum incidit, alio nomine Σωεγάντης. Sed quoniam Αχερόνταν quoque prope Cumas ad mare Tyrrhenum habebant Itali et Auernum lacum inferis deuotum, idcirco, ut ait Strabo, (4) ὃ τὸ τριτοχωρίον Πλατώνιόν τι ὑπελάμβανον ἢ τὰς Κιμρεὶς ἐνταῦθα λέγεσθαι etiam hunc agrum tamquam Plutonium et populos circum ea loca Cimmerios commenti sunt. Haec sunt illi σκοτεινῷ Lycophroni (5) Κιμρέων ἔπαιδα. Sic Cimmerii sunt veluti aliqua Luciani Hecate, πολύμορφόν τι Θέαμα ἢ ἄλλωτε ἀλλοῖον τι Φανταζόμενον.

Itaque nos Herodoto tantum auscultabimus. Is tradit, Cimmerios olim intra Borysthenem et Tanaitidas regiones degisse pulsosque a Scythis concessisse in Asiam. (6) Isthic excursionem fecisse, et Ionicas vrbes infestasse: nec cepisse eas, aut euertisse, sed in agris earum praedas egisse. (7) Tum Sardes aggressi, Ardye regnante, vrbum praeter arcem expugnarunt. (8) Tandem Cherson-

(4) f. 266. (5) v. 695. (6) l. IV. c. 12. (7) l. 1. c. p. 5.
(8) l. I. c. 15.

sonefum Sinopicam condidere, vbi quietam sedem tene-rent. (9) Halyattes eos tota Asia expulit. (10) Et Scythaes quidem eos a Tanai refugientes persecuti sunt, sed cum Cimmerii porta Caucasea fugissent in Asiam, Scythaes alio itinere per Caspias portas se effuderunt in Medium. (1) Cum autem Cimmerii tam late coluerunt, vt postea Scythaes, non est verosimile, omnem gentem metu Scytharum se in Asiam praecipitasse. Velim au-tem animaduertas, quod, cum fama esset, Scythes a Vol-ga aduentare, Cimmerii concilium gentis ad Tiram flu-rium habuerint. Eo in conuentu, aliis fugae auctoribus, reges manendum bellumque pro aris et focis conser-dum censuerunt. Ex ea dissensione tumultus ortus ca-ptisque armis, (nam reges et regiae domus, pares numero reliquae turbae erant) praelium commissum, in quo reges omnes caesi sepultique sunt a popularibus eodem omnibus tumulo ad Tyram fluuium. Is tumulus ad Herodoti vsque aetatem exstabat et celebrabatur. (2) Scythaes enim, cum vacuam regionem occupassent, religioni sibi duxerunt, fortium virorum monumenta violare. Manserunt quoque Cimmerii muri, incertum ta-men quibus in tractibus, et Cimmerium vrbs cum re-gione Cimmeria et Bosporus Cimmerius priscum nomen retinuerunt. (3) Tiras fluuius, ad quem populi concilium celebratum est, longius distat a Tanai, vt plane sit a fide alienum, Cimmerios ab eo fluui in medium in-cen-

(9) l. IV. c. 12. (10) l. I. c. 15. (1) l. IV. c. 12.
(2) l. IV. c. 11. (3) ib. c. 12.

cendium se praecipitasse et obuiam occurrit perduelli-
bus , dum Tanain et infestum Scythicis , quae perhor-
rescebant , armis orientem petunt , qui occidentem et a-
uersas a discrimine tanto prouincias sibi vi patefacere pot-
erant . Itaque mihi Herodoti verba omnia perpenden-
ti vel maxime probabile videtur , Cimmerios , qui ad
Tiram confluxerant , occidentem et septemtrionem pe-
tiisse , alias e locis Tanai vicinioribus , salutem quaesi-
uisse in Caucaseis saltibus et Asia .

Ita iam nonnulli ante nos sensere apud Plutarchum
in Mario. (4) Cimbrine igitur a Cimmeris sunt orti ?
Nempe , si audimus turbam magnam eruditorum , res ma-
nifesta est . Ego neque excedere quasi finibus meis at-
que Cimmerios persequi cupio , neque admodum curae
cordique habeo , quibus ab stirpibus Cimbri sint pro-
gnati . Tamen , quoniam haec quaestio in septemtrione
maxime agitata , infinitos paene errores exclusit , quibus
Scythicarum gentium regionumque harum , quarum hi-
storiā tractandam suscepi , veteres res propemodum
sunt oppressae , ipsa me necessitas manu dicit in hanc
disputationem , a qua abstinere aequiore iure maluissēm .
Hugo Grotius , qui ad illarum opinionum , quae postea a
Stirnhelmo , Verelio , Rudbequio sunt eductae , fementim ,
sui quaedam semina contulit , non potuit a se impetrare ,
vt cum Cimmeris confunderet Cimbros . Quae autem
ratio induxit , non hos dicam insigni doctrina viros , sed
veteres quosdam omni genere laudis illis longe inferiores ,
Tom. II.

H h h

vt

vt Cimbros repeterent a Cimmeriis? Nulla profecto alia, quam vocabulorum ad sonum congruentia. Hic vero Grotius, vt erat admirabili iudicio, praeuidit animo, quantum perturbationis in omnem veterem historiam inuehi possit, si incautius paullo nos in hoc negotio geramus, et senserat hoc ex maiorum in illa via aberrationibus. Sapienter ille in prolegomenis ad historiam Gothicam monuit, posse populos toto genere et caelo diuisos idem nomen gerere. Ne Vandalos quidem, qui ab omni aevo a scriptoribus memorantur, ex eodem sanguine illius populi, qui in Africa rerum potitus est, repeti patitur. Sic, quis Nomadas, (quasi Germanus Vandalos dicat) illico putet Scythas esse, cum in Africa quoque populus id nominis a moribus suis gessit? Boruſci a Ptolemaeo non longe a Volga seu Russa veteri collocantur, a quibus qui Boruſſos seu Pruſſos antiquos ducunt, nae illi vehementer falluntur. Et vt in hoc exemplo ostendam, quam facile sit in eo genere falli, cum in nominis conuenientia cardo et vis omnis conjecturae illius vertitur, fugit tamen bonos viros, Prutenos primū a Vilelmo Gnapheo, et Georgio Sabino et Lotichio et ceteris illius aetatis poetis nomen Boruſſorum accepisse, accommodatius, vt illi quidem iudicabant, ori Romano et carmini. Omnis autem antiquitas medii aeui Prutenos, Pruzos, Prucios, Brutios aut in eum modum vocauit. Testimonia producere possem, quae multas paginas impleant, si eo ingenio essem, vt in his me ostentarem. Qui mihi e contrario ante Gnapheum aut

aut Sabinum et ante hos inquam ducentos annos aliquem producat auctorem, cui Borussi dicantur, illum ego vero lubens remunerabor: nec verius est quidquam, quam quod Matthaeus Praetorius vidit, vnde Pruteni se vocauerint populari lingua, quae sententia antiquis historiarum monumentis confirmatur. Sed hoc non ago: illud tantum in exemplo docere volui, quam infirmum omne illud de nominum congruentia argumentum sit. At cum Dido aliquis Aquitanicarum rerum scriptor (5) Danos a Danais, cum alii a Dacis et Dahis deriuant, cum Eluardus Suecos a Sueuis, cum alii Saxones a Sacis, hoc est, si diis placet, a Scythis deriuant, ea mehercle vigilantium somnia sunt, ne quid dicam grauius. Talibus delectati sunt scriptores septemtrionales et Auentinus et ille non indoctus, vt tunc erat, fabularum parens Annius Viterbiensis. Satis erat aliqua nominum allusio, vt nouas conderent historias, vtque probarent plebi eruditorum. Quid autem tantum est in Cimmeriorum et Cimbrorum nomine, vt eorum nos stirpem populorum miscere oporteat? Cimmerios a Gomeritis dictos fuisse, admodum probabile est, aut plane paratus sum deierare, vnde dicti sint, non liquere. At Romani Plutarcho et S. Pompeio Festo auctoribus, Cimbrorum nomen Celticum esse et *latronem* significare compererunt. Id vocabuli adhuc habent linguae Celticae. Islandicam dico, Noruegicam, Suedicam, Danicam, Germanicam. In monosyllabis Islandicis Ionaë Rungmanni *kamp* est *lučta, pa-*
Hhh 2 laestra

(5) apud Saxonem Grammaticum f. 5.

laestra, plane ut apud nos Germanos. Snorro Sturlaeus parte secunda Eddae heroas dicit, vel *Kappar*, vel *Kiempur* vel *Garpar* fuisse, quod Resenius Danice protulit *Herrers*, *Kiempers*, *Ficteris*. In Celticis Leibnitii: *Campau*, *ludi*, *quales Olympiaci*.

Iuuat me nunc, quoniam in hanc concertationem incidi, ipsam originem τῆς πολυτρόπης ἢ πολυεδύς Φαντασίας paullo altius repetere, quoniam antiqua satis est. *Cimbri*, ut habet in Mario Plutarchus, cum Italiam inuaderent, obscurum Romanis nomen erant, praeterquam quod proceritate corporum et caesis oculis Germanicam referrent stirpem. Serius est cognitum, Teutonico vocabulo latrones, seu potius bellatores dici atque a septemtrionali oceano profectos, traecto Rheno, Belgiae se infudisse annisque aliquot incubuisse Galliae ceruicibus. Ex quo factum est, ut Sallustius *Gallos* diceret, aduersus quos a L. Caepione et M. Manlio Coss male pugnatum fuit et Cicero de prouinciis consularibus *bellum Gallicum*, quod a C. Mario confectum est, Cimbris Teutonisque caesis. Ab Rheno mouerunt in Noricum et ad fines Illyricos profecti, in Carnis ad Noreiam vrbem Carbonem cum exercitu fuderunt atque per Helvetios Allobrogasque petiere Galliam, donec Hispaniam attingerent, vnde per Celtiberos repulsi coniunctique cum Teutonis, tanto maiori clade adfecerunt Galliam omnem praeter Belgicam et M. Iunium Silanum Cos oppresserunt. Hinc ille turbo aliquanto post interuallo Italiam inuasit. A Mario fusi fugatiique Cimbri, traecto Rheno, iuxta Belgas confederunt. Antiqua autem Cim-

Cimbrorum sedes sub septentrione auspiciis Caesaris Augusti et Tiberii Caesaris est cognita et paene armis petitata. Res hae tam planissimae noctae sunt inanes hariolatores, Graecos homines, qui tumultum, quam Cimbri, conciuerem maiorem. Alii apud Plutarchum Cimmerios ferunt a Scythis pulsos partem in Asiam, Lygdamo quodam duce, (quem Herodotus ignorat, Strabo et Plutarchus (6) nominant) effusos, partem aliam et maximam bellicosissimamque occidentem versus fugisse. Recte illud adhuc, quantum iudico, nisi quod densas et profundas sylvas ultra Hercyniam incolentibus, contractiores dies productioresque noctes, Homero de Cimmeriis tenebris fabulam fabricandi occasionem praebuisse adiiciunt. Ex eo enim conficitur, non animaduertisse eos, Homeri Cimmerios nondum tum a Scythis fūsos fugatosque, ad Ponti littora, non autem sub hoc septemtrione egisse. Alii apud Plutarchum, regionibus omnibus ab oceano occidentali septentrionalique ad Maeotin usque in arctum contractis, Gallos Scythes in omni illo tractu posuere, quorum pars essent Cimmerii seu Cimbri. Ταῦτα μὲν, inquit Chaeronensis, homo non obesae naris, ἀκασμῷ μᾶλλον, ὡς κατὰ βέβαιον ἵσογίαν λέγεται. Adeo ille haec suspecta habet. Sed quantum in his Posidonius ad hariolandum sibi permisit! Cimbros ait homines fuisse praedones et in primis vagos (7) (id enim erat necesse, ut impetraret, quae vellet, Posidonius

Hhh 3

nius

(6) Strabo f. 57. Plutarchus in Mario f. 411. (7) Strabo f. 333.

nius) armisque ad Macotin progressos nomen dedisse Cimmerio Bosporo, quasi Cimbrico : Boios Hercyniam syluam incolentes, cum Cimbri ad se quoque in armis venirent a Maeotide, si diis placet, regressi, manus conscruisse Cimbrosque illata clade ad Tauriscos Gallos et Heluetios compulisse, vnde in Italiam impressionem fecerint. Hanc non improbabilem coniecturam vocat Strabo, cum in ea absurda sunt omnia, gentes resque et secula inter se confusa. Cimbros dicit ab septemtrionali oceano ad Macotin paludem profectos nomen dedisse Cimmerio Bosporo. Cimbri ante Cn. Papirium Carbonem Cos et A. V. C. l^ocxxxx. profecti sunt ab Rheno: Cimmerium autem vrbs iam annis centum et amplius ante urbem conditam Homero nota fuit. At de illa superioris aeui migratione Cimbrica, qua Cimmerii sunt ad Pontum et Bosporum tamquam ver sacrum in coloniam missi, nisi fallor, loqueris ὥδαιμόνιε;

Quo teneam vultus mutantem Protea nodo?

Quem vero auctorem habes Posidoni? Nempe aegram sine somno noctem. Scythes pepulere Cimbri, ut visum est Posidonio. Male sit illi Halicarnassensi, qui Cimmerios a Scythis exterminatos tradidit. Nimirum seduxit Posidonium grammaticus. Exstat indicium eius rei in minoribus Homeri scholiis, vbi aliquis veterum (8) ὑπὸ Κιμμερίων Σκύθας ἐξελασθῆνας a Cimmeriis Scythes esse pulsos asserit et tamen Herodotum citat testem.

En

(8) ad Od. A. v. 15.

En cor Zenodoti ! en iecur Cratetis !

Romani nouerant Cimbros a septemtrione profectos Rhenum traieciisse patrem amnium: Posidonius iocum putat Romanum fidem et ab oriente Cimmerios dicit aduersus Boios ad Hercyniam syluam , inde male multatos in Italiam. *Vndique totis vsque adeo turbatur agris.* Dicam sicuti sentio de Posidonio , philosopho quidem non indocto , sed in his nostris infante Quoniam philosophi haud longe absunt a deum conditione , vt mundos , quoties volunt , condant nouos , eo credidit Posidonius idem fibi licere in rerum gestarum historia. Nec immerito vero , cum Cimbros cognouisset aliquando profectos a septemtrione , Cimmerios autem , vel Homero teste et Herodoto , incoluisse Ponti littora. Hoc satiis erat ad exordiendam longam fabulam. Nihil tamen hoc est adhuc p[re]ae eo , quod dicam. Cimmerii in iisdem regionibus coluere , in quibus postea Scythaे , vt quidem Herodotus auctor est: Cimbri autem , vt Strabo , Tacitus , Plinius , Ptolemaeus , praetendebantur Suetie : ergo Suetia est illa vetus Scythia. Ridiculum est , quod dico , tamen nonnulli in illum modum aciem ingenii subtilissimi exeruerunt , cum critices huius , quae ad historiarum veritatem exquirendam , necessaria est , plane ignari essent. Nec caruere vitio hoc Graeci quidam vetustiores , vt exemplo esse potest ὁ Θαυμάστος Posidonius. Audiamus tantummodo Geographum Rauennatem:(9) *inter oceanum , procul , magna insula , antiqua Scy-*

(9) p. 26. ed. Porcheronis,

Scythia reperitur, quam insulam plerique philosophi historiographi conlaudant, quam et Iordanes (Iornandem putat,) sapientissimus cosmographus Scanzam appellat, ex qua insula pariterque gentes occidentales egressae sunt: nam Gothos et Danos, immo simul Gepidas ex ea antiquitus exisse legimus. Qui, malum, Gothi e Scandinauia? Nempe Ablauius aliquis philosophus cognouerat, proxime Scytha atque paene inter eos quoque, coluisse Getas, e Scandinauia autem iam ante cum alii Scythiam fecerant, ergo tempus erat, vt inde Gothos faultis auibus immiteret Ponticis regionibus atque inde florentibus prouinciis. Adeo haec pars historiae vario et ancipiiti tumultu est plenior,

Quam magno vento plenum est vndarum mare.

Ita Suetia facta est officina gentium, aut certe velut *vagina nationum*, vt Iornandis verbis utamur. (10) Et Iornandes quidem hanc Getarum a Scandinauia et Cimbris originem, *Getarum carminibus priscis paene historico ritu in commune fuisse recoli solitam*, scribit, et ego pro mea simplicitate his carminibus haud parum fidei detulerim, si existarent: nunc mihi Epicharmus cantilenam illam suam insusurrat, νῷΦεὶ μέμνασο ἀπιστῶν. Cum enim Iornandes ab his carminibus non seiunxit sua illa e Graecis et Latinis, non satis constat, quantum ex obscuris Getarum carminibus accepit, periculum est autem, ne pro vetustis populi illius monumentis, Iornandis figmenta amplectamur, *nubem pro Iunone*. Multa ille a patre et aucto ceterisque gentis suae

suae hominibus ante se gesta accepit, in quibus minime est reprehendendus. At ubi explere veterem memoriam e vetustis libris, quos triduana lectione euoluerat et nonnulla ex historiis Graecis atque Latinis conuenientia addere conatus est, in his illi praepropera haec male cesserunt, ut ei fides seu nulla, seu admodum circumspete adhibenda sit. Quod autem caput rei est, usum eum esse Strabone reperio, e quo Posidonii illa insomnia hausit. Igitur e Posidonii coniectura tenui scaturigine manauit opinio, quae latiori alueo a Iornandis credulitate profluxit, donec a Stirnhelmo, Verelio, Rudbequio aggeribus perfoxis omnibus, orbem prope vniuersum inundauit. Quot enim gentes eorum opinione ex Suetia non sunt egressae? Viri illi fuerunt summo ingenio et exquisita admirabilique doctrina, sed in quibus aut patriae amor incredibilis veritatem obsuscavit, aut qui vix quidquam de his ex animi sententia dixerunt. De Iornandis erroribus alio tempore accuratius disputabimus. Virum bonum dico, ne quis me reprehendat, sed mehercle, in vetustis temporibus non idoneum auctorem. Paruonauigio euectum fluctus obruerunt in littore.

N V M I D E C E M
E R Y T H R A E O R V M
I N I O N I A
I L L V S T R A T I
T. S. B.

*M. Maio
1727.*

QVamquam Erythrae aliae siue in Locride , vt Stephano Byzantio, siue in Aetoliae Επικτήτες finibus, vt Liuio visum est , aliae in Cypro (Paphon puta ipsam , vetustiori nomine Erythras) aliae in Libya Cyrenaica sitae fuere , tamen duae tantum vrbes exstant et celebrantur , quibus eruditii inscriptos Erythraeorum nomine numos acceptos ferunt. Plerisque Ionico oppido attribuunt, vnum Boeotis vindicauit Ioannes Harduinus, quem honoris caussa nomino. Ita enim ille in numis populorum vrbiumque illustratis fatus est: “ Erythrae in Boeotia. Numus ex “ argento perpulcher , formae mediocris , apud Marchionem de Montauban , parte antica vultum exhibens “ Alexandri, tecto capite , pelle leonina , in altera pagina

*“

EPY

“

cum auicula, clava Herculis,

“

ΔΙΟΠΕΙΘΗΣ

“

pharethra cum theca.

“

“ Erythras in Boeotia Plinius commemorat. Fuere

“ Boeotiae Thebae (inquit ille ibidem) duorum numinum

“ *Li-*

Liberi atque Herculis, vt volunt, patria. Clava Her-, culis, pharetra symbolum Liberi est. Thebis ab A-, lexandro expugnatis, vt Plinius refert, videtur mone-, ta ab eodem fuisse translata Erythras. Erythrensis ma-, gistratus est ΔΙΟΠΕΙΘΗΣ. Auiculam perdicem,, esse, ex Plinio intelligimus, quo teste, perdices non,, transuolant Boeotiae fines in Atticam.,,

Nobis omnia aliter sunt visa in nouem Erythraeorum numis, quos Ioannes Christianus Buxbaumius, non modo a botanices scientia et excellenti laude, sed etiam ob veterum studium numorum mutuamque amicitiam mihi iucundissimus, ex peregrinatione Thracica et Asiatica secum tulit Coemerat Constantinopoli a Iudeo quodam numos Erythraeorum argenteos, numero ad virginis tres, pretio non maiori, quam quo argentum non signatum venit. Ex his selegit nouem numos magistratum nominibus discrepantes, ceteros diuisit inter amicos. Summo veteris Graeciae ingenio et artificio elaboratosnulla ætatis iniuria foedauit, vt praesertim in tertio, quarto, quinto, sexto et nono numo perspicuis lineamentis avis quae sit, sine suspicandi molestia adpareat: nam in ceteris paullo altiores habet pedes et erectiorem ceruicem et breuius caput, quam vt fallere haec species non possit eos, qui vnum tantum viderint numum, non inter se contenderint omnes nouem. Noctua igitur est, non alia avis, nedum perdix, vt ipsum fundamentum, super quo Harduinus inaedificauit, subrutm et euersum esse scias. Nihil enim aliud induxit ingeniosissimum virum, vt crederet numum suum Boeotiae fuisse officinae, quam quod eum numum, in quo perdix esset, ita demum e

Tab. 28. Plinio sibi visus est illustrare posse. Apposui decimum
Fig. XIIII. numum e Carolo Patino, (1) qui immane quantum a ve-
 ro deflexit. Nam ex auicula in numo obtrito non per-
 spicue obseruata, aliquid seu clavo, seu pedo, seu pal-
 mae, seu nescio cui simile rei fecit. Ceterum Patinus
 quoque numum suum ad Alexandrum M. refert, illud au-
 tem EPY negotium inexplicabile putavit.

Iam, quae mea opinio est, numi omnes decem E-
 rythrīs in Ionia signati, noctuam idcirco gerunt, quod
 Mineruae summa religio eius ciues vrbis teneret: quae vt
 eorum animos inuaserit atque a quibus populis sit ducta,
 haud absurde ab ipsa stirpe repetemus. Agrum illum
 vniuersum primi Cares tenuere, siue illi ex insulis profe-
 eti, quae apud Cretenses fama obtinuit, siue aborigines
 fuerint Lydorum Mysorumque cognati. (2) Cum inter
 Europae filios contentionē orta, Minos per factionem
 superior Sarpedonem fratrem et partium socios expulsi-
 set, hi quoque isthaec littora petiere, Lyciique sunt dicti.
 (3) Confecto bello Troiano Calchas Pamphylios in eun-
 dem agrum deduxit. At Erythrus Rhadamanthi (is quo-
 que Minois frater fuit) filius, tempore non multo post
 e Creta prosector, inter Caras, Lycios, Pamphylios par-
 tem necessitudine, partem societate Cretenibus deuinctos
 consedit, vrbique ab se nomen imposuit Erythris. Cleo-
 pus aut potius Cnopus Codri filius, collecta ex Ionicis
 vrbibus manu, inter veteres Erythraeos sedem cepit. Ita
 videlicet Erythraeorum testimonio Pausanias. (4)

Ery-

(1) In nummis Imperatorum f. 9. (2) Herodotus l. 1. c.
 371. sequ. (3) ib. c. 173. (4) f. 528. 529.

Erythrus vrbem a se institutam sub Mineruae tutela esse voluit, eaque causa ΑΘΗΝΑΣ ΠΟΛΙΑΔΟΣ delubrum et simulacrum deae, eximia magnitudine, sedentis in solio et in vtraque manu colum, capite caeli orbem gestantis, dedicauit. Non hoc quisquam de Erythro planissime ita prodit, sed probabili quadam inuestigatione verum tenemus. Nam illud simulacrum Mineruae, Erythris summa religione cultum, Pausania iudice, (5) Endoei opus fuit: Endoeus autem Atheniensis Daedalum magistrum ob caudem Cali exulem fecutus est in Cretam. (6) In hoc temporis quasi vestigio quod verosimillimum est deprehenditur. Nam Endoeus aequalis est Troianis temporibus, ut Daedalus Minoi et Herculi. Itaque haud difficulter consequitur, Endoei hoc opus a Cretenibus in Asiam fuisse deportatum et ab Erythro dedicatum in noua vrbe. Sic ab ipsis Erythrarum exordiis Minerua *arcis praeses* fuit, ut Liuiano verbo vtar, qui πολιάδα ϵ πολιζχον Mineruam sic interpretatur. (7) Cum autem Minerua omnibus in vrbibus coleretur, non tamen Polias aut Poliuchos fuit, nisi si qua in vrbe aut arce tutelare numen erat, praecipua et ante deos deasue alios religione et deuotione ciuium consecratum. Ita πολιάοχος Παλλὰς apud Camarinos, quam Pindarus canit, (8) ciues eleganti in nimo signarunt, (9) ita Minerua Polias Corinthi, quae vbi de tutela

Iii 3

vrbis

(5) f. 534. (6) Pausanias f. 62. (7) l. XXXI. 30. et alibi, adi Phornutum de natura deorum p. 187. ed. Gal. (8) Olymp. E. v. 23. (9) apud L. Begerum Thes. Brandenburg. T. I. f. 378.

vrbis cum Neptuno certauerat , ex Iouis iudicio hunc honorem cum eo diuisit , vt ipsa Polias , Neptunus **Rex** diceretur , quare , inquit Pausanias,(10) vetustus eius populi numus ἐπίσημα habet tridentem et Mineruae caput . Apud Tezeatas Poliadi sacra faciebant ἐν Ερύματος ἱερῷ in aede castelli seu arcis , quod Minerua inexpugnabilem fecisset vrbem , cum de Medusae crinibus angueos cincinnos Cepheo Alei filio custodiendos dedit , (11) quare etiam in Tegeatarum numis Mineruae caput caelatum est . Eiusdem Mineruae delubrum apud Chios , Erythraeis proxima cognitione denuctos , constructum fuit . (2) Quid dicam de Poliade Atheniensium ? de qua non ignobile exstat scolium in compotationibus cani solitum Athenis : (3) Παλλὰς τριτογένεια , ἄνασσα Αθηνᾶ , ὅρθες τήνδε πόλιν τε καὶ πολίτας ἀτερ ἄλγεων τε καὶ σάσεων καὶ θαυμάτων ἀώρων . *Pallas Tritogenia, Minerua regina, rege et ciuitatem banc et ciues, sine calamitatibus, sine seditionibus, sine intempestiuis funeribus.* His enim muneribus tutela Mineruae continebatur . Mirum ne adeo , vrbis et arcis praesidem tutelamque noctuae signo in numis Erythraeorum dedicari ?

Id enim commune erat Mineruae ἐπίσημον , cuiusmodicunque habitus cultusque deae esset . Discrepabant enim in his palladia vrbium . Apud Erythraeos simulacrum ligneum Mineruae μεγέθει μέγα καθημενόν τε ἐπὶ θρόνῳ , καὶ ἡλανάτην ἐν ἐκατέρᾳ τῶν χερῶν εχον

(10) f. 182. (1) Pausan. f. 695. (2) Herodotus l. I. c. 160.
(3) apud Athenaeum f. 694.

ἔχον, ὃ επὶ τῆς κεφαλῆς πόλον, in utraque manu ἡλακάτην, capite caeli orbem gestabat. Vtrumque ob artes, quarum Minerua praezes erat: eius enim erat et contemplandi caeli et tractandae lanae scientia. Ηλακάτην dicit Pausanias, qui utique colus est, ut scholia minora Homeri explicant: (4) τὸ γυναικέν έργαλθον, εἴς τὸ νῆμα ἐλκυσιν. ὡς ἐκεῖ δὲ ποιητής

Ηλακάτη τετάνυσο ίονεΦές ἔργος ἔχεσα. (5)

Ηλακάτη est instrumentum, quo mulieres opus habent: ex eo enim stamen trabunt, ut apud Homerum, (cum Helenae colum describens ait: super aurea corbe, in qua stamen repositum), reclinata erat colus reuinctaque lana purpurea. Etymologus Magnus e contrario ὄργανον, περὶ οὐ ἐλθσιν αἱ γυναικες τὸ νῆμα, instrumentum, circa quod mulieres arte flamina circumagendo volunt. Fusum dicit et veriuerbium respicit, cum ἡλακάτη est ἡλακάτη τις, παρὰ τὸ ἡλάσσω In veteri Epigrammate Εργάτιν ἐνκλώσει νήματος ἡλακάταν. Formam eius expressam habet Plato decimo de republica: (6) ait enim ἀτράκτες seu fusi Parcarum tres esse partes, ἡλακάτην seu scapum, ἄγκιστρον seu vincum, per quem stumen transit et σφόνδυλον seu verticulum cauum, ὡς ἡλακάτην διαμπερές διὰ μέσης ἐληλαθαί, ita ut scapus per medium verticulum agitur, quo simul ἐτυμον vocis explicatur. Hac quasi pictura inducor, ut in semisse apud Fontanam Equitem, (7) fusi a Platone de-

Tab. 28.
scripti Fig. I.

(4) ad Il. II. v. 183. (5) Odyss. Δ. 135. (6) f. 47. 472.
ed. II. Petri. (7) Apud Montefalconem Antiquitatum explica-
tarum T. III. parte I. Tab. 89. 5.

scripti iconem mihi videre videar, et idcirco muliebre caput, Mineruae esse putem. Fuerunt enim priscae matres Romanae vel maxime domisæ et lanificiæ studioſæ, ut non puderet Quirites, dea et colo fusoque signare ſemifiles. Cum autem Minerua Erythraea vtraque manu gestare ηλακάτην dicitur, non vtique ſolam colum intelligi velim, ſed etiam fuſum, quoniam Ηλακάτην vtrumque significat, ita, ut Catulliano verſu habitum deae poſſis deſcribere: (8)

*Læuæ colum molli lana retinebat amictum :
Dextera tum leuiter deducens fila ſupinis
Formabat digitis, tum prono in pollice torquens
Libratum tereti verſabat turbine fuſum :
Atque ita decerpens aequabat ſemper opus dens,
Laneaque aridulis haerebant morfa labellis
Quæ prius in leni fuerant exſtantia flo.
Ante pedes autem candardis mollia lanae
Vellera virgati cuſtodiebant calathisci.*

Ea vetuſtissima ratio tractandæ lanae fuit: altera comodiōr, quam in monumento Apolloniae inter marmora Oxoniensia cernimus, (9) vbi ancillarum vna colum, altera fuſum tenet et dominae ministrat, quamquam pau-
lo rudior pictura eſt, ut vix ſatis, quæ ſit, cognosci queat. Hoc autem habitu Minerua eſt efformata ab Endaeo, quod matres Cretenses eo genere operis studioſe occuparentur. Mansit ea industria in colonia Erythraea et Ionicis quoque mulieribus. Quocirca Theocritus

Theu-

(8) epigr. LXV. 311. (9) f. 82.

Theugenidi vxori Niciae Milesii Ηλακάτην dono dedit in idyllo, cuius hoc est principium:

Γλαυκᾶς δὲ Φιλέριθ' ἀλακάτα δῶρον Αθανάσ
Γυναιξὶ νόος διωφελέεσσι σός ἐπαγγέλος.

*O colus amica lanae, munus glaucac Mineruae,
Matronis cura, quae domum suam locupletant.*

In eum modum Erythrae a Cretensibus conditae, Mineruam arcis praesidem accepere. His ego potius fidem adhibuerim, Erythraeis ipsis veterem memoriam ita recolentibus, quam Straboni (10) qui Erythras Ionicas coloniam Boeoticarum, nullo certo auctore prodidit. In Boeotia Homeri (1) veteres critici urbem Boeoticam Σαργ-
τόνως Ερύθρας, Ionicam autem urbem ἔξυπτόνως Ερύ-
θράς pronunciari annotarunt. At Homerus, ut nunc in exemplaribus est, κατὰ τὴν λήγυσταν Boeoticas enunciavit. Tum quoque in eo disputant critici, acceperintne Erythrae Boeotiae nomen ab Erythro filio Neptuni et Amphimeduses Danai, an ab Erythra filia Porphyrionis, qui erat Seriphi. Sunt haec commenta veterum grammaticorum, quibus primordia urbium populorumque, fabulis inserere, eximia voluptas et summa gloria fuit. Nulli autem Boeotici aut Dorici generis Erythraeo in agro consedere, sed postremi secundum Cretenses aduenere Iones. Quis eos Erythras deduxerit, ob diffensionem scriptorum ambigitur. Velleius Paterculus (2) principem et auctorem harum coloniarum edidit Jo-

Tom. II.

K kk

nem,

(10) f. 466. ed. H. Petri. (1) Ill. B. v. 499. (2) l. 1. c. 4.

nem, estque illius causa rei ab eruditis reprehensus et a Iusto Lipsio propemodum laceratus, donec Thomas Lydiatus iam vndique circumuento auxilia submisit ostenditque seu ex vero, seu probabili coniectura, Ionem illum non vtique Xuthi sed Codri fuisse filium, Nelei fratrem. Hellanicus in Atticis (3) deductam Erythras coloniam refert a Neleo Codri filio, a quo caeteras quoque Ionicas colonias constitutas fuisse multorum opinio est, quos omnes hoc loco testes producere putidum nobis videtur, cum in illius memoria aetatis nihil celebratius Heraclidarum aut Ionum profectio sit. Iones autem ab Heraclidis εν παθόδῳ ex Aegialea et Isthmo eieoti, cum in Attico agro, (sterili praesertim et inope) exsuperante multitudine, nouas terras quaerere cogarentur, ducem reperere Neleum Codri filium, qui regno Atheniensi per vim occupato exciderat. Namcum Medon Nelei frater regno illo precario potitus esset ex Pythii sententia, Neleus Ionas factionis suae sibi aggredauit Asiamque cum classe petiit. Hanc Ionum αἰτοικίαν veterum quidam centum et quadraginta annorum interuallo a Troia capta definiunt, a quo tempore chronicon marmoreum non admodum abhorret, cum centum et triginta duobus annis ab excidio urbis ΕΦΕΣΩΝ ΕΠΥΘΡΑΣ ΚΑΖΟΜΕΝΑΣ conditas prodit. At non vnius ducis, nec anni vnius id opus fuit. Praeter Neleum ceteri quoque Codri filii profecti sunt diversis annis. In quibus Pherecydes auctor est, (4) Androclum

fre-

(3) apud Harpocrationem p. 173. (4) apud Strabonem 730. 731. Is est Pherecydes Syrus, qui Cyri temporibus primus historiam Graecam tractauit.

frequentasse Ephesum, Cydrelum nothum Myuntem, Nauclum Teum, et Caenopum, Codri item nothum, Erythras. Huc traho Stephani testimonium: Εγυθρά, πόλις Ιώνων, ἐκαλεῖτο δὲ Κνωπέσθολις ἀπὸ Κνώπων, *Erythra, urbs Ionica: vocata est autem Cnopolis a Cnopo.* Stephanus auctorem habet Hecataeum Milesium, cui ut antiquo scriptori et rerum admodum gnaro fidem non negauerim. Quamobrem Caenopum aut Cnopolum conditorem coloniae Ionicae apud Erythras fuisse censeo et Cleopum Pausaniae ex eo nomine esse depravatum. Polyaenus in stratagematis (5) narrat, Cnopolum cum Erythras appugnaret, ex oraculi sententia ad se accersisse e Thessalia sacerdotem Hecates Chrysamen. Hanc herbis et carminibus taurum excantasse atque cornibus inauratis, corpore fertis et purpura exornato, in conspectu hostium ad aram inter duo castra medium duxisse. Cum autem taurus oestro ab incantamentis percitus se ab ara proripuisset ad hostes, ab iis omne, ut rebantur, fausto laetis, diis esse immolatum: at cum eius tauri carne in sacris vescerentur Erythraei, omnes in vesaniam versos furientium more saltasse atque ita a Cnopo esse caesos. Sic, inquit, Cnopus ἐκράτησε τῆς Εγυθραίων πόλεων, μεγάλης τε καὶ ἐνδαιμονος.

Non est operae pretium, ut, quanta religio Mineruae aut Athenis aut in Ionibus obtinuerit, vel verbo dicam: quis enim ab antiquitatis studio, vel vitae quodam instituto vel iudicio et ratione sic abhorret, ut hoc nesciat?

Kkk 2

No-

Noua Erythraeorum sacra nobis in memoriam reuocat claua nodosa et corytus Herculis. Nam quid nobis cum Libero patre, postquam ea opinio labefactata est, qua haec Harduini de Libero coniectura fulciebatur. Quis nescit Herculis virtutem non minus sagittis insignem, quam clava? Stymphalides aues et cerua Diana et Nesus et genu Chironis, ipse denique Nemaeus leo testimonio sunt, Herculem non degenerem Euryti (6) discipulum in sagittandi arte fuisse. Corytus in omnibus his numis eximia pulcritudine conspicitur, ut quatuor constringuntur angulis, ut bullis seu aereis seu argenteis circum extrema ornatur, ut pars superior clathrata est ad minuendum pondus, ut media est loris deuincta, quae retro reiecta pendent, quo leuari corytus possit et indui humeris, ut arcus denique insertus est, prominente extremitate cornu et neruo, ita ut maiori forma descriptissimus, quoniam ea adhuc desiderata est. Fere eadem forma est corytorum quibus Sinenses et Tattari vtuntur et corio, quales sunt quaedam in Imperatorio museo. Glosae veteres: γωγυτὸς Θήκη δεγματίνη Βελῶν. Bene habet, quod corytus et corio confici dicitur, levitatis cauissa. Virgilus: (7)

queis tela, sagittae,

Corytique leues humeris, et lethifer arcus.

Ob eandem cauissam Herculis pharetram Theocritus πολύξεπτον (8) dixit. At corytum *sagittarum thecam*,

(6) Heraclitus Theocriti v. 105. (7) Aen. x. 169. (8) in Hercule Leont. v. 265.

Tab. 28.
Fig. XV.

cam, seu *pharetram* vetustissimi non dixerunt. Pharetra est δῖσοδάνη, δῖσοθήκη, *venena tis grauida sagittis*, vt ait Flaccus: sed γωρυτὸς est θήκη τῆς τοξείας *arcus tegumentum*, vt Critici minores in Odysseam (9) τοξοθήκη vt Hesychius Ioannes Pediasimus in scholiis Hesiodeis, (10) sollicite distinguit corytum et pharetram. Pharetram dicit telorum *thecam esse*, in quam coniiciuntur sagittae, παρὰ τὸ φέρειν τὰ τεῶσα δυνάμενα, quasi quae ferat ea, quae vulnerare possunt: et corytum esse, in quo reponitur arcus, ἀπὸ τῆς γῶς τὸ χωρῶν καὶ τῆς ἔυτὸν τὸ ἐλκυσὸν, τὸ χωρῶν δηλαδὴ τὸ ἐλκυσὸν, οὐ γεν τὸ τόξον, αὶ γῶς et ἔυτὸν quorum alterum recipere significat, alterum autem arcum, qui neruis attrahitur. Sic etiam Isidorus Hispalensis. E contrario Etymologus magnus, ita vt veteres Glossae. P. Papinii scholiaста, (1) *corytos* dicitur sagittarum theca; *pharetra*. Et quidem hoc ad mentem Papinii, cum sic ait: *caelestibus implet corytum telis*. Sin Homerum, vt aequum est, audimus, corytus vtique diuersus fuit a pharetra. Nam in Odyssaea pharetram inter penetralia domus Vlyssae repositam sic describit: (2)

Φαρέτρη

Ιοδόκος, πολλοὶ δὲ ἐνεσταν γονόοντες δῖσοι.
pharetra tela quae continet, multae autem in ea erant
ſtridulis sagittae pennis. At Penelope inducit, vt con-
ſcendit scabellum et de clavo ſuspensum arcum detrahit

K k k 3

Ενθεν

(9) Odyss. Φ. 115. (10) ad Scutum Herculis v. 128.

(11) Odyss. Θ. 53.

Ἐνθεν ἰερέαμενη ἀπό πασσάλος ἀνυτο τόξον
Αυτῷ γωγύτῳ, οὐδὲ δι παρέκατο Φαενός.

Arcum de clavo porrexit, simul cum coryto splendido, qui erat circumiectus. Ouidius quoque in trifibis, (3) coryton et arcum iunxit, cum ait de Sarmatis :

*In quibus est nemo, qui non coryton et arcum
Telaque cipereo lurida felle gerant.*

Secutus tamen est Papinius auctoritatem Maronis , qui *corytos leues* dixit, cum et pharetram et thecam arcus in animo haberet. Ille vero σκωτεύς Lycophron, (4) insolitarum et ambiguarum vocum auceps, γωγύτον Σκύθην, incertum, an corytum cum arcu dicat, quem Hercules a Teutaro Scytha, vt ait , acceptum dono dedit Aiaci, an pharetram. Itaque satis lucide adparet , apud vetustiores heroas corytum et pharetram discrepantium nomina rerum fuisse. Habuerunt corytos , in quibus domi arcus conderent. Illorum superiori patentique parti tegumenta imposita fuisse , ne puluis penetraret, neruosque corrumperet, verosimile fit etiam ex his numis, in quibus superior pars ad recipiendum tegumentum accommodata est. Quod autem Harduinus thecam coryti in numo se videre censet , hoc seu numi vitio , seu errore oculorum accidit, vt thecam crederet id, quod extremum cornu arcus est. Gestarunt quoque humeris corytos , quod ex loris , quibus hi nostri constringuntur et ex tota forma intelligitur. Quocirca in hoc insigni argenteo nummo Augusti, quem (5) Paulus Pedrusius,

(2) l. V. c. 8. (4) v. 458. (5) tom. II. tab. X. 9.

sius e Parmensi gaza produxit corytus cum arcu , at-
que pharetra cum sagittis coniuncta sunt in vno quasi cor-
pore , quo commodius gestentur. Posteaquam breui-
ribus arcibus vti coeperunt (nam veteres heroes gran-
dioribus et rigidioribus delectati sunt) arcum inter sagit-
tas posuere , ita vt pharetra etiam coryti munus nomen-
que subiret. Id adparet ex numo serrato , qui in gazo-
phylacio Imperatorio adseruatur, a L. Begero quidem e
cimeliis Regis Prussiae iam antea editus, (6) sed ob quan-
dam diuersitatem a nobis quoque producendus. C. Po-
blicius Q F Herculem exhibit, qui in eum fere modum,
vt Theocritus cecinit , leonem Nemaeum conficit.
Est enim corytus cum arcu et duabus sagittis , quoniam
Hercules principio sagittis petit leonem : est clava , qua
irruentem bestiam ferit : iam seminecem belluam con-
stringit et suffocat , more tamen alio , quam Theocritus
praescripsit. In plerisque numis , ne quid dissimulem ,
arcus sine corytis cernimus , sive in manu , sive humeris
suspensos iuxta pharetras. Praesertim in Diana signis ,
quae in Postumiorum , Ti. Claudii Ahenobarbi , Massi-
liensis vrbis aliisque numis spectantur. Ad postremum
non omnes coryti et pharetrae forma differebant. Nam
quales hic in nostris numis coryti sunt , talis est pharetra
in numo Antonini Commodi inscripto : HERCVLI-
ROMANO. AVG. (7) quales deinde pleraeque aliae
sunt

(6) T. II. f. 573. (7) apud Bergerum T. II. f. 679. (8)ib.T.
III. 45. et apud Montefalconem in Antiquit. T. I. parte II. tab.
136.

Tab. 28.
Fig. XIV.

Tab. 28.
Fig. XII.

sunt pharetrae, talis est corytus in numo Coensium, (8) in quo Herculem Iouis filium consecrant.

Quam antiquae caeremoniae religionesque in Herculem apud Erythraeos tenuerint, Pausanias declarauit. (9) Erat simulacrum dei non Aeginaeo aut Attico aut Aegyptio Herculii simile, sed in ratibus stabat. Tradiditum vero est, hoc simulacrum Herculis ab Tyro delatum in Ionicum pelagus primum ad Heran Mesaten ad pulisse. Ea ab Erythraeorum portu soluentibus in Chium, propemodum medio in cursu fuit. Cum rates a promontorio proxime abessent, Erythraei et Chii diuersis studiis ad suum quisque littus trahebant. Interea Phormio quidam Erythraeus ex morbo oculis captus (is Phormio antea e piscatu victum quaesuerat) admonitus in somnio Erythraeos adiit, iussitque ut matres comam tondherent atque ut ex ea coma viri contexto fune ratem traherent. Id vero ingenuis mulieribus non est persuasum. Igitur Threissae, quae liberis natae parentibus, mercenariam vitam in vrbe agebant, tondendas se praebuerunt. Ex quo, cum Hercules, leniter sequente rate, Erythras esset vectus, solas e Thracia mulieres intrare herois delubrum fas fuit. Funiculum istum Pausanias ipse se vidisse praedicat. Interseritur huic loco etiam ea fabula, quod piscator hoc facto visum recuperauerit. Haec enim illorum temporum insania et horribilis caecitas fuit. Memoriam huius religionis Ioannes Harduinus iudicat consecratam fuisse in eo numo, quem Iacobus Sponius in

(9) f. 533.

in itinere Attico consignauit. Est enim in aduersa turritum vrbis caput, inscriptumque EPTΘPAI in altera autem parte, prora nauis. A qua opinione non abhorrem, nisi rates et prora nauis ad artis paecepta factae, nimium inter se discreparent. Malim igitur ad portus et nauigationes Erythraeorum in illo numo explicando respicere. Damastes Sigeensis, Herodoti aequalis, in periplo (10) auctor est: *biremem Erythraeos primos fecisse*. Fortassis ille hoc, ut alia, ex Hecataeo Milesio. Colabant Erythris quoque Herculem cognomento Ipocthonum, Φθαρτικὸν τῶν ἀμελοφάγων ἵστων, quoniam vermes, qui vites arrodunt, sustulit. Soli enim Erythraei ab hac peste non vexabantur. Testis est Strabo. (1) Hae sunt caussae, quae Erythraeos induxerunt, ut Herculis corytum et clauam in elegantissimis numis argentoque suo signarent. Suo inquam argento: erant enim fodinae argenti in agro Erythraeo, in quibus quae ratio fundendi metallum fuerit, Strabo ostendit. (2) Exstat praeterea apud Tristananum numus Erythraeus Elagabali cum templo et simulacro Herculis, tum Otaciliae et Valeriani quoque numi cum vultu Herculis visuntur.

A nave ad caput peruenimus: veteres enim Romani, quam nos in numo aduersam, caput dixerunt, nauem autem, quam nos auersam nunc appellamus, ut ex Macrobio et auctore de origine gentis Romanae constat. Harduinus in numo suo caput Alexandri se videre putat: sed mea opinione Herculis est. Alexandrum ob genus Macedonum regum, ductum ab Hercule, ἀντὶ ταινίας γέ σέμιματος γέ ποεΦύ. Tom. II.

LII

gas

(10) apud Plinium l. VII. c. 56. (1) f. 709. (2). f. 155.

εας Σασιλικῆς τῷ δέρματι τῆς κεφαλῆς τῷ λέοντος
se deuinxisse, eumque cultum super gemmis et v-
nionibus aestimasse, Constantinus Porphyrogeneta (3)
animaduertit, ὃ μάρτυς, inquit, ἀξιόπιστος ἀντὸ τὸ νό-
μισμα τὸ Μακεδόνος Αλεξάνδρου ταιάντη ἀκόνι καλ-
λωπιζόμενον. Si is hoc non diceret, tamen tot
numi qui exstant, per se testarentur. At non idcirco
omnes numi, qui capita hunc in modum signata praefe-
runt, illico Alexandrum potius monstrant nobis, quam
Herculem. Ut ille nunius Lucerine vrbis apud Lauren-
tium Begerum (4) et ex eo apud Bernardum Montefal-
conem, qui clavam habet et arcum et pharetram et ca-
put iisdem fere lineamentis, ut Alexandri regis. Quid
Luceriae cum Alexandro magis, quam cum Hercule?
sive illa vrbs in Apulia, sive in Gallia Cisalpina sita fuit,
quae hunc numum feriendum curauit. Nempe signan-
tur Herculis et Alexandri capita multis in numis, ut
hominem homini similiorem numquam videris alterum:
prorsus ut Syracusani illi Menaechmi. Id quomodo e-
uenerit, non possum certo asseuerare. Possum suspica-
ri, numos eos ad unum omnes cūsos esse post Alexan-
drum, Herculem autem ad Alexandri vultum fuisse ef-
fectum imitatione artificiosissimorum Alexandri numo-
rum, ob admirationem illius herois. Sic eum Lysippus
aere duxerat, nam ut ait Flaccus.

*Ediclo vetut, ne quis se praeter Apellem
Pingeret, aut alius Lysippo duceret aera
Fortis Alexandri vultum simulantia.*

Illum

(3) de thematibus f. 22. ed. Bandurii (2) T. I. f. 317.

Illum vero artificem in caelum tulerunt, illum exprimere, si qua poterat, secunda gloria fuit. Sic Herculem cum signarunt, Alexandri vultum habitumque corporis et leoninam pellem ex numis eius surripuere. Nullum igitur Alexandrum eo cultu in numis agnouerim, nisi in Macedonicis, aut ubi nomen eius diserte appositum reperiam. Non inficias eo, existisse Ionum studia in Alexandrum ea, ut in Iuco, qui supra Clazomenios et Chalcidenses (hi proximi fuere Erythraei) situs erat, Alexandria agerent Paniones. Testis est Strabo. (5) Et existere speciatim in Erythraeos Alexandri beneficia: is enim (6) Chytrphoria insulas (postea eadem Hippi dictae) per duo stadia continentem iunxit et planitiem septem millium et quingentorum stadiorum intercidi iussit, ut duos sinus committeret et Erythras Mimanente circumfunderet. Sed si Alexandrum Erythraei honoris causa in aere fingere maluere, quam Herculem suum, cur nomen eius in tot numis non ediderunt? Praeterea numi omnes decem Alexandro superstite signari non potuerunt: eo autem defuncto recentia erant ciuitatum aut in Antigonom et Demetrium, aut in Seleucum aliosque principes studia et adulatioenes. Tamen quis mihi ex omni antiquitate proferre potest numrum ciuitatum Ionicarum illorum cum vultu regum? Sat. us est igitur Herculem agnoscere in numis Erythraeis, cultu quidem suo, sed habitu oris ad Alexandri similitudinem. Id seutantum artificum studio imitandi Lysippi, seu praetera

L11 2

terca

(5) f. 742. (6) Plinius l. V. c. 29. Pausanias f. 529.

terea vrbis in Alexandrum quodam honore factum sit,
non interpretor.

Nomina , quae in nauibus numorum Erythraeorum cusa fuerunt, haec sunt

I. ΑΣΚΛΗΠΙΑΔΗΣ ΔΗΜΑΔΟΣ *Asclepiades Demidis filius.*

II. ΑΠΕΛΛΑΣ *Appellas.*

III. ΑΡΙΣΤΕΑΣ *Aristeas.*

IV. ΔΙΟΠΕΙΘΗΣ. *Diopithes.*

V. ΠΕΛΟΠΙΔΗΣ *Pelopides.*

VI. ΔΙΟΝΥΣΟΣ *Dionysus.*

VII. ΜΟΛΙΩΝ *Molian.*

VIII. ΧΑΡΜΗΣ *Charmes.*

IX. ΑΝΟΘΕΜΙΣ *Anothemis.*

X. ΣΩΠΕΙΡΟΣ *Sopyrus.*

Hunc Sopyrum e Patino me adieciisse, supra commemorai. Quem illi magistratum Erythris gessere , vt eorum nominibus numi insignirentur ? Dicam , sicuti sentio , vbi res Erythraeas inde a principio percensuero. Antiquissimis temporibus Erythraei in duodecim Ioniae populis censebantur et ad Panionium conueniebant.(7) Sed cum Samiis Chiisque proximiori necessitudine ab stirpe vsque deuincti, eadem cum iis dialecto vtebantur. Attamen siue per inuidiam simulacri Herculis, siue alia causa , vt inter vicinos , bellum gessere cum Chiis. Ali quando Λευκωνίας πέρι , (quae qualis sit siue vrbis siue regio, haud sane video) tam infestis animis certarunt, vt Chii se excessuros singulos cum chlaena et tunica sponderent.

(7) Herodotus L I. c. 142. 143.

derent. Monentibus tamen coniugibus , animum rece-
pere ad audaciam et Erythraeos ipso illo obstinato furo-
re perterruerunt. Auctor est Polyaenus. (8) Et erant
mutua eorum odia insatiabilia , vt Erythraei etiam ho-
spitali iure , quo inter Graecos nullum maius, spreto , in-
ter mensas enecturi fuerint Chios , nisi aliquis eos de di-
scrimine admonuisset , vt Anticlides proditum reliquit.
(9) Res quoque cum Milesiis gessere aduersus Naxios,
vt Andriscus in rebus Naxicis et Theophrastus auctores
sunt. (10) Libertate sunt exuti a Croeso Lydorum re-
ge , vt tributum ex eo tempore penderent. Cum Cy-
rus aduersus Lydos duceret , per legatos ad defctionem
sollicitati , conditionem cum ceteris Ionibus , praeter
Milesios, respuerunt : igitur Lydis victis et legatis, quos
miserant ad regem , ab eo reiectis , arma ceperunt et
deserti a Spartanis , quorum auxilium implorauerant, in
deditio[n]em venerant , deterioribus conditionibus, quam
Lydi. Harpalus, qui Medos Cyro prodiderat, dux eo bel-
lo aduersus Ionas fuit. (1) Vi[cti] captique auxilia Persis tu-
lere contra Caras, Cauconas aliosq; populos. Pertaesi autem
seruitutis, Histiaeo Milesio auctore, Aristagora duce, electis
tyrannis popularem statum vrbis restituerunt. Sex an-
nos bellum est gestum a Darii Hystraspis praefectis, do-
nec victis Ionibus Aristagoras ad Thracas perfugit, (2)
Histiaeus bellum infeliciter restaurauit. (3) Histiaeus
duce-

LII 3

(8) I. VIII. p. 647. ed. Cesaub. (9) apud Athenaeum f. 384. (10) apud Parthenium Nicaeensem in Eroticis c. 9. (1) Herodotus I. I. c. 169. (2) Herod. lib. V. c. 126. (3) Herod. I. VI. c. 1.

ducebat magnam nauium classem. Milesii octoginta nauies, Prienenses duodecim, Miusii tres, Teii septemdecim, Chii centum, Erythraei octo, Phocenses tres, Lesbii septuaginta, Samii sexaginta praebuerunt, ut ex eo de potentia singularum urbium iudicari possit. Sed partem proditione, partem discordia, in ordinem redacti, Xerxem secuti sunt in Graeciam. In pugna ad Mycalem, quae eodem die Leutychide Lacedemonio duce, commissa est, quo victus ad Plataeas Mardonius, Iones defecere ad Graecos. (4) Erythraei Athenienses maxime sectati, fractis illis vicesimo Peloponnesiaci belli anno, defecerunt et Chii contra Athenienses opem tulerunt, ut Thucydides auctor est. Post id tempus tamen Atheniensibus fauerunt ducesque eorum copiis suis adiuuere. (5) Alexander benigne egit cum Ionibus: Antigonus ceterique Asiae reges libertati eorum non sunt aduersati. Hoc maxime cognoscitur ex foedere Smyrnaeorum et Magnetum pro Seleuco Callinico, quod in Arundelianis marmoribus insigne est. Romanos rerum dominos summo honore coluere. Itaque Attalum Pergami regem bello Macedonico a Philippo rege mari pulsum in portum receperunt. (6) In bello aduersus Antiochum regem Romanis quoque portum praebuerunt, ex quo maritimis urbēs ad defectionem sollicitarent et triremes miserunt ad augendam classem Rhodiam. (7) Quare bello

(4) Herod. l. IX. c. 102. seq. (2) Demosthenes de Chersoneso f. 38 (6) Polybii excerpta p. 1013. (4) Liuius l. XXXVI. 45. XXXVII. 8. ll.

bello confecto Romani Erythraeos pro singulari fide,
quam praestiterant, et agro donarunt et in omni praeci-
puo honore habuerunt. Ita Liuius e Polybio. (8) Hic
praeterea addit, agro donatos, quem iure suum
ostenderunt esse. Bello Mithridatico Erythrae in pote-
state regis fuerunt, a L. Lucullo liberatae. (9) Resti-
tut, Capitolio, quod L. Scipione, C. Norbano Coss.
conflagrauerat, C. Curio Cos. ad senatum retulit, *vt legati Erythras mitterentur, qui carmina Sibyllae Erythraeae conquista Romanam deferrent.* Missi sunt P. Gabinius, M. Otacilius, L. Valerius, qui descriptos a pri-
uatis versus circa mille Romam deportarunt, *vt ex Fenestella et Varrone et Apollodoro Erythraeo resert* La-
ctantius Firmianus. (10) Herophile illa Sibylla fuit, quam
Erythraei in antro Coryci montis apud se natam glo-
riabantur, patre Theodoro pastore, matre nympha co-
gnomento Idaea. (1.)

Ex his rerum Erythraearum conuersationibus
intelligi potest, ciues eius vrbis primum a Cno-
po in formam reipublicae redactos, sub Lydis Persisque
tyrannos accepisse, quibus electis vix sextum in
annum libertate poti, iterum iugum subierunt.
Pulsis tyrannis Aristagoras e consilio Histiae Milesii

52a-

(8) Liuius l. XXXVIII. 39 Polybius p. 1172. (9) Appia-
nus p. 339. ed. Tollii. Tacitus Annalium l. VI. c. 12. et Historiar.
l. III. 72. (10) Institutionum diuinarum l. VI. c. 6, de ira Dei
c. 22. (1) Pausanias f. 827.

σεμανγῆς ἐν ἑκάσῃ τῶν πόλεων ἑκάστης in singulis ciuitatibus praetorem unum instituit. Auctor est, Aristagorae fere aequalis Herodotus. (2) Is magistratus qualis apud Athenienses fuerit, satis exploratum habemus. Sunt autem e singulis tribubus quotquot annis leti numero ad decem, ita ut undecimus polemarchus adiiceretur, tamquam praefectus. Eorum munus in his ferre versabatur, ut urbem munirent et custodirent resque ad arma necessarias seu bello seu pace procurarent: eorum quoque erant ἔξετάστες καὶ συντέχεις, censurae quoddam genus, et tributi pro modo facultatum descriptio ad τεμεραρχίαν, tum iudicia iis de causis, si quis περὶ ἀποφάσεως ή καὶ περὶ ἀντιδικεώς postularetur, aut si quis bellum aciemque deseruisset: pacis causa, seu communica re cum senatu, (ut in psephinate de legatis ad Philippum apud Demosthenem de corona), seu ex sui sententia collegii, (ut in decreto senatus in Antiphonis vita inuenio) legatos mittendi ius habebant. Id exemplum imitati sunt Erythraei ceterique Iones, nisi quod unum praetorem sufficere putarunt, credo quod non ita magna urbs esset. (3) Non diuturnus hic status fuit, Persis tyrannos restituentibus, aut potius optimatum in urbibus potentiam, cui magis fidebant, ut nouarum rerum minus cupidae. Ceterum iustum et aequum imperium fuit, ut Aristoteles in politicis auctor est: (4) οὐ εἰν Ερυθραῖς δὲ εἴσαι τῆς τῶν Βασιλίδων ὀλιγαρχίας, εἰν τοῖς ἀρχαίοις χρόνοις, καὶ περὶ καλῶς εἰσιμελεψένων τῶν εἰν

τῇ

(2) l. V. c. 38. (3) Aristoteles Politicorum l. VI. c. 8. (4) l. V. c. 6.

τὴν πολιτείαν, ὅμως διὰ τὸν τὸν ἐλίγων ἀρχεθεῖ αὐτῶν ὁ δῆμος μετέβαλε τὴν πολιτείαν. Erythris quoque, cum vrbs sub Persarum regum imperio paucorum dominatione regeretur antiquis temporibus, tametsi qui praeerant, bene rem publicam administrabant, tamen tantummodo idcirco motus populus, quod a paucis regeretur, rei publicae statum mutauit. Summa igitur potestas ad populum deuoluta, qui praetores quotannis e corpore suo legit. Quemadmodum autem in plerisque Ioniae vrbibus antiquum Aristagorae institutum, iterum excussa Persarum dominatione, seruatum non est, ut summus magistratus praetor esset, ita Erythris nihil inuenio mutantum. Milesii sub Imperatoribus etiam archontas habuere, vt in numo Commodi ΕΠΙ. ΑΡΧ. ΜΕΝΕΚΛΕΟΥΣ. In numis Seueri Prytanean et Soterium, in Aurelii numo Euarestum, in Gallieni Diogenem archontem Harduinus vidit. Priencenses in eum modum archontem Iulium Saturninum in numo Valeriani, Chii Prasinum iterum et Aurelium Chrysogonum Epaphroditum et Cothyan Primum archontem signarunt. Samii in numo quodam ΕΠΙ. ΛΥΚΑΝΔΡΟΥ. ΙΕΠΕ. sub Lysandro Pontifice, Ephesii plerumque aut Αρχιεζέα aut Γερμηνατέα posuerunt. Clazomenii sub Claudio ΕΠΙ ΗΓΕΜΟΝΟΣ ΑΣΚΛΗΠΙΑΔΟΥ ΚΛΑΖΟΜΕΝΩΝ in Iuliae Domnae numo autem sub Philone praetore iterum. Haec sunt testimonia leuum quarundam iis in ciuitatibus conuersionum. At Phocaenses, Colophonii, Teii, Erythraei non nisi praetores habent in numis. Ut de Erythraeis tantum dicam, in numis sub Traiano apud Har-

Tom. II.

M m m

duinum

dūnum ΑΥΤ. NEPOΥΑΝ. TPAIANON. ΕΠΙ. CTPA.
ΠΙΡΕΙΜΟΥ in Elagabali numo ΕΠ. CTP. ΑΥΡ. NEI
ΚΩΝΟC. B *sub Nicone iterum praetore*, in Alexandri
Seueri numo ΕΠ CT Π. AI. ATTAΛΟΥ. TO. B.

Volupte esset, hos decem praetores suis annis
assignare, vt ea re aliquantum iuuari possit Ionicarum
ciuitatum historia. Nunc, quoniam eius copia nobis
non fit, id agemus, vt saltem aliquam in aetatem numos
inseramus. Atque cum Herculis vuitus omnia Alexandro
similia habet in his numis, sequitur ex mea opinione,
sub extremam huius herois aetatem et paullo post cudos
esse. Idem postulat elegantia humorum. Nam Grae-
cia his artibus usque ad ciuale bellum popul. Romani eni-
tuit, ita vero vt Alexandri temporibus summum fasti-
gium consecuta, labi paullatim et deficere sit visa. Ad
postremum quae Harduinus de Erythris Boeoticis et de
moneta a Thebis eam in urbem translata praedicat, ea
vero, vt dicam sine iracundia, in officina Archontii Se-
ueri, lepidi senis, cusa fictaque sunt. Illis temporibus
cum Thebae euersae, et post paullo cum hi numi cusi
sunt, Erythrae in Boeotia, vt Tertulliano verbo alia in
re utar, fuere nullae.

NVMVS GYRTONES
 VRBIS THESSALICAE
 ILLVSTRATVS
Auctore
 T. S. B.

IN Graecarum vrbium memoria desiderati adhuc *M. O. d.*
 sunt Gyrtoniorum numi. Ioannes Harduinus, qui *1727.*
 in vrbium populorumque numis illustrandis ma-
 xima laude paene vnum omnium versatus est, huius
 vrbis numum alium, quam ex Pyrrhi Ligorii schedis
 nullum citat. Et illum ne describit quidem, credo quod
 diffidebat Ligorii fidei, quem decoxisse satis constabat.
 (1) Lucas Holstenius autem numum illum e Ligorii
 schedis ita describit in castigationibus Stephani Byzantii:
*Circum caput muliebre ΓΥΡΤΩΝΙΩΝ in cuius altera
 parte caput iuuenis cum galea cristata conspicitur, iuxta
 cuius frontem leguntur duae litterae ΠΕ. quas Ligorius,
 forte non male, ΠΕΡΡΑΙΒΙΑΝ significare putat. Equi-
 dem επέχει malo.* Hunc, quem produxi, aeneum
 numum Buxbaumius ex oriente attulit, tanto artis lumi-
 ne nitentem, vt alios eius similes paucos, ab elegantiori au-
 tem opera et ingenio Graecos viderim nullos. Aduersa ha-
 bet

Mmm 2

bet

(1) Vide Raphaelem Fabrettum in *Columna Traiani* et in *Colle-
 ctione inscriptionum palli.m.*

bet caput virile laureatum, cuius barbae ramentum metalli inter cudentum adhaesit, quod eximiam artem aliquantum obfuscavit. Eo est insignior auersa, quae caput matronae cum diademate refert et hanc epigraphen ΓΥΡΤΩΝΙ Gyrtionorum.

Thessaliam antiquitus Pelasgi incoluere et iuxta eos Perrhaebi, vtrique testati et illustres Homericis versibus, cum Thessalicum nomen nondum existaret. Eodem auctore Homero, (2)

Oι Αργισσαν ἔχον δὲ Γυρτώνην ἐνέμουντο,
Ορθην, Ηλώνην τε, πόλιν τὸν Ολοσσούνα λευκὴν
Τῶν ἀνὴρ γεμόνευε Μενεπτόλεμος Πολυπότοιτης
Τιὸς Πειρθόοιο, τὸν ἀθάνατος τέκετο Ζεὺς.
Qui Argissam tenebant et Gyrtonem incolebant,
Orthen, Elonamque urbemque Oloöffona albam,
Eorum dux fuit (bello Troiano) Menepolemus Poly-
poetes,

Filius Pirithoi, quem immortalis genuit Jupiter.

At Guneus ex Cypho duas et viginti naues duxit, quem Enienes et Perrhaebi sequebantur. (3) Fuere igitur Gyrtonii cum caeteris ciuitatibus foederatis sui iuris et inter Pelasgos censebantur, postea partem sunt Perrhaebis, partem Thessalis adscripti. Strabo Perrhaebiae attribuit, quam iuxta Peneum usque ad mare antiquitus protendi meminerat, minora vero in Homerum scholia Thessaliae, Apollonii Rhodii scholiaста (4) alterutri, Stephanus Byzantius vtrique: Γύρτων πόλις Θεσσαλίας

(2) Il. B. v. 738. (3) ib. v. 748. (4) I. I. v. 57.

σαλίας ἢ Περραιβίας, ἡνὶ Ομηρος Γυρτώνην καλεῖ,
ὅς Ιτώνην ἢ Ιτῶνα. (5) Scilicet quod Perrhaibia in
Thessalia erat sita. Claudio Ptolemaeo quid acciderit,
cum illius situm vrbis describeret, non satis exploratum
habeo, tantum coniecturis ducor. Ita in editis le-
gitur :

ΠΕΛΑΣΓΙΩΤΩΝ

Γόννος μῆ.	Ιε. — λ'θ. L'. ιε.			
		Gonnus	48. 12.—39½. 12.	
Δάρισσα ν.	— λ'θ.	ς'.		
		Larissa	50. 0.—39.	6.
Φεραι	ν. L'	— λ'θ.	ς'.	
		Pherae	50½. —39.	6.

ΣΤΥΜΦΑΛΙΑΣ.

Γυρτώνη μέ.	L' γ'. — λ'θ.	L'.		
		Gyrtone	46½. 3.—39.	½.

ΕΣΤΙΩΤΩΝ.

Φαιστός μέ.	δ'. — λ'θ.	γ'.		
		Phaeitus	47. 4.—39.	3.
Γομφοί μέ.	γ'. — λ'θ.	ς'.		
		Gomphi	47. 3.—39.	6.

ΘΕΣΣΑΛΩΝ.

Υπατα μέ.	L' γ'. — λη'.	L' ηγ'.		
		Hypata	48½. 3.—38½. 3.	
		Mmm 3		Stym-

(5) Sic quoque e Stephano Eustathius ad Homeri Boeotiam f. 333. ed. Rom.

Stymphalia in Arcadibus fuit, ad quos nihil aut **Gyrtone**, aut hic Ptolemai locus. Idcirco acutissimus Palme-rius emendauit, vt esset ΣΤΥΜΦΑΙΑΣ. Stymphaea regio in Epiro est, super Thesprotiis. Et huic regioni numeri quoque congruunt graduum, quos in Ptolemaeo positos cernimus. Idcirco Gerardus Mercator vrbem quoque in Epiri finibus collocauit, ad quos nihil pertinere, vel ex eo certum est, quod Gyrtone haud longe a Larissa sita fuit. Quare, vt plerique alii numeri, ita hi quoque in geographo corrupti fuerunt, nam verum situm Ptolemaeus ignorare non poterat. Si itaque gradus longitudinis emendes, habebis Gyrtонem suo in situ prope Larissam. Scribes autem sic

Γυρτώνη μ'Θ. L'γ'-λ'Θ. L'. **Gyrtone** 49 $\frac{1}{2}$. 3-39 $\frac{1}{2}$
 Ita scripsisse videtur Ptolemaeus, dein cum corrupti es-
 sent numeri, vt ad Stymphaeam quadrarent, sciolus a-
 liquis id nomen regionis inferuit, ex quo iterum corru-
 pto, facta est denique Stymphalia. Id autem ipse vr-
 bium ordo suudet. Nam Ptolemaeus monuit (δ) se in
 qualibet regione situs oppidorum a borea prosequi, do-
 nec in noto desinat. Itaque Gonni, Larissa, Pherae,
 Gyrtone, altera infra alteram tamquam australior ponen-
 da fuit. Addidit Ptolemaeus se situs quoque vrbium ab
 occidente versus orientem citare. Sed illud in eo non
 est perpetuum. Hoc loco cum Epirum subiectam Ma-
 cedonie, in qua Theffalos, tamquam minores et, vt
 tum erat, attributas gentes, censet, perpetuo respicit
 et

et ad eam paullatim appropinquat, situs urbium ab oriente versus occidentem persequitur. Sic Phaeſtus Gomphi et omnis Eſtiaeotis regio, ſic Theſſaliotis ad occidentem poſt Pelasgiotas ponuntur et denique Phthiotis regio extrema eſt, quod et Pelasgiotidi et Theſſaliotidi ad meridiem praetenderetur. Quae cum ita ſint, Pelasgiotidi Gyrtona attribuit Claudioſ. Hieronymus apud Strabonem tradit (7) τὸν παλέμενον Πελασγικὸν πεδίον Pelasgicum campum, ut tunc nuncupabatur, habuisse vrbes Lariffam, Gyrtona, Pheras, Magnetin et alias qua-dam. Alia videtur eſſe Pelasgiotis regio, ad quam nihil Magnetis, alius Pelasgiicus ager, in quo etiam Magnetis cenebatur. Μαγνῆτις etiam Sophocli et Parthenio eſt Μάγνησις Magnesia, caput prouinciae eius nominis. Sed Ptolemaeus nullam prouinciam Magnesiam edidit. Vrbem Magnesiam et eius regionis alias tres Pelasgiotis, ceteras vrbes Phthiotis adſcripsit. Ex quo vides errorem Plini, cum Gyrtonain Magnesia collo-cat, veluti inter Pelasgiotida et Magnesiam prouinciam nihil discriminis fit. Decipere eum etiam Strabo poterat, (8) qui ſic fatus eſt: περὶ τὸν Πήνειον ὡς τὸν Πήλιον δικιντες ἢ οἱ τὴν Γυρτῶνα ἔχοντες ἢ ἄλλοι πλέοντες ad Peneum et Pelium colunt cum Gyrtonii, tum alii plures. Recte de Pe-neo fluuio, at Pelius mons in Magnesia potius erat ſitus. Magnesiae igitur vrbs erat Gyrtone, ſi Pelio monti ſubiecta fuſit. Aut denique ex eo natus eſt error, quod Plinius Gyrtoni finitimam vrbum Lariffam eſſe acceperat,

(7) f. 505. (8) f. 503.

rat, eam autem iudicauit Larissam dici, quae ad Ossam in Magnesia sita fuit. Ad situm autem urbis confirmandum oportebat animaduerti, quod tres istis in regionibus Larissae essent. Una ad Ossam in Magnesia, non admodum celebrata, nota tamen Straboni et Stephano, altera ἐπὶ Θαλάσση dicta Pausaniae, Cremaste cognomine, in Phthiotide aliquanto interuallo a mari, tertia Pausaniae παρὰ τὸν Πηγαῖον. Strabo et ex eo Stephanus Cremasten illam etiam Πελασγίαν dictam suisse testantur: sed fortassis aliquis error subrepigit, ut id nominis attribuendum sit potius Larissae ad Peneum, quam nobilem Thessaliae urbem vocat Liuius: (9) *Larissam*, inquit, non illam in Thessalia nobilem urbem, sed alteram, quam Cremasten vocant, subito aduentu cepit. In hac Larista ad Peneum obiit Hippocrates Cous medicorum facile princeps atque in agro inter eam urbem atque Gyrtona interiecto sepultus est, ut e vita eius apud Soranum Ephesium cognoscimus, cuius ad aetatem monumentum superfuit. Ex quo etiam Ioannes Tzetzes in chiliadibus (10) Θανῶν ἐτάφη μέσον δὲ Λαρίσσης ἢ Γυρτῶνος.

In antiquis fabulis quoque non obscura fuit Gyrtone. Fuit quondam proles Elateia, Caenis,

Thessalum virgo pulcherrima, perque propinquas

Perque tuas urbes (tibi enim popularis Achille)

Multorum frustra votis optata procorum, (1)

Il-

(9) l. XXXI, 46. (10) histor. VII. Chil. CLV. 945. (1) Vide praeter Nasōnem, Scholia in Apollonium Rhodium l. I. v. 59.

Illi amore virginis captus Neptunus , voti compos fit
et post gaudia optionem permittit, quae vellet, petendi.
Illa de amissio pudore praefata , in alterius conditionem
sexus transire cupit,

grauiore nouissima dixit

*Verba sono, poteratque viri vox illa videri,
Sicut erat: nam iam voto deus aequoris alti
Annuerat.*

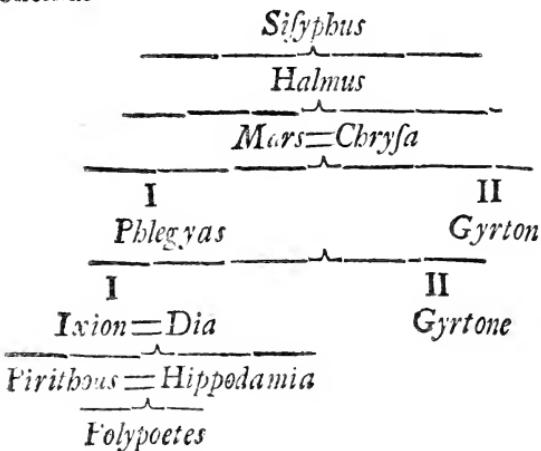
Scholiasta Luciani , qui Samosatensi hoc scurra dignus
obtigit , in Gallo , (2) fabulam hanc lepidorem fecit,
cum per se esset nequissima. Ait enim , puellam Ne-
ptuno negasse, ni iuraret , facturum se prius, quae ipsa
petiisset : petiisse eo annuente , vt illico e virgine esset
mas : fecisse ita Neptunum Stygia numina et iusiuran-
dum metuentem eaque mala fraude ductum voto exci-
disse potiundae puellae. Nec sic tamen Caeneo
consistere licuit per Maronem , apud quem Aeneae in
vmbbris occurrit

*Iuuenis quondam, nunc foemina Caeneus,
Rursus et in veterem fato reuoluta figuram.*

Vt Ouidius Perrhaebum , ita Palaephatus Peripa-
teticus Thessalum fuisse scribunt : at Hyginus tradit
(3) Magnesium fuisse Caeneum Elati filium eundemque
apud Gyrtonios egisse et ea in vrbe genuisse Coronum fi-
lium. Quid si cui per insomnium porta eburnea immit-
tantur hae cogitationes , Caenin et Caeneum vtroque
sexu alternis in numi partibus spectari ? Quid? si Ar-
Tom. II. N n n chon-

(2) p. 18. (3) p. 34. ed. Munkeri.

chontius ille Seuerus hunc quoque numum Rufo Celsō alicui, aut Ceionio Iuliano aut Fabio Sosiano, aut si cui alii fallendi artifici protulit, hi autem ex virili maliebri-que eodem in numo vultu, talem nobis fabulam et Hyginum excuderunt? Plane, vt e numis Sidonis, Tyri ailiarumque vrbiū effictas esse fabulas contendis iucun-dissime Hardouine. Si cui ista non satis arguta videntur, huic per me licet conditorem auctoremque Gyrtones in illis signis quaerere: habemus enim iterum vtriusque optionem sexus. Phlegyam primum in agro Gyrtonio consedisse reperio. Nam Strabo testis est, (3) ab eo Phlegya Phlegyas dictos, qui postea Gyrtonii dicti, a Gyr-tone Phlegyae fratre, vt Stephanus Byzantius, aut a Gyrtona Phlegyae filia, vt eruditus in Apollonium Rhodium critici. (4) Haec vt intelligas, genealogiam apponemus



Po-

(3) f. 503. (7) L. I. v. 57.

Polypoeten ducem secuti sunt ad bellum Troianum, Homero teste, Gyrtonii. Is, eodem teste, Pirithoi erat filius, Pirithous Iouis. Nam alii, vt Pausanias et docti Critici Apollonii Rhodii, Diam Pirithoi matrem Ioui succubuisse ferunt, alii Ixioni marito filium hunc peperisse tradunt, in quibus est Apollodorus. Ixion Lapitharum, populi ad Peneum, rex, Phlegyam patrem habuit, vt scholia minora ad primam rhapsodiam, quamquam alii diuersa tradunt: Phlegyas Chrysanmatrem, Halmi filiam, Sisyphi neptem, vt Apollodorus γενεαλογῆ. At Strabo Phlegyam hunc Ixionis fratrem prodit. Ergo Gyrton Phlegyae secundum Stephanum frater, frater quoque Ixionis, Gyrtone vero Phlegyae filia Pirithousque patrueles fuerunt. Quod aliter fuit, si communem fabularum fidem sequimur. At Onomacritus vetus argonauticorum auctor Phalerum Alconis filium conditorem urbis prodit his verbis. (5)

Αλκωνος δὲ Φάληρος ἀπὸ Αισηφῶοι ἔσδιων
Ηλυθεν, δ' οἱ Γύρθωνος ἀλισεφες ἐκτισεν ἄσυ.

Phalerus Alconis filius ab Aesopo flumine

Venit, qui munitam Gyrtonen urhem condidit.

Deinde eum cum Argonautis profectum esse canit. Alcon autem ille, Erechthei erat filius, Atheniensis.

Sed nihil horum in numero quaerendum est. Nam vt liquido dicam, nullius alterius vultus ille laureatus est, quam Iouis Olympii. Nam eo in agro Gyrtonii conseruent, in quo sedes huius religionis et ruminis ad Peneum fluuium in Tempis Thessalicis et summo Olympo fuit.

Nun 2

Ma.

(5) v. 143. (6) Pausanias f. 412. 417.

Matrona autem in auerso numo Iuno Pelasgia est ; a Thessalis maxime culta, a qua non diuersam arbitror Iunonem Olympiam , nisi quod hoc nomine coleretur a mulieribus in Elide, cui etiam Iunonia celebrabant, quanto quois anno Olympicum stadium ingressae.

Numus cusus videtur florentissimis Thessalorum rebus et arte fingendi in aere ad summum fastigium euecta, hoc est, post Philippum Amyntae regem. Is enim cum tyrannos e Thessalia eiecit, respirare sibi sunt visi Thessali et animos accipere. Ex eo tempore Philippus tam beneficiis, quam clandestina vi, Thessalorum voluntates obnoxias tenuit, Quare Demosthenes in Philippica tertia : (7) ἀλλὰ Θετταλία πῶς ἔχει ; οὐχὶ τὰς πόλεις όντας πολιτείας ἀντῶν ἀφήγηται όντας τετραδαρεχίας κατέσυστε παξ ἀντοῖς, οὐα μὴ μάννον κατὰ πόλεις, ἀλλὰ όντας ἔθνη διάλευστιν ; at, qui status Thessaliae est? nonne et urbes ademit? et statum rerum publicarum peruertit et quatuor principatus instituit, ut non modo singulae urbes, sed gentes quoque singulæ ei seruant. Id tamen nihil offecit Thessalorum rebus, qui aliter rationes suas de libertate inibant, quam populus Atheniensis. Sub Alexandro Magno militariunt Thessali, fidissimi omnium et ab eo tempore Macedoniae regibus semper obnoxii A Philippo denique Demetrii filio oppressi Romanos grataanter acceperunt. Victo rege, T. Quintius Flamininus εἰλευθέρος, ἀφορολογήτος, νόμοις χρωμένος τοῖς πατρίοις, inter ceteros quoque iussit Thessalos et Perrhaebos (8) Cum Antiochus Magnus Thessalam cum

ex-

(7) f. 47. ed. Aurelianensis. (8) Polybius p. 1108. 1111. Liuuius l. XXXIII. 32.

exercitu ingressus vrbes partem deditio[n]e, partem pugnando in potestatem accepit, Larissa frustra obsessa, Gyron ne petita quidem e vicino armis. (9) Ex quo intelligi potest, vrbe[m] fuisse munitissimam. Nam etiam Perseus, cum Thesflalos ad societatem belli aduersus Romanos armis cogeret, Mylasque moenibus firmissimis vi cepisset, non ausus est Gyronem in propinquu[m] sitam tentare, quam T. Minucius Rufus et Hippias Theffalorum praetor quam praesidio intrauerant. (10) Extremum beneficiorum S. P. Q. R. in Graecos, libertas Macedonum. Post ea haud longe ab extrema seruitute Graecorum conditio discrepauit. Hoc illud spatum est, quo libertas Theffalorum et Perrhaeborum primum a Philippo firmata, tum nequidquam a Philippo Demetrii filio et Antiocho et Perse regibus attentata, Romanis opportuna vindicantibus, postremo sub initium perturbationum in Romana republica oppressa est. Artium autem illarum, quae in aere fingendo metalloque versatae sunt, summa dignitas sub Alexandri Macedonis aetatem fuit. Nam Plinius auctor est, (1) post Olympiadem centesimam vice-simam artes eas cessasse, centesima autem quinquagesima quinta reuixisse, cum tamen artifices fuere, illis, qui antea viguerant, longe inferiores. Hic numus tantum in arte decus seruat, vt ad illam priorem artificum aetatem referri mereatur.

Nnn 3

VETVS

(9) Liuius l. XXXVI. 10. (10) Liuius l. XLII. 54. (1) l.
XXXIV. c. 8.

VETVS INSCRIPTIO
PRVSSICA

T. S. B.

ΔΩΓΙΩ.ΟΡΡΩ.ΑΗΛΙΩ.
ΞΗΟΣΓΙΦΗΦΙΔΕΞΩΞΘΡΑΧ
δειξ

ΔΩΓΙΩ.ΟΡΡΩ.ΑΗΛΙΩ.
ΞΗ·ΞΓΦΗ·ΦΙΔΕΞΩ
ΞΘΡΑΧ.ΞΕΞ.

Singulares esse has litteras , nec antea in Europa
visas, exclamabunt omnes talium curiosi: nos,
vnde eas acceperimus, primum dicemus, tum
sententiam nostram exponemus , quae cupio
quidem , vt eruditis viris placeat , malim tamen, vt post
me alii quod verissimum sit inueniant , aut nostram opini-
onem amplius confirment : fieri enim potest, vt res
haec

haec tam exilis , aliquem fructum in historiam importet, si planius explicetur. Christianus aliquis cum Philippo aliisque e Cisterciensium disciplina inter primos fuere, qui in Oliuense monasterium Samborii liberalitate institutum concederunt. Et Christianus quidem Freieualdensis in in monasterio Coluicensi litteris , vt tum erat, sic satis eruditus , in Oliua factus est Abbas. Is cum animaduetereret, in Prutenis non modo e plebe homines , sed summo loco et potentia ad religionem veri numinis commoueri, cum Philippo suo profectus est Romam ad Innocentium III. vt eum de his , quae in Prussia fiebant, quaeque sibi videbantur , admoneret. Roma anno cloccxviii. cum mandatis ad archiepiscopum Gnesnensem rediit, cui, quae episcoporum munera essent, a Pontifice commendata sunt interea, donec suos Episcopos Pruteni acciperent. (1) Anno cloccxiv. Christianus Varpodam et Suauabrimum principes viros e Prutenis, tamquam primitias Romam deduxit , et Varpoda quidem Philippi, Suauabrimus autem Pauli nomine initiati sunt. Philippus Laufaniam, quam tenuerat, Paulus Lubouiam, dono dedere Cisterciensium ordini. Innocentius anno post, donationem confirmauit et Christianum Prussiae primum episcopum fecit. (2) Insecuta sunt ea tempora, quibus expeditionem sacram suscepserunt equites Teutonici, subactaque quadam Prussiae parte , anno

cloccxl i

(1) Haec et cetera omnia ex diplomatis accepimus, quemquaedam in decretis et epistolis Innocentii III. a Baluzio editis, alia in Lucae Davidis chronicō MSto reperiuntur. (2) Ebulla Pontificis et chronicō Montis Sereni p. 109. Monachus Trium Fontium p. 444, 445.

cl^ocxl 1. Christianus diem obiit. Is, quae ad superstitionem Prussorum historiamque veterem et expeditionem ab equitibus Teutonicis suscep^tam pertinebant, diligenter consignauit in libro , (3) qui nunc quidem aut latet in tabulariis aut certe nobis periit. Vsi autem eo sunt Simon Gruna, monachus Dominicanus et ille pater historiae Prutenicae Lucas Dauid , qui ante hos centum et quinquaginta annos et amplius, commentarios suos excuderunt , nondum publice editos. Ambo e Christiano episcopo inscriptionem vexilli Prutenici suis scriptis inseruerunt. Quae quia in Simonis Grunae MS. quod a^pud Regiomontanos in bibliotheca Augusta exstat, non nihil differt ab ea , quam Lucas Dauid expressit in autographo , ex quo in eadem bibliotheca nos nostrum exemplar descriptissimus , idcirco primum e Gruna , tum deinde etiam e Dauide inscriptionem sub principio posuimus. Caspar Schuzius quoque numos quosdam **ex agro erutos** in chronico producit litteris non abhorrentibus ab illarum forma : de quibus tamen hoc loco non dicemus.

Duae opinione^s de his litteris obtinuere adhuc inter populares meos. Nonnulli ab otiosis confictas esse opinioni sunt : alii runas esse contenderunt. Vtrique mihi compendium facere sunt visi. Nam quae quis non intelligit, ea , si somnia et nugas dicat esse , in perpetuum se expedire videtur ab inquirenda veritate , ne tamen confiteatur se hominem esse et aliquid ignorare : qui autem runas esse perhibent, hi sibi videntur aliquid dicere, dum

(3) Cui titulus is fuit: *Liber filiorum Belial et de eorum superfluitonibus.*

dum nobili quidem, sed obscura voce alios absterrent, ne quaerant amplius. Hos ego patienter audirem, si runas recordarentur a septemtrionalibus populis dici cuius-uis litteras gentis, non eas modo, quae in saxis Sueonicis, Noruagicis, Islandicis, Danicis incisae sunt. Sic *Griskar runir*, *Graecas*, *Ira runir*, *Irlandicas*, *Groelandoukar runir* Gronlandicas vocant, teste Arngrimo Iona in *Crymogaea*, et *Vplandoukar runir* et *Venda runir*, ne quid dicam de *Sigrunar* seu magicis ad incantationem characteribus. Istum in modum per me quisque has quoque Prutenicas runas nuncupet, dum ne aliud se dicere putet, quam ἀυτὸς τύπος, γεάμματα. At illi nostri aliter sentiunt. In Britannia veteres Saxones runis seu litteris septemtrionalibus vsos esse, ex eo coniicit Georgius Hickefius, (4) quod, cum ab Aelfredo rege ad Romanum Francicumque scribendi modum Saxonica scriptura conformata est, vestigia tamen runici characteris manserunt, ut e specimine codicis Lichfeildensis appareret. (5) Francos etiam et Alemannos septemtrionalibus his ruinis aliquando vsos fuisse, Olaus Vormius in literatura Danica ex Auentino et Lazio colligit. Id quoque e Francico alphabeto intelligas, quod Mabillonius libro quinto rei diplomaticae exhibet. In eum igitur modum aliqui hos ad orientem populos, et Prutenos veteres a Scandinauis runas accepisse contendent. Sed tanta in ignorantie runarum septentrionalium versantur,

Tom. II.

Ooo

vt

(4) In *Thesauro linguar. septemtrional.* T. I. praef. f. xxxv.

(5) In *Grammatica Franco Theotisca.* f. 3. 4.

ut operosa confutatione nequaquam indigeamus. Qui fidem Christiani suspectam habent, duobus monumentis refelluntur, quae doctissimus Messerschmidius Gedanensis ex oriente descripta secum attulit et Societati nostrae communicauit. In his enim idem litterarum genis magna cum voluptate conspeximus. Primum monumentum est inter *Teschan* et *Ierbam* fluuios in Ienizeam se effundentes in deserto Kirgisico, loco inter agrestes tumulos eminenti, repertum. Alterum autem saxum in editiore colle Kirgisici deserti ex aduerso profluentium in *Vybatheem Bee* et *Nonach* ostiorum positum fuit.

*Tab. 28.
I. II
III. IV.*

Quales nunc dicemus eas litteras esse? Nihil valde asseueranter dixerim. Attamen intelligere mihi videor, populos ad Caucasum atque in omni tractu septemtrionali viros esse peculiari hoc genere litterarum. Clemens Alexandrinus in Stromatis (6) ex Pherecyde coniecturam duxit, Scythas certa symbola adhibuisse. Sed Fasti Sienli, qui in Heracleo minore desinunt, inter gentes litteratas recensent, Sarmatas, Scythas, Cappadocas, Iberos seu Georgianos et Bastarnas. Et Eustathius in Homerum, (8) illorum populorum litteras his verbis attigit: ἡ τῶν τινες ὕζερον Σκυθῶν ἐσήμαινον, ἡ γέλων, εἰδωλάτινα ἢ πολυεδῆ γραμμικὰ ζέσματα ἐγγεάφοντες, ἥτοι ἐγγλύΦοντες πίναξι, τετέσι σανίσιν ἀλλοίαις τε ἢ ταῖς ἐν πύξιν, quidam, inquit, posteriorum

(6) f. 567. (7) p. 60. ed. Rad. (8) f. 632. ed. Roma.

rum attate Scytharum , quae vellent , symbolis quibusdam suis notabant , variaeque duclis figurae inscribabant aut insculpebant potius tabulis seu afferibus , tum aliis , tum buxeis . Τὸς ὑγεζὸν Σκύθας vocat istas , quae veterem Scythurum sedem occuparunt , alterius stirpis et corporis gentes . Tabulas etiam Graeci veteres adhibuerunt , ex quo δὲ πίναξ ἡ τὸ πυξίον liber dicebatur , et ξύει scribere , ut alibi Eustathius . Sic Romani ab rudium aetatum more tabulas appellarunt seu legum seu testamentorum codices . In Scythia et Thracia lapides litteratos passim exstisset , Herodotus (9) planis verbis testatur eosque Sesostri et Aegyptiacae expeditioni attribuit . Iornandes Geta , seu Alanus potius , scribit , aum suum Periam notarium fuisse apud Candacem regem Alanorum inferiorem Moesiam tenentium . His addit : ego quoque , quamvis agrammatus (Latinis puta litteris nondum institutus) ante conuersionem meam notarius fui . Suas igitur et peculiares litteras Alani adhibuerunt .

Nicolaus Keder dignissimus illa nobilitate et virtutum et doctrinae humanitatisque gloria , in numis Gothicis , quos magna cura collegit , sibi ipse minime satisfecit , quod runas nullas vsquam reperiret . Nec poterat aliter fieri , cum Scandinaicae runae frustra quaererentur in numis nec Sueonicis , nec Geticis . Nam quod doctissimi viri numeros Macedonios et Thracios , ab illa

(9) L. II. c. 106.

eluuiione gentium passim disseminatos, Hispanicos etiam quosdam a Gothis suis conflatos opinantur, in eo nimium pietati patriae, qua omnes populos antecellunt, tribuisse videntur. Is ipse numus, in quo Kederus amicissimus Othinum sibi reperisse videtur, ex illa seu Macedonum seu Thracum officina exiit. Testimonio esse possunt numi qui extant indubitatae fidei Macedonici et Thracici, quos si cum his conferas, de quibus dubitatur, quos ue tamquam ex inopia consilii et ex desperatione Gothicos nonnulli etiam in Italia et Gallia vocarunt, nihil prius in mentem veniet, quam id quod sentio et dico. Vnum eximum habet cimeliarchium Imperatorium, plane talem, vt sunt caeteri omnes, quos Gothicos dicunt, sed in quo II Graecum diserte scriptum est, veluti hic in figura vides, vt Perdiccam possis agnoscere alterutrum, nam id ego nunc non ago. Tametsi igitur in his numis frustra quae sitae litterae Alanorum et Getarum, forte et vetustiorum Scytharum, tamen mea opinione, his quae produxi, monumentis conseruatae sunt.

Inter primos populos, qui litteras ad sermonem adhiberent, Syri et Phoenices fuere, a quibus Graecos eductos fuisse satis constat. Dolendum est tamen, ita periisse nobis Phoeniciarum memoriam litterarum, vt ex numis Punicis et Palmyrenis Persicisque monumentis nondum plane restitui potuerit. Bernardus Montefalco in *Palaeographia Graeca* (10) infeliciter tentauit aliquas

lit-

(10) f. 118. vide *Diarum Italicum* eiusdem p. 365.

Tab. 28.
Fig. V.

litteras reducere, usus est enim numis principio truncatis littera vna, ut numus alius extremo caret apud Nicoluum Haynum Romanum. (11) Apud Haynum tamen is ipse numus, quem Demetrio inscriptum Montefalco exhibit, integris litteris omnibus reperitur. (1) Huic vni numo multum debemus, nec desperandum est, in restituendis litteris Phoeniciis progressus insignes fieri posse, si quis huic negotio se dedat. Litterae autem Phoenicicae minores exstant in numis, maiores quadrataeque, forte et antiquiores in monumentis Palmyrenis. In monte Sinai quoque incisae sunt litterae, quas Cosmas Indicopleustes Iustiniano imperante vidit. Earum alias Athanasius Kircherus in prodromo Copto et Oedipo edidit, alias mecum communicavit clarissimus Lacrosus e schedis Egmontii de Nyenborg nobilis Bataui, qui anno cl^o locccxxi. eas de rupibus Sinai montis descriperat. Plane autem cum Phoenicicis, ut in numis exstant, conueniunt. Phoenicicae litterae in Persiam quoque commigrarunt, ut alibi e Diodoro Siculo monui. Apparet id etiam ex inscriptionibus Persepoltanis. Ab hac stirpe Parthicae quoque litterae propullularunt, quibus ad hanc usque aetatem Gauri, Magorum reliquiae, pulsa ex Persia quidem, sed in India receptae, vtuntur. Primus eas Thomas Hyde Europaeis ostendit. Armeni et Persicis et Graecis litteris sunt vsi, teste Mose Chorenensi in genealogia Armenica posterorum Iapeti. (2) Is suo tempore vetusta prouinciarum, vicorum, aedium,

Ooo 3 pri-

(11) N. Thesoro Britanico. t. I. p. 105. (1) t. I. p. 100,

(2) p. 9. 410. ed. Amstelod.

priuatarum Icium foederumque acta Persicis Graccisque litteris exstitisse, Armenicas autem litteras ante Miesrobum neminem instituisse scribit. Rem omnem ita narrat Moses Chorenensis. Cum christiana religio auspiciis Tiridat's regis tertio post Christum natum seculo per S. Gregorium in Armenia radices egisset, ex eo tempore Miesrobus Varasdati et Arfacis IV. a secretis, vir religiosus et pietatis augendae cupidus, relicta aula concessit in monasterium. Atque cum esset Graecae linguae peritus, non modo praedilegere populo sacras scripturas solebat, sed etiam interpretari. Graeci alii sacerdotes ignari Haicanæ linguae praedilegebant quidem Graeca, sed qui interpretaretur, erat nemo. Haec res commouit Miesrobum, ut apud animum suum constitueret, Graeca Armenice traducere. Nequidquam hoc tentabat, nisi si litterae exstarent, quibus ea commode transcriberentur. Communicato consilio cum Isaaco patriarcha Armeno, adiit Abelem quendam, quem audierat id ipsum agere, ut efformatis secundum Graecos litteris, Haicanum sermonem litteratum efficeret. Cum autem imperfecta omnia isthinc reperiret, ad Danielem episcopum in inferiori Mesopotamia et Edeßae ad Platonem rhetorem tabulario praefectum adit formasque litterarum fabricari instituit. Sed cum Plato in talibus parum se proficere videret, Epiphanium commendat magistrum suum, hominem perquam eruditum. Ad eum profectus Miesrobus Samosatam, acceptoque diem obiisse Epiphanium, cum Rusino discipulo Epiphanii

Grae-

Graecis litteris doctissimo rem communicat , nec hilum proficit. Huic loco Moses Chorenensis τὸν Θεόν ἀπὸ μηχανῆς aduocat. (3) Miesrobo visum videre animi cogitatione manum inscribere lapidi omnes litterarum formas copulationesque Armenicae scripturae. Protinus Miesrobus ita vt animo conceperat rem , Rufino ostendit et perfecit. Perfecit autem , vt ait Moses , litterarum formis e Graeco deriuatis , reuersusque in Armenia Isaaco patriarchae exposuit , hic autem regi Vramshapo. Rem placebat conferri cum Theodosio Graecorum imperatore et Attico patriarcha CPlitano , interea Isaacus et Miesrobus mittunt Edestam , Alexandriam Athenas et CPlin iuuenes , qui Graecis litteris instituti sacras scripturas Haicana lingua interpretati sunt. Easdem litteras Miesrobus Iberibus et Georgianis tradidit , teste Mose Chorenensi(4)

Haec ita de origine litterarum Armenicarum et Iberiarum Armeni. Ego vt non negauerim , esse quandam Graecarum Armenicarum et Georgianarum litterarum conuenientiam , vt aliae ex aliis sint ductae , tamen id potius mihi sentire videor , ex Graecis litteris factas esse Ibericas , ex Ibericis demum Armenicas , Ibericas vero antiquiores esse , vulgatasque per populos Scythicos , Alanicos , Geticos vsque in extremum orientem penetrasse. Sane , si quis haec , quae produxi , tum Prutenica , tum nescio cuius populi in disertis Kirgificis

(3) p. 401. (4) p. 412.

sicis monumenta inspiciat atque cum Ibericis litteris conserferet, is minime dubitauerit, summiam earum litterarum congruentiam animaduerti. Duo autem sunt genera litterarum Ibericarum, minora, quibus maxime videntur, sed recentia, tum maiora, sed vetusta. Primum quod scio, alphabetum Ibericum vulgatum est in Europa anno c^lc l^oc xxix. typis Congregationis Cardinalium de propaganda fide, cum quibusdam speciminibus linguae. Sed minores tantummodo litterae eo in libello excusae fuerunt. Eodem anno iisdem typis Stephanus Paolinus, adiuuante Nicephoro Irbacho Georgiano monacho S. Basilii, edidit lexicon Georgianum et Italicum, in quo etiam alphabetum illud minus principio libri positum est. Maiores autem litteras primus nobis descripsit Franciscus Maria Maggius Panormitanus, Clericus regularis Romae iisdem typis, anno c^lo l^oc^l xx in syntagma linguarum orientalium, quae in Georgiae regionibus audiuntur. In his prima est institutio Georgiana linguae. Ex Maggio litteras illas Andreas Mullerus Greiffenhangius produxit. Praeterea Romae doctrina christiana Bellarmini et Litania Mariae Lauretanae edita sunt Georgiana lingua.

*Vt igitur Ibericae litterae cum his Prutenicis et illis
Kirgisicis comparari possint , apposui eas hic in tabula.
Vnum adhuc aduertet lectorem , quod in monumento
figuram statuae plane Aegyptiacam cernit . Hoc nobis
minime aduersum est . Nam in Colchide , vnde has lit-
teras profectas diximus , multa vestigia Aegyptiacae
stirpis*

stirpis cum ab Herodoto tumab aliis animaduersa sunt. Herodotus sic ait : (5) Φαίνονται ἐόντες οἱ Κέλχοι Αιγύπτιοι, νοήσας δὲ πρότερον ἀυτὸς, ἢ ἀκέστας λέγω Colchi videntur Aegyptii esse : id dico, quod iudicio quodam meo et sensu animaduerti, prius quam ab aliis idem referri accepi. Et Colchi quidem, quos percunctatus est, e prisca memoria asseuerabant, maiores suos ab Aegypto profectos. Aegyptii non ita asseuerate quidem, attamen ut opinarentur Colchos ab Sesostris exercitu iis in regionibus relictos fuisse colonos. Argumento erat, quod vultus Colchorum Aegyptiaca ora referrent, quodque soli illis in tractibus Colchi et Aegyptii lini fabricas haberent et quod lingua vtriusque populi conueret, quod postremum maximi facio. Dionysius Periegetes (6) idcirco quoque

Πάρδε μυχὸν Πόντον, μετὰ χθόνα Τυνδαριδάων Κέλχοι ναιετάσσοι, μετάμυθες Αιγύπτοι.

Ad intimum Ponti recessum, post terram Tyndaridarum

Colchi degunt, colonia Aegypti.

Itaque mirum non est, si e Colchide et Iberia aliquid Aegyptiacis simile ad vicinas gentes vna cum litteris penetrauit.

(5) l. II. c. 104. (5) v. 688.

NICOLAI BERNOVLLI
Ioh. Fil.
V I T A.
C. G.

Annum clo^{lo} ccxxvi. vti singulari *CATHARINAE AVGUSTAE* clementia memorabilem , ita duplici funere luctuosum Societas nostra habuit , quando paulo ante publicum illum Academicorum conuentum Imperatricis praesentia illustrem, *Michael Burger* primus , deinde et *Nicolaus Bernoullius* e viuis discesserunt. De *Burgeri* quidem vita nihil admodum dicendum habemus, donec certiora nobis documenta offerantur , intre rea non possumus quin vitam *Nicolai Bernoulli* collegae desideratissimi et grato animo recolamus ipsi , et aliis , quibus res nostrae ac bonarum artium incrementa curae sunt , seruandam commendemus.

Originem duxit e gente, quae primarias in Heluetia dignitates iam inde a longinquuo tempore obtinuit. Anus eius paternus fuit *Nicolaus Bernoullius supremi in Republica Basileensi tribunalis Affessor*, huius filius natu maximus *Iacobus Prof. Math. Basileensis*. Secundus *Nicolaus Reipubl. Basil. Senator Pater Nicolai Bernoulli Professoris Log. Basileensis*. Tertius *Iohannes, Professor Math. Basil.* Quartus *Hieronymus , mercator*. Mater Nicolai nostri superstes est *Dorothaea, Danielis Falkneri filia*, cuius auos pro-

prouosque a multis saeculis vel inter praesides vel certe inter praecipuos qui eiusdem Respublicae gubernacula tenuerunt numerari constat, ita vt dubitari possit, vtrum maiorem haec familia claritatem ex amplissimis muneribus, quibus domi praefecta fuit, acceperit, an maiorem suae familiae famam atque celebritatem *Iacobus Bernoullius* et *Iohannes* frater, huiusque filii et fratri filius incredibili rerum penitus abditarum scientia intulerit. *Iohannem* autem *Bernoullium* Nicolai nostri patrem sine elogio nominare praestat, quam committere vt tanti viri merita tam longo tempore ab acutissimis iudicibus publice cognita et commendata mediocri laude minuantur.

Natus est Nicolaus VI. Calend. Febr. *st. v. A.* *clo loc z xxxv.* Basileae, sed infans vix octomestris cum parentibus suis Groningam migravit, qui post decem annos elapsos tribus aucti liberis Basileam reuerterunt. Erat in nostro a prima pueritia ingenium ductile et sequax, et quaedem alacritas quasi connata, quam ob rem nihil omiserunt parentes, quod ad primam filii educationem (erat enim natu maximus) pertineret. Octo annorum puer germanice, gallice, belgice et latine loquebatur. Visusque fuit, dum in Heluetiam ex Belgio redirent, si qua in vrbe paullum moraretur et linguam et mores hominum imitari ex tempore. Patriae redditus, litteris sedulius incubuit. *A. clo lccvi i i. ciuum Academicorum,* *A. clo lccxi. Doctorum Philosophiae numero, patre Decano,* adscriptus, quo tempore cum sextum et decimum annum egressus esset, ac de vitae, quod eligeret, genere deliberaret, etiamsi amabat litterarum studia, ta-

men quod aegre ferret vitam illam quasi vmbatilem et secessum quem requirunt, parum absuit, quin ea relinqueret omnino, nisi patris exemplo atque auctoritate confirmatus fuisset. Idcirco momentis omnibus probe expensis animum ad Iuris prudentiam conuertit; erat autem illud aetatis Geometriae non solum peritus, sed in hac scientia excellens, et quae reliquit illo tempore scripta, ostendunt eum *Arithmeticae Differentialis, Integralis et Exponencialis* iam tunc gnarum ac difficillimis in Mathesi problematibus soluendis parem fuisse, quin imo patrem in scribendis ad exterios eruditos epistolis, quarum argumenta ex recondita Mathesi petita erant, subleuabat identidem, ita ut tanto magistro usus, breui tempote plus sciret quam ipse sibi didicisse videretur. Id vero apparuit, cum amore fraterno ductus, Danielem Bernoullium, qui undecimum annum agebat, iis ipsis doctrinis institueret, quanquam paullo post agnouit, se discipulum naectum esse, cui quod porro discendum statueret vix ipse inuenieret. Sed his rebus occupatus nihilo minus Iuris prudentiae, quam sibi delegerat, operam dedit, praeceptore usus Iacobo Battierio celebri dum viueret Iuris Antecessore Basileensi, eo successu, ut Idibus Nov. A. clo 10 ccxv. post publicam de *Iure detracitus* disputacionem, *Licentiam*, quam vocant, ad supremos in *Iure* honores impetraret.

Occasionem deinde sibi a patre oblatam in peregrinas terras proficisciendi summa cum voluptate arripuit, qua in re partim indoli nouarum rerum quas disceperat atque tractaret cupidissimae obsecutus est, partim

con-

consuetudini gentis suae, quae adolescentibus augendae apud exterorū doctrinā et humanitatis caussa quandam videtur peregrinandi legem imposuisse, satisfecit. Inter Italos cum aliquamdiu moraretur, in amicitiam illustrium virorum *Poleni*, *Manfredorum*, *Riccati* etc. receptus fuit. *Regbino* autem et *Fabrisio*, in quibus tam morum elegantiam quam iudicij acumen spectabat, familiarissime versus est, in Galliam deinde progressus Lutetiae Parisiorum *Monmortium* et *Varignonum* in primis coluit. Iam in eo erat, ut magnum ex peregrinatione fructum perciperet, sed morbo repente afflictus, cum spem per plures regiones eundi accisam videret, mutato prorsus consilio in patriam, quam primum potuit, curandae valetudinis caussa remigravit A. clo 15ccxvi 11. vbi instauratis viribus Mathesin rursus maiore quam vñquam antea contentione exercuit, inuenta sua digessit et litterarum commercia cum eruditis vel continuauit, vel noua instituit. Interea ab amicissimo Fabrisio identidem vt Italianam reuise vellet, incitatus, tandem repugnare non potuit cum simul ab illustri *Vezzio* Nobili Veneto qui ad multiplicem qua praeditus erat, doctrinam, matheleos quoque scientiam adiungere gaudebat, humanissime inuitaretur. Huius viri erga se affectum ac benevolentiam saepe predicauit. Vtebatur autem eius contubernio duos annos circiter, nec a latere illustris viri discessisset, nisi patris iusu Basileam fuisset reuocatus A. clo 15 ccxxi 1. vbi mox data occasione munus *Professoris iuriis prudentiae* ambuit et in tribus competitoribus fuit qui sorte certabant. Postulant enim leges Basileenses, vt candidati, qui dignissimi aliquo

aliquo munere habentur tres omnino elegantur communibus suffragiis , vnum denique ex tribus forte vincat, quam cum hic aduersam sibi expertus esset, paullo post, initio anni ccccxxii. Bernam honorifico senatus decreto vocatus (ea enim in vrbe forte non certatur) ad simile munus concessit et quae solent ingenii atque scientiae specimina edidit.

In hoc statu cum ex animi sententia viueret , atque in amicitiam *Tillieri* et *Sinneri*, primariorum virorum ciuitatis suo merito venisset , ita erat huic vrbi addictus, vt ab his amicis et hoc genere vitae, quamuis alio semel atque iterum aequissimis conditionibus vocaretur , diuelli non posset. Vnum permoleste tulit , quod fratri contubernio , qui eo tempore erat Venetiis, tam diuca. rebat , quem non modo vt fratrem et discipulum , sed velut amicum et familiarem , et sibi maxime necessarium diligebat. Fuit quidem certe inter eos animorum consensus atque concordia singularis , nihil accidebat alteri quod alter ad se pertinere non putaret, neque satis habebant permiscere ac mutuo amore confundere quidquid vterque in Mathesi suo ingenio excogitauerant , in lucem edere parabant has ipsas lucubrations communis nomine, vt omnes intelligerent, hoc inuicem affectu atque indulgentia fuisse par fratum Bernoulliorum. Ex quo iudicari potest, quanta cum voluptate oblatum sibi munus in Academia Petropolitana vterque susceperint. Praeterea et *Daniel Bernoullius* conditiones atque praemia sub idem tempus in alia regione sibi destinata, spe maioris lucri, quod in fratri coniuctu positum erat, repudiauit , ita vt ambo agnoscerent illustris Praesidis nostri prouidentiam

tiam, quo auctore atque adiutore factum est, vt quos fatalis quaedam fors in ipsa patria disiunxit, eos fortuna minime exspectata in terra tam distante rursus consociatos fouveret. Igitur *Nicolaus* noster postquam tertium fere annum Bernae transegerat, Basileam rediit et mox compositis ad abitum rebus se vna cum *Daniele* fratre in viam dedit **viii. Kal. Septembr.** Petropolin venit **vi. Kal. Nouemb.** A. **cōlō ccxxv.**

Hic primum valetudine sic satis secunda usus est, sequre totum ad subtilissimam mathesin, cui a pueritia adfuetus erat, contulit, Praesidi nostro in primis carus, fratri, vt diximus, omni studio coniunctus, collegis integritate amicitiae suavis atque utilis, omnibus candore pariter et humanitate commendatissimus; vt nihil homini hoc ingenio ac fortuna ad beatę viuendum deesse videtur. Sed quid esse potest in hac vitae inconstantia diu? Post octo admodum menses febre lenta, quae principio minus periculosa credebatur, correptus, deinde afflatus etiam et oppressus **VI. Calend Aug. cōlōccxxvi.** moribundo similis iacuit, et quamquam remittebat dolor, tamen viribus iam minutis atque exhaustis biduo, post hora tertia matutina mentis et rationis ad extremum compos exanimatus est.

Iam septimo ante obitum die, cum mortem imminentem praeuideret nec fratri dissimulare posset, epistolas nonnullas, quas sibi superstites nolebat, combusit. Corporis anatome vomicam intestini manifestauit, quae nulla humana ope sanari poterat. Ingenii sui monumenta tum in actis Lipsiensibus nostrisque commentariis,

tum

tum vero magnam partem in scriptis, quae a *Daniele* conferuantur, reliquit. Funus *CATHARINA AVGVSTA* suo sumtu efferri iussit et cum in Academiam venisset, vocato ad se defuncti fratre, sui luctus simul et clementiae (quae vna erat in hac calamitate maxima consolatio) indicium dedit.

Sed quo animo existimemus patrem fuisse, cum nuncium acciperet de morte filii, quem tanta cura educauerat, in quem tantum contulerat suae doctrinae suarumque virtutum, in quo, ut paucis dicam, nihil inueniebatur, quod Bernoulliano nomine dignum non esset. Quis iustum neget ex tam improviso, tam acerbo, tam alte adacto vulnera dolorem? quem si vlla res lenire vel minuere potest, superst^tum certe filiorum in patris vestigia succendentium magna indoles et praecleara institutio mitigabit. Inter omnes qui aliquod insigne nomen in mathesi, nostra memoria, adepti sunt, pauci filios reliquerunt eadem disciplina perfecte eruditos, *Iohanni Bernoullio* prope dicam soli contigit, ut aetatem ingrauescentem filiorum suorum meritis partim iam confirmatis et in luce positis, partim adhuc in summam spem adolescentibus solari posset, qui tam prosperi euentus quando non obscure etiam ad collegium nostrum pertinent fructumque nobis amplissimum promittunt, vehementer cupimus atque exoptamus, ut vir praestans virtutis ac scientiae gloria, deposito filii luctu, tantis bonis praesentibus quam diutissime perfruatur.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE

P E T R O P O L I

F A C T A E.

CONTINUATA RELATIO
ECLIPSIUM SATELLITUM IO-
VIALIUM PETROPOLI OBSERVATARUM

a

D. I. N. DeL'Isle.

A. 1728. N. St.

Die

Sept.	8	^{H.}	16	34	30	I	Mmersio primi. Intra pauca scrupula secunda tubis 13 et 15 pedum ob. servata.
	17		12	57	36		Immersio primi. Intra 15" dubia propter nubes raras, tubo 13 pedum. Tempus vero unico horo- logio constat.
Octob.	1		16	53	16		Immersio primi bona observatio tubo 15 pedum.
	3		11	21	56		Immersio primi exacta, tubis 13 et 15 pedum.
	7		13	3			Immersio quarti } tubis 15 5 } Emerfio quarti } 13 et 15 pedum. Ultra scrupula prima nil licuit definire amplius propter
						Qqq 2	ob-

N.S. Tempus
verum.

				observationis incertitudinem lento satellitis motui et obliquitati incidentiae imputandam.
1728	Die			
Octob.	8	^{H.} 12 23 45	"	Immersio tertii tubo 13 pedum.
		14 58 51	"	Emersio tertii tubo 13 pedum.
	10 13 17 23			Immersio primitubo 15 pedum bene observata.
Nov.	2 13 30 43			Immersio primi tubo 13 pedum exacte
Dec.	2 15 28 41			Immersio primi tubo 15 pedum, dubia intra aliquot secunda.
	4 9 57 2			Immersio primi tubo 15 pedum.
	11 11 46 5			Immersio primi tubo 13 pedum, dubia intra pluscula secunda. Tempus item verum uno horologio tantum definitum est.
	14 14 24 30			Immersio secundi aliquot secundis dubia, tubo $22\frac{1}{2}$ pedum: tempus verum

N.S.^{t.} Tempus
verum.

1728	Die				rum uno horologio con-
Dec.					stat.
	18	H. 13	36	30	Immersio prim. tubo 15 pedum. Satelles Io- vi quam proximus fuit. Tempus vero uno constat horologio.
1729					
Ianuar.	8	14	6	3	Emersio secundi paucis secundis dubia tubo $22\frac{1}{2}$ p.
Febr.	13	6	51	37	Emersio primi tubo 15 pedum. Satis bene.
	27	8	26	42	Emersio secundi tubo 13. pedum. Mediocriter.
Mart.	6	11	5	55	Emersio secundi tubo 15 pedum.
	12	39	52		Emersio primi tubis 13 et 15 pedum.
	7	6	33	7	Immersio quarti. tubo
	10	14	15		Emersio 15 pedum.
	31	7	30	11	Emersio primi. Tubo 15 pedum. Tempus ve- rum duobus horologiis de- finitum est.
April.	7	11	7	25	Emersio secundi. Tubo 15. pedum.

Qqq 3 Emersio

1729		^{H.}					
April.	14	11	24	12	Emersio primi aliquot	secundis dubia.	tubo 13. p.
	30	9	46	9	Emersio primi.	tubo 15	pedum. Celo sereno.
Maii.	4	11	6	2	Emersio tertii tubis 13	et 15 pedum.	

Plerasque harum observationum tutas praestiti ab errore qui nonnunquam ex eo oriri potest, si non nisi unico horologio tempus verum definitur. Licet enim istud motui solis duobus illis meridiebus, quas observatio intercedit, exacte comparatum fuerit, errori nihilo minus locus est si motus horologii non sit uniformis. Remedio fuerunt quatuor horologia postremae hac Iovis apparitione usurpata, quae sibi ipsis semper comparavi statim post transitum Solis in linea mea meridiana capillari, itemque mox post alias quascunque sive diurnas sive nocturnas observationes, si quidem veri temporis exactam postularunt notitiam. Non sine voluptate expertus sum faepius, quod tempus verum ex singulis horologiis deductum idem prorsus provenerit. Quandoque tria conspirarunt horologia, quartum aliquot secundis differebat, quod, si solum adfuisse errorem ita peperisset. Observationes quarum tempora vera non nisi unico aut duobus horologiis potuerunt definiri notatae sunt a latere praecedentis catalogi. Ubi nihil notatum est, ibi subintelligere oportet quod eiusmodi observatio tempus suum verum ex quatuor aut tribus horologiis consentientibus habeat.

OB-

OBSERVATIONES ALTITUDINIS POLI

IN

OBSERVATORIO IMPERIALI QUOD PETROPOLI EST HABITAE

2

D. I. N. DeL'Isle.

AB eo tempore quo in hanc urbem venimus, polarem eius altitudinem certo determinare, refractionesque ibi indagare studuimus. Pro altitudine poli omnes observavimus solis meridianas altitudines quas caelum permisit; quadrante ab initio usi sumus 18 pollicum in radio, quem ex Gallia attulimus.

Ab 11. Martii, anni 1726. novi stili (qui sextus dies fuit post adventum nostrum in hanc urbem) usque ad 2. Aprilis anni 1727, hoc instrumento ultra 150. cepimus meridianas solis altitudines; Plurimas fixarum stellarum altitudines meridianas tam boreales quam australes nunc non recensemus.

Pro refractionibus observauimus anno 1726 et ab initio anni 1727 quam plurimas solis altitudines matutinas

tinas aequae ac vespertinas diebus pluribus continue captas, ab horizonte duodecimum usque gradum, mense Iunio pro refractionibus aestivis, mensibus autem Novembre, Decembre, Ianuario et Februario pro hibernis refractionibus observatum est.

Cum vero Frater meus non multum post aequinoctium vernum anni 1727 Aulae iussu Archangelopolim et Kolam mitteretur easdem ut ibi faceret observationes, atque secum quadrantem, cuius radius 18 pollicum est, auferret, coepi sub ipsum solstitium aestivum huius anni 1727 quadrantem, cuius radius trium est pedum, usurpare, eoque altitudines solis meridianas, ordine non interrupto, observavi a 12 Iunii ad praesens usque tempus, summa qua potui diligentia, eaque exactitudine, cuius instrumenti magnitudo capax est, eo fine ut postea poli altitudo pro hac urbe certius elici possit.

Pro refractionibus, hoc quoque instrumento novas observationes institui, magnumque numerum altitudinum extra meridiem diebus pluribus continuis mense Iunio anni 1728 captas acquisivi; postquam ex observationibus integri anni hic quadrans mihi omnino perspectus erat.

In postremis hisce observationibus refractionum gratia habitis, quatuor horologis oscillatoriis usus sum, quae mihi eo profuerunt, ut certitudo maior fuerit de motibus eorum regularitate, quam quidem supponere opus est in calculo pro refractionibus methodo mihi usitata instituto.

Eo-

Eodem quadrante observavi quoque sub finem anni 1728, et initio anni sequentis utramque stellae polaris altitudinem meridianam, quod quidem hucusque facere non poteram ob diversa impedimenta.

Hae sunt observationes omnes posteriori hoc instrumento factae, quas nunc recensebo tanquam magis idoneas ad poli altitudinem certius definiendam in observatorio imperiali, in quo hae omnes postremae observationes habitae sunt.

I.

Descriptio maioris Quadrantis methodique quo usus sum in eo verificando

Quadrans trium pedum in radio, quo usus sum post Fratris mei abitum hucusque, Londini fabrefactus est a I. Rowley, ad modum sextantis cuius descriptionem et delineationem dedit Flamstedius in tertia parte Historiae suae coelestis non ita pridem in publicum emissae.

Praeter tubum alterutri laterum quadrantis affixum, alter circa centrum quadrantis mobilis aderat. Mobilis tubus inserviebat altitudinibus astrorum capientis, rotato prius instrumento in situm verticalem ope perpendiculi ex centro per divisionis initium pendentis. Sic tubus mobilis ad astri observandi altitudinem dirigebatur; Poterat autem tubus admodum lente moveri ope cochleae perennis dentibus insertae qui extremitati limbi incisi sunt.

Tom. II.

R rr

Lim-

Limbo nulli linearum ductus insculpti fuerunt praeter transversales decem minutorum intervallis a se invicem distantes , eorum vero subdivisio in singula minuta extabat in parva regula , sive linea fiduciae quae mobilis erat una cum tubo.

Poterant quoque subdivisiones transversalium haberi per circuitus cochleae perennis ; Verum , quia constructio talis mihi nimis composita , minusque exacta visa est , substulti tubum mobilem resque ceteras ad eum pertinentes , usurus solo tubo lateri quadrantis affixo, haerente in averso quadrantis plano.

Necesse fuit ob hanc causam ductus transversales ipsos in singula minuta prima subdividere per circulos concentricos . D. Vignon in se suscepit opus ; sustulit apparatus priorem quo centrum quadrantis instruebatur, et substituit laminam latam orichalceam piano quadrantis affixam. In ea centrum notavit , ex quo circulos concentricos duxit radiis debitissimis , quibus subdivisio in singula minuta absolvitur. Quod attinet perpendiculari suspensionem , eam tam subtilem reddidimus quam potuimus , namque centro instrumenti adaptavimus mucronem tenuissimae acus , quem circumdedit annulo satis amplio capillus , qui pondus cui pareat ferendo , appensum habet.

Tubus quadratus adest , quo perpendicularum includitur et a vento tuetur. Quin et ad aestimandas quam exactissime minutorum subdivisiones in qualibet observatione , lens adhibetur in regione capilli quae notabiliter amplificat.

Ante-

Antequam hoc instrumentum ad observationes adhibuimus, summa diligentia verificavimus per plures dies continuos situm tubi fixi quem habet respectu divisionis; idque methodo inversionis a D. Picarto demonstrata in tractatu suo de mensura terrae, et post hunc, a D. de la Hire ubi agit de usu suarum tabularum astronomica- rum.

Posthaec 6 vel 7 notas in obiecto diffiso elegimus, ad quas direximus quadrantem eadem die et hora, qua eius errores per inversionem deteximus, unde verum notarum situm respectu observatorii definivimus. Atque sic in posterum nil amplius requirebatur pro quadrantis examinatione quam ut eum ad notas correctorias dirigeremus, quod quidem semper facimus paulo ante quamcunque altitudinis observationem habendam aut mox post habitam; hoc medio quadrantis error innotescit, quem observationis tempore habet.

Quam ita examinando quadranti impendimus curam, ea inutilis non fuit; Nam cognovimus quod quandoque tubus nihilominus luxatus fuerit, licet omnem adhibuerimus diligentiam ut caute et circumspecte tractaretur, hoc est, ne tubus tangeretur. Verum hoc observationibus nil obest, quia, veluti iam diximus, quantitatem emotionis tubi comprehendimus quoties observatio habetur.

II.

Altitudines meridianae stellae polaris neglecto quadrantis errore.

Altitudines polo altiores Altitudines polo humiliores
vesperi captae. mane captae.

A. 1728. M. St.

Nov.	29	°	,	"
Dec.	1	61	42	30
	3	61	42	35
	4	61	42	40
	14	61	47	0
	18	61	47	20
	19	61	46	15
	22	61	46	10
	23	61	46	15
	24	61	46	10
	28	61	46	15
<i>A. 1729</i>	8	61	46	20

A. 1728. N. St.

Nov.	30	°	,	"
Dec.	1	57	25	0
	4	57	25	0
	19	57	30	0
	20	57	28	40
	23	57	28	35
	24	57	28	40
	25	57	28	40

ro $57^{\circ}, 28'. 40''$, quo denuo diameter apparet paralleli stellae polaris conficitur esse $4^{\circ}, 17'. 35''$. Quanquam itaque quadrans, interea dum binae hae observationum series institutae fuerunt immutatus fuerit minutis $3' 40''$, apparet tamen polaris paralleli diameter certo scitur, qualis a divisione quadrantis exhibetur.

III.

*Errores Quadrantis cum observarentur
stellae polaris altitudines.*

Quoniam altitudines stellae polaris noctucaptae sunt, non potuit quadrans ad notas dirigi eodem tempore quo observatio facta est. Verum quia quadrans sensibilem mutationem per plures dies passus non est, pro erroribus veris ii haberi possunt qui observati sunt quovis meridie observationem polarem antecedente vel sequente.

Hi sunt autem quadrantis errores quos hisce meridiis invenimus, sumendo medium eorum quae quolibet meridie ex sex illis vel septem notis deprehensa fuere.

Error quadrantis additivus.

			<i>sub meridiem</i>		
<i>4.1 1728 Nov:</i>	<i>St. n.</i>	<i>29</i>	<i>23</i>	<i>25</i>	<i>"</i>
		<i>30</i>	<i>22</i>	<i>55</i>	<i>"</i>
<i>Dec.</i>	<i>I</i>	<i>22</i>	<i>50</i>		
	<i>2</i>	<i>23</i>	<i>10</i>		
	<i>3</i>	<i>22</i>	<i>40</i>		
			<i>4.1 1728 Dec.</i>	<i>14</i>	<i>18</i>
				<i>19</i>	<i>18</i>
				<i>22</i>	<i>19</i>
				<i>23</i>	<i>19</i>
				<i>24</i>	<i>19</i>
				<i>25</i>	<i>19</i>
				<i>35</i>	<i>"</i>
			<i>R r r 3</i>		
			<i>Sunt</i>		

Sunt hic errores qui differunt inter se , qui tamen differre non debabant, cum notum sit ex prioribus observationibus quadrantem tum immutatum mansisse. Verum maxima harum differentiarum pars provenit a variationibus , quibus , uti notum est, obnoxiae sunt refractiones horizontales , et quae horizonti sunt vicinae. Non multum autem errabitursi medium eorum arithmeticum sumatur.

Pro prima igitur observationum serie , hoc est pro iis , quae ab 29 Novembris usqne ad 4. Decembris factae sunt, quadrantis error est $23' 0''$. Pro altera vero serie observationum quae ab 19 Decembris vesperi ad finem usque factae sunt, habetur error $19' 20''$, qui utrinque additivus est, unde maxima altitudo correcta fit $62^\circ, 5', 35''$. minima vero $57^\circ, 48'. 0''$.

IV.

De electione alicuius tabulae refractionum.

Methodus qua ad refractiones indagandas utor poli altitudinem cognitam assumit, eoque ipso etiam refractiones. Circulus tamen vitiosus committitur nullus ; approximatio potius instituitur quam in eiusmodi inquisitione vitare non licet , non secus ac in aliis astronomicis problematibus fieri affolet.

Coactus igitur refractionibus uti antequam quae regioni huic convenienter repererim , tabulam eligere debui quae refractiones exacte computatas habeat , secundum regulam aliquam geometricam simplicem et experientiae satis conformem. Hanc ob causam aliis omnibus praetuli

tuli quam D. Cassinus dedit in Commentariis Academ. Parisi. Anni 1714. pag. 33. editionis Parisiensis, in qua assumit quod quivis lucis radius per atmosphaeram arcum circularem describat.

Utut verosimile non est curvam radiorum circulum esse, attamen, quia curvae quas ad computum refractiōnum adhibere liceret differentiam attentione multa dignam non inferrent, utar ego suppositione Cassiniana tanquam omnium simplicissima.

V.

Computatio altitudinis poli ex observatiōnibus stellae polaris.

62	5	35	Apparens stellae altitudo maxima
	31		Refractio subtrahenda
<u>62</u>	<u>5</u>	<u>4</u>	Vera altitudo maxima
57	48	○	Apparens stellae altitudo minima
	37		Refractio subtrahenda
57	47	23	Vera altitudo minima
4	17	41	Vera diameter parallelī stellae polaris
2	8	50	Distantia stellae polaris a polo.
59	56	13	Altitudo poli pro observatorio Imperiali Petropolitano.

VI.

VI.

Observationes pro solis altitudine meridiana sub solstitio aestivo.

NO tum est quod circa solstitia solis declinatio admodum lente variet, quia etiam quantitas variationis huius nota est ex variis solis distantiis a solstitio, sequitur inde, quod ex observationibus plurium dierum ante et post solstitium altitudo solstitialis certius quam ex sola meridiana altitudine solstitio proxima concludi possit.

Observationes vero omnes quas comparavi ut ex iis veram altitudinem solstitialem aestivam concluderem, sunt sequentes.

Die 15. Iunii A. 1727. n. St.

53 20 20	Altitudo apparenſ limbi solaris superioris
19 20	Error quadrantis addendus
44	Refractio
6	Parallaxis
15 51	Semidiameter solis
53 23 11	Altitudo vera centri solaris
9 14	Declinationis differentia a solstitiali declinatione
53 32 25	Altitudo solstitialis.

Die

Die 18 Junii 1727.

 $\begin{array}{r} 53 \\ \circ \end{array}$

25 45

20 30

43

6

 $\underline{15} \quad 50$ $\begin{array}{r} 53 \\ 29 \end{array}$

48

2 49

 $\begin{array}{r} 53 \\ 32 \end{array}$

37

Die 19 Junii

 $\begin{array}{r} 53 \\ \circ \end{array}$

27 35

20 20

43

6

 $\underline{15} \quad 50$ $\begin{array}{r} 53 \\ 31 \end{array}$

28

1 30

 $\begin{array}{r} 53 \\ 32 \end{array}$

58

Die 20 Junii

 $\begin{array}{r} 53 \\ \circ \end{array}$

28 0

20 20

43

6

 $\underline{15} \quad 50$ $\begin{array}{r} 53 \\ 31 \end{array}$

53

35

 $\underline{53} \quad 32 \quad 28$

Tom. II.

Die 22 Junii 1727.

 $\begin{array}{r} 53 \\ \circ \end{array}$

26 40

22 30

43

6

 $\underline{15} \quad 50$ $\begin{array}{r} 53 \\ 32 \end{array}$

43

1

 $\begin{array}{r} 53 \\ 32 \end{array}$

44

Die 24 Junii

 $\begin{array}{r} 53 \\ \circ \end{array}$

25 20

22 30

43

6

 $\underline{15} \quad 50$ $\begin{array}{r} 53 \\ 31 \end{array}$

23

1 6

 $\begin{array}{r} 53 \\ 32 \end{array}$

29

Die 25 Junii

 $\begin{array}{r} 53 \\ \circ \end{array}$

24 20

22 35

43

6

 $\underline{15} \quad 50$ $\begin{array}{r} 53 \\ 30 \end{array}$

28

2 16

 $\underline{53} \quad 32 \quad 44$

Sss

Die

Die 27 Junii. 1727

°	20	50
53	22	25
		44
		6

15	50	
53	26	47
	5	49

53	32	36
----	----	----

D. 11 Junii. 1728

°	6	"
53	22	20
		44
		6

15	51	
53	12	31
	20	19

53	32	50
----	----	----

Die 12 Junii		
°	11	"
53	21	0
		44
		6

15	51	
53	16	16
	16	27
53	32	43

D. 13 Junii 1728

°	15	"
53	21	10
		44
		6

15	51	
53	19	41
	12	58

53	32	39
----	----	----

D. 14. Junii

°	17	"
53	21	25
		44
		6

15	51	
53	22	46
	9	55

53	32	41
----	----	----

D. 19 Junii.		
°	28	"
53	19	30
		43
		6

15	50	
53	31	48
		45
53	32	33

Die

D. 20 Junii 1728
° 53 29 30
19 25
43
6
15 50
53 32 28
11
53 32 39
D. 21 Junii
° 53 30 30
18 45
43
6
15 50
53 32 48
°
53 32 48
D. 24. Junii
° 53 28 15
18 45
43
6
15 50
53 30 33
1 57
53 32 30

SSS 2

D. 25. Junii 1728
° 53 26 45
18 50
44
6
15 50
53 29 7
3 25
53 32 32
D. 26. Junii
° 53 25 15
18 45
44
6
15 50
53 27 32
5 18
53 32 50
D. 27. Junii.
° 53 22 45
18 45
44
6
15 50
53 25 2
7 38
53 32 40

Die

D. 28 Junii 1728.

$$\begin{array}{ccc} {}^{\circ} & ' & " \\ 53 & 18 & 25 \end{array}$$

$$20 \quad 30$$

$$44$$

$$6$$

$$\begin{array}{ccc} 15 & 50 \\ 53 & 22 & 27 \end{array}$$

$$10 \quad 18$$

$$\begin{array}{ccc} 53 & 32 & 45 \end{array}$$

D. 29 Junii.

$$\begin{array}{ccc} {}^{\circ} & ' & " \\ 53 & 15 & 0 \end{array}$$

$$20 \quad 30$$

$$44$$

$$6$$

$$\begin{array}{ccc} 15 & 50 \\ 53 & 19 & 2 \end{array}$$

$$13 \quad 23$$

$$\begin{array}{ccc} 53 & 32 & 25 \end{array}$$

D. 30. Junii.

$$\begin{array}{ccc} {}^{\circ} & ' & " \\ 53 & 11 & 40 \end{array}$$

$$20 \quad 30$$

$$44$$

$$6$$

$$\begin{array}{ccc} 15 & 50 \\ 53 & 15 & 42 \end{array}$$

$$16 \quad 56$$

$$\begin{array}{ccc} 53 & 32 & 38 \end{array}$$

D. 8. Junii 1729.

$$\begin{array}{ccc} {}^{\circ} & ' & " \\ 52 & 53 & 10 \end{array}$$

$$20 \quad 10$$

$$45$$

$$6$$

$$\begin{array}{ccc} 15 & 51 \\ 52 & 56 & 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 35 & 41 \\ 53 & 32 & 31 \end{array}$$

D. 15. Junii.

$$\begin{array}{ccc} {}^{\circ} & ' & " \\ 53 & 21 & 20 \end{array}$$

$$20 \quad 15$$

$$44$$

$$6$$

$$\begin{array}{ccc} 15 & 51 \\ 53 & 25 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 7 & 53 \\ 53 & 32 & 59 \end{array}$$

D. 16. Junii

$$\begin{array}{ccc} {}^{\circ} & ' & " \\ 53 & 23 & 40 \end{array}$$

$$20 \quad 10$$

$$44$$

$$6$$

$$\begin{array}{ccc} 15 & 51 \\ 53 & 27 & 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 5 & 32 \\ 53 & 32 & 53 \end{array}$$

Die

D. 17. Iunii 1729.

°	'	"
53	25	25
20	10	
	43	
	6	
	15	50
53	29	8
	3	36
53	32	44

D. 20. Iunii 1729.

°	'	"
53	28	35
20	5	
	43	
	6	
	15	50
53	32	13
		17
53	32	30

Medium arithmeticum inter 27. veras altitudines meridianas solstitii aestivui tribus hisce annis repertas est $53^{\circ}. 32'. 40''$.

VII.

Observationes pro solis altitudine meridiana sub solsticio hiberno.

Die 8. Decembris 1727.

°	'	"
7	23	20
20	20	
6	54	
	10	
	16	22
7	20	34
	45	7
6	35	27

D. 11. Dec. 1727.

°	'	"
7	6	30
20	40	
	7	9
		10
	16	22
7	3	49
	27	48
6	36	1

Sss 3

Die

D. 17. Dec. 1727.

°	,	"
6	43	45
20	45	
7	28	
	10	
	16	22
6	40	50
	5	38
6	35	12

D. 18 Dec.

°	,	"
6	42	0
20	50	
7	30	
	10	
	16	22
6	39	8
	3	35
6	35	33

D. 9. Jan. 1728.

°	,	"
7	53	25
21	35	
6	29	
	10	
	16	18
7	52	23
1	16	40
6	35	43

D. 10. Jan. 1728.

°	,	"
8	2	0
21	25	
6	23	
	10	
	16	18
8	0	54
1	25	14
6	35	40
	16	22
6	52	35
18	25	
7	22	
	10	
6	47	26
11	52	
6	35	34
	16	22
6	41	25
18	55	
7	32	
	10	
6	36	36
1	2	
6	35	34

Die

D. 22. Dec. 1728

°	'	"
6	40	30
19	15	
7	32	
	10	
	16	23
6	36	0
	11	
6	35	49

D. 8. Ian. 1729.

°	'	"
7	54	0
19	15	
6	27	
	10	
	16	23
7	50	35
1	14	51
6	35	44

D. 9. Ian. 1729

°	'	"
8	2	20
	19	15
	6	18
	10	
	16	23
7	59	4
1	23	18
6	35	46

°	'	"
8	11	25
	19	15
	6	10
	10	
	16	23
8	8	17
1	32	12
6	36	5

Media inter 12. has altitudines solstitii hiberni meridianas veras duos intra hos annos acquisitas est $6^{\circ} 35' 40''$.

VIII.

Altitudo Aequatoris et obliquitas Eclipticae.

$53^{\circ} 32' 40''$			Altitudo solstitii aestivi vera
$6^{\circ} 35' 40''$			Altitudo solstitii hiberni vera
$46^{\circ} 57' 0''$			Distantia tropicorum
$23^{\circ} 28' 30''$			Obliquitas eclipticae
$30^{\circ} 4' 10''$			Altitudo aequatoris
$59^{\circ} 55' 50''$			Altitudo Poli Petropolitani in Observatorio Imperiali.

Per stellam polarem haec altitudo inventa est, $59^{\circ}, 56' 13''$ (§. 5.) differunt igitur inter se scrupulis secundis 23 duae hae poli altitudines duobus diversis modis erutae, D. Cassini refractionum tabulas usurpando suae hypothesi novae superstractas.

Si altitudinis solstitii hibernalis refractio scrupulis $46'$ maior quam tabulae Cassinianae volunt, assumta fuisset, altitudo Polaris prodiret per altitudines solstitiorum eadem quae per stellam polarem inventa fuit, uti ex computu patet sequenti.

$6^{\circ} 35'$

δ	35	40	"	Altitudo solstitii hiberni (articulo 7.)
		46		Augmentum refractionis suppositum
$\overline{\delta}$	34	54		Altitudo solstitii hiberni
53	32	40		Altitudo solstitii aestivi
46	57	46		Distantia tropicorum
23	28	53		Obliquitas eclipticae
30	3	47		Altitudo aequatoris
59	56	13		Altitudo poli per solem inventa
59	56	13		Altitudo poli per stellam polarem inventa.

Nec sine ratione supponetur refractio solstitii hiberni tribus quadrantibus unius minuti primi maior quam in tabula D. Cassini habetur. Namque haec augmentatio non solum conciliat observationes stellae polaris et solstitiorum ; sed et ipsius D. Cassini observationes quas Parisis habuit (vid. Comment. Acad. 1714. p. 33.) maiores refractiones produnt (hibernas potissimum) quam sua exhibet tabula suae novae hypothesi innixa.

Hieme superioris anni indicium mihi obtigit notatum dignum , quo refractionis augmentatio circa solstitii altitudinem verisimilis fit. Sunt nimirum altitudines solis meridianae quas exactissime observavi diebus 23, 24 et 25 Decembris Anni 1728 ; eas in numerum supra allatarum non retuli , ob hunc ipsum effectum extraordinarium , sed scorsim eas una cum altitudine solstitiali inde derivata hic recenseo.

Tom. II.

Ttt

Die

Dic 23. Decembris 1728 N. St.

6	42	"	Altitudo apparenſ limbi ſolaris ſupe- rioris
19	10		Error quadrantis addendus.
7	31		Refractio
	10		Parallaxis
16	23		Semidiameeter ſolis
6	37	26	Altitudo vera centri ſolaris
	50		Declinationis differentia a ſolſtiali de- clinatione
6	36	36	Altitudo ſolſtialis.

D. 24. Dec.

6	43	"
19	15	
7	30	
	10	
16	23	
6	38	32
	2	1
6	36	31

D. 25. Dec.

6	44	"
19	35	
7	29	
	10	
16	23	
6	40	13
	3	36
6	36	37

Media

Media inter hasce tres altitudo solstitialis est 6° , $36'$ $35''$, quae fere scrupulum primum integrum plus habet quam ea quae antea ex duodecim aliis observationibus eruta fuit (artic. 7.) Unde apparet quod tribus hisce diebus refractio obtinuerit uno scrupulo maior quam vulgo solet. Discremen hoc unius scrupuli fere integri observationibus erroneis imputari nequit, congruunt enim per tres hosce dies intra pauca scrupula secunda, quod exactitudinis certum indicium est. Haud vero inutile erit hic monere, quod barometri simplicis mercurius tribus hisce diebus summam attigerit altitudinem, quam quidem alioquin per duos hos annos, quolibet meridie altitudinem mercurii notare solitus, nondum observavi.

Monitum.

Cum D. Prof. *Maierus* p. 185. horum Commentariorum, quatuor altitudines meridianas ex his quas modo attuli (Artic. 6.) ea intentione adhibuerit, ut exemplo aliquo methodum suam de inveniendis ex observatione solsticiis commonstret, easdem vero paulo a meis diversas attulerit; hinc necessarium duximonere, diversitatem hanc non exinde profectam esse, quod diverso a meo instrumento eas obtinuerit, sed quod hisce meis observationibus correctionem quadrantis applicuerit a mea nonnihil diversam.

Ttt 2

Dein-

Deinde quod attinet ad veram solstitii aestivi altitudinem , quam ex quatuor ibi adductis altitudinibus , iuxta suam methodum comparatis, 16. sec. minorem deduxit, quam ego illam inveni medium inter 27. altitudines sumendo : oritur haec differentia quoad maximam partem ex eo , quod refractionem 13. sec. maiorem quam ego assumpserit, et praeterea parallaxim solis omiserit ; quae postea etiam praecipua causa fuit, cur elevationem poli Petroburgensem 23. sec. maiorem repererit quam ego (art. 8. pag. 513.) Cum insuper etiam obliquitatem eclipticae tanquam ex aliunde notam supposuerit in numeris rotundis $23^{\circ} 29'$ quam ego paulo minorem deprehendi ex duabus altitudinibus solstitalibus a me observatis et meo more correctis. Verum enim vero de genuina poli elevatione huius urbis nihil statuendum censeo , nisi demonstratis antea refractionibus huic usui adhibendis; id quod in sequentem Tomum horum Commentariorum reservatum esse volo.

Erratum.

Pag. 497. lin. 12. pro *quo* lege *qua*.

In primo Tomo.

Pag. 473. lin. antepenult. pro 1727. lege 1726.

Pag 480. lin. 11. pro *maiorum* lege *maiores*.

lin. vltima $47^{\circ} 57' 30''$ lege 47°
 $57' 30''$.

EMEN-

EMENDANDA.

Cum Autor Dissertationum quae secundo huic Commentariorum Tomo insertae sunt, *De Motibus variatis*, et *Constructione aequationum Differentialium primi gradus*, alias generis laboribus distineretur quando schediasmata haec prelo subiiciebantur, impressionisque maturatio apprime vrgeretur, vix aliud fieri potuit, quam vt nonnulli errores festinantisimo calamo schendas transcribenti exciderent: eorum tamen aliqui Typographis sunt adscribendi reliqui auctori. Ex hisce vero omnibus eos hic cum emendationibus annotatos inueniet B. L. qui Auctori specimina sua iam impressa cursum relegenti in oculos incurrerunt.

Pag. 148. lin. 10. pro FIKD lege FIKO.

Pag. 152. lin. 3. pro quam vt in fig. 6. lege, quam vt angulus FGB (fig. 4.) aequalis fiat ang. CBE (fig. 6. Ibid. lin. 9. lege $\frac{dy}{dx} = \frac{dz(\bar{p}p - bR)}{\sqrt{bR}}$) et lin. 10. lege

$$\frac{(g-bf)zz + bf^3}{bfzz - bf^3} = xx.$$

Pag. 154. lin. 3. a fine, lege $-2pdz + 2es^n dx = ds$.

Pag. 159. lin. 20. pro AC lege AB.

Pag. 161. lin. 2. pro littera O, scribatur vbique G.

Ibid. lin. 11. deletis iis quae post haec verba, quantitatem $2dAVb - 2dB$, sequuntur vsque ad finem paragraphi, scribatur in eorum locum: vel $2dB - 2dAVb$, nam signa hisce contrariainde prouenient, quod crescente angulo AGB, decrescant ipsae BG seu z. Habetur vero integrando $AGB = 2B - 2AVb$. Nam existente

$z=f=AG$, fiet $s=o$, adeoque dictae summae nulla quāntitas constans addi debet. Id vero hanc constructionem praebet: in recta indefinita AD abscindantur $AC=b$, et $DC=1$, ductaque normali CF , capiantur in ea $CF=s$, et $CB=\frac{\sqrt{2fg-2eg}}{\sqrt{aa-2fg+2eg}}$, ductisque AF , AB nec non DF et DB , constituatur (fig. 10.) ang. $\angle A$ ad ang. FAC in ratione data \sqrt{b} ad 1. In fig. 11. vero fiat ang. $\angle AGB=2\text{ang. } AND$, quem DF producta cum AN continet, factaque $GB=2\text{ang. } AND$, quem DF duoducta cum AN continet, factaque $GB=\frac{f \times (ss+b)}{b \times (ss+1)}$, punctum B erit in *Brachistochrona* quaesita. Angulus vero $\angle AGO=2\text{ang. } ANB$ (fig. 10).

Pag. 162. lin. 16. scribatur in margine Fig. VIII.

Pag. 163. lin. 7. pro $\int \frac{aall dl}{mpz - a_2 mbl^2 n}$, scribatur

$$\int \frac{aall dl}{(mp - a^2 n b l^2 n) \times (f - z)}$$

Ibid. lin. 13. deletis omnibus in paragraph. qui incipit: Sed si sint etc. vsque ad haec verba inclusive: modo α non sit $=-2$, in eorum locum scribatur: si sint $p = \frac{2ahl^2 n}{m} - \frac{aall^1 - \alpha}{\alpha \beta M}$ et $z=f-\beta L^\alpha$, existente L quantitate data per l et constantes, $M=dL$: dl , item α exponente ac β coefficiente datis, fiatque $f=AG$, et $z=AM$ (fig. 8). Curua ABO construi potest. Fiat enim angulus $\angle AGB = \frac{f al M dl}{m L}$, punctum B , erit in *Brachistochrona* optata.

Pag. 164. lin. 9. pro EG scrib. FG; et lin. 11. pro potentis lege potentias.

Pag.

Pag. 165. lin. 6. a fine pro $\frac{\alpha dp}{p}$, scribe $\frac{-\alpha dp}{p}$.

Pag. 166. lin. 3. a fine, pro $\frac{2P^{1-2n}}{P^{2-2n}}$ scribatur

$\frac{2P^{1-2n}dP}{P^{2-2n}}$.

Pag. 167. lin. 5. pro ambo, scribe duo priora membra. Lin. 6. praefigatur quantitati $2eg^{n-1}$ signum $-$, lin. 7. pro Mdt scribatur Mdl . Lin. 9. post dM ponatur signum $=$, denique lin. 12. scrib. inuenientur.

Pag. 169. lin. 14. scrib. $\frac{Adq}{dr}$, Lin. 2. a fine, pro CD scrib. CB.

Pag. 170. lin. 10. In Denominatore praefigatur quantitati Adx^2 signum $+$.

Pag. 172. lin. 5. a fine lege tempusculo dt .

Pag. 173. lin. 8. pro $dz=rdl$, scrib. $dx=rdl$.

Pag. 189. lin. 2. immediate post Log. R $= f(dP:z-P)$, scribatur S $= f(dQ:zR-PR)$, et Pag. 190. lin. 7. pro $+bc$ scrib. $-bc$. Lin. 17. deleatur signum $=$ inter $\frac{-1ndr}{r+1}$, et $\frac{-dr}{r}$.

Pag. 191. lin. vlt. scribatur aequatio $(2xx-2Qx + 2yy)^{\frac{5}{2}} \times (Q-x)^{-\frac{2}{3}} xy = (Q-x)^{-1} \times ay$.

Pag. 192. lin. 5. pro 137, scribatur 197.

Ibid. lin. 18. proportio elementorum Parabolae dat aequationem $\frac{dy\sqrt{(4y+a)}}{vy} = \frac{ndx\sqrt{(4x+a)}}{vx}$, non autem $dy\sqrt{(4y+a)} = ndx\sqrt{(4x+a)}$, vt ibi per inaduentiam scriptum est, nam haec aequatio per se integrabilis est. Iccirco assumta non parabolae proportionaliter dividenda conueniunt, et hanc ob causam cessat conclusio quae ibi

ibi apposita est , etiamsi exemplum ipsum aequationi dy
 $\sqrt{4x+a} = ndx\sqrt{4x+a}$ applicatum , methodi boni-
tatem illustrat.

Pag. 195. Methodus construendi aequationem
 $Ayy+Bxy+Cxx+Dy+\text{etc.}=0$, hoc loco indicata
ita generaliter succedere non potest ; quia resolutio ae-
quationis in suos factores sine certa relatione inter coeffi-
cientes locum non habet.

Pag. 72. lin. penult. } pro Percoiwitz , lege Ber-
Pag. 73. lin. 4. } cowitz

Pag. 73. lin. 8. pro Gran lege Graen

Pag. 76. lin. 5. sq. in C et O columna ita ponen-
dum

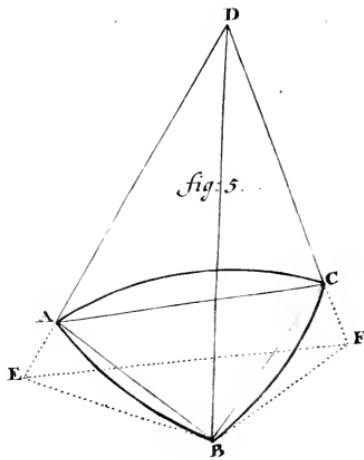
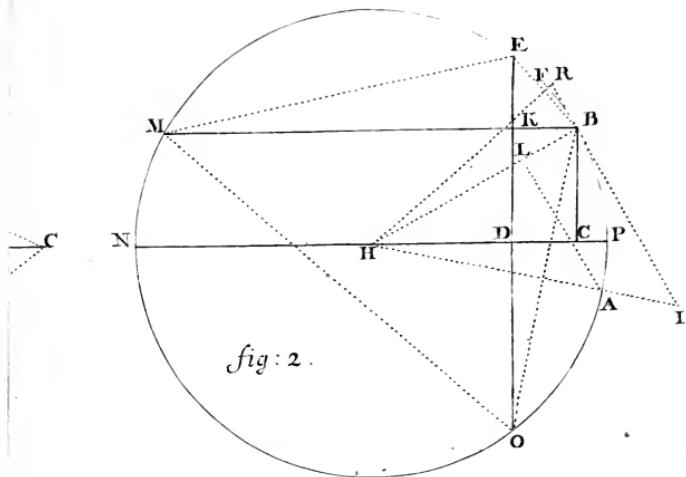
2	Marc	48	Carr.
16	Loth	24	Carr.
1	3	3	Carr.
1	Loth. vel	18	græna
		$4\frac{1}{2}$	græn.
		$2\frac{1}{4}$	græn.
		$1\frac{1}{8}$	græn.
		$\frac{9}{16}$	græn.
		$3\frac{9}{16}$	græn.
		$\frac{9}{64}$	græn.

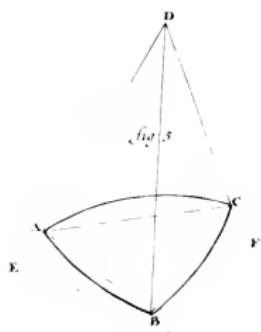
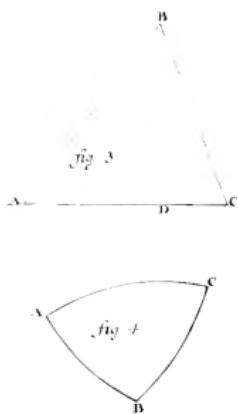
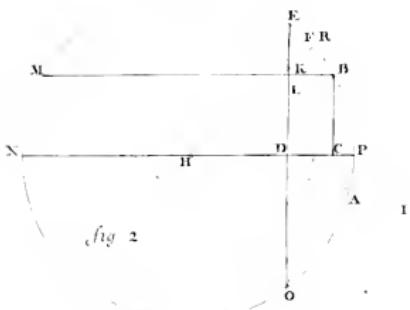
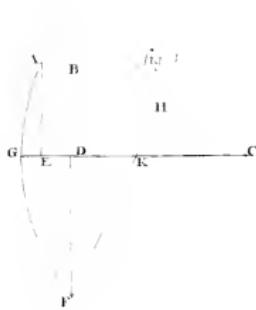
Pag. 68. in margine §. 2. praeponatur Tab. VII.

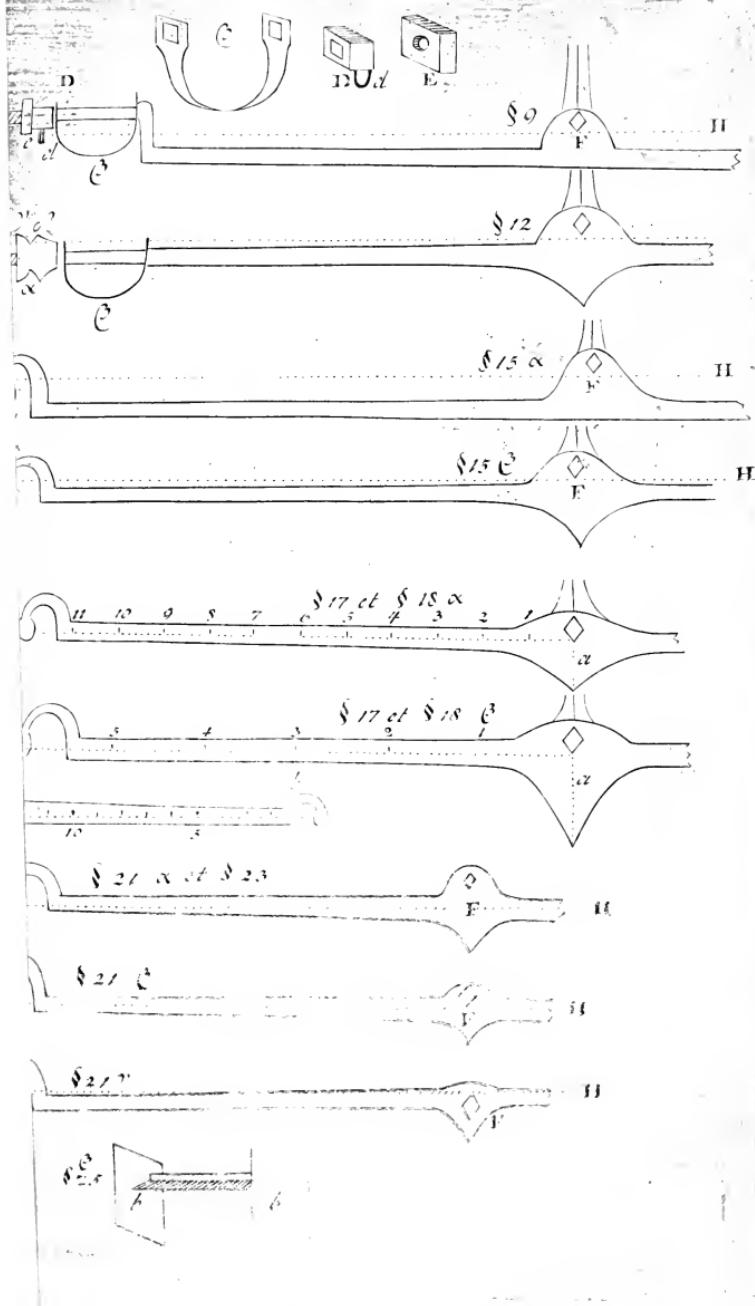
Pag. 177. lin. 14. in marg. pro Fig. VI. leg. Fig IV.

Pag. 474. seqq. in marg. pro Tab. 28. lege sem-
per Tab. 29.

Comm. Ac. Sc. Im. II. Thib. t. p. 30.

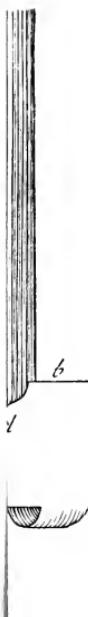
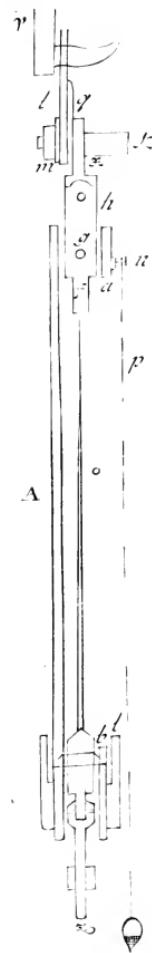
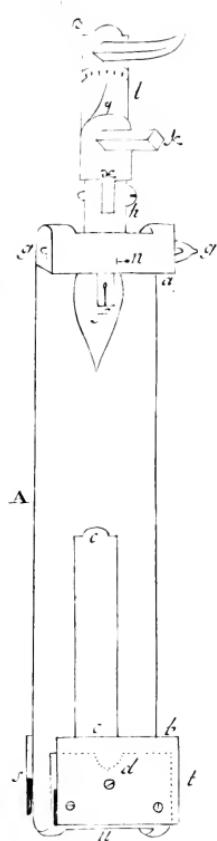
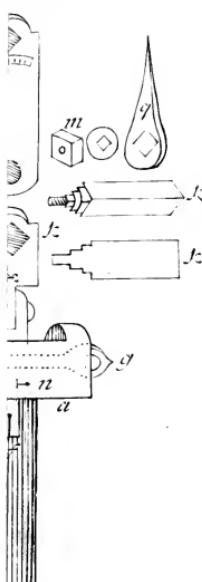




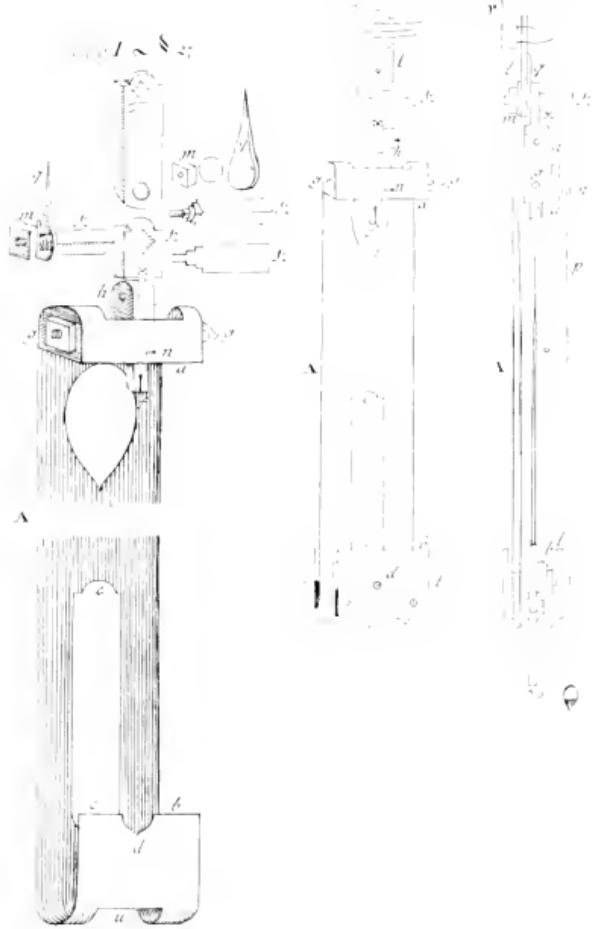




§ 27

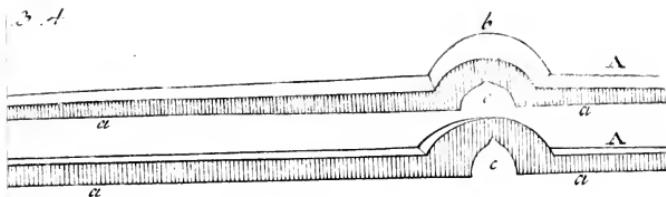


A. S. & H. L. & J.

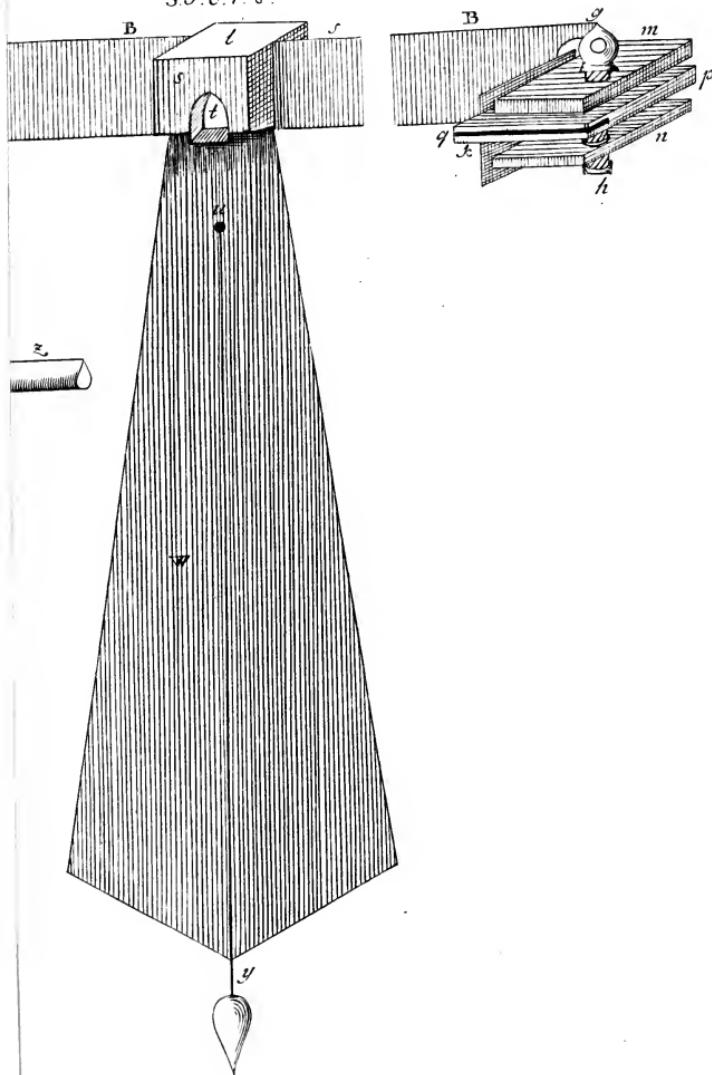


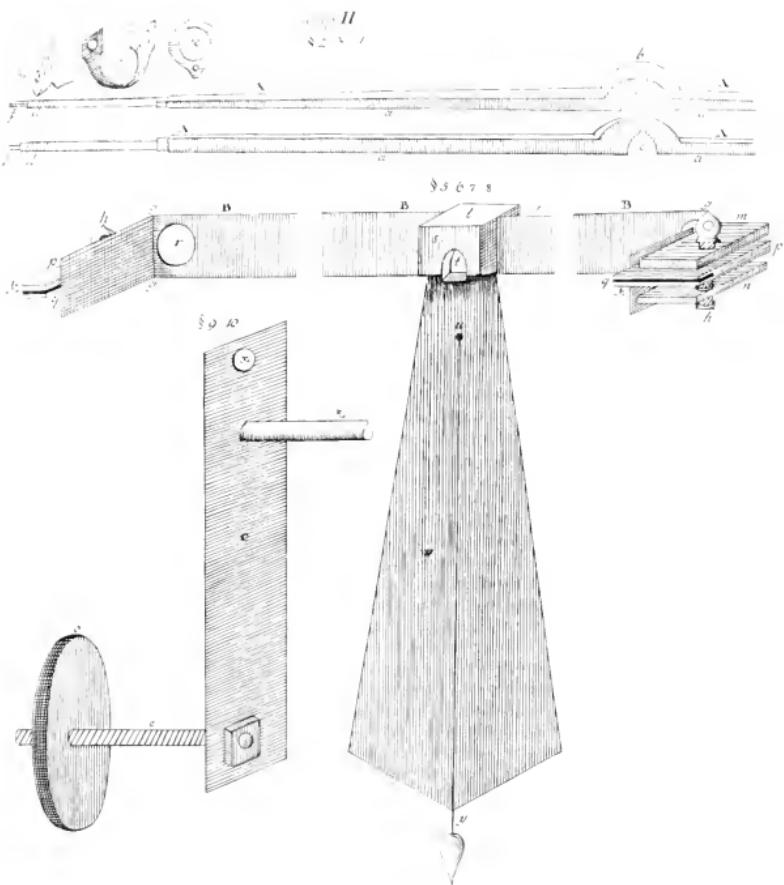
v. II.

3. A

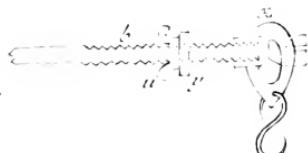
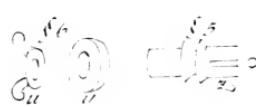
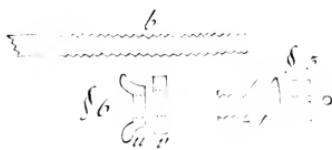
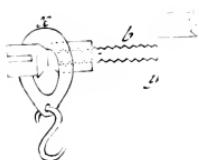
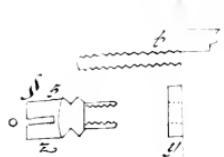


§ 5. 6. 7. 8.





Comm. A. Sc. Acad. H. T. H. 1858.



$$U^{\ast} \otimes_{\mathbb{Z}} U \cong U \otimes_{\mathbb{Z}} U \cong U$$

Grp III



$$\frac{\delta c}{\delta x} = \left[\frac{\delta c}{\delta x_1}, \frac{\delta c}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta c}{\delta x_n} \right]$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}$$

$$M_{\frac{r}{2},\frac{r}{2}}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}$$

$$\frac{\delta c}{\delta x} = \left[\frac{\delta c}{\delta x_1}, \frac{\delta c}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta c}{\delta x_n} \right]$$

$$\left[\frac{\delta c}{\delta x_1}, \frac{\delta c}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta c}{\delta x_n} \right]$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$$

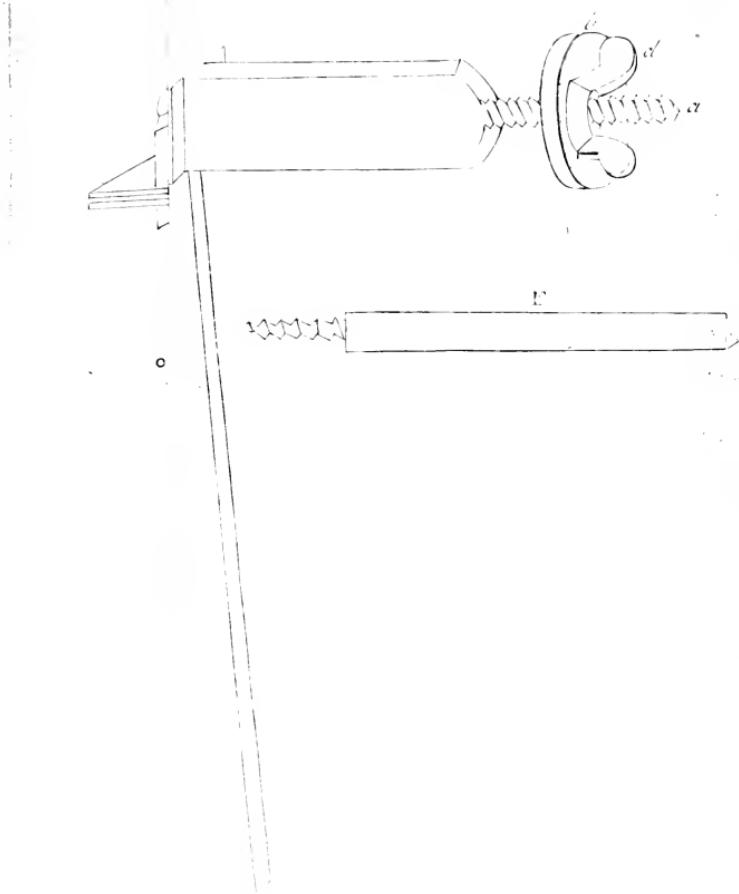
$$\mathcal{O}_X$$

$$\mathcal{O}_X$$

$$\mathcal{O}_X$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

Comm. Ac. Sc. Tom. II. Tab. c p. 60



$$\sum_{k=1}^n \left(\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \right)$$

Lemma 1. $\tilde{I} \cdot S \cdot \tilde{I} = H$ if and only if

$$C \in H^{\perp} \cap S^{\perp} \subset H^{\perp} \cap S$$

$D \propto B$

$$C \in H^{\perp}$$

if and only if C is orthogonal to H

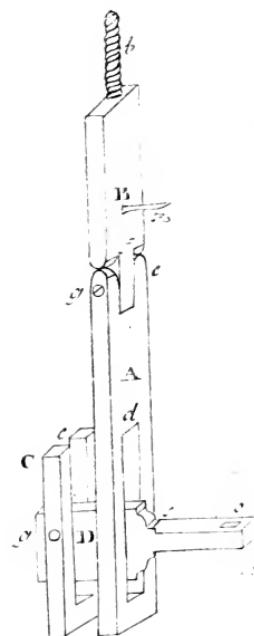
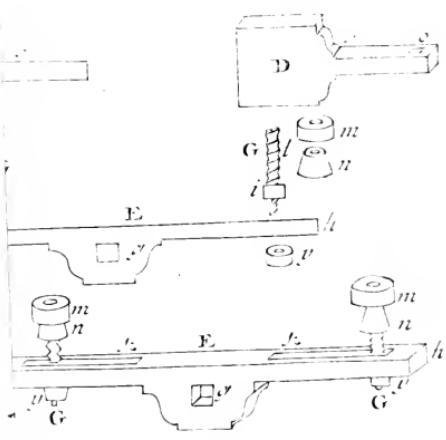
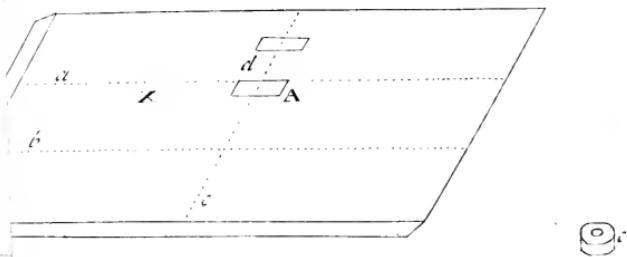
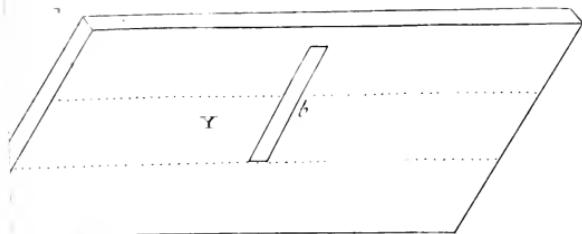
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cup \dots \cup \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \cup \dots \cup \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cup \dots \cup \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \cup \dots \cup \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



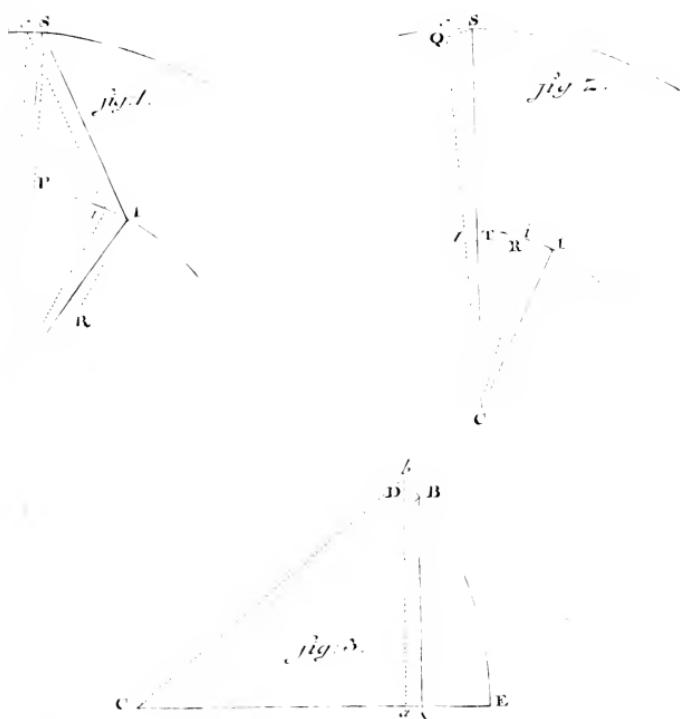
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

I. Per Rutenius

$$L = \sum_i L_i^{\text{kin}} H_i + L_i^{\text{ext}} \delta_i + \gamma_i$$



Comm. Ac. Sc. Tom. II. Lab. Sp 86.



$$\mathcal{L}^{\text{Im},\text{op}}_m = \mathcal{L}^{\text{op}} \circ \mathcal{Y}_{\mathcal{C}} \circ \mathcal{L}^{\text{Im}}_m : H(\mathcal{L}^{\text{op}}, \mathcal{Y}_{\mathcal{D}}; \mathcal{S}_{\mathcal{D}})$$

$$= -\frac{s}{q} \sim -\frac{s}{q}$$

$$e^{i\theta_{\alpha}(\vec{x})}\langle J^{\mu\nu}(\vec{x})\rangle = e^{i\theta_{\alpha}(\vec{x})}\langle J^{\mu\nu}(\vec{x})\rangle_{\rm free}$$

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \times \\ \Lambda^4 \\ \times \\ \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$\partial_\lambda$$

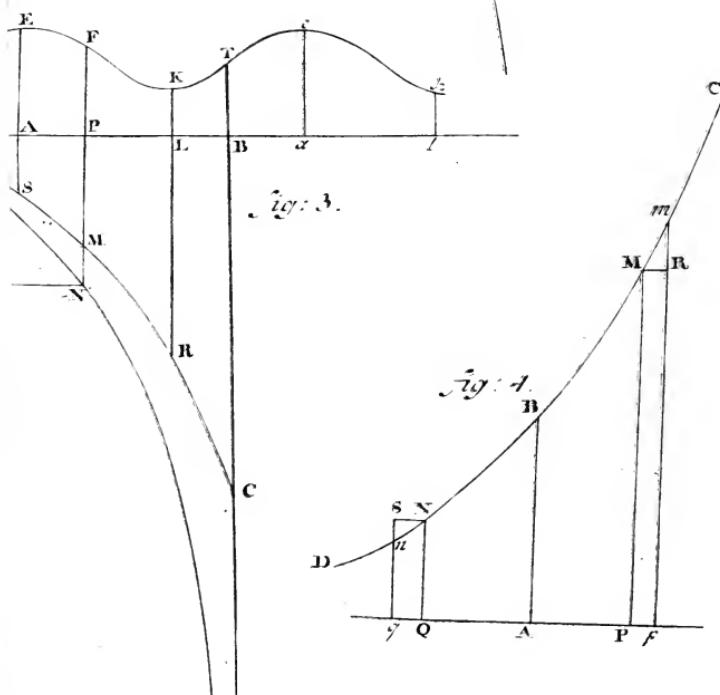
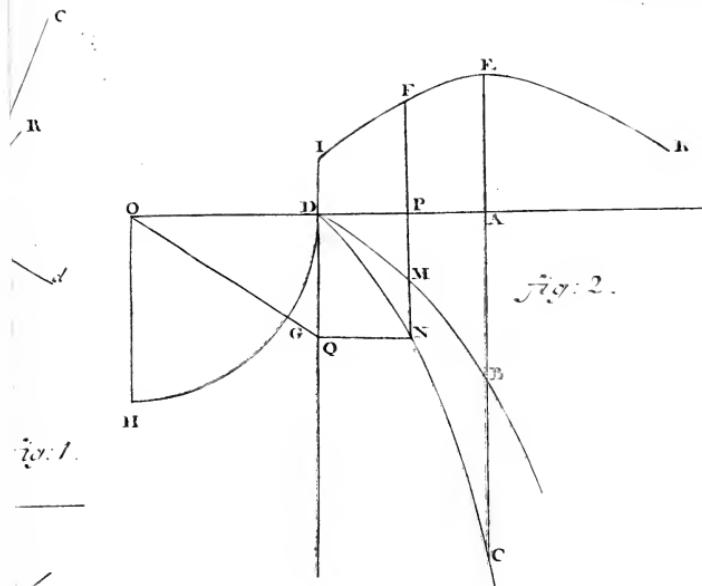
$$\begin{array}{ccccc} 0 & & & & 0 \\ & & & & \\ & & k & & \\ & & & & \end{array}$$

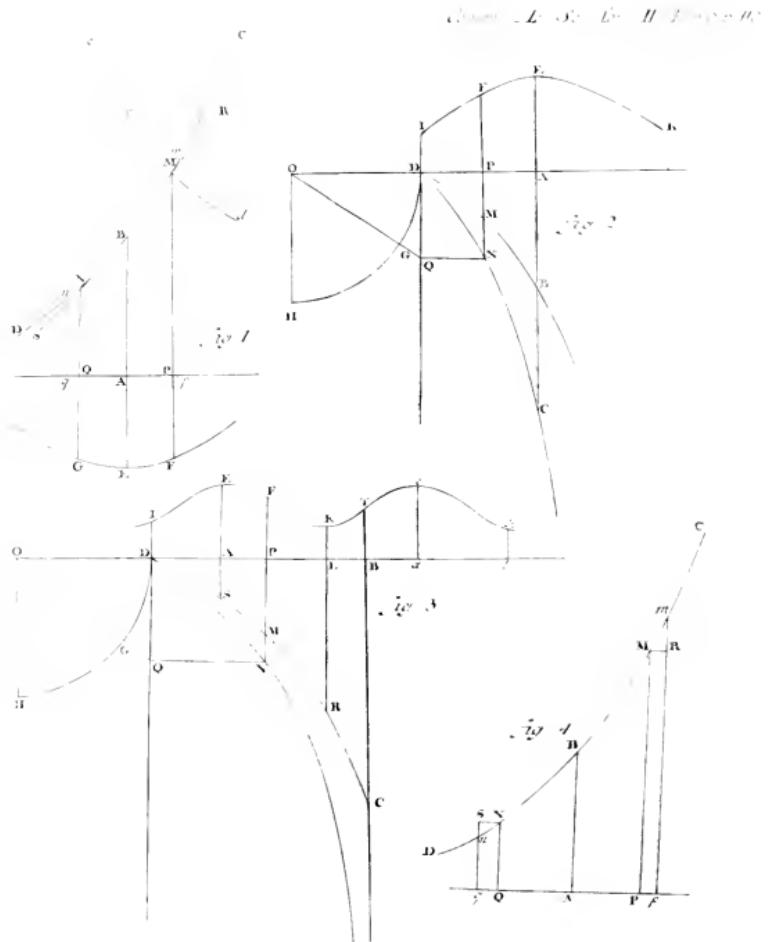
$$D_{\gamma,\beta}^{\gamma,\beta}B$$

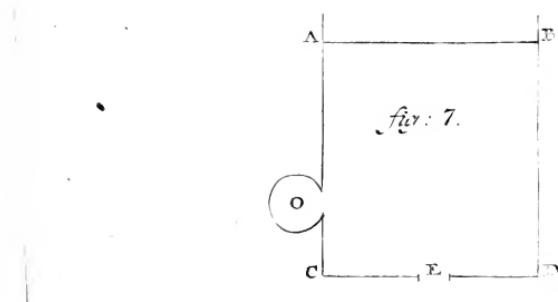
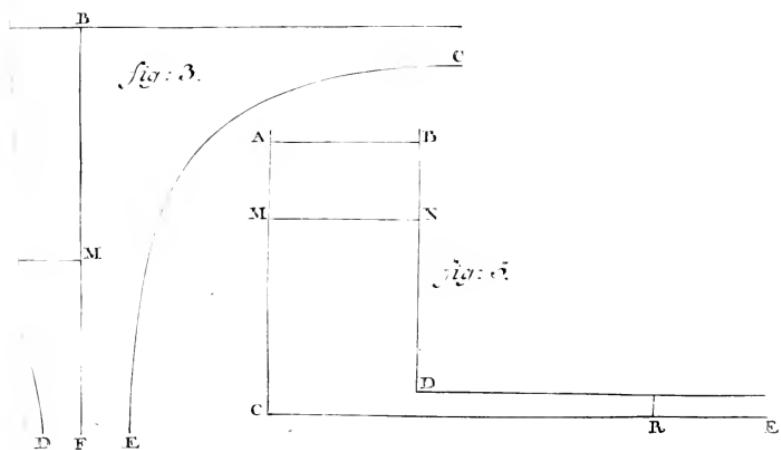
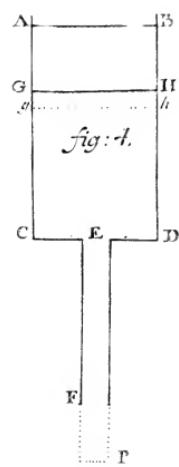
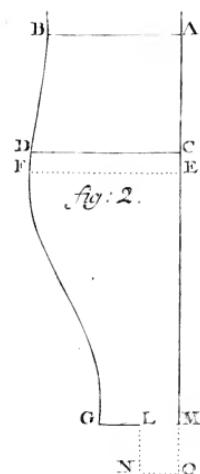
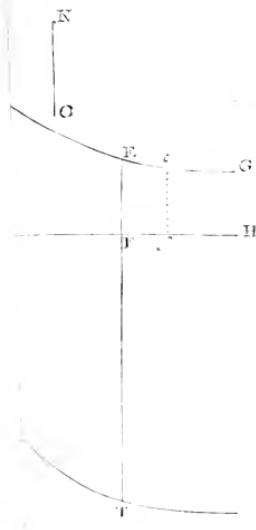
$$x\in \mathbb{R}^n$$

$$i\partial_x A$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_n)=\mathbf{z}_1+\cdots+\mathbf{z}_n=\mathbf{0} \in \mathbf{k}$$

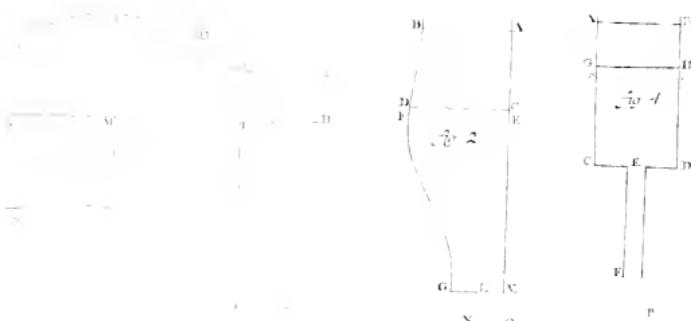




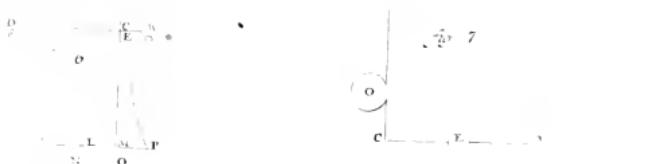


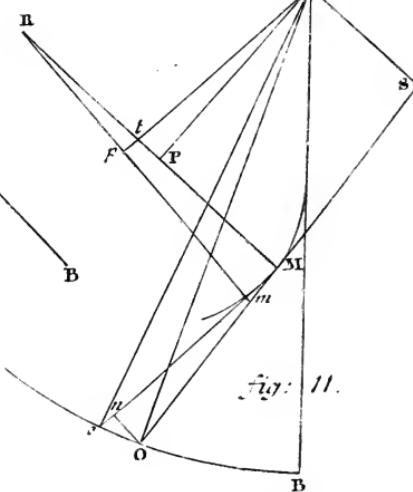
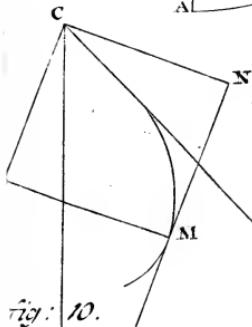
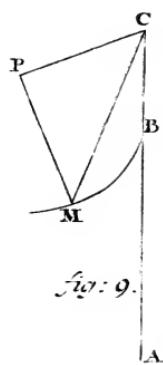
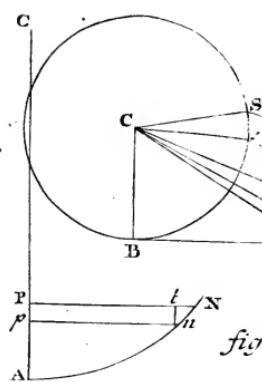
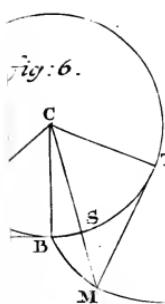
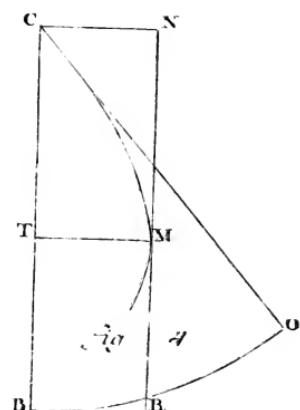
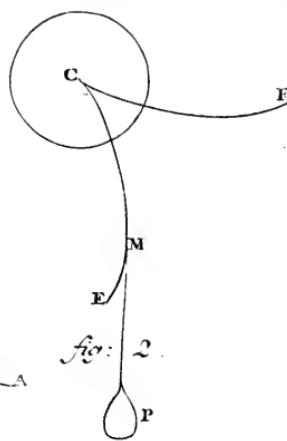
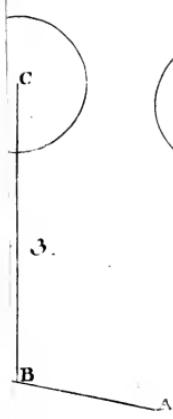
2. The Second Stage of Migration

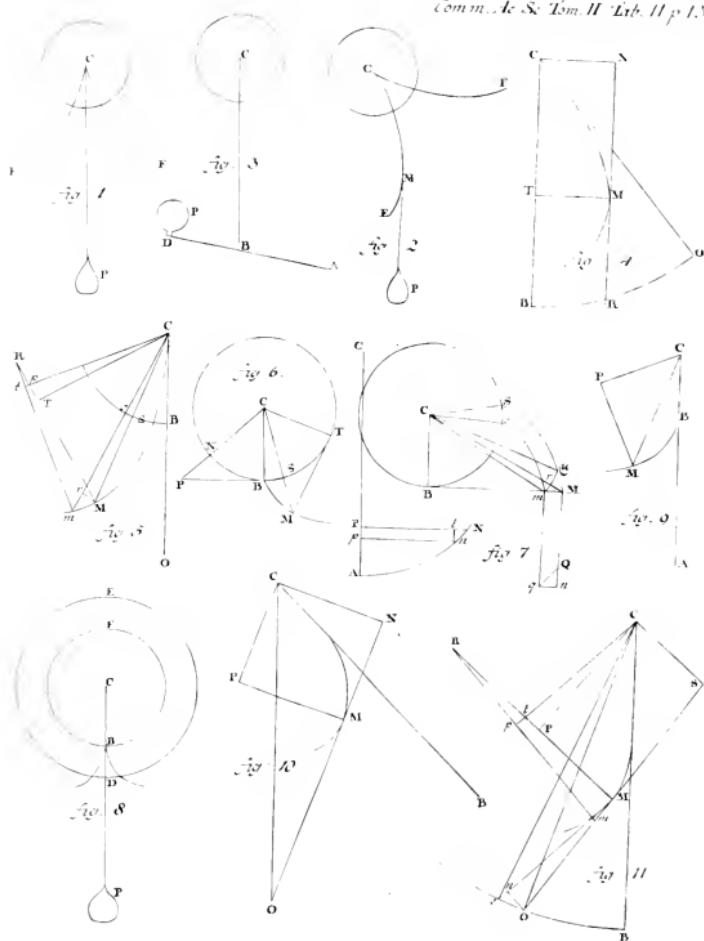
1



1







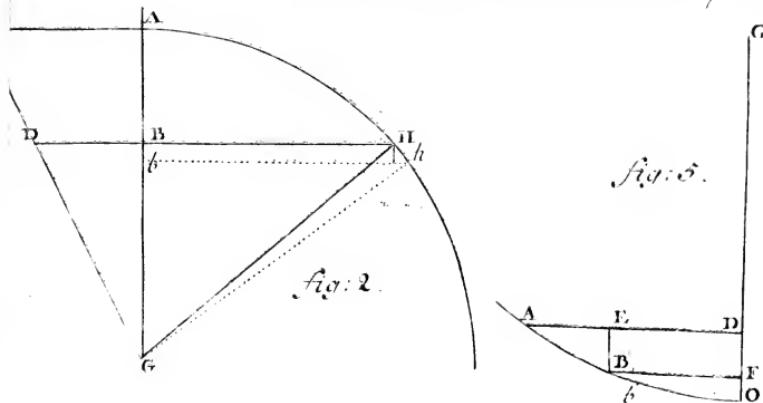


fig: 5.

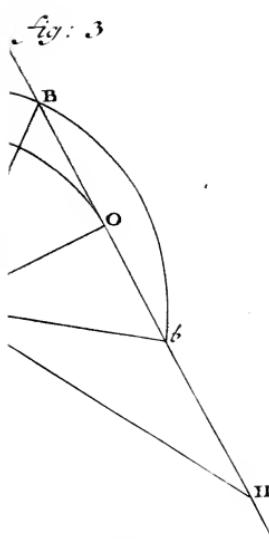
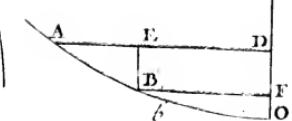


fig: 3

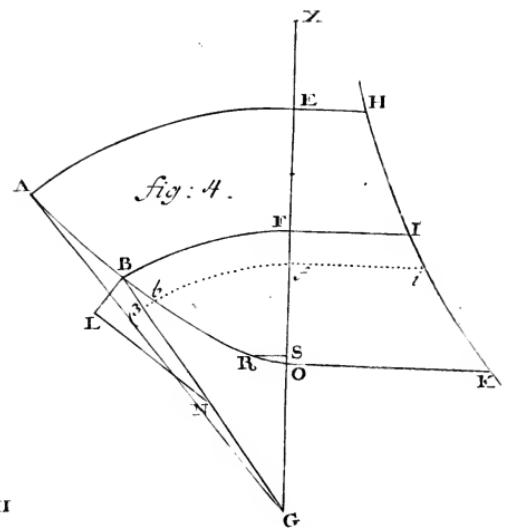


fig: 4.

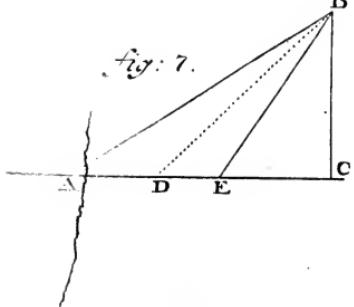
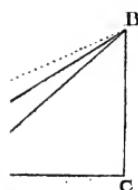
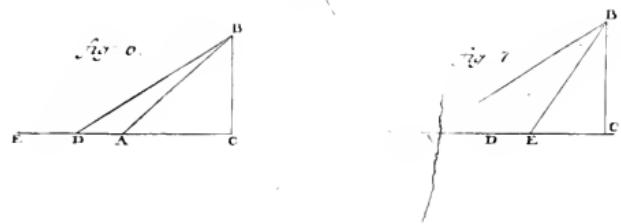
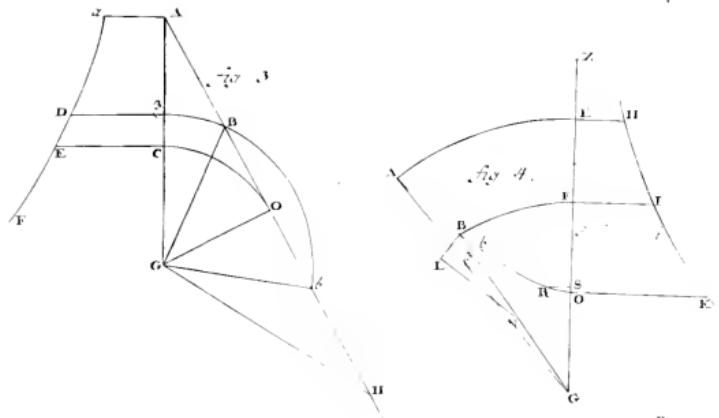
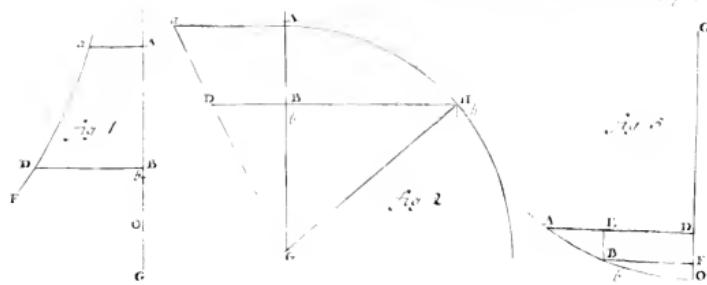


fig: 7.



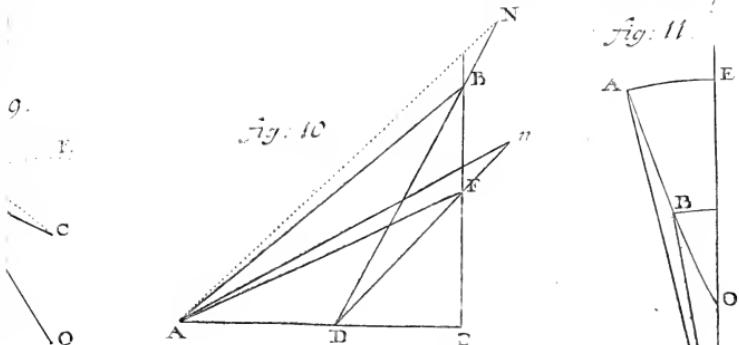


Fig: 11.

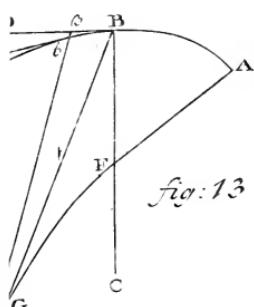


Fig: 13.

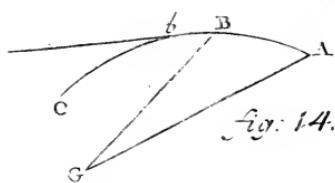


Fig: 14.

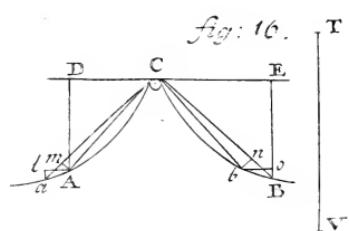


Fig: 16.

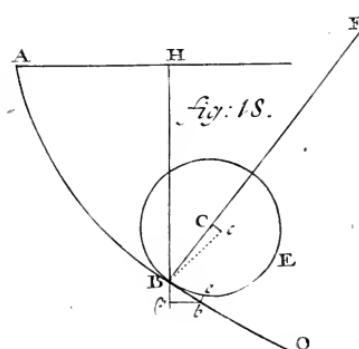
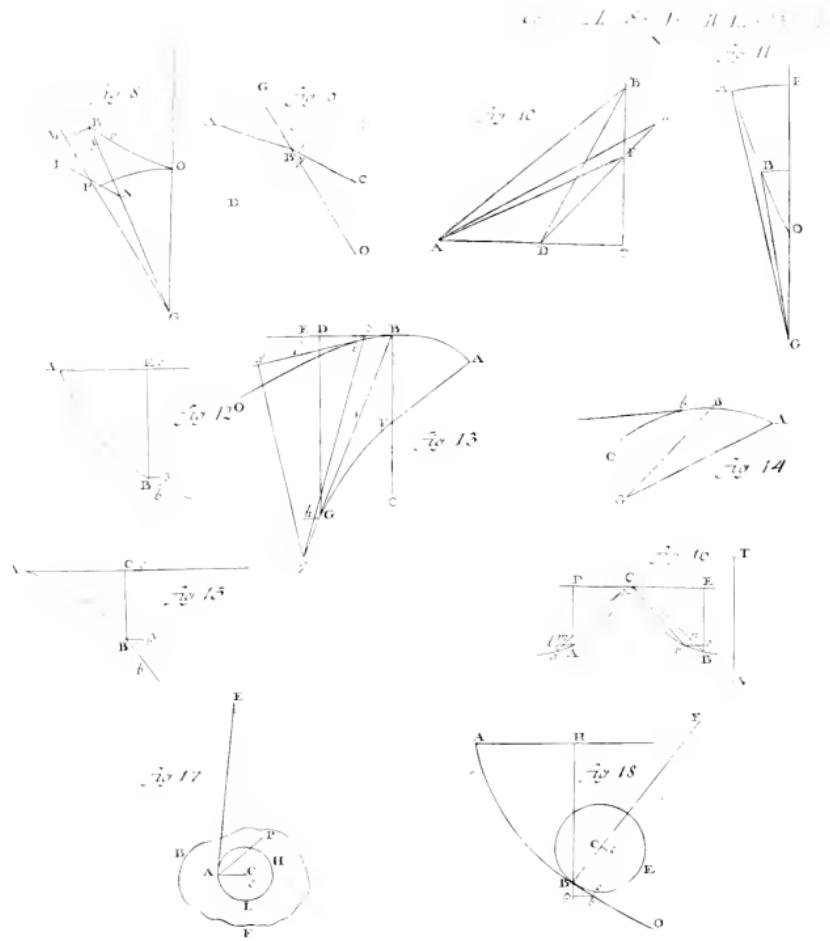


Fig: 18.



Comm. Ac. Sc. Tom. II Tab. 14 p. 173

Fig: 3

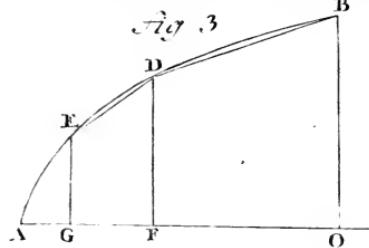


Fig: 4

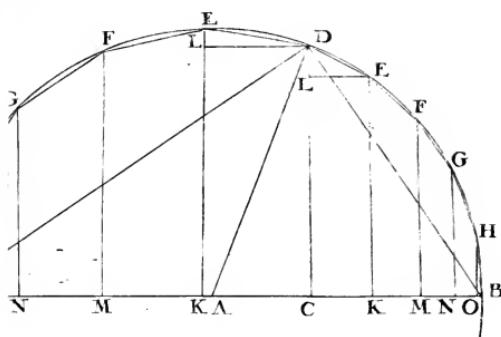


Fig: 4

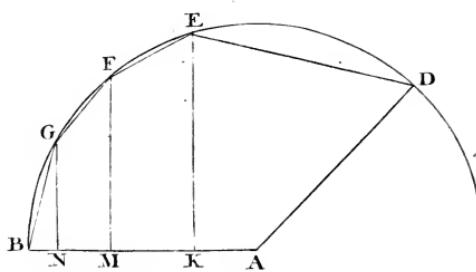
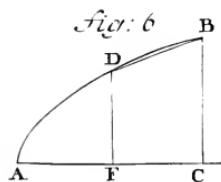
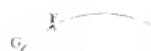


Fig: 6



Cover Ic Sc Iom H Txb U U P P

Fig. 2



Hf L



Fig. 3

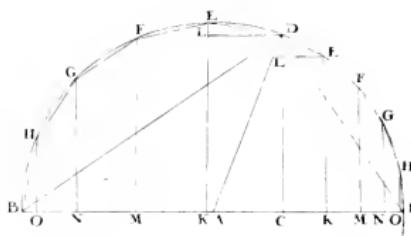
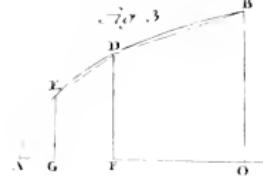


Fig. 4

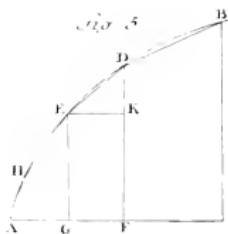


Fig. 4

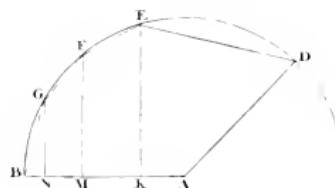
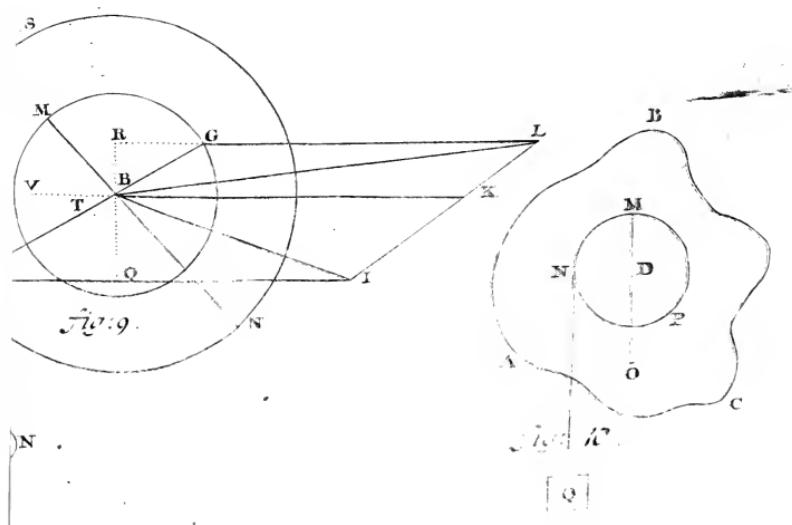
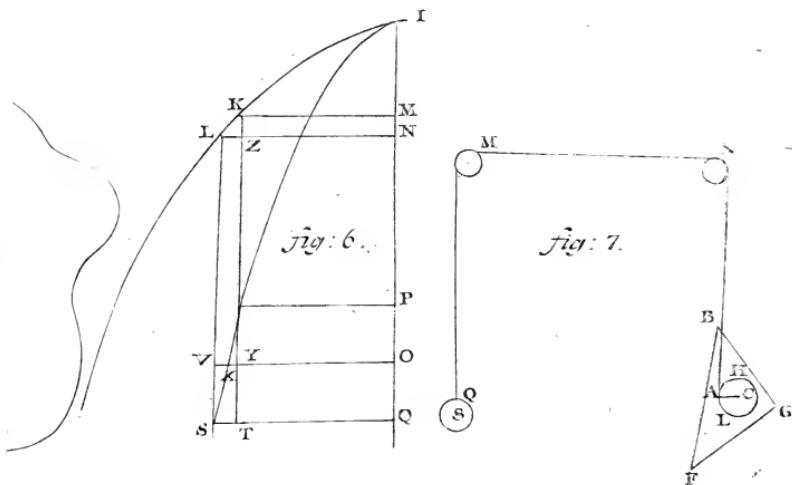
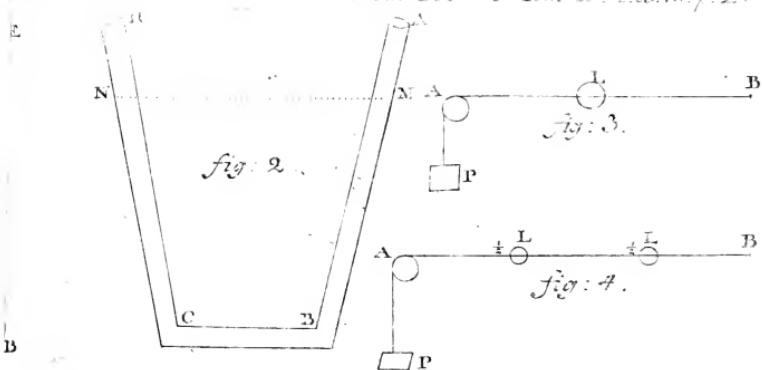
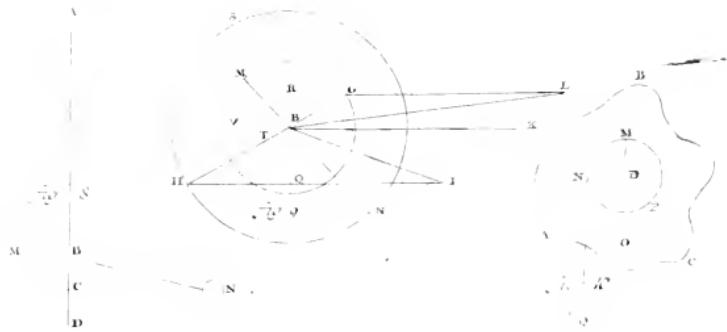
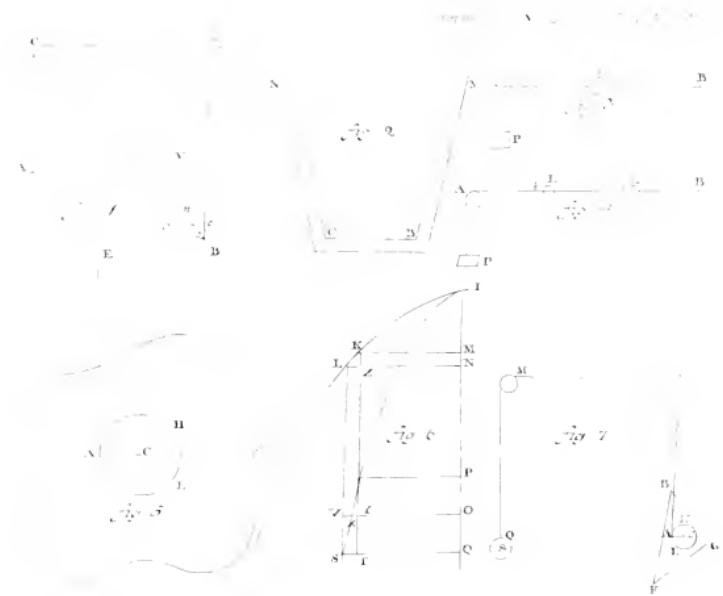


Fig. 6







B

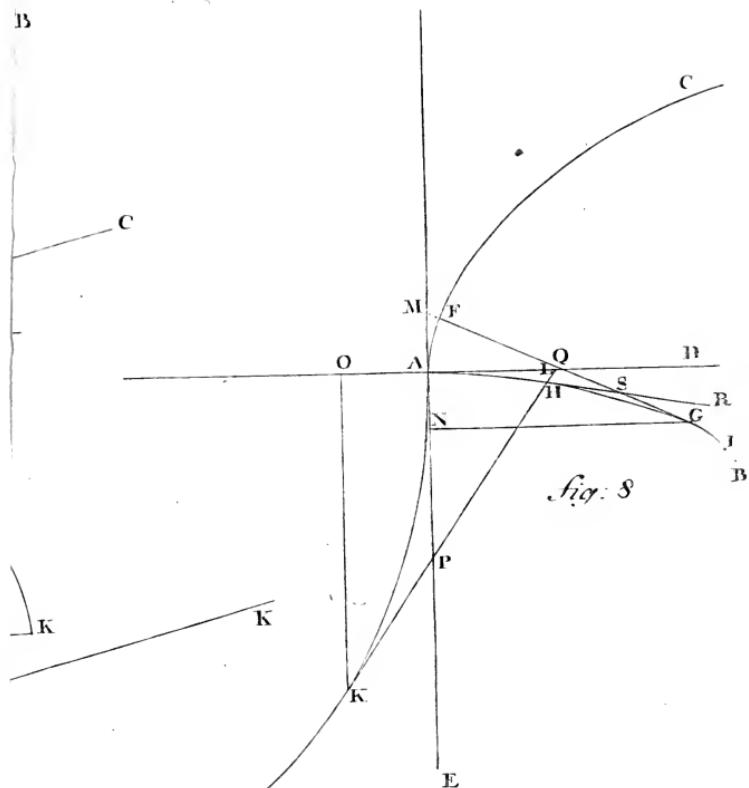


fig: 8

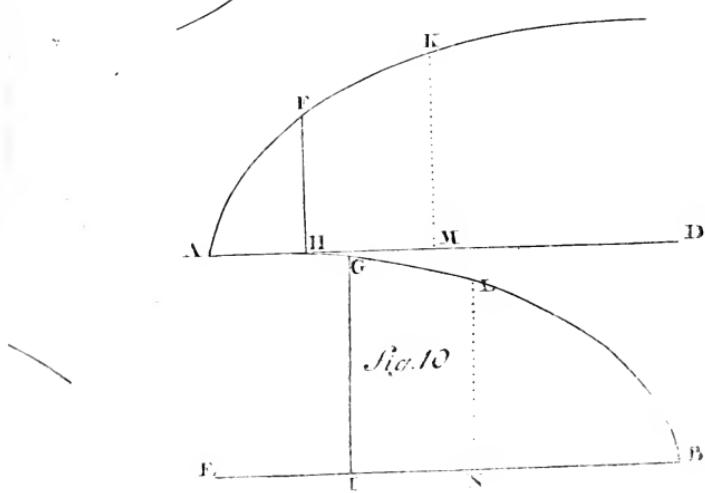
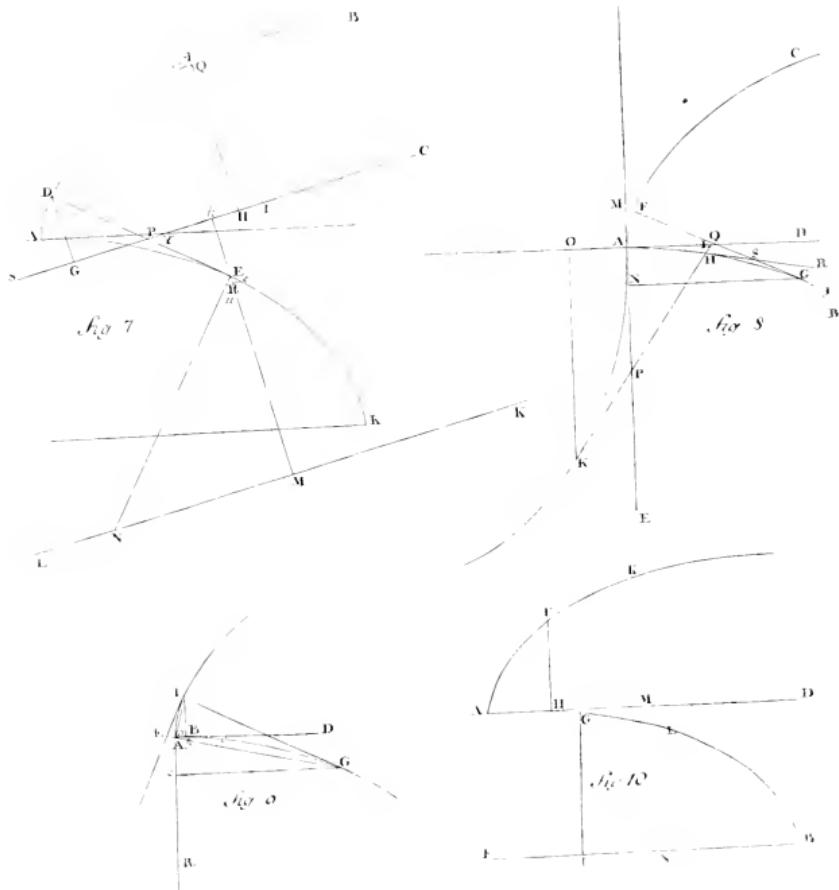
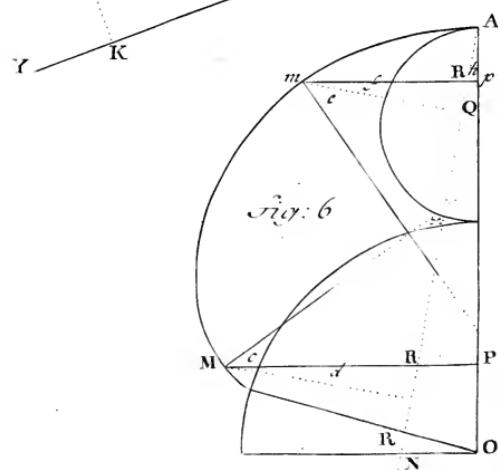
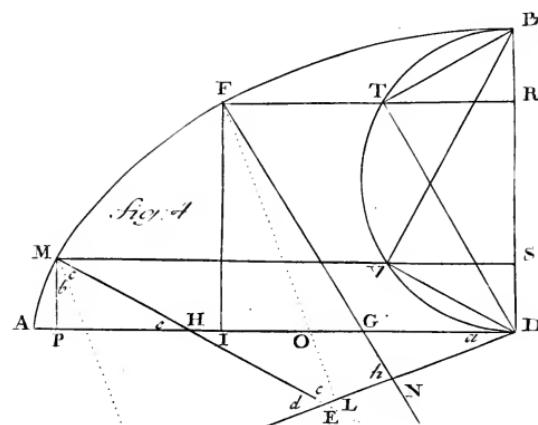
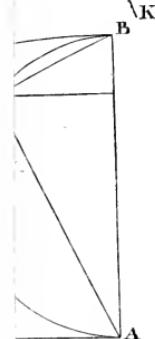
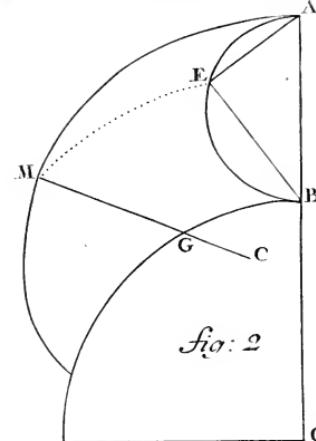
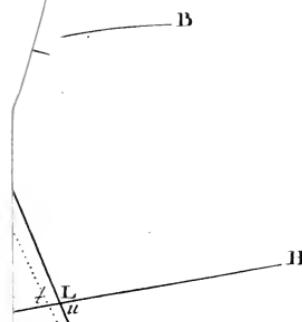
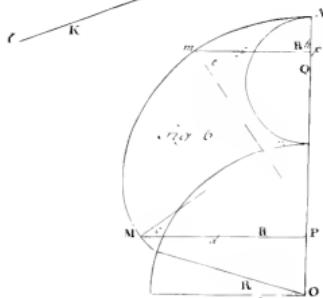
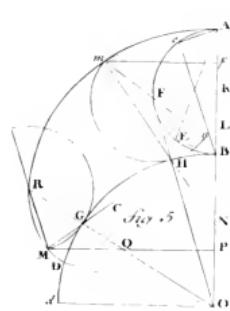
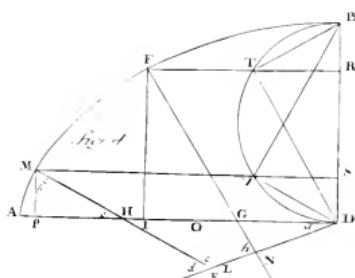
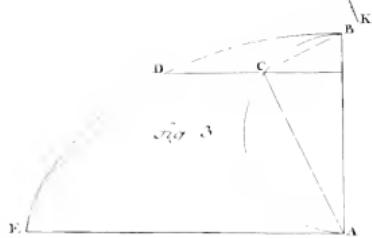
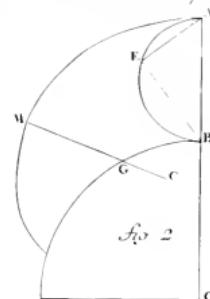
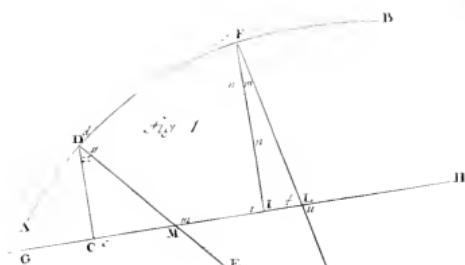
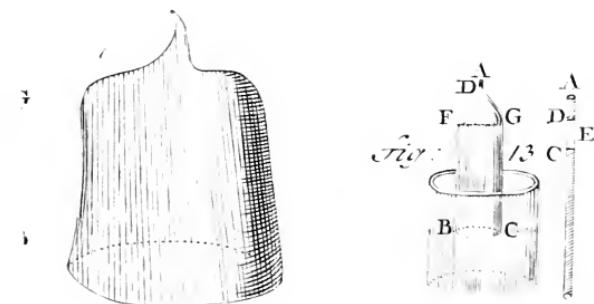
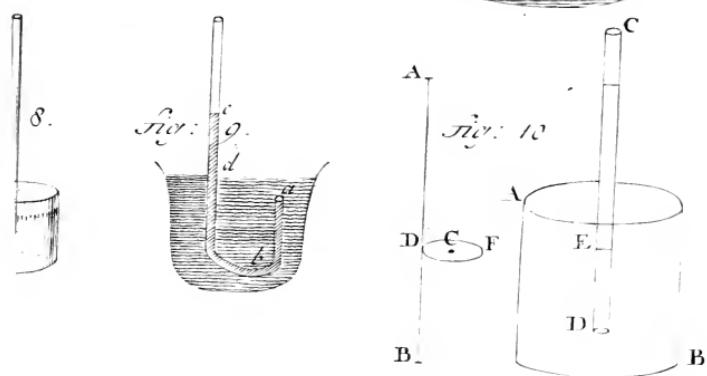
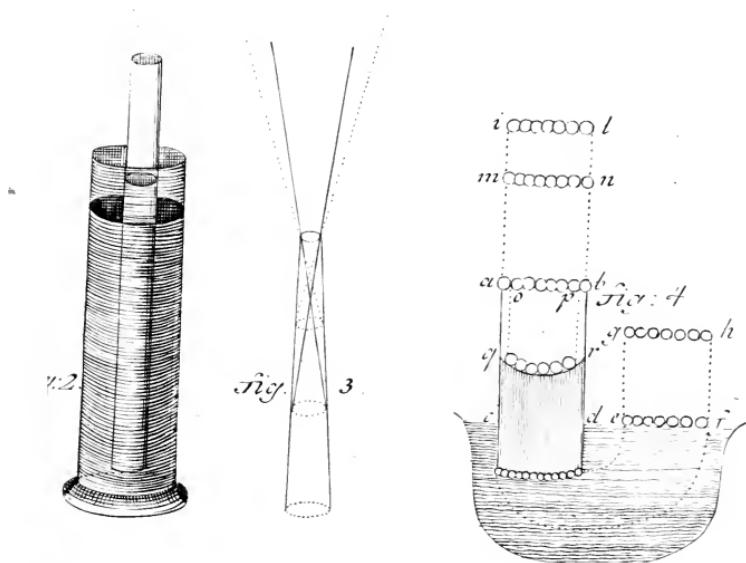


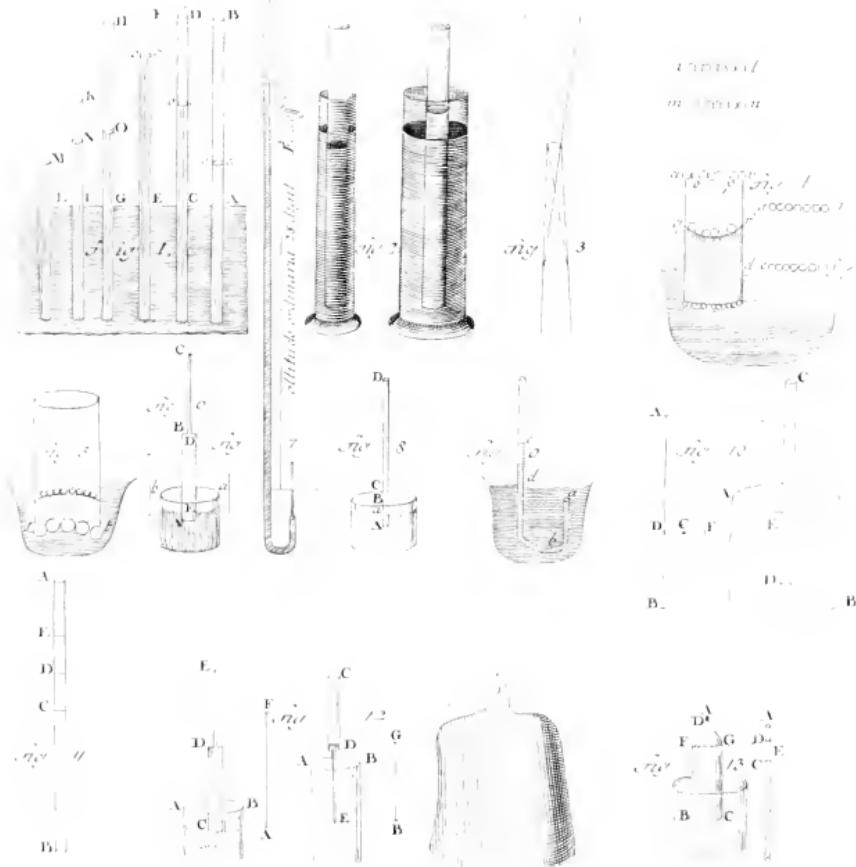
fig: 10

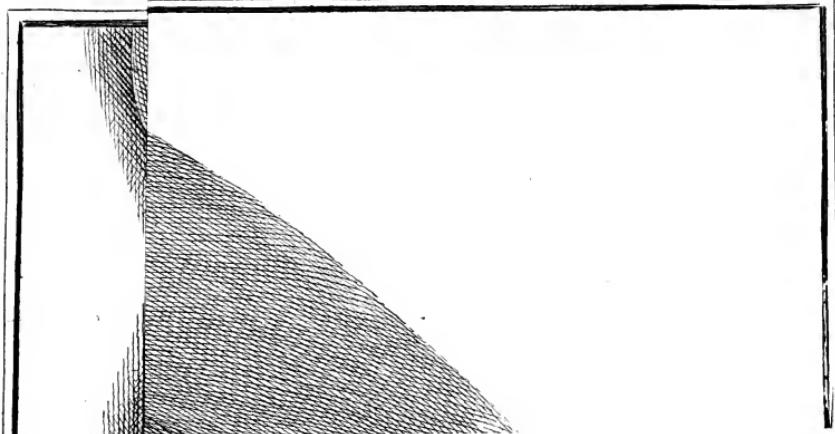




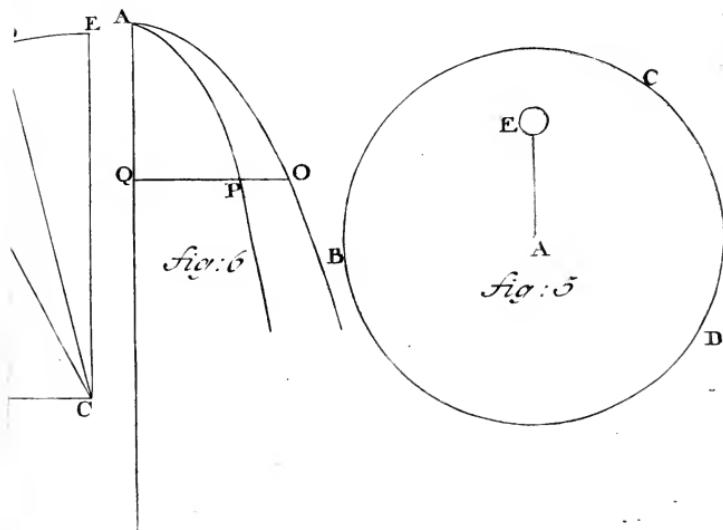
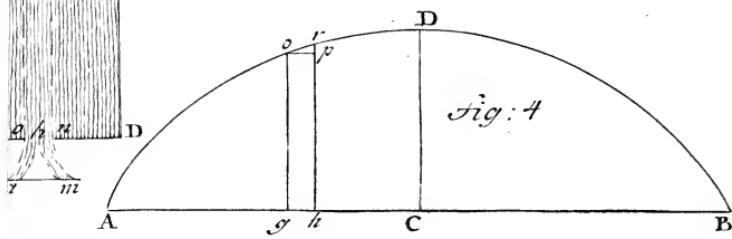
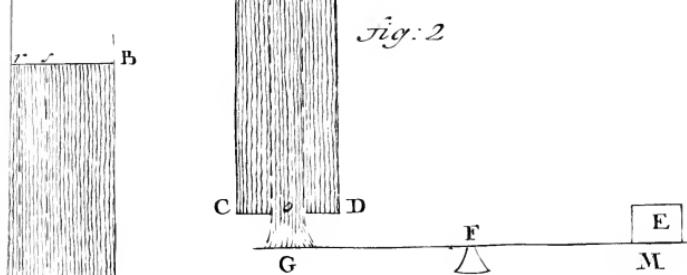
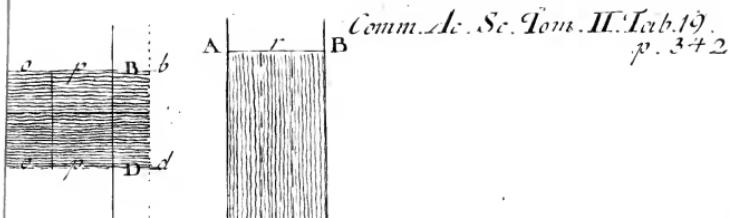




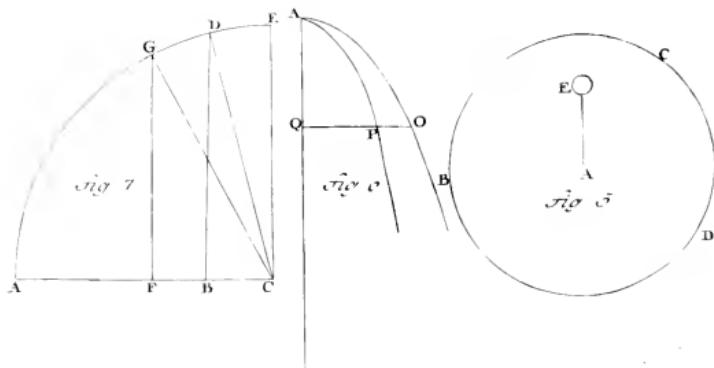
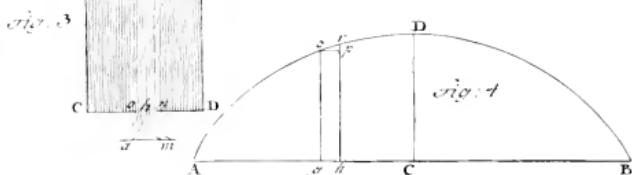
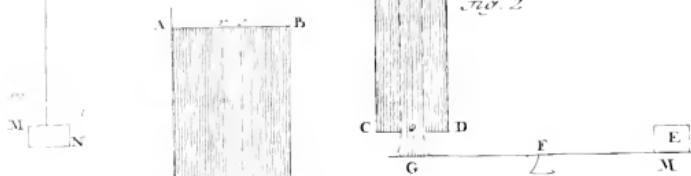
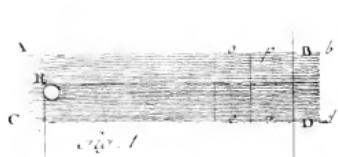


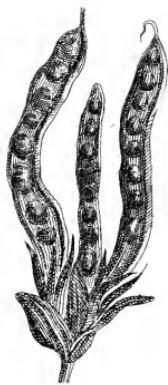






Comm. I. Sc. Quatuor Fabijan.











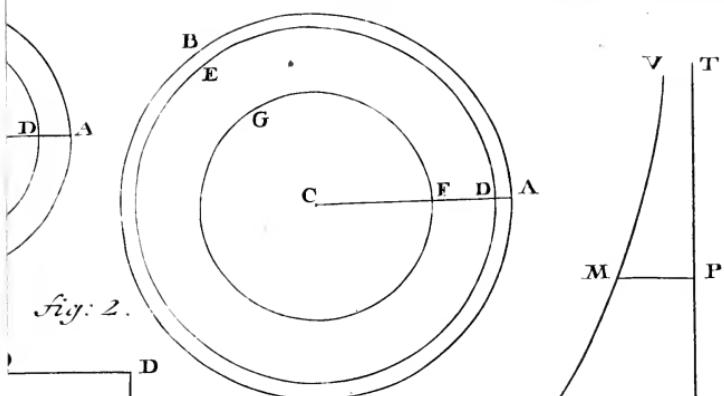


Fig: 2.

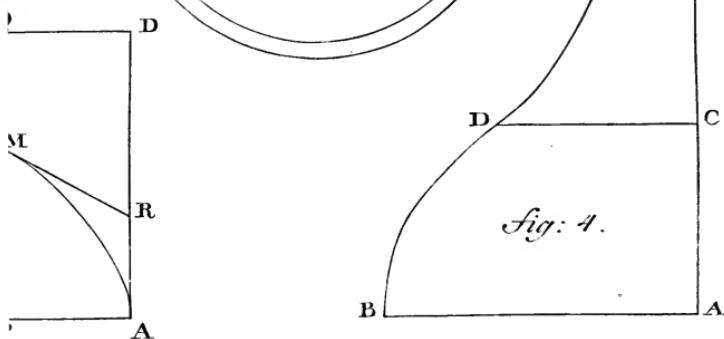


Fig: 4.

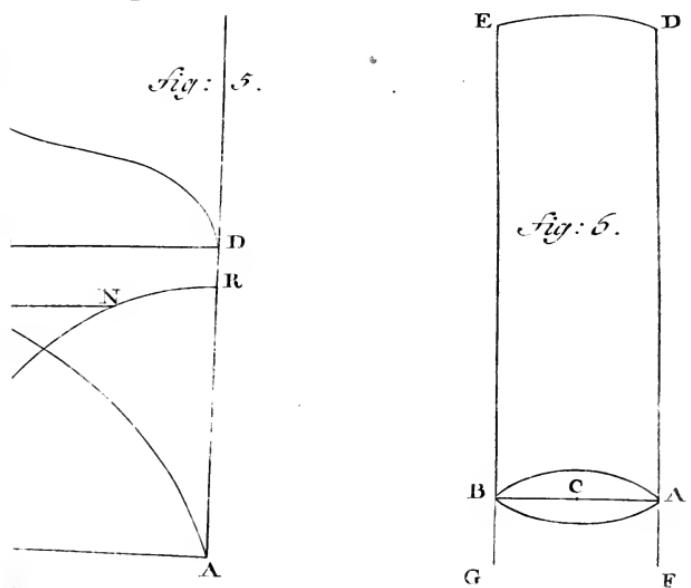


Fig: 5.

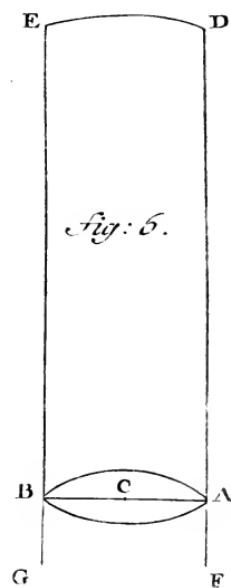


Fig: 6.

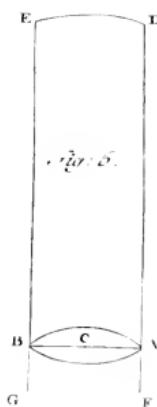
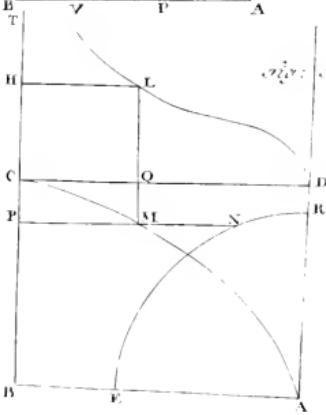
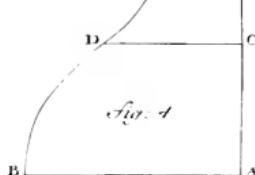
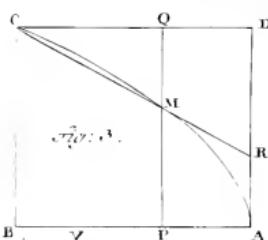
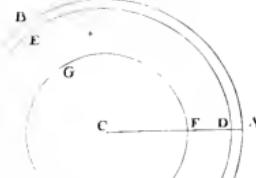
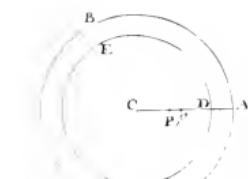




Fig: 2.

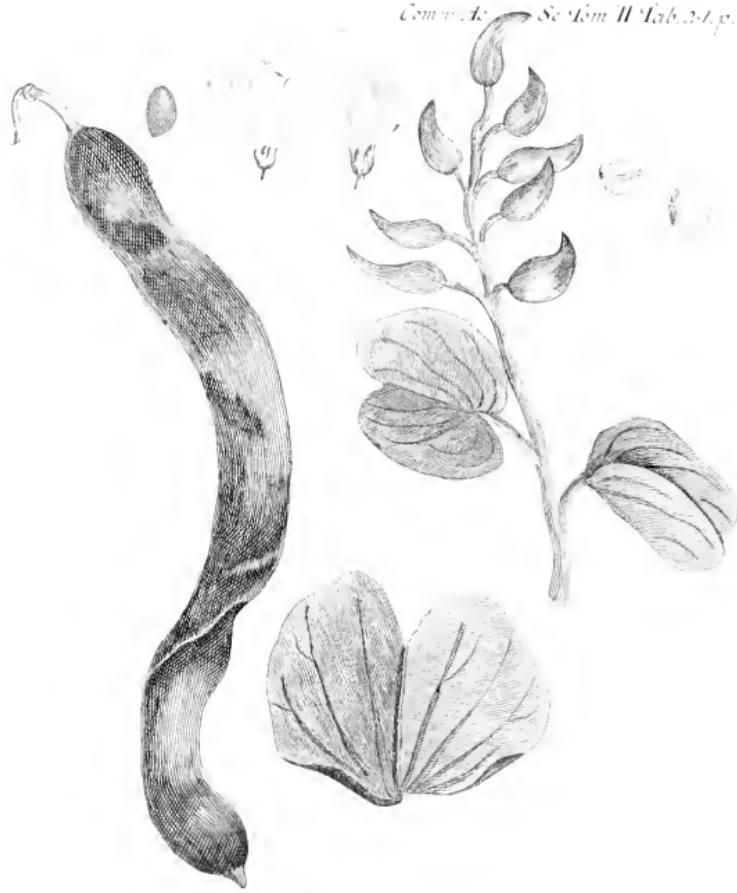


Fig: 3.

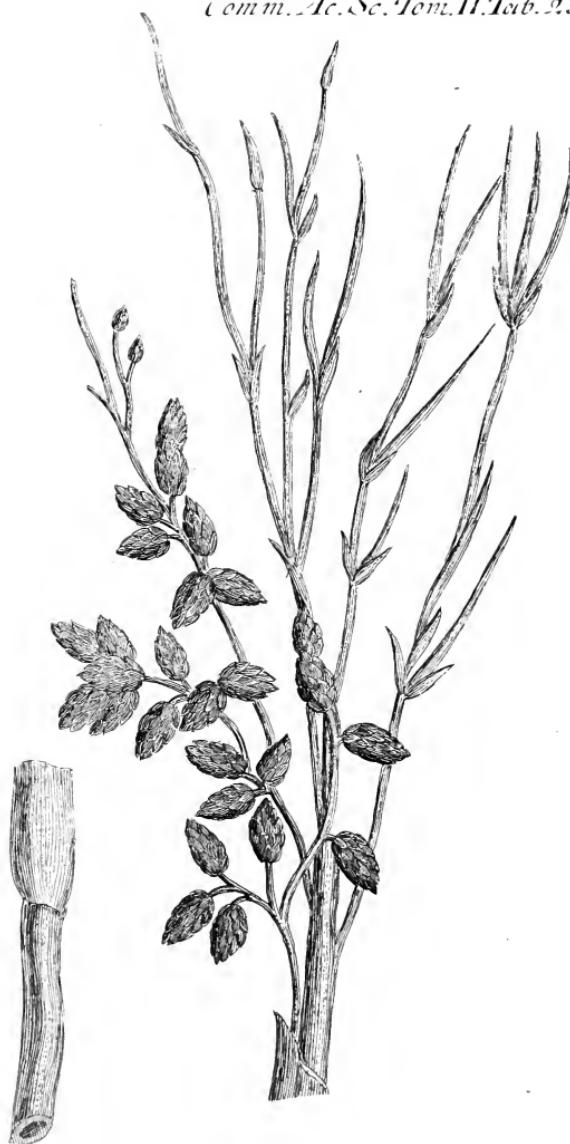


Comm. Ac. Sc Tom. II. Tab. 24. p. 370.





Comm. Ac. Sc. Tom. II. Tab. 25. p. 370.





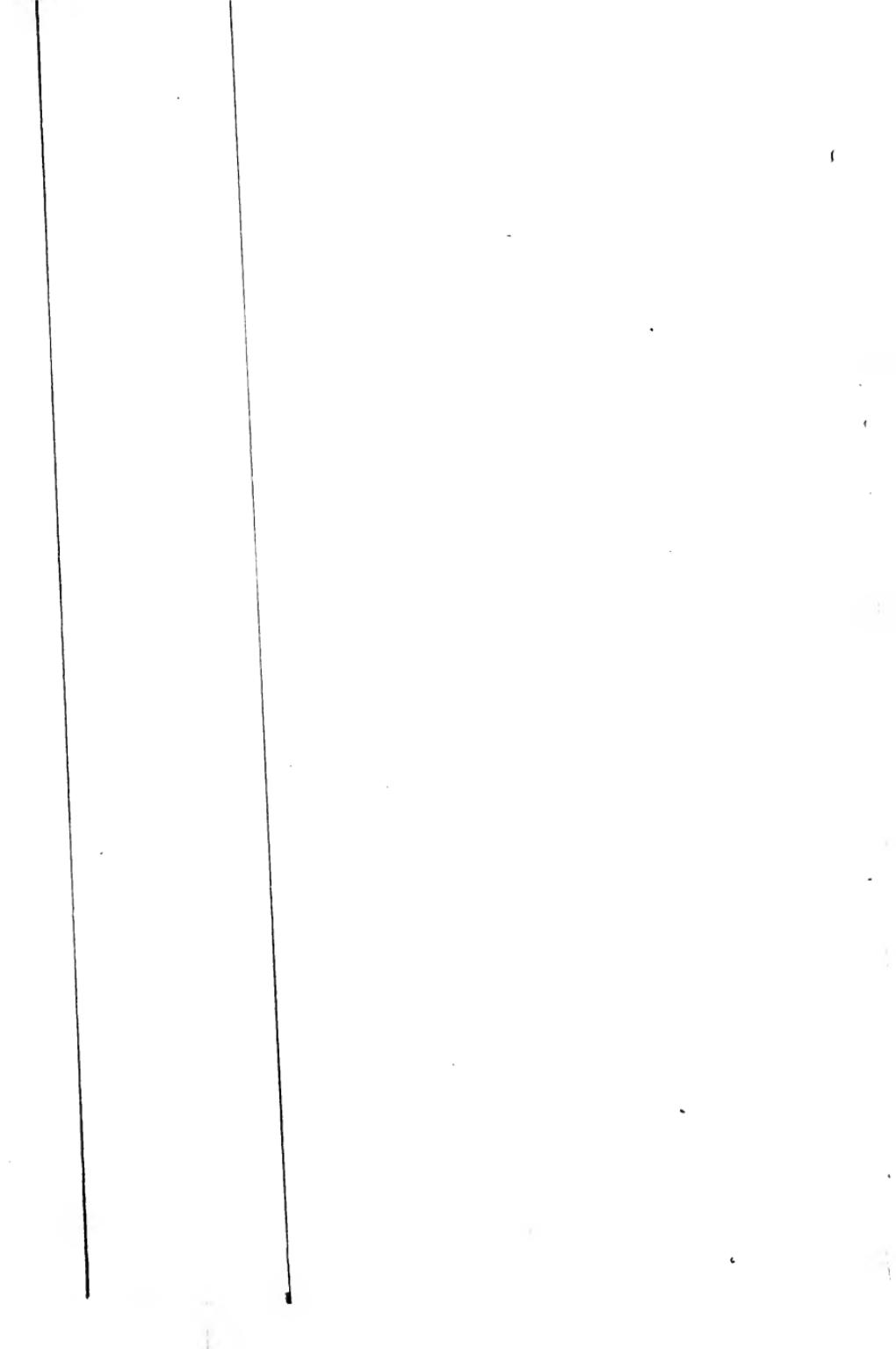


FIG. I

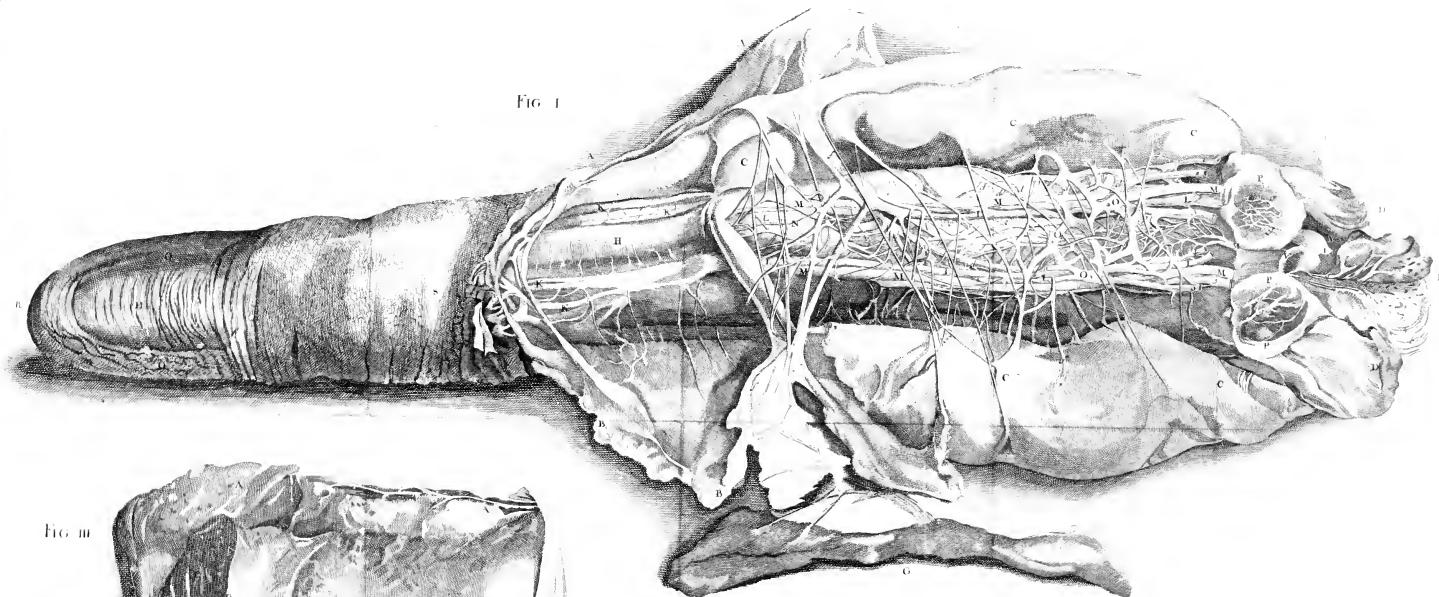


FIG. II

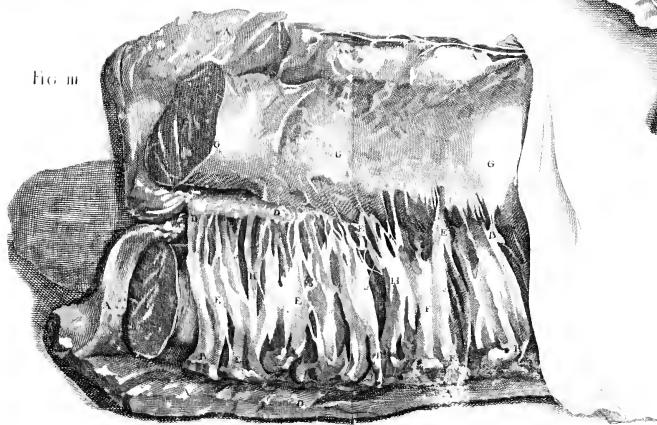
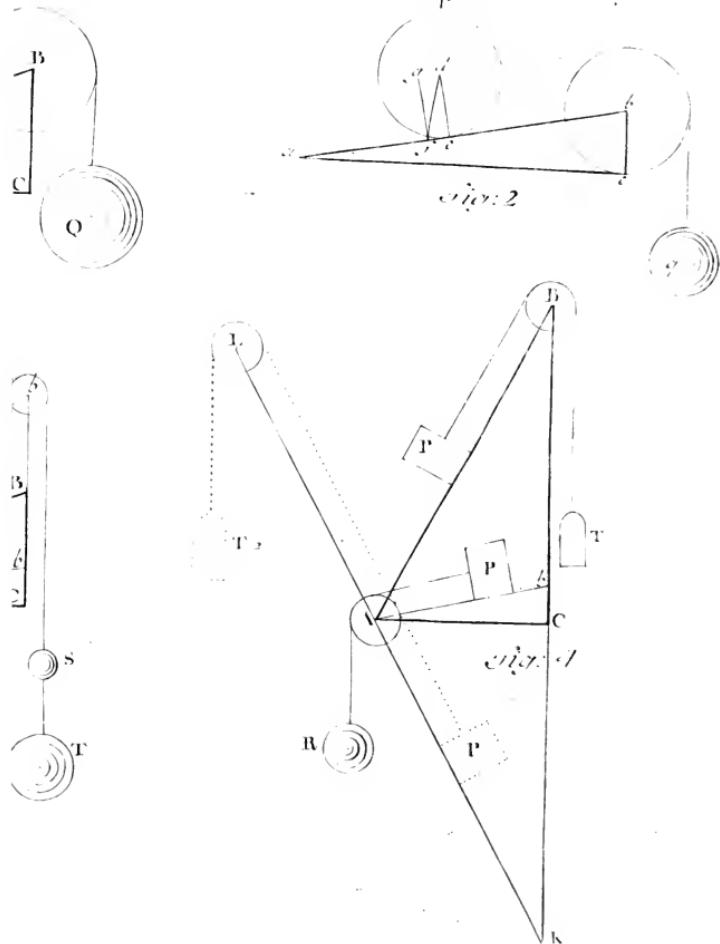


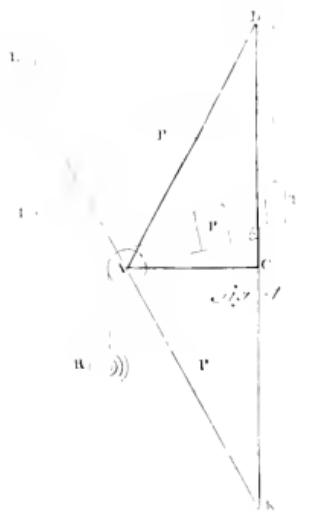
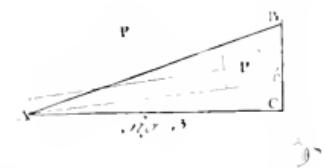
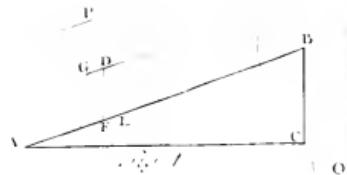
FIG. III



Comm. Ac. Sc. Acad. II. Lib. 27, p. 444.

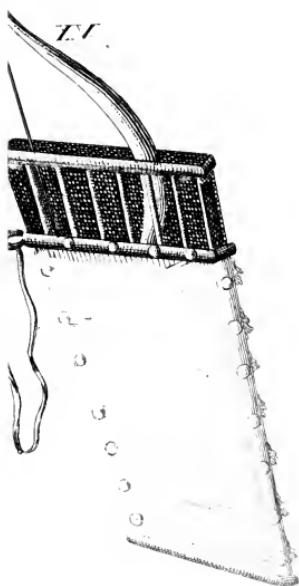
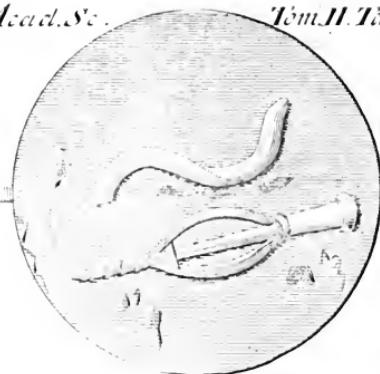


$$\text{Comm} = L \cdot S \cdot Z \cdot H \cdot T + \gamma \cdot \tau \cdot M$$

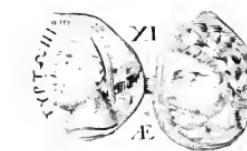




I

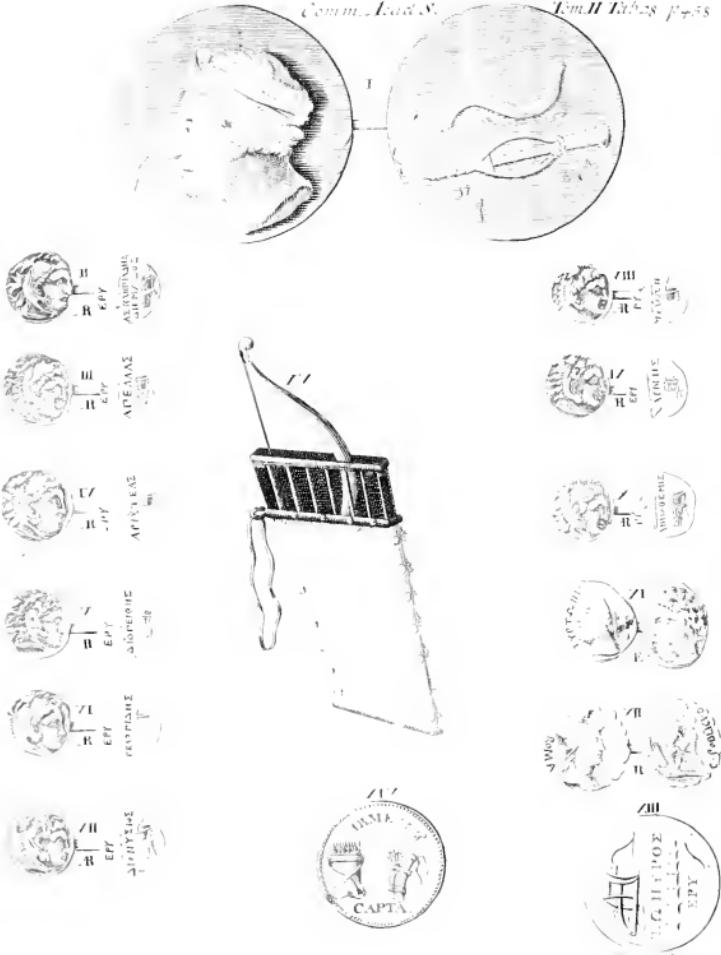


ZV.

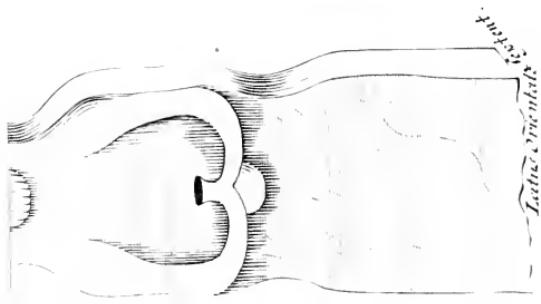
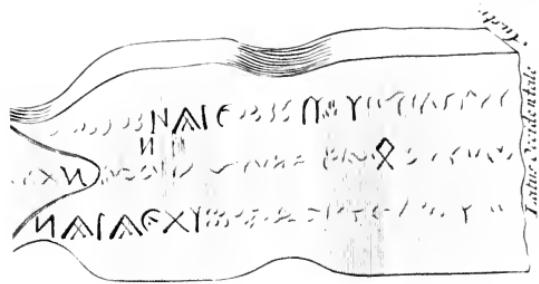


ZIV.





R S E T F D G C



33421-YY46>1-X1V1R1C2S









AMNH LIBRARY



100127241